ANALISIS ESTADISTICO MULTIVARIANTE Y REPRESENTACION CANONICA DE FUNCIONES ESTIMABLES

UNIVERSIDAD DE BARCELONA
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE DOCTOR EN CIENCIAS, SECCION
DE MATEMATICAS, PRESENTADA POR

CARLOS M. CUADRAS AVELLANA

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

8.4. EJES CANONICOS: CASO GENERAL

Procediendo como en § 3.5, nos interesa hallar las direcciones de máxima covariabilidad entre las s funciones paramétricas.

Sea $\tilde{n}v = \min(p, s-1)$. Llamaremos <u>variables canónicas</u>, a las v.a. $\tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_{\tilde{n}v}$ de E, que verifiquen:

1) Son simultáneamente ortogonales para Σ y Σ_ψ

$$\tilde{V}_i \cdot \tilde{V}_j = 0 \qquad \tilde{V}_i \circ \tilde{V}_j = 0 \qquad i,j=1,\ldots,\tilde{n}v \qquad i \neq j$$

y forman un sistema ortonormal para Σ

$$\| \tilde{V}_1 \|_\Sigma = \ldots = \| \tilde{V}_{\tilde{n}v} \|_\Sigma = 1$$

2) Tienen módulos respectivamente máximos para Σ_ψ,

$$\tilde{V}_1 \circ \tilde{V}_1 = \lambda_1 = \text{máx}, \ldots, \tilde{V}_{\tilde{n}v} \circ \tilde{V}_{\tilde{n}v} = \lambda_{nv} = \text{máx}.$$

También aquí, según el teorema fundamental, el problema de determinar las variables canónicas se reduce a calcular los vectores propios y valores propios de Σ_ψ respecto a Σ,

$$\det(\Sigma_\psi - \tilde{\lambda}\Sigma) = 0, \qquad \Sigma_\psi \tilde{V}_i = \tilde{\lambda}_i \Sigma \tilde{V}_i \qquad (i=1,\ldots,nv)$$

Las d primeras v.a. canónicas nos darán las d direcciones ortogonales, de máxima covariabilidad. Al subespacio

$$\widetilde{EC}_d = \langle \tilde{V}_1, \ldots, \tilde{V}_d \rangle$$

le llamaremos <u>espacio vectorial canónico</u>.

Al ortocomplementario del dual de EC_d,

$$\widetilde{EC}^*_d = \{ \omega^* \in E^*, \ \omega^*(V) = 0, \ \forall V \in \widetilde{EC}_d \}^\perp$$

le llamaremos <u>espacio dual canónico</u>.

Si la base $<\tilde{V}_1^*,\dots,\tilde{V}_d^*>$ de $\widetilde{EC}_d^*$ verifica:

$$\widetilde{EC}_1^* = <\tilde{V}_1^*> \subset \widetilde{EC}_2^* = <\tilde{V}_1^*, \tilde{V}_2^*> \subset \dots \subset \widetilde{EC}_d^*$$

diremos entonces que $(\tilde{V}_i^*)$ son los ejes canónicos.

Finalmente, la inyección

$$\widetilde{EC}_d \xrightarrow{i} E$$

nos define la proyección canónica (general)

$$(8.4.1) \qquad \tilde{\pi}: E^* \longrightarrow \widetilde{EC}_d^*$$

$$\tilde{\pi}(\omega^*) = \omega_1^* \quad \text{si} \quad \omega^* = \omega_1^* + \omega_2^*, \quad \omega_1^* \in \widetilde{EC}_d^*, \quad \omega_2^* \in (\widetilde{EC}_d^*)$$

Indicando por $\tilde{V}$ la matriz cuyos vectores columna son las componentes de las variables canónicas, las componentes $\tilde{W}$ en los ejes canónicos se obtendrán de

$$(8.4.2) \qquad \tilde{W} = \tilde{V}' w$$

8.5. PROYECCION CANONICA DE FUNCIONES ESTIMABLES

Aplicando la proyección canónica (8.4.1) al sistema de funciones estimables $\psi_1^*,\dots,\psi_s^*$, obtendremos s puntos del espacio dual canónico $\widetilde{EC}_d^*$

$$\tilde{\pi}(\psi_i^*) = \psi_{oi}^* \qquad (i=1,\dots,s)$$

que podrán representarse con referencia a la proyección de la función estimable $\bar{\psi}^*$, es decir, a $\bar{\psi}_c^* = \tilde{\pi}(\bar{\psi}^*)$.

El teorema 8.1.1 es también válido aquí, y la demostración es muy parecida a la del teorema que exponemos a continuación:

Teorema 8.5.1

Entre todos los subespacios de E, de dimensión d, el espacio canónico $\widetilde{EC}_d$, maximiza la suma de distancias (a.c.) restringidas entre las funciones estimables ψ^*_1, ..., ψ^*_s, ponderadas por sus respectivas probabilidades, es decir,

$$\sum_{i,j} D^2_{EC^*_d}(\psi^*_i,\psi^*_j)P_{\psi_i}\cdot P_{\psi_j} \geq \sum_{i,j} D^2_{F^*}(\psi^*_i,\psi^*_j)\, P_{\psi_i}\cdot P_{\psi_j}$$

para todo subespacio $F\subset E$, $\dim F = d$.

Este teorema nos confirma las propiedades óptimas de la representación canónica. Naturalmente, en la práctica será $d=1,2$ ó 3.

8.6. REPRESENTACIÓN CANONICA DE UN SISTEMA DE FUNCIONES PARAMETRICAS ESTIMABLES

Si introducimos una parametrización (§4.1), el conjunto M-linealmente independiente de funciones estimables, será, en particular, un sistema de funciones paramétricas estimables.

Para la proyección canónica utilizaremos, desde luego, las estimaciones $\hat{\Sigma}$ (§5.2) para Σ y $\hat{\Sigma}_\psi$ para Σ_ψ. Asímismo, para estimar las f.p.e. $\psi^*_1,\ldots,\psi^*_s$ utilizaremos los estimadores insesgados y de dispersión mínima, que se obtienen mediante la expresión Λ-óptima.

Vamos a suponer ahora que la distribución conjunta de las v.a. $(Y_1,\ldots,Y_p)$ es normal multivariante en cada celda H_i

$$(Y_1,\ldots,Y_p) \quad \text{es} \quad N((\mathcal{E}(Y_1),\ldots,\mathcal{E}(Y_p))',\Sigma) \quad \text{en} \quad H_i$$

$$(i=1,\ldots,k)$$

Esto nos permitirá trasladar la estructura del espacio de probabilidades $(\Omega,\mathcal{A},P)$ al espacio $(E\times\Omega,\mathcal{B}^p\circ\mathcal{A}_H,P_f)$ (§ 2.5).

Para una v.a. $Y\in E$, la estimación LS del vector paramétrico β_Y, es una combinación lineal del muestreo de Y, y por tanto variable con el muestreo, es decir, $\hat{\beta}_Y$ es un m-vector aleatorio.

A partir de un muestreo $m\in\mathfrak{M}_\Delta$, consideremos las matrices aleatorias:

$$\widehat{M\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11},\ldots,\hat{\beta}_{1m} \\ \ldots\ldots \\ \hat{\beta}_{p1},\ldots,\hat{\beta}_{pm} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} Y_{111},\ldots,Y_{p11} \\ \ldots\ldots \\ Y_{11n_1},\ldots,Y_{p1n_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ Y_{1k1},\ldots,Y_{pk1} \\ \ldots\ldots \\ Y_{1kn_k},\ldots,Y_{pkn_k} \end{pmatrix}$$

En notación matricial, $\widehat{M\beta}$ verificará las ecuaciones normales que resultan de (4.4.4),

$$X_a'\, X_a\, \widehat{M\beta} = X_a'\,\mathcal{U} \tag{8.6.1}$$

El estimador $\hat{\Psi}$, función lineal de la muestra, que estima sin sesgo y con dispersión mínima, una función paramétrica estimable $\Psi^* = P'\beta^*$, será un p-vector aleatorio tal que

$$\hat{\Psi} = P'\,\widehat{M\beta} \tag{8.6.2}$$

La estimación de Σ es $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-r} R_o$ (§ 5.2), y la matriz R_o la podemos representar, de acuerdo con las nuevas notaciones,

$$(8.6.3) \qquad R_o = (\mathcal{U} - X_a\widehat{M\beta})'(\mathcal{U} - X_a\widehat{M\beta})$$

<u>Teorema 8.6.1</u>

Sea $\psi^* = P'\beta^*$ una función paramétrica estimable. Dado un muestreo de tamaño $n = \sum n_i$, se verifica:

1) La matriz aleatoria $\hat{\Sigma}$ y el vector aleatorio $\hat{\Psi} = P'\widehat{M\beta}$ son estocásticamente independientes.

2) La distribución de R_o es la misma que

$$\sum_{\alpha=1}^{n-r} Z_\alpha \, Z'_\alpha$$

en donde los Z_α son p-vectores aleatorios, estocásticamente independientes con distribución $N(0,\Sigma)$.

<u>Demostración:</u>

Desarrollando (5.5.3), y con ayuda de las ecuaciones normales en forma matricial (5.6.2), se obtiene sin dificultad,

$$(8.6.4) \qquad \mathcal{U}'\mathcal{U} = R_o + (X_a\widehat{M\beta})'(X_a\widehat{M\beta})$$

Los elementos de la matriz $\mathcal{U}'\mathcal{U}$ son formas cuadráticas de rango n, los de R_o, formas cuadráticas de rango (n-r), y, puesto que rang $(X_a) = r$, los de $(X_a\widehat{M\beta})'(X_a\widehat{M\beta})$ son formas cuadráticas de rango r.

Supongamos ahora que conocemos las esperanzas de las v.a. de $\mathcal{U}$. Esto significa conocer una matriz δ tal que $\mathcal{E}(U) = X_a\delta$. Restemos a cada v.a. su esperanza. Esto no modifica las relaciones de dependencia estocástica entre las matrices de (8.6.4). Además, la matriz R_o seguirá siendo exactamente la misma, pues la matriz $\widehat{M\beta}$ pasará a ser $(M\hat{\beta}-\delta)$, y entonces

$$\mathcal{E}((U-\mathcal{E}(U)-X_a(M\hat{\beta}-\delta)) = (U-X_aM\hat{\beta})$$

Al ser $n=(n-r)+r$, por el teorema de Cochran generalizado al análisis multivariante (ANDERSON, 1958, p.165) R_o y $(X_aM\hat{\beta})'(X_aM\hat{\beta})$ son estocásticamente independientes. Además, R_o sigue la distribución de

$$\sum_{\alpha=1}^{n-r} Z_\alpha Z'_\alpha,$$

siendo Z_α p-vectores aleatorios, con distribución $N(0,\Sigma)$ estocásticamente independientes entre sí.

Consecuencia inmediata es que $\hat{\Sigma}$ y $X_aM\hat{\beta}$ son estocásticamente independientes.

Finalmente, dada la función paramétrica estimable $\psi^* = P'\beta^*$, según el lema 4.5.1, existe un vector D_1 tal que

$$P = X'\Delta X D_1 = X'_a X_a D_1$$

Luego, $\hat{\psi} = P'M\hat{\beta} = (D'_1X'_a)(X_aM\hat{\beta})$, depende directamente de la matriz aleatoria $(X_aM\hat{\beta})$, y por lo tanto es independiente de $\hat{\Sigma}$.

c. q. d.

Pasemos ahora a la representación canónica de un sistema de funciones estimables M-linealmente independiente. El teorema 3.6.1 no puede generalizarse aquí, porque una función estimable no representa el centro de una población. En cambio, sí nos interesará obtener una región confidencial exacta, en el espacio dual canónico, para cada una de las funciones estimables, es decir, generalizar el teorema 3.6.2.

Sean $\psi_1^*, \ldots, \psi_s^*$ funciones estimables M-linealmente independientes. Para un muestreo de tamaño $\Delta = (n_1, \dots, n_k)$ indiquemos las expresiones Δ-óptimas,

$$\psi^*_i = \sum_h d_{ih} m^*_h \qquad i=1,\dots,s$$

y sea $\psi^*_{ci} = \pi(\psi^*_i)$ la proyección canónica de la estimación ψ^*_i de ψ^*_i.

Teorema 8.6.2

El subconjunto del espacio dual canónico $\widetilde{EC}^*_d$, referido a los ejes canónicos,

$$R(\psi^*_{ci}) = \left\{ i^*_c \,\middle|\, \| i^*_c - \psi^*_{ci} \| \leq R_\alpha \left(\sum_h \frac{d^2_{ih}}{n_h} \right)^{1/2} \right\}$$

es una esfera de radio

$$R_\alpha \left(\sum_h \frac{d^2_{ih}}{n_h} \right)^{1/2}$$

de centro ψ^*_{ci}, que define una región confidencial exacta para ψ^*_{ci}, con probabilidad $(1-\alpha)$,

$$P\left[\psi^*_{ci} \in R(\psi^*_{ci})\right] = 1-\alpha$$

siendo R_α tal que

$$R^2_\alpha = F_\alpha \frac{(n-r)p}{(n-r-p+1)}$$

y $P(F > F_\alpha) = \alpha$, en donde F sigue una distribución de Fisher con p y $n-r-p+1$ grados de libertad.

Demostración:

Consideremos los k vectores aleatorios

$$\bar{\mathcal{Y}}_i = (\bar{Y}_{1i.}, \dots, \bar{Y}_{pi.})'$$

siendo

$$\bar{Y}_{ji.} = \frac{1}{n_i} \sum_{h=1}^{n_i} Y_{jih} \qquad i=1,\dots,k.$$

La estimación Δ-óptima de ψ^*_i, considerada como vector aleatorio, es:

$$\hat{\psi}_i = \sum_h \hat{d}_{ih} \tilde{\gamma}_h \qquad i=1,\dots,s$$

Se verifica: $\mathcal{E}(\hat{\psi}_i) = \psi^*_i$, y la matriz de varianzas-covarianzas de $\hat{\psi}_i$ es

$$\left(\sum_h \frac{\hat{d}^2_{ih}}{n_h}\right)\Sigma \,.$$

Luego,

$$\left(\sum_h \frac{\hat{d}^2_{ih}}{n_h}\right)^{-1/2} (\hat{\psi}_i - \psi^*_i)$$

sigue una distribución $N(0,\Sigma)$, y por el teorema anterior, es independiente de la matriz $(n-r)\hat{\Sigma}$.

Según el teorema 6.6.2, la v.a.:

$$T^2 = \left(\sum_h \frac{\hat{d}^2_{ih}}{n_h}\right)^{-1} (\hat{\psi}_i - \psi^*_i)' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\psi}_i - \psi^*_i)$$

es tal que

$$\frac{T^2}{(n-r)} \, \frac{n-r-p+1}{p}$$

sigue una distribución F de Fisher con p y n-r-p+1 grados de libertad.

El subconjunto del espacio dual E^*,

$$\| \hat{\psi}_i - \psi^*_i \|^2 \leqslant F_\alpha \frac{(n-r)p}{(n-r-p+1)} \left(\sum_h \frac{\hat{d}^2_{ih}}{n_h}\right)$$

es un elipsoide, y la probabilidad de que ψ^*_i pertenezca a este elipsoide es $(1-\alpha)$, siendo $P(F > F_\alpha) = \alpha$.

Por la proyección canónica, la imagen del elipsoide será una esfera en el espacio $\widehat{EC}_d^*$, pues estará referido a una base ortonormal respecto a $\hat{\Sigma}^{-1}$.

c. q. d.

La comparación de funciones estimables basada en la distancia de Mahalanobis, es correcta para v.a. con regresión lineal, como las que siguen una distribución ortogonal, es decir, invariantes por transformaciones ortogonales (JAMES,1954). En particular, es la más idónea para el caso de normalidad multivariante. En otras distribuciones que presenten regresión no lineal, es necesario transformar previamente las variables iniciales (véase ANDREWS,1971) para poder recurrir a una distancia lineal.

La proyección canónica de funciones estimables, aplicada a v.a. observables con regresión no lineal, debe considerarse una aproximación de la realidad, porque la distancia correcta no es lineal. Para poderla definir, deberían adaptarse las propiedades de la geometría diferencial (véase JAMES,1954; KENDALL,1957).

9 ALGUNOS CASOS ESPECIALES DE REPRESENTACION CANONICA

Completando el capítulo anterior, se analiza la representación canónica de un sistema de funciones estimables, sujeto a alguna hipótesis nula acerca de los parámetros del diseño. Como quiera que el sistema puede pasar a ser linealmente dependiente, se estudia la representación canónica en tales condiciones.

Adaptando el análisis de la covarianza, según la exposición de RAO (1965), se razona como debe plantearse el análisis canónico de forma que quede eliminada la posible influencia de unas variables concomitantes sobre las funciones estimables.

Finalmente, se relaciona el análisis canónico generalizado con el análisis de coordenadas principales de GOWER (1966).

Para estudiar la influencia de las variables concomitantes en las funciones discriminantes, nos han sido útiles los trabajos de COCHRAN y BLISS(1948), COCHRAN(1964), RAO(1966).

9.1. REPRESENTACION CANONICA BAJO UNA HIPOTESIS NULA

Supongamos que deseamos representar varios sistemas de funciones estimables, y que uno o varios de ellos verifiquen:

$$H_0 : \psi^*_1 = \dots = \psi^*_h$$

En las notaciones de §5.3, esto significa el cumplimiento de la hipótesis nula acerca de los parámetros

$$H'_0 : H.\beta = 0 \qquad \mathfrak{F}(H) \subset \mathfrak{F}(X)$$

Si C es una matriz tal que H.C = 0, según §5.4, la nueva matriz del diseño factorial será X.C, en función de unos nuevos parámetros $(\theta_1, \dots, \theta_{m-t-1})$, tales que $\beta = C\theta$.

La función paramétrica $\psi^* = P'\beta$, se expresará, bajo H_0, en función de los nuevos parámetros,

$$\psi^* = P'C\theta^*$$

Geométricamente, el punto ψ^* en el espacio dual es el mismo. No obstante, si ψ^* es estimable, su representación Λ-óptima será distinta una vez aceptada H_0.

Recordemos que la expresión Λ-óptima, bajo una matriz de diseño X, es $\hat{D} = \Lambda X D_1$, siendo $P = X' \Lambda X D_1$. Aplicando este resultado a la nueva matriz X C, tendremos:

Teorema 9.1.1

Sea $\psi^* = P'\beta^*$ una función paramétrica estimable, que bajo la hipótesis H_0 se transforma en $\psi^* = C'P'\theta^*$. La representación Λ-óptima de ψ^* será entonces:

$$\psi^* = \sum_{i=1}^{k} \hat{d}_i m^*_i \qquad \text{siendo}$$

$$\hat{D} = \Delta X C D_2, \qquad C'P = C'X'\Delta X C D_2$$

Desde luego, quedarán también modificadas las estimaciones de las matrices Σ y Σ_ψ, siendo válido todo lo expuesto en §5.2 y §8.3, pero modificando la matriz del diseño y la representación Δ-óptima.

Llegados aquí, la representación canónica de un conjunto M-linealmente indépendiente de funciones estimables se conseguirá siguiendo un proceso parecido, con los cambios oportunos, al expuesto en § 8.6, si, bajo H_0, el sistema sigue siendo M-linealmente independiente.

Si por el contrario, aceptado H_0, el sistema pasa a ser M-linealmente dependiente, la situación es, en principio, distinta. Es analizada a continuación.

9.2. REPRESENTACION CANONICA DE UN SISTEMA M-LINEALMENTE DEPENDIENTE

Propongámonos, en primer lugar, representar los k indivíduos medios $(m_1^*,\ldots,m_k^*)$, pero suponiendo $\dim M = r \;\; k$. Existirán, entonces, relaciones lineales <u>conocidas</u> entre los indivíduos medios $m_1^*,\ldots,m_k^*$. Si $p \leq r$, estas relaciones lineales también existirían, aún cuando fuera $r=k$, pero serían desconocidas. La única diferencia estribará en que la expresión Δ-óptima será distinta. El análisis canónico podrá hacerse exactamente igual, siendo rang $(\Sigma_\xi) = p$.

Si $p > r$, proyectemos E^* en el subespacio $EM^* = \langle m_1^*,\ldots,m_k^*\rangle$ y consideremos el correspondiente espacio dual

$$EM = \{ Y \mid \omega^*(Y) = 0,\ \forall \omega^* \in E^* \}^{\perp}$$

Restringiendo entonces al análisis a las v.a. de este subespacio, tendremos $p'=r$, y el problema se reduce al caso anterior, siendo rang(Σ) = r.

En general, sean $\psi_1^*,\ldots,\psi_s^*$ funciones estimables, tales que, tras la verificación de una hipótesis nula, se convierten en un sistema M-linealmente dependiente. Supongamos que $\psi_1^*,\ldots,\psi_s^*$ siguen siendo puntos <u>distintos</u> de E^*, y sea s' el rango dentro del espacio M. Tendremos $s' < s \leq k$.

Supongamos $p \leq s'$. Entre los indivíduos $\psi_1^*,\ldots,\psi_s^*$, existirán relaciones lineales conocidas, que también existirían si fuera s = s', pero serían desconocidas. El análisis canónico será el mismo, siendo rang (Σ_ψ) = p.

Si es $p > s'$, consideremos el subespacio de dimensión s',

$$\tilde{E}^*_{s'} = <\psi_1^*,\ldots,\psi_s^*>$$

y su correspondiente espacio dual,

$$E_{s'} = \{ Y \mid \omega^*(Y)=0,\ \forall\ \omega^* \in \tilde{E}^* \}^{\perp}$$

Restringiendo el análisis a las v.a. del subespacio $E_{s'}$, entonces $p'= s'$, y estamos en el caso anterior. Aquí es rang (Σ_ψ) = s'. Observemos que el espacio canónico, con todas las variables canónicas, tiene dimensión $\tilde{m} = s'$.

Vamos a ver ahora, que esta restricción coincide, esencialmente, con la misma proyección canónica.

<u>Teorema 9.2.1</u>

Sea $s' = \mathrm{rang}(\psi_1^*,\ldots,\psi_s^*) < s$ y $p > s'$. Restrinjamos previamente las v.a. a $E_{s'}$. Entonces:

1) El subespacio $E_{s'}$ coincide con el espacio canónico

de dimensión máxima,

$$E_{s'} = \widetilde{EC}_{\widetilde{nv}} \qquad (s' = \widetilde{nv})$$

2) Si $\widetilde{EC}_d$ es un subespacio canónico de dimensión d, entonces:

$$\widetilde{EC}_d \subset E_{s'}.$$

<u>Demostración:</u>

La distancia (a.c.) entre ψ^*_i y ψ^*_j verificará:

$$D^2(\psi^*_i, \psi^*_j) = \|\psi^*_i - \psi^*_j\|^2_{\Sigma^{-1}} = D^2_{E_{s'}}(\psi^*_i, \psi^*_j),$$

es decir, coincidirá con la distancia restringida al subespacio $E_{s'}$, pues $(\psi^*_i - \psi^*_j)$ $E_{s'}$. Luego $E_{s'} = \widetilde{EC}_{nv}$.

De la inclusión progresiva entre los subespacios canónicos de dimensión ascendente (§8.4), deducimos $\widetilde{EC}_d \subset EC_{s'}$, $d=1,\ldots,nv$.

c. q. d.

Sea ahora $(\psi^*_{i_1},\ldots,\psi^*_{i_{s'}})$ la base de $E_{s'}$. Si W es la matriz cuyos vectores columna son las componentes en la base dual $\{Y_i\}$, la proyección:

$$(9.2.1) \qquad \begin{aligned} E &\longrightarrow E_{s'} \\ Y &\longrightarrow \bar{Y} \end{aligned}$$

es decir, la restricción a $E_{s'}$, se obtiene de:

$$(9.2.2) \qquad W\bar{V} = V$$

Las matrices Σ y Σ_ψ, restringidas al subespacio $E_{s'}$ se convertirán en $W'\Sigma W$ y $W'\Sigma_\psi W$.

Sean $\bar{V}_1,\ldots,\bar{V}_s$ las v.a. canónicas obtenidas realizando el análisis canónico después de la proyección (9.2.1).

Teorema 9.2.2

Si $\tilde{V}_1,\ldots,\tilde{V}_{\tilde{m}v}$ son las v.a. obtenidas sin proyección, entonces $\bar{V}_i = \tilde{V}_i$ $i=1,\ldots,s'=\tilde{m}v$

Demostración:

De $\Sigma_\psi V_i = \lambda_i \Sigma V_i$

deducimos $\Sigma_\psi W \bar{U}_i = \lambda_i \Sigma W \bar{U}_i$ $\quad i=1,\ldots,mv$

siendo $\bar{U}_i$ la proyección de $\tilde{V}_i$ en $E_{s'}$. Multiplicando a la izquierda por W', tendremos,

$$W' \Sigma_\psi W \bar{U}_i = \lambda_i W' \Sigma W \bar{U}_i$$

Luego $\bar{U}_i$ es v.a. canónica en el espacio proyección, y por tanto, $\bar{U}_i = \bar{V}_i$ $(i=1,\ldots,mv)$.

Pero, por el teorema anterior, $\tilde{V}_i \in E_{s'}$, y la proyección $\bar{U}_i = \bar{V}_i$ del vector $\tilde{V}_i$ será el propio vector $\tilde{V}_i$ para $i=1,\ldots,\tilde{m}v$.

c. q. d.

Resumiendo: la representación canónica de un sistema de funciones estimables distintas, pero M-linealmente dependientes, se puede realizar siguiendo el mismo proceso del capítulo 8, relativo a un sistema independiente. El nº máximo de ejes canónicos es:

$$\tilde{m}v = \text{mín}\ (p, s')$$

siendo s' el rango del sistema.

9.3. REPRESENTACION CANONICA CON VARIABLES CONCOMITANTES

En algunos problemas de análisis multivariante de la varianza, junto a las v.a. observables $\{Y_i\}$, deben considerarse otras variables que tienen un efecto concomitante sobre cada una de las celdas o poblaciones, es decir, sobre los individuos medios. Suponiendo que el efecto es lineal, se plantea entonces el modelo factorial:

$$m_i^* = x_{i1}\beta_1^* + \dots + x_{im}\beta_m^* + c_{i1}\gamma_1^* + \dots + c_{iq}\gamma_q^* \qquad (i=1,\dots,k).$$

siendo $(\gamma_1^*,\dots,\gamma_q^*)$ un nuevo sistema de parámetros, y $(c_{i1},\dots,c_{iq})$ los valores observados de las variables concomitantes en la celda H_i. En algunos casos, c_{it} es algún tipo de función (exponencial, logarítmica, polinómica) del valor observado.

La representación canónica de funciones estimables, de la forma $\psi^* = P'\beta^*$, puede estar influida por estas variables concomitantes. Propongámonos eliminar esta influencia.

Si conociéramos los individuos paramétricos γ_i^*, bastaría entonces considerar como individuos medios

$$m_i^{**} = m_i^* - \sum_{h=1}^{q} c_{it}\gamma_t^* = x_{i1}\beta_1^* + \dots + x_{im}\beta_m^*$$

Esto no ocurrirá en las aplicaciones, por lo que deberemos estimar conjuntamente β^* y γ^*.

La matriz del diseño para los $(m+q)$ parámetros $\binom{\beta}{\gamma}$ es (X,C).

Las ecuaciones normales (4.4.5), serán

$$\binom{X'}{C'} \Delta (X,C) \binom{\beta^*}{\gamma^*} = \binom{X'}{C'} \Delta \bar{\pi}^*$$

que podemos desarrollar, obteniendo:

$$(9.3.1) \quad \begin{cases} X'\Delta X\beta^* + X'\Delta C\,\gamma^* = X'\Delta\,\bar{\pi}^* \\ C'\Delta X\,\beta^* + C'\Delta C\,\gamma^* = C'\Delta\,\bar{\pi}^* \end{cases}$$

Una vez obtenidas las estimaciones LS $(\hat{\gamma}^*_1, \ldots, \hat{\gamma}^*_q)$, las ecuaciones normales, con solo m parámetros, serán

$$(9.3.2) \qquad X'\Delta X\beta^* = X'\Delta(\bar{\pi}^* - C\hat{\gamma}^*)$$

Pero es evidente que la solución $\hat{\beta}^*$ de (9.3.1) es también solución de (9.3.2). En consecuencia, para que quede eliminada la influencia de las variables concomitantes, bastará considerar la matriz del diseño (X,C), y aplicar la teoria general del capítulo 8. Así, tendremos que:

a) La estimación de la matriz Σ será $\Sigma = \frac{1}{n-r'} R_o$, (§5.2) siendo:

$$(9.3.3) \qquad R_o(i,j) = (mY_i - X_a\hat{\beta}_{Y_j} - C_a\hat{\gamma}_{Y_i})(mY_j - X_a\hat{\beta}_{Y_j} - C_a\hat{\gamma}_{Y_j})$$

$$r' = \text{rang } (X,C)$$

Puesto que X no tiene relación con C, y las variables concomitantes suelen ser linealmente independientes, en general, se tiene:

$$r' = \text{rang } (X) + \text{rang } (C) = r + \text{mín } (k,q)$$

b) Los coeficientes $D = (d_1, \ldots, d_k)$ de la expresión Δ-óptima de la función estimable $\psi^* = P'\beta^*$, se obtendrá resolviendo primero el sistema en las incognitas D_1, D_2

$$P' = X'\Delta X\, D_1 + X'\Delta C\, D_2$$

$$0 = C'\Delta X\, D_1 + C'\Delta C\, D_2$$

Entonces: $\hat{D} = \Delta X\, D_1 + \Delta C\, D_2$

Es fácil obtener a continuación la matriz $\hat{\Sigma}_\psi$ aplicando (8.3.1) .

c) El teorema de representación canónica (8.6.2), depende solo de la expresión Δ-óptima, por lo que puede aplicarse también aquí, pero tomando r' en lugar de r.

Antes de efectuar la representación canónica de funciones estimables, influidas por variables concomitantes es aconsejable realizar un <u>análisis de covarianza</u>, para testar si el efecto concomitante es significativo. Es decir, deberemos primero testar la hipótesis:

$$H_o: \quad \gamma_1^* = \ldots = \gamma_q^* = 0$$

Según lo expuesto en §5.6, deberemos obtener la matriz $R_o = (R_o(i,j))$ según (9.3.3), la matriz $R_1 = (R_1(i,j))$ siendo ahora:

$$R_1(i,j) = (mY_i - X_a\hat{\beta}_i)'(mY_j - X_a\hat{\beta}_j)$$

hallar las raices de

$$\det\,(R_1 - \lambda R_o) = 0.$$

y calcular el estadístico Λ de Wilks, que, tansforma do, nos dará el valor F de Fisher.