UNIVERSITAT DE BARCELONA

UNIVERSITAT DE BARCELONA

APRENDER A ENSEÑAR TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA DESDE UNA PERSPECTIVA CULTURAL

-Tesis Doctoral-

Presentada por:

Xhevdet THAQI

Realizada bajo dirección de:

Nuria ROSICH y Joaquim GIMENEZ

Barcelona, Marzo de 2009

PARTE I

PROBLEMÁTICA, BASES TEÓRICAS Y METODOLOGÍA

Capítulo 1.

Descripción del área problemática y definición del problema de la investigación

1.1 Introducción

Esta investigación trata de comparar diferencias y semejanzas de formación docente de dos grupos de estudiantes - futuros profesores de Educación Primaria: de Catalunya y de Kosova para reconocer las influencias del *contexto sociocultural* en la implementación de la *misma tarea* matemático-didáctico.

La investigación es una consecuencia de la confluencia de dos intereses complementarios: nuestra preocupación por el bajo nivel de razonamiento geométrico por parte de futuros profesores observado en nuestras experiencias y mostrado por diferentes investigaciones, y nuestro interés por los fundamentos del desarrollo profesional del futuro profesor de educación matemática.

Desde que se establecen puentes de diálogos entre diversos países, sabemos que las matemáticas no se valoran igualmente en los diversos currículos (Howson, Keitel y Kilpatrick 1978). En los últimos años, diversos estudios internacionales (TIMSS 1996, PISA 2003, etc.) han evidenciado diferencias en el rendimiento matemático entre países debidas a muy diversos factores. En estos estudios, se han mostrado que las diferencias entre países son mayores de lo esperado aunque se desarrollan currículos con fines semejantes. Tal es el caso del estudio USA-China (Lipping Ma 1999) que evidenció diferencias significativas no sólo en los estilos de aprendizaje, sino cómo los contextos culturalmente diferentes pueden ser la causa de resultados muy diferentes en el alumnado.

¿Pero, qué sucede entre países de la vieja Europa? ¿Qué puede estar sucediendo en el trabajo de formación matemática de países del Este de Europa con sociedades multiculturales y de influencia del área soviética y ámbito de postguerra, respecto a los países del área occidental? ¿Hay aspectos matemáticos y didácticos que consideramos que deben cambiar o mantenerse ante la uniformización de currículos en la Comunidad Europea?

Tales razones nos llevan a plantearnos el desarrollo de un estudio, con el propósito de conocer los aspectos característicos de las diferencias entre la enseñanza de los futuros profesores de Catalunya y Kosova sobre conocimientos de geometría en general y de las transformaciones geométricas en particular; para saber qué factores influyen en la preparación de los futuros profesores de Primaria. Nos interesa conocer qué elementos pueden favorecer una buena preparación docente en componentes matemáticos, didácticos y actitudinal - profesionales como inicio de un desarrollo profesional, dentro de sociedades diferentes.

Para poder situar el tema, a continuación describimos las principales investigaciones que han tratado las motivaciones de la inclusión de las transformaciones geométricas en la Educación primaria y en la formación de profesores.

1.2. El interés de aprender a enseñar transformaciones geométricas

Considerando específicamente las discrepancias entre la creciente importancia de la geometría por sí misma, tanto como en investigación como en la sociedad, y la falta de atención de su papel en el currículo escolar, debe revisarse el pensamiento geométrico espacial.

Nos parece oportuno reconocer que los cambios en las sociedades actuales, las consideraciones sobre las matemáticas en España se da énfasis a los desarrollos de la investigación didáctica sobre el quehacer profesional. La geometría sigue siendo pobremente trabajada y los valores culturales no son siempre valorados y reflexionados como contextos apropiados y como manifestaciones sociales reconocidas. Considerando la enseñanza de las transformaciones geométricas dentro de la enseñanza de la geometría, el ICMI (2000) recuerda que hay una urgente necesidad de estudios cuyo propósito principal, entre otros sea "d*iscutir las metas de la enseñanza de la geometría para los diferentes niveles escolares de acuerdo a los diferentes ambientes y tradiciones culturales".*[1]

De acuerdo con el interés inicial decidimos centrarnos en la transformación geométrica sobre la construcción del significado de las entidades conceptuales asociadas (ángulo-rotación, segmento-simetría,…) en el desarrollo profesional de futuros profesores de primaria y de sus correspondientes entidades didácticas, conduciendo el desarrollo de un modelo donde incorporen otros componentes sociales-culturales en el análisis didáctico.

Sabemos que una investigación sobre la construcción de un contenido matemático es difícil realizarlo sin un estudio riguroso de la naturaleza del mismo. Así, el estudio de las transformaciones geométricas y su evolución histórica nos aportara criterios necesarios para organizar ese contenido desde un punto de vista didáctico (Capitulo 5), para formular hipótesis sobre posibles dificultades de enseñanza y aprendizaje, y para elaborar instrumentos de diagnostico e intervención didáctica en la formación de profesores proponiendo tareas profesionales de reflexión.

[1] *PMME-UNISO, 2001****, Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI,*** *estudio de ICMI*

En efecto, en las últimas décadas, la aplicabilidad del enfoque formalista en el marco escolar, se viene cuestionando. El valor metodológico de los procesos informales de enseñanza/aprendizaje puede favorecer el proceso global de enseñanza de la compresión geométrica. Algunas investigaciones han destacado las razones y las ventajas que proporciona el estudio de las transformaciones geométricas (Williford, 1972; Jackson, 1975; Küchemann, 1980; Geddes, 1992, Jaime, 1993; Harper, 2002).

Un primer motivo para estudiar las transformaciones es curricular: puesto que "*Las transformaciones son aplicaciones de las funciones en geometría, y este tratamiento es fundamental para toda la matemática*" (Jackson, 1975). Un segundo motivo es que las transformaciones proporcionan tareas geométricas de forma dinámica.

Geddes (1992) destaca la ventaja del estudio de las transformaciones geométricas para desarrollar los aspectos intuitivos e informales, justificando que la naturaleza dinámica de las transformaciones favorece que los estudiantes investiguen las ideas geométricas a través de un acercamiento informal e intuitivo.

A pesar de estas razones y ventajas que ofrece la enseñanza de las transformaciones, en general sabemos que los estudiantes muestran un bajo nivel de aprendizaje de las transformaciones (International Mathematics and Sciences Study, 1998).

Aunque las recomendaciones que da Leitzel (1991, pp12) de que los "*conceptos y propiedades básicos sobre las transformaciones geométricas*" deben ser incluidos en la formación matemática de todos los profesores de primaria, la realidad no es esta, ya que muchos profesores de Primaria no los tienen en su currículo. Por lo que, si los profesores no han estudiado las transformaciones en sus programas de formación, es posible que tengan más dificultades para enseñarlas (Fenema & Franke, 1992).

1.2.1. Enseñanza y aprendizaje de transformaciones geométricas

Con la reforma de la "matemática moderna" la geometría elemental clásica se eliminó prácticamente de los programas para dar paso a la Teoría de conjuntos, al Álgebra, a la Geometría analítica etc. Esta misma situación ocurre también en España. Gutiérrez (1998) apunta que "*la geometría de la enseñanza primaria estaba reducida, en casi todos los países de nuestro entorno cultural, a unos pocos conocimientos básicos de figuras planas y espaciales, aprendizaje de formulas para el cálculo de áreas y volúmenes, y poco más; además estos contenidos solían estar relegados a las últimas páginas de los libros de texto, por lo que, con frecuencia, los maestros sólo los enseñaban parcialmente*". Esta situación que se ha prolongado durante bastantes años, ha tenido, entre otras consecuencias, la de minimizar el valor de figuras, dibujos, transformaciones, diagramas, etc., como instrumentos de ayuda para facilitar la comprensión de los conocimientos matemáticos.

En diversos trabajos se han analizado aspectos de la actividad geométrica de los futuros profesores. Así, el trabajo de Gutiérrez y Jaime analizó la idea de alturas (1996), las construcciones esquemáticas las analizó Jones (2000) y las definiciones geométricas desde el modelo de Vinner las encontramos en Gomes (2006).

El estudio de las transformaciones, como dice Harper (2002), conlleva una oportunidad excelente para un entorno instruccional desafiante de las matemáticas. La idea de incluir las transformaciones en el currículo escolar no es nueva. Hace más de treinta años que fueron realizados algunos estudios de las transformaciones geométricas: (Williford, 1972; Usiskin, 1972; Ernest, 1986; Edward 1991; Dixon, 1995; etc.).

Williford (1972) en su investigación trata dos cuestiones: 1) Cómo se aprenden las transformaciones geométricas en condiciones específicas[2] de instrucción por parte de alumnos, y 2) Cuáles son los efectos de la instrucción de las transformaciones geométricas en el desarrollo de la capacidad espacial de

[2] Unidad de instrucción diseñada para enseñar los conceptos matemáticos de congruencia y movimiento rígido. La instrucción expuso a estudiantes a actividades diseñadas para enseñar la mecánica de realizar representaciones de cortes, vueltas y giros de los dibujos dados para obtener figuras adecuadas de imagen.

alumnos. En los análisis de los resultados se constata que los participantes en la investigación aprendieron a realizar las transformaciones de forma rutinaria, pero no aprendieron el concepto de transformación como cambio de un estado a otro.

Usiskin (1982) también estudió los efectos de la enseñanza de las transformaciones geométricas respecto los logros y actitudes de los estudiantes de décimo grado. En este estudio participaron voluntariamente profesores de diferentes escuelas para enseñar el curso *Geometry - A transformation Approach*, en sus clases de geometría. Los profesores del grupo control y experimental tenían que enseñar temas estándares de geometría (semejanza, círculos, área) durante el curso. Los alumnos del grupo de control obtuvieron resultados más altos en la prueba que los estudiantes del grupo experimental. El investigador constata que la explicación posible puede ser que: "el *tiempo era insuficiente para enseñar las matemáticas de acuerdo a la propuesta experimental y desarrollar las capacidades alcanzadas en el programa estándar*".

Dixon (1995) investiga los efectos de la instrucción en un entorno dinámico y los niveles de visualización independientemente e interactivamente en las construcciones de los conceptos de reflexión y de rotación de los estudiantes. Esta investigación se realizó en nueve clases del octavo grado, utilizando el programa *The Geometer's Sketchpad*. Dixon concluye que los estudiantes que han utilizado las instrucciones del entorno dinámico obtienen resultados significamente mejores que los que utilizaron un entorno tradicional de enseñanza.

El estudio de Edward (1991) también trata de las interacciones en un entorno dinámico de las transformaciones geométricas. Se dia a cada alumno un pre-test con el papel y lápiz que incluyó un conjunto de figuras en las cuales pidieron al estudiante que identificara y dibujara el resultado de la transformación. Luego se introdujeron brevemente las actividades a los estudiantes de cómo debía ser realizada, y luego registraron y observaron como trabajaran juntos. El análisis de las sesiones, se graban en vídeo y los resultados del pre y post - test mostraron que los estudiantes experimentaron el éxito en la construcción de la comprensión del funcionamiento exacto de las transformaciones después de la exploración de un "currículo" introductorio sobre transformaciones geometrías con el ordenador.

Ernest (1986), investiga el efecto que producen juegos[3] de ordenadores sobre transformaciones geométricas. Para determinar los efectos de estos juegos en el aprendizaje geométrico toma una población de veinte y cuatro estudiantes de 15 años y los divide en dos grupos de doce: grupo experimental y grupo de control. Los resultados mostraron que el grupo experimental obtiene mejores rendimientos en el test sobre transformaciones relativas a los juegos con ordenadores, pero no se encuentran diferencias significativas en los rendimientos en el test general de transformaciones.

Otros autores han estudiado las transformaciones geométricas a partir del modelo van Hiele.

Con la dirección del NCTM, Wirszup (1976) introduce la teoría de Van Hiele en Estados Unidos de América. En España la teoría de Van Hiele se estudia con profundidad en las investigaciones de Jaime (1993), Rosich (1995) y Servat (1995).

La investigación de Rosich (1995) trata el estudio de los niveles de razonamiento geométrico de los alumnos de 12 a 14 años. Servat (1995) trata del cálculo de áreas de figuras geométricas planas mediante el teorema de la equidescomposición en el modelo Van Hiele. La investigación de Jaime (1993) estudió la enseñanza de las isometrías diseñando las actividades de cada nivel distribuidas de acuerdo con las fases de aprendizaje del modelo, tratando el proceso de adquisición de los niveles mediante la definición del *concepto de grado de adquisición de los niveles de van Hiele*. La investigación de Jaime (1993) se ha realizado con estudiantes de diferentes niveles desde EGB hasta C.O.U.

Maybery (1981, 1983) investiga la jerarquía y la naturaleza del concepto de los niveles de Van Hiele entre futuros profesores de Primaria sobre siete conceptos geométricos de uso común en los manuales de matemáticas: cuadrado, triángulo recto, triángulo isósceles, circunferencias, líneas paralelas, semejanza y congruencia. Participaron noventa futuros profesores de Primaria. Los

[3] El software programa con el ordenador con los juegos que tienen relación con desplazamiento, movimiento, rotación y vueltos de las figuras.

resultados de la investigación de Mayberry muestran que futuros profesores de Primaria tienen un nivel II (bajo).

Burger y Shaughnessy (1986) caracterizan los niveles de Van Hiele con estudiantes de primaria y secundaria sobre los conocimientos de los polígonos.

En Kosova no se han realizado investigaciones sobre los niveles de Van Hiele hasta el día de hoy.

La revisión bibliográfica que hace Harper (2002) sobre la enseñanza/aprendizaje de las transformaciones geométricas, muestra resultados diferentes: Mientras que Dixon (1995), Williford (1972), Edward (1991) confirman que el uso de los "*currículos experimentales*" obtienen mejores resultados que el grupo control; otras investigaciones como Ernest (1996), Usiskin (1972) no han encontrado diferencias significativas entre el grupo experimental y el grupo control. Este hecho que en la actualidad permanece, sugiere la necesidad de continuar investigando.

1.2.2. Transformaciones geométricas y formación de profesores

Investigadores y formadores destacan que un programa para la formación de profesores debe integrar los mismos objetivos que tienen las clases de geometría escolar. En lugar de enseñar identificaciones de bajo nivel de las figuras y propiedades, "*recomendemos que se ponga el énfasis en el aprendizaje conceptual, empezando por el análisis del entorno geométrico con exploraciones conceptuales*" (Hershkowitz, et alt., 1996; Van de Walle, 2001).

Harper (2002) nos muestra las investigaciones sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos de los futuros profesores en geometría: "*Keith, 1970; Maybery, 1983; indican la necesidad de formación adicional en geometría informal para la educación primaria*" (citado en Harper, 2002).

Son pocas las investigaciones implicadas en la compresión del conocimiento de los futuros profesores sobre las transformaciones geométricas (Harper, 2002). Conocemos las investigaciones de Law (1991) y de Desmont (1997).

La investigación de Law (1991) hecha en la Universidad de Purdue donde participaron dieciocho futuros profesores de Primaria tenía como objetivo tratar el desarrollo y aprendizaje del concepto de reflexión, rotación y traslación, basado según el sistema de Dubinsky (1991). Usó cuatro categorías predeterminadas sobre el aprendizaje de transformaciones geométricas: 1) *la definición* de las transformaciones geométrica; 2) *el movimiento puntal* (*single – point movement*), 3) el *movimiento de figura*s, y 4) la *identificación* de la transformación. Luego desarrolla cuatro niveles de comprensión del concepto de transformación por parte de los estudiantes. Basado en los resultados de la investigación, Law concluye que los estudiantes aprenden el concepto de transformación en el orden de aprender primero su definición y luego su movimiento puntual, luego movimiento figural y finalmente la identificación de la transformación.

Desmond (1997) estudia el conocimiento del contenido geométrico de las transformaciones de los futuros profesores de Primaria. En su investigación ella establece un modelo de conocimiento del contenido describiendo tres categorías: a) *el proceso* de conocimiento, b) la *comunicación* y c) el *razonamiento*.

Todas estas experiencias previas han ayudado al planteamiento y la definición del problema de nuestra investigación. Además, nuestra opinión es que muchas de ellas tratan del aprendizaje de las isometrías y no están centradas en el aprender a enseñar las isometrías en particular o las transformaciones en general. Así pues esta tesis se propone estudiar las características del proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas (incluso las deformaciones y las proyecciones) de los futuros profesores de primaria.

1.3. Interés y motivación de la investigación

La motivación de la investigación nace de la preocupación del autor de esta tesis, como formador de futuros maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina. Esperamos aportar resultados sobre cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas sobre: 1) ¿qué es lo que no funciona bien en la fase de preparación de los futuros profesores de primaria en Kosova y cómo se puede mejorar esta situación? 2) ¿Qué funciona bien en Catalunya, que permita que aprendamos en Kosova? y 3) ¿Qué pueden aprender los colegas de Catalunya de los valores matemáticos de nuestra cultura de Kosova? Espero que esta tesis aporte además, elementos importantes sobre la formación inicial de profesores de primaria en matemáticas que también sirvan a los demás formadores de la comunidad internacional.

La riqueza de las ideas geométricas que actualmente se estudian en diferentes países y los contenidos geométricos planteados en el currículo de matemáticas (NCK, 2002), nos han llevado el estudio del desarrollo de las transformaciones geométricas en la formación docente en FEUP.

¿Qué ocurre entonces en la formación inicial de futuros profesores de Primaria?

Las instituciones de formación de maestros, en general Facultades de Educación, (en la UB es la Facultad de Formació del Professorat), tienen por función formar maestros profesionales de Primaria. En algunos países las facultades que forman maestros también forman profesores de secundaria. La investigación que planteamos nace de la preocupación generada sobre cómo llevar a cabo la formación docente en matemáticas para los maestros de Primaria. Hemos visto que diversos estudios (Maybery, 1983; Harper, 2002) muestran que los futuros profesores de Primaria no tienen un buen nivel de conocimientos geométricos ni didácticos. Para comprender mejor cuales son estas dificultades y de por qué no tienen un mejor conocimiento matemático y didáctico, primero miraremos cuál es la formación que se imparte en los diferentes países sobre estos aspectos.

Mientras que hay un acuerdo general sobre los contenidos que los profesores deberían enseñar, no pasa lo mismo con las estrategias de enseñanza y métodos, aunque se relata beneficios en el aprendizaje matemático en educación primaria el uso de contextualización. El uso de materiales concretos o manipulativos, comparando con instrucción más abstracta, se relaciona mejor con el logro y las actitudes hacia matemáticas (Sowell 1989, etc.).

Deseamos preparar futuros maestros que estén bien formados matemáticamente, que tengan una buena relación con sus alumnos, sepan hacer buenas programaciones de enseñanza, que reflexionen sobre las matemáticas y que también estén bien formados didácticamente y que tengan capacidad de comunicación profesional, basada en la integración del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico.

Ninguna de las nuevas ramas de las matemáticas, pura o aplicada, no pueden establecerse sin la aritmética y la geometría, por tanto la matemática elemental de primaria es la base de la disciplina en que se construyen las ramas avanzadas. Para realizar este objetivo, los diferentes encuentros internacionales sobre la educación matemática destacan las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las geometrías. Es evidente que los alumnos tienen muchas menos dificultades en el aprendizaje de la geometría si los profesores tienen una formación adecuada. Entendemos que una formación adecuada significa que el profesor sabe cómo actuar en las actividades de clase para conseguir los conocimientos necesarios, como afirma Koeno Gravemijer en "*Creating opportunities for students to reinvent mathematics*", ICME10 *Regulars lectures, pp. 54*:

> *"An instructional approach in which the teacher can rely on a sequence of instructional activities, which consists of problems that give rise to interpretations and solutions that, can advance the instructional agenda. Apart from exemplary instructional activities, from which teachers can choose, and which* ***they can adapt*** *to their needs, teachers also need a framework of reference to guide their educational decision-making."*

La enseñanza en el sentido de ser un proceso participante en la acción de un colectivo no es una adaptación directa desde una perspectiva general. La enseñanza desde un punto de vista social cultural tiene que estar relacionada sobre como los alumnos usan herramientas para desarrollar el pensamiento y actuar en el entorno de práctica. En este sentido, el problema se relaciona con la capacidad que tienen los profesores de diseñar actividades de clase. Que los futuros profesores tienen que estar bien preparados para diseñar actividades para conseguir y realizar una enseñanza que facilite la transformación de los conocimientos matemáticos, como afirma Llinares en "B*uilding virtual learning communities and learning of mathematics teacher students",* ICME10, pp.74:

> *"Becoming an elementary school mathematics teacher means acquiring an understanding of the teaching of mathematics by learning how to carry out teaching tasks, learning to use and justify the tools involved in professional tasks…"*

La complexidad de la enseñanza requiere diferentes tipos de conocimientos. Shulman (1986) propone un marco teórico para analizar el contenido de los conocimientos de los profesores en tres categorías: *conocimiento de contenido de la materia*, *conocimiento del contenido pedagógico* y *conocimiento curricular*. Estas tres categorías responden a: qué saben ellos sobre las matemáticas, qué piensan los estudiantes sobre de las tareas matemáticas, y qué materiales de instrucción se han de utilizar para enseñar matemáticas.

En este estudio tratamos de conocer cómo son los procesos, y las reflexiones que hacen los futuros profesores en su aprendizaje de los contenidos de transformaciones geométricas cuando se realizan enfoques culturales.

También buscamos respuestas acerca de cuáles son los contenidos geométricos sobre transformaciones que deben de saber los futuros maestros de primaria y de si son adecuados para su desarrollo profesional.

Especialmente estamos interesados en analizar las capacidades que deben de tener los futuros profesores sobre la comunicación profesional y sobre integración del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico.

Además de las motivaciones ya explicadas, las razones por las que nos decidimos a iniciar esta investigación son las siguientes:

- La escasez de materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta explícitamente las transformaciones geométricas. El estudio de las transformaciones geométricas relacionadas con los aspectos culturales.
- El interés por mostrar las aplicaciones de las transformaciones geométricas de la vida cotidiana.
- La necesidad de aproximaciones en la enseñanza de las transformaciones geométricas entre países de culturas diferentes

para comprender la presencia de lo cultural y sus diferencias tanto en la valoración del contenido como en la experiencia práctica profesional.

Así, buscamos comprender las cuestiones de interés en:

- Análisis epistemológico del campo conceptual de la transformación geométrica y en particular del valor de las figuras geométricas genéricas como invariantes frente movimientos. Asimismo, reconocer los valores de formación profesional correspondiente a dicho campo.
- Nos interesamos por algunas construcciones personales de los conceptos geométricos de los estudiantes - futuros profesores de ambas sociedades.
- Pretendemos profundizar el tratamiento geométrico en la formación de profesores para comprender, relacionar y organizar contenidos, términos y propiedades geométricas.

Queremos investigar estos dos sistemas de enseñanza (Kosova v.s. Catalunya) como escrituras culturales que influyen sobre como los estudiantes aprenden asimismo qué papel juega el profesor en este proceso.

Otro aspecto importante, en esta tesis, será definir nuestra idea sobre el aprender a enseñar transformaciones geométricas desde un ámbito cultural, ya que la enseñanza y el aprendizaje se producen en un contexto socio-cultural determinado, los cuales son importantes en la formación de maestros, ya que estos van a transmitir junto a las matemáticas una visión de la cultura de cada país donde están inmersos. Al mismo tiempo que tratamos de presentar una propuesta, nos proponemos analizar su desarrollo diferenciado, aportando posibles vínculos interculturales. Es decir, pensando en la construcción de Europa, reconocer qué sucede cuando se ponen en contacto experiencias culturales como es el conocimiento mutuo del trabajo escolar, aunque sea brevemente.

El estudio de cómo construir un significado matemático y didáctico de los conceptos geométricos en un contexto multicultural y el análisis de algunas de sus diferencias es lo que constituye uno de los fines de nuestra tesis.

1.3.1. Identificación del problema de la investigación

En todos los currículos de Educación Primaria, NCTM, NCK (2002), etc., se encuentra la unidad dedicada a la enseñanza de las transformaciones geométricas. Esto se considera una tarea importante para desarrollar las capacidades de los alumnos de visualización a través de diferentes experiencias con objetos geométricos que les permitirán girarlas, doblarlas, etc., y luego investigarán los efectos de las transformaciones describiéndolas en términos matemáticos.

Por otra parte, varias investigaciones detectan un bajo nivel de aprendizaje de las transformaciones geométricas de los alumnos de primaria y también de los profesores de (Desmond, 1997; TIMS 1998; Harper, 2002).

Sobre la base de nuestra experiencia en el trabajo de los profesores en ejercicio de primaria, pondremos un ejemplo que muestra el bajo nivel de los conocimientos de los profesores sobre transformaciones geométricas. El profesor de primaria, intentando introducir el concepto de simetría axial, confunde la simetría como movimiento o aplicación de una figura con la propiedad simétrica de una figura, y más allá, la definición de la propiedad de la figura simétrica se hace de manera errónea diciendo que *"Una figura es simétrica si se puede partir por una recta en dos partes iguales de forma y tamaño"*. Gran numero de los futuros profesores defienden esta confirmación aceptándola como verdadera, y un número más bajo no es capaz de distinguir la propiedad simétrica de la figura y después de mostrar ejemplos significativos como los de la figura 1.1

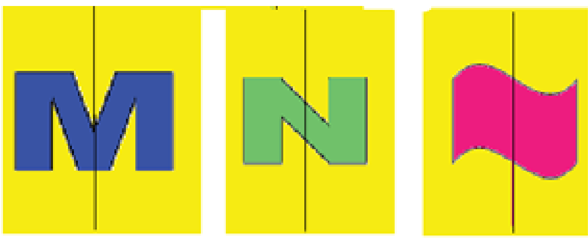


Figura 1.1.Dos partes iguales de una figura isométrica

Esto implica que un buen número de futuros profesores de primaria expresan su convicción de que la repetición de un módulo (parte) es la propiedad característica solo de la simetría y no conocen multitud de ejemplos diferentes de isometrías.

Hemos considerado distintos marcos de referencia para la identificación del problema de la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas. En concreto hemos considerado la información aportada por:

- nuestro conocimiento de las transformaciones desde el punto de vista matemático;
- los resultados de investigaciones previas sobre enseñanza y aprendizaje de las transformaciones;
- nuestra experiencia en la enseñanza de transformaciones en la FE de Universidad de Prishtina y de FFP de Universidad de Barcelona, siguiendo varias metodologías.

Sabemos que el profesor de Primaria tiene que enseñar matemáticas y otras disciplinas. Nuestra posición de que a ellos les falta un conocimiento más profundo y coherente para enseñar matemáticas en Primaria, nos señala y Liping Ma (1999, pp.123) cuando afirma la vista de profesores de Primaria hacia las matemáticas como: "*una colección arbitraria de hechos y reglas en que hacer matemáticas significa seguir unos procedimientos paso-a-paso para llegar a la respuesta".* Además, algunos profesores de Primaria en muchos países no estudian ninguna geometría en la educación pre-universitaria, y algunos la ven por primera vez. Esto es lo que dicen muchas investigaciones que han documentado una carencia de conocimiento de contenido matemático de los futuros profesores de Primaria (Ball,1990; Batista,et alt., 1997, Desmond 1997, Zaskis, Campbell 1996, etc.). Esta deficiencia puede ser atribuida a la exigencia de conocimiento matemático curricular para futuros profesores de Primaria. Para que "funcione" un buen aprendizaje de geometría, los estudiantes tienen que aumentar su nivel de pensamiento geométrico a través del desarrollo de actividades informales de geometría a lo largo de la enseñanza de Primaria. Para lograr este objetivo tenemos que empezar aumentando el conocimiento profundo del contenido geométrico, como aumentar el nivel de razonamiento geométrico de los docentes de Primaria. Sólo el aumento del conocimiento del profesor y el nivel de razonamiento puede mejorar la enseñanza de matemáticas que los estudiantes reciben. Decir en otras palabras, Liping Ma (1999, pp.144) afirme que: "*la calidad de conocimiento de la materia que transmite el profesor afecta directamente al estudiante que aprende*".

Antes de especificar nuestras pretensiones, nos entretendremos brevemente en unas pequeñas reflexiones en torno a los cambios que han de tener los sistemas educativos si quieren adaptarse a las demandas que les exigirá un futuro casi inmediato. Uno de los componentes esenciales de un proceso eficiente de enseñanza y aprendizaje, es la buena preparación de los profesores, en lo que concierne tanto a competencias disciplinares como a educativas, epistemológicas, tecnológicas y aspectos sociales.

Por todo ello, proponemos el ***problema*** de nuestra investigación que queremos estudiar y que es el que formulamos a continuación:

Identificar diferencias y semejanzas entre prácticas culturalmente diferentes de formación docente de futuros profesores de primaria en el proceso de aprender a enseñar transformaciones geométricas, para caracterizar las posibles influencias de los elementos culturales.

Es bien sabido que los profesores tienden a reproducir en su profesión los mismos modelos que ellos experimentaron cuando fueron estudiantes, a pesar de que posteriormente han sido expuestos a diferentes puntos de vista. En lugar de una instrucción marcada por unos conocimientos estables e invariables, cada vez es más importante inculcar hábitos y motivaciones para adquirir conocimientos y al tiempo, dar la posibilidad real de poder asimilarlos con normalidad y sin ningún tipo de trauma.

1.3.2. Objetivos de la investigación

Los estudios comparativos entre países permiten reconocer preocupaciones comunes, elementos de reflexión sobre la formación docente y diferencias de tradiciones culturales y contextuales que se explican mediante la historia.

Los posicionamientos y reflexiones internacionales que tienden a uniformizar los países no pueden destruir estas diferencias que deben evidenciarse por el bien del progreso y el mantenimiento de las culturas autóctonas en lo que tienen de único y humanamente irrepetible. Al analizar puntos comunes, reconocemos el poder de la geometría occidental y la construcción de una investigación didáctica europea intercultural. Queremos con ello contribuir a un futuro europeo común. Comprendiendo las bases socioculturales distintas que impregnan la formación de profesores, queremos mostrar como la investigación didáctica debe considerar las personas y la construcción personal del conocimiento, que tiene patrones universales, pero que debe recoger también la tradición humanista común.

El tratamiento geométrico entendido como argumentación deductivo-formal en nuestros investigaciones de educación matemática, describen muchas dificultades de estudiantes para comprender, relacionar y organizar contenidos, términos y propiedades geométricas. En las últimas décadas, la aplicabilidad del enfoque formalista en el marco escolar, está cuestionado. El valor metodológico de los procesos informales de demostración, interpretación de las propiedades y relaciones geométricas como invariantes de la transformación geométrica puede favorecer el proceso global de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La comprensión de estas propiedades y las relaciones geométricas puede ayudar a interpretar mejor el significado del objeto geométrico más amplio que el estrictamente deductivo y a favorecer su introducción en el aula.

Antes de plantear los objetivos de la investigación hemos realizado el estudio sobre las investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas, centrándonos principalmente en el estudio de la enseñanza y aprendizaje de transformaciones para los futuros profesores de primaria en los centros de formación. Como consecuencia de este estudio vamos a tener las bases suficientes para poder abordar el estudio de los conocimientos sobre transformaciones geométricas y su enseñanza y aprendizaje que tienen los futuros profesores para maestro sobre diversos aspectos relacionados con las transformaciones y su enseñanza-aprendizaje. En consecuencia, nos planteamos los siguientes ***objetivos de la investigación:***

O1. Comparar los elementos curriculares, especialmente identificación de aspectos socioculturales que intervienen en la formación de los futuros profesores de primaria en Catalunya y Kosova, en el ámbito geométrico y especialmente en el tratamiento de las transformaciones.

Dentro del estudio del contexto de la investigación y la realización del primer objetivo identificamos las diferencias en el tratamiento geométrico que se da en la formación de profesores y manuales escolares; y mostrar las semejanzas y diferencias entre currículos de Kosova y Catalunya en lo que respecta a su mayor o menor énfasis en lo didáctico, en base a sus posibles tradiciones epistemológicas y educativas como diferencias culturales.

O2. Identificar el tratamiento del contenido matemático y didáctico de la transformación en la formación de los futuros profesores de primaria en ambos países e identificar la situación inicial (diferencias y semejanzas entre características culturales de enseñanza y aprendizaje) de futuros profesores de Primaria en ambos países ante el tratamiento de las transformaciones.

O3. Diseño, planificación e implementación de una práctica docente sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en los dos países resaltando los valores culturales de ambos países en la propuesta.

O4. Caracterizar elementos del desarrollo profesional de los futuros profesores implicados; analizar elementos del desarrollo del contenido matemático y didáctico, así como algunos elementos de las construcciones de significados personales de futuros profesores sobre transformaciones geométricas en ambas sociedades; y reconocer las dificultades de los estudiantes acerca del proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria.

Primero describiremos y analizaremos los conocimientos de los futuros profesores de primaria sobre las transformaciones y su enseñanza-aprendizaje derivadas del curriculum, después pasaremos la prueba inicial, trataremos el desarrollo de la práctica de formación docente y al final se avaluara con una prueba final.

A partir de todo esto, esperamos establecer aportaciones sobre el *aprender a enseñar las transformaciones* con futuros profesores de Primaria, que conjeturamos que se da de forma diferenciada.

Queremos investigar las influencias diferentes que ha podido haber sobre los enfoques formalistas estructuralistas de los años 70 en cuanto la formación didáctica geométrica de los profesores en el aprender a enseñar las transformaciones geométricas. Reconocer las dificultades de los estudiantes para comprender, relacionar y organizar contenidos, términos y propiedades geométricas asociadas a las transformaciones.

Capítulo 2.

Contexto sociocultural y curricular

2.1. Introducción

El término contexto se utiliza como *marco sociocultural* donde se produce el aprendizaje. Sobre los contextos diferentes que influyen en el proceso de aprender a enseñar matemáticas a los futuros profesores de primaria, Llinares (1996) identifica qué relaciones hay entre diferentes contextos las cuales se pueden mirar desde dos dimensiones:

i) *Contextos institucionales y organizacionales* de la formación de profesores de primaria. Las características del sistema educativo y la historia, pueden afectar (mediar) la naturaleza del aprendizaje del futuro profesor, y

ii) Los contextos que vienen de tener en cuenta *las matemáticas como materia escolar*. Estos reflejan rasgos sobre la educación del profesor de matemáticas y sobre el contexto profesional. Los rasgos del proceso de aprender a enseñar matemáticas como actividades de aprendizaje de naturaleza cognitiva y sociales situadas.

Inicialmente nosotros entendemos el primero como el contexto sociocultural y el segundo como el contexto de tarea. Dado que nuestra investigación trata de comparar diferencias y semejanzas de formación docente de dos grupos de estudiantes – futuros profesores de Catalunya y de Kosova, primero queremos reconocer cómo son los contextos que enmarcan la situación en los dos países en donde se lleva a cabo el estudio.

El contexto sociocultural de Kosova y de Catalunya afecta indirectamente y directamente a los participantes de nuestra investigación. Por esta razón, a continuación presentamos una breve descripción del contexto en el *sentido sociocultural* - características curriculares en el marco del estudio, y la descripción del contexto en el sentido de *marco de tarea* - aspectos profesionales de aprender a enseñar transformaciones geométricas distinguidos en el marco del estudio, de ambos facultades - la de FE de UP y de FFP de UB.

Con el esquema 2.1., mostramos la estructura del capítulo.

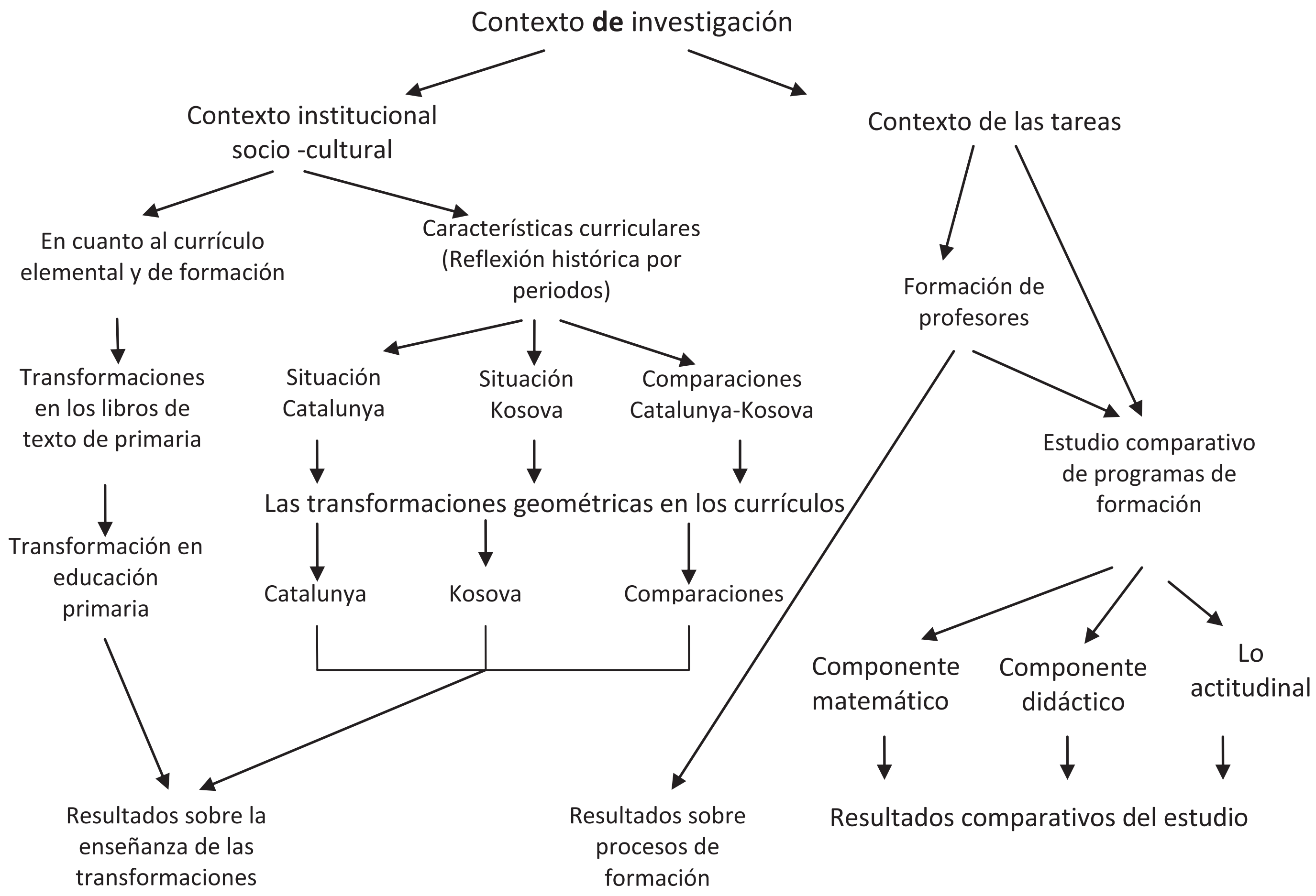


Figura 2.1. La estructura del capítulo 2

2.2. Características curriculares en el marco del estudio

Primeramente mostraremos la situación de la educación matemática en Catalunya y Kosova, para situar el contexto en el cual se desarrolló nuestra investigación. De esta manera se identifican los cambios en la educación matemática en el marco de una sociedad mundial cuyos planteamientos democráticos exigen que los futuros profesores ejerciten mejor su enseñanza en la educación Primaria.

2.2.1. Características de educación en Catalunya

La Comunidad Europea es hoy en día toda una realidad de integración política, monetaria, cultural y educativa. España no se sustrae de este cúmulo de transformaciones que experimentan los países que integran la Unión Europea.

Catalunya, parte de esta Comunidad Europea muestra su dinamismo en su tejido social y la riqueza de los saberes y conocimientos científicos que se generan en sus activas escuelas, y en especial, la tradición universitaria de más de 555 años de la Universidad de Barcelona y la tradición pedagógica del Institut Escola. Aunque truncado por la dictadura franquista, la democracia ha devuelto muchas ilusiones a las universidades e institutos de investigación y en especial a los centros de formación de profesores. Los inicios del siglo XX dieron oportunidades al desarrollo de experiencias educativas punteras marcadas por interpretaciones que iban desde el anarquismo organizado de Ferrer y Guardia hasta las posiciones más tradicionalistas.

El nombre oficial y original del profesor de educación Primaria en Catalunya es *mestre* (maestro), y el nombre de la institución que se preocupa para formación de maestros fue Escuela de magisterio o Escuela Normal, hasta finales del siglo pasado cuando se denominan como Facultades de Formación de Profesores o Facultades de Educación. Estos colegios y escuelas tienen una historia y tradición que determinan la situación actual. En este caso, nos limitamos a describir las características del sistema educativo que afectan de uno o de otra manera nuestra investigación.

Para nuestra descripción, distinguimos dos periodos del desarrollo de la educación en Catalunya: La primera es la educación matemática en Catalunya desde los años setenta hasta principios de los noventa, es decir el periodo de la promulgación de la Ley General de Educación (1970) que introdujo la enseñanza general básica; y la segunda es la educación matemática en Catalunya desde los principios de los años noventa, cuando se introdujo la Ley de Reforma del Sistema Educativo.

La educación matemática de los años '70 en España/Catalunya

Sin pretender hacer un análisis detallado de la historia de la educación matemática en Catalunya, exponemos unas breves consideraciones sobre el sistema institucional de la educación matemática, sobre el contenido geométrico tratado en educación primaria y sobre la formación de profesores de primaria. Esto lo hacemos para tener un conocimiento general sobre del desarrollo de la educación matemática y para situar el contexto en el cual se desarrolló nuestra investigación.

Sobre lo institucional del sistema educativo. Desde lo institucional, ante cualquier reforma del sistema educativo debemos plantearnos, en primer lugar cuales son los aspectos que la hacen necesaria. La Ley General de Educación de 1970, establecía la *Educación General Básica* (EGB), que desde los 6 a los 14 años señalaba el periodo de educación obligatoria y gratuita para todos los niños y niñas. La EGB consistía en 8 cursos de escolarización obligatoria divididos en tres ciclos: Primer ciclo 1º y 2º de EGB, segundo ciclo 3º, 4º y 5º, y tercer ciclo 6º, 7º y 8º de EGB. Una vez finalizada la enseñanza básica existían dos caminos – Formación Profesional (FP) y el Bachillerato Unificado Polivalente (BUP). Posteriormente se realizaba el Curso de Orientación Universitaria (COU) como último paso antes de comenzar estudios universitarios.

El sistema educativo vigente hasta entonces provenía de la de principios de los 70, todavía en tiempos de la dictadura. Esta ley, que en su momento planteó algunos aspectos positivos tuvo una implantación muy discutible debida, entre otros aspectos, al retraso del país en materia educativa, especialmente en el campo de la escuela pública y a la falta de recursos didácticos a la educación

(Sierra & Rico, 1996). Así, mientras una parte de sistema se consolidó, aunque de forma discutible (enseñanza general básica, bachillerato unificado polivalente, curso de orientación universitaria y universidad), otras, especialmente la formación profesional, quedaron claramente relegadas (Deulofeu y Gorgorió, 2000).

A finales de los años 80 hubo bastante unanimidad en considerar la necesidad de una reforma de la educación en general, de la formación de profesores y de los currículos de las distintas disciplinas en particular (Sierra & Rico, 1996). Los cambios sociales y políticos vividos en España eran una causa más que suficiente para este cambio. Además, los avances de otros países por un lado, y la situación de la escuela en España, por otro, reforzaban todavía más este cambio.

Coincidiendo con los cambios democráticos del país, se consolidan movimientos asociativos de maestros que trataban de cambiar el posicionamiento formalista por nuevas posicionamientos. En particular en el campo de la enseñanza de las matemáticas a mediados de los 70 aparecieron unos grupos de profesores, los cuales, insatisfechos con los materiales existentes y atentos a lo que, de forma parecida estaba sucediendo en otros países (Italia, Inglaterra, entre otras) llevaron a cabo una tarea importante de elaboración de nuevos materiales para los alumnos y difusión de sus ideas a través de seminarios de profesores, de cursos en las escuelas de verano y de artículos en revistas generales sobre la educación. La insatisfacción no será solo por los materiales sino también por la concepción de la matemática y de su enseñanza/aprendizaje. Durante este tiempo se inició la constitución de las sociedades de profesores de matemáticas que tenían la finalidad de aglutinar esfuerzos, recursos humanos y económicos, promover la formación permanente del profesorado y establecer relaciones con profesores de matemáticas de otros países. En 1987 se inicia un proceso de federación de distintas asociaciones que culmina con la constitución de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

<u>Sobre la educación matemática en primaria.</u> A través de la LGE (1970) se aprueban por Orden ministerial las Orientaciones Pedagógicas para la Enseñanza General Básica. Para facilitar la creación de estructuras mentales

en los niños se introduce la Matemática Moderna desde la primera etapa (6-10 años de edad). Esto permite, por ejemplo, la construcción de las figuras geométricas como una propiedad de los conjuntos y evita el aprendizaje memorístico. En la segunda etapa (10-14 años) se insiste en los aspectos más formales y formativos de las matemáticas y se pretende que el alumno logre claridad, rigor y precisión en el pensamiento (Astudillo, 2006). Las Orientaciones Pedagógicas se mantuvieron hasta el año 1981 cuando se publica el Real Decreto (BOE de 17 Enero 1981) que ordena la Educación Básica en dos etapas y tres ciclos. En el área de matemáticas se inician con una introducción en la que se menciona el nivel evolutivo del niño en clara referencia a Piaget, se identifican las características más relevantes que determinan los contenidos a impartir y la metodología más adecuada para ello.

Los programas de matemáticas de los años 70, han producido varias generaciones de incultos matemáticos, que abiertamente declaran su "odio" a las matemáticas, que Sanz (2008, pp, 3) interpreta:

> *"Son las víctimas de unas personas, que seguramente con toda la buena voluntad del mundo, confundieron la epistemología de las matemáticas con su didáctica, que pensaron que todos los jóvenes necesitaban las matemáticas que se exigen para seguir la carrera de Matemáticas o una ingeniería, aunque al final sólo una minoría acabase en esos estudios…"*

En relación con la enseñanza de las matemáticas y en concreto con los currículos de las diferentes etapas, la reforma de los años 70 estuvo claramente marcada por la introducción de la llamada *matemática moderna* que tuvo un fuerte impacto tanto en la educación primaria como en la secundaria, aunque también en los otros niveles. En síntesis, en relación con los contenidos estos currículos "*redujeron drásticamente los temas relacionados con la geometría"* (Gutierrez, 1998), introdujeron *el lenguaje conjuntista* de puntos, figuras como conjunto de puntos, transformación como aplicación entre conjuntos de puntos, etc., así como el tratamiento de las estructuras y la construcción formal de los conjuntos numéricos, y también trataron la introducción de las funciones a partir del concepto de correspondencia y de ejemplos poco relevantes, en niveles bajos y de manera alejada de los problemas que dan significado a este concepto (Callejo & Cañon, 1996).

En los años '70, la resolución de problemas era considerada como una cuestión menor, reducida a los problemas estándar y trabajados como una simple aplicación de las técnicas enseñadas. Básicamente se pretendía que el alumnado clasificara el problema y posteriormente aplicara la técnica de resolución correspondiente. En líneas generales, y a pesar de algunas buenas intenciones iníciales que pretendían introducir elementos de realidad, por encima de un aprendizaje fundamentalmente memorístico, la enseñanza de las matemáticas siguió un modelo tradicional basado en la exposición y ejemplificación de los conceptos y las técnicas por parte del profesorado y una práctica, a menudo rutinaria, por parte de los alumnos que consistía en la realización de ejercicios y problemas estándar.

Otra característica de la educación matemática en primaria de los años '70 es que los profesores de matemáticas utilizaron los libros de texto que fueron los auténticos intérpretes de los currículos y que, en muchos casos incrementaron los niveles de formalismo, más allá de lo que indicaban los propios documentos oficiales (Callejo & Cañon, 1996).

Sobre el contenido geométrico en la educación primaria. La parte correspondiente al aprendizaje de la geometría, aunque se pretendía relacionar los conceptos con situaciones reales que los hiciesen significativos, difícilmente se lograba. Ante la dificultad de enseñar conceptos geométricos abstractos (Gutierrez, 1998), los docentes tenían como alternativas la reducción de la geometría a los aspectos de cuantificación, cálculo de superficies y volumen o medida de ángulos, o relegar los temas de geometría, perpetuando el círculo vicioso. Difícilmente se veía la geometría como instrumento para la visualización y la representación tanto como el mundo real de tres dimensiones como de conceptos matemáticos de origen no visual; Gutiérrez (1998, pp193-220) apunta que:

> "*la geometría de la enseñanza primaria estaba reducida, en casi todos los países de nuestro entorno cultural, a unos pocos conocimientos básicos de figuras planas y espaciales, aprendizaje de formulas para el cálculo de áreas y volúmenes, y poco más; además estos contenidos solían estar relegados a las últimas páginas de los libros de texto, por lo que, con frecuencia, los maestros sólo los enseñaban parcialmente*".

Esta situación que se ha prolongado durante bastante años, ha tenido, entre otras consecuencias la de minimizar el valor de figuras, dibujos, transformaciones, diagramas, etc., como instrumentos de ayuda para facilitar la comprensión de las conocimientos matemáticos.

Sobre la formación de profesores de primaria. En relación con la formación inicial del profesorado, la ley de 1970 (Ley General de Educación) convirtió los estudios del magisterio en *estudios universitarios* (diplomaturas de tres cursos que capacitaban para enseñar en la EGB). Entre estas diplomaturas se contemplaba una especialidad en ciencias y matemáticas, especialmente dirigida a aquellos maestros y maestras que trabajarían en el ciclo superior de la EGB (11 – 14 años).

Para que la universidad ofrezca a nuevas generaciones, no sólo los instrumentos matemáticos para desenvolverse en su vida cotidiana, sino algo mucho más importante, el amor a las matemáticas; viene definido el Ley Orgánica 11/1983, la Reforma Universitaria (LRU) y el Real Decreto 2360/1984 sobre Departamentos Universitarios y aparece el Área de Didáctica de las Matemáticas en 1984 como área de conocimiento independiente, en iguales condiciones legales como otras áreas de conocimiento. A partir de este momento se institucionalizan cambios en la formación docente. En esta función de profesores especialistas, se habla ya de matemáticas y su didáctica pero se mantiene la visión formalista en la formación geométrica.

La enseñanza Matemática impartida en las Escuelas Universitarias del Profesorado, según la Ley de Reforma Universitaria (LRU) de 1983 regula la autonomía de las Universidades para su organización, administración de recursos, selección del profesorado y elaboración de planes de estudios. Las asignaturas que formaban los planes de estudios de las Diplomaturas de Maestros eran: *Troncales* de obligada inclusión para todas las Universidades, *Obligatorias* y *Optativas* propuestas por cada Universidad, y las asignaturas de *libre elección* que los alumnos pueden elegir entre un amplio margen.

La duración de los estudios docentes de Maestro en todas las Escuelas de Magisterio era de 3 años. El maestro de enseñanza de la Matemática era la persona que debia impartir también el resto de materias. Con la LRU el Área de

Conocimiento Didáctico de la Matemática se creó en 1984 como área de conocimiento independiente, con la misión de contextualizar el contenido matemático, didáctico y profesional. Las asignaturas del Área de Didáctica de la Matemática de la Formación de Maestros de Primaria en la Universidad de Barcelona eran: *Didáctica de la Matemática I* como asignatura troncal y *Didáctica de la Matemática II* como asignatura obligatoria de Universidad.

Como resumen, en la figura 2.2 mostramos las características y los factores importantes que influyeron en la educación de los años '70 en España/Catalunya, caracterizada por dejar de haber una influencia del contenido disciplinar - se pierde la matemática como contenido formal porque se piensa que se sabe matemáticas.

Figura 2.2 Características e influencias en la educación de los años '70 en Catalunya

La educación matemática de los años '90 en Catalunya

A finales de los ochenta la administración, tanto a nivel estatal como de las comunidades autónomas con competencias en educación, inició un proceso para realizar una amplia reforma del sistema educativo que desembocó en la promulgación de la LOGSE (Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (Octubre 10, 1991). Esta reforma supone en primer lugar cambios estructurales importantes en las etapas del sistema educativo: *Educación infantil* - tiene carácter voluntario y gratuito, comprende hasta los seis años de edad. Su objetivo es promover el desarrollo físico, intelectual, afectivo, social y moral de los niños. *Educación Primaria* - Es el primer tramo de la educación obligatoria; comprende 6 cursos académicos, desde los 6 hasta los 12 años. *Educación Secundaria Obligatoria (ESO)* - completa la enseñanza básica, desde los 12 a los 16 años. Esta etapa posibilita continuar estudios, a los que logran el Título de Graduado en ESO, a: Bachillerato o Formación Profesional de grado Medio, o bien si no se obtiene el Título de Graduado en ESO el acceso a los Programas de Iniciación Profesional. *El Bachillerato* - podrán acceder a los estudios de Bachillerato los alumnos que estén en posesión del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria. Comprende dos cursos académicos. Para obtener el título de Bachiller será necesaria la evaluación positiva en todas las asignaturas y la superación de la prueba general del Bachillerato (PGB). Esta etapa posibilita el acceso a: Universidad o Formación Profesional de Grado Superior (a partir de 18 años). Por último: *La Universidad* - los estudios universitarios.

Además, la reforma implantada supone también cambios curriculares en profundidad en cada una de las áreas en que se estructura la educación de las distintas etapas educativas. Algunos de los cambios más significativos de la reforma se centran en la educación secundaria pero también en la modificación del currículo en todas las etapas.

<u>En el relación con el currículo oficial</u> cabe destacar, por una parte su estructura, común a todas las áreas, que contempla para cada etapa unos objetivos generales globales y luego para cada área, unos objetivos generales del áea, unos objetivos generales de etapa, unos contenidos organizados en contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales y unas orientaciones didácticas que enfatizan el valor de que el contenido surge de lo sensible (visión constructivista). La LOGSE determina la finalidad y las capacidades a desarrollar en la etapa de la educación primaria. Como la finalidad de esta etapa es la de "*proporcionar a todos los niños una educación común que haga* *posible la adquisición de los elementos básicos culturales, los aprendizajes relativos a la expresión oral, a la escritura, y el cálculo aritmético así como una progresiva autonomía de acción en su medio*". Según LOGSE, la Educación Primaria contribuirá a desarrollar en los alumnos, entre otras y siguiente capacidad referido a matemáticas: "*aplicar a las situaciones de su vida cotidiana operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales*".

El carácter genérico de la normativa oficial que no entra a diseñar los contenidos a impartir en cada nivel, permite a cada centro la organización adaptando a las características de su propia realidad. Este aspecto, a priori muy interesante constituye al mismo tiempo un problema de la reforma, puesto que para poder realizar esta tarea de manera satisfactoria, es necesario un trabajo coordinado de todos los profesores de un centro y al mismo tiempo la necesidad de una formación inicial adecuada de los profesores.

Con referencia a aspectos concretos de las matemáticas el nuevo currículo introduce elementos positivos innovadores: entre otras, la reintroducción de la geometría tanto en primaria como en secundaria con un carácter constructivo y en el cual la visualización ocupa un lugar importante.

Las áreas de la Educación primaria que se imparten en todos los ciclos de esta etapa son las siguientes: Lengua castellana y la lengua cooficial y literatura, Lengua extranjera, Conocimiento del medio natural, social y cultural; Educación artística, Educación física, Educación artística y Matemáticas. Una de las novedades de la Ley consiste en situar la preocupación por ***la educación para la ciudadanía*** en un lugar muy destacado del conjunto de las actividades educativas. Dentro del área de Matemáticas se plantea que sus contenidos contribuyen a: *Desarrollo de la capacidad del pensamiento y de reflexión lógica*, y *Adquisición de un conjunto de instrumentos para explorar la realidad, representarla y explicarla*.

La educación primaria se imparte por maestros con la especialización correspondiente o el título de grado equivalente con competencia en todas las áreas de la etapa.

Por otra parte la reforma pretende introducir cambios en la implementación del currículo al referirse al papel del profesor en general, como mediador del proceso de aprendizaje y no como transmisor del conocimiento. Por todo ello queremos destacar los esfuerzos en el campo de la formación inicial del profesor de primaria relacionados con los cambios relativos a los contenidos y a la organización del currículo. Precisamos incidir en las teorías sobre el aprendizaje y su posible aplicación en la enseñanza como vía para capacitar a los docentes en su realidad cotidiana. Pensamos que uno de los problemas en la escuela primaria es la falta de especialistas del área de las matemáticas, a la nueva formación inicial de los maestros que no contempla la especialización en matemáticas (Sierra & Rico, 1996).

El currículo de matemáticas de la Educación Primaria presenta las finalidades que la sociedad asigna a su enseñanza y que justifica su incorporación a los planes de estudio de esta etapa. Estas finalidades responden a tres tipos de argumentos (Rico, 1997):

1. Se considera que las matemáticas tienen un alto valor formativo ya que desarrollan las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, precisión, etc.
2. Las matemáticas tienen interés por su utilidad práctica ya que aparecen en casi todas las formas de expresión humana, permitiendo codificar información y obtener una representación del medio social y natural, y
3. Las matemáticas son junto con el lenguaje, uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos.

Sobre el contenido geométrico en la educación primaria. Durante los años setenta, la geometría se dejaba para el final de cada curso. Así lo reflejaban las editoriales en los libros (eran los últimos temas) y ocurrió que muchas veces estos contenidos se daban al finalizar el curso o se posponían para el curso siguiente. La LOGSE acertó y las editoriales también, subsanando este aspecto.

Entendido los contenidos como conjunto de información puesta en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje, siendo en interacción con ella, cómo alumno construye sus conocimientos. Siguiendo a Coll (1986), con el término contenido referimos al conjunto de hechos, conceptos, procedimientos, principios, valores, actitudes, y normas que se ponen en juego en la práctica escolar. Los contenidos geométricos se plantean dentro del área *matemática*. Con la tabla 2.3 mostramos los objetivos, contenidos y criterios de evaluación sobre el contenido geométrico en educación primaria denominada como *formas geométricas y situación en el espacio.*

OBJETIVOS	CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACION
1. Desarrollar la capacidad para interpretar una representación espacial. a) Interpretar en un croquis un itinerario tomando como referencia elementos familiares. b) Definir la situación de un objeto en el espacio y de un desplazamiento usando los conceptos: -derecha/izquierda. -delante/detrás. -arriba/abajo. -proximidad/lejanía.	***Formas geométricas y situación en el espacio*** - Situación con respecto a un punto de referencia propio. - Izquierda/derecha, giro, distancia, desplazamientos.	1. Interpreta una representación espacial. a) Interpreta en un croquis un itinerario tomando como referencia elementos familiares. b) Define la situación de un objeto en el espacio y de un desplazamiento usando los conceptos: -derecha/izquierda. -delante/detrás. -arriba/abajo. -proximidad/lejanía.
2. Desarrollar la capacidad para reconocer objetos y espacios del entorno próximo con formas: a) Circulares., b) Rectangulares., c) Triangulares., d) Esféricas. e) Cúbicas.	- Reconocimiento de cuerpos y formas geométricas: - Esfera, cubo, cilindro, círculo, rectángulo, triángulo.	2. Reconocer objetos y espacios del entorno próximo con formas: a) Circulares.,b) Rectangulares. c) Triangulares.,d) Esféricas. e) Cúbicas.
3. Desarrollar la capacidad para clasificar formas y cuerpos geométricos dando razones del modo de clasificación: a) Clasificar formas geométricas según el criterio de figuras redondas/no redondas; regularidad; número de lados. b) Clasificar cuerpos geométricos según el criterio de cuerpos redondos/no redondos; número de bases; - forma de las bases; número de vértices de la base; forma de las caras laterales. c) Razonar el resultado de la clasificación.	- Clasificación de cuerpos y figuras planas.	3. Clasificar formas y cuerpos geométricos dando razones del modo de clasificación: a)Clasificar formas geométricas según el criterio de figuras redondas/no redondas; regularidad; número de lados. b) Clasificar cuerpos geométricos según el criterio de cuerpos redondos/no redondos; número de bases; forma de las bases; número de vértices de la base; forma de las caras laterales. c) Razonar el resultado de la clasificación.
4. Desarrollar la capacidad para utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana: a) Usar las nociones de paralelismo y perpendicularidad. b) Usar la noción de simetría. c) Usar las nociones de superficie y perímetro.	- Paralelismo, intersección de rectas, *simetría, superficie, perímetro, perpendicularidad*.	4. Utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana: a) Usar las nociones de paralelismo y perpendicularidad. b) Usar la noción de simetría. c) Usar las nociones de superficie y perímetro.

Tabla 2.3 Los objetivos, contenidos geométricos y criterios de evaluación en primaria (Catalunya)

Las tesis de Piaget y sus seguidores han potenciado y favorecido la adopción de determinadas medidas en el ámbito curricular en varios países, y también en España que se puede mostrar por la introducción de nociones topológicas en los primeros niveles de la escuela. Esas consideraciones de la teoría piagetiana se pone de manifiesto en el Programa presentado por la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE).

Sobre la formación de profesores. En base a la Ley Orgánica (1990) de Ordenación General del Sistema Educativo, se establece que el Gobierno y las Universidades, en el ámbito de sus competencias aprobaron las directrices y los planes de estudio correspondientes al título de Maestro con la consideración de diplomado. La promulgación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) aprobada en 1990 provocó cambios importantes en la formación inicial del profesorado de primaria. En esta fecha se publica el Real Decreto por el que se establecen las directrices generales del Título de Maestro donde se especifican siete títulos (Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Física, Lengua Extranjera, Educación Musical, Educación Especial y Audición y Lenguaje), y se dan las directrices generales para la elaboración de unos nuevos Planes de Estudio.

Como consecuencia de esto, en el año 1994 se crea la Facultad de Formación de Profesores de primaria dentro de la Universidad de Barcelona, que incluye las titulaciones de Magisterio. Siguiendo las recomendaciones dadas por el Ministerio de Educación y Ciencia, el nuevo plan de estudio se ha organizado entorno a seis semestres, en las que se cursan en cada uno de ellos un promedio de 36 créditos. El programa de formación matemática de profesores corresponde a las asignaturas *Didáctica de la matemática I* y *Didáctica de la matemática II.* Se imparten respectivamente en el primer y segundo semestre de segundo curso de la Diplomatura de Educación Primaria. Cada una de ellas tiene 7.5 créditos, que equivale a 150 horas lectivas. El programa se ha distribuido en bloques temáticos los cuales están compuestos de un número variable de temas de distinta extensión según su contenido. Estos temas se centran en aspectos didácticos, históricos o matemáticos de manera indistinta, sin estar clasificados estrictamente según estos criterios. Dentro del programa de las asignaturas se dedica un capítulo a *la enseñanza de la geometría* donde se tratan las transformaciones geométricas.

Estos planes favorecieron el aumento de asignaturas dedicadas a una formación específica en las especialidades recientemente creadas como es el caso de la didáctica de las matemáticas, así como un aumento de las horas dedicadas a la formación pedagógica.

Pero supusieron una reducción drástica en el número de horas asignadas a la formación de maestros en relación con las matemáticas. Así, en un análisis de los planes de estudio de las diferentes especialidades de maestros de las distintas universidades españolas de 1998, mostró los siguientes datos (Abraira y otros, 1997): la media de créditos troncales y obligatorios en asignaturas relacionadas con las Matemáticas era de 13,5%, para la especialidad de Primaria que representaban un 6,4 % de los créditos totales. Para las demás especialidades las cosas eran aún peor, apenas un 3% de créditos dedicados a la Didáctica de la Matemática. El número de créditos de Didáctica de la Matemática, que debian cursar los futuros maestros de Educación Especial, como materia troncal u obligatoria, en algunos centros era cero.

La comparación con planes de estudios anteriores muestra que la carga lectiva dedicada a la formación matemática del maestro, se había reducido en más del 50% en relación con los Planes de estudio de 1971.

Una revisión posterior de los nuevos Planes de Estudio (Rico y Carrillo, 1999), señala que en la especialidad de Maestro de Primaria, la formación en matemática y su didáctica apenas alcanza el 8% de la carga lectiva total; en, el resto de las especialidades sólo es del 2%. Lo que muestra la progresiva desaparición de la educación matemática en los planes de estudio en la formación inicial del profesorado de Primaria. Este hecho contrasta con la normativa actual que establece, para los tres ciclos de Primaria, dedicar el 16% del tiempo lectivo a la enseñanza de las Matemáticas. Esta disfunción entre el tiempo dedicado a la formación y el que se ha de dedicar a la puesta en práctica de dicha formación, lógicamente va a tener una repercusión negativa en la formación matemática de los alumnos de educación primaria en un futuro inmediato.

Como resumen, a continuación mediante la figura 2.4, presentamos los factores que influyeron en la educación matemática de los años ’90 en España/Catalunya.

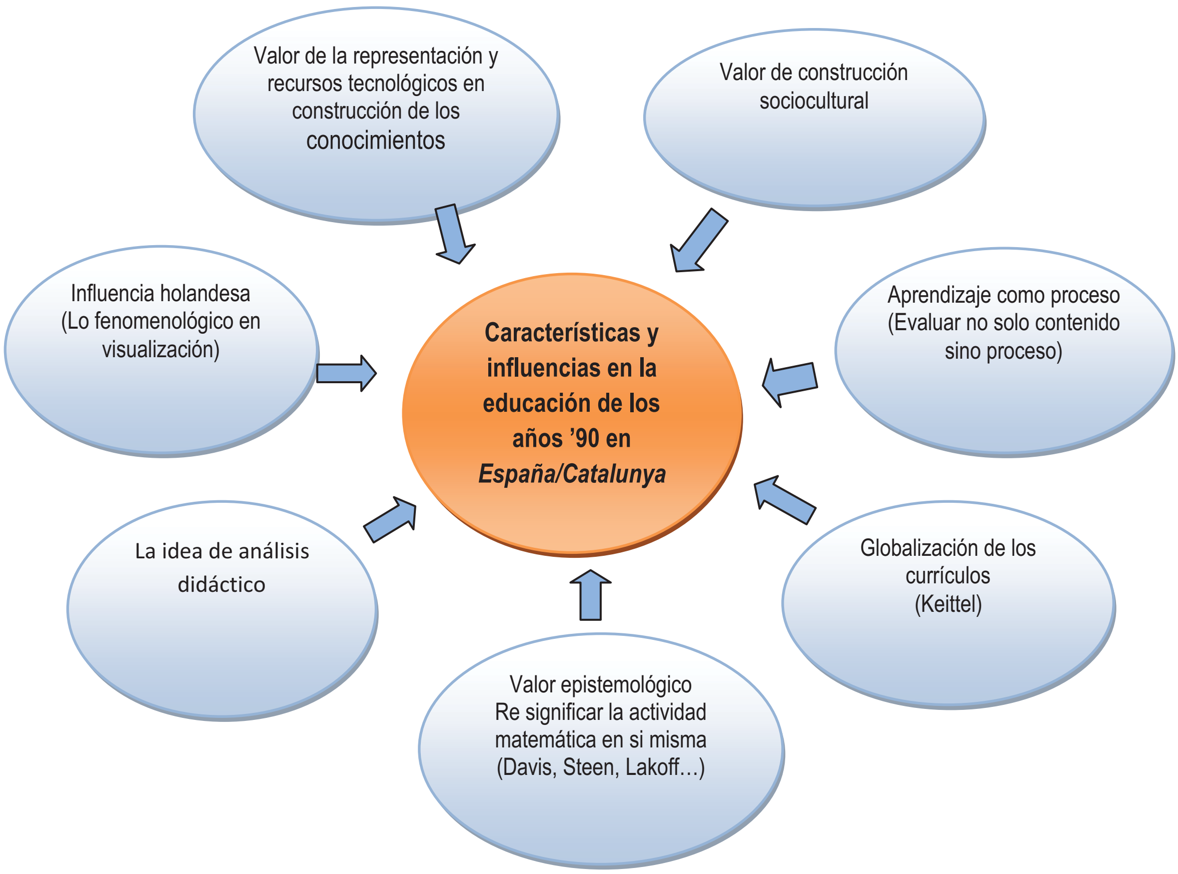


Figura 2.4 – Características y influencias en la educación de los años '90 en Catalunya

2.2.2. Características de la educación en Kosova

Presentamos unas breves consideraciones sobre la situación específica de Kosova. Kosova en día de hoy presenta un contexto específico donde se cruzan tres culturas diferentes: autóctona – presentada por la población albanesa; del oriente – influenciada por parte de Imperio Turco; y del Nord-este (Eslava) – presentada por la población serbia e influenciada por la época de antigua Yugoslavia.

Desde un punto de vista histórico, la educación de Kosova sufrió como consecuencia de la ocupación del país por parte del Imperio Turco (1465 cuando murió Gjergj Kastrioti - el héroe albanés, hasta 1912) y luego por parte del Imperio Serbio (1912-1941). Kosova por primera vez tenía una educación para todos y organizada en la época de la Yugoslavia socialista (1945-1990) cuando fue considerada como una Provincia Autónoma. Después de 45 años de este periodo, en la última década del siglo XX se prohibía la educación en la lengua albanesa (para mayoría población kosovar) por parte del dictador Milosevic (1990-1999). Desde el año 1999, Kosova estaba en la fase de transición hacia la independencia gobernada por la Administración Interina de Misión de los Naciones Unidas de Kosova (UNMIK). La proclamación de la independencia se ha realizado el 17 de Febrero 2008.

Kosova tiene una tradición de vida pluri-cultural, aceptando de buen grado las diversas culturas presentes en el país. Kosova con la población de algo más de 2 millones habitantes tiene una composición étnica compleja: la mayoría (90%) son de población albanesa, el 7% son población serbia y el otro 3% se reparten en bosnios, turcos, croatas etc. Según Potkonjak (1980), hasta el año 1912 la única lengua utilizada en la educación oficial fue la turca, mientras que la lengua albanesa y la lengua serbia estuvieron utilizadas en las iglesias. En el periodo que va desde el año 1913 hasta el año 1918, la única lengua oficial utilizada fue la lengua albanesa, mientras que en el periodo que va desde 1918 hasta el año 1941, en Kosova como parte de Serbia estaba prohibido la educación y la utilización de la lengua albanesa (Potkonjak, 1980). Como consecuencia de este periodo, más del 85% de la población kosovar era analfabeta. El porcentaje mayor se dio en el grupo de las mujeres las cuales se dedicaban al trabajo artesanal como por ejemplo hacer bordados. En el nuevo país SFRJ (Socialista Federativa República de Yugoslavia) empieza bajar el analfabetismo, organizando cursos de alfabetización y el estableciendo nuevas escuelas para todos. En este periodo se han utilizado las lenguas albanesa, serbia y turca, las cuales continúan siendo cooficiales en la actualidad.

En el transcurso del tiempo de la sociedad kosovar en general y de la educación en especial, es evidente que hay dos periodos con características diferentes. Uno es el periodo desde 1970 (cuando se creara la Universidad de Prishtina, y nueva constitución kosovar) hasta los años 1899/1990 cuando se suspende la autonomía de Kosova, pero dentro del *sistema paralelo kosovar* se continúa aplicando el sistema educativo anterior hasta el año 1999 cuando termina la ocupación serbia y en Kosova se establece el gobierno de UNMIK . Otro periodo con características bien diferentes incluye el periodo post 1999 cuando se establece la administración de UNMIK, luego se aplica el Nuevo Currículo Kosovar en nuevo sistema educativo y cuando se establece la nueva Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina. A continuación presentamos una breve descripción de las características de la educación en Kosova en estos dos periodos.

La educación matemática de los años ’70 en Kosova/Yugoslavia

Kosova, como parte (autonomía) de ex-Yugoslavia, tenía una tradición matemática influenciada por la tradición yugoslava. Los primeros formadores de matemáticas han terminando su formación en las universidades de otras partes de ex-Yugoslavia, por que la Universidad de Prishtina fue creado en el año 1970; también los primeros libros de textos y otra literatura que utilizaban futuros profesorados fue distribuido por otros centros fuera de Kosova. Los profesores de matemáticas de la Universidad de Prístina han terminado su especialización, su doctorado y otras actividades científicas, en Yugoslavia (Belgrado, Zagreb, etc.) y en la Unión Soviética. Según Potkonjak (1980) la tradición educativa de Yugoslavia es una tradición entre tradición soviética y tradición europea.

Sobre lo institucional del sistema educativo. Las características de la organización institucional de educación en Kosova en este periodo son iguales como en todo el país (Yugoslavia). Las características de la organización institucional de la educación en Yugoslavia (Potkonjak, 1980) se basaran en los elementos siguientes:

- Tres tipos de escuelas: elementales, secundarias y superiores (universidades).
- Dos tipos de enseñanza: enseñanza general (primaria y gimnasium) y enseñanza profesional (otras escuelas y universidades).
- Por la función que tienen las escuelas distinguimos dos tipos de escuelas: *las escuelas que preparan los alumnos para continuar su formación* (Primaria y Gimnasium), y *las escuelas que preparan los alumnos para trabajar (*las escuelas secundaria profesional y universidades).
- Por fundadores de las escuelas hay solo un tipo de escuelas: t*odas las escuelas fueron públicas*. Solo las escuelas religiosas fueron privadas.
- Por la duración diaria de trabajo en las escuelas distinguimos las escuelas que trabajan *medió diario* y *todo el día*. Mayoría de las escuelas fueron del primer tipo por razón de falta de edificios.
- Por la duración periodo de enseñanza teníamos: *Primaria* – 8 años*, secundaria (y gimnasium)* – 3, 4 años, *Superior (universitario)* – 2, 4 o 5 años*.*

Es importante destacar que el sistema de Educación en Kosova en esta época incluía todas las etnias y clases sociales. Esta educación se financiaba por el Gobierno del estado, era pública y se organizaba en las lenguas correspondientes a las distintas etnias (en Kosova existieron escuelas en lengua albanesa, serbocroata y turca).

Las etapas del sistema educativo fueron: *educación infantil* – solo en las ciudades y con carácter voluntario, hasta 7 años de edad; *Educación primaria* – educación obligatoria, comprendido por 8 cursos en dos ciclos – *Primaria baja* comprende 4 cursos desde 7 hasta 11 años y *Primaria alta* con otros 4 cursos desde 11 hasta 15 años de edad; *Educación secundaria* – comprende dos tipos de formación: *gimnasium* - para ellos que continuaran los estudios y *formación profesional*. Al terminar la educación secundaria se podría acceder a los estudios universitarios.

En la educación primaria, se planteaban 5 clases de matemáticas semanales en cada grado. El objetivo de la educación primaria era enseñar y favorecer el aprendizaje en comprensión de los conceptos.

Sobre la educación matemática en primaria. Para identificar las características de la educación matemática de los años '70 en Kosova/Yugoslavia, referimos al Stipanic (Stipanic, 1984), quien afirma que las características de educación matemática en Yugoslavia están determinados por muchos determinantes. Como determinantes importantes de la educación matemática, él propone las siguientes:

-Las matemáticas se enseñan solo en las escuelas (que es diferente en caso de otras asignaturas que pueden enseñar paralelo con las escuelas) y por eso, el numero semanal de clases de matemáticas en las escuelas (primaria) debe ser 5 (de total 25 clases).

- Las matemáticas no son necesidad solo para el futuro formación, pero también es una necesidad para desarrollar habilidades para utilizar tecnologías.

- La importancia de las matemáticas cada día crece. Esta disciplina independiente del desarrollo de la abstracción que tiene, también se puede aplicar a diferentes áreas de la vida real.

- Sabiendo el gran desarrollo de la teoría y aplicaciones de las matemáticas, en todas las ciencias tanto en artes y filosofía; las matemáticas se coloca entre las asignaturas (materias) de *cultura general* en las escuelas.

- La matemática se presentará no sólo como herramienta de aplicaciones, sino como *modelo de pensamiento exacto, racional y abstracto*. Habilitad de pensar abstracto es característico del hombre que tiene cultura general; la misma que tiene que tener para *analizar y sintetizar*, para *concluir* de manera *inductiva y deductiva*, para *argumentar* de manera *precisa, concisa, clara* y *lógica*.

-Las matemáticas por su *contenido*, sus *objetivos* y su manera de *representación* son *universales* e *internacionales*. Los *conceptos geométricos* (como las figuras geométricas) se presentan como elementos constituidos de la *cultura general*.

- El poder principal de las matemáticas es *su libertad en la creación de conceptos y teorías, de generar la abstracción y de generalización de sus conceptos y teorías*; En esto consiste la semejanza de las matemáticas con las artes. En este sentido, la matemática tiene una dimensión estética de la educación.

- La educación matemática es un factor importante en la creación de *opinión marxista de la interpretación de los fenómenos* del mundo.

Como conclusión podemos decir que las matemáticas son un lenguaje, y que este lenguaje matemático está caracterizado porque exige un alto nivel de abstracción y de formalización.

En la enseñanza Primaria, la tarea básica del profesorado de matemáticas es la de favorecer el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos, pero en torno a esta materia hay un conjunto de creencias que pueden perjudicar o impedir estos objetivos. La dificultad de las matemáticas, al pensar que no todos pueden comprender estos conocimientos sino solamente unos pocos privilegiados, etc., pueden constituir un verdadero obstáculo para que los alumnos puedan acercarse a las matemáticas sin ningún tipo de complejo.

<u>**Sobre el contenido geométrico en la educación primaria.**</u> Como parte de la tradición yugoslava, los contenidos geométricos tenían un lugar importante en la educación matemática en Kosova.

Si consideramos el término de *contenido* al conjunto de hechos, conceptos, procedimientos, principios, valores, actitudes, y normas que se ponen en juego en la práctica escolar, vemos que los contenidos geométricos se plantean dentro del área *matemática*. Los contenidos geométricos se distribuyen en los temas: *Líneas rectas y redondas, Líneas cerradas y abiertas, Líneas y el punto como intersección entre dos líneas, Rectas paralelas y ortogonales, Formas geométrica en el plano, Rotaciones, simetrías y traslaciones, Perímetro y superficie de las figuras planas, Formas geométricas en el espacio, Clasificación de las figuras tridimensionales* (en el ciclo superior de educación primaria se hacen los cálculos de volumen y superficies de los cuerpos geométricos).

En la tabla 2.5, mostramos los contenidos geométricos y objetivos sobre el contenido geométrico en educación primaria de la ***geometría.***

contendidos	Objetivos
1. Líneas rectas y redondas 2. Líneas cerradas y abiertas 3. Líneas y el punto como intersección entre dos líneas 4. Rectas paralelas y ortogonales 5. Rotaciones, simetrías y traslaciones 6. Formas geométrica en el plano 7. Perímetro y superficie de las figuras planas 8. Formas geométricas en el espacio 9. Clasificación de las figuras tridimensionales	- Comprensión del significado de la recta y del segmento - Comprender la distinción entre líneas rectas y redondas - Distinguir las líneas cerradas y abiertas -Medir las distancias con los unidades no-estándares - Identificar la simetría axial - Identificar las figuras simétricas y asimétricas - Reconocer el significado del paralelismo y perpendicularidad como una relación entre dos rectas - Dibujo libre y con los instrumentos de líneas rectas y redondas - Identificación de puntos de simetría, rotaciones y translaciones. - Identificación de simetrías rotaciones y traslaciones en las figuras planas. - Identificación de las formas geométricas planas - Identificación y reconocimiento de los elementos de las figuras planas (vértices, caras,…) - Dibujo de las figuras planas con los instrumentos geométricos (regla, compas) - Calculo del perímetro y superficie de las figuras planas - Identificación de las figuras en el espacio - Clasificación de las figuras tridimensionales en redondas y poliedros - Identificación de los elementos de las figuras tridimensionales

Figura 2.5. Los contenidos geométricos en Primaria en los años '70 en Kosova

Sobre la formación de profesores. La tradición de formación de profesores de primaria para los kosovares empieza desde el año 1887 cuando celebra la fundación de la primera Escuela Normal. Hasta el año 1974, las Escuelas Normales han preparado maestros para alumnos de 7 años hasta 11 años. Desde el año 1974 hasta el año 2002, la formación inicial de maestros de primaria - los alumnos desde los 7 años (primer grado) hasta los 14 (ocho grado), fue en Escuelas universitarias (Shkolla e Lartë Pedagogjike). Las asignaturas que han servido para la formación matemática (geométrica) fueron de *matemática* general y *metódica de las matemáticas* que contenían el 12% de las horas totales de formación. Las Escuelas Universitarias recibían los alumnos que han terminado la formación Secundaria (Gimnasium o Secundaria profesional). La formación era de 2 años de estudios con 4 semestres y 4 semanas de prácticas en las escuelas de primaria. Formación matemática de los profesores consistía en el desarrollo de las capacidades en pensamiento exacto y abstracto, para analizar y sintetizar, para concluir en manera inductiva y deductiva.

La figura 2.6., muestra las características del sistema educativo del periodo 1970 hasta 1999 en Kosova.

.

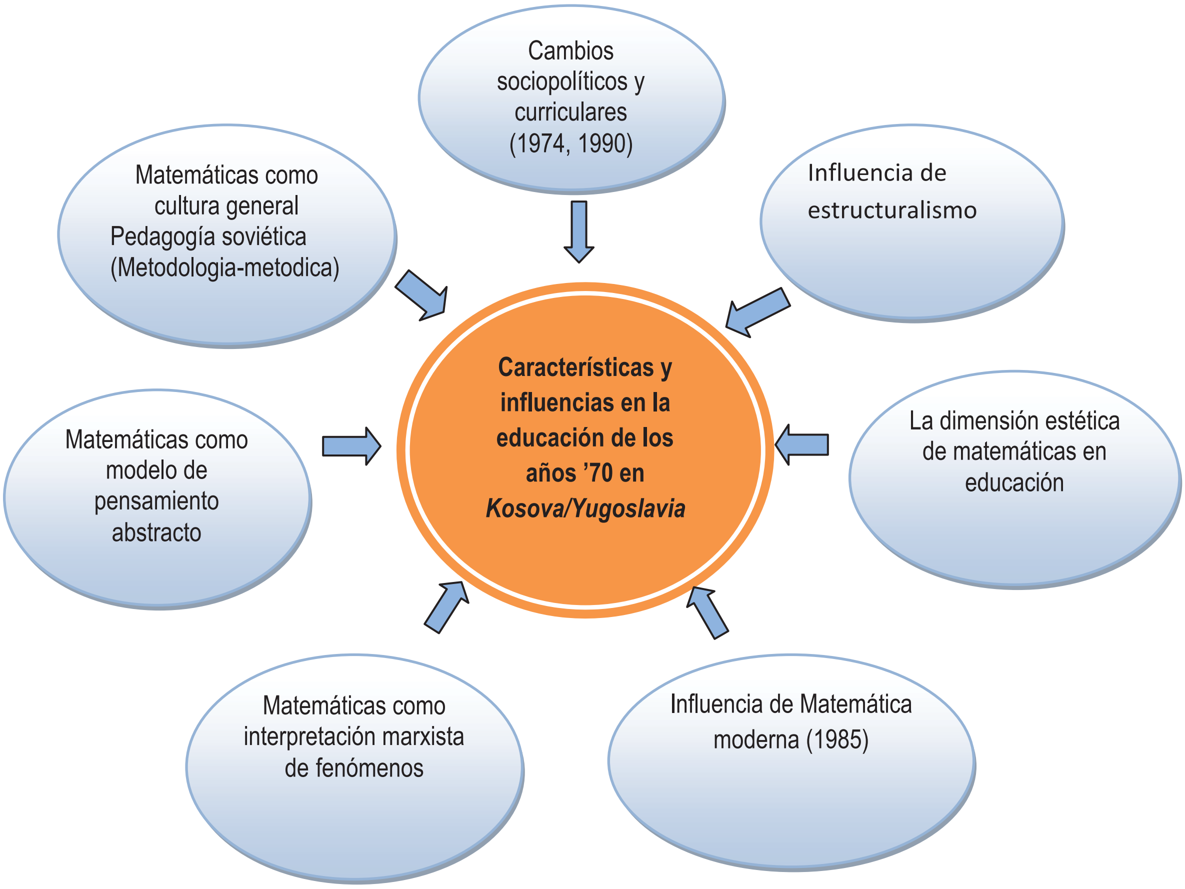


Figura 2.6 Influencias y características de educación de los años '70 en Kosova

La educación matemática de los años '99 en Kosova

El año 1999 es histórico para los ciudadanos de Kosova. El gobierno de Milosevic fracasó y en Kosova se establece el gobierno de UNMIK. La misión de UNMIK es construir la paz, la democracia, la estabilidad y la autonomía de

Kosova de la base multiétnica. Esta política tiene consecuencias en la educación. La enseñanza está basada en las regulaciones y las instrucciones administrativas aprobadas por la UNMIK. Según estas regulaciones se permite la educación en todas las lenguas que existen actualmente en Kosova: albanésa, serbia, turca, croata y bosnia.

El año 2002 de acuerdo con las intenciones del gobierno provisional de Kosova y de UNMIK en Kosova se aplica el Nuevo Currículo de Kosova (NCK) como una reflexión de la composición pluralista, multiétnica y multicultural de la sociedad de Kosova. Los creadores del nuevo currículo de la enseñanza de Kosova eran especialistas de la educación internacional e nacional.

El sistema educativo de Kosova debe acomodar sus actuaciones en los próximos años a la consecución de estos objetivos compartidos con los miembros de la Unión Europea. UNMIK se compromete a lograr dos metas principales en el campo de la educación. *Primero*, asegurando de forma rápida la reasunción de la enseñanza y el aprendizaje continuado durante la transición a un país democrático responsable. *Segundo*, apoyando la reconstrucción y transformación del sistema de educación para reflejar las necesidades de una sociedad europea moderna. (OECD, 2001).

Organización institucional de la educación. A partir del año 1999, para los kosovares se abren las puertas de cooperación con el resto del mundo. Se inició un proceso para realizar una amplia reforma de la sociedad y del sistema educativo que desembocó en el Nuevo Currículo de Kosova (NCK 2002). El NCK supone en primer lugar cambios estructurales importantes en las etapas del sistema educativo: *La educación infantil* tiene carácter voluntario, comprende de tres hasta los seis años de edad. *La educación Primaria* empieza a los 6 años, un año antes que en el antiguo sistema, hasta los 11 años Es el primer tramo de la educación obligatoria y comprende 5 cursos académicos; *La educación Secundaria Baja* completa la enseñanza obligatoria desde los 11 a los 15 años. *La educación Secundaria Alta* con el carácter no-obligatorio comprende entre 3 y 4 cursos académicos. Para obtener el título de secundaria alta será necesaria la evaluación positiva en todas las asignaturas y la superación de la prueba final. Terminar esta etapa de formación posibilita el acceso a los estudios universitarios.

Por primera vez en Kosova se crean las instituciones educativas privadas, incluyendo instituciones de educación primaria. Además, el NCK supone también cambios curriculares en profundidad en cada una de las áreas en que se estructura la educación de las distintas etapas educativas.

Sobre la educación matemática en primaria. Los informes sobre el estado y la situación del sistema educativo publicados por OECD y UNICEF en los últimos años, han puesto de manifiesto que hay muchos problemas de educación en general y de primaria en particular. Estas carencias suponen un grave inconveniente para el desarrollo personal y para el éxito del conjunto de la escolaridad y plantean diversos problemas de continuidad y dificultan las posibilidades de avance en las etapas posteriores.

El concepto de enseñanza de las matemáticas en las escuelas de primaria se ha basado en el plan de estudios de 1991, hasta el año 2002 cuando se empieza aplicación de NCK. Hasta entonces la enseñanza de las matemáticas enfatizaba las habilidades para realizar algoritmos matemáticos y menos las resoluciones de problemas. Podemos concluir que el concepto de enseñanza de las matemática en Kosova no se ha mantenido al ritmo de los conocimientos contemporáneos 'didácticos' de las teorías de enseñanza de matemáticas y la matemática no fue correlacionada con las experiencias de la vida cotidiana de los alumnos (Hamiti y Thaqi, 2005). Ahora sabemos que el aprendizaje en la Primaria debe de tener en cuenta los sentidos en los primeros niveles y poner el énfasis en "*el actividad que permite manipulaciones concretas para pasar a los conceptos abstractos por medio de un "método de descubrimiento*". Esta tendencia es la que tuvo en cuenta los principios básicos del aprendizaje matemático formulados por Dienes (citado en Blanco, 1991): a) principio dinámico, b) principio de constructivismo, c) principio de variabilidad perspectiva y d) la variabilidad matemática.

Como el NCK presenta una reflexión de la composición pluralista, multi-étnica, y multi-cultural de la sociedad de Kosova, las **orientaciones** generales de la enseñanza en general y de las matemáticas en Kosova son: Reflexión de la composición pluralista y multicultural de Kosovo; Reflexión de las necesidades, intereses y estilos de aprendizaje de los diferentes estudiantes, teniendo en cuenta el género, el idioma, y las culturas; La conexión con los recientes desarrollos de la ciencia; *promover* un ambiente amistoso de los estudiantes; *alcanzar* un equilibrio razonable entre los requisitos comunes para todos y *tener en cuenta la individualización* en los procesos de enseñanza/aprendizaje, y; *especificar actividades* como investigar y analizar ideas y problemas, *encontrar* y *evaluar* las soluciones.

Mientras que **los objetivos** globales de la educación **matemática que se** se plantean son los siguientes:

- entender las relaciones entre el mundo y su expresión matemática;
- desarrollar habilidades de la numeración, del razonamiento lógico-matemático, de operar con datos, y desarrollar competencias clave relacionadas con las habilidades intelectuales;
- poder evaluar soluciones diferentes a un problema dado y la toma de decisiones individuales o en grupos sobre la solución más apropiada a una situación dada;
- identificar situaciones para usar conocimiento matemático y habilidades en la vida cotidiana.

Los ***principios*** del desarrollo de ***las actividades en educación matemática***, son:

- reflexionar sobre la dinámica de conocimiento en la sociedad de hoy y los valores sociales y culturales que caracterizan una sociedad abierta y democrática,
- dirigir todas las dimensiones que son importante en la vida de las personas: desarrollo personal, relaciones interpersonales, la vida pública, conocimiento científico, la espiritualidad (religioso, artístico, filosófico), el ambiente artificial, tecnología, trabajo,
- mantener una base del desarrollo de competencias importantes como habilidades de comunicación, habilidades de vida, habilidades del pensamiento críticas, resolución de problemas,
- Incorporar la educación práctica de la tradición del sistema de educación Kosovar, así como de experiencias internacionales.

Sobre el papel del profesor (maestro) en la clase de matemáticas, se pide que deban ayudar a los estudiantes, entender que aunque hay ciertos elementos de las matemáticas que son universales, hay diferencias en las maneras de consideraciones de los diversos grupos culturales en algunos de los aspectos mayores de matemática. Los maestros están considerando los factores claves para cambios en educación. Un maestro bien cualificado es capaz de desarrollar tal aprendizaje, escuchando los necesidades de los alumnos, motivando, y preparando.

<u>Sobre el contenido geométrico en la educación primaria</u>. El currículum matemático de primaria anterior al 2002 no se ocupaba mucho del aprendizaje geométrico, porque privilegiaba las otras partes de la matemática. A partir del 2002 el NCK, la geometría en general y las transformaciones geométricas en especial, tienen un lugar especial. La Geometría que nosotros llamamos *'la geometría de una figura a un punto'* (Hamiti&Thaqi, 2005) es diferente de la geometría típica enseñada en la escuela anterior de Primaria, que empezaba la enseñanza de las geometrías a partir de conceptos de punto, recta y plano para pasar luego en las conceptos de figuras tridimensionales. Como se puede ver en el apartado 2.2.3, los contenidos geométricos en los currículos de los años ’70, en Kosova empiezan a introducir primero las líneas rectas y redondas, para pasar a las líneas cerradas y abiertas, el punto como intersección entre dos líneas y más tarde se pasa a la introducción de formas geométricas en el espacio.

Los contenidos geométricos se plantean dentro del área *matemática,* dentro del bloque *geometría y medida*. Primero se plantean los contenidos sobre la *orientación en el espacio* con el fin de desarrollar la capacidad del alumno de identificar la situación de un objeto en el espacio y de un desplazamiento. Luego se introducen *formas geométricas en el espacio* con el fin de capacitar a los alumnos para reconocer objetos del entorno identificando las formas del cubo, paralelepípedo, esfera etc. Se pasa a los contenidos sobre los *movimientos* y relaciones entre figuras geométricas desarrollando las nociones geométricas de simetría, giros, traslaciones y desplazamientos, paralelismo y perpendicularidad. Después se plantean los contenidos sobre *figuras geométricas en el plano* con el objetivo de reconocer, identificar y clasificar formas y cuerpos geométricos según los diferentes criterios en figuras redondas/no redondas, figuras regulares, figuras según el número de lados, etc. Dentro de las actividades se plantean las del desarrollo de las capacidades para que los alumnos reconozcan *los instrumentos del dibujo* (regla, compas, etc.) para que sepan manejarlas y utilizarlas en las construcciones de figuras geométricas.

Sobre la formación de profesores de primaria. La formación inicial de profesores de primaria desde el año 2002 se hace en la nueva Facultad de Educación en Universidad de Prishtina (FEUP) que funciona desde el año 2002 en 4 centros de Kosova: Prístina, Gjilani, Prizreni y Gjakova. La duración de los estudios es de 4 años. La formación matemática en esta Facultad se hace durante cuatro años de estudios mediante 5 asignaturas semestrales: *Matemática elemental I y II, Matemática I y II* y *Metodología de los conceptos matemáticos* de un total de 225 horas (5X45 horas) y contienen el 16% de las horas totales de formación. Comparando con los planes de antiguas escuelas universitarias de formación, se muestra que la carga lectiva dedicada a la formación matemática de futuro profesor de Primaria, había crecido en más del 30% en relación con los Planes de estudio de 1974. La formación geométrica tiene aproximadamente un 20% de clases de Matemáticas. El programa de formación matemática en la FEUP se ha distribuido en bloques temáticos: *Elementos de topología*, *La construcción axiomática de geometría*, *Magnitudes y medidas* y *Elementos de geometría analítica*. Estos bloques están compuestos de número de temas de distinto extensión según sus contenidos. Estos temas se centran en las presentaciones simples de las pruebas de teoremas como prueba deductiva formal. El proceso de demostración se hace sin atender a su función o a cómo puede conectar con las intuiciones de los estudiantes acerca de lo que puede ser un argumento convincente. El programa de geometría en FEUP, trata de la enseñanza ***formativa***, destinada a cultivar y practicar el razonamiento lógico. El estudio de geometría en este programa tiene por fin el conocimiento matemático.

Hay muchos problemas de formación docente de profesores de Primaria en muchos países, y también en FEUP. FEUP como una facultad nueva está en proceso de consolidación en todos aspectos – estructural, organizacional y funcional. FEUP es la única institución pública en Kosova que prepara futuros maestros-profesores de Primaria (6-12 años) y de Secundaria Obligatoria (12-16 años) en las lenguas albanesa, turca y bosnia. El tamaño del país es pequeño, y por lo tanto también las Facultades son pequeñas. Como ocurre en muchos otros países, ninguno de los formadores (de matemáticas) que trabajan en la FEUP no están preparados especialmente para la formación de los futuros profesores de Primaria, y faltan profesores regulares con preparación didáctica (con base de conocimiento de investigación y base de conocimiento de experiencia) .

El NCK en Kosova de 2002 no permite la enseñanza mecánica de ideas, reglas y procedimientos. Sólo los profesores bien cualificados son capaces de desarrollar y animar tal enseñanza/aprendizaje, escuchando a los alumnos "*las necesidades, motivando, y preparándoles*" en los problemas correspondiente a una situación de enseñanza. Esa formación tienen que recibir los estudiantes-futuros profesores de Primaria en la nueva Facultad de Educación en Universidad de Prishtina.

En la figura 2.7 presentamos las características y influencias en la educación kosovar desde el año 1999.

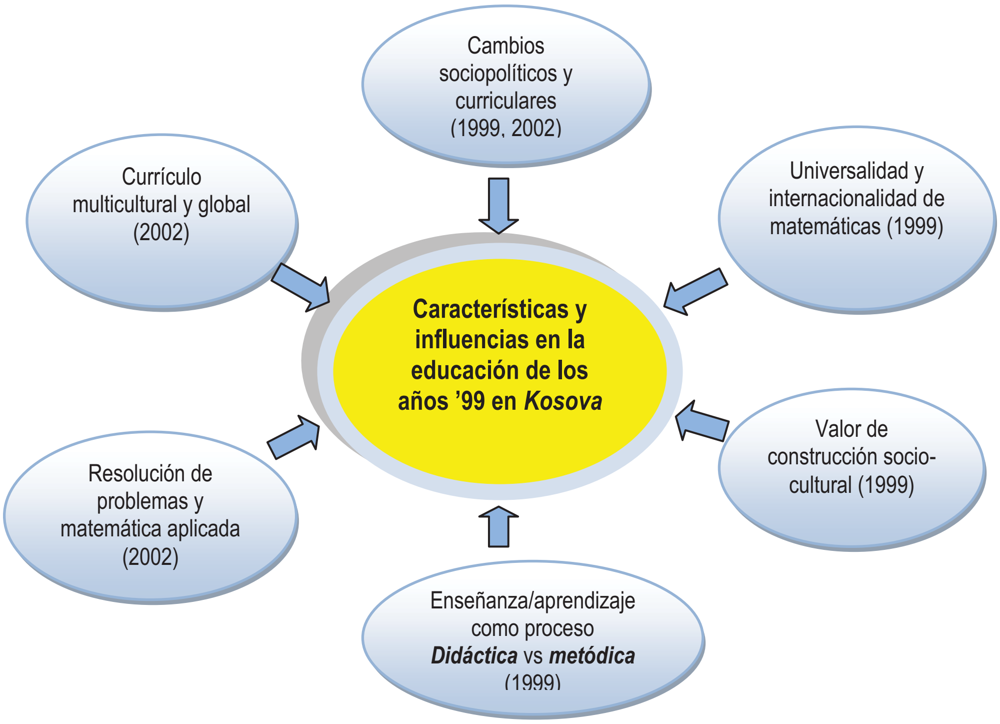


Figura 2.7 Influencias y características de la educación de los años '99 en Kosova

2.2.3 Las comparaciones entre características de educación en Catalunya y de Kosova

Como resumen de los apartados anteriores, a continuación mediante tablas comparativas presentamos las características diferenciales sobre la educación matemática de Primaria en Catalunya y Kosovo tal como se ve en las Propuestas Curriculares Oficiales (tabla 2.8).

Educación matemática de Primaria ’70 – ‘90

	Catalunya - España	*Kosova - Yugoslavia*
Tipo de subdivisión del sistema educativo. **Lugar de las matemáticas**	6-14 años (denominada como Educación General Básica dividido en tres ciclos) 4-5 h semanales	7-11 años (Primaria baja - con un único profesor para todas asignaturas) 11-15 (Primaria alta – con el profesor especialista para cada asignatura) 5h o más horas semanales
Concepción sobre educación Primaria	Formación para la ciudadanía. Se introduce lenguaje conjuntista – aprendizaje a base de las propiedades de los conjuntos	Educación se interpreta como enseñanza. Favorecer el aprendizaje y la comprensión de los conceptos,
Bases del currículo matemático **Idea sobre matemática**	Introducción de la matemática moderna. Matemática se presenta según niveles evolutivos de los niños en clara referencia a Piaqet. El tratamiento de las estructuras y la construcción formal de los conceptos matemáticos. La resolución de problemas reducida a los problemas estándar como simples aplicación de las teorías enseñadas. La enseñanza siguió un modelo tradicional de exposición y ejemplificación de los conceptos y las técnicas por parte del profesorado y practica rutinaria por parte de los alumnos en la realización de ejercicios estándares.	*Opinión marxista de interpretación de fenómenos* del mundo. *Libertad en creación de conceptos y teorías, en creación de abstracción y generalización de sus conceptos y teorías*; Matemática se presentara no solo como herramienta de aplicaciones, sino como *modelo de pensamiento exacto, racional y abstracto*. Habilitad de pensar abstracto es característico de hombre que tiene cultura general; el mismo tiene que tener habilitad para *analizar i sintetizar*, para *concluir* en manera *inductivo y deductivo*, para *argumentar* en manera *precisa, concisa, clara* y *lógica*.
Concepción sobre matemáticas escolares	Las matemáticas se consideraban como un conjunto de los conceptos y las técnicas para realización de ejercicios y problemas estándares. Los intentos por fomentar la autonomía del alumnado a partir de realización de fichas de trabajo individual no tuvieron el éxito por razón de la falta de motivación así como una falta de conexión con la realidad.	Las matemáticas no es necesidad solo para futuro formación, pero también es necesidad para habilidad a utilizar tecnologías. Matemática tiene dimensión estética en educación. Matemática se presentara no solo como herramienta de aplicaciones, sino como *modelo de pensamiento exacto, racional y abstracto*. Habilitad de pensar abstracto es característico de hombre que tiene cultura general; el mismo tiene que tener habilitad para *analizar i sintetizar*, para *concluir* en manera *inductivo y deductivo*, para *argumentar* en manera *precisa, concisa, clara* y *lógica*.

Papel del docente	La exposición y ejemplificación de los conceptos y las técnicas por parte del profesor.	La tarea del profesorado es la de favorecer el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos.
Papel de los contenidos geométricos	El papel de los contenidos geométricos se consideraba en los aspectos de cuantificación, calculo de superficies y volumen o medida de ángulos formaban	Los conceptos geométricos se presentan como elementos constituidos de la cultura general.
Formación docente	El maestro de enseñanza de las matemáticas imparte el resto de materias. La misión de formación docente es de contextualizar el contenido matemático, didáctico y profesional.	El maestro de enseñanza imparte todas materias de educación primaria. La misión de formación docente es la formación matemática (pensamiento exacto, abstracto, precisa, y deductiva).

Tabla 2.8. Características de educación matemática de los años '70 en Catalunya y Kosova

Mediante la tabla 2.9 mostramos las características específicas de educación geométrica en primaria, para ver claramente sus diferencias.

***Sobre el contenido geométrico* '70 -- '90**

	Catalunya	Kosovo
Formas geométricas	Reconocer e identificar figuras planas (triangulo, cuadrado, circulo,,,) Reconocer y identificar figuras espaciales	Reconocer e identificar formas geométricas planas y espaciales (e.g. círculo, triángulo, cuadrado, cubo, cilindro, esfera, etc.) en su vida cotidiana
Medidas	Medidas longitudinales, superficiales.	Medidas no convencionales y convencionales. Distancia entre puntos.
Propiedades		Propiedades. Desigualdad triangular. Teorema de Pitágoras.
Medida	Cuantificación Calculo de superficies de figuras planas y espaciales, Calculo de volumen de figuras espaciales Medida de ángulos	Distinguir entre perímetro, área y volumen de una forma geométricas como medidas.
La simetría	Figuras simétricas, construcciones de figuras simétricas respecto a la figura dada.	Conceptos de simetría: Se describen puntos de simetría, rotaciones, reflexiones y translaciones. Algunas veces los polígonos, poliedros. Recubrimiento del plano se relacionan a la simetría.
Figuras planas	Líneas rectas, ángulos y identificación y clasificación de polígonos, circunferencia,	Propiedades básicas de punto y línea en el plano Euclidiano
Relaciones **entre las rectas**	Ángulos y rectas, clasificación de ángulos.	Ángulos asociados con una línea que corta un par de líneas paralelas; ángulos verticales, etc.

Figura 2.9. Las características de educación geométrica en primaria de los años '70 en Catalunya y Kosova

A continuación mostramos las características diferenciales entre las instituciones, acceso, duración y materias de formación de profesores de Primaria en matemáticas en Catalunya y Kosova (Tabla 2.10).

Formación docente	Catalunya-España 1970 ~ 1990	Kosovo-Yugoslavia 1974 ~ 1999
Instituciones	Universidades - Escuelas de de formación de profesorado.	Universidades - Escuelas universitarios (Shkolla e Lartë Pedagogjike)
Acceso	Con 19 años. Prueba selectividad con prueba específica de matemáticas. Acceso por Formación Profesional de Jardín de Infancia	Con 19 años. Prueba selectividad especifica de matemáticas organizada por el centro de formación docente.
Duración	3 Años	2 años
Materias comunes sobre Matemáticas para Primaria	*Didáctica de la Matemática I y II* ca. 13,5 – 15 créditos	*Matemática* general y *Metódica de las matemáticas* que fueron 11% de las horas totales de formación.
Características	Formación docente pasa en estudios universitarios, Aparece el Área de Didáctica de las matemáticas,	Formación docente pasa en estudios universitarios Se esfuerza formación matemática en visión formalista respecto a las Escuelas Normales

Tabla 2.10. Las características diferenciales entre los currículos de formación de profesores de Primaria en matemáticas de los años 70

A continuación mostramos las diferencias y semejanzas entre las características de la educación de los años ‘90 en Catalunya y de los años pas’99 de Kosova (Tabla 2.11).

Educación matemática de Primaria		
	Catalunya – España ’90 →	*Kosova ‘99 →*
Tipo de subdivisión del sistema educativa.	4-5 h semanales 6-12 años – con un profesor para todas las asignaturas	5h o más horas semanales 6-11 años - con un único profesor para todas asignaturas

Concepción sobre educación Primaria	Formación para la ciudadanía. La finalidad de educación primaria se considera la de proporcionar a todos los niños una educación común que haga posible la adquisición de los elementos básicos culturales, de la expresión oral, a la escritura y el cálculo así como una progresiva autonomía de acción en su medio.	Educación no es solo enseñanza que permite que los alumnos conozcan su entorno mejor, sino y formación de los ciudadanos en el desarrollo de las capacidades, actitudes y valores con el fin de aplicarlas en la sociedad.
Bases del currículo matemática Idea sobre matemática	Visión constructivista La importancia de visualización	*Las matemáticas como medio de conocer con preciosidad el mundo donde vivimos.* *Utilizando las matemáticas podemos solucionar problemas naturales y sociales con facilidad.*
Concepción sobre matemáticas escolares	La enseñanza de las matemáticas contribuye en desarrollo de la capacidad del pensamiento y de reflexión lógica. La enseñanza de las matemáticas contribuye en adquisición de un conjunto de instrumentos para explorar la realidad.	Enseñando las matemáticas a los alumnos de primaria, ellos desarrollan las capacidades de clasificar, organizar, y procesar características del mundo en el nivel abstracto, utilizando símbolos y operaciones matemáticas. Los alumnos desarrollan también la capacidad de convertir la lengua natural en la lengua simbólica (matemática) y viceversa, utilizando las propiedades del pensamiento lógico.
Papel del docente	El maestro como mediator del proceso de aprendizaje y no como transmitor del conocimiento.	Maestro motivador La tarea del profesorado es la de favorecer el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos.
Papel de los contenidos geométricos	El conocimiento y la representación de formas geométricas ofrecen una interpretación del entorno físico que es útil en la resolución de problemas, en utilización de ideas geométricas en las descripciones de diferentes situaciones y para la comunicación de informaciones.	Desarrollar la capacidad de identificar la situación de un objeto en el espacio Desarrollar la capacidad de identificar el fenómeno de movimiento como transformación geométrica Desarrollo de la capacidad de identificar las formas en el espacio y relacionar con las formas geométricas bidimensionales y tridimensionales.
Formación docente	El maestro de enseñanza imparte todas materias de educación primaria. Maestro como un profesional capaz de analizar el contexto en que se desarrolla la actividad y de planificarla, y de combinar la comprensibilidad de una enseñanza para todos.	El maestro de enseñanza imparte todas materias de educación primaria. La misión de formación docente es formativa destinado a cultivar y practicar el razonamiento lógico.

Tabla 2.11. Características de la educación matemática de los años '90 en Catalunya y post '99 de Kosova

Mediante la tabla 2.12 mostramos las características distinguidas de la educación geométrica en primaria, teniendo en cuenta lo que se indica en las Orientaciones Curriculares.

Sobre el contenido geométrico	Catalunya ’90 →	Kosovo ’99 →
Orientación en espacio	Desarrollar la capacidad para interpretar una representación espacial. Interpretar en un croquis un itinerario tomando como referencia elementos familiares. Definir la situación de un objeto en el espacio.	Desarrollo de la capacitad del alumno de identificar la situación de un objeto en el espacio y de un desplazamiento.
Formas geométricas en el espacio	Reconocimiento de cuerpos y formas geométricas: Esfera, cubo, cilindro, círculo, rectángulo, triángulo. Desarrollar la capacidad para clasificar formas y cuerpos geométricos dando razones del modo de clasificación.	Capacitar a los alumnos para reconocer objetos del entorno identificando las formas correspondientes geométricas.
Movimientos	Desarrollar la capacidad para utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana: Usar las nociones de paralelismo y perpendicularidad. Usar la noción de simetría.	Desarrollo de las nociones geométricas de simetría, giro, traslaciones, paralelismo y perpendicularidad.
Figuras geométricas en el plano	Desarrollar la capacidad para clasificar formas y cuerpos geométricos dando razones del modo de clasificación: Clasificar formas geométricas según algún criterio	Capacitar a los alumnos para reconocer objetos del entorno identificando las formas correspondientes geométricas
Los instrumentos de dibujo	Manejar y utilizar los instrumentos y la TIC en las construcciones geométricas.	Manejar y utilizar los diferentes instrumentos de dibujo incluso TIC

2.12. Las características de educación geométrica en primaria de los años ’90 en Catalunya y de los años post’99 en Kosova

Con la última tabla 2.13 mostramos las características diferenciales entre los currículos de formación de profesores de Primaria en matemáticas tal como se presentan vigentes en ambos países.

Formación docente	Catalunya '90 →	Kosovo '99 →
Instituciones	Universidades. Facultad de Formación de profesores o Facultad de Educación.	Universidad. Facultad de Educación
Acceso	Con 19 años. Prueba selectividad con prueba específica de matemáticas. Acceso por Formación Profesional de Jardín de Infancia	Con 19 años. Prueba selectividad con prueba específica de matemáticas y lengua.
Duración	3 Años	4 años
Materias comunes sobre Matemáticas para Primaria	• La didáctica de la matemáticas I • La didáctica de la matemáticas II ca. 12 – 15 créditos (7,8 % de un total de 190 créditos) con 150 horas lectivas.	• Matemática elemental I y II • Matemática I y II • Metodología de formación de los conceptos matemáticos 225 horas lectivas (12 % del número total de clases)
Características	Creación de las Facultades de formación de futuros profesores de primaria (FFP, FCE o FE). Mantenimiento de misma duración de estudios. No hay cambios radicales en las asignaturas sobre formación matemática de fututos profesores Se avance tratamiento de formación didáctica de la matemática.	Creación de la nueva Facultad de Educación Crecimiento de cursos de formación de futuros profesores de primaria Crecimiento de asignaturas sobre la formación matemática de futuros profesores No se introducen novedades sobre la problemática de enseñanza y aprendizaje matemático.

Tabla 2.13. Las características diferenciales entre los currículos de formación de profesores de Primaria en matemáticas de los años 90 y post '99 respectivamente

2.3. Las transformaciones geométricas en los currículos escolares

En las publicaciones del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), *Principles and Standards for School Mathematics (PSSM),* el énfasis sobre la geometría ha sido acentuado para todos los niveles de instrucción. Aunque la geometría haya sido tradicionalmente una tarea en los currículos de matemáticas para niveles más altos de educación, se da poca geometría en las clases de primaria (Clements y Batista, 1992), requiriéndose una geometría de carácter experimental e intuitivo y aún menos transformaciones geométricas (Svoboda 1999). La necesidad de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar responde, en primer lugar, al papel que la geometría desempeña en la vida cotidiana. Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimaciones sobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio.

La geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras sociedades actuales (producción industrial, diseño, arquitectura, topografía, etc...). El NCTM recomienda empezar a enseñar las transformaciones en los primeros años de primaria. Los niños desarrollan las capacidades de visualización a través de diferentes experiencias con varios objetos geométricos que les permitirán girarlas, doblarlas,… (NCTM, 2000). Desde tercero hasta quinto grado, los niños investigaran los efectos de las transformaciones y empezarán a describirlas en términos matemáticos (NCTM, 2000 p.43). La forma geométrica es también un componente esencial del arte, de las artes plásticas, y representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza.

Pero, ¿cuál es la situación correspondiente en los currículos oficiales de Catalunya y el del nuevo Currículo de Kosova?

A continuación mediante la Tabla 2.14, presentamos los estándares específicos sobre transformaciones geométricas para educación primaria de los currículos de Catalunya, de Kosova y el NCTM.

Transformaciones geométricas en currículo de primaria			
	Catalunya (1992)	**Kosova (2002)**	**NCTM (2000)**
Educación infantil		-Identificar los objetos simétricos	- Reconocer y aplicar simetrías verticales, horizontales y giros - Reconocer y crear figuras que tienen simetrías
Educación Primaria - Grado 1 y 2	- *Identificar figures geomètriques a partir de models o objectes.* - *Comprendre que es veuen diferent segons el punt de vista que les mirem.* - *Transformar figures geomètricass de forma manipulativa i identificar la transformación que relaciona dues figures donades.* - Realitzar transformacions amb figures geomètriques més complexes. - Us progressiu de més vocabulari geomètric per fer les descripcions dels eixos de simetria, noció d'angle, relacions de paral·lelisme i perpendicularitat.	- Diferenciar los objetos y figuras simétricas de las no-simétricas. - Capacitar de establecer relaciones entre dos figuras simétricas, y dos figuras isométricas. - Capacitar de establecer relaciones entre dos figuras simétricas, y dos figuras isométricas. - Construir la figura congruente con la figura dada en relación de simetría, rotación y traslación.	- Reconocer y hacer cortes, vueltas y giros - Reconocer y hacer formas que tengan simetrías - Predecir y describir los resultados de los cortes, vueltas y giros en formas de dos dimensiones; - Describir un movimiento o serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes - Identificar y describir eje y ángulo de rotación en simetrías de formas de dos y tres dimensiones - Aplique transformaciones y use simetrías para analizar situaciones matemáticas.
Educación primaria - Grados 3-5	- Identificar figures amb eix de simetria. - Composición y descomposición de figuras. Reconocer giros, y realizar sombras, simetrías y giros. - Reconocer giros, i simetrias complexes. - Reconèixer l'objecte que ha generat una ombra determinada. - *Transformar figures geomètriques i identificar la transformació que relaciona dues figures donades.*	- Reconocer, describir, clasificar, nombrar y definir diferentes cambios de posiciones de figuras. - Identificar y clasificar la transformación que una figura transforma en la otra. - Construir la figura congruente con la figura dada en relación de simetría, rotación y traslación. - Construcción de mediatriz, bisectrices, y regularidades de figuras a partir de simetrías.	- Predecir y describir los resultados de los cortes, vueltas y giros en formas de dos dimensiones - Describir un movimiento o serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes - Identificar y describir eje y ángulo de rotación en simetrías de formas de dos y tres dimensiones - Identificar y construir la representación plana de un objeto a partir de la representación tridimensional del objeto. - Identificar y construir objetos tridimensionales a partir de la representación plana del objeto - Explorar semejanza y congruencia; - Describir ubicaciones y movimientos usando lenguaje común y vocabulario geométrico

Tabla 2.14. Contenidos curriculares sobre transformaciones geométricas en Primaria

La enseñanza de las transformaciones geométricas es acentuada en todos los currículos de educación primaria actual. Se considera el trabajo con las transformaciones isométricas (simetrías, rotación y traslación). El NCTM además isometrías plantea y "*Explorar semejanza y congruencia",* mientras que la transformación proyectiva aparece en la "*construir la representación plana de un objeto a partir de la representación tridimensional del objeto*" (NCTM). Comprender que "*una figura se ve diferente según el punto de vista que lo miramos" (*Catalunya) es la interpretación de proyección de carácter experimental, *intuitivo*.

Mediante la tabla 2.15., presentamos los resultados de análisis del currículo catalán y kosovar sobre:

- la idea estática de transformación geométrica como objeto de enseñanza/aprendizaje de los currículos (*Sobre el objeto transformación, terminología y tipos de transformaciones*).
- la visión general y global de las relaciones existentes entre las tres isometrías o entre proyecciones e isometrías (*Sobre las relaciones y jerarquías en la noción de transformación*).
- la transformación como una operación u operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada (*Sobre transformación como proceso o cambio*),
- el razonamiento en el proceso de creación del concepto de transformación geométrica, o la capacidad de demostrar la verdad de conclusiones como derivación *necesaria* de premisas (*Sobre comunicación y razonamiento con transformaciones*).
- el uso del contexto en la construcción del significado de transformación. (*Sobre elementos culturales e históricos en transformaciones)*

En la 2.15 mostramos la comparación entre contenido curricular de Catalunya y Kosova sobre transformaciones geométricas.

Transformaciones geométricas	Catalunya	Kosova
Sobre el objeto transformación, terminología y tipos de transformaciones (en el plano)	Simetría, giros, sombras Identificar figures amb eix de simetria Comprender que la figura se ve diferente según el punto de vista que la miramos. Identificar la transformación que relaciona dos figuras dadas.	Simetría, rotación, traslación Diferenciar figuras simétricas de las no simétricas Establecer relaciones entre dos figuras isométricas Reconocer, nombrar y definir diferentes cambios de posiciones de figuras.
Sobre las relaciones y jerarquías en la noción de transformación	Composición y descomposición de figuras Reconocer giros y simetrías complexos. Identificar la transformación que relaciona dos figuras dadas.	Establecer relaciones entre dos figuras simétricas y isométricas Construir la figura congruente con la figura dada en relación de simetría, rotación y traslación.
Sobre transformación como proceso o cambio	Realizar transformaciones de figuras geométricas de forma manipulativa Reconèixer l'objecte que ha generat una ombra determinada.	Reconocer, describir, clasificar, nombrar y definir diferentes cambios de posiciones de figura Construcción de mediatriz y bisectriz Construir la figura congruente con la figura dada.
Sobre comunicación y razonamiento con transformaciones	Comprender que la figura se ve diferente según el punto de vista que la miramos. Reconocer giros y simetrías complexos.	Regularidades de figuras a partir de simetrías Describir, nombrar y definir cambios de posiciones de figura.
Sobre elementos culturales e históricos en transformaciones	Identificar figuras geométricas a partir de modelos.	Diferenciar los objetos y figuras simétricas de las no simétricas

Figura 2.15. Análisis comparativo de los currículos de Catalunya y Kosova sobre transformaciones geométricas

Son numerosas las publicaciones dedicadas a la capacidad de visualización espacial, analizadas desde una perspectiva psicológica, como Denis (1989) y Kosslyn (1980), desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, como Bishop (1989), Clements (1982), Zimmermann y Cunningham (1991), Gutiérrez (1998), etc. La capacidad de visualización es considerada hoy uno de los elementos clave del problema de representaciones de las formas tridimensionales. Hay unas investigaciones internacionales sobre visualización que están incorporadas parcialmente en el currículo español pero no en el currículo de Kosova. También, Gutiérrez, (1998) ha resaltado la importancia de las representaciones planas en el aprendizaje matemático.

El conocimiento y la representación de formas geométricas ofrece una interpretación del entorno físico que es útil en la resolución de problemas y en la "*utilización de ideas geométricas para describir situaciones y para comunicar informaciones*" (Currículo de Catalunya). A continuación se destaca la importancia de la visualización: "*Es importante adquirir la capacidad de visualizar mentalmente las formas y descubrir las propiedades y relaciones geométricas*". Los contextos más convenientes son la propia realidad, desde objetos físicos hasta paisajes y otro entorno. Los materiales manipulativos juegan un papel importante en el proceso de aprender geometria, porque "*el uso de materiales manipulativos y de todo tipo de representaciones de figuras geométricas se considera que hace posible la abstracción de relaciones geométricas*" (Currículo de Catalunya). Un aspecto importante del currículo Catalán es que a diferencia del currículo central (Español) y de currículo Kosovar, impone enseñar las proyecciones (sombras): "*Reconèixer l'objecte que ha generat una ombra determinada*".

Uno de las novedades del NCK (2002) comparando con el antiguo currículo, es que "*mediante aprendizaje geométrico, se posibilita el desarrollo de las capacidades de los alumnos en clasificación, organización y elaboración de las características del mundo real en nivel abstracto utilizando símbolos y conceptos geométricos*" (NCK, pp.176). Luego en el plan de estudio de matemáticas para educación primaria se destaca que: "*los alumnos deben capacitar de identificar propiedad simétrica de diferentes objetos reales, capacitar de construir la figura simétrica al figura dada, identificar el eje y la propiedades del misma distancia*".

En educación primaria, se ha fomentado excesivamente el aprendizaje memorístico de conceptos, teoremas y fórmulas; la simple apoyatura de unos conceptos en otros previos; y la temprana eliminación de la intuición como instrumento de acceso al conocimiento geométrico, tratando de acelerar la adquisición de tales conceptos, teoremas y fórmulas, como si en ellas estuviera condensado el verdadero saber geométrico. Las investigaciones (Burger &Shaughnessy, 1986; Geddes & Tischler, 1988; van Hiele, 1986) sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico parecen indicar, no obstante, que éste sigue una evolución muy lenta desde unas formas intuitivas iníciales de pensamiento, hasta las formas deductivas finales. Ya que nosotros apoyamos la idea de que en Educación Primaria hay que escapar de las interpretaciones *deductivistas* e ir a una geometría de carácter experimental, manipulativo e *intuitivo*. El espacio del niño está lleno de elementos geométricos, con significado concreto para él: puertas, ventanas, mesas, bordados, pelotas, etc. En su entorno cotidiano, en su barrio, en su casa, en su colegio, en sus espacios de juego, aprende a organizar mentalmente el espacio que le rodea, a orientarse en el espacio. Otro aspecto importante del pensamiento geométrico es la visualización espacial: construcción y manipulación de las representaciones mentales de objetos dos - y tres - dimensionales y reconocer un objeto transformado desde diferentes perspectivas. Los niños vienen a la escuela con intuiciones no solo sobre las formas, sino también sobre cómo las formas podrían moverse (NCTM, 2000).

Pensamos que las matemáticas funcionan como una herramienta para la solución de problemas en el mundo real, y esta función desempeñó un papel dominante en la evolución histórica de las matemáticas. Esta percepción promueve cambios en la orientación de su aprendizaje. Así, en las orientaciones curriculares de los últimos años, surge el énfasis en las estrategias de resolución y el planteamiento de problemas abiertos, se incluyen como contenidos matemáticos procesales tales como comunicar ideas matemáticas oralmente y por escrito, establecer conexiones y relaciones, razonar inductivamente y deductivamente, etc. En otras palabras, 'saber' matemáticas pasa a entenderse no como una acumulación de hechos y procedimientos, sino como la capacidad de 'hacer' matemáticas, es decir, usar flexiblemente herramientas matemáticas que la humanidad ha creado a lo largo de la historia para resolver problemas y que son especificas de lugares diferentes. Nuestra concepción de lo que es saber matemáticas consiste en centrar la atención no solo en los contenidos matemáticos formales, sino también en la capacidad de pensar matemáticamente, de generar y crear procesos no canónicos para resolver problemas, justo como lo hicieron aquellos que fueron inventando las matemáticas que hoy nos presentamos.

2.4. Las transformaciones geométricas en los libros de texto de primaria en Catalunya y Kosova

Para la mayoría de los docentes de matemáticas, el libro de texto es su guía primaria en implementación del currículo. Por consiguiente, nosotros empezamos la evaluación de los contenidos sobre las transformaciones geométricas en los libros de texto de matemáticas con las proposiciones siguientes:

- Qué tipo de transformaciones aparecen en los libros de texto de primaria, y
- Cuál es la imagen del concepto de transformación que se desprende en los libros de texto de primaria.

Para ello se decide escoger un texto que durante cierto tiempo ha tenido sólo una edición catalana, el "***Text - la Galera***". Es diferente en Kosova. El Ministerio de Educación de Kosova (MASHT) elige el editor de los libros de textos que han de utilizar las escuelas públicas. Durante los últimos años, los libros de texto del editor "***Dukagjini***" fueron elegidas para la asignatura de matemáticas en las escuelas de primaria, y por esta razón nosotros consideramos estos libros como referencia para el contexto kosovar.

Según el currículo oficial catalán, el número de actividades de matemáticas no es determinado y es el maestro quien se ocupa para planificar y desarrollar las actividades y clases según condiciones y otras circunstancias para cada asignatura. Así que no hay un número determinado a priori de clases dedicadas a matemáticas que se hacen en la escuela. Dentro de estas clases se desarrollan y clases de geometría con unos actividades dedicadas a transformaciones geométricas.

En el currículo oficial de Kosova (NCK, 2002), para el primer ciclo de Primaria se planifican un total de 185 clases de matemáticas. Los contenidos geométricos ocupan un 27 hasta un 32% de las clases incluyendo clases para enseñanza de transformaciones geométricas.

En la figuras 2.16 y 2.17, presentamos ejemplos de tareas sobre transformaciones geométricas en los libros de texto de Catalunya y Kosova.

Mediante la tabla 2.17., comparamos las actividades de libros de texto de primer ciclo que tratan de transformaciones.

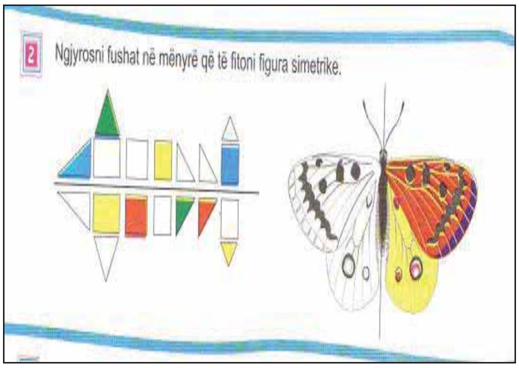
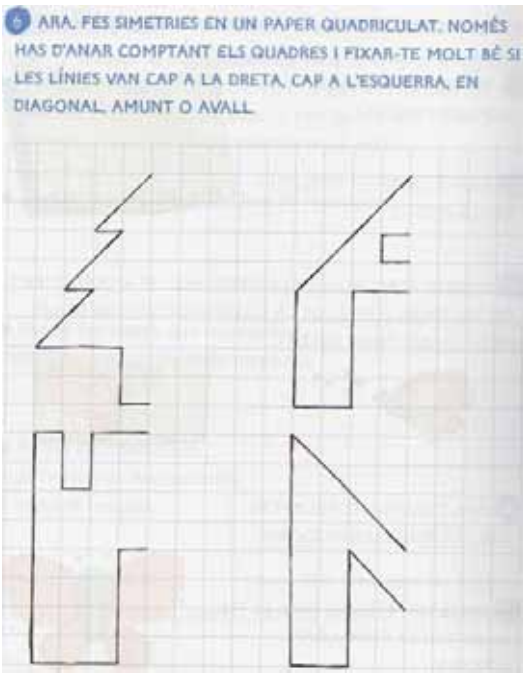
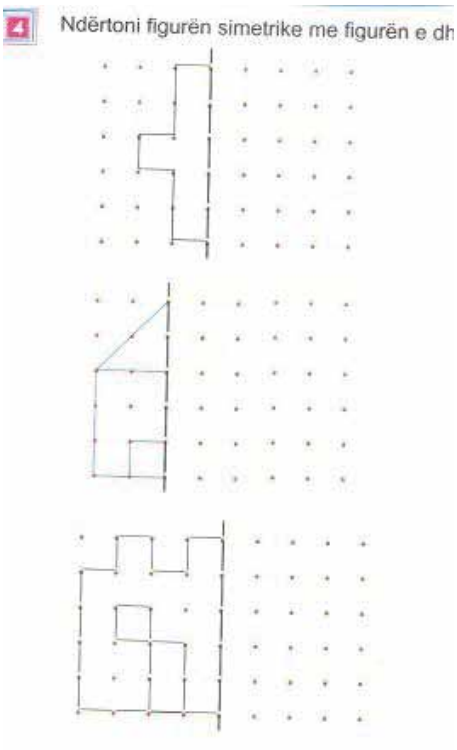
Catalunya	Kosova
Libro de texto: Matematiques 2, Ciclo Inicial, Editorial: “***Text - la Galera”, 2007***	Libro de texto: Matmetaika, 2, Editorial ”**Dukagjini”**, **2004**
Página 68, / **Actividad 1**/ “*1. Necessites un full de paper i pintura* *2. Agafa un full i doblega’l per la meitat* *3. Obre el full, mulla’t la punta del dit amb pintura i fes un dibuix com el de la il·lustració en una de les meitats que t’han quedat.* *4. ara, doblega el full fent que les puntes coincideixin* *5. Prem una estona, obre el full i .. ja tens la papallona!* “  	Pag. 35 /**Actividad 1’/** Simetría y eje de simetría “*pintar partes de figuras para obtener las figuras simétricas”* 

Figura 2.16. Ejemplo 1 de página de los libros de Ciclo Inicial de Primaria que se observan.

A partir de lo observado, podemos constatar el siguiente resultado.

Resultado 2.1*. En los libros de primer ciclo, se identifica fundamentalmente el objeto simetría en ambos países, aunque nunca se alude a la simetría explícitamente como transformación. La principal diferencia es que en el texto catalán se inicia el trabajo con el uso de un recurso manipulativo como el doblado de papel, insistiendo al* *estudiante el cuidado en las acciones (procesos). En cambio, en el libro kosovar, se acentúa el hecho de "construir el simétrico", insistiendo en la relación parte-todo respecto la figura obtenida. Parece pues que se desea distinguir entre construir y transformar. En los materiales kosovares se analizan inmediatamente propiedades, y en cambio en Catalunya se reconocen procesos. No se establecen jerarquías conceptuales, en el sentido de mostrar que hay "otras transformaciones" distintas a la simetría, como tampoco se hace explícito la "no simetría". En ambos casos se alude al papel cuadriculado como forma más simple de ejecución. En ambos países se privilegia los contextos de acción por encima de la observación de lo real-social.*

<table>
<tr>
<td>
Página 68, /Actividad 2/
"Ara fes simetries en un paper quadriculat, nomes has d'anar <u>comptant els quadres</u> i fixar-te molt bé si les <u>linies van cap a la dreta</u>, cap a l'esquerra, en diagonal, amunt o avall"


</td>
<td>
Página 36: / Actividad 2'/
"<u>hacer</u> (construir) las figuras simétricas respecto a las figuras dadas"


</td>
</tr>
</table>

Figura 2.17. Ejemplo 2 de páginas de los libros de Ciclo Inicial de Primaria que se han observado

Para ver nuestras constataciones, observemos a continuación en la tabla 2.18 el detalle correspondiente a los ejemplos mostrados.

Análisis de las actividades en los libros de texto del Primer Ciclo

Análisis sobre:	Catalunya (edit:"Text-la Galera")	Kosova (edit:"Dukagjini")
El objeto transformación terminología y tipos de transformaciones (en el plano)	**Actividad 1.** Pintando la figura dibujada en la mitad de papel doblado, se quiere identificar el patrón de repetición de simetría. La discriminación de propiedad "doblar para que se coinciden las partes" en la acción de doblar es típico para la transformación simétrica. Con esta actividad se plantea el reconocimiento de simetría como movimiento (doblado) - tamaño y forma se conserven (son iguales), y/o como desplazamiento físico. Con la condición de "coincidir" se pide que la distancia de la figura y su imagen respecto al eje sean iguales. Al final de la acción de dibujar, pintar y doblar se quiere encontrar el eje de simetría de la figura de mariposa. **Actividad 2.** Reconocer que la distancia de la figura y su imagen respecto al eje son iguales. Reconocer el cambio de la orientación de la figura respecto al eje. Descubrir los elementos constituyentes de una figura Indicar perpendicularidad y equidistancia respecto del eje de simetría Identifica que segmentos que unen puntos simétricos son paralelos	**Actividad 1'.** Con esa actividad se hace reconocimiento de la simetría a partir de un conocimiento anterior sobre mariposa que deben de tener los alumnos "*pintar para que sea simétrica*..." Pintando la otra mitad de la figura de la mariposa (y de la forma del pez), se quiere identificar el patrón de repetición de simetría. La discriminación de propiedad "misma color de las partes correspondientes" en la acción de completar el dibujo con el proceso de pintar es típico para la transformación simétrica. Con esta actividad se plantea el reconocimiento de simetría como equivalencia (los partes de una mitad correspondientes con las partes de otra mitad deben tener la misma color y mismo tamaño) - tamaño y forma se conserven (son iguales). Con la condición de "equivalente – lo mismo" se pide que la distancia de la parte pintada en una mitad y su parte correspondiente en otra respecto al eje sean iguales. Al final de la acción de pintar se quiere conseguir la figura simétrica de la figura de mariposa y del pez. En mismo tiempo se puede identificar el eje de simetría, y la propiedad de equidistancia de las partes correspondientes al eje de simetría. **Actividad 2'.** Reconocer que la distancia de la figura y su imagen respecto al eje son iguales. Reconocer el cambio de la orientación de la figura respecto al eje. Descubrir los elementos constituyentes de una figura Indicar perpendicularidad y equidistancia respecto del eje de simetría Identifica que segmentos que unen puntos simétricos son paralelos.

Las relaciones propiedades y jerarquías en la noción de transformación	**Actividad 1**. Con esta actividad los alumnos tienen la posibilidad de: descubrir características visuales de simetría. Identificar la equivalencia entre la figura y su imagen simétrico Identificar el concepto *invariante* de simetría (el tamaño y la forma) Identificar el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identificar equidistancia respecto al eje como propiedad Identificar la parte que se repite, en relación al patrón (la figura dibujada en una mitad del papel). **Actividad 2.** Descubrir y emplear características visuales de simetría. Identificar equivalencia entre la figura y su imagen isométrico Identifica el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identifica equidistancia respecto al eje como propiedad	**Actividad 1'** Descubrir las características visuales entre dos partes de una figura simétrica. Identificar la equivalencia entre partes simétricos de una mitad con los partes de otra mitad de la figura simétrica Identificar el concepto *equivalente* (de color, de posición y de forma) de simetría. Identificar la posición de las partes correspondientes respecto al eje de simetría de la orientación opuesta. Identificar equidistancia respecto al eje como propiedad Identificar la repetición como propiedad de simetría. Realización de simetría con diferentes posiciones de los ejes y figuras. **Actividad 2'** Descubrir y emplear características visuales de simetría. Identificar equivalencia entre la figura y su imagen isométrico Identifica el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Y equidistancia respecto al eje como propiedad.
Transformación como proceso o cambio	**Actividad 1.** Desarrollando esta actividad la transformación simétrica se realiza utilizando doblado, La simetría se entiende como un proceso de aplicación de un semiplano en otro. Y se entiende como aplicación de una mitad de la figura en otra mitad. **Actividad 2.** Realizar correctamente el proceso de transformación simétrica, como desplazamiento "…*comptant els quadres i fixar-te molt bé si les linies van cap a la dreta, cap a l'esquerra, en diagonal, amunt o avall"*. Observa equidistancia como invariancia de transformación simétrica. Realizar simetrías con mismas posiciones de los ejes y de las figuras. En el libro de texto parece la descripción del proceso de transformación.	**Actividad 1'** Realizar la transformación simétrica utilizando equivalencia entre partes (figuras) simétricas. Entender la simetría como un proceso de establecimiento de la correspondencia entre las figuras (partes de mismo color y tamaño) de la figura simétrica. La simetría se entiende como correspondencia de una mitad de la figura en otra mitad con orientación opuesta. **Actividad 2'** Realizar correctamente el proceso de transformación simétrica de las figuras dadas "…*hacer (construir) las figuras simétricas respecto a las figuras dadas"* sin especificar el proceso. Observar equidistancia como invariancia de transformación simétrica. Realizar simetrías con mismas posiciones de los ejes y de las figuras. En el libro de texto no aparece la descripción del proceso de transformación.

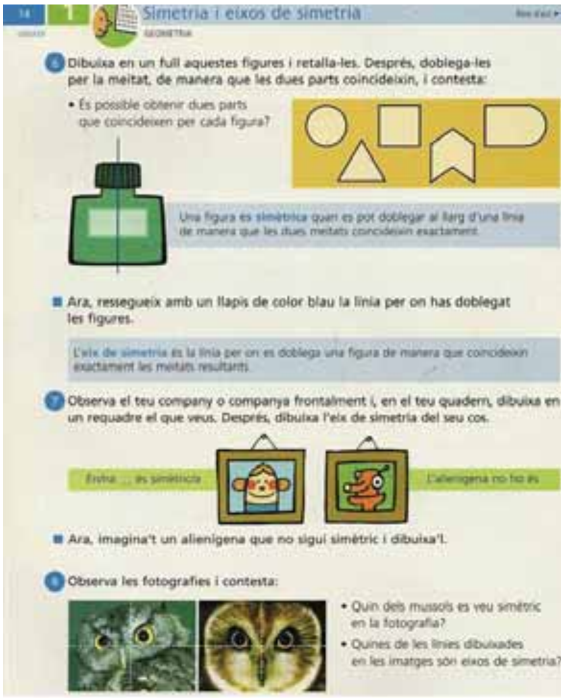
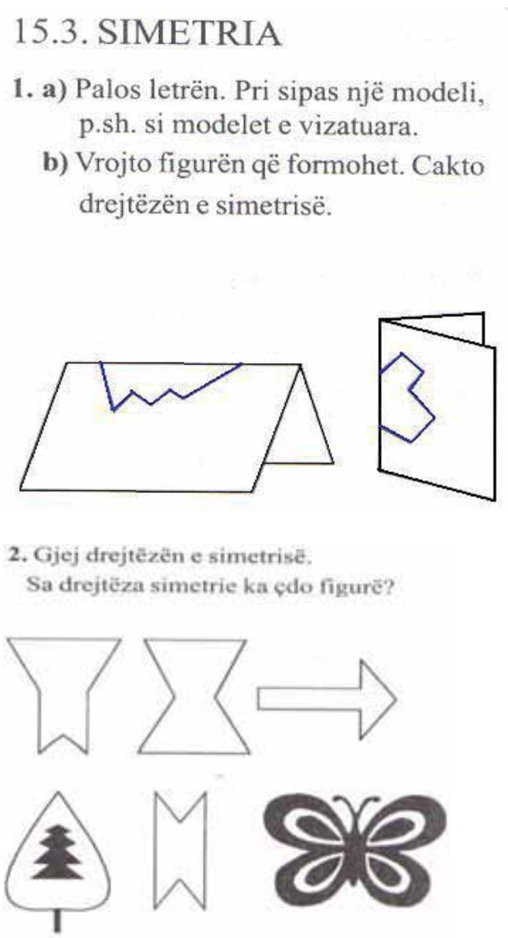
Comunicación y razonamiento con transformaciones	**Actividad 1.** Los pasos del desarrollo de la actividad se han explicado en detalle. Los alumnos puedan desarrollar la actividad siguiendo las descripciones presentados en el libro de texto. La actividad se basa en la descripción de fenómeno de doblado. Hay visualización del fenómeno de doblar con los dibujos (figuras) para cada paso de la actividad. Hay interpretación de la realización de transformación simétrica mediante el doblado como método informal. La comunicación, interpretación y demostración del fenómeno se basa en las preguntas planteadas en el libro de texto. El desarrollo de la capacidad del alumno en comunicación y razonamiento se hace en los intentos de responder a las preguntas planteadas. **Actividad 2.** Hay visualización del fenómeno de transformación simétrica como desplazamiento de puntos. Identificar y explicar características visuales de desplazamiento de los puntos. Identificar y explicar características visuales de las simetrías. Interpretar la realización de transformación simétrica mediante desplazamientos de puntos. Utilización y aplicación de simetrías mediante las coordenadas.	**Actividad 1'.** No parece la descripción del proceso de transformación. Se pide *"pintar partes de figuras para obtener las figuras simétricas"* Para realizar la actividad, los alumnos tienen que saber que es el concepto de *"figura simétrica".* No hay la descripción de los pasos del desarrollo de la actividad. Para realización de la actividad, es necesario la interacción entre alumno-alumno, alumno – maestro, para comprender el proceso y para corregir errores eventuales. Hay interpretación de la propiedad simétrica mediante "pintura" de las partes no pintadas como método informal. La comunicación, interpretación y demostración del fenómeno se basa en las preguntas planteadas en el libro de texto. El desarrollo de la capacidad del alumno en razonamiento se hace en los comentarios de la figura lograda después de pintura. No hay pautas de hacer un discurso de discusión sobre las características de la simetría y propiedad simétrica de las figuras. **Actividad 2'.** Hay visualización del fenómeno de transformación simétrica como desplazamiento de puntos. Identificar y explicar características visuales de desplazamiento de los puntos. Identificar y explicar características visuales de las simetrías. Interpretar la realización de transformación simétrica mediante desplazamientos de puntos. Utilización y aplicación de simetrías mediante las coordenadas. Las indicaciones sobre la comunicación y razonamiento sobre transformaciones no aparecen explícitamente en los ejemplos del libro. Parece que el desarrollo de comunicación y razonamiento se plantea como deber del maestro.

Elementos culturales e históricos en transformaciones	**Actividad 1.** Doblado el papel, y otras cosas es una situación de la vida cotidiana. Con esa actividad se hace reconocimiento de la simetría a partir de la situación cotidiana Hay un contexto relacionado con lo próximo. Hay contextualización del concepto de simetría mediante la utilización de la forma natural de la mariposa, y el fenómeno de doblado. **Actividad 2.** Usa términos matemáticos adecuados a los elementos culturales (*comptant els quadres, i fixar-te molt bé, les línies van cap a la dret).* Uso de papel e instrumentos Papel cuadriculado.	**Actividad 1'** El color como elemento de "equivalencia entre partes simétricos". Hay predominio de contextos relacionados con fenómeno, más que los históricos-culturales Hay indicios de contextualización mediante ejemplos de mariposa y pez como figuras simétricas. Utilización de figuras geométricas abstractas, ilustraciones con la mariposa **Actividad 2'**. Uso de términos matemáticos – *hacer (construir) lo simétrico.* Uso de papel e instrumentos Uso de trama de puntos.

Tabla 2.18. Las transformaciones geométricas en los libros de textos de Primer Ciclo

A continuación en la figura 2.19, mostramos actividades sobre transformaciones en los libros de texto de **Segundo Ciclo** de Primaria de ambos países, para reconocer sus diferencias principales. Como se podrá ver, los contextos reales son más presentes en la publicación catalana, que utiliza un lenguaje más coloquial en muchas actividades. La búsqueda de ejes de simetría es el elemento común más evidente. Como se observará, en el texto catalán hay un mayor énfasis en aspectos que relacionan el contenido con la realidad.

Catalunya	Kosova
Libro de texto: L'ARCA Matematiques 3, y Matematiques 4 Cicle Mitja, Editorial: "***Text - la Galera", 2005***	Libro de texto: Matmetaika, 3, Matematika 4 Editorial "**Dukagjini**", **2004**

Página 14, Matematiques 3, / Actividad 3/ $\boxed{6}$. *"Dibuixa en un full aquestes figures i retalla-les. Després, doblega-les per la meitat, de manera que les partes coincideixin, i contesta:* • *És possible obtenir dues parts que coincideixen per cada figura?* *Una figura es simètrica quan es pot doblegar al llarg d'una línia de manera que les dues meitats coincideixin exactament.* ▪ *Ara, ressegueix amb un llapis de color blau la línia on has doblegat les figures.* *L'eix de simetria es la línia per on es doblega una figura de manera que coincideixin exactament les meitats resultants.* $\boxed{7}$. *Observa el teu company o companya frontalment i, en el teu quadern, dibuixa en un requadre el que veus. Després, dibuixa l'eix de simetria del seu cos.* ▪ *Ara, imagina't un alienígena que no sigui simètric i dibuixa'l.* $\boxed{8}$. *Observa les fotografies i contesta:* • *Quin dels mussols es veu simètric en la fotografia?* • *Quines de les línies dibuixades en les imatges son eixos de simetria?*  Simetria i eixos de simetria Dibuixa en un full aquestes figures i retalla-les. Després, doblega-les per la meitat, de manera que les dues parts coincideixin, i contesta: • És possible obtenir dues parts que coincideixen per cada figura? Una figura és simètrica quan es pot doblegar al llarg d'una línia de manera que les dues meitats coincideixin exactament. ▪ Ara, ressegueix amb un llapis de color blau la línia per on has doblegat les figures. L'eix de simetria és la línia per on es doblega una figura de manera que coincideixin exactament les meitats resultants. Observa el teu company o companya frontalment i, en el teu quadern, dibuixa en un requadre el que veus. Després, dibuixa l'eix de simetria del seu cos. ▪ Ara, imagina't un alienígena que no sigui simètric i dibuixa'l. Observa les fotografies i contesta: • Quin dels mussols es veu simètric en la fotografia? • Quines de les línies dibuixades en les imatges són eixos de simetria?	Pag. 35 (matematika 3/Actividad 3'/ ***Simetria*** $\boxed{1}$ *a) Doblar el papel. Sigue los modelos dibujados más abajo.* *b) Observa la figura formada. Encuentre el eje de simetría.* $\boxed{2}$. *Encuentra el eje de simetría.* *¿Cuánto ejes de simetría hay en cada figura?*  15.3. SIMETRIA **1. a)** Palos letrën. Pri sipas një modeli, p.sh. si modelet e vizatuara. **b)** Vrojto figurën që formohet. Cakto drejtëzën e simetrisë. **2.** Gjej drejtëzën e simetrisë. Sa drejtëza simetrie ka çdo figurë?
Página 110,(Matematiques 4) /Actividad 4/ **Plànols i mapes** $\boxed{3}$ *Compara la foto i el plànol:* • *Amb quin nombre està marcada l'església en el plànol?* • *Què representa la zona verda marcada amb un 3?* ▪ *Finalment, relaciona cada nombre del plànol amb la lletra corresponent de la foto.*	Página 58, (matematika 4) /Actividad 4'/ $\boxed{3}$. *Dibuja el eje de simetría que transforma una figura a otra*

Els mapes i els plànols són representacions dels diversos elements que hi ha en un espai de terreny tal com els veuríem si els miréssim des de dalt.

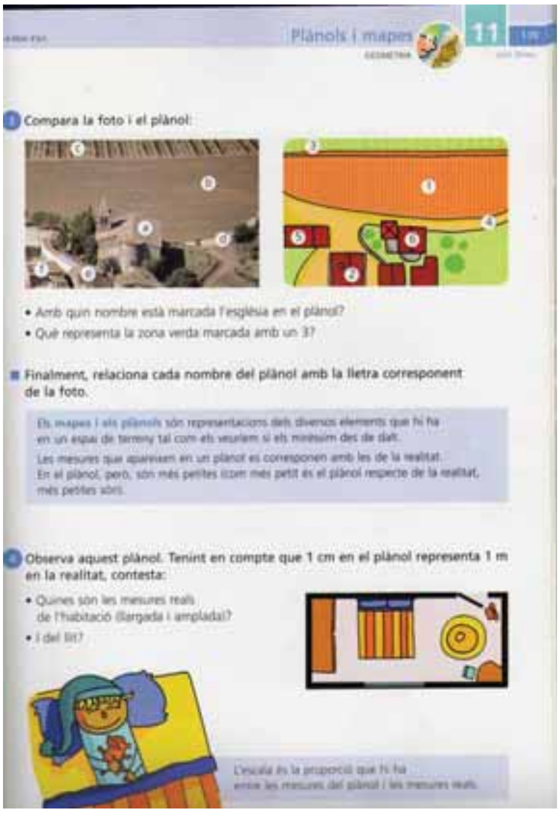
Les mesures que apareixen en un plànol es corresponen amb les de la realitat. En el plànol, però, són més petites (com més petit es el plànol respecte de la realitat més petites son)

3. *Observa aquest plànol. Tenint en compte que 1 cm en el plànol representa 1 m en la realitat, contesta:*

4.

- *Quines són les mesures reals de la l'habitació (llargada i amplada)*
- *I del llit?*

L'escala és la proporció que hi ha entre les mesures del plànol i les mesures reals.



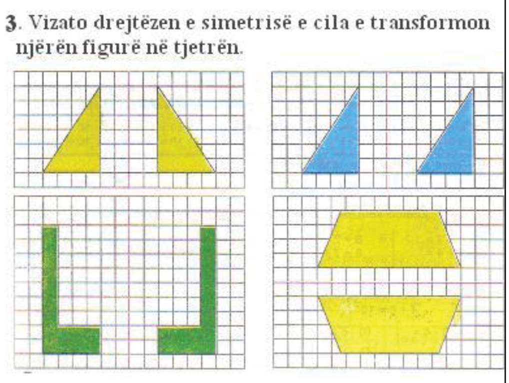


Figura 2.19. Los ejemplos observados de libros de texto de Segundo Ciclo

A continuación presentamos como ejemplo, el análisis de las actividades presentadas más adelante mediante la tabla comparativa 2.20

Ciclo Medio._Análisis de las actividades sobre:		
:	Catalunya (edit:"Text-la Galera")	Kosova (edit:"Dukagjini")
El objeto transformación, terminología y tipos de transformaciones (en el plano)	**Actividad 3.** Identificación de patrón de repetición por comparación simple. Las preguntas tienen como objetivo de utilizar juicios adecuados. Reconoce la transformación simétrica como desplazamiento físico - tamaño y forma se conserven (coinciden-iguales). Reconocer la definición de la figura simétrica. Distinguir las figuras simétricas y las que no son simétricas. Reconocer el eje de simetría y su definición. Encontrar uno o más ejes de simetría, diferenciar el eje de otras rectas de la figura. **Actividad 4** Identificación de patrón de repetición por comparación simple entre la mapa y la foto. Identificar los elementos de proyección de los objetos reales en el mapa. Identificar la relación entre objetos en la realidad y sus representaciones proyectivas en el mapa. Identificar la correspondència entre los elementos reales y sus representaciones en el mapa.	**Actividad 3'.** La utilización de la acción "doblar " en la es típico para la transformación simétrica. Con esta actividad se plantea el reconocimiento de simetría como movimiento (doblado) - tamaño y forma se conserven (son iguales), y/o como desplazamiento físico. Con la condición de "coincidir" se pide que la distancia de la figura y su imagen respecto al eje sean iguales. Al final de la acción de dibujar y doblar se quiere encontrar el eje de simetría de la figura. **Actividad 4'** Identificación de patrón de repetición por comparación simple. Reconoce la transformación simétrica como desplazamiento físico - tamaño y forma se conserven (coinciden-iguales). Reconocer el eje de simetría como elemento importante de transformación simétrica. Encontrar uno o más ejes de simetría, diferenciar el eje de otras rectas de la figura. Sabe determinar el eje de simetría que transforma una figura en la otra. Valora la mediatriz. Indica perpendicularidad y equidistancia respecto del eje de simetría.

Las relaciones y jerarquías en la noción de transformación	**Actividad 3.** Descubrir, emplear y identificar características visuales de figuras simétricas. Identificar el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identifica equidistancia respecto al eje como propiedad Identifica la parte que se repite, en relación al patrón, indicando el elemento generador. **Actividad 4.** Identificar de los elementos de representación del espacio en el mapa – contaccion, relación entre elementos presentadas. Identificar características visuales de representación en el mapa. Identificar como característica de representación del espacio en el mapa la contracción del tamaño y el punto de vista de representación – de arriba (…*veuríem si els miréssim des de dalt*)	**Actividad 3'.** Con esta actividad los alumnos tienen la posibilidad de: Descubrir las características visuales de simetría. Identificar la equivalencia entre la figura y su imagen simétrico Identificar el concepto *invariante* de simetría (el tamaño y la forma) Identificar el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identificar equidistancia respecto al eje como propiedad Identificar la parte que se repite, en relación al patrón (la figura dibujada en una mitad del papel). **Actividad 4'** Descubrir, emplear y identificar características visuales de figuras simétricas. Identificar el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identificar equidistancia respecto al eje como propiedad Identificar el concepto *invariante* de la transformación simétrica de una figura a otra. Identificar el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura Identifica de equivalencia entre la figura y su imagen simétrica.
Transformación como proceso o cambio	**Actividad 3.** Conocer correctamente el proceso de transformación simétrica, como desplazamiento con la evidencia de las propiedades importantes. Realiza transformación simétrica de figuras utilizando plegado y doblando. Y simetrías con diferentes posiciones de los ejes y de las figuras. **Actividad 4.** Conocer correctamente el proceso de representación en el mapa como aplicación de los objetos constituyentes de representación. Realizar observaciones de los elementos del mapa utilizando la escala de contracción. (ejemplo: dimensiones de la cama en la habitación) Determinar posición de objetos en la realidad según sus representaciones en el mapa y viceversa.	**Actividad 3'.** Desarrollando esta actividad la transformación simétrica se realiza utilizando doblado, La simetría se entiende como un proceso de aplicación de un semiplano en otro. La simetría se entiende como aplicación de una mitad de la figura en otra mitad. **Actividad 4'** Conocer correctamente el proceso de transformación simétrica, como desplazamiento con la evidencia de las propiedades importantes. Identificar transformación simétrica de figuras utilizando la relación entre elementos correspondientes. Realice simetrías con diferentes posiciones de los ejes y de las figuras

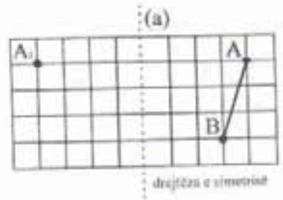
Comunicación y razonamiento con transformaciones	**Actividad 3.** Hay descripción de fenómeno de doblar el papel con una figura argumentando y justificando los resultados obtenidos. Hay visualización del fenómeno de doblar explicando las propiedades de equivalencia, coincidencia y de igualdad con el objetivo de fomentar el concepto de figura simétrica y del eje de simetría. Utilización de ejemplos diferentes con el fin de interpretar y realizar la transformación simétrica mediante métodos informales. **Actividad 4.** Hay una descripción del fenómeno de representación en el mapa justificando los elementos importantes de la representación. Hay visualización del fenómeno de representación presentando en lugar de la realidad una fotografía.	**Actividad 3'.** Para que los alumnos entiendan la tarea que tienen que desarrollar es necesario añadir explicaciones por parte del profesor. La actividad se basa en la descripción de fenómeno de doblado. Hay visualización del fenómeno de doblar con los dibujos (figuras) para cada paso de la actividad. Hay interpretación de la realización de transformación simétrica mediante el doblado como método informal. La comunicación, interpretación y demostración del fenómeno se basa en las preguntas planteadas por el profesor, y en las preguntas del segundo parte de la actividad. El desarrollo de la capacidad del alumno en comunicación y razonamiento se hace en los intentos de responder a las preguntas planteadas. **Actividad 4'** Utilización de figuras diferentes solo en posiciones verticales y horizontales con el fin de interpretar y encontrar la posición del eje de simetría. Utilización y aplicación de simetrías mediante el papel cuadriculado.
Elementos culturales e históricos en transformaciones	**Actividad 3** Se muestran significados culturales diferentes para las concepciones independientes no relacionados entre si (figuras geométricas, figuras de los objetos de la vida cotidiana, la cara de compañero, etc.). Identificar la simetría en cuerpo humano, en los animales, objetos de la vida cotidiana, y en las formas geométricas. Identificar el doblado como herramienta en la decisión de responder a los problemas sobre simetría. **Actividad 4.** Se muestran significados culturales diferentes para las concepciones independientes no relacionados entre si. Hay predominio de contextos relacionados con lo familiar (habitación, cama...), o próximo y contexto social-cultural (iglesia, el parce, …). Ver las distintas formas de transformar un objeto según el punto de vista. Asocia o interpreta desde que perspectiva se ha realizado la representación contextual.	**Actividad 3'.** Doblado el papel, y otras cosas es una acción conocida por parte de los alumnos desde la vida cotidiana. Con esa actividad se hace reconocimiento de la simetría a partir de la situación cotidiana. Hay un contexto relacionado con lo próximo (árbol, mariposa) Usa términos matemáticos (figuras geométricas planas) adecuados a los elementos culturales pero sin ejercer una contextualización completa. Hay contextualización del concepto de simetría mediante la utilización del fenómeno de doblado. **Actividad 4'.** Utilización de figuras estándares geométricas para encontrar el eje de simetría y otros propiedades simétricas. La posibilidad de utilizar espejos en la identificación de la posición del eje de simetría. Uso de papel cuadriculado e instrumentos de dibujo.

Tabla 2.20. Las transformaciones geométricas en los libros de textos de Segundo Ciclo

A partir de lo visto, se puede expresar el resultado siguiente:

Resultado 2.2. *La simetría es el objeto matemático privilegiado en los contenidos de Segundo Ciclo de Primaria en ambos países. En Catalunya se considera también la perspectiva. Si bien en ambos países se habla de transformar, en el de Kosovo se explicita siempre con mayor claridad. Las tareas suelen ser más auto explicativo en Catalunya. Mientras en Catalunya se acentúan los procesos de visualización, en Kosovo se acentúa el uso de términos matemáticos. Es de destacar el uso de contextos reales próximos en el libro catalán, y el uso de materiales sin contextos cotidianos en el libro kosovar.*

A continuación se muestran actividades sobre transformaciones geométricas en los libros de texto de **III Ciclo** (ciclo superior) de educación Primaria en la figura 2.21.

Catalunya	**Kosova**
Libro de texto: L'ARCA 6, Matematiques, Cicle superior, Editorial: "***Text - la Galera", 2006***	Libro de texto: Matmetaika, 5, Editorial "**Dukagjini**", **2004**
Página 79, / Actividad 5/ **Moviments en el pla** 7. *Observa, en cada cas, els moviments de la figura en el pla:* *Translació,Gir, Simetria* *En el pla, es donen tres tipus de moviments: translació, gir i simetria.*	Pag. 106 /Actividad 5'/ 5 a) *El punto A_1 es simétrico con el A respecto el eje (a).* *b) Encuentra el punto simétrico con el B.* *c) Los segmentos AB y A_1B_1 son simétricos respecto al eje (a). ¿Por qué?* 6 *Encuentra la figura simétrica respecto al eje (a). Explica cómo has encontrado.* **5. a)** Pika A_1 është simetrike me A në lidhje me drejtëzën (a). **b)** Gjej simetrikën e pikës B. **c)** Segmentet [AB] dhe [A_1B_1] janë simetrike në lidhje me drejtëzën (a). Pse? 

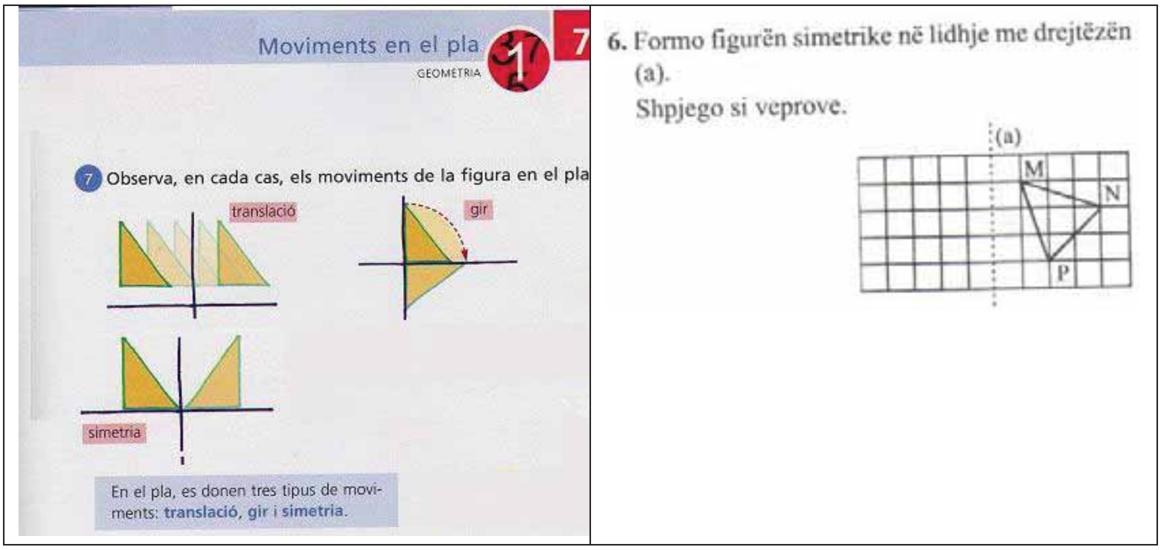


Figura 2.21. Ejemplos de actividades de tercer ciclo

Mediante la tabla 2.22, presentamos a continuación los resultados de análisis de las actividades mencionadas anteriormente de modo comparativo para los dos países.

Ciclo superior._**Análisis de las actividades sobre:**		
	Catalunya (edit:"Text-la Galera")	Kosova (edit:"Dukagjini")
***El objeto transformación, terminología y tipos de transformaciones* (en el plano)**	**Actividad 5.** Identificación de patrón de repetición por comparación simple. Reconocer isometría como movimiento simple - tamaño y forma se conserven. Reconocer la transformación isométrica como desplazamiento físico. Reconocer que la distancia de la figura y su imagen simétrica respecto al eje son iguales. Descubrir los elementos constituyentes de una figura que se conserva. Reconocer e identificar el paralelismo de segmentos de las figuras trasladas. Asociación de un vector al desplazamiento. Reconoce equidistancia al centro de rotación y la invariancia del ángulo de rotación entre cualquier punto y su imagen.	**Actividad 5'.** Indicar perpendicularidad y equidistancia respecto al eje de simetría. Identificar que los segmentos que unen puntos simétricos son paralelos entre si. Valora la mediatriz de los segmentos formados por puntos correspondientes de simetría. Primeros pasos en obtener y utilizar la definición formal de simetría.

Las relaciones y jerarquías en la noción de transformación	**Actividad 5.** Descubrir y emplear las características visuales de isometrías. Identificar la equivalencia entre la figura y su imagen isométrica. Identifica el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identifica equidistancia respecto al eje como propiedad. Identificar el vector de traslación. Identifica como característica de rotación la invariancia de ángulo para todos los puntos de una figura.	**Actividad 5'.** Identificar el cambio de orientación de la imagen respecto a la figura. Utilización de las características visuales de simetría. Identificar equidistancia respecto al eje como propiedad.
Transformación como proceso o cambio	**Actividad 5.** Conocer correctamente el proceso de transformación, como desplazamiento. Observar equivalencia como invariancia de isometrías. Realizar transformación simétrica de figuras utilizando plegado, doblando y/o espejo. Realizar traslaciones y rotaciones de manera directa con materiales concretas.	**Actividad 5'** Conocer correctamente el proceso de transformación simétrica como aplicación del conjunto de puntos en otro conjunto de puntos del mismo plano. Observar equivalencia como invariancia Identifica simetría como desplazamiento o aplicación de los elementos necesarios de la figura (objeto). Realiza transformación simétrica de figuras utilizando desplazamiento o aplicación de los elementos de la figura.
Comunicación y razonamiento con transformaciones	**Actividad 5.** Hay características visuales de repetición. Interpretación de transformación simétrica mediante métodos informales. Características visuales de traslación. Métodos informales empleados para explicación de traslación. Interpretación de características visuales de rotación. Utilización de métodos informales para realización de rotaciones.	**Actividad 5'.** Se pide la descripción y justificación de las características visuales de las simetrías. Identificar, explicar y argumentar las invariancias respecto a la simetría con una simbolización. Interpreta la realización de transformación simétrica mediante métodos informales y formales. Utilización y aplicación de simetrías mediante las coordenadas. Demostrar mediante razonamiento deductivo propiedades de las simetrías.
Elementos culturales e históricos en transformaciones	**Actividad 5.** Utilización de figuras estándares geométricas para explicación de isometrías. Necesidad de emplear los instrumentos tradicionales de dibujo geométrico.	**Actividad 5'.** Utilización de los términos matemáticos adecuados a los elementos de la transformación simétrica. Utilización del papel cuadriculado, coordenadas y instrumentos de dibujo geométrico.

Tabla 2.22. Las transformaciones geométricas en los libros de textos de Tercer Ciclo

Como consecuencia de lo observado, se pude concluir el siguiente resultado.

Resultado 2.3. *La simetría sigue siendo la transformación más aludida en ambos países, aunque se introduce también un poco la rotación, pero en el libro de Catalunya se trabaja también la traslación. En ambos países se desea realizar un tratamiento de las propiedades de la transformación, pero en el de Kosovo se insiste en la representación en coordenadas cartesianas, con formato cuadriculado. Por otro lado, las actividades de tercer ciclo en el caso de Kosova son más ricas de contenido que en Catalunya,*

En efecto, en las actividades de Kosovo, tratan de sacar la conclusión de que la línea formada por los puntos correspondientes simétricos y el eje de simetría forma ángulo recto (teorema: la línea recta que une los puntos correspondiente en una simetría, corta el eje de simetría perpendicularmente - actividad 5') o se trata de mostrar que el eje de simetría corta el segmento de línea recta que une dos puntos correspondiente, exactamente en su punto medio - actividad 5').

Además de lo dicho, teniendo en cuenta la adecuación que se supone en los materiales de lo que plantean las propuestas oficiales de matemáticas para la educación primaria en Catalunya y Kosova podemos decir siguiente:

Resultado 2.4. *Las actividades que plantean los libros de texto de matemáticas para educación primaria no dan la posibilidad de que los alumnos comprendan y tengan claro el concepto de transformación geométrica. Es necesario un conocimiento profesional del maestro de primaria, que no siempre se consigue.*

A continuación intentamos justificar brevemente el anunciado anterior.

Primero, las actividades en los libros de texto no cumplan los objetivos curriculares de educación primaria en ambos países: faltan los contenidos sobre las rotaciones y translaciones como otras transformaciones (en Catalunya y Kosova); no hay en general actividades donde se desarrollan relaciones entre simetrías y otras isometrías.

Mientras que el currículo oficial de Catalunya pide que en primaria los alumnos deben "…. r*econocer giros, y realizar sombras, simetrías y giros…*" que deben "*reconocer objeto que ha generado una sombra determinada*" que deben "*identificar la transformación que relaciona dos figuras dadas*…"etc., no hay ninguna actividad que permitiría desarrollo y comprensión de estos conocimientos y capacidades.

Es lo mismo en los libros de texto de Kosova. Según el currículo oficial de Kosova, los alumnos de primaria deben enseñar sobre "c*onstruir la figura congruente con la figura dada en relación de simetría, rotación y traslación"*, sobre *"reconocer, describir, clasificar, nombrar y definir diferentes cambios de posiciones de figuras…"*, sobre *"construcción de mediatriz, bisectrices, y regularidades de figuras a partir de simetrías…"*. Aunque hay contenidos sobre las simetrías, esto se hace solo en sentido aislado y no se usa en otros temas como propiedades del polígono regular, no se utiliza la propiedad de simetría para clasificar las figuras según que tengan dos ejes de simetría, un eje de simetría o no tengan ningún eje de simetría. No se tratan las figuras simétricas que admiten un giro de "media vuelta" (por ejemplo la letra S). Estos conocimientos y capacidades son imposibles de conseguir con las actividades presentadas en los libros de texto de primaria en Kosova sin un maestro profesional bien preparado y no dependiente del libro de texto.

Además, algunas inconsistencias hacen que ciertas responsabilidades sobre el contenido estén en manos del docente, que no siempre tiene bien asumidos los contenidos matemáticos. Por ejemplo, en los libros de texto en Kosova, para que los alumnos definan correctamente la imagen del "simétrico" no se ven ejemplos que permiten a los alumnos de discriminar la propiedad simétrica entre ejemplos que no tienen esa propiedad. En este caso no están presentados los ejemplos de figuras no-simétricas que permite desarrollar la capacidad de los alumnos de reconocer sin errores los ejemplos de figuras simétricas y figuras no-simétricas.

Hay una actividad donde aparecen las figuras no exactamente simétricas (las tijeras y la hoja del árbol) donde el maestro tiene que manejar una discusión sobre la característica "simétrica" de cada figura. Los ejemplos puestos en esta manera no dan una posibilidad para que los profesores sean consientes de la posibilidad de destacar profundamente el concepto de simetría. En este caso, es normal que algunos alumnos perciben como simétrica y otros como no-simétrica, y los profesores se tienen que manejar bien con estos ejemplos con el objetivo de que los alumnos puedan crear correctamente la imagen de simetría en sus mentes con todos las propiedades. Es parecido el caso de los libros de texto en Catalunya.

En los libros de texto en Catalunya primero se introduce el concepto de simetría con el proceso de doblar el papel, luego se hacen las actividades de hacer simétrico en el papel cuadriculado y papel blanco. En Kosova no hay la introducción de simetría sino se considera conocido anteriormente y se pide hacer simétrico (pintando) y luego el doblado se utiliza para mostrar la simetría. Entonces, primero se trabaja con el papel blanco y después se trabaja en el papel cuadriculado (el año siguiente). Parece que en este caso, el papel cuadriculado tiende a mostrar con más profundidad la transformación simétrica punto a punto, la propiedad de las distancias iguales y de perpendicularidad.

Los contenidos presentados en los libros de textos pueden ser útiles en el aprendizaje de las transformaciones sólo cuando el profesor está bien preparado para enseñar los mismos.

2.5. Sobre aspectos profesionales docentes

En relación con la formación inicial de los profesores, los cambios de los últimos tiempos son claramente insatisfactorios con relación a la enseñanza de las matemáticas: unos estudios universitarios de tres años como los actuales (en España) difícilmente pueden capacitar para enseñar las cinco áreas del currículo (matemáticas, lengua, ciencias, ciencias sociales y plástica) que deben impartir los llamados maestros generalistas que son aquellos que se ocupan de enseñar matemáticas, entre otras materias, a los alumnos de 6 -12 años (Sierra & Rico, 1996).

Nuestra investigación aborda el problema y cuestión de capacitar al futuro profesor de primaria, organizar, realizar, gestionar, planificar la enseñanza de transformaciones geométricas en la educación primaria. La perspectiva que ofrecemos permite aprovechar la experiencia realizada en dos contextos diferentes, contribuir a la clarificación de los problemas planteados en relación con la educación geométrica de los jóvenes en el momento actual, y con una visión de futuro a la discusión de ideas para su profundización.

2.5.1. Características generales de la Formación de Profesores de Educación Primaria en Catalunya y Kosova

Como hemos dicho y antes, a partir de la Ley General de Educación, en 1970 los estudios de formación de profesores en Catalunya adquirieron carácter universitario. La formación didáctico-matemática, cuando se desarrollaba realmente, tenía un carácter instrumental, en el sentido de proporcionar unas técnicas y recursos para la enseñanza de las Matemáticas (Llinares & Sanchez, 1996).

Una de las conclusiones de las Jornadas Matemáticas celebradas en el Congreso de los Diputados en Enero de 2000, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas recuerda "*la necesidad de efectuar importantes transformaciones en la preparación del profesorado de primaria en lo que respecta a la formación relacionada con la Matemática y su Didáctica a fin de que nuestro sistema educativo pueda hacer frente con competencia a los cambios necesarios*" (Díaz y altr., 2000, 127).

En el caso de Kosova, la nueva Facultad de Educación en Universidad de Prishtina (FEUP), con el apoyo del programa del Gobierno Canades (KEDP) está funcionando desde el año 2002. FEUP como una facultad nueva está en proceso de consolidación en todos aspectos – estructural, organizacional y funcional con falta de profesores regulares, funcionando con los profesores de otras facultades. Ellos hacen la formación matemática de manera tradicional con conocimientos y procedimientos que no se adaptan a las nuevas exigencias de la sociedad actual y directrices internacionales. Se privilegian conocimientos, como hechos, procedimientos, conceptos e ideas en "conocimiento matemático" pero no en "conocimiento didáctico" y menos en investigación didáctica de las matemáticas.

Se mantiene una tradición – no sólo por causa de las situaciones de conflicto y pobreza - en que los futuros profesores en FEUP se preparan para las matemáticas escolares limitados a actividades en la pizarra, y con lápiz y papel. Hasta hoy los estudiantes - futuros maestros en FEUP no han aprovisionando (y no aprovisionan) conocimientos necesarios para realizar objetivos de NCK y tampoco en usando de los medios de comunicación proporcionados por nuevas tecnologías que aumentan los espacios y el tiempo por la interacción y comunicación entre los futuros profesores.

A continuación, hacemos un análisis más detallado sobre el tratamiento de contenido geométrico en los programas de la Facultad de Educación de la Universidad de Prishtina como referente del contexto kosovar y el programa del proyecto EDUMAT, como referente del contexto catalán/español.

2.6. Hacia un análisis comparativo de programas de estudio en España y Kosova

Para cumplir con nuestro objetivo inicial, exponemos los resultados de comparación de formación geométrica entre el programa presentado dentro del proyecto EDUMAT (España) y el programa de matemáticas de la Facultad de Educación en Universidad de Prístina - Kosova (FEUP). Explicamos los contenidos geométricos dentro de dichos programas, donde se analiza el contexto del área de conocimientos geométricos como se plantean en el proyecto EDUMAT y en el programa de FEUP respectivamente. Posteriormente se describe la organización y metodología de estos programas. Después se dan análisis de unas características de los contenidos geométricos, así como del proceso de enseñanza y aprendizaje, mostrando las diferencias entre ellos. No hay trabajos que pongan de manifiesto las posibles diferencias y semejanzas de los conocimientos geométricos de los programas de diferentes países y estudios comparativos entre países que reconocen diferencias culturas. La comprensión de que la enseñanza y aprendizaje de la geometría no es algo solo que corresponde al saber, sino que hay una complejidad social y profesional, este estudio centre su interés en los comparaciones sobre el peso, sobre el tratamiento diferenciado del conocimiento didáctico, sobre las representaciones y construcciones del contenido geométrico, sobre los métodos geométricos, sobre los aspectos didácticos en la formación geométrica y sobre los objetivos de formación geométrica de los profesores.

Dadas las características del tipo de estudio que se quería realizar un estudio comparativo entre los programas de formación de profesores de primaria, la metodología es cualitativa descriptiva, histórico-critica interpretación, análisis documental interpretativo, análisis del contenido a partir de materiales y textos. Se decide esta metodología porque:

- nos daría mejores resultados para contextualizar las diferencias entre Kosova y España, como son: los sistemas de educación en general, currículos de matemáticas, programas de formación de profesores, etc.

- nos permite reconocer las diferencias en contenidos geométricos y didáctico-geométricos entre programas de facultad de Educación de Universidad de Prístina y del proyecto EDUMAT
- por otra parte nos permite identificar las características que valoran como importante que hay a partir de entrevistas de personas que trabajan en formación de profesores

La presente estudio busca comprender las cuestiones de interés en:

- Explicar las características necesarias para el futuro profesor de primaria según Shulman (1986), Llinares (1999, 2004), etc.
- Explicar las características necesarios para los programas de formación de profesores de primaria.

Con vistas a lograr los objetivos planteados, podemos apreciar en los cuadros en continuación:

Objetivos del mini estudio	Los Datos	Técnicas/instrumentos
Aspectos generales, organización y metodología de programas de formación	- textos universitarios de FEUP - los cuadernos de los estudiantes de FEUP libro (materiales) de EDUMAT	- programas de matemáticas en formación - introducción (planteando) de conocimientos - formalismo alias informativo.
Lo matemático ***El peso del contenidos geométricos***	- textos universitarios de FEUP - libro (materiales) de EDUMAT	- Conceptos fundamentales geométricos
Representaciones y construcción del contenido geométrica	- textos universitarios de FEUP - los cuadernos de los estudiantes de FEUP - libro (materiales) de EDUMAT	- materiales manipulativos - reproducciones de figuras - definiciones, axiomas, teoremas. - El dialogo como herramienta de comunicación - Conexión lo visual y lo analítico
Aspectos didácticos en la formación geométrica	- textos universitarios de FEUP - los cuadernos de los estudiantes de FEUP - libro (materiales) de EDUMAT	- planificación - desarrollo cognitivo

2.6.1. Lo matemático en FEUP y EDUMAT

El Programa de formación matemática en la Facultad de Educación de la Universidad de Prístina (FEUP) se imparte en 5 semestres académicos de un total de 225 horas. Para los contenidos de los tres primeros capítulos hemos tomado el libro de texto: *MATEMATIKA Për studentët e grupit klasor* (*para estudiantes del grupo de Primaria*) publicado por la Universiteti de Prishtinës (S. Tahiri y alt., 1986). Para los contenidos de geometría analítica hemos tratado los cuadernos de los estudiantes de la Facultad de Educación en Prishtina. Los contenidos de geometría son parte del programa de asignaturas de Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Príishtina.

El programa de formación geométrica dentro del proyecto EDUMAT - *Geometría y su didáctica para maestros* contiene tres capítulos: 1. *Figuras geométricas, 2. Transformaciones geométricas. Simetría y semejanza, y 3. Orientación espacial. Sistemas de referencia.* Este libro es parte del proyecto titulado *Matemáticas y su Didáctica para maestros* planteada como material para estudiantes de Formación de primaria en dos semestres académicos (Godino y Ruiz, 2003).

La visión formalista de FEUP.

Los contenidos geométricos se dividen en tres partes: la construcción axiomática de geometría, las medidas y mesuras, los elementos de topología y los elementos de geometría analítica. En las dos primeras encontraremos lo siguiente: Las *Definiciones* (Përkufizim – en albanés) que son características en todo programa de FEUP. Todos los conceptos nuevos geométricos, relacionando a unos términos más generales ya definidos. Por ejemplo, la definición de simetría axial se da con definición:

> *"Transformación simétrica de la figura F respecto la recta s llamamos aplicación (función) S(s) con las propiedades: si X∈F y X∈s (X∈F∩s), entonces X'=S(s) (X)=X, y para cualquier otro punto X∈F (X∈F\s) y de su transformación X'=S(s), la recta* s *es mediatriz del segmento XX'.*

En esta definición se parte de la idea de *aplicación* y *mediatriz* definida antes y de *punto* e *incidencia* como conceptos fundamental-básicos en geometría. Esta manera de introducir los nuevos términos se suele relacionar con las doctrinas de Aristóteles (Navarro, 2003). Definir es explicar lo que es una *cosa* con una frase que equivale exactamente en significado a la palabra que designa la cosa. Los Teoremas son las afirmaciones que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores, las reglas aceptadas en axiomas, los teoremas anteriores y las propiedades que se suponen en las definiciones. Los Teoremas acaban con la frase "*como queríamos demostrar*". Los Teoremas suelen tener las siguientes partes: (a) *Los enunciados*: Se interpretan como frases en las que se declara lo que se quiere demostrar. (b) *Prueba (demostración):* apartado dedicado a justificar los pasos lógicos necesarios para deducir la tesis buscada a partir de los resultados anteriores. (c) *Conclusión*: Es el último párrafo del teorema, donde se repite la parte del enunciado que indica lo que se quería lograr y se termina diciendo "*como queríamos demostrar*" (*Çka u desht të vërtetohej, ç.d.v.* – en álbanes)".

Los Teoremas ocupan la mayor parte de los contenidos. En ellos se presenta el cuidado en justificar los pasos, tratando que el razonamiento sea inatacable. No suelen mencionarse exclusivamente todas las propiedades utilizadas, por ejemplo, las nociones comunes no suelen figurar explícitamente como justificaciones, porque se suponen conocidas; se consideran solamente las referencias que aparecen mencionadas y se constata que es una verdadera red en la que resulta difícil quitar o añadir algo sin cambiar todo el libro.

Por ejemplo, en la demostración del teorema que afirma "*el segmento que une dos puntos cualesquiera de una figura es congruente con el segmento que une sus imágenes simétricos*" se observa que para justificar su demostración se cita el Teorema que demuestra la congruencia de dos triángulos (lado-ángulo-lado) y del concepto fundamental de la congruencia. Este proceso se puede seguir hasta encontrar todas las justificaciones que se precisan utilizar, directo o indirecto, en la demostración. Para la formación de profesores de Primaria, en la mayoría de los Teoremas no se hace la demostración considerando no necesario una formación matemática profunda.

Como hemos visto, la práctica es simplemente en la presentación de las pruebas de teoremas como prueba deductiva formal. El proceso de demostración se hace sin atender a su función o a cómo puede conectar con las intuiciones de los estudiantes acerca de lo que puede ser un argumento convincente; pues "*lo deductivo no se enseñaba como reinvención, como ha hecho Sócrates, sino que era impuesto sobre el aprendiz*" (Freudenthal, 1973)

Las tentativas constructivistas de lo matemático en EDUMAT.

Los contenidos de geometría consisten en el libro "Geometría y su didáctica para maestros" de los autores Juan Godino y Francisco Ruiz, como parte del proyecto "EDUMAT". Este libro tiene tres capítulos: 1. Figuras Geométricas, 2. Transformaciones geométricas. Simetría y semejanza, 3. Orientación espacial. Sistemas de referencias.

En este libro, los contenidos se plantean en el sentido que el área se presente como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro. Asimismo, se ha procurado que se resalten los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento geométrico, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final, reforzando el uso del razonamiento empírico inductivo como método de trabajo que conducirá, en un estadio posterior, al desarrollo de aspectos deductivos.

A diferencia del programa de FEUP, aquí los contenidos más complejos, formales y deductivos de las matemáticas se dice que siguen estando fuera de las posibilidades de comprensión de los futuros profesores. Debe resaltarse también que, se ha procurado plasmar en la secuenciación principios generales tendentes a conceder prioridad al trabajo práctico e intuitivo (definiciones de los conceptos de *punto*, *recta* y *plano*, de relación *concurrente* y *colineal,* del *paralelismo*, etc., pp.459).

Por tanto, el programa de "EDUMAT" refleja el proceso constructivo del conocimiento matemático (Los cuadriláteros y su clasificación: "…*para clasificar los cuadriláteros hay que estudiar las características comunes que tienen estas figuras, lo que dependerá a su vez de los criterios o variables que observemos…*" pp. 468 EDUMAT) tanto en su progreso histórico como en la individualización del mismo por parte de los futuros profesores.

La formalización y la estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no ha de ser (caso de FEUP), pues, el punto de partida, sino más bien la meta de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales que permitan interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad (Distancias o alturas aplicando la semejanza, pp. 547 EDUMAT).

Pese a la constante referencia a la realidad y a los aspectos de construcción inductiva y empírica de la geometría (primer capítulo), no ha de olvidarse aquellos elementos por los que las matemáticas precisamente se distancian de la realidad mediante actividades y operaciones relacionadas con la creatividad, la crítica, el poder de imaginar y representar no sólo espacios multidimensionales, sino una "realidad" alternativa. En este sentido, la exploración y el desarrollo de modelos "puramente" geométricos contribuyen a describir, comprender y explicar mejor la complejidad del mundo.

El acercamiento a los conceptos geométricos, en la formación docente se debe hacer siempre de manera intuitiva y primando los procesos inductivos sobre los deductivos. Esta concepción constructivista de las matemáticas va a permitir una enseñanza basada el "hacer matemáticas", en contraposición al modelo que toma a los alumnos como meros receptores del conocimiento transmitido (podemos decir en el caso de programa de FEUP). Además, el trabajo tendente a desarrollar de manera constructiva los contenidos hace que éstos tengan sentido en sí mismos, mientras que el método seguido para la aproximación constructiva a los conceptos es evidente a distintas situaciones de la vida diaria, en cuanto que se basa en criterios de resolución de problemas o de puesta en práctica del método científico de acercamiento a la realidad. Asimismo, los contenidos han sido cuidadosamente seleccionados tomando como referente su aplicabilidad posterior a situaciones problemáticas o de aplicación de conocimientos matemáticos en el desenvolvimiento en el aula con alumnos de Primaria.

Podemos concluir que en el proyecto "EDUMAT", el objetivo principal de la enseñanza de la geometría es el saber ***informativo.*** Pretende enseñar las técnicas especiales que son necesarios para usar la geometría en sus aplicaciones cada vez más extendidas en todas las ramas del saber.

Ninguno de los dos extremos es bueno para una formación equilibrada entre pensamiento y acción, o entre el saber culto y el saber practico. Una buena enseñanza debe balancear adecuadamente las dos formas de la matemática, pura y aplicada, para no perderse en puros virtuosismos o en un montón informe de recetas practicas.

En base a todo esto podemos resumir que dentro del programa de formación de profesores en la FEUP, los contenidos geométricos se dividen en tres partes: la construcción axiomática de geometría, las medidas y mesuras, elementos de topología y elementos de geometría analítica. En las primeras dos encontraremos las *Definiciones* que son características en todo programa de FEUP. Todos los conceptos nuevos geométricos introducen a parte de términos más generales ya definidos. Por ejemplo, la definición de simetría axial se parte de la idea de aplicación y mediatriz definida antes y de punto y incidencia como conceptos fundamental-básicos en geometría. Los Teoremas son las afirmaciones que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores, las reglas aceptadas en axiomas, los teoremas anteriores y las propiedades que se suponen en las definiciones. Los Teoremas suelen tener las siguientes partes: (a) *Los enunciados*: Se interpretan como frases en la que se declara lo que se quiere demostrar, (b) *Prueba (demostración):* apartado dedicado a justificar los pasos lógicos necesarios para deducir la tesis buscada a partir de los resultados anteriores, (c) *Conclusión*: Es el último párrafo del teorema, donde se repite la parte del enunciado que indica lo que se quería lograr y se termina diciendo "*como queríamos demostrar*". Los Teoremas ocupan la mayor parte de los contenidos. Según el programa de FEUP la formación de profesores no significa una formación profunda matemática, y por esta razón, en este programa, para la mayoría de los Teoremas no se hace demostración.

Los contenidos de geometría dentro del programa de la FFP de la UB son parte del programa de la asignatura *Didáctica de la matemática.* El programa se distribuye en bloques temáticos los cuales están compuestos de un número variable de temas de distinta extensión según sus contenidos.

2.6.1.1. El enfoque euclidiano geométrico en los programas de formación de profesores de primaria

En la tradición axiomática euclidiana, se suele iniciar la geometría con los elementos que basan su construcción, como objetos geométricos, axiomas, objetos y relaciones (puntos, rectas, segmentos, ángulos, etc.). Ahora bien, sólo en FEUP se muestran realmente los principios básicos euclidianos. En EDUMAT, se muestra sólo una introducción intuitiva, que no desarrolla los axiomas euclidianos como se ve en la tabla.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
La instrucción de los conceptos geométricos se da explicando “la naturaleza de los objetos geométricos” – los: *puntos, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro*, etc., como *una clase especial* de objetos. ..”*se trata de puntos si en lugar de usar una impresora láser para hacer la impresión usaremos un lápiz con una punta gruesa, o un lápiz imaginario que dibuja puntos tan finos que sean prácticamente imperceptibles.”* Después: *el punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio (pp. 459)*. A continuación se explica que la *líneas rectas* son ilimitadas por ambos extremos... se define idea de *colinealidad* de los puntos. Sobre el plano se dice: “figura geométrica designada con la palabra ‘plano’ se le atribuyen unas características ideales que no tienen tales objetos perceptibles, como no tener en ningún dirección, ni tampoco ningún espesor”. Se dice que los rectas y planos son conjuntos de puntos (pp. 459).	La instrucción de conceptos fundamentales geométricos en principio se da haciendo clasificaciones en conceptos fundamentales (básicos) que se admiten sin demostración, los conceptos (*teoremas*) que se logran demostrar partiendo de las proposiciones anteriores y *definiciones* que son frases que sirven para introducir un concepto geométrico basando en proposiciones anteriores conocidos. Los conceptos básicos son: Objetos: *el punto, la recta y el plano.* Relaciones: *“…es incidente…”, “…es congruente…”,”… es entre…”* Afirmaciones: *los axiomas.*
No se explicitan los axiomas	El sentido de los objetos comunes se explica mediante los axiomas. Los conceptos *el punto, la recta, el plano* y *‘…es incidente…’* se determina a través del *Primer Grupo de axiomas de incidencia* que en total son ocho (pp. 149,150). En continuación se dan y axiomas de orden, axiomas de congruencia y de continuación.

La propuesta intuitiva de EDUMAT se manifiesta explícitamente en los materiales, como se verá en la tabla Se reconoce bien en las descripciones que se hacen de los elementos base de la geometría euclidiana, como puntos, segmentos, figuras, etc.

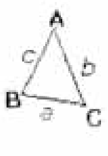
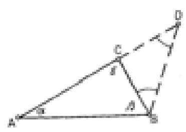
Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
La instrucción de conceptos de la geometría se hace de forma intuitiva, mostrando los términos de forma simultánea, sin distinción ni formalismo, aprovechando la metáfora del dibujo. Se usan convenios visuales y vistas de frente para representar los elementos y situaciones geométricas: – *el segmento AB es conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que se dice son los extremos del segmento (pp. 460)*. - *un ángulo se puede considerar como la intersección de dos semiplanos cerrados, obtenidos a partir de dos rectas incidentes (pp.460)*.	La instrucción de conceptos geométricos se da mediante las definiciones y teoremas. Como consecuencia de Segundo grupo de axiomas de orden (en total cuatro) se dan definiciones: - *El segmento como conjunto de dos puntos A y B y todos los puntos entre ellos (pp.152).* - *El unión de dos semirrectas a y b con origen común O y todas semirrectas entre ellos se llama el ángulo aOb.*
Se pone la definición de medida de ángulos como la cantidad de rotaciones requeridas para girar uno de los lados del ángulo, tomando como centro de giro el vértice, para que coincida con el otro lado. (Se usa el concepto de rotación antes de explicar sentido Xh.Th.). La unidad de medida de los ángulos se usa el grado como 360 parte de la obertura de la circunferencia. La medida de un ángulo se indica m($\angle$ A). La clasificación de los ángulos se hace por su medida.	El símbolo para un ángulo con vértice O y lados Oa y Ob se indica: $\measuredangle$ aOb. Clasificación de los ángulos se hace por transformación de congruencia. Se da definición de ángulos contiguos que tienen vértice y un lado común. Después se da definición de ángulo recto como: *el ángulo congruente con su ángulo vecino (adyacentes suplementarios Xh.Th.) y de que otros lados incidente con una recta, es ángulo recto (pp.158). El ángulo menor de ángulo recto se llama* ángulo agudo, *el ángulo mayor de ángulo recto y menor de ángulo llano, se llama* ángulo obtuso.
Se da una visión sólo intuitiva de paralelismo y concurrencia.	Se trata el paralelismo, y la incidencia al situar los axiomas.

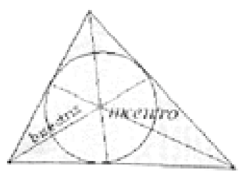
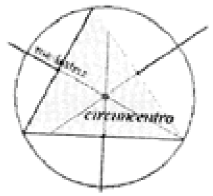
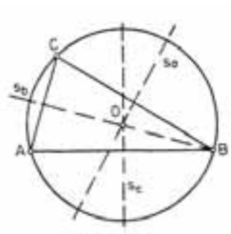
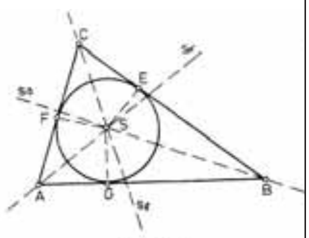
En ambos desarrollos, se trata un brevísimo desarrollo histórico sobre los diversos tipos de geometrías. En FEUP se acompaña de definiciones de los conceptos fundamentales (o básicos) de la geometría; a continuación se numeran los 5 grupos de axiomas y primeras consecuencias de los mismos. En las siguientes definiciones se introduce el concepto de perpendicularidad, y se explica lo que son los segmentos, las semirrectas, los ángulos obtusos y agudos. Veámoslo en forma de tabla a continuación:

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Se introduce la distinción entre espacio sensible y espacio geométrico - Se ahbla de geometría euclidea, de semejanza, afin y proyectiva. Pero sólo se describe brevemente - Se trata la topología como un tipo de geometría basada en transformaciones topológicas. Se plantea la existencia de problemas como Konisberg, y cuatro colores como ejercicios para saber que existen.	Al final del capítulo de planimetría se da un desarrollo histórico de geometrías, tratando el postulado 5 de Euclides. Se da la idea de Lobaschevski, como persona que ha demostrado que podría prescindirse del postulado 5 y las consecuencias. Se habla de teoremas de Legendre, Saccieri, modelo de Klein y Poincaré, ideas sobre la geometría de Riemann, y axiomas de Rieman sobre paralelismo. El modelo de la esfera de Rieman con visualizaciones. *La topología no se indica como geometría sino que se ve desde un punto de vista algebraico. Se tratan los grafos, aplicaciones topológicas y Teorema de Euler y Jordan.*

2.6.1.2. Sobre desarrollo de formas y propiedades

En todos los programas de formación de profesores de Primaria se suelen trabajar las figuras planas poligonales o no poligonales. Compararemos el tratamiento que se da a los **triángulos** y su clasificación, **cuadriláteros** y sus clasificaciones, **circunferencia** y círculo, y otras curvas. Ahora bien, en EDUMAT se hace una descripción de elementos geométricos, figuras, cuerpos y situaciones geométricas mediante el uso correcto de los términos y el lenguaje geométrico, mientras que en FEUP se usa un lenguaje riguroso y preciso en la descripción de las propiedades y de los teoremas.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Se inicia con la distinción entre curvas poligonales y polígonos	Se presentan poligonales abiertas (en albanés - vija e thyer e hapur = línea rota abierta) o cerradas (e mbyllur) como unión de serie de segmentos consecutivos no alineadas.
La instrucción de triángulo se da como un polígono con tres lados, como *una porción de plano limitada por tres segmentos unidos (pp.465)*, dos a dos por sus extremos.	Primero se da Definición del triángulo como unión de tres segmentos con extremos A, B y C, no incidente a una recta (pp. 467). Más adelante, se distingue de "superficie del triángulo" (*siperfaqja trekëndëshe*) como la unión de los segmentos con un extremo en un vértice de triángulo y otro extremo variando por puntos de lado oponente. Se define el signo de triángulo "∆", los vértices, los ángulos (externos y internos), los lados.
Se dan algunas propiedades de los elementos del triángulo, como simples enunciados sin demostración ni visualización *En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos (p 465)* *El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes. .../...*	Las propiedades del triángulo se dan con Teoremas y demostraciones (pp. 169 y 172). *Teorema 8.51. Suma de ángulos interiores es igual a dos rectos.* *Teorema 8. 52 El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes*..../...
Se dice que un lado es menor que la suma de los otros dos como una propiedad que se cumple. En el dibujo no se permite reconocer la propiedad:  **1. En todo triángulo se cumple:** a + b > c b + c > a a + c > b	Se demuestra la propiedad de que un lado es menor que la suma de los otros dos: **Teorema 8.62.** Shuma e (cilado) dy brinjëve të një trekëndëshi është më madhe se brinja e tretë, ndërsa ndryshimi i dy brinjëve është më i vogël se brinj e tretë. Le të jetë $\triangle ABC$ (fig. 8.75.) një çfarëdo trekëndëshi. Të tregojmë se pari se p.sh. $AC + CB < AB$. Le të jetë D pika e tillë që $A - C - D$ dhe $CD \cong CB$. Nga $\triangle BCD$ në bazë të T. 8.58. rrjedh $\sphericalangle CBD \cong \sphericalangle CADB$. Meqë $\sphericalangle ABD < \sphericalangle CBD$ dhe $\sphericalangle CBD \cong \sphericalangle ADB$, rrjedh se $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$ nga në bazë të T.8.61. kemi $AD > AB$. Meqë $AD = AC + CD$, përkatësisht $AD = AC + CB$ (ngase $CD \cong CB$), rrjedh $AC + CB > AB$. Tash të tregojmë se p.sh. $AB - BC < AC$ ku $AB > BC$ Nga pjesa e parë e kësaj teoreme kemi $AB < AC + BC$ e prej këtu AB $BC = AC$, çka lypsej vërtetuar.  **Fig. 8.75.**
Se habla de condiciones para construir el triángulo: tres lados, tres ángulos, dos lados y el ángulo	Se dan criterios de congruencia. A partir de los cuales, se muestran los ocho casos posibles.

comprendido entre ellos, un lado y los dos ángulos contiguos (No se ha dicho que hay otras posibilidades).	
Clasificación de los triángulos según sus lados: Equiláteros, isósceles y escalenos. Clasificación de los triángulos según ángulos: obtusángulo, rectángulo y acutángulos. Sólo se muestra la terminología y dibujos correspondientes.	Clasificación de triángulos según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos. Clasificación de los triángulos según ángulos: obtusángulo, rectángulo y acutángulos. Se muestran mediante definiciones y dibujos.
Se dan definiciones para bisectriz y mediatriz. A partir de ellas, se dan enunciados de: - que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado Incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita, y - las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado Circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita. Se dan definiciones de Altura y mediana del triángulo. Se enuncian las propiedades: - Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamada Ortocentro. Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamada Baricentro, que es el centro de gravedad del triángulo. Los dibujos sólo indican un caso particular, sin explicitar el valor de las medidas y los puntos. Se compara círculo inscrito con circunscrito sólo para mostrar la distinción. 	Se dan definiciones de *puntos característicos del triángulo (*pp.174). Las propiedades de los puntos característicos se muestran como teoremas. Sea s_a, s_b mediatrices de los lados BC y AC. Basándonos en teorema 8.63, y 7.64 .... **Teorema 8.68.** Simetralet e këndeve të brendshme të një trekëndëshi (... , s_c) priten në një pikë (S), e cila është e baraslarguar nga brinjët e atij trekëndëshi ... Vërtetimi i kësaj teoreme bëhet duke aplikuar teoremat 8.65. dhe 7.66. Me... $E \cong SF \cong SG$ (fig. 7.79.) konstatojmë se mund të konstruktohet rrethi me q... dër në pikën S, e që i prek brinjët e atij trekëndëshi. Ky rreth quhet rrethi i br... dashkruar në $\triangle ABC$. Después de mostrar la existencia de una intersección, se denomina los puntos. Se ayuda con dibujos en los que se muestran los símbolos que aparecen en la demostración, se indican los vértices y se compara círculo inscrito con circunscrito. Fig. 8.78. Fig. 8.79.
Se muestran propiedades de los triángulos El Teorema de Pitágoras, por ejemplo, se muestra como una propiedad, sin demostración. **2.** En cualquier triángulo **acutángulo** se cumple: $c^2 < a^2 + b^2$.	Se muestran teoremas sobre las propiedades y se demuestran todas. El Teorema de Pitágoras se demuestra (pg 207) con la ayuda de relaciones basadas en proporciones, después de mostrar que la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que divide la hipotenusa.
Nota: nociones de medidas de superficie de los triángulos, cuadriláteros etc. están en: "Medida de Magnitudes y su didáctica" del proyecto EDUMAT.	Después en el *capitulo de medida* se da la Teorema para calculación de superficie de circunferencia: $S=a \cdot h_a/2$. Formula de Heron sobre calculación de superficie del triangulo sin demostración. Se dan y formulas y procedimientos para calcular la superficie de cuadriláteros y el perímetro. Método diagonal y método con triángulos, para superficies de los polígonos irregulares.

Como se puede ver, en EDUMAT, hay un planteamiento sobre los polígonos, y triángulos en particular centrado en reconocer la existencia de propiedades, pero ni se visualizan ni se demuestran. En FEUP se demuestran todas las propiedades y se visualizan mediante dibujos adecuados, aunque sean estáticos. Las clasificaciones en EDUMAT son sólo muestras de existencia, y en FEUP se definen. En el caso de los cuadriláteros se muestran bajo diversas características. Pero en los triángulos, ninguna de las dos propuestas usa la multiplicidad de características para clasificar. En particular, sobre los cuadriláteros, las diferencias son significativas como se ve en el cuadro siguiente.

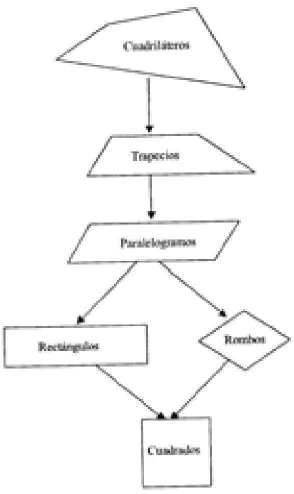
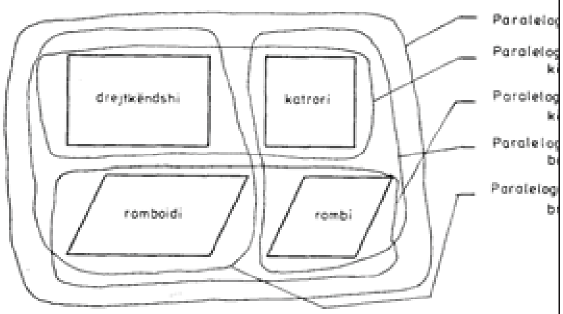
<table>
<tr><th>Proyecto EDUMAT</th><th>Programa FEUP</th></tr>
<tr><td>
Introducción de cuadriláteros como continuación de polígonos mas sencillez.
“Todos conocemos dibujos de diversos tipos de cuadriláteros…(pp.468)”
El problema se centra en la clasificación de los cuadriláteros. Se dan cuatro presentaciones de clasificación de los cuadriláteros, con preguntas para clarificar diferencias entre los cuadriláteros. Se dan varios criterios para clasificar, y se muestran los criterios para cada una.


Figura 12: Clasificación de cuadriláteros
Después se dan descripciones y propiedades de rectángulo, rombo, cuadrado, trapecio, trapezoide y cometa.
Se describen varias propiedades: vértices y diagonales, suma de ángulos es 4R, congruencia de los lados en los paralelogramos sin demostración ni visualización.
</td><td>
Primero se da definición de polígono y elementos de polígono (vértices, lados, ángulos,…). El cuadrilátero se define como polígono con cuatro lados (ángulos, vértices). Se dan definiciones para el trapezoide, para trapecio y para paralelogramo. A continuación se dan algunas Teoremas sobre propiedades de paralelogramo. (pp. 183)
Se da clasificación de los paralelogramos en: Paralelogramos rectángulos, paralelogramos no rectángulos, paralelogramos con lados iguales y en paralelogramos con lados no iguales.


Luego se dan las definiciones de rombo, rectángulo y de cuadrado.
Se dan teoremas para demostrar las propiedades de rectángulo (diagonales iguales, circulo circunscrito...), de rombo (diagonales perpendiculares, permite un circulo inscrito) y de cuadrado (diagonales congruentes y perpendiculares),
Las propiedades de trapecio (suma de ángulos de un lado es 2R, paralelismo de los lados) se muestran como teoremas.
</td></tr>
</table>

Vemos que en el estudio de los cuadriláteros se mantiene la misma observación anterior de que en FEUP se muestran las propiedades con demostración. Lo que distingue EDUMAT es el hecho de considerar clasificaciones según criterios diferentes, centrando la atención en la existencia de propiedades. Por su interés específico, a continuación mostramos las diferencias y semejanzas en relación al tratamiento de la circunferencia y del círculo.

Proyecto EDUMAT	**Programa FEUP**
Breve descripción de la circunferencia como una curva cerrada, convexa tal que la distancia de cualquiera de sus puntos a otro fijo es constante. Presentan sólo dibujos que significan sentido de diámetro, tangente, sector circular, segmento circular y círculo.	Se pone Definición de circunferencia como conjunto de puntos en el plano, que están a igual de distancia de un punto fijo. Se dan explicaciones que se llama el centro, el radio, la cuerda, el diámetro y el símbolo de circunferencia: **k(O,r)** – significa circunferencia k con el centro en el punto O y con el radio r. A continuación se dan con Definiciones los conceptos de sector circular, de círculo, de ángulo central, ángulo periférico, el segmento circular, la bobina circular y el sector de la bobina circular.
No existe el contenido *Relaciones entre punto, recta y circunferencia* en el programa.	Luego se dan relaciones de incidencia entre un punto y la circunferencia, una recta y circunferencia y relaciones entre dos circunferencias. También se dan definiciones de los cuadriláteros cordiales (inscritos) y tangenciales (circunscritos). Se demuestran teoremas sobre ángulo inscrito, ángulo que abraza un diámetro de 1R, y ángulo central doble de ángulo inscrito, ángulos opuestos suplementarios. (pg 194- 196
Se explica origen de palabra *tesela* y sentido de *teselacio*n como conjunto de teselas. Se muestran propiedades y tipos, que sólo se enuncian y no se demuestran, y tampoco se visualizan. Luego se dan ejemplos de teselados poligonales del plano y de teselados semiregulares.	No existen los contenidos sobre teselas el programa de FEUP.

Como observación de lo que hemos mostrado, en FEUP se piensa en la introducción de propiedades que tradicionalmente se daban en España en los años 60-70 en Escuelas de Formación de Profesores de la especialidad de Ciencias (Puig Adam 1967, Padilla, Fernández 1988), pero desaparecieron, quizás porque dichos contenidos pasaron al 1er Ciclo de ESO (12-14 años) en el currículo español. Con todo, sorprende que el tratamiento de la circunferencia en EDUMAT sea pobre en comparación con otros contenidos semejantes. Sorprende también que no se muestren visualizaciones de propiedades, que podrían hacerse con CABRI o similares.

2.6.1.3. Sobre el tratamiento del espacio de tres dimensiones

Es importante notar que el tratamiento del espacio no se da en FEUP sino que los poliedros se muestran en el capítulo de magnitudes y su medida, para justificar que se hable de volumen. Veamos a continuación el tratamiento de las formas espaciales.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Se comienza hablando de planos y líneas en el espacio. Sigue con curvas, superficies y sólidos. Se da definición de poliedros como sólidos delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas.	Se da definición de los poliedros como sólido limitado por un número de superficies poligonales. Se habla de tetraedro como ejemplo.
Pirámides y prismas son ejemplos de poliedros.	Se da introducción sobre prismas y pirámides, explicando todos elementos, propiedades y clasificación de mismos. Prisma se ve como figura que tiene dos caras congruentes y lados respectivamente paralelos. Notemos que con esta definición no se pone de manifiesto la traslación de la cara mediante el vector de las aristas paralelas. Se ilustra mediante dibujo que muestra las caras congruentes. Se dan el cubo, ortoedro, y el paralelepípedo como ejemplos. De aquí se pasa a las fórmulas de áreas y volúmenes.
Ponen diferentes criterios para clasificación de poliedros: regularidad, número de caras que concurren en los vértices, etc. Luego se pone explicación de Poliedros regulares. Más adelante se ven los deltaedros y se enuncian los poliedros semiregulares. El Teorema de Eulier sobre el número de vértices y de caras de un poliedro. Se da con demostración que hay cinco poliedros regulares. Se habla rápidamente sobre dualidad, mostrando el ejemplo del cubo y octaedro. Se habla de truncamientos, y se dice los que existen.	No hay este contenido El teorema de Euler está en el capítulo de topología.
Los conos y cilindros se introducen como sólidos que generalizan las pirámides y los prismas respectivamente. No hay formulas de calculación de superficie y volúmenes de los sólidos.	Las definiciones para cilindro y cono se dan después de definiciones de superficies cilíndricas y cónicas que se definan como conjuntos de rectas (generatriz) pasando (paralelo en caso de cilindro y incidente con un punto en caso de cono) por puntos de un circulo (directriz) ganando el superficie cilíndrico y cónico respectivamente. La definición de esfera se da como conjunto de los puntos igual distancia desde un punto fijo en el espacio. A continuación se dan las formulas para calcular superficies y volúmenes de estos cuerpos geométricos.

Se muestra en EDUMAT una falta de criterio unificado para la geometría del espacio como análogo al plano. En ambos, parece que se muestran tipos de figuras, pero desaparece la idea de reconocimiento de propiedades como se hizo en el plano. Sorprende que no se hable de cuerpos redondos, de gran importancia en Primaria, por reconocer los procesos de generación de forma más amplia que sólo hablar de cono, esfera y cilindro. No se habla en ninguno de los dos de figuras con rectas que no son prismáticas, etc. No se habla de esfera en EDUMAT. Sorprende que en FEUP no se haga un tratamiento formal del espacio como se hizo en el plano.

En cuanto a la orientación espacial y los sistemas de referencia, el tratamiento de EDUMAT parte de la realidad observable, para dar una visión simplemente intuitiva del valor de las coordenadas para la vida en las ciudades.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Localización de puntos. Sistema de coordenadas cartesianas, polares. Mapas y planos topográficos (las escalas, representaciones cartográfica,..)	Elementos de geometría analítica*. El sistema cartesiana de coordinadas (en el plano y en espacio), Las ecuaciones lineales (de recta), las ecuaciones de secundo grado (las cónicas), las ecuaciones del plano. *Los *Contenidos de geometría analítica se han añadido en el programa de la Facultad (desde 2003) y no fue parte del programa anterior.*

Las coordenadas polares se indican brevemente como definición, pero se salta a la Tierra para hablar de posiciones. No hay un tratamiento matemático realmente sobre el valor de las coordenadas asociadas a la idea de dimensión. En FEUP se hace un tratamiento de la geometría analítica, que ha desaparecido de la formación de profesores en España, aunque se ha visto en la Educación Secundaria.

2.6.2. Aprender transformaciones geométricas planas

Veamos cómo se tratan las translaciones, giros, simetrías y composición de movimientos.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Transformaciones explican como "movimiento". En grupo de transformaciones isométricas se distingan: translaciones, giros y simetrías. Definición de translación como movimiento de todos los	Primero se da Definición de simetría central con el centro O como aplicación (función) de punto F en punto s(F) de tal manera que F-O-s(F) y OF=Os(F). (F-O-s(F) significa que el punto O está entre los

puntos en la misma dirección y en misma distancia. Definición de Giros como movimiento de todos los puntos alrededor de un punto fijo (centro del giro) un cierto ángulo (ángulo de giro). Definición de simetría (axial) como movimiento rígido que se produce fijando una recta r y hallando para cada punto P otro punto P' de tal manera que la recta r es mediatriz del segmento PP'. Se da una breve definición de movimiento rígida de la simetría central y simetría rotacional, sin uso de definiciones formales.	puntos F y s(F) y los tres son coincidente). Expresión simbólica de simetría central: S(O):F→F' Definición de Simetría axial como función (aplicación). Expresión simbólica de simetría axial: S(s): F → F'. Teorema sobre segmentos rígidos durante la simetría axial. Ejemplos de simetría axial. Definición de simetría plana. Expresión simbólica de simetría plana: S(π) : F→F'. Algunos ejemplos de formas simétricas planas de cuadro, cubo, pirámides, etc. Observando número de ejes de simetría.
Definición de congruencia: dos figuras son congruentes si y solo si, una figura es la imagen de la otra mediante un movimiento rígido. Como aplicación de transformaciones continua introducción de Cubrimientos regulares del plano.	El concepto de congruencia se mostraba como concepto fundamental geométrico, explicado mediante los axiomas de congruencia.
Se muestra el Teorema de Tales, con explicación detallada, y se dan unas consecuencias. Construcción y problemas de sombras.	

Al hablar de transformaciones de **semejanza** es interesante notar que en FEUP se define independientemente de que se trate del plano o del espacio. Veamos las diferencias.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Definición de Homotecia como transformación geométrica que transforma cada punto P del plano, distinto de Centro O en el punto P' situado en la semirrecta OP de tal manera que OP=k·OP'. Definición de semejanza como secuencia de homotecia.	Definición de Homotecia como aplicación H(O,k) con el centro O y coeficiente k. Se muestra el caso directo o inverso. La Semejanza se define a partir de la homotecia. Se introducen casos de semejanza de dos triángulos; y algunas Pitágoras113es en el triangulo rectángulo (Teorema de Pitágoras).

Como se ha visto, en EDUMAT, las transformaciones geométricas se perciben como movimiento en el plano (no se dice nada del espacio), mientras en FEUP, se perciben como transformación funcional algebraica. La semejanza se ve como relación de equivalencia (reflexiva, simétrica, transitiva) y permite tratar cuatro teoremas de congruencia de triángulos.

2.6.2.1. Sobre los métodos geométricos y la enseñanza de transformaciones.

En el planteamiento de contenidos geométricos por parte del proyecto EDUMAT, se ve que domina el *método heurístico* y el método de demostraciones visuales. Por el contrario, el planteamiento de contenidos geométricos del programa de FEUP se ve que domina el *método de demostraciones formales* de los teoremas aunque también hay demostraciones visuales. Es decir, se suelen estudiar conocimientos comenzando por casos particulares, se hacen presentaciones gráficas, demostraciones visuales y generalizaciones; (al estudiar los cuadriláteros, se muestran propiedades, clasificaciones, y al final una tabla de clasificaciones -pp.475, EDUMAT).

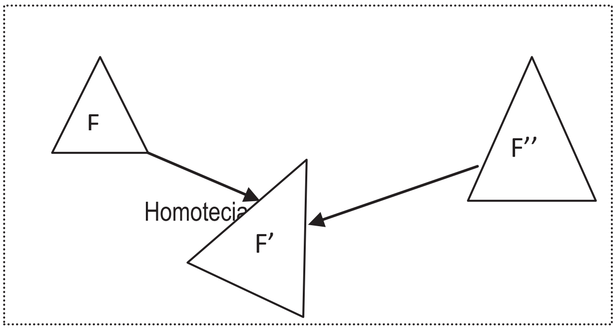
Por ejemplo, al estudiar el rectángulo, rombo y cuadrado, (pp.185, FEUP) primero se hace la demostración del teorema que dice que las diagonales del rectángulo son congruentes (iguales), después otro teorema que dice que en un rectángulo se puede construir la circunscrita, de manera análoga se demuestran los teoremas para el rombo y cuadrado y se saca la conclusión que: *como el cuadrado es un rectángulo, todas las propiedades de rectángulos son y propiedades del cuadro; como un cuadrado es un paralelogramo equilátero(rombo), todas las propiedades del rombo son también propiedades del cuadrado.*

Un ejemplo paradigmático: La semejanza como objeto de enseñanza y aprendizaje

Una de las cuestiones que nos parece de interés después de la lectura de los proyectos EDUMAT y programa de FEUP, es la relación existente entre estos dos programas, vinculados al tópico específico de la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje. ¿Cómo se hace formación geométrica de profesores de primaria con estos programas?, que integren dominios de conocimiento matemático y didáctico (García, 1997), mientras que la práctica la consideramos en un sentido amplio como el conjunto de acciones del profesor en la enseñanza y su justificación y fundamentación (Linares, 1999).

Son dos momentos claves de la práctica, la planificación y la acción, de la que dan cuenta la agenda y la gestión del contenido. En la agenda construida por el plan mental del profesor, se recogen un conjunto de objetivos y un plan de acción, las concepciones y la forma de *conocer del profesor un contenido especifico*. Nos interesa una atención a la forma de conocer el profesor la semejanza como objeto de enseñanza / aprendizaje entendida como la integración que se produce entre el *Conocimiento de la materia* (organización del contenido y aproximación al concepto) y *el conocimiento didáctico del contenido* (modos de representación y su uso,..etc.).

En el proyecto "EDUMAT", la semejanza está presentada como una transformación geométrica que cumple una serie de propiedades, definidas y explicitadas en la página 542. En el programa de FEUP, la semejanza está presentada con la definición: "*dos figuras F y F' son semejantes si la figura F' es congruente con una figura F'' que es homotéticamente correspondiente con la figura F.*



Consideramos para analizar los núcleos y relaciones que se establecen en la organización del contenido en la aproximación al concepto de semejanza, ante todo como relación *intrafigural.*

Proyecto EDUMAT	Programa de FEUP
Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante **con la idea de transformar** una figura en otra, cuando *las figuras no* forman parte de configuraciones de Thales, en la que se consideran los aspectos proyección y homotecia, con sus correspondientes razones. (pp. 543)	Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, **estando ausente la idea de transformar** una figura en otra, cuando las figuras *no forman* parte de configuraciones de Thales, en la que se consideran los aspectos proyección y homotecia, con sus correspondientes razones. (pp. 205)

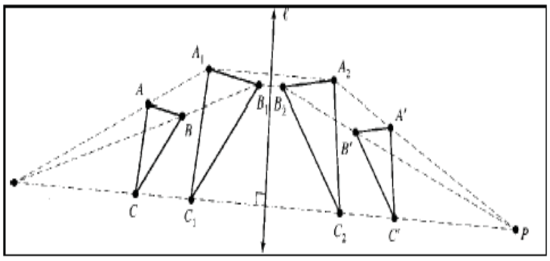


Fig. 13

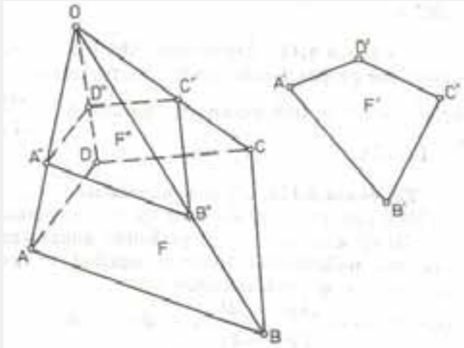


Fig. 8.155.

En segundo lugar, la aproximación al concepto de semejanza como transformación geométrica.

Proyecto EDUMAT	Programa de FEUP
Aparece la **noción de transformar** una figura en otra. Se percibe la transformación geométrica como una aplicación de los puntos del plano en el mismo.	**No aparece** la noción de trasformar una figura en otra. Aunque hay un tratamiento en el que se busca la transformación, resultante de dos o más transformaciones (una homotecia, y isometría)
Los modos de representación del concepto de semejanza	
Lenguaje natural, simbólico "F~G", figurativo y situación.	Lenguaje natural, simbólico "F~F'", figurativo y situación.
Organización del contenido de semejanza	
A través de dos núcleos principales: el teorema de Thales y la semejanza de figuras (triángulos). El Teorema de Thales enlaza con la semejanza de figuras a través con los criterios de semejanza de triángulos, presentando las tareas elegidas sobre semejanza de triángulos a estos en posiciones detalles. La forma de abordar la semejanza de figuras tratando de precisar el concepto intuitivo de "misma forma", que se concretaran en figuras geométricas, primero en triángulos y posteriormente en otros objetos (letra F-pp. 543).	A través de triángulos semejantes. La semejanza esta presentando las tareas elegidas (4 teoremas) sobre semejanza de triángulos en posiciones detalles. La forma de abordar la semejanza de figuras tratando de precisar el concepto de "aplicación" de un conjunto de puntos en otro conjunto de puntos. La semejanza de los triángulos se trata de enlazar con los teoremas en el triángulo rectángulo (pp.207). Estos últimos, completarían su organización del contenido.

En particular dentro del modo figurativo hemos considerado el aprendizaje que se favorece para describir cual es la aportación intuitiva de la figura en un problema geométrico. Además la profundización en cada uno de los núcleos en que se organiza el contenido nos permite decir qué aproximación al concepto se establece dentro de la *relación intrafigural* que, en el caso de la semejanza de los polígonos se amplía a una consideración cercana a la *transformación geométrica vista como útil.*

Los cambios relevantes que se han detectado en el programa de FEUP están relacionados con la inclusión y/o supresión del contenido y con el lugar que ocupan las demostraciones. Los contenidos se plantean en el sentido que el área se presente como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro. Asimismo, se procura que se resalten los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento geométrico, caracterizada como producto final, reforzando el uso del razonamiento empírico inductivo como método de trabajo que conducirá al desarrollo de aspectos deductivos.

Podemos concluir que en el programa de EDUMAT el objetivo principal de la enseñanza de las transformaciones geométricas es el saber ***informativo.*** Plantea la enseñanza de *la simetría como un método para clasificar formas y como movimiento. Reconocer el grado de simetría como cantidad de elementos invariantes de una figura. Valorar la presencia de la simetría en distintos fenómenos técnicos, científicos, sociales…Describir los movimientos o acciones que dejan invariante un mosaico o una retícula en términos de transformación geométrica*. Identificar algunas dificultades típicas en la enseñanza de los contenidos en la educación primaria mediante el uso de rejas y mosaicos. La importancia de las transformaciones se basa en la idea que es necesario cambiar la perspectiva de geometría inmóvil e introducir conceptos, esquemas, material, etc., que potencian una visión de la geometría más dinámica donde las figuras y las formas en el espacio se mueven y se transforman. La formalización y la estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo se considera la meta de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales que permitan interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad y no ha de ser el punto de partida como es el caso del programa de

FEUP. Las actividades sobre transformaciones geométricas nos hacen repensar el contenido matemático.

Los temas dentro del programa de EDUMAT se centran en aspectos didácticos, históricos o matemáticos de manera indistinta, sin estar clasificados estrictamente según estos criterios. Las distintas lecciones pueden abordar un mismo tema con niveles distintos de dificultad, bajo diferentes puntos de vista o utilizando técnicas diversas. En los contenidos sobre transformaciones geométricas encontramos dentro del bloque *la enseñanza de la geometría*, donde se hace el tema de isometrías y semejanzas en el plano o dentro del bloque *aspectos temáticos en primaria* el tema *mirar y ver a través de transformaciones*.

2.6.2.2. Tratamiento diferenciado del conocimiento didáctico

Con respecto al contenido didáctico (Shulman 1986) consideramos las diferencias en los aspectos que suelen introducirse: orientaciones curriculares, desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje, situaciones y recursos didáctico, conflictos en aprendizaje, instrumentos de evaluación y análisis de situaciones escolares.

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Orientaciones curriculares: Se dan los objetivos generales de la educación matemática para Primaria que se mencionan contenidos de geometría; Se ponen quienes son hechos, conceptos, y principios, quienes son procedimientos y actitudes, valores y normas que tienen que desarrollar encima de contenidos de geometría. Después se dan principios y estándares 2000 según NCTM (EE.UU.) como objetivos generales del nivel infantil y primario. En ejercicio se pide a hacer una comparación entre orientaciones curriculares de España y Principios y estándares 2000 del NCTM.	Introducción general pedagógica sobre enseñanza y aprendizaje.
Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje: teoría de desarrollo según Piaget; Teoría de desarrollo del pensamiento geométrica según Pierre van Hiele - "*los niveles de van Hiele*", los estudios de Dickson, Brown y Gibson para transformaciones geométricas, etc.	No existe ese contenido

Situaciones y recursos didácticos: Juegos de psicomotoricidad; actividades de clasificación, construcción, exploración, propiedades generalización; Recursos didácticos - Geoplano, Tangram, papel cuadriculado, cubos de diferente material, programas para estudiar geometría: Logo, Cabri, etc.	*Maneras de hacer*- técnicas matemáticas (que permiten resolver problemas, por ejemplo en geometría se ejerciten técnicas de construcciones mediante lugares geométricos, etc.)
Conflictos en aprendizaje. Instrumentos de evaluación: una colección de ejemplos utilizado en diversas investigaciones para evaluar los conocimientos geométricos de los alumnos.	*Normas pedagógicas* de enseñanza y aprendizaje (métodos, tipos etc.)

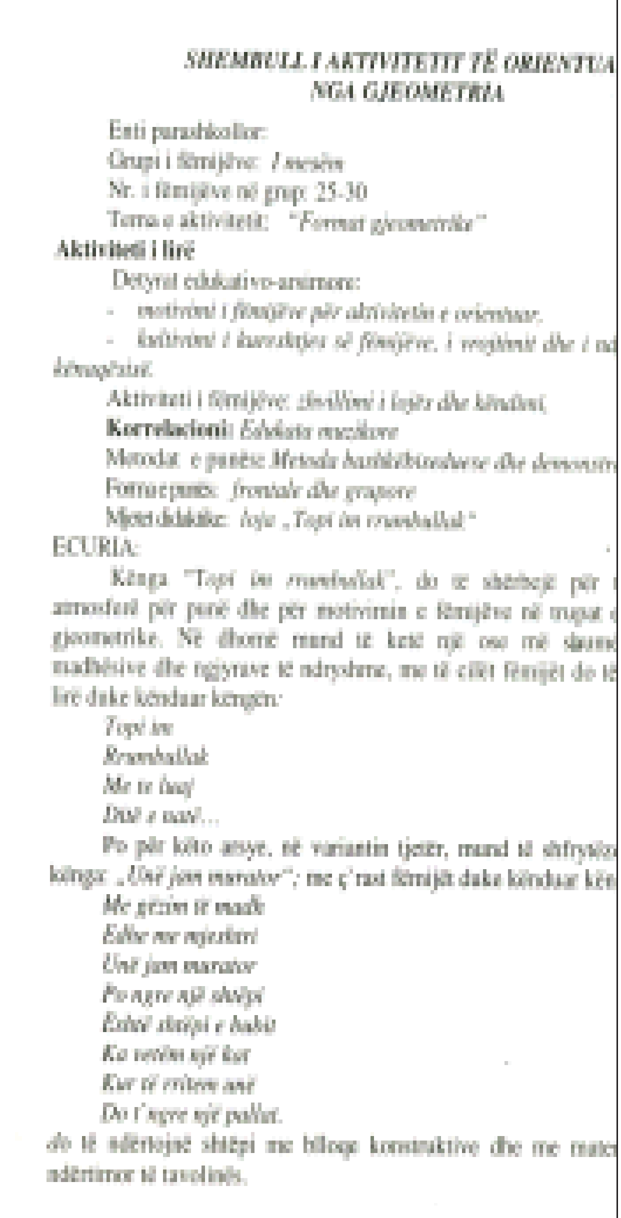
Pero además, la formación docente debe basarse en la realización de observaciones y análisis sobre la práctica, que se interpreta de formas muy diferentes, como se ve a continuación:

Proyecto EDUMAT	Programa FEUP
Taller de didáctica: *Análisis de situaciones escolares:* Respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación; análisis de algunos actividades escolares; Análisis de materiales didácticos	*Clases de matemáticas* (tipos de clase, estructura de una clase, duración de clase y de fases de clase, etc.), regla, compás, … *Planificación, ejemplificación* de clases: se hacen modelos de diferentes clases (clases de explicación, clases de ejercicios, clases de construcción de figuras): Se *hacen prácticas* de clase por parte de unos estudiantes según planificaciones que se hacen juntos con el profesor en la Facultad. En una clase de Primaria, un estudiante actúa como profesor, presentan todos otros estudiantes y el profesor de facultad. Después, en la facultad se hace un análisis de esta clase.

A partir de lo que hemos observado, en EDUMAT se mencionan orientaciones curriculares de educación primaria, mientras que en FEUP no se trata a las orientaciones curriculares sino a las orientaciones generales de enseñanza y aprendizaje.

En este caso, podemos concluir que los futuros profesores de primaria que acaban su formación según FEUP no tienen los conocimientos necesarios sobre los objetivos de educación geométrica en Primaria. En el proyecto EDUMAT se introducen conocimientos teóricos sobre desarrollo y progresión en aprendizaje (Piaget, van Hiele, etc.). Este contenido no aparece en el programa de FEUP.

Una diferencia observable entre EDUMAT y FEUP consiste en la acción docente: planificación de la clase, análisis profunda de una clase de matemáticas actuando como futuro profesor, son actividades que no hace EDUMAT pero lo hace FEUP, como se ve en la figura 2.22.


SHEMBULL I AKTIVITETIT TË ORIENTUA NGA GJEOMETRIA

Enti parashkollor:
Grupi i fëmijëve: I mesëm
Nr. i fëmijëve në grup: 25-30
Tema e aktivitetit: "Format gjeometrike"
Aktiviteti i lirë
Detyrat edukativo-arsimore:
ECURIA:

Ejemplo del diseño de la actividad geométrica

Instituto:

La edad de niño:

El numero de los niños:

La tema de la actividad: *"formas geométricas"*

Actividad libre:

Objetivos educativos:

-motivación de los niños para la actividad orientada.

- empujar la curiosidad de los niños para las formas geométricas

Actividad con los niños, el desarrollo del juego y cantar

Correlación: *Educación música.*

Métodos del trabajo: *Método dialógico, demostrativo y juego.*

Forma del trabajo: en grupo y frontal.

Recurso didáctico: *el juego "Mi pelota redondo"*

Procedimiento: *La canción "Mi pelota redonda" servirá para crear una atmosfera de trabajo y para motivación de los niños al trabajo con los objetos de forma geométrica. En la clase debe tener uno o más pelotas de diferentes tamaño y colores, con las cuales los niños jugaran cantando la canción:*

Mi pelota, redonda, juego con ella, día y noche,…"

Con el mismo objetivo se puede utilizar otra canción…

La actividad orientada.

Objetivos educativos*: reconocer y aumentar los conocimientos sobre objetos geométricos….*

Funcionales*: desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de reconocer diferentes formas geométricas.*

Correlaciones: expresión lingüística, ,,,,,,

Figura 2.22. Ejemplo de la planificación de una clase por parte del futuro profesor de primaria

En efecto, se da un esquema de cómo debe hacerse la planificación de una actividad para la clase de Primaria. Primero se plantea una *actividad libre*, donde se muestran los objetivos educativos, las relaciones con otras áreas, los métodos de trabajo, la forma de trabajo y los recursos didácticos, luego la *actividad orientada* con sus objetivos educativos, de contenidos y actitudes, etc., y finalmente se da una plantilla para el análisis de la actividad

2.6.3. Aprender a enseñar la construcción del contenido geométrico

Para resumir los principios sobre los que se definen los esquemas representativos de los contenidos geométricos en ambos programas, hemos elegido estos aspectos de enseñanza de geometría y aspectos didácticos de formación geométrica: Aspectos del uso de materiales como mediadores, competencia interpretativa del espacio geométrico, sobre la construcción geométrica, sobre la comunicación geométrica, y la consideración de lo visual y lo analítico.

Sobre el conocimiento del currículo escolar

Los docentes de FEUP deben saber que su currículo no incluye estudios de objetivos curriculares, sino objetivos de educación en general, pero en análisis de clases por parte de futuros maestros, se conocen contradicciones entre pensamiento de ellos y acción práctica, reconociendo contenidos no matemáticos (psicologías, sociologías, pedagogías, etc.). Al observar los objetivos curriculares, notamos que el proyecto EDUMAT se dedica al estudio del currículo de matemáticas, al nivel de propuestas curriculares básicas, se presenta una síntesis de las orientaciones curriculares del MEC para el área de matemáticas, incluyendo los fines y objetivos, contenidos y evaluación, así como las principales características de los Principios y Estándares del NCTM. Esta información aporta a los maestros en formación una visión complementaria y crítica, tanto de las orientaciones propuestas a nivel del estado español como de las respectivas comunidades autonómicas. Por su interés específico resaltamos lo que ambos proyectos dicen respecto a lo curricular en cuanto las transformaciones geométricas.

Diseño Curricular Base del MEC (España)	Planos y Programas de primaria del MASHT de Kosova
Conceptos, hechos y principios: No mencionen conceptos, hechos y principios (EDUMAT, pp.550) **Procedimientos:** 1. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos 2.Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado (puntos y ejes de simetría).	**Objetivos generales** Simetría. Simetría axial, los puntos simétricos, las rectas simétricas, las figuras simétricas. **Resultados esperados:** -descripción de volteos de las figuras -identificación de las figuras simétricas -construcción de las figuras simétricas -identificación de los objetos simétricos en el rodeo de alumno.

El objetivo actitudinal de gran interés como medio de exploración y acceso a los conceptos: por ejemplo, la precisión y cuidado en el uso de instrumentos de dibujo se mencionan en el Diseño Curricular Base de MEC, como también la valoración de la belleza en las composiciones geométricas. Con este objetivo intenta lograr una buena actitud general hacia la geometría.

2.6.3.1. Los materiales como mediadores

Los materiales manipulativos sirven como *intermediarios* entre *el conocimiento geométrico* y *el del propio alumno*, permitiendo *descubrir* conceptos y propiedades geométricas, a partir de las propias intuiciones.

Los conocimientos sobre los materiales manipulativos en el proyecto EDUMAT están en capitulo de *Conocimientos Didácticos,* mientras que en el Programa de FEUP no encontramos este contenido de manera explícita. La construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de los problemas, en la búsqueda de soluciones, en la manipulación de objetos, en la visualización de ciertas imágenes, en la construcción de formas etc. Todo eso, *es un manantial rico de conjeturas y una herramienta de diagnostico de las ideas y conocimientos previos que los estudiantes tienen ante una determinada tarea* (Alsina y alt., 1997). Por otro lado, Castelnuovo (1981) apoya la idea del *recurso como activador del conocimiento*, cuando afirma que el propósito consiste en hacer, manejar y construir y hacerlo de forma que, a través de la construcción, los estudiantes llegan al descubrimiento.

El Geoplano (pp.506, EDUMAT) apoya los procesos de construcción de triángulos y cuadriláteros, fácilmente. También, permite descubrir con facilidad la propiedad de Teorema de Pitágoras y otras. Las situaciones de juego (pp.554-EDUMAT) parecen muy recomendables para conseguir diversos niveles de desarrollo del pensamiento geométrico por parte de los alumnos. Por estas razones, es necesario que los futuros profesores tengan la posibilidad de conocer el material, manipulando e investigando acerca de sus posibilidades y observando cómo su presencia en el aula hace realizar muchos de los supuestos que sustentaban la manera de enseñar.

2.6.3.2. Competencia interpretativa del espacio geométrico.

Diversos estudios y currículos internacionales indican que debe adquirirse competencia interpretativa del espacio (*Trends in International Mathematics and Science Study*- TIMSS, is continuing to investigate pupil achievement, the mathematics curricula, teaching methods, and so on, across almost 50 countries around the world (see, for example, Mullis *et al*, 2000)). Esta capacidad puede compararse a la comprensión de un texto escrito, el saber leer implica extraer una información global a partir de las relaciones entre letras, palabras y frases. Si para el aprendizaje de la lectura se hace imprescindible trabajar con textos que tengan significado real, en el aprendizaje de la geometría debe ser necesario trabajar al menos con modelos de esa realidad. La creación y estudio de modelos hechos con materiales puede hacer de puente entre: lo que percibe la criatura de manera intuitiva y, lo que puede llegar a descubrir cuando se le da la oportunidad de construir, deshacer, comparar, etc.; Esto ocurre dentro de un proceso en el cual se aprende a descubrir que la realidad geométrica no es siempre ni únicamente aquello que vemos (con ojo), sino lo que somos capaces de interpretar a partir de la información que tenemos delante y la que poseemos como fruto de muestra experiencia.

La capacidad de observación del espacio consiste ante todo en:

(a) la reproducción de figuras del espacio de manera libre o con pautas predeterminadas,

> Ejemplo: actividad 12.1, pp. 512 EDUMAT. Dar a los alumnos una figura recortada en cartulina. Los alumnos tienen que describir, dibujar o construir con plastilina (u otro material) todos los sólidos que se pueden lograr a partir de esa forma. Otro ejemplo, dar a los alumnos un modelo de un sólido, o describirlo oralmente. Los alumnos tienen que dibujar y recortar una o mas formas.
>
> Ejemplo: programa FEUP pp.283: se describen oralmente las propiedades de prisma, cono, cilindro o pirámide (se elige por ejemplo la pirámide regular de base cuadrada, es decir formada por encuadrado, y cuatro triángulos equiláteros, y se pide realizar el pirámide). Pide construirla mediante cartulinas u otra material.

(b) Por otra parte, la reproducción de figuras a partir de modelos. En este caso, si el modelo es una figura tridimensional estamos trabajando la relación espacio-espacio;

Ejemplo: taller matemático 14, pp.491 EDUMAT - la sección transversal de una esfera, cubo, cono etc., es una figura bidimensional.

(c) La reproducción en el plano de figuras tridimensionales. Las producciones por parte del docente, así como el intercambio entre el alumnado resulta muy enriquecedor porque permite: Contrastar las diferentes interpretaciones; el uso de las representaciones como un instrumento de comunicación; la detección de errores por parte de los propios alumnos que provocan aprendizaje; etc.

Ejemplo: construcción y exploración de sólidos, actividad 12.2, pp.512, EDUMAT- Se da a los alumnos un modelo de un sólido. Los alumnos tienen que dibujar dicho sólido en el papel.

Ejemplo: - presentaciones de los sólidos en el plano, pp.274, programa de FEUP: Se pide presentación de los cuerpos geométricos en el papel (bidimensional).

Ejemplo: - orientación en el espacio, pp.590, EDUMAT: Tres sólidos diferentes están representados en diversas posiciones (hay 12 posiciones en total). Se pide determinar que sólidos son equivalentes.

(d) La reproducción en tres dimensiones a partir de representaciones en el plano. En este case tenemos visualización de las figuras, teniendo en cuenta las partes de la figura que no se ven o se ven parcialmente. También tenemos la imaginación de la figura en su totalidad, aunque se ve solo una parte. El interés que pueden tener estas propuestas consiste en la incidencia de estos hechos en el desarrollo profesional de los profesores, cuando las propuestas que se incorporan son fruto de la reflexión y no son solo una rutina.

Ejemplo: - puntos de vista, pp. 590, EDUMAT. Tres objetos (una caja p, una botella b, y una jarra r) se disponen sobre una mesa como se indica en la figura. Las imágenes que hay debajo representan vistas, según diferentes puntos de vista. Determinar el punto de vista de cada una de las imágenes.

2.6.3.3. Sobre los procesos de construcción geométrica

En la tradición geométrica en Kosova el proceso a través de cual se ha ido construyendo la geometría es desde formas menos dimensionales a formas tridimensionales. Los contenidos de geometría del programa de FEUP se dividen en capítulos: El primer capítulo estudia la geometría del plano: primero se dan los conceptos fundamentales (básicos), axiomas, definiciones, teoremas, siguiendo con perpendicularidad, paralelismo, el triángulo, polígonos, cuadriláteros, circunferencia, transformaciones isométricas, transformaciones de semejanza. En el segundo capítulo que se llama Magnitudes y medida, se estudia: la definición de magnitudes, medida, medida de longitudes, medida del área de cuadriláteros, medida de volumen, el perímetro de polígono, la superficie del polígono, el perímetro y la superficie del circulo, la *Definición* de los poliedros y su clasificación, la superficie y el volumen de los poliedros, la definición de esfera y su superficie y su volumen.

Se toma el sistema axiomático de Pogorelov (Pogorelov V. A. traducción en serbio del año 1963) que es una adaptación del sistema axiomático de geometría por Hilbert (*Grundlagen der Geometrie -1899*). En total hay *24 axiomas* (8 de incidencia + 5 de ordenación + 9 de congruencia + 1 de continuación + 1 de paralelas), *138 Definiciones y 131 Teoremas.*

2.6.3.4. Sobre la comunicación geométrica

La comunicación en geometría consiste en poder reconocer un objeto a partir de una descripción literaria, identificar procesos, establecer comparaciones, hablar de conjeturas, escribir deducciones, etc. En suma, hablar lo mejor posible en geometría. En los contenidos de geometría del programa de FEUP, hay interpretaciones sobre los conocimientos. No hay ni una pregunta, porque no se planifica el *diálogo* como manera de conseguir nuevos conocimientos. Cada concepto u otro conocimiento se exponen en principio y después se ponen otros conocimientos ligados en manera de presentar a los estudiantes.

Por otra parte, en el proyecto EDUMAT, se encuentra el *diálogo* como herramienta de comunicación entre el docente y los estudiantes acerca de nuevos conocimientos. Aquí, hay muchos casos donde se hacen las preguntas en principio hasta los estudiantes conocen propiedades (o características que desean) y después se especifica definición o conclusión.

> *Ejemplo*: Los cuadriláteros y su clasificación, pp.468, EDUMAT:
> *Realiza un dibujo de cada uno de los cuadriláteros que conozcas y escribe el nombre. Da una definición de cada cuadrilátero y realiza una clasificación de ellos. Escribe el criterio utilizado para su clasificación. La figura 1 representa una clasificación de cuadriláteros.*
>
> *- ¿Conoces algún cuadrilátero que no esté en esa clasificación?*
>
> *- ¿Qué criterios crees que se han utilizado para hacer la clasificación?*
> *- ¿Cómo interpretas las flechas que unen cada grupo de cuadriláteros?*

Teniendo en cuenta las flechas dibujadas
*- **¿Cómo definirías el rombo? ¿Y el cuadrado**? ¿Se pueden definir de otra forma?..*

A continuación, en las paginas siguientes (pp.472, 473) se ponen definiciones sobre el rombo, el cuadrado etc.

2.6.3.5. La consideración de lo visual y lo analítico

La geometría escolar acentúa habitualmente los métodos analíticos, la resolución de problemas mediante ecuaciones, etc., y *una tradición de poca visualización.* **"***Visualizar es tener la capacidad de producir imágenes que ilustren o representen determinados conceptos, propiedades o situaciones*" dice Alsina (Alsina y otros; 1997 p.p. 40). Pero, visualizar es también capacidad de realizar ciertas lecturas visuales a partir de determinados representaciones. Capacidades de realizar el dibujo de dos rectas perpendiculares, el punto de intersección de dos rectas en el plano etc., forman parte de la visualización. "*El pensamiento visual incluye la habilidad de visualizar, pero va más allá, al poder incluir aspectos tales como el reconocimiento rápido de determinadas formas o categorías, la manipulación automática de determinados códigos, etc."* (Alsina y otros, pp.41, 1997).

En el programa de FEUP, un ejemplo de conexión entre visualización y uso analítico, es asociar una imagen, o visualizar el procedimiento de resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas, con la intersección grafica de las rectas, o con el paralelismo de las rectas, intersecciones de la recta y una circunferencia etc.
En EDUMAT no encontramos ningún ejemplo sobre lo analítico, aunque si se trata de visualización (puntos, rectas, pp. 459, segmentos y ángulos, pp. 461, curvas y regiones, pp. 462, triángulos pp. 465, etc.).

2.6.4. Sobre la componente actitudinal en lo profesional

Teniendo en cuenta el desarrollo de una formación de profesores de Primaria en geometría, consideramos aspectos formativos y profesionales que se destacan en el programa de EDUMAT y en el programa de FEUP. Como Giménez aporta en su Proyecto Docente (Giménez, 1997) "*Nuestra creencia es que el contenido de la Educación matemática contiene rasgos de la psicología pero también conocimiento del contenido matemático y educativo que aborda técnicas de enseñanza eficaces".*

a) Integración de los estudiantes en el proceso constante de crítica constructiva

Los futuros profesores de Primaria deben reconocer que la planificación de una clase de docencia en primaria ayuda a identificar situaciones donde tiene que enseñar como estimular y favorecer el proceso de aprendizaje de los niños, como reflexionar sobre el papel del maestro en la elaboración de situaciones escolares.

> Ejemplo: Planificación y actuación de un clase en Primaria por parte de futuro profesor, para un determinado contenido matemático (FEUP). Analisis de una clase con todos futuros profesores desde punta de vista de los métodos utilizados, estudiar los diálogos profesor –estudiante etc., y sacar conclusiones sobre *que esta hacho bien* y *que puede ser mejor*.

b) El papel de la teorización de la génesis de los conocimientos

Una instrucción matemática significativa debe atribuir un papel clave a la interacción social, al discurso del profesor, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El maestro en formación debe ser consciente de la complejidad de la tarea de la enseñanza si se desea lograr un aprendizaje matemático significativo. Cuando queremos enseñar un cierto contenido matemático, tal como las formas geométricas, hay que adaptarlo a la edad y al conocimiento de los alumnos, con lo cual hay que simplificarlo, buscar ejemplos asequibles a los alumnos, restringir algunas propiedades, usar un lenguaje y símbolos más sencillos que los habitualmente usados por el matemático profesional.

> *Ejemplo:* (***niveles de van Hiele***) Clasificación de formas (nivel 0), clasificar las formas por nombres de propiedades y no por nombres de las formas (nivel 1), etc. (pp. 504,505, EDUMAT).

Como se observa, según esta concepción, la matemática se asemeja mucho a un mero juego en el que se introducen unos cuantos objetos (no importa para nada lo que estos objetos puedan ser) que se manejan de acuerdo con ciertas reglas convenidas. Esos objetos son, en el caso de la matemática, esas ***cosas cualesquiera*** a las que Russell alude, de las que se pueden afirmar (se suponen verdaderas) tales y cuales proposiciones (aunque en realidad no es necesario ni nos debe importar que sean verdaderas o no). Las reglas de combinación de esos objetos son en el caso de la matemática las reglas deductivas, es decir "*las reglas por las cuales de unas cuantas afirmaciones se siguen lógicamente otras*" (Guzmán 1998).

El acercamiento a los conceptos geométricos, en la formación docente se debe hacer siempre de manera intuitiva y primando los procesos inductivos sobre los deductivos. Esta concepción constructivista de las matemáticas va a permitir una enseñanza basada el "hacer matemáticas", en contraposición al modelo que toma a los alumnos como meros receptores del conocimiento transmitido (podemos decir en el caso de programa de FEUP). Además, el trabajo tendente a desarrollar de manera constructiva los contenidos hace que éstos tengan sentido en sí mismos, mientras que el método seguido para la aproximación constructiva a los conceptos es evidente a distintas situaciones de la vida diaria, en cuanto que se basa en criterios de resolución de problemas o de puesta en práctica del método científico de acercamiento a la realidad.

Capítulo 3.

Marco teórico

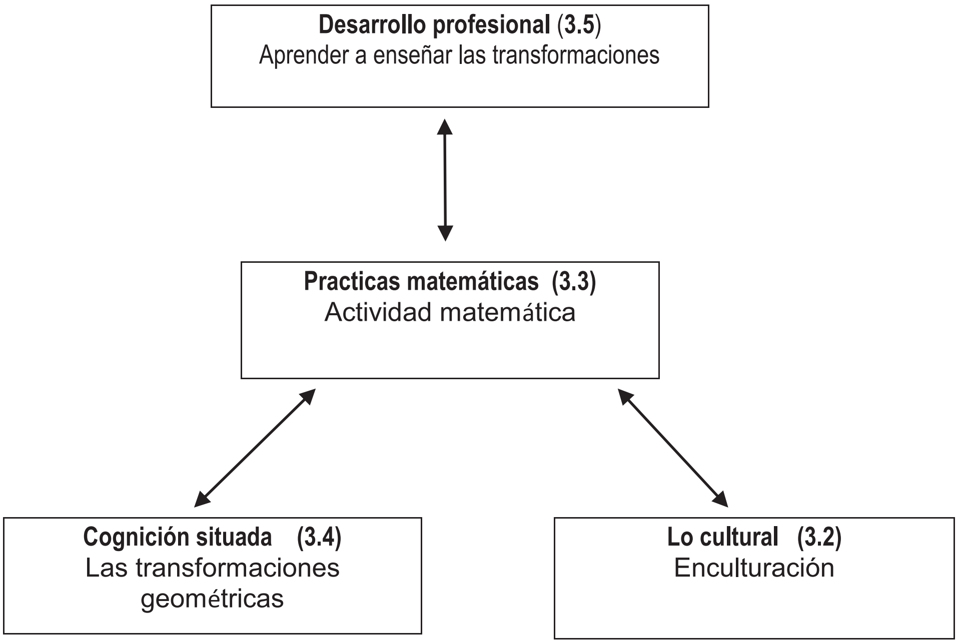
3.1. Introducción

Uno de los aspectos importantes, en esta tesis, es el de analizar las características del proceso de aprender a enseñar transformaciones geométricas desde un ámbito cultural, ya que la enseñanza y el aprendizaje se producen en diferentes contextos socioculturales, los cuales son importantes en la formación de maestros, ya que estos van a transmitir junto a las matemáticas una visión de la cultura de cada país donde están inmersos.

Eso implica identificar las características de la actividad matemática. Al mismo tiempo que tratamos de presentar una propuesta, nos proponemos analizar su desarrollo diferenciado, aportando posibles vínculos interculturales. Es decir, reconocer qué sucede cuando se ponen en contacto experiencias culturales distanciadas a los estudiantes como es el conocimiento mutuo del trabajo escolar, aunque sea brevemente. Por todo ello inicialmente usaremos el marco teórico sobre la práctica del profesor considerando la enseñanza desde una perspectiva profesional y contándose en el aspecto del conocimiento y su uso.

La capacitación del profesor para el ejercicio de su actividad profesional es un proceso que presenta múltiples facetas y está siempre incompleto (Ponte, 1998). Por ello, nos proponemos definir qué significan para nosotros los principios de la cognición situada y enculturada del conocimiento matemático, dado que el estudio se propone analizar cómo se construye un significado matemático y didáctico de los conceptos sobre enseñanza de transformaciones geométricas en un contexto de culturas diferentes y análisis de algunas de sus diferencias.

Los tres ejes que vamos a considerar en el capítulo se muestran en la figura a continuación.



Así, ante todo definimos lo que es la actividad como práctica situada socialmente y enculturada (3.2.) A continuación, definimos nuestra posición acerca de *la escritura cultural* como un conjunto de características culturales del proceso de aprender a enseñar (en nuestro caso, las transformaciones geométricas), en un ámbito escolar-institucional (en formación de profesores para Educación Primaria).

En el apartado 3.3., tratamos los principios desde los que enfocamos la construcción de los conocimientos sobre contenido matemático de transformaciones geométricas. En el caso de futuros docentes, nos centramos en la construcción de la noción de transformación, sus significados como atribuciones, y el establecimiento de procesos de abstracción reflexiva. Se analizan las posiciones que fundamentan nuestro análisis posterior del proceso.

Finalmente, en el apartado 3.4., elaboramos las bases sobre las que nos apoyamos en cuanto el desarrollo profesional de los profesores de primaria, considerando que no sólo nos preocupa el contenido matemático sino en el análisis de la práctica.

3.2. Lo cultural y la práctica matemática

Diferentes autores destacan que el contexto, no únicamente el referido al contenido del problema, sino también aquel en el cual se desarrolla la acción, que puede ser escolar o del ámbito externo a la escuela - en que se utilizan las actividades matemáticas, tiene importantes implicaciones relacionadas con su aprendizaje (de Abreu, 2000). En este estudio, el centro de acción es la actividad matemática del individuo en el contexto sociocultural en que esta se desarrolla. Se analizaran distintos factores que median en los procesos cognitivos del alumnado. Desde la óptica cultural, pondremos el énfasis en como determinadas herramientas culturales (Bruner, 1996), y su forma de utilización, influyen en la cognición individual o de grupo. Desde la óptica social, plantearemos como las acciones y relaciones específicas entre personas, dentro de un grupo, influyen también en los procesos cognitivos.

Para comprender la práctica matemática como social (Bishop 1989) consideramos cuatro niveles (figura 3.1): *el individual, la clase, el centro y la sociedad. La quinta escala nos lleva a la cultura, que es la otra importante área general".*

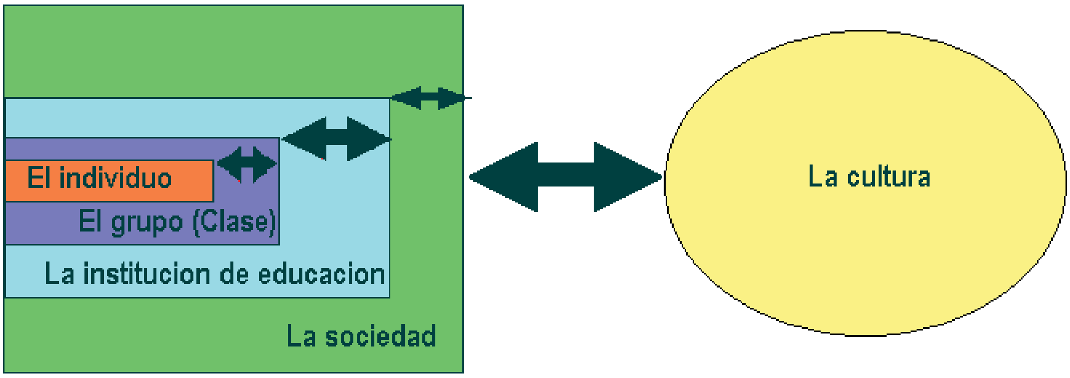


Figura 3.1. Relaciones entre aspectos sociales y la cultura

Se imparten matemáticas en todos los niveles, y precisamente lo complejo es que el conocimiento matemático se entrelaza en esos distintos niveles. Las diferencias entre grupos, señalan parte de las características culturales de las sociedades. Reconocemos que este proceso, que hemos llamado "situar las matemáticas" es el que permite construir el significado en el contexto para desarrollar su capacidad de comprender, desarrollar y usar las matemáticas (Boaler 1993).

(a) **La *escala individual.*** Muchos autores (Hoyles, 1982; Webb, 1992; Bishop, 2000) demuestran que el aprendizaje del individuo está influenciado por el aprendizaje de los demás. Todos sabemos por nuestra experiencia lo importantes que son los otros estudiantes, y cualquier profesor conoce la interacción entre sus alumnos. Sólo necesitamos observar una clase 10 ó 15 minutos, para que, rápidamente, nos enteremos de quién influencia a quién; cuáles son las personalidades dominantes y cuáles los “seguidores”. Esto no significa que los aspectos cognitivos no estén también muy implicados en el proceso.

El hecho manifestado de que los individuos tengan formas de conocer comunes y con procesos semejantes no impide que nos preguntemos ¿cómo son estos procesos y bajo qué paradigmas podemos explicar lo que ocurre en cada acto de cognición personal? Es cierto que algunos planteamientos no admiten la componente social del conocimiento, pero ya existe una amplia visión constructivista-social (Ernest 1997) que acepta como fuente del conocimiento matemático la interacción material y grupal del individuo. Hay que analizar lo que ocurre dentro de cada individuo con los análisis de las teorías de la cognición, cuyo objeto específico es el proceso interno al sujeto, que da por resultado el conocimiento subjetivo. La realidad del sujeto que actúa está basada en las interpretaciones de éste. Estas interpretaciones subjetivas se desarrollan a través de la interacción social con otros sujetos y así se transmiten socialmente los esquemas de interpretación, estructuración y actuación transmitidos. La interacción social tiene lugar entre personas que forman mutuamente expectativas, interpretaciones de cada uno, que comprueban estas interpretaciones mediante procesos de negociación, y que producen así significados, estructuras y normas de aceptación y de validez (Oliveras 1996).

Interpretamos que se consigue reconocer abstracciones, si se propone un encuentro mediado con recursos del entorno en la propuesta de actividades y prácticas. Por ello, por ejemplo, consideramos que es posible que sea bueno utilizar la técnica de bordar en las tareas sobre transformaciones, y usar espejos usuales y traslúcidos para clarificar simetrías y rotaciones y pensar la transformación como relación, no sólo como consecución de reglas.

(b) **La clase como grupo de personas.** Reconocemos que las experiencias sociales en grupo aula son únicas y se basan en constituir una comunidad de práctica especial por el hecho de compartir la formación docente en Primaria. Así, a lo largo de procesos de estudio, resulta clave identificar algunas características de dicho grupo cuando construye matemáticas.

(c) La institución de enseñanza. En este nivel lo más importante resulta identificar como los programas de estudio particulares en dicha institución, influyen sobre la planeación y las condiciones en las que se enmarca la construcción matemática.

(d) La sociedad. *El cuarto nivel de aspecto social incluye* a la sociedad en su sentido más amplio. Ciertamente no está claro que la formación de profesores en Kosova tenga que ser la misma que en Catalunya (España), los Estados Unidos o Francia. Cada país tiene sus propios planes políticos, económicos y sociales, y pueden ser útiles para nosotros los estudios e investigaciones sobre sus diferencias y semejanzas. Hemos de tener en cuenta nuestras diferencias y sus implicaciones.

(e) Enculturación de significados. El aspecto cultural según Bishop (1988) se considera como quinta escala del aspecto social importante y como área general. A partir de investigaciones antropológicas y estudios comparativos de diferentes culturas, se ha aclarado que las matemáticas que nosotros conocemos son un hecho cultural, y que otros grupos culturales han creado ideas que claramente son "otras matemáticas". Es decir, que ***todos*** los grupos culturales desarrollan matemáticas, igual que todos desarrollan lenguaje, religión, juegos y arte:

> *"Hace años el criterio general mantenía que las matemáticas eran un conocimiento independiente del entorno cultural. Después de todo, se argumentaba «menos por menos es igual a más», en todas partes, y los triángulos en cualquier lugar del mundo tienen ángulos que suman 180 grados en total. Sin embargo este punto de vista confundía la "universalidad de la verdad" de las ideas matemáticas, con la base cultural de este conocimiento. De acuerdo en que esas afirmaciones son ciertas en cualquier parte del mundo, ya que las ideas se descontextualizan y abstraen de manera tal que «obviamente» se pueden aplicar en cualquier sitio. Pero, ¿de dónde surgen los números negativos? ¿Por qué los*

ángulos de un triángulo suman 180 grados y no, por ejemplo, 100? Porque las ideas matemáticas tienen una historia cultural. Ese es el porqué. Las ideas religiosas no son diferentes y, desde luego, podemos fácilmente reconocer distintas religiones en diferentes culturas. "(Bishop, 1989, pp9)

Las Matemáticas constituyen un sistema integrado de significados para comprender y transformar la realidad (Geddes 1992), que ayuda a la creación de un dibujo coherente del mundo y ese rol sólo se puede ver en relación con la cultura. Por ello, queremos conseguir que el alumnado haga matemáticas adquiriendo nuevos significados sin olvidar que mostremos a los estudiantes algunos de los significados que la comunidad científica ya ha otorgado.

No queremos privilegiar una matemática construida sobre lo cotidiano de fuera de la escuela, sino llevar un imaginario de la calle (fuera de la escuela en el sentido geográfico) a la escuela. Digamos, para aclarar bien nuestros posicionamientos que en nuestras propuestas no abordamos una visión política de las relaciones entre matemáticas y realidad (Ernest, 1998).

3.2.1. Escritura cultural y enculturación

Interpretamos que la actividad matemática y de desarrollo profesional docente en matemáticas, es una práctica social cultural en el sentido que se construye sobre los acontecimientos que residen en los cabezas de participantes hasta constituirlos que se representa en ***escrituras culturales***, del conocimiento generalizado.

"For many people, family dinners are everyday events. They participate in these events without realizing the many aspects that are taken for granted. Everyone comes to the table and begins eating at about the same time. There are no menus; the food is brought to the table in containers and everyone eats the same things. The food is then parceled out by passing the containers around the table, with everyone dishing up their own portions. Adults often help children with this task. Conversation usually is open, with no set agenda. Comments from everyone are welcome, and children and adults participate as conversational partners."

(Stigler & Hiebert 1998:2)

Las características culturales las identificamos analizando los aspectos sociales de niveles mencionadas más arriba. La cena de familia es una actividad cultural para mucha gente, en el sentido que se distingue y tiene sus ritos y hábitos. Los comportamientos están dirigidos por las *escrituras* y expectativas de los participantes y están determinadas por dichas *escrituras*[1] (Estas escrituras no sólo dirigen el comportamiento, ellos también dicen a los participantes lo que deben esperar.) Dentro de una cultura, estas escrituras extensamente son compartidas, y por lo tanto ellos son difíciles de ver. La cena de familia es una actividad tan familiar que parece extraño indicar todos sus momentos acostumbrados. Pocas veces pensamos como esto podría ser diferente del modo que es. Pero, nosotros seguramente notaríamos si un momento fuera diferente: nosotros estaríamos sorprendidos en una cena de familia, por ejemplo, si se ofrece un menú o presentar al final de comida una factura de pago.

Luego, Stigler&Hiebert explican que *escrituras culturales* son aprendidas implícitamente por la observación y la participación. Las escrituras culturales no se enseñan y no se aprenden por el estudio intencionado. Los procesos de aprender a enseñar, surgen a través de participación cultural más que por proceso formal (Stigler & Hiebert, 1997 y 1999). Aunque la mayoría de la gente no haya estudiado para ser profesores, la mayoría ha sido estudiantes. Por esto, la gente dentro de una cultura comparte una imagen de lo que es la enseñanza.

3.2.2. Currículo y conocimiento institucional

Al desarrollar un planteamiento de formación docente, debemos enmarcar el trabajo en la perspectiva curricular en el contexto que se desarrolla. Así, en cuanto a las propuestas curriculares y de programación (Burgués, 1992; Canals, 1989; Canals, y alt., 1995; Dienes y Golding, 1982; Gutiérrez y Jaime, 1996) su análisis muestra que todas proponen un trabajo simultáneo de reconocimiento en experiencias y manipulaciones realizadas en entornos cotidianos y geométricos, de estudio descontextualizado y de estudio contextualizado en el mundo geométrico, en la resolución de situaciones y problemas, y la conexión con la realidad.

En la experiencia relatada (Dalmau y Quintana 1998), se ven las observaciones siguientes:

[1]En ingles - Cultural script-

(a) En relación a las transformaciones y las isometrías en general

Comprobamos que estas mayoritariamente se asocian a fenómenos de la natura (metamorfosis, crecimiento, cambio de tiempo, etc.) y a acciones cotidianas (cocinado de alimentos, etc.), generalmente unidas a los cambios de estado y al paso del tiempo, aun cuando no hay un reconocimiento explícito de giros, simetrías y translaciones en las acciones y fenómenos específicos que los incorporan. Por otro lado, el orden de dificultades de las isometrías constatado mayoritariamente en situaciones reales es que las translaciones son más fáciles que las simetrías, y estas que los giros, y que en relación a la orientación, las isometrías horizontales son más fáciles que las verticales, y estas que las inclinadas. Aun así, a esta edad la forma es la propiedad invariante más reconocida, y la posición la más variante, aun cuando se es consciente de la conservación del número de lados, de la longitud de los lados y de la amplitud de los ángulos en las isometrías. Ahora bien, se ha constatado la imposibilidad por parte del alumnado de estas edades de poder estructurar el espacio del movimiento en términos globales. En otro orden de cuestiones constatamos una confusión importante entre los conceptos de dirección y sentido, posición y situación, y movimiento y desplazamiento.

(b) En relación a los giros

Comprobamos que se asocian y se explican preferentemente con sinónimos próximos al entorno y la cultura de los chicos y chicas (cercar, girar, tumbar, etc.), y que generalmente se representan con objetos que tienen el giro como propiedad intrínseca (ruedas, pelota, agujas de un reloj, peonza, grifo, etc.). Ahora bien, en el entorno del dibujo, el giro modelo es el giro de centro exterior, situado indistintamente a la derecha o a la izquierda de la figura, y con sentido hacia la izquierda, aun cuando los giros de centro exterior y los de sentido hacia la izquierda se muestren como más espontáneos que los de entre no exterior y los de sentido hacia la derecha. En cuanto a la composición de giros de centro interior, podemos concluir que es entendida y reconocida.

(c) En relación a las simetrías.

Vamos a comprobar que preferentemente se asocian a los conceptos de igualdad, dos cosas o la mitad, cosa que hace concluir que no se ven tanto como una transformación, sino como una identificación. Ahora bien, si en un primer momento se representan con objetos que tienen algún eje (mariposa, cara, cuadrado, etc.), despacio se equilibran con objetos que tienen simetría entre sí (las manos, mirarse al espejo, los ojos, dos bolas, las puertas de metro, etc.), aun cuando en el entorno a dibujo, la simetría modelo es la de eje vertical situado a la derecha de la figura indistintamente exterior o tangente a ella. Aun así las simetrías de eje vertical se manifiestan más espontáneas que los de ejes horizontales y estas que las de eje inclinado, y las simetrías en figuras con simetría más que las simetrías entre figuras con eje exterior o tangente, siendo las de eje secante las menos espontáneas. En cuanto a la composición de simetrías, podemos concluir que no es entendida ni reconocida. Por otro lado queremos dejar constancia de la importancia social de la simetría en cuanto a valor estético, artístico, de equilibrio y uniformidad, que mediatiza tanto su importancia matemática como su aprendizaje.

(d) En relación a las traslaciones

Preferentemente se asocian al concepto de desplazamiento y cambio de lugar, que generalmente se representan con objetos que tienen el movimiento o el desplazamiento como propiedades intrínsecas (coche, ascensor, puertas del metro, avión, tren, bici, etc.), aun cuando en la en torno a dibujo, la translación modelo es la de vector de dirección horizontal y sentido a la derecha, y que las de vector horizontal o vertical se manifiestan más espontáneas que las de vector inclinado. En cuanto a la composición de translaciones, podemos concluir que es entendida y reconocida.

3.3. Lo matemático: El objeto transformación

Tratamos a continuación un análisis epistemológico sobre el objeto transformación como producto de la actividad matemática, con el fin de demostrar la necesidad y posibilidad de conocer como influencia las concepciones sobre las geometrías como un proceso de evolución de la enseñanza. Nosotros consideramos la transformación geométrica como una correspondencia (una regla) que asocia a cada punto del plano (o del espacio) un punto y sólo uno del plano (o del espacio), de modo que si al punto A le corresponde el B, entonces al B le corresponde A. Y consideramos que las transformaciones isométricas se basan en la idea de simetría.

3.3.1. Análisis epistemológico de transformación.

El sentido del intrigante término "simetría" ha sufrido una considerable transformación en su uso a lo largo de los siglos. La correcta traducción del término griego la *symmetria,* es «acción medida común o frecuente», el prefijo de *sym* frecuentes, y el nombre *metros* medida. Los griegos interpretan esta palabra en el sentido de la armonía entre las diferentes partes de un objeto, la buena proporción entre sus partes constitutivas. Hasta el Renacimiento, el latín y las nuevas lenguas europeas modernas traducido "simetría", como la armonía y proporción. En un sentido más amplio, los términos de equilibrio y el equilibrio también pertenecieron a esta familia de sinónimos. No es demasiado difícil deducir que en muchos aspectos ha sido siempre la simetría relacionada con la belleza, la verdad y el bien. Estos significados relacionados determinaron su aplicación en las artes, las ciencias, y la ética, respectivamente. La simetría no es sólo en relación con esos valores positivos, sino que incluso se convirtió en un símbolo de la búsqueda de la perfección, al igual que en los escritos de Platón.

Con la publicación de varias traducciones, el término "simetría" sustituye anteriores versiones traducidas de la palabra, y tomó su lugar dentro de las lenguas europeas modernas, primero en *volgare* [italiano: *simmetria],* más tarde en alemán *[Symmetrie].* La reflexión, también llamada simetría bilateral, es muy frecuente (aunque no la más frecuente) manifestación de la simetría.

La rotación es otra manifestación frecuente de simetría. Tome una figura en el avión y una línea recta - esta vez perpendicular al plano - como el eje de rotación. Si giramos todos los puntos de la forma por parte de algunos (igual) ángulo de nuestra elección en todo el eje, girar la forma preserve sus propiedades; sólo su ubicación en el plano y la orientación va a cambiar. Una vez más, en primer lugar, hemos dado un objeto geométrico, en segundo lugar, hicimos una transformación geométrica (rotación alrededor de la línea recta), que pasó algunas propiedades en tercer lugar, encontramos que otras propiedades no ha cambiado en virtud de la transformación dada. Durante tiempo, se ha llamado traducción, a la copia de algo en otro lugar diferente, sin alterar la forma ni el tamaño. La conservación de otras propiedades geométricas puede servir como base para otros tipos de simetría, como la semejanza - transformación afín de proyección y simetría topológica. Semejanza (similitud) es una transformación que las distancias entre los puntos correspondientes de dos objetos se cambian, pero las relaciones entre las longitudes y los ángulos se conservan, por lo que la forma del objeto se mantiene similar a la original

Algunos autores hablan de simetría topológica a la una transformación en la que relaciones de vecindad entre los puntos del objeto se dejan intactos, las distancias entre ellos, así como los ángulos entre las líneas que conectan ellos están alterados. Las líneas rectas no necesariamente siguen recto. Un buen ejemplo de la simetría topológica es la celosía de los puntos de una esponja aplastada. De manera generalizada interpretación de su significado, podemos hablar de ***si*** la simetría ***es invariante***

- ***bajo ninguna*** (no necesariamente geométrica) ***transformación*** (en servicio)
- ***al menos uno*** (no necesariamente geométrica) ***propiedad***
- ***de*** (no necesariamente geométrica) ***objeto***

Por lo tanto, hacer una generalización con respecto a tres cosas: *toda transformación, cualquier objeto,* y *cualquiera de sus propiedades.* Esta concepción generalizada de simetría hace que sea posible para nosotros a aplicar la simetría a la materialización de objetos de la física. Además de simetrías geométricas (morfológicos), ahora podemos discutir funcional simetrías y asimetrías (como puede ocurrir en el cerebro humano, por ejemplo); calibre simetrías en los fenómenos físicos, y propiedades como el color, tono, la luz y la sombra, el peso, en objetos de arte.

3.3.2. Las Geometrías y la noción de transformación.

Durante muchos siglos la civilización humana no ha conocido otras geometrías de la geometría euclidiana, y quizá igualmente se considera que las geometrías no euclidianas tienen que aparecer en un nivel más alto que de primaria. Nuestra opinión es que con una metodología apropiada de enseñanza, entendimiento y comprensión de diferentes geometrías es posible y en educación primaria. Enseñanza de diferentes transformaciones geométricas es un modo de comprender diferentes geometrías.

La evolución de las geometrías desde la Geometría Euclidiana hasta las geometrías de Hilbert y de Klein, es una buena ilustración de la evolución histórica de la organización de los productos de la actividad matemática en general.

Si los conceptos geométricos como de "*el plano*", "*la recta*",.., son "cosas" concretas (físicas) o ideales (abstractas) en principio referíamos a Platón. Desde esta perspectiva la demostración de la verdad de las proposiciones de las teorías matemáticas es entendida como demostración lógica a partir de los axiomas. Esta organización de la matemática, en la matemática griega introduce un elemento novedoso: *el método deductivo*, como un criterio de validación, plasmado en los Elementos de Euclides. Allí se encuentran los elementos que componen una ciencia demostrativa: *las definiciones*, *los postulados* y *axiomas*, y finalmente el *cuerpo deductivo*.

La geometría de Euclides fue el primer intento decisivo de organizar axiomáticamente esta disciplina. Esta característica guía durante siglos y puede verse cómo influye en la estructura de los razonamientos que buscan demostrar el *quinto postulado* de los Elementos de Euclides. La repercusión de este punto de vista sobre la enseñanza de las matemáticas es que se tienen que enseñar teorías acabadas organizados deductivamente. Según Font y Peraire (2001) desde un punto de vista didáctico el platonismo tiende a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido. Por otra parte la investigación en educación matemático de tipo cognitivo ha puesto de manifiesto que el estudio de diversos sistemas de representaciones de un mismo contenido matemático es esencial para su comprensión.

Según Font (2003), los empiristas sostenían que todo conocimiento, exceptuando el conocimiento matemático, es consecuencia de la observación. La cuestión que *¿si el conocimiento matemático depende de la experiencia*? se trata en diferente manera: según Locke el conocimiento matemático se considera como absolutamente segura y distinta del conocimiento empírico y para Hume el pensamiento matemático se considera como verdades analíticas que no dependen de nuestra experiencia.

De los postulados del sistema Euclidiano, los cuatro primeros traducen propiedades más o menos evidentes, pero, el quinto postulado llama la atención por su mayor complejidad y por carecer de la evidencia intuitiva que tienen los demás. La crisis de fundamentos ocurrido en las matemáticas al siglo XIX cuando se intenta resolver primeramente por medio del programa logística (Font, 2003) *iniciando por Frege en su intento de dotar a la aritmética de unos fundamentos seguros;* otro intento de superar la crisis de fundamentos fue el programa formalista iniciado por Hilbert. Para Hilbert no hay objetos matemáticos (a diferencia del platonismo) solo hay símbolos ostensivos. Los puntos, las rectas y los planos son unos elementos de un conjunto. Se definen las reglas mediante los cuales se pueden deducir afirmaciones a partir de otras. Las afirmaciones no se refieren a nada, los símbolos no tienen significado y tan poco no tienen asignado valor de verdad. Por ejemplo "*si a y b son dos rectas de un plano α, entonces* $a \cap b \neq \theta \;\vee\; a \| b$*".* El primer objetivo del programa formalista es la "*completa formalización*" de un sistema deductivo. La geometría sufrió cambios radicales a través de la obra "*Fundamentos de geometría*" de Hilbert.

En el programa de Hilbert, no se tiene en cuenta el carácter de verdad de los axiomas, lo fundamental es que sea consistente. Por ejemplo no debe haber, además del axioma de unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta, otro axioma que afirma la existencia de más de una paralela por un punto exterior a una recta (axioma de Llobachevsky) o el que afirma que no existe ni una paralela por un punto exterior a una recta (axioma de Riemann).

Hilbert elabora el proceso de estructuralizacion de geometría en la *Geometría Absoluta* basada en todos axiomas, excepto axiomas de paralelidad. Para mantener la consistencia y no-contradicción de los axiomas, a la Geometría absoluta se le añade la axioma de Llobachevsky y el nuevo sistema deductivo se llama *Geometría Hiperbólica*; si a la geometría absoluta le añadimos el axioma de Playfair (equivalente de quinto postulado de Euclides) el sistema deductivo se refiere a la *Geometría Euclidiana*; y si a la geometría absoluta le añadimos el axioma de Riemann, se refiere a la *Geometría Elíptica*.

Desde este punto de vista formalista, la pregunta por la verdad o la falsedad de los enunciados geométricas no tiene sentido en el estado axiomático. Lo que podemos preguntar es, con sentido por la *consistencia* del sistema, por *(no) contradicción* del sistema y por *(in) completitud* del sistema. Según Hilbert, los tres sistemas – Geometría Euclidiana, Hiperbólica y Elíptica, son sistemas de afirmaciones deductivas que cumplen estos tres principios.

Hacia la mitad del siglo XX el formalismo se convirtió en el punto de vista predominante en las instituciones universitarias y preuniversitarias. El formalismo contemporáneo – llamado conjuntivismo, es descendiente del formalismo hilbertiano pero no es exactamente lo mismo. Por un lado la matemática entera se fundamenta en la teoría de conjuntos y la lógica y por otro lado en la teoría intuitiva de conjuntos se descubren contradicciones que la hacen insostenible. La respuesta de Browser rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática dando lugar al intuicionismo (Font, 2003).

Desde el punto de vista educativo, la consecuencia del formalismo fue que nacieron "*las matemáticas modernas*" tanto en la enseñanza universitaria como no universitaria. La idea inspiradora de las matemáticas modernas es que la enseñanza de las matemáticas tiene que estar de acuerdo con la idea de que las matemáticas sirven para estructurar el pensamiento y que las matemáticas es el lenguaje de las ciencias. Como la influencia de las matemáticas modernas tenemos la introducción de la teoría de conjuntos desde la etapa infantil de educación. En la elaboración de los nuevos programas se procuró conseguir una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos geométricos que se concreta en *el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación* (Font, 2003, p. 9).

El desarrollo de la geometría a través las transformaciones, se refiere al programa de Erlangen de F. Klein. Klein combina el desarrollo alcanzado por las geometrías no-euclidiana y la geometría proyectiva con *la teoría de las invariantes* y la teoría de *los grupos de transformaciones*. Él expone en su programa mediante grupos y subgrupos una sistematización y jerarquización de todas las geometrías, concibiendo como objeto de cada geometría el descubrimiento de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones. Así, se considera cada geometría como sub-geometría de otra a la que se adjunta cierta figura básica que debe quedar invariante. La **Geometría Proyectiva** es el conjunto de todas las invariantes del conjunto S en relación del *grupo de transformaciones proyectivas*. Las transformaciones proyectivas son aquellas aplicaciones que conservan la relación de incidencia – las alineaciones. La **Geometría Afín** es el conjunto de todas las invariantes respecto al *grupo afín* de transformaciones. El grupo Afín de transformaciones es el subgrupo del grupo de transformaciones proyectivas. El *paralelismo* es invariante de transformaciones afines, y por consecuencia, todas las propiedades geométricas que se relacionan con el paralelismo son objeto de estudio de la Geometría Afín. Se definen otros subgrupos del grupo proyectivo de transformaciones y se construyen *las geometrías Equiforme, Euclidiana, Pseudo-euclidiana, Hiperbólica y Elíptica*.

3.4. Lo cognitivo. Construcción de concepto: transformación geométrica

Identificamos *las matemáticas como un sistema de prácticas sociales o red de recursos* relacionados en donde la resolución de problemas juega siempre un papel importante. La idea de las matemáticas como cuerpo de verdades y como abstracción está dejando de ser el punto clave del quehacer escolar, y el contacto de las matemáticas con el contexto cotidiano es algo que ya forma parte de la nueva cultura escolar. A pesar de todo, aún no consideramos que se haya superado la visión procedimentalista de las matemáticas como "*saber resolver operaciones*" a pesar de los desengaños de muchos grupos sociales.

No solo desde una perspectiva cognitiva estricta sino y situada, una de las actividades más frecuentes en matemáticas es la construcción de conceptos. Los conceptos geométricos, tanto si son objetos o bien relaciones, son el fundamento para el desarrollo del conocimiento geométrico, sobre el que descansa el sentido espacial, y el dominio de un corpus teórico (sistemas axiomáticos), construido este último a través de la demostración. Los conceptos son un tipo de objetos mentales para el agente cognitivo de cada individuo (Dehaene 1999). Se desarrollan como entes cognitivos y teórico-sociales en confrontación directa con el ambiente social o natural.

Piaget (1979) formuló que la abstracción empírica es el formato usual del desarrollo conceptual y argumentaba que la generalización es el proceso básico que permite ampliar su significado. Skemp (1971) había indicado que en la formación de los conceptos intervienen dos actividades diferentes e interrelacionadas: clasificación y abstracción. Para las visiones neo piagetianas, a ese proceso se le denominaba abstracciones lógico-físicas (Hershkovitz et altr. 1987). Sólo después de ver como se define o forma, se pueden dar ejemplos. Diversos autores han distinguido los conceptos del día a día (llamados espontáneos) y los científicos (Piaget 1970, Vigotski 1987). Fischbein (1993) consideró que se han dado en la investigación tres tipos de direcciones en la construcción conceptual: formación inductiva, deductiva e inventiva. Más adelante el mismo autor nos dice que los conceptos son resultados de experiencias sociales acumuladas (Fischbein 1993) a través fundamentalmente del lenguaje.

Consideramos que debe construirse el significado conceptual en interacción con contextos fundamentados en las experiencias, para llegar a construir imágenes y abstracciones. Algunos autores como Sowder (1996) proponían que lo que caracteriza un concepto es expresar una idea que se da como respuesta a estímulos no similares (disimilar entendidos como ejemplos), En la opinión de Fischbein (1993), lo que caracteriza un concepto es el hecho de expresar una idea, representación general de una clase que se basa en características comunes.

La construcción conceptual descansa sobre un conjunto de procesos de construcción, visualización, exploración de propiedades, elaboración de explicaciones y clasificación, entre otras. Entre más y mejores experiencias se tengan, la imagen conceptual se acerca más al concepto porque, como lo afirman Vinner y Hershkowitz: "*adquirir un concepto significa, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática*." [Citado por Jaime et al., 1992].

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkovitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996; etc). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

En cuanto las diversas investigaciones sobre el tema (Edward i Zazkis, 1993;; Grenier, 1989; Jaime i Gutiérrez, 1996; Kidder, 1978; Moyer, 1978; Pearman, 1990), en general ponen de manifiesto que entre el concepto piagetiano de conservación de la longitud y el de invariancia hay una relación estrecha de dependencia; que el aprendizaje de las isometrías tiene ciertos niveles de dificultad que pueden ser graduados (Jaime y Gutierrez, 1994). Se sabe también que las orientaciones de las isometrías también son elementos de dificultad creciente en el sentido que las transformaciones con elementos horizontales son más fáciles que las relativas a elementos verticales, y éstas más que las que incluyen elementos inclinados; que en relación a las posiciones relativas entre la figura inicial y la transformada, y las exteriores.

En nuestro estudio, consideraremos el desarrollo matemático y didáctico de los estudiantes en formación en base a analizar sus construcciones conceptuales en base a grados que se asociarán a sus esquemas, y organizaciones estructuradas. La caracterización se encontrará en el capítulo metodológico.

3.4.1. Imágenes, esquemas conceptuales y desarrollo cognitivo

Para analizar cómo se construyen los conceptos geométricos, la noción de imagen juega un papel central. Clements y Battista (1992, p. 446) definen las imágenes como "*representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y transformadas*". Bishop, sugiere considerar dos habilidades diferentes relacionadas con la visualización: "*la habilidad de interpretar información figural"*, y '*la habilidad de procesamiento visual'*, las cuales considera como "*un asunto muy individual"* (Bishop, 1989, p. 8). Pressmeg (1986) define la noción de "*imagen visual*" como un esquema mental que representa (depicting) información visual o espacial (p. 42). Sostiene la posición de que tales imágenes visuales se pueden tener tanto en presencia del objeto perceptible o en su ausencia.

La distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles (como las transformaciones), las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas es abordada con nitidez por Fischbein (1993) con la noción de concepto figural. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales. Las formas así como los movimientos son objetos vinculados con entidades intrínsecamente conceptuales con algunas propiedades específicas, pero también otras ligadas a su naturaleza geométrica (como posición, forma y tamaño). Lo figurativo es lo que se apoyaría más en lo perceptivo. La fusión entre concepto y figura permite comprender ciertas dificultades del alumnado y futuros docentes respecto algunas construcciones conceptuales (Fischbein 1993), como se ha evidenciado en diversas investigaciones (Noss y Hoyles

1996). "*Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales - como idealidad, abstracción, generalidad, perfección.*" (p. 143). En nuestro trabajo, la idea de Fischbein nos permitirá en algún momento caracterizar algunas de las posiciones de los estudiantes.

Los constructos ***"imagen conceptual" -*** concept image, y ***"definición conceptual"*** - concept definition (Tall y Vinner 1981) nos servirán también para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual con relación a un concepto matemático. Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Con la expresión "*imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados*" (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

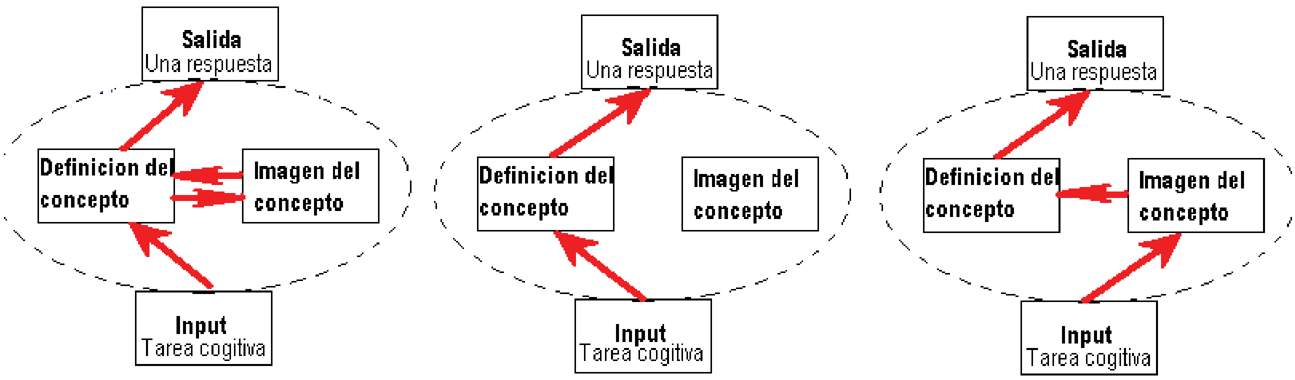
Vinner considera que "*El "concept image" es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria. Aparecen en una fase posterior".*

La propuesta posterior de ***esquema conceptual*** constituye por una parte un intento de desarrollar la noción de "*concept image*" en la dirección que propone la psicología cognitiva, y por otra parte, es una propuesta en la que el contexto, al menos implícitamente juega cada vez más un papel más importante. Es una manera implícita de reconocer que su propuesta, si bien tiene su origen en el "concept image", no es exactamente lo mismo. El esquema conceptual (*concept image*) describe la estructura cognitiva completa que está asociada al concepto, con inclusión de todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados al mismo. Se construye a "*lo largo de los años, mediante* *experiencias de todo tipo, cambiando cuando el individuo se encuentra con nuevos estímulos y hechos*". (p. 151).

El concepto imagen que construye un sujeto con relación a un concepto matemático no es necesariamente coherente cuando el sujeto actúa frente a diferentes situaciones problemáticas, y puede presentar además diferentes tipos de desadaptaciones matemáticas respecto a la definición institucional. Por ejemplo, el concepto imagen puede ser muy restringido en términos de la generalidad de la definición matemática del concepto. En otros casos el significado que se asocia con él y que se pone en juego en alguna situación, puede ser conflictivo con el significado del concepto socialmente aceptado (significado matemático). Más recientemente, Vinner (1997) dice que la imagen del concepto surge en la mente del individuo de modo intuitivo a partir de las experiencias sociales mediadas. Las experiencias se encuentran en contextos variados, y determinan la construcción de imágenes.

De acuerdo con Vinner, distinguimos tres formas de asociar la imagen del concepto a la definición del concepto involucrados en el proceso de construir la idea de transformación geométrica (figura 3.2).

La primera es *interaccion entre definición e imagen*, la segunda es *puramente deducción formal* y la tercera *deducción siguiendo el pensamiento intuitivo*.



El proceso de construcción de la idea de transformación geometrica por interacción entre definicion e imagen

El proceso de construcción de la idea de transformación geometrica por puramente deducción formal

El proceso de construccion de la idea de transformación geometrica por deducción siguiendo el pensamiento inductivo

Figura 3.2. La construccion de la idea de transformacion geometrica

3.4.2. Atribuciones, definición y estructura conceptual

La actividad de conceptualizar se ha restringido, en ocasiones, al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres con una representación visual del concepto o la relación. El concepto no surge como a priori en una realidad externa, ni como idea independiente preexistente. El desarrollo típico de la actividad matemática de tratar de explicar en términos de lo real los objetos, hace que se produzca una semejanza con las Ciencias de la Naturaleza (Furinghetti y Paola 2000) mostrando la relación que existe entre la búsqueda de invariantes, laformulación de relaciones, la demostración y la comunicación de resultados; en particular, resulta importante que las relaciones identificadas se expresen, inicialmente, en forma oral y, posteriormente, se desarrolle una notación y lenguaje que permita presentarlas de manera escrita. Este proceso puede servir para objetos empíricos, pero no es habitual en matemática experta, de naturaleza lógica y no empírica (Fischbein 1996). La revisión de los fundamentos formales se interpreta como actividad de control (Fischbein, 1996), y como actividad negociada cultural (Balacheff, 1998).

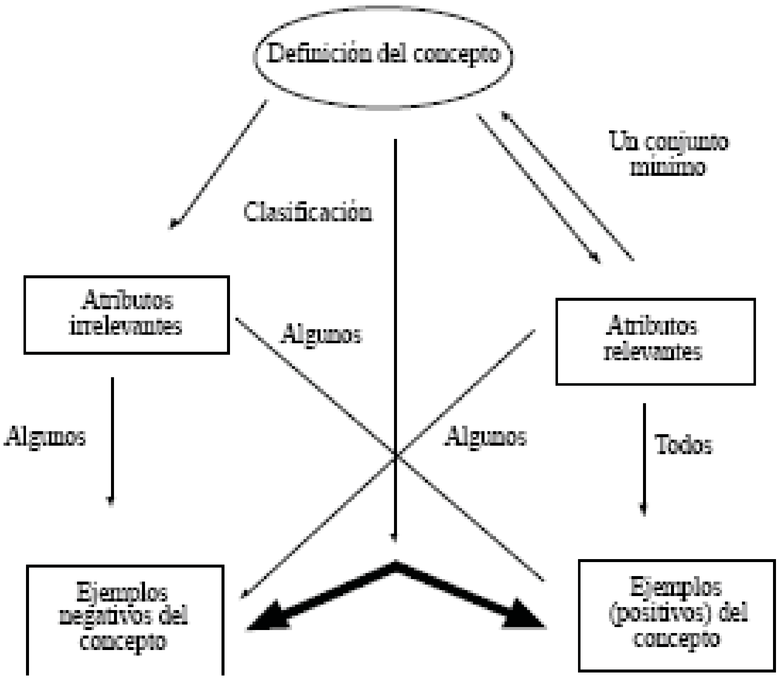


Figura: 3.2. Esquema de construcción de conceptos según Herskowitz et al (1990)

Consideramos que para construir conceptos, deben establecerse las relaciones entre los atributos del concepto, que quedan reflejadas en el esquema 4.2. (Hershkowitz,1990)

En el trabajo de Camargo et al. (2002)[2] se sugiere que el esfuerzo debe centrarse en ampliar la imagen conceptual del objeto geométrico, de tal suerte que se destaquen todas y cada una de las características y relaciones que lo determinan en lo matemático y lo didáctico (Figura 3.3).

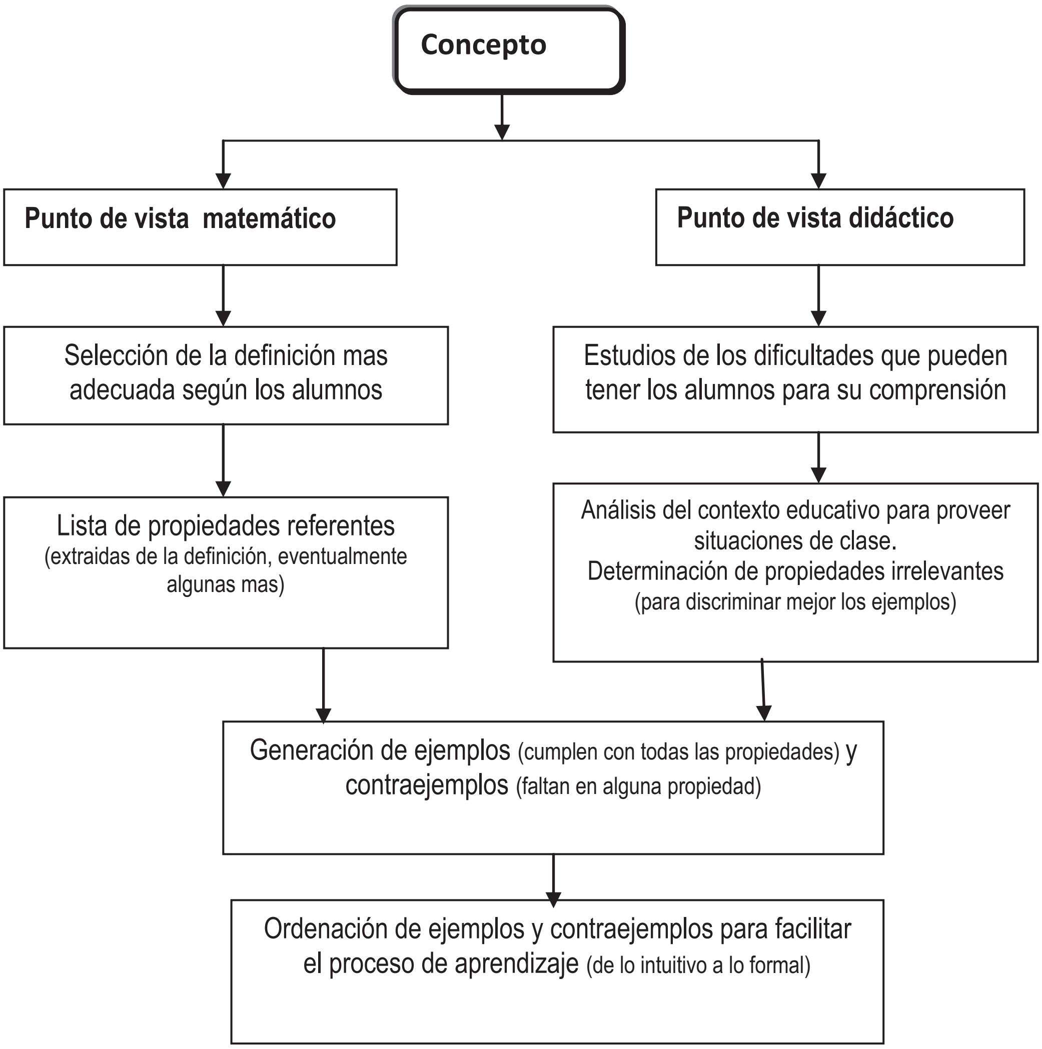


Figura 3.3 La esquema de construcción del imagen conceptual según Camargo et al.

2 http://www.usergioarboleda.edu.co/matematicas/memorias/memorias13/Conceptualizaci%C3%B3n%20del%20KUID.pdf

3.4.3. Estudios sobre isometrías desde la perspectiva cognitiva

El trabajo de Mayberry (1983) mostró dificultades de los estudiantes de magisterio ante los conceptos de isometría. Gutiérrez y Jaime (1996) afirman que en la formación de imágenes de un concepto que tiene una persona, juega un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o usado tanto en el contexto escolar como extraescolar. Con frecuencia los ejemplos son pocos y los estudiantes los convierten en prototipos.

En una investigación reciente con futuros maestros, se analizan las perspectivas de estudiantes ante objetos geométricos a través de implementar un currículo que mira de establecer relaciones entre transformaciones y álgebra lineal. Las evidencias sugieren que los estudiantes ven los objetos geométricos como percibidos. También que esas visiones influyen sobre sus demostraciones en geometría de transformaciones (Todd et al. 2006). La visión fundamentalmente perceptiva de los estudiantes, se ve también en un trabajo realizado con profesores de la tribu Navajo.

En el trabajo de Escudero sobre la idea de semejanza en profesores (2005) se considera la transformación como útil percibiendo la transformación de un conjunto de puntos en otro, o como objeto matemático caracterizado por el hecho de que una transformación puede ser una combinación de transformaciones. Ahí se analiza lo intrafigural, los modos de representación, y tipos de actividad.

En muchos casos, los significados de isometría se relacionan con la experiencia anterior y la intuición de los alumnos, y difieren de la interpretación teórica que la matemática les asigna. Consideramos que el conocimiento de los modelos mentales utilizados por los alumnos para elaborar estos significados intuitivos es muy importante, ya que proporcionan elementos a los investigadores y profesores para ser tomados en cuenta al investigar el fenómeno enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar.

En el trabajo de Molina y Oktaç (2007), se analizan los concepciones de los docentes sobre transformación lineal plana (TL). Se observa cómo los estudiantes asocian el movimiento a las transformaciones lineales y lo manejan en sus argumentos; es decir, cada uno de sus modelos está constituido por movimientos geométricos que relacionan con sus prototipos de transformaciones lineales. Se caracterizan las concepciones siguientes:

- La TL como movimientos simples y combinaciones de éstos
- La TL como la transformación de un vector en particular, y no como una función que transforma todo el plano
- Asociaciones diversas con respecto al adjetivo “lineal” en el término transformación lineal
- La noción de espacio vectorial
- La noción geométrica del movimiento de un vector llevada al contexto aritmético

Al estudiar los resultados de comportamientos de estudiantes de magisterio, se reconoció que los resultados no distaban mucho de los que se encontraban con los alumnos de Primaria. Los futuros docentes basan sus conocimientos y razonamientos en definiciones formales y cometen errores similares como se vio en el caso de las alturas de un triángulo. En investigaciones más recientes, Huerta (1999) usó los niveles de Van Hiele y la taxonomia SOLO de forma comparada para establecer niveles de desarrollo de las isometrías. En el trabajo de Beltrametti et al (2003) se analizan niveles de respuestas sobre la simetría axial con estudiantes de Magisterio. Para ello, se usaron los resultados y caracterizaciones de los estudios de Gutierrez y Jaime (1996). El proceso de evaluación del nivel del razonamiento se inició asignando el nivel según el tipo de respuesta que dio cada estudiante a las cuestiones que conformaron el test escrito. Se tuvo especialmente en cuenta que “*Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a un determinado vocabulario*” (Jaime y Gutiérrez, pp. 313) y que “*para determinar el nivel de razonamiento lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así*” (Jaime y Gutiérrez, 1990: pp. 321)

3.5. Desarrollo y práctica profesional

Shulman (1987) considera que el profesor debe saber cómo interpretar, expresar y representar la materia de modo que los estudiantes pueden entenderlas. A partir de las aportaciones de Bromme (1994) y Fortuny (1990) considerando la enseñanza desde una perspectiva profesional y de su uso, como elementos definidores de la misma, aceptamos que el "*conocimiento profesional*" de la enseñanza debería incluir cuatro categorías distintas: *conocimiento del contenido matemático*, *conocimiento de la pedagogía*, *conocimiento estratégico y conocimientos didácticos,* para formar un profesional que es capaz de reconocer en el futuro estructuras de conocimiento, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos (Giménez, 1997).

Según Giménez (1997) el maestro de primaria no es solo un gestor de los aprendizajes, sino un individuo reflexivo y pensante. Por eso, cuando el profesor de primaria prepara sus clases, tiene que tomar decisiones "*qué* es lo que va a enseñar del contenido matemático, y decisión sobre *cóm*o va a hacer". Es evidente que el profesor de Primaria es un sujeto activo que filtra, redefine, interpreta y valora el programa "*a la luz de su conocimiento práctico de su manera de entender la enseñanza, de su percepción personal del programa, de su visión del propio entorno del trabajo y de las exigencias que le son planteadas*" según González (1986)

Los *elementos básicos* para el futuro profesor son, según Llinares (2004): *la argumentación* de contenidos matemáticos como objeto de enseñanza, *manejar* los contenidos en el aula, *analizar e interpretar* las producciones matemáticas por parte de niños. Él caracterizó el conocimiento del profesor como una integración de diferentes dominios de conocimiento (de matemáticas, de los diferentes modos de representación para los conceptos matemáticos como objeto de enseñanza-aprendizaje, sobre los estudiantes como aprendices de matemáticas, sobre currículo, etc.) y considera los aspectos afectivos desde modos y usos del conocimientos del profesor en las situaciones de enseñanza (replicar, aplicar, interpretar y asociar; priorización, dilemas y tensiones, temporalización etc.). Nos parece que en programas de formación de profesores de Primaria, deben desarrollar estos *elementos* de los conocimientos del contenido profesional:

1. *Significaciones: interpretación y reconocimiento*, que incluye concepto de transformación geométrica, terminología, relaciones entre transformaciones y procesos de transformación geométrica,

2. *Pensar matemáticamente: comunicación-expresión- razonamiento*, que incluye formas de validar resultados, competencias básicas y procesos de razonamiento, resolución de problemas y elementos de historia de la geometría.

3. *Representaciones y recursos,* que incluye los diferentes modos de representación y su repercusión en el diseño de materiales y estrategias para la enseñanza de las transformaciones geométricas.

Como hemos comentado antes, el proceso de aprender a enseñar matemáticas puede ser considerado como un proceso de aprendizaje contextualizado, en el cual se pretende que el estudiante para profesor contemple, en todos los niveles, los nuevos procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto nos hace pensar en los entornos de aprendizaje con una serie de características básicas (Garcia, 2000): generadores de destrezas reflexivas, motivadores de la interacción social y la idea de “actividad” como articuladora del proceso. La “actividad” pasa a ser el centro del proceso de aprendizaje. Interpretamos la actividad como conjunto de procesos vinculados a una situación problemática o tarea y que genera conocimiento y no sólo considerados como procesos cognitivos individuales, sino también contemplando su aspecto social, al originarse cuando un grupo intenta resolver una tarea. El conjunto de relaciones que deben considerarse en el proceso de generación del conocimiento práctico personal del futuro profesor pone de manifiesto ciertas ideas respecto al conocimiento del profesor: su naturaleza integrada, su continuo desarrollo como resultado de su uso en tareas nuevas, o el aprendizaje continuo, que es la formacion de profesores que va más allá de la formación inicial (Llinares, 1994).

Es importante subrayar que, si queremos capacitar a los estudiantes para profesor de matemáticas para definir y explorar problemas pedagógicos y usando múltiples fuentes de información, será necesario un conjunto variado y amplio de dichas fuentes que se adecue a los objetivos pretendidos.

No hay que olvidar que para el uso de una buena metodología de enseñanza-aprendizaje lo importante son los alumnos, así que es de máxima importancia conocer bien el grupo, ya que éste ha de determinar el mejor camino hacia la buena comprensión de los conceptos. Esto toma lugar en el marco de los cambios globales de acercamientos hacia lo que es el aprendizaje significativo en matemáticas (Hanna, 1996). Aún a riesgo de ser simplista, sugerimos que la aproximación hacia el aprendizaje como un proceso meramente receptivo de transferencia de conocimiento, y la visión de la argumentación matemática como una comunicación muy formal, ha promovido a la práctica del salón de clase hacia aquella en la que el proceso de aprender a enseñar se realiza siguiendo un ritual gobernado por unos reglas fijas.

El estudiante para profesor de Primaria debe conocer la materia como conocimiento sustantivo y conocimiento sintáctico, según la descripción dada por Shulman y Grossman (1988), y explicado por Brown y Borko (1992, p211-212). De ahí que buena parte del problema es cómo o cuál es el conocimiento sintáctico a transmitir en estos niveles. El problema entonces es en qué forma identificamos lo más adecuado para trabajar en la formación del docente de 6 a 12 años. Los aprendices, sus entendimientos y las interacciones con la comunidad de su clase, son centrales en la visión del proceso de enseñanza - aprendizaje. Como una consecuencia, los procesos de razonamiento son considerados ahora como una variedad de acciones que toman los alumnos con el fin de comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ellos ven, lo que ellos descubren y lo que ellos piensan y concluyen.

En varias actividades de la unidad didáctica planteada se discute en profundidad el rol de la deducción en la construcción de conocimiento de transformación geométrica. Parece que el razonamiento deductivo tiene aún un rol central en el aprendizaje de la transformación geométrica.

Una de las componentes esenciales de un proceso eficiente de enseñanza / aprendizaje, es la buena preparación de los profesores, en lo que concierne tanto a competencias disciplinares y educativas, epistemológicas, tecnológicas y aspectos sociales. En consecuencia, sobre qué preparación específica (y realmente alcanzable) se requiere para los futuros profesores, es bien sabido que los profesores tienden a reproducir en su profesión los mismos modelos que ellos experimentaron cuando fueron estudiantes, a pesar de que posteriormente han sido expuestos a diferentes puntos de vista. Entonces implícita la necesidad de hacer posible una motivación de cambios en la perspectiva de enseñanza de la geometría - tanto del punto de vista de los contenidos como el metodológico.

En este estudio intentamos facilitar la comparación de los estudios comparativos y ampliando los trabajos publicadas sobre la tema, usaremos el marco teórico sobre la práctica del profesor considerando la enseñanza desde una perspectiva profesional y centrándonos en el aspecto del conocimiento y su uso. La capacitación del profesor para el ejercicio de su actividad profesional es un proceso que presenta múltiples facetas y está siempre incompleto (Ponte, 1998). La mayoría de los profesionales que se dedican a la formación de profesores reconocen la necesitad de la formación profesional, aunque los instituciones de formación y las políticas generales de formación atienden de forma parcial a estas necesidades. El desarrollo profesional a lo largo de su ejercicio docente es un aspecto destacable en la profesión docente (Ponte, 2002). Según CIEAEM (2003), los programas de enseñanza de geometría deberían capacitar a todos los estudiantes entre otros y:

- Aplicar las transformaciones para analizar las situaciones matemáticas.
- Utilizar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas.
- Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas

Pero para poder hacer y realizar estas tareas y después llevar el programa con los niños, el papel del profesor es crucial. Solo un profesor que es capaz de reconocer el valor de un análisis didáctico matemático puede hacerlo. De aquí distinguimos las necesidades del futuro profesor (Giménez 1997): *necesidad de conocer contenido matemático* que va a enseñar, y *necesidad de conocimiento profesional*.

3.5.1. Los referentes de una práctica de enseñanza

Dentro de nuestro investigación, tanto en la línea de aprender a enseñar (Llinares y Sánchez, 1996) como en nuestros trabajos sobre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, la importancia de la forma de conocer el profesor (o futuro profesor) la materia en su toma de decisiones instruccionales se ha revelado un tema de gran interés, ya que condiciona en gran medida el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Para poder hacer y realizar estas tareas y después llevar el programa con los niños, el papel del profesor es crucial. Solo un profesor que es capaz de reconocer el valor de un análisis didáctico matemático puede hacerlo. De aquí distinguimos las necesidades del futuro profesor (Giménez 1997): *de conocer contenido matemático* que va a enseñar, y *necesidad de conocimiento profesional*.

En Kosova la formación de profesores es una formación generalista, aun que se dedica 5 asignaturas de formación matemática y didáctica considerando la formación matemática como una tarea importante. En la Universidad de Barcelona la formación de maestros de primaria es también generalista aunque con dos asignaturas troncales obligatorias para su formación.

Por tanto en ambos casos los profesores de primaria con una formación generalista también impartirán las matemáticas en los distintos ciclos de primaria. Por tanto formar un maestro de primaria desde esta perspectiva, implica incluir diversos aspectos desde la adaptabilidad y capacidad de vivir la educación matemática “del momento” (Keitel, 1995), incorporar un desarrollo de la cultura en sentido amplio (D’Ambrosio, 1979, 1991,1994) a poseer una actitud reflexiva (Schön, 1992), asi como los elementos sociales (Abraham & Bibby, 1988), ser capaz de utilizar las tecnologías (Skovmose, 1994), mostrar efectividad en el sistema (Rico, 1997), así como ser potenciador de los valores democráticos (Ernest, 1996).

La formación matemática de los futuros profesores de primaria ha de superar la visión que se da muchas veces de que las matemáticas son únicas universales en nuestra sociedad occidental. Así, la formación ha de procurar de conseguir que las matemáticas que ha de enseñar esté relacionada con elementos epistemológicos y algunos contendidos de aprendizaje escolar vinculados con sistemas culturales diferentes.

Al examinar como los profesores utilizan su conocimiento de la materia, considerado desde una perspectiva de la enseñanza como una destreza cognitiva compleja que ocurre en un entorno dinámica relativamente mal estructurado (Leinhardt et alt.1991, & Grenier, 1989), se centran en varios puntos clave del proceso instrucciones de los profesores como agendas, escrituras (anotaciones) curriculares[3], explicaciones y representaciones, señalando que:

> *'En la construcción de explicaciones, los profesores utilizan varias representaciones de la información que es su objetivo. Las representaciones son objetos físicos o conceptuales o sistemas de objetos que dan forma perceptible ideas o entidades matemáticas (operadores), por ejemplo usando bloques multibase de Dienes para el valor de posición para enseñar resta reagrupando o diagramas sombreados para enseñar fracciones. Comprender cuando una representación particular es apropiada y ser conscientes de los aspectos más sutiles de cada representación son ejemplos específicos del conocimiento del la materia del profesor'* (Leinhardt et al., 1991, p. 90).

Bajo esta perspectiva, la comprensión de las matemáticas está fuertemente enlazada con la habilidad de trabajar dentro y entre varias representaciones de las ideas y operaciones matemáticas (Kaput, 1992), distinguiendo entre el término representación para referirse a las entidades utilizadas para explicar algo (usualmente una analogía, dibujo o manipulativo) y el término objetivo ('target' en el original) para referirse al concepto, significado o procedimiento que está siendo explicado. Podemos decir que aquí se entienden las representaciones como sistemas de símbolos que utiliza el profesor a la hora presentar conceptos u otros aspectos matemáticos (y no como 'forma de conocer el contenido' del profesor).

Para Leinhardt y sus colaboradores las representaciones utilizadas por los profesores ofrecen 'ventanas' sobre su conocimiento de la materia. Sin embargo, "*estas 'representaciones ventana' pueden ser vistas como ventanas hecha de un buen cristal. Por esto consideramos que el uso de las representaciones arroja luces que permiten 'ver' aspectos muy detallado y*

[3] *Curriculum scripts* en original

sutiles de cómo los profesores entienden un particular tópico matemático" (Leinhardt et al., 1991, p.106). Para ellos, la clase y nivel de conocimiento de la materia necesario para llevar un uso apropiado, fluido y efectivo de las representaciones es sustancial. Estos autores ven el uso de las representaciones dentro del marco sugerido por las agendas, escrituras (anotaciones) curriculares y explicaciones, considerando que el objetivo y la secuencia de acciones asociadas influenciará la representación particular que un profesor escoge, y cómo la utiliza.

Shulman (1987) propuso que la persona que se dedica a la docencia tiene un conocimiento base que, al menos, incluye tres áreas generales: el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento del contexto. Cuando Shulman introduce el término *Conocimiento didáctico del contenido*[4], como categoría de conocimiento, involucra los saberes que le permiten al docente hacer enseñable el contenido e incluye:

> *"las más poderosas formas de representación [...], analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, o sea, las formas de representar y formular la materia para hacerla comprensible a otros [...] además la comprensión de qué hace un aprendizaje de tópico específico fácil o difícil."*
>
> (Shulman, 1986, pp. 9)

Esto implica que para poder ejercer la docencia, se requiere "*la transformación de lo comprendido*" de determinado cuerpo disciplinar. O sea, la capacidad de enseñabilidad de determinado contenido descansa, entre otros, en

> "[...] *el conocimiento profundo, flexible y cualificado del contenido disciplinar, pero además, en la capacidad para generar representaciones y reflexiones poderosas sobre ese conocimiento*" (Shulman et altr., 1999, p. xi).

El estudio del *Conocimiento didáctico del contenido* ofrece la oportunidad de entender cómo los docentes llegan a hacer enseñables los contenidos. Esta categoría de conocimiento le permite al docente tener la habilidad de convertir sus comprensiones acerca de un tema, en distintas estrategias de enseñanza que le faciliten el logro de los aprendizajes en sus estudiantes. Esto supone cómo los docentes "conocedores de la materia" trascienden y se convierten en "maestros de la materia" (Strong, 2002).

[4] la traducción libre del concepto en inglés: Pedagogical Content Knowledge

La posibilidad de conocer y comprender a los estudiantes le permite, al docente, interpretar las acciones e ideas de estos, de modo que puede organizar su enseñanza de una manera más efectiva, puesto que enfoca sus estrategias pedagógicas hacia una mejor representación del contenido.

En este sentido, Shulman (1986,1987) afirma que el manejo profundo de la disciplina, le facilita al docente anticipar los componentes y relaciones del contenido que pueden presentar problemas para su comprensión. Un buen manejo de la disciplina significa saber que *algo es así* y comprender *el por qué* de esta naturaleza, pero además saber *bajo qué circunstancias se valida* este conocimiento: "*Esto será importante en las subsiguientes decisiones pedagógicas que consideren el énfasis curricular*" (Shulman, 1986, p. 9).

3.5.2. Sobre desarrollar el contenido matemático

No hay que olvidar que para el uso de una buena metodología de enseñanza-aprendizaje los importantes son los alumnos, así que es de máxima importancia conocer bien el grupo ya que éste ha de determinar el mejor camino hacia la buena comprensión de los conceptos. Esto toma lugar en el marco de los cambios globales de acercamientos hacia lo que es el aprendizaje significativo en matemáticas (Hanna, 1996). Aún a riesgo de ser simplista, sugerimos que la aproximación hacia el aprendizaje como un proceso meramente receptivo de transferencia de conocimiento, y la visión de la argumentación matemática como una comunicación muy formal, ha promovido a la práctica del salón de clase hacia aquella en la que el proceso de aprender a enseñar se realiza siguiendo un ritual gobernado por unos reglas fijas. El estudiante para profesor de Primaria debe conocer la materia como conocimiento sustantivo y conocimiento sintáctico, según la descripción dada por Shulman y Grossman (1988), y explicado por Brown y Borko (1992, p211-212). De ahí que buena parte del problema es cómo o cuál es el conocimiento sintáctico a transmitir en estos niveles. El problema entonces es en qué forma identificamos lo más adecuado para trabajar en la formación del docente de 6 a 12 años. Los aprendices, sus entendimientos y las interacciones con la comunidad de su clase, son centrales en la visión del proceso de enseñanza - aprendizaje. Como una consecuencia, los procesos de razonamiento son considerados ahora como una variedad de acciones que toman los alumnos con el fin de comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ellos ven, lo que ellos descubren y lo que ellos piensan y concluyen.

En varias actividades de la práctica de formación docente planteada discute en profundidad el rol de la deducción en la construcción de conocimiento de transformación geométrica. Parece que el razonamiento deductivo tiene aún un rol central en el aprendizaje de la transformación geométrica.

Para nosotros, dentro de la comprensión de la materia (conocimiento de la materia para la enseñanza) tiene especial importancia la forma de conocer un contenido matemático (entendida como la representación mental que el profesor tiene del mismo), ya que puede influenciar lo *que* los profesores consideran importante aprender y *cómo* estructuran las actividades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, es importante analizar las relaciones entre las diferentes componentes del conocimiento de la materia y lo que los profesores destacan cuando estructuran esas actividades. Estas relaciones pueden ser mostradas cuando el profesor transforma el contenido para el propósito de la enseñanza, es decir, en el proceso de razonamiento pedagógico, entendido como

> "*el proceso de transformar la materia en formas que son pedagógicamente poderosas y sin embargo adaptables a las variaciones en habilidad y base presentadas por los estudiantes*" (Shulman, 1987, p.15).

Este razonamiento pedagógico es específico de la enseñanza.

Shulman y sus colaboradores (Wilson et al., 1987) han desarrollado un modelo teórico del ciclo de actividades involucradas en el razonamiento pedagógico y la acción, en el que se trata de caracterizar los pasos del profesor cuando genera su conocimiento para la enseñanza. En el modelo se describen seis componentes del proceso: *comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión, nueva comprensión*. Este modelo de razonamiento pedagógico va a ser el marco que nos permita mostrar la transformación del contenido con el propósito de la enseñanza, posibilitándonos estudiar la relación entre la forma de conocer el contenido matemático (representación mental del mismo), los aspectos del contenido que enfatiza y la elección del profesor de las tareas y el uso que hace de ellas en las situaciones del aula.

En particular, aquí nos vamos a situar en las dos primeras componentes. En relación a la comprensión del profesor del contenido matemático, centraremos nuestra atención en aquellos aspectos del concepto que el profesor concede una mayor importancia para organizar el contenido que presenta a sus alumnos, y los diferentes usos que el profesor atribuye a los modos de representar concepto de transformación geométrica, de lo que podemos inferir su forma de conocer el contenido. Ahora bien, no hay que olvidar que esos aspectos están enmarcados dentro de unas concepciones de carácter más general sobre lo que significa enseñar una materia, que de alguna manera pueden definir los objetivos e influenciar la toma de decisiones (Grossman, 1990). Por ello, consideramos también aquellas concepciones que están relacionadas más específicamente con lo que el profesor piensa sobre el contenido matemático para los estudiantes (lo que deberían aprender sobre las transformaciones geométricas y la naturaleza de las transformaciones geométricas).

Como segunda componente se sitúa la transformación (incluyendo las características que habíamos mencionado anteriormente). Comprende cuatro subprocesos que, globalmente considerados, tienen como objetivo generar un plan de acción específico para la enseñanza de un contenido determinado. El primero de ellos, la interpretación crítica, involucra la revisión de materiales obstruccionares a la luz de la propia comprensión de la materia. Para nosotros este subproceso se infiere de la organización del contenido en la planificación. El repertorio representacional incluye en nuestro caso las formas alternativas de presentar la materia, diferentes modos de representación (entendidos como sistemas de símbolos), etc., y el objetivo que se pretende con las tareas. Por último, el considerar las características de los alumnos en general (los errores, las dificultades, etc.) y de alumnos de la clase concreta en particular correspondería a los dos últimos subprocesos, adaptación y ajuste.

Dentro de nuestro investigación, tanto en la línea de aprender a enseñar (Llinares y Sánchez, 1996) como en nuestros trabajos sobre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, la importancia de la forma de conocer el profesor (o futuro profesor) la materia en su toma de decisiones instruccionales se ha revelado un tema de gran interés, ya que condiciona en gran medida el proceso de enseñanza/aprendizaje.

3.5.3. La trayectoria de construcción de conocimiento sobre aprendizaje de transformación geométrica

Sobre la construcción de conocimiento del futuro profesor referimos a Cooney (1994), que respondiendo a las preguntas: "¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?" (p. 608), acepta que el concepto de conocimiento de contenido pedagógico es difuso, pero insiste en que "tiene que ver con la manera como un contenido específico puede ser interpretado en situaciones de enseñanza" (p. 611). Cooney defiende la posición de formación de profesores como un campo de indagación sistemática que se está basando en la importancia de la cognición, el contexto y el paradigma constructivista. Pero, el problema en la actualidad es que nos estamos llenando de historias de teorías locales de profesores (Gomez, 2000), y en algún momento debemos pasar de lo local a lo general."*¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?*" (pp. 627-628). Él Cooney se interesa por promover la idea de la autoridad como posible concepto organizador de la investigación (centrada en las creencias del profesor), pero lo más importante de su artículo es el reconocimiento del profesor como un *agente reflexivo y adaptativo*. En este momento el paradigma constructivista ya se ha establecido y surge el problema: ¿Qué nos puede aportar el paradigma constructivista a la problemática de la formación de profesores? Para entender la importancia de este cambio de enfoque hay que caracterizar el tipo de investigación que se venía haciendo hasta el momento.

Como ya hemos mencionado, la mayoría de la investigación que se venía haciendo sobre el conocimiento del profesor estaba centrada en las nociones de conocimiento de contenido pedagógico y conocimiento de contenido temático. Para la primera noción, según Gomez (2000) aunque se cita en buena cantidad de artículos, no se utiliza realmente de manera sistemática como marco conceptual para la investigación. La segunda noción, al ser más sencilla y concreta, sí da lugar a investigaciones más sólidas sobre el conocimiento matemático del profesor en algunos temas específicos. Los dos tipos de investigaciones tienen una característica común: *están centradas en el* *profesor y asumen implícitamente una posición sobre la enseñanza y el aprendizaje*. Esta posición implícita supone un esquema de transmisión por parte del profesor y recepción por parte del alumno de ese contenido "transformado" gracias al conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento de contenido temático del profesor. Supone también, por consiguiente, una posición sobre el aprendizaje como proceso de retención de información (Gomez, P, 2000). Sobre los tipos de experiencias que los profesores deben vivir para construir ese conocimiento necesario para ser eficientes y al reconocer la importancia del paradigma constructivista, Cooney pone de relieve la necesidad de ver al futuro profesor como un *agente cognitivo* y la necesidad de conceptualizar los procesos mediante los cuales el profesor construye su conocimiento.

Simon (1995) en su modelo de construcción de conocimiento recoge estos dos puntos: *la enseñanza basada en los principios constructivistas* y el profesor *como agente cognitivo*. Nos parece importante mostrar la explicación de estos elementos del modelo de Simon por parte de Steffe y d'Ambrosio (1995). Estos autores afirman que el propósito de Simon (1995) es el de "*contribuir al diálogo acerca de cómo sería la enseñanza si se construyera sobre una visión constructivista del desarrollo del conocimiento*" (p. 115). En este modelo, la enseñanza, desde la perspectiva del profesor, está guiada por la trayectoria *hipotética de aprendizaje* que consiste en la predicción que el profesor tiene acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. "*Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje*" (p. 135). La trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes, relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del *objetivo de aprendizaje*, la planificación del profesor para las *actividades de aprendizaje* y las hipótesis del profesor acerca del *proceso de aprendizaje*. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje.

El centro de la propuesta consiste en sugerir que éste es un proceso dinámico y cíclico. La trayectoria de aprendizaje no es algo que se determine con anterioridad a la realización de la clase y que permanezca estático durante ésta. Por el contrario, la trayectoria de aprendizaje estará en permanente evolución a lo largo de la clase porque la puesta en práctica de las actividades y la permanente evaluación del conocimiento de los alumnos, nos llevará a revisar dinámicamente la trayectoria de aprendizaje.

Steffe (2004), al extender el modelo de Simon, resalta la importancia de tener en cuenta las acciones de los alumnos como indicativos de su conocimiento y de poner en relieve ese conocimiento matemático. Por lo tanto, el profesor, no solamente hace un seguimiento de estas acciones, sino que también hace conjeturas sobre las acciones que los alumnos podrían ejecutar con ciertas actividades (o situaciones en términos de Steffe).

Nosotros intentamos identificar los tipos de conocimientos del profesor que se ponen en juego en este proceso dinámico de construcción de conocimiento sobre la transformación geométrica. Sobre los conocimientos de las transformaciones geométricas que se construyen en las actividades de la práctica docente propuesta, identificamos: el objeto transformación, terminología y tipos, relaciones y jerarquías en transformaciones, el proceso de transformación como cambio, el razonamiento con transformación y la incorporación de elementos culturales en las transformaciones geométricas.

Sobre estos conocimientos que se ponen en las actividades de la práctica docente se basa la evaluación de los conocimientos de los estudiantes – futuro profesor de primaria, formulando la trayectoria de construcción de conocimiento. En esta manera pretendemos definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria de aprendizaje, caracterizado por los factores:

a) El conocimiento del futuro profesor evoluciona permanentemente,
b) El cambio continuo en el conocimiento del futuro profesor crea un cambio continuo en su trayectoria de aprendizaje.
c) La planificación para la enseñanza incluye la generación de una trayectoria de aprendizaje.

Tratamos de mostrar si es posible caracterizar el desarrollo didáctico de los futuros pro-fesores de matemáticas. Las producciones y actuaciones de los estudiantes-participantes de la investigación (y, por consiguiente, los significados parciales que ellos van construyendo) pasan por diferentes estados que permiten identificar tanto algunas de sus dificultades, como los momentos en los que surgen reorganizaciones conceptuales.

Es evidente que estos estados, dificultades y reorganizaciones dependen, tanto de las características de los estudiantes como del diseño y puesta en práctica de las tareas de formación en el que participan. Hemos propuesto los primeros esbozos de algunos modelos descriptivos del desarrollo didáctico de estos futuros profesores para el caso de transformaciones geométricas.

3.5.4 Desarrollando el contenido didáctico estratégico

Para Llinares (1998) el conocimiento profesional se genera en el uso del conocimiento en situaciones concretas de la enseñanza, siendo una construcción personal en el sentido de que el uso del conocimiento por parte del profesorado para gestionar sus situaciones de enseñanza de las matemáticas y reflexión posterior genera nuevo conocimiento. Subraya que el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas no sería ni *artesanal* (procedente únicamente de la reflexión sobre la práctica) ni *científico* (en el sentido de proceder de investigaciones adscritas a un paradigma racional), debiendo ser considerado en otra ¨categoría¨.

Según este autor, las características a través de las cuales se empieza a describir el conocimiento del profesor de matemáticas (contenido, naturaleza, organización) y el uso de dicho conocimiento en situaciones de enseñanza está aportando nuevas perspectivas desde las que mirar el proceso de aprendizaje del conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

Como hemos dicho antes, Llinares (op. cit.) caracterizó el conocimiento del profesor como una integración de varios dominios de conocimiento como: de matemáticas, de diferentes modos de representación de los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje, sobre los estudiantes como aprendices de matemáticas, sobre el currículum, etc., y la consideración de aspectos afectivos (García Blanco, 1997) desde modos y usos del conocimiento del profesor en las situaciones de enseñanza (replicar, aplicar, interpretar y asociar; priorización, dilemas y tensiones, temporalización etc).

Los dominios de los conocimientos considerados y el tipo de actividad para el desarrollo en clase de formación inicial del profesorado de matemática, se ejemplifica a continuación (Llinares *apud* García Blanco, 1999).

Conocimiento sobre:

- Matemáticas
- Aprendizaje de nociones matemáticas
- Planificación de la enseñanza y análisis de tareas
- Representaciones instruccionales
- Recursos
- Interacciones didácticas

A partir de estos elementos sobre el desarrollo y conocimiento del contenido profesional docente, presentamos a continuación dos aspectos (matemático, y didáctico) que hemos considerado claves para la atención y desarrollo en una práctica docente de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la Educación Primaria en la FEUP y FFPUB.

Para que el futuro profesor sea capaz de transmitir la idea de lo que son las transformaciones geométricas, es necesario un conocimiento más amplio y profundo de la noción de transformación, es por ello que deben contemplarse los aspectos del contenido matemático y didáctico.

Así pues, identificamos dos tipos de categorías sobre las que queremos indagar los conocimientos de los estudiantes:

- Los aspectos relacionados con *el conocimiento matemático* de la transformación geométrica, incluyendo la incorporación de *elementos culturales* en el proceso de aprender a enseñar transformaciones, y
- Los aspectos relacionados con el *conocimiento didáctico-estratégico* de su enseñanza y aprendizaje.

Los aspectos relacionados con el conocimiento matemático nos sirven para analizar construcciones personales de futuros profesores sobre el significado de transformación, sobre tipos, procesos, justificación y argumentación de transformación geométrica y cual es el grado de la incorporación de elementos culturales en el proceso de aprender a enseñar transformaciones.

Los aspectos relacionados con el conocimiento didáctico-estratégico nos sirven para el análisis de la práctica escolar sobre el trabajo de transformaciones para el desarrollo profesional de futuros profesores y para reconocer los dificultades de los estudiantes en comprender su desarrollo profesional.

3.5.5. Sobre competencias profesionales.

Un profesor de primaria matemáticamente competente debe tener las condiciones necesarias para un desempeño profesional correspondiente a las expectativas definidas por la etapa correspondiente del sistema educativo y el contexto social en el que está desarrollando su profesión. Las competencias no son simplemente un listado, sino la capacidad de formas de desarrollo en momentos en que los cambios son lo normal (Gimenez, 2003). A partir de nuestra experiencia como formadores e investigadores, consideramos como competencias fundamentales las siguientes:

- Formación profesional critica en valores, creativa y abierta al diálogo y al futuro basada en la autonomía, la cooperación, las posibilidades creativas, que podemos resumir como *habilidad para responder con espontaneidad, soltura y prontitud que se presenten*.
- Formación especializada hasta un cierto grado que permita desarrollar la apertura a nuevos contenidos, nuevas técnicas, nuevos desarrollos, conociendo donde están los recursos claves para seleccionar informaciones relevantes a la profesión. En otras palabras esto es *conseguir elementos epistemológicos suficientes para saber los fundamentos de la disciplina, reconocer obstáculos, superar errores, provocar conflictos, etc*.
- Formación educativa estratégica, interpretativa de forma que permita reconocer las reformas curriculares, los modelos instructivos que permiten un desarrollo constructivo e investigativo más profundo y eficaz del alumnado en el área. Esto significa *caber el control constante de la acción formativa y la cooperación profesional.*
- Preparación para el establecimiento de actitudes reflexivas que lleven al docente a relaciones profesionales de equipo en la escuela, que permitan que *desarrolle líneas docentes novedosas, adaptación al medio sociocultural y al alumnado específico con dificultades que puede tener*.

La realización de las actividades de la práctica de formación propuesta está diseñada para que los participantes de la investigación desarrollen estas capacidades.

Capítulo 4.

Metodología de la investigación

4.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos expuesto las referencias teóricas de la investigación las cuales nos han servido para situar el problema de la investigación y sus objetivos. Como ya hemos comentado, el estudio de este trabajo se centra en la problemática de analizar las características del proceso de aprender a enseñar transformaciones geométricas en la Educación Primaria desde un ámbito cultural.

Por tanto, el estudio comprende un componente teórico y otro didáctico de tipo experimental (figura 4.1) que están íntimamente relacionados y han sido desarrollados simultáneamente en el periodo 2004/2008.

En este capítulo, presentamos las cuestiones de la investigación y su justificación metodológica, así como el proceso de recogida de datos, los instrumentos y las fases de su desarrollo. También se describen los procedimientos de análisis y las categorías sobre conocimientos matemáticos y didácticos de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en la Educación Primaria en dos ambientes culturalmente diferentes.

4.2. Justificación metodológica y tipo de investigación

La base general metodológica de nuestra investigación son los estudios exploratorios e interpretativos que se enmarcan en el paradigma cualitativo, pero que se completan con métodos cuantitativos.

Basándonos en los distintos trabajos revisados vamos a apuntar diversas consideraciones que nos han ayudado a delimitar y clarificar diferentes aspectos de la investigación que nos ocupa.

La metodología más adecuada para una investigación depende del tipo de problema que se plantea y del conocimiento que se quiera lograr. Puesto que en nuestro estudio nos hemos planteado la identificación de las diferencias y semejanzas entre prácticas culturalmente diferentes en la formación docente en el proceso de aprender a enseñar transformaciones geométricas, consideramos que nos hemos de centrar en el análisis de la producción sobre tareas de aprendizaje que hacen los futuros profesores de primaria cuando realizan la práctica sobre las transformaciones para su desarrollo profesional. Nos interesa estudiar las construcciones que producen los futuros profesores sobre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico-estratégico en el proceso de aprender a enseñar transformaciones y cómo evolucionan. Por esto hemos considerado que la metodología más adecuada para aplicar el estudio es de tipo teórico-formal dentro del enfoque interpretativo y cualitativo etnográfico de estudio de casos. El proceso de evaluación del grado del conocimiento sobre el concepto de transformación geométrica se inició asignando el grado de conocimiento según las producciones en las respuestas que dio cada estudiante a las cuestiones que conformaron la Prueba Inicial, al desarrollo de las actividades de la práctica docente y a la Prueba Final de conocimientos. Se tendrá especialmente en cuenta que las diferentes capacidades de aprender a enseñar las transformaciones asociadas a los grados de conocimiento no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a un determinado vocabulario.

De esta forma se ha elaborado un diseño en el que se aplican las técnicas de estudios de casos como introspección epistemológica y la reflexión didáctica sobre la propia acción.

En primer lugar, la metodología cualitativa nos parece la idónea para este tipo de investigación que queremos desarrollar en la formación inicial, pues ésta nos aporta los datos descriptivos de los conocimientos de los estudiantes. Una de las ventajas que tiene es que la captación de los datos se realiza desde el interior del grupo y desde sus propias ideas.

La idea impulsora del estudio es que consideramos necesario clarificar la naturaleza de los conocimientos matemáticos y didácticos sobre transformaciones geométricas como un paso previo para el análisis de los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las mismas. En este caso, pensamos que a pesar de la literatura sobre la tema, se precisa un estudio sistemático que contemple las relaciones entre conocimiento matemático, didáctico y cultural ofreciendo un modelo integrativo de la concepción sobre el aprender a enseñar las transformaciones geométricas.

Esta idea impulsora se concreta en el objetivo:

O1: Comparar elementos curriculares escolares y especialmente identificar aspectos socioculturales que intervienen en la formación de los futuros profesores de Primaria en Catalunya y Kosova en el ámbito geométrico y especialmente en el tratamiento de las transformaciones.

Así, para responder al objetivo 1, se trata inicialmente de realizar una comparación de los currículos y aspectos socioculturales que tiene una gran influencia en la formación de profesores en los dos países. Esto nos permite obtener un conocimiento general sobre la situación actual de la educación matemática en Cataluña y Kosova, para situar el contexto en el cual se desarrolla nuestra investigación.

Luego, continuamos con el objetivo:

O2: Identificar el tratamiento del contenido matemático de transformación en la formación de los futuros profesores de primaria en ambos países e identificar la situación inicial (diferencias y semejanzas entre características culturales de enseñanza y aprendizaje) de futuros profesores de Primaria en ambos países ante el tratamiento de las transformaciones.

Para responder al objetivo 2, ponemos el énfasis en la geometría en general y en las transformaciones en especial y ver también los aspectos didácticos y las diferencias culturales en los programas y en su puesta a punto. Las aspectos socioculturales como el sistema educativo en Catalunya y Kosova, los contenidos matemáticos en general y de transformaciones geométricas en los currículos escolares, en los libros de textos de educación primaria y el tratamiento de contenido geométrico en los programas de formación de profesores de primaria en ambos países, (capitulo 2), son elementos que nos ayudarán al identificar la situación inicial del nuestros participantes en la investigación como futuros profesores de primaria ante un proceso de formación sobre aprender a enseñar las transformaciones. Consideramos que este objetivo lo podemos observar tanto de la comparación de los aspectos socioculturales como desde el análisis de la Prueba inicial (capitulo 6).

Los objetivos siguientes se dedican al diseño de unas prácticas profesionales sobre formación de profesores que permiten identificar la construcción de significados personales de los futuros docentes y a la caracterización de su desarrollo profesional.

O3: Diseño, planificación e implementación de una práctica sobre aprender a enseñar transformaciones geométricas en los dos países resaltando los valores culturales diferenciados de dicha propuesta.

Para desarrollar dicho objetivo se ha tenido en cuenta mostrar los aspectos más interesantes del tema atendiendo que son:

- La naturaleza limitada del currículo matemático del programa de formación de profesores;
- Pocas ocasiones para compartir ideas y hablar de la mejor práctica escolar.

En la parte experimental de la investigación abordamos el estudio atendiendo a la caracterización de los significados personales de los futuros profesores sobre el tema de aprender a enseñar las transformaciones geométricas y la identificación de los factores que la condicionan.

La descripción de las características de la práctica sobre aprender a enseñar las transformaciones, su diseño, planificación e implementación se justifica y presenta en detalle en el capítulo 5,

Sobre las construcciones del conocimiento de las transformaciones geométricas, nosotros consideramos que es importante el análisis desde una perspectiva cultural.

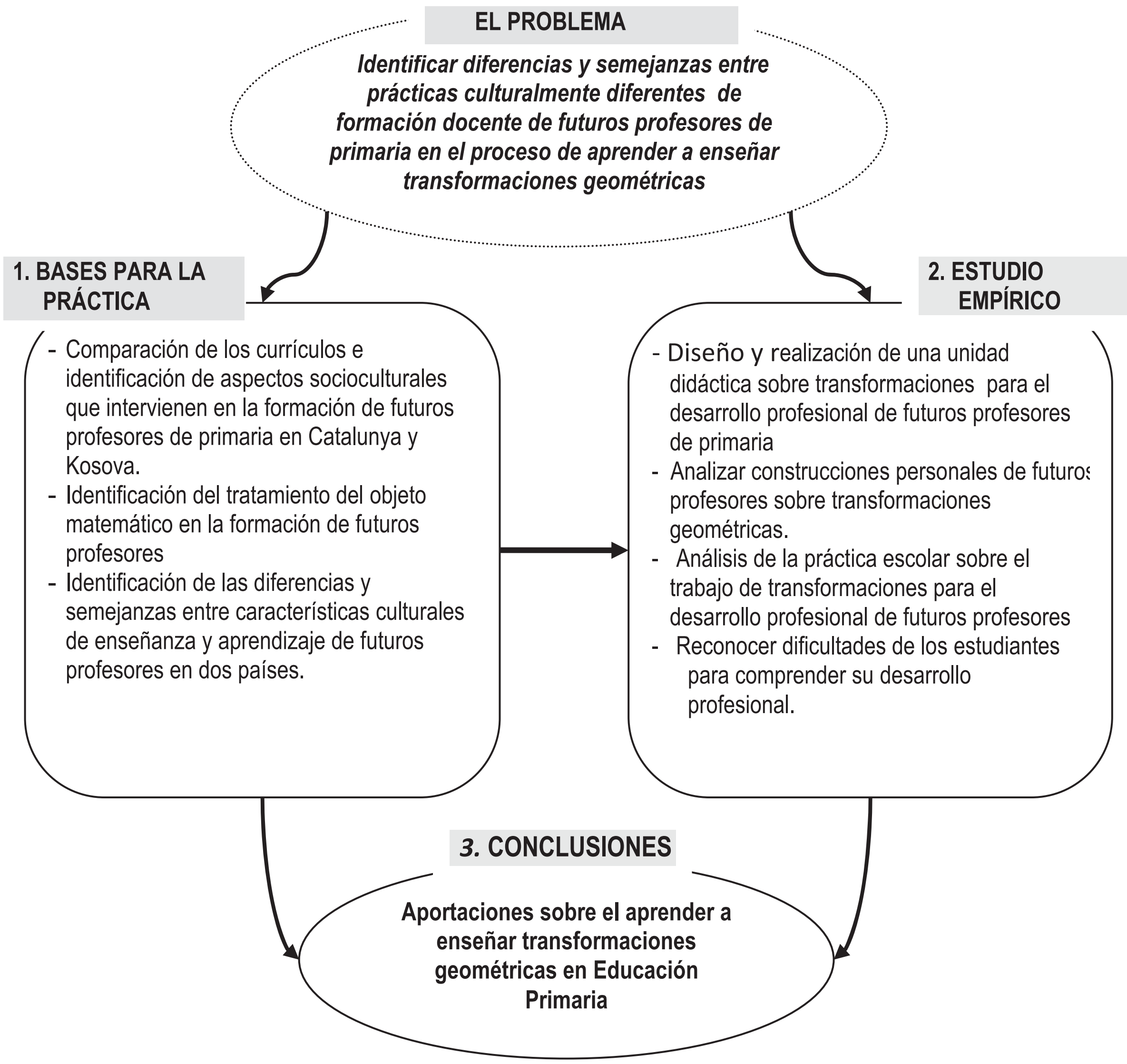
O4: Analizar algunos elementos de las construcciones de significados personales de futuros profesores sobre transformaciones geométricas en ambas sociedades; reconocer las dificultades de los estudiantes para comprender, relacionar y organizar contenidos, términos y propiedades geométricas asociadas a las transformaciones, contrastando (desde el punto de vista cultural) las prácticas realizadas y caracterizando elementos del desarrollo profesional de los futuros profesores implicados.

Pensamos que es importante tratar el aspecto de esta construcción que es la relación entre el sujeto y los objetos del conocimiento, y se ha tratado en el capítulo 7 y 8.

Es por ello que primero se describirán y analizarán los conocimientos de los futuros profesores de primaria, para estudiar en segundo lugar los conocimientos derivados del desarrollo de la práctica sobre la unidad dedicada a las transformaciones geométricas. Pensamos que la realización de la práctica sobre aprender a enseñar las transformaciones y el análisis de la construcción del conocimiento de dos grupos diferentes pueden aportar elementos que puedan ser tenidos en cuenta en la puesta en marcha del nuevo currículo en Kosova y Catalunya.
Con este estudio esperamos mostrar la variedad de concepciones sobre diferentes aspectos de aprender a enseñar las transformaciones que se ponen en juego en el proceso de aprender a enseñarlas y el papel desempeñado por el dominio de los conceptos, procedimientos y técnicas correspondientes en los procesos.

Finalmente, mostramos los resultados y las conclusiones que han mostrado los participantes - futuros profesores de la investigación en la ardua tarea de aprender a enseñar las transformaciones geométricas en educación primaria (capitulo 9).

A continuación presentamos en forma de representación los elementos y procesos, objetos de estudio de la investigación que llevaremos a término.



Esquema 4.1 – Desarrollo de la investigación

4.3. Fases de la investigación

La investigación se ha planificado en 4 fases, las cuales describimos a continuación:

- **Primera Fase (justificación del problema)**. Esta primera fase ha consistido en el conocimiento del estado de la cuestión, esto es la identificación del problema y el planteamiento de objetivos del estudio.

- **Segunda Fase (bases para la práctica – 2003/05).** En esta segunda fase nos hemos propuesto investigar los elementos que caracterizan la practica escolar, empezando por el estudio comparativo de los currículos de la formación docente de ambos países, se ha observado el tratamiento del contenido matemático sobre las transformaciones geométricas y los aspectos socioculturales que intervienen en la formación de profesores de Primaria. También se identifican elementos del desarrollo profesional sobre los objetos matemáticos de las transformaciones geométricas.

- **Tercera Fase (Estudio empírico: diseño e implementación. Resultados-2006/07)** La tercera fase se centra en el estudio empírico, por lo que primero se desarrolla el diseño de la práctica sobre transformaciones geométricas para la formación de los futuros docentes, la cual se muestra en el capítulo V. También en esta tercera fase se realiza la puesta en práctica y la realización de las sesiones de la *práctica sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria* tanto en Cataluña como en Kosovo y se analizan los resultados.

- **Cuarta Fase. (Conclusiones-2008)**. La fase final de la investigación contiene las conclusiones de los objetivos fijados y muestra implicaciones para la práctica de la enseñanza de las transformaciones en la educación primaria en dos ámbitos culturalmente diferentes en la formación de Maestros. También aporta algunas reflexiones y orientaciones sobre la didáctica de las transformaciones geométricas para la escuela primaria.

4.4. La población del estudio

La población objeto de estudio viene definida por las características del problema de la investigación, por lo que se decide centrase en dos grupos de estudiantes futuros profesores de primaria culturalmente distintos: uno de Cataluña y otro de Kosovo.

El grupo de la Universidad de Prishtina (única universidad pública de Kosova) como referente del contexto Kosovar y el otro grupo de la Universidad de Barcelona (la universidad más antigua de Catalunya) como referente del contexto Catalán.

Los estudiantes que constituyen la población de cada una de estas universidades están en las Facultades de Educación de la Universidad de Prishtina FEUP (Kosova) y de la Facultad de Formación de Profesores de la UB – FFPUB (Catalunya).

El grupo de la Universidad de Prishtina está constituido por 14 estudiantes de tercer curso (puesto que son estudios de licenciatura) y los estudiantes de Universidad de Barcelona está formado por 13 estudiantes de segundo año (Diplomatura).

Para la selección de los estudiantes, se ha tenido en cuenta que quisieran participar en el estudio, ya que se ha considerado importante su colaboración en el mismo.

4.5. Los instrumentos

Se prevén diferentes instrumentos según las fases y los objetivos de la investigación. Así, en la primera fase de la investigación para la caracterización del problema de la investigación se utilizan como instrumentos ***las aportaciones de educación geométrica*** a partir del análisis bibliográfico sobre el tema.

En la segunda fase de la investigación (Bases para la práctica) se utilizan tablas de comparación y se realiza un análisis comparativo documental de ***los currículos*** de los dos países. También se utilizan tablas de comparación y análisis de significado (histórico, interpretativo y epistemológico) de los aspectos culturales.

En la tercera fase (desarrollo empírico) para el diseño de la unidad didáctica se utilizan como instrumentos distintos programas de formación docente de maestros. En esta misma fase se elabora como uno de los instrumentos valiosos una ***prueba inicial*** de conocimientos sobre cómo aprender a enseñar las transformaciones geométricas en primaria. Es un instrumento que se diseña con la finalidad de poder conocer cuáles son los conocimientos que tienen los estudiantes futuros profesores antes de realizar la unidad didáctica sobre transformaciones. Esperamos que este instrumento nos permita identificar las diferencias y semejanzas entre los dos grupos de estudiantes.

Para el seguimiento de la práctica sobre transformaciones geométricas se utilizan unas ***fichas de trabajo*** que contienen problemas de cada actividad donde hay un espacio reservado para que el estudiante pueda responder y después ser analizado. Esperamos encontrar en sus respuestas parte del proceso de aprender a enseñar transformaciones.

También se utilizan como instrumentos ***videograbaciones*** de las sesiones de la práctica sobre transformaciones.

Finalmente, para esta tercera fase se ha diseñado una ***prueba final*** de conocimientos sobre aprender a enseñar las transformaciones con el fin de poder conocer el avance que han conseguido los estudiantes después de realizar la unidad didáctica sobre transformaciones.

A continuación mostramos un cuadro sobre las fases de la investigación, los objetivos y los instrumentos.

Fases	Objetivos	Instrumentos
1. Justificación del problema	Reconocimiento e interés del trabajo en transformaciones geométricas en la formación de profesores	Aportaciones de educación geométrica
2. Bases para la practica	Comparación de los currículos e identificación de aspectos socioculturales que intervienen en la formación de futuros profesores de primaria en Catalunya y Kosova Identificación del tratamiento del objeto matemático en la formación de futuros profesores Identificación de las diferencias y semejanzas entre características culturales de enseñanza y aprendizaje de futuros profesores en dos países.	Currículos de los 2 países Aspectos culturales presentes en los libros de texto y en currículo
3. Estudio empírico	Diseño y realización de una unidad sobre transformaciones para la formación inicial de futuros profesores de primaria Analizar construcciones personales de futuros profesores sobre transformaciones geométricas Análisis multicultural de la práctica escolar sobre el trabajo de transformaciones para el desarrollo profesional de futuros profesores Analizar las construcciones personales de futuro profesor sobre transformaciones geométricas Reconocer dificultades de los estudiantes para comprender su desarrollo profesional.	Programa docente Pruebas de conocimientos sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas. La prueba inicial y la prueba final. Videograbación de clases Fichas de trabajo de los estudiantes
4. Conclusiones	Establecer aportaciones sobre el aprender a enseñar transformaciones con futuros profesores de Primaria	Síntesis de aportaciones y resultados sobre lo cultural en la formación.

Tabla 4.2 – Las fases, objetivos y instrumentos de investigación

4.6. El proceso de recogida de datos

Inicialmente, haremos una investigación descriptiva, de cómo los estudiantes aprenden a enseñar las transformaciones geométricas, tal como se dan en el momento de realizarse.

A partir de los instrumentos esperamos obtener los datos que se relacionan a continuación.

- Diseño de la práctica sobre transformaciones geométricas. Justificación y adecuación teórica.
- Prueba Inicial de conocimientos previos sobre las transformaciones geométricas. Los datos de este instrumento nos permitirán el análisis documental interpretativo y cultural de los estudiantes.
- Videograbaciones de clases y Fichas de trabajo. El análisis de estos datos nos permitirá el análisis documental interpretativo y cultural de los estudiantes.
- Prueba final de los conocimientos adquiridos sobre las transformaciones geométricas. Los datos de este instrumento nos han de facilitar los conocimientos adquiridos y las dificultades de los estudiantes ante el tratamiento de aprender a enseñar las transformaciones en Primaria.

Todo ello nos ha de permitir conocer las relaciones de las actividades de la práctica didáctica con el desarrollo de conocimiento de contenido, conocimiento didáctico y la incorporación de la cultura.

A lo largo del proceso hemos recogido todos los datos que hemos pensado podían aportar en algún momento informaciones útiles sobre el proceso que hemos seguido al estudio. Se numeran los episodios correspondientes en las tareas desarrolladas (Design research, Cobb, 2000)

4.7. Elementos para el análisis

Para realizar el análisis que nos han proporcionado los instrumentos de la investigación se parte de las categorías del marco referencial teniendo en cuenta las concepciones en la formación inicial de profesores surgidas de las investigaciones y sobre todo, de las propuestas curriculares y trabajos específicos sobre las transformaciones geométricas.

Se quiere que el futuro profesor sea capaz de transmitir la idea de lo que son las transformaciones geométricas, es por ello que no es suficiente saber el contenido básico (o un poco más de lo que ha de enseñar), sino que es necesario un conocimiento más amplio y profundo de la noción de transformación, es por ello que deben contemplarse los aspectos del contenido matemático y didácticos.

Los elementos para establecer las categorías de análisis se relacionan con el conocimiento del contenido matemático incorporando también elementos culturales en el proceso de aprender a enseñar las transformaciones, y del conocimiento didáctico de su enseñanza – aprendizaje.

Así pues, identificamos dos tipos de categorías sobre las que queremos indagar los conocimientos de los estudiantes:

- Las categorías relacionadas con *el conocimiento matemático* de la transformación geométrica, incluyendo la incorporación de *escrituras culturales* en el proceso de aprender a enseñar transformaciones, y
- Las categorías relacionadas con el *conocimiento didáctico-estratégico* de su enseñanza y aprendizaje.

Las categorías relacionadas con el conocimiento matemático nos sirven para analizar construcciones personales de futuros profesores sobre transformaciones geométricas (O4); el grado de la incorporación de elementos culturales en el proceso de aprender a enseñar transformaciones nos sirve para el análisis de construcciones personales de futuros profesores sobre transformaciones y para el análisis cultural de la práctica escolar sobre el trabajo de transformaciones geométricas para su desarrollo profesional (O3); las categorías relacionadas con el conocimiento didáctico-estratégico nos sirven para el análisis de la práctica escolar sobre el trabajo de transformaciones para el desarrollo profesional de futuros profesores (O4) y para reconocer las dificultades de los estudiantes en comprender su desarrollo profesional.

Considerando la idea de la continuidad en la adquisición de los conocimientos, empezamos el análisis según los dos tipos de categorías en la prueba inicial. Planteamos el análisis de un proceso seguido por los futuros profesores identificando los momentos del avance y terminamos los análisis con la prueba final, con el fin de identificar las características del proceso de aprender a enseñar las transformaciones en la educación primaria.

En la Tabla 4.3., presentamos los elementos metodológicos de la investigación.

Fases	Acciones	Datos	Instrumentos	Análisis
1. Justificación del problema	Reconocimiento e interés del trabajo en transformaciones geométricas en la formación de profesores		Aportaciones de educación geométrica	Análisis bibliográfico
2. Bases para la práctica (2003-2005)	Comparación de los planes de estudio de formación matemática de profesores de Primaria de Kosova y de Catalunya. Tratamiento del contenido transformación en el currículo Identificar qué aspectos socioculturales intervienen en la formación de ambos países que los distingue.	Características del contenido institucional a partir de los Currículos de los 2 países Aspecto conceptual de la transformación geométrica.	Tablas de comparación Esquemas de comparación sobre aaspectos culturales presentes en los libros de texto y en currículo. (cap. 2)	Análisis comparativo documental de los currículos de los dos paises Análisis interpretativo, epistemológico.
	Identificación del tratamiento de desarrollo profesional del objeto matemático en la formación de futuros profesores.	Desarrollo profesional Características de los planes de estudio de formación de profesores de Primaria de Kosova y de Catalunya sobre transformaciones.	Esquemas sobre aspectos culturales en la formación de profesores de primaria en ambos países (Cap.2)	Análisis descriptivo.

3. Estudio empírico: Diseño e implementación. Resultados **(2005-2008)**	Diseño de una práctica sobre aprender a enseñar transformaciones geométricas para la formación inicial de futuros maestros	Diseño constructivista de enseñanza y aprendizaje.	Diseño Programa docente Caracterización de contenidos (cap.5)	Justificación y adecuación teórica
	Detección de conocimientos iníciales sobre transformaciones geométricas y su enseñanza.	Práctica profesional	Prueba inicial de conocimientos sobre aprender a enseñar transformaciones. (capitulo 6)	Análisis documental interpretativo .
	Seguimiento del proceso de la práctica profesional	Práctica profesional	Videograbación de clases Fichas de trabajo de los estudiantes (cap. 7)	Análisis documental interpretativo
	Detección de los conocimientos adquiridos sobre transformaciones geométricas y su enseñanza y reconocimiento de dificultades observadas.	Práctica profesional	Prueba final de conocimientos sobre aprender a enseñar transformaciones. (cap. 8)	Análisis documental interpretativo .
4. Conclusiones	Resultados del desarrollo de la práctica docente sobre aprender a enseñar las transformaciones geométricas en Primaria.	síntesis	Descripciones relacionadas con los objetivos. (cap. 9)	Aportaciones de la tesis

Tabla 4.3. Elementos metodológicos de la investigación

Así pues el proceso de adquisición de conocimiento matemático, conocimiento didáctico-estratégico e incorporación de elementos culturales, describimos mediante la utilización del concepto de *grado de adquisición*.

A continuación presentamos cada una de estas categorías, sus indicadores y grados de adquisición.

4.7.1. Sistemas de categorías de análisis sobre el contenido matemático y cultural

Un camino para que el futuro profesor descubra formas para llevar a sus alumnos hacia lo que son las transformaciones geométricas, cuáles son sus usos, sus aplicaciones, sus relaciones u otras tareas matemáticas, es tener un conocimiento más profundo de ellas. En otras palabras, no es sólo necesario que el profesor de educación primaria, conozca las técnicas matemáticas que pueden servir para resolver problemas, sino que también conozca sus fundamentos y todo lo que le rodea, que va desde los aspectos conceptuales, contextos, ejemplos, procesos, justificaciones y argumentaciones de las transformaciones. Es necesario, pues, que el profesor sepa el contenido de la transformación geométrica y no se quede con la idea de que son definiciones y teoremas que alguien estableció en su día y que actualmente ya no se puede decir nada.

Para la elaboración de las categorías de análisis de conocimiento matemático de transformación partimos del marco referencial teniendo en cuenta las concepciones en la formación inicial de futuros profesores surgidas de las investigaciones y sobre todo, de las propuestas curriculares y trabajos específicos sobre las transformaciones geométricas.

A partir de los trabajos de Soon (1989), Hoffer (1983), Jaime (1993), Law (1991), Desmond (1997), Vinner (1991, 1997), Skemp (1989), Hiebert et alt. (2003), identificamos cinco elementos a considerar en el análisis de la transformación geométrica:

- **CMt.** El objeto *transformación*, terminología y tipos de transformaciones
- **CMj.** Las relaciones y jerarquía en la noción de transformaciones
- **CPc.** Transformaciones como proceso o cambio
- **CPr.** Comunicación y razonamiento con transformaciones
- **CC.** Elementos culturales e históricos en transformaciones

La identificación de cada una de estas categorías se realiza a partir de los indicadores obtenidos de diversas investigaciones que se describen en el capítulo 3. A estos indicadores se han ido agregando otros según se avanzaba el análisis de las producciones de los estudiantes y surgían elementos que se podían asociar con una determinada categoría.

Este proceso inductivo de generación de indicadores permite establecer un esquema de análisis estable que finalmente es el que se aplica a todos los datos.

Presentamos a continuación cada categoría con los indicadores correspondientes y los grados de adquisición.

Categoría CMt:

Sobre el objeto *transformación*, terminología y tipos de transformaciones

Empezamos a clarificar la idea de transformación como objeto entendido con otras nociones geométricas, como característica estática. Nuestro objeto de análisis es la transformación f que una figura A transforma en la figura B, f(A)=B, sin explicitar como se realiza la transformación f.

Para ello consideramos que es necesario realizar un análisis sistemático de los diversos significados de transformación y nociones relacionadas, desde diversos puntos de vista. En la tabla siguiente presentamos los indicadores según niveles de niveles adquisición de conocimientos para isometrías (simetría, rotación y traslación), deformaciones y proyecciones.

CMt : Transformación - terminología y tipos

	Indicadores		
	Nivel bajo C	***Nivel intermedio B***	***Nivel alto A*** *(demostración – sistema)*
CMt1: *Transformación* como característica estática: (A, B) , donde B = f(A)	- Reconoce (etapa figural en V. Hiele) la transformación en situaciones cotidianas.	- Identificación de patrón de repetición por comparación simple *(propiedades)* - Identifica propiedades: Paralelismo, Discriminación de propiedades relevantes como la perpendicularidad en las acciones *(relaciones)*	- Tiene imagen conceptual completa con representaciones adecuadas. - Uso de juicios adecuados -
CMt 2: Isometría	Reconoce isometría como movimiento simple - tamaño y forma se conserven (iguales)	Reconoce la transformación isométrica como desplazamiento físico Reconoce que la distancia de la figura y su imagen respecto al eje son iguales. Valora la mediatriz Descubre los elementos constituyentes de una figura que se conserva	Movimiento y aplicación basada en las propiedades Identifica la posibilidad de expresar isometría como composición de simetrías

CMt3: Simetría	Ve que algo es simétrico	Encuentra el eje de simetría, Indica perpendicularidad y equidistancia respecto del eje de simetría Identifica que segmentos que unen puntos simétricos son paralelos y semejantes relaciones	Obtiene, utiliza y analiza la definición formal de simetría
CMt4: Traslación	Reconoce la translación de ser isometría (no cambia forma ni tamaño) y conserva orientación.	Identifica el paralelismo de segmentos de las figuras trasladas Asociación de un vector al desplazamiento	Utiliza explícitamente la definición de traslación en las explicaciones
CMt5: Rotación	Reconoce la rotación de ser isometría (la forma y el tamaño se conservan)	Reconoce equidistancia al centro de rotación y la invariancia del ángulo de rotación entre cualquier punto y su imagen Sabe determinar el ángulo y el centro de una rotación de una figura a otra.	Utiliza explícitamente la definición de rotación en las explicaciones
CMt6: Deformación y homotecia	Reconoce la deformación como transformación de forma y tamaño	Reconoce las causas de deformación y explica la dependencia Identifica características necesarias de relación entre el objeto y su transformación.	Identifica correctamente características de la deformación explicando que se transforma.
CMt7: Proyección es	Identifica los elementos de proyección	Identifica la alineación como propiedad de proyecciones Identifica la relación entre objeto, su imagen y el fuente de proyección.	Utiliza correctamente la dependencia funcional entre elementos de proyección.

- **Categoría CMj:**

Sobre las relaciones y jerarquías en la noción de transformación

Para completar adecuadamente el concepto de transformación, hay que estudiar y utilizar las relaciones entre las distintas isometrías, traslaciones, giros y simetrías. Sabiendo que el futuro profesor de primaria no tiene una formación elevada sobre transformaciones, consideramos suficiente saber que al componer giros como simetrías se producen traslaciones y giros. Nos interesa que futuro profesor de primaria manifieste una visión general y global de las relaciones existentes entre las tres isometrías o entre proyecciones e isometrías.

CMj: Relaciones y jerarquías en la noción de transformaciones

	Indicadores		
	Nivel bajo C	***Nivel intermedio B***	***Nivel alto A***
CMj 1: Estructura y ejemplos de transformación. Jerarquía conceptual ; Tipos de isometrías	- Uso de ejemplos - Identificación débil de transformaciones - Solo identificación de rotaciones y/o simetría. - No identifica propiedades	-Identifica correctamente algunas transformaciones como rotación, simetría pero no identificación de otros transformaciones (Relaciones) - El movimiento como rotación, simetría, desplazamiento. Identifica alguna propiedad (Propiedades)	- Identifica una multiplicidad de ejemplos en categorías distinguidas asociadas a propiedades y establece relaciones entre ellos
CMj 2: Isometría	Descubre y empleo de características visuales de isometrías	Identifica de equivalencia entre la figura y su imagen isométrico Identifica el concepto *invariante* de todos isometrías	Obtiene y analiza la definición formal de isometría
CMj 3: Simetría	Identifica características visuales de simetría	Identifica el cambio de la orientación de la imagen respecto a la figura. Identifica equidistancia respecto al eje como propiedad	Obtiene y analiza la definición formal de simetría
CMj 4: Traslación	Identifica características visuales de traslación diferente de simetría	Identifica visualmente y manipulando las figuras trasladadas según el vector de traslación. Identificación del vector de traslación	Obtiene y analiza la definición formal de la traslación
CMj 5: Rotación	Identifica características visuales de rotación como desplazamiento circular o cambio de posición.	Identifica la parte que se repite, en relación al patrón, indicando el elemento generador (con o sin reconocimiento explícito de centro y ángulo) Identifica como característica de rotación la invariancia de ángulo para todos los puntos de una figura.	Obtiene y analiza la definición formal de la rotación
CMj 6: Deformaciones y homotecia	Identifica características visuales de deformaciones que cambian la forma	Identifica correctamente la invariancia de deformaciones que cambian la forma.	Identifica y nombra diferentes deformaciones y homotecias y sus invariantes: semejanza, transformaciones isoperimétricas, equivalencias, proyecciones etc.
CMj 7: Proyecciones	Identificación de la transformación proyectiva con el fenómeno de la sombra	Identificación de la proyección con invariantes diferentes respecto a la isometría.	Obtiene la definición de proyección como transformación alineada (invariante del proyección es alineacion)

➢ Categoría CPc:
Transformación como proceso o cambio

A pesar de que la idea de transformación como un cambio suele ser entendida de un modo rígido y absoluto en muchos currículos escolares, nosotros pretendemos clarificar la noción de transformación geométrica, así como sus distintas tipologías y relaciones con otras nociones geométricas. Consideramos la transformación como una operación u operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada, o como un proceso que consiste en una aplicación de un conjunto de puntos del plano/espacio en otro conjunto de puntos según una determinada función.

Nos interesa como interpretan nuestros estudiantes el "cambio", "operador" o "actuación" (transformación) necesario para pasar de un estado particular de una figura (o objeto en general) a otro estado.

CPc: Transformación como proceso o cambio

	Indicadores		
	Nivel bajo C	***Nivel intermedio B***	***Nivel alto A***
CPc 1: Transformación -como aplicación (como movimiento), A, T, T(A), Explicación de T.	- Conocimiento débil o incorrecto del proceso de transformación. - Transformar significa un cambio no bien definido.	Conoce correctamente el proceso de transformación, como cambio o desplazamiento sin evidencia de propiedades importantes	Reconoce transformación como concepto matemático – evidencia de dependencia funcional, de propiedades importantes y diferencia entre movimiento y transformación. Incluye propiedades (*Propiedades)* Muestra evidencia de la dependencia funcional *(relaciones)* Observa equivalencia como invariancia
CPc 2: Isometría	Isométrico significa un cambio de posición sin explicación adecuada	Identifica isometría como cambio o desplazamiento de los elementos necesarios de la figura (objeto) sin identificación de los propiedades	Muestra equivalencia como propiedad del proceso de transformación isométrica. Reconoce la relación entre acciones de girar y trasladar con las de doblar
CPc 3: Simetría	Realiza transformación simétrica de figuras utilizando plegado, doblando y/o espejo.	Realice simetrías con diferentes posiciones de los ejes y de las figuras.	Realiza composiciones de simetrías y generaliza los resultados de la composición de dos simetrías con los ejes en posiciones paralelos y no paralelos
CPc 4: Traslación	Realiza translaciones de manera directa con materiales concretos	Aplica una traslación concreta a una figura por procedimientos exactos.	Comprende la independencia del punto elegido para aplicar el vector de una traslación y determinar correctamente la imagen de la figura.

CPc 5: Rotación	Realiza rotaciones de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares	Realiza composiciones y descomposiciones de rotaciones del mismo centro con materiales auxiliares y con el dibujo	Descubre experimentalmente las propiedades relacionadas con la rotación Invariancia del centro de rotación Generaliza el resultado de la composición de varios rotaciones, identifica la relación entre rotación y simetría axial
CPc 6: Deformaciónes y homotecia	Identifica deformaciones de materiales con formas determinadas como resultado de acciones	Interpreta los cambios determinados en función de acciones determinadas.	Interpreta ciertas deformaciones y posibilidades en función de ciertas acciones. Interpreta y justifica la invariancia de homotecia. Justificacion deductiva de invariancia del angulo en homotecia.
CPc 7: Proyección	Identifica la sombra como resultado de la proyección	Determina uno de los tres elementos de proyección cuando se conocen otros dos (ejemplo: se conocen el fuente de la proyección y la sombra, debe determinar el objeto)	Identifica la dependencia funcional entre elementos de la proyección: identifica los fenómenos de crecimiento de la imagen (sombra), dependiendo de la fuente de proyección o de otros factores.

➢ Categoría: CPr:
Comunicación y razonamiento con transformaciones

Con el fin de analizar el razonamiento en el proceso de creación del concepto de transformación geométrica, nos interesa identificar la habilidad del futuro profesor en establecer comparaciones, completar pasos de acciones, clasificar, generalizar propiedades a partir de ejemplos, etc., que son característicos del razonamiento inductivo; o de la capacidad de demostrar la verdad de sus conclusiones como derivación *necesaria* de sus premisas que es característica del razonamiento deductivo. Varias investigaciones (Sternberg, 1999) demuestran que el estudiante puede haber desarrollado habilidades lógicas pero tener dificultades a la hora de comunicarlas, expresarlas y aplicarlas de forma práctica y creativa.

CPr: **Comunicación y razonamiento con transformación**

	Indicadores		
	Grado bajo C	**Grado intermedio B**	**Grado alto A**
CPr 1: Transformación geométrica y razonamiento	Sólo hay descripción de fenómenos sin argumentación justificativa Solo hay visualización del fenómeno sin explicitación justificativa, falta de compresión de la tarea planteada.	Identifica alguna propiedad o regla sin registro global o general Uso de reglas y propiedades en algunos casos Comprueba la proposición con al menos un ejemplo, sin errores significativos, alguna justificación correcta.	Interpreta el valor de la demostración deductiva Interpreta el uso de analogías Uso de reglas y propiedades explícitas Aporta una justificación-argumentación correcta con una simbolización adecuada, apoyándola en otras proposiciones conocidas, argumentación generalizante.
CPr 2: Isometría	Características visuales de repetición.	Identifica y explica algunas propiedades de isometrías.	Identifica, explica y argumenta las invariancias respecto a las isometrías con una simbolización.
CPr 3: Simetría	Identifica y explica características visuales de las simetrías. Interpreta la realización de transformación simétrica mediante métodos informales	Utiliza explícitamente de la definición de simetría en explicaciones, verificación a partir de ejemplos y las propiedades simétricas. Utilización y aplicación de simetrías mediante las coordenadas.	Explica justificando y demostrando el resultado de la composición de simetrías y el resultado de descomposición de una isometría en simetrías con posiciones de ejes correspondientes. Demuestra mediante razonamiento deductivo propiedades de las traslaciones.
CPr 4: Traslación	Explica y identifica características visuales de las traslaciones. Ausencia de inversión. Métodos informales empleados para realización de traslaciones	Utilización explicita de la definición de traslación en las explicaciones Verificación a partir de ejemplos, de las propiedades de las traslaciones Utiliza y aplica traslaciones mediante las coordenadas de sus vectores Verifica la conmutatividad de la composición de traslaciones	Justifica y demuestre el resultado de la composición de traslaciones y el resultado de descomposición de una traslación en otras traslaciones. Demuestra mediante razonamiento deductivo propiedades de las traslaciones Justifica de manera general la composición y descomposición de una traslación en productos de varias traslaciones o simetrías.

CPr 5: Rotación	Interpreta y empleo de características visuales de las rotaciones. Equidistancia al centro, ausencia de inversión. Utiliza métodos informales empleados para realización de rotaciones	Utiliza explícitamente la definición de rotación en las explicaciones Verificación a partir de ejemplos, de las propiedades de las rotaciones Utiliza y aplica rotaciones mediante las coordenadas de sus vectores Verifica la conmutatividad de la composición de rotaciones con mismo y diferentes ángulos.	Justifica y demuestre el resultado de la composición de rotaciones con mismo y diferente centro y ángulo, y el resultado de descomposición de una rotación en otras traslaciones. Demuestra mediante razonamiento deductivo propiedades de las rotaciones Justifica de manera general la composición y descomposición de una rotación en productos de varias rotaciones y simetrías
CPr 6: Deformaciónes y homotecia	Explica y identifica características visuales de las deformaciones. Ausencia de repetición. Métodos informales empleados para realización de deformaciones y homotecias	Identifica alguna propiedad o regla sin registro global o general Uso de reglas y propiedades en algunos casos	Explica justificando y demostrando el resultado de la deformación como función entre elementos determinantes de deformaciones. Intención de demostrar mediante razonamiento deductivo propiedades de las homotecias.
CPr 7: Proyección	Explica y identifica características visuales de las sombras Ausencia de repetición. Métodos informales empleados para realización de sombras	Identifica y utiliza alguna propiedad o regla sin registro global o general Comprueba la proposición con al menos un ejemplo, sin errores significativos, alguna justificación correcta.	Explica justificando y demostrando la proyección de un objeto (sombra) con posiciones correspondientes del objeto, de la luz y del plano de la sombra. Tentativas de demostración mediante razonamiento deductivo propiedades de las sombras.

- **Categoría CC**: Elementos culturales e históricos en las transformaciones geométricas

A partir del uso del contexto en la construcción del significado de transformación, las actividades matemáticas son seleccionadas por el profesorado para ser realizadas por los alumnos. Los profesores han de ser conscientes de que hay un abanico muy amplio de tareas y que por ello es necesario que conozcan mejor el contexto no escolar de sus alumnos y que lo utilicen en el desarrollo de las actividades apropiadas para los alumnos.

CCc: **Elementos culturales e históricos en transformaciones**
Indicadores

	Grado de integración **bajo**	Grado de integración **medio**	Grado de integración **alto**
CC 1: *Reconocimiento y adecuación de elementos sociales, familiares, históricos, culturales*	Se muestran significados culturales diferentes para las concepciones independientes no relacionados entre si. Hay predominio de contextos relacionados con lo familiar, fenómeno, o próximo más que los históricos-sociales-culturales Usa términos matemáticos adecuados a los elementos culturales pero sin ejercer una contextualización completa.	Reconoce algunos elementos históricos asociados a significados del contenido. Aparecen algunas contextos relacionados no sólo con lo familiar o próximo sino también los históricos-sociales-culturales Hay indicios de contextualización mediante ejemplos, propiedades	Se muestran significados multiculturales diferentes para las concepciones independientes no relacionados entre sí. Identifica contextos relacionados con diversos niveles del contenido de forma indistinta (social-cultural, histórico, etc.) Usa recursos adecuados para los significados diferentes Usa términos matemáticos adecuados a los elementos culturales, aprovecha lo histórico-cultural para integrar razonamientos y estructuras.
CC 2: Isometría	Identifica la repetición en bordados o formas reales en posiciones diferentes	Reconoce el elemento generador de la transformación isométrica en algún contexto cultural diferente.	Constata la igualdad y no sólo la repetición en bordados o formas reales en posiciones diferentes
CC 3: Simetría	Identifica el uso de espejos, situaciones como rostro, contextos Uso de papel e instrumentos	Doblado - identifica características asociadas al doblado	Distinguir el uso de uno o dos espejos (u otro contexto) para identificar la composición de simetrías
CC 4: Traslación	Identifica el uso de Mosaicos (reconoce que algunos mosaicos son un buen ejemplo de traslación) Barbería Uso de papel e instrumentos.	Reconoce en los ejemplos la simetría como paso intermedio a la traslación. Papel cuadriculado Vector de traslación.	Distingue el uso de contextos culturales para identificar la traslación Identifique el uso de dos espejos para conseguir la traslación.
CC 5: Rotación	Identifica el uso de: puertas, giro de brazos en el golf Uso de papel es instrumentos	Reconocer la necesidad de doblar dos veces para obtener la rotación Reconocer el centro o el eje de rotación o la figura que se transforma.	Identifica el uso de dos espejos en conseguir la rotación de una figura
CC 6: Deformaciones y homotecia	Identifica el uso de Elásticos Identifica el cambio de forma de una figura dibujada n el globo al hincharlo (Globo hinchable) (Recortes de Escher)	Usa el pantógrafo para hacer figuras mas grandes y mas pequeñas (Pantógrafo) Sabe hacer ampliaciones con cuadricula Conoce métodos para conservar el area cambiando la forma. Conoce que homotecia cambia tamño pero conserva angulos.	Distingue el uso de semejanzas en contextos y significados diferentes (conservación de área, conservación de la forma, y conservación de propiedades topológicas) Reconoce que recortes y uniones son la transformación que conserva área. Reconoce que la semejanza conserva angulo.
CC 7: Proyecciones	Identificar la transformación de un mismo objeto con distintas sombras y ver que se alargan o que se acortan. . Identificar que con una lámpara puedes obtener diferentes proyecciones.	Dato un objeto ver las distintas formas de transformar como cambio según el punto de vista. Identifica el fenómeno de la proyección en pinturas.	Distinguir los distintos contextos asociadas a distintas transformaciones. Asocia o interpreta desde que perspectiva s ha realizado la representación contextual.

4.7.2. Categorías sobre conocimiento didáctico

Para estudiar los conocimientos de los estudiantes sobre la enseñanza-aprendizaje de transformaciones tenemos que hacer un estudio teniendo en cuenta que estos han de estar relacionados con su formación inicial en geometría. A partir de este planteamiento surge el sistema de categorías sobre conocimiento didáctico-estratégico de aprender a enseñar las transformaciones en primaria.

Las categorías de análisis sobre el conocimiento didáctico profesional se han adaptado a partir de las establecidas por Shulman (2002). Así pues, las categorías sobre las que queremos indagar los conocimientos y capacidades de los estudiantes en el proceso de aprender a enseñar las transformaciones geométricas son:

- CE. Componente estratégico en la formación de profesores
  - CEa. Sobre aprendizaje de transformaciones
  - CEi. Sobre instrucción
- CA. Contenido profesional en el comportamiento actitudinal
  - CAa. Sobre la asúnción de la actividad profesional
  - CAr. Sobre las actitudes críticas y reflexivas

Dentro de estas dos categorías identificamos cuatro sub-categorías sobre las que a continuación presentamos los indicadores correspondientes.

- **Categoría CE:**

Componente estratégico en la formación de profesores

Nuestras creencias sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje derivan desde los primeros pasos en la escuela hasta nuestra experiencia como docentes. Ellas son formadas por la experiencia y las discusiones con estudiantes y colegas en escuelas, facultades y en conferencias, y durante los años, ellos se cambian, han desafiado y se han reforzado. Sin embargo, hay siempre una tensión entre lo que creemos que enseñamos y lo que diferentes estudiantes aprenden de nuestras lecciones. Lo que los estudiantes aprenden no sólo será afectado por lo que hagamos nosotros. Lo que ellos aprenden estará bajo la influencia de una serie de otros factores - y hay muchos de estos (revistas, vídeos, emisoras de radio etc.) sobre las cuales generalmente la escuela no tienen ningún control.

Al afrontar una clase, los profesores (de matemáticas en particular), son afrontados con un número increíble de presiones de la variedad de fuentes, sobre como deberían enseñar las matemáticas. A veces parece que cada uno sabe (conoce) mejor que el profesor de matemáticas. Estas presiones vienen del gobierno del pais, padres, los medios de comunicación, los inspectores de educación, etc. Esto es así porque las matemáticas son unas lógicas, paso a paso, rigurosas, donde hay solo correcto o incorrecto. Entonces ¿por qué los profesores no enseñan matemáticas de modos para que se aprenda fácilmente?

Aquella pregunta señala encima del reconocimiento de una verdadera diferencia entre la enseñanza y el aprendizaje. A menudo el foco de discusión y debate sobre matemáticas en las escuelas es como y lo que el profesor enseña. Esto no es un paso fácil o simple para hacer, pero esto realmente nos implica en la subordinación de nuestro pensamiento en la enseñanza pensando en el aprendizaje.
¿Cómo hacemos la planificación de lecciones? ¿Qué vamos a tener en cuenta cuando planeamos una lección o una secuencia de lecciones?

- **Subcategoria CEa:**

Sobre aprendizaje de transformaciones

Como hemos visto antes, estamos de acuerdo en que los futuros profesores deben conocer las transformaciones que van a enseñar. Si ellos no conocen adecuadamente los contenidos pueden enseñar erróneamente los tópicos a los alumnos y reproducirles los mismos errores que ellos tienen (Contreras y Blanco, 2001). Por otra parte, el conocimiento de las transformaciones que el futuro profesor tiene, influye en la selección de los contenidos a enseñar y en la metodología que utilizará. Consideramos importante estudiar los conocimientos iníciales, durante el proceso y los conocimientos al final del proceso sobre la capacidad de futuro profesor en *tener en cuenta o evocar el hecho de tratar nociones de transformación geométrica*; sobre *apertura y* *confianza para negociación docente*; y sobre la capacidad de *adaptación crítica y acomodación del conocimiento práctico*.

CEa: **Sobre aprendizaje de transformaciones**

	Indicadores		
	Nivel bajo C	**Nivel intermedio B**	**Nivel alto A**
CEa: 1: Tiene en cuenta o evoca el hecho de tratar nociones de transformación geométrica	Identifica y justifica relaciones establecidas en manera superficial No hay atención a las dificultades Utiliza propiedades de manera representativa	Identifica los procesos significativos Atención superficial a las dificultades Muestra conexiones interdisciplinario	Utiliza o evoca esquemas relacionadas de transformaciones dentro las matemáticas Organiza según grados de dificultades en el aprendizaje de transformaciones Organiza actividades adecuadas al contenido.
CEa: 2: Apertura y confianza para negociación docente	Explicita el valor de conocimientos previos sobre transformaciones. Propone tareas y ejemplifica con un compañero y/o con el formador.(Barriel, pp 226)	Atribuye intenciones negociadoras a la actividad. Propone tareas, ejemplifica y plantea dudas para discusión en el colectivo(1)	Sabe separar el papel del grupo y del individuo en el proceso de aprendizaje. Presenta rasgos de incorporaciones en el contenido de su conocimiento al razonar y argumentar sobre sus planteamientos o de otros colegas.
CEa: 3: Adaptación crítica y acomodación del conocimiento práctico	Explica la estrategias para posibilitar el reconocimiento del tipos diferentes de razonamiento de los alumnos	Explicita el progreso que quiere que hagan los alumnos	Propone situaciones de análisis/síntesis de conocimiento s

- **Subcategoria CEi**: Sobre la instrucción de transformación geométrica

Como parte del programa de formación de futuros profesores de primaria es que ellos han de ser preparados para diseñar y realizar la clase con sus alumnos en el futuro. Pretendemos obtener información sobre lo que y como piensan los estudiantes como maestros en sus futuras aulas, sobre: los elementos del propio currículo;, sobre registros y formas instruccionales (simulación, videos, elementos de gestión); y sobre los elementos funcionales de tareas educativas y diversos estilos instruccionales.

CEi: **Sobre instrucción**

	Indicadores		
	Nivel bajo C	**Nivel intermedio B**	**Nivel alto A**
CEi 1: Identifica elementos de metodología y del diseño de aprendizaje	Relacionar la clase con su experiencia escolar Muestra que es imprescindible utilizar recursos para mejor aprendizaje. No valora aspectos transversales Hay alguna mención al tratamiento de diversidad de los alumnos	Explicación de herramientas de motivación Justificación del uso de formas de herramientas algunas elementos transversales (en la construcción del concomimiento)	Propone análisis del proceso de aprender la transformación en futuro. Identifica procesos importante en la construcción de la idea de transformación Identifica los procesos de control y regulación Relaciona secuencias del contenido con el diseño de aprendizaje Asocia a los elementos transversales (el fenómeno físico de la simetría, la visión de alenté – con otras aéreas …)
CEi 2: Consideración de los elementos del propio currículo	Reconoce objetivos y finalidades de las actividades Considera los tipos de actividades Identifica y ejemplifica sobre lo cotidiano	Muestra coherencia entre actividad y el contenido de transformación	Identifica los elementos claves en la secuencia del contenido sobre las transformaciones Establece relaciones instructivas a diversos facetas del concepto de transformación Analiza, adapta y crea materiales y recursos didácticos adecuados
CEi 3: Reconocimiento de registros o formas instruccionales (simulación, videos, elementos de gestión)	Identifica el marco referencial del entorno Relaciona y valora representaciones	Compara y analiza modelos del trabajo. Explicita el papel de tarea Identifica los posiciones relevantes para justificar intervenciones	Simula diálogos, imagina posibilidades aludiendo en gestiones asociadas a las transformaciones Procura argumentar y fundamentar decisiones instruccionales
CEi 4: Reconocimiento de los elementos funcionales de tareas educativas y diversos estilos instruccionales	Identifica y propone situaciones del trabajo colaborativo	Utiliza materiales y recursos didácticos conscientemente para asociar al significado de la transformación Identifica elementos de contenido como parte de organización del currículo Utiliza situaciones cerradas y abiertas	Sitúa el valor del trabajo dirigido con justificación Propone las tareas complejas

➢ Categoría: CA:

Implicación profesional ante el trabajo de transformaciones geométricas

A partir de los propios textos de los docentes también identificamos, confirmamos y analizamos la presencia de los distintos componentes del contenido del conocimiento profesional del profesor y verificamos que estos aspectos pueden ser identificados en distintos momentos del curso y que están relacionados, es decir no son excluyentes. Además de eso, tomando como ejemplo algunas intervenciones dispuestas temporalmente en el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica, lo que hicimos también fue ejemplificar con dicha secuencia, distintas influencias (del profesor-formador, del material, de una actividad, de un colega) para el cambio en el conocimiento profesional del profesor a partir de las distintas interacciones.

• Subcategoria CAa:

Sobre la assumpcion de la actividad profesional

Por *asúnción de la actividad profesional* entendemos: manifestaciones con la flexibilidad y implicación; identificación de posiciones relevantes y respuestas ante la motivación y comprensión de nuevas ideas de ser profesor; reconocimiento del valor dialéctico de la acción - realización; e implicación reflexiva profesional.

. CAa: **Sobre la assumpcion de la actividad profesional**

	Indicadores		
	Nivel bajo C	**Nivel intermedio B**	**Nivel alto A**
CAa 1: Manifestaciones con la flexibilidad y implicación.	Muestra distancia y enfriamiento educativa Expresa sentimientos y emociones en manera simplemente.	Muestra elementos de ilusión (búsqueda de nuevas cosas….) Ofrece contrastes entre posiciones posibles.	Explicita actitudes científicas del trabajo propuesto. Mirando que se ha hecho interesante a la escuela.

CAa 2: Identificación de posiciones relevantes y respuestas ante la motivación y comprensión de nuevas ideas de ser profesor.	Buscando posicionamiento en el discurso pedagógico, Mostrando el interés para hacer lecturas, intervenciones,…	Reconocimiento explicito del protagonismo del alumno. Valorización de la equidad educativa en el trabajo matemático	Reconoce rápido nuevos conocimientos pedagógicos Identifica i reconoce el valor de la acción docente
CAa 3: Reconocimiento del valor dialectico de la acción - realización	Propone y/o identifica acciones efectivas y reales Trata de hacer un discurso de entendimiento	Reconoce relaciones con las tareas anteriores y posteriores	Incorpora experiencia acumulada Sabe pasar en práctica o evoca practicas vividas
CAa 4: Implicación reflexiva profesional	Explicita reflexiones simplemente descriptiva	Evoca valores de formación no estrictamente matemática	Presenta experiencias realizadas Avanza a pensar en el que puede pasar

- **Subcategoria CAr:**

Sobre las actitudes críticas y reflexivas

Las cuestiones afectivas, subraya Gómez-Chacón (1997, 1998), también juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuando los profesores hablan de su experiencia en clases de matemáticas, de los procesos de aprendizaje de sus alumnos, hacen, habitualmente, mención al entusiasmo (u hostilidad o apatía) hacia esta materia. Igualmente cuando se les pregunta a los estudiantes, comentan el interés o (el aburrimiento) por la clase. Esto es una constatación que pone de manifiesto las respuestas afectivas de los estudiantes hacia la materia. En esta perspectiva, considerando la importancia del componente afectivo-actitudinal en el contenido profesional docente y en el proceso de desarrollo profesional, analizamos y ejemplificamos rasgos de esta componente presentes en las producciones de los participantes de nuestra investigación.

El papel social de la acción de formación, juicios hacia la decisión de formación, y la colaboración y conciencia hacia la orientación teórica consideramos ejemplos del desarrollo de la componente afectivo-actitudinal que podemos observar en la secuencia interactiva siguiente entre Joana y el formador en el foro de discusión.

CAr: **Sobre las actitudes críticas y reflexivas**

	Indicadores		
	Nivel bajo C	**Nivel intermedio B**	**Nivel alto A**
CAr 1: El papel socia l de la acción de formación	Incorporación de las ideas de otros en la forma general	Explicita referencias con los autores explícitos	Reconoce modificaciones del planteamiento
CAr 2 Hacia la presa de decisiones de formación	Explicando opiniones o comentarios sin justificaciones	Explicando elementos de acciones profesionales	Proponiendo elementos del control del proceso Mostrando responsabilidad con la tarea realizada
CAr 3: Colaboración y conciencia hacia la orientación teórica	Acepta la necesidad de colaboración a partir de lo que conoce, de lo que hace o lo haría en la práctica-relacionada a lo largo del proceso del desarrollo de su conocimiento profesional.	Muestra atención por su propia práctica y i de otros, mostrando motivación para el desarrollo de la discusión en colectivo.	Muestra incorporar en su discurso preocupación con la enseñanza en un espectro más amplio que una atención específica solamente por su propia práctica.

Estas categorías no podemos considerarlas aisladas e independientes pues normalmente la información obtenida en unas de ellas se complementa con las obtenidas en otras.

Por otra parte, la selección de las categorías a priori no es una selección cerrada pues en el estudio posterior que realizamos, al ser de carácter abierto, encontramos en las respuestas de los estudiantes alguna información significativa como la relación actitudinal maestro-alumno que dan lugar a nuevos aspectos o categorías no definidas en este trabajo y que pueden ser estudiadas en un futuro.

4.7.3. El proceso de análisis de los datos

Para llevar a cabo la identificación de los conocimientos del contenido matemático y el conocimiento didáctico sobre aprender a enseñar transformaciones geométricas en primaria, hemos partido de la prueba inicial, una propuesta de práctica didáctica sobre las transformaciones y la prueba final en los dos centros de formación de futuros profesores en FFPUB y FEUP. La identificación de conocimientos de los futuros profesores puestos de manifiesto en las producciones a traves de las respuestas de los participantes en las tareas propuestas nos permite realizar un análisis del contenido matemático y cultural. A partir del análisis de la lectura inicial de los datos se establecen unas conjeturas que mediante el análisis de los nuevos datos pasan a convertirse en inferencias. El análisis se desarrolla primero con una lectura inicial de los datos y la generación de los primeros comentarios pre -analíticos. Las producciones del futuro profesor se dividen en fragmentos más pequeños que incluyen ideas completas. A partir de estos fragmentos se intenta obtener indicadores de los conocimientos de los profesores sobre aprender a enseñar las transformaciones, distinguiendo si se hace referencia a la prueba inicial (capítulo 6), al desarrollo de la práctica didáctica (capítulo 7) o de la prueba final (capítulo 8). Después de establecer las conjeturas referente a algunas de las categorías se pasa al análisis de los fragmentos de otros participantes que apoyan la conjetura realizada. Durante el análisis se prestará atención a la consideración de que los futuros profesores otorgan al uso de actividades de la práctica didáctica para ayudarse en los procesos de aprender a enseñar las transformaciones geométricas, intentando detectar si se produce algún cambio – avance en sus capacidades y cuáles son las características de dichas actividades de la práctica didáctica que pueden ser la causa de ese cambio.

En los datos se identifican significados conceptuales logrados en las tareas. Se reconocen los grados correspondientes asociados a las categorías designadas, tanto en la prueba inicial, en el desarrollo de las actividades de la práctica como en la prueba final.

Para la descripción de los métodos se utilizan los ejemplos paradigmáticos de las producciones encontradas, con el objetivo de reconocer trazos característicos.

Una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que llevan asociadas son todas relevantes. Así, de acuerdo con esto, para estudiar los niveles de comprensión del ***objeto matemático que se transforma***, definimos los grados de adquisición siguientes:

A. Estudiantes que han sido capaces de construir *imágenes conceptuales completas.* Es decir, conteniendo una amplia *variedad de ejemplos* y *todas las propiedades importantes* de los mismos.

B Los estudiantes cuyas imágenes mentales siguen teniendo unos *pocos ejemplos prototípicos* pero que también incluyen *propiedades matemáticas* de las figuras.

C. En primer lugar, los estudiantes con las imágenes conceptuales más pobres, que se encuentran formadas por unos *pocos ejemplos prototípicos* y *propiedades sólo de tipo visual*

Para analizar las diferencias de conocimientos de los estudiantes sobre ***ejemplos de transformaciones*** establecemos los siguientes grados de conocimiento.

A. Reconocer multiplicidad de ejemplos de diferentes transformaciones y relaciona conocimientos matemáticos anteriores; se puede observarlo en diferentes situaciones.

B. Algún movimiento como desplazamiento, rotación, simetría.

C. Conocimiento débil de transformaciones. Sólo identificación visual de simetría y/o rotaciones.

Los estudiantes no sólo deberían distinguir las formas y sus imágenes según las transformaciones. El uso de ejemplos de figuras similares como la representación visual para entender mejor las transformaciones de una figura a otra. La decisión sobre la creación de la proporción apoyada por dos figuras similares dio lugar a la necesidad de análisis detallado del fenómeno de este concepto. Como transformaciones no deformativas distinguimos homotecia y isometrías (simetrías, rotaciones y traslaciones) que son movimientos. La invariancia ante las transformaciones es la propiedad importante.

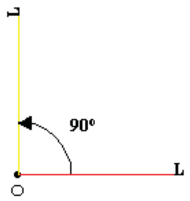
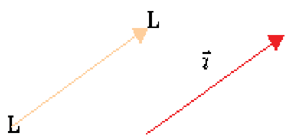
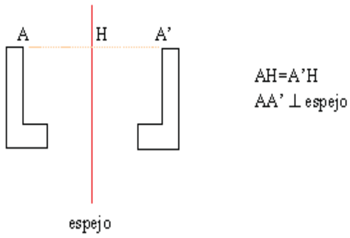
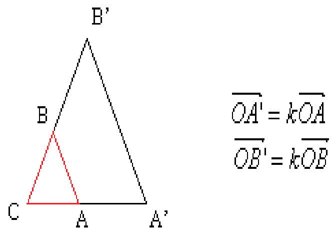
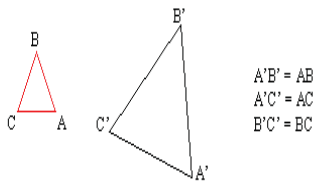
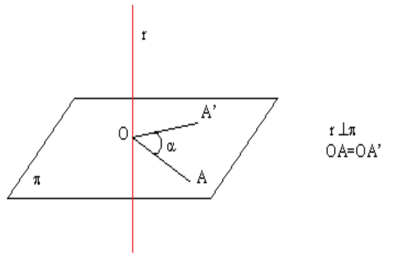
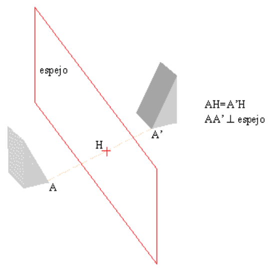
Caracterización	Representación	Invariancia
Una *rotación* en el plano, de centro O y ángulo 90° es un movimiento que transforma la L vertical en la misma L tumbada, tal como se indica en la figura adjunta:		El punto O es invariante en la rotación anterior. El ángulo puede ser cualquiera.
Una *traslación* de vector $\vec{a}$ es un movimiento que transforma la L en la L desplazada paralelamente según el vector dado:		En una traslación no hay ningún punto invariante.
Una *reflexión* es una isometría que deja invariante todos los puntos de una recta que se denomina *eje de simetría o espejo*. La figura L se transforma en su imagen en el espejo:		Los elementos del eje de simetría son los invariantes Se conserva el valor de las medidas de segmentos y ángulos (no orientado) que se corresponden.
Una *homotecia* de centro O y razón k asocia a cada punto A del plano (o del espacio) el punto A' tal que $\overline{OM}' = k\overline{OM}$. La razón k es un número real positivo o negativo.		Sólo el punto O es invariante. Se conserva el valor de los ángulos (no orientado) que se corresponden.
Una *semejanza* de razón k, k>0, es una transformación geométrica tal que si a le corresponde A' y a B le corresponde B', entonces la distancia de A' a B' es k veces la distancia de A a B:		Se conserva el valor de los ángulos (no orientado) que se corresponden

Tabla 4.4. Caracterizacion, representación e invariancia de transformaciones

Además de las isometrías, que conservan las distancias entre los puntos, se definen otros tipos de transformaciones como la homotecia que conserva angulos, deformaciones que no conservan las distancias pero conservan otros elementos como areas, perímetros de figuras etc, y proyecciones que tienen como invariante la coincidencia. De manera análoga, consideramos las caracterizaciones de transformaciones en el espacio, teniendo en cuenta que una *traslación* en el espacio se define de igual manera que en el plano:

Tipo	Representación	Invariancia
Rotación de eje r y ángulo es una isometría que transforma cada punto A del espacio en otro A', tal que en el plano que pasa por A, A' y es perpendicular al eje de rotación r, A' es la imagen de A por la rotación plana de centro la intersección del eje y del plano y ángulo.		Los elementos del eje de rotación y el plano perpendicular en el eje, son los invariantes
Reflexión en el espacio es una isometría que deja invariante todos los puntos de un plano que se denomina *plano de simetría o espejo*. La figura L se transforma en su imagen en el espejo:		Los elementos del eje de simetría (el plano perpendicular) son los invariantes

Pueden definirse transformaciones que no conserven ni la distancia ni los ángulos, por ejemplo transformaciones isoperimétricas que conservan perímetro de la figura, etc. Aunque cada una de estas transformaciones son totalmente diferente, dada la comprensión específica de la pronunciación "*la misma forma*" (preguntas… aquello parece que la similitud tiene más en común con las deformaciones que con las isometrías. Comparando la similitud con deformaciones da una oportunidad para diferenciar "la misma forma - la forma cambiada." En el área de isometrías nosotros podemos diferenciar sólo "*la misma forma - la otra forma*". Comparando la similitud e isometrías pueden llevar a mal entender la declaración "*la figura persiste la forma*".

¿Cómo se transforma la imagen? Considerar la simetría como transformación consiste en estudiar las imágenes formadas en los espejos. Si colocamos un espejo en posición vertical sobre una superficie horizontal, cualquier figura colocada delante del espejo tendrá una imagen "dentro" del espejo. La imagen parece estar dentro del espejo a la misma distancia (isometría) de éste que la figura real. La figura real se transforma en su imagen mediante una simetría. Cuando se realiza dos veces se vuelve al punto de partida. Las únicas rotaciones que son sus propias inversas son la vuelta completa y la media vuelta. Si a una figura X se le aplica una traslación para pasar a la posición Y, a lo largo del "viaje" desde X hasta Y cada punto de la figura describe una línea recta y todas estas líneas rectas tienen la misma dirección, son paralelas. Se trata de llegar a la conclusión que la distancia entre el punto y su imagen final obtenida por aplicación de dos simetrías sucesivas es siempre el doble de la distancia entre los ejes de simetría empleados. Cualquier giro durante el "viaje" estropearía la constancia en la dirección del camino recorrido por cada punto y en este caso se trata de llegar a la conclusión que el ángulo de giro del punto hasta su imagen obtenida por aplicación de dos simetrías sucesivas es siempre el doble del ángulo entre los ejes de simetría empleadas. Por este fin de clasificar la capacidad de identificar las transformaciones -¿Cómo se transforma la imagen? Establecemos los siguientes grados de conocimientos:

A. Muestra Idea funcional y de aplicación ($A \rightarrow A'=f(A)$, $a \rightarrow b$; (a, b))

B. Indica idea de superponer, comparar o doblar

C. Indica que *transformar* significa un cambio no bien definido

Recordaremos que las formas de pensamiento consideradas dentro del ***razonamiento*** lógico son la inducción y la deducción. El razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas o hipótesis nacidas de la generalización de propiedades que se dan en un conjunto de observaciones. Razonamiento inductivo es el razonamiento básico para la creación de conceptos. La capacidad de razonamiento inductivo se detecta a través de la habilidad para resolver tareas como: establecer comparaciones, completar series, clasificar, generalizar propiedades a partir de ejemplos, etc.

El razonamiento deductivo demuestra la verdad de sus conclusiones como derivación *necesaria* de sus premisas. Cada paso de la demostración es una proposición verdadera. Es necesario destacar la dificultad que se suma en la geometría y que es: interjuego entre lo particular de las representaciones y lo general de los conceptos. Esta relación entre la experiencia visual y el razonamiento lógico resulta imprecisa para los estudiantes de modo que llegan a pensar que tal experiencia es equivalente a la demostración. Esto trae aparejados serios inconvenientes: reduce la geometría en una ciencia experimental (observacional) e implica que la apariencia de las figuras geométricas se torna determinante de sus propiedades.

Nuestro objetivo es conocer si los futuros profesores han entendido que la geometría experimental es una geometría aproximada, una guia que va a servirlos a ellos para enseñarlo en la primaria, pero nada puede sustituir a la demostración (deductiva) para generalizar propiedades y relaciones geométricas. Probar una generalización en matemática requiere la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal. Conjuntamente con la habilidad de razonar lógicamente no podemos dejar de lado la consideración de habilidades de aplicación, porque sin esta habilidad, el futuro profesor será incapaz de usar su razonamiento en situaciones nuevas o de fuera de sus contextos habituales. También, varias investigaciones (Sternberg, 1999) demuestran que el estudiante puede haber desarrollado habilidades lógicas pero tener dificultades en aplicarlas de forma práctica y creativa. En la creación, la intuición y analogía juegan roles especiales.

Para analizar las respuestas de los estudiantes sobre el razonamiento distinguimos los siguientes grados de capacidades de razonamiento.

A. Aporta una justificación-argumentación correcta con una simbolización adecuada. , usando reglas y propiedades explicitas y apoyándola en otras proposiciones conocidas.
B. Comprueba la proposición con al menos un ejemplo, sin errores significativas y hay muestra alguna justificación correcta Identifica alguna propiedad (no hay registro global o general)
C. Solo hay visualización del fenómeno sin explicación justificativa o falta de comprensión de la tarea planteada

En la figura 4.4., presentamos de manera esquemática el proceso de análisis de los datos de la investigación.

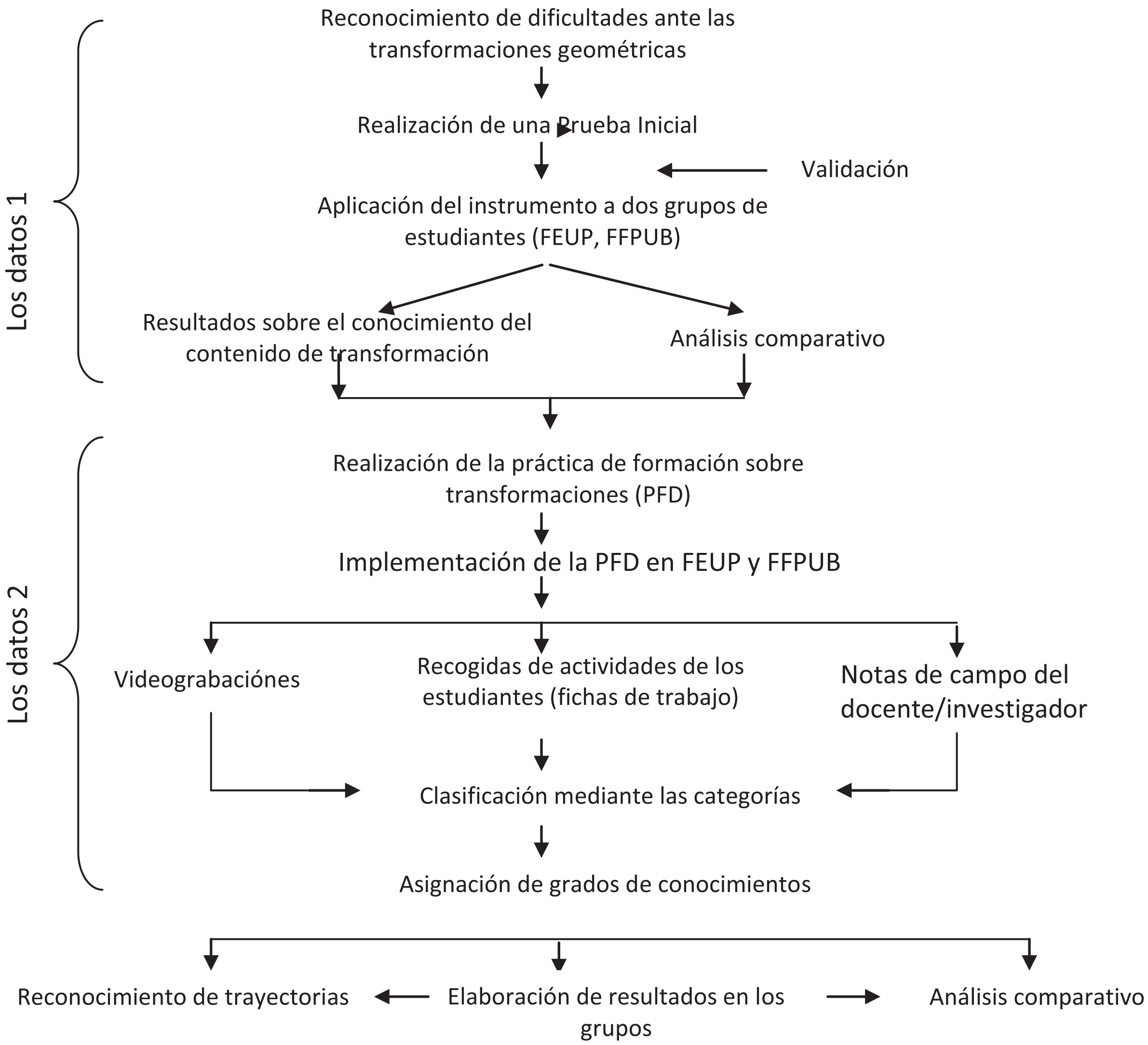


Figura 4.4. Esquema de análisis de los datos de la investigación