BLOQUE II

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 2

El ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA

RESUMEN

Este capítulo tiene como objetivo presentar el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Dicho enfoque se ha tomado como el principal referente teórico de la investigación que se presenta.

En los diferentes apartados se comentan los principales constructos teóricos de este enfoque: práctica, objetos personales e institucionales y sus significados, configuraciones epistémicas y cognitivas, tipos de significado institucional (de referencia, pretendido, implementado y evaluado), tipos de significado personal de los alumnos (global, declarado, logrado), dualidades cognitivas: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo; complejidad semiótica y conflictos semióticos, criterios de idoneidad de un proceso de instrucción, etc.

En diferentes trabajos, Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, en prensa; Godino, Batanero y Roa, en prensa; Godino, Contreras y Font, en prensa) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico (EOS)[1] de la cognición e instrucción matemática. Se trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

A continuación se exponen, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico.

1 LOS OBJETOS PERSONALES Y SU SIGNIFICADO

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo puesto que se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto

[1] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la “función semiótica” es un constructo clave de dicho enfoque.

matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado, a diferencia de otras teorías en las cuales dicho objeto es el que tiene ese lugar privilegiado.

Los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994, p. 335), son: *"emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas".* Estos objetos personales van cobrando forma –van emergiendo– en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Es conveniente efectuar algunas matizaciones sobre el objeto personal. En primer lugar, un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos pueden hablar sobre sus objetos personales o, dicho de otra manera, pueden realizar prácticas discursivas sobre los mismos, conduce a una vía de investigación en Didáctica de las Matemáticas de gran relevancia. Por otra parte, un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad que facilita la clase de Matemáticas, de una regla de comportamiento en el sujeto. Es esta última dimensión, que se conoce con la denominación de máxima pragmática, la que se toma en consideración para definir el significado de un objeto personal O_p:

> *Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado.* (Godino y Batanero, 1994, p. 341)

Según esta definición de significado, el objeto personal supone haber establecido una conexión entre acciones potenciales y fines, conexión que es inteligente y, por tanto, está mediada simbólicamente. Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca.

Asimismo conviene observar que, dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. Es obvio, además, que el significado de un objeto personal queda ligado a otros objetos personales y significados, puesto que, en general, en las prácticas intervienen conjuntamente diversos objetos personales.

En el EOS se considera que el significado personal de un objeto matemático se puede entender de la siguiente manera:

$S(O)$ = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica P_i, el sujeto utiliza el objeto O}

En nuestra opinión, para ser más precisos, en la definición anterior tendríamos que sustituir el objeto *O* por alguna de sus representaciones:

***S*(*O*) = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica P_i, el sujeto utiliza alguna representación asociada al objeto *O*}**

El hecho de considerar el objeto personal como un "emergente" y su significado de manera "holística" hace que lo que realmente es relevante, en nuestra opinión, es la existencia de prácticas realizadas por el sujeto en las que interviene alguna representación del objeto. Por tanto, esta forma pragmática de entender el significado postula unas entidades mentales, los objetos personales, que no nos alejan de las prácticas observadas en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen a lo largo de una interacción en el marco de una institución escolar.

De lo dicho anteriormente, se podría pensar que la relación entre el objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante para su realización se considera una relación de causa-efecto (parte superior de la figura 1) en la que el objeto personal sería la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos). Contrariamente a este punto de vista, en el EOS se considera más conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha (parte inferior de la figura 1) puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después tiene que decidir la acción más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, ha de mantener la acción desde el inicio hasta el final.

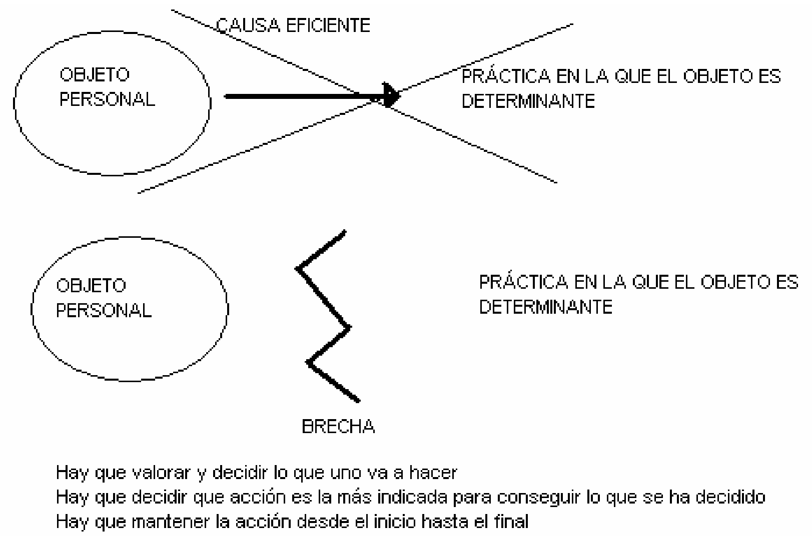


Figura 1

2 LOS OBJETOS INSTITUCIONALES Y SU SIGNIFICADO

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por tanto cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría reduccionista. Por este motivo en el EOS (Godino y Batanero, 1994) se introducen las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales.

2.1 Instituciones

Para Godino y Batanero (1994), una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas; las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Desde la sociología se suelen considerar las instituciones básicamente desde dos perspectivas: la primera, tendría que ver con la configuración de un conjunto de prácticas compartidas y, la segunda, las entiende como una organización que se compone de un cuerpo directivo, un edificio y unos trabajadores, destinada a servir algún fin socialmente reconocido y autorizado. Es evidente que las instituciones escolares encajan claramente en estas dos maneras de entender las instituciones.

En el EOS interesa, sobre todo, la primera manera de entender la institución (Godino y Batanero, 1994), sin que esto implique no tener en cuenta el otro punto de vista. Esta primera manera de entender la institución permite, por una parte, pensar en varias instituciones en el interior de un centro escolar y, por otra parte, en instituciones diferentes de las escolares. La segunda manera de entender la institución lleva a considerar que las instituciones que van a interesar, sobre todo al EOS, son aquéllas cuyo fin es ocuparse del hombre aprendiendo.

Comunidades de prácticas

La institución entendida como “comunidad de práctica” ha sido especialmente estudiada y desarrollada por Wenger (1998), quien en sus estudios sobre gestión del conocimiento, describe la existencia de grupos en los que el conocimiento y las “mejores prácticas” (el modo de realizar una tarea del modo más conveniente) se conservan y transmiten de los miembros más antiguos a los más recientes, mediante una participación progresiva en las tareas prácticas que comparten los miembros de la comunidad.

Según Wenger, una comunidad de práctica se define a sí misma a lo largo de tres dimensiones: (1) su empresa conjunta es comprendida y continuamente renegociada por sus miembros, (2) el compromiso mutuo que une a sus miembros juntos en una entidad social y (3) el repertorio compartido de recursos comunes (rutinas, sensibilidades, artefactos, vocabulario, estilos...) que los miembros han desarrollado a lo largo del tiempo.

Una de las señas de identidad de estas comunidades es el aprendizaje. El análisis de las diferentes experiencias habidas entorno a las *comunidades de práctica* muestra que son ámbitos idóneos para realizar los procesos de aprendizaje individual y, al mismo tiempo, desarrollar el aprendizaje conjunto.

Muchas de las consideraciones que se han hecho sobre las comunidades de práctica son aplicables tanto a la comunidad de aprendizaje que se crea en el aula, como a la comunidad de aprendizaje que se crea en las instituciones donde se crea el conocimiento matemático, pero donde son especialmente aplicables es en la formación permanente de los profesores. Al ser la *comunidad de práctica* el marco donde las personas ponen en común sus conocimientos, ésta favorece el diálogo e invita a las personas a reflexionar sobre su experiencia. Además, el diálogo entre distintos puntos de vista, por lo general, suscita controversia y discrepancias que, en muchas ocasiones, se traduce en un conflicto cognoscitivo con lo cual también se favorece el aprendizaje. Probablemente sea en el seno de estas comunidades donde las personas aprenden nuevas competencias profesionales de manera mucho más eficiente que a través de los procesos formales de aprendizaje.

2.2 Objetos institucionales

Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, es reconocido como tal objeto por la institución, pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

Con relación al objeto institucional interesa resaltar los siguientes aspectos: (1) Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales, cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que al hablar de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. (2) Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. En el EOS también se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional O_I:

> *Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado*. (Godino y Batanero, 1994, p. 340)

Para el EOS, la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, lo que, obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos.

Para el EOS la relación entre los significados de los objetos personales y los institucionales hay que pensarla básicamente en términos de "ajuste". Se pretende que el significado de los objetos personales se ajuste lo más posible al significado de los objetos institucionales. Esta relación de ajuste es la que subyace (y por tanto posibilita) en "la evaluación de los conocimientos de los alumnos y alumnas y alumnas".

El constructivismo psicológico, y, en general, todas las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas desde el enfoque cognitivo, se han centrado en los objetos personales. En el otro extremo, tenemos la antropología cognitiva en la que prima el aspecto institucional y el sujeto se considera un simple "corte institucional". Entre estos dos extremos hay diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica personal-institucional sin olvidar ninguno de los dos polos. Es en este contexto donde se sitúa el EOS.

Los comentarios anteriores permiten determinar cuál será el principal objeto de estudio que interesa al EOS*: el hombre aprendiendo en instituciones escolares algo que es el resultado de una construcción social realizada en diferentes instituciones: las matemáticas.* Se adopta, por tanto, un punto de vista antropológico. También se adopta un principio de tipo recursivo: los objetos personales generan los objetos institucionales, los cuales a su vez generan los objetos personales.

Una pregunta que se puede formular con relación a los objetos personales e institucionales es la siguiente: ¿Dónde se encarnan dichos objetos?. Es evidente que a partir de lo que se ha dicho anteriormente los objetos personales y sus significados se encarnan en los alumnos y alumnas y que los institucionales se encarnan en los profesores. Ahora bien, con esta clasificación se nos presenta el problema de que los objetos matemáticos y didácticos del profesor no se contemplan como objetos diferenciados de los institucionales. En el capítulo 6 abordaremos con mayor profundidad esta problemática.

3 SIGNIFICADO Y SENTIDO

Conviene resaltar, antes de continuar, que la introducción del término objeto es una metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas (la posibilidad de separación de otras "cosas") a las "matemáticas". Por tanto, de entrada, todo lo que se pueda "individualizar" en matemáticas será considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, etc.). Ahora bien, en este apartado conviene, para facilitar su lectura, que el lector piense en los objetos matemáticos prototípicos: los conceptos; es decir, que piense en objetos como "función", "derivada", etc.

Tal como se ha dicho en el apartado anterior, en el EOS se considera que un objeto matemático institucional emerge progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, es reconocido como tal objeto por la institución (primer nivel de emergencia), pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado (segundo nivel de emergencia).

Figura 2

La emergencia progresiva de los objetos matemáticos institucionales se concreta en diferentes definiciones (según el programa de investigación en el que se enmarquen). Este hecho hace que tenga sentido utilizar, de entrada, la diferencia entre sentido y referencia de un término introducida por Frege (1998). La referencia será el objeto matemático nombrado, mientras que el sentido es la manera de presentación.

El ejemplo de la mediatriz puede ilustrar la diferencia entre sentido y referencia. Podemos definir la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. En cada definición relacionamos el concepto de mediatriz con conceptos diferentes, pero nos estamos refiriendo a la misma referencia. Las dos definiciones tienen sentidos distintos porque la manera de presentación (la conexión con otros conceptos) es diferente. Entender que las dos definiciones son equivalentes informa que dos definiciones, que se podrían considerar definiciones de objetos diferentes, se refieren al mismo objeto.

Cada definición hay que entenderla como una definición-regla la cual, de entrada, no parece indicar que haya algo que sea preciso hacer. A partir de las definiciones-reglas podemos atribuir valores veritativos (verdadero y falso) a ciertas proposiciones (por ejemplo, ante la afirmación "esta recta es la mediatriz del segmento AB" podemos decir si es verdadera o falsa). Ahora bien, de una definición-regla también se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para construir la mediatriz. Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, en cada definición de mediatriz relacionamos el objeto definido con objetos diferentes y con procedimientos de construcción diferentes (se generan prácticas diferentes).

Cuando se adopta una perspectiva pragmatista y se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir en el EOS dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos *sentido* y *significado***.** En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, entre otros, para dar lugar a diferentes prácticas, en el EOS se entiende el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto.

El significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevas técnicas, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

4 REALIZACIÓN DE UNA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Tal como se ha dicho en el apartado 1, en el EOS no se considera que el objeto personal sea la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos) de la realización de la práctica. Contrariamente a este punto de vista, se considera más conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha, puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después se tiene que decidir qué secuencia de acciones es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, se ha de seguir un curso temporal, desde el inicio hasta el final. La consideración de la brecha implica la renuncia a la creencia de que el cerebro (1) funciona como un sistema conducido endógenamente y (2) y que funciona con independencia del contexto.

Reflexionar sobre cómo se supera esta brecha lleva a reflexionar sobre: (a) qué es una *práctica matemática* y (b) qué hay que entender por *realización de una práctica matemática*.

En el EOS se considera *práctica matemática* (Godino y Batanero 1994) a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Una vez asumida la centralidad del constructo "práctica" se distingue la práctica de la conducta. En el EOS se considera que no podemos interpretar las conductas observables de los alumnos si no les atribuimos una finalidad. Por tanto, se distingue entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que -en tanto que acción humana orientada a una finalidad- tiene una razón de ser, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta.

Si entendemos la práctica como "acción orientada a un fin", se observa que en la definición de práctica, dada anteriormente, se pueden considerar tres intenciones diferentes, las cuales permiten considerar tres tipologías de prácticas que llamaremos: a) *operativas o actuativas* — toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos —, b) *discursivas* o *comunicativas* — comunicar a otros la solución, validar la solución — y c) *regulativas o normativas* — generalizarla a otros contextos y problemas —. Aunque es más conveniente pensar en una práctica como una acción compuesta en la que puede primar el componente operatorio, el discursivo o bien el regulativo.

Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo nos permiten realizar "acciones" y "argumentaciones" cuya finalidad es la resolución de "situaciones problemas". Las prácticas discursivas (comunicativas) están relacionadas con el dominio y la creación del "lenguaje" así como en su uso para la realización de "argumentaciones" que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. Las prácticas regulativas (normativas) están orientadas básicamente a conseguir establecer "propiedades" (proposiciones) y definiciones de "conceptos".

La reflexión anterior, sobre las prácticas, hace necesario ampliar lo que se entiende por objeto matemático y no limitarnos a los objetos prototípicos, es decir a los conceptos, sin caer tampoco en la generalidad de que todo es objeto. En el EOS, se considera que resulta más útil, en ciertos momentos, un uso intermedio del término objeto en el que se entienda por objeto alguno de los siguientes elementos: *lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación problema*. Cada uno de estos elementos (excepto las situaciones problemas) se puede entender como un emergente de las prácticas cuya finalidad es la resolución de situaciones problemas. A su vez, las situaciones problemas se pueden entender como emergentes de otros tipos de prácticas (necesidad de contextualizar y aplicar las matemáticas, necesidad de generalizar, necesidad de resolver problemas, etc.).

En lo dicho anteriormente se ha considerado los objetos que emergen de las prácticas. Ahora bien, a su vez, para la realización de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. Para realizar una práctica matemática (por ejemplo la representación gráfica de una función) el sujeto necesita una serie de conocimientos sobre la representación gráfica de funciones que son fundamentales para: 1) la realización de la práctica que consiste en representar una función determinada y 2) para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Es decir, que hay que tener en cuenta que el sujeto tiene un *conocimiento* sobre la "representación gráfica", (por ejemplo, como resultado del proceso de instrucción). También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general.

Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado *lenguaje* verbal (dominio, puntos de corte, asíntotas, etc.), simbólico (por ejemplo la fórmula de la función) y gráfico (sistema de ejes de coordenadas, gráfica, etc.). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos* (función, gráfica, dominio, etc.) y *propiedades* (por ejemplo, si la derivada es positiva la función es creciente) que son necesarios para justificar las *acciones* que realizará el alumno (por ejemplo, calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la *argumentación* (implícita o explícita) que realizará el alumno para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias.

Las consideraciones anteriores, nos llevan a considerar que cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama *configuración.* Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

En el EOS se considera que para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal.

Antes de continuar, conviene resaltar que en los apartados anteriores hay diferentes usos del término "objeto" que pueden despistar al lector. Por un parte, hay un uso más amplio (débil) en el que "todo " es objeto, después hay un uso más restringido (fuerte) en el que la reflexión se centra en lo que se considera el prototipo de "objeto matemático" (los conceptos) y, por último, hay un uso intermedio en el cual por objeto se toma cualquiera de los elementos que forman una configuración. Para no tener dificultades en la lectura de los diferentes apartados de este capítulo y en los capítulos posteriores es necesaria la buena disposición del lector para transitar entre estos tres usos diferentes del término objeto.

5 EJEMPLO DE CONFIGURACIÓN COGNITIVA/EPISTÉMICA

En Font (2005a) se pone el siguiente ejemplo de configuración cognitiva (si se considera desde la perspectiva personal) o epistémica (si se considera desde la perspectiva institucional) activada en la resolución de un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada. Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes.

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

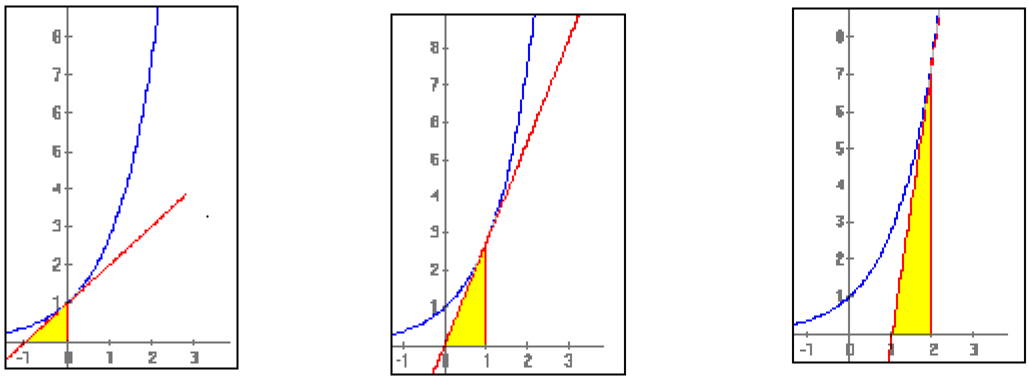


Figura 3

b) Calcula $f'(a)$

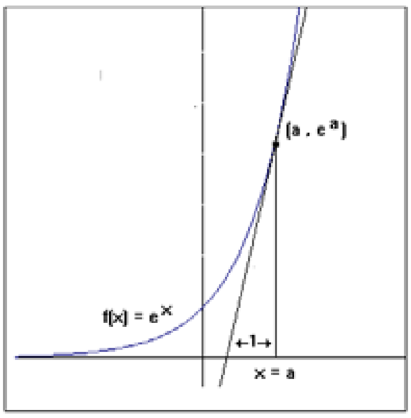


Figura 4

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.

Para realizar la práctica que permite calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ hay que poner en funcionamiento una configuración (epistémica / cognitiva) cuyos componentes se pueden describir brevemente mediante el siguiente esquema:

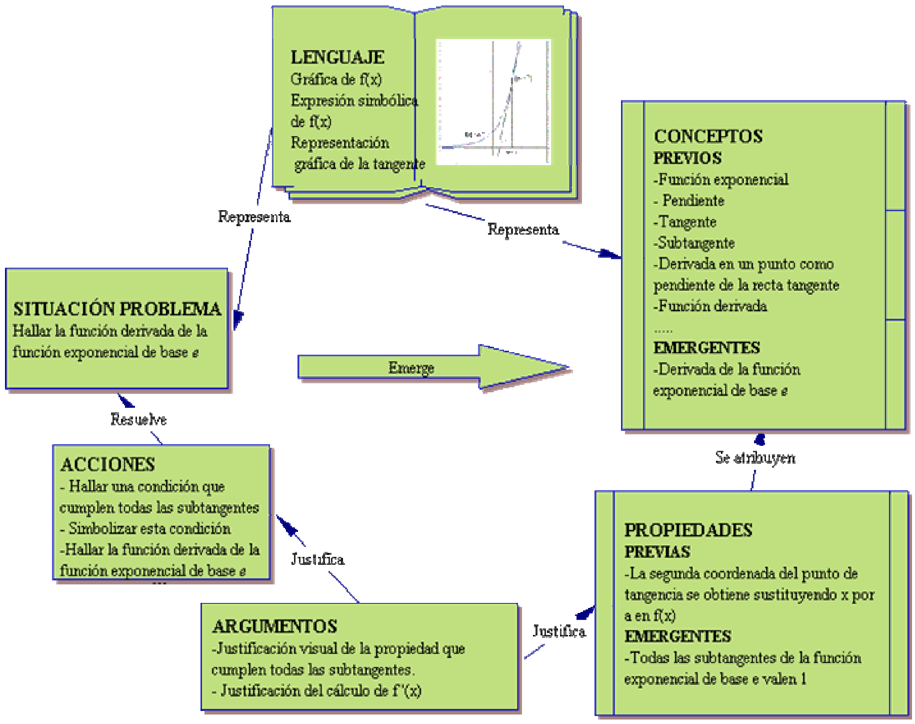


Figura 5

Si nos fijamos en el cuadro de las acciones de la figura anterior, resulta que para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso, que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

Para que las acciones que constituyen esta técnica se puedan aplicar son necesarios los demás objetos de la configuración (figura 5), es decir, se tiene que realizar una argumentación, se ha de utilizar, entre otros, el concepto de derivada entendido como pendiente de la recta tangente, se tienen que utilizar gráficas y fórmulas, etc.

6 DUALIDADES COGNITIVAS

En los apartados anteriores hemos considerado los objetos matemáticos con relación a dos facetas duales, a saber, personal-institucional y elemental-sistémico. En el EOS, la noción de “juego de lenguaje” (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante. En dicho enfoque se considera que los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002). Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos, dando lugar a distintas "versiones" o “miradas” de dichos objetos.

Personal - institucional

Dependiendo de las circunstancias contextuales, o sea, del juego de lenguaje en que nos encontramos, una misma expresión, por ejemplo “límite” puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de los objetos que intervienen en las prácticas que realiza un sujeto individual para resolver una actividad escolar, se entiende que se trata de un objeto personal. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos se considera fundamental en el EOS y es la que nos ha llevado a definir anteriormente los objetos personales y los institucionales.

Ostensiva - no ostensiva

Los objetos personales y los institucionales hasta ahora se han considerado básicamente como objetos no-ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos tiene también una faceta ostensiva, esto es perceptible, ya que se usan en las prácticas por medio de sus ostensivos asociados.

Mediante el lenguaje ostensivo se “expresan” otros objetos no ostensivos. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). A su vez, las entidades no ostensivas necesitan a éstas entidades ostensivas para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello lo consideramos como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Un caso especial será las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados; la palabra 'mediana', la notación Me, u otro cualquier recurso expresivo puede ser imaginado. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

Extensiva-intensiva / Concreto-Abstracto/ Ejemplar-tipo

En el estudio de las matemáticas estamos siempre interesados por generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen y organizan. No nos conformamos con resolver un problema aislado sino que deseamos resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Además, tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez más globales. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un extensivo, o sea a un objeto que es un miembro de una clase que lo contiene (extensivo), o a dicho objeto como una clase, es decir como intensivo.

En el EOS se interpreta la distinción entre extensivo-intensivo (concreto y abstracto) en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos difuso de objetos). La consideración de un objeto como concreto o abstracto es esencialmente, relativa dependiendo del juego de lenguaje en que participen.

Expresión-contenido

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros.

La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Godino y Batanero (1998), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Los objetos inicial y final están constituidos por cualquier objeto matemático. En el EOS, las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schütz pasando por Husserl. La interpretación de las funciones semióticas que propone el EOS generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática (Contreras y Font, 2002).

Elemental-sistémica

En el EOS se considera que el significado de un objeto es un conjunto de prácticas en las que el objeto en cuestión es un dato esencial. Se trata de una manera sistémica de entender el significado del objeto. Ahora bien, este punto de vista conlleva que un objeto se pueda considerar también de manera elemental como resultado de una definición, es decir, el objeto matemático en cuestión se puede considerar como un solo elemento o bien como un conjunto sistémico de prácticas en las que intervienen este objeto conjuntamente con otros entre los cuales hay determinadas relaciones.

La dialéctica elemental-sistémica conlleva que los objetos (personales o institucionales) tengan que ser considerados como nudos de una red. Por ejemplo, si consideramos el objeto elemental derivada y nos preguntamos por su significado inmediatamente aparecen determinadas prácticas en las que interviene y se relaciona con otros objetos -(límite, velocidad, derivada, función, tangente trigonométrica, rectas, etc.). Estos nuevos objetos a su vez se pueden entender de manera sistémica. De esta manera, tenemos una red de nudos, los cuales a su vez son redes de nudos y así sucesivamente.

En la figura siguiente se representan los diferentes constructos teóricos que se han comentado anteriormente. En el interior tenemos las prácticas. Para la realización de las prácticas es necesario activar una configuración (hexágono) y a su vez, los objetos que forman las configuraciones son emergentes de las prácticas. Por último, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono).

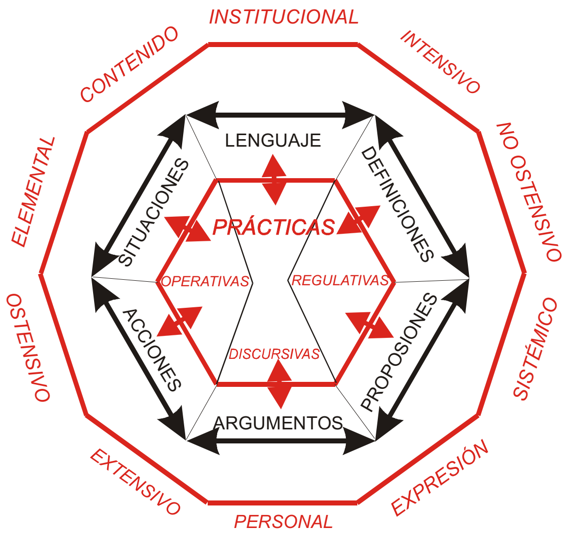


Figura 6

7 TIPOS DE SIGNIFICADO

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales: (1) *significado institucional de referencia* –cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas"; acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas histórico-epistemológico-didáctico que designamos como significado institucional de referencia del objeto. –, (2) *significado institucional pretendido* – sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional, (3) *significado institucional implementado* – sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes– y (4) *significado institucional evaluado* – colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes–.

En el capítulo 6 desarrollaremos con más detalle estos diferentes tipos de significado para dar cabida a los objetos personales del profesorado como objetos diferenciados de los institucionales.

8 ANÁLISIS ONTOLÓGICO-SEMIÓTICO DE UN TEXTO MATEMÁTICO

En Godino (2002), se propone una técnica del *análisis ontológico-semiótico* de un texto matemático que consiste básicamente en: (1) su descomposición en unidades, (2) la identificación de las entidades puestas en juego e (3) identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las mismas por parte de los distintos sujetos. Este análisis ontológico-semiótico permite formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos actores en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

En el EOS se habla de *análisis a priori* cuando dicha técnica se aplica a un texto que registra una actividad matemática que tiene que realizar un sujeto potencial (por ejemplo un libro de texto) y de *análisis a posteriori c*uando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas. En ambos casos se pueden detectar *conflictos semióticos*:

> *(...) disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución.* (Godino, 2002, p. 258).

Los análisis a priori permiten formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales —entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido—. Por su parte, los análisis a posteriori permiten determinar los conflictos semióticos realmente producidos y contrastarlos con los detectados a priori. En el EOS, los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados cuando los comparamos con el significado pretendido.

Los dos tipos de análisis comentados también permiten detectar limitaciones en los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados. Nos referimos a las limitaciones originadas por significados institucionales (pretendidos o implementados) poco representativos de los significados referenciales. Estas limitaciones se producen cuando determinadas prácticas representativas del significado de referencia no son contempladas en el significado pretendido o implementado. Por ejemplo, cuando el significado pretendido sólo contempla que el cálculo de la derivada en un punto consiste en la aplicación de una regla de derivación algebraica y en el cálculo del valor de la función en dicho punto pero no contempla otras prácticas. Nos referimos en concreto a argumentaciones de tipo variacional que permiten calcular la derivada como límite de las razones de cambio o bien a argumentaciones de tipo gráfico que permiten calcular la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Según la mayor o menor profundidad del estudio ontológico-semiótico, pueden considerarse otros dos tipos de análisis: uno, más amplio, centrado fundamentalmente en el segundo punto (identificación de las entidades puestas en juego), y otro, más pormenorizado, centrado fundamentalmente en el tercer punto (identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las diferentes entidades y facetas duales por parte de los distintos sujetos) en el que el sujeto pasa a primer plano. El primer tipo de análisis, que podemos denominar “grueso” o “macroscópico”, a pesar de su potencia explicativa, presenta limitaciones importantes y es insuficiente cuando se considera también la cognición de las personas.

El segundo tipo de análisis permite un mayor refinamiento gracias a la introducción de las cinco facetas duales que contempla el EOS, y especialmente por la consideración de las facetas expresión-contenido, intensivo-extensivo y elemental-sistémico.

Para realizar este segundo tipo de análisis ontológico-semiótico, llamado microscópico, se descompone el texto en unidades de análisis y se estudian las funciones semióticas establecidas. Dicha descomposición no es única sino que depende del propio investigador, quien debe efectuar la que mejor explique las relaciones dialécticas existentes entre las entidades presentes. Algo similar puede decirse de la descomposición en subunidades. El paso de una subunidad a otra subunidad se describe con las funciones semióticas.

Las aplicaciones más importantes de análisis microscópico se han realizado en el campo del análisis matemático. En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa) se realiza este tipo de análisis considerando como expresión o contenido de las funciones semióticas básicamente la faceta extensiva-intensiva de los objetos matemáticos.

9 ANÁLISIS A POSTERIORI. PROCESOS DE INSTRUCCIÓN, CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS Y CRITERIOS DE IDONEIDAD.

Para poder analizar los procesos de instrucción efectivamente realizados necesitamos textos escritos. Por este motivo, las grabaciones en video de las sesiones de clase correspondientes a un proceso de instrucción conviene que sean transcritas. Una vez que tenemos estos textos escritos necesitamos descomponerlos en unidades de análisis. Una posible manera de realizar esta descomposición es tomar como unidad de análisis básica el constructo "configuración didáctica". En Godino, Contreras y Font (en prensa) se considera que una *configuración didáctica* se compone de una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos.

Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción, además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales (libros de texto, ordenadores, material manipulativo, etc.). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación, etc.

La configuración didáctica se concibe como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. La agrupación en configuraciones didácticas es flexible y queda a criterio del investigador.

El análisis de las configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso de instrucción se facilita si disponemos de algunos modelos teóricos que nos sirvan de referencia. En Godino, Contreras y Font (en prensa) se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar este papel y que se designan como configuración *magistral*, *adidáctica*, *personal* y *dialógica*. En la figura 7 representamos en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones didácticas teóricas descritos.

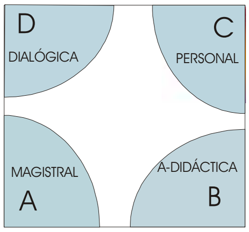


Figura 7

Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen en los procesos de instrucción efectivamente realizados pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. A lo largo de un proceso de instrucción matemática las configuraciones empíricas oscilarán en torno a estos tipos teóricos.

Los análisis a posteriori más amplios (macroscópicos) comentados en el apartado anterior serán análisis realizados sobre un conjunto amplio de configuraciones didácticas, mientras que los análisis más finos (microscópicos) se realizarán fundamentalmente sobre un número muy reducido de estas configuraciones didácticas.

Las nociones teóricas elaboradas por el EOS permiten abordar cuestiones como las siguientes: ¿De qué variables o factores depende la idoneidad de un proceso de estudio matemático? ¿En qué medida es idóneo/eficaz el proceso de estudio observado? ¿Cómo evaluar la idoneidad de un proceso de estudio matemático? , etc.

En el EOS se considera que la idoneidad global de un proceso de estudio se debe valorar teniendo en cuenta las seis dimensiones comentadas anteriormente. En el caso de las dimensiones: docente y discentes, se considera útil articularlas teniendo en cuenta las posibilidades de identificación de conflictos y de negociación de significados. Resultan, en consecuencia, los cinco criterios de idoneidad siguientes:

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia.
- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente la

medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos y alumnas y alumnas.

- *Idoneidad semiótica* tiene en cuenta los conflictos semióticos potenciales y su resolución mediante la negociación de significados.
- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de estudio.
- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos y alumnas y alumnas en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

El término semiótico se utiliza de manera amplia (todo lo relacionado con la comprensión), mientras que los términos cognitivo y mediacional se utilizan de manera restrictiva. El término cognitivo se utiliza cuando intervienen los conocimientos previos y el mediacional para referirse a los medios temporales, sobre todo, y a los recursos materiales.

CAPÍTULO 3

LA PERSPECTIVA DIALÓGICA SOBRE LA ARGUMENTACIÓN

RESUMEN

En este capítulo se presenta la perspectiva dialógica sobre la argumentación y se explicita cómo se ha tenido en cuenta en esta investigación.

En el primer apartado se comentan brevemente diferentes maneras de entender el "discurso" y se concluye que: (1) en el discurso se pueden observar tres aspectos. Por una parte hay un aspecto informativo (lo que se dice), un aspecto expresivo (cómo se dice) y un aspecto argumentativo (el efecto que se pretende conseguir en el auditorio). (2) La Retórica o Teoría de la Argumentación se ha interesado especialmente por este último aspecto.

En el segundo apartado se expone que el estudio de la "argumentación" se puede enfocar desde la lógica o bien desde Retórica o Teoría de la Argumentación. Esta última perspectiva surge como reacción a las escuelas filosóficas que pretendían reducir la argumentación a la lógica y puede articularse en las siguientes tendencias: 1) El examen de las estructuras argumentativas (Toulmin), 2) La nueva Retórica (Perelman) y 3) La filosofía dialógica del Discurso (Habermas). En los apartados 3 y 4 se comenta muy brevemente el punto de vista de Toulmin y el de la nueva retórica respectivamente, mientras que en el apartado 5 se hace una revisión más amplia del punto de vista de Habermas sobre la argumentación y se comenta también la tipología de acciones que propone en su Teoría de la Acción Comunicativa.

En el apartado 6 se comenta cómo se ha contemplado en esta investigación el punto de vista dialógico de Habermas, en concreto se explica que el diseñó del seminario-taller se hizo con la intención explícita de facilitar que las acciones de los profesores fuesen comunicativas y también cómo se tuvieron en cuenta los tres aspectos de la argumentación considerados por Habermas (proceso, procedimiento y producto). Por último, en el apartado 7 se hace una revisión de la investigación didáctica sobre el discurso y la argumentación en matemáticas.

1 DISCURSO

Los lingüistas definieron inicialmente, en una perspectiva formalista, el discurso como un simple sinónimo de enunciado:

> *El discurso designa todo enunciado superior a la frase, considerado desde el punto de vista de las reglas de encadenamiento de una serie de frases"* (Dubois, 1973, p. 156).

Benveniste y Jakobson propusieron una concepción menos formalista al considerar al discurso como parte de un modelo de comunicación. En esta nueva óptica, el discurso sería cualquier forma de actividad lingüística considerada en una situación de comunicación, es decir, en una determinada circunstancia de lugar y tiempo en que un determinado sujeto enunciación (yo, nosotros) organiza su lenguaje en función de un determinado destinatario (tú, vosotros):

> *La frase, creación indefinida, variedad sin límite, es la vida misma del lenguaje en acción. Concluimos que con la frase se sale del dominio de la lengua como sistema de signos, y se penetra en otro universo, el de la lengua como instrumento de comunicación, cuya expresión es el discurso.* (Benveniste, 1973, pp. 128-129).

Los trabajos de Austin (1962) y Searle (1969), quienes descubren bajo las regularidades del "lenguaje cotidiano" ciertas formas de institucionalidad (las "convenciones") que las explican y las determinan, permitieron superar las limitaciones de los enfoques formalistas y comunicativos y avanzar hacia una concepción más sociológica del discurso.

Según este último punto de vista, al hablar estamos realizando varios actos simultáneos: actos locucionarios, ilocucionarios y perlocucionarios. El acto locucionario consiste en que el hablante articula una forma lingüística en un contexto determinado dirigiéndose a un oyente. Mediante ellas, transmite al oyente una serie de significados semánticamente codificados (por ejemplo, una proposición). Mediante la realización del acto locucionario en un determinado contexto, el hablante realiza un acto ilocucionario, un determinado acto comunicativo socialmente reconocible, una acción intencional. Con ello, la enunciación tiene un significado pragmático o fuerza ilocucionaria (por ejemplo: lo dice gritando, en broma, etc.). Mediante su acto ilocucionario, el hablante influye de alguna manera sobre el oyente, provoca una reacción en él (perlocución o efecto perlocucionario). La intención perlocucionaria de provocar un efecto no tiene por qué ser manifiesta para el oyente. Además, la intención perlocucionaria puede fracasar, sin que ello afecte a la realización efectiva del acto ilocucionario (puede decir algo gritando pretendiendo asustar y, en cambio, resultar ridículo para el oyente).

Los trabajos de Austin y Searle ponen de manifiesto que en el discurso se pueden observar tres aspectos. Por una parte hay un aspecto informativo (lo que se dice), un aspecto expresivo (cómo se dice) y un aspecto argumentativo (el efecto que se pretende conseguir en el auditorio). La Retórica o Teoría de la Argumentación se ha interesado especialmente por este último aspecto.

2 ARGUMENTACIÓN

2.1 Concepto de argumentación

En la Retórica o en la Teoría de la Argumentación se denomina "argumentación" a una forma de discurso (realizado en un contexto de comunicación) que tiene la finalidad de alcanzar el asentimiento (o el rechazo) de un interlocutor respecto a la validez (o no) de una afirmación o de una norma, empleando, para ello, referencias a afirmaciones o normas, hechos, etc., que se presupone son admitidos por ambas partes.

La argumentación se desarrolla en forma de "proceso" y se articula en fases en que se puede ir logrando el asentimiento a una afirmación o norma y donde cada paso sirve de apoyo a nuevos pasos en el proceso de lograr el asentimiento final. Dichos pasos, que forman parte del proceso total de argumentación y donde se intenta conseguir acuerdos parciales son denominados "argumentos".

2.2 Diferentes puntos de vista sobre la argumentación.

Los conceptos, problemas y procedimientos del proceso comunicacional "argumentación" han sido objeto, desde la antigüedad, de estudios organizados tanto en lo que hoy se llama la Teoría de la Argumentación, pero que anteriormente fue denominada Retórica, como también de examen y análisis, en lo que concierne a la validez lógica de las relaciones establecidas entre los contenidos de las comunicaciones arguméntales, realizándose ese examen desde la Lógica. Por tanto, el estudio de la "argumentación" se puede enfocar desde la lógica o bien desde Retórica o Teoría de la Argumentación.

En el sistema de conocimientos conocido como Lógica Moderna – al que han contribuido diferentes movimientos filosóficos: Filosofía Analítica, Positivismo Lógico, Racionalismo Crítico, etc. - se planteó la pretensión de que la lógica estándar debía ser la pauta universal o única perspectiva válida para observar también cualquier proceso comunicacional de argumentación, es decir, no sólo la argumentación científica o teórica sino cualquier interacción comunicacional en el ámbito cotidiano, jurídico, religioso etc. La validez o no de tales argumentos debería, según esa concepción, ser enjuiciada desde los criterios de la lógica pura.

Estas pretensiones dieron lugar a diversas reacciones, gran parte de la obra de Wittgenstein se puede entender como reacción ante esas pretensiones de los logicistas. Otra reacción importante la inició Austin con su teoría de los actos del habla (desarrollada posteriormente por Searle).

Estas reacciones pueden articularse en los siguientes enfoques:

1. El examen de las estructuras argumentativas (Toulmin)
2. La nueva Retórica (Perelman)
3. La filosofía dialógica del Discurso (Habermas).

Desde la perspectiva lógica, el propósito del estudio de la argumentación consiste en fijar estándares que permitan realizar un juicio racional, esto es, decidir acerca de la validez de conjuntos de proposiciones. Se trata de establecer cánones de inferencias correctas, con el objeto de aceptar determinadas expresiones como conocimiento confiable. En cambio, la nueva retórica considera que la finalidad de la argumentación es convencer con razones o persuadir mediante recursos afectivos. Para la nueva retórica, la argumentación es eficaz cuando logra la adhesión de la audiencia; para ello, es necesario adaptar el discurso a la audiencia. Para la perspectiva dialéctica, la argumentación tiene por objeto la resolución de diferencias de opinión, el interés está en llegar a un acuerdo con el antagonista y no en la persuasión. En este enfoque, se trata de crear una actitud proclive a la discusión a través del análisis crítico de diferentes posturas, de cara a concordar en la toma de decisiones.

Con relación al contexto en el que tiene lugar el proceso argumentativo, la lógica se centra en un conjunto de proposiciones que se ubican en un contexto objetivado y despersonalizado. En la perspectiva de la nueva retórica, el discurso argumentativo se produce en una situación real, concreta, cotidiana y, por tanto, el sujeto argumentador debe tener muy en cuenta los elementos situacionales. En la perspectiva dialéctica también interesa el contexto, pero, sobre todo, en tanto éste permite establecer las condiciones ideales en que se debe desarrollar la interacción.

En la perspectiva lógica, el procedimiento de la discusión exige que el receptor funcione como examinador crítico. Metafóricamente se trata de una especie de "máquina lógica" que aplica algunas reglas de validez invariables. Para la nueva retórica, la audiencia ocupa un papel central, pero no activo. Se sostiene que toda argumentación debe desarrollarse en función de la audiencia. En la perspectiva dialéctica, en cambio, es esencial el reconocimiento de la existencia de otra persona que, de algún modo, se enfrenta y se opone a una postura asumida. Los interlocutores deben ser conscientes de sus respectivos roles: uno es el protagonista y el otro, el antagonista.

La perspectiva lógica tradicional iguala la validez de la argumentación con la validez formal del razonamiento expresado en la argumentación. En la perspectiva de la nueva retórica, la validez del argumento depende del éxito que se tenga con la audiencia a la que la argumentación va dirigida. La perspectiva dialéctica adopta el criterio de razonabilidad, entendiendo ésta como la actividad de usar la razón de "buena" manera. Se trata de convencer mediante el "mejor" argumento.

3 EL EXAMEN DE LAS ESTRUCTURAS ARGUMENTATIVAS SEGÚN TOULMIN

Según Toulmin (1958), la lógica moderna pierde de vista, sin ser consciente de ello, la dimensión pragmática de la argumentación y reduce todo su examen a la dimensión sintáctica, es decir, a la conformidad con las reglas o esquemas de proceder en la concatenación de los argumentos. Toulmin, como también hace Perelman, rompe con el modo de enfoque logicista al centrar su reflexión, no sólo sobre sistemas formalizados de enunciados, sino sobre la realidad argumentativa. El modelo que propone Toulmin considera que la argumentación (figura 1) contiene:

- *Datos:* La información disponible por los argumentadores o suministrada al sistema-social-comunicación, por alguno de ellos, y que es tomada como punto de partida del proceso. Son los hechos o información factual, que se utiliza para justificar y validar una afirmación
- *Conclusión:* Representa la tesis que se ha de establecer
- *Fundamentos:* Es el conocimiento básico que permite asegurar la justificación.
- *Justificaciones:* Son reglas (razones, principios, ...) que permiten entender que una afirmación se infiere de otra
- *Calificadores modales:* La modalidad según la cual se hace la inferencia, por ejemplo, afirmando la universalidad o sólo la validez para un determinado dominio de ítems. Son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación.

- *Refutadores:* Los refutadores señalan las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas.

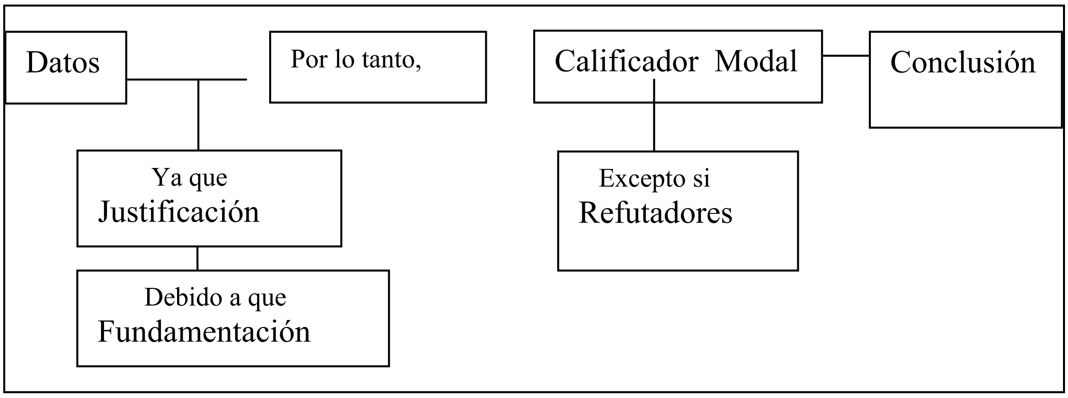


Figura 1. Esquema del texto argumentativo de Toulmin (1958).

Fuente, Sardà y Sanmartí (2000)

Según Sardà y Sanmartí (2000), Toulmin establece una analogía entre el texto argumentativo y el organismo, de manera que la parte anatómica está constituida por órganos, que son las diferentes fases de progreso de la argumentación, desde el enunciado inicial hasta la conclusión final; y la parte fisiológica está constituida por la lógica de cada frase. En su modelo no se puede desligar la fisiología de la anatomía, pues es un todo que pierde sentido sin esa interrelación, es decir, la lógica de cada enunciado queda determinada por la situación de la argumentación, y viceversa.

Para diversos autores este modelo permite ser conscientes de la estructura de la argumentación, pero no de su validez ya que no tiene en cuenta el contexto, el receptor ni la finalidad.

4 LA NUEVA RETÓRICA

Perelman y Olbrechts-Tyteca (1968) también consideran el problema de la argumentación en un marco más amplio que el de las relaciones internas en un sistema formalizado. Dichos autores focalizan su análisis en las formas históricas y culturales en que se han ido desarrollando formas y métodos del argumentar. Partiendo de las tradiciones de la Tópica y Retórica clásicas, Perelman y Olbrechts-Tyteca plantean la cuestión del argumentar en referencia al proceso de comunicación interpersonal en que el acierto de un argumento depende esencialmente de que sea aceptado por un auditorio. Según estos autores, no hay discurso sin auditorio, no hay argumentación que no tenga efecto retórico.

El análisis de la argumentación retórica es, según Perelman y Olbrechts-Tyteca, el modo más adecuado de observación y examen de las pretensiones de validez formuladas (por abarcar la complejidad de la situación comunicacional que no es posible ni ver si sólo se analizan las relaciones lógico-formales, es decir si el análisis se restringe a la dimensión sintáctica). Esa validez no puede ser observada con el simple recurso al código verdad/no-verdad (en la dimensión semántica), sino que requiere insertar en la observación la categoría de la "corrección" de la orientación normativa de la acción, es decir, implica una consideración "pragmática" de los procesos interpersonales de argumentación.

Perelman y Olbrechts-Tyteca centran su observación sobre las formulaciones verbales en que se busca el asentimiento del otro. En concreto, para estos autores, el objeto de la (nueva) retórica es el estudio de los medios de argumentación que no dependen de la lógica formal y que permiten obtener o aumentar la adhesión de otra persona a las tesis que se propone para su asentimiento. La razón o justificación de este modo de enfoque de los temas de la argumentación, la sustentan Perelman y Olbrechts-Tyteca en la necesidad de superar el planteamiento reduccionista-racionalista que arranca de la filosofía de Descartes, en especial de su método “more geométrico”.

El asentimiento por parte del otro comunicador no tendrá un carácter necesario (como en la demostración lógica), dependerá, contingentemente, de las circunstancias concretas en intereses, actitudes, tradiciones, vínculos al "milieu" o cultura en donde actúa el individuo, etc. Estos autores señalan, además, que la naturaleza misma de la deliberación en la argumentación se opone a la necesidad y a la evidencia, pues no se delibera allí donde la solución es necesaria ni se argumenta contra la evidencia. Para Perelman y Olbrechts-Tyteca, el dominio de la argumentación es el de lo verosímil, lo plausible, lo probable; en la medida en que este último escapa a las certezas del cálculo.

Asimismo, Perelman y Olbrechts-Tyteca consideran que la teoría de la argumentación debe analizar los modos de uso retórico del lenguaje, que clasifican en dos grandes grupos: la *asociación* y la *disociación* de las nociones. Los argumentos ponen en paralelo los conceptos para compararlos, acercarlos, provocar la amalgama; o también pueden contraponerlos. Pero el efecto retórico (lograr el asentimiento o el rechazo) presuponen una adhesión a determinados valores. Muy lejos de la neutralidad axiológica de la lógica (juicios libres de valoración), la argumentación interpersonal debe presuponer referencias valorativas en los interlocutores a las que éstos irán recurriendo en sus distintas comunicaciones que lograrán tanto más asentimiento del oyente cuanto mejor relacionen los contenidos comunicados con dichas referencias valorativas (valores-referencia o valores-contraste). Cuando esas referencias argumentativas se reducen a mera apariencia encubierta con el calor emocional se tiene una retórica manipuladora. Por ejemplo: si alguien dice con fuerza: “es verdad que ...” o “es evidente esto o aquello” en lugar de describir meramente algo, la intención será normalmente la de evitar el disentimiento o el mismo debate. Pues se considera con que el oyente no irá contra la evidencia o la verdad.

5 EL PUNTO DE VISTA DIALÓGICO DE HABERMAS

En este apartado comenzaremos con una exposición esquemática de los propósitos de Habermas al elaborar su teoría de la acción comunicativa. A continuación, comentaremos su punto de vista sobre la argumentación y la tipología de acciones que propone.

En cierto modo, Habermas da un paso más en la línea de Toulmin y Perelman en cuanto que, para él, el análisis del proceso de comunicación es el marco desde el cual considera los procesos argumentativos o "discurso". La obra donde el autor expone más extensamente su concepto de acción en la vida social es *Teoría de la Acción Comunicativa* (1987) cuyo propósito declarado en el Prólogo es que ésta sea una "fundamentación metodológica” de las Ciencias Sociales en una “Teoría del Lenguaje". Habermas apela a la estructura dialógica del lenguaje como fundamento del conocimiento y de la acción, con esto se incluye dentro del “giro lingüístico” en filosofía. Como resultado extrae el concepto de acción comunicativa donde la racionalidad está dada por la capacidad de entendimiento entre “sujetos capaces de lenguaje y acción” mediante “actos de habla” cuyo trasfondo es un “mundo de la vida” de creencias e intereses no explícitos y acríticamente aceptados por las comunidades de comunicación.

La teoría de la acción comunicativa (Habermas, 1987) describe dos aspectos siempre presentes en la vida humana: la racionalidad instrumental y la comunicativa. La primera tiene por objetivo el dominio de la realidad por parte de los seres humanos para garantizar la autoconservación del individuo o la sociedad. Según ella, importa el beneficio individual o social, para lo que se deben aplicar los medios adecuados a los fines particulares, estableciéndose relaciones sujeto/objeto. En cambio, la racionalidad comunicativa:

> (…) *posee connotaciones que en última instancia se remontan a la experiencia central de la capacidad de aunar sin coacciones y de generar consenso que tiene un habla argumentativa en que diversos participantes superan la subjetividad inicial de sus respectivos puntos de vista y merced a una comunidad de convicciones racionalmente motivada se aseguran a la vez de la unidad del mundo objetivo y de la intersubjetividad del contexto en que se desarrollan sus vidas.* (Habermas, 1987, p. 27).

Sin embargo, ambos tipos de acciones, la instrumental y la comunicativa, no se deben entender excluyentes sino complementarias en su uso a fin de desenvolverse adecuadamente en la realidad existente.

5.1 Excurso sobre la teoría de la argumentación

A continuación, resumimos brevemente el punto de vista de Habermas expuesto en el "Excurso sobre la teoría de la argumentación" del volumen I de su teoría de la acción comunicativa.

Según Habermas, un discurso o argumentación plantea, y esto es un rasgo distintivo de esta forma de comunicación, determinadas pretensiones de validez. Que dichas pretensiones de validez sean o no admitidas por la otra parte es lo que decide sobre la adjudicación del código verdad/falso a los contenidos comunicados. Ese discurso se desarrolla según "reglas", pero no las de la lógica estándar o la formalizada, sino por reglas constitutivas y conformativas de "actos del habla".

Esto implica, evidentemente, que tales reglas no sean las de la lógica, para la que no existe ni la dimensión pragmática, sólo la sintáctica. La condición de posibilidad de que tales discursos en que es posible lograr el asentimiento de la otra parte es la existencia previa de un sistema de lenguaje y de uso social del lenguaje. Pero el discurso - y en eso se diferencia del mero habla limitada a la comunicación descriptiva - no sólo afirma estados de cosas, sino intenta mostrar al mismo tiempo el "fundamento" de lo que se afirma. Es decir, la argumentación es algo distinto de la mera información.

Según Habermas, la lógica de la argumentación no se refiere, como la formal, a relaciones de inferencia entre unidades semánticas (oraciones), sino a relaciones internas, también de tipo no deductivo, entre las unidades pragmáticas (actos de habla) de que se componen los argumentos.

Considera los siguientes tipos de argumentación: Discurso teórico, Discurso práctico, Crítica estética, Crítica terapéutica y Discurso explicativo, sus características se pueden apreciar en la Tabla 1.

Objeto de la argumentación Formas de argumentación	Manifestaciones o emisiones problemáticas	Pretensiones de validez controvertidas
Discurso teórico	Cognitivo-instrumentales	verdad de las proposiciones; eficacia de las acciones teleológicas
Discurso práctico	Práctico-morales	Rectitud de las normas de acción
Crítica estética	Evaluativas	Adecuación de los estándares de valor
Crítica terapéutica	Expresivas	Veracidad de las manifestaciones o emisiones expresivas
Discurso explicativo	----------------------------	Inteligibilidad o corrección constructiva de los productos simbólicos

Tabla 1. Tipos de argumentación

Habermas trata de dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo pueden las pretensiones de validez, cuando se tornan problemáticas, quedar respaldadas por buenas razones? ¿Cómo pueden, a su vez, estas razones ser objeto de crítica? ¿Qué es lo que hace a algunos argumentos, y con ello a las razones que resultan relevantes en relación con alguna pretensión de validez, más fuertes o más débiles que otros argumentos?

Según Habermas el habla argumentativa puede contemplarse como proceso, como procedimiento y como producto.

Para Habermas el habla argumentativa considerada como proceso es una forma de comunicación infrecuente y rara debido a que se trata de una forma de comunicación que ha de aproximarse suficientemente a condiciones ideales ¿Pero qué significa una situación ideal de habla? La situación ideal sólo es posible bajo la reconstrucción de las condiciones generales de simetría que todo hablante tiene que satisfacer en la medida que crea entrar en una Argumentación. Y ¿cómo podemos entender esta situación de simetría que implica una Argumentación genuina? La simetría se logra cuando los participantes de la Argumentación están conscientes de que la estructura de su comunicación puede describirse de modo puramente formal. Es decir, se trata de excluir de la comunicación toda coacción y centrase en la búsqueda cooperativa de la verdad., con lo cual se puede sintetizar que*:*

> *La Argumentación puede entenderse como una continuación con otros medios, ahora de tipo reflexivo, de la acción orientada al entendimiento.* (Habermas, 1987, p. 46).

Cuando se considera a la argumentación como procedimiento se trata de una forma de interacción sometida a una regulación especial. El proceso de entendimiento está regulado de tal modo en forma de una división cooperativa del trabajo entre proponentes y oponentes, en la que los implicados: (a) tematizan una pretensión de validez que se ha vuelto problemática, (b) adoptan una actitud hipotética ya que pueden verse exonerados de la presión de la acción y la experiencia, (c) examinan con razones, y sólo con razones, si procede reconocer o no la pretensión defendida por el proponente.

La argumentación puede ser considerada desde un tercer punto de vista, la producción de argumentos pertinentes que convenzan en virtud de sus propiedades intrínsecas, con que desempeñar o rechazar las pretensiones de validez.

Los argumentos son los medios con cuya ayuda puede obtenerse un reconocimiento intersubjetivo para la pretensión de validez que el proponente plantea por de pronto de forma hipotética, y con los que, por tanto, una opinión puede transformarse en saber.

Un argumento se compone de una emisión problemática (conclusión), la cual lleva incorporada una pretensión de validez y de la razón o fundamento con que ha de decidirse acerca de esa pretensión. Tiene que quedar claro qué clase de asuntos trata de suscitar el argumento (estético, científico, jurídico) y cuál es el propósito subyacente. Las razones en las cuales se basan tienen que ser relevantes en relación con la pretensión planteada en el argumento y ser suficiente para apoyarla.

Según cuál sea el aspecto bajo el que consideramos la argumentación, las estructuras que en ella descubrimos son distintas: (a) en el caso de la argumentación como proceso encontramos las estructuras de una situación ideal de habla especialmente inmunizada contra la represión y la desigualdad; bajo este aspecto, lo que mejor podría caracterizar a la argumentación es la intención de convencer a un auditorio universal y de alcanzar para la manifestación o emisión un asentimiento general. (b) Bajo el aspecto de procedimiento, encontramos una estructura de competición ritualizada, por los mejores argumentos, bajo este aspecto el objetivo es cerrar la disputa en torno a pretensiones de validez hipotéticas con un acuerdo racionalmente motivado. (c) Bajo el aspecto de producto, encontramos las estructuras que definen la forma interna de los argumentos y las relaciones que guardan entre sí, bajo este aspecto la intención es desempeñar o fundamentar una pretensión de validez por medio de productos.

En todos los campos de la actividad humana, el razonamiento y la argumentación tienen lugar como elementos centrales dentro de una empresa humana más amplia. Y para subrayar este rasgo, el hecho de que todas estas actividades pongan su confianza en la alegación y evaluación crítica de razones y argumentos, Habermas propone referiremos a todas ellas como empresas racionales.

Todas las argumentaciones, ya versen sobre cuestiones de derecho o de moral, o sobre hipótesis científicas u obras de arte, exigen la misma forma de organización básica de una búsqueda cooperativa de la verdad que subordine los medios de la argumentación al objetivo de obtener convicciones intersubjetivas basadas en los mejores argumentos.

Así mismo, Habermas distingue entre pretensiones convencionales dependientes de los contextos de acción y pretensiones universales de validez. El tipo de pretensión es algo que en la mayoría de los casos sólo puede determinarse a partir del contexto. Habermas también distingue la toma de posición frente a una pretensión de validez de la toma de posición frente a las pretensiones de poder.

Según Habermas, una pretensión de validez equivale a la afirmación de que se cumplen las condiciones de validez de una manifestación o emisión. Lo mismo si el hablante plantea su pretensión de validez implícitamente que si lo hace de manera explícita, el oyente no tiene más elección que aceptar la pretensión de validez, rechazarla, o dejarla en suspenso. Las tomas de postura, con una afirmación o una negación, frente a pretensiones de poder que aceptamos o rechazamos no son más que la expresión de la aceptación o el rechazo de someterse al poder en cuestión. Por el contrario las posturas de afirmación o negación frente a pretensiones de validez significan que el oyente asiente con razones, o no asiente, a una pretensión de validez susceptible de crítica y son, por consiguiente, expresión de la intelección de un nexo de validez.

Las pretensiones de validez implícitamente llevan asociadas: la verdad, la rectitud normativa, la adecuación y la inteligibilidad o corrección en el uso de los medios de expresión. A estos mismos modos conduce un análisis de enfoque semántico de las formas de enunciación. Las oraciones descriptivas pueden ser negadas o aceptadas bajo el aspecto de verdad de la proposición. Las oraciones normativas que sirven a la justificación de acciones, bajo el aspecto de rectitud de una forma de actuar. Las oraciones evaluativas (los juicios de valor) que sirven a la valoración de algo, bajo el aspecto de adecuación de los estándares de valor. Y las explicaciones de reglas generativas que sirven de explicación de operaciones tales como hablar, clasificar, calcular, deducir, juzgar, etcétera, bajo el aspecto de inteligibilidad o corrección formal de las expresiones simbólicas.

Habermas sólo habla de "discursos" cuando el sentido mismo de la pretensión de validez que se ha tornado problemática fuerce conceptualmente a los participantes a suponer que en principio podría alcanzarse un acuerdo racionalmente motivado, significando aquí "en principio" la siguiente reserva idealizadora: con tal que la argumentación fuera suficientemente abierta y durara el tiempo suficiente.

5.2 Diferentes tipos de acción

Habermas especifica cuatro tipos de acción que suelen intervenir en la teoría social: (a) la *acción teleológica* (que ocupa desde Aristóteles el centro de la filosofía de la acción) que él las llama "acciones orientadas al éxito", (b) la acción *regulada por normas,* (c) la acción *dramatúrgica* y (d) la *acción comunicativa*.

El autor también distingue entre las acciones las orientadas al éxito y las comunicativas. Una acción orientada al éxito se llama instrumental, cuando la consideramos bajo el aspecto de observancia de reglas de acción técnicas y evaluamos el grado de eficacia de la intervención que esa acción representa en un contexto de estados y sucesos; y a una acción orientada al éxito la llamamos estratégica cuando la consideramos bajo el aspecto de observancia de reglas de elección racional y evaluamos su grado de influencia sobre las decisiones de un oponente racional. Las acciones instrumentales pueden ir asociadas a interacciones sociales. Las acciones estratégicas representan, ellas mismas, acciones sociales.

En cambio, podemos hablar de acciones comunicativas cuando los planes de acción de los actores implicados no se coordinan a través de un cálculo egocéntrico de resultados, sino mediante actos de entendimiento. En la acción comunicativa los participantes no se orientan primariamente al propio éxito; antes, persiguen sus fines individuales bajo la condición de que sus respectivos planes de acción puedan armonizarse entre sí sobre la base de una definición compartida de la situación. De ahí que la negociación de definiciones de la situación sea un componente esencial de la tarea interpretativa que la acción comunicativa requiere.

Para Habermas, entenderse es un proceso de obtención de un acuerdo entre sujetos lingüística e interactivamente competentes. Un acuerdo alcanzado comunicativamente, o un acuerdo supuesto en común en la acción comunicativa, es un acuerdo proposicionalmente diferenciado. Merced a esta estructura lingüística, no puede ser sólo inducido por un influjo ejercido desde afuera, sino que tiene que ser aceptado como válido por los participantes. En este sentido, se distingue de una coincidencia puramente fáctica. Los procesos de entendimiento tienen como meta un acuerdo que satisfaga las condiciones de asentimiento, racionalmente motivado, al contenido de una emisión. El acuerdo se basa en convicciones comunes. El acto de habla de un actor sólo puede tener éxito si el otro acepta la oferta que ese acto de habla entraña, tomando postura (al menos implícitamente) con un sí o con un no frente a una pretensión de validez que en principio es susceptible de crítica. Sólo podemos explicar el concepto de entendimiento si somos capaces de precisar qué significa emplear acciones con intención comunicativa.

Habermas tiene en cuenta la distinción ofrecida por Austin entre acto locucionario, ilocucionario y perlocucionario. Para él en los actos de habla hay un componente ilocucionario que se emite con intención comunicativa, es decir, con el propósito de que un oyente entienda y acepte la emisión.

El sentido de las acciones teleológicas podemos identificarlo, sólo si nos valemos de las intenciones que persigue el autor y de los fines que se propone alcanzar. Así como a los actos ilocucionarios les es constitutivo el significado de lo dicho, así también a las acciones teleológicas les es constitutiva la intención del agente. Los efectos perlocucionarios se producen siempre que el hablante actúe orientándose al éxito, y a la vez vincule los actos de habla a intenciones y los instrumentalice para propósitos que sólo guardan una relación contingente con el significado de lo dicho.

Mediante el acto ilocucionario el hablante hace saber que lo que dice quiere verlo entendido como saludo, amonestación, etcétera. Su intención comunicativa se agota en que el oyente llegue a entender el contenido manifiesto del acto de habla. El objetivo perlocucionario no se sigue del contenido manifiesto del acto de habla. La descripción de efectos perlocucionarios tiene que hacer referencia a un contexto de acción teleológica que va más allá del acto de habla y que no guardan relación con ninguna convención. Los éxitos ilocucionarios guardan con el acto de habla una relación interna regulada por convención. Los fines perlocucionarios no pueden darse a conocer por parte del oyente. Los fines ilocucionarese sólo pueden conseguirse haciéndose expresos.

Según Habermas los actos perlocucionarios requieren de actos ilocucionarios. Los efectos perlocucionarios son indicio de la integración de actos de habla en contextos de interacción estratégica. Pero, los actos de habla sólo pueden servir a este fin perlocucionario, de ejercer una influencia sobre el oyente, si son aptos para la consecución de fines locucionarios. Si el oyente no entendiera al hablante, no podría servirse, el hablante del oyente, para realizar sus propósitos. Las perlocuciones son acciones estratégicas encubiertas. Son interacciones en las que, como mínimo, uno de los participantes se conduce estratégicamente, engaña a los demás acerca del estar cumpliendo los requisitos del acto ilocucionario. Por eso, este tipo de interacción no resulta apta como modelo de análisis para explicar el mecanismo lingüístico de coordinación de las acciones y el entendimiento.

Habermas centra su atención en un tipo de interacciones sobre el que no pesan las asimetrías y restricciones propias de las perlocuciones. A esta clase de interacciones, en que todos los participantes armonizan entre sí sus planes individuales de acción y persiguen sus fines ilocucionarios, la llama acción comunicativa. Los agentes que actúan en un mismo plan de interacción no pueden generar efectos perlocucionarios. Fines perlocucionarios puede perseguir un hablante cuando logra ocultar a su interlocutor que está actuando estratégicamente.

La acción comunicativa puede generar consecuencias no intencionadas que pueden tomarse como efectos perlocucionarios, por lo que, si esto sucede, los intervinientes tienen derecho y obligación de aclarar la cuestión. Del mismo modo un cambio de contexto puede transformar una acción comunicativa en estratégica y provocar efectos perlocucionarios en terceros. En este caso también será necesaria una aclaración. Por lo tanto, serán acciones comunicativas aquellas interacciones mediadas lingüísticamente en que todos los participantes persiguen con sus actos de habla fines ilocucionarios y sólo fines ilocucionarios. Las interacciones en que a lo menos, uno de los participantes pretende con actos de habla provocar efectos perlocucionarios en su interlocutor son consideradas como acciones estratégicamente mediadas lingüísticamente.

6. CÓMO SE HA CONTEMPLADO EN ESTA INVESTIGACIÓN EL PUNTO DE VISTA DIALÓGICO DE HABERMAS

La Teoría de la Acción Comunicativa de Habermas (1987) hace aportaciones sobre el proceso de toma de decisiones que nos parecen válidas para optimizar los procesos educativos. Por este motivo, la hemos tomado como uno de los principales referentes teóricos de esta investigación.

Partimos del supuesto de que las relaciones comunicativas no se pueden dar desde la coacción ya que necesitan un clima que favorezca la participación. Por este motivo se diseñó, en la segunda fase de la investigación, un seminario-taller sobre "la contextualización de las funciones" con la pretensión de iniciar la creación de una auténtica comunidad de aprendizaje, donde los componentes del grupo: (1) se sintieran integrados en el proceso de construir conocimientos, (2) afrontaran la incertidumbre exponiendo las dudas y formulando preguntas de forma abierta y (3) las ambigüedades y contradicciones se pudieran tolerar sin necesidad de adoptar posturas defensivas o bien caer en el escepticismo paralizante.

En esta investigación hemos tenido, en todo momento, la pretensión de desarrollar las condiciones necesarias para posibilitar acciones comunicativas entre el profesorado que ha participado en la segunda fase de la investigación. Por este motivo se diseñó el seminario-taller con la intención de facilitar que las acciones de los profesores fueran comunicativas (y así las hemos considerado). Se procuró que en dicho seminario-taller los profesores realizaran actos de habla en los que primara el aspecto ilocucionario "explicación". Es decir, actos de habla en los que, sobre todo, los profesores explicaran sus razones a los compañeros en un plano de igualdad. De todas maneras, somos conscientes de que también se han producido, inevitablemente, espacios de uso de la racionalidad estratégica por las limitaciones personales y sociales existentes (condiciones sociolaborales, intereses personales en mantener el status quo actual, etc.).

El motivo de centrar el seminario-taller sobre la "contextualización" es que partimos del siguiente supuesto: el objetivo de la institución investigada es la de conseguir una formación inicial de profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional. Por tanto, en el momento de tomar decisiones sobre las metas del proceso educativo universitario hemos de tener muy presente los amplios sectores sociales no relacionados directamente con esta situación educativa pero sí afectados por ella: la sociedad en su conjunto que será atendida por los nuevos profesionales. Este objetivo es el que debe primar sobre otros intereses sean estos de los profesores (por ejemplo primar la investigación sobre la docencia) o bien de los alumnos (por ejemplo: primar la obtención de un título por encima de cualquier otra consideración). Por este motivo, consideramos que un criterio útil para la selección de objetivos y contenidos, que tiene en cuenta tanto los intereses de estudiantes como de la sociedad en su conjunto, es la contextualización sociocultural de la práctica profesional. Dicha contextualización ha de permitir, por una parte, un profesional más competente y, por la otra, un profesional con un mayor desarrollo personal, tanto en sus aspectos más cognitivos (aprender a aprender), como en las dimensiones socioafectivas, que, sin duda, también estarán presentes en el ejercicio de la profesión.

La contextualización sociocultural de la práctica profesional topa con la limitación de tiempo de las asignaturas e implica afrontar el problema de la selección de los contenidos, metodologías y tipo de evaluación. Ahora bien, hay una extensa investigación en didáctica de las matemáticas que ha puesto de manifiesto que la contextualización también puede facilitar: (1) la comprensión de los alumnos al facilitar la conexión de los contenidos objeto de estudio con sus conocimientos previos, (2) la motivación de los alumnos, etc. En este sentido, también nos parece fundamental la contextualización de los conocimientos objeto de estudio.

Por otra parte, no todos los conceptos tienen el mismo grado de inclusividad, o generalidad, ni son igualmente centrales para la comprensión de la disciplina. En nuestra opinión, hay que centrar el esfuerzo docente en los contenidos nucleares en la disciplina, como es el caso, por ejemplo, del objeto “función”.

Las reflexiones anteriores nos llevaron a centrar el seminario-taller sobre la contextualización de las funciones, puesto que consideramos que en las matemáticas actuales el concepto de función es uno de los conceptos nucleares de la disciplina.

En el diseño e implementación del seminario-taller también se tuvieron en cuenta los tres aspectos de la argumentación considerados por Habermas: proceso, procedimiento y producto.

- *Proceso:* Se consideró que era necesario lograr una comunicación lo más cercana a lo ideal. Para ello se procuró que cada miembro se considerase un profesor más, de manera que se depusiera cualquier actitud de poder. La puesta en escena del debate tuvo como finalidad última la búsqueda de la “verdad”. Una “verdad” por asentimiento del mejor argumento, basada en la reflexión y orientada al consenso.
- *Procedimiento:* La interacción que tuvo lugar en cada sesión del seminario estuvo sometida a una regulación especial. Es decir, el

proceso discursivo para el entendimiento se reguló a través de una división cooperativa del trabajo entre oponentes y proponentes, quienes: (a) debatieron una pretensión de validez que se había vuelto problemática -concretamente se debatía la postura del colectivo en cuanto a la posibilidad de introducir (o no) un enfoque contextualizado para la enseñanza de las funciones-. (b) estuvieron exonerados de la presión de la acción – se trataba de llegar a acuerdos hipotéticos-, (c) examinaron con razones, y sólo con razones, si procedía reconocer o no la pretensión de validez que se debatía.

- *Producto:* La argumentación en el seminario-taller tuvo como objetivo principal producir argumentos pertinentes que permitieran, en virtud de sus propiedades intrínsecas, aceptar o rechazar las pretensiones de validez. En esta investigación se han estimado como productos todos aquellos argumentos que lograron alcanzar, debido a su fuerza argumentativa, el consenso racionalmente motivado del colectivo y también aquellos que fueron rechazados por el colectivo.

7 LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL DISCURSO Y LA ARGUMENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

En la década de los 80, la investigación en didáctica de las matemáticas se dedicó, casi en exclusividad, al análisis de los aprendizajes de los estudiantes, así como al estudio de las preconcepciones, concepciones y creencias de docentes y alumnos. Dichas investigaciones aportaron una mejor comprensión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero dejaron de lado muchos problemas importantes sin resolver. Recién finaliza dicha década la investigación didáctica comienza a relacionar el aprendizaje con el contexto social y con las expresiones verbales y argumentaciones que se presentan en la clase.

En la actualidad el término *discurso* ha aparecido en la escena de la investigación, tanto en didáctica de las ciencias experimentales como en el campo de la educación matemática.

La argumentación y el discurso han sido ampliamente estudiados por la comunidad de investigadores en la enseñanza de las ciencias (entre otros, De Longhi 2000; Pacca y Villani 2000; Sardá y Sanmartí 2000; Copello y Sanmatí 2001; García, Dominguez y García-Rodeja 2002; Jímenez y Díaz 2003; Márquez, Espinet e Izquierdo 2003). En estos estudios, para analizar el discurso que se produce en las aulas donde se enseñan ciencias experimentales se han utilizado, sobre todo, las teorías generales sobre el discurso y la argumentación como son las de Toulmin (1958), Perelman y Olbrechts-Tyteca (1968), Habermas (1987), Van Dyck (1978) entre otras. Por una parte, se han realizado análisis de un tipo de discurso específico a partir de marcos generales y, por otra parte, se han centrado, sobre todo, en el discurso dentro de un proceso de enseñanza y aprendizaje.

Actualmente ha aumentado considerablemente el interés en investigar el discurso en el aula de matemáticas, ya que, se ha considerado que lo que se dice sobre las tareas matemáticas es tanto o más importante que las propias tareas. En los congresos internacionales hay grupos de trabajo específicos sobre este tópico, por otra parte, prestigiosas revistas han dedicado números monográficos al tema (por ejemplo el volumen 46, números 1-3, del año 2001 de la revista *Educational Studies in Mathematics*) e incluso han aparecido revistas internacionales específicas sobre este tema como es el caso de la *Lettre de la Prueve* especializada en la enseñanza y el aprendizaje de la prueba matemática.

Los estudios sobre el discurso en la educación matemática se han abordado desde diversas perspectivas, entre las cuales queremos destacar sólo algunas:

- Las que se han centrado en el discurso del docente (y también del alumno) cuando utiliza un razonamiento matemático para la demostración de teoremas en el salón de clase. Lo que ha interesado en este tipo de estudios es cómo se consigue la validez del argumento. Por ejemplo, los trabajos de Bell (1976), De Villiers (1993) que versan sobre las funciones de la demostración en la actividad matemática (además de verificación, la de explicación y sistematización, entre otras) o los más recientes de Ibáñez (2001) e Ibáñez y Ortega (2002) que profundizan en esta perspectiva.

  Godino y Recio (1997), utilizando el marco ontosemiótico, analizaron los rasgos característicos del significado de la noción de prueba en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas. Concluyen que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la prueba en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas. Asimismo, se observa cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen los diversos significados institucionales de la prueba, lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con la prueba matemática.

- Las que consideran el aprendizaje de las matemáticas como una iniciación a un cierto *discurso* bien definido (Sfard, 2001). Esta investigadora defiende que la comunicación debería ser vista no como una simple ayuda para el pensamiento, sino prácticamente como equivalente al propio pensamiento. Para Sfard hay dos factores que hacen el discurso matemático especial: primero, su apoyo excepcional en artefactos simbólicos, y segundo, por la meta-regla específica de cada hablante, que regulan este tipo de comunicación. Las meta- reglas son constructos del observador y normalmente permanecen tácitas para los participantes del discurso.

- Las que han adoptado un punto de vista sociocultural. Por ejemplo, Zack y Graves (2001) investigaron el discurso y su rol en cómo los niños y los maestros construyen el significado de las matemáticas en un aula de de quinto año (enseñanza básica). La perspectiva teórica de estos autores se basa principalmente en los trabajos de Vygotsky y Bakhtin sobre cómo las formas sociales del significado influyen en la cognición individual. En cada episodio que se describe en este trabajo se examina el proceso por el cual se construyen trayectorias individuales y de grupo, que les permiten explorar la relación entre discurso y conocimiento.

  También, dentro de la perspectiva sociocultural en el trabajo de Lerman (2001) se proponen dos niveles de análisis. Desde una perspectiva macroscópica es posible ver las prácticas matemáticas dentro de las cuales los sujetos se convierten en actores de las matemáticas escolares. Desde una perspectiva microscópica es posible un estudio del tipo de mediación y de las trayectorias individuales dentro del aula. Dichos niveles de análisis tienen el propósito de abarcar la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje. Este trabajo presenta una psicología discursiva cultural para la educación matemática que considera centrales el lenguaje y las prácticas discursivas.

- Las perspectivas dialógicas cuyo objetivo es conseguir un consenso dentro de la comunidad del aula que vaya más allá del acuerdo entre sus miembros. Por ejemplo, los trabajos sobre el "juego de voces y ecos" realizados por Boero, Pedemonte y Robotti (1997 y 1998) y Garuti, Boero y Chiappini (1999). Y, más en general, las que tienen en cuenta las múltiples voces que se pueden escuchar en la comunidad "aula de matemáticas" (Forman y Ansell, 2001).

- Las investigaciones sobre el uso de metáforas en el discurso del profesor y de los alumnos. Recientemente, varios autores (Font y Acevedo, 2003; Lakoff y Núñez, 2000; Leino y Drakenberg, 1993; Presmeg, 1997) han puesto de manifiesto el importante rol que juega la metáfora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En la revisión bibliográfica que se ha realizado no se han encontrado trabajos previos en los que se aplique específicamente la perspectiva dialógica de Habermas para analizar la argumentación entre profesores de matemáticas cuando valoran la posibilidad de introducir un cambio. Hemos encontrado (1) referencias de tipo dialógico más general, sobre todo en el campo de las ciencias experimentales - por ejemplo, Copello y Sanmartí (2001) estudian los fundamentos de un modelo de formación permanente del profesorado de ciencias centrado en la reflexión dialógica sobre las concepciones y las prácticas-, (2) investigaciones sobre comunidades de prácticas de profesores (por ejemplo, Couso, 2002), (3) propuestas en las que se contempla la perspectiva dialógica en la formación inicial de maestros (Font 2002, 2005b y 2005c) y, más en general, (5) descripciones de diversas experiencias de investigación-acción.

CAPÍTULO 4

CREENCIAS, CONCEPCIONES Y CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO

RESUMEN

En este capítulo se realiza una revisión de las investigaciones sobre creencias, concepciones y conocimiento del profesor dedicando más atención a las que se han ocupado de alguno de los siguientes aspectos: cambio, funciones y contexto.

En el apartado 1 se hace una revisión de las investigaciones sobre creencias y concepciones de los profesores y se comenta la dificultad para distinguir ambos constructos. En el apartado 2 se comentan algunas investigaciones sobre el constructo "conocimiento del profesor" y la dificultad para distinguir entre conocimiento, creencias y concepciones. En el apartado 3 se comentan la estrecha relación entre las creencias y el cambio de la práctica del profesor. El interés por investigar sobre las creencias, las concepciones o el conocimiento del profesor se debe al convencimiento de que estos constructos son el filtro a través del cual los profesores toman sus decisiones sobre su práctica educativa. En el apartado 4 se dedica a un constructo muy relacionado con el cambio: el desarrollo profesional docente del profesorado. En el apartado 5 se comenta que la reflexión sobre el profesor ha ido evolucionando desde planteamientos cognitivistas hacia planteamientos antropológicos. Esta evolución, ha llevado a considerar como central el constructo "práctica del profesor". Por último, en el apartado 6 se comentan algunas investigaciones específicas sobre las concepciones y creencias del profesorado sobre dos tópicos específicos: función y contexto.

1 CREENCIAS Y CONCEPCIONES DEL PROFESORADO

Una de las líneas de investigación más relevante en educación matemática es la que estudia las creencias, convicciones, concepciones, imágenes, conocimientos, etc. del profesorado. Entre éstos, uno de los constructos más investigado es el de "sistema de creencias del profesorado". Las investigaciones realizadas al respecto han distinguido diferentes subsistemas entre los que destacan los siguientes: (a) creencias sobre qué son las matemáticas, (b) creencias sobre cómo son los procesos de enseñanza y aprendizaje y (c) creencias sobre cómo deberían ser los procesos de enseñanza y aprendizaje (Ernest, 1989a y 1989b; Thompson, 1991). Además de los anteriores subsistemas se han investigado otro tipo de creencias más específicos (sobre calculadoras, uso de la informática, evaluación, currículum, contexto, etc.).

Según Ernest (1989b, 1991), se pueden diferenciar cinco tipologías de sistemas de creencias del profesorado: el entrenador, el tecnólogo, el humanista, el progresista y el crítico. Cada uno de ellos tiene un sistema de creencias que permite distinguirlo de los demás (traducción en Gómez y Valero, 1995, pp. 144-145)

Tipo de profesor	**Entrenador**	**Tecnólogo**	**Humanista**	**Progresista**	**Crítico**
Concep-ciones sobre la naturaleza de las matemática s	Conjunto de verdades y reglas asociadas con autoridad	Cuerpo incuestio-nable de conocimi-ento útil	Cuerpo estructura-do de conocimi-ento puro	Cuerpo estructurado de conocimi-entos personali-zados	Conjunto de conocimi-ento construidos socialmente, susceptibles de cambio
Concep-ciones sobre los objetivos de la educación matemática	Mecaniza-ción de destrezas básicas	Utilidad del conocimien-to Aplicación a la tecnología e industria	Transmi-sión de valores racionales culturales. Formación mental	Desarrollo individual y autorrealiza-ción a través de las matemáticas	Desarrollo del potencial individual con miras al cambio social
Modelo de enseñanza	Transmisión de habilidades, repetición de ejercicios	Instrucción en manejo de habilidades. Resolución de problemas aplicados	Explicacio-nes, motivación y transmisión estructuras	Fomento del aprendizaje personal	Discusión, investiga-ción, cuestiona-miento
Modelo de aprendizaje	Autoridad, memoriza-ción, repetición y mecaniza-ción “La letra con sangre entra”	Práctica y aplicación de destrezas “ Aprender haciendo”	Compren-sión de estructuras y aplicación	Investigació n autonomía, creatividad, juegos, exploración	Internaliza-ción de constru-cciones sociales de las matemáticas. Resolución de problemas de la vida diaria

Concepciones sobre la utilización de recursos	Sólo papel y lápiz Anti-calculadoras	Materiales permiten la experimentación. Permitidos computador, calculadoras, etc.	Materiales tradicionales mínimos necesarios	Cualquier instrumento que facilite la formación de conceptos y representaciones	Materiales variados. Cada estudiante los utiliza de acuerdo con sus necesidades

Tabla 1. Tipologías de sistemas de creencias del profesorado

Por su parte, Khus y Ball (citado en Handal, 2003) caracterizaron tres concepciones dominantes entre el profesorado sobre el proceso ideal de instrucción (la primera focaliza la atención sobre el aprendiz, la segunda sobre el contenido pero hace énfasis sobre su comprensión, y la tercera también sobre el contenido, pero hace énfasis sobre las reglas y los procedimientos). Otra clasificación fue la propuesta por Renne (citado en Handal, 2003), dicho autor consideró dos tipologías de profesores, la primera está orientada hacia el conocimiento escolar, mientras que la segunda está orientada al desarrollo de los alumnos.

Las tres clasificaciones anteriores, más otras muchas que se han propuesto, han permitido llegar a un acuerdo bastante generalizado sobre el hecho de que el sistema de creencias del profesorado es un sistema complejo en el cual se pueden considerar subsistemas conectados en forma de red y que operan en función del contexto.

Las diferentes investigaciones sobre las creencias de los profesores se han interesado por saber lo que el profesor piensa, lo que hace y lo que dice. Ahora bien, puesto que no se puede acceder directamente al pensamiento de las personas realmente la investigación se ha centrado sobre lo que el profesor dice y hace, para luego sacar conclusiones sobre lo que piensa. Esta manera de acceder al pensamiento del profesor ha sido motivo de polémica ya que, para algunos autores, la investigación sobre lo que piensa el profesor a partir de lo que dice, sobre todo si lo que dice es lo que "debería ser", no refleja lo que él piensa verdaderamente. Por este motivo diferentes investigadores consideran muy importante diferenciar entre lo que el profesor dice de lo que piensa y hace (Brown, Cooney y Jones, 1990; Thompson, 1984 y 1992; Scheffler, 1965).

El interés por el estudio de los sistemas de creencias se debe al convencimiento de que éste tiene una gran influencia sobre la práctica del profesor. Este convencimiento, ha sido el motor de numerosas investigaciones sobre la relación entre los sistemas de creencias y la práctica del profesor. En dichas investigaciones hay una idea de fondo que consideramos relevante para la investigación que presentamos, que no es otra que la consideración de las creencias en términos de "filtro". Es decir, *las creencias serían el filtro a través del cual los profesores toman sus decisiones.*

Las investigaciones se han interesado por diferentes aspectos, entre los cuáles, destaca el intento de responder a la pregunta de cómo se origina el sistema de creencias. Con relación a su origen, las diferentes investigaciones han destacado la importancia que tiene la formación inicial del profesorado de matemáticas para generar no sólo creencias sobre las matemáticas, sino también sobre su enseñanza y aprendizaje (Day, 1996; Foss y Kleinsasser, 1996; Kagan, 1992; Font, 2005c; Llinares y Sánchez, 1986; Llinares, Sánchez, García, M. y Escudero, I., 1995; Nisbert y Warren, 2000; Sánchez y Llinares, 1988). Otras investigaciones también han puesto de manifiesto que los profesores generan creencias, concepciones y conocimiento a partir de su práctica profesional (Escudero y Sánchez, 1999; Llinares, 1996 y 1999; Marcelo, 2002).

Las investigaciones sobre la relación entre creencias y práctica profesional han puesto de manifiesto que la relación entre ellas es compleja y dialéctica. Diferentes investigaciones (Thompson, 1992: Brown y Rose, 1995; Perry, Howard y Tracey, 1999; Raymond, 1993 -citado en Handal, 2003-; Moreno, 2001; Martínez, 2003) se han planteado la relación entre el sistema de creencias y la práctica profesional (por ejemplo: la incongruencia entre las creencias y la práctica).

El interés en el campo de la investigación educativa por cuestiones relativas a las creencias de los profesores de matemáticas, en los intentos de mejorar la comprensión de los procesos de aprender a enseñar y de desarrollo profesional se ha puesto de manifiesto a través de la constitución de grupos de investigadores como es el caso del WG Research on the Psychology of Mathematics Teacher Development del PME. Este interés para investigar sobre el profesor de matemáticas (actitudes, creencias, concepciones, conocimiento y comprensión, cambio del profesor, desarrollo profesional y formación de profesores, entre otros aspectos) ha llevado también en el caso de España a la creación de un grupo de trabajo específico en la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) nos referimos al grupo "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor".

Además del término creencia, en las investigaciones anteriores, se suele utilizar, entre otros, el de concepción, lo cual plantea el problema teórico de distinguir entre ambos constructos. El constructo "creencias" es entendido, por algunos autores, como un saber que no se ha sometido a un análisis riguroso, en otras palabras es considerado como un constructo que tiene un componente cognitivo, pero que posee una condición más débil que el saber. Se trata de un saber, no problematizado, que es producto del proceso de formación inicial y de la práctica profesional de los profesores, mientras que las concepciones sería un saber más sólido. Un intento de aclarar las diferencias entre concepción y creencia lo podemos observar en Moreno (2002), quien da la siguiente definición de creencia [que según la autora está en consonancia con las dadas por Llinares (1991) y Pajares (1992)]:

> *Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que la hacen ser más consistente y duraderas para cada individuo.* (Moreno, 2002, p. 73).

Otros investigadores han considerado las creencias desde la perspectiva de la acción que posibilitan. La caracterización de las creencias como *"disposición para la acción"* ha sido propuesta en la investigación en educación matemática por diferentes investigadores (por ejemplo, Scheffler, 1965; Brown y Cooney, 1982; Wilson y Cooney, 2002). Sin embargo la relación entre las creencias y las prácticas que posibilitan es compleja tal como se ha comentado anteriormente. Esta relación da pie a preguntas del tipo: ¿Podemos sostener algunas creencias y no actuar de acuerdo con ellas (Cooney, 1983)?, ¿Cómo las prácticas influyen en las creencias? etc. Otros autores (como D'Amore, 2004) optan por considerar las creencias como algo más simple que las concepciones.

Si bien el término creencia resulta difícil de delimitar, el término concepción es tan difícil como el primero. Para algunos autores las diferencias entre estos constructos resultan tan tenues que pasan a considerarlas como sinónimos. Por ejemplo, Carrillo (2000) considera que concepción, creencias, visiones,.., son términos que, si bien no son sinónimos, comparten amplias zonas de significados, mientras que Thompson (1992), si bien considera que existen pequeñas diferencias entre creencias y concepciones, sugiere no emplear tiempo en la tarea de realizar esta distinción.

Para Ponte (1992 y 1994a), las concepciones pueden verse como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción, proporcionando puntos de vista del mundo y a modo de organizadores de conceptos. Otros investigadores, como por ejemplo

Thompson (1992), utilizan el término como un paraguas conceptual, caracterizándolo como:

> *(...) una estructura mental general, abarcando creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias y gustos* (Thompson, 1992, p. 130).

Otros investigadores estiman, que el término concepción es más amplio que el de creencias, por lo cual la concepción sería una especie de conjunto superior que abarca a las creencias, es decir, la concepción se entiende como un sistema organizado de creencias. En este sentido, D´Amore (2004) sostiene que:

> - *Convicción (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, aquello que se piensa de algo;*
>
> - *El conjunto de convicciones de alguien (A) sobre un determinado aspecto (T) forma la concepción (K) de A relativa a T; Si A pertenece al grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.* (D´Amore, 2004, p. 26).

Para finalizar, es posible observar concepciones como conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en relación con los temas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Contreras, 1998, entre otros).

2 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Dentro del mismo orden de ideas que venimos exponiendo, queremos explicitar y delimitar el término conocimiento, que al igual que el de creencias y el de concepciones resulta un constructo difícil de definir. La pregunta ¿qué conocen los profesores? Ha interesado cada vez más a los investigadores. Los trabajos sobre el conocimiento práctico (Elbaz, 1983; Connelly y Clandinin, 1984, 1985 y 1990, Escudero y Sánchez, 1999), o sobre conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986; Marcelo, 1997), dejan claro el interés que se ha gestado sobre el constructo teórico "conocimiento del profesor". Sin embargo en la actualidad no hay un acuerdo entre los investigadores que clarifique el término. No obstante, en un intento por consolidar una conceptualización del término, es posible inferir que en la investigación didáctica se recoge una aproximación al constructo "conocimiento profesional del profesor" como una integración cognitiva de conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de diferentes dominios científicos y prácticos.

El término "conocimiento" cobró fuerza cuando los estudios sobre el pensamiento del profesor – cuyos supuestos básicos eran: (1) el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias, y genera rutinas propias de su desarrollo profesional; (2) los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan – dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor. Este desplazamiento del interés de las investigaciones, en cierta manera, fue el resultado de un hecho evidente, que fue planteado inicialmente por Schön (1983 y 1987): los docentes son profesionales que generan y desarrollan un conocimiento sobre la enseñanza que debe ser investigado. Es decir, el convencimiento de que no sólo los procesos formales del pensamiento de los docentes median e influyen en el proceso de instrucción, sino también, los contenidos implícitos y explícitos en tal pensamiento ha dirigido la atención de los investigadores hacia la necesidad de comprender mejor las características del conocimiento de los profesores. Ahora bien, la dificultad de conceptualizar el término conocimiento del profesor ha dado paso a diferentes intentos por delimitarlo a través de sus diversos componentes (Elbaz, 1983; Shulman, 1986; Marcelo, 1993; Llinares, 1998; entre otros).

Elbaz (1983) considera tres tipos de conocimiento práctico (sobre uno mismo, sobre el entorno y sobre el currículum). A su vez, Shulman (1986) considera el conocimiento del contenido (conocimiento del objeto matemático con independencia de su enseñanza), el conocimiento del contenido pedagógico necesario para la enseñanza de un determinado objeto matemático y un conocimiento curricular que va más allá de una determinada materia. Las investigaciones posteriores han puesto de manifiesto que el conocimiento del contenido y el conocimiento del contenido pedagógico más que considerarse como dos componentes separados se tienen que considerar integrados (Llinares, 1996).

Dichas investigaciones, han permitido poner de manifiesto que el conocimiento profesional del profesor de matemáticas está integrado y se genera a través de la práctica vinculada a problemas concretos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo cual no es óbice para que se puedan considerar diferentes componentes de este conocimiento integrado. Por ejemplo, según Llinares (1998), la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor consideran que está formado por los siguientes componentes:

> *a) Conocimiento de matemática (conceptos, procesos...) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática escolar). b) Conocimiento del currículum matemático. c) Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos...d) Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas...e) Conocimiento sobre la*

enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización de la enseñanza, evaluación." (Llinares, 1998, p. 57).

Llinares (1996, pp. 51-52), después de una revisión de algunos trabajos de investigación sobre diferentes aspectos del conocimiento profesional del profesor (componentes del conocimiento, tipos de conocimiento y modelos cognitivos), propone la siguiente tabla resumen:

Autores	**Componentes del conocimiento de/ sobre**	**Tipos de conocimiento**	**Modelos cognitivos (organización, generación, naturaleza...)**
Blanco (1994)		-estático -dinámico	
Bromme (1994)	-Matemática como disciplina -Matemáticas escolares -Filosofía de las matemáticas escolares -Pedagogía general -Pedagogía específica de la materia		-Integración cognitiva desde diferentes disciplinas durante la formación práctica y experiencia profesional
Fennema y Loef (1992)	-Matemáticas (naturaleza y organización) -Aprendices (cognici-nes de los aprendices en matemáticas) -pedagogía -(Creencias)		-Contextualizado en el aula -Interactivo y dinámico (puede cambiar a través de la acción)
Fenstermacher(1994)		-formal -práctico	
Grimmet y Mackinnon (1992)		-Craft (artesanal/ práctico)	
Lappan y Theule-Lubienski(1992)	-Matemáticas -Pedagogía de las matemáticas -Estudiantes como aprendices de matemáticas -(creencias)		

Lehinhardt (1988)	-conocimiento de la estructura de la lección -conocimiento de la materia	-situado	-esquema
Borko y Livingston (1989)			-esquemas
Llinares (1991)	-Matemáticas (como disciplina, como materia escolar. Currículo) -Las características del aprendizaje de las nociones curriculares -El proceso instructivo		-Contextualizado o en la clase de matemáticas -Puesto de manifiesto en la realización de las tareas profesionales del profesor
McEwan y Bull (1991)			-Naturaleza pedagógica del conocimiento de la materia (de matemáticas)
Peterson (1988)	Conocimiento cognitivo de: -las características del aprendizaje de nociones particulares -la enseñanza de tópicos particulares -conoc. metacognitivo de ... -general		estructuras cognitivas
Ponte (1992)		-descriptivo (conceptos e imágenes) -Proporcional o argumentativo -Activo y procesual -De control metacognición	-carácter social e individual
Schön (1983, 1987)		-Práctico	-generados en contextos de acción a través de la reflexión (en/ sobre la acción)

Shulman (1986, 1987)	-de la materia (matemáticas) -contenido pedagógico -Currículo	-conoc. proposicional (fuente, proposiciones)	

Tabla 2. Aspectos del conocimiento profesional del profesor

Por otra parte, hay investigadores que subrayan el hecho de que el conocimiento tiene un carácter contextualizado y que, por tanto, no puede comprenderse el conocimiento separado del contexto donde tiene lugar. Para estos autores, el contexto social y físico donde tiene lugar la actividad no se puede segregar del conocimiento producido (García, 2000; García y Sánchez, 2002; Young, 1993).

Si ya resulta difícil distinguir entre creencias y concepciones, aún resulta más difícil plantearse la diferencia entre estos dos términos y el de "conocimiento" (Thompson, 1992). Por una parte, hay investigadores que consideran que sólo las creencias consideradas "verdaderas" (o válidas) desde una perspectiva institucional son conocimiento, por otra parte, otros investigadores se conforman en considerar como conocimiento las creencias que el sujeto puede justificar. En cambio, otros investigadores consideran simple y llanamente que las creencias y concepciones forman parte del conocimiento del profesor.

3 LA RELACIÓN ENTRE LAS CREENCIAS Y EL CAMBIO DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

Tal como se ha dicho anteriormente, el interés inicial por investigar sobre las creencias, las concepciones o el conocimiento del profesor se debe al convencimiento de que estos constructos son el filtro a través del cual los profesores toman sus decisiones sobre su práctica educativa. Este convencimiento ha llevado a considerar que, cuando lo que interesa es mejorar dicha práctica educativa, hay que tener muy en cuenta las creencias, concepciones y conocimiento del profesor.

Las investigaciones sobre la relación entre las creencias y el cambio de la práctica educativa se han enfocado básicamente en dos direcciones. Por una parte, se ha estudiado cómo influyen dichas creencias en la aceptación (e implicación) del cambio (Brown y Rose, 1995) -o más en general, cómo influyen las creencias en la práctica- y, por otra parte, se han investigado en la dirección inversa, es decir cómo un cambio de la práctica educativa influye en las creencias (Benbow, 1995 –citado en Handal, 2003; Gómez y

Valero, 1995; Foss y Kleinsasser, 1996; Taylor, 1990) – o más en general, cómo influye la práctica en las creencias-.

Si bien las investigaciones no son coincidentes en sus resultados y conclusiones, hay algunos autores que se inclinan por considerar que la influencia de las creencias sobre las prácticas es mayor que la influencia de las últimas sobre las primera (Raymond, 1993, citado en Handal, 2003). Pajares (1992), en su síntesis sobre los resultados de la investigación sobre las creencias de los profesores, llega al extremo de afirmar que el cambio de creencias en los adultos es un fenómeno muy raro. En cambio, otros investigadores interesados en el desarrollo profesional docente consideran que los profesores son sujetos que aprenden (Leikin, Berman y Zazlavsky, 2000), en lugar de meros implantadores u obstáculos para el cambio y, concluyen, que la investigación sobre el desarrollo profesional del profesor debe continuar investigando las formas en las cuales los profesores aprenden nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos, así como las condiciones que facilitan el aprendizaje de los profesores.

4 DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE

Un constructo muy relacionado con el "cambio" es el de "Desarrollo Profesional Docente". Dicho constructo tiene su origen en las políticas de formación continuada realizadas por la administración educativa. Uno de los objetivos de las administraciones educativas es que los profesores realicen un práctica que sea cada vez "mejor", de más "calidad", etc. (sin llegar a especificar claramente que hay que entender por "mejor" o "de más calidad").

Desde la perspectiva de la administración educativa, el objetivo del desarrollo profesional docente es conseguir unas prácticas de más calidad. En la terminología del EOS, se trataría de conseguir una modificación del significado implementado por el profesor. Este propósito desplaza la problemática desde las creencias, concepciones y conocimiento hacia las prácticas implementadas. Si bien hay diferentes políticas de formación continuada, hay dos modelos claramente diferenciados. En el primer caso, con el objetivo de conseguir el desarrollo profesional de los docentes, se ofrecen cursos de formación permanente a los que el profesor se inscribe a título personal. Se supone (en muchos casos de manera muy ingenua) que el desarrollo conseguido producirá un cambio en las prácticas del profesor asistentes, que a su vez se pueden extender a sus compañeros de su centro escolar.

En el segundo caso se realizan asesoramientos realizados en el propio centro educativo. Los más interesantes son aquellos que pretenden conseguir una reflexión crítica sobre la propia práctica de la cual se puedan derivar cambios – en la terminología del EOS se trataría de plantear el cambio no sólo en el significado implementado y el evaluado sino, en muchos casos, en el significado pretendido. Desde la perspectiva del EOS, el desarrollo profesional docente es un constructo interesante ya que pone en primer plano las prácticas del profesorado, pero para llegar a ser realmente operativo se debe analizar desde la dualidad personal-institucional.

Recientemente, el desarrollo profesional docente se ha convertido en un tema de interés para la investigación en educación matemática (Ponte, 1994b; Franke, Carpenter y Fennema, 2001; Bairral, 2002). Por ejemplo, Bairral (2002) ha investigado el papel que juegan las tecnologías que permiten la formación a distancia en el desarrollo profesional docente, en concreto buscó verificar de qué forma un diseño para formación a distancia en geometría (para alumnos de 11 a 14, años de edad) contribuye en el desarrollo crítico del contenido del conocimiento profesional del profesor de matemática; en particular, qué componentes del conocimiento profesional se desarrollan a partir de las distintas interacciones docentes establecidas a través de las herramientas de Internet. También se ha investigado sobre la evolución de las creencias a través del desarrollo profesional docente (Tillema, 1995).

5 LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La reflexión sobre el profesor ha ido evolucionando desde planteamientos cognitivistas hacia planteamientos antropológicos. Esta evolución, ha llevado a considerar como central el constructo “práctica del profesor” (Llinares, 2000; Pochulu, 2004). Desde esta perspectiva, la práctica del profesor de matemáticas se convierte en “aquello” que posibilita que los alumnos realicen prácticas de matemáticas, lo cual, nos lleva directamente a considerar primero qué es una práctica y, después, a diferenciar los tipos de prácticas (como mínimo, prácticas matemáticas y prácticas profesionales del profesor de matemáticas).

Desde la perspectiva del EOS, es necesario introducir la dualidad personal-institucional para responder a estas cuestiones. Cuando se introduce la perspectiva institucional, las prácticas se convierten en prácticas realizadas en una institución que, como se ha dicho en el capítulo 2, se puede considerar como una comunidad de prácticas. La opción de estudiar al “profesor” desde la perspectiva de que es un integrante de una comunidad de prácticas recientemente ha irrumpido en la investigación sobre el profesor (Llinares, 2000; Couso, 2002). Desde esta perspectiva, para gestar un cambio es necesario pensar en términos de la institución y de la forma cómo dicha institución puede asumir el reto compartido del cambio.

La distinción entre capacidad o habilidad en cuanto opuesta a la actuación real es una distinción muy antigua en la psicología y en la filosofía. Esta distinción, pasó a primer plano, reformulada en términos de "competencia" y "actuación", cuando Chomsky (1965) distinguió entre *linguistic competence* y *performance.* Por este motivo, la reflexión sobre las prácticas va de la mano con la reflexión sobre la competencia para realizarlas. De hecho, muchos currículos actualmente se están estructurando en términos de competencias. Esta manera de entender la competencia se relaciona con las visiones de las creencias como disposiciones para la acción que se han comentado en este mismo capítulo.

Dicho de otra manera, además de considerar las prácticas conviene considerar un constructo que sea "aquello que posibilita la práctica". En el EOS, tal como se expone en los capítulos 2 y 6, aquello que posibilita la práctica personal del sujeto es el "objeto personal". Ahora bien, en el EOS, tal como se expone en el capítulo 7, no se considera suficiente la distinción entre "aquello que posibilita la práctica" y la "realización de la práctica", puesto que se considera indispensable tener en cuenta el papel que juega el contexto para salvar la brecha que separa estos dos aspectos.

6 INVESTIGACIONES SOBRE LAS CREENCIAS, CONCEPCIONES Y EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR ACERCA DE "FUNCIONES" Y "CONTEXTO".

Una de las conclusiones, a las que ha llegado la investigación sobre las creencias, concepciones, conocimiento o la práctica del profesor, es que la mejor forma de hacerlo es sobre un tópico específico (fracciones, funciones, derivadas, etc.). Con relación al tópico funciones se han realizado diferentes investigaciones (entre otras, Norman, 1992; Even, 1993; Llinares, 1996; García, 1997; Meel, 1999; Font y Acevedo, 2003: Sánchez y Llinares, 2003; Zazkis, Liljedahl, y Gadowaky, 2003). Al respecto, Norman (1992) focaliza su atención sobre todo en la comprensión que tienen los profesores sobre el objeto matemático función, en cambio Even (1993) amplía su investigación al conocimiento didáctico de las funciones. Sobre este aspecto dice que los profesores en formación tienen concepciones limitadas del concepto de función, tanto desde el punto vista matemático -resultado con el que coincide Meel (1999)- como didáctico.

Así mismo, Llinares (1996) enfatiza la necesidad de desarrollar el análisis sobre las creencias, concepciones y conocimiento del profesor refiriéndose a tópicos concretos, como es el caso de la función, el cual va a permitir ampliar el significado dado a la idea de " conocimiento situado" del profesor. Llinares (1996) y García (1997) estudian el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de Enseñanza Secundaria ligado a las funciones como objeto de enseñanza-aprendizaje. Concretamente, se describe el contenido y estructura del conocimiento del profesor que fundamenta sus decisiones de enseñanza de las funciones en el nivel 14-16 años. Entre otros aspectos, se indaga en: "el concepto matemático de función como contenido curricular y diferentes modos de representación" y "el concepto matemático de función en relación a otros contenidos curriculares de las matemáticas escolares".

En Font y Acevedo (2003) si bien no se estudian directamente las concepciones de los profesores se documenta como éstos tienen la creencia de que el uso de metáforas dinámicas en su discurso facilita la comprensión de los alumnos sobre la representación gráfica de funciones.

Sánchez y Llinares (2003) investigaron cuatro profesores en formación para identificar la influencia de las formas de conocer la materia y las imágenes que tienen de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje en su hipotética presentación de la materia para la enseñanza en el contexto de las funciones. Para estos autores, el conocimiento de la materia deriva de una diversidad de fuentes y no todos ejercen la misma influencia al momento que los profesores en formación piensan sobre la materia con el propósito de enseñarla. Por lo tanto, los profesores en formación deberían aproximarse al contenido pedagógico de un tópico específico en más de una manera.

Zazkis, Liljedahl, y Gadowaky (2003) investigaron las concepciones de alumnos de secundaria, estudiantes para profesores de secundaria y de profesores de secundaria sobre las traslaciones horizontales de las funciones. Observaron diferencias importantes entre las concepciones de los futuros profesores y las de los profesores en servicio.

Otras investigaciones relacionadas con las concepciones del profesorado sobre las funciones se han focalizado sobre el efecto que produce la incorporación de las calculadoras gráficas a la enseñanza de las funciones como, por ejemplo, Gómez y Valero (1995) y Bedoya (2001). Al respecto, Gómez y Valero (1995) investigaron cómo un cambio curricular en el que se introducen las calculadoras gráficas como material instruccional influye en seis aspectos diferentes, algunos de los cuales son las creencias del profesor y su desempeño en el salón de clase.

El principal aporte del trabajo de Bedoya (2001) ha sido caracterizar diferentes tipologías de profesores en formación en relación con sus actitudes, potencial innovador, concepciones y competencias efectivas hacia la integración de las calculadoras y demás propuestas de innovación curricular relacionadas con la estructura conceptual del contenido matemático función, la pluralidad de sistemas de representación y el conocimiento didáctico.

Las tres principales tipologías de profesores en formación obtenidas fueron:

(1) Profesores en formación caracterizados por tener una predisposición favorable y un potencial innovador hacia la incorporación y utilización de las calculadoras graficadoras en el currículo de matemáticas. (2) Profesores en formación caracterizados por tener, como los anteriores, predisposición favorable y potencial innovador hacia la incorporación y utilización de las calculadoras graficadoras en el currículo de matemáticas. Sin embargo, a diferencia de los primeros, en la práctica, no integran de manera efectiva las propuestas curriculares, tecnológicas y didácticas que se les formularon. (3) Los profesores de este tercer grupo se caracterizan por tener una predisposición desfavorable hacia la incorporación de las tecnologías en el currículo de matemáticas de secundaria, son reacios o resistentes al cambio y a la innovación tecnológica y curricular.

Si bien hay muchas investigaciones sobre modelización, matemática situada, situaciones de la vida real (que comentaremos con más detalle en el capítulo 7) en la revisión de la literatura que hemos realizado, hemos encontrado pocas investigaciones referidas a las concepciones, creencias y conocimientos de los profesores sobre estos temas. Hay que destacar la tesis doctoral de Martínez (2003) que estudia las concepciones y creencias de los profesores sobre la contextualización de la resta. Este trabajo nos ha sido útil en los siguientes aspectos: (1) la tipología de los problemas contextualizados y (2) el instrumento metodológico utilizado para investigar las concepciones y creencias de los profesores sobre un tópico contextualizado.

CAPÍTULO 5

LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LAS FUNCIONES

RESUMEN

En este capítulo se presentan los resultados de la investigación didáctica sobre las funciones que se han tenido en cuenta en esta memoria. En la primera parte de este capítulo, de la amplia investigación didáctica reciente sobre este concepto, nos hemos centrado fundamentalmente en dos tipos de investigaciones: (1) Las que han analizado la noción de función como proceso y como objeto y (2) Las que se han ocupado de analizar el papel que juegan las diferentes clases de representación del concepto de función.

En la segunda parte se hace una revisión de algunas investigaciones que se han centrado sobre todo en las dificultades detectadas en el proceso de instrucción de las funciones y dan algunas recomendaciones para su enseñanza. Para ello, primero se analizan diferentes constructos que se han propuesto para estudiar, explicar y predecir los errores que se observan en las prácticas matemáticas de los alumnos (dificultad, obstáculo, disparidad en la interpretación de la norma y conflicto semiótico) y se expone el posicionamiento de la doctoranda sobre estos constructos. Después, se comentan los errores, dificultades,... que la investigación didáctica sobre las funciones ha documentado.

Por último, se explicita la manera como se han utilizado los aspectos anteriores en la investigación que se presenta.

1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL OBJETO FUNCIÓN

El objeto institucional función es el resultado de una emergencia que se ha producido a lo largo de mucho tiempo. A continuación se expone, de manera muy sintética, su evolución histórica[1].

- En Babilonia para los cálculos astronómicos se utilizaban tablas en los que se hacía una compilación de efemérides del sol, la luna y los

[1] Para elaborar este estudio histórico hemos utilizado, sobre todo, el resumen expuesto en Font (2000a) que hemos completado con estudios específicos sobre las funciones (Youschkevitch, 1976; Azcárate y Deloufeu 1990; Arenzana 1997; Lacasta y Pascual 1998) y también con libros generales sobre la história de las matemáticas (Boyer 1986; Collette 1985; Kline 1992).

planetas. En esta civilización se estudiaron problemas de variaciones continuas, tales como luminosidad de la luna en intervalos de tiempos iguales, o los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que éste forma con el sol. Aunque no utilizaron letras para representar cantidades variables, los términos longitud, anchura, área y volumen, servían perfectamente para este fin.

- Los filósofos griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. Según Aristóteles lo*s* objetos matemáticos no estaban sujetos al movimiento con la sola excepción de aquellos a que se refiere la astronomía. Esta visión estática es claramente dominante en los Elementos de Euclides. A pesar de ello, en la Grecia clásica las curvas se consideraron como secciones o bien como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones.
- En la Edad Media aparece la primera gráfica conocida. Representa los cambios de latitud de los planetas respecto de la longitud. La primera idea de función como una relación entre variables aparece en las escuelas medievales de Oxford y París.
- Galileo estudió el movimiento desde un punto de vista que se puede considerar funcional utilizando palabras y proporciones.
- En los siglos XXV y XVI destaca la creación del álgebra simbólica que, si bien inicialmente no incidió en el desarrollo de la noción de función, puso los cimientos para la posterior representación analítica de las funciones.
- En el primer apartado del segundo libro de "La Géométrie", Descartes divide las curvas en mecánicas y geométricas. Una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por diversos movimientos sucesivos, de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores. En cambio, las mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida. La curva geométrica es para Descartes la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversos reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre un regla se transmite por los diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva.

  Esta manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de la Geometría Analítica: las curvas geométricas; y las técnicas que se han de utilizar para su estudio: la teoría de las ecuaciones. Según Font (2000a), los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curvas: (1) Las curvas son secciones, (2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, para añadirles una tercera metáfora: (3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite hallar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

- Fermat aplicó los métodos de Vieta a los problemas de lugares geométricos y en “Ad locos planos et solidos isagoge” (escrito aproximadamente en 1637) presenta con las notaciones de Vieta los principios fundamentales de la Geometría Analítica. En esta obra enuncia el principio fundamental de la geometría analítica:

  Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva. (Collette 1985, vol. II, p. 23).

  Esta proposición, además de ser la base de la geometría analítica, introduce la idea de variable algebraica. Fermat expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva. Según Font (2000a), mientras que Descartes considera curvas generadas por movimientos de las cuales busca la ecuación, Fermat introduce curvas dadas por ecuaciones algebraicas. De acuerdo con Font (2000a) consideramos que se puede decir que Descartes se preocupa más de la traducción de la gráfica a la expresión simbólica, mientras que Fermat se preocupa más de la traducción de la expresión simbólica a la gráfica.

- Newton, en el año 1736, publicó su libro “Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum”. En este libro dice que considera las variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de infinitesimales. A una cantidad variable le llama “fluente” y la representa por las letras x, y, a su cambio relativo “fluxión” que representa por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En este libro, Newton considera que el problema fundamental del cálculo es el siguiente: dada una relación entre fluxiones, obtener una relación entre sus respectivas fluyentes y recíprocamente. La primera publicación de Newton que incluye su cálculo diferencial fue los

"Principia", publicados en el año 1687. Aunque se publicó antes esta obra es posterior tanto a "De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas" (en el cual se utilizan los infinitesimales) como a "Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum" (en el cual se utiliza el método de las fluxiones). En los "Principia", Newton utiliza métodos de demostración geométricos, seguramente debido a que consideraba que este tipo de demostraciones era más comprensible para sus contemporáneos y expone un método alternativo a los infinitesimales y al método de las fluxiones: las cantidades divisibles evanescentes.

- En general, se puede decir que para Newton la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton, en la cual podemos hallar constantes referencias a un punto que es mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. Además de considerar que la grafica se puede interpretar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica, considera que el punto que genera la gráfica viene determinado por dos segmentos (abscisa y ordenada), cada uno de los cuales es generado por un punto que se mueve en función del tiempo. En el siguiente párrafo, extraído de Lacasta y Pascual (1998, pp. 28-29), donde Newton explica su método de fluxiones se observa claramente como éste se manifiesta explícitamente a favor de las metáforas dinámicas:

> *No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que éstas sean, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas no son descritas y engendradas por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de las líneas; los sólidos por el movimiento de las superficies; los ángulos por la rotación de los lados; los tiempos por un flujo continuo. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que lo hagan con mayor o menor velocidad, busqué un método para determinar las magnitudes partiendo de las velocidades de los movimientos o aumentos que las engendran. Llamando fluxiones a las magnitudes engendradas, di, hacia los años 1665-1666, con el método de fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de curvas.*

Otra aportación importante de Newton fue considerar que la expresión simbólica de una función se podía transformar en una serie infinita.

- Para Leibnitz, al igual que para Newton, la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Ahora bien, Leibnitz a diferencia de Newton, considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve.
- La primera definición explícita de función aparece en un artículo de Bernoulli sobre soluciones a problemas de isoperímetros del año 1718. Para Bernoulli, una función de una magnitud variable era una cantidad compuesta de cualquier manera con esta magnitud variable y de constantes. Euler, que fue discípulo de Bernoulli, en el capítulo I de su libro "Introductio an analysin infinitorum" publicado en el año 1748, modifica la definición de su maestro substituyendo el término "cantidad" por "expresión analítica":

  > *Euler define la función de una cantidad variable como una "expresión analítica" formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes.* (Collette 1985, vol. II, p. 192)

  En función de las operaciones que intervienen, Euler clasifica las funciones en algebraicas y transcendentes. Las funciones algebraicas, en irracionales y no-irracionales, y estas últimas, en polinómicas y racionales (cociente de polinomios). También hace una clasificación en funciones implícitas y explícitas, así como en uniformes (unívocas) y multiformes. También afirma que la forma universal para la expresión analítica de una función es la serie entera infinita de la forma: $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots$
- En el siglo XVIII, los matemáticos más importantes (Euler, Lagrange, etc.) consideraban que cualquier función se podía representar por una serie entera, siempre que no fuese una función definida a trozos. Euler consideraba que a cada expresión analítica le correspondía una gráfica cartesiana, y que expresiones analíticas, que de entrada parecían diferentes, podían tener la misma gráfica. Pero consideraban que a gráficas diferentes correspondían expresiones analíticas diferentes. En la terminología de Euler, las gráficas definidas a trozos eran "discontinuas o mixtas o irregulares".
- La necesidad de considerar funciones mixtas en determinados problemas llevó a Euler a buscar una definición de función que englobase a todas las curvas que no se podían definir por una sola expresión, pero que se podían dibujar por el movimiento libre de la mano. En su libro "Institutiones calculi differentialis" publicado en el año 1755 dio la siguiente definición:

> *Si ciertas cantidades dependen de otras, de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces se llama estas cantidades funciones de las últimas; esta denominación tiene la máxima amplitud y contiene, en ella misma, todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces las otras cantidades que dependen de x de cualquier manera, o que están determinadas por x, se llaman funciones de x.* (citado en Lacasta y Pascual, 1998, p. 38).

- La aritmetización del análisis realizada por Cauchy, Bolzano, Weierstrass y otros llevó a una definición de función prácticamente equivalente a la que se usa actualmente. El año 1837, Dirichlet dio la definición de función en los siguientes términos:

> *Imaginemos que "a" y "b" son dos valores fijos y "x" una cantidad variable que toma sucesivamente todos los valores comprendidos entre "a" y "b" . Corresponde entonces a cada valor "x" una cantidad única, "y", finita; mientras "x" recorre de modo continuo el intervalo de "a" a "b" , y = f (x) varía asimismo, e "y" representa una función para ese intervalo. No es, en absoluto, necesario que "y" dependa de "x" en todo ese intervalo de acuerdo con la misma regla, y no hay que pensar en una dependencia expresable en términos de fórmulas matemáticas. Representando de un modo gráfico, es decir, tomando a "x" como abscisa y a "y" como ordenada una función aparece como una curva a la que cada abscisa comprendida entre "a" y "b" le corresponde un solo punto. Esta definición no fija a las distintas partes de la curva ninguna regla común: se la puede uno imaginar compuesta de distintas partes o trazada de modo totalmente anárquico. De esto se desprende que una función sólo se puede contemplar como completamente precisada para un cierto intervalo ya si está dada gráficamente o si en las distintas partes del intervalo se dan de modo matemático las reglas vigentes. Mientras en una función sólo se tenga certeza de una parte del intervalo queda completamente en manos de la arbitrariedad el modo en que continuará el resto del intervalo.* (Citado en Arenzana ,1997, p. 72).

- Con la posterior aplicación de la teoría de conjuntos a las funciones, este objeto se extendió a conjuntos cualesquiera y la gráfica de la función se consideró como el conjunto de puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

Godino (en prensa), basándose en el análisis epistemológico y didáctico realizado en Ruiz (1998) para determinar las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función, considera que la evolución anterior se puede organizar en cinco configuraciones epistémicas que en la figura 1 están dispuestas en círculos concéntricos. Esta disposición expresa la progresiva ampliación de los sistemas de prácticas asociados a la noción de función, desde planteamientos implícitos/intuitivos (protomatemáticos), hasta la formalización más general mediante la teoría de conjuntos. El objetivo de establecer esta secuencia de configuraciones es explicitar las configuraciones asociadas a las prácticas que forman el significado de referencia del objeto función.

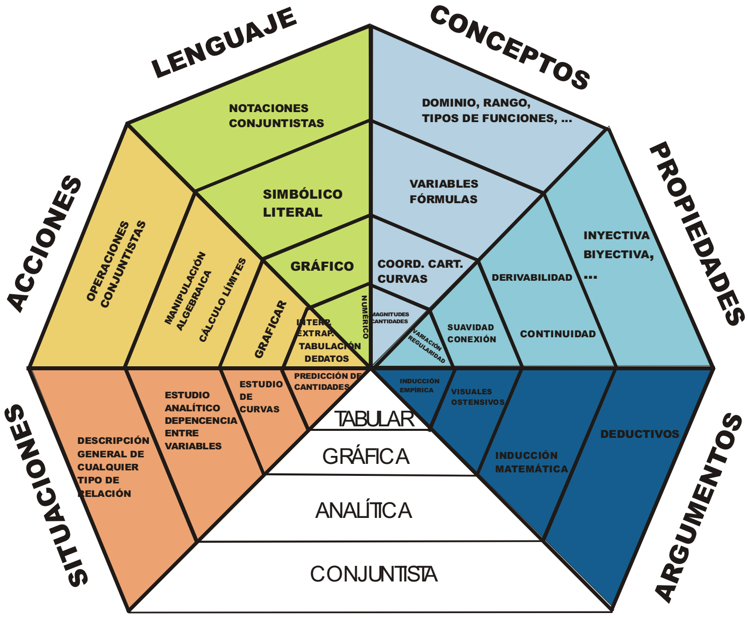


Figura 1. Configuraciones epistémicas de la noción de función

2 LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LAS FUNCIONES

La investigación didáctica sobre las funciones ha sido muy numerosa a partir de la década de los 90 y se ha realizado desde marcos teóricos muy diferentes que van desde los trabajos clásicos de Vinner y Dreyfus sobre la caracterización de la "imagen del concepto función " y la "definición del concepto función" de los alumnos (Vinner, 1983 y 1991; Vinner y Dreyfus, 1989) hasta los más recientes sobre el pensamiento metafórico aplicado a las funciones (Font y Acevedo, 2003).

No es el objetivo de este capítulo realizar una extensa revisión de todas las publicaciones sobre la didáctica de las funciones, nos limitaremos a destacar dos tipos de investigaciones que consideramos especialmente relevantes: (1) Las que se han ocupado de analizar el papel que juegan las diferentes clases de representación del concepto de función (Borba y Confrey, 1996; Font 2000a, 2000b y 2001; Fuente y Aranda, 1994; Janvier, 1987; García, 1994; García y Llinares, 1994; Romberg, Carpenter y Fennema, 1994; Ruthven, 1990, Sierra, González y López, 1998; Moschkovich, 1999; Zaslavsky, 2002) y (2) Las que han analizado la noción de función como proceso y como objeto (Asiala y otros, 1966; Breindenbach y otros, 1992; Dubinsky, 1991 y 1996; Dubinsky y Harel, 1992; Dubinsky y McDonald, 2003; Sfard, 1991 y 1994; Slavitt, 1997).

2.1 La función como objeto y como proceso

Dubinsky (1991 y 1996) ha intentado aplicar, después de una revisión, algunas de las ideas de Piaget al pensamiento matemático avanzado. La principal dificultad que ha encontrado en este intento ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Dubinsky cree que un problema importante en la educación matemática consiste en hallar sustitutos apropiados de los objetos físicos y cree que los ordenadores pueden valer para este propósito.

Dubinsky considera que, para explicar las diferencias en las conductas de los estudiantes, es necesario formular una hipótesis mentalista, ya que considera que para poder explicar y buscar soluciones a estas diferencias, es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales, que pueda explicar lo que está ocurriendo en la mente de los estudiantes:

> *El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones"* (Dubinsky, 1996, pp. 32-33).

La construcción de acciones, procesos y objetos, la ilustra Dubinsky con la siguiente figura (Dubinsky, 1996, p. 33):

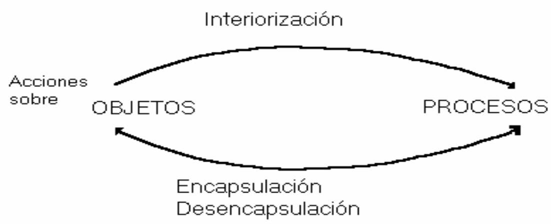


Figura 2 Construcción de acciones, procesos y objetos

Una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo. Un individuo que solamente puede entender una transformación como una acción, solamente puede realizarla reaccionando a indicaciones externas que le proporcionen detalles precisos sobre los pasos que tiene que hacer. Por ejemplo, un estudiante que no es capaz de interpretar una situación como una función, a no ser que tenga una fórmula para obtener valores, está restringido a un concepto de acción de una función. En este caso, el alumno no puede hacer muchas cosas con esta función, excepto evaluarla en puntos específicos y manipular la fórmula. Las funciones definidas a trozos, las inversas de las funciones, la composición de funciones, los conjuntos de funciones, la función derivada, etc. son fuentes de grandes dificultades para estos alumnos porque no pueden ir más allá de una concepción de acción de una función, y todas estas nociones exigen concepciones de proceso y/o objeto.

Cuando una acción se repite y el alumno puede reflexionar sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla, y hasta puede llegar a invertir los pasos. A diferencia de la acción, el individuo percibe el proceso como algo interno y bajo su control, en lugar de ser una respuesta a indicaciones externas. En el caso de las funciones, una concepción de proceso permite al alumno pensar la función como algo que recibe una entrada, o más, de valores de la variable independiente, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que da los valores de la variable dependiente como resultado.

Por ejemplo, para entender la función $f(x)$ = sen x, es necesaria una concepción proceso del concepto de función porque no tenemos instrucciones explícitas de cómo podemos obtener una salida para cada entrada; para hallar imágenes, un alumno ha de pensar en el proceso que asocia a cada número real su seno. Con una concepción proceso del concepto de función, el alumno puede construir una composición o bien invertir el proceso para obtener funciones inversas.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho estas transformaciones, está pensando en este proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En el transcurso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular el objeto y volver al proceso del cual se obtuvo a fin de usar sus propiedades y manipularlo. Un ejemplo de desencapsulación y encapsulación de procesos en objetos es la manipulación de funciones para hallar la suma, producto, etc. En general, la encapsulación de procesos en objetos es extremadamente difícil. Por último, Dubinsky considera que los objetos se integran en esquemas los cuales a su vez se coordinan con otros esquemas.

Las investigaciones realizadas en el marco del APOS efectúan descomposiciones genéticas de los conceptos matemáticos, dichas descomposiciones consisten en determinar las acciones, procesos, objetos y esquemas que cada individuo debe realizar para aprender un determindado concepto matemático. A partir de esas descomposiciones genéticas diseñan secuencias de enseñanza, las cuales son experimentadas y modificadas si es necesario. Estas secuencias de enseñanza se organizan en lo que se denomina ciclo ACE: actividades para ser realizadas en el ordenador, discusiones de clase y, ejercicios para ser hechos con lápiz y papel.

2.2 Importancia de las traducciones y conversiones entre los diferentes tipos de representación de las funciones

Cuando alguien se pregunta ¿qué es una función?, está preguntando por el significado del término función. Básicamente hay dos maneras de entender el “significado”: la semántica o referencial y la pragmática. Desde la perspectiva pragmatista se ha resaltado la importancia de considerar las traducciones y las conversiones entre las diferentes representaciones de las funciones. Para esta perspectiva, un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos y representaciones, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos y representaciones que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto.

De la misma manera que las reflexiones de tipo pragmatista resaltan la importancia que tienen las diferentes representaciones en la construcción del significado, las reflexiones de tipo cognitivo también han puesto de manifiesto la importancia que tienen, para la comprensión de los alumnos, las diferentes representaciones de un objeto matemático.

Desde el punto de vista cognitivo, la comprensión de un objeto matemático se entiende básicamente en términos de integración de representaciones mentales. Esta integración es la que asegura la competencia en el uso de las representaciones externas asociadas al objeto. Desde esta perspectiva, un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consiste en conseguir que

> *(...) los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra sin caer en contradicciones.* (Hitt, 1998, p. 124).

Este objetivo es asumido por muchos investigadores en didáctica de las matemáticas y lo podemos encontrar formulado en términos parecidos, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje, en muchas publicaciones. Por ejemplo, con relación al aprendizaje Duval afirma:

> *La conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas.* (Duval, 2002, p. 318).

Janvier (1987), en sus trabajos sobre el concepto de función considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal) que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitvos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

Janvier, entre otros, considera que el aprendizaje de las funciones no se ha de limitar al de una sola de estas formas de representación, sino que ha de incluir la capacidad de convertir la información de una representación a otra y las traducciones entre el mismo tipo de representación. La tabla siguiente contempla las posibles conversiones de una forma de representación a otra, así como las traducciones dentro de la misma forma de representación, que son las de la diagonal.

hacia desde	Situación, Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión simbólica
Situación, Descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación /cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico
Expresión simbólica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Tabla 1. Adaptación de la tabla de C. Janvier realizada por García (1994)

La tabla anterior pone de manifiesto la multiplicidad de relaciones que se pueden establecer entre las diferentes formas de representar una función. El paso de una a otra puede ampliar y reorganizar la información que está implícita en una de las formas de representación. Si bien sería deseable que los alumnos trabajasen la conversión y la traducción entre todos los diferentes tipos de representaciones de las funciones, la introducción de las calculadoras gráficas y los programas informáticos permite automatizar y, por tanto, facilitar y simplificar algunas de las posibles conversiones y traducciones entre las representaciones funcionales.

Según García (1994), si en la tabla anterior se consideran las traducciones y conversiones que se pueden fácilmente automatizar, gracias a las calculadoras graficadoras, graficadores y otros programas informáticos, se pueden reconocer cuatro que se presentan en el esquema *a* (figura 3). El esquema *b* (figura 4) pone de manifiesto cuáles son las traducciones que resultan más difíciles de automatizar y que, por lo tanto, necesitan ser más trabajadas; estas últimas, hasta el momento, son precisamente las que menos se trabajan en las clases.

a)

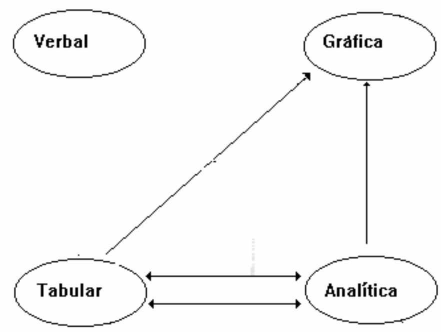


Figura 3. Conversiones que se pueden fácilmente automatizar

b)

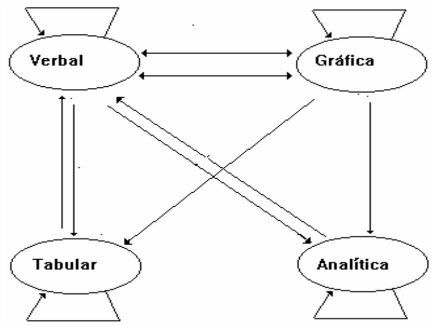


Figura 4. Traducciones que resultan más difíciles de automatizar

3 ERRORES, DIFICULTADES, OBSTÁCULOS, DISPARIDAD EN LA INTERPRETACIÓN DE LA NORMA Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS.

En este apartado se analizan primero diferentes constructos que se han propuesto para estudiar, explicar y predecir los errores que se observan en las prácticas matemáticas de los alumnos (dificultad, obstáculo, disparidad en la interpretación de la norma y conflicto semiótico). A continuación, se expone el posicionamiento de la doctoranda sobre estos constructos.

3.1 Las dificultades desde el punto de vista psicológico.

Los diferentes programas de investigación psicológicos han intentado explicar las dificultades de los alumnos cuando estudian matemáticas. Estas explicaciones intentan analizar los procesos de aprendizaje de forma global, prescindiendo de la especificidad de los contenidos. A continuación comentaremos brevemente las explicaciones que han dado a las "dificultades" de los alumnos los principales enfoques cognitivos

Según Resnick y Ford (1990), los neoconductistas actuales, entre los que destaca Gagné, se interesan por las "jerarquías de aprendizaje". Según Gagné, una jerarquía de aprendizaje se constituye de arriba a abajo. Se comienza determinando la capacidad que queremos aprendan los alumnos, situándola en la cúspide de la pirámide. Después se hace un análisis de cuáles son las capacidades previas que son necesarias para adquirir esta capacidad. A continuación se repite el proceso con las capacidades situadas en el segundo nivel de la jerarquía, hasta llegar a unas capacidades dominadas por los alumnos. Desde este punto de vista, las dificultades que tienen los alumnos para aprender un determinado contenido matemático hay que buscarlas en la falta de dominio de los niveles anteriores de la jerarquía de aprendizaje.

Para la Psicología de la Gestalt, los estímulos y experiencias que llegan a la mente humana se perciben de forma organizada como un todo, produciendo algún tipo de comprensión significativa. Por tanto, el aprendizaje se produce por el descubrimiento de estas estructuras y por su transferencia a nuevas situaciones. Desde este punto de vista, la labor del profesor es presentar estructuras muy sencillas que puedan ser descubiertas por los alumnos y que, una vez adquiridas, se puedan aplicar a nuevas situaciones. Una de las cuestiones que interesó a los psicólogos de la Gestalt fue el fenómeno del "insight" en la resolución de problemas. En una situación problemática, que no es inmediatamente evidente, se produce un conflicto; la mente, para resolverlo, busca el equilibrio a través de una organización de la situación problemática. Esta reorganización resuelve la tensión al revelar la verdadera estructura del problema y, por tanto, el camino para hallar la solución.

El insight se produce en el momento de la reorganización. La estructura del problema que aparece gracias al insight determina las funciones y las interrelaciones de los elementos del problema y determina, por tanto, las habilidades que se pueden aplicar para resolverlo. Hasta que no se capta la estructura fundamental del problema gracias al insight, la situación problemática no tiene significado para la persona que lo quiere resolver y, por tanto, es irresoluble.

Los partidarios de las etapas piagetianas explican las dificultades que tienen los alumnos para aprender matemáticas, por el hecho de que muchos contenidos matemáticos que proponemos a los alumnos en un determinado nivel escolar, implícitamente suponen que se hallan ya en la etapa de las operaciones concretas e incluso en algunos contenidos en la etapa de las operaciones formales, cuando de hecho muchos de ellos aun están en la etapa preoperatoria u operatoria respectivamente. Este planteamiento es, en cierta manera pesimista, porque considera que, por muy sistemático que sea el profesor, en el momento de incrementar los conocimientos y capacidades del alumno es imposible introducir conceptos que impliquen el pensamiento de una etapa superior si el alumno aun no ha llegado a esta etapa.

Aunque esta teoría ha tenido un amplio consenso en la comunidad escolar, también ha sufrido numerosas críticas, muchas de las cuales se refieren a los desfases longitudinales. Estos desfases consisten en el hecho de que un niño puede desarrollar ciertas tareas cuya realización exige que el niño se encuentre, por ejemplo, en la etapa operatoria, mientras que, al mismo tiempo, se comporte en otras tareas como un niño de la etapa preoperatoria.

Según Inhelder y Piaget (1972) el pensamiento formal se apoya no en los objetos o situaciones directamente percibidas sino en representaciones proposicionales o verbales de estos objetos. Hace referencia a la estructura formal de las relaciones entre los objetos presentes y no al contenido. Por todo esto, el pensamiento formal, haciendo honor a su nombre, es independiente del contenido de la tarea a la cual se aplica, es decir, pude aplicarse con éxito a contenidos y contextos muy diferentes. De acuerdo con este punto de vista el contexto juega un papel secundario.

Los estudios posteriores a la publicación de la obra de Inhelder y Piaget (1972) sobre el desarrollo del pensamiento formal detectaron algunos desacuerdos con los trabajos de Piaget sobre el pensamiento formal. Los más importantes son: (a) no todas las personas llegan a la fase del pensamiento formal, (b) no todos los esquemas formales se adquieren simultáneamente, lo cual pone en duda la existencia de una estructura de conjunto en el pensamiento formal y (c) en la resolución de tareas formales no solamente influye la estructura lógica del problema - tal como postula el modelo piagetiano - sino también el contexto y el contenido al cual hace referencia el problema, y que esta influencia está mediatizada esencialmente por las ideas o concepciones previas que tiene el sujeto sobre el contenido.

Estos estudios, al destacar la influencia que tienen las ideas espontáneas de los alumnos sobre el razonamiento formal, dan otra explicación de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas diferente del piagetiano (el niño no tiene adquirida la etapa correspondiente) o de la neoconductista (falta de dominio de los niveles inferiores de la jerarquía). Esta explicación es la que consideran algunos neopiagetianos y, esencialmente, dice que una de las principales causas de la dificultad en el aprendizaje es el conflicto entre la intuición ingenua del alumno, que él considera correcta, y lo que indica el análisis lógico y racional. Desde esta perspectiva es importante saber cuál es la naturaleza de estas concepciones espontáneas y cuál es su origen, a fin de poder superar el conflicto que se puede producir entre estas concepciones y el análisis lógico y racional.

El constructivismo, al menos en el Estado español, se considera como una síntesis de lo que Coll (1989) denomina enfoques cognitivos en un sentido amplio: (a) La teoría genética de J. Piaget y de sus colaboradores de la Escuela de Ginebra, (b) La teoría de la actividad en las formulaciones de Vygotsky, Luria, Leontiev, y en sus desarrollos posteriores (Wertsch, Forman, Cazden, etc.), (c) La teoría del aprendizaje verbal significativo de D. Ausubel y su prolongación en la teoría de la asimilación de R.E. Mayer, (d) La teoría del procesamiento de la información (teoría de los esquemas) y (e) La teoría de la elaboración de M. A. Merrill y Ch. M. Reigeluth..

El constructivismo considera la estructura cognitiva del alumno como un conjunto de esquemas, los cuales son modificados de acuerdo con la teoría de la equilibración de Piaget. El constructivismo acepta que el objetivo de la intervención escolar es la modificación de los esquemas de conocimiento del alumno. Es decir, considera que el primer paso para conseguir que el alumno realice un aprendizaje significativo consiste en que el nuevo contenido de aprendizaje rompa el equilibrio inicial de sus esquemas. La explicación que da esta concepción a las dificultades de aprendizaje es la siguiente: frente a una tarea que provoca una situación de desequilibrio, puede suceder:

a) Que la situación propuesta sea confusa o poco coherente y que, por tanto, no sea potencialmente significativa. En este caso, es el profesor quien tiene la posibilidad de resolver la dificultad presentando la situación de una manera que sea más clara y coherente.

b) Que el alumno no tenga los conocimientos necesarios para volver a la situación de equilibrio. La solución, en este caso, pasa por fijar la distancia óptima entre lo que sabe el alumno y el nuevo contenido; es decir, se ha de hacer una adaptación del nuevo contenido a lo que ya sabe el alumno.

c) Que el alumno no esté motivado para realizar la actividad propuesta, con lo que puede ocurrir que ni siquiera se produzca la situación de desequilibrio porque la tarea que le proponemos le resulte ajena o bien no le encuentre sentido. La solución será, pues, que el profesor procure motivar al alumno.

d) Que las concepciones intuitivas sobre el nuevo contenido y las estrategias desarrolladas no permitan volver a la situación de equilibrio, en cuyo caso, será necesaria la ayuda del profesor para que el alumno vaya variando sus estrategias.

3.2 Obstáculos

El concepto de obstáculo fue introducido por Bachelard (1972) y fue trasladado al campo de la didáctica de las matemáticas por Brousseau (1983 y 1997), que le dio un sentido muy determinado:

> *Los errores no solamente son efecto de la ignorancia (...) sino el efecto de un conocimiento previo que era interesante y exitoso, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo (...) constituyen los obstáculos.* (Brousseau, 1997, p. 8)

Para poder hablar de obstáculo, según Brousseau, se han de cumplir las siguientes condiciones:

1) Un obstáculo es un conocimiento. Por tanto, no es una falta de conocimiento.

2) El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas correctas en determinadas situaciones que halla con cierta frecuencia.

3) Cuando se utiliza este conocimiento en otro contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.

4) El alumno se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al cambio del conocimiento antiguo por uno de nuevo.

5) A pesar de que el alumno es consciente de las limitaciones del conocimiento-obstáculo, lo continua manifestando esporádicamente.

Brousseau (1893) considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

1) De origen ontogénico o psicogenético, causados por el desarrollo del alumnado.

2) De origen didáctico, provocados por las elecciones didácticas que se han hecho para diseñar la situación didáctica.

3) De origen epistemológico, intrínsecamente relacionados con el contenido matemático. Se pueden hallar en la historia de los contenidos, aunque no es necesario reproducir en el aula las condiciones históricas que permitieron superarlos.

La noción de obstáculo, y muy especialmente la noción de obstáculo epistemológico, no es muy clara, y ha generado controversia (Artigue, 1990; Sierpinska, 1988; Font, 2000a). Resulta complicado diferenciar la noción de obstáculo de la noción de dificultad. Otro aspecto problemático de la noción de obstáculo es el de ser considerado un "conocimiento" que produce prácticas erróneas, ya que parece que el obstáculo es algo que acarrea el alumno y que ha de ser eliminado para que pueda avanzar en su proceso de aprendizaje.

3.3 Contrato didáctico y conflictos en la interpretación de la norma

En el área de la educación matemática hay una corriente importante que considera que la clase de matemáticas es una institución (una pequeña sociedad, un grupo formal secundario, una comunidad de prácticas, un sistema con diferentes subsistemas, etc.), con su cultura y sus valores. Todos estas términos provienen de la sociología y de la antropología y llevan hacía una visión sociocultural del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de una perspectiva muy rica y variada con un amplio abanico de puntos de vista (teorías sistémicas, dialógicas, etc.).

A pesar de que hay diferencias en los marcos teóricos adoptados, podemos decir que se está consolidando a nivel internacional una sólida línea de investigación que resalta la importancia de los factores sociales y culturales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Los investigadores que desarrollan esta línea de investigación ven el aula de matemáticas como una cultura donde se construyen relaciones educativas y personales a partir de la vivencia y la interpretación de normas específicas de acción, algunas de ellas propias de la práctica matemática, pero otras son necesarias para que la práctica matemática que se quiere enseñar sea posible. La investigación didáctica realizada desde esta perspectiva sociocultural ha puesto de manifiesto que las interacciones entre profesor y alumnos en el aula de matemáticas están con frecuencia regidas por "obligaciones" o normas no explícitas cuya función es posibilitar el trabajo matemático en el aula. Para analizar estas "obligaciones" se han propuesto diferentes constructos teóricos: (1) normas sociomatemáticas y sociales

(Voigt, 1995; Yackel y Cobb, 1996; McClain y Cobb, 2001), (2) contrato didáctico (Brousseau, 1986) y (3) meta práctica (Bagni y D'Amore, 2005).

Según Godino y Llinares (2000), las "normas sociales" en el seno de la clase son convenciones que describen cómo colaborar unos con otros, así como las obligaciones que describen cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación. La investigación sobre la enseñanza ha identificado la existencia de unas normas sociales que ayudan a caracterizar las microculturas del aula. Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula independientemente de la disciplina. Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes. Por ejemplo, se supone que en la clase los alumnos deberían adoptar una actitud crítica hacia las afirmaciones que se hacen, tanto por uno mismo como por los demás, independientemente de si se trata de una clase de matemáticas, como de ciencias o de literatura. Se espera (norma social) que los estudiantes expliquen las soluciones que proponen a cualquier cuestión.

Son normas sociales caracterizadas por explicar, justificar y argumentar ya que se supone que en situaciones ideales los estudiantes deberían desafiar las explicaciones y justificaciones de sus compañeros, así como justificar sus propios argumentos. Sin embargo, existen aspectos normativos de la discusión matemática que son específicos de la actividad matemática de los estudiantes. Son llamados "normas sociomatemáticas". Por ejemplo, la comprensión de lo que en el aula se puede considerar "matemáticamente diferente", "matemáticamente sofisticado", "matemáticamente eficiente" y "matemáticamente elegante", así como lo que se puede considerar como una explicación "matemáticamente aceptable". Es decir, las normas sociomatemáticas son aspectos normativos de las discusiones matemáticas que son específicas de la actividad matemática de los estudiantes y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Una "norma matemática" es una práctica en el aula, como por ejemplo calcular el perímetro de un rectángulo.

También se utiliza el término *contrato pedagógico* para referirse al conjunto de estas normas, que no están ligadas a una disciplina específica y *contrato didáctico* para describir y explicar las obligaciones o normas no explícitas que rigen las interacciones entre el profesor y los alumnos en el aula de matemáticas (en general, de una disciplina específica)

> *Se establece una relación que determina -explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el profesor y el alumno, tienen la responsabilidad de administrar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de*

> *ese contrato que es específico del "contenido": el conocimiento matemático pretendido.* (Brousseau, 1986, p. 51).

El "contrato didáctico" regula los derechos y obligaciones del profesor y los alumnos. Es el resultado de un proceso de negociación entre los alumnos, el profesor y el medio educativo. Uno de los componentes esenciales del contrato didáctico son los criterios de evaluación explícitos, pero hay otros no explicitados que sólo se detectan cuando el profesor plantea actividades poco habituales que vulneran las reglas del contrato, lo cual produce el consiguiente desconcierto en los alumnos. Los alumnos, en su adaptación al medio escolar, llegan a desarrollar un sentido que les permite captar cuáles son las reglas del contrato didáctico en cada caso. La importancia de los fenómenos de contrato didáctico se debe a que condicionan de manera determinante el tipo de aprendizaje. La actitud del profesor determina con frecuencia de manera inconsciente las relaciones de los alumnos con la matemática. Por ejemplo: (1) actitud de espera de la explicación del profesor, (2) interés en investigar la situación, (3) control de los resultados, por parte de los alumnos, etc.

Bagni y D'Amore (2005) distinguen entre las prácticas matemáticas que son el objeto de la enseñanza y aprendizaje del conjunto de prácticas que sirven para que sea posible el primer tipo de práctica. A este segundo grupo lo llaman meta-práctica:

> *"Ma queste "pratiche" si possono dividere in due grandi categorie: a)quelle stabilite a priori per tale società (l'apprendere, lo stare insieme, il condividere attività, ...); b) quelle che nascono a causa del fine che tali attività si prefiggono di raggiungere (la competitività, le azioni relative al contratto didattico, quelle tese a far supporre a chi deve valutare abilità di fatto non possedute, ...). Le prime sono attività codificate e dunque funzionali ...; le seconde, che potremmo definire meta–attività, sono dovute alla specifica situazione, a carattere extra funzionale."* (Bagni y D'Amore, 2005, p. 80)

Alumnos y profesores comprenden e interpretan estas "obligaciones" o "normas" no explícitas (o explícitas), cuya función es posibilitar el trabajo matemático en el aula, en función de sus significados iniciales, sus expectativas y sus referentes culturales y sociales. Este hecho posibilita la disparidad entre las interpretaciones legitimadas por el profesor en la clase de matemáticas y ciertas interpretaciones dadas por algunos alumnos (Planas, 2001). Esta disparidad en la interpretación de las normas (sean éstas matemáticas, socio-matemáticas o sociales) puede dificultar tanto la comprensión de los contenidos matemáticos como la participación de algunos alumnos, llegando incluso a facilitar su deserción del aula.

3.4 Complejidad semiótica, conflictos semióticos y epistémicos

Las investigaciones realizadas en el marco del EOS han puesto de manifiesto un fenómeno relevante para la didáctica de las matemáticas:

> (...) *la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica*. (Font, 2005, p. 38).

Dichas investigaciones han permitido destacar también otro factor, tanto o más importante que el tipo de representación utilizado, que interviene de manera determinante en la complejidad semiótica asociada al uso de elementos genéricos: las reglas del juego de lenguaje en el que nos situamos. Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos una representación como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje” en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos.

La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico – y no hay que olvidar, que en la mayoría de las prácticas matemáticas intervienen elementos genéricos.

Según como se gestione en el proceso de instrucción la complejidad semiótica asociada a las prácticas matemáticas se puede facilitar (o no) la aparición de *conflictos semióticos*, entendidos como*:*

> *(...) disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución.* (Godino, 2002, p. 258).

Por ejemplo, en algunos libros de texto se puede observar un *conflicto semiótico potencial causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental* $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ \ x=a)}$ como primera notación para definir la derivada en un punto (Badillo, Font y Azcárate, 2005; Inglada y Font, 2003; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

Desde el EOS también se ha resaltado otro factor, a tener en cuenta, al analizar las limitaciones en los aprendizajes matemáticos, efectivamente, realizados. Nos referimos a las limitaciones originadas por significados institucionales (pretendidos o implementados) poco representativos de los significados referenciales. Estas limitaciones se producen cuando determinadas prácticas representativas del significado de referencia no son contempladas en el significado pretendido o implementado. Por ejemplo, cuando el significado pretendido sólo contempla que el cálculo de la derivada en un punto consiste en la aplicación de una regla de derivación algebraica y en el cálculo del valor de la función en dicho punto pero no contempla otras prácticas.

Nos referimos, en concreto, a argumentaciones de tipo variacional que permiten calcular la derivada como límite de las razones de cambio o bien a argumentaciones de tipo gráfico que permiten calcular la derivada como la pendiente de la recta tangente. Si el proceso de instrucción contempla significados implementados poco representativos de los significados referenciales, es de esperar que los alumnos no puedan realizar determinadas prácticas que serían esperables como resultado del proceso de instrucción. A los conflictos de los alumnos que tienen su origen en desajustes entre los significados de referencia y los pretendidos o bien entre los pretendidos y los implementados, en el EOS se les llama "conflictos epistémicos" (Bencomo, Godino y Wilhelmi, 2004; Wilhelmi, Bencomo y Godino, 2004).

3.5 Errores, dificultades, … Algunas considerciones generales

Las investigaciones sobre los errores y las dificultades en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utiliza indistintamente dificultad y obstáculo. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de obstáculos y dejan en un segundo plano las limitaciones en los aprendizajes debidos a significados personales poco representativos de los significados institucionales de referencia.

En el EOS se considera que cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje. De acuerdo con Font (2000a) y Godino, Batanero y Font (2003):

- Hablaremos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.
- El término *dificultad* indicará el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas

incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

- A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Decimos que existe un *obstáculo*.

Algunas causas de errores y dificultades son las siguientes:

1. Dificultades relacionadas con los objetos matemáticos

Parece razonable pensar que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos. La complejidad semiótica asociadas a las prácticas matemáticas son una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

Cuando el error se produce porque el alumno usa un conocimiento, que es válido en algunas circunstancias, en contextos donde no se puede aplicar decimos que existe un *obstáculo*. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Para ello será necesario, además, que los significados pretendidos e implementados sean suficientemente representativos de los significados de referencia.

Los errores, dificultades y obstáculos que tiene su origen en la complejidad semiótica o bien en la falta de representatividad de los significados pretendidos e implementados, en el EOS se llaman conflictos semióticos y conflictos epistémicos.

2. Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas

Se puede dar el caso de que la propuesta de actividades que presenta el profesor a los alumnos no sea potencialmente significativa (la complejidad semiótica no está bien gestionada), por causas diferentes: (a) Cuando el profesor no estructura bien los contenidos que quiere enseñar. (b) Cuando los materiales que ha escogido, como por ejemplo los libros de texto, no son claros -ejercicios y problemas confusos, mal graduados, rutinarios y repetitivos, errores de edición, etc. (c) Cuando la presentación del tema que hace el profesor no es clara ni está bien organizada -no se le entiende cuando habla, habla demasiado rápido, la utilización de la pizarra es caótica, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.-. Este tipo de factores produce básicamente conflictos semióticos en los alumnos.

El profesor debe analizar las características de las situaciones didácticas sobre las cuales puede actuar, y su elección afecta al tipo de estrategias que pueden implementar los estudiantes, conocimientos requeridos, etc. Estas características suelen denominarse *variables didácticas* y pueden ser relativas al enunciado de los problemas o tareas, o también a la organización de la situación (trabajo individual, en grupo, etc.).

3. Dificultades que se originan en la organización del centro.

En ocasiones, el horario del curso es inapropiado, el número de alumnos es demasiado grande, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc. La solución a este tipo de dificultad, pasa por una reorganización del centro, ratio del número de alumnos, organización del área, organización del aula, etc.

4. Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado

Puede ocurrir que las actividades propuestas por el profesorado a los alumnos sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero que el alumnado no esté en condiciones de hacerlas suyas porque no esté motivado. Este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.

La falta de motivación se puede producir, entre otros factores, debido a que los objetos matemáticos, en apariencia, quedan desconectados de las vivencias cotidianas de los alumnos.

5. Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos

En algunos alumnos su nivel de desarrollo psicológico o bien algún tipo de discapacidad puede ser la causa de su falta de aprendizaje, aunque este tipo de situaciones no son habituales en el nivel universitario considerado en esta investigación. Este tipo de dificultad se puede intentar resolver con una adaptación de los contenidos y de la metodología a la situación de cada alumno.

6. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores

Puede ocurrir que el alumno no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido, y, por tanto, la "distancia" entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. La evaluación inicial puede detectar los contenidos previos que hay que adquirir para conseguir el aprendizaje del contenido previsto.

Esta falta de conocimientos previos es un fenómeno importante en el paso de secundaria a la universidad ya que en los estudios universitarios se suponen como conocidos contenidos pertenecientes a los programas de los últimos años de enseñanza secundaria: funciones, cálculo del dominio y el rango, límite, continuidad, geometría analítica de la recta, sucesiones, entre otros.

7. Dificultades relacionadas con los significados de los objetos personales de los alumnos

También puede pasar que los significados de los objetos personales desarrollados por los alumnos incluyan prácticas que sean consideradas un obstáculo por la institución. Esta dificultad se puede resolver utilizando una evaluación formativa que permita superar estos obstáculos presentando situaciones, suficientemente complejas, para que el alumno sea consciente de que determinadas prácticas sólo son válidas en determinados contextos.

Estos siete aspectos están conectados entre sí y se refuerzan mutuamente, produciendo básicamente dos tipos de efectos:

1) prácticas erróneas que se pueden considerar obstáculos (combinación básicamente de 1, 2, 3 y 7) y

2) falta de significado personal – producido por la combinación de 1 y 6 o bien por las actitudes afectivas hacia las matemáticas (combinación de 4 y 5).

4 DIFICULTADES, OBSTÁCULOS, ERRORES... RELACIONADOS CON LOS OBJETOS DEL ANÁLISIS INFINITESIMAL ELEMENTAL

En este apartado se comentan los errores, dificultades,... que la investigación didáctica sobre las objetos del análisis elemental ha documentado, dedicando una especial atención a los relacionados con las funciones.

La investigación reciente en el campo de la didáctica del análisis infinitesimal ha puesto de manifiesto la existencia de importantes dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje en este campo. Se ha escogido como guía general la clasificación de dificultades relacionadas con el análisis infinitesimal elemental propuesta por Artigue (1995 y 1998). Según esta autora, la investigación didáctica en el campo del pensamiento matemático avanzado ha puesto de manifiesto la existencia de fuertes y resistentes dificultades. Artigue hace la siguiente clasificación de estas dificultades:

1) Dificultades relacionadas con la complejidad matemática de los objetos básicos del análisis: números reales, funciones, sucesiones, etc. Son objetos que todavía están en fase de construcción cuando comienza la instrucción del análisis del currículum de secundaria y primeros cursos de universidad.

2) Dificultades relacionadas con el objeto límite y con las técnicas para su cálculo.

3) Dificultades relacionadas con la ruptura necesaria con el pensamiento algebraico.

Dificultades relacionadas con los objetos básicos del análisis infinitesimal elemental

Números reales

Artigue (1998*)* considera que la investigación didáctica sobre los números reales ha puesto de manifiesto que la concepción desarrollada por los estudiantes no es la adecuada y comenta las siguientes dificultades:

1) La distinción entre los diferentes tipos de números depende mucho de su forma de representación.

2) La creciente y descontrolada utilización de las calculadoras y de las nuevas tecnologías tiende a reforzar la asimilación número real / nombre decimal.

3) El orden en R es reconocido como un orden denso, pero, en función del contexto, los estudiantes pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números justo antes o justo después de un número determinado; por ejemplo, 0,9999..., nombrado, muchas veces, como el número anterior a 1.

4) La asociación entre los números reales y la recta real tampoco es coherente. Incluso, en el caso de que los alumnos acepten a priori el principio de la correspondencia uno a uno entre R y la recta real, no están del todo convencidos de que un determinado número tenga un lugar en la recta real.

Funciones

Con relación al objeto función, Artigue (1998) considera cuatro tipos de dificultad:

1) Dificultades en la identificación de aquello que realmente es una función y en la identificación de las sucesiones como un caso de funciones.

2) Dificultades relacionadas en la utilización de la función como un proceso y como un objeto.

3) Dificultades relacionadas en la traducción entre las diferentes formas de presentación de una función.

4) Dificultades relacionadas con la superación del pensamiento numérico y algebraico.

Dificultades relacionadas con el concepto de límite.

Artigue considera que, en las investigaciones que ha analizado sobre límites, hay bastante acuerdo sobre los siguientes obstáculos epistemológicos:

1) El sentido común asociado a la palabra "límite" induce concepciones resistentes que se manifiestan considerando el límite como una barrera que no se puede superar o bien como el último término de un proceso o bien restringiendo la convergencia a la convergencia monótona.

2) La generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos de acuerdo con el principio de continuidad establecido por Leibniz.

3) La interpretación geométrica dificulta la identificación de los objetos involucrados en el proceso del límite y de su topología subyacente. Este hecho dificulta la relación entre los aspectos geométricos y los numéricos el proceso del límite.

Además de estos obstáculos epistemológicos, Artigue (1998) considera:

4) Las dificultades relacionadas con los dos aspectos del límite: proceso y objeto. Por ejemplo, la dificultad que tienen muchos alumnos para identificar 0,9999..., con 1 se puede explicar porque en el primer caso estamos considerando un proceso, mientras que 1 es un objeto.

5) Las dificultades relacionadas con la definición formal del concepto de límite.

Dificultades relacionadas con la ruptura con el pensamiento algebraico.

La actividad matemática en el análisis infinitesimal, necesita el dominio de habilidades algebraicas y, también, tomar distancia del pensamiento algebraico. La fractura entre el pensamiento algebraico y el pensamiento analítico tiene dimensiones diferentes. Lo esencial, según Artigue, es que el análisis necesita otra visión "de igualdad" para desarrollar y dominar nuevas técnicas para demostrar igualdades. En el álgebra, para demostrar que dos expresiones $a(x)$ y $b(x)$ son iguales, la estrategia normal es la siguiente: transformar una en la otra por equivalencias sucesivas, o bien transformar las dos para obtener dos expresiones evidentemente equivalentes, o bien transformar su diferencia (respectivamente el cociente) para obtener 0 (respectivamente 1).

En el análisis, muchas veces esta estrategia está fuera de lugar o bien no es la más fácil de aplicar. Por ejemplo, cuando se trabaja con propiedades locales, es necesario desarrollar una visión de igualdad conectada con "la proximidad infinita", es decir: si $\forall\ \xi > 0$, $d\ (A,B) < \xi$, para una distancia adecuada d, entonces: $A=B$. Como consecuencia, las desigualdades juegan en el análisis un papel predominante, así como el razonamiento local basado en condiciones suficientes.

4.1 Errores, dificultades, …relacionados con las funciones

Las investigaciones que han caracterizado las funciones como proceso y como objeto han puesto de manifiesto que muchas dificultades de los alumnos se deben a que el alumno sólo puede realizar acciones sobre la fórmula, pero no es capaz de entender la función como un proceso o bien como un objeto:

> *Una concepción proceso de función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo con algunas reglas repetibles, de manera que dada la misma cantidad inicial, siempre producirán la misma cantidad transformada. El sujeto es capaz de pensar en la transformación como una actividad completa, comenzando con objetos de algún tipo, haciendo algo con estos objetos, y obteniendo nuevos resultados de aquello que ha hecho (..) Una función es concebida como un "objeto" si es posible hacer acciones sobre ella, acciones que la transformen globalmente.* (Dubinsky y Harel, 1992, p. 85)

De acuerdo con Font (2005a) consideramos que la distinción que propone Dubinsky sobre las funciones (como objeto y como proceso) es un intento de dar, en parte, una respuesta a uno de los aspectos esenciales del razonamiento matemático: *el uso de elementos genéricos.* Desde este convencimiento, consideramos que las tramas de funciones semióticas propuestas en el EOS (Inglada y Font, 2003; Contreras, Font, Ordóñez y Luque, en prensa), para determinar la complejidad semiótica y desvelar conflictos semióticos potenciales, son instrumentos más finos que permiten engoblar y ampliar los constructos de la teoría APOS. La introducción de la dualidad extensivo-intensivo y de las funciones semióticas utilizadas 8 (o 18 si se quiere refinar el nivel de análisis) son el resultado de la reflexión que se ha hecho en el EOS sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso.

Con relación al papel que han de jugar las gráficas y los aspectos visuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje, entre los investigadores que trabajan dentro del AMT (Pensamiento Matemático Avanzado) ha habido una cierta controversia sobre las ventajas de dar más importancia a los aspectos gráficos de las funciones de la que se le había dado hasta el momento (Eisenberg 1991). Ahora bien, cada vez hay más partidarios de enfatizar los aspectos visuales porque consideran que se ha de procurar favorecer en los alumnos un razonamiento de tipo gráfico. Por ejemplo, Cantoral y Farfán (1998) sostienen que la construcción de un universo gráfico, amplio y estructurado, es básico para favorecer tanto el lenguaje como el pensamiento variacional:

> *Iniciamos con actividades para la construcción, entre los estudiantes, de un universo de formas gráficas que sea a la vez, amplio y estructurado; y continuamos con el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton. La combinación de ambas tareas, sostenemos esta hipótesis, favorece al desarrollo del "pensamiento y el lenguaje variacional"* . (Cantoral y Farfán, 1998, p. 353).

Se han realizado muchas investigaciones sobre las traducciones entre las representaciones de las funciones, pero no muchas sobre la traducción de gráficas a expresiones simbólicas (por ejemplo, Ruthven, 1990; Font, 2000a, y 2001). Los resultados obtenidos por Ruthven confirman, por una parte, la influencia del uso de la calculadora gráfica y, por otra parte, la importancia del hecho de que el alumno reconozca la gráfica como un caso particular de una determinada clase de funciones de modelo conocido. Según Ruthven (1990), una vez que el alumno ha reconocido la gráfica como un miembro de una familia de funciones, utiliza alguna de las tres estrategias siguientes:

- Analítica: el alumno utiliza su conocimiento de la relación que hay entre la gráfica y su forma simbólica. Por ejemplo, la relación que hay entre las transformaciones que experimenta la gráfica de una parábola al modificar los parámetros de la fórmula. Para este tipo de estrategia no es necesaria la calculadora gráfica.
- Gráfica: el alumno utiliza la facilidad de las calculadoras gráficas para representar la gráfica que resulta de modificar, las veces que crea conveniente, la expresión simbólica que le sugiere la gráfica dada, con el objetivo de ir comparando las gráficas obtenidas con la gráfica inicial.
- Numérica: el alumno hace una conjetura de expresión simbólica a partir de: (1) un número pequeño de puntos de la gráfica y (2) la forma de la gráfica. Esta hipótesis de fórmula se va variando a partir del cálculo de puntos con la fórmula y de su comparación con los correspondientes valores de la gráfica

dada. En este tipo de estrategia, tampoco es necesaria la calculadora gráfica.

En Font (2000a y 2001) se reflexiona sobre la conversión que permite obtener expresiones simbólicas a partir de gráficas. Según Font, si la gráfica que se nos presenta tiene los ejes graduados y consideramos la gráfica como un todo estático formado por puntos (x, $f(x)$), donde $f(x)$ es una expresión simbólica que, para cada valor de la x, permite obtener su correspondiente imagen, la estrategia para obtener esta expresión simbólica consiste en:

- Elegir el tipo de función de ajuste. Es decir, elegir una familia de funciones $f(x;\lambda_1, .., \lambda_k)$ en cuya expresión figuran k parámetros.
- Determinar los parámetros $\lambda_1,....., \lambda_k$.

Por ejemplo, para que un alumno identifique la fórmula de una gráfica como la siguiente:

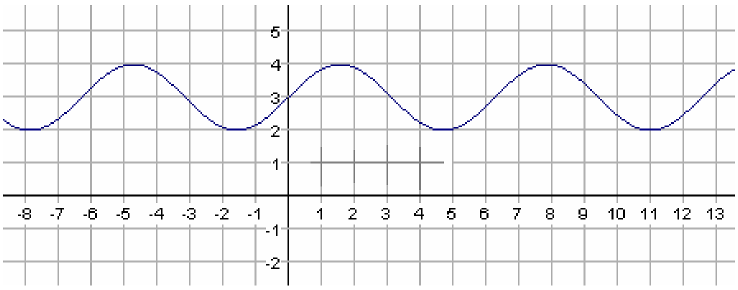


Figura 5. Gráfica a identificar Nº 1

Tiene que seguir el siguiente procedimiento:

1 Identificar esta gráfica como una gráfica de una función trigonométrica.

2 Dentro del grupo de las funciones trigonométricas escoger la familia

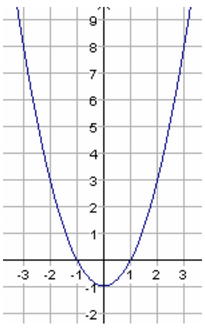
$$f(x)=a\text{sen}(bx)+c$$

3 Determinar el valor de los parámetros a, b, y c

Para poder encontrar la expresión analítica correspondiente a la gráfica anterior el alumno tiene que utilizar sus conocimientos sobre: (1) Las funciones trigonométricas en general, (2) La función seno en particular, (3) La relación entre las variaciones de los parámetros y las variaciones de las gráficas, etc.

Según Font, la mayoría de los alumnos tiene muchas dificultades para realizar los pasos anteriores. La explicación de estas dificultades hay que buscarla, entre otras causas, en la falta de actividades de este tipo en los problemas escolares que los alumnos han resuelto anteriormente. Las actividades escolares en las que los alumnos trabajan las funciones normalmente hacen referencia a funciones concretas consideradas aisladamente, y no como miembros de familias de funciones. En estas actividades se trabaja relativamente poco las transformaciones de las funciones, y aun se trabaja menos el paso de la gráfica a la expresión analítica de una función.

En el caso de la parábola (Font, 2001a), la determinación de estos parámetros se puede hacer utilizando diferentes procedimientos, los cuales dependen del tipo de instrucción que han recibido los alumnos. Por ejemplo, para solucionar la siguiente situación los alumnos del bachillerato español utilizaron básicamente dos técnicas (interpolación, y familia de funciones y transformaciones):



Halla la fórmula de la función que tiene la gráfica siguiente:

Respuesta: f(x) = ...

Justificación de la respuesta

Figura 6. Gráfica a Identificar Nº 2

1) *Interpolación:* Este método consiste en construir una tabla de valores -generalmente pocos- a partir de la gráfica y encontrar una fórmula tal que dichos valores la cumplan. Este procedimiento, en muchos casos, es poco consciente y básicamente consiste en hacer una suposición implícita de fórmula de segundo grado a partir de unos pocos valores de la tabla para confirmarla o invalidarla a partir del resto de valores.

En la mayoría de los casos, las respuestas de los alumnos que utilizan este procedimiento se limitan a incluir una tabla de valores sin hacer referencia al reconocimiento de la gráfica como la gráfica de una función de una determinada familia de funciones. Por ejemplo:

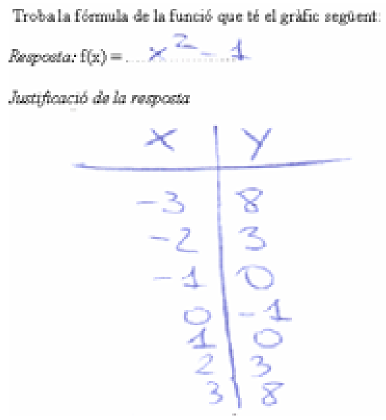
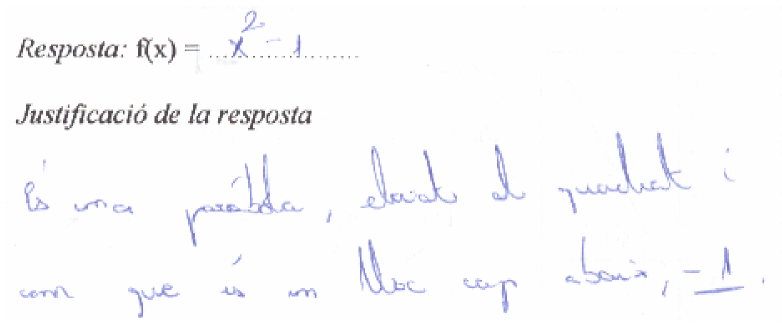


Figura 7. Ejemplo de Interpolación

Algunas respuestas más elaboradas hicieron referencia explícita a que la fórmula ha de ser de grado dos por el tipo de gráfica; y utilizan la tabla de valores para completar la fórmula. Las justificaciones que presentaron estos últimos alumnos fueron del tipo "siempre es el cuadrado menos uno".

Este procedimiento de interpolación da resultado con funciones de segundo grado muy sencillas, pero no lo da con funciones más complicadas.

2) *Familia de funciones y transformaciones*: Este método consiste en reconocer la gráfica como una gráfica de la familia de funciones de segundo grado y utilizar las trasformaciones de las gráficas para hallar y justificar la fórmula. Como ejemplo de este segundo procedimiento tenemos la siguiente respuesta:



"Es una parábola, elevado al cuadrado y como que es un lugar hacia abajo, -1"

Figura 8. Ejemplo de Familia de funciones y transformaciones

Desde la perspectiva del EOS tal como se ha dicho anteriormente, con relación a las traducciones y conversiones se destacan dos aspectos estrechamente relacionados entre sí pero que conviene diferenciar: (1) la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y (2) las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica.

En un estudio más general sobre conflictos de los alumnos relacionados con las funciones realizados en el marco del EOS -Bencomo, Godino y Wilhelmi (2004) y Wilhelmi, Bencomo y Godino (2004)- se consideran 120 posibles tipos diferentes de conflictos epistémicos (no disjuntos). La clasificación que proponen consiste en considerar que el conflicto se puede producir entre la adaptación del significado pretendido al de referencia o bien en la adaptación del implementado al pretendido (2 posibilidades), que puede ser general o específico (2 posibilidades), que puede estar relacionado con una de las seis entidades primarias (6 posibilidades: situación, concepto, lenguaje, propiedades, acciones y argumentaciones) o con alguna de las 5 facetas duales (5 posibilidades). A partir del análisis de procesos de instrucción sobre las funciones, se identifican algunos de ellos.

4.2 Sugerencias para la enseñanza

Además de las investigaciones realizadas siguiendo el enfoque APOS (entre las que destacan las del grupo de investigación RUMEC), hay numerosas investigaciones didácticas sobre funciones que también dan recomendaciones sobre su enseñanza. A continuación, a modo de ejemplo, comentamos brevemente cuatro de dichas investigaciones que dan sugerencias de diverso tipo: (a) tener en cuenta las situaciones extra matemáticas, (b) desarrollar los objetos previos de manera amplia, (c) adaptar un estilo de enseñanza que no sea demasiado formal y (d) tener en cuenta el orden de presentación de los objetos matemáticos.

Sierpinska (1992), considera que la principal dificultad que presentan los alumnos con relación al estudio de las funciones es que estos consideran a la función básicamente como un proceso algorítmico. Serpinska (1992) se plantea el problema de la comprensión del concepto función estableciendo 19 categorías a tener en cuenta en dicha comprensión. Por otra parte, esta investigadora expone algunas consideraciones a tener en cuenta en la enseñanza de las funciones. Entre dichas consideraciones queremos destacar la importancia que da a la incorporación de la modelización en el proceso de instrucción de las funciones:

> *La discriminación entre número y magnitud física, es una cosa, y percibir las relaciones entre las leyes físicas y las funciones matemáticas, es otra. Ambas, síntesis y discriminaciones, son necesarias para completar la comprensión del concepto función. La percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelizar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas u otras es una condición sine qua non para dar sentido al concepto de función en su totalidad.* (Sierpinska, 1992, p. 42).

En su tesis doctoral Domingos (2003) estudia la comprensión de los alumnos con relación a los objetos del análisis infinitesimal elemental (función, límite, derivada, etc.). Entre las diferentes consideraciones que hace para su mejor enseñanza, destaca el papel que juega la buena comprensión de los objetos previos que se suponen ya conocidos. Con esta observación coinciden muchas otras investigaciones.

Tall y Bakar (1992) realizaron un estudio sobre el desarrollo del concepto de función en estudiantes entre 16 y 17 años con el objetivo de responder a la siguiente pregunta:

> *(...) por qué los estudiantes son capaces de usar funciones en la práctica matemática, mientras que la naturaleza teórica del concepto de función permanece en ellos de una forma vaga e inconsistente...* (Tall y Bakar, 1992, p. 39).

Tall y Bakar consideran que esto es debido a que los estudiantes recurren a ejemplos prototipo:

> (…) *los estudiantes desarrollan ejemplos prototipos del concepto de función, tales como* $y = x^2$, *o un polinomio, o 1/x, o la función seno. Cuando se le pide el gráfico de una función, en ausencia de una definición operativa de función, la mente intenta responder por resonancia con estos prototipos mentales.* (Tall y Bakar, 1992, p.40).

En sus conclusiones finales recomiendan seguir un cierto pragmatismo dando menos énfasis a la teoría en favor de la práctica.

Vall de Pérez y Deulofeu (2000) en su investigación sobre l*as ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables* realizada con 60 alumnos de COU concluyen: (1) que para construir el concepto de relación de dependencia funcional es necesario haber asimilado los modelos más sencillos de función: la dependencia lineal (proporcionalidad directa y función afín) y la proporcionalidad inversa y función cuadrática. (2) que la secuencia didáctica recomendable es introducir la función de proporcionalidad inversa después de las funciones lineal y afín, y antes de la función cuadrática.

Desde la perspectiva del EOS, la recomendación para los procesos de enseñanza-aprendizaje de las funciones es que éstos sean lo más idóneos posibles, entendida la idoneidad como la minimización de los conflictos epistémicos y de los semióticos (Bencomo, Godino y Wilhelmi, 2004; Wilhelmi, Bencomo y Godino, 2004).

Para finalizar este apartado queremos resaltar que durante los últimos 20 años (Artigue, 2003) ha ido aumentando el interés por realizar investigaciones didácticas sobre la enseñanza de las matemáticas en las instituciones universitarias, siendo los conceptos del análisis elemental (números reales, funciones, límites, derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.) de los más investigados.

Este interés es el resultado de la constatación de que, en la universidad, los significados pretendidos e implementados de los objetos institucionales del análisis diferencial suelen priorizar prácticas algorítmicas y algebraicas (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1999), y, en muchos casos, también incluyen prácticas de demostración rigurosa (Yusof y Tall, 1999). Por otra parte, el significado evaluado también prioriza la evaluación de prácticas algorítmicas y algebraicas. Alguno de los problemas detectados, como consecuencia de esta forma de enseñar, es que cuando los alumnos tiene que resolver situaciones que requieren mayor conocimiento conceptual, la mayoría falla y no saben cómo abordar la situación (Selden, Mason y Selden, 1994).

Para Artigue (1995), la evidencia de tales dificultades ha tenido dos consecuencias interesantes: a) Potente desarrollo de las investigaciones didácticas de la enseñanza superior centradas fundamentalmente en el área del análisis infininitesimal y b) Desarrollo de numerosos proyectos de innovación de la enseñanza. Con relación a este último aspecto, en la revisión realizada por Moreno (2005) sobre los diferentes intentos de reforma de la enseñanza del cálculo diferencial en la universidad se afirma:

> *La mayoría de los programas de renovación comparten los mismos criterios, y creen que los cambios deben afectar a: los currícula vigentes, al desarrollo profesional de la universidad, a la utilización sistemática de la tecnología y de otros materiales, a la formación didáctica y científica de los futuros docentes, etc.* (Moreno, 2005, p. 81).

5 UTILIZACIÓN DE LAS CONSIDERACIONES ANTERIORES EN LA INVESTIGACIÓN QUE SE PRESENTA

Las consideraciones expuestas anteriormente se tuvieron en cuenta en nuestra investigación de dos maneras diferentes:

1) Por una parte, los estudios específicos sobre las dificultades en el aprendizaje de las funciones y las recomendaciones para su enseñanza, se utilizaron en el seminario-taller cuando se presentaron los resultados de la investigación didáctica sobre las funciones. Por otra parte, también se utilizaron para analizar los comentarios de los profesores sobre los errores y dificultades de los alumnos.

2) Puesto que los profesores, en sus comentarios sobre errores y dificultades, mezclaron consideraciones sobre errores específicos de las funciones con consideraciones generales (por ejemplo, la falta de

motivación o la falta de conocimiento previo de los alumnos), fue necesario recurrir al marco general, expuesto anteriormente, sobre errores, dificultades, etc. para poder completar el análisis de sus comentarios sobre los errores y dificultades relacionados con las funciones.