

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA,
ELECTRÓNICA, DE COMPUTADORES Y DE SISTEMAS

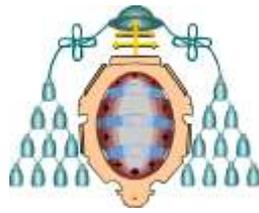
TESIS DOCTORAL

**Técnicas de Descomposición de Dominios con
Ecuación Integral para el Análisis Eficiente de
Problemas Electromagnéticos**

Autor:
Jaime Laviada Martínez

Directores:
Fernando Las Heras Andrés
Marcos Rodríguez Pino

Abril de 2010



Reservados todos los derechos
© El autor

Edita: Universidad de Oviedo,
Biblioteca Universitaria, 2010
Colección Tesis Doctoral-TDR nº 71
ISBN 978-84-693-4918-2
D.L.: AS.00967-2010

Capítulo 5

Análisis de problemas de radiación y dispersión con ondas esféricas características

5.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos visto como el CBFM y su aplicación recursiva nos permiten reducir el número de incógnitas en el análisis de problemas electromagnéticos. Por este motivo resulta de interés comprobar si la metodología empleada es extensible a otros ámbitos. De este modo, el principal objetivo que se acometerá en este capítulo consiste en extender la metodología del CBFM a otros contextos. En particular se extenderá al caso de análisis con ondas esféricas. Se ha elegido este contexto porque, como se mostrará más adelante, la sola aplicación de ondas esféricas para modelar el acoplo entre secciones produce típicamente una considerable reducción de incógnitas. Por tanto, resulta especialmente atractivo comprobar si es posible reducir aún más el número de grados de libertad en estos casos.

El método así desarrollado se aplicará al análisis de agrupaciones de dispersores y de antenas. Este último caso resulta especialmente desafiante puesto que el correcto modelado del acoplo entre elementos juega un papel crucial en el diseño de estas estructuras. Es importante destacar que este capítulo está tan sólo enfocado al estudio de la tasa de compresión mediante la técnica que se desarrollará en las posteriores secciones. De esta forma, queda pendiente para futuras investigaciones la reducción del tiempo computacional mediante el cálculo rápido del acoplo entre elementos.

Este capítulo está estructurado de la siguiente forma. En primer lugar, se revisan los principales usos que se han dado al análisis con ondas esféricas con el objetivo de familiarizar al lector con varios de los conceptos que se utilizarán a lo largo del capítulo. A continuación, se desarrolla el análisis de problemas de radiación y dispersión mediante ondas esféricas para posteriormente aplicar a esta metodología las ideas extraídas del CBFM. Finalmente, se analiza la tasa de compresión de varias geometrías canónicas así como varios problemas de dispersión y radiación.

5.2 Antecedentes de análisis de problemas electro-magnéticos con ondas esféricas

Uno de las opciones más atractivas que presenta el uso de ondas esféricas, es la posibilidad de definir matrices de dispersión. Aunque estas matrices serán descritas en profundidad en secciones posteriores, se adelantará aquí que dichas matrices nos permiten una representación total y muy compacta de un dispersor, permitiendo obtener el campo emitido por el mismo como consecuencia de cualquier campo incidente.

Entre los usos más típicos y antiguos de las expansiones en ondas esféricas se encuentra el análisis de esferas conductoras o dieléctricas [Bru71; Ham90]. Este uso se encuentra motivado por el hecho de que muchos de los cálculos pueden ser llevados a cabo de forma analítica. No obstante, el uso más típico de estas expansiones encuentra su nicho dentro de las métricas en cámara anecoica [Han88], especialmente en su aplicación para transformaciones de campo cercano a campo lejano.

Recientemente, se han utilizado estas expansiones para modelar el acoplo entre los diversos elementos de ciertos tipos de agrupaciones [Rub05]. En dicho trabajo, se descompone la geometría en varios *dominios*, los cuales se corresponden con los elementos de la agrupación. Estos dominios son *conectados mediante ondas esféricas*. Con esta estrategia, se logra una reducción notable del coste computacional debido al pequeño número de incógnitas con respecto al que se obtendrían si se analizase la estructura con todos los elementos a la vez. Esta técnica tiene muchos puntos en común con la estrategia que se expondrá en este capítulo. No obstante, varios aspectos de la formulación de partida difieren debido a que [Rub05] se apoya en el método de elementos finitos mientras que aquí se utilizará el método de los momentos.

Un trabajo especialmente reseñable dentro del análisis de problemas electro-magnéticos con ondas esféricas fue realizado por Chew a finales de los años ochenta [Che90; Che89]. Dicho trabajo estaba orientado al análisis de problemas de disper-

Tabla 5.1: Complejidades de los algoritmos recursivos para múltiples dispersores.

	RTMA	RATMA
Tiempo	$\mathcal{O}(MN_{SWE}^3 + M^2N_{SWE}^2P)$	$\mathcal{O}(MN_{SWE}^3 + MN_{SWE}P^2)$
Memoria	$\mathcal{O}(MNP)$	$\mathcal{O}(P^2)$

sión involucrando múltiples objetos. Con este fin, se agregan de forma recursiva las matrices de dispersión de forma que cada vez que se añade un nuevo objeto, todas las matrices se actualizan para tener en cuenta el acoplo con dicho elemento. Esta estrategia es conocida como *Recursive T-Matrix Algorithm* (RTMA) o también como *Recursive Aggregate T-Matrix Algorithm* (RATMA) cuando se introducen unas ligeras modificaciones en el cómputo de las matrices de dispersión agregadas.

La complejidad de los algoritmos RTMA y RATMA queda recogida en la tabla 5.1, donde N_{SWE} es el número de armónicos para caracterizar cada cuerpo, M es el número de dispersores y P es el número de armónicos usados en la expansión en armónicos esféricos respecto al origen. En el caso más general (agregación de cuerpos en agrupaciones tridimensionales, ver [Gür93]) se tiene que $P \propto M^{2/3}$.

Aunque estos algoritmos presentan una baja complejidad, tienen una serie de desventajas, algunas de las cuales han sido solventadas con el paso de los años pero otras todavía se encuentran sin solución:

- *Problemas de radiación:* Los algoritmos RTMA y RATMA tan sólo se han aplicado a problemas de dispersión por lo que no está claro su posible uso a problemas de radiación (p. ej.: el análisis de agrupaciones de antenas).
- *Complejidad para agrupaciones colineales:* en el caso de que los elementos a analizar se encuentren alineados a lo largo de un mismo eje, tenemos que $P \propto M$ y, por tanto, la complejidad de los algoritmos es igual o superior a la del MoM.
- *Dependencia con la distancia al origen:* estos algoritmos deben realizar varias expansiones en ondas esféricas donde el orden de truncamiento depende de la distancia de los dispersores al origen. De este modo, armónicos de órdenes muy altos pueden estar involucrados incluso cuando el número de dispersores es relativamente bajo. El uso de armónicos de órdenes muy altos típicamente resulta en inestabilidades debido a las rápidas variaciones del campo. Este hecho es especialmente crítico en el caso de problemas donde los dispersores están muy alejados entre ellos.
- *Aplicaciones en tres dimensiones:* salvo unas pocas excepciones [Gür92; Gür93] donde los algoritmos se han utilizado para agrupaciones bidimensionales de parches, no existe documentación más allá del caso bidimensional.

Tabla 5.2: Tipo de modos esféricos.

c	Tipo de modo
1	Estacionario acotado en el origen
2	Estacionario no acotado en el origen
3	Propagativo hacia el interior
4	Propagativo hacia el exterior

- *Restricciones en la disposición de los elementos:* si los elementos están equidistantes respecto al origen, la formulación presentada viola el teorema de adición. Este problema ha sido observado y resuelto en [Che92], sin embargo la extensión a un caso tridimensional tampoco se ha contemplado.
- *Inestabilidades en la recursión:* la agregación recursiva de las matrices resulta en una serie de inestabilidades que afectan principalmente al cálculo del campo cercano. Este problema ha sido observado y solventado para el caso bidimensional en [S98], aunque su extensión al caso tridimensional no ha sido clarificada.

Por tanto, aunque los algoritmos basados en matrices T tienen una muy baja complejidad, la cual les hace muy atractivos, las fuertes restricciones que plantean para algunos tipos de problemas, hacen que sea necesario recurrir a otras formulaciones. Estas formulaciones aunque pueden presentar complejidades mayores, permiten resolver una mayor variedad de problemas y son numéricamente estables.

5.3 Expansión de campos en ondas esféricas

Las ondas esféricas aparecen como soluciones a la ecuación de onda en un medio homogéneo, lineal e isótropo cuando ésta es expresada en coordenadas esféricas para su posterior resolución mediante la estrategia de separación de variables (ver Apéndice C). Utilizando la notación de [Han88] estas soluciones se denotarán por $\mathbf{F}_{smn}^{(c)}$, donde los índices smn indican el número de modo y el superíndice c indica el tipo de modo según se recoge en el Apéndice C, aunque para facilitar la lectura se repite esta clasificación en la tabla 5.2.

Es importante notar que entre los citados modos existen relaciones de dependencia lineal de la forma:

$$\mathbf{F}_{smn}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_{smn}^{(3)} + \mathbf{F}_{smn}^{(4)} \right) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{F}_{smn}^{(2)} = \frac{1}{2j} \left(\mathbf{F}_{smn}^{(3)} - \mathbf{F}_{smn}^{(4)} \right), \quad (5.2)$$

y

$$\mathbf{F}_{smn}^{(3)} = \mathbf{F}_{smn}^{(1)} + j\mathbf{F}_{smn}^{(2)} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}_{smn}^{(4)} = \mathbf{F}_{smn}^{(1)} - j\mathbf{F}_{smn}^{(2)}. \quad (5.4)$$

Por tanto, cualquier campo eléctrico¹ en un punto libre de fuentes puede ser expresado o bien como combinación de modos estacionarios:

$$\mathbf{E} = \sum_{c=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{smn}^{(c)} \mathbf{F}_{smn}^{(c)}, \quad (5.5)$$

o bien como combinación de modos propagativos:

$$\mathbf{E} = \sum_{c=3}^4 \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{smn}^{(c)} \mathbf{F}_{smn}^{(c)}. \quad (5.6)$$

Por comodidad, es habitual expresar los sumatorios anteriores en función de un solo índice:

$$\sum_J = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n, \quad (5.7)$$

donde J puede calcularse a partir de los índices s , n y m mediante la siguiente operación:

$$J = 2 \{n(n+1) + m - 1\} + s. \quad (5.8)$$

5.3.1. Casos especiales de expansión en modos esféricos

Las expresiones (5.5) y (5.6) permiten expresar el campo eléctrico como combinación lineal de dos tipos de modos, bien dos modos propagativos o bien dos modos estacionarios. Sin embargo, existen una serie de casos especiales de gran relevancia para el trabajo que aquí se presenta. En estos casos especiales es posible la expansión del campo eléctrico en un punto libre de fuentes en función de tan sólo un tipo de modo, que según el caso será un modo propagativo o un modo estacionario.

El primero de estos casos lo constituye la evaluación de un campo en el exterior de la esfera mínima que engloba a las fuentes (ver Fig. 5.1). En este caso, el campo puede expresarse utilizando tan solo modos propagativos hacia el exterior ($c = 4$), es decir:

$$\mathbf{E} = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{smn}^{(4)} \mathbf{F}_{smn}^{(4)}. \quad (5.9)$$

El segundo caso especial consiste en la expansión del campo en modos esféricos dentro de una esfera lo suficientemente pequeña como para que no englobe ninguna

¹También es posible expresar el campo magnético de forma análoga.

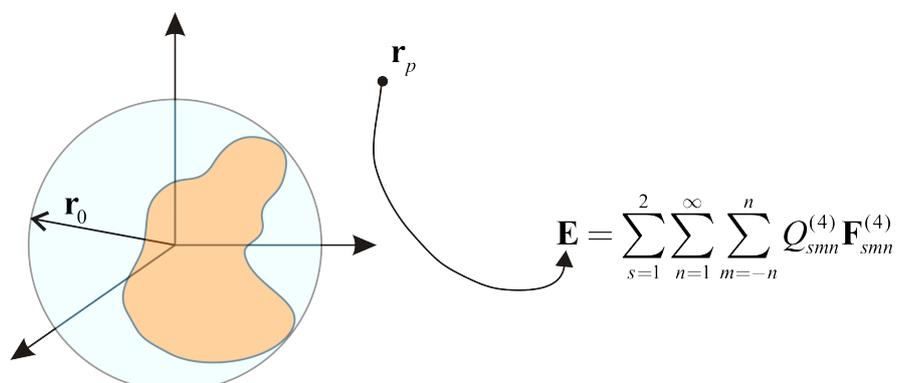


Figura 5.1: Expresión del campo en el exterior de la esfera mínima que engloba las fuentes.

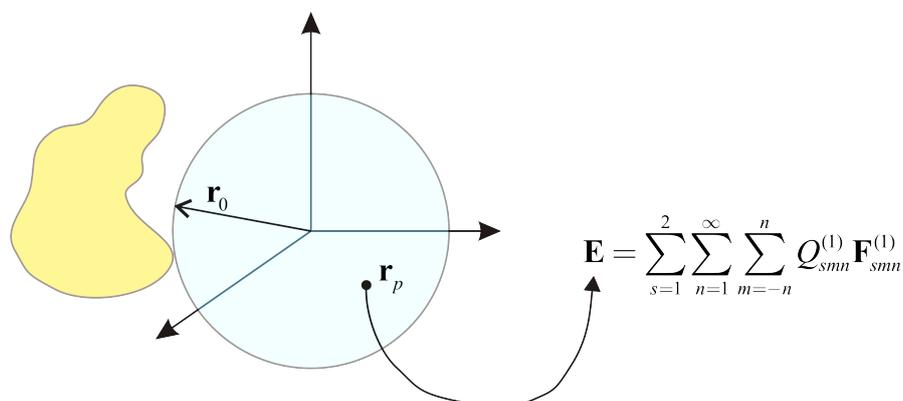


Figura 5.2: Expresión del campo en el interior de una esfera, tal que solo existen fuentes localizadas en el exterior de la misma.

fuente (ver Fig. 5.2). Puesto que el campo debe estar acotado en el origen de la expansión, en caso de utilizar modos estacionarios debemos descartar la existencia de ondas de tipo $c = 2$ pues darían lugar a un campo singular en el origen. Por tanto, el campo para este caso viene dado por:

$$\mathbf{E} = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{smn}^{(1)} \mathbf{F}_{smn}^{(1)}. \quad (5.10)$$

Los casos aquí presentados nos permitirán utilizar simplemente modos de tipo $c = 1$ ó $c = 4$ siempre y cuando se respeten las normas citadas relativas a los puntos de evaluación en función de las esferas mínimas.

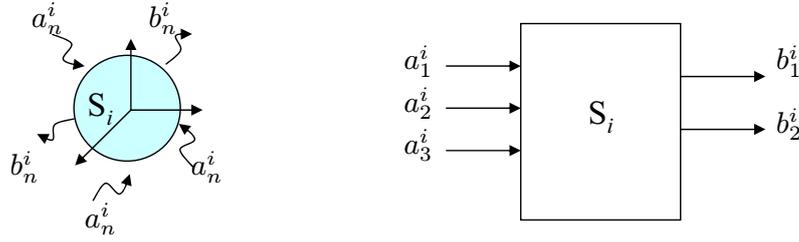


Figura 5.3: Representación de un cuerpo encerrado por una esfera mediante su matriz de dispersión.

5.3.2. Matrices de dispersión para formulación con modos esféricos

El hecho de que un cierto campo pueda ser expandido de forma exacta mediante un conjunto *discreto* de funciones junto con la linealidad de las ecuaciones de Maxwell tiene ventajas de cara a caracterizar un cierto objeto en forma matricial. Las matrices involucradas son las denominadas *matrices de dispersión*.

En estos casos es habitual utilizar la notación $a_n = Q_n^{(1)}$ y $b_n = Q_n^{(4)}$ para denotar a los coeficientes de los modos de entrada y salida, respectivamente. Estos modos están relacionados con la matriz de dispersión \bar{S} de la forma:

$$\bar{b} = \bar{S}\bar{a}. \quad (5.11)$$

Puesto que el número de modos necesarios para caracterizar el campo de forma exacta es infinito, dicha matriz debería poseer infinitos elementos y por tanto debe truncarse el sumatorio en n de cara a su manipulación numérica. La regla habitual para truncar este sumatorio limita el valor de n a:

$$N_{max} = [kr_0] + n_l, \quad (5.12)$$

donde n_l es un parámetro que controla la precisión debida al truncamiento. Empíricamente, suele fijarse $n_l = 10$ para mantener una buena precisión en el caso de cuerpos grandes [Han88], sin embargo cuerpos pequeños suelen utilizar valores más pequeños de n_l con valores típicos entre $n_l = 2$ y $n_l = 4$ [Rub05].

Debido a los límites de los sumatorios para la expansión en ondas esféricas, si el índice en n se trunca a un valor N_{max} , el número total de ondas utilizado será:

$$N_{SWE} = 2N_{max}(N_{max} + 2) \quad (5.13)$$

Esta matriz de dispersión puede ser calculada utilizando diversos métodos numéricos, en este documento se utilizará el método de los momentos. La forma eficiente del cálculo de estas matrices se encuentra descrito en el apéndice D.

5.3.3. Análisis de problemas de análisis de radiación y dispersión con ondas esféricas

En el caso de tener M elementos (radiadores o dispersores) es posible caracterizar cada uno de ellos por una matriz de dispersión referida al sistema de referencia local que resulte más apropiado. Este sistema de coordenadas se escoge típicamente de forma que el radio de la esfera mínima que encierra al cuerpo sea mínimo. Dicho sistema de coordenadas típicamente se escoge lo más centrado posible con objeto de minimizar el radio de la esfera mínima y con ello el número de modos necesarios para una expansión precisa.

Denotaremos por \bar{a}_i y \bar{b}_i a los coeficientes de los modos de entrada y salida respectivamente al cuerpo i -ésimo, expresados respecto al sistema de coordenadas del cuerpo i -ésimo. Por tanto, usando la notación de un sólo índice, el campo impreso incidente a un cuerpo y el campo radiado por el mismo son expresados como:

$$\mathbf{E}_i^{inc}(\mathbf{r}) = \sum_J \bar{a}_i(J) \mathbf{F}_J^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{E}_i^{scat}(\mathbf{r}) = \sum_J \bar{b}_i(J) \mathbf{F}_J^{(4)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (5.15)$$

siendo \mathbf{r}_i el origen de coordenadas del elemento i -ésimo.

Del mismo modo denotaremos por $\bar{\bar{S}}_i$ a la matriz de dispersión de dicho cuerpo que nos relaciona los coeficientes de las ondas de entrada y los coeficientes de las ondas de salida de la forma:

$$\bar{b}_i = \bar{\bar{S}}_i \bar{a}_i, \quad (5.16)$$

si además, el elemento tiene una o varias alimentaciones internas, al campo dispersado se le debe sumar el campo radiado debido a dichas alimentaciones internas. Por tanto, haciendo uso del principio de superposición el campo emitido por el elemento i -ésimo será:

$$\bar{b}_i = \bar{\bar{S}}_i \bar{a}_i + \bar{\bar{T}}_i \bar{v}_i, \quad (5.17)$$

siendo \bar{v}_i un vector compuesto por las alimentaciones aplicadas en cada uno de los puertos del elemento i -ésimo y $\bar{\bar{T}}_i$ una matriz donde la columna n -ésima contiene los coeficientes de la expansión en ondas esféricas del campo radiado como consecuencia de alimentar el puerto n -ésimo con una fuente de valor unitario.

Concatenando operaciones de traslación y rotación (ver Apéndice E) es posible expresar los modos esféricos de salida del sistema i (tipo $c = 4$) como modos de entrada al sistema j (tipo $c = 1$), mediante una operación lineal realizada por una matriz $\bar{\bar{G}}_{ji}$. Por tanto,

$$\bar{a}_j = \bar{\bar{G}}_{ji} \bar{b}_i. \quad (5.18)$$

El campo incidente en un cierto cuerpo estará compuesto tanto por el campo debido al campo impreso incidente (campo que existiría en ausencia de los elementos) más el campo debido a los modos radiados por el resto de cuerpos. Por tanto, los coeficientes de entrada al sistema i -ésimo, serán la suma de los coeficientes del campo impreso incidente expandido en el sistema de coordenadas i -ésimo más los coeficientes del campo radiado por el resto de elementos que puede ser expresado en término de los coeficientes de salida del resto de cuerpos convenientemente trasladados al sistema de coordenadas del cuerpo i -ésimo:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_i^{imp} + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^M \bar{G}_{ij} \bar{b}_j, \quad (5.19)$$

siendo \bar{a}_i^{imp} los coeficientes de la expansión en ondas esféricas (centradas en el origen de coordenadas del cuerpo i -ésimo) del campo impreso incidente. Un campo impreso incidente muy habitual en problemas de dispersión consiste en una onda plana. Las expresiones para la expansión de una onda plana en ondas esféricas están recogidas en el Apéndice F.

Combinando las expresiones (5.17) y (5.19) llegamos a la siguiente expresión:

$$\bar{b}_i = \bar{S}_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^M \bar{G}_{ij} \bar{b}_j + \bar{S}_i \bar{a}_i^{imp} + \bar{T}_i \bar{v}_i, \quad (5.20)$$

Repetiendo la operación anterior para $i = 1 \dots M$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \bar{I} & -\bar{S}_1 \bar{G}_{12} & \cdots & -\bar{S}_1 \bar{G}_{1M} \\ -\bar{S}_2 \bar{G}_{21} & \bar{I} & \cdots & -\bar{S}_2 \bar{G}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{S}_M \bar{G}_{M1} & -\bar{S}_M \bar{G}_{M2} & \cdots & \bar{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \bar{a}_1^{imp} + \bar{T}_1 \bar{v}_1 \\ \bar{S}_2 \bar{a}_2^{imp} + \bar{T}_2 \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{S}_M \bar{a}_M^{imp} + \bar{T}_M \bar{v}_M \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

cuya resolución nos permite conocer los coeficientes de los modos esféricos radiados por cada cuerpo y, por tanto, la radiación total. Por comodidad a la hora de extender el presente desarrollo, es conveniente definir una serie de matrices. De esta forma, la matriz del sistema se denotará por:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1M} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{A}_{M1} & \bar{A}_{M2} & \cdots & \bar{A}_{MM} \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

donde cada bloque de la matriz viene dado por la expresión:

$$\bar{\bar{A}}_{ij} = \begin{cases} \bar{\bar{I}} & \text{si } j = i \\ -\bar{\bar{S}}_i \bar{\bar{G}}_{ij} & \text{si } j \neq i \end{cases}, \quad (5.23)$$

siendo $\bar{\bar{I}}$ la matriz identidad.

Los vectores \bar{a}_i , \bar{a}_i^{imp} y \bar{b}_i de todos los cuerpos se agruparán en un vector de la forma

$$\bar{a}_G = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_M \end{pmatrix}; \quad \bar{a}_G^{imp} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1^{imp} \\ \bar{a}_2^{imp} \\ \vdots \\ \bar{a}_M^{imp} \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_G = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_M \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Por último, se definen las siguientes matrices diagonales por bloques:

$$\bar{\bar{S}}_G = \begin{pmatrix} \bar{\bar{S}}_1 & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{S}}_2 & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{S}}_M \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{T}}_G = \begin{pmatrix} \bar{\bar{T}}_1 & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{T}}_2 & \cdots & \bar{\bar{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\bar{0}} & \bar{\bar{0}} & \cdots & \bar{\bar{T}}_M \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

De esta forma el sistema (5.21) puede expresarse de forma compacta como:

$$\bar{\bar{A}}\bar{b}_G = \bar{\bar{S}}_G\bar{a}_G^{imp} + \bar{\bar{T}}_G\bar{v}_G. \quad (5.26)$$

El sistema de ecuaciones (5.21) mantiene ciertas similitudes con el que se obtiene por medio del método de los momentos. Por un lado, la matriz del sistema depende tan sólo de la geometría y materiales de los objetos bajo análisis. Por otro lado, el lado derecho de la ecuación se corresponde con el campo incidente a la estructura y, por tanto, en caso de cambiar dicho campo tan sólo es necesario modificar este término. Como consecuencia, si la matriz del sistema es lo suficientemente reducida como para admitir una factorización eficiente, es posible la resolución para múltiples lados derechos de la ecuación de forma simultánea.

La figura 5.4 muestra un ejemplo donde se considera un campo incidente sobre un conjunto de dispersores (cilindros, placas, etc.) los cuales son sustituidos por sus matrices de dispersión para modelar el interior de su esfera mínima asociada.

La ecuación (5.26) nos permite calcular el campo radiado por una agrupación de antenas como consecuencia de excitar sus puertos en conjunto con un campo incidente exterior. Este planteamiento es adecuado si tan sólo se desean calcular parámetros relativos al campo radiado como, por ejemplo, la directividad de la estructura. Sin embargo, en el ámbito de las agrupaciones de antenas, es muy importante tener en cuenta otros parámetros como impedancias de entrada o la matriz

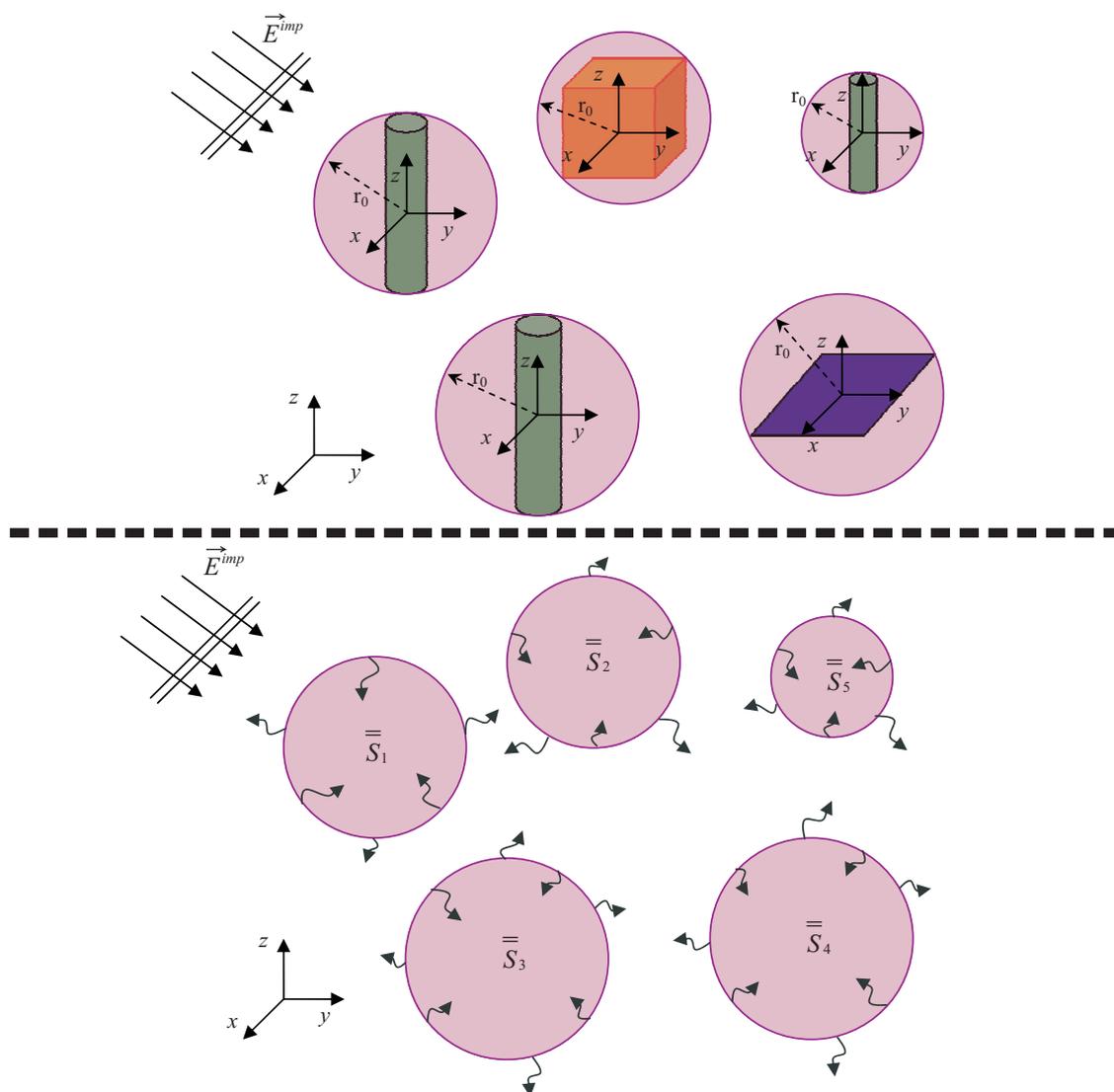


Figura 5.4: Ejemplo de aplicación a problemas de dispersión para un conjunto de varios elementos (tres cilindros, un cubo y una placa) iluminados por una onda plana. La figura superior muestra la agrupación de elementos junto a su esfera mínima. La figura inferior muestra cada elemento modelado por su matriz de dispersión.

de parámetros S . La mayor parte de estos parámetros pueden calcularse de forma sencilla si se conoce la corriente que circula a la entrada de cada puerto.

Para obtener las corrientes a la entrada de cada puerto utilizaremos de nuevo el principio de superposición. Para ello, debemos tener en cuenta que la corriente inducida será la suma de la corriente inducida por cada modo esférico incidente más la corriente inducida por la excitación de cada puerto. Por tanto, el vector, que contiene la corriente que circula por cada puerto del elemento i -ésimo, puede ser calculado como:

$$\bar{I}_i^{in} = \bar{R}_i \bar{a}_i + \bar{Y}_i \bar{v}_i, \quad (5.27)$$

siendo \bar{R}_i una matriz cuya columna n -ésima contiene la corriente inducida en cada puerto del elemento i -ésimo como consecuencia de iluminar el elemento con el modo n -ésimo, y la matriz \bar{Y}_i es la matriz de admitancias del elemento i -ésimo.

La figura 5.5 muestra un ejemplo en el que varios parches, los cuales están situados sobre un plano de masa en el cual se han creado una serie de cavidades, son alimentados con un puerto interno cada uno y rodeados por sus esferas mínimas correspondientes para sus posterior análisis con el método propuesto. Este ejemplo está basado en las antenas analizadas también con modos esféricos en [Rub05].

5.3.4. Restricciones en la geometría

El método expuesto en las secciones anteriores se basa en una serie de expansiones que imponen restricciones con respecto a la geometría de los problemas que se pueden resolver. Las restricciones más fuertes son:

- El centro de una esfera mínima (esfera m) no puede estar dentro de otra esfera mínima (esfera n). De lo contrario, la matriz de translación que nos expresa el campo radiado por el elemento m , expandido como modos propagativos hacia el exterior de la esfera (tipo $c = 4$), en campo expandido en modos estacionarios de tipo $c = 1$ con respecto al origen del elemento n , no sería válida (ver apéndice C). Esta situación se encuentra recogida en la figura 5.6.
- Ninguna parte de un elemento puede estar dentro de la esfera mínima que envuelve otro elemento, de lo contrario no es posible asumir que el campo radiado se puede expandir utilizando solo modos de tipo $c = 4$. Habitualmente esta restricción es la más fuerte. Esta situación se encuentra recogida en la figura 5.7. En el caso de la izquierda, aunque las esferas mínimas se solapan no existe ninguna invasión y, por tanto, la situación es válida. El caso del centro representa el caso más favorable en el que no se produce ningún tipo de

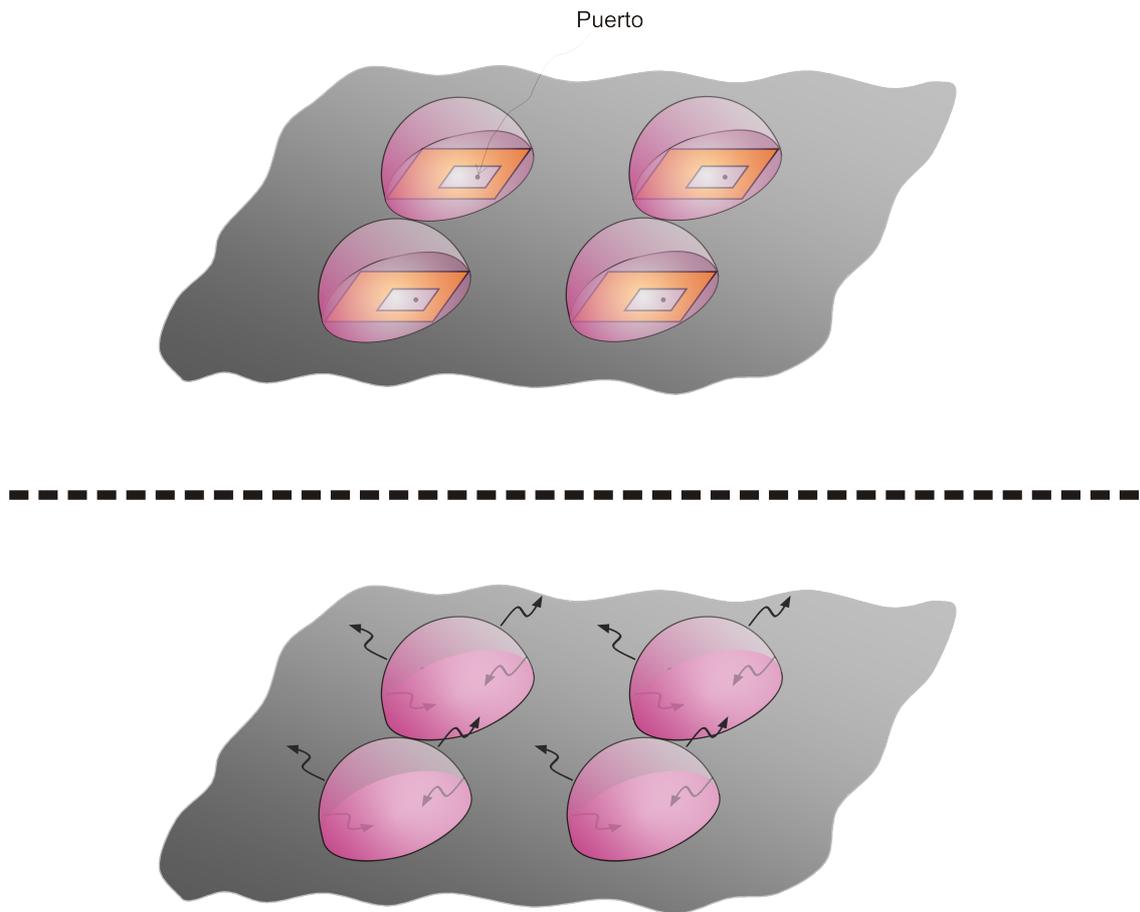


Figura 5.5: Ejemplo de aplicación a problemas de radiación para una agrupación con cavidades creadas en un plano de masa. La figura superior muestra la agrupación de parches junto a su esfera mínima. La figura inferior muestra cada elemento modelado por su matriz de dispersión.

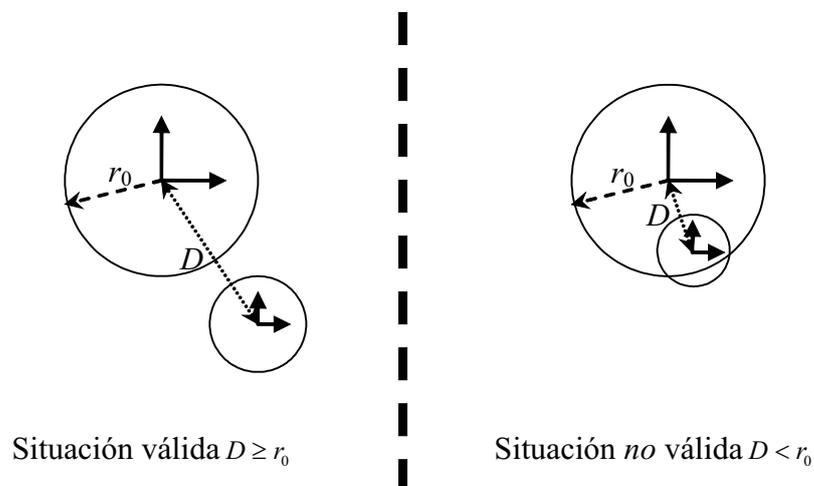


Figura 5.6: Ejemplo de translación de modos válida e inválida. El parámetro r_0 es el radio de la esfera mínima, la cual produce el campo (expresado en modos esféricos propagativos hacia el exterior) que se desea trasladar a la otra esfera en forma de modos estacionarios de tipo $c = 1$. El parámetro D es la distancia entre los centros de las esferas mínimas.

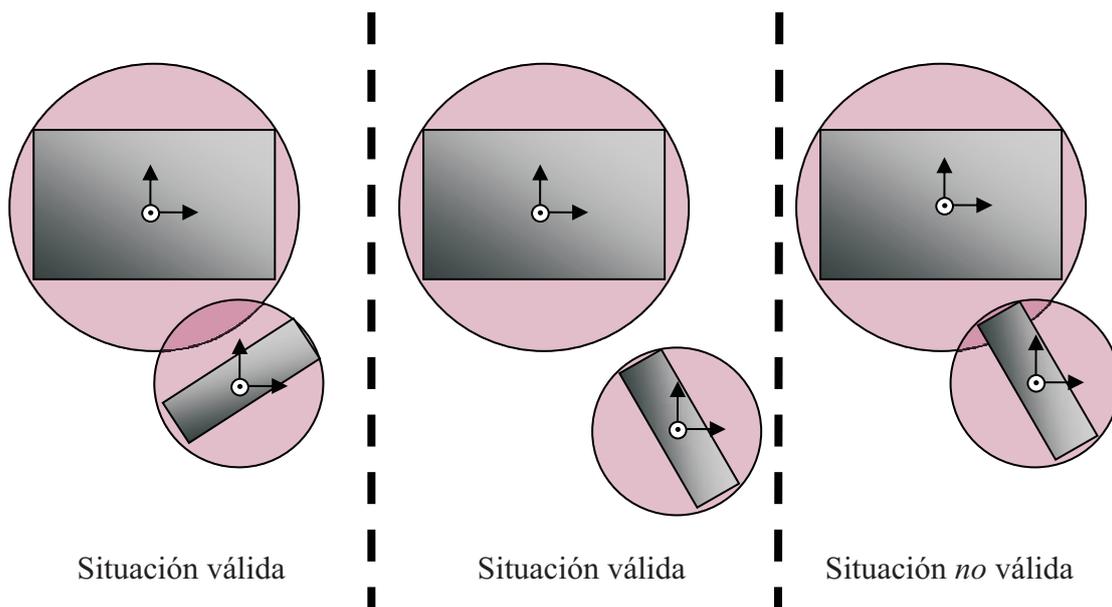


Figura 5.7: Ejemplos de varias situaciones válidas y no válidas en función de si un elemento invade la esfera mínima de otro elemento.

solapamiento. Finalmente, la situación de la derecha muestra un elemento que invade la esfera mínima de otro elemento, produciendo un caso no analizable con el algoritmo anterior.

5.3.5. Resultados

Para ilustrar el método descrito anteriormente se consideran tanto problemas de dispersión como problemas de radiación. En primer lugar, se mostrará un ejemplo de análisis de un cubo mediante matrices de dispersión. Con este ejemplo se pretende mostrar la convergencia del campo en función del valor que se tome del parámetro n_l en la expresión (5.12). Para ello consideraremos el análisis de un cubo de lado 2λ a una frecuencia de 300MHz. Para el cálculo de los resultados de referencia mediante el método de los momentos, así como para el cómputo de las matrices de dispersión, se han discretizado las corrientes eléctricas superficiales sobre la superficie del cuerpo utilizando 7.200 funciones base RWG. La discretización del cubo, así como su esfera mínima se encuentran recogidos en la figura 5.8a.

Se comienza estudiando la sección radar biestática como consecuencia de la incidencia de una onda plana propagándose a lo largo del eje x y con polarización vertical $\mathbf{E}^{imp} = -e^{-jkx}\hat{z}$. Puesto que la esfera mínima que envuelve el cuerpo tiene un radio $r_0 = \sqrt{3}$ la regla dada por (5.12), asumiendo $n_l = 10$ debido al tamaño del cuerpo, implica que el truncamiento en el índice n en sumatorios como (5.9) o (5.10) se produzca para el valor $N_{max} = 20$. Los resultados para el citado valor así como para $N_{max} = 16$ y $N_{max} = 12$ se encuentran recogidos en la figura 5.8b. Los valores para el truncamiento anteriormente citados resultan en un total de 880, 576 y 336 modos totales.

Los resultados muestran que incluso con valores por debajo de los dados por (5.12) se obtiene una buena concordancia en el caso de campo lejano. En este caso un total de 576 modos ($N_{max} = 16$) bastaría para mantener un resultado muy preciso con respecto al resultado de referencia obtenido con el método de los momentos.

Es bien sabido que el campo cercano habitualmente presenta una convergencia más lenta y, por tanto, se espera que se necesite un mayor número de modos para su análisis. Para realizar este estudio se recurre al mismo cubo del ejemplo anterior iluminado por la misma onda plana. En este caso se estudia el campo total dispersado a lo largo de una línea recta contenida en el plano XZ , paralela al eje x y tangente a la esfera mínima. Los puntos de dicha línea recta vienen dados por la ecuación paramétrica $\mathbf{r}_l = \sqrt{3}\hat{z} + t\hat{x}$, con $-3 \leq t \leq 3$.

Los resultados se encuentran reflejados en la figura 5.9 donde se puede apreciar como la convergencia cerca de la esfera mínima ($x \approx 0$) es mucho peor que en el resto de puntos. Esta falta de convergencia se hace patente incluso para los valores proporcionados para el caso más conservador $N_{max} = 20$. En el caso de disminuir este valor hasta $N_{max} = 16$ (valor que proporcionaba una buena convergencia en el campo lejano) se puede observar como las discrepancias aumentan de forma ostensible. Con objeto de comprobar que los resultados proporcionados por nuestro

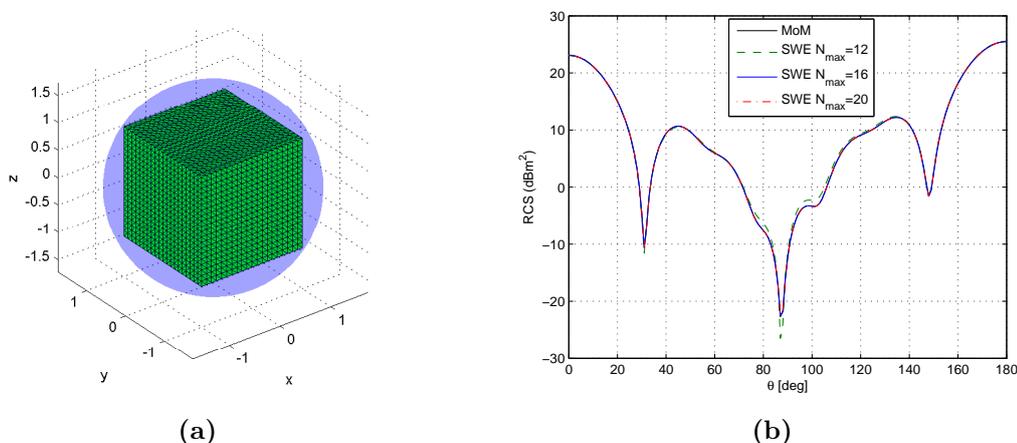


Figura 5.8: Discretización de un cubo de 2λ y cálculo de su RCS: a) Cubo de 2λ discretizado en triángulos junto con la esfera de radio mínimo que lo encierra; b) RCS de un cubo calculado a partir de su matriz de dispersión en función del truncamiento en el número de modos.

código de método de los momentos son correctos y que no presentan inestabilidades en dicha zona, también se incluyen los resultados obtenidos con el software comercial Feko.

Se continua el análisis, mostrando ahora la caracterización del campo dispersado por dos cubos, cada uno de ellos igual al del ejemplo anterior. La geometría del problema se encuentra recogida en la figura 5.10. De cara al análisis se considera que la distancia entre cubos puede ser $d = 3\lambda$ o $d = 4\lambda$. Es de destacar que en el caso $d = 3\lambda$ las esferas mínimas llegan a estar parcialmente solapadas pero los cuerpos no llegan a invadir las esferas vecinas.

Considerando el mismo campo incidente que en la ocasión anterior, los resultados para la RCS biestática total se encuentran recogidos en la figura 5.11. Se ha fijado $N_{max} = 16$. En ambos casos se encuentra una excelente concordancia en el diagrama de radiación en campo lejano, mostrando como las inexactitudes que se observaban en el ejemplo anterior para campo cercano no afectan de forma importante al diagrama en campo lejano. De este modo hemos logrado resolver un problema con 576 incógnitas por cubo (1.152 incógnitas en total) en lugar de las 7.200 incógnitas por cubo (14.400 incógnitas en total) que involucra el método de los momentos.

Con objeto de ilustrar la aplicación a problemas de radiación, consideraremos un elemento muy básico pero que nos servirá para ilustrar las capacidades del esquema anteriormente propuesto. Dicho elemento será el dipolo de placa ancha presentado en [Cra06b] y analizado en [Cra06a].

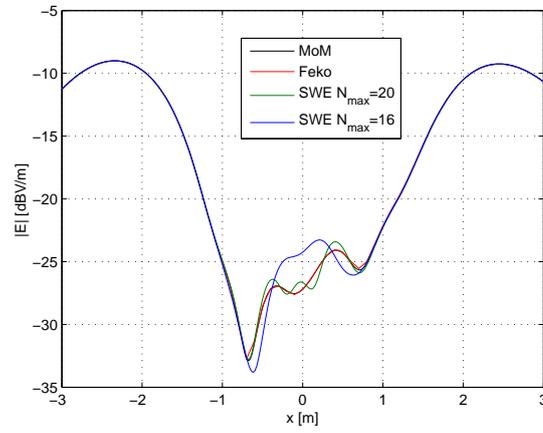


Figura 5.9: Convergencia del campo cercano para un cubo de lado 2λ .

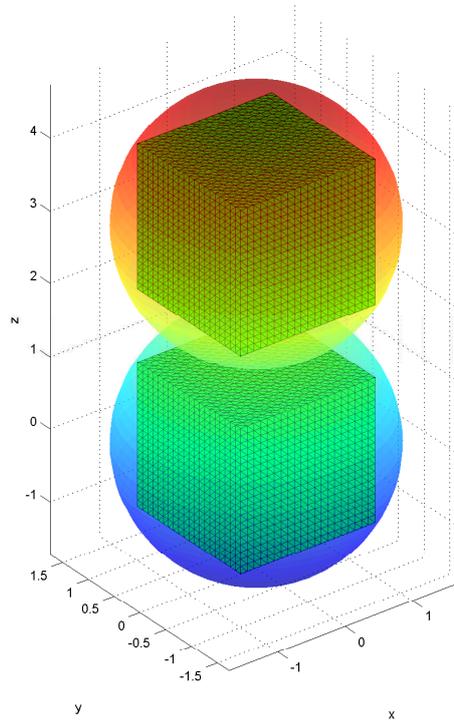


Figura 5.10: Dos cubos de lado 2λ separados una distancia λ . Se acompaña también las esferas mínimas que envuelven a cada cubo.

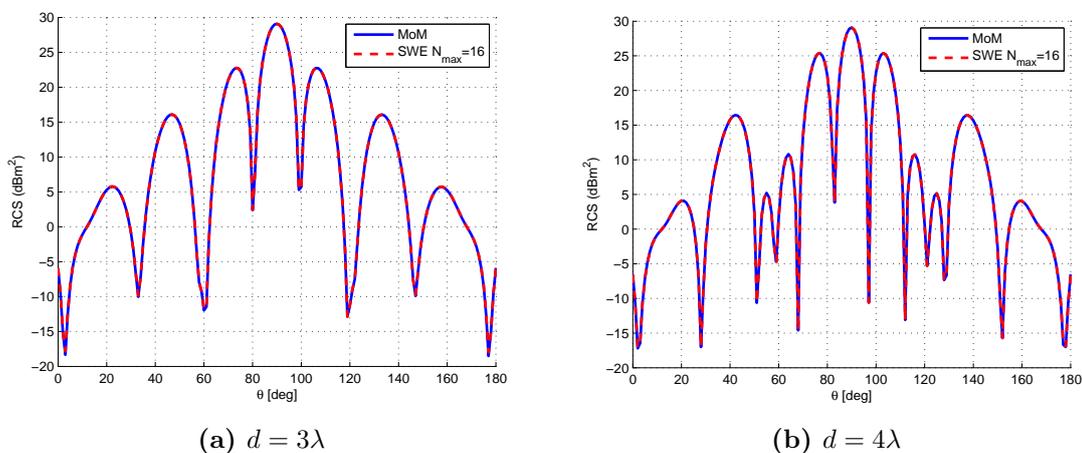


Figura 5.11: RCS biestática total correspondiente al problema de los dos cubos.

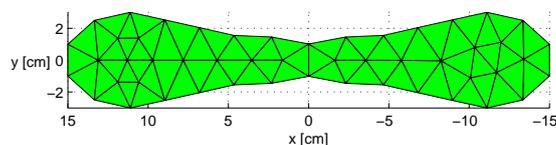


Figura 5.12: Geometría del dipolo de placa ancha.

La geometría del dipolo de placa ancha se encuentra recogida en la figura 5.12. De cara a análisis posteriores se tomará como frecuencia de análisis 441,18 MHz ($\lambda = 68$ cm) como en [Cra06b] puesto que se ha observado que cuando este elemento se rodea de otros similares para formar una agrupación, la frecuencia de resonancia de cada uno de ellos se desplaza en general hacia esa frecuencia.

El dipolo se ha discretizado con 68 triángulos resultando en 87 incógnitas RWG a la frecuencia de análisis de 441,18 MHz. La mayor parte de los triángulos se encuentran principalmente destinados a preservar la forma curvada del dipolo.

Puesto que el cuerpo tiene una longitud del orden de $\lambda/2$, podemos considerarlo como eléctricamente pequeño y utilizar valores de $n_l = 2$ o $n_l = 4$, dando lugar a truncar el sumatorio en n con $N_{max} = 3$ y $N_{max} = 5$, respectivamente.

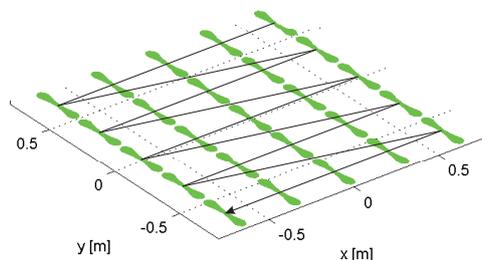


Figura 5.13: Agrupación de 5×5 dipolos de banda ancha y orden de numeración de los dipolos.

De cara al análisis en función del número de ondas esféricas utilizadas se considera una agrupación de 5×5 dipolos con una separación entre ellos de 32 cm en ambas direcciones (ver Figura 5.13).

El comportamiento del coeficiente de reflexión (asumiendo una impedancia característica $Z_0 = 50\Omega$), en función del número de ondas, se encuentra recogido en la figura 5.14. Se puede ver como con valores inferiores a $N_{max} = 5$ (correspondiente a $n_l = 4$) se obtienen resultados imprecisos mientras que el incremento en el número de modos esféricos tiende lentamente hacia la solución del método de los momentos. Por tanto, para mantener toda la precisión en este problema, es recomendable un valor de $n_l = 4$ que resulta en un total de 70 modos esféricos. Tenemos, por tanto, que para este problema, el número de incógnitas utilizando matrices de dispersión es muy similar al que se obtiene utilizando funciones base RWG.

La figura 5.15 recoge la ganancia de la antena para los valores de N_{max} estudiados anteriormente, las conclusiones son las mismas que las obtenidas anteriormente para la convergencia del coeficiente de reflexión a la entrada de cada elemento. Cabe destacar que los hechos citados anteriormente son especialmente visibles en el plano H de la antena (figura 5.15a).

5.4 Análisis de problemas de radiación y dispersión con ondas esféricas características

Como se ha visto en la sección anterior, es posible plantear un sistema de ecuaciones utilizando como incógnitas la expansión del campo radiado por cada ele-

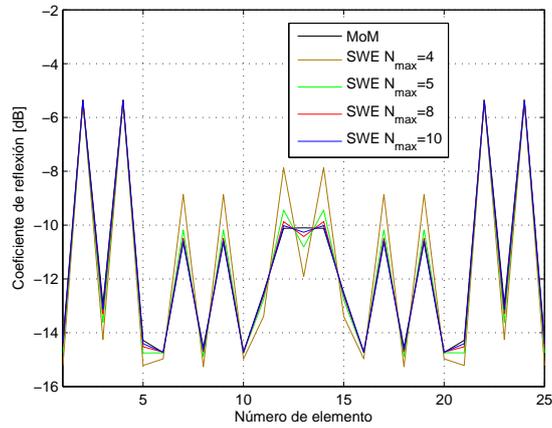
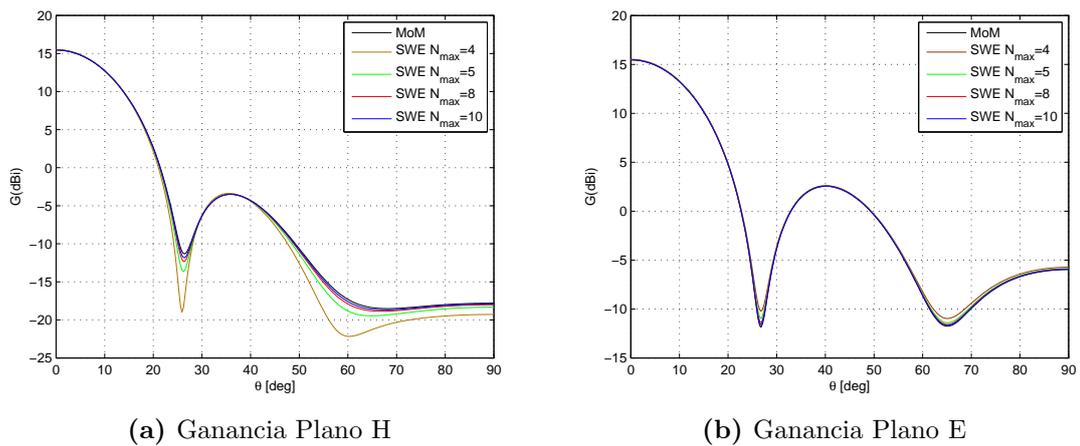


Figura 5.14: Coeficiente de reflexión a la entrada de cada elemento de una agrupación de 5x5 dipolos de banda ancha.



(a) Ganancia Plano H

(b) Ganancia Plano E

Figura 5.15: Ganancia de una agrupación de 5x5 dipolos de banda ancha.

mento en modos esféricos. Esta estrategia permite analizar una gran variedad de problemas siempre y cuando se respeten las reglas anteriormente expuestas.

No obstante, la reducción en el número de incógnitas con respecto al método de los momentos no es siempre significativa. Además, existe una cierta incertidumbre respecto al número mínimo de ondas esféricas que se deben utilizar, lo cual típicamente lleva a un sobredimensionamiento en el número de ondas esféricas empleadas y, por tanto, se necesita una mayor cantidad de memoria para almacenar la matriz del sistema resultante.

En esta sección, se verá como es posible utilizar parte de las ideas expuestas en la generación de funciones base características para disminuir el número de incógnitas y, simultáneamente, paliar el efecto del sobredimensionamiento. Esto será posible mediante una representación eficiente del campo en un nuevo conjunto de ondas, que se denominarán *ondas esféricas características* (Characteristic Spherical Waves, CSWs).

5.4.1. Expansión en modos esféricos característicos

Tomando como punto de partida las ideas expresadas anteriormente, es posible crear *modos de radiación* adaptados al cuerpo que modelamos. Estos modos, que se denominarán característicos, pues dependen de las características del cuerpo bajo análisis, se definen a partir de combinaciones lineales de modos tradicionales. Así, supuesto un cuerpo cuya esfera mínima se encuentra centrada en el origen de coordenadas, el modo esférico característico m -ésimo será de la forma:

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} \mathbf{F}_n^{(4)}(\mathbf{r}), \quad (5.28)$$

donde C_{nm} son los coeficientes de la expansión. Puesto que numéricamente no es viable considerar los infinitos modos de radiación estándar, el sumatorio anterior debe truncarse para utilizar un número total de armónicos N_{total} . Como se ha visto en la sección anterior, esta elección depende del radio de la esfera mínima. Por tanto el modo esférico m -ésimo queda expresado como:

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_{total}} C_{nm} \mathbf{F}_n^{(4)}(\mathbf{r}). \quad (5.29)$$

Es conveniente agrupar los coeficientes C_{nm} , en una matriz que jugará un papel similar a las matrices $\overline{\overline{C}}$ del CBFM, dicha matriz será de la forma:

$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1,N_{CSWE}} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2,N_{CSWE}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_{total},1} & C_{N_{total},2} & \cdots & C_{N_{total},N_{CSWE}} \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

siendo N_{CSWE} el número total de modos esféricos característicos utilizados para expandir el campo radiado.

5.4.2. Cálculo de los coeficientes de la expansión

De cara a la generación de los modos esféricos característicos seguiremos un razonamiento similar al utilizado en el caso de las funciones base características. Según este razonamiento basado en el principio de superposición, si el campo exterior a un elemento puede ser expandido en una serie finita de ondas, entonces el campo dispersado por dicho elemento, puede ser expresado como una combinación lineal de los campos dispersados por cada una de las ondas en las que el campo incidente puede ser expandido.

En el caso de que el elemento contenga uno o más puertos internos donde se aplica un cierto campo impreso, el campo radiado como consecuencia de estas excitaciones podrá ser expresado, gracias al principio de superposición nuevamente, como combinación lineal de los campos radiados al excitar cada uno de los puertos con una fuente unitaria mientras se dejan el resto de puertos con alimentación nula.

De este modo, cualquier campo radiado, bien como consecuencia de un campo impreso incidente o bien como consecuencia de alimentar los puertos internos del elemento, será combinación lineal de:

1. El campo dispersado como consecuencia de usar como campo impreso cada una de las ondas que se usa como base para modelar el campo externo.
2. El campo radiado como consecuencia de excitar cada uno de los puertos con una fuente unitaria mientras el resto se mantienen a cero.

Las representaciones del campo externo al elemento más relevantes consisten o bien en una expansión en términos de ondas planas como sucede en el CBFM, o bien en términos de ondas esféricas estacionarias acotadas en el origen (tipo $c = 1$). Aunque existen otras representaciones, como por ejemplo en términos de ondas cilíndricas, en general no son apropiadas para las geometrías habituales.

Si se consideran ondas planas, entonces los coeficientes del campo dispersado debido a la onda plana n -ésima, vienen dados por:

$$\bar{b}^{imp,n} = \bar{S}\bar{a}^{imp,n}, \quad (5.31)$$

donde $\bar{a}^{imp,n}$ es un vector que contiene la expansión de la onda plana n -ésima en ondas esféricas. Además es importante recordar que los coeficientes del campo radiado

como consecuencia de excitar cada uno de los puertos del elemento están recogidos en las columnas de la matriz $\overline{\overline{T}}$. Por tanto, los coeficientes de la expansión en ondas esféricas del campo radiado por un elemento pueden ponerse como combinación lineal de la base formada por las columnas de la matriz $\overline{\overline{T}}$ junto con los vectores $\overline{\overline{b}}^{imp,n}$.

Puesto que la independencia lineal no está garantizada, recurrimos a una factorización SVD como sigue:

$$\overline{\overline{U}} \overline{\overline{D}} \overline{\overline{V}}^t = \left[\overline{\overline{S}} \overline{\overline{A}}^{imp} \overline{\overline{T}} \right], \quad (5.32)$$

donde $\overline{\overline{A}}^{imp}$ es una matriz cuyas columnas contienen los vectores $\overline{\overline{a}}^{imp,n}$.

Si por el contrario se opta por utilizar ondas esféricas para la generación de las ondas características, entonces se debe tener en cuenta los coeficientes de los modos dispersados como consecuencia de iluminar con una onda esférica. Estos coeficientes se encuentran ya calculados en las propias columnas de la matriz $\overline{\overline{S}}$ facilitando el cálculo de la matriz a factorizar. De este modo, la descomposición toma la forma:

$$\overline{\overline{U}} \overline{\overline{D}} \overline{\overline{V}}^t = \left[\overline{\overline{S}} \overline{\overline{T}} \right]. \quad (5.33)$$

Una vez realizada la operación SVD, bien usando como iluminaciones ondas planas u ondas esféricas, se procede de forma análoga al método CBFM. De este modo, se utilizan como coeficientes de la expansión en ondas esféricas, aquellas columnas cuyo valor singular normalizado esté por encima de un cierto umbral. Los valores típicos para este umbral, al igual que en el CBFM, oscilan entre 10^{-2} y 10^{-5} . Por tanto, supuesto que existen N_{CSWE} valores singulares normalizados por encima del umbral, la matriz $\overline{\overline{C}}$ será:

$$\overline{\overline{C}} = [\overline{\overline{u}}_1 \overline{\overline{u}}_2 \cdots \overline{\overline{u}}_{N_{CSWE}}], \quad (5.34)$$

siendo $\overline{\overline{u}}_n$ la columna n -ésima de la matriz $\overline{\overline{U}}$.

Como ejemplo de modos esféricos característicos, consideraremos una placa de dimensiones $0,5\lambda \times 0,5\lambda$ utilizando ambos sistemas de iluminación (ondas planas y ondas esféricas). La placa es discretizada con 140 incógnitas RWG. Los valores singulares normalizados obtenidos se encuentran recogidos en la figura 5.16. A la vista de los resultados, se pueden extraer principalmente dos conclusiones. La primera es que los valores singulares decaen fuertemente, lo cual nos indica que tan sólo unos pocos modos característicos contribuyen de forma relevante a modelar el campo. Si, por ejemplo, fijamos el umbral de la descomposición SVD en 10^{-2} tan sólo 8 modos se encontrarían por encima de dicho umbral. La segunda conclusión es que ambas iluminaciones dan lugar a un comportamiento muy similar. Este último hecho nos da una idea de que los modos característicos más significativos son muy similares para ambos tipos de iluminación.

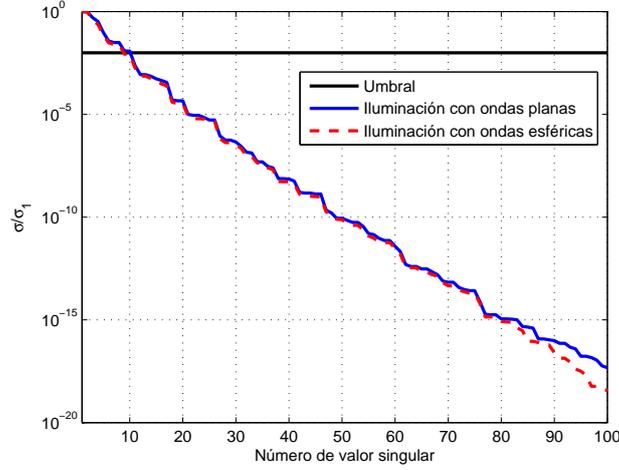


Figura 5.16: Valores singulares para una placa de tamaño $0,5\lambda \times 0,5\lambda$ usando iluminación con ondas planas y ondas esféricas.

La figura 5.17 recoge los cinco primeros modos obtenidos cuando se utiliza iluminación por ondas esféricas para la citada placa.

5.4.3. Transformaciones entre modos esféricos y modos esféricos característicos

De cara a plantear el sistema de ecuaciones con este nuevo tipo de modos, es importante establecer operaciones lineales que permitan transformar una expansión en modos característicos en modos esféricos tradicionales y viceversa. Los coeficientes de la expansión en modos esféricos tradicionales serán denotados por \bar{b} como hasta ahora, mientras los coeficientes de los modos característicos serán denotados por \bar{b}' .

Si se considera el campo radiado con respecto al origen en modos esféricos característicos por un elemento, tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_{CSWE}} \bar{b}'(n) \mathcal{F}_n(\mathbf{r}). \quad (5.35)$$

Si se introduce la definición de los modos esféricos característicos (5.29) en (5.35), se obtiene que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_n^{N_{CSWE}} \bar{b}'(n) \sum_{m=1}^{N_{total}} C_{mn} \mathbf{F}_m^{(4)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{N_{total}} \sum_n^{N_{CSWE}} C_{mn} \bar{b}'(n) \mathbf{F}_m^{(4)}(\mathbf{r}) \quad (5.36)$$

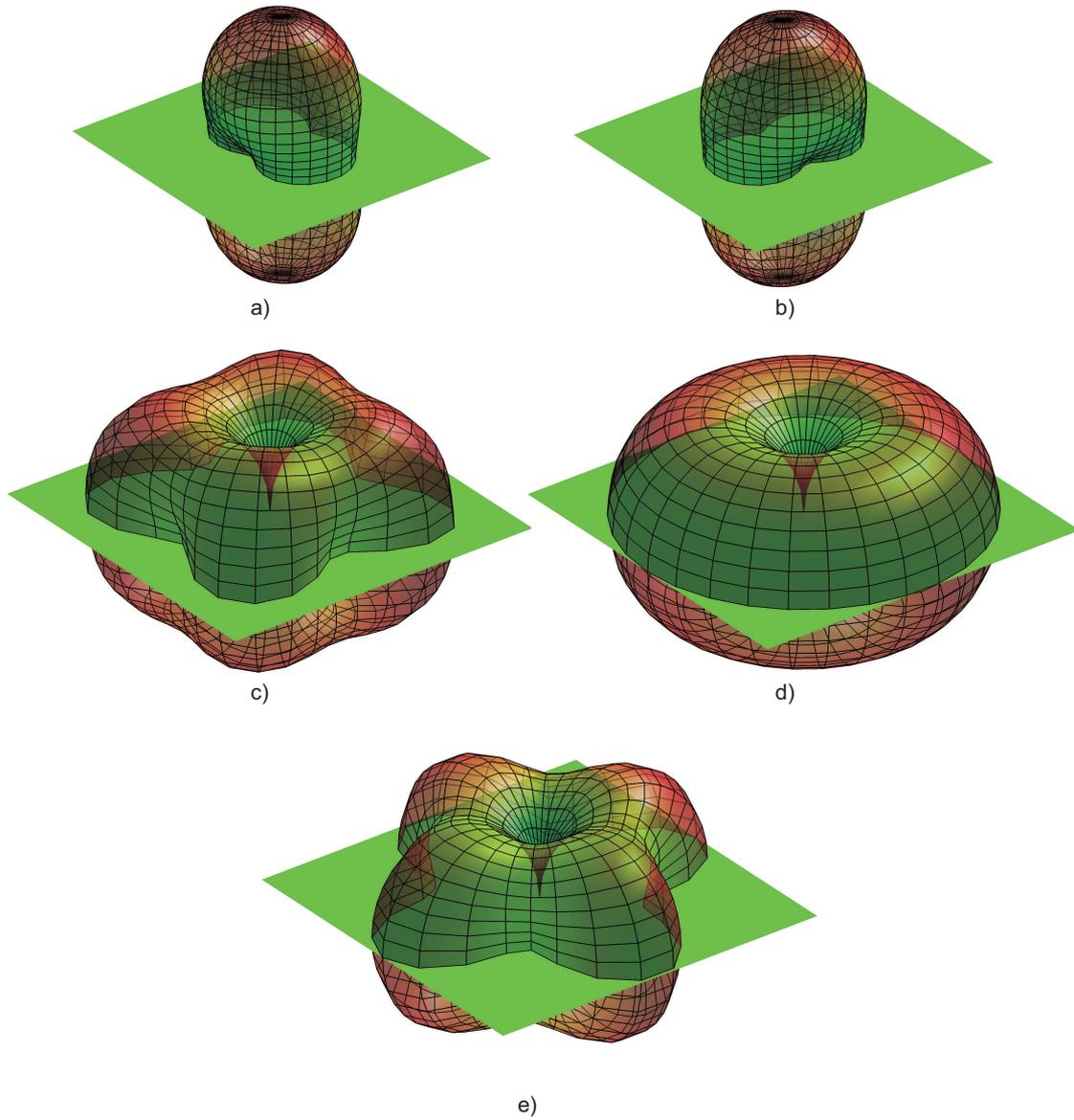


Figura 5.17: Modos característicos para una placa de tamaño $0,5\lambda \times 0,5\lambda$: a) Modo esférico característico #1; b) Modo esférico característico #2; c) Modo esférico característico #3; d) Modo esférico característico #4; e) Modo esférico característico #5.

Igualando esta expresión con la expansión habitual en modos esféricos para el campo radiado:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{N_{total}} \bar{b}(m) \mathbf{F}_m^{(4)}(\mathbf{r}), \quad (5.37)$$

por tanto, los coeficientes del campo expresado en modos esféricos, se relacionan con los coeficientes del campo expresado en modos esféricos tradicionales de la forma:

$$\bar{b}(m) = \sum_{n=1}^{N_{CSWE}} C_{mn} \bar{b}'(n). \quad (5.38)$$

Esta operación puede ser implementada eficientemente mediante el producto matriz-vector:

$$\bar{b} = \bar{C} \bar{b}'. \quad (5.39)$$

La conversión de un campo expresado en modos esféricos tradicionales a modos esféricos característicos no es posible, en general, de forma exacta. Esto es debido a que el espacio vectorial modelado por las columnas de \bar{C} no abarca todo el espacio vectorial generado por todas las combinaciones posibles de vectores \bar{b} . Una solución a este problema consiste en utilizar la aproximación de mínimos cuadrados que nos ofrece la pseudoinversa de la matriz \bar{C} , que aquí denotaremos por \bar{C}^\dagger . Por tanto:

$$\bar{b}' \approx \bar{C}^\dagger \bar{b}, \quad (5.40)$$

la operación anterior nos garantiza que los coeficientes \bar{b}' contengan el menor error cuadrático a la hora modelar el vector \bar{b} usando como base las columnas de \bar{C} , esto es:

$$\arg \min_{\bar{b}'} \|\bar{b} - \bar{C} \bar{b}'\|_2. \quad (5.41)$$

Como se verá posteriormente este tipo de aproximación ofrece resultados de precisión suficiente para el tipo de problemas que aquí se consideran.

5.4.4. Aplicación a problemas de radiación y dispersión

Se procederá ahora a plantear el sistema de ecuaciones análogo al que se obtenía en el caso de utilizar una expansión en modos esféricos. Si se considera un sistema compuesto por M elementos radiantes, los cuales también pueden estar iluminados por un cierto campo impreso incidente, el objetivo será calcular los coeficientes de la expansión en modos característicos, \bar{b}'_i , para cada elemento i .

Al igual que ocurría en el caso anterior, los coeficientes de la expansión en modos esféricos incidentes al cuerpo i -ésimo, son la suma de los coeficientes debidos al campo impreso y al campo radiado por el resto de cuerpos. Puesto que las

matrices $\overline{\overline{S}}_{ij}$ y $\overline{\overline{G}}_{ij}$, matrices de dispersión y translación-rotación respectivamente, están referidas a los coeficientes de la expansión en ondas esféricas tradicionales, es necesario introducir primero una operación de conversión de modos característicos a esféricos como la de la ecuación (5.39). Modificando la ecuación (5.19) mediante la citada conversión se obtiene la expresión:

$$\bar{a}_i \approx \bar{a}_i^{imp} + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^M \overline{\overline{G}}_{ij} \overline{\overline{C}}_j \bar{b}'_j, \quad (5.42)$$

donde el signo de aproximado se ha incluido porque el campo radiado por un cuerpo no puede ser modelado de forma exacta por los modos característicos.

Introduciendo la operación de conversión inversa (5.40) en (5.17) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\bar{b}'_i \approx \overline{\overline{C}}_i^\dagger \overline{\overline{S}}_i \bar{a}_i + \overline{\overline{C}}_i^\dagger \overline{\overline{T}}_i \bar{v}_i. \quad (5.43)$$

Finalmente combinando (5.42) y (5.43), asumiendo que la aproximación de modos esféricos es exacta, y repitiendo la operación para todos los cuerpos, obtenemos la siguiente ecuación matricial:

$$\overline{\overline{A}}' \bar{b}'_G = \overline{\overline{S}}'_G \bar{a}_G^{imp} + \overline{\overline{T}}'_G \bar{v}_G, \quad (5.44)$$

donde la matriz $\overline{\overline{A}}'$ es:

$$\overline{\overline{A}}' = \begin{pmatrix} \overline{\overline{I}} & -\overline{\overline{C}}_1^\dagger \overline{\overline{S}}_1 \overline{\overline{G}}_{12} \overline{\overline{C}}_2 & \cdots & -\overline{\overline{C}}_1^\dagger \overline{\overline{S}}_1 \overline{\overline{G}}_{1M} \overline{\overline{C}}_M \\ -\overline{\overline{C}}_2^\dagger \overline{\overline{S}}_2 \overline{\overline{G}}_{21} \overline{\overline{C}}_1 & \overline{\overline{I}} & \cdots & -\overline{\overline{C}}_2^\dagger \overline{\overline{S}}_2 \overline{\overline{G}}_{2M} \overline{\overline{C}}_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{\overline{C}}_M^\dagger \overline{\overline{S}}_M \overline{\overline{G}}_{M1} \overline{\overline{C}}_1 & -\overline{\overline{C}}_M^\dagger \overline{\overline{S}}_M \overline{\overline{G}}_{M2} \overline{\overline{C}}_2 & \cdots & \overline{\overline{I}} \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

y, por tanto, cada bloque de la matriz puede expresarse en función de los bloques de la matriz de (5.21) como:

$$\overline{\overline{A}}'_{ij} = \begin{cases} \overline{\overline{I}} & \text{si } i = j \\ \overline{\overline{C}}_i^\dagger \overline{\overline{A}}_{ij} \overline{\overline{C}}_j & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.46)$$

las matrices $\overline{\overline{S}}'_G$ y $\overline{\overline{T}}'_G$ se definen como:

$$\overline{\overline{S}}'_G = \begin{pmatrix} \overline{\overline{C}}_1^\dagger \overline{\overline{S}}_1 & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{C}}_2^\dagger \overline{\overline{S}}_2 & \cdots & \overline{\overline{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{C}}_M^\dagger \overline{\overline{S}}_M \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{T}}'_G = \begin{pmatrix} \overline{\overline{C}}_1^\dagger \overline{\overline{T}}_1 & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{C}}_2^\dagger \overline{\overline{T}}_2 & \cdots & \overline{\overline{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\overline{0}} & \overline{\overline{0}} & \cdots & \overline{\overline{C}}_M^\dagger \overline{\overline{T}}_M \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

mientras que el vector \bar{a}_G^{imp} queda definido como en (5.24) y \bar{b}'_G se define como:

$$\bar{b}'_G = \begin{pmatrix} \bar{b}'_1 \\ \bar{b}'_2 \\ \vdots \\ \bar{b}'_M \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones (5.21) con un total de incógnitas $N_{SWE}M$ se ha reducido a uno de dimensiones $N_{CSWE}M$, donde N_{CSWE} es el número de modos característicos por elemento, y cumple que $N_{CSWE} \leq N_{SWE}$.

En caso de querer recuperar las corrientes a la entrada de cada puerto, la ecuación (5.27) sigue siendo válida, utilizando como modos de entrada los obtenidos a partir de (5.42).

5.5 Resultados

5.5.1. Compresión de modos esféricos en dispersores con geometrías canónicas

En primer lugar, se estudia el comportamiento de la tasa de compresión en función del número de incógnitas. Con este mismo estudio, también se pretende buscar si existen grandes diferencias entre el uso de ondas planas (*Plane Waves, PW*) y ondas esféricas (*Spherical Waves, SW*) durante el proceso de generación de modos característicos.

Se consideran las siguientes geometrías canónicas: un cubo, una esfera, una semiesfera, una placa cuadrada y una placa cuadrada con un agujero. En el caso de la placa con agujero las dimensiones de éste son $L/2 \times L/2$, siendo L la longitud de la placa. Las corrientes en los cuerpos son discretizadas utilizando funciones base RWG sobre triángulos, cuyos lados tienen longitudes lo más cercanas posibles a $0, 1\lambda$. En el caso de utilizar iluminaciones por ondas esféricas, el número de ondas incidentes se fija en función de la regla (5.12) tomando $n_l = 10$. En el caso de utilizar ondas planas, el número de éstas se ha fijado en 1.600. El mismo análisis se repitió utilizando 3.600 ondas sin cambios significativos, revelando que el número de ondas es suficiente para generar la expansión característica. El umbral de la descomposición SVD se fijó en 10^{-3} para este análisis.

Los resultados de este estudio se encuentran recogidos entre las figuras 5.18a y 5.18b. En ambas figuras se encuentran repetidos los resultados para el peor caso, que se corresponde con el cubo. Esta última curva puede ser aproximada de

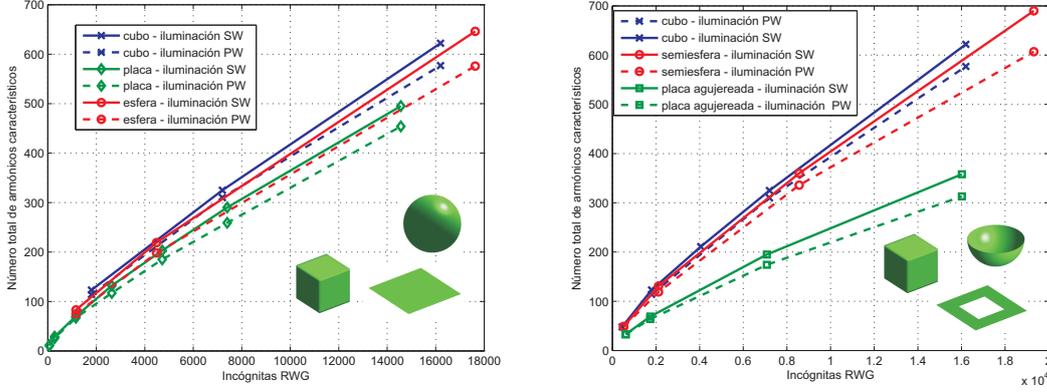


Figura 5.18: Número de armónicos esféricos necesarios para modelar diversas dispersores canónicos.

forma razonable por $N_{CSWE} = 0,27N_{RWG}^{0,8}$. Por tanto, para el peor de los casos anteriormente expuestos, el tiempo y la memoria necesarios para resolver el sistema de ecuaciones se ven reducidos por un factor $g_t \approx 51N_i^{0,6}$ y $g_m \approx 14N_i^{0,4}$, respectivamente.

5.5.2. Problemas de dispersión

A continuación se analizan varios problemas de dispersión con objeto de comprobar la precisión de las nuevas ondas generadas. Se consideran en primer lugar dos cubos de lado 2λ con una separación entre los centros de los mismos de 3λ . Dichos cubos están alineados en el eje x y la onda plana incidente es $\mathbf{E}^{imp} = e^{jkz}\hat{x}$. Para realizar la base de la expansión en modos esféricos así como para determinar el número de modos esféricos en caso de generación con CSWE se fija $n_l = 10$. En el caso de utilizar ondas planas, cada cubo es iluminado con 800 ondas planas. El umbral de la descomposición SVD se ha establecido igual a 10^{-2} y la frecuencia de análisis se fija a 300MHz.

Los resultados para la RCS biestática total se encuentran reflejados en la figura 5.19 mostrando una excelente concordancia con los resultados de referencia obtenidos por el MoM. El número de modos característicos utilizado para modelar cada cuerpo es 225 ó 160 dependiendo de si se utilizan ondas planas o esféricas para generar las ondas esféricas características. Por otro lado, si se hubiesen usado ondas esféricas convencionales este número habría sido 880 (supuesto $n_l = 10$). En caso de emplear incógnitas RWG, el número de incógnitas habría ascendido hasta 7.200.

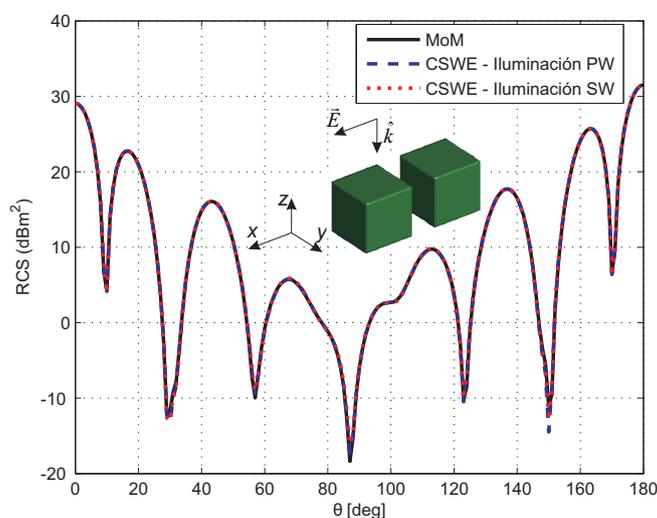


Figura 5.19: RCS biestática total en el plano $\phi = 0^\circ$ de dos cubos de 2λ con una separación entre sus centros de 3λ .

El segundo ejemplo se ha escogido para ilustrar que el método mantiene su buen comportamiento en caso de elementos dispares. Para ello, se considera el mismo ejemplo de antes, manteniendo uno de los cubos y reemplazando el otro por una esfera de radio λ . Las iluminaciones, el número de ondas incidentes y el umbral de la descomposición SVD se mantienen iguales a los del anterior ejemplo.

Puesto que el cubo permanece sin cambios, los resultados de compresión en términos de armónicos esféricos son iguales a los del ejemplo anterior, es decir 225 ó 160 modos en total dependiendo de si se usa iluminación por ondas esféricas u ondas planas, respectivamente. En el caso de la esfera, el número de armónicos característicos que se obtienen tras la SVD es de 274 y 160 según la iluminación sea por ondas esféricas o por ondas planas. Los resultados para la RCS biestática total se encuentran recogidos en la figura 5.20 mostrando nuevamente muy buena concordancia con el método de los momentos, especialmente en el caso de utilizar iluminación por ondas planas.

5.5.3. Problemas de radiación

Se continúa el análisis con problemas de radiación los cuales habitualmente requieren una mayor precisión puesto que se trabaja de forma directa con las corrientes para la obtención de algunos parámetros.

El primero de los ejemplos que se considera es una agrupación bidimensional de

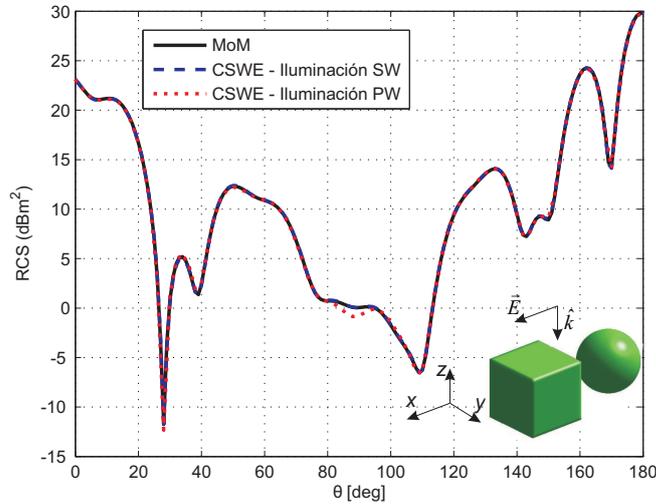


Figura 5.20: RCS biestática total en el plano $\phi = 0^\circ$ de un cubo de lado 2λ y una esfera de radio λ con una separación entre sus centros de 3λ .

dipolos de placa ancha similar a la analizada anteriormente en este capítulo (ver figura 5.12) pero de tamaño 10×10 elementos. En este caso, tan sólo consideraremos iluminación con modos esféricos pues se ha mostrado más exacta e intuitiva que la formulación con ondas planas. Las expansiones en ondas esféricas se realizan utilizando $n_l = 4$. Este valor también se utiliza para calcular el número de ondas incidentes durante el proceso de generación de las mismas.

Fijando el umbral de la descomposición SVD en 10^{-2} se obtiene tan sólo un modo esférico característico cuya composición se muestra en la figura 5.21. La citada gráfica muestra la primera (y única) columna de la matriz \overline{C} , es decir, el peso que tiene cada modo esférico para formar el modo característico. Como se puede ver el modo obtenido es principalmente una combinación de los modos convencionales 2 y 6, y en menor medida los modos 18, 22, 26 y 30.

Los resultados para el coeficiente de reflexión activo a la entrada de cada dipolo se muestran en la figura 5.22. Estos resultados fueron generados utilizando la misma alimentación para todos los elementos. A pesar de utilizarse tan sólo un modo característico, la diferencia con los resultados de referencia es muy pequeña. En este caso la matriz del sistema de ecuaciones resultante posee un tamaño 100×100 que contrasta con la matriz de tamaño 7.000×7.000 que se obtendría si se utilizasen ondas esféricas tradicionales (tomando $n_l = 4$). Si este problema tuviese que ser resuelto de forma directa con el método de los momentos, la matriz resultante tendría dimensiones 8.700×8.700 .

Con objeto de ilustrar que el método presenta una buena convergencia para

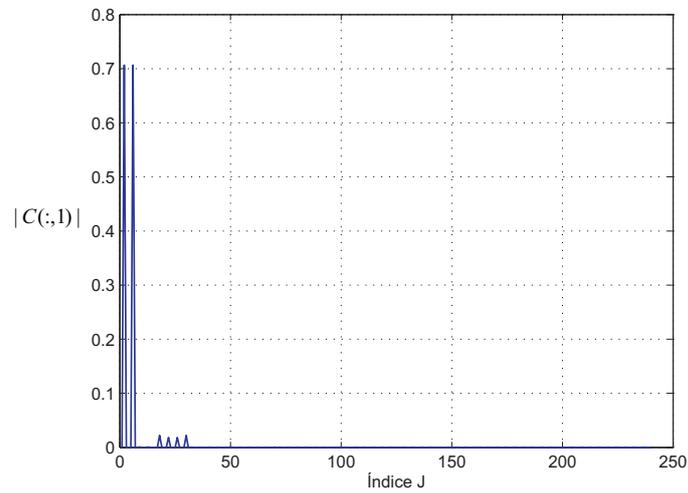


Figura 5.21: Composición del primer modo característico para un dipolo de placa ancha.

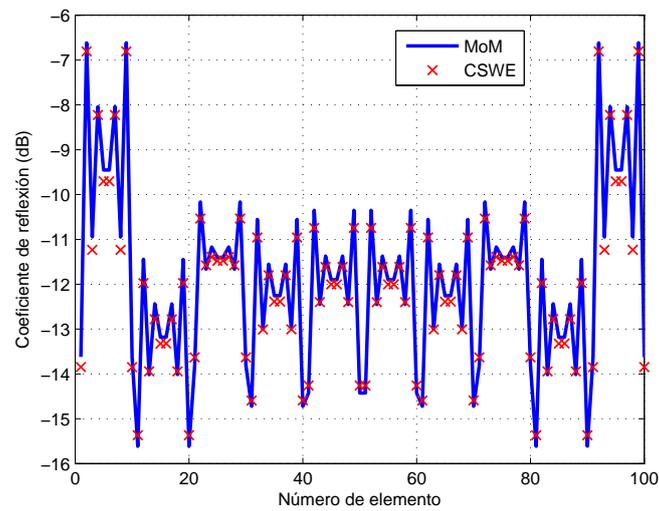


Figura 5.22: Coeficiente de reflexión de cada elemento de una agrupación de 10×10 dipolos de placa ancha.

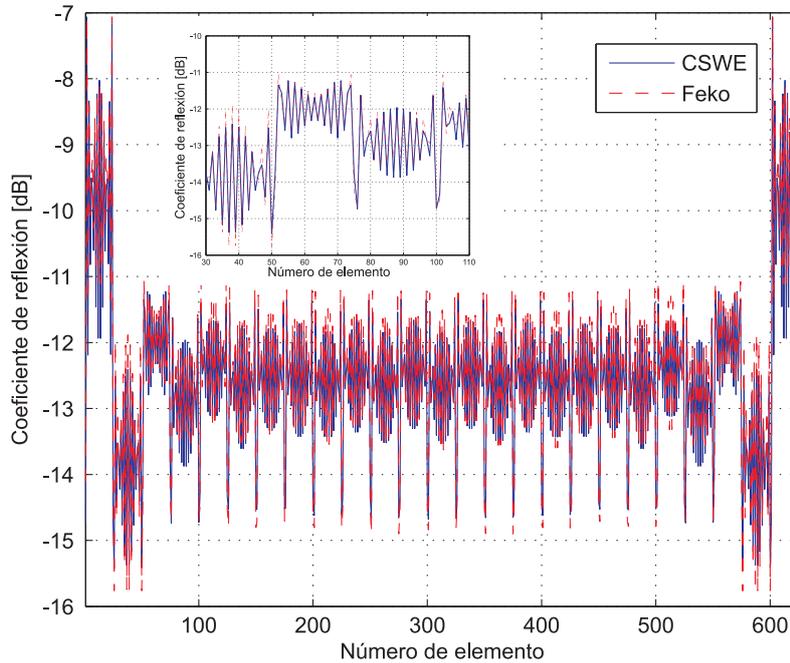


Figura 5.23: Coeficiente de reflexión de cada elemento de una agrupación de 25×25 dipolos de placa ancha. Se mantiene el orden de numeración de la figura 5.13.

problemas de mayores dimensiones consideraremos una agrupación de dimensiones 25×25 elementos con alimentación uniforme. Los resultados para esta agrupación se encuentran en la figura 5.23. En este caso los resultados de referencia han sido generados mediante el software comercial Feko. El tamaño de la matriz del sistema de ecuaciones en este caso es de 625×625 mostrando un gran ahorro con respecto a la matriz de dimensiones 54.375×54.375 para el método de los momentos y 43.750×43.750 para el caso de usar ondas esféricas convencionales.

La figura 5.23 muestra el coeficiente de reflexión a la entrada de cada uno de los 625 elementos. Se ha incluido un zoom de dicha imagen para apreciar mejor los detalles. La diferencia del método aquí presentado con los resultados obtenidos con el MLFMA es muy pequeña, máxime si se tiene en cuenta que la implementación de ambos métodos es totalmente distinta.

Como último ejemplo de aplicación, analizaremos el acoplo entre dos antenas de resonador dieléctrico (*Dielectric Resonator Antenna, DRA*). Esta geometría se encuentra recogida en la figura 5.24. El radio de cada semiesfera es $R = 12,7$ mm, mientras que la distancia del centro de la semiesfera a la base de la alimentación es $b = 6,4$ mm. La altura del conductor interno del coaxial que se introduce dentro del dieléctrico es $h = 6,5$ mm. La constante dieléctrica de cada semiesfera es $\epsilon_r = 9,5$. El radio del conductor que alimenta cada DRA se ha fijado en 0,75 mm. Debemos

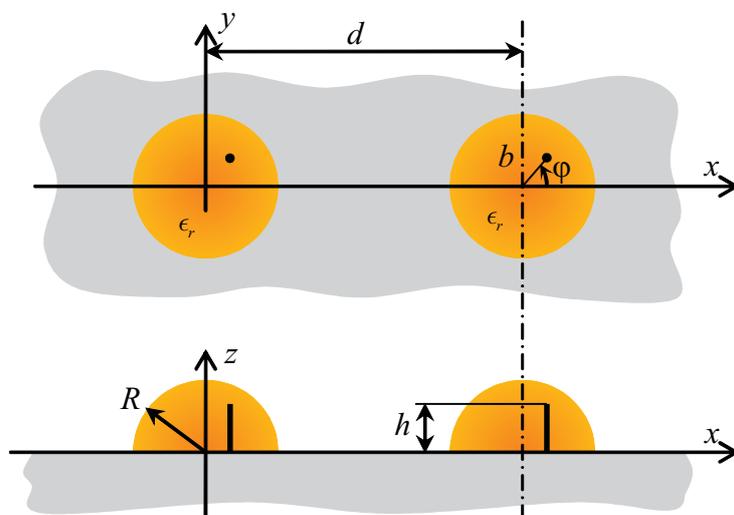


Figura 5.24: Geometría de la agrupación compuesta por dos resonadores dieléctricos esféricos.

reseñar que la obtención de matrices de dispersión no se ha realizado con código propio sino con el software comercial Feko, dada la habilidad de éste para manejar materiales dieléctricos.

Esta estructura ha sido medida en [Luk94] a la frecuencia de resonancia de cada uno de los DRAs. Dicha frecuencia se encontró a 3,84 GHz, no obstante las simulaciones de [Luk94] y [Rub05] resuenan a 3,68 GHz por lo que a la hora de comparar parámetros, los autores han utilizado los resultados obtenidos a esa frecuencia. Esta diferencia ha sido achacada a dificultades técnicas durante la perforación de la placa metálica. La figura 5.25 muestra el parámetro S_{11} obtenido mediante un análisis con Feko. La frecuencia de resonancia obtenida es muy cercana a los 3,68 GHz obtenidos en otros trabajos y, por tanto, se ha llevado a cabo el análisis a dicha frecuencia.

Para modelar cada uno de los DRA se utilizaron 384 triángulos. Este número, el cual es relativamente elevado para el tamaño eléctrico de la estructura, se ha escogido con objeto de preservar la forma de las esferas. Como consecuencia, el número de incógnitas RWG para modelar las corrientes eléctricas y magnéticas es de 1092 incógnitas RWG. Para modelar el hilo que alimenta los DRA se utilizaron dos funciones base. Por tanto, el número total de incógnitas por DRA es 2186.

Para la generación de los modos característicos se ha utilizado nuevamente $n_l = 4$. El número de ondas que sobreviven a la SVD, con un umbral fijado en 10^{-2} , es de tan sólo 7 lo cual contrasta con las 30 ó 70 ondas esféricas que harían falta si se fija $n_l = 2$ o $n_l = 4$, respectivamente.

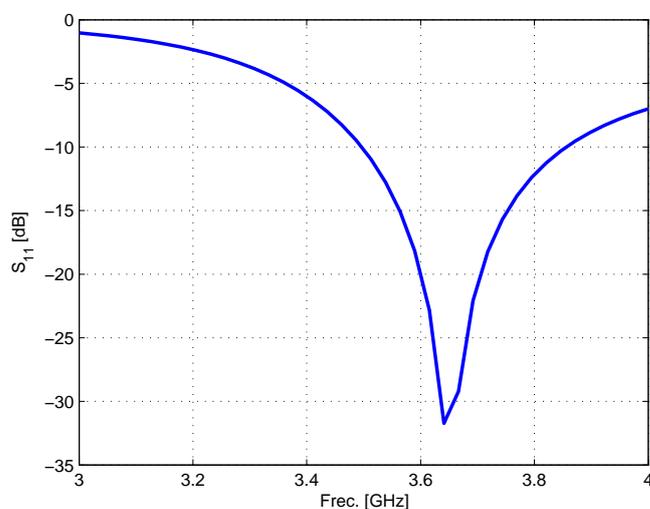


Figura 5.25: Parámetro S_{11} de un DRA aislado.

La figura 5.26 muestra una comparación entre el método aquí expuesto y los resultados obtenidos por Feko. Se acompañan también las medidas de [Luk94]. En todos los casos, los datos simulados muestran una gran proximidad a las medidas adquiridas en laboratorio por [Luk94].

5.6 Conclusiones

En este capítulo se ha explicado y contrastado como el algoritmo CBFM puede ser extendido para crear un nuevo conjunto de ondas esféricas que nos permitan una representación más eficiente del campo radiado por una cierta geometría.

Esta expansión ha sido introducida dentro de los sistemas de ecuaciones que surgen al analizar agrupaciones de elementos, obteniendo una reducción del número de incógnitas similar a la obtenida con la versión multinivel del CBFM. Esta reducción de incógnitas nos ha permitido la resolución directa de sistemas de ecuaciones que de otra forma no habría sido posible con las técnicas tradicionales. Una ventaja adicional del método es que evita el efecto del sobredimensionamiento del número de ondas en el tamaño del sistema de ecuaciones. Por contra, el precio a pagar es una mayor restricción en el tipo de problemas que se pueden analizar y la carencia de esquemas de aceleración para el cálculo rápido de la matriz del sistema de ecuaciones.

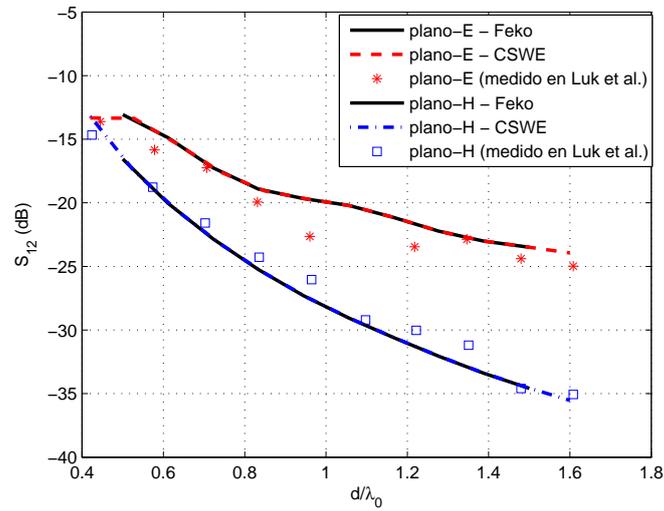


Figura 5.26: Parámetro S_{12} de una agrupación compuesta por dos resonadores dieléctricos. Resultados para el plano-E ($\varphi = 0^\circ$) y plano-H ($\varphi = 90^\circ$).

Capítulo 6

Conclusiones y líneas futuras

6.1 Conclusiones

En esta tesis se han presentado diversas técnicas con el nexo en común de la descomposición de dominios. Como punto de partida inicial se han detallado las técnicas de descomposición espacial clásica para posteriormente ir refinando estas técnicas hasta desarrollar una extensión multinivel del método de las funciones base características así como la extensión de este método al uso con ondas esféricas. A continuación se recopilan las principales conclusiones que se han extraído a lo largo de esta tesis:

- Descomposición de dominios clásica: la descomposición de dominios espacial, en su versión tradicional, presenta problemas de convergencia que limitan su aplicación a casos particulares en los cuales se tienen un cierto grado de certeza respecto a la posibilidad de dicha convergencia.
- Uso de corrientes equivalentes: para ciertas geometrías es posible optimizar la forma de interactuar entre dominios mediante la incorporación del teorema de equivalencia superficial. De este modo, se logra evitar calcular la radiación de todos los bloques existentes sobre un cierto bloque.
- Funciones base características: se ha demostrado como es posible generar funciones base muy eficientes para dominios aislados. Además, se ha comprobado que estas funciones base tienden a ser un conjunto completo y, por tanto, asintóticamente permiten obtener la misma precisión que las funciones base de bajo nivel.
- Funciones base características multinivel: las funciones base características se

vuelven más eficientes cuanto mayor es el tamaño del bloque. El análisis de estos bloques de gran tamaño resulta imposible con las técnicas tradicionales. Sin embargo, una utilización recursiva del método de las funciones base características permite resolver este inconveniente.

- Libre de iteraciones: el método de las funciones base características no es un algoritmo de resolución directa propiamente dicho. Sin embargo, el menor tamaño de las matrices obtenidas permite su resolución sin iteraciones. De esta forma, se evitan los problemas de convergencia que habitualmente presentan las técnicas iterativas. No obstante, también es importante reseñar que el tamaño de los problemas que se puede manejar es habitualmente menor que con dichas técnicas iterativas.
- Resolución de múltiples lados derechos de la ecuación: cuando la matriz reducida del método de las funciones base características se resuelve de forma directa, es posible manejar múltiples excitaciones de forma simultánea. Este hecho es especialmente útil en el cálculo de RCS monoestáticas o en la síntesis de grandes agrupaciones.
- Paralelizable: debido a la propia estrategia de descomposición de dominios en la que se basa el método de las funciones base características, es posible llevar a cabo una paralelización a nivel de dominio. Esta técnica permite llevar a cabo de forma completamente independiente cada uno de los cálculos entre bloques permitiendo una estrategia sencilla y eficiente.
- Extensible a otras técnicas: las ideas en las que se basa el método de las funciones base características son extensibles a otros ámbitos como por ejemplo el análisis mediante ondas esféricas características. De este modo, es posible trasladar los beneficios de la reducción de incógnitas de este método a otros ámbitos.

6.2 Líneas futuras

Tal y como se ha matizado a lo largo de la memoria, la generación de funciones base se ha llevado a cabo iluminando los bloques con ondas planas. Por motivos numéricos el espectro de direcciones de estas ondas debe ser discretizado y, además es habitual considerar sólo ondas planas no evanescentes. Si bien se han mostrado reglas empíricas que conducen a resultados precisos, se espera que el uso de *armónicos esféricos como iluminación* dé lugar a un método más robusto.

Aunque el método multinivel ha sido descrito en su forma más general, los resultados aquí mostrados han sido obtenidos utilizando tan sólo dos niveles debido

al pequeño número de bloques de segundo nivel. Resulta pues de interés comprobar si un *esquema con un mayor número de niveles* permitiría una mejora de la eficiencia en tiempo o memoria para ello sería necesario abordar problemas de mayor tamaño que generasen un mayor número de bloques de segundo nivel.

La versión multinivel del método de las funciones base características ha mostrado una sencilla y eficiente paralelización para sistemas en los que el número de procesadores es más bajo, o del orden, que número de bloques. En caso de disponer de sistemas con un mayor número de unidades de procesamiento, es conveniente modificar parte de las estrategias mostradas. De cara a afrontar este inconveniente, se propone mover las estrategias de paralelización a niveles inferiores donde el número de bloques es mayor permitiendo un reparto más eficiente.

El método de las funciones base características permite comprimir la matriz del método de los momentos eliminando grados de libertad para modelar las corrientes en un bloque. Sin embargo, las principales *técnicas de resolución directa* se basan en esquemas que comprimen la interacción entre bloques lejanos. Por tanto, es posible a priori *hibridar* ambos tipos de esquema de modo que los bloques que modelan la interacción entre CBFs lejanas sean comprimidos.

Una de las grandes ventajas del método de las funciones base características es la posibilidad de usar funciones base de gran tamaño y forma arbitraria. Una de las opciones que permite esta característica es la *extensión de técnicas bidimensionales a entornos tridimensionales*. De este modo, es posible por ejemplo extender (de manera finita) la geometría modelada en dos dimensiones a lo largo de la tercera dimensión para, posteriormente, dividir esta geometría en bloques que cubran el largo de la nueva extensión aplicada. De esta forma, puesto que las nuevas funciones base abarcan toda la “nueva” dimensión, es posible aplicar las técnicas bidimensionales de forma casi directa.

Otra opción que se considera de interés es la *hibridación de la metodología del CBFM con técnicas de solución incremental* del método de los momentos. Esto es posible ya que, el método de las funciones base características permite almacenar partes de la matriz de acoplos de forma compacta. De este modo, es posible por ejemplo el diseño incremental de antenas embarcadas a un coste muy bajo.

Con respecto a la aplicación del CBFM al análisis con ondas esféricas características, queda pendiente el uso de alguna técnica de cálculo rápido de los acoplos entre elementos. Al igual que sucedía con el método de las funciones base características, un buen candidato para estas técnicas es la aproximación adaptativa en cruz (ACA).

Apéndice A

Matrices de acoplo de dominios por medio de corrientes equivalentes

Como hemos visto en el capítulo 2, la formulación de descomposición de dominios basada en el uso de corrientes equivalentes, puede expresarse como un esquema iterativo con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{Z}}_{ii} \bar{I}_i^{(k+1/2)} &= \bar{V}_i - \left(\bar{\bar{Z}}_{i,p} \bar{J}_{i,p}^{(k+1/2)} + \bar{\bar{G}}_{i,p} \bar{M}_{i,p}^{(k+1/2)} + \bar{\bar{Z}}_{i,a} \bar{J}_{i,a}^{(k)} + \bar{\bar{G}}_{i,a} \bar{M}_{i,a}^{(k)} \right) \\ \bar{\bar{Z}}_{ii} \bar{I}_i^{(k+1)} &= \bar{V}_i - \left(\bar{\bar{Z}}_{i,p} \bar{J}_j^{(k+1/2)} + \bar{\bar{G}}_{i,p} \bar{M}_j^{(k+1/2)} + \bar{\bar{Z}}_{i,a} \bar{J}_j^{(k+1)} + \bar{\bar{G}}_{i,a} \bar{M}_j^{(k+1)} \right)\end{aligned}$$

las matrices $\bar{\bar{Z}}_{i,x}$ y $\bar{\bar{G}}_{i,x}$ -con $x = p$ ó $x = a$ - modelan la radiación de las corrientes eléctricas y magnéticas sobre el dominio i -ésimo. Tal y como se describió en el capítulo anterior dichas corrientes pueden estar al inicio del dominio ($x = p$) o al final ($x = a$).

La entrada correspondiente a la fila m y columna n de la matriz $\bar{\bar{Z}}_{i,p}$ debe contener el campo eléctrico radiado por la función base n -ésima perteneciente a las funciones base que modelan la corriente eléctrica equivalente al inicio del dominio i -ésimo. Además, dicho campo debe estar promediado por la función base m -ésima dentro del dominio i -ésimo.

Las entradas correspondientes a la matriz $\bar{\bar{Z}}_{i,a}$ se definen como las de la matriz anterior, con la diferencia de que ahora se consideran las fuentes al final del dominio. El mismo razonamiento se puede realizar con respecto a las matrices $\bar{\bar{G}}_{i,p}$ y $\bar{\bar{G}}_{i,a}$ con la salvedad de que ahora el campo radiado a considerar es el magnético y no el eléctrico.

Teniendo en cuenta la formulación de campos eléctricos en función de corrientes

eléctricas y magnéticas en (2.24), las expresiones para dichas matrices son:

$$\overline{\overline{Z}}_{i,p}(m, n) = \langle \mathcal{L}(\mathbf{j}_n^{(i,p)}), \mathbf{f}_{i,m} \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{\overline{Z}}_{i,a}(m, n) = \langle \mathcal{L}(\mathbf{j}_n^{(i,a)}), \mathbf{f}_{i,m} \rangle \quad (\text{A.2})$$

$$\overline{\overline{G}}_{i,p}(m, n) = \langle -\mathcal{K}(\mathbf{m}_n^{(i,p)}), \mathbf{f}_{i,m} \rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\overline{\overline{G}}_{i,a}(m, n) = \langle -\mathcal{K}(\mathbf{m}_n^{(i,a)}), \mathbf{f}_{i,m} \rangle \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{f}_{i,m}$ es la función base m -ésima dentro del dominio i -ésimo; y $\mathbf{j}_n^{(i,p)}$, $\mathbf{j}_n^{(i,a)}$, $\mathbf{m}_n^{(i,p)}$ y $\mathbf{m}_n^{(i,a)}$ son las funciones base para las corrientes eléctricas y magnéticas tal y como están definidas en (2.57) y (2.58).

A la hora de actualizar las corrientes equivalentes al inicio de cada dominio, se debe tener en cuenta la radiación de las siguientes fuentes:

- Corrientes eléctricas inducidas en el interior del dominio *sin* la zona solapada con el siguiente dominio.
- Corrientes eléctricas equivalentes situadas al inicio del dominio.
- Corrientes magnéticas equivalentes situadas al inicio del dominio.
- Campo electromagnético debido a fuentes impresas en el interior del dominio *sin* la zona solapada con el siguiente dominio.

En base a lo anterior, las corrientes equivalentes situadas al inicio del dominio $(i + 1)$ -ésimo pueden ser calculadas como:

$$\overline{\overline{J}}_{(i+1),p}^{(k+1/2)} = \overline{\overline{A}}_{i,p} \overline{\overline{I}}_{i,p}^{(k+1/2)} + \overline{\overline{B}}_{i,p} \overline{\overline{J}}_{i,p}^{(k+1/2)} + \overline{\overline{C}}_{i,p} \overline{\overline{M}}_{i,p}^{(k+1/2)} + \overline{\overline{P}}_{i,p} \quad (\text{A.5})$$

$$\overline{\overline{M}}_{(i+1),p}^{(k+1/2)} = \overline{\overline{D}}_{i,p} \overline{\overline{I}}_{i,p}^{(k+1/2)} + \overline{\overline{E}}_{i,p} \overline{\overline{J}}_{i,p}^{(k+1/2)} + \overline{\overline{F}}_{i,p} \overline{\overline{M}}_{i,p}^{(k+1/2)} + \overline{\overline{Q}}_{i,p} \quad (\text{A.6})$$

donde el vector $\overline{\overline{I}}_{i,p}^{(k+1/2)}$ contiene los coeficientes de las funciones base en el dominio i -ésimo *sin* la parte solapada con el siguiente dominio; el resto de matrices realizan las siguientes operaciones:

- Matriz $\overline{\overline{A}}_{i,p}$: se encarga de proyectar las corrientes eléctricas en el interior del dominio i -ésimo (sin la parte solapada con el siguiente dominio) sobre las corrientes eléctricas al comienzo del siguiente dominio. Para ello la columna m -ésima de la matriz contendrá los coeficientes de la expansión de la corriente eléctrica equivalente situada al comienzo del siguiente dominio.

-
- Matriz $\overline{\overline{B}}_{i,p}$: se encarga de proyectar las corrientes eléctricas equivalentes al inicio del dominio i -ésimo sobre las corrientes eléctricas al comienzo del siguiente dominio. Para ello la columna m -ésima de la matriz contendrá los coeficientes de la expansión de la corriente eléctrica equivalente situada al comienzo del siguiente dominio.

 - Matriz $\overline{\overline{C}}_{i,p}$: se encarga de proyectar las corrientes magnéticas equivalentes al inicio del dominio i -ésimo (sin la parte solapada con el siguiente dominio) sobre las corrientes eléctricas al comienzo del siguiente dominio. Para ello la columna m -ésima de la matriz contendrá los coeficientes de la expansión de la corriente eléctrica equivalente situada al comienzo del siguiente dominio.

 - Matriz $\overline{\overline{D}}_{i,p}$: se encarga de proyectar las corrientes eléctricas en el interior del dominio i -ésimo (sin la parte solapada con el siguiente dominio) sobre las corrientes magnéticas al comienzo del siguiente dominio. Para ello la columna m -ésima de la matriz contendrá los coeficientes de la expansión de la corriente magnética equivalente situada al comienzo del siguiente dominio.

 - Matriz $\overline{\overline{E}}_{i,p}$: se encarga de proyectar las corrientes eléctricas equivalentes al inicio del dominio i -ésimo sobre las corrientes magnéticas al comienzo del siguiente dominio. Para ello la columna m -ésima de la matriz contendrá los coeficientes de la expansión de la corriente magnética equivalente situada al comienzo del siguiente dominio.

 - Matriz $\overline{\overline{F}}_{i,p}$: se encarga de proyectar las corrientes magnéticas equivalentes al inicio del dominio i -ésimo (sin la parte solapada con el siguiente dominio) sobre las corrientes magnéticas al comienzo del siguiente dominio. Para ello la columna m -ésima de la matriz contendrá los coeficientes de la expansión de la corriente magnética situada al comienzo del siguiente dominio.

Teniendo en cuenta que las corrientes eléctricas se expresan en términos del campo magnético mientras que las corrientes magnéticas se expresan en términos del campo eléctrico – ver (2.55) y (2.56)– si asumimos que las funciones base sobre las que se expanden las corrientes equivalentes eléctricas y magnéticas son *ortonormales* entre sí, entonces el elemento de la fila m y columna n de cada una de las matrices vendrá dado por la proyección –en forma de producto escalar– del campo magnético o eléctrico debido a la función base que produce la radiación sobre la función base

víctima, es decir:

$$\bar{\bar{A}}_{i,p}(m, n) = \left((\hat{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_{i,n})), \mathbf{j}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\bar{B}}_{i,p}(m, n) = \left((\hat{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{j}_n^{(i,p)})), \mathbf{j}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\bar{C}}_{i,p}(m, n) = \left(\frac{1}{\eta^2} (\hat{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{m}_n^{(i,p)})), \mathbf{j}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\bar{D}}_{i,p}(m, n) = \left(-(\hat{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{f}_{i,n})), \mathbf{m}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\bar{E}}_{i,p}(m, n) = \left(-(\hat{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{j}_n^{(i,p)})), \mathbf{m}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,p}(m, n) = \left((\hat{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{m}_n^{(i,p)})), \mathbf{m}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.12})$$

donde \hat{n} es un vector unitario que apunta hacia el exterior del dominio i -ésimo; y se recuerda que la notación (\cdot, \cdot) indica producto escalar.

Por otro lado, los vectores $\bar{P}_{i,p}$ y $\bar{Q}_{i,p}$ contienen los coeficientes de la expansión de las corrientes equivalentes al inicio del dominio i -ésimo debidas a las fuentes impresas en el interior del dominio i -ésimo. El coeficiente m -ésimo de cada una de estas funciones vendrá dado por:

$$\bar{P}_{i,p}(m) = \left((\hat{n} \times \mathbf{H}_{i,p}^{imp}), \mathbf{j}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{Q}_{i,p}(m) = - \left((\hat{n} \times \bar{E}_{i,p}^{imp}), \mathbf{m}_m^{(i+1,p)} \right) \quad (\text{A.14})$$

siendo $\bar{E}_{i,p}^{imp}$ y $\bar{H}_{i,p}^{imp}$ el campo impreso debido a fuentes localizadas en el dominio i -ésimo (sin la parte solapada con el siguiente dominio).

De forma similar a como ocurría en el barrido ascendente, las ecuaciones para actualizar las corrientes eléctricas y magnéticas en el barrido en orden descendente son las siguientes:

$$\bar{J}_{(i-1),a}^{(k)} = \bar{\bar{A}}_{i,a} \bar{I}_{i,a}^{(k)} + \bar{\bar{B}}_{i,a} \bar{J}_{i,a}^{(k+1/2)} + \bar{\bar{C}}_{i,a} \bar{M}_{i,a}^{(k+1/2)} + \bar{P}_{i,a} \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{M}_{(i-1),a}^{(k)} = \bar{\bar{D}}_{i,a} \bar{I}_{i,a}^{(k)} + \bar{\bar{E}}_{i,a} \bar{J}_{i,a}^{(k+1/2)} + \bar{\bar{F}}_{i,a} \bar{M}_{i,a}^{(k+1/2)} + \bar{Q}_{i,a} \quad (\text{A.16})$$

donde el vector $\bar{I}_{i,a}^{(k+1/2)}$ contiene los coeficientes de las funciones base en el dominio i -ésimo sin la parte solapada con el dominio previo. Todas las matrices juegan papeles equivalentes a los que desempeñaban en el barrido ascendente y,

por tanto, los elementos de estas matrices vendrán dadas por:

$$\bar{\bar{A}}_{i,a}(m, n) = \left((\hat{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{f}_{i,n})), \mathbf{j}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{\bar{B}}_{i,a}(m, n) = \left((\hat{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{j}_n^{(i,a)})), \mathbf{j}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\bar{\bar{C}}_{i,a}(m, n) = \left(\frac{1}{\eta^2} (\hat{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{m}_n^{(i,a)})), \mathbf{j}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{\bar{D}}_{i,a}(m, n) = \left(-(\hat{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{f}_{i,n})), \mathbf{m}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\bar{E}}_{i,a}(m, n) = \left(-(\hat{n} \times \mathcal{L}(\mathbf{j}_n^{(i,a)})), \mathbf{m}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,a}(m, n) = \left((\hat{n} \times \mathcal{K}(\mathbf{m}_n^{(i,a)})), \mathbf{m}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.22})$$

las expresiones vecotes \bar{P} y \bar{Q} también son similares a las del barrido ascendente:

$$\bar{P}_{i,a}(m) = \left((\hat{n} \times \mathbf{H}_{i,p}^{imp}), \mathbf{j}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\bar{Q}_{i,a}(m) = - \left((\hat{n} \times \bar{E}_{i,p}^{imp}), \mathbf{m}_m^{(i-1,a)} \right) \quad (\text{A.24})$$

siendo $\bar{E}_{i,p}^{imp}$ y $\bar{H}_{i,p}^{imp}$ el campo impreso debido a fuentes localizadas en el dominio i -ésimo (sin la parte solapada con el siguiente dominio).

Finalmente, es importante reseñar que en caso de que las funciones base para la expansión de las corrientes equivalentes al inicio y al fin de los dominios no sean ortonormales entre sí, es posible recurrir a procesos de proyección especiales como el desarrollado en [Jak95] para funciones RWG.

Apéndice B

Interpolaciones sobre mallas regulares en dos dimensiones

La técnica de interpolación explicada en el capítulo 3 para el cálculo rápido de los términos de interpolación se apoya en dos esquemas de interpolación, a saber: lagrangiana y bilineal. En este apéndice se recopilan los principales aspectos referentes a dichas técnicas.

B.1 Interpolación bidimensional de Lagrange

La interpolación de Lagrange está englobada dentro de las interpolaciones polinómica. Supuesta una función bidimensional $f(x, y)$ de la cual se conoce su valor en una malla de puntos (x_i, y_j) de tamaño $n_x \times n_y$, entonces el polinomio de interpolación de Lagrange viene dado por:

$$p(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} \frac{w_i^x f(x_i, y_j) w_j^y}{(x-x_i)(y-y_j)}}{\sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} \frac{w_i^x w_j^y}{(x-x_i)(y-y_j)}} \quad (\text{B.1})$$

donde los pesos w_i^x y w_i^y están definidos como:

$$w_i^x = \prod_{k \neq i} \frac{1}{x_i - x_k} \quad (\text{B.2})$$

$$w_i^y = \prod_{k \neq i} \frac{1}{y_i - y_k} \quad (\text{B.3})$$

Cuanto mayor es el número de puntos empleado en la malla, mayor es el grado del polinomio de interpolación. De este modo, mallas muy grandes conducirán a

funciones de interpolación con fuertes oscilaciones. Cuando es conocido a priori que la función a interpolar no presenta este tipo de oscilaciones, es habitual utilizar tan solo aquellos puntos de la malla más cercanos al punto donde se desea interpolar, reduciendo así las oscilaciones del polinomio.

B.2 Interpolación bilineal

La interpolación bilineal es una extensión para mallas bidimensionales regulares de la interpolación lineal. Este tipo de interpolación se basa en realizar dos interpolaciones lineales una en cada dirección de la malla. Por tanto, si tenemos un conjunto de cuatro puntos (x_i, y_j) ($i = 1, 2$ y $j = 1, 2$) pertenecientes a una malla regular, y queremos calcular el valor de una función $f(x, y)$, la cual es conocida en dichos puntos, mediante una operación bilineal, en un punto (x, y) la operación a realizar es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & \frac{f(x_1, y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y_2 - y) \\
 & + \frac{f(x_2, y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y_2 - y) \\
 & + \frac{f(x_1, y_2)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y - y_1) \\
 & + \frac{f(x_2, y_2)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y - y_1) \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Es importante reseñar que si bien la interpolación bilineal realiza una interpolación lineal a lo largo de cualquier paralela al eje x o al eje y , a lo largo de cualquier otra línea la interpolación es *cuadrática*.

Apéndice **C**

Expansión de campos electromagnéticos en modos esféricos

En un medio homogéneo, lineal e isótropo las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse de la forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (\text{C.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (\text{C.2})$$

siendo \mathbf{E} el campo eléctrico, \mathbf{H} el campo magnético, \mathbf{J} la densidad de corriente eléctrica, \mathbf{M} la densidad de corriente magnética, y ϵ y μ la permitividad y permeabilidad del medio, respectivamente, del medio. Se asume una dependencia temporal del tipo $e^{j\omega t}$ que se suprime a efectos de formulación.

Si el medio está libre de fuentes, entonces cualquier campo eléctrico o magnético debe satisfacer la siguiente ecuación de onda vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) - k^2\mathbf{F} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Es posible demostrar que las siguientes funciones vectoriales satisfacen la ecuación (C.3) [Han88]:

$$\mathbf{m} = \nabla f \times \mathbf{r} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{n} = k^{-1}\nabla \times \mathbf{m}, \quad (\text{C.5})$$

siendo f una solución de la ecuación de onda escalar:

$$(\nabla^2 + k^2)f = 0. \quad (\text{C.6})$$

Esta ecuación de onda escalar expresada en coordenadas esféricas puede ser resuelta mediante la estrategia de separación de variables, expandiendo f como:

$$f(\mathbf{r}) = f_r(r)f_\theta(r)f_\phi(r). \quad (\text{C.7})$$

c	$z_n^{(c)}$	Tipo de modo
1	j_n	Estacionario acotado en el origen
2	n_n	Estacionario no acotado en el origen
3	$h_n^{(1)}$	Propagativo hacia el interior
4	$h_n^{(2)}$	Propagativo hacia el exterior

Tabla C.1: Tipo de modos esféricos.

Utilizando esta separación de variables, las soluciones a (C.6) pueden ser expresadas como combinaciones lineales de la función generatriz:

$$f_{mn}^{(c)}(r, \theta, \phi) = z_n^{(c)}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi}, \quad (\text{C.8})$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = -n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n$; $P_n^{|m|}$ es el polinomio de Legendre de grado n y orden m ; y $z_n^{(c)}$ es una función esférica de Bessel de orden n . La tabla (C.1) recoge los posibles valores que puede tomar la constante c y que determinan el tipo de función.

A partir de la solución a la ecuación de onda escalar y utilizando las expresiones (C.4) y (C.5) podemos construir las siguientes soluciones a la ecuación de onda vectorial:

$$\mathbf{F}_{1mn}^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left(-\frac{m}{|m|} \right)^m \left\{ z_n^{(c)}(kr) \frac{jm \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} e^{jm\phi} \hat{\theta} - z_n^{(c)}(kr) \frac{d\bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} e^{jm\phi} \hat{\phi} \right\} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{F}_{2mn}^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left(-\frac{m}{|m|} \right)^m \left\{ \frac{n(n+1)}{kr} z_n^{(c)}(kr) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{jm\phi} \hat{r} + \frac{1}{kr} \frac{d(kr z_n^{(c)}(kr))}{d(kr)} \frac{d\bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} e^{jm\phi} \hat{\theta} + \frac{1}{kr} \frac{d(kr z_n^{(c)}(kr))}{d(kr)} \frac{jm \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} e^{jm\phi} \hat{\phi} \right\}, \quad (\text{C.10})$$

donde $\bar{P}_n^{|m|}$ es el polinomio de Legendre normalizado de grado n y orden m . Estas soluciones reciben el nombre de ondas esféricas o modos esféricos.

Apéndice **D**

Cálculo de matrices de scattering con el método de los momentos

El cálculo de las matrices de scattering es típicamente llevado a cabo mediante el método de elementos finitos puesto que la propia estructura del método facilita el cálculo de las mismas. Sin embargo, el cómputo de las mismas es posible de forma eficiente también mediante el método de los momentos. En este apéndice se ilustra como se puede llevar a cabo dicho proceso, aprovechando las propiedades lineales de las ecuaciones involucradas.

En primer lugar, debemos tener en cuenta el significado de cada una de las entradas de las matrices de scattering. Su interpretación es sencilla si se considera por ejemplo la iluminación utilizando solamente la onda esférica n -ésima. En este caso, el vector de entradas a la matriz de scattering \bar{a} constará tan solo de una entrada distinta de cero en la posición n y, por tanto, el vector con los coeficientes de las ondas salientes \bar{b} estará compuesto por la columna m -ésima de la matriz de scattering. Es decir, la n -ésima columna de la matriz de scattering contiene los coeficientes de la expansión en ondas esféricas del campo dispersado como consecuencia de usar como excitación la onda esférica número n .

Por tanto, para calcular la columna m de la matriz debemos excitar con la onda esférica número m y descomponer el campo radiado en modos esféricos. En el caso de utilizar el método de los momentos, al utilizar la excitación previamente considerada obtendremos un conjunto de corrientes sobre las superficies o volúmenes donde se imponen las condiciones de contorno. El siguiente paso sería calcular el campo radiado por dichas corrientes sobre una superficie esférica que envuelva al cuerpo bajo análisis para posteriormente descomponer dicho campo en modos esféricos mediante las bien conocidas expresiones de [Han88, Capítulo 3].

Sin embargo, esta expresión, muy utilizada en el campo de medida de antenas para transformaciones de campo cercano-campo lejano, implica calcular el campo radiado por las corrientes. Este paso intermedio puede ser evitado usando la expresión derivada en [Han88, Apéndice A] que nos permite calcular los coeficientes de la expansión directamente a partir de las corrientes. De este modo, el coeficiente del modo smn radiado por unas ciertas fuentes eléctricas \vec{J} y magnéticas \vec{M} puede ser calculado como:

$$Q_{smn}^{(4)} = (-1)^{m+1} \int_V \left(k\sqrt{\eta} \mathbf{F}_{s,-m,n}^{(1)} \cdot \mathbf{J} - j \frac{k}{\sqrt{\eta}} \mathbf{F}_{3-s,-m,n}^{(1)} \cdot \mathbf{M} \right) dV. \quad (\text{D.1})$$

La operación anteriormente citada debe ser repetida para cada una de las corrientes calculadas como consecuencia de iluminar con cada uno de los modos esféricos. Esta operación puede ser acelerada teniendo en cuenta ciertas propiedades de linealidad. Así, si consideramos la expansión de la corriente en serie de funciones base conocidas:

$$\mathbf{J} = \sum_l I_l \mathbf{f}_l \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{M} = \sum_l M_l \mathbf{g}_l, \quad (\text{D.3})$$

siendo \mathbf{f} las funciones base utilizadas para expandir la corriente eléctrica y \mathbf{g} las funciones base utilizadas para expandir la corriente magnética. Dependiendo de la formulación, muchas veces estas funciones base serán las mismas, no obstante en el presente desarrollo se considera el caso más general donde ambas pueden ser distintas.

Introduciendo las expansiones anteriores en (D.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_{smn}^{(4)} &= (-1)^{m+1} \left(\sum_l I_l \int_V k\sqrt{\eta} \mathbf{F}_{s,-m,n}^{(1)} \cdot \mathbf{f}_l dV - \sum_l M_l \int_V j \frac{k}{\sqrt{\eta}} \mathbf{F}_{3-s,-m,n}^{(1)} \cdot \mathbf{g}_l dV \right) = \\ &= (-1)^{m+1} \left(\bar{W}_e^t \cdot \bar{I} + \bar{W}_h^t \cdot \bar{M} \right), \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

donde la entrada l -ésima de los vectores \bar{W} viene dada por:

$$W_{e,smn}(l) = k\sqrt{\eta} \int_V \mathbf{F}_{s,-m,n}^{(1)} \cdot \mathbf{f}_l dV \quad (\text{D.5})$$

$$W_{h,smn}(l) = -j \frac{k}{\sqrt{\eta}} \int_V \mathbf{F}_{3-s,-m,n}^{(1)} \cdot \mathbf{g}_l dV. \quad (\text{D.6})$$

Por tanto, utilizando la notación de un solo índice obtenemos que la matriz de scattering puede calcularse como:

$$S = \begin{pmatrix} \bar{W}_{e,1}^t & \bar{W}_{m,1}^t \\ \vdots & \vdots \\ \bar{W}_{e,N_{\max,b}}^t & \bar{W}_{e,N_{\max,b}}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 & \cdots & \bar{I}_{N_{\max,a}} \\ \bar{M}_1 & \cdots & \bar{M}_{N_{\max,a}} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

siendo $N_{\max,a}$ el número total de modos máximo que se considera a la entrada y $N_{\max,b}$ el número total de modos máximo que se considera a la salida, es decir, las dimensiones de los vectores \bar{a} y \bar{b} ; y siendo \bar{I}_l y \bar{M}_l los coeficientes de las expansiones (D.2) y (D.3) debidos a utilizar como excitación la onda esféricas l -ésima.

Finalmente, es importante notar que el cálculo de la matriz de scattering para un cierto cuerpo implica calcular las corrientes debido a múltiples excitaciones. Por este motivo, es recomendable utilizar un método de solución directa que permita calcular la solución a todas las excitaciones en una sola operación. Para cuerpos de pequeño tamaño es recomendable utilizar una factorización de la matriz del sistema de ecuaciones involucrada en el método de los momentos. Cuerpos de mayor tamaño pueden requerir métodos más avanzados como por ejemplo el método de las funciones base características [Pra03].

Apéndice E

Cálculo de las matrices de traslación

A la hora de plantear el sistema de ecuaciones basado en modos esféricos, es necesario expresar los modos radiados por un cierto elemento (tipo $c = 4$) en un sistema de coordenadas i , cuyo origen es O y al cual nos referiremos mediante coordenadas sin primar, en modos referidos a un nuevo sistema de coordenadas j , cuyo origen es O' y al cual nos referiremos mediante coordenadas primadas.

Es importante reseñar que habitualmente los ejes cartesianos de cada sistema de coordenadas se escogen por comodidad para que sean paralelos entre ellos, diferenciándose por tanto tan solo en la situación de su origen de coordenadas y no en su orientación.

Recordemos que la operación se realiza mediante la operación matricial:

$$\bar{a}_j = \bar{\bar{G}}_{ji} \bar{b}_i, \quad (\text{E.1})$$

siendo \bar{a}_j los coeficientes de los modos esféricos referidos respecto al sistema j y \bar{b}_i los coeficientes de los modos esféricos referidos respecto al sistema i . Denotaremos por \mathbf{d} el vector que une los centros de los sistemas de coordenadas.

Esta operación de traslación puede ser realizada de forma genérica combinando operaciones de traslación a lo largo del eje z con operaciones de rotación. Para ello se realizan los siguientes pasos:

1. operación de rotación que nos orienta el sistema de coordenadas en la dirección adecuada para que un desplazamiento a través del nuevo eje z nos sitúe el origen de coordenadas en O' ,
2. desplazamiento a lo largo del nuevo eje z ,

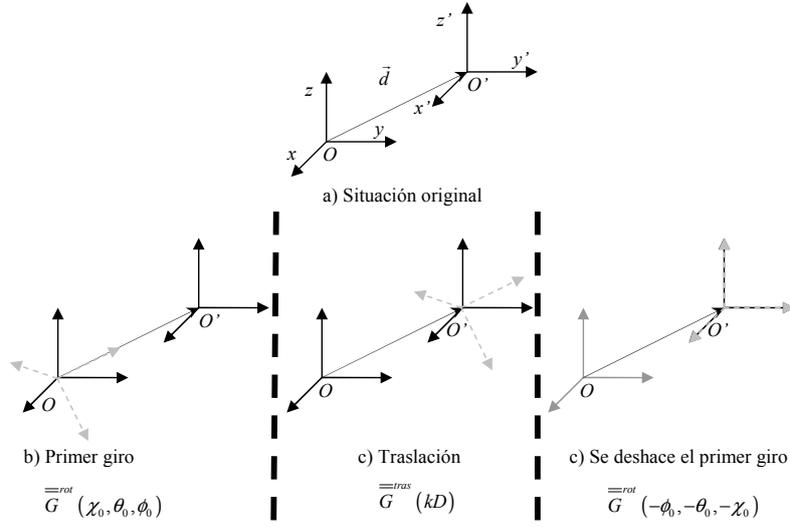


Figura E.1: Rotación de el sistema (x, y, z) al sistema (x', y', z') .

3. rotación inversa a la del paso 1.

La concatenación de estas operaciones se encuentra recogida en la figura E.1.

Matricialmente, esto implica tres operaciones:

$$\overline{\overline{G}}_{ji} = \overline{\overline{G}}^{rot}(-\varphi_0, -\theta_0, -\chi_0) \overline{\overline{G}}^{tras}(kD) \overline{\overline{G}}^{rot}(\chi_0, \theta_0, \varphi_0) \quad (\text{E.2})$$

siendo $D = \|\mathbf{d}\|_2$; $(\chi_0, \theta_0, \varphi_0)$ una terna de ángulos conocidos como ángulos de Euler; $\overline{\overline{G}}^{tras}(kD)$ una matriz que nos permite trasladar los modos referidos a un cierto sistema de coordenadas a otro sistema, de ejes paralelos al anterior pero desplazado una distancia D a lo largo del eje z ; y las matrices $\overline{\overline{G}}^{rot}$ nos permiten realizar cualquier rotación arbitraria. Las operaciones de rotación constan a su vez de tres giros por cada ángulo de Euler:

1. Rotación sobre el eje z (ángulo φ_0)
2. Rotación sobre el eje y_1 (ángulo θ_0)
3. Rotación sobre el eje z_2 (ángulo χ_0)

Estos pasos están reflejados en la figura E.2. Como consecuencia, cualquier matriz de rotación $\overline{\overline{G}}^{rot}(\chi_0, \theta_0, \varphi_0)$ se puede descomponer en tres matrices de rotación:

$$\overline{\overline{G}}^{rot}(\chi_0, \theta_0, \varphi_0) = \overline{\overline{G}}_{\varphi}^{rot}(\chi_0) \overline{\overline{G}}_{\theta}^{rot}(\theta_0) \overline{\overline{G}}_{\varphi}^{rot}(\varphi_0) \quad (\text{E.3})$$

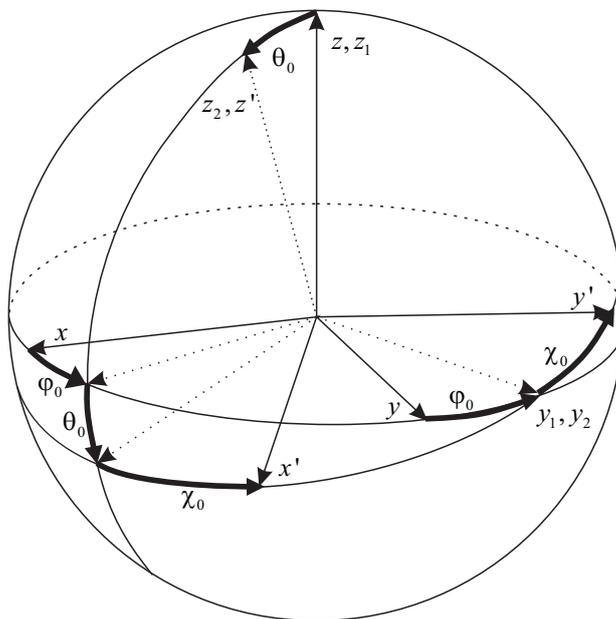


Figura E.2: Rotación de el sistema (x, y, z) al sistema (x', y', z') .

donde las matrices $\overline{\overline{G}}_{\varphi}^{rot}$ realizan las rotaciones respecto al eje z y la matriz $\overline{\overline{G}}_{\theta}^{rot}$ realiza las rotaciones respecto al eje y .

Para los desplazamientos aquí contemplados, la terna de ángulos $(\chi_0, \theta_0, \varphi_0)$ se puede calcular como:

$$\chi_0 = 0^\circ \quad (\text{E.4})$$

$$\theta_0 = \arccos(\mathbf{d} \cdot \hat{z} / D) \quad (\text{E.5})$$

$$\varphi_0 = \arccos(\mathbf{d} \cdot \hat{x} / \|\mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \hat{x}) \hat{x}\|_2) \quad (\text{E.6})$$

Las expresiones que nos permiten calcular las matrices $\overline{\overline{G}}^{tras}$ se encuentran recogidas en [Han88, Apéndice C], mientras que las expresiones para calcular las matrices de rotación $\overline{\overline{G}}_{\theta}^{rot}$ y $\overline{\overline{G}}_{\varphi}^{rot}$ se pueden calcular como en [Han88, Apéndice B].

Es importante reseñar, que el campo expandido respecto al origen O' como consecuencia de trasladar modos que están referidos a un origen O , sólo es válido para puntos que disten menos de D del origen O' debido a restricciones en la matriz de traslación [Han88, Apéndice C].

Apéndice **F**

Expansión de ondas planas en ondas esféricas

En el caso de problemas de dispersión es habitual utilizar como campo incidente una onda plana (p.ej. para calcular la RCS de uno o varios dispersores). Los sistemas de ecuaciones planteados en este trabajo necesitan la introducción del campo impreso incidente en términos de ondas esféricas (p. ej. en (5.19) ó (5.42)). Por ese motivo se recogen en este capítulo las expresiones necesarias para el cálculo de una expansión en ondas esféricas de una onda plana. La expresión de campos arbitrarios puede realizarse a partir de las expresiones de [Han88, Apéndice A].

Adaptando las ecuaciones de [Han88, Apéndice A], obtenemos que un campo debido a una onda plana puede descomponerse en modos esféricos de tipo $c = 1$ (estacionarios y acotados en el origen). Para ello consideraremos una onda plana con vector de polarización \mathbf{E}_0 y dirección de propagación \hat{k}_0 :

$$\hat{k}_0 = \text{sen } \theta_0 \cos \phi_0 \hat{x} + \text{sen } \theta_0 \sin \phi_0 \hat{y} + \cos \theta_0 \hat{z}$$

dicha onda admite una expansión de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-jk\hat{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = k\sqrt{\eta} \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_{smn} \mathbf{F}_{smn}^{(1)}(\mathbf{r}). \quad (\text{F.1})$$

Los coeficientes para la citada expansión vienen dados por la expresión:

$$Q_{smn} = k\sqrt{\eta}\sqrt{4\pi}(-j)(-1)^m \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{K}_{s,-m,n}(\theta_0, \phi_0),$$

siendo $\mathbf{K}_{smn}(\theta_0, \phi_0)$ el diagrama de radiación de campo lejano del modo $\mathbf{F}_{smn}^{(4)}$ eva-

luado para la dirección (θ_0, ϕ_0) . Esta expresión viene dada por:

$$\mathbf{K}_{1mn}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} \left(-\frac{m}{|m|}\right)^m e^{jm\phi} j^{n+1} \left\{ \frac{jm\bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta)}{\text{sen}\theta} \hat{\theta} - \frac{d\bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\phi} \right\} \quad (\text{F.2})$$

$$\mathbf{K}_{2mn}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} \left(-\frac{m}{|m|}\right)^m e^{jm\phi} j^n \left\{ \frac{d\bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\theta} + \frac{jm\bar{P}_n^{|m|}(\cos\theta)}{\text{sen}\theta} \hat{\phi} \right\}. \quad (\text{F.3})$$

Las aproximaciones anteriores demuestran una buena aproximación siempre y cuando la esfera donde trata de evaluarse la onda plana tenga un radio máximo:

$$r \approx N_{max}/k, \quad (\text{F.4})$$

siendo N_{max} el valor máximo en el que se trunca el sumatorio en el índice n de la expresión (F.1).

Referencias

- [Abr72] M. Abramowitz y I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, 1972.
- [Ami62] N. Amitay y V. Galindo, “On energy conservation and the method of moments in scattering problems”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-17**, págs. 747–751, noviembre 1962.
- [Are99] F. M. Ares, J. A. Rodríguez, E. Villanueva y S. R. Rengajaran, “Genetic algorithms in the design and optimization of antenna array pattern”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **47**(3), págs. 506–510, marzo 1999.
- [Aye07a] R. G. Ayestaran, M. F. Campillo y F. Las-Heras, “Multiple support vector regression for antenna array characterization and synthesis”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **55**(9), págs. 2495–2501, septiembre 2007.
- [Aye07b] R. G. Ayestaran, F. Las-Heras y L. F. Herran, “Neural modeling of mutual coupling for antenna array synthesis”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **55**(3), págs. 832–840, marzo 2007.
- [Bal89] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, New York, NY: John Wiley and Sons, 1989.
- [Beb00] M. Bebendorf, “Approximation of boundary element matrices”, *Numen. Math.*, **86**(4), págs. 565–589, junio 2000.
- [Beb03] M. Bebendorf y S. Rjasanow, “Adaptive low-rank approximation of collocation matrices”, *Computing*, **70**(1), págs. 1–24, marzo 2003.
- [Bil01] F. Bilotti y C. Vegni, “Rigorous and efficient full-wave analysis of trapezoidal patch antennas”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **49**(12), págs. 1773–1776, diciembre 2001.

- [Bla97] L. S. Blackford, J. Choi, A. Cleary, E. D’Azevedo, J. Demmel, I. Dhillon, J. Dongarra, S. Hammarling, G. Henry, A. Petitet, K. Stanley, D. Walker y R. C. Whaley, *ScaLAPACK Users’ Guide*, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997, ISBN 0-89871-397-8 (paperback).
- [Ble96] E. Bleszynski, M. Bleszynski y T. Jaroszewicz, “AIM: adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems”, *Radio Sci.*, **31**(5), págs. 1225–1251, Sep.-Oct. 1996.
- [Bre04] C. Brennan, P. Cullen y M. Condon, “A novel iterative solution of the three dimensional electric field integral equation”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **52**(10), págs. 2781–2784, octubre 2004.
- [Bru71] J. H. Bruning y Y. T. Lo, “Multiple scattering of EM waves by spheres part I—multipole expansion and ray-optical solutions, and part II—numerical and experimental results”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-19**(3), págs. 378–400, mayo 1971.
- [Bur04] R. Burkholder y J.-F. Lee, “Dual-MGS SVD algorithm for fast MoM computations”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **52**, págs. 1693–1699, julio 2004.
- [Cai99] W. Cai, “High order current basis functions for electromagnetic scattering of curved surfaces”, *J. Sci. Comput.*, **14**(1), págs. 73–107, 1999.
- [Can90] F. X. Canning, “The impedance matrix localization (IML) method for moment-method calculations”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **32**(5), págs. 18–30, octubre 1990.
- [CF07a] M. Cabedo-Fabres, E. Antonino-Daviu, A. Valero-Nogueira y M. F. Battaller, “The theory of characteristic modes revisited: A contribution to the design of antennas for modern applications”, *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, **49**(5), págs. 52–68, octubre 2007.
- [CF07b] M. Cabedo-Fabrés, *Systematic design of antennas using the theory of characteristic modes*, Tesis Doctoral, Univ. pol. de Valencia, Valencia, España, febrero 2007.
- [Che89] W. C. Chew, “An N^2 algorithm for the multiple scattering solution of N scatterers”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **2**(11), págs. 380–383, noviembre 1989.
- [Che90] W. C. Chew, *Waves and fields in inhomogeneous Media*, New York: Van Nostrand Reinhold: John Wiley and Sons, 1990.

- [Che92] W. C. Chew, L. Gürel, Y.-M. Wang, G. Otto, R. L. Wagner y Q.-H. Liu, “A generalized recursive algorithm for wave-scattering solutions in two dimensions”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **40**(4), págs. 716–723, abril 1992.
- [Coi93] R. Coifman, V. Rokhlin y S. Wandzura, “The fast multipole method for the wave equation: A pedestrian prescription”, *IEEE Trans. Antennas Propagat. Mag.*, **53**(3), págs. 7–12, junio 1993.
- [Cra06a] C. Craeye, “A fast impedance and pattern computation scheme for finite antenna arrays”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **54**(10), págs. 3030–3034, octubre 2006.
- [Cra06b] C. Craeye, A. A. O. Boryssenko y D. H. Schaubert, “Wave propagation and coupling in linear arrays with application to the analysis of large arrays”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **54**(7), págs. 1971–1978, julio 2006.
- [Ş98] A. Şahin y E. L. Miller, “Recursive T-matrix methods for scattering from multiple dielectric and metallic objects”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **46**(5), págs. 672–678, mayo 1998.
- [Del08] C. Delgado, M. F. Cátedra y R. Mittra, “Application of the characteristic basis function method utilizing a class of basis and testing functions defined on NURBS patches”, *IEEE Antennas Propagat.*, **56**(3), págs. 784–791, marzo 2008.
- [EM 08] EM Software & Systems, *Feko User’s manual*, 2008, <http://www.feko.info/>.
- [Eng92a] N. Engheta, W. Murphy, V. Rokhlin y M. Vassiliou, “The fast multipole method (FMM) for electromagnetic scattering problems”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-40**, págs. 634–641, junio 1992.
- [Ewe04] W.-B. Ewe, L.-W. Li y M.-S. Leong, “Fast solution of mixed dielectric/conducting scattering problem using volume-surface adaptive integral method”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **52**(11), págs. 3071–3077, noviembre 2004.
- [Gar08] E. Garcia, C. Delgado, I. G. Diego y M. F. Catedra, “An iterative solution for electrically large problems combining the characteristic basis function method and the multilevel fast multipole algorithm”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **56**(8), págs. 2363–2371, agosto 2008.
- [Ghi94] D. D. Ghiglia y L. A. Romero, “Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**(1), págs. 107–117, enero 1994.

- [Gli80] A. W. Glisson y D. R. Wilton, “Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-28**(5), págs. 593–603, septiembre 1980.
- [Gol89] G. H. Golub y C. F. van Loan, *Matrix computations*, Baltimore, MD: John Hopkins Univ. Press, 1989.
- [Gür92] L. Gürel y W. C. Chew, “Scatering solution of three-dimensional array of patches using the recursive T-matrix algorithms”, *IEEE Microwave and Guide Wave Letters*, **2**(5), págs. 182–184, noviembre 1992.
- [Gür93] L. Gürel y W. C. Chew, “Recursive T-matrix algorithms for the solution of electromagnetic scattering from strip and patch geometries”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **41**(1), págs. 91–99, enero 1993.
- [Gra93] R. Gralia, “On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-d Green’s function or its gradient on a plane triangle”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **41**, págs. 1448–1455, octubre 1993.
- [GT06] I. García-Tuñón, *Desarrollo de algoritmos basados en conocimiento priori para la resolución de problemas de dispersión y radiación electromagnética de elevada complejidad*, Tesis Doctoral, Univ. de Vigo, Vigo, España, junio 2006.
- [Ham90] A. K. Hamid, I. R. Ciric y M. Hamid, “Multiple scattering by an arbitrary configuration of dielectric spheres”, *Can. J. Phys.*, **68**, págs. 1419–1428, diciembre 1990.
- [Han88] J. E. Hansen, *Spherical near-field antenna measurements*, London, U.K.: Peter Peregrinus Ltd., 1988.
- [Han99] T. B. Hansen y A. D. Yaghjian, *Plane-Wave Theory of time domain fields*, New York, NY: IEEE press, 1999.
- [Har71a] R. F. Harrington y J. R. Mautz, “Computation of characteristic modes for conducting bodies”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-19**, págs. 629–639, septiembre 1971.
- [Har71b] R. F. Harrington y J. R. Mautz, “Theory of characteristic modes for conducting bodies”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-19**, págs. 622–628, septiembre 1971.
- [Har93] R. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, New York, NY: IEEE press, 1993.

- [Hel07] A. Heldring, J. M. Rius, J.-M. Tamayo, J. Parron y E. Ubeda, “Fast direct solution of method of moments linear system”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **55**(11), págs. 3220–3228, noviembre 2007.
- [Hol95] D. Holliday, L. L. DeRaad y J. G. St-Cyr, “Forward-backward: A new method for computing low-grazing angle scattering”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **44**(5), págs. 722–729, junio 1995.
- [Jak95] U. Jakobus y F. M. Landstofer, “Improved PO-MM hybrid formulation for scattering from three-dimensional perfectly conducting bodies of arbitrary shape”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **43**(2), págs. 162–169, febrero 1995.
- [Kal93] K. Kalbasi y K. R. Demarest, “A multilevel formulation of the method of moments”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **41**(5), págs. 589–599, mayo 1993.
- [Kel62] J. B. Keller, “Geometrical theory of diffraction”, *J. of the Opt. Soc of Am.*, **52**(2), págs. 3180–3190, 1962.
- [Kol96] B. M. Kolundzija, J. S. Ognjanovic, T. Sarkar y R. F. Harrington, “WIPL: a program for electromagnetic modeling of composite-wire and plate structures”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, **38**(1), págs. 75–79, febrero 1996.
- [Kol99] B. M. Kolundzija, “Electromagnetic modeling of composite metallic and dielectric structures”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **47**(7), págs. 1021–1032, julio 1999.
- [Kou74] R. G. Kouyoumjian y P. H. Pathak, “A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface”, *Proc. IEEE*, **62**, págs. 1448–1461, noviembre 1974.
- [Kwo01] D.-H. Kwon, R. Burkholder y P. Pathak, “Efficient method of moments formulation for large PEC scattering problems using asymptotic phase-front extraction (APE)”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **49**(4), págs. 583–591, abril 2001.
- [Kwo03] S. J. Kwon, K. Du y R. Mittra, “Characteristic basis function method: A numerically efficient technique for analyzing microwave and RF circuits”, *Microw. Opt. Technol.*, **38**(6), págs. 444–448, 2003.
- [Lan97] L. Landesa, F. Obelleiro, J. L. Rodríguez y A. G. Pino, “Pattern synthesis of array antennas in presence of conducting bodies of arbitrary shape”, *Electronics Letters*, **33**, págs. 1512–1513, agosto 1997.

- [Laz06] V. A. Laza, L. Matekovits y G. Vecchi, “Synthetic-functions decomposition of large complex structures”, en *Proc. Antennas and Propagation Society International Symposium 2006, IEEE*, págs. 3925–3928, julio 2006.
- [LH97] F. Las-Heras, B. Galocha y J. L. Besada, “Equivalent source modelling and reconstruction for antenna measurement and synthesis”, en *Proc. Antennas and Propagation Society International Symposium, 1997. IEEE*, tomo 1, págs. 156–159 vol.1, 1997.
- [Li07b] W.-D. Li, W. Hong y H.-X. Zhou, “Integral equation-based overlapped domain decomposition method for the analysis of electromagnetic scattering of 3D conducting objects”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **49**(2), págs. 265–274, febrero 2007.
- [Li08] W.-D. Li, W. Hong y H.-X. Zhou, “An IE-ODDM-MLFMA scheme with DILU preconditioner for analysis of electromagnetic scattering from large complex objects”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **56**(5), págs. 1368–1380, mayo 2008.
- [Los99] V. Losada, R. R. Boix y M. Horno, “Resonant modes of circular microstrip patches in multilayered substrates”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **47**, págs. 488–498, abril 1999.
- [Lu04] W. B. Lu, T. J. Cui, Z. G. Qian, X. X. Yin y W. Hong, “Accurate analysis of large-scale periodic structures using an efficient sub-entire-domain basis function method”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **52**(11), págs. 3078–3085, noviembre 2004.
- [Luc08] E. Lucente, A. Monorchio y R. Mittra, “An iteration-free MoM approach based on excitation independent characteristic basis functions for solving large multiscale electromagnetic scattering problems”, *IEEE Antennas Propag.*, **56**(4), págs. 999–1007, abril 2008.
- [Luk94] K.-M. Luk, W.-K. Leung y K.-W. Leung, “Mutual impedance of hemispherical dielectric resonator antennas”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **42**(12), págs. 1652–1654, diciembre 1994.
- [Maa08] R. Maaskant, R. Mittra y A. Tjihuis, “Fast analysis of large antenna arrays using the characteristic basis function method and the adaptive cross approximation algorithm”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **56**(11), págs. 3440–3451, noviembre 2008.
- [Mat01] L. Matekovits, G. Vecchi, G. Dassano y M. Orefice, “Synthetic function analysis of large printed structures: the solution space sampling approach”, en *Proc. Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001. IEEE*, tomo 2, págs. 568–571 vol.2, 2001.

- [Mat04] L. Matekovits, V. A. Laza y G. Vecchi, “Synthetic-functions analysis of antennas and inter-antenna coupling in complex environments”, en *Proc. Antennas and Propagation Society International Symposium, 2004. IEEE*, tomo 1, págs. 683–686 Vol.1, junio 2004.
- [Mat05] L. Matekovits, V. A. Laza y G. Vecchi, “Application of synthetic-functions expansion to the analysis of antennas and complex platforms”, en *Proc. Antennas and Propagation Society International Symposium, 2005 IEEE*, tomo 4A, págs. 443–446 vol. 4A, julio 2005.
- [Mat07] L. Matekovits, V. A. Laza y G. Vecchi, “Analysis of large complex structures with the synthetic-functions approach”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **55**(9), págs. 2509–2521, septiembre 2007.
- [Mat09] MathWorks, *Matlab Getting Started Guide*, 2009, <http://www.mathworks.com>.
- [Mic94] E. Michielssen y A. Boag, “Multilevel evaluation of electromagnetic fields for the rapid solution of scattering problems”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **7**(17), págs. 790–795, diciembre 1994.
- [Mit67] K. M. Mitzner, “An integral equation approach to scattering from a body of finite conductivity”, *Radio Sci.*, **2**, págs. 1459–1470, 1967.
- [Mit08] R. Mittra y K. Du, “Characteristic basis function method for iteration-free solution of large method of moments problems”, *Progress In Electromagnetic Research B*, **6**, págs. 307–336, abril 2008.
- [MM84] L. N. Medgyesi-Mitschang y J. M. Putnam, “Electromagnetic scattering from axially inhomogeneous bodies of revolution”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **32**(8), págs. 797–806, agosto 1984.
- [MPI] MPI, Message Passing Interface Forum, *Message-Passing Interface Standards*, <http://www.mpi-forum.org/>.
- [Çol07] D. Çolak, R. Burkholder y E. H. Newman, “On the convergence properties of the multiple sweep method of moments”, *ACES journal*, **22**(2), págs. 207–218, julio 2007.
- [Oom98] S. Ooms y D. DeZutter, “A new iterative diakoptics-based multilevel moments method for planar circuits”, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **MTT-46**(3), págs. 280–291, marzo 1998.
- [Pat88] P. H. Pathak, “Techniques for high frequency problems”, en Y. T. Lo y S. W. Lee, eds., *Antenna Handbook: Theory, Application and Design*, capítulo 4, Dover, 1988.

- [Pet98] A. F. Peterson, S. L. Ray y R. Mittra, *Computational methods for electromagnetics*, New York, NY: IEEE press, 1998.
- [Pin99] M. R. Pino, L. Landesa, J. L. Rodríguez, F. Obellerio y R. J. Burkholder, “The generalized forward-backward method for analyzing the scattering from targets on ocean-like rough surfaces”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **47**(6), págs. 961–969, junio 1999.
- [Pra03] V. Prakash y R. Mittra, “Characteristic basis function method: A new technique for efficient solution of method of moments matrix equation”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **36**(2), págs. 95–100, enero 2003.
- [Put91] J. M. Putnam y L. N. Medgyesi-Mitschang, “Combined field integral equation formulation for inhomogeneous two- and three-dimensional bodies: The junction problem”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **39**(5), págs. 667–672, mayo 1991.
- [Rao82] S. M. Rao, D. R. Wilton y A. W. Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-30**, págs. 409–418, mayo 1982.
- [Riu99] J. M. Rius, J. Parron, E. Ubeda y J. R. Mosig, “Multilevel matrix decomposition algorithm for analysis of electrically large electromagnetic problems in 3-d”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **22**(3), págs. 173–182, diciembre 1999.
- [Rod08] J. L. Rodríguez, J. M. Taboada, M. G. Araujo, F. Obelleiro, L. Landesa y I. Garcia-Tuñon, “On the use of the singular value decomposition in the fast multipole method”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **56**(8), págs. 2325–2334, agosto 2008.
- [Rok85] V. Rokhlin, “Rapid solution of integral equations of classical potential theory”, *J. Comput. Phys.*, **60**(2), págs. 187–207, septiembre 1985.
- [Rou95] P. R. Rousseau y R. J. Burkholder, “A hybrid approach for calculating the scattering from obstacles within large, open cavities”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **43**(10), págs. 1068–1075, octubre 1995.
- [Rub05] J. Rubio, M. A. González y J. Zapata, “Generalized-scattering-matrix analysis of a class of finite arrays of coupled antennas by using 3-D FEM and spherical mode expansion”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **53**(3), págs. 1133–1144, marzo 2005.
- [Sar81] T. Sarkar, K. Siarkiewicz y R. Stratton, “Survey of numerical methods for solution of large systems of linear equations for electromagnetic field problems”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **29**(6), págs. 847–856, noviembre 1981.

- [Sar85] T. K. Sarkar, E. Arvas y S. M. Rao, “Application of the fast fourier transform and the conjugate gradient method for efficient solution of electromagnetic scattering from both electrically large and small conducting bodies”, *Electromagn.*, **5**, págs. 99–122, 1985.
- [Sar90] T. K. Sarkar, S. M. Rao y A. R. Djordjevic, “Electromagnetic scattering and radiation from finite microstrip structures”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **38**(11), págs. 1568–1575, noviembre 1990.
- [Sha08] J. Shaeffer, “Direct solve of electrically large integral equations”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **56**(8), págs. 2306–2313, agosto 2008.
- [Son95] J. M. Song y W. C. Chew, “Moment method solutions using parametric geometry”, *J. Electromag. Waves Applicat.*, **AP-17**(1/2), págs. 71–83, 1995.
- [Son97] J. M. Song, C. C. Lu y W. C. Chew, “Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **45**(10), págs. 1488–1493, octubre 1997.
- [Sut00] E. Suter y J. R. Mosig, “A subdomain multilevel approach for the efficient MoM analysis of large planar antennas”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **26**(4), págs. 270–277, agosto 2000.
- [Tor97] D. Torrungrueng y E. H. Newman, “The multiple sweep method of moments (MSMM) analysis of electrically large bodies”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **45**(8), págs. 1252–1258, agosto 1997.
- [Tsa72a] L. Tsai, “A numerical solution for the near and far fields of an annular ring of magnetic current”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **20**(5), págs. 569–576, septiembre 1972.
- [Tsa72b] L. L. Tsai, “A numerical solution for the near and far fields of an annular ring of magnetic current”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **20**, págs. 569–576, septiembre 1972.
- [Ube05] E. Ubeda y J. M. Rius, “MFIE MoM-formulation with curlconforming basis functions and accurate kernel integration in the analysis of perfectly conducting sharp-edged objects”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **44**(4), págs. 354–358, febrero 2005.
- [Ufi91] P. Y. Ufimtsev, “Elementary edge waves and the physical theory of diffraction”, *Electromagnetics*, **11**(2), págs. 125–160, 1991.
- [Uma86] K. Umashankar, A. Taflove y S. M. Rao, “Electromagnetic scattering by arbitrary shaped three-dimensional homogeneous lossy dielectric objects”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **AP-34**(6), págs. 758–766, junio 1986.

- [Uma92] K. R. Umashankar y S. Nimmagdda, “Numerical analysis of electromagnetic scattering by electrically large objects using spatial decomposition technique”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **40**(8), págs. 867–877, agosto 1992.
- [Val94] L. Valle, F. Rivas y M. F. Cátedra, “Combining the moment method with geometrical modelling by nurbs surfaces and b ezier patches”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **42**(3), págs. 373–381, marzo 1994.
- [Var62] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Englewood Cliffs ,New Jersey: Prentice Hall, 1962.
- [Veg97] L. Vegni, A. Toscano y B. Popovski, “Electromagnetic plane wave scattering by large and finite strip array on dielectric slab”, *Ann. Telecommun.*, **52**(3-4), págs. 209–218, 1997.
- [Wan91a] J. Wang, *Generalized moment methods in electromagnetics*, New York, NY: John Wiley and Sons, 1991.
- [Wan92] S. Wandzura, “Electric current basis functions for curved surfaces”, *Electromagnetics*, **9**, págs. 77–91, 1992.
- [Wan05] J. X. Wan, J. Lei, y C. H. Liang, “An efficient analysis of large-scale periodic microstrip antenna arrays using the characteristic basis function method”, *Progress In Electromagnetics Research*, **50**, págs. 61–81, 2005.
- [Wil91] D. R. Wilton y J. E. Wheeler, “Comparison of convergence rates of the conjugate gradient method applied to various integral equation formulations”, en T. K. Sarkar, ed., *Application of Conjugate-Gradient Methods in Electromagnetics and Signal Analysis*, Amsterdam, Holanda: Elsevier, 1991.
- [Woo93] A. Woo, H. Wang, M. Schuh y M. Sanders, “Benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs”, *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, **35**, págs. 84–89, febrero 1993.
- [Yag86] A. Yaghjian, “An overview of near-field antenna measurements”, *IEEE Antennas Propagat.*, **56**(1), págs. 30–45, enero 1986.
- [Yag96] A. D. Yaghjian, “Sampling criteria for resonant antennas and scatterers”, *J. Appl. Phys.*, **79**(10), págs. 7474–7482, 1996.
- [Yeo03] J. Yeo y R. Mittra, “Numerically efficient analysis of microstrip antennas using the characteristic basis function method (CBFM)”, en *Proc. IEEE AP-S Int. Symp.*, tomo 4, págs. 85–88, Columbus, OH, junio 2003.

-
- [YO03a] P. Ylä-Oijala y M. Taskinen, “Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and $n \times$ RWG functions”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **51**(8), págs. 1837–1846, agosto 2003.
- [zE04] Özgür Ergül y L. Gürel, “Investigation of the inaccuracy of the mfiie discretized with the rwg basis functions”, en *Proc. IEEE AP-S Int. Symp. URSI Radio Sci. Meeting*, págs. 3393–3396, Monterey, CA, junio 2004.
- [zE05] Özgür Ergül y L. Gürel, “Solid-angle factor in the magnetic-field integral equation”, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **45**(5), págs. 452–456, junio 2005.
- [Zha05] K. Zhao, M. N. Vouvakis y J.-F. Lee, “The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC”, *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, **47**(4), págs. 763–773, noviembre 2005.