Life Settlements y Viaticals

Mar Jori

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (**www.tdx.cat**) i a través del Dipòsit Digital de la UB (**diposit.ub.edu**) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX ni al Dipòsit Digital de la UB. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX o al Dipòsit Digital de la UB (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (**www.tdx.cat**) y a través del Repositorio Digital de la UB (**diposit.ub.edu**) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR o al Repositorio Digital de la UB. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR o al Repositorio Digital de la UB (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (**www.tdx.cat**) service and by the UB Digital Repository (**diposit.ub.edu**) has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized nor its spreading and availability from a site foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository is not authorized (framing). Those rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

PROGRAMA DE DOCTORAT EN EMPRESA

ESPECIALITAT EN MÈTODES MATEMÀTICS PER A L'EMPRESA, LES FINANCES I LES ASSEGURANCES

TESIS DOCTORAL:

LIFE SETTLEMENTS Y VIATICALS

Mar Jori
Universitat de Barcelona

Directores:
Dr. Antonio Alegre
Dra. Carmen Ribas

Universitat de Barcelona

Als meus pares,
Blanca i Josep Lluís

Agradecimientos

Es un placer poder expresar mis agradecimientos a todas las personas que han colaborado de una manera u otra en el desarrollo de esta tesis doctoral.

En primer lugar, quiero agradecer por su apoyo y sus consejos durante estos años a mis directores, el Dr. Antonio Alegre y la Dra. Carmen Ribas. Vuestras sugerencias han hecho que este trabajo sea mejor.

De forma muy especial quiero dar las gracias a Jesús y a Jorge. Nunca olvidaré lo mucho que me habéis ayudado, sobretodo en esta última etapa. Es una suerte haber podido contar con vuestras ideas y orientaciones. Gracias también, Oriol, por estar siempre ahí.

Isa y Manu, no sabéis lo mucho que habéis significado para mí estos años, habéis sido un ejemplo. Espero teneros siempre a mi lado aunque nuestras vidas no sigan por el mismo camino.

A todo el departamento de *Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial* de la Universidad de Barcelona donde he tenido el placer de trabajar durante cuatro años. En especial, recordaré siempre los desayunos con mis amigas Merche, Carmen y Teresa. Hacíais que comenzara cada mañana con una sonrisa. Os llevo siempre conmigo.

Por supuesto agradezco a mis padres, a Teresa, a mi familia y a todos mis amigos su comprensión y su apoyo incondicional. Y gracias sobretodo a ti, Cris porque me has dado aliento y ánimo, cuando más lo necesitaba. Es una suerte tener amigas como tú. *Ets inesgotable.*

Por último, Albert, que has estado a mi lado durante todos estos años, sólo por tí ya valía la pena. *Aquest és només el primer de molts projectes junts.*

Mar Jori

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se justifica el tema de la tesis, exponiéndose los principales objetivos que se pretenden alcanzar con su desarrollo y que, por consiguiente, han fundamentado su elaboración.

El trabajo se enmarca en un novedoso mercado, basado en la compra/venta de pólizas de vida y que se denomina mercado de life settlements y viaticals.

1.1. Motivación de la tesis

En España, si el tomador de un seguro de vida desea rescindir su contrato, dispone básicamente de dos opciones: 1) cancelar la póliza, es decir, dejar de pagar primas y renunciar a cualquier compensación o 2) rescatarla, es decir, dejar de pagar primas, renunciar al beneficio por muerte y cobrar un determinado importe por parte de la entidad aseguradora que denominamos valor de rescate. El asegurador, en ambos casos, está en una posición privilegiada. En caso de cancelación porque ha estado cobrando durante un período de tiempo unas cantidades (primas) sin haber tenido que desembolsar ningún capital, aunque sí es cierto que ha estado ofreciendo cobertura por fallecimiento durante ese período de tiempo y, por tanto, el tomador ha consumido parte de las primas. En caso de rescate porque es el único comprador del producto en el mercado así que puede influir directamente sobre el precio de venta, siendo éste inferior al valor real de la póliza.

Parece razonable pensar que ni el rescate, ni por supuesto la cancelación de la póliza sean soluciones adecuadas para el tomador de un seguro de vida. A pesar de esto, muchos acaban rescindiendo su contrato de vida, ¿porqué decidir cancelar o rescatar la póliza de vida? e incluso ¿porqué la cancelación o el rescate se consideran un problema desde el punto de vista del asegurador? En efecto, el comportamiento del tomador y sus decisiones frente a su póliza de vida es hoy en día un aspecto muy relevante en el mercado asegurador, hasta el punto de ser considerado como riesgo actuarial (*lapse risk*). Mientras hace unos años la práctica actuarial se fijaba más en los riesgos puramente económicos, los actuarios son cada vez más conscientes de la necesidad de introducir en sus modelos supuestos no económicos, relacionados con el posible comportamiento adverso de los tomadores del seguro. Además la crisis financiera de estos últimos años ha evidenciado la importancia de tener en cuenta cualquier posible riesgo al que se enfrenta una compañía; ignorar las posibles reacciones del individuo frente a movimientos adversos de la economía subestima el riesgo del negocio.

Éste ha sido el punto de partida de esta tesis doctoral. Si el precio de venta de la póliza de vida no es un factor determinante a la hora de rescatar -pudiendo incluso llegar a ser nulo en caso de cancelación; y es que no todos los contratos dan la opción a rescatar- es que existen otros factores que influyen en la decisión final del tomador, ¿en qué medida influyen estos factores en su decisión final?

El trabajo de investigación fue cogiendo forma con el descubrimiento de un nuevo mercado que llevaba consigo una nueva opción para el tomador, además del rescate y la cancelación de la póliza. Es a finales de los años ochenta, y sólo en Estados Unidos, cuando empieza a crearse un nuevo mercado organizado que permite al tomador vender su póliza a un tercero, por un precio superior al valor de rescate. Después de todo, un seguro de vida está reconocido por ley como un activo asignable o transferible y, como cualquier otro producto, puede ser comprado/vendido en el mercado. Y es que a pesar de que el mercado secundario de pólizas de vida es relativamente nuevo, ya en el año 1911, la decisión Grigsby v. Russell en la Corte Suprema de los Estados Unidos declaró que una póliza de seguro es propiedad de su tomador y como tal, puede ser transferida a una tercera persona en beneficio propio (ver Quinn (2008)). Así, los seguros de vida pasan a ser activos negociables.

Nuestra investigación fue focalizándose poco a poco hacia este mercado en concreto, denominado mercado de los life settlements. El contrato mediante el cual se realiza la compra/venta de una póliza de vida recibe el nombre de life settlement[1]. A diferencia del rescate, donde el tomador vende su póliza a la propia compañía aseguradora, el contrato de compra/venta en el mercado de los life settlements se produce entre tomador e inversor[2]. A diferencia también del rescate, para poder contratar un life settlement, el asegurado debe presentar un estado de salud deteriorado. Este requisito es fundamental para el mercado: al reducirse la esperanza de vida del asegurado, el valor real de la póliza aumenta sustancialmente. El life settlement tiene en cuenta el incremento de las probabilidades de fallecimiento mientras que el rescate no lo contempla, por lo que el precio ofrecido por el inversor es mayor al precio ofrecido por la compañía.

Las primeras transacciones de compra/venta de pólizas de vida no se conocían como life settlements sino como viatical settlements. Inicialmente únicamente se invertía en pólizas cuyo asegurado presentaba una enfermedad terminal, con una vida residual máxima de dos años; el contrato a través del cual se formalizaba la compra/venta de la póliza recibía el nombre de viatical settlement. En la actualidad existen ambas modalidades aunque con el tiempo el mercado de life settlements ha ido ganando terreno.

Si bien el precio de venta de la póliza a través de la contratación de un viatical o de un life settlement es mayor al valor de rescate, es cierto que las razones que llevan al tomador a desprenderse de su póliza en una u otra opción son las mismas, por lo que nuestra problemática inicial no varía. De hecho, la regla de decisión de un individuo estadounidense entre vender o no vender su póliza de vida en el mercado secundario es equiparable a la regla de decisión de un individuo español entre rescatar o no rescatar su póliza de vida frente a su entidad aseguradora. En este trabajo hemos decidido centrarnos en el life settlement -y en el viatical- y no en el rescate por varias razones. En primer lugar porque se trata aún de un producto muy desconocido sobretodo fuera de Estados Unidos y quedan todavía muchos aspectos del negocio por desarrollar. Y es que el mercado es geográficamente reducido porque aunque es posible invertir en viaticals y en life settlements en cualquier parte del mundo, la gran mayoría de transacciones de compra/venta se realizan en el mercado estadounidense[3]. A pesar de ello, el

[1] En España, un life settlement se conoce como Acuerdo de Vida pero en este trabajo hemos preferido mantener el nombre anglosajón por ser el producto de origen estadounidense y dado que prácticamente sólo es posible comercializarlo en EE.UU.

[2] De hecho, al inicio, dichas pólizas eran compradas por personas conocidas por el tomador, práctica que se prohibió en poco tiempo. Debido al crecimiento de este mercado, hoy en día el comprador suele ser un inversor institucional.

[3] Es cierto, que en el Reino Unido y en Alemania pueden comprarse/venderse pólizas de vida

mercado presenta unas expectativas de crecimiento muy optimistas, el número de transacciones realizadas por los inversores de viaticals y de life settlements es cada vez mayor y las cantidades que mueve el mercado son cada vez más importantes. En un futuro, podría instaurarse en el mercado europeo, así que merece la pena conocer el mercado a fondo. En segundo lugar porque, tal y como ya hemos apuntado, a diferencia del rescate estos productos requieren que el asegurado presente un estado de salud deteriorado, lo que nos permite trabajar con sus probabilidades de fallecimiento/supervivencia reales. Por último porque, como veremos, también hemos podido investigar el producto desde el punto de vista del inversor.

1.2. Antecedentes

A continuación vamos a repasar brevemente los trabajos que se han realizado en este campo y en los cuales nos hemos basado para poder entender mejor el funcionamiento del mercado y para poder resolver nuestra problemática. La industria de los life settlements y de los viaticals es aún relativamente joven por lo que los estudios referidos a estos activos son escasos. Sin embargo, hoy en día, se está avanzando mucho en todos los temas relacionados con el riesgo de longevidad. El mercado de viaticals y de life settlements se caracteriza básicamente por este riesgo, así que ambos productos son cada vez más conocidos.

Los primeros trabajos que se publicaron eran más bien de tipo descriptivo: del mercado y de ambos productos. Por ejemplo, Giacolone (2001), que se centra más bien en los viaticals, y Doherty y Singer (2002), que se centra en los life settlements, discuten sobre los beneficios a largo plazo que obtiene el mercado primario y las ganancias en bienestar que obtienen los consumidores con la existencia de un mercado secundario de pólizas de vida. En Conning Research y Consulting, Inc (1999) y (2007) o Kohli (2006) se presenta un estudio completo sobre el mercado de viaticals y de life settlements respectivamente, esto es, sobre la historia y desarrollo del mercado, su regulación, su funcionamiento, los partícipes o las diferentes leyes propuestas por la *National Association of Insurance Commissioners* (NAIC) o la *National Conference of Insurance Legislators* (NCOIL)[4]. Más

(ver Gatzert (2010)) pero estos mercados no están ni mucho menos tan desarrollados como el mercado estadounidense.

[4]La NAIC y la NCOIL son, básicamente, organizaciones cuyo objetivo es la creación, divulgación y mejora tanto de la regulación como de mecanismos de supervisión en el ámbito asegurador. En el mercado de life settlements esta regulación va encaminada sobre todo a la

tarde, en Conning Research y Consulting, Inc (2009) se analiza cómo ha evolucionado el mercado de life settlements a lo largo de estos últimos años: si bien el mercado ha crecido de forma notoria hasta 2007, se observa a partir de 2008, es decir al inicio de la crisis económica, una leve caída que provoca un desafío para el mercado por encontrar nuevas formas de obtener financiación. También podemos encontrar informes más empíricos, con magnitudes de mercado, de su rentabilidad y sus posibilidades de crecimiento (Kamath y Sledge (2005)). Con el paso del tiempo estos trabajos de carácter descriptivo se han ido focalizando más en los life settlements que en los viaticals.

No es hasta la publicación de Vadiveloo et al. (2005) que se propone una primera valoración del precio del life settlement o el llamado *Life Settlement Value*. El artículo no ha estado exento de críticas pero no deja de ser una primera aproximación y por ello merece un interés especial. En él se reconoce que efectivamente la opción de vender la póliza es mejor que la de rescatar, sin embargo añaden que existe una tercera opción aún mejor que vender, la de mantener la póliza activa hasta el fallecimiento del asegurado y que, en caso de necesitar liquidez, el titular de la póliza busque vías alternativas de financiación, como por ejemplo pedir prestado al beneficiario. Más tarde en Singer y Stallard (2005) se critican todos los supuestos y las teorías asumidas por Vadiveloo et al. (2005), llegando a la conclusión de que la opción de vender o no la póliza resulta óptima dependiendo no sólo del valor económico obtenido sino también de otras características personales y de mercado.

Desde el punto de vista del inversor en life settlements, la mayoría de trabajos se basan en general en el análisis y medición de los riesgos, sobretodo el riesgo de longevidad. Uno de los primeros es Perera y Reeves (2006) o Stone y Zissu (2006a) y (2006b) en los que se analizan todos estos riesgos y se proponen posibles medidas para mitigarlos. Gran parte de los artículos relativos al riesgo de longevidad en life settlements y sus titulizaciones han sido publicados por Stone y Zissu, entre ellos destacamos Stone y Zissu (2008) en el que se introduce una medida llamada *life extension duration* que permite valorar el riesgo de longevidad presente en un título de life settlement o en la cartera entera, es decir, qué cantidad pierde el inversor en un título o en una cartera, por año de más vivido por el asegurado. También destacamos Stone y Zissu (2009) en el que se desmonta el título de life settlement para demostrar que se pueden obtener dos posibles tipos

protección del vendedor, prohibiendo prácticas abusivas por parte de las compañías.

de emisiones vinculadas al título: el IO (*Interest Only*) y el PO (*Principal Only*). En Modu (2008) se realiza una descripción detallada del proceso de titulización del life settlements mientras que Braun et al. (2011) también describe el proceso de titulización aunque sólo el que realizan los fondos *Open-Ended*. A diferencia de los fondos *Closed-Ended* cuyo número de participaciones es limitado y donde las emisiones se realizan de golpe en el momento de crearse el fondo, los fondos *Open-Ended* van emitiendo títulos de forma continuada. Chen et al. (2011) calculan el riesgo de longevidad inherente en un life settlement a través de un modelo generalizado Lee-Carter con saltos asimétricos en la mortalidad y proponen cubrirse de este riesgo mediante la contratación de, por ejemplo, un swap de supervivencia vanilla.

Existe una tercera categoría de estudios en materia de life settlements que tienen que ver con el desarrollo de modelos que permiten conocer en qué medida se ve afectado el bienestar de los consumidores con la creación de un mercado secundario de pólizas de vida. En primer lugar, Bhattacharya et al. (2004) realizan un análisis empírico del impacto que tiene la regulación de precios en el mercado de los viaticals sobre el bienestar de los consumidores y desarrollan un modelo en el que se demuestra que el individuo vende o no en función de si el mercado está expuesto o no a regulación de precios. En Bhattacharya et al. (2009) se presenta un modelo similar pero esta vez en función de la percepción que tiene el consumidor sobre su riesgo de mortalidad. Daily et al. (2008) comparan el bienestar del consumidor con y sin mercado de life settlements incorporando un modelo dinámico sobre reclasificación de riesgos -es decir, el riesgo del tomador de sufrir un drástico aumento en las primas a pagar a causa de un deterioro en su estado de salud-. Normalmente este riesgo se soluciona mediante la contratación de seguros que permitan el pago de primas *front-loaded*[5] (o primas niveladas). Sin embargo, la creación de un mercado secundario permite al individuo la opción de vender su póliza y ello supone que el esfuerzo realizado durante los primeros años -es decir, el pago de primas superior al riesgo actuarial- se vea desperdiciado en caso de vender la póliza. Además, incorporan también en el modelo la posibilidad de pérdida del motivo herencia por parte del individuo. Fang y Kung (2010) se inspiran en este último modelo para analizar además el efecto de los life settlements sobre el mercado primario de seguros de vida. Zhu (2009), en su modelo, incorpo-

[5] De hecho, Hendel y Lizzeri (2003) presentan un modelo de comparación de bienestar del consumidor con y sin la opción de contratar estas primas *front-loaded*. Por lo que el modelo de Daily et al. (2008) es una ampliación de éste, con la introducción del mercado de life settlements.

ra el concepto de utilidad así como de información asimétrica, y concluye que el mercado secundario sí que mejora el bienestar de los consumidores, siempre que no exista información asimétrica y que los costes de transacción no sean excesivos. Gatzert et al. (2009), en cambio, se fija más en los efectos del mercado secundario sobre el asegurador, que deja de percibir las ganancias derivadas del rescate.

1.3. Objetivos de la tesis

Es en la tercera categoría de trabajos, descrita en el anterior apartado, que iba encaminada inicialmente la tesis doctoral que presentamos. Nuestro objetivo inicial se basaba en el análisis del comportamiento de un agente decisor en el mercado secundario de pólizas de vida. Con el tiempo, viendo las posibilidades que ofrecía el mercado, también vimos oportuno centrarnos en el producto desde la perspectiva del inversor. A diferencia del comportamiento del consumidor que viene determinado por múltiples factores personales y de mercado, la decisión del inversor viene motivada sobretodo por los riesgos inherentes a la póliza, especialmente el riesgo de longevidad y es este riesgo el que analizaremos en detalle.

Desde el punto de vista del consumidor, si la regla de decisión no depende en su totalidad de las ganancias dinerarias que pudiera llegar a obtener por la venta de su póliza, nuestro análisis debe pasar entonces por el estudio de las ganancias (o pérdidas en su caso) en su bienestar personal. En Economía, el bienestar de los individuos se mide a través del concepto de utilidad, en nuestro caso, no obstante, este bienestar viene determinado por flujos probables futuros de utilidad sobre el consumo y sobre la herencia y por tanto tenemos que hablar más concretamente de utilidad esperada. Por eso en este trabajo proponemos el desarrollo de unos modelos económicos basados en la teoría de la utilidad esperada que permitan determinar si la decisión de vender la póliza de vida resulta óptima o no: si el tomador de un seguro de vida maximiza su utilidad esperada con la venta de su póliza entonces vender es óptimo; en caso contrario, mejor no vender. Como el mercado nos ofrece dos productos -los viaticals y los life settlements-, hemos creado dos modelos diferentes.

El primero de ellos se encuadra dentro del mercado de los viaticals. Al ser la vida residual máxima de dos años, el horizonte temporal del agente es reducido, por lo que el modelo puede ser construido y resuelto en tiempo discreto. La resolución del problema de optimización que plantea el modelo se llevará a cabo mediante programación dinámica y el método de Lagrange, teniendo en cuenta las correspondientes condiciones de Kuhn-Tucker. Considerando una serie de factores tales como la riqueza del agente, la cuantía de su seguro, la gravedad de su enfermedad, su voluntad por dejar legado a sus herederos, la tasa de descuento intertemporal o el precio de venta de su póliza de vida, entre otros, nos proponemos averiguar qué le resulta más óptimo al tomador, si vender o no su póliza y, en caso afirmativo qué proporción vender y cuando hacerlo.

El segundo modelo se centra en la contratación de los life settlements. El horizonte temporal es mucho mayor puesto que el asegurado no es enfermo terminal sino que presenta un estado de salud deteriorado y por tanto unas oportunidades de supervivencia mayores. Esta es la razón principal por la que el modelo no se planteará y resolverá en tiempo discreto sino que se hará en tiempo continuo. Por otro lado, la metodología utilizada será también diferente; el problema de optimización se resolverá mediante técnicas de la teoría del control óptimo. En concreto, trabajaremos con el Principio del Máximo de Pontryagin (ver Pontryagin et al. (1962)) y la programación dinámica mediante la construcción de la denominada ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Para la resolución de nuestro problema trabajaremos con ambas técnicas. Como para el anterior modelo, veremos que la decisión óptima del tomador depende, además del precio recibido por la venta de la póliza de vida, del comportamiento de múltiples factores como su riqueza, el tamaño de su póliza, el estado de salud del asegurado, su voluntad por dejar herencia a los beneficiarios o la tasa de preferencia temporal.

A fin de obtener soluciones explícitas para el consumidor consideraremos en ambos modelos que las funciones de utilidad tanto para el consumo como para la herencia son de tipo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*, también conocidas como funciones de utilidad isoelásticas). El uso de este tipo de funciones es muy común en los modelos de valoración de preferencias que incorporan consumo. Una función CRRA es una función potencial que se transforma, mediante el uso de la regla de l'Hôpital, en función logarítmica cuando el parámetro de la función converge a 0.

El modelo referente a los viaticals se resolverá considerando unas funciones de utilidad para el consumo y la herencia logarítmicas. Éstas permiten obtener soluciones analíticas interpretables. El modelo referente a los life settlements se resolverá tanto con funciones de utilidad -sobre el consumo y sobre la herencia- potenciales, como con funciones de utilidad logarítmicas. Como veremos, ni las funciones potenciales ni las funciones logarítmicas consiguen llegar a soluciones analíticas pero para ambos casos obtenemos las trayectorias óptimas de las diferentes variables.

Así, a través de estos dos modelos contestaremos al problema que nos planteábamos inicialmente. Pese a que el valor recibido por la venta -o rescate- de la póliza es inferior al valor real de la misma, el tomador opta por vender -o rescatar- debido a que existen múltitud de factores personales y económicos que tienen una influencia directa sobre su decisión final. Por tanto esta decisión no viene influenciada únicamente por el importe económico recibido por la venta del activo, sino que vendrá motivada por el incremento de bienestar que le produce dicha venta.

El comportamiento del consumidor en el mercado secundario de pólizas de vida queda pues definido.

Desde el punto de vista del inversor, nos preguntamos qué factores pueden influir en el inversor en su decisión de invertir en life settlements. Básicamente, el inversor se fija en los riesgos de inversión. En el caso del life settlement o del viatical, el riesgo más importante es el de longevidad, es decir, una vez se ha realizado la inversión en la póliza de vida, que el asegurado viva por encima de lo que se había estimado inicialmente y por tanto, que el beneficio por muerte se acabe cobrando más tarde de lo previsto y que se deba pagar un mayor número de primas. Por eso hemos querido analizar en detalle este riesgo y ver en qué medida el inversor puede perder rentabilidad por año de más vivido por el asegurado. Cada póliza, dependiendo de sus características, conlleva un riesgo diferente, así que el inversor puede decidir invertir en aquella póliza menos arriesgada.

A diferencia de antes, el análisis no pasa por el desarrollo de un modelo de optimización de utilidad esperada. Para definir el riesgo al que se enfrenta el inversor, presentamos una medida de valoración denominada *modified-life extension duration*, formulada por Stone y Zissu (2008) y que nosotros readaptamos. Con esta medida tratamos de averiguar qué rentabilidad gana o pierde el inversor ante desviaciones de la esperanza de vida del asegurado. De hecho, la *modified-life extension duration* es una adaptación en el campo de los seguros de vida de la duración modificada que se aplica en el campo de las finanzas y por tanto debe corregirse por una segunda medida que denominamos *life extension convexity*. Así, mediante una aproximación de Taylor de segundo orden, obtenemos el porcentaje de variación total del valor del activo ante una modificación de la esperanza de vida del asegurado. Mediante esta medida, el inversor puede conocer el riesgo de longevidad asociado a cada póliza de vida; dependiendo de lo amante o adverso que sea al riesgo, decidirá entre invertir o no hacerlo.

El análisis de este medida nos ha permitido conocer más profundamente el mercado y sus posibilidades de inversión. Por eso analizaremos detenidamente a través de qué vías puede entrar el inversor en el negocio y repasaremos todos los riesgos asociados a la inversión en life settlements y en viaticals.

1.4. Estructura de la tesis

Esta tesis doctoral presenta la siguiente estructura. En el Capítulo 2 se presenta el mercado y qué partícipes intervienen en él, describimos el proceso de contratación del producto así como los beneficios que se obtienen de la compra/-venta de la póliza, tanto para el tomador como para el asegurador (nos referiremos siempre, en este capítulo, al life settlement aunque toda descripción y valoración también es válida para el mercado de viaticals). Destacamos los aspectos fundamentales que deben tenerse en cuenta para llevar a cabo una valoración del producto: la edad del asegurado y su esperanza de vida, el rendimiento mínimo requerido por el inversor, las primas y el capital asegurado de la póliza así como los costes ligados a la operación (asociados, básicamente, a la participación en la operación de intermediarios, como agentes de seguro, brókers, actuarios o examinadores médicos). Seguidamente, se propone una valoración del life settlement. El valor obtenido se compara con el valor de rescate -esto es, el valor que ofrece la entidad aseguradora al titular de la póliza por la rescisión de su contrato- así como con el valor real de la póliza, es decir, aquel valor actualizado que obtendría el titular en caso de mantener su póliza de vida en activo hasta el fallecimiento del asegurado. Según Vadiveloo et al. (2005) como el valor real de la póliza supone siempre el mayor importe monetario para el tomador de la póliza, la mejor opción para éste es mantenerla activa hasta su vencimiento. El análisis que propone Vadiveloo et al. (2005) presenta, como veremos, algunos inconvenientes pero nos es muy útil para justificar los modelos presentados en los capítulos 3 y 4. Y es que la decisión entre vender o no la póliza en el mercado secundario no depende del líquido obtenido por el activo con una u otra opción, sino de la utilidad que le reporta al propietario de la póliza cada una de las opciones.

Por esta razón, en el Capítulo 3 se presenta un modelo económico cuyo propósito es determinar si al tomador de una póliza de vida le reporta mayor utilidad vender su póliza o si por el contrario, le es más beneficioso no hacerlo. La venta de la póliza se realiza mediante la contratación de un viatical. Esto quiere decir que consideraremos que el asegurado, que a su vez coincide con la figura del tomador, presenta una enfermedad severa y, por consiguiente, una esperanza de vida muy pequeña, resultando una vida residual máxima de dos años. Dado el reducido horizonte temporal de planificación del consumidor, el modelo se resuelve en el campo discreto. Una vez planteado y resuelto, se realiza un ejemplo numérico. Partiendo de unos datos de referencia iniciales, se comprueba si la contratación de un viatical aumenta la utilidad del consumidor con respecto a la no contratación. Si se da el caso, se estudia cuándo es mejor contratar el viatical y qué cantidad de póliza debe venderse. Por último, se realiza un análisis de sensibilidad, partiendo de los mismos datos de referencia vamos modificando algunas de las variables asumidas: del consumidor, de la póliza y del mercado. De esta manera, se comprueba cuanto de sensible es la decisión del tomador ante desviaciones adversas de algunas variables externas.

El Capítulo 4 es similar al anterior en el sentido que también propone un modelo de utilidad esperada que determina si el consumidor debe o no vender su póliza de vida, pero esta vez mediante la contratación de un life settlement. El objetivo es el mismo, sin embargo las consideraciones para poder vender la póliza son diferentes sobre todo porque la esperanza de vida que puede presentar el tomador y asegurado es mucho mayor. Por eso, no adoptaremos las técnicas de optimización del Capítulo 3. Este modelo se planteará y resolverá en el campo continuo utilizando la programación dinámica (ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman) y el Principio del Máximo de Pontryagin. Al igual que en el Capítulo 3, también se elabora un ejemplo numérico y un análisis de sensibilidad con el fin de ilustrar las implicaciones económicas del modelo.

El Capítulo 5 se centra en la inversión en life settlements y en el consiguiente riesgo de longevidad que se asume al invertir en este tipo de activos (un estudio análogo podría realizarse para los viaticals). En primer lugar se revisan las diferentes vías a través de las cuales un inversor puede participar en el mercado secundario: compra directa de pólizas, compra de títulos garantizados por life settlements (básicamente bonos) o contratación de derivados de life settlements. Además, se describen todos los riesgos que lleva consigo la inversión en life settlements. Entre todos ellos, destaca el riesgo de longevidad y por eso, seguidamente, lo pasamos a analizar en detalle. Nos basamos en Stone y Zissu (2008) y en su nueva técnica de medición: la denominada *life extension duration*. Sin embargo, nosotros derivamos este riesgo de longevidad a partir de la valoración del life settlement realizada en Vadiveloo et al. (2005) que es diferente de la valoración utilizada en Stone y Zissu (2008). Se realiza, al igual que en los dos capítulos anteriores, una ilustración numérica.

Por último, en el Capítulo 6, se recogen las principales conclusiones y aportaciones de la investigación.

De ahora en adelante, se asumirá que tomador y asegurado coinciden en la misma persona, por lo que casi siempre hablaremos del tomador para referirnos al agente decisor que desea vender su póliza de vida.

Capítulo 2

El mercado de viaticals y de life settlements: una visión global

2.1. Introducción

En este segundo capítulo hemos querido realizar una descripción completa del mercado secundario de pólizas de vida para entender mejor su funcionamiento.

Las primeras transacciones de compra/venta de pólizas de vida no se conocían como life settlements sino como viatical settlements. El mercado de los viaticals surgió a principios de los años 80 a raíz de la epidemia del SIDA. Las personas afectadas por el virus debían hacer frente a costosos controles médicos y, a falta de suficientes recursos económicos, debían encontrar nuevas formas de financiación. A falta de liquidez el seguro de vida resultaba ser un buen activo para ser vendido. Por otro lado, el SIDA era una enfermedad poco conocida y los avances médicos eran escasos así que estos individuos presentaban en los años 80 pocas opciones de recuperación y una esperanza de vida muy reducida lo que hacía que sus pólizas fueran una inversión atractiva y segura desde el punto de vista del inversor. Con el tiempo, las investigaciones médicas fueron avanzando, permitiendo un alargamiento de la vida de los afectados; los inversores empezaron a generar pérdidas y el mercado de viaticals empezó a perder popularidad. Así, la industria tuvo que adaptarse generalizándose a otro tipo de enfermedades, de manera que hoy en día son susceptibles de contratar un viatical aquellos asegurados diagnosticados con una enfermedad terminal y/o que presenten una vida residual máxima de dos años (ver Sanghani (2009)).

No es hasta principios de los 90, cuando aparece el mercado de los life settlements. El funcionamiento es idéntico al de los viaticals si bien se centra en aquellos asegurados que presentan un deterioro en su estado de salud, es decir, asegurados mayores de 65 años cuya esperanza de vida se ha reducido. No queda claro aún cuál es exactamente la esperanza de vida máxima con la que puede llegar a contratarse un life settlement. Coventry First, la mayor entidad compradora de life settlements, anuncia que la esperanza de vida que debe tener el asegurado debe estar entre los dos y veintiún años[1]. Otros, como Braun et al. (2011), fijan el intervalo entre dos y doce años. En cambio, Vadiveloo et al. (2005) y Modu (2008) entre otros coinciden en que esta esperanza de vida se encuentra entre los dos y quince años.

En resumen, un life settlement/viatical es aquella transacción mediante la cual un titular de seguro de vida vende de forma anticipada -antes de su vencimiento- su póliza a un tercero, en general, una compañía o proveedor de life settlements, estando el asegurado enfermo. El titular recibe liquidez inmediata por su póliza: una cantidad superior al valor de rescate e inferior al beneficio por muerte pactado en el contrato; a ésta cantidad la denominaremos *Life Settlement Value* (en adelante, *LSV*) o, en su caso *Viatical Settlement Value* (en adelante, VSV). De esta manera, el titular se beneficia por el hecho de obtener una cantidad superior a la que recibiría si rescatase, una cantidad especialmente importante en una época en la que aumenta su dependencia y sus necesidades de cuidado. A cambio, este titular le transfiere al proveedor de life settlements todos los derechos de su póliza. Esto significa que el proveedor no sólo pasa a ser el nuevo propietario de la póliza si no también el nuevo beneficiario y por ello deberá cargar con todas las primas pendientes de pago y cobrará el beneficio por muerte en el momento de fallecer el asegurado.

Los proveedores de life settlements, con licencia especial en el estado donde tiene lugar la operación de compra/venta, son los únicos entes legalmente autorizados para comprar pólizas de vida. Éstos pueden comprar con recursos propios y para su propia cartera, jugando un papel de inversor final, o bien pueden financiarse a través de inversores interesados en el mercado -normalmente, grandes entidades financieras-. En tal caso, los proveedores actuarán como intermediarios entre el titular y el inversor final. En general, ésta segunda opción es más común. Sea como sea, es el proveedor de life settlements el responsable de calcular el

[1] http://www.coventry.com/coventry-first/life-settlements/life-settlement.asp (14/09/2011)

LSV o el VSV; el titular de la póliza después de oír la oferta, decide si vender o no y los inversores determinan, en base al precio y las posibilidades de generar rendimientos, si invertir o no.

La peculiaridad del viatical o del life settlement como activo de inversión reside en el cobro de una cantidad conocida, el beneficio por muerte, pero una fecha de cobro estocástica, por lo que el mercado es muy vulnerable al riesgo de longevidad. Cuanto menos viva el asegurado después de realizarse la transacción, mayor rendimiento obtendrá el inversor puesto que menor número de primas habrá pagado y recibirá el beneficio por muerte con anterioridad a lo previsto. De lo contrario, si el asegurado enfermo vive finalmente por encima de su esperanza de vida, el inversor no obtendrá el rendimiento esperado pudiendo incluso llegar a generar pérdidas. De ahí que el cálculo de la esperanza de vida por evaluadores médicos sea fundamental.

De hecho, el life settlement y el viatical son sólo una parte del mercado emergente de longevidad/mortalidad. Dicho mercado presenta hoy en día un gran potencial de crecimiento y un aliciente para los inversores: los activos que ofrece se caracterizan todos por la misma naturaleza, varían en función de una tasa de supervivencia/mortalidad determinada y no en función de los riesgos típicamente atribuibles a los activos tradicionales. Se trata de activos totalmente incorrelacionados con los activos financieros tradicionales que normalmente componen una cartera. Cowley y Cummins (2005) por ejemplo repasan algunos de los activos que definen el mercado de longevidad, en particular aquellos derivados de la titulización de productos del mercado primario.

Podemos dividir el proceso de contratación de un life settlement en dos etapas. La primera tiene que ver con la operación de compra/venta de la póliza de vida; la segunda hace referencia a la inversión en life settlements que realizan tanto inversores institucionales (bancos de inversión, entidades aseguradoras, fondos de cobertura (*hedge funds*), fondos de inversión, etc) como inversores individuales.

El presente capítulo se estructura de las siguiente manera: en el apartado 2.1 se describe cada uno de los partícipes que intervienen en el proceso de compra/venta de la póliza de vida y en el proceso de inversión. Seguidamente, en el apartado 2.2 se describen ambos procesos. En el apartado 2.3 se enumeran los beneficios que aporta la contratación de los productos, tanto desde el punto de vista del tomador de la póliza, como desde el punto de vista del inversor. Antes de entrar a presentar una posible valoración de uno de los dos productos, el life settlement, hemos querido resumir en el apartado 2.4, las principales variables a tener en cuenta para su valoración. La valoración presentada en el apartado 2.5 es la propuesta por Vadiveloo et al. (2005) que presenta algunos inconvenientes que hemos resumido seguidamente, en el apartado 2.6.

2.2. Partícipes

- Partícipes en la compra/venta:

    - Tomador, titular o propietario: Es quién contrata la póliza de vida y como tal dispone del derecho legal de nombrar al beneficiario, cambiarlo o rescindir el contrato. También tiene el derecho de vender su póliza. Generalmente, tomador y asegurado coinciden en una misma persona. En este trabajo consideraremos que siempre coinciden.
    - Asegurado: Individuo cuya vida está asegurada por una póliza de vida.
    - Beneficiario (inicial): No tiene ningún rol ligado a la venta de la póliza, sin embargo, cabe nombrarlo por desaparecer su figura en caso de contratar un life settlement o un viatical y porque consigo va asociado el concepto de *insurable interest* o interés asegurado[2]. Se trata de una condición fundamental en el momento de contratar un seguro de vida que desaparece si dicho seguro se vende a un tercero. No es requisito que el nuevo beneficiario tenga un interés -tanto familiar como económico- por la vida del asegurado.
    - Agente: Actúa como representante de su cliente, es decir, el tomador de la póliza y juega un papel de intermediario entre éste y el bróker.
    - Bróker: Debe tener una licencia específica para trabajar en el estado donde tiene lugar la transacción. Representa los intereses del propietario de la póliza de cara al proveedor de life settlements. Su tarea principal es la de ofrecer a dicho propietario la mejor oferta por su póliza de entre una amplia variedad de proveedores.

[2]Al contratar un seguro de vida, si tomador y asegurado no coinciden en una misma persona, el beneficiario de una póliza de vida debe: (1) tener interés familiar por el asegurado, es decir, algún parentesco con el asegurado (por sangre o por ley) o (2) tener algún interés económico en que el asegurado se mantenga vivo y sano.

- Proveedor/ Compañía de life settlements: Es el comprador inicial de la póliza. Garantiza que tanto la venta como toda la documentación se ajusten a la regulación estatal pertinente. Puede quedarse como inversor del título, puede asignar como beneficiarios a otros inversores o puede presentar la póliza a un emisor en virtud de un nuevo acuerdo. Al igual que el bróker, debe tener una licencia específica en el estado en que se emite el viatical o life settlement para poder realizar la compra de la póliza.

- Partícipes en la inversión:

  - Inversor: Es el comprador en última instancia de la póliza de vida. Puede ser tanto una entidad como un particular.
  - Entidad Emisora o *Special Purpose Vehicle* (en adelante, SPV): Entidad creada con el único propósito de comprar viaticals o life settlements, emitir títulos garantizados por éstos (*Life Settlement Backed Securities*) y gestionar los activos de los inversores. Se trata de una entidad subsidiaria con estructura independiente a la de la entidad principal, para evitar poner en riesgo su solvencia.
  - *Collateral manager*: Responsable de escoger aquellas pólizas más adecuadas que serán posteriormente adquiridas por la entidad inversora. Su elección tiene que ser conforme al criterio de selección de pólizas de la entidad.

- Otros partícipes:

  - Examinador(es) médico(s): Realiza(n) revisiones sobre el estado de salud e informes sobre el perfil de mortalidad del asegurado. Este perfil de mortalidad contiene las condiciones médicas del asegurado así como su esperanza de vida.
  - *Tracking agent*: Responsable de contactar con el asegurado o sus representantes para controlar el estado de salud del asegurado.
  - Actuarios: Determinan la tabla de mortalidad apropiada para la transacción, evalúan los informes de los médicos y colaboran con la entidad emisora en la determinación del valor de liquidación de los life settlements.

- Auditores: Proporcionan ayuda sobretodo en cuanto a las implicaciones fiscales que supone la adquisición de life settlements, diferentes en cada estado y poco transparentes aún.
- Entidad aseguradora: Se le debe notificar la transferencia de propiedad de la póliza que emitió para que pueda ofrecer información y facilitar así la transacción y el cobro del beneficio por muerte.

2.3. Proceso de contratación

A continuación, se describe el proceso de contratación de un life settlement, si bien el proceso de contratación para un viatical es idéntico.

El proceso se inicia con la necesidad del tomador de una póliza de vida por obtener liquidez. Contacta con su agente para estudiar la posibilidad de vender su póliza en el mercado secundario. El agente contacta luego con un bróker. En este punto, el tomador de la póliza debe facilitar al bróker una serie de documentos relacionados con el estado de salud del asegurado (por ejemplo, últimos informes médicos) y con el seguro de vida (características tales como las primas a pagar, su periodicidad, el beneficio por muerte o el valor de rescate). Una vez recibida toda la información, el bróker envía el historial médico del asegurado a varios médicos independientes que estimarán una esperanza de vida. Normalmente, se pide la opinión a dos o más examinadores médicos para asegurar una correcta estimación. Cuando el bróker posee toda la información referente a la póliza, al estado de salud del asegurado, a su esperanza de vida y todos los documentos firmados por el propietario de la póliza, se comprueba que no existan fraudes por parte de ningún partícipe y se procede a la búsqueda de algún comprador interesado en la póliza. Para ello, el bróker envía la oferta de venta a varios proveedores; el precio más elevado será el escogido por el tomador y su agente.

Cada proveedor realizará una evaluación de la póliza como producto de inversión, sobre su viabilidad y rentabilidad. Esta evaluación normalmente encaja con los requisitos, con la estrategia de inversión y con los criterios de selección de pólizas del inversor -en general, una gran entidad financiera- que le comprará al proveedor carteras de life settlements. De hecho, en ocasiones, es el inversor quién realiza directamente el proceso de evaluación y selección y no el proveedor, mediante la figura de un *collateral manager*. Antes de tomar una decisión sobre la compra o no de la póliza, el proveedor puede comunicarse con el bróker para aclarar informaciones y para comprobar qué ofertas han realizado los demás proveedores de manera que pueda ajustar su propia oferta.

En caso de decidir invertir en la póliza, el proveedor comunicará al bróker un precio (LSV) así como el porcentaje sobre el mismo en concepto de comisión para el agente y para el bróker. Se inicia un proceso de subasta, en el que el titular y su agente valoran todas las ofertas recibidas, escogen la mejor de entre ellas y esperan contra-ofertas. Escogida finalmente una oferta, se informa al proveedor en cuestión, que a su vez procederá a la elaboración del contrato de life settlement. El contrato se envía a una entidad depositaria que lo retendrá hasta que no se realice el pago del LSV al titular.

Mientras, la entidad inversora realiza un documento de verificación, junto con especialistas independientes -actuarios, auditores, *tracking agent*, etc- para comparar la información recibida con anterioridad, con la información actual y para comprobar posibles errores. Se debe comunicar a la entidad aseguradora la voluntad de uno de sus clientes de vender su póliza de vida.

La entidad aseguradora debe entonces proceder al cambio de tomador y de beneficiario y elaborar un documento de conformidad. Se realiza el pago del life settlement al tomador inicial de la póliza así como de las correspondientes comisiones al agente y al bróker; de manera que la entidad depositaria ejecuta el contrato de life settlement. Se inicia entonces un período de renuncia (entre cinco y quince días), en el que el titular tiene derecho a rescindir el contrato de life settlement. Transcurrido el período, la entidad inversora paga al proveedor el precio por la póliza.

Llegados a este punto, la entidad inversora o inversor institucional dispone de varias opciones. Con el fin de financiar su compra de pólizas puede optar por la titulización de life settlements y emitir títulos garantizados por life settlements, esto es, los denominados *Life Settlement Backed Securities* que se instrumentan fundamentalmente en bonos. Para llevar a cabo este proceso, se crea una entidad específica denominada SPV.

Por otra parte, si la entidad desea cubrirse del riesgo de longevidad que lleva asociado el life settlement, puede optar por la contratación de derivados de longevidad denominados *Longevity Backed Derivatives.*

A través de todas estas opciones, inversores particulares con menores recursos tienen la posibilidad de participar en el mercado. Una vez completada la transacción, el inversor pasa a ser el nuevo tomador de la póliza o parte de ella y por ello queda obligado a pagar las futuras primas. Cuando el asegurado fallezca, el proveedor recibirá el beneficio por muerte por parte de la entidad aseguradora. Este beneficio por muerte o parte de él será traspasado a cada inversor.

La Figura 2.1 ilustra todo el proceso de contratación del life settlement.

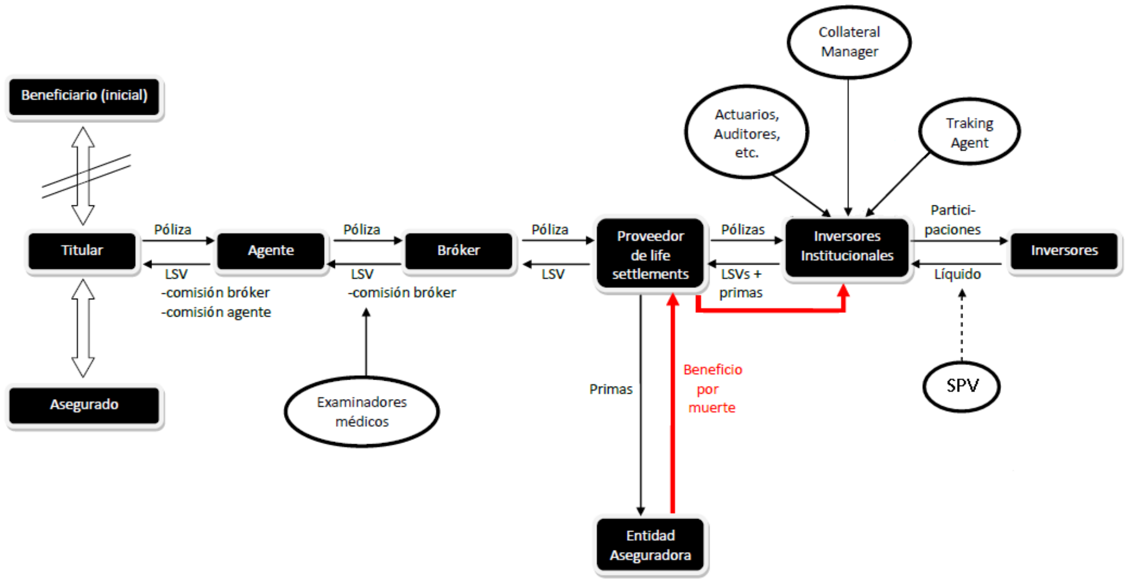

Figura 2.1: Proceso de contratación de un life settlement (adaptación de Modu (2008))

Para conocer más sobre la historia, el proceso de contratación, los partícipes, etc, ver Aspinwall et al. (2009) o Bhuyan (2009).

2.4. Beneficios para las partes

El mercado secundario de seguros de vida no ha estado exento de críticas. Sobretodo, porque no resulta del todo ético invertir en la vida de otra persona. Si además esta persona es enferma terminal, como ocurre en el mercado de viaticals, la inversión parece del todo perversa. Sin embargo, pese a las críticas recibidas, cabe decir que la contratación de un life settlement permite una situación de mutuo beneficio tanto para vendedores como para inversores y por eso creemos que merece la pena prestar especial atención a los beneficios que reporta el producto, tanto para el vendedor de la póliza como para el comprador de la misma.

Por parte del vendedor, existen muchas razones por las que la contratación de un life settlement le puede favorecer. Éstas son algunas de ellas:

- Cubrir los costes de tratamientos médicos o medicamentos no cubiertos por el seguro médico. Ésta es, en efecto, la razón fundamental por la que inicialmente se creó el mercado secundario de seguros de vida. Al inicio, únicamente podían vender su póliza aquellos asegurados afectados por una enfermedad terminal. Si además estos individuos presentaban una situación financiera deficitaria, la oportunidad que les ofrecía el mercado secundario de pólizas de vida les permitía al menos cubrir los costes asociados a la enfermedad y mejorar su calidad de vida en los últimos años de vida.

- Incapacidad para seguir pagando primas. Va ligado con la razón anterior, en el sentido que también viene provocado por una situación económica insuficiente. Antes de rescatar la póliza o incluso cancelarla, se optará por venderla en el mercado secundario, siempre que tanto el asegurado como la póliza cumplan con todos los requisitos.

- La razón por la que se contrató el seguro de vida ha desaparecido. Ocurre sobre todo cuando los beneficiarios dejan de ser económicamente dependientes. Por ejemplo, es habitual que en caso de que los beneficiarios sean los hijos del titular/asegurado, éstos al crecer ya no dependan económicamente de su progenitor y no queden desamparados en caso de fallecer éste. Ocurre también en caso de divorcio, cuando el beneficiario es el cónyuge y el tomador ya no desea ayudarle económicamente tras su fallecimiento. Ocurre finalmente también cuando el beneficiario muere.

- Mejorar las condiciones del seguro. Es decir, vender la póliza y utilizar la cantidad recibida para volver a contratar otro seguro que ofrezca mejores condiciones y más afín a las características del asegurado.

Por parte del comprador, la inversión en life settlements resulta muy atractiva por los siguientes motivos:

- Diversificación de la cartera: los productos de longevidad/mortalidad como el life settlement ofrecen al inversor un tipo de inversión totalmente desvinculado de los mercados financieros y, por tanto, una baja correlación respecto a los activos financieros tradicionales, permitiendo una diversificación de sus carteras. La diversificación, sobre todo en los tiempos actuales, se ha convertido en un requisito fundamental a la hora de invertir.

- Reducida volatilidad/ Crecimiento estable: el life settlement es un activo alternativo con reducida volatilidad y que ofrece al inversor un elevado potencial de rentabilidad. Según Braun et al. (2011), la industria de los life settlements ha sufrido una leve caída entre 2007 y 2009 (debido a la crisis financiera global) pero si analizamos su crecimiento entre 2003 y 2010, las ganancias generadas por los fondos de inversión en life settlements se sitúan en tercer lugar respecto a las generadas por los demás activos. Sólo quedan por encima, las ganancias por fondos de cobertura y por deuda pública. En Rosenfeld (2009) apuntan que las ganancias netas aproximadas de la inversión en estos productos oscilan entre un 9 % y un 14 % anual, con una volatilidad extremadamente reducida dada la incorrelación existente entre la mortalidad/longevidad y los mercados financieros. La reducida volatilidad también viene motivada porque los cambios en la esperanza de vida van apareciendo de forma lenta y además los ajustes en las tablas de mortalidad típicamente utilizadas en los cálculos actuariales sólo se realizan cada siete años (ver Rawson-Mackenzie y Wan (2009)).

- Previsiones de crecimiento del mercado muy optimistas: en Life Insurance Settlement Association (2008) vienen recogidos algunos datos sobre el gran crecimiento que ha vivido la industria durante los últimos años. Por ejemplo, revelan que el número de pólizas vendidas en el mercado secundario ha crecido un 54 % entre 2005 y 2007 (de 2025 a 3138 pólizas) y que el mercado ha sido valorado en 2008 en 16 mil millones de dólares. Blake y Harrison (2008) estiman más en el largo plazo y revelan que el mercado secundario ha crecido de 0 a 13 billones de dólares entre mediados de los 90 y 2005. Según otros estudios como Conning Research y Consulting, Inc (2007) se prevé un crecimiento de entre 90 mil y 140 mil millones de dólares hacia el 2016. Por último, Kamath y Sledge (2005) señalan que estas previsiones de crecimiento favorables son del todo fiables por una serie de razones. En primer lugar, por el mero hecho de que la población vive cada vez más años; y cuanto más longeva es una persona, menos dependientes son sus descendientes y mayor liquidez necesita. La población mayor a 65 años crecerá un 90 % durante los próximos 25 años, así que el número de titulares de pólizas deseosos de vender sus activos también crecerá de forma significativa (Blake y Harrison (2008)). La posibilidad de vender la póliza de vida es una opción cada vez más atractiva. En segundo lugar, porque el declive de los tipos de interés durante estos últimos años ha provocado una reducción importante en el valor real de las pólizas de vida -y por tanto de su rescate- respecto a las expectativas generadas cuando fueron compradas. Por lo que, una vez más, resulta mucho más rentable contratar un life settlement que recurrir al rescate de la póliza. Y por último, porque la industria de los life settlements es cada vez más conocida y es deber de los intermediarios financieros -como los agentes o los brókeres- recomendar estos productos a sus clientes. El producto, a medida que vaya ganando popularidad, se contratará cada vez más.

2.5. Factores determinantes en la valoración

Antes de llevar a cabo la valoración de una póliza, el inversor en life settlements debe considerar algunos aspectos clave, relacionados con la póliza, el asegurado y con sus propósitos en cuanto a obtención de rendimientos. En este apartado, mencionaremos los fundamentales: la edad del asegurado y su esperanza de vida, el rendimiento fijado por el inversor, el tamaño de la póliza (capital asegurado y primas a pagar) y otros costes relacionados con la transacción.

2.5.1. Edad asegurado y esperanza de vida

Las posibilidades de obtener rentabilidad en una transacción vendrán generadas en primera instancia por la edad del asegurado y su esperanza de vida. En cuanto a la edad será como mínimo de 65 años aunque preferiblemente se invertirá en pólizas cuyo asegurado tenga 70 años o más. En cuanto a la esperanza de vida es sin duda el elemento más importante a la hora de determinar el valor de un life settlement ya que fija la duración aproximada del activo, esto es, su vencimiento. En el mercado de los viaticals se ha considerado como principal referente para calcular la esperanza de vida, una vida residual máxima de dos años, mientras que en el mercado de life settlements se ha tenido en cuenta una esperanza de vida acotada entre los dos y quince años. Para valorar la esperanza de vida se tendrán en cuenta aspectos como: la edad, la salud, los antecedentes familiares o los hábitos de vida.

La esperanza de vida se determina por dos o más evaluadores médicos[3]. Para ello, toda la información relacionada con el estado de salud del asegurado debe ser completa y actual y, por eso, sólo se compran pólizas que presenten informes médicos generados durante los últimos 180 días. Y es que podría darse una mejora en el estado de salud del asegurado que un informe antiguo no reflejara, por lo que la valoración de la esperanza de vida quedaría sesgada.

Generalmente, a partir de los informes de salud del asegurado, los diferentes especialistas médicos construyen un multiplicador de mortalidad o factor de recargo. Este factor se crea en base a la comparación entre la salud del individuo y la mortalidad de la cohorte (o población) de referencia. Se escoge una tabla de mortalidad estándar -por ejemplo, la 2001 o 2008 *Valuation Basic Table* (VBT)- y se le aplica el factor para acabar obteniendo la esperanza de vida final. El inversor contrata a más de un especialista médico para garantizar una correcta aproximación de la esperanza de vida. Y es que una mala estimación puede acarrear consecuencias muy desfavorables para el inversor; si el asegurado acaba viviendo por encima de la esperanza de vida, el rendimiento obtenido estará muy por debajo de lo esperado e incluso puede llegar a ser negativo.

La esperanza de vida de un individuo enfermo de edad x la definimos como:

$$\widehat{e}_x = \frac{\sum_{t=1}^{\widehat{t}_x - x - 1} \widehat{l}_{x+t}}{\widehat{l}_x} = \sum_{t=1}^{\widehat{t}_x - x - 1} {}_t\widehat{p}_x, \qquad (2.1)$$

donde las tíldes representan al asegurado enfermo con unas probabilidades de fallecimiento mayores a las del asegurado sano y $\widehat{l}_x$ es el número de supervivientes de una población de referencia (grupo de individuos con estado de salud similar, que se extinguirá a la edad $\widehat{t}_x$) que queda a la edad x. La proporción de individuos que sobrevive a un período define la probabilidad de supervivencia de un individuo de la cohorte en ese período, por lo que el sumatorio de todas las proporciones desde x hasta $\widehat{t}_x$ es equivalente al sumatorio de las probabilidades de supervivencia en ese mismo intérvalo.

[3]En la actualidad, existen cinco entidades especializadas en la determinación de la esperanza de vida para la industria de los viaticals y de los life settlements: 21st Services, American Viatical Services, Examination Management Services, Inc. (EMSI), Fasano Associates y ISC Services (Siegert (2010)).

2.5.2. Rendimiento mínimo requerido

Este segundo factor va directamente ligado con el anterior. La tasa de rendimiento de un inversor en life settlements dependerá del momento de fallecimiento del asegurado: cuanto antes fallezca, mayor será esta tasa. Sin embargo, no basta con obtener cualquier tipo de rendimiento. El inversor, en su estrategia de mercado, fija una tasa mínima por debajo de la cual la compañía de life settlements no comprará. Cuanto más riesgo conlleva la operación (esperanza de vida elevada, rating aseguradora insuficiente o cambios regulatorios previsibles), más elevado es este mínimo requerido y esto se traduce en una valoración a la baja del life settlement.

El rendimiento que acaba obteniendo el inversor equivale a la diferencia entre el beneficio por muerte recibido al vencer la póliza y todos los pagos que se hayan efectuado para mantenerla activa: las primas y los costes de transacción, así como por supuesto el precio pagado por la póliza (LSV).

Por lo general, en el mercado de life settlements la Tasa Interna de Rendimiento (TIR) está entre el 9 % y el 14 % (Houlihan Lokey (2008)).

2.5.3. Tamaño de la póliza: primas y capital asegurado

En la inversión de un life settlement, las primas representan las cantidades que el comprador está dispuesto a pagar, además del LSV, por mantener la póliza en activo mientras el asegurado siga viviendo y el beneficio por muerte es la cantidad que recibirá cuando el asegurado fallezca. Efectivamente, la tasa de rendimiento depende en gran medida del momento en que se produzca el fallecimiento: cuantas primas se acaban pagando y cuando se recibe el beneficio; sin embargo, también hay que tener en cuenta su cuantía.

En los seguros Universal Life, por ejemplo, ni el pago de las primas ni el cobro del beneficio por muerte vienen predefinidos en el contrato, de manera que el inversor debe estudiar cual es el nivel óptimo de primas anuales a pagar para poder cobrar un beneficio por muerte suficiente, en caso de la eventual muerte del asegurado. En otro tipo de seguros, como el seguro vida entera, el inversor debe comprobar que la diferencia entre el capital asegurado y el total de primas pagadas hasta la esperanza de vida del asegurado garantice el rendimiento mínimo requerido.

2.5.4. Otros costes

Además del *LSV* y las primas futuras, la compañía de life settlements deberá pagar otros costes. Éstos tienen que ver mayoritariamente con pagos a todos los intermediarios que participan en la operación, ya sean puntuales -comisiones del agente y del bróker, equivalentes a un determinado porcentaje respecto del *LSV* - ya sean temporales, dependiendo de la duración del activo o de la cartera -pagos a los examinadores médicos, al *traking agent*, etc- ya sean permanentes -pagos a los trabajadores independientes colaboradores con la entidad inversora, por ejemplo, actuarios o *collateral managers*-.

2.6. Valoración actuarial propuesta por Vadiveloo et al. (2005)

En esta sección, nos centraremos en la valoración de tres importantes medidas en el mercado secundario de los seguros de vida: el valor de rescate, el valor intrínseco económico y el valor del life settlement (análogamente podríamos trabajar con el valor del viatical, considerando unas probabilidades de fallecimiento mayores). Para ello, nos basaremos en Vadiveloo et al. (2005) cuyo principal objetivo es comparar estos tres valores y determinar qué solución -rescatar, vender o conservar la póliza- es óptima para el asegurado que se esté planteando rescindir su contrato de seguro de vida.

A la hora de hacer una valoración actuarial, existen dos posibles métodos: el determinista y el probabilístico. A grandes rasgos, el método determinista es aquel que considera un vencimiento de la póliza fijo e igual a la esperanza de vida del asegurado. Es decir, considera que el beneficio por muerte se cobrará en una determinada fecha, momento en el cual además dejarán de pagarse las primas. El método probabilístico permite que la muerte del asegurado pueda ocurrir en cualquier instante y no sólo en la esperanza de vida, mediante la incorporación de probabilidades de fallecimiento. El valor actual actuarial obtenido es la suma de flujos actualizados, ponderados por estas tasas de mortalidad. Para la valoración de un life settlement, se utilizará en este apartado y en la mayor parte de este trabajo el método probabilístico.

Trabajaremos con un seguro vida entera, donde las primas son vitalicias, constantes y pagaderas anualmente y el capital lo cobran los herederos al final del período de fallecimiento del asegurado. Hemos decidido trabajar con un seguro vida entera y no un Universal Life ya que la valoración de éste último a nivel teórico es mucho más incierta. Como ya hemos señalado, el Universal Life es un seguro donde las aportaciones -las primas- se efectúan de forma totalmente arbitraria por parte del titular, en su periodicidad y en su cuantía, dependiendo del capital que se desee asegurar durante un determinado período de tiempo, normalmente un año. De forma que el capital asegurado también acaba siendo una cuantía escogida arbitrariamente por el titular. Por contra, en el seguro vida entera tanto las primas como el correspondiente beneficio por muerte vienen predefinidos en el momento de contratar la póliza de vida.

A continuación, se detallan los cálculos del valor de rescate, del valor intrínseco económico y del valor del life settlement.

2.6.1. Valor de rescate (CSV)

El rescate consiste en la cancelación de la póliza de vida antes de su vencimiento. El valor de rescate es, por tanto, el importe que debe abonar la entidad emisora de esta póliza, la entidad aseguradora, al tomador de la misma, por esta cancelación. La cantidad que se abona se establece en relación con la provisión matemática constituida en el momento de cancelación, aplicando alguna penalización dependiendo de la normativa de cada contrato.

Para obtener el valor de rescate se calcula la provisión matemática. Así, si consideramos un seguro vida entera de capital M, con pago de primas constantes, anuales y de cuantía P, pagaderas hasta el fallecimiento del asegurado de edad x años en el momento de contratar la póliza, el principio de equivalencia actuarial en el inicio del contrato establecería:

$$P\ddot{a}_x = MA_x$$
$$P \cdot \sum_{t=0}^{t_x-x-1} (1+r)^{-t} \cdot {}_tp_x = M \cdot \sum_{t=0}^{t_x-x-1} (1+r)^{-(t+1)} \cdot {}_{t/}q_x$$

donde r es el tipo de interés técnico, t la temporalidad, t_x el infinito actuarial de un individuo sano, ${}_tp_x$ la probabilidad de supervivencia del asegurado entre x y $x+t$ y ${}_{t/}q_x$ la probabilidad del asegurado de morir entre $x+t$ y $x+t+1$. Los símbolos A_x y $\ddot{a}_x$ denotan el valor actual actuarial de un seguro unitario (vencido) y de una renta unitaria (anticipada) respectivamente.

Si el asegurado decide rescatar la póliza transcurridos k años desde la contratación de la misma, el valor de la provisión matemática, en ese momento, vendría dado por:

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= MA_{x+k} - P\ddot{a}_{x+k} \\
&= M \cdot \sum_{t=0}^{t_x-x-k-1} (1+r)^{-(t+1)} \cdot {}_{t/}q_{x+k} - P \cdot \sum_{t=0}^{t_x-x-k-1} (1+r)^{-t} \cdot {}_tp_{x+k}
\end{aligned}
$$

siendo ${}_kV_x$ la provisión matemática. Obsérvese que hemos calculado ${}_kV_x$ por el método prospectivo, es decir, como la diferencia entre las obligaciones pendientes del asegurador (capital asegurado) y las obligaciones pendientes del asegurado (primas futuras).

El valor de rescate es igual a esta provisión matemática y, generalmente las entidades aseguradoras aplican al importe resultante una serie de penalizaciones así como gastos de administración y adquisición. Su cuantía depende de la normativa de cada contrato. Sin embargo, Vadiveloo et al. (2005) no tiene en cuenta ninguna penalización y calculan el CSV directamente a partir del valor de la provisión matemática:

$$
CSV_{x+k} =_k V_x, \tag{2.2}
$$

donde CSV_{x+k} está valorado en el momento en que el asegurado tiene $x+k$ años.

Las bases técnicas utilizadas en el estudio, en el cálculo del CSV, son:

- Tabla de mortalidad: *1980 Commissioner's Standard Ordinary* (1980 CSO).
- Tipo de interés aplicado: 5 %.

La tabla 1980 CSO, o más recientemente la tabla 2001 CSO, es la tabla de mortalidad estándar para calcular las reservas obligatorias que debe poseer cualquier entidad aseguradora y contiene los márgenes necesarios para garantizar la solvencia de cada entidad. Respecto al tipo de interés, éste se fija en el momento de contratar la póliza (cuando el asegurado tiene x años).

Cabe decir que las probabilidades de fallecimiento/supervivencia no se modifican nunca.

De acuerdo con Bacinello (2003), la ley estadounidense establece que el CSV asociado a una póliza de vida debe ser menor a la prima única neta que se necesitaría para financiar a día de hoy los beneficios futuros, es decir, la provisión de la póliza calculada de forma prospectiva de un seguro contratado a prima única. La ecuación (2.2) sin embargo establece que $CSV_{x+k} = {}_kV_x$ (a prima periódica), por lo que consideramos que faltaría realizar algun ajuste sobre CSV_{x+k}. Por ejemplo, Tsai et al. (2002) y Gatzert et al. (2009) calculan el valor de rescate para un individuo de edad $x+k$ e infinito actuarial ω como:

$$CSV_{x+k} = \left(0,8 + 0,2\frac{k}{\omega - x}\right) \cdot_k V_x \text{ , con } k = 1, ..., \omega - x,$$

ecuación que permite obtener un valor menor a la provisión matemática.

Según el contrato y la entidad que garantice la cobertura del seguro puede darse un valor de rescate nulo. En este caso, la póliza de vida no podría venderse nunca en el mercado secundario por lo que, en este trabajo, se considerará siempre que $CSV > 0$.

2.6.2. Valor intrínseco económico (IEV)

Se trata de un nuevo concepto en la literatura actuarial, propuesto por primera vez en Vadiveloo et al. (2005). Es el valor real de la póliza a día de hoy en caso de que su propietario la mantenga intacta hasta la muerte del asegurado, teniendo en cuenta que este asegurado presenta una mortalidad mayor a la prevista. Es decir, es la provisión matemática calculada en el apartado anterior pero teniendo en cuenta que el asegurado no es un individuo sano y, por tanto, sus probabilidades de fallecimiento han sido multiplicadas por un determinado factor de recargo.

Así, el IEV equivale a la diferencia entre el valor actual actuarial del beneficio por muerte y el valor actual actuarial de las primas pendientes de pago, teniendo en cuenta una carga del 20 % sobre las primas futuras en concepto de gastos de gestión:

$$IEV_{x+k} = M\widehat{A}_{x+k} - 1,2P\widehat{\ddot{a}}_{x+k}.$$

donde IEV_{x+k} está valorado en el momento en que el asegurado tiene $x+k$ años y donde los términos representados con una tilde simbolizan aquellos conceptos afectados por unas probabilidades de fallecimiento mayores. Como el IEV equivale al valor real de la póliza, el estado de salud del asegurado también tiene que quedar bien reflejado.

Las bases técnicas utilizadas en el cálculo del IEV son:

- Tabla de mortalidad utilizada: *1975-80 Basic Mortality Table* (BMT).
  La *1975-80 BMT* es la tabla de mortalidad real para una determinada población, es decir, no contiene ajustes, ni positivos ni negativos, para aumentar o disminuir las probabilidades de vida o muerte. Para reflejar un estado de salud perjudicado, las probabilidades de fallecimiento se multiplican por un factor de recargo. El factor de recargo varía en función de este estado de salud y es igual a 5, 10, 15 y 20. Cuanto más perjudicada está la salud del asegurado, mayor es este factor.

- Tipo de interés aplicado: 5 %.

2.6.3. Valor del life settlement (LSV)

El LSV es el valor que recibe el tomador de la póliza por la venta de la misma a un proveedor o compañía de life settlements. El asegurado de esta póliza debe presentar un estado de salud deteriorado.

Dada la poca experiencia de la industria de los life settlements, la información que disponemos en la actualidad y que permitiría realizar una valoración más o menos aceptable es aún muy escasa. Por ejemplo, se requieren todavía esfuerzos para completar la regulación en cuanto a fiscalidad, tipos de interés asumibles, comisiones máximas a favor de la entidad, etc. Además, la escasa regulación que existe hoy en día resulta ambigua porque difiere entre Estados.

Así pues, nos quedamos con la propuesta de Vadiveloo et al. (2005) que, como veremos, ha recibido numerosas críticas pero es una de las valoraciones más completas realizadas hasta la fecha.

Los supuestos actuariales que propone el estudio son:

- Tabla de mortalidad: *1975-80 Basic Mortality Table*. Las probabilidades de mortalidad, igual que para el IEV, se multiplican por un factor de recargo

(5, 10, 15 o 20) que varía en función de la gravedad del estado de salud del asegurado.

- Tipo de interés aplicado: 8 %.
- Recargo por gastos de gestión sobre las primas: 20 %.
- Comisión sobre el capital asegurado: 4 %.
- Impuesto sobre el beneficio estimado a la muerte del asegurado: 35 %.

El tipo de interés aplicado para el cálculo del LSV (8 %) es mayor al utilizado para el IEV o el CSV (5 %). La posible rentabilidad del inversor en life settlements también viene generada por la adopción de un tipo de interés más elevado.

La valoración del LSV está basada en la del IEV, es decir, se parte de la diferencia entre el valor actual actuarial del beneficio por muerte y de las primas futuras (con su correspondiente recargo por gastos de gestión del 20 %) y se resta el ajuste fiscal y la comisión sobre el capital asegurado del 4 %. Observar que esta comisión del 4 % únicamente se aplica el primer año, a diferencia del recargo por gastos de gestión sobre las primas que se imputa año a año mientras viva el asegurado. También se representan con una tilde los símbolos que se refieren a valoraciones basadas en una mortalidad perjudicada. El LSV y el IEV utilizan ambos las mismas probabilidades de fallecimiento perjudicadas.

$$\begin{aligned} LSV_{x+k} &= IEV_{x+k} - Tax \cdot \widehat{A}_{x+k} - 0,04 \cdot M \\ &= (M - Tax) \cdot \widehat{A}_{x+k} - 1,2 \cdot P\widehat{\ddot{a}}_{x+k} - 0,04 \cdot M \end{aligned} \tag{2.3}$$

LSV_{x+k} es el valor del life settlement cuando el asegurado tiene $x + k$ años y Tax es el impuesto sobre el beneficio por muerte.

Vemos que el impuesto sobre el beneficio por muerte queda repercutido sobre el tomador de la póliza a pesar de que éste no vaya a cobrar dicho importe.

Tax es equivalente a:

$$Tax = 0,35 \cdot (M - 0,04 \cdot M - LSV_{x+k} - \widehat{e}_{x+k} \cdot 1,2 \cdot P) \tag{2.4}$$

donde $\widehat{e}_{x+k}$ es la esperanza de vida del asegurado a la edad de $x + k$ años que hemos definido en la ecuación (2.1).

Sustituyendo (2.4) en (2.3):

$$\begin{aligned} LSV_{x+k} = [1 - 0,35 \cdot (M - 0,04 \cdot M - LSV_{x+k} - \widehat{e}_{x+k} \cdot 1,2 \cdot P)] \cdot \widehat{A}_{x+k} \\ -1,2 \cdot P\widehat{\ddot{a}}_{x+k} - 0{,}04 \cdot M \end{aligned}$$

y aislando LSV_{x+k}:

$$LSV_{x+k} = \frac{(0,664 \cdot M + 0,42 \cdot P\widehat{e}_{x+k}) \cdot \widehat{A}_{x+k} - 1,2 \cdot P\widehat{\ddot{a}}_{x+k} - 0,04 \cdot M}{1 - 0,35 \cdot \widehat{A}_{x+k}} \tag{2.5}$$

Es cierto que no podemos generalizar esta valoración. En realidad, el valor del life settlement varía mucho dependiendo del Estado en que tenga lugar la transacción y de la compañía que compre la póliza. Sin embargo, sí es cierto que la operación de compra/venta de la póliza en el mercado secundario siempre supone unos elevadísimos costes de transacción que hacen que el mercado no sea aún del todo eficiente. Estos elevados costes de transacción se deben sobre todo a la multitud de partícipes que intervienen en la operación, así como a la falta de una regulación clara.

2.6.4. Ejemplo numérico y casos reales

En Vadiveloo et al. (2005) se desarrollan varios ejemplos, para diferentes edades del tomador, diferentes temporalidades y diferentes factores de recargo. Sin embargo, los resultados se presentan en forma de ratio (LSV_{x+k}/CSV_{x+k} y IEV_{x+k}/LSV_{x+k}) ya que la finalidad del artículo es la comparación entre las tres diferentes medidas. En este apartado, las hemos calculado para un caso concreto, siguiendo las mismas bases técnicas y los mismos supuestos que propone el artículo.

A continuación, se muestran las características del asegurado y del contrato (Tabla 2.1).

x	45 años
k	20 años
M	50.000 euros
P	$740,79$ euros
r (CSV-IEV)	$0,05$
r (LSV)	$0,08$
Factor de recargo	5
$\widehat{e}_{x+k}$	5,52 años

Tabla 2.1: Datos de referencia del asegurado y del seguro de vida

En la siguiente Tabla 2.2 se muestran las valoraciones actuariales obtenidas (CSV, LSV y IEV):

CSV_{65}	17.559,98 euros
LSV_{65}	20.323,12 euros
IEV_{65}	32.294,62 euros

Tabla 2.2: Cálculo CSV, LSV y IEV

Los resultados obtenidos evidencian las conclusiones del artículo: el LSV es mayor al CSV pero inferior al IEV. Sin embargo, tanto el CSV como el LSV son precios que el propietario de la póliza podrá obtener a la edad de 65 años, edad actual, mientras que a esa edad, no podrá disponer del IEV porque sólo refleja el valor real de la póliza en ese momento.

Por otra parte el valor obtenido para CSV (aproximadamente el 35 % del beneficio por muerte) es una cantidad excesiva si se compara con el 3 % y 5 % del beneficio por muerte tal y como queda de manifiesto en Life Insurance Settlement Association (2006). Esto se debe al hecho de no haber tenido en cuenta ninguna carga de penalización por la cancelación anticipada de la póliza. Esto deriva además en una diferencia entre el LSV y el CSV muy reducida y, de hecho, según Life Insurance Settlement Association (2006) el LSV suele ser tres o cuatro veces el CSV. En relación al factor de recargo, si por ejemplo lo reduciéramos a 2, obtendríamos un valor de rescate por encima del valor del life settlement: el CSV se mantiene mientras que el LSV se reduce a 10.271,80 euros. El asegurado sigue cumpliendo con todos los requisitos para vender su póliza (su esperanza de vida es casi la mitad de la de un individuo sano) pero le sale más a cuenta rescatar. La realidad demuestra que si bien un individuo puede no vender su póliza en el mercado porque la inversión en ella conlleva muchos riesgos, el LSV siempre es mayor al CSV. Esto nos hace pensar que, seguramente, los supuestos en cuanto a costes de transacción han sido demasiado estrictos.

Life Insurance Settlement Association (2006) presenta diferentes casos reales de venta de la póliza de vida. Entre ellos destacamos por ejemplo:

- Un individuo de 73 años posee un seguro de vida cuyo beneficio por muerte es de 5 millones de dólares. Desea rescindir su contrato pero el valor de rescate establecido cuando la póliza fue emitida es nulo. De manera que decide venderla en el mercado secundario donde le ofrecen por ella 1,1 millones de dólares.
- Un individuo de 83 años paga por su póliza de vida unas primas anuales de 42.321 dólares para asegurar un capital de 1 millón de dólares en el momento de su muerte. El valor de rescate que le ofrece la entidad aseguradora es de 46.567 dólares. En cambio, una compañía de life settlements le ofrece por su póliza 310.000 dólares.
- Un individuo de 76 años posee un capital asegurado de 2,5 millones de dólares. El valor de rescate vinculado a su póliza en ese momento es de 55.544 dólares y el valor del life settlement es de 785.000 dólares.

El valor de rescate y el valor del life settlement obtenidos en la realidad distan mucho de los obtenidos a través de la formulación de Vadiveloo et al. (2005), sobretodo en cuanto al valor de rescate. A través de estos casos se comprueba cómo la contratación de un life settlement es una opción mucho más atractiva.

2.7. Análisis de la propuesta de Vadiveloo et al. (2005) y críticas al estudio

2.7.1. Comparativa de las tres medidas

Según Vadiveloo et al. (2005) el mayor de los tres valores es siempre el IEV. Y es que el LSV es equivalente al IEV menos unos determinados costes de transacción. Por otra parte, a pesar de todos estos costes de transacción, las probabilidades de fallecimiento tanto para el cálculo del LSV como para el cálculo del

IEV han sido multiplicadas por un factor de recargo muy elevado, como mínimo 5. Esto supone la obtención de unos valores CSV muy reducidos, en comparación con los dos otros valores. De forma que, según estos autores, la mejor opción para el propietario de una póliza de vida cuyo asegurado ha sufrido un deterioro en su estado de salud sería mantener su seguro activo hasta el vencimiento. Incluso en caso de necesitar liquidez, el titular de la póliza no debería optar por vender su póliza sino que debería buscar otras fuentes de financiación, como por ejemplo, pedir un préstamo.

Por último, los autores definen una nueva variable, el Valor Económico Perdido (LEV). El LEV equivale a la diferencia entre el IEV y el LSV y por tanto refleja todos los costes de transacción vinculados a la venta de la póliza. Se considera que al vender la póliza en el mercado secundario, este valor se desperdicia. Entre estos gastos encontramos comisiones, impuestos o márgenes de beneficio ligados al inversor.

Por sus elevados costes de transacción, el estudio considera que el mercado de los life settlements es aún ineficiente.

2.7.2. Críticas al estudio

Las conclusiones a las que llega Vadiveloo et al. (2005) son muy criticables. Singer y Stallard (2005) elaboran un extenso trabajo dedicado exclusivamente a refutar todos sus supuestos y planteamientos. En este apartado, comentaremos sólo algunas de estas críticas.

La primera de ellas tiene que ver con el concepto de valor intrínseco económico (IEV). Éste es un valor teórico o de referencia para conocer qué valor tiene una póliza en la actualidad considerando probabilidades de fallecimiento reales (perjudicadas en este caso). No se trata de un valor que percibe el propietario de la póliza, se trata de un valor que percibirán sus herederos en el momento de su fallecimiento, inalcanzable en el momento de su valoración. En cambio, el CSV y el LSV son importes reales que el titular de la póliza puede obtener de forma inmediata en el mercado. Por tanto no podemos comparar el IEV con el CSV y/o el LSV.

Por otro lado, la valoración del CSV no resulta del todo realista. La valoración del CSV se ha llevado a cabo sin tener en cuenta ninguna penalización para el titular de la póliza por el hecho de rescindir su contrato antes de su vencimiento. Hay que señalar que, en Estados Unidos sobretodo, éste valor puede llegar a estar muy por debajo del valor nominal de la póliza o incluso ser nulo. No podemos proporcionar cifras exactas sobre la relación que mantiene el CSV con el valor nominal puesto que depende de la normativa de cada contrato, de cada entidad y de cada estado, pero recordemos que según Life Insurance Settlement Association (2006) dicho valor suele representar en Estados Unidos entre el 3 y el 5 por ciento del beneficio por muerte contratato en la póliza. Por ello, faltaría ajustar el CSV con algún factor de penalización.

En efecto, en Vadiveloo et al. (2005) la decisión entre rescatar, vender o mantener en activo la póliza depende exclusivamente de las cuantías económicas que reporta cada opción. La cuantía más elevada corresponde con la decisión óptima para el tomador de la póliza y, como ya hemos visto, esta decisión nunca será ni rescatar ni vender la póliza en el mercado secundario. Ahora bien, en este trabajo no se han tenido en cuenta en ningún momento otros factores determinantes para el tomador que desea vender su póliza. Es verdad que una de las razones por las que un individuo quiere vender su póliza es la falta de liquidez o de recursos y que esta necesidad también podría ser cubierta por alguna otra fuente de financiación, como el préstamo. Sin embargo, existen muchas otras razones que no pueden ignorarse.

2.7.3. Presentación de un nuevo modelo.

Por todo lo expuesto en el apartado anterior, podemos plantearnos el hecho de que la decisión entre vender o no la póliza de vida venga determinada principalmente por unas preferencias personales y no tanto por el valor económico que reporte una u otra opción. Esta es la principal hipótesis que se pretende defender en esta tesis doctoral y que justifica los Capítulos 3 y 4 que siguen a continuación.

De manera que, en vez de comparar valores, en los Capítulos 3 y 4 se propone la construcción y la resolución de unos modelos económicos de utilidad esperada -para el mercado de los viaticals y para el de los life settlements, respectivamente-, que determinen si resulta óptimo o no vender la póliza y, en caso de venderla, cuando es mejor hacerlo. Ambos modelos difieren en cuanto al número de períodos considerado que coincidirá con el número máximo de años que le queden por vivir al asegurado (o vida residual). Para el mercado de los viaticals, al ser la vida residual máxima permitida de dos años, el modelo se resuelve en tiempo discreto. Para vidas residuales superiores a dos años (mercado de life settlements), trabajaremos en tiempo continuo.

Ambos modelos se basan en la maximización de la utilidad esperada de un consumidor, como ya se ha especificado en el capítulo introductorio de este trabajo (se considerará que el consumidor es tomador y asegurado a la vez) compuesta por la función de utilidad que genera el consumo y la función de utilidad relativa a la herencia. En ambos modelos las trayectorias del consumo y de la herencia se ven interrumpidas y modificadas por la opción de venta de la póliza. Por una parte, la venta de la póliza supone el cobro del VSV o del LSV que produce un salto en la variable riqueza y que permite al individuo aumentar su consumo. Por otra parte, dicha venta provoca la desaparición del beneficio por muerte en la herencia.

Para ambos modelos realizamos un ejemplo numérico para un individuo específico y obtenemos su estrategia óptima (consumo óptimo y momento óptimo de venta de la póliza) que depende, como veremos, de unas características personales y de mercado. Además, a continuación, desarrollamos un análisis de sensibilidad que permite comprobar cómo cambian las preferencias del agente decisor ante variaciones de los principales parámetros que consideran nuestros modelos de optimización.

Estos modelos de optimización tienen como principal objetivo determinar la estrategia óptima tanto de consumo como de venta de la póliza de vida, focalizándose por tanto en el comportamiento del consumidor. Desde el punto de vista del inversor le permiten conocer si el tomador de un seguro de vida desea o no vender su póliza y, en caso de querer vender, cuándo hacerlo y a qué precio. En este sentido, nos hemos propuesto estudiar las razones por las que el inversor decidiría comprar o no estas pólizas de vida. Y por eso en el Capítulo 5, previa descripción de las diferentes vías a través de las cuales puede entrarse en el negocio de los life settlements (o de los viaticals) y previo análisis de los riesgos que supone invertir en estos productos, proponemos el estudio del riesgo de longevidad al que se enfrenta el inversor en life settlements.

A través de una medida llamada duración modificada de la extensión de vida (*modified-life extension duration*), formulada por Stone y Zissu (2008) y que nosotros hemos readaptado, tratamos de averiguar qué rentabilidad gana o pierde el inversor ante desviaciones de la esperanza de vida del asegurado. De hecho, la *modified-life extension duration* es una adaptación en el campo de los seguros de vida de la duración modificada que se aplica en el campo de las finanzas y por tanto debe corregirse por una segunda medida: la convexidad de la extensión de vida (*life extension convexity*).

Ésta es una herramienta útil para el inversor ya que le permite o bien invertir en aquellos activos menos arriesgados o bien estimar una cobertura y asegurar una rentabilidad. La cobertura que nosotros proponemos es la contratación de un derivado y en concreto, de un swap de longevidad. Con un sencillo ejemplo, describimos su funcionamiento.

En resumen, los Capítulos 3 y 4 se distinguen del Capítulo 5 básicamente por el punto de vista en el que se fija el estudio. Los dos primeros examinan qué le es más beneficioso al consumidor, si vender o no vender, a través de dos modelos de utilidad esperada. El Capítulo 5, en cambio, se fija en qué le es más beneficioso al inversor, si comprar o no comprar, a través de la medición del riesgo de longevidad que trae consigo cada póliza. Al igual que para la decisión del consumidor, la decisión del inversor también vendrá determinada por características personales. Es decir, el inversor acabará comprando o no dependiendo de la comparación entre el riesgo de longevidad que soporta la póliza y su aversión/propensión al riesgo.

Así, los capítulos que siguen engloban tanto el comportamiento del consumidor como el comportamiento del inversor frente al mercado secundario de pólizas de vida y sus decisiones de venta y compra, respectivamente.

Capítulo 3

Estrategia Óptima de Consumo y de Momento de Venta de una Póliza de Vida. Contratación de un Viatical.

3.1. Introducción

El siguiente capítulo se centra en los viatical settlements. En éste se presenta un modelo económico que permite determinar si al tomador y, asegurado enfermo terminal a su vez, le es beneficioso o no vender su póliza de vida mediante la contratación de un viatical.

Se considera un agente decisor (el tomador) que contrata a la edad x un seguro vida entera. Sea M el beneficio por muerte de dicho seguro, es decir, aquella cantidad que se pagará a final del año de fallecimiento del asegurado a los beneficiarios de la póliza. Este capital por muerte fue contratado con unas primas constantes anuales de cuantía P, pagaderas al inicio de cada año en que el asegurado esté vivo. Se representa como ${}_tp_x$ la probabilidad de que un individuo de edad x permanezca vivo a la edad $x+t$ y como ${}_{t/}q_x$ la probabilidad de que un individuo de edad x muera entre $x+t$ y $x+t+1$.

Así, el valor de rescate de este seguro vida entera cuando el asegurado tiene $x+k$ años es tal que[1]:

[1]Si bien Vadiveloo et. al (2005) define el valor de rescate (CSV) como la diferencia entre

$$CSV_{x+k} = \epsilon \cdot \left[M \cdot \sum_{t=0}^{t_x - x - k - 1} {}_{t/}q_{x+k} \cdot (1+r)^{-(t+1)} - P \cdot \sum_{t=0}^{t_x - x - k - 1} {}_{t}p_{x+k} \cdot (1+r)^{-t} \right] > 0,$$

donde $0 < \epsilon < 1$ y $t_x - x - k$ es la vida residual para una población de edad $x + k$, de acuerdo con una tabla de mortalidad apropiada. En EE.UU, el valor de rescate está basado normalmente en la tabla de mortalidad CSO (Commissioner's Standard Ordinary).

Como el agente decisor presenta una enfermedad terminal, asumiremos que la edad máxima que puede alcanzar es $\widehat{t_x}$, de manera que $\widehat{t_x} - x - k = 2$, es decir, morirá seguro antes de los dos años o, como mucho, al cabo de dos años. Así, el tomador puede vender su póliza en el mercado secundario de viaticals. En caso de venderla, la compañía/proveedor de viaticals paga la cantidad VSV. Este valor depende de la salud del asegurado y puede diferir considerablemente de un Estado a otro. Hoy en día, la mayoría de Estados (de los EEUU) han regulado las transacciones de viaticals siguiendo las directrices de la National Association of Insurance Commissioners (NAIC). De acuerdo con su legislación, las compañías de viaticals deben poseer una licencia especial y el VSV debe representar un porcentaje del beneficio por muerte. Este porcentaje, γ_1 por ejemplo, viene a representar todos los costes asociados a la transacción de compra/venta de la póliza. Por eso, para una póliza vendida a la edad $x + k$:

$$VSV_{x+k} = \gamma_1 \cdot M, \qquad 0 < \gamma_1 < 1,$$

y

$$0 < CSV_{x+k} < VSV_{x+k} < M.$$

En Bhattachayra et al. (2004) se estudia como la regulación en el precio de mercado de los viaticals afecta al bienestar de los consumidores. El objetivo del artículo se centra en los efectos de una regulación vinculante de precios en el mercado y, en menor medida, se interesa en los determinantes de la decisión de vender. Este es justamente nuestro interés principal. Partimos de un modelo similar con alguna extensión y no centramos nuestra atención en el mercado si no en el tomador, que tiene como principal objetivo maximizar una utilidad derivada

el valor actual actuarial del beneficio por muerte y el valor actual actuarial de las primas pendientes de pago (ecuación (2.2)), se considera aquí una valoración más apropiada que tenga en cuenta un determinado factor de penalización.

de la venta o no de su póliza de vida. La función de utilidad definida para nuestro modelo es similar a la utilizada en Yang (2011) para determinar los efectos del sistema público de pensiones en la China urbana sobre el bienestar social. Este trabajo implementa un modelo de generaciones solapadas (con motivos altruistas y vida residual incierta) ya que, otra vez, el interés no se centra en un individuo en particular si no en las implicaciones sociales del sistema público de pensiones.

El objetivo que nosotros planteamos en este capítulo consiste en determinar la regla de decisión óptima en cuanto a consumo y momento óptimo de venta de una póliza de vida para aquel asegurado que sufre una enfermedad terminal y, por tanto, con opciones de contratar un viatical. Dicho estudio parte de la construcción de un modelo económico basado en la teoría de la utilidad esperada que posteriormente se resuelve a través del método de la programación dinámica.

A continuación se detalla la estructura del presente capítulo. En el apartado 3.2, se presenta el modelo y se describen todas las posibles estrategias del tomador y asegurado enfermo, esto es, no vender o vender (una parte) de la póliza. En el apartado 3.3, mediante programación dinámica, se encuentra la solución óptima para el problema general. En el apartado 3.4 se realiza un ejemplo numérico del modelo. Considerando unos datos iniciales de referencia, se encuentran las utilidades esperadas derivadas de cada caso y se extrae la estrategia óptima para el tomador, es decir, la estrategia que ofrece mayor utilidad esperada. Como la estrategia óptima dependerá de las características personales de cada agente, se realiza además un análisis de sensibilidad para conocer en qué momento la decisión óptima del tomador cambia. Finalmente, en el apartado 3.5 se resumen todos los resultados obtenidos.

El artículo en el que se basa este capítulo puede encontrarse en Jori et al. (2011).

3.2. Descripción del problema general

En este apartado presentamos un modelo económico que permite al tomador y asegurado enfermo terminal decidir entre vender o no vender su póliza de vida mediante la contratación de un viatical. Nuestros resultados se obtienen dentro del marco de la teoría de la utilidad esperada. Por tanto, nuestro objetivo es maximizar la utilidad esperada de un individuo derivada de la venta o no de su póliza de vida.

El modelo es discreto y considera únicamente dos períodos (años) ya que ésta es la vida residual máxima que contempla el mercado de los viaticals (Bhuyan (2009)). Así pues, consideramos que el asegurado presenta una probabilidad de fallecimiento muy elevada para el primer período $\widehat{q}_{x+k}$ (o probabilidad de supervivencia muy pequeña $\widehat{p}_{x+k} = 1 - \widehat{q}_{x+k}$). Si el asegurado sobrevive a este primer período, se asume que muere con certeza durante el segundo período, es decir, $\widehat{q}_{x+k+1} = 1$.

Al comienzo del primer período, $t = 0$, el decisor posee una riqueza inicial W que incluye, entre otras propiedades, una póliza de seguro de vida cuyo beneficio por muerte es M y unas primas anuales P. Se consume una cuantía $C_0 > 0$ durante el primer período y una cuantía $C_1 > 0$ durante el segundo. En caso de morir en el primer período, el tomador deja a sus herederos una cuantía $H_1 > 0$ en $t = 1$, y, en caso de sobrevivir al primer período, como muere con certeza en el segundo, deja a sus herederos la cuantía $H_2 > 0$, en $t = 2$.

La utilidad esperada del tomador, a la vez que asegurado, depende de las utilidades del consumo y de la herencia para ambos períodos que representamos como $U(C_i)$ y $V(H_i)$; $i = 0, 1$. Al inicio del primer período, la utilidad esperada viene dada por:

$$EU_0 = U(C_0) + \beta \cdot \widehat{q}_{x+k} \cdot V(H_1) + \beta \cdot \widehat{p}_{x+k} \cdot U(C_1) + \beta^2 \cdot \widehat{p}_{x+k} \cdot \widehat{q}_{x+k+1} \cdot V(H_2) \quad (3.1)$$

donde $\beta \in (0, 1]$ es el factor anual de descuento intertemporal o tasa de preferencia temporal que incluye, además de preferencias temporales personales, la tasa de interés para descontar, $r > 0$. Por ejemplo, un valor elevado de β indica gran preocupación del consumidor por el futuro, en nuestro caso, el siguiente período.

La expresión (3.1) puede reescribirse como:

$$EU_0 = U(C_0) + \beta \cdot \widehat{q}_{x+k} \cdot V(H_1) + \beta \cdot \widehat{p}_{x+k} \cdot [U(C_1) + \beta \cdot V(H_2)]$$

donde $U(C_1) + \beta \cdot V(H_2)$ es la utilidad esperada del tomador calculada en $t = 1$, EU_1.

Al inicio de ambos períodos, $t = 0, 1$, el tomador debe decidir entre vender o no su póliza. Se considera la opción de vender únicamente una parte de la póliza. La póliza se vende en el mercado de los viaticals y por ello el vendedor recibe el VSV. Recordemos que esta cuantía es menor al beneficio por muerte pero superior al valor de rescate, dado que la compañía aseguradora para valorar el rescate nunca tiene en cuenta el estado de salud del asegurado y, por tanto, el tiempo de vida residual utilizado en sus cálculos actuariales será mayor a dos años (ver Vadiveloo et. al (2005)). En cambio, la compañía de viaticals sí que tiene en cuenta en sus cálculos un estado de salud deteriorado. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que el VSV es igual al valor actual actuarial de la póliza multiplicado por un determinado porcentaje $\gamma_1 \in [0, 1]$. El uso de este porcentaje y no de los supuestos realizados en cuanto a impuestos, comisiones o cargas del Capítulo 2 se debe básicamente a una simplificación de los cálculos.

$$VSV_{x+k} = \gamma_1 \cdot \left[M \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_{t/}\widehat{q}_{x+k} \cdot (1+r)^{-(t+1)} - P \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_{t}\widehat{p}_{x+k} \cdot (1+r)^{-t} \right], 0 < \gamma_1 < 1. \tag{3.2}$$

Obsérvese que nuestra definición del VSV se ajusta a la legislación de la NAIC ya que el precio pagado por la póliza sigue siendo un porcentaje del beneficio por muerte M.

La expresión (3.2) es totalmente coherente con la valoración de Vandieloo et al. (2005) presentada en la ecuación (2.3) para el LSV y que puede reescribirse como:

$$LSV_{x+k} = M \cdot \widehat{A}_{x+k} - P \cdot \widehat{\ddot{a}}_{x+k} - (Tax \cdot \widehat{A}_{x+k} + 0,2 \cdot P \cdot \widehat{\ddot{a}}_{x+k} + 0,04 \cdot M)$$

En ella, asumíamos unos gastos de gestión del 20 % sobre las primas, un ajuste fiscal correspondiente al impuesto sobre el beneficio por muerte igual a Tax (ecuación (2.4)) y una comisión sobre el beneficio por muerte del 4 %. Todos estos conceptos los englobamos a partir de ahora en un único parámetro γ_1. Así, como γ_1 representa el porcentaje sobre el valor actual actuarial de la póliza que acaba recibiendo el individuo, $1-\gamma_1$ simboliza los gastos de gestión, los impuestos y las comisiones sobre el valor real de la póliza de vida, de forma que:

$$(1-\gamma_1) \cdot (M \cdot \widehat{A}_{x+k} - P\widehat{\ddot{a}}_{x+k}) = Tax \cdot \widehat{A}_{x+k} + 0,2 \cdot P\widehat{\ddot{a}}_{x+k} + 0,04 \cdot M$$

A partir de ahora, el término viaticar se referirá a la venta total o parcial de la póliza en el mercado de los viaticals. Por otra parte, para simplificar la nomenclatura se considerará que en VSV_{x+k}, $x + k = t$ donde $t = 0, 1$. Es decir, el VSV puede venderse al inicio del primer periodo y/o al inicio del segundo periodo. Por otra parte, el asegurado tiene en $t = 0$ la edad x (y no la edad $x+k$).

Seguidamente, se detallan todas las posibles opciones de venta, o no, que tiene el agente económico:

1. Viaticar un porcentaje δ, $0 \leq \delta \leq 1$, en $t = 0$ y viaticar un porcentaje $(1-\delta)$ en $t = 1$. Ésta es la única opción que se contempla en Bhattacharya et al. (2004) en relación con la venta de la póliza. Como ya se ha mencionado, este artículo se centra en un objetivo diferente y las característitcas personales de cada individuo no son relevantes en ese contexto.

   La situación económica de esta opción (caso 1) queda reflejada en la Figura 3.1:

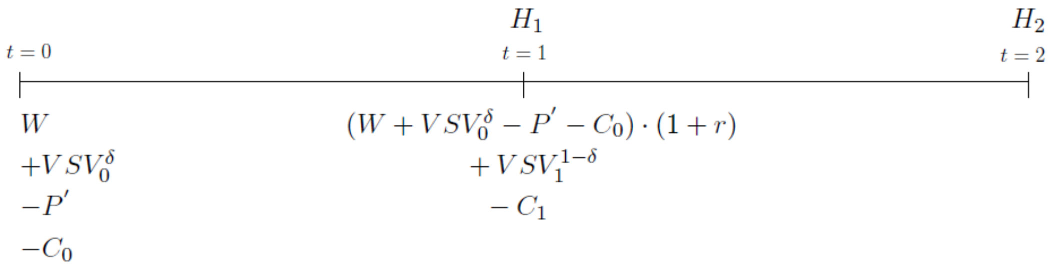

Figura 3.1: Situación económica de viaticar δ en $t = 0$ y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$.

donde

$$VSV_0^{\delta} = \gamma_1 \cdot \left[\delta \cdot \left(M \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_{t/}\widehat{q}_x \cdot (1+r)^{-(t+1)} - P \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_{t}\widehat{p}_x \cdot (1+r)^{-t}\right)\right],$$

$$VSV_1^{1-\delta} = \gamma_1 \cdot \left[(1-\delta)\left(M' \cdot (1+r)^{-1} - P'\right)\right],$$

$$H_1 = (W + VSV_0^{\delta} - P' - C_0) \cdot (1 + r) + M',$$

$$H_2 = [(W + VSV_0^{\delta} - P' - C_0) \cdot (1 + r) + VSV_1^{1-\delta} - C_1] \cdot (1 + r),$$

con M' $(M' < M)$ y P' $(P' < P)$ que denotan, respectivamente, el beneficio por muerte y las primas a pagar después de que una parte δ de la póliza haya sido vendida.

2. Viaticar un porcentaje δ, $0 < \delta < 1$, en $t = 0$ y viaticar un porcentaje ρ de la póliza restante, $0 < \rho < 1$, en $t = 1$. En este caso, el individuo mantiene activa una parte de la póliza igual a $(1 - \rho) \cdot (1 - \delta) > 0$ al final del segundo período.

   La situación económica de esta opción (caso 2) queda reflejada en la Figura 3.2:

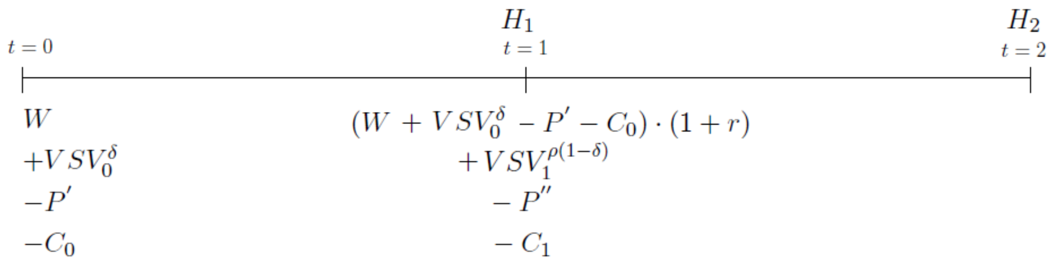

Figura 3.2: Situación económica de viaticar δ en $t = 0$ y viaticar ρ de la póliza restante en $t = 1$.

donde

$$VSV_0^{\delta} = \gamma_1 \cdot \left[\delta \cdot \left(M \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_{t/}\widehat{q}_x \cdot (1+r)^{-(t+1)} - P \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_t\widehat{p}_x \cdot (1+r)^{-t}\right)\right],$$

$$VSV_1^{\rho(1-\delta)} = \gamma_1 \cdot \left[\rho \cdot \left(M' \cdot (1+r)^{-1} - P'\right)\right],$$

$$H_1 = (W + VSV_0^{\delta} - P' - C_0) \cdot (1 + r) + M',$$

$$H_2 = [(W + VSV_0^{\delta} - P' - C_0) \cdot (1+r) + VSV_1^{\rho(1-\delta)} - P'' - C_1] \cdot (1+r) + M'',$$

con M' $(M' < M)$ *y* P' $(P' < P)$ que denotan, respectivamente, el beneficio por muerte y las primas a pagar después de que una parte δ de la póliza haya sido vendida y M'' $(M'' < M')$ y P'' $(P'' < P')$ que denotan el beneficio por muerte y las primas pendientes de pago después de que una parte $\rho\,(1 - \delta)$ de la póliza haya sido vendida.

3. Viaticar un porcentaje δ, $0 < \delta < 1$ at $t = 0$ y no viaticar en $t = 1$.

   La situación económica de esta opción (caso 3) queda reflejada en la Figura 3.3:

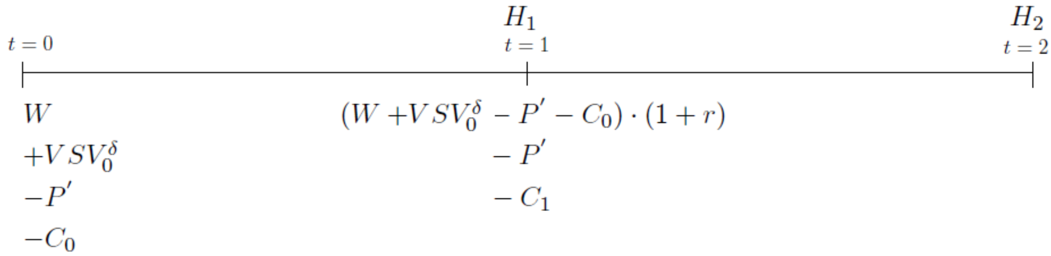

Figura 3.3: Situación económica de viaticar δ en $t = 0$ y no viaticar en $t = 1$.

donde

$VSV_0^\delta = \gamma_1 \cdot \left[\delta \cdot \left(M \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_{t/}\widehat{q}_x \cdot (1+r)^{-(t+1)} - P \cdot \sum_{t=0}^{1} {}_t\widehat{p}_x \cdot (1+r)^{-t}\right)\right],$

$H_1 = (W + VSV_0^\delta - P' - C_0) \cdot (1 + r) + M',$

$H_2 = [(W + VSV_0^\delta - P' - C_0) \cdot (1 + r) - P' - C_1] \cdot (1 + r) + M',$

con M' $(M' < M)$ *y* P' $(P' < P)$ que denotan, respectivamente, el beneficio por muerte y las primas a pagar después de que una parte δ de la póliza haya sido vendida.

4. No viaticar en $t = 0$ y viaticar un porcentaje δ, $0 < \delta < 1$ en $t = 1$.
   La situación económica de esta opción (caso 4) queda reflejada en la Figura 3.4:

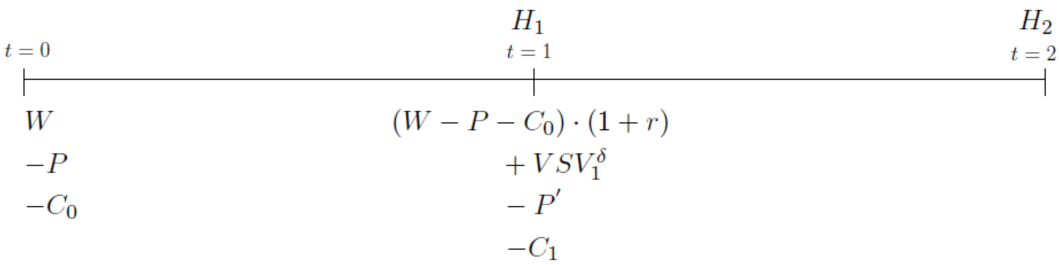

Figura 3.4: Situación económica de no viaticar en $t = 0$ y viaticar δ en $t = 1$.

donde

$VSV_1^\delta = \gamma_1 \cdot [\delta \cdot (M \cdot (1 + r)^{-1} - P)],$

$H_1 = (W - P - C_0) \cdot (1 + r) + M,$

$H_2 = [(W - P - C_0) \cdot (1 + r) + VSV_1^\delta - P' - C_1] \cdot (1 + r) + M',$

con $M' \, (M' < M)$, $P' \, (P' < P)$ que denotan, respectivamente, el beneficio por muerte y las primas a pagar después de que una parte δ de la póliza haya sido vendida.

5. No viaticar ni en $t = 0$ ni en $t = 1$.
   La situación económica de esta opción (caso 5) queda reflejada en la Figura 3.5:

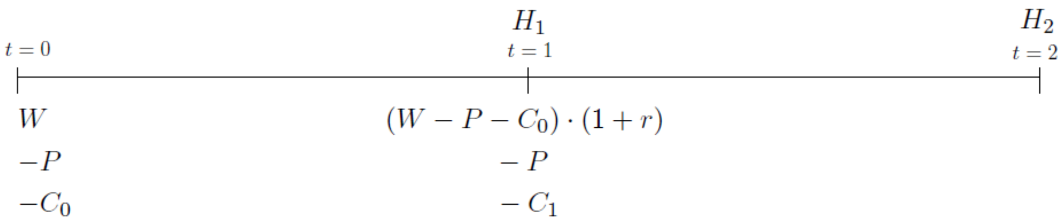

Figura 3.5: Situación económica de no viaticar ni en $t = 0$ ni en $t = 1$.

   donde
   $H_1 = (W - P - C_0) \cdot (1 + r) + M$,
   $H_2 = [(W - P - C_0) \cdot (1 + r) - P - C_1] \cdot (1 + r) + M$.

Obsérvese que en caso de que el individuo sobreviva al primer período, o bien se venderá toda la póliza (caso 1) o bien se venderá una parte de la póliza (caso 2, 3 y 4) o bien no se venderá la póliza (caso 5). Así pues, sólo la estrategia 1 supone que los herederos no reciban la totalidad del beneficio por muerte al final del segundo período.

A continuación, se determina la estrategia óptima del decisor que será aquella que maximice la utilidad esperada definida en la ecuación (3.2).

3.3. Solución óptima para el problema general

En este apartado, se considera el problema de optimización que determinará la estrategia óptima para un tomador o agente decisor respecto a la venta de la póliza de vida en el mercado de los viaticals. Esta estrategia es la solución del problema de maximización siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{C_0, C_1} EU_0 &= U(C_0) + \beta \widehat{q}_x \cdot V(H_1) + \beta \widehat{p}_x \cdot [U(C_1) + \beta \cdot V(H_2)] \\ &= U(C_0) + \beta \widehat{q}_x \cdot V(H_1) + \beta \widehat{p}_x \cdot EU_1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para $i = 0, 1$, sean las funciones de utilidad del consumo y de la herencia tales que:

$$\begin{aligned} U(C_i) &= \ln C_i, \\ V(H_{i+1}) &= \alpha \cdot \ln H_{i+1}, \ \alpha > 0, \end{aligned}$$

donde α indica cuánto valora el consumidor la herencia respecto al consumo. Para $0 < \alpha < 1$ el consumo se valora más que la herencia, mientras que valores de $\alpha > 1$ indican una valoración de la herencia mayor (con $\alpha = 1$ se valoran consumo y herencia por igual).

Las funciones logarítmicas son un caso específico de las funciones potenciales que a su vez se encuentran en el grupo de funciones de tipo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion functions*). Una explicación detallada de estas funciones se define en el siguiente capítulo, donde trabajamos tanto con funciones logarítmicas como con funciones potenciales. Cabe decir que las funciones de utilidad logarítmicas también se utilizan en Bhattacharya et al. (2004) y Yang (2011).

Como ya hemos visto, existen cinco posibles estrategias para nuestro decisor. A partir de ahora, nos referiremos a ellas como caso 1, 2, 3, 4 y 5. La estrategia óptima será aquella que satisfaga la utilidad en la ecuación (3.3). A fin de evitar repeticiones en los cálculos, agrupamos los cinco casos en dos grupos: el primer grupo representa aquellos casos en que el decisor vende parte de la póliza en $t = 0$ (casos 2 y 3) y el segundo, aquellos en que no se vende en $t = 0$ (casos 4, 5). El caso especial en que el individuo vende la totalidad de su póliza al inicio del segundo período (caso 1) se incluye en el grupo 1. La solución del problema se encuentra mediante el uso de técnicas de optimización dinámica (Bertsekas (2000)).

La idea principal de la programación dinámica viene establecida por el principio de optimalidad de Bellman: un decisor determina hoy una estrategia óptima de comportamiento dependiendo de las decisiones óptimas que deberá ir tomando en el futuro (Bellman y Dreyfus (1962)). Por tanto, en nuestro problema, se calcula en primer lugar el óptimo en $t = 1$ y luego se actualiza dicho óptimo a $t = 0$. La estrategia óptima (vender o no vender parte de la póliza en $t = 0$) será aquella que reporte un valor mayor para EU_0.

3.3.1. Viaticar un porcentaje δ en $t = 0$

En $t = 0$, el tomador decide vender una parte δ de su póliza de vida y, por tanto, recibe por ella una cantidad VSV_0^{δ}. Su riqueza inicial W se ve incrementada por este valor. Además, dado que una parte $(1-\delta)$ de la póliza se mantiene activa durante el primer período, ofreciendo una cobertura equivalente al beneficio por muerte M', el tomador pagará al menos durante este primer período unas primas P'. En caso de fallecer el asegurado durante el primer período, los herederos recibirán:

$$H_1 = \left(W + VSV_0^{\delta} - P' - C_0\right) \cdot (1+r) + M'.$$

En $t = 1$, en caso de sobrevivir el asegurado, se observan tres posibles opciones respecto a la venta de la póliza:

- Vender el resto, es decir, el $(1-\delta)\,\%$ (**caso 1**).
- Vender un porcentaje $\rho\,(1-\delta)$ de manera que parte de la póliza se mantiene aún activa (**caso 2**).
- No vender (**caso 3**).

Así pues en $t = 1$, a fin de cubrir estas tres alternativas, vamos a considerar que el tomador recibe una cantidad VSV_1^* definida como:

$$VSV_1^* = \begin{cases} VSV_1^{1-\delta} & \text{si viatical del } (1-\delta)\,\%, \\ VSV_1^{\rho(1-\delta)} & \text{si viatical del } \rho(1-\delta)\,\%, \\ 0 & \text{si no viatical.} \end{cases}$$

Como parte de la póliza puede permanecer activa durante el segundo período, el individuo queda asegurado por un beneficio por muerte M^* igual a

$$M^* = \begin{cases} 0 & \text{si viatical del } (1-\delta)\,\%, \\ M'' & \text{si viatical del } \rho(1-\delta)\,\%, \\ M' & \text{si no viatical,} \end{cases}$$

pagando unas primas

$$P^* = \begin{cases} 0 & \text{si viatical del } (1-\delta)\,\%, \\ P'' & \text{si viatical del } \rho(1-\delta)\,\%, \\ P' & \text{si no viatical.} \end{cases}$$

La herencia que recibirán los herederos al final del segundo período es:

$$H_2 = \Big[\Big(W + VSV_0^{\delta} - P^{'} - C_0\Big) \cdot (1+r) + VSV_1^{*} - P^{*} - C_1\Big] \cdot (1+r) + M^{*}.$$

3.3.1.1. Óptimo en $t = 1$

En $t = 1$, las únicas variables desconocidas son C_1 y H_2. En efecto, el primer período ha finalizado de manera que C_0 ya ha sido consumido y H_1 no ha sucedido pues el individuo aún permanece en vida. El problema del consumidor consiste en maximizar su utilidad esperada sobre el consumo y sobre la herencia sujeto a las restricciones correspondientes a cada caso:

$$\max_{C_1} EU_1 = U(C_1) + \beta \cdot V(H_2) = \ln(C_1) + \alpha\beta \ln(H_2)$$

sujeto a:

Restricciones para el **caso 1**

$$C_1 - \big((W + VSV_0^{\delta} - P^{'} - C_0) \cdot (1+r) + VSV_1^{1-\delta}\big) < 0 \quad \text{y} \quad C_1 > 0.$$

Se requiere que C_1 y H_2 sean variables estrictamente positivas. Así, si el consumidor decidiera vender la totalidad de su póliza, al desaparecer el beneficio por muerte, el consumo para el segundo período debería ser estrictamente menor a la riqueza disponible del consumidor en $t = 1$ (a fin de que $H_2 > 0$).

Restricciones para los **casos 2 y 3**

$$C_1 - ((W + VSV_0^{\delta} - P^{'} - C_0) \cdot (1+r) + VSV_1^{*} - P^{*}) \leq 0 \quad \text{y} \quad C_1 > 0.$$

En primer lugar, cabe decir que el funcional EU_1 es estrictamente cóncavo.

Para el **caso 1**, calculando la primera derivada e igualando a cero, encontramos que el consumo óptimo para el segundo período es

$$C_1^{*} = \frac{(W + VSV_0^{\delta} - P^{'} - C_0) \cdot (1+r) + VSV_1^{1-\delta}}{(1+\alpha\beta)},$$

que claramente satisface las restricciones puesto que $\alpha\beta > 0$.

Para los **casos 2 y 3**, tenemos un problema estándar de programación no lineal con una variable no negativa. El Lagrangiano es

$$L(C_1) = U(C_1) + \beta \cdot V(H_2) - \lambda \cdot \Big[C_1 - \Big((W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r) + VSV_1^* - P^*\Big)\Big].$$

Las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para el problema del consumidor son:

1. $L'(C_1) = 0$,
2. $\lambda \geq 0$, con $\lambda = 0$ si
   $C_1 - \big(W + VSV_0^\delta - P' - C_0\big)\cdot(1+r) + VSV_1^* - P^*\big) < 0$.

Para $\lambda = 0$, encontramos

$$C_1^* \;=\; \frac{(W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r) + VSV_1^* - P^* + M^*\cdot(1+r)^{-1}}{(1+\alpha\beta)},$$

que es una solución válida sólo en caso de que $C_1^* < (W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r) + VSV_1^* - P^*$. Se puede probar que esta desigualdad se cumple si el beneficio por muerte restante cumple

$$M^* < \alpha\beta[(W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r)^2 + (VSV_1^* - P^*)\cdot(1+r)].$$

El caso en que $\lambda > 0$ hace que

$$C_1^* = (W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r) + VSV_1^* - P^*.$$

Como el Lagrangiano es cóncavo, podemos garantizar que los valores encontrados hasta ahora para C_1 son óptimos y por tanto podemos presentar la solución del problema del consumidor como:

Proposición 1 *Sea*

$$\overline{M} = \alpha\beta\cdot[(W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r)^2 + (VSV_1^* - P^*)\cdot(1+r)], \quad (3.4)$$

entonces:

(a) *Si $M^* < \overline{M}$, el consumo y la herencia óptimos para el segundo período son*

$$C_1^* = \frac{(W + VSV_0^\delta - P' - C_0)\cdot(1+r) + VSV_1^* - P^* + M^*\cdot(1+r)^{-1}}{(1+\alpha\beta)}, \quad (3.5)$$

$$H_2^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \cdot [(W + VSV_0^\delta - P' - C_0) \cdot (1+r)^2 + (VSV_1^* - P^*) \cdot (1+r) + M^*]. \tag{3.6}$$

(b) *Si $M^* \geq \overline{M}$, el consumo y la herencia óptimos para el segundo período son*

$$C_1^* = (W + VSV_0^\delta - P' - C_0) \cdot (1+r) + VSV_1^* - P^*, \tag{3.7}$$

$$H_2^* = M^*. \tag{3.8}$$

La interpretación económica de la solución dual que hemos obtenido es la siguiente: después de haber vendido una parte de la póliza, si el tomador considera que el beneficio por muerte restante M^* es insuficiente para sus herederos, entonces decidirá no consumir la totalidad de la riqueza disponible y ahorrar parte de la misma para dejar en herencia algo más que el beneficio por muerte restante. Si por el contrario, el propietario considera que M^* es una cuantía suficientemente elevada, únicamente dejará en herencia dicha cuantía. Obsérvese por otra parte que el caso 1, viaticar el 100 % de la póliza, supone que $M^* = 0$ y por tanto, el óptimo corresponde siempre con la primera de las dos soluciones ($M^* < \overline{M}$ siendo $M^* = 0$).

3.3.1.2. Óptimo actualizado a $t = 0$

En $t = 0$, el problema de optimización que nos permite obtener una solución para todas las variables implicadas en el modelo es el siguiente:

$$\max_{C_0} EU_0 = U(C_0) + \beta\widehat{q}_x \cdot V(H_1) + \beta\widehat{p}_x \cdot EU_1^*$$

con

$$H_1 = (W + VSV_0^\delta - P' - C_0) \cdot (1+r) + M', \tag{3.9}$$

$$EU_1^* = \text{máx}[EU_1^*(\text{caso 1}); EU_1^*(\text{caso 2}); EU_1^*(\text{caso 3})]$$

sujeto a

$$C_0 - (W + VSV_0^\delta - P' - P^* \cdot (1+r)^{-1}) \leq 0 \qquad \text{con } C_0 > 0 \text{ y} \qquad H_1 > 0.$$

Se requiere que C_0 y H_1 sean variables estrictamente positivas. En los tres casos obtendremos valores de C_0 menores o iguales a la riqueza disponible del consumidor en $t = 0$, ya que siempre existe un cierto beneficio por muerte en $t = 1$ (es decir $H_1 > 0$). Obsérvese que esta riqueza disponible es igual a la riqueza inicial, más VSV_0^δ y menos el pago de primas (P' en $t=0$ y P^* en $t=1$).

El Lagrangiano en este caso es

$$\begin{aligned} L(C_0) =& U(C_0) + \beta\widehat{q}_x \cdot V(H_1) \\ &+ \beta\widehat{p}_x \cdot EU_1^* - \lambda \cdot \left[C_0 - (W + VSV_0^\delta - P' - P^* \cdot (1+r)^{-1})\right] \end{aligned}$$

que también es una función cóncava. Aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker y considerando los resultados del apartado anterior, para $\lambda = 0$ encontramos que los posibles óptimos se obtienen resolviendo una ecuación ordinaria de segundo orden que depende de M^*. Considerando $\overline{M}$ (definida en (3.4)), entonces:

Para $M^* < \overline{M}$, la solución es

$$C_0^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

con:

$a = (1+r)^2 \cdot [1 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x \cdot (1+\alpha\beta)]$,

$b = (-1) \cdot (1+r)[(W + VSV_0^\delta - P') \cdot (1+r) \cdot (2 + \alpha\beta q_x + \beta\widehat{p}_x(1+\alpha\beta)) +$
$(VSV_1^* - P^*) \cdot (1 + \alpha\beta\widehat{q}_x) + M' \cdot (1 + \beta\widehat{p}_x \cdot (1+\alpha\beta)) + M^* \cdot (1+r)^{-1}(1 + \alpha\beta\widehat{q}_x)]$,

$c = [(W + VSV_0^\delta - P') \cdot (1+r) + M'] \cdot [(W + VSV_0^\delta - P') \cdot (1+r) \cdot (1+r)^* +$
$VSV_1^* \cdot (1+r)^* - P^* \cdot (1+r) + M^*]$,

(3.10)

y donde

$$(1+r)^* = \begin{cases} 1 & \text{si viatical del } (1-\delta)\,\%, \\ (1+r) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

También debe satisfacerse que $C_0^* < W + VSV_0^\delta - P' - P^* \cdot (1+r)^{-1}$. Es fácil demostrar que la raíz positiva nunca satisface la restricción y por tanto, no es una solución válida. La raíz negativa, en cambio, satisface la restricción sólo para algunos valores particulares de los parámetros. Así pues, es posible que ninguna de ambas soluciones vaya a cumplir la condición de Kuhn-Tucker.

Para $M^* \geq \overline{M}$, la solución es

$$C_0^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

con:

$a = (1+r)^2 \cdot (1 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x),$

$b = (-1) \cdot (1+r) \cdot [(W + VSV_0^\delta - P') \cdot (1+r) \cdot (2 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x) + (VSV_1^* - P^*)$
$(1 + \alpha\beta\widehat{q}_x) + M' \cdot (1 + \beta\widehat{p}_x)],$

$c = [(W + VSV_0^\delta - P') \cdot (1+r) + M'] \cdot [(W + VSV_0^\delta - P') \cdot (1+r) + VSV_1^* - P^*].$

(3.11)

Otra vez, la raíz positiva no será nunca una solución válida y la raíz negativa sólo va a satisfacer la restricción para algunos valores particulares de los parámetros.

Considerando la condición de Kuhn-Tucker para $\lambda > 0$, completaremos la solución de nuestro problema:

Proposición 2 *Sea*

$$C_0^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a, b *y* c *están definidas en (3.10) o (3.11). Si*

$$C_0^* < W + VSV_0^\delta - P' - P^* \cdot (1+r)^{-1},$$

entonces C_0^* *es el consumo óptimo para el primer período. En caso contrario,*

$$C_0^* = W + VSV_0^\delta - P' - P^* \cdot (1+r)^{-1}.$$

Sustituyendo $C_0 = C_0^*$ en (3.9) y en las expresiones (3.5), (3.6) o (3.7), (3.8); obtenemos todos los valores óptimos para los consumos y las herencias para cualquiera de los tres casos considerados. La mejor estrategia (caso 1, 2 o 3) será aquella que produzca un valor más elevado para EU_0 :

$$EU_0^{*(1)} = \text{máx}[EU_0^*(\text{caso } 1); EU_0^*(\text{caso } 2); EU_0^*(\text{caso } 3)].$$

3.3.2. No viaticar en $t = 0$

Alternativamente, en $t = 0$, el tomador puede decidir no vender su póliza. Y por eso, durante al menos el primer período deberá pagar la prima P, si muriera durante este primer período, los herederos recibirían en $t = 1$ los ahorros efectivos en el momento de la muerte así como la totalidad del beneficio por muerte vinculado a la póliza, M. En $t = 1$, si el consumidor llega vivo, tendrá en esta ocasión dos opciones con respecto a la venta de su póliza:

- Vender un porcentaje δ de su póliza , $0 < \delta < 1$ (**caso 4**).
- No vender (**caso 5**).

Por tanto, en $t = 1$, al igual que hemos hecho anteriormente, para agrupar en una única solución estas dos opciones, vamos a considerar que el individuo recibe la cantidad VSV_1^* definida por

$$VSV_1^* = \begin{cases} VSV_1^\delta & \text{si viatical de } \delta\,\%, \\ 0 & \text{si no viatical.} \end{cases}$$

En cualquiera de los dos casos tendremos cobertura en caso de muerte durante el segundo período, M^*, igual a:

$$M^* = \begin{cases} M' & \text{si viatical de } \delta\,\%, \\ M & \text{si no viatical,} \end{cases}$$

El propietario de la póliza deberá pagar las siguientes primas:

$$P^* = \begin{cases} P' & \text{si viatical de } \delta\,\%, \\ P & \text{si no viatical.} \end{cases}$$

El proceso para la obtención del óptimo es el mismo que el realizado en el apartado anterior. Así que prescindiremos de algunas demostraciones e interpretaciones económicas.

3.3.2.1. Óptimo en $t = 1$

El problema de optimización es:

$$\max_{C_1} EU_1 = U(C_1) + \beta \cdot V(H_2)$$

sujeto a

$$C_1 - ((W - P - C_0) \cdot (1 + r) + VSV_1^* - P^*) \leq 0 \quad \text{y} \quad C_1 > 0.$$

La solución que obtenemos depende también de una cota sobre el beneficio por muerte restante, M^*:

Proposición 3 *Sea*

$$\overline{M} = \alpha\beta \cdot [(W - P - C_0) \cdot (1 + r)^2 + (VSV_1^* - P^*) \cdot (1 + r)], \tag{3.12}$$

entonces:

(a) *Si $M^* < \overline{M}$, la solución óptima es*

$$C_1^* = \frac{(W - P - C_0) \cdot (1 + r) + VSV_1^* - P^* + M^* \cdot (1 + r)^{-1}}{(1 + \alpha\beta)}, \tag{3.13}$$

$$H_2^* = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \cdot [(W - P - C_0) \cdot (1 + r)^2 + (VSV_1^* - P^*) \cdot (1 + r) + M^*]. \tag{3.14}$$

(b) *Si $M^* \geq \overline{M}$, la solución óptima es*

$$C_1^* = (W - P - C_0) \cdot (1 + r) + VSV_1^* - P^*, \tag{3.15}$$

$$H_2^* = M^*. \tag{3.16}$$

3.3.2.2. Óptimo actualizado a $t = 0$

En $t = 0$, el problema de optimización es el siguiente:

$$\max_{C_0} EU_0 = U(C_0) + \beta\widehat{q}_x \cdot V(H_1) + \beta\widehat{p}_x \cdot EU_1^*$$

con

$$H_1 = (W - P - C_0^*) \cdot (1 + r) + M, \tag{3.17}$$

$$EU_1^* = \max\ [EU_1^*(\text{caso } 4); EU_1^*(\text{caso } 5)]$$

sujeto a

$$C_0 - (W - P - P^* \cdot (1 + r)^{-1}) \leq 0 \quad \text{con } C_0 > 0 \text{ y } H_1 > 0.$$

A partir de las condiciones de optimalidad y considerando los resultados obtenidos en el apartado anterior, obtenemos la solución completa del problema de optimización:

Proposición 4 *Sea $\overline{M}$ la expresión definida en (3.12) y sea*

$$\overline{C}_0^* = W - P - P^* \cdot (1+r)^{-1}.$$

Entonces:

(a) *Si $M^* < \overline{M}$, la solución óptima del consumo para el primer período es*

$$C_0^* = \text{mín}\left\{C_0^{*(1)}, \overline{C}_0^*\right\}$$

donde

$$C_0^{*(1)} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con:

$$a = (1+r)^2 \cdot [1 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x \cdot (1+\alpha\beta)],$$

$$b = (-1) \cdot (1+r) \cdot [(W-P) \cdot (1+r)(2 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x \cdot (1+\alpha\beta)) + (VSV_1^* - P^*) \cdot (1+r) \cdot (1 + \alpha\beta\widehat{q}_x) + M \cdot (1 + \beta\widehat{p}_x \cdot (1+\alpha\beta)) + M^* \cdot (1 + \alpha\beta \cdot \widehat{q}_x) \cdot (1+r)^{-1}],$$

$$c = [(W-P) + M \cdot (1+r)^{-1}] \cdot [(W-P) \cdot (1+r) + VSV_1^* - P^* + M^* \cdot (1+r)^{-1}].$$

(b) *Si $M^* \geq \overline{M}$, la solución óptima del consumo para el primer período es*

$$C_0^* = \text{mín}\left\{C_0^{*(2)}, \overline{C}_0^*\right\}$$

donde

$$C_0^{*(2)} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

con:

$$a = (1+r)^2 \cdot (1 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x),$$

$$b = (-1) \cdot (1+r) \cdot [(W-P) \cdot (1+r) \cdot (2 + \alpha\beta\widehat{q}_x + \beta\widehat{p}_x) + (VSV_1^* - P^*) \cdot (1+r) \cdot (1 + \alpha\beta\widehat{q}_x) + M \cdot (1 + \beta\widehat{p}_x),$$

$$c = [(W-P) \cdot (1+r) + M] \cdot [(W-P) \cdot (1+r) + VSV_1^* - P^*].$$

Sustituyendo $C_0 = C_0^*$ en (3.17) y en las expresiones (3.13), (3.14) o (3.15), (3.16); obtenemos todos los valores óptimos para los consumos y para las herencias para cualquiera de los dos casos considerados. La mejor estrategia (caso 4 o 5) es aquella que produce un valor más elevado para EU_0 :

$$EU_0^{*(2)} = \text{máx}[EU_0^*(\text{caso } 4); EU_0^*(\text{caso } 5)].$$

En este punto, hemos encontrado la solución a nuestro problema de optimización presentado en (3.3), esto es

$$\text{máx}\, EU_0 = \text{máx}\left\{EU_0^{*(1)}, EU_0^{*(2)}\right\}.$$

3.4. Ilustración Numérica

3.4.1. Solución óptima

En este apartado, se muestran los resultados numéricos del modelo propuesto y solucionado previamente. Como punto de partida consideramos un agente económico con las siguientes características (todas las unidades monetarias están expresadas en euros):

W=100.000	M =50.000	P=1.500	r=0,04
γ_1 =0,8	β =0,6	α =0,5	$\widehat{q}_x$=0,7

Tabla 3.1: Datos de referencia del asegurado y del seguro de vida

Al inicio del horizonte temporal, el consumidor parte de una riqueza de 100.000 y un seguro de vida cuyo beneficio por muerte es 50.000 con unas primas anuales y constantes iguales a 1.500[2]. Se considera un tipo de interés libre de riesgo de 0,04. El factor anual de descuento intertemporal o tasa de preferencia temporal, β, es igual a 0,6. Obsérvese que un factor anual de preferencia temporal igual a 0,6 significa que el individuo es neutral entre 60 euros hoy o 100 euros el año que viene. La valoración de la herencia en relación al consumo queda reflejada en el parámetro α que es igual a 0,5. En otras palabras, el tomador valora la herencia la mitad que el consumo. Finalmente, dado que el asegurado es enfermo terminal y por tanto presenta una probabilidad de fallecimiento muy elevada para el primer año, asumimos que $\widehat{q}_x$ =0,7. Recordemos que la probabilidad de fallecimiento

[2]La cuantía de las primas ha sido escogida de forma arbitraria.

para el segundo año es igual a 1.

Se consideran las siguientes opciones para nuestro tomador:

1. Viaticar un porcentaje δ =0,6 en $t = 0$ y viaticar el resto de la póliza, i.e. $(1 - \delta)$ =0,4, en $t = 1$. El estado económico para esta opción queda de la siguiente manera:
   En $t = 0$, la riqueza inicial se incrementa en
   $$VSV_0^{0,6} = 21.882,96;$$
   que corresponde al 60 % del valor actual actuarial de la parte de la póliza vendida. Dado que el 40 % de esta póliza permanece activo durante el primer período, cubriendo un beneficio por muerte de $M' = 0,4{\cdot}M = 20.000$, el tomador debe pagar al inicio del segundo año una prima $P' = 0,4{\cdot}P = 600$. En $t = 1$, se vende la póliza restante así que tanto el beneficio por muerte como las primas desaparecen en el modelo. A cambio, el tomador recibe la cantidad
   $$VSV_1^{0,4} = 14.904,62;$$
2. Viaticar un porcentaje $\delta = 0,6$ en $t = 0$ y viaticar un porcentaje $\rho = 0,5$ de la póliza restante en $t = 1$.
   El estado económico en $t = 0$ es exactamente el mismo que en el caso 1.
   En $t = 1$, se vende el 50 % de la póliza restante, así que el tomador recibe la cantidad
   $$VSV_1^{0,5(0,4)} = 7.452,31;$$
   Como el 20 % de la póliza permanece activa durante el segundo año, cubriendo un beneficio por muerte de $M'' = 0,2{\cdot}M = 10.000$, el tomador debe pagar al inicio del segundo año un prima $P'' = 0,2 \cdot P = 300$.
3. Viaticar un porcentaje $\delta = 0,6$ en $t = 0$ y no viaticar en $t = 1$.
   Aquí también, el estado económico en $t = 0$ es exactamente el mismo que el descrito en el caso 1.
   En $t = 1$, no existe ninguna venta así que el 40 % de la póliza permanece activa cubriendo un beneficio por muerte de $M' = 0,4{\cdot}M = 20.000$. La prima a pagar al inicio del segundo año es $P' = 0,4 \cdot P = 600$.
4. No viaticar en $t = 0$ y viaticar un porcentaje $\delta = 0,6$ en $t = 1$.
   Como en $t = 0$, no se vende ninguna parte de la póliza, las cuantías del

beneficio por muerte y la prima a pagar al inicio del primer año son las mismas que las presentadas inicialmente, esto es $M = 50.000$ y $P = 1.500$. En $t = 1$, se decide vender el 60 % de la póliza, por ello el tomador recibe la cantidad

$$VSV_1^{0,6} = 22.356, 92$$

y como el 40 % de la póliza permanece activa durante el segundo año, cubriendo un beneficio por muerte de $M' = 0, 4 \cdot M = 20.000$, el tomador debe pagar en $t = 1$ la prima $P' = 0, 4 \cdot P = 600$.

5. No viaticar ni en $t = 0$ ni en $t = 1$. En este caso, los parámetros para ambos años son los mismos que los presentados inicialmente.

Si resolvemos todas las posibles trayectorias para el consumidor, obtenemos los consumos y las herencias óptimas así como las utilidades esperadas asociadas a cada caso. Los resultados se presentan en la Tabla 3.2:

Caso 1			
C_0^*	H_1^*	C_1^*	H_2^*
95.423,63	46.893,71	32.152,55	10.031,60

Caso 1
EU_0^*
$16, 09038$

Caso 2			
C_0^*	H_1^*	C_1^*	H_2^*
96.135,47	46.153,39	33.016,22	10.301,06

Caso 2
EU_0^*
$16, 10067$

Caso 3			
C_0^*	H_1^*	C_1^*	H_2^*
96.821,21	45.440,22	24.840,22	20.000,00

Caso 3
EU_0^*
$16, 08912$

Caso 4			
C_0^*	H_1^*	C_1^*	H_2^*
91.523,50	57.255,56	29.012,49	20.000,00

Caso 4
EU_0^*
$16, 10933$

Caso 5			
C_0^*	H_1^*	C_1^*	H_2^*
78.437,72	70.864,77	19.364,77	50.000,00

Caso 5
EU_0^*
$15, 97654$

Tabla 3.2: Óptimos y utilidades esperadas máximas

Por tanto, para un individuo que presenta las características descritas anteriormente, la estrategia óptima coincide con el caso 4, esto es, la utilidad es máxima cuando decide vender únicamente una parte de la póliza $\delta = 0{,}6$, en $t = 1$.

Cabe decir que la solución obtenida en este ejemplo es válida sólo para individuos que presenten estas características específicas. La solución podría mejorar si el tomador decidiera vender otro porcentaje de la póliza al inicio del primer año y al inicio del segundo. A continuación se realiza un análisis de sensibilidad con respecto a algunos parámetros personales del tomador, así, podremos comprobar a partir de qué cantidades se decide a cambiar de estrategia.

3.4.2. Análisis de sensibilidad

En este apartado, se analiza la influencia de parámetros personales al individuo sobre la solución óptima. Por ejemplo, considerando una determinada riqueza inicial, intuitivamente, parece claro que al aumentar el valor de W, la necesidad de vender la póliza de vida debería decrecer. Este efecto es uno de los que estudiamos seguidamente.

Los parámetros incluidos en este análisis de sensibilidad son: W -la riqueza inicial-, α -la relación marginal de sustitución entre consumo y herencia-, β -el factor de descuento intertemporal-, γ_1 -el porcentaje del valor actual actuarial de la póliza que paga el proveedor de viaticals - y δ y ρ -la parte de póliza vendida por el propietario de la misma-. Hay que destacar la importancia en el análisis de estos dos últimos parámetros, δ y ρ, dado que completan la solución del problema. En realidad, hay que tener en cuenta que la solución obtenida en el apartado anterior es una solución particular ya que se han preestablecido unos valores para δ y para ρ. El agente podría haber escogido cualquier otro valor que maximizase aún más su utlidad esperada.

3.4.2.1. Variación de W

Los datos, a excepción de W, son exactamente los mismos que se han presentado en la Tabla 3.1.

Para incrementos en el valor de W, la Tabla 3.3 muestra la decisión óptima respecto a la venta de la póliza:

W	Decisión
10.000 20.000 30.000	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$
40.000 50.000 60.000 70.000 80.000	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar ρ en $t = 1$
90.000 100.000 200.000	No viaticar en $t = 0$ y viaticar δ en $t = 1$
400.000	No viaticar ni en $t = 0$ ni en $t = 1$

Tabla 3.3: Decisión óptima del consumidor al variar W

y la Figura 3.6 refleja la evolución de las variables C_0^*, H_1^*, C_1^* y H_2^*:

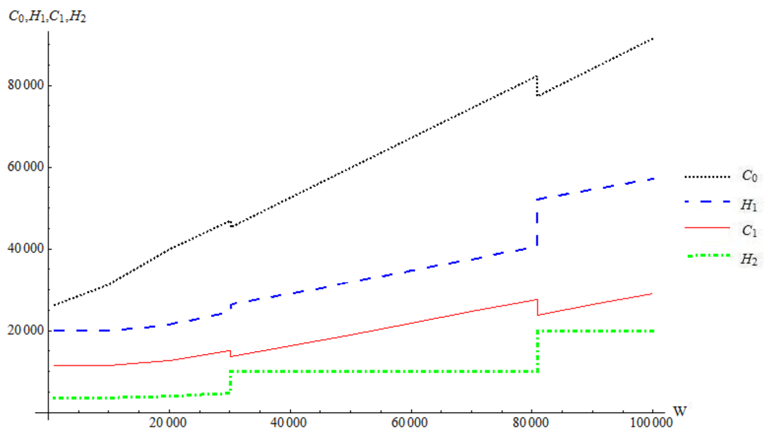

Figura 3.6: Distribución entre consumos y herencias al variar W

El tomador con una riqueza reducida W decide vender la totalidad de su póliza, en caso de sobrevivir al primer período. En $t = 0$, vende una parte de ella y consume prácticamente toda su riqueza disponible $(W + VSV_0^{0,6} - P')$. En caso de morir durante el primer año, la herencia en $t = 1$ equivale al beneficio por muerte restante, M' más los ahorros que queden en el momento de la muerte (casi nulos para valores de $W < 20.000$). Si por el contrario el asegurado sobrevive, se vende en $t = 1$ el resto de la póliza. La riqueza disponible en ese momento es $VSV_1^{0,4}$ más algunos ahorros realizados durante el primer año. La mayor parte de esta cantidad va destinada a consumo y la herencia en $t = 2$ equivale a la parte no consumida durante este segundo año (en todos los casos $H_2 < 5.000$). Al incrementar W (en nuestro ejemplo, para $W > 30.159$), el tomador puede incrementar tanto consumo como ahorros vendiendo parte de la póliza en $t = 0$. Entonces, si sobrevive al primer año ya no necesitará vender lo que queda de póliza para mantener a un nivel razonable el consumo del segundo año.

Obsérvese que, sin necesidad de vender la póliza en $t = 0$, un individuo con una riqueza inicial relativamente elevada (en nuestro ejemplo, a partir de $W > 80.834$) puede incluso llegar a consumir más que otro individuo que posee una riqueza inferior y que sí vende parte de su póliza. En $t = 1$, en caso de sobrevivir, el individuo más rico tiene que vender parte de su póliza a fin de mantener un nivel de consumo elevado para el segundo año.

Finalmente, aquél individuo con una riqueza muy elevada (valores de $W > 351.000$) puede alcanzar niveles de consumo óptimo para ambos años sin necesidad de vender en ninguno momento y dejando por tanto una herencia considerable (que tendrá en cuenta la totalidad del beneficio por muerte). Estos últimos resultados se muestran en la Figura 3.7:

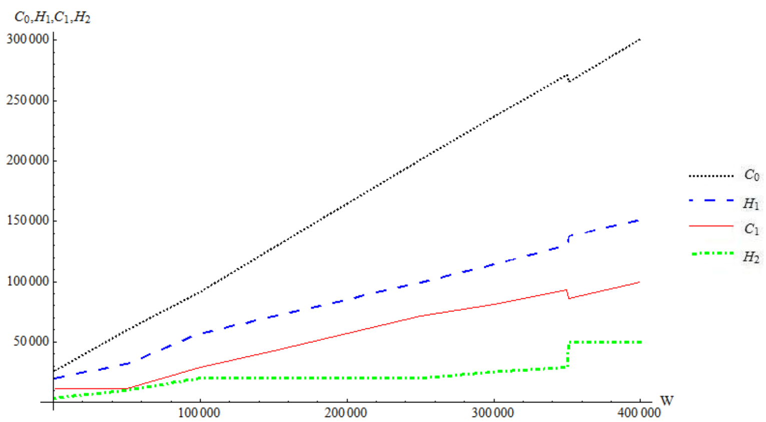

Figura 3.7: Distribución entre consumos y herencias para $W > 351.000$

3.4.2.2. Variación de α

Los datos son los mismos que los de la Tabla 3.1, a excepción de α. El parámetro α es el que refleja cuánto valora el consumidor la herencia en relación a su consumo. Para incrementos en el valor de α (i.e., incrementos en la valoración de la herencia), la Tabla 3.4 muestra la decisión óptima con respecto a la venta de la póliza.

α	Decisión
$0,01$ $0,1$ $0,2$	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$
$0,3$ $0,4$	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar ρ en $t = 1$
$0,5$ $0,6$ $0,7$ $0,8$ $0,9$ 1	No viaticar en $t = 0$ y viaticar δ en $t = 1$
2	No viaticar ni en $t = 0$ ni en $t = 1$

Tabla 3.4: Decisión óptima del consumidor al variar α

Como es de esperar, a medida que el valor de α aumenta, la tendencia por vender es cada vez menor.

Para valores reducidos de α el tomador vende la totalidad de su póliza y, a medida que va aumentando, la herencia va siendo cada vez más valorada y éste tiende mantener al menos una parte de la póliza activa. Para valores de $\alpha > 1{,}30$, toda la póliza permanece en manos del propietario de manera que las herencias alcanzan su valor máximo.

El análisis es más preciso al observar la evolución de los valores óptimos $C_0^*,\ H_1^*,\ C_1^*,\ H_2^*$, en la Figura 3.8.

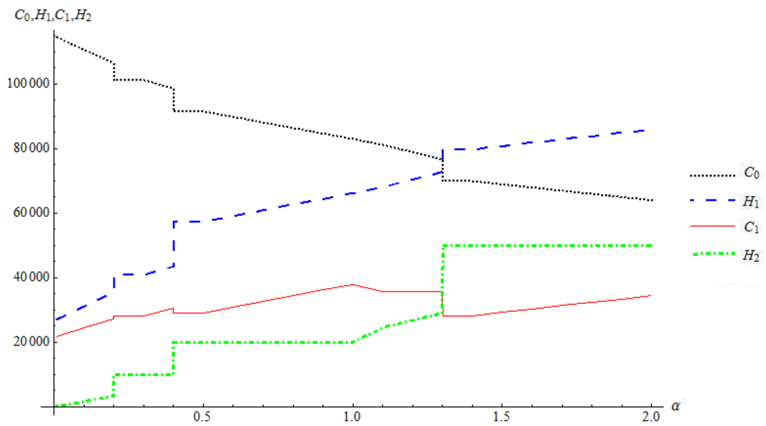

Figura 3.8: Distribución entre consumos y herencias al variar α

Para valores reducidos de α ($\alpha \to 0$), el consumo del primer año alcanza prácticamente la totalidad de la riqueza disponible; el tomador mantiene activa parte de su póliza y, en caso de morir, la herencia en $t = 1$ será equivalente al capital asegurado, M'. Si no muere, entonces vende la póliza restante para poder consumir durante el segundo año, de manera que la herencia al final de ese año tiende a cero.

A medida que α aumenta, el nivel de consumo del primer año disminuye claramente. Los saltos decrecientes de esta variable coinciden con los cambios de decisión adoptados con respecto a la venta de la póliza y el decrecimiento observado en cada uno de los intervalos resultantes es debido a un comportamiento ahorrador por parte del agente. Por el contrario las herencias siguen la tendencia inversa. Se comprueba que el nivel de consumo del segundo año es muy bajo, incluso para valores de α reducidos.

Por tanto, ante un aumento de α, como el beneficio por muerte correspondiente a la parte de la póliza que no ha sido vendida permite llegar al nivel deseable de herencia para $t = 2$, el nivel de consumo del segundo año no siempre decrece; a excepción de valores de $\alpha > 1,3$ donde este consumo decrece pues ya no resulta óptimo vender al inicio del segundo año.

3.4.2.3. Variación de β

Los datos utilizados son los mismos que hemos asumido en la Tabla 3.1, excepto para el valor de β.

El parámetro β refleja el factor anual de descuento intertemporal. Al considerar únicamente dos períodos, un valor reducido de β indica que el individuo no está preocupado en cuanto a lo que le sucederá en el segundo período. Valores elevados de β indican mayor preocupación con respecto a este segundo período (año).

La Tabla 3.5 muestra cuándo la decisión de vender o no cambia ante incrementos de β.

β	Decisión
$0,01$ $0,1$ $0,2$ $0,3$	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$
$0,4$ $0,5$	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar ρ en $t = 1$
$0,6$ $0,7$ $0,8$ $0,9$ 1	No viaticar en $t = 0$ y viaticar δ en $t = 1$

Tabla 3.5: Decisión óptima del consumidor al variar β

Observamos que con estos datos específicos que hemos escogido, la decisión óptima es siempre la de vender, sea la totalidad de la póliza sea únicamente una parte de ella. Podemos esperar que ante aumentos del valor de β, la tendencia a vender será cada vez menor.

Para valores de β reducidos, el individuo prefiere consumir prácticamente toda su riqueza disponible durante el primer año, que ahorrar para poder consumir a niveles razonables durante el segundo año. Se trata de un individuo impaciente. Un aumento en β refleja una mayor preocupación del individuo por su futuro (en su caso, por el segundo año). Así, es obvio observar un decrecimiento de la variable consumo en el primer año y, por consiguiente, un incremento de la variable consumo en el segundo año. Estos resultados se muestran en la Figura 3.9, donde quedan reflejadas las evoluciones de nuestras cuatro variables, C_0^*, H_1^*, C_1^*

y H_2^*.

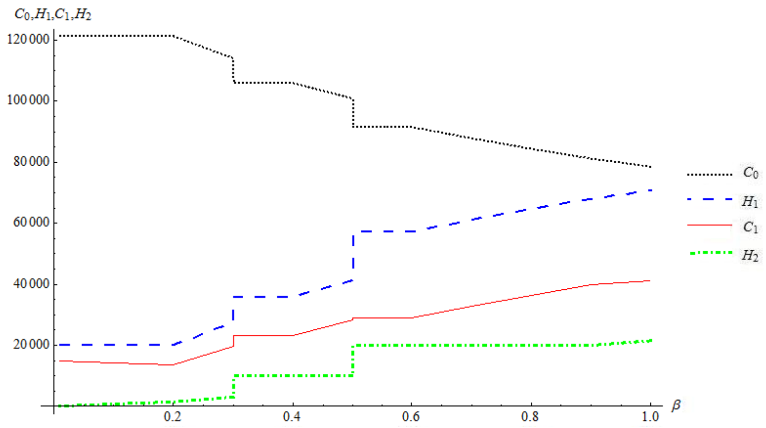

Figura 3.9: Distribución entre consumos y herencias al variar β

3.4.2.4. Variación de γ_1

El parámetro γ_1 refleja el precio pagado por el proveedor de viaticals por la compra de la póliza. Equivale al porcentaje aplicado sobre el valor actual actuarial de la póliza. Una vez más, los datos con los que trabajamos son los que se presentan en la Tabla 3.1, excepto el valor de γ_1. En la Tabla 3.6 se presentan los resultados obtenidos:

γ_1	Decisión
0,01 0,1	No viaticar ni en $t = 0$ ni en $t = 1$
0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8	No viaticar en $t = 0$ y viaticar δ en $t = 1$
0,9	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar ρ en $t = 1$
1	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$

Tabla 3.6: Decisión óptima del consumidor al variar γ_1

Intuitivamente parece evidente que para valores reducidos de γ_1 no sale a cuenta vender el activo, mientras que para valores en que $\gamma_1 \to 1$, toda la póliza se vende. Valores intermedios de γ_1 implican necesariamente la venta de parte de la póliza, en particular, ante aumentos en γ_1 la póliza tiende a venderse cada vez más pronto. Estas conclusiones se evidencian en la Tabla 3.6.

La Figura 3.10 refleja la evolución de los valores óptimos de C_0^*, H_1^*, C_1^* y H_2^*.

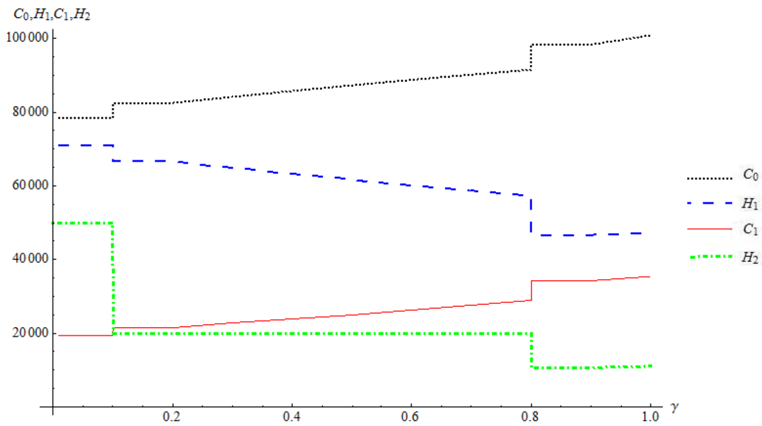

Figura 3.10: Distribución entre consumos y herencias al variar γ_1

Obviamente, el consumo asociado a ambos años aumenta por la venta de parte de la póliza. En el rango más amplio de posibles valores, $0{,}1 < \gamma_1 < 0{,}8$, la decisión óptima coincide con la venta de parte de la póliza en $t = 1$. El nivel óptimo de consumo incrementa a lo largo del intervalo pero ello implica una disminución en la herencia dejada al final de este primer período. Una vez parte de la póliza ha sido vendida, el consumo asociado al segundo período aumenta y la herencia en $t = 2$ es igual al beneficio por muerte restante.

Antes de concluir este apartado cabe decir que, considerando los cuatro parámetros analizados hasta el momento, existe una estrategia en cuanto a la venta de la póliza que nunca resulta ser óptima. Se trata del caso 3, esto es, viaticar un porcentaje δ en $t = 0$ y no viaticar en $t = 1$. Así pues, para los datos escogidos, si el tomador decide vender en $t = 0$, entonces seguro que también decidirá vender en $t = 1$ a fin de maximizar su utilidad esperada. Este resultado parece lógico; si el óptimo es vender en $t = 0$, entonces la decisión de vender se mantiene en $t = 1$.

3.4.2.5. Variación de δ

El análisis del parámetro δ es importante en cuanto nos da la solución óptima final de nuestro problema particular. En efecto, dados unos parámetros iniciales, la estrategia óptima supondrá vender una parte de la póliza. La incógnita ahora es conocer qué cantidad y en qué momento. Como se puede apreciar en la Tabla 3.7, la decisión óptima siempre es vender, al menos una parte de la póliza. Si comparamos todas las utilidades esperadas derivadas de cada posible δ, concluimos que la estrategia óptima para este agente específico es vender el 80 % de la póliza en $t = 1$.

δ	Decisión	Utilidades
0	Viaticar δ en $t = 0$	16,1094
0,1	y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$	16,1064
0,2		16,1046
0,3	Viaticar δ en $t = 0$	16,1068
0,4	y viaticar ρ en $t = 1$	16,1072
0,5		16,1054
0,6		16,1093
0,7	No viaticar en $t = 0$	16,1182
0,8	y viaticar δ en $t = 1$	16,1194
0,9		16,1149
1	Viaticar δ en $t = 0$ y viaticar $(1 - \delta)$ en $t = 1$	16,0757

Tabla 3.7: Decisión óptima del consumidor al variar δ

La estrategia óptima encontrada corresponde al caso 4; esto es, no viaticar en $t = 0$ y viaticar un porcentaje $\delta = 0,8$ en $t = 1$. Como no se vende en $t = 0$, el beneficio por muerte y la prima son las consideradas inicialmente, esto es, $M = 50.000$ y $P = 1.500$. En $t = 1$, se vende el 80 % de la póliza y por ello, el tomador recibe la cantidad

$$VSV_1^{0,8} = 29.809,23;$$

Dado que el 20 % de la póliza se mantiene activa, cubriendo un beneficio por muerte $M' = 0,2 \cdot M = 10.000$, el tomador paga una prima $P' = 0,2 \cdot P = 300$ en $t = 1$. Los valores óptimos de los consumos y las herencias son

$$C_0^* = 94.931,94\ ,\ H_1^* = 53.710,78\ ,\ C_1^* = 33.220,01\ ,\ H_2^* = 10.000.$$

Finalmente, hay que remarcar que faltaría un último análisis consistente en la opción de viaticar un porcentaje δ en $t = 0$ y un porcentaje ρ en $t = 1$. Este análisis consistiría en calcular las utilidades esperadas derivadas de viaticar un determinado porcentaje ρ habiendo viaticado cada una de las δ contempladas en este apartado. La mayor de ellas será la estrategia óptima.

3.5. Conclusiones

En esta sección, se ha obtenido una expresión analítica al problema de optimización considerado. Este problema consiste en maximizar la utilidad esperada de un tomador y, a su vez, asegurado enfermo terminal -con una vida residual máxima de dos años- que debe decidir si vender o no su póliza (y en caso de venderla, cuando hacerlo) en el mercado secundario de seguros de vida. Hemos trabajado dentro del marco de la teoría de la utilidad esperada, de manera que la solución a nuestro problema coincide con la decisión que aporte al consumidor una utilidad esperada más elevada. De cara a obtener soluciones analíticas y numéricas, hemos considerado un caso particular para nuestro problema general, el caso logarítmico (con funciones de utilidad logarítmicas). Cabe decir que las funciones de utilidad logarítmicas son un caso particular de las funciones de utilidad potenciales, así que los resultados obtenidos podrían ser ampliados a más funciones de utilidad de dicha familia. Por último, hemos realizado un análisis de sensibilidad para comprobar como varía la solución óptima ante posibles desviaciones de determinadas variables.

Los resultados de esta sección sólo son válidos para pólizas comercializadas en el mercado de los viaticals. Por eso, en la siguiente sección extenderemos nuestra investigación al mercado de los life settlements. Al igual que los viaticals, los life settlements son contratos que permiten la transferencia de los derechos de una póliza de vida de un individuo al otro. La diferencia se halla en el estado de salud del asegurado. Para contratar un life settlement, este asegurado debe presentar una esperanza de vida mayor. El modelo en tiempo discreto que hemos presentado en esta sección podría plantearse para más de dos períodos. Sin embargo, el procedimiento es muy farragoso, los resultados muy incómodos y, en ocasiones, simplemente no podemos obtener soluciones generales que abarquen la mayoría de situaciones. Así pues, para el mercado de los life settlements, resolveremos un modelo de optimización dinámica pero en el tiempo continuo y con otras técnicas de programación dinámica.

Capítulo 4

Estrategia Óptima de Consumo y de Momento de Venta de una Póliza de Vida. Contratación de un Life Settlement

4.1. Introducción

Este capítulo se centra en los life settlements. El objetivo es similar al anterior capítulo, es decir, la construcción de un modelo económico que permita determinar si la decisión de vender la póliza de vida en el mercado secundario resulta óptima o no. Y, en caso de ser óptima, qué momento es mejor para vender.

El modelo de optimización para los viaticals es discreto y se ha resuelto aplicando el método de Lagrange y las correspondientes condiciones de Kuhn-Tucker. Hemos podido encontrar soluciones analíticas gracias a tener un horizonte temporal muy corto, de dos años. El tomador sólo se plantea la opción de vender o no la póliza al inicio del primer año y al inicio del segundo año. Si desarrollamos el modelo para los life settlements de la misma manera, tenemos que plantear la opción de vender o no muchas más veces -por ser la esperanza de vida máxima en la industria de life settlements mucho mayor, de 15 años- y el problema no permite la obtención, en general, de resultados analíticos.

En este sentido, este capítulo puede verse como una extensión del capítulo anterior porque se incluyen en el modelo más de dos períodos. Sin embargo, este nuevo modelo deberá tratarse utilizando técnicas de programación dinámica más sofisticadas y será planteado en tiempo continuo.

Para este modelo, además, partiremos de un funcional estocástico donde la fuente de aleatoriedad viene provocada por la variable vida residual, T. Los modelos de optimización que incorporan momento de fallecimiento (momento final) estocástico fueron introducidos por primera vez en Yaari (1965). En el modelo de Yaari (1965), el único elemento de incertidumbre es el momento de muerte puesto que se mueve en un ambiente financiero determinista. El objetivo del agente es maximizar la utilidad intertemporal esperada que puede representarse por:

$$E\left[\int_0^T U(c(t))dt\right],$$

donde T es la vida residual del individuo (aleatoria) con $T \in [0, \widehat{t}_x - x]$; siendo x la edad y $\widehat{t}_x$ la edad máxima de este individuo (enfermo) por encima de la cual seguro que no vivirá. La variable $c(t)$ representa el consumo en cada instante t y $U[.]$ es la función de utilidad instantánea asociada a este consumo. Este funcional estocástico puede ser transformado fácilmente en uno determinista con la incorporación de una determinada función de supervivencia, $\widehat{S}(t)$:

$$\int_0^{\widehat{t}_x - x} \widehat{S}(t)U(c(t))dt.$$

Son varios los trabajos realizados a partir de Yaari (1965), pero entre ellos se destaca Richard (1975) que realiza una combinación entre el modelo de optimización de la cartera de Merton (1969, 1971) y el modelo de Yaari (1965) para tratar un modelo de inversión/consumo, con seguro de vida y momento de muerte aleatorio que, al igual que Yaari (1965), queda acotado en el intervalo $[0, \widehat{t}_x - x]$. Así, las variables de control (o de decisión) consideradas en el problema de optimización son el consumo, la cartera y el seguro de vida. El objetivo de Richard (1975) es:

$$\text{máx}\, E\left[\int_0^T U(c(t), t)dt + V(H(T), T)\right],$$

donde $H(T)$ representa la herencia dejada a los herederos del tomador de la póliza de vida tras su muerte y $V[.]$ representa la función de utilidad asociada a esta herencia. Cabe decir que el modelo de Richard (1975) presenta algunos inconvenientes. En primer lugar, la función valor (o utilidad esperada máxima) en el instante final no queda bien definida. Esto es debido a que la variable aleatoria vida residual ha quedado acotada en un determinado instante, lo cual puede llevar a compras infinitas de seguro de vida justo instantes antes de la muerte del agente. Este inconveniente se acentúa porque este tipo de problemas se suelen analizar utilizando el método de la programación dinámica que funciona por recurrencia hacia atrás en el tiempo, es decir, el problema se analiza partiendo desde el final. Como señala Leung (1944), un segundo problema del modelo de Yaari y que Richard mantiene se debe a la imposibilidad de garantizar la existencia de una solución interior durante todo el horizonte temporal.

Con el objetivo de solventar estos problemas, Pliska y Ye (2007) plantearon un modelo intertemporal que abandona el concepto de vida residual acotada, permitiendo que $T \in [0, \infty)$. Su objetivo consiste en maximizar:

$$E\left[\int_0^{\tau\wedge T} U(c(i), i)di + V(H(T), T)1_{\{T\leq\tau\}} + L(W(\tau))1_{\{T>\tau\}}\right],$$

donde $\tau\wedge T \equiv \text{mín}\{\tau, T\}$, siendo T el momento de fallecimiento y τ el momento de jubilación. $L(W(\tau))$ representa la función de utilidad del agente sobre la riqueza disponible en el momento de llegar a la jubilación (en caso de haber sobrevivido, es decir, $1_{\{T>\tau\}}$). En caso contrario ($1_{\{T\leq\tau\}}$), el agente generará utilidad sobre la herencia en el instante T (en el fallecimiento). Así pues, a diferencia de Richard (1975) que fija el horizonte de planificación en el límite superior de la variable vida residual, T, Pliska y Ye (2007) consideran como momento final de dicho horizonte un determinado instante τ, esto es, el momento de jubilación, siempre que el agente llegue vivo. Otra diferencia con respecto al modelo planteado en Richard (1975) es la inclusión de la función de utilidad, $L(W(\tau))$, en el momento final.

Una vez construida la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) y deducida la regla óptima de decisión, Pliska y Ye (2007) obtienen soluciones explícitas para funciones de utilidad de tipo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*).

El modelo que nosotros planteamos en este capítulo parte de un funcional que recoge características de los tres modelos que acabamos de describir. El objetivo de nuestro agente decisor será maximizar su utilidad sobre el consumo y su utilidad sobre la herencia, teniendo en cuenta que tiene la opción de vender su póliza de vida en el mercado secundario en cualquier instante $s \in [0, T[$. Así, las variables de decisión de nuestro modelo serán tanto el flujo de consumo $c(t)$ como el momento de venta de la póliza s, si es que efectivamente decide vender. No consideraremos la opción de invertir en activos de riesgo. Nuestra variable aleatoria vida residual T queda acotada en $[\widehat{t_x} - x]$, tal y como se define en Yaari (1965) o Richard (1975) pero nuestro funcional, aunque de naturaleza diferente, se asemeja más al modelo de Pliska y Ye (2007), en el sentido que considera la eventualidad de dos posibles sucesos, T y s (T y τ para Pliska y Ye (2007)), como se verá más adelante.

El capítulo presenta la siguiente estructura. En el apartado 4.2, se presenta el modelo, el objetivo del agente decisor[1] y su horizonte temporal de planificación. Además, repasamos las principales funciones actuariales que utilizaremos. En el apartado 4.3, resolvemos el modelo. La resolución se lleva a cabo por partes; es decir, se divide el horizonte temporal en dos períodos: el período anterior y el período posterior a la venta de la póliza. Ambas partes se resuelven, en primer lugar, considerando que las utilidades sobre el consumo y sobre la herencia son funciones potenciales con el mismo coeficiente de aversión al riesgo y, en segundo lugar, considerando un caso límite de estas funciones de utilidad potenciales, introduciendo funciones de utilidad logarítmicas (como para el modelo de los viaticals). En el apartado 4.4 se presenta una ilustración numérica. Considerando unos datos de referencia iniciales se encuentra la utilidad esperada derivada de cada momento de venta y se extrae la estrategia óptima para el consumidor, que es aquella que ofrece una mayor utilidad esperada. El ejemplo se realiza tanto para utilidades potenciales como para utilidades logarítmicas. Además, se realiza un análisis de sensibilidad para comprobar como cambian las preferencias del tomador (o agente decisor) ante variaciones de los principales parámetros que considera nuestro modelo de optimización. Finalmente, en el apartado 4.5, se presenta un resumen de los principales resultados.

4.2. Descripción del problema general

En este apartado se presenta el modelo económico que permite al tomador de un seguro de vida vender o no su póliza en el mercado de los life settlements (siempre que éste cumpla con los requisitos del mercado). Nuestros resultados se obtienen dentro del marco de la teoría de la utilidad esperada. Por eso, nuestro

[1] Recordemos que, igual que en el Capítulo 3, nuestro agente decisor es el tomador de la póliza de vida que, a su vez, es asegurado de la misma.

objetivo es maximizar la utilidad intertemporal esperada de un individuo derivada de la contratación o no de un life settlement.

Consideramos el caso en que el tiempo es una variable continua definida en un horizonte de tiempo finito $[0;T]$, donde T es la variable que describe el momento de fallecimiento. El momento de fallecimiento T es una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[0, \widehat{t_x} - x[$, donde $\widehat{t_x}$ es la edad máxima que puede alcanzar el asegurado y x es su edad actual. En efecto, las pólizas susceptibles de venta en el mercado de los life settlements son aquellas cuyos asegurados tienen 65 años o más, con problemas médicos que supongan una esperanza de vida entre dos y quince años. Así, el momento T debe ser tal que $2 \leq \widehat{e_x} \leq 15$, donde $\widehat{e_x}$ es la esperanza de vida de un individuo enfermo de edad x.

Sea w la variable que representa la riqueza del agente y que define el estado del sistema, c el consumo o variable de control (o de decisión) del agente, $U(w(t), c(t), t)$ la función instantánea de utilidad esperada en el momento t, T el horizonte de planificación (momento final incierto) y $H(T)$ la función final o la herencia.

La economía consta de dos tipos de mercado, el financiero y el asegurador. En relación con el mercado financiero asumiremos que el individuo únicamente invierte parte de su riqueza en t, $w(t)$, en un activo libre de riesgo cuyo precio es $b(t)$ que varía de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial: $db(t) = rb(t)dt$, de forma que el rendimiento obtenido derivado de su inversión es r. También asigna parte de su riqueza a consumo, siendo $c(t) \geq 0$. Respecto del mercado asegurador, consideraremos que el individuo es propietario (y a la vez asegurado) de un seguro de vida cuyo beneficio por muerte es M. El seguro fue contratado cuando el asegurado era un individuo sano pero en la actualidad su estado de salud ha empeorado. Por tanto, si decidiera vender su póliza en el mercado secundario en un determinado momento s, es decir a la edad $x + s$, recibiría la cantidad LSV_{x+s}. La cantidad LSV_{x+s} se calcula igual que VSV_{x+k}, con $k = 0, 1$ (ecuación (3.2)), es decir, como la diferencia entre el valor actual actuarial del beneficio por muerte y el valor actual actuarial de las primas pendientes de pago. Esta diferencia la multiplicamos por el parámetro γ_2, donde $1-\gamma_2$ representa los costes de transacción asociados con la operación de compra/venta. Sin embargo, para ser coherentes con nuestro problema de optimización, a diferencia de VSV_{x+k}, LSV_{x+s} debe tratarse en tiempo continuo. Por tanto, si en tiempo discreto defimos

$LSV_{x+s}(t)$, con $t \in [s, s+1]$[2], tal que:

$$LSV_{x+s} = \gamma_2 \left[M \sum_{t=0}^{\widehat{t}_x - x - s - 1} {}_{t/}\widehat{q}_{x+s} \cdot (1+r)^{-(t+1)} - P \sum_{t=0}^{\widehat{t}_x - x - s - 1} {}_{t}\widehat{p}_{x+s} \cdot (1+r)^{-t} \right], \tag{4.1}$$

$$0 < \gamma_2 < 1,$$

donde las probabilidades de supervivencia y de fallecimiento pertenecen a la tabla de mortalidad *1975-80 Basic Mortality Table* que hemos descrito en el Capítulo 2 y que posteriormente han sido multiplicadas por un factor de recargo que representa la gravedad del estado de salud del asegurado, ahora el valor de la póliza de vida se calcula como:

$$LSV_{x+s} = \gamma_2 \left[M \int_0^{\widehat{t}_x - x - s} \widehat{f}_{x+s}(t) \cdot e^{-\rho \cdot t} - P \int_0^{\widehat{t}_x - x - s} \widehat{S}_{x+s}(t) \cdot e^{-\rho \cdot t} \right] dt,$$

$$0 < \gamma_2 < 1,$$

donde $\widehat{f}_{x+s}(t)$ y $\widehat{S}_{x+s}(t)$ son funciones de densidad y de supervivencia que definiremos a continuación. Recordemos que los términos con tilde reflejan a un individuo enfermo, es decir, un individuo con probabilidades de fallecimiento mayores con respecto a las de un individuo sano.

El parámetro γ_2 permite que el LSV_{x+s} sea menor al beneficio por muerte y a la vez superior al valor de rescate. En realidad, refleja los impuestos, comisiones, etc, que se pagan por la transacción del activo y que ya estudiamos en el Capítulo 2. El uso de dicho parámetro y no de la expresión (2.5) del Capítulo 2 se debe sencillamente a una simplificación de los cálculos. Obsérvese que se sigue cumpliendo con la legislación de la NAIC puesto que el precio pagado por la póliza equivale a un porcentaje del beneficio por muerte M.

Cabe decir que LSV es menor a VSV; las probabilidades de fallecimiento en el primer caso son mayores y, además, $\gamma_1 > \gamma_2$. Los individuos que contraten un viatical tienen una esperanza de vida inferior a los que contraten un life settlement. A menor esperanza de vida, mayor valor real de la póliza y por tanto mayor precio a pagar por el activo. Igual que hicimos para VSV, a partir de ahora fija-

[2] Es decir, el LSV sólo se revaloriza anualmente.

remos la edad x en $t = 0$ por lo que representaremos LSV en el momento s como LSV_s, así como las demás variables sujetas a x, con el objetivo de simplificar la nomenclatura.

La decisión entre vender o no este activo afecta directamente al legado que deja el individuo a sus herederos tras su muerte. En efecto, la venta de la póliza de vida supone un cambio en el beneficiario del seguro, siendo el nuevo beneficiario el inversor o la compañía de life settlements. Así, la herencia en caso de haberse vendido la póliza equivale a los ahorros que se hayan realizado a lo largo de la vida del tomador (o parte de la riqueza no consumida) y tienen en cuenta, además, el ingreso de la cantidad LSV_s por la venta de la póliza. En caso de no vender la póliza, además de los ahorros producidos, los herederos reciben el beneficio por muerte pactado en el contrato. De este modo se definen dos posibles funciones para la herencia, dependiendo del momento en que tenga lugar el fallecimiento del asegurado:

$$\begin{aligned} H_1(T) &= w(T) + M \qquad && \text{si } T < s, \text{ o bien} \\ H_2(T) &= w(T) && \text{si } T \geq s. \end{aligned}$$

Supongamos que el asegurado está vivo en $t = 0$ y presenta una vida residual T, variable aleatoria no-negativa con valores en $[0, \widehat{t_x} - x[$ donde $\widehat{t_x} - x$ es el número máximo de años que vivirá el asegurado. Supongamos además que la variable aleatoria T está caracterizada por una función de distribución y una función de densidad tales que:

$$\widehat{F}(t) = P(T < t) = \int_0^t \widehat{f}(u)\, du.$$

La función $\widehat{S}(t)$ refleja la función de supervivencia y se define como la probabilidad de que el tiempo de vida sea superior o igual a t:

$$\widehat{S}(t) = P(T \geq t) = 1 - \widehat{F}(t) = \int_t^{\widehat{t_x}-x} \widehat{f}(t)\, dt.$$

La función hazard o tanto instantáneo de mortalidad para un individuo que ha sobrevivido hasta el instante t se define como:

$$\widehat{\mu}(t) = \frac{\widehat{f}(t)}{\widehat{S}(t)} = -\frac{d}{dt} \log \widehat{S}(t). \tag{4.2}$$

Así, la función de supervivencia también puede representarse en función de $\widehat{\mu}(t)$

como:

$$\widehat{S}(t) = e^{-\int_0^t \widehat{\mu}(s)ds}. \tag{4.3}$$

Denotamos por $\widehat{F}_\tau(t)$ la función de distribución que representa la probabilidad condicionada a que el consumidor muera antes del momento t, estando vivo en el momento τ, para $\tau < t$ (Yaari (1965)). En tal caso,

$$\widehat{F}_\tau(t) = \frac{\widehat{F}(t)}{\widehat{S}(\tau)}.$$

Finalmente, $\widehat{S}_\tau(t)$ representa la función de supervivencia condicionada a que el consumidor viva más allá de t o hasta t, estando vivo en el momento τ, para $\tau < t$:

$$\widehat{S}_\tau(t) = \frac{\widehat{S}(t)}{\widehat{S}(\tau)}.$$

Como veremos, mediante el uso de estas funciones de supervivencia y de mortalidad, así como de la variable $\widehat{t}_x$, el problema del momento incierto de fallecimiento puede ser simplicado fácilmente .

Si el agente parte de una riqueza inicial $w(0) = w_0 > 0$, la evolución de la riqueza del consumidor $w(t) \in [0, T]$, teniendo en cuenta que no ha habido ingresos, en forma por ejemplo de salario o de pensión, viene definida como:

$$w(t) = w_0 - \int_0^t c(i)di + \int_0^t \frac{w(i)}{b(i)} db(i). \tag{4.4}$$

Reescribiendo (4.4) en forma de ecuación diferencial se obtiene:

$$\dot{w} = w \cdot r - c \qquad \text{con} \quad w(0) = w_0 \tag{4.5}$$

Una vez definido el estado de la economía y del agente decisor podemos plantear el objetivo del modelo:

$$\begin{aligned} \text{máx } J^{c(\cdot)}(0, w_0) = E\,[&\int_0^{s\wedge T} e^{-\rho j} \cdot U\left(c_1(j)\right)\, dj + e^{-\rho T} \cdot V\left(H_1(T)\right) \cdot 1_{\{T \leq s\}} \\ &+ \left[\int_s^T e^{-\rho u} \cdot U\left(c_2(u)\right) du + e^{-\rho T} \cdot V\left(H_2(T)\right)\right] \cdot 1_{\{T > s\}}\ ] \end{aligned} \tag{4.6}$$

restringido a (4.5), donde $J^{c(\cdot)}(0, w_0)$ es la utilidad intertemporal esperada total calculada en el instante inicial $t = 0$, $U(c, .)$ la utilidad instantánea sobre el consumo y $V(H, .)$ la utilidad sobre la herencia. Se asume que $U(c, .)$ es estrictamente cóncava en c y que $V(H, .)$ es estrictamente cóncava en H. Como es habitual en los problemas de decisión intertemporal, se asume una tasa de descuento intertemporal constante, es decir, las utilidades instantáneas se descuentan mediante una función de descuento exponencial que considera una tasa instantánea de preferencia temporal, ρ, de acuerdo con el modelo de Utilidad Descontada (DU) introducido en Samuelson (1937).

El problema de nuestro consumidor se basa en la elección de la estrategia óptima de consumo y de venta de su póliza de vida. Para ello, debe maximizar su utilidad respecto al consumo y respecto a la herencia. Nuestro funcional, sin embargo, se divide en dos tramos que coinciden con el período anterior y posterior a la venta de la póliza. Esta división del funcional viene dada por el cambio que se produce en el comportamiento del consumidor al vender su seguro de vida. De ahí la distinción entre $U(c_1(j))$ y $U(c_2(u))$ y $V(H_1(T))$ y $V(H_2(T))$. El consumidor obtiene utilidad del consumo, $U(c_1)$, hasta que tiene lugar el primero de los dos posibles sucesos: venta en s o muerte en T. En caso de que el evento muerte ocurra primero, se obtiene utilidad sobre la herencia, $V(H_1)$ (dado que $1_{\{T\leq s\}} = 1$) y el problema finaliza. Si por el contrario, el evento muerte ocurre después (y $1_{\{T\geq s\}} = 1$), obviamente no se obtiene utilidad sobre H_1, pero tiene lugar el problema referente al segundo período $[s, T[$, donde el consumidor obtiene utilidad del consumo, $U(c_2)$, hasta el momento de fallecer y utilidad sobre la herencia, $V(H_2)$, en el momento de fallecer.

El funcional (4.6) está inspirado en Pliska y Ye (2007). El objetivo del modelo de Pliska y Ye (2007) es determinar la regla óptima de decisión respecto de las variables consumo y cantidad de seguro de vida que debe contratarse, teniendo en cuenta la ocurrencia de dos posibles sucesos: el fallecimiento y la jubilación, siendo el momento de fallecimiento estocástico y el momento de jubilación conocido. En nuestro modelo, en cambio, el fallecimiento es también estocástico e incontrolable pero la venta es un evento que decide el consumidor. El momento de venta s puede darse en cualquier instante, dependiendo de cuándo vaya a optimizar el consumidor su utilidad. Por tanto, s debe considerarse como variable de decisión del problema de optimización (además del consumo).

4.3. El modelo

Como acabamos de ver, el objetivo de nuestro modelo es obtener la estrategia óptima de un tomador que debe decidir entre contratar o no un life settlement y, en caso de contratarlo, cuándo hacerlo. La utilidad esperada que debe maximizar definida en (4.6) se divide en dos partes que coinciden con los dos períodos que componen el horizonte temporal del problema: el período anterior a la venta de la póliza y el período posterior a la venta de la póliza, en caso de estar vivo en el momento de venta.

La resolución del problema se lleva a cabo por partes y mediante programación dinámica. Esto significa resolver en primer lugar el problema correspondiente al período posterior a la venta de la póliza, $[s, T[$, asumiendo que el individuo llega vivo a s. Obtenemos pues una regla de decisión óptima para $c^*(t)$ y una función valor[3], $V(w,t)$, correspondiente al tramo $[s, T[$. Dicha función valor actualizada en el momento s se incorpora en el funcional (4.6) como función final dada, sustituyéndola por el tramo que justamente representa, $[s, T[$. De esta manera obtenemos una nueva utilidad esperada a maximizar con horizonte temporal $[0, s]$. Este período coincide con la etapa anterior a la venta de la póliza $[0, s[$ e incorpora una función final en s que describe la utilidad máxima para el período $[s, T[$.

Gráficamente:

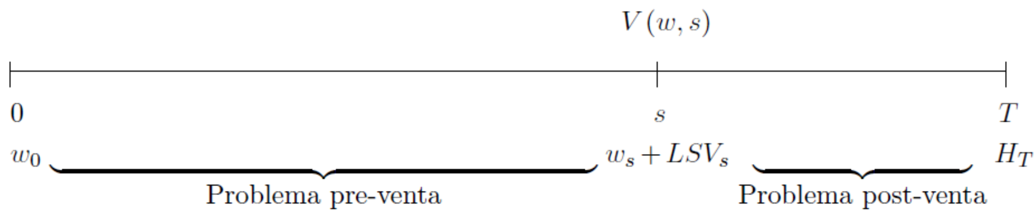

Figura 4.1: Situación económica de contratar un life settlement en el momento s

Para estudiar problemas de control óptimo, las técnicas utlizadas son el Principio del Máximo de Pontryagin y la Programación Dinámica (mediante la denominada ecuación de programación dinámica o ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (de ahora en adelante ecuación HJB)). La resolución del problema definido en el intervalo $[s, T[$ se hará mediante programación dinámica dado que este método nos permite obtener una función valor de manera natural que servirá como fun-

[3] La función valor se define como $V(w,t) = \max\ J(w(t), c(t))$.

ción final óptima del problema correspondiente al intervalo $[0, s[$.

Por ejemplo, si queremos maximixizar un funcional definido como

$$J^{c(\cdot)}(w_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} L[w(t), c(t)]dt + F[w(t_f)]$$

restringido a

$$\dot{w}(t) = f(w(t), c(t)), \quad w(t_0) = w_0$$

la ecuación HJB consiste en una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal y se define como

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(w, t) + \max_{c \in U}\{L(w, c) + \frac{\partial V}{\partial w}(w, t) \cdot f(w, c)\}, \ t \in [t_0, t_f], \ w \in \mathbb{R}^{\ltimes},$$

donde $V(x, t)$ es la función valor y que definimos como

$$V(w_0, t_0) = \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J^{u(\cdot)}(w_0, t_0).$$

siendo $t_0 = 0$ el momento inicial y t_f el momento final. El control $c(\cdot)$ pertenece a una familia especial $\mathcal{U}$ de funciones con valores en un subconjunto U de $\mathbb{R}^{\ltimes}$.

En cambio, el Principio del Máximo establece que si $c^*(\cdot)$ y $w^*(\cdot)$ son soluciones del problema entonces:

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t) = -H_w(w^*(t), c^*(t), \lambda(t)), \qquad \text{con} \quad \lambda(t_f) = F_{w(t_f)}(w, t_f), \\
&\dot{w}(t) = H_\lambda(w^*(t), c^*(t), \lambda(t)), \\
&H(w^*(t), c^*(t), \lambda(t)) = \max_{u \in U} H(w^*(t), c, \lambda(t)),
\end{aligned}$$

donde λ es la variable de co-estado y H es el Hamiltoniano que se define como

$$H(w, c, \lambda, t) = L(w, c) + \lambda \cdot f(w, c).$$

4.3.1. Resolución del problema posterior a la venta

Seguidamente resolvemos el problema de optimización de un individuo que ha vendido su póliza de vida en un determinado instante s. El funcional del problema coincide justamente con la segunda integral de la expresión (4.6), asumiendo, sólo de momento, que el individuo ha llegado vivo a s, es decir $1_{\{T>s\}} = 1$.

Siendo s el momento inicial del problema, el objetivo del agente consiste en maximizar la siguiente expresión:

$$J(w(s), c(s), s) = E\left[\int_s^T e^{-\rho(j-s)} \cdot U\left(c_2(j)\right)\, dj + e^{-\rho(T-s)} \cdot V\left(H_2(T)\right)\right] \tag{4.7}$$

restringido a $\dot{w} = w \cdot r - c$ y asumiendo como condición inicial: $w(s) = w_s = w_s^- + LSV_s$.

Siguiendo a Yaari (1965), podemos simplificar la expresión (4.7), eliminando así la aleatoriedad de la variable T.

Lema 1 *Sea $\widehat{S}_s(j)$ la función de supervivencia condicionada (a estar vivo en el momento s) y $\widehat{\mu}(j)$ la función hazard o tanto instantáneo de mortalidad. En tal caso,*

$$\begin{aligned} J(w(s), c(s), s) &= E\left[\int_s^T e^{-\rho(j-s)} \cdot U(c_2(j))\, dj + e^{-\rho(T-s)} \cdot V(H(T))\right] \\ &= \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{S}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot \left[U(c_2(j)) + \widehat{\mu}(j) \cdot V(H_2(j))\right] dj. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} J(w(s), c(s), s) &= E\left[\int_s^T e^{-\rho(j-s)} \cdot U(c_2(j))\, dj + e^{-\rho(T-s)} \cdot V(H(T))\right] \\ &= \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{f}_s(j) \left[\int_s^j e^{-\rho(i-s)} \cdot U(c_2(i)) di\right] dj + \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{f}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot V(H_2(j))\, dj \\ &= \left[-\widehat{S}_s(j) \cdot \int_s^j e^{-\rho(i-s)} \cdot U(c_2(i))\, di\right]_s^{\widehat{t}_x - x} + \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{S}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot U(c_2(j))\, dj \\ &\quad + \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{f}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot V(H_2(j))\, dj \\ &= \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{S}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot U(c_2(j)) + \widehat{f}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot V(H_2(j)) dj \\ &= \int_s^{\widehat{t}_x - x} \widehat{S}_s(j) \cdot e^{-\rho(j-s)} \cdot \left[U(c_2(j)) + \widehat{\mu}(j) \cdot V(H_2(j))\right] dj \end{aligned}$$

■

Como hemos considerado que el consumidor ha llegado vivo a s, puede asumirse de momento que $\widehat{S}_s(j) = \widehat{S}(j)$ y $\widehat{f}_s(j) = \widehat{f}(j)$.

El problema estocástico provocado por la variable T ha sido transformado por un problema estándar determinista. Obsérvese también que la función de utilidad de la herencia ya no es una función final sino que ha sido introducida dentro del horizonte de planificación del agente.

A fin de obtener soluciones para nuestro consumidor se procede a resolver el modelo considerando la familia de funciones de utilidad de tipo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*). El uso de este tipo de funciones es muy común en los modelos de valoración de preferencias. Así, la función de utilidad sobre el consumo se define como:

$$U(c) = \frac{c^\sigma - 1}{\sigma} \quad \text{para} \quad \sigma < 1, \sigma \neq 0, \tag{4.8}$$

$$= \ln c \quad \text{para} \quad \sigma < 1, \sigma \to 0 \tag{4.9}$$

donde $1 - \sigma$ inclica el coeficiente de aversión relativa al riesgo.

Vemos que la utilidad potencial representada en la ecuación (4.8), cuando σ converge a 0, se transforma en una utilidad logarítmica (ecuación (4.9)), mediante el uso de la regla de l'Hôpital. Nuestro modelo se resolverá considerando en primer lugar que las preferencias del consumidor están representadas por unas utilidades potenciales y, en segundo lugar, se considerará el caso particular de utilidad logarítmica. Por otra parte, como la suma o resta de una constante en una función de utilidad no afecta al orden de las preferencias del agente, en nuestro modelo trabajaremos con la siguiente función de utilidad potencial: $U(c) = \frac{c^\sigma}{\sigma}$.

4.3.1.1. Funciones de utilidad potenciales

Sean las funciones de utilidad del consumo y de la herencia potenciales de modo que:

$$U(c_2) = \frac{c_2^\sigma}{\sigma},$$
$$V(H_2) = \alpha \cdot \frac{w_2^\sigma}{\sigma},$$

donde α representa la valoración que tiene el agente sobre la herencia respecto a su consumo. Obsérvese que, siendo el horizonte temporal $[s, \widehat{t_x} - x[$, la póliza ha sido vendida, el importe correspondiente al beneficio por muerte desaparece y por tanto la herencia únicamente contempla los ahorros realizados hasta la fecha de fallecimiento ($H_2 = w_2$).

El método de la programación dinámica está basado en el estudio de la función valor:

$$V(w,s) = \max_{c_2} \; J(w(s), c(s), s)$$

De forma que si $c_2^*(t)$ y $w^*(t)$, con $t \in [s, \widehat{t}_x - x]$, denotan la política óptima de comportamiento del agente decisor, entonces la función valor, $V_1(w,s)$, es tal que:

$$V_1(w,s) = \int_s^{\widehat{t}_x - x} \left[\widehat{S}(t) \cdot e^{-\rho(t-s)} \cdot \frac{c_2^{*\sigma}}{\sigma} + \widehat{f}(t) \cdot e^{-\rho(t-s)} \cdot \alpha \cdot \frac{w_2^{*\sigma}}{\sigma} \right] \; dt.$$

La ecuación de HJB correspondiente es

$$\rho \cdot V_1(w,t) - \frac{\partial V_1}{\partial t}(w,t) = \max_{c_2} \left\{ \widehat{S}(t) \frac{c_2^\sigma}{\sigma} + \widehat{f}(t) \alpha \frac{w_2^\sigma}{\sigma} + \frac{\partial V_1}{\partial w}(w,t)(w \cdot r - c_2) | c_2 \geq 0 \right\}, \tag{4.10}$$

con la condición de contorno

$$V_1(w, \widehat{t}_x - x) = 0.$$

Para poder resolver la ecuación (4.10) supondremos una estructura para la función valor. Siendo las funciones de utilidad de tipo potencial resulta natural suponer que una posible forma para la función valor sea:

$$V_1(w,t) = A(t) \cdot \frac{w^\sigma}{\sigma}, \tag{4.11}$$

donde $A(t)$ es una función desconocida.

Por tanto, dada la función valor y resolviendo el lado derecho de la ecuación (4.10), obtenemos el siguiente consumo óptimo:

$$c_2^*(t) = \left[\frac{A(t) \cdot w(t)^{\sigma - 1}}{\widehat{S}(t)} \right]^{\frac{1}{\sigma - 1}} \tag{4.12}$$

Sustituyendo (4.11) y (4.12) en (4.10) y reordenando los términos obtenemos:

$$w(t)^{\sigma}\left(\frac{\rho}{\sigma}A(t)-\frac{1}{\sigma}\dot{A}(t)-\frac{1}{\sigma\widehat{S}(t)^{\frac{1}{\sigma-1}}}A(t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}-\frac{\alpha\widehat{f}(t)}{\sigma}-rA(t)+\frac{1}{\widehat{S}(t)^{\frac{1}{\sigma-1}}}A(t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\right)=0,$$

De manera que $A(t)$ es la solución de las ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{A}(t)=A(t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\cdot\frac{\sigma-1}{\widehat{S}(t)^{\frac{1}{\sigma-1}}}+A(t)\cdot(\rho-r\sigma)-\alpha\widehat{f}(t) \tag{4.13}$$

con la condición final: $A(\widehat{t_x}-x)=0$.

Siendo $A^{*}(t)$ la solución de la ecuación (4.13), obtenemos la función valor correspondiente al tramo $[s,\widehat{t_x^{*}}-x[$,

$$V_1^{*}(w,t)=A^{*}(t)\cdot\frac{w(t)^{\sigma}}{\sigma} \tag{4.14}$$

que, actualizada al instante s, representa la función final óptima del problema correspondiente al tramo $[0;s]$.

Considerando funciones de utilidad CRRA genéricas (potenciales) no hemos podido obtener una solución analítica para la función valor de este tramo, debido a la imposibilidad de poder resolver la ecuación (4.13). Por eso, se resuelve a continuación el caso particular cuando σ converge a 0, es decir, el caso particular en que el consumidor presenta unas funciones de utilidad logarítmicas.

4.3.1.2. Funciones de utilidad logarítmicas

Sean las funciones de utilidad del consumo y de la herencia tales que:

- $U(c_2)=\ln c_2$,
- $V(H_2)=\alpha\cdot\ln H_2$.

La ecuación de HJB correspondiente es

$$\rho\cdot V_2(w,t)-\frac{\partial V_2}{\partial t}(w,t)=\max_{c_2}\left\{\widehat{S}(t)\left[\ln c_2+\widehat{\mu}(t)\alpha\ln w\right]+\frac{\partial V_2}{\partial w}(w,t)[wr-c_2]|c_2\geq 0\right\}, \tag{4.15}$$

$$V_2(w,\widehat{t_x}-x)=0. \tag{4.16}$$

Igual que antes podemos suponer una determinada estructura para la nueva función valor. Como las funciones de utilidad del consumidor son en este caso logarítmicas, una posible forma sería:

$$V_2(w,t) = A(t) \cdot \ln(w) + B(t), \tag{4.17}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son funciones desconocidas.

Por tanto, suponiendo (4.17) obtenemos el siguiente consumo óptimo:

$$c_2^*(t) = \frac{\widehat{S}(t)}{A(t)} \cdot w(t). \tag{4.18}$$

Sustituyendo (4.17) y (4.18) en (4.15) y reordenando los términos obtenemos:

$$\left(\rho A(t) - \dot{A}(t) - \widehat{S}(t) - \alpha \widehat{f}(t)\right) \ln w + \left(\rho B(t) - \dot{B}(t) - \widehat{S}(t) \ln \frac{\widehat{S}(t)}{A(t)} - rA(t) + \widehat{S}(t)\right) = 0$$

De manera que $A(t)$ y $B(t)$ son las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden siguientes:

$$\dot{A}(t) = \rho \cdot A(t) - \widehat{S}(t) - \alpha \cdot \widehat{f}(t), \tag{4.19}$$

$$\dot{B}(t) = \rho \cdot B(t) - \widehat{S}(t) \cdot \ln \frac{\widehat{S}(t)}{A(t)} - A(t) \cdot r + \widehat{S}(t). \tag{4.20}$$

La condición de contorno (4.16) nos dice que $A(\widehat{t}_x - x) = 0$ y $B(\widehat{t}_x - x) = 0$. Por tanto, podemos resolver (4.19):

$$\begin{aligned}
\dot{A}(t) - \rho \cdot A(t) &= -\widehat{S}(t) - \alpha \cdot \widehat{f}(t) \\
e^{-\rho t} \cdot \dot{A}(t) - \rho \cdot e^{-\rho t} \cdot A(t) &= -e^{-\rho t} \cdot \left[\widehat{S}(t) + \alpha \widehat{f}(t)\right] \\
d/dt \cdot e^{-\rho t} \cdot A(t) &= -e^{-\rho t} \cdot \left[\widehat{S}(t) + \alpha \widehat{f}(t)\right] \\
\int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho \tau} \cdot A(\tau) &= \int_t^{\widehat{t}_x - x} -e^{-\rho \tau} \cdot \left[\widehat{S}(\tau) + \alpha \widehat{f}(\tau)\right] \partial \tau \\
e^{-\rho(\widehat{t}_x - x)} \cdot A(\widehat{t}_x - x) - e^{-\rho t} \cdot A(t) &= -\int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho \tau} \cdot \left[\widehat{S}(\tau) + \alpha \widehat{f}(\tau)\right] \partial \tau
\end{aligned}$$

$$A^*(t) = \int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho\cdot(\tau - t)} \cdot \widehat{S}(\tau) \cdot (1 + \widehat{\mu}(\tau) \cdot \alpha) \ \ d\tau$$

y (4.20):

$$\dot{B}(t) - \rho \cdot B(t) = -\widehat{S}(t) \cdot \ln \frac{\widehat{S}(t)}{A(t)} - A(t) \cdot r + \widehat{S}(t)$$

$$e^{-\rho t} \cdot \dot{B}(t) - \rho \cdot e^{-\rho t} \cdot B(t) = e^{-\rho t} \cdot \left[\widehat{S}(t) \left(1 - \ln \frac{\widehat{S}(t)}{A(t)} \right) - A(t) \cdot r \right]$$

$$d/dt \cdot e^{-\rho t} \cdot B(t) = e^{-\rho t} \cdot \left[\widehat{S}(t) \left(1 - \ln \frac{\widehat{S}(t)}{A(t)} \right) - A(t) \cdot r \right]$$

$$\int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho \tau} \cdot B(\tau) = \int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho \tau} \cdot \left[\widehat{S}(\tau) \left(1 - \ln \frac{\widehat{S}(\tau)}{A(\tau)} \right) - A(\tau) \cdot r \right] \partial \tau$$

$$e^{-\rho(\widehat{t}_x - x)} \cdot B(\widehat{t}_x - x) - e^{-\rho t} \cdot B(t) = \int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho \tau} \cdot \left[\widehat{S}(\tau) \left(1 - \ln \frac{\widehat{S}(\tau)}{A(\tau)} \right) - A(\tau) \cdot r \right] \partial \tau$$

$$B^*(t) = \int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho\cdot(\tau - t)} \cdot [A^*(\tau) \cdot r - \widehat{S}(\tau) \cdot (1 - \ln \frac{\widehat{S}(\tau)}{A^*(\tau)})] \ \ d\tau.$$

Sustituyendo $A^*(t)$ en (4.18), encontramos la variable de decisión óptima del problema:

$$c_2^*(t) = \frac{\widehat{S}(t)}{\int_t^{\widehat{t}_x - x} e^{-\rho\cdot(\tau - t)} \cdot \widehat{S}(\tau) \cdot (1 + \widehat{\mu}(\tau) \cdot \alpha) \ \ d\tau} \cdot w(t)$$

La variable estado, por otra parte, queda definida por la condición inicial:

$$w(s) = w_s = w_s^- + LSV_s$$

donde w_s^- equivale a los ahorros realizados hasta s.

Por último, obtenemos la función valor en el instante s:

$$V_2^*(w^*, s) = A^*(s) \cdot \ln w + B^*(s). \tag{4.21}$$

4.3.2. Resolución del problema general

En la ecuación (4.6), podemos substituir el tramo $[s, T[$ por $V_i^*(w^*, s)$ (donde $i = 1, 2$ dependiendo de si tratamos con funciones de utilidad potenciales o logarítmicas) y, como antes, transformar el problema estocástico con vida residual incierta T en un problema determinista, de forma que:

Lema 2

$$\begin{aligned}
&J(w(0), c(0), 0) \\
&= E\Big[\int_0^{s\wedge T} e^{-\rho j}\cdot U\left(c_1(j)\right)\; dj + e^{-\rho T}\cdot V\left(H_1(T)\right)\cdot 1_{\{T\leq s\}} + e^{-\rho s}\cdot V_i^*(w^*, s)\cdot 1_{\{T>s\}}\Big] \\
&= \int_0^s \widehat{S}(j)\cdot e^{-\rho j}\cdot U(c_1(j)) + \widehat{f}(j)\cdot e^{-\rho j}\cdot V(H_1(j))\;\; dj + e^{-\rho s}\cdot \widehat{S}(s)\cdot V_i^*(w^*, s).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&J(w(0), c(0), 0) \\
&= E\Big[\int_0^{s\wedge T} e^{-\rho j}\cdot U\left(c_1(j)\right)\; dj + e^{-\rho T}\cdot V\left(H_1(T)\right)\cdot 1_{\{T\leq s\}} \\
&\qquad\qquad + e^{-\rho s}\cdot V_i^*(w^*, s)\cdot 1_{\{T>s\}}\Big] \\
&= E\Big[\int_0^{s} e^{-\rho j}\cdot U\left(c_1(j)\right)\; dj\cdot 1_{\{T>s\}} + \int_0^{T} e^{-\rho j}\cdot U\left(c_1(j)\right)\; dj\cdot 1_{\{T\leq s\}} \\
&\qquad\qquad + e^{-\rho T}\cdot V\left(H_1(T)\right)\cdot 1_{\{T\leq s\}} + e^{-\rho s}\cdot V_i^*(w^*, s)\cdot 1_{\{T>s\}}\Big] \\
&= \widehat{S}(s)\cdot \int_0^s e^{-\rho j}\cdot U(c_1(j))\; dj + \int_0^s \widehat{f}(u)\cdot \int_0^u e^{-\rho j}\cdot U(c_1(j))\; dj\; du \\
&\qquad\qquad + \int_0^s \widehat{f}(u)\cdot e^{-\rho u}\cdot V(H_1(u))\; du + \widehat{S}(s)\cdot e^{-\rho s}\cdot V_i^*(w^*, s),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \widehat{f}(u)\cdot \int_0^u e^{-\rho j}\cdot U(c_1(j))\; dj\; du \\
&= \left[-\widehat{S}(u)\cdot \int_0^u e^{-\rho j}\cdot U(c_1(j))\; dj\right]_0^s + \int_0^s \widehat{S}(u)\cdot e^{-\rho u}\cdot U(c_1(u))\; du \\
&= -\widehat{S}(s)\cdot \int_0^s e^{-\rho j}\cdot U(c_1(j))\; dj + \int_0^s \widehat{S}(u)\cdot e^{-\rho u}\cdot U(c_1(u))\; du \\
&= \int_0^s \left[\widehat{S}(u) - \widehat{S}(s)\right]\cdot e^{-\rho u}\cdot U(c_1(u))\; du.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Sustituyendo (4.24) en (4.23):

$$
\begin{aligned}
&= \widehat{S}(s) \cdot \int_0^s e^{-\rho j} \cdot U(c_1(j))dj + \int_0^s \left[\widehat{S}(u) - \widehat{S}(s)\right] \cdot e^{-\rho u} \cdot U(c_1(u))\ du \\
&\qquad\qquad + \int_0^s \widehat{f}(u) \cdot e^{-\rho u} \cdot U(H_1(u))du + \widehat{S}(s) \cdot e^{-\rho s} \cdot V_i^*(w^*, s) \\
&= \int_0^s \widehat{S}(j) \cdot e^{-\rho j} \cdot U(c_1(j)) + \widehat{f}(j) \cdot e^{-\rho j} \cdot V(H_1(j))\ \ dj \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + e^{-\rho s} \cdot \widehat{S}(s) \cdot V_i^*(w^*, s).
\end{aligned}
$$

■

De esta manera, obtenemos el funcional (4.22) con el que resulta factible trabajar. Igual que en el problema anterior, después de la transformación, la función de utilidad de la herencia ha sido introducida en el horizonte de planificación del agente en $[0, s]$. En este caso además, existe una función final en s correspondiente a la función valor conocida.

El problema del consumidor consiste ahora en maximizar (4.22) restringido a:

$$\dot{w} = w \cdot r - c \tag{4.25}$$

y sabiendo que $w(0) = w_0$ (condición inicial) y que en el instante s la riqueza da un salto equivalente a LSV_s (y por consiguiente el beneficio por muerte M desaparece): $w(s) = w_s = w_s^- + LSV_s$.

Para la resolución de dicho problema utilizaremos el Principio del Máximo de Pontryagin (Pontryagin et al. (1962)).

Igual que en el apartado anterior, el modelo general se resolverá utilizando en primer lugar funciones de utilidad potenciales y, en segundo lugar, funciones de utilidad logarítmicas.

4.3.2.1. Funciones de utilidad potenciales

El Principio del Máximo se basa en la construcción del Hamiltoniano, en nuestro caso definido como:

$$H(w, c, \lambda, t) = e^{-\rho t} \cdot \widehat{S}(t) \cdot \frac{c_1(t)^\sigma}{\sigma} + e^{-\rho t} \cdot \widehat{f}(t) \cdot \alpha \cdot \frac{(w(t) + M)^\sigma}{\sigma} + \lambda(t) \cdot (w(t)r - c_1(t))$$

donde $\lambda(t)$ es la variable co-estado y representa el precio sombra.

El Principio del Máximo establece que si $c^*(t)$ es la variable de control que maximiza J, también maximizará H. Para resolver el problema de optimización mediante el uso de este principio, determinaremos en primer lugar una solución para λ y hallaremos luego c. Para ello, sabemos que:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial w} \tag{4.26}$$

con

$$\lambda(s) = \frac{\partial F_1(w, s)}{\partial w(s)}$$

donde $F_1(w, s) = F_1(w_s^- + LSV_s, s) = e^{-\rho s} \cdot \widehat{S}(s) \cdot V_1^*(w^*, s)$.

Siendo

$$c_1^*(t) = \underset{c_1}{\text{argmax}}\ H,$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_1} = 0, \tag{4.27}$$

resolvemos la ecuación diferencial (4.26) y obtenemos:

$$\lambda^*(t) = e^{r(s-t)} \cdot \lambda(s) + \int_t^s e^{r(\tau-t)} \cdot e^{-\rho\tau} \cdot \widehat{f}(\tau) \cdot \alpha \cdot (w(\tau) + M) \quad d\tau. \tag{4.28}$$

Resolviendo (4.27) y sustituyendo (4.28),

$$c_1^*(t) = \left(\frac{e^{r(s-t)} \cdot \lambda(s) + \int_t^s e^{r(\tau-t)} \cdot e^{-\rho\tau} \cdot \widehat{f}(\tau) \cdot \alpha \cdot (w(\tau) + M) \quad d\tau}{e^{-\rho t} \cdot \widehat{S}(t)} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{4.29}$$

Sustituyendo (4.29) en (4.25), obtenemos la siguiente ecuación integro-diferencial que define la trayectoria de la variable estado del problema de optimización:

$$\dot{w} = wr - \left(\frac{e^{r(s-t)} \cdot \lambda(s) + \int_t^s e^{r(\tau-t)} \cdot e^{-\rho\tau} \cdot \widehat{f}(\tau) \cdot \alpha \cdot (w(\tau) + M) \quad d\tau}{e^{-\rho t} \cdot \widehat{S}(t)} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

4.3.2.2. Funciones de utilidad logarítmicas

En caso de tener funciones de utilidad logarítmicas, el Hamiltoniano se define como:

$$H(w,c,\lambda,t) = e^{-\rho t}\cdot \widehat{S}(t)\cdot \ln c_1(t) + e^{-\rho t}\cdot \widehat{f}(t)\cdot \alpha \cdot \ln[w(t)+M] + \lambda(t)\cdot (w(t)r - c_1(t)).$$

El problema se resuelve de forma análoga al apartado anterior. A diferencia del caso potencial, sin embargo, hemos encontrado una solución analítica para la función valor, así que podremos hallar un resultado para $\lambda(s)$. Los resultados del caso logarítmico son los siguientes:

$$\lambda^*(t) = e^{r(s-t)}\cdot \lambda(s) + \int_t^s e^{r(\tau-t)}\cdot e^{-\rho\tau}\cdot \widehat{f}(\tau)\cdot \alpha \cdot \frac{1}{w(\tau)+M} \quad d\tau$$

con

$$\lambda(s) = \frac{\partial F_2(w,s)}{\partial w(s)} \tag{4.30}$$

y $F_2(w,s) = F_2(w_s^- + LSV_s, s) = e^{-\rho s}\cdot \widehat{S}(s)\cdot V_2^*(w^*, s)$.

Resolviendo (4.30), hallamos la solución óptima para $\lambda(s)$:

$$\lambda^*(s) = e^{-\rho s}\cdot \widehat{S}(s)\cdot A^*(s)\cdot \frac{1}{w_s + LSV_s}.$$

La regla óptima de consumo para el agente es

$$c^*(t) = \frac{e^{-\rho t}\cdot \widehat{S}(t)}{e^{r(s-t)}\cdot \lambda^*(s) + \int_t^s e^{r(\tau-t)}\cdot e^{-\rho\tau}\cdot \widehat{f}(\tau)\cdot \alpha\cdot \frac{1}{w(\tau)+M} \quad d\tau}.$$

Finalmente, la trayectoria de la variable estado del problema de optimización es

$$\dot{w} = wr - \frac{e^{-\rho t}\cdot \widehat{S}(t)}{e^{r(s-t)}\cdot \lambda^*(s) + \int_t^s e^{r(\tau-t)}\cdot e^{-\rho\tau}\cdot \widehat{f}(\tau)\cdot \alpha\cdot \frac{1}{w(\tau)+M} \quad d\tau}.$$

Ni para funciones potenciales, ni para funciones logarítmicas, acabamos obteniendo soluciones analíticas. Lo que obtenemos son resultados en forma de ecuación integro diferencial no lineal. Este es un problema que suele producirse en la resolución mediante programación dinámica y, por tanto, se hace muy necesario encontrar soluciones numéricas.

4.4. Ilustración Numérica

A continuación, se realiza un ejemplo numérico para comprobar las implicaciones económicas del modelo. Para su resolución, el modelo ha sido discretizado, siendo los resultados obtenidos una aproximación numérica.

La discretización es un recurso muy utilizado como mecanismo para poder salvar la imposibilidad de obtener soluciones analíticas. En nuestro caso, con la finalidad de poder realizar un análisis de sensibilidad hemos anualizado las variables.

Seguidamente se detallan las hipótesis que hemos tenido en cuenta para obtener una solución particular del problema de optimización.

Respecto a las funciones de supervivencia y densidad, hemos trabajado con la ley de mortalidad Gompertz-Makeham tal y como viene definida en Milevsky (2006). Según esta ley, el tanto instantáneo de mortalidad se define como

$$\widehat{\mu}(x) = \mu + \frac{1}{b} \cdot e^{\frac{x-m}{b}}.$$

El tanto instantáneo de mortalidad es igual a una constante μ más una función exponencial dependiente del tiempo. La constante μ refleja el componente de mortalidad atribuible a los accidentes, mientras que la parte exponencial creciente se atribuye a la muerte por causas naturales. Para este ejemplo, supondremos que μ es igual a 0. Los otros dos parámetros m y b representan el valor modal de la vida y el coeficiente de dispersión respectivamente. En general, para una población sana, m es igual a $82,3$ años mientras que b es igual a $11,4$ años (Milevsky (2006)). La variable x, como siempre, simboliza la edad del asegurado.

Siguiendo la ecuación (4.3), podemos derivar la función de supervivencia (condicionada a estar vivo a la edad x):

$$\begin{aligned} \widehat{S}_x(t) &= e^{-\int_x^{x+t} \widehat{\mu}(u) \quad du} \\ &= e^{\widehat{\mu}(x)(1-e^{t/b})b}. \end{aligned}$$

Siguiendo la ecuación (4.2), obtenemos la correspondiente función de densidad (condicionada a estar vivo a la edad x):

$$\widehat{f}_x(t) = \widehat{S}_x(t) \cdot \widehat{\mu}(x+t)$$

Respecto de las características del consumidor, asumiremos los datos de la Tabla 2.2 además de otras características que recogemos en la Tabla 4.1.

x=65	w_0=10.000	M =50.000	P=740,79	γ_2 =0,72
α =0,8	$\rho = 0,0392$	$\widehat{t}_x$=80	m=67,5	b=8,306

Tabla 4.1: Datos de referencia del asegurado y del seguro de vida

Consideramos un individuo de 65 años cuya edad máxima es de 80 años. No podemos utilizar los valores típicos de m y b ya que la cohorte de individuos con la que trabajamos es diferente de la estándar. Para perjudicar de forma significativa la función de mortalidad -nuestro asegurado presenta una salud deteriorada- hemos escogido un valor modal m igual a $67,5$, es decir, la gran mayoría de individuos de 65 años con estado de salud perjudicado y similares entre ellos, morirán a los $67,5$ años, así como un coeficiente de dispersión, b, igual a $8,306$. El valor de b ha sido escogido de manera que, por un lado, la probabilidad de fallecimiento, $\widehat{F}_{65}(15)$, tienda a 1 y, por otro lado, $\widehat{e}_{65} = 5,52$.

La riqueza inicial del consumidor es 10.000 (euros) y el beneficio por muerte contratado en el seguro de vida y que recibirán los herederos en el momento de fallecer el asegurado es 50.000 (propietario y asegurado coinciden en una misma persona). Un valor de α igual a 0,8 supone que el consumidor valora la herencia un 80 % respecto al consumo. La tasa de preferencia temporal es $0,039$ (resultado de aplicar un tipo de interés del 4 %, $\rho = \ln(1+r)$). Por último, el porcentaje respecto al valor actual actuarial de la póliza que define al valor del life settlement es del 72 %, es decir, hemos aplicado un porcentage en concepto de gastos de transacción sobre el valor actual actuarial de la póliza (VAA) del 28 %.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que el LSV pagado por la compañía de life settlements al tomador será diferente dependiendo del momento de venta. Está claro que cuando más tarde se venda, peor estado de salud presentará el asegurado y mayor será el precio ofertado por la compañía (si es que, efectivamente, la salud del asegurado ha ido empeorando). Dado que nuestro modelo de optimización ha sido discretizado -anualizado-, consideramos ahora que el valor de la póliza se calcula según la ecuación (4.1). Para obtener los diferentes valores de LSV no se tendrán en cuenta funciones de supervivencia/fallecimiento si no que, como hemos venido haciendo en capítulos anteriores, se considerarán probabilidades escogidas de alguna tabla de mortalidad (en nuestro caso la llamada *1975-80 Basic Mortality Table (BMT)* que ya comentamos en el Capítulo 2). De forma análoga a las funciones Gompertz-Makeham, las probabilidades han sido retocadas de forma que la probabilidad del agente de sobrevivir a los 80 años, condicionada a estar vivo a los 65 años, tienda a 0. Así, el factor de recargo sobre las probabilidades de fallecimiento es de 5, resultando también una esperanza de vida aproximada de 5,52 años.

Asumimos que los precios de venta de la póliza sólo se revalorizan anualmente. Los diferentes LSV para diferentes momentos de venta se presentan en la Tabla 4.2[4].

s	VAA_s	LSV_{x+s}
0	28.115,82	20.323,12
1	29.130,35	21.056,46
2	30.127,52	21.777,25
3	31.103,24	22.482,53
4	32.054,10	23.169,85
5	32.976,46	23.836,56
6	33.868,24	24.481,17
7	34.729,92	25.104,03
8	35.565,89	25.708,30
9	36.337,80	26.295,17
10	37.165,72	26.864,71
11	37.926,76	27.414,92
12	38.658,49	27.943,74
13	39.356,61	28.448,36
14	40.018,92	28.927,11

Tabla 4.2: LSV_s

4.4.1. Solución Óptima

Nuestro objetivo consiste en obtener el consumo óptimo y la riqueza disponible del agente para cada instante t y para cada posible momento de venta s,

[4] Para valorar el LSV se ha aplicado un tipo de interés técnico del 8 %.

con el fin de obtener la utilidad esperada derivada de cada caso. La mayor de las utilidades nos dará el momento óptimo de venta.

Seguidamente se presentan los resultados que se derivan de aplicar, en primer lugar, funciones de utilidad potenciales y, en segundo lugar, funciones de utilidad logarítmicas.

4.4.1.1. Caso potencial

Hemos estudiado el comportamiento del agente con utilidades potenciales, para diferentes valores del coeficiente de aversión relativa al riesgo $1-\sigma$. A continuación, analizamos en detalle el caso correspondiente a $\sigma = 0,5$.

En primer lugar, analizamos el comportamiento de la variable consumo para los posibles momentos de venta de la póliza, $s = 0, 1, 2, ..., 14$. Recordemos que la vida residual máxima del asegurado es de 15 años por lo que la venta de la póliza en el momento $s = 15$ es un caso imposible. La Figura 4.2 representa estas trayectorias óptimas con coeficiente de aversión relativa al riesgo igual a 0,5.

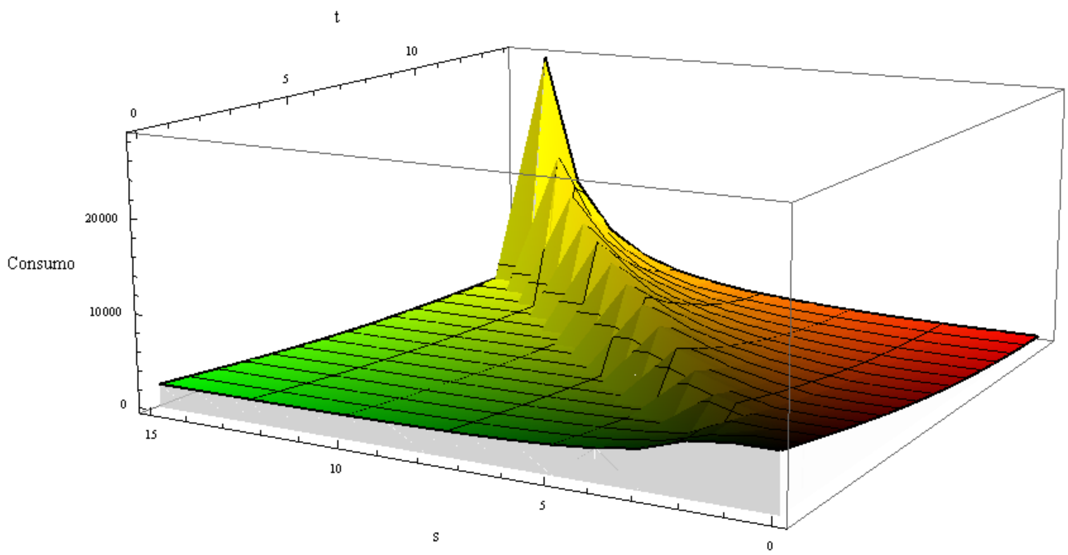

Figura 4.2: Consumos óptimos asociados a cada momento s con $\sigma = 0,5$

Se observa un consumo decreciente y un mismo patrón de comportamiento prácticamente para todas las trayectorias: justo en el instante de realizarse la venta de la póliza, se produce un salto. El agente incrementa su consumo, aprovechando el aumento de liquidez que produce la venta de su póliza. Cuanto más tarde tiene lugar la venta de la póliza, más esfuerzo ahorrador debe realizar durante los años previos a la venta pero más evidente es este salto y mayores consumos puede realizar a posteriori. Se observa que dicho salto no existe cuando la venta se produce en $s = 0, 1$, en estos casos el agente mantiene un consumo inalterado por la venta. La riqueza reservada a consumir para los últimos años de vida es mínima, excepto cuando la venta tiene lugar durante los últimos años, el consumidor no tiene tiempo de gastar todo su líquido. Las probabilidades de fallecer en los últimos años son muy elevadas y el agente prácticamente no ahorra para esos años. Las trayectorias de la riqueza disponible, al inicio de cada año, se muestran en la Figura 4.3. Adicionalmente, en la Tabla 4.3 hemos introducido los importes de las riquezas correspondientes al último período $t = 15$ y para cada momento posible de venta. En ambos gráficos, 4.2 y 4.3, el caso de no venta de la póliza ha sido dibujado en la trayectoria correspondiente a $s = 15$. Para este caso tanto el consumo como la riqueza siguen una tendencia decreciente y monótona a lo largo de toda la vida del individuo.

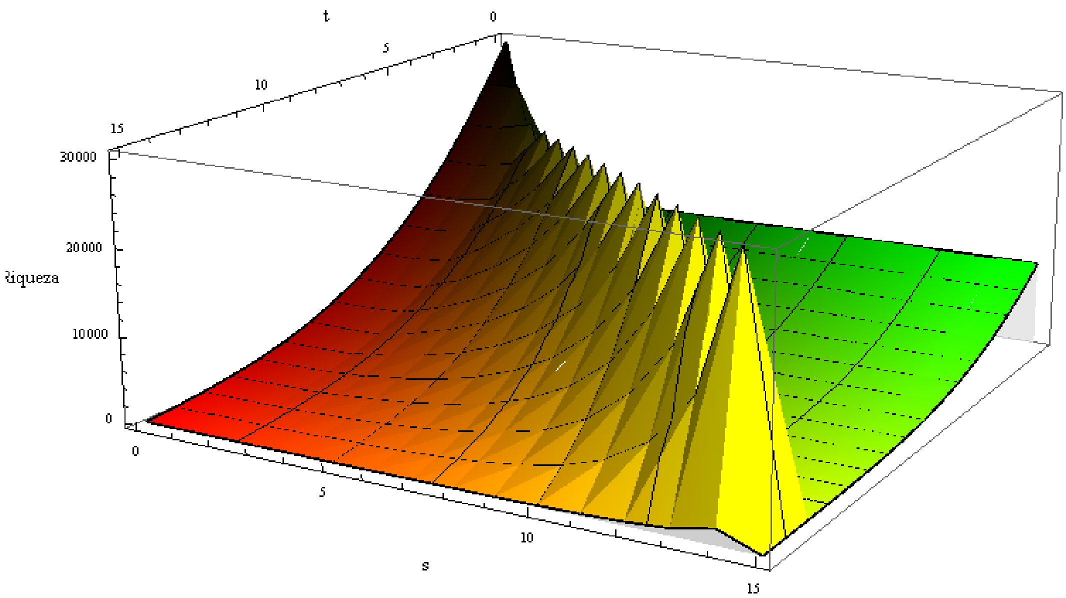

Figura 4.3: Riquezas óptimas asociados a cada momento s con $\sigma = 0,5$

Las utilidades esperadas (anuales) que genera cada situación se muestran en la Tabla 4.3. Se observa que el óptimo para un individuo con coeficiente de aversión al riesgo igual a 0,5 es vender al inicio del tercer año, en $s^* = 2$.

s	$w(15)$	J
0	9,55	831,77
1	9,63	840,84
2	9,95	849,22
3	12,17	846,32
4	15,40	834,43
5	20,60	818,34
6	27,69	800,79
7	38,20	783,50
8	79,98	767,57
9	76,46	753,63
10	173,38	741,99
11	266,41	732,64
12	438,30	725,41
13	788,85	719,92
14	1772,97	715,60
$\emptyset$	0,19	711,09

Tabla 4.3: J asociada a cada s, para $\sigma = 0,5$.

Este mismo análisis se ha realizado para diferentes coeficientes de aversión al riesgo, $(1-\sigma) \in]0;\infty[$. Un resumen se presenta en la Tabla 4.4.

Vemos que cuanto más adverso al riesgo es el agente (cuanto menor es el parámetro σ), antes decide vender. Cabe descatar en este punto la importancia del parámetro α. En nuestro ejemplo, hemos considerado que $\alpha = 0,8$, es decir, el agente asigna poco peso a su función final (función de utilidad sobre la herencia) y, por tanto, prefiere consumir. Un agente adverso al riesgo, con mayor preferencia por el consumo que por la herencia, preferirá vender antes su póliza de vida para poder destinar mayor riqueza a consumo.

Si bien en los siguientes apartados se realiza un análisis de sensibilidad respecto a la variable α, hemos detallado también en la Tabla 4.4 los óptimos para $\alpha = 10$, con el fin de comprobar cómo varían las preferencias del agente según distintos coeficientes de aversión al riesgo, $1-\sigma$.

σ	s^* con $\alpha = 0,8$	s^* con $\alpha = 10$
0,9	14	$\emptyset$
0,8	6	$\emptyset$
0,7	3	$\emptyset$
0,6	2	$\emptyset$
0,5	2	$\emptyset$
0,4	2	$\emptyset$
0,3	2	$\emptyset$
0,2	2	$\emptyset$
0,1	2	$\emptyset$
0	2	9
-0,1	2	6
-0,2	2	5
-0,3	2	4
-0,4	1	4
-0,5	0	4
-1	0	3
-2	0	0
-3	0	0

Tabla 4.4: Momentos óptimos de venta dependiendo de σ, con $\alpha = 0,8$.

Al incrementar de forma considerable el valor del parámetro α estamos asignando mayor peso a la función final; el agente tiene una clara preferencia por la herencia. Así, su riesgo viene determinado por las cantidades que legará a sus herederos. Igual que antes, cuanto más adverso sea al riesgo (es decir, para valores de σ reducidos), antes decide vender su póliza de vida. Esta vez, sin embargo, el momento óptimo de venta de la póliza de vida se ha desplazado a momentos posteriores. Incluso, para valores de σ superiores a 0, el propietario de la póliza prefiere no vender nunca su activo. Por tanto, el agente es menos propenso a vender su póliza; trata de ahorrar lo máximo y dejar el beneficio por muerte a sus herederos tras su muerte.

4.4.1.2. Caso logarítmico

El mismo estudio se ha realizado con funciones de utilidad logarítmicas. En primer lugar hemos obtenido los consumos óptimos, para cada posible momento de venta. La Figura 4.4 representa las trayectorias del consumo para un individuo con utilidades logarítmicas, dependiendo del momento s en que decida vender su póliza de vida.

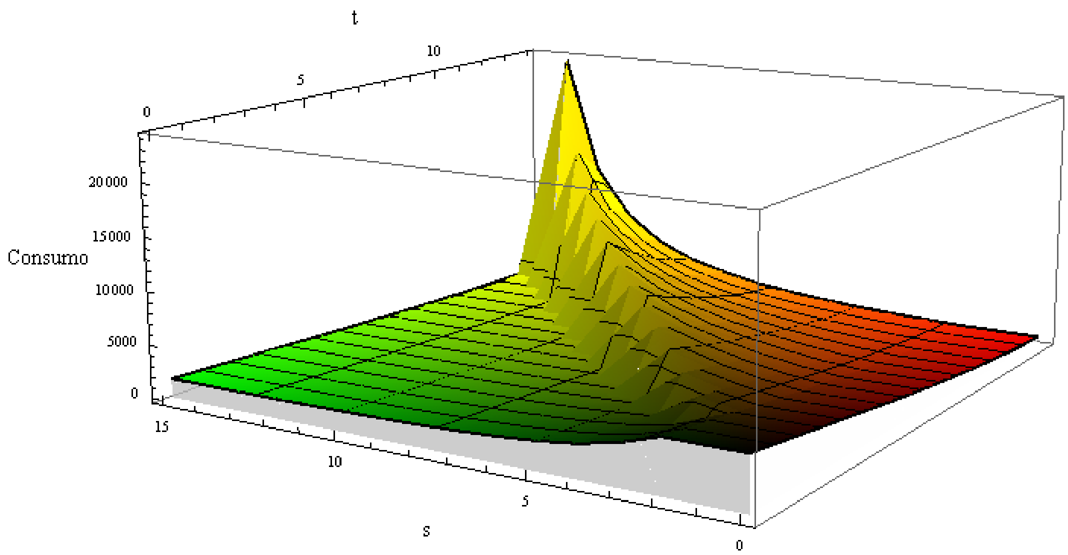

Figura 4.4: Consumos óptimos asociados a cada momento s, para utilidades logarítmicas

A primera vista las Figuras 4.2 y 4.4 parecen idénticas. El consumo es decreciente en el tiempo excepto en el momento de venderse la póliza donde se produce un importante salto. El salto es mayor cuanto más tarde se vende la póliza. Sin embargo, las cantidades consumidas difieren considerablemente dependiendo del tipo de funciones de utilidad. El agente con utilidades logarítmicas es mucho más ahorrador durante los primeros años que el mismo agente con utilidades potenciales (y con $\sigma = 0,5$) y el incremento del consumo derivado de la venta de la póliza es más reducido. Debido al mayor esfuerzo ahorrador producido durante los primeros años, las cantidades consumidas en los últimos años de vida son mayores.

Las utilidades esperadas que genera cada situación se muestran en la Tabla 4.5. El momento óptimo de venta corresponde a $s^* = 2$, igual que en el caso en que $\sigma = 0,5$. En general, vemos que $s^* = 2$ para valores de σ entre -0,3 y 0,6.

4.4.2. Análisis de Sensibilidad

En este apartado, se analiza la influencia de parámetros personales del individuo y del mercado sobre la solución óptima. Asumimos los datos de la Tabla 4.1 pero vamos modificando el valor de determinados parámetros, que son los siguientes:

s	J
0	51,933
1	51,966
2	51,995
3	51,885
4	51,489
5	50,938
6	50,316
7	49,684
8	49,083
9	48,539
10	48,068
11	47,676
12	47,362
13	47,119
14	46,938
$\emptyset$	46,803

Tabla 4.5: J asociada a cada s.

- α, el peso relativo de la herencia respecto al consumo,
- γ_2, el porcentaje del valor actual actuarial de la póliza que paga el proveedor de life settlements y
- ρ, la tasa instantánea de preferencia temporal.

Adicionalmente, los diferentes casos han sido valorados con utilidades potenciales cuyo coeficiente de aversión relativa al riesgo es igual a 0,5.

Así, podemos interpretar en qué medida varía la solución óptima del agente dependiendo de qué valores asignemos a los parámetros objeto de estudio.

El proceso de resolución es exactamente el mismo que en el apartado anterior pero el cálculo se realiza tantas veces como valores asignemos a los parámetros de sensibilidad escogidos.

4.4.2.1. Variación de α

El componente α del problema de optimización se encuentra en la función de utilidad de la herencia multiplicando la función potencial. Describe cuanto valora el agente el legado a sus herederos frente a su consumo. Por tanto, parece intuitivo que para valores reducidos de α el agente ponga por delante su consumo y deje poca herencia tras su muerte y para valores elevados de α deje mayor herencia y por consiguiente deba consumir menores cantidades a lo largo de su vida. Respecto a la influencia del componente α sobre el momento óptimo de venta de la póliza de vida, los resultados quedan reflejados en la Figura 4.5. Para

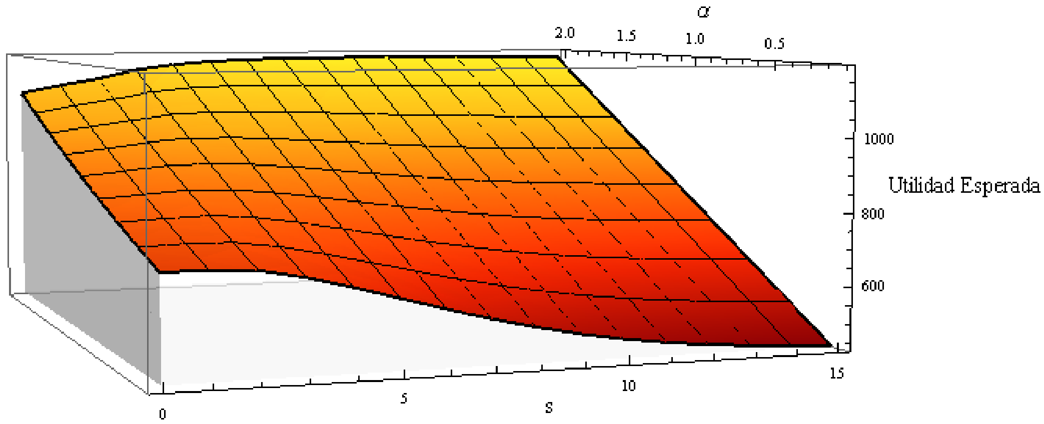

Figura 4.5: Utilidades esperadas máximas dependiendo de α.

valores de α pequeños, el óptimo de venta se encuentra en los primeros años y, a medida que aumenta, el óptimo se desplaza hacia los últimos años de vida del agente. El agente que valora menos la herencia no le interesa conservar la póliza de vida en activo y dejar a sus herederos el capital asegurado de 50.000 euros. Como prefiere consumir, además, necesita vender su póliza cuanto antes para poder mantener un consumo deseable. En la siguiente Tabla 4.6 se resumen los óptimos obtenidos dependiendo del valor asignado al parámetro α.

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
s^*	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	5	6	9

Tabla 4.6: Momentos óptimos de venta dependiendo de α

4.4.2.2. Variación de γ_2

El componente γ_2 representa el valor del life settlement. Es aquel porcentaje sobre el valor actual actuarial de la póliza que la compañía de life settlements ofrece al agente. Así, parece razonable que cuanto mayor sea el precio pagado por la póliza antes venderá el tomador. En caso de ser el precio muy reducido seguramente preferirá no vender. A continuación, se dibujan las utilidades esperadas que genera cada situación, para conocer exactamente donde se encuentran estos óptimos (Figura 4.6).

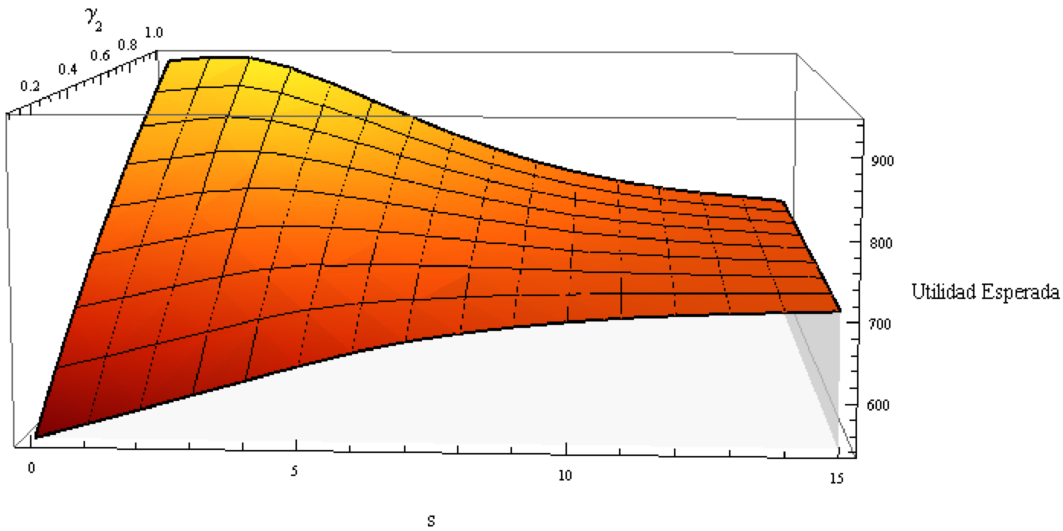

Figura 4.6: Utilidades esperadas máximas dependiendo de γ_2.

Para γ_2 reducidas, al tomador no le compensa vender su póliza. Recordemos que el caso de no venta queda reflejado en la trayectoria $s = 15$. A medida que este valora aumenta, el óptimo se va desplazando hacia los primeros años del horizonte temporal. La influencia de este parámetro sobre el óptimo es clave en este estudio. La compañía de life settlements puede conocer cual debe ser el precio ofrecido para que el tomador pase de no querer vender a querer vender su activo. Igual que antes, resumimos los óptimos dependiendo del valor asignado a γ_2 (Tabla 4.7).

γ_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,72	0,8	0,9	1
s^*	$\emptyset$	$\emptyset$	7	5	4	3	2	2	2	2

Tabla 4.7: Momentos óptimos de venta dependiendo de γ_2

4.4.2.3. Variación de ρ

Por último, hemos estudiado la influencia que tiene la variable tasa instantánea de preferencia temporal, ρ, sobre el momento óptimo de venta. Las utilidades esperadas quedan representadas en la Figura 4.7. El tomador (o agente decisor) es poco sensible ante variaciones de la tasa de preferencia temporal, la Figura 4.7 muestra que las trayectorias mantienen más o menos su forma. Sí queda claro, no obstante, que el óptimo se encuentra en los primeros años del horizonte temporal.

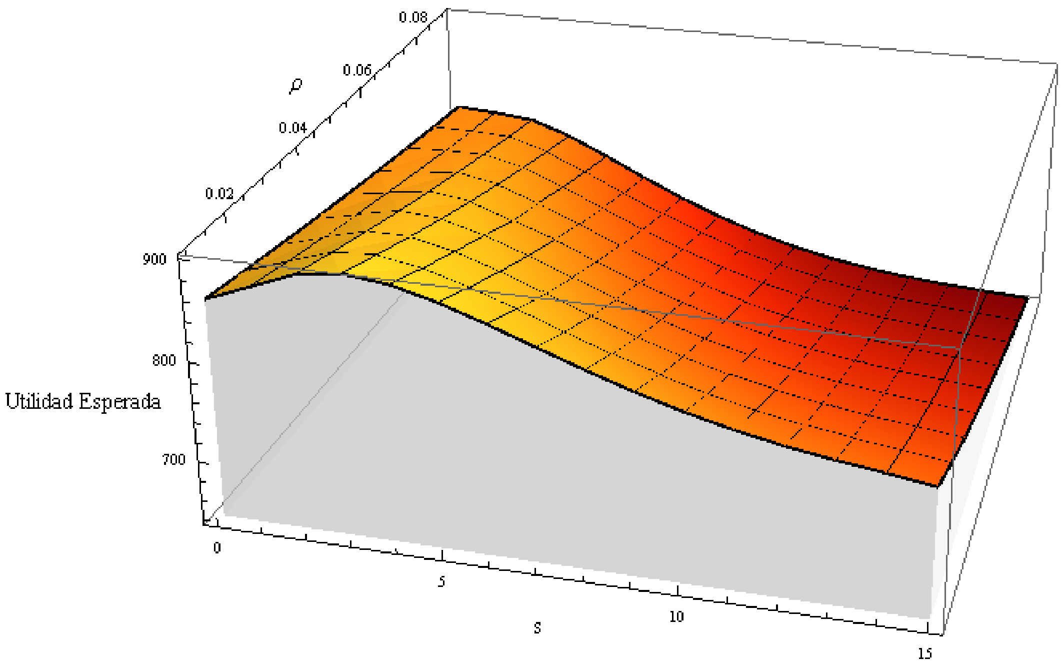

Figura 4.7: Utilidades esperadas máximas dependiendo de ρ.

En la Tabla 4.8 se detectan claramente cuales son estos óptimos y vemos que cuanto menor es la tasa más tarde desea vender el agente.

ρ	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
s^*	3	3	2	2	2	2	2	0	0

Tabla 4.8: Momentos óptimos de venta dependiendo de ρ

4.5. Conclusiones

En este capítulo, hemos estudiado un problema de optimización que trata de obtener la estrategia óptima para un individuo en relación a su consumo y al momento de venta de su póliza de vida mediante la contratación de un life settlement (si es que efectivamente resulta óptimo vender). Para ello, hemos partido de un modelo en tiempo continuo consistente en la maximización de una utilidad esperada que consta de la utilidad respecto al consumo y de la utilidad respecto a la herencia. El problema debe quedar acotado dentro de un intervalo válido, puesto que el mercado de life settlements sólo acepta pólizas cuyo asegurado presente una esperanza de vida de entre dos y quince años. Nuestro funcional se ha dividido en dos tramos: el período anterior y el período posterior a la venta de la póliza. Así, maximizando en primer lugar el problema posterior a la venta de la póliza, hemos obtenido una función valor que hemos incorporado en el problema anterior a la venta de la póliza, como estado final dado. Para la obtención de esta función valor hemos utilizado la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Para solucionar el problema general hemos seguido la metodología basada en el Principio del Máximo de Pontryagin.

El problema no permite obtener soluciones analíticas, si no que llega a soluciones en forma de ecuaciones diferenciales, así que hemos realizado un ejemplo numérico mediante discretización. Los resultados obtenidos son una aproximación a nuestro modelo de optimización. A fin de obtener una solución, hemos estudiado un caso particular que considera utilidades potenciales y logarítmicas. Por último, hemos realizado un análisis de sensibilidad que permite comprobar la influencia de determinados parámetros del modelo sobre la solución óptima del tomador.

Capítulo 5

Inversión en Life Settlements

5.1. Introducción

Por sus características, la inversión en life settlements ha generado mucho interés en los últimos años, sobretodo porque la crisis ha hecho que muchos inversores se percaten de los beneficios de la diversificación. Y es que estos títulos tienen la peculiaridad de no estar correlacionados con los movimientos de los mercados financieros tradicionales. Así, ante las adversidades económicas recientes, la inversión en life settlements garantiza unos rendimientos más o menos estables sin tener que preocuparse demasiado por las fluctuaciones en los mercados financieros. A esta no correlación además, hay que añadir unos rendimientos elevados y una volatilidad reducida. Braun et al. (2011) realiza un análisis sobre los fondos de life settlements *Open-Ended* -entidades inversoras en life settlements específicas- y señalan que, durante el período 2004-2010, los rendimientos generados por estos productos han sido de los más elevados, en comparación con otros activos. Además, el crecimiento de estos rendimientos ha sido el más constante (sufriendo únicamente una leve caída en 2009). Los rendimientos mensuales medios de los fondos *Open-Ended* entre 2004 y 2010 han llegado al 0,4 %, sólo superados por los fondos de cobertura -*hedge-funds*- (0,5 %) y los bonos del estado (0,41 %). En cuanto a la volatilidad, la inversión en life settlements es la menos volátil con una desviación estándar de los rendimientos del 0,66 %, frente al 1,10 % y 1,97 % para los bonos del estado y los fondos de cobertura, respectivamente. Todo esto sumado a unas expectativas de crecimiento muy optimistas[1], hace que la inversión en estos activos constituya una parte muy importante en la estrategia de

[1]En base a un volumen de ingresos del mercado de 0 dólares en 2001 y 12 mil millones de dólares en 2007, se prevén unos ingresos de 140 mil millones de dólares en 2016 (ver Kamath y Sledge (2005)).

diversificación y gestión de riesgo de un inversor.

Sin embargo, invertir en estos títulos conlleva aún, hoy en día, mucha incertidumbre. El mercado es aún muy joven y ello genera desconfianza, sobre todo entre los inversores particulares. Además, el inversor debe tener en cuenta que la inversión en life settlements no queda exenta de riesgos sino todo lo contrario. Entre todos estos riesgos destaca el de longevidad, es decir que el asegurado de la póliza comprada viva por encima de lo que se estimó en el momento de la contratación del life settlement, de manera que el inversor acaba pagando más primas y recibe el beneficio por muerte más tarde de lo previsto. La rentabilidad en tal caso decrece y, de hecho, cuántos más años viva el asegurado por encima de su esperanza de vida, más dinero pierde el inversor en la operación. Existen otros riesgos menores pero no despreciables como son el riesgo de valoración, de contrapartida, de liquidez, operacional o de regulación que comentaremos también este capítulo. Una extensa explicación puede encontrarse en Perera y Reeves (2006) o Ansley y Darby (2010).

En el apartado 1.2 se analizan las diferentes alternativas que dispone un inversor para entrar en el negocio de los life settlement, esto es: compra directa, compra de títulos garantizados (conocidos coloquialmente como bonos de mortalidad) o compra de derivados de longevidad. Seguidamente, en el apartado 1.3, se revisan todos los riesgos que lleva consigo la inversión en este producto. El más importante, el de longevidad, lo analizamos en detalle en el apartado 1.4, proponiendo una posible valoración a través de la llamada *life extension-duration* y *life extension-convexity* Estos instrumentos están basados en Stone y Zissu (2008). Sin embargo, nosotros partimos de una valoración del life settlement diferente. En Stone y Zissu (2008) se valora el life settlement como el valor actual actuarial de la póliza sin tener en cuenta ningún tipo de penalización, en concepto de gastos de transacción de la operación. Nosotros partimos de la valoración del life settlement que vimos en el Capítulo 2, basada en Vadiveloo et al. (2005).

El artículo en el que se basa este capítulo puede encontrarse en Jori et al. (2010).

5.2. Tipos de Inversión

El proveedor/compañía de life settlement es el único ente legalmente autorizado para comprar directamente pólizas pertenecientes a otros individuos. Como requisito fundamental, el proveedor debe tener una licencia especial en el estado en que tenga lugar la transacción de compra/venta de la póliza de vida. Existen numerosos proveedores, entre los cuales destacan Coventry First, la entidad líder en la compra de life settlements, Life Settlement Solutions, Inc o Life Partners Holdings, Inc.

El proveedor tiene la opción de quedarse como propietario de las pólizas o puede traspasarlas a otros inversores. En general, esta segunda opción es más común y, al traspasar las pólizas, el proveedor deja de ser inversor para ser un intermediario más. El inversor final puede ser un particular aunque, debido al enorme desembolso que debe realizarse en la compra de pólizas para cumplir con los criterios de diversificación, suele ser un gran inversor institucional. En este punto, el inversor dispone de diferentes alternativas:

1. Quedarse como inversor final
2. Titularizar su cartera de activos mediante la emisión de títulos garantizados por life settlements (*Life Settlement Backed Securities* (LSBS))
3. Emitir derivados de longevidad (*Longevity Backed Derivatives*(LBD))

Desde el punto de vista del inversor, por tanto, la segunda y tercera alternativa se consideran instrumentos de cobertura. De hecho, Blake et al. (2008) define la titulización de los life settlements como un instrumento de cobertura sofisticado de primera generación, que permite al inversor disuadir los riesgos asociados a la póliza, repartiéndolos en pequeñas proporciones a otros inversores. La emisión de derivados de longevidad la define como un instrumento de cobertura de segunda generación, donde el inversor únicamente se cubre de un riesgo, el de longevidad. Se define finalmente una tercera categoría de cobertura, se trata de los instrumentos tradicionales que según Blake et al. (2008) consisten en la contratación de seguros o reaseguros.

Cabe decir que la introducción de la titulización y de derivados en un mercado se reconoce normalmente como un indicador de que el producto está desarrollado y maduro.

La Figura 5.1 representa estas formas de inversión. Las trayectorias en rojo simbolizan el recorrido que realiza el beneficio por muerte.

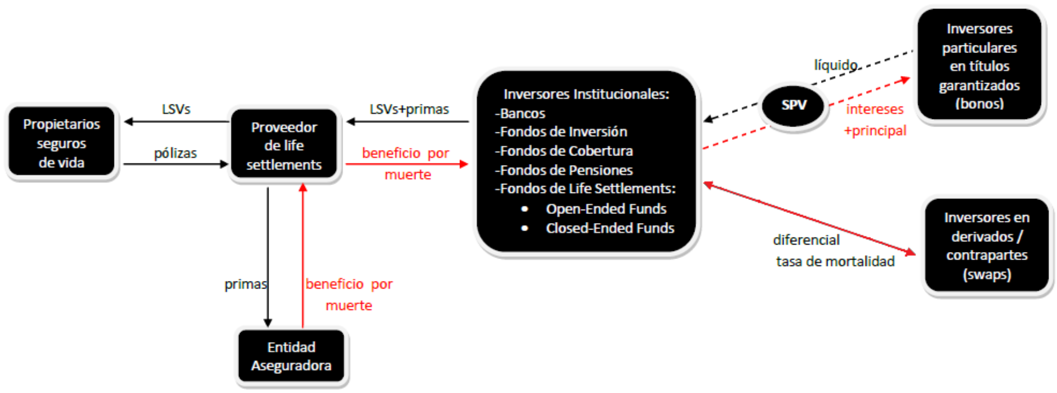

Figura 5.1: Vías de inversión en life settlements

5.2.1. Compra directa de pólizas

Históricamente, era la vía de inversión en life settlements más común, pero hoy en día también es la más complicada. Y es que una inversión eficiente precisa crear carteras que contengan un mínimo de 300 pólizas (Modu (2008)) y garantizar así una correcta diversificación. Esto supone disponer de capitales enormes así como de personal experimentado que realice una correcta selección de pólizas y creación de carteras. Por esta razón, quién suele comprar títulos de life settlement contactando directamente con el proveedor/compañía de life settlements es normalmente un gran inversor institucional y no un inversor particular. Estos inversores institucionales suelen ser grandes bancos -como Goldman Sachs-, compañías aseguradoras -como AIG-, fondos de cobertura (*hedge funds*) -como New Stream Capital- , fondos de pensiones -como Pensionenfonds Metalektro (alemán)- o, sobretodo, fondos de life settlements -como EEA Life settlement Fund, Utopia TLP Fund, Lansdown Atlantic Life Settlement Fund o EPIC Life Settlement Fund-.

La compra física de life settlements permite al inversor flexibilidad a la hora de diseñar su cartera, dependiendo de cual sea su propensión al riesgo o sus propósitos en cuanto a obtención de rendimientos. También permite un mayor control o seguimiento del estado de las pólizas que componen la cartera. Sin embargo, la compra directa también supone cargar con todos los riesgos que lleva consigo la inversión.

El inversor asume el pago de cada uno de los *LSV* así como de todas las primas futuras pendientes hasta el vencimiento de las pólizas. A medida que los asegurados van falleciendo, va cobrando directamente los beneficios por muerte ligados a cada póliza. Las pérdidas que pueden producirse en alguno de los títulos a causa de un alargamiento en la esperanza de vida del asegurado quedan compensadas por las rentabilidades generadas por las demás pólizas, si es que la cartera ha sido correctamente diseñada.

De entre todas las entidades inversoras las más importantes són los fondos *Open-Ended Pool* y *Closed-Ended Pool* que se dedican de forma exclusiva a invertir en life settlements. De hecho, Braun et al. (2011) señala que se espera que en el futuro los fondos *Open-Ended* acaben dominando el mercado. Se trata de fondos que van comprando títulos de life settlements de forma continuada siempre que exista efectivo. El efectivo viene generado tanto por las aportaciones de nuevos inversores que van entrando en el fondo como por las pólizas que van venciendo, de forma que los beneficios por muerte que se ingresan por la muerte de los asegurados raramente son distribuidos entre los inversores; éstos se utilizan básicamente para reinvertir en otros life settlements. Por lo general, ofrecen mensualmente o trimestralmente suscripciones para nuevos inversores así como reembolsos para aquellos inversores que desean liquidar sus carteras. En los fondos *Closed-Ended Pool*, en cambio, la suscripción queda limitada a determinados inversores. La compra de títulos se realiza sólo en el momento de crearse el fondo. Dicho fondo tiene fecha de vencimiento de manera que todas aquellas pólizas que siguen activas en el momento del vencimiento son vendidas otra vez.

Los inversores en life settlements tienen la posibilidad de financiarse mediante la emisión en los mercados de capitales de títulos de renta fija garantizados por life settlements, los denominados *Life Settlement Backed Securities* (LSBS). Como medida de cobertura, también pueden optar por la emisión de derivados de longevidad, es decir, los denominados *Longevity Backed Derivatives* (LBD). Mediante la emisión de títulos garantizados, el inversor traspasa gran parte de los riesgos a un segundo inversor, mientras que si decide emitir derivados, el inversor únicamente traspasa el riesgo más importante, el de longevidad. Estos mecanismos por un lado permiten al inversor cubrirse y, por otro lado, permiten que medianos y pequeños inversores, con menores recursos económicos, puedan entrar en el mercado.

5.2.2. Emisión de títulos garantizados por life settlements (*Life Settlement Backed Securities*) (LSBS)

La titulización de life settlements es una de las formas que disponen algunas entidades para financiar su inversión y para redistribuir a otros inversores los diferentes riesgos asociados a la transacción.

Su funcionamiento es similar a la titulización de hipotecas. Se inicia con la compra por parte de un inversor institucional de un gran número de pólizas con la finalidad de transformar la cartera en multitud de títulos (en forma de bonos) garantizados por sus subyacentes, los life settlements. El proceso se realiza normalmente a través de entidades subsidiarias llamadas *Special Purpose Entity* (o SPV, que ya hemos descrito en el Capítulo 2). A grandes rasgos, la titulización de life settlements consiste en la construcción de diferentes "paquetes" de pólizas ordenadas según su riesgo. Cada paquete se divide en tramos, de forma vertical, formando un bono que será posteriormente emitido en el mercado de capitales. En otras palabras, cada título estará compuesto por diferentes partes de pólizas de diferentes riesgos.

Los títulos emitidos se conocen como *Life Settlement Backed Securities* (LSBS) si bien también se habla de bonos de mortalidad o bonos de la muerte.

La SPV, por tanto, se financia con los bonos vendidos a los inversores para realizar los pagos de los LSV y de las primas de las pólizas que vayan quedando activas. A medida que los asegurados de las carteras vayan muriendo, los beneficios por muerte que vaya cobrando de la entidad aseguradora servirán para pagar los pagos de los intereses y del principal a los inversores en LSBS.

La titulización de life settlements empezó en 2004; la primera emisión de títulos fue realizada por Tarrytown Second, LLC, en Enero de 2004, por un valor de 63 millones de dólares, garantizados por una cartera de life settlements cuyo valor ascendía a 195 millones de dólares. El vencimiento se fijó en Diciembre de 2011 y fue calificado con un rating de AA-, por A.M. Best. La segunda emisión tuvo lugar en Abril del 2004 y fue realizada por Legacy Benefits Life Insurance Settlements, LLC, por un valor de 70 millones de dólares. Su vencimiento está fijado en el año 2039 (Stone y Zissu (2006b)).

Una extensa explicación del proceso de titulización de life settlements puede encontrarse en Bozanic (2008) o Martin (2010).

5.2.3. Contratación de derivados de longevidad (*Longevity Backed Derivatives*)

Hablaremos genéricamente de derivados de longevidad y no de derivados de life settlements porque el inversor en life settlements desea cubrirse únicamente en longevidad y no en su subyacente.

Existen muchas publicaciones relacionadas con la inversión en derivados de longevidad (Blake et al. (2008) o Biffis y Blake (2009)), pero no contemplan el caso particular de los derivados creados a partir de life settlements, si no que se centran en derivados emitidos por proveedores de rentas vitalicias, como fondos de pensiones, que desean cubrirse del riesgo de longevidad asociado a sus productos. Sin embargo, el análisis es extensible al mercado de los life settlements puesto que el riesgo a cubrir es el mismo.

La emisión de derivados de longevidad supone la búsqueda por parte del inversor en life settlements de un contraparte que desee cubrirse del riesgo de mortalidad o que busque propósitos especulativos. Existen cuatro tipos de derivados de longevidad: el swap, el forward, el futuro y la opción. En este trabajo únicamente explicaremos los dos primeros ya que según Biffis y Blake (2009) los futuros y las opciones de longevidad vinculados a life settlements no han sido aún emitidos.

Similar en su estructura al swap de tipos de interés o tipos de cambio, un swap de longevidad básico consiste en el acuerdo entre dos partes de ir intercambiando en fechas futuras pagos proporcionales a una tasa de mortalidad fija, predeterminada en el momento del acuerdo, por pagos proporcionales a la tasa real de mortalidad de una población determinada. En el ámbito de los life settlements, el inversor en life settlements sería el pagador de las cantidades fijas e iría recibiendo las cantidades variables o flotantes. De esta manera, el swap permite al inversor ir cobrando aquellas cantidades para hacer frente a los pagos de primas de aquellos contratos cuyos asegurados siguen viviendo. En las fechas acordadas para realizar el intercambio de cantidades resultan pagos netos dependiendo de cuanto haya variado finalmente la mortalidad observada. Si la tasa fija y la tasa real son equivalentes, los flujos se cancelan; si la tasa real queda por debajo de la tasa fija, el inversor debe pagar la cantidad neta y si la tasa real supera la tasa fija, el inversor recibe la cantidad neta. En la Figura 5.2 hemos representado el funcionamiento del swap de longevidad.

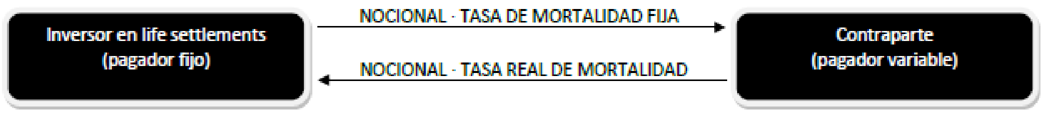

Figura 5.2: Swap de longevidad

El funcionamiento de un forward de longevidad es muy similar al del swap de longevidad pues se trata también de un intercambio de cantidades entre dos partes. J.P. Morgan es el principal emisor de este tipo de productos que reciben el nombre de *q-forwards* (ver Coughlan et al. (2007a)). Ambas partes acuerdan el intercambio, en una fecha futura determinada, de una cantidad fija preestablecida al inicio de la operación por una cantidad proporcional a un índice de longevidad. Para los *q-forwards* este índice de longevidad es el LifeMetrics[2]. En el vencimiento del *q-forward*, dependiendo de cual haya sido la variación de la tasa de mortalidad, el intercambio beneficiará al emisor o a su contraparte. En realidad un swap de longevidad consiste en una combinación de varios q-forwards.

5.3. Riesgos de Inversión en life settlements

A continuación se repasan cada uno de los riesgos que lleva consigo la inversión en life settlements. En concreto, repasaremos el riesgo:

- de longevidad,
- de valoración,
- de contrapartida,
- de liquidez,
- operativo y

[2]Éste es un índice creado por J.P. Morgan. Para la medición del índice y gestión del riesgo de mortalidad/longevidad ver Coughlan et al. (2007b). De hecho, en 2007, Goldman Sachs creó un índice mensual especial para el mercado de los life settlements llamado QxX.LS, basado en una población de 46.290 individuos mayores de 65 años (la base de datos pertenecía al evaluador médico AVS (*American Viatical Services*)). El índice sin embargo dejó de funcionar en 2009 por falta de uso. Otro índice más reciente es por ejemplo el creado por la Bolsa alemana en 2008, el Xpect-Indice.

- de regulación.

Una extensa explicación puede encontrarse en Perera y Reeves (2006).

Riesgo de longevidad: es hoy en día uno de los temas más populares en el ámbito actuarial. No es de extrañar pues supone un gran desafío para los fondos de pensiones, aseguradores y por supuesto entidades inversoras en life settlements. Y es que desde 1960 la esperanza de vida ha ido aumentando de forma continuada tanto en Europa como en América del Norte aproximadamente un año cada década (Loeys et al. (2007)). Este riesgo, en contraste con el riesgo de mortalidad, describe la posibilidad de que un individuo (pensionista, asegurado, etc) sobreviva por encima de lo esperado. Para el inversor en life settlements, cuantos más años viva el asegurado por encima de su esperanza de vida, más rentabilidad perderá en la operación. De hecho, lo preocupante de este riesgo no es que afecte a una póliza en concreto sino que alcance a toda la cartera, es decir, que todos los asegurados que componen una cartera de life settlements aumenten su esperanza de vida, al mismo tiempo. Esto sucede sobretodo con la aparición de algún descubrimiento médico que rehabilita a los pacientes afectados por la misma enfermedad. Y es, de hecho, lo que sucedió a principios de los años 90, con la mejora en el tratamiento del virus del SIDA y las consiguientes pérdidas por parte de aquéllos que habían invertido en viaticals. Por eso Modu (2008) recomienda que la cartera de pólizas en las que se invierte esté basada en diferentes enfermedades.

Riesgo de valoración: tiene mucho que ver con el de longevidad, en el sentido que un error en la cálculo del valor del viatical o del life settlement al alza significa que se ha subestimado la esperanza de vida del asegurado y, por tanto, éste acaba sobreviviendo a su esperanza de vida. Normalmente, se debe a una incorrecta valoración de la esperanza de vida del asegurado pero también podría darse a consecuencia de un error de modelización o de alguna actividad fraudulenta.

Riesgo de contrapartida: viene motivado por la posibilidad de quiebra de la entidad aseguradora emisora del seguro de vida. En Modu (2008) se recomienda a los inversores que diversifiquen sus carteras de life settlements según entidades aseguradoras y que tengan en cuenta, a la hora de invertir, los ratings asociados a estas entidades.

Riesgo de liquidez: lo provoca el desajuste entre las salidas de dinero -básicamente pago de primas- y las entradas de dinero -cobro de los beneficios por muerte-, además de la iliquidez que presenta el subyacente. También guarda mucha relación con los demás riesgos al estar el cobro de los beneficios por muerte totalmente relacionado con la longevidad del asegurado, la solvencia del asegurador, etc. La mejor manera de mitigar este riesgo es poseer un fondo de reserva con efectivo suficiente para hacer frente a las necesidades de caja en el corto plazo.

Riesgo operacional: lo provocan la multitud de agentes que participan en el proceso de contratación de un life settlement. Cuantos más agentes participan en una operación, mayor es la posibilidad de fraude, error, lentitud, pérdida o extravío de documentos. El riesgo operacional también puede venir ocasionado por la falsificación del historial médico del asegurado con el fin de provocar una menor esperanza de vida y por consiguiente el cobro de un VSV/LSV mayor.

Riesgo de regulación: es importante en la inversión de life settlements ya que se trata de un mercado relativamente joven, expuesto continuamente a cambios de legislación. Así, el inversor debe estar atento a estos cambios y adecuarse constantemente a nuevas prácticas. Además, la regulación en este mercado resulta ambigua porque varía según el estado en que se contrate el viatical/life settlement.

Para cubrir parte de todos estos riesgos proponemos a continuación algunas medidas de diversificación. La diversificación en una cartera de life settlements se refiere a la adquisición y gestión de pólizas que sean heterogéneas entre ellas (ver Modu (2008)). Esto quiere decir que el inversor deberá tratar de crear carteras con:

1. Pólizas cuyos asegurados presenten diferentes edades, diferentes esperanzas de vida y diferentes enfermedades/estados de salud,

2. Contratos de pólizas diferentes,

3. Entidades aseguradoras diferentes y

4. Pólizas emitidas en diferentes áreas geográficas.

Una candidato idóneo para contratar un life settlement tendría una edad aproximada de 70 años y una esperanza de vida de 120 meses o menor (Alexander (2011)); el candidato idóneo para contratar un viatical presenta una vida residual máxima de 48 meses. Sin embargo, los especialistas recomiendan, en primer lugar, diversificar la cartera de life settlements/viaticals en cuanto a edades y esperanzas de vida para tener diferentes perfiles de riesgo en la cartera. La inversión en una póliza cuya edad del asegurado es elevada o esperanza de vida es reducida es más bien conservadora; el riesgo asumido en la inversión es bajo y la rentabilidad que se puede obtener, aunque segura, es menor. En cambio, la inversión en títulos donde la edad es menor o la esperanza de vida elevada, es mucho más arriesgada pero la rentabilidad que se puede llegar a obtener en caso de fallecer el asegurado con antelación es mucho mayor.

La diversificación respecto a las enfermedades es importante. Una cartera de life settlements no puede estar basada únicamente en una o dos enfermedades porque la curación de una de las enfermedades puede generar pérdidas para el inversor muy importantes. En Modu (2008) se recomiendan los límites que debe contener cada cartera de life settlements según enfermedades. Por ejemplo, la cartera puede contener hasta un 50 % de pólizas con enfermedades cardiovasculares, un 20 % de ellas con enfermedades cerebro vasculares, otro 20 % con demencias, un 25 % con cánceres y un 10 % con diabetes (o enfermedades de gravedad similar).

También es necesaria la diversificación en cuanto a tipos de contratos. Por regla general se invierte siempre en contratos permanentes; los temporales son demasiado arriesgados ya que el período asegurado puede expirar antes del fallecimiento del asegurado y el inversor podría no cobrar el beneficio por muerte. Entre los seguros permanentes puede invertirse en: Universal Life, Universal Life variable, vida entera, vida entera variable, vida conjunta, etc. En ocasiones también podrían aceptarse seguros temporales, siempre que fueran convertibles. Cabe decir, que el inversor únicamente comprará pólizas de vida cuyo período de contestabilidad haya transcurrido[3].

Si basáramos toda nuestra cartera en pólizas emitidas por la misma entidad aseguradora estaríamos asumiendo un riesgo de contrapartida demasiado elevado. La entidad puede quebrar y nuestra cartera puede quedar muy dañada. Por eso es conveniente invertir en pólizas procedentes de varias compañías aseguradoras

[3]El período de contestabilidad se establece durante los primeros años de vida de una póliza -normalmente los dos primeros-. Durante dicho período, el asegurador tiene potestad para impugnar el cobro del beneficio por muerte o bien porque se sospecha que han habido fraudes, falsificaciones o errores durante la contratación del seguro, o bien porque la causa de muerte del asegurado ha sido el suicidio.

y que además éstas estén valoradas con un rating suficientemente elevado. Modu (2008) recomienda que las pólizas de una misma entidad aseguradora no superen el 15 % del total de pólizas de la cartera. Se aconseja además que el asegurador sea cualificado por un rating suficientemente elevado.

Se distinguirá finalmente también según áreas geográficas para evitar grandes pérdidas debidas por ejemplo a epidemias, desastres naturales; en general, fenómenos que supongan el fallecimiento de gran parte de una misma población.

5.4. Riesgo de longevidad: valoración

Al invertir en life settlements, el inversor asume una serie de riesgos; entre ellos, destaca el riesgo de longevidad del asegurado. Si bien este inversor puede obtener grandes beneficios por la muerte prematura del asegurado, también puede llegar a obtener un rendimiento bajo o incluso perder dinero si el asegurado vive por encima de lo previsto. Y es que el rendimiento que produce un life settlement puede variar mucho ante desviaciones de longevidad del asegurado, por eso es tan importante conocer de antemano qué riesgo conlleva el invertir en uno u otro título. Por tanto, el riesgo en este tipo de operaciones se concentra en la longevidad del asegurado y no tanto en la solvencia del asegurador.

El efecto de este riesgo sobre el rendimiento que proporciona invertir en un life settlement depende a grandes rasgos de las características de las pólizas de los seguros de vida que componen una cartera de life settlements. Esta es la razón por la que cada póliza supone un riesgo diferente; en otras palabras, no todos los contratos pierden el mismo valor ante un mismo incremento en la esperanza de vida del asegurado.

En Stone y Zissu (2008) se ofrece a los inversores un instrumento útil para valorar el riesgo de longevidad. Con este objetivo, los autores adaptan dos indicadores ampliamente estudiados en el sector de las finanzas al mercado de los seguros de vida: la duración modificada y la convexidad. Siendo la duración modificada el instrumento que permite determinar la sensibilidad del precio de un activo de renta fija frente a las variaciones de los tipos de interés y la convexidad una medida que, sumada a la anterior, proporcionaría una mayor exactitud, tendría todo el sentido utilizar estos indicadores para valorar el riesgo de longevidad que conlleva la inversión en un life settlement. Así, podemos cuantificar cómo de sensible es el valor de un life settlement o una cartera de life settlements ante desviaciones de la esperanza de vida del asegurado. En concreto, la *modified life extension-duration* (*modified le duration*) mide el porcentaje de variación en el valor de un life settlement dada una variación de la esperanza de vida del asegurado y la *life extension convexity* (*le convexity*), sumada a la medida anterior, permite una mejor aproximación.

Gracias a estos instrumentos los inversores pueden administrar mejor sus carteras ya que conocen el riesgo de que sus rendimientos esperados no se realicen. De esta manera, pueden escoger en invertir en aquellas pólizas menos arriesgadas o pueden estimar la cobertura necesaria para paliar posibles pérdidas en una operación mediante, por ejemplo, la contratación de derivados de longevidad.

5.4.1. *Modified Life Extension Duration*

En el modelo que proponemos aquí, seguimos las mismas pautas que en Stone y Zissu (2008) para llegar a obtener tanto la *modified le duration* como la *le convexity*, pero partimos de una valoración del life settlement diferente. En concreto, nos basamos en la valoración de Vadiveloo et al. (2005) que hasta la fecha es de las que mejor refleja el valor de mercado de los contratos life settlement.

Recordemos la valoración del life settlement (ecuación (2.3) y (2.4) del Capítulo 2):

$$LSV_{x+k} = (M - Tax) \cdot \widehat{A}_{x+k} - 1,2 \cdot P\widehat{\ddot{a}}_{x+k} - 0,04 \cdot M$$

con

$$Tax = 0,35 \cdot (M - 0,04 \cdot M - LSV_{x+k} - \widehat{e}_{x+k} \cdot 1,2 \cdot P).$$

Donde LSV_{x+k} es el valor del life settlement en el momento en que el asegurado tiene $x + k$ años –siendo x la edad en la que el asegurado contrató la póliza y k el número de años transcurridos desde entonces-, $\widehat{e}_{x+k}$ es la esperanza de vida del asegurado en el mismo momento, Tax el impuesto sobre el beneficio por muerte, M el capital asegurado, P la prima y r el tipo de interés. Como ya se ha definido en el Capítulo 2, los símbolos $\widehat{A}_{x+k}$ y $\widehat{\ddot{a}}_{x+k}$ reflejan el valor actual actuarial de un seguro unitario (vencido) y de una renta unitaria (anticipada) respectivamente.

En concreto,

$$\widehat{A}_{x+k} = \sum_{t=0}^{\omega-x-k} {}_{t/}\widehat{q}_{x+k} \cdot (1+r)^{-(t+1)}$$
$$\widehat{\ddot{a}}_{x+k} = \sum_{t=0}^{\omega-x-k} {}_{t}\widehat{p}_{x+k} \cdot (1+r)^{-t}$$

A fin de calcular las medidas de riesgo, replantearemos el método utilizado, pasando de un método probabilístico a uno determinista. Esto quiere decir que nuestro asegurado morirá al final de su esperanza de vida ($\widehat{e}_{x+k}$). De manera que el valor del life settlement queda definido de la siguiente manera:

$$LSV_{x+k} = \frac{M - Tax}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}} - 1,2 \cdot P \cdot \sum_{i=1}^{\widehat{e}_{x+k}} (1+r)^{-i} - 0,04 \cdot M \tag{5.1}$$

con

$$\sum_{i=1}^{\widehat{e}_{x+k}} (1+r)^{-i} = \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}} \right] \tag{5.2}$$

Si sustituimos las ecuaciones (5.4.1) y (5.2) en (5.1) y desarrollamos la expresión:

$$\begin{aligned} LSV_{x+k} = \frac{1}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} - 0,35} \, [\, 0,664 \cdot M + 0,42 \cdot P\widehat{e}_{x+k} - 1,2 \cdot P \left[\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} - 1}{r} \right] \\ - 0,04 \cdot M(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} \,] \end{aligned} \tag{5.3}$$

La variación porcentual del valor del life settlement frente a las variaciones porcentuales de la esperanza de vida de un asegurado se mide mediante la *modified le duration*. Calculamos la primera derivada de (5.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial LSV_{x+k}}{\partial \widehat{e}_{x+k}} = -\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} \cdot \ln(1+r)}{[\,(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} - 0,35\,]^2} \cdot [\, 0,65 \cdot M + (\, 0,42 \cdot \widehat{e}_{x+k} + \frac{0,78}{r} \,) \cdot P \,] \\ + \frac{0,42 \cdot P}{[\,(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} - 0,35\,]} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Y dividimos (5.4) por LSV_{x+k}:

$$mod\ le\ dur = \frac{-\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}\cdot \ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0,35}\cdot\left[0,65\cdot M+\left(0,42\cdot\widehat{e}_{x+k}+\frac{0,78}{r}\right)\cdot P\right]+0,42\cdot P}{0,664\cdot M+0,42\cdot P\cdot\widehat{e}_{x+k}-1,2\cdot P\cdot\left[\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-1}{r}\right]-0,04\cdot M\cdot(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}}, \tag{5.5}$$

donde *mod le dur* es la abreviación de *modified life extension duration*. Se trata de un resultado negativo, es decir, si el asegurado vive por encima de su esperanza de vida –la calculada en el momento de la emisión del life settlement-, el inversor pierde rentabilidad.

Para evaluar la sensibilidad del valor de un life settlement ante una determinada variación de la esperanza de vida, multiplicamos la ecuación (5.5) por la extensión o reducción de la esperanza de vida, $\triangle\widehat{e}_{x+k}$, que podemos esperar que se produzca:

$$[\%\triangle LSV] = \frac{-\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}\cdot \ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0,35}\cdot\left[0,65\cdot M+\left(0,42\cdot\widehat{e}_{x+k}+\frac{0,78}{r}\right)\cdot P\right]+0,42\cdot P}{0,664\cdot M+0,42\cdot P\cdot\widehat{e}_{x+k}-1,2\cdot P\cdot\left[\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-1}{r}\right]-0,04\cdot M\cdot(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}} \cdot\triangle\widehat{e}_{x+k}$$

Así, las pérdidas de rentabilidad por año de más vivido por el asegurado son cada vez mayores.

5.4.2. *Life Extension Convexity*

La *mod le dur* presenta un inconveniente: cuánto mayor es la variación de la esperanza de vida considerada, mayor es el error cometido al estimar la variación del valor del life settlement. Este error se comete por ser la duración una simple aproximación de primer orden o lineal al verdadero comportamiento del título. Para corregir este error, se propone la utilización de otra medida, la *le convexity*. Esta medida se obtiene calculando la segunda derivada del valor del life settlement (ecuación (5.1)) respecto a la esperanza de vida y dividiendo por el propio valor del life settlement; de forma que:

$$le\ convexity = \frac{\partial^2 LSV_{x+k}/\partial^2 \widehat{e}_{x+k}}{LSV_{x+k}}$$
$$= \frac{\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}\ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0{,}35} \cdot \left[\ln(1+r) \cdot \frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} \cdot \ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0{,}35} \cdot \left(0,65 \cdot M + \left(0,42 \cdot \widehat{e}_{x+k} + \frac{0{,}78}{r}\right) \cdot P\right) - 0,84 \cdot P\right]}{0,664 \cdot M + 0,42 \cdot P \cdot \widehat{e}_{x+k} - 1,2 \cdot P \cdot \left[\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-1}{r}\right] - 0,04 \cdot M(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}} \tag{5.6}$$

El resultado es positivo. Esto significa que la variación –negativa- en el valor de nuestro título ante una variación en la esperanza de vida del asegurado, calculada mediante la *mod le dur*, será reducida por la aplicación de la *le convexity*.

Así que, igual que en finanzas, por la aproximación de Taylor de segundo orden obtenemos la variación total que sufre el valor de un life settlement ante modificaciones en la esperanza de vida de un individuo:

$$[\%\triangle LSVtotal] = \frac{-\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} \cdot \ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0{,}35} \cdot \left[0,65 \cdot M + \left(0,42 \cdot \widehat{e}_{x+k} + \frac{0{,}78}{r}\right) \cdot P\right] + 0,42 \cdot P}{0,664 \cdot M + 0,42 \cdot P \cdot \widehat{e}_{x+k} - 1,2 \cdot P \cdot \left[\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-1}{r}\right] - 0,04 \cdot M \cdot (1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}} \cdot \triangle\widehat{e}_{x+k}$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} \cdot \ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0{,}35} \cdot \left[\ln(1+r) \cdot \frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}} \cdot \ln(1+r)}{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-0{,}35} \cdot \left(0,65 \cdot M + \left(0,42 \cdot \widehat{e}_{x+k} + \frac{0{,}78}{r}\right) \cdot P\right) - 0,84 \cdot P\right]}{0,664 \cdot M + 0,42 \cdot P \cdot \widehat{e}_{x+k} - 1,2 \cdot P \cdot \left[\frac{(1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}-1}{r}\right] - 0,04 \cdot M \cdot (1+r)^{\widehat{e}_{x+k}}} \cdot (\triangle\widehat{e}_{x+k})^2$$

5.4.3. Variación para una cartera

En caso de tener el inversor una cartera de n life settlements, para hallar la *mod le dur* y su respectiva *le convexity*, deberemos realizar una media ponderada, obteniendo así la *wa modified le duration* (*weight average modified life extension duration*) y la *wa le convexity* (*weight average life extension convexity*). En ambos casos, se multiplica la duración modificada o convexidad de cada life settlement por su valor correspondiente, y se divide por el valor total de los n life settlements que componen la cartera. De forma que:

$$wa\ modified\ le\ duration = \sum_{i=1}^{n} \frac{LSV_i}{LSV} \cdot (mod\ le\ dur)_i$$

$$wa\ le\ convexity = \sum_{i=1}^{n} \frac{LSV_i}{LSV} \cdot (le\ convexity)_i$$

5.5. Ilustración Numérica

5.5.1. Valoración del riesgo de inversón

Para la resolución de este ejemplo numérico, consideraremos exactamente los mismos datos (ver Tabla 2.1), las mismas bases técnicas y los mismos costes de transacción del ejemplo realizado en el Capítulo 2.

El hecho de haber pasado de un método probabilístico a un método determinista hace que el LSV a la edad considerada, 65 años, cambie, obteniendo un LSV_{65} ligeramente inferior. Siguiendo la ecuación (5.3), obtenemos $LSV_{65} = 22.034,40$ euros.

Para obtener la pérdida de rentabilidad debida a una incorrecta estimación de la esperanza de vida del asegurado calculamos en primer lugar la *mod le dur* y la *le convexity* (ecuaciones (5.5) y (5.6) respectivamente):

$$\begin{aligned} mod\ le\ dur &= -0,1472, \\ le\ convexity &= 0,01713. \end{aligned}$$

Obteniendo un resultado negativo en el primer caso y un resultado positivo en el segundo caso, siendo la variación total de nuestro life settlement negativa, ante un incremento de la esperanza de vida del asegurado.

En concreto, si este asegurado acabara viviendo dos años por encima de su esperanza de vida inicial –aquella que fue computada cuando se contrató el life settlement-, las pérdidas porcentuales del inversor derivadas de este aumento en la esperanza de vida serían:

$$\begin{aligned} [\,\%\triangle LSV \text{total}] &= mod\ le\ dur \cdot \triangle\widehat{e}_{x+k} + \frac{1}{2} \cdot le\ convexity \cdot (\triangle\widehat{e}_{x+k})^2 \\ &= -0,2602 \end{aligned}$$

Si realizamos el mismo cálculo para diferentes incrementos en la esperanza de vida, obtenemos los resultados de la Tabla 5.1.

$\Delta\widehat{e}_{x+k}$	$\%\Delta LSV$ total
1	$-13,86\,\%$
2	$-26,02\,\%$
3	$-36,45\,\%$
4	$-45,18\,\%$

Tabla 5.1: Pérdida de valor ante aumentos en la esperanza de vida

La pérdida en el valor del título es muy elevada por año de más vivido por el asegurado, lo que nos demuestra que la estimación correcta de la esperanza de vida de este asegurado en el momento de emitir el life settlement es fundamental. Y es que no sólo es necesario determinar correctamente el estado de salud actual del asegurado, también debe tenerse en cuenta que los avances médicos pueden mejorar considerablemente este estado de salud, llegando incluso a eliminar la posible enfermedad.

El valor del life settlement a la edad de 65 años es de 22.034,40 euros y la esperanza de vida en dicha edad para un asegurado cuyas probabilidades de fallecimiento habían sido multiplicadas por un factor de recargo igual a 5, es de 5,52 años. Finalmente el asegurado acaba viviendo 2 años más de lo previsto –es decir, 7,52 años (según el método de valoración determinista), si desde un principio se hubieran tenido en cuenta estos 2 años de más, el valor del título hubiera sido: $LSV_{65} = 16.230,27$ euros.

Si, en cambio, calculamos el nuevo valor del life settlement mediante el uso de la *mod le dur* y de la *le convexity*:

$$\begin{aligned}
&LSV_{65}(mod\ le\ dur + le\ convexity)\\
&= LSV_{65} \cdot \left[1 + \left((mod\ le\ dur) \cdot \triangle\widehat{e}_{x+k} + \frac{1}{2}(le\ convexity) \cdot (\triangle\widehat{e}_{x+k})^2\right)\right]\\
&= 16.301,63.
\end{aligned}$$

Obtenemos resultados muy similares, lo que significa que el uso de la duración modificada y de la convexidad son medidas buenas de cara a calcular el riesgo de longevidad de un asegurado.

La Tabla 5.2 muestra cómo varía el valor del life settlement en términos absolutos para incrementos en la esperanza de vida de 1, 2, 3 y 4 años. En concreto, en la segunda columna tenemos el valor inicial de este título, considerando que el asegurado vivirá 5,52 años más. La tercera y cuarta representan los nuevos valores del título considerando que la esperanza de vida del asegurado ha mejorado 1, 2, 3 y 4 años; sin embargo, difieren en cuanto a la metodología del cálculo. En la tercera, estos nuevos valores han sido calculados en el momento de emitir el life settlement, esto es, utilizando la valoración del life settlement pero con unas esperanzas de vida de 6,52; 7,52; 8,52 y 9,52 años. En la última, en cambio, hemos calculado el LSV aplicando la *mod le dur* y la *le convexity*. Todas las unidades monetarias vienen expresadas en euros.

$\Delta\widehat{e}_{x+k}$	LSV inicial	LSV inicial con $\Delta\widehat{e}_{x+k}$	LSV (*mod le dur* +*le conv*)
1	22.034,40	18.969,87	18.979,23
2		16.230,27	16.301,63
3		13.771,53	14.001,61
4		11.557,17	12.079,15

Tabla 5.2: Aproximación de la *mod le dur* y de la *le convexity*

Esta forma de medición del riesgo de longevidad sólo resulta válida para incrementos en la esperanza de vida reducidos. Para $\Delta\widehat{e}_{x+k}$ elevados la aproximación ya no es buena, tal y como puede apreciarse en la Figura 5.3.

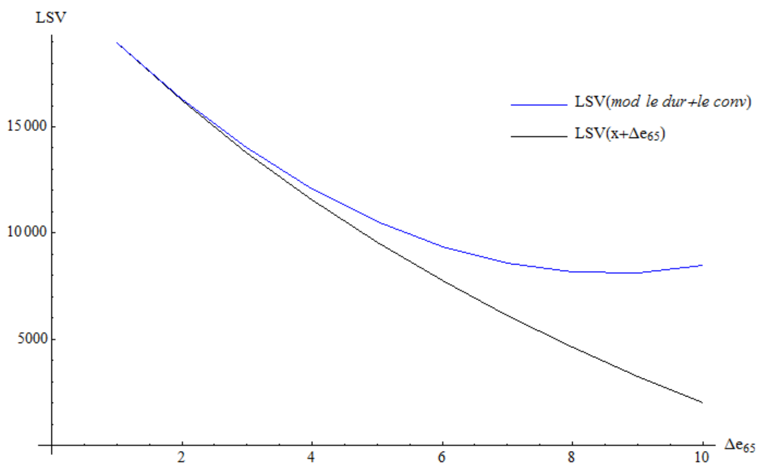

Figura 5.3: Aproximación de la *mod le dur* y de la *le convexity*

5.5.2. Valoración de una posible cobertura: contratación de un swap de longevidad

Supongamos que un inversor posee una cartera de life settlements y que el riesgo de longevidad asociado a ésta y calculado mediante la *weight average modified life extension duration* es elevado, por lo que decide cubrirse mediante la contratación de un swap de longevidad. Una *weight average modified life extension duration* elevada significa que existe el riesgo de que algunas pólizas de su cartera venzan más tarde lo previsto, por lo que el valor esperado de sus pagos aumenta mientras que el valor esperado de sus cobros decrece. Mediante la contratación de un swap de longevidad, el inversor se asegura al menos el pago de unas cantidades constantes, recibiendo unas cantidades variables que le servirán para hacer frente a las primas pendientes aún de pago. El inversor se cubre frente a desviaciones adversas de la mortalidad. En otras palabras, el riesgo de longevidad desaparece porque estas cantidades variables recibidas están correlacionadas con el importe de las primas a pagar a través de la tasa real de mortalidad, por lo que los flujos se cancelan.

A continuación, se detallan las características de un posible contrato de swap de longevidad.

Nocional	100.000 euros
Tipo fijo	1.2 %
Tipo variable	Tasa real de mortalidad
Cantidad fija	Nocional · Tipo fijo ·10
Cantidad variable	Nocional · Tipo variable ·10
Duración	3 años
Periodicidad de los pagos	trimestral vencido

Tabla 5.3: Caraterísticas del swap de longevidad

Obsérvese que no se ha tenido en cuenta ningún pago por parte del inversor en concepto de precio del swap. El inversor de life settlements asume por tanto el pago trimestral y vencido de 12.000 euros durante los próximos tres años mientras que su contraparte hace frente al pago -también trimestral y vencido, durante tres años- de cantidades variables, determinadas por la tasa real de mortalidad de la población.

En la Tabla 5.4 se presenta a modo de ejemplo una posible situación, suponiendo unas determinadas tasas de mortalidad. Cuando la tasa real de mortalidad queda por encima del tipo fijado, es el inversor quién cobra el importe neto mientras que si queda por debajo, el inversor debe pagar de más. Si las tasas coinciden, los importes se cancelan. Así, los importes netos positivos corresponden a ingresos para el inversor y los importes netos negativos corresponden a ingresos para su contraparte. Todas las unidades monetarias vienen expresadas en euros.

t	Tipo fijo	Tipo variable	Cantidades fijas (a pagar)	Cantidades variables (a cobrar)	Importe Neto
1/4	1,20 %	1,27 %	12.000	12.700	700
2/4	1,20 %	1,25 %	12.000	12.500	500
3/4	1,20 %	1,21 %	12.000	12.100	100
1	1,20 %	1,24 %	12.000	12.400	400
5/4	1,20 %	1,18 %	12.000	11.800	−200
6/4	1,20 %	1,26 %	12.000	12.600	600
7/4	1,20 %	1,20 %	12.000	12.000	0
2	1,20 %	1,15 %	12.000	11.500	−500
9/4	1,20 %	1,19 %	12.000	11.900	−100
10/4	1,20 %	1,14 %	12.000	11.400	−600
11/4	1,20 %	1,19 %	12.000	11.900	−100
3	1,20 %	1,22 %	12.000	12.200	200

Tabla 5.4: Intercambio de pagos

5.6. Conclusiones

En este capítulo se han descrito, en primer lugar, las diferentes opciones de que dispone un inversor para entrar en el negocio de los life settlements. Si bien la forma más común para invertir en estos activos es la compra directa de pólizas de vida, también puede optarse por la contratación de títulos garantizados -más conocidos en España como bonos de la muerte- o de derivados de longevidad, en concreto el swap y el forward de longevidad. De hecho, tanto la contratación de títulos garantizados como de derivados viene motivada por la necesidad de un inversor inicial en life settlements de cubrirse frente al riesgo de longevidad que lleva consigo este producto. Ante la importancia que tiene dicho riesgo en el mercado pensamos que es útil presentar su medición. No obstante, antes de analizar el riesgo de longevidad en particular, se han descrito varios de los riesgos de inversión en life settlements.

La medida propuesta para la cuantificación del riesgo de longevidad fue planteada por primera vez en Stone y Zissu (2008). Sin embargo, Stone y Zissu (2008) parten de una valoración del life settlement carente de todo tipo de costes de transacción (gastos, comisiones, impuestos). En este trabajo, consideramos la fórmula de valoración propuesta por Vadiveloo et al. (2005) que es, hasta el momento, la mejor de las propuestas aparecidas en la literatura. A partir de esta valoración se han definido la *mod le duration* y la *life extension convexity* que permiten controlar cuánto puede llegar a perder un inversor si el asegurado vive por encima de lo que había sido estimado cuando el life settlement fue emitido. Así, el inversor dispone de una herramienta útil para catalogar los life settlements en función de su riesgo, lo que le permite o bien escoger aquellos títulos menos arriesgados o bien estimar la cobertura necesaria para paliar posibles pérdidas.

En el último apartado hemos aplicado estas medidas a un ejemplo práctico y hemos comprobado numéricamente cómo se comportan. Mediante el uso de la *modified le duration* y la *le convexity* observamos que el riesgo de longevidad que conlleva la inversión en life settlements es considerable. Por año de más vivido por el asegurado, un inversor puede perder de media un 15 % del valor inicial del título o incluso podría llegar a obtener pérdidas. De ahí, que el cálculo correcto de la esperanza de vida para estos productos sea fundamental. Por último, hemos ilustrado numéricamente una posible cobertura frente al riesgo de longevidad para un inversor que posee una cartera de life settlements. En este caso, hemos escogido la contratación de un swap de longevidad.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis doctoral hemos querido estudiar cómo se comportan los agentes que participan en una operación de compra/venta de una póliza de vida en el mercado secundario de los seguros de vida. En concreto, hemos querido comprobar qué factores intervienen en sus decisiones y en qué medida. Por parte del tomador del seguro, sobretodo hemos querido destacar que su decisión no viene determinada exclusivamente por el precio de venta, sino también por otros factores, personales y de mercado. Desde el punto de vista del inversor, nos hemos fijado en los riesgos que asume a la hora de invertir en una póliza de vida porque son determinantes en la toma de sus decisiones. Nuestro estudio se ha centrado en dos productos concretos, los viaticals y sobretodo los life settlements pero somos conscientes que el análisis es perfectamente extensible al rescate de la póliza -el precio pagado por la compañía es menor al precio pagado por el inversor-.

Al tratarse de un mercado relativamente joven y aún bastante desconocido, sobretodo en España, el proyecto precisaba una exhaustiva descripción de los productos y de su funcionamiento. Éste ha sido básicamente el objetivo perseguido en el Capítulo 2. En él hemos definido los productos, sus partícipes, el proceso de contratación y los beneficios que aporta. Además hemos realizado una valoración para el life settlement bajo unos determinados criterios. El precio del viatical tiene la misma estructura, si bien los supuestos en cuanto a comisiones y tasas son menos importantes y las probabilidades de fallecimiento del asegurado sufren un impacto mayor.

Pese a no haber aplicado ningún factor de penalización para valorar el rescate, suponiendo por tanto que dicho valor es igual a la provisión matemática, y que el factor de recargo aplicado a las probabilidades de fallecimiento para valorar el life settlement es, creemos, excesivo (y es que hemos considerado exactamente los mismos supuestos actuariales que en Vadiveloo et al. (2005)), hemos comprobado que el importe pagado por el inversor es superior al precio pagado por la compañía aseguradora y, por contra, es menor al valor real de la póliza. Sin embargo, hemos visto que el factor precio no es el único factor determinante en la decisión final del propietario de una póliza de vida. De forma análoga, la decisión óptima de inversión no viene determinada únicamente por la dimensión del activo. Esta decisión vendrá determinada, por parte del tomador, por la mayor utilidad generada por cada situación (vender o no vender) y, por parte del inversor, por el riesgo al que incurre al realizar su inversión. Por esta razón, en el segundo capítulo hemos realizado una breve descripción de nuestros modelos de optimización, basados en la maximización de la utilidad esperada de un consumidor y a la vez tomador y asegurado de un seguro de vida (hemos asumido en nuestros modelos que tomador y asegurado son la misma persona), y en un instrumento para medir las posibles ganancias o pérdidas de rentabilidad de un inversor en life settlements.

El Capítulo 3 se encuadra dentro del mercado de los viaticals. Nuestro modelo de optimización consta de dos períodos y se resuelve en tiempo discreto. Hemos probado que las cantidades destinadas a consumo anual y a herencia anual por parte de un tomador (asegurado a la vez) dependen de factores tales como su riqueza, su propensión a dejar legado frente a consumir, su factor anual de descuento intertemporal, sus probabilildades de supervivencia/fallecimiento, las primas a pagar por mantener su póliza de vida en activo, el tipo de interés de mercado, el cobro futuro del beneficio por muerte si decide no vender su seguro, el importe recibido por la venta de la póliza de vida en el mercado secundario si, por contra, decide venderla, además de las proporciones del seguro que decidiera vender.

En una ilustración numérica hemos comprobado cómo se comporta nuestro modelo para un agente con unas características específicas, obteniendo que la decisión óptima consiste en no vender al inicio del primer período y vender al inicio del segundo período. Sin embargo, el óptimo del problema de optimización es muy sensible a posibles cambios en las características del sujeto, de la póliza y del mercado y por eso el ejemplo numérico precisaba un análisis de sensibilidad. Este análisis se ha realizado modificando las siguientes variables: riqueza, propensión a dejar legado frente a consumir, factor anual de descuento intertemporal y precio del viatical (mediante el porcentaje aplicado sobre el valor actual actuarial de la póliza). En concreto, hemos comprobado que cuanta más riqueza dispone el agente y por tanto menos problemas de liquidez presenta, menos propensión tiene a vender su póliza de vida. Respecto al parámetro que describe la voluntad de dejar herencia en detrimento del propio consumo, hemos confirmado que al aumentar, como el consumidor tiende a valorar más su legado, prefiere vender cada vez más tarde y cada vez menos cantidad. El factor anual de descuento intertemporal vendría a medir la preocupación del agente por su futuro. Así, cuanto más elevado es dicho parámetro, el consumidor se convierte en un individuo cada vez más ahorrador, por lo que prefiere mantener más tiempo su póliza de vida, quedándose como propietario. Y, por último, analizando el impacto del precio del viatical sobre la decisión final del agente hemos comprobado que cuanto mayor es este precio, antes decide vender. Hemos demostrado, por tanto, que dependiendo de las características del asegurado, de la póliza de vida y del entorno económico, el agente presenta unas preferencias u otras.

El Capítulo 4 se focaliza en el mercado de los life settlements. En este caso, el modelo de optimización consta de más de dos períodos y se desarrolla en tiempo continuo. Para resolver el problema, hemos dividido el horizonte temporal en dos partes: el período anterior a la venta de la póliza de vida y el período posterior a la venta de la póliza de vida. Obsérvese que en caso de no vender la póliza, nuestro modelo únicamente incluye la primera parte. La utilidad intertemporal total esperada en el momento inicial viene definida por las utilidades instantáneas sobre el consumo y por la utilidad final sobre la herencia. Hemos probado que las cantidades destinadas tanto a consumo instantáneo como a herencia vienen determinadas por la riqueza inicial, la propensión a dejar legado frente a consumir, la tasa instantánea de preferencia temporal, el tipo de interés, la función de supervivencia y la función de densidad, el beneficio por muerte contratado en la póliza, el momento de venta de la póliza, el coeficiente de aversión al riesgo -si consideramos unas funciones de utilidad potenciales- y el valor recibido por la póliza de vida, en caso de venderla.

Ni utilizando funciones de utilidad potenciales, ni utilizando funciones de utilidad logarítmicas hemos llegado a obtener soluciones analíticas. Lo que obtenemos son resultados en forma de ecuaciones integro diferenciales no lineales. Éste es un problema muy típico de la resolución mediante programación dinámica, si bien esta técnica se fija más en las trayectorias óptimas de las diferentes variables que en la búsqueda de soluciones analíticas o de equilibrios estacionarios. Esto hace imprescindible encontrar soluciones numéricas.

En cuanto a la ilustración numérica, hemos obtenido soluciones para ambos tipos de funciones de utilidad, potenciales y logarítmicas, discretizando el problema de optimización, por no disponer de soluciones analíticas a nivel teórico. La discretización es un recurso muy utilizado ante la imposibilidad de obtener resultados analíticos; nuestros resultados son por tanto una aproximación muy ajustada al resultado óptimo del problema. Las trayectorias de las variables consumo y riqueza obtenidas tanto para el caso potencial como para el caso logarítmico son del todo coherentes. Considerando unas características iniciales del agente, de la póliza y del mercado, hemos analizado estas trayectorias: el consumo sigue una tendencia decreciente y justo en el momento en que tiene lugar la venta de la póliza salta, para seguir decreciendo año a año. El salto es más acusado cuanto más tarde se vende la póliza dado que el importe recibido por ella es mayor (al asegurado le quedan menos años de vida). Respecto a la riqueza sucede lo mismo, ésta va decreciendo de forma monótona y en cuanto tiene lugar la venta de la póliza, salta de forma brusca, para seguir decreciendo en los años posteriores. Tanto para el caso potencial como para el caso logarítmico, nuestro momento óptimo de venta se encuentra al inicio del segundo año. Sin embargo, los resultados que nos interesan tienen que ver con el cambio de estrategia al variar nuestras variables de referencia y por eso, a continuación, hemos realizado un análisis de sensibilidad.

En resumen, hemos comprobado que, considerando unas funciones de utilidad potenciales, cuanto más adverso al riesgo es el agente, antes decide vender. Igual que para el modelo en discreto de los viaticals, cuanto mayor es la valoración del individuo por la herencia más tarde decide vender. Por otro lado, si el precio recibido por la póliza de vida crece, el tomador tiende a vender antes su póliza y de hecho, para precios bajos, éste decide conservar su póliza. Finalmente, hemos visto que la decisión final no es demasiado sensible ante variaciones de la tasa instantánea de preferencia temporal aunque se aprecia una propensión a vender antes cuanto mayor es dicha tasa.

Llegados a ese punto y habiendo centrado nuestra atención principalmente en el comportamiento del consumidor, hemos creído oportuno incluir un análisis focalizado en el comportamiento del inversor. Previa descripción de las alternativas de que dispone este inversor para entrar en el mercado de los viaticals o de los life settlements y de los riesgos que supone la inversión en estos productos, hemos estudiado un instrumento cuyo objetivo es la medición del riesgo de longevidad en ambos productos. A través de esta medida denominada *modified life extension duration* podemos conocer qué variación en términos de rentabilidad sufrirá nuestra cartera de activos al variar la esperanza de vida de los asegurados de las pólizas de vida en las que se ha invertido. Hemos obtenido esta medida siguiendo el mismo proceso a través del cual se encuentra la duración modificada que utilizamos en el campo de las finanzas. También hemos tenido que introducir a dicha medida un mecanismo corrector, denominado *life extension convexity*, para salvaguardar el error cometido por la *modified life extension duration* cuando la variación de la esperanza de vida considerada es demasiado grande.

A través de un ejemplo numérico, hemos comprobado cómo se ve afectado el valor del life settlement ante incrementos inesperados de la esperanza de vida del asegurado. Para unos datos de referencia concretos, si el asegurado de nuestro ejemplo vive un año más de lo previsto, el inversor pierde el $13,86\,\%$ del valor del life settlement, si vive dos años más de lo previsto, pierde el $26,02\,\%$ y así sucesivamente. Por tanto, queremos destacar a través de esta medida la importancia que tiene el riesgo de longevidad en este tipo de activos y cuánto debe estudiar el inversor dicho riesgo antes de decidir invertir en una póliza de vida. Para cubrirse de este riesgo, proponemos al inversor que contrate un swap de longevidad. Realizamos una breve descripción de su funcionamiento a través de un ejemplo.

Hasta la fecha, por lo que conocemos, ningún estudio ha tratado este tema con los mecanismos que proponemos por lo que pensamos que ahí está su novedad e interés. Sin embargo, quedan aún líneas de investigación abiertas que serán tratadas en un futuro. Como primer paso, creemos que merece la pena centrarse en la resolución y obtención de resultados analíticos para el modelo económico destinado a optimizar la cuantía de consumo y herencia cuando el agente quiere vender su póliza de vida en el mercado de life settlements.

Bibliografía

[1] Ansley, C. y Darby, J. (2010), *Life Settlement Investments*, Russell Investments, Dissertation. Disponible en: http://www.lifesettlementsfund.com/scripts/download.php?fn=feb2010 %20-life %20settlements %20- %20russell %20research.pdf, (28/07/2013).

[2] Alexander, R.C. (2011), *Demystifying Life Settlements: educate Yourself, Then Educate Your Clients*, En: The Producer's Guide To The Life Settlement Market, Agent's Sales Journal, pp. 9. Disponible en: http://www.lifehealthpro.com/2010/04/01/demystifying-life-settlements-educate-yourself-the, (28/07/2013).

[3] Aspinwall, J., Chaplin, G. y Venn, M. (2009), *Life Settlements and Longevity Structures. Pricing and Risk Management*, Wiley, United Kingdom.

[4] Bacinello, A.R. (2003), Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option, *Journal of Risk and Insurance*, vol. 70, no. 3, pp. 461–487.

[5] Bellman R. y Dreyfus, S.E. (1962), *Applied Dynamic Programming*, RAND Corporation, Princeton University Press, New Jersey, United States.

[6] Bertsekas, D.P. (1995), *Dynamic programming and optimal control.* Athena Scientific.

[7] Bhattacharya, J., Goldman, D.P. y Sood, N. (2004). Price regulation in secondary insurance markets, *Journal of Risk and Insurance*, vol.71, no.4, pp.643-675.

[8] Bhattacharya, J., Goldman, D.P. y Sood, N. (2009), Market evidence of misperceived mortality risk, *Journal of Economic Behavior & Organisation*, vol. 72, no. 1, pp. 451-462.

[9] Bhuyan, V.B. et al. (2009), *Life Markets: Trading mortality and longevity risk with life settlements and linked securities*, Wiley Finance, Hoboken, New Jersey.

[10] Biffis, E. y Blake, D.P. (2009), *Mortality-linked securities and derivatives*. Working Paper, Imperial College Business School. Disponible en: http://ssrn.com/abstract=1340409, (28/07/2013).

[11] Blake, D., Cairns, A. y Dowd, K. (2008), *The Birth of the Life Market*, The Pensions Institute, London. Disponible en: http://www.pensions-institute.org/workingpapers/wp0807 %20newest.pdf, (28/07/2013).

[12] Blake, D. y Harrisson, D. (2008), *And Death Shall Have No Dominion: Life Settlements and the Ethic of Profiting from Mortality*, Pensions Institute Report, July. Disponible en: http://ssrn.com/abstract=1344332, (28/07/2013).

[13] Bozanic, K.J. (2008), An Investment to Die for: from Life Insurance to Death Bonds, the Evolution and Legality of Life Settlement Industry, *Penn State Law Review*, vol.113, no. 1, pp. 229-268.

[14] Braun, A., Gatzert, N. y Schmeiser, H. (2011), Performance and Risk of Open-End Life Settlement Funds, *Journal of Risk and Insurance*, vol. 00, No. 0, pp. 1-37.

[15] Chen, H., Cox, S. H. y Yan, Z. (2011), *A Family of Mortality Jump Models with Parameter Uncertainty: Application to Hedging Longevity Risk in Life Settlements*. Disponible en SSRN: http://ssrn.com/abstract=1911688 o http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1911688, (28/07/2013).

[16] Conning Research y Consulting, Inc (1999), *Viatical Settlements. The Emerging Secondary Market for Life Insurance Policies*, Conning Research and Consulting, Inc Strategic Study Series. Disponible en: http://www.conning.com/viewpublications-article.aspx?id=2759, (28/07/2013).

[17] Conning Research y Consulting, Inc (2007), *Life Settlement Market, Increasing Investor and Capital Demand*, Conning Research and Consulting, Inc Strategic Study Series. Disponible en: http://www.conning.com/pressrelease-detail.aspx?id=167, (28/07/2013).

[18] Conning Research y Consulting, Inc (2009), *Life Settlements. A Buyers' Market For Now*, Conning Research and Consulting, Inc Strategic Study Series. Disponible en: http://www.conning.com/viewpublications-article.aspx?id=3440, (28/07/2013).

[19] Coughlan, G., Epstein, D., Ong, A., Sinha, A., Balevich, I., Hevia-Portocarrero, J., Gingrich, E., Khalaf Allah M. y Joseph, P. (2007a), *LifeMetrics, A Toolkit for Measuring and Managing Longevity and Mortality Risks*, Technical Document, JPMorgan Pension Advisory Group. Disponible en:
https://www.jpmorgan.com/cm/BlobServer/lifemetrics_technical.pdf?blob-key=id&blobwhere=1158472448701&blobheader=application/pdf&blobheadername1=Cache-Control&blobheadervalue1=private&blobcol=urldata&-blobtable=MungoBlobs, (28/07/2013).

[20] Coughlan, G., Epstein, D., Sinha, A. y Honig, P. (2007b), *q-Forwards: Derivatives for Transferring Longevity and Mortality Risks*, Technical Document, JPMorgan Pension Advisory Group. Disponible en:
https://www.jpmorgan.com/cm/BlobServer/LM_Q_forwards.pdf?blobkey-=id&blobwhere =1158464081417&blobheader=application/pdf&blobheader-name1=Cache-Control&blobheadervalue1=private&blobcol=urldata&blob-table=MungoBlobs, (28/07/2013).

[21] Cowley, A. y Cummins, D. (2005), Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities, *Journal of Risk and Insurance*, vol. 72, no. 2, pp. 193-226.

[22] Daily, G., Hendel, I. y Lizzeri, A. (2008), Does the Secondary Life Insurance Market Threaten Dynamic Insurance?, *American Economic Review*, no. 98, pp. 151-156.

[23] Doherty, N.A. y Singer, H.J. (2002), The Benefits of a Secondary Market for Life Insurance Policies, *Working Paper Series*, Wharton Financial Centre, University of Pennsylvania, Philadelphia. Disponible en: http://knowledge.wharton.upenn.edu/papers/1125.pdf, (28/07/2013).

[24] Fang, H. y Kung, E. (2010). How does the life settlements market affect the primary market for life insurance?. *NBER Working paper 15761*. Disponible en http://nber.org/papers/w15761, (28/07/2013).

[25] Gatzert, N., Hoermann, G. y Schmeiser, H. (2009), The Impact of the Secondary Market on Life Insurers' Surrender Profits, *Journal of Risk and Insurance*, vol. 76, no. 4, pp. 887-908.

[26] Gatzert, N. (2010), The Secondary Market for Life Insurance in the U.K., Germany, and the U.S.: Comparison and Overview, *Risk Management and Insurance Review*, vol. 13, no. 2, pp. 279-301.

[27] Giacolone, J.A. (2001), *Analysing an Emerging Industry: Viatical Transsactions and Secondary Market for Life Insurance Policies*, Southern Business Review. Disponible en:
http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/30909349/Giacalone-.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIR6FSIMDFXPEERSA&Expires=1375024858&Signature=0yHuObU0ODeBLGQqvlpTDmYcC5g%3D&response-content-disposition=inline, (28/07/2013).

[28] Hendel I. y Lizzeri A. (2003), The Role of Commitment in Dynamic Contracts: Evidence from Life Insurance, *Quarterly Journal of Economics*, vol. February, pp. 299-327.

[29] Jori, M.; Bosch, M.; Morillo, I. y Ribas, C. (2010), Riesgo de Inversión en Life Settlements, *Análisis Financiero*, no. 113, pp. 6-13.

[30] Jori, M., Alegre, A. y Ribas C. (2011), Deciding the sale of a life policy in the viatical market: Implications on individual welfare, *Documents de Treball*, Facultat d'Economia i Empresa, Universitat de Barcelona.

[31] Kamath, S. y Sledge, T. (2005), *Life Insurance Long View- Life Settlements Need Not Be Unsettling*, Bernstein Research Call, New York: Sandford C. Berntein & Co., LLC. Disponible en: http://www.americansaferetirements.com/secure/pdf/marketing/resource%20material/recentnewsarticle/Bernstein%20Life%20Settlement%20Research%202005.pdf, (28/07/2013).

[32] Kohli, S. (2006), Pricing Death: Analysing the Secondary Market for Life Insurance Policies and its Regulatory Environment, *Buffalo Law Review*, no. 54, pp. 279-320.

[33] Leung, S.F. (1994), Uncertain Lifetime, the Theory of the Consumer, and the Life Cycle Hypothesis, *Econometrica*, no. 62, pp. 1233-1239.

[34] Life Insurance Settlement Association (2006), *Cashing in on Unneeded Life Insurance Policies. How Seniors Are Benefiting From Life Settlements*, LISA Marketing Committee. Disponible en: www.lisa.org, (28/07/2013).

[35] Life Insurance Settlement Association (2008), *Data Collection Report 2006, Life Settlement Focus*. Disponible en: www.lisa.org, (28/07/2013).

[36] Loeys, J., Panigirtzoglou, N. y Ribeiro, R.M. (2007), *Longevity: a market in the making*, Global Market Strategy, JPMorgan Securities Ltd. Disponible en: https://www.jpmorgan.com/cm/BlobServer/LM_longevity.pdf?blobkey=id-&blobwhere=1158464081204&blobheader=application/pdf&blobheadername1=Cache-Control&blobheadervalue1=private&blobcol=urldata&blobtable=MungoBlobs, (28/07/2013).

[37] Houlihan Lokey (2008), *Life Settlements Industry Primer. Presentation to the Insurance Studies Institute.* Disponible en http://insurancestudies.org/wp-content/uploads/2008/05/Brad.pdf, (28/07/2013).

[38] Martin, S. (2010), Betting on the Lives of Strangers: Life Settlements, STOLI, and Securitization, *Journal of Business Law*, University of Pennsylvania, vol. 13, No.1.

[39] Merton, R.C. (1969), Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case, *Review of Economics and Statistics*, no. 51, pp.247-257.

[40] Merton, R.C. (1971), Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, *Journal of Economic Theory*, no. 3, pp.372-413.

[41] Milevsky, M.A. (2006), *The Calculus of Retirement Income. Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance*, University Press. New York.

[42] Modu, E. (2008), *Life Settlement Securitization*, A.M. Best Company, Inc, Oldwick. Disponible en: http://www.ambest.com/debt/lifesettlement.pdf, (28/07/2013).

[43] Perera, N. y Reeves, B. (2006), Risk Mitigation for Life Settlements, *The Journal of Structured Finance*, vol. 12, no. 2: pp. 55-60.

[44] Pliska, S.R. y Ye, J. (2007), Optimal Life Insurance Purchase and Consumption/ Investment under Uncertain Lifetime, *Journal of Banking and Finance*, no. 31, pp. 1307-1319.

[45] Pontryagin, L.S., Boltyanski, V.G., Gamkrelidze, R.S. y Mishchenko E.F. (1962), *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York: Interscience, United States.

[46] Quinn, S. (2008), *The Inversion of Morals in Markets: Death, Benefits, and the Exchange of Life Insurance Policies*, University of California, Berkeley.

[47] Rawson-Mackenzie, D. y Wan, P. (2009), *An Introduction to Synthetic Micro-Longevity Instruments*, Alternative Assets, Current Special Reports, Professional Wealth Management. Disponible en: http://www.pwmnet.com/Archive/An-introduction-to-synthetic-micro-longevity-instruments?ct=true, (28/07/2013).

[48] Richard, S.F. (1975), Optimal Consumption, Portfolio and Life Insurance Rules for an Uncertain Lived Individual in a Continuous Time Model, *Journal of Financial Economics*, no. 2, pp.187-203.

[49] Rosenfeld, S. (2009), Life Settlements: Signposts to a Principal Asset Class, *Wharton Financial Institutions Center*, Working Paper, no. 09-20.

[50] Samuelson, P.A. (1937), A Note on Measurement of Utility, *Review of Economic Studies*, vol. 2, no. 4, pp. 155-161.

[51] Sanghani, A. K. (2009), *The Potential Impact of Life Settlements on Life Insurance Companies*, Leonard N. Stern School of Business. New York University, New York.

[52] Siegert, P. (2010), *Evolution of Life Expectancies in the Life Insurance Secondary Market... Current Trends and New Developments*, Life Insurance Settlement Series, Edition No. VI. Disponible en: http://www.insurancestudies.org/wp-content/uploads/2010/08/ISI_Evolution-of-Life-Expectancies-LifeInsuranceSettlementSeries_VI1.pdf, (28/07/2013).

[53] Singer, H.J. y Stallard, E. (2005), *Reply to: "The Life Settlements Market. An Actuarial Perspective on Consumer Economic Value"*, Criterion Economics L.L.C.

[54] Stone, C.A. y Zissu, A. (2006a), Securitization of Senior Life Settlements: Managing Extension Risk, *Journal of Derivatives*, vol.13, no. 3, pp. 62-69.

[55] Stone, C.A. y Zissu, A. (2006b), Securitization of Senior Life Settlements: Capturing Value from Early Death, *Journal of Derivatives*, vol. 13, no. 3, pp. 66-72.

[56] Stone, C.A. y Zissu, A. (2008), Using Life Extension-Duration and Life Extension-Convexity to Value Senior Life Settlement Contracts, *Journal of Alternative Investments*, vol. 11, no. 2, pp. 94-108.

[57] Stone, C.A. y Zissu, A. (2009), Delta Hedging an IO securities backed by Senior Life Settlements, *Journal of Structured Finance*, vol. 15, no. 2, pp. 93-100.

[58] Tsai, C., Kuo, W. y Chen, W.-K. (2002), Early Surrender and the Distribution of Policy Reserves, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, no. 3, pp. 429-445.

[59] Vadiveloo, J., Vinsonhaler, C., O'Brien, T., et al. (2005), *The Life Settlements Market. An Actuarial Perspective on Consumer Economic Value*. Deloitte Consulting LLP and The University of Connecticut. Disponible en: http://www.quatloos.com/uconn_deloitte_life_settlements.pdf, (28/07/2013).

[60] Zhu, N. (2009), On the Economics of Life Settlements, Working paper, Georgia State University. Disponible en: http://rmi.gsu.edu/research/downloads/2009/BBs/Zhu_economics_of_life_settlements.pdf, (28/07/2013).

[61] Yaari, M.E. (1965), Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer, *Review of Economic Studies*, no. 32, pp. 137-150

[62] Yang, Z. (2011), *Altruistic Motives, Uncertain Lifetime and Urban Public Pension Replacement Rates*, Optimization, iFirst, pp. 1-13