CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS ESTOCÀSTIQUES

Carles Rovira Escofet

CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS ESTOCÀSTIQUES

Carles Rovira Escofet

Memòria presentada per aspirar
al grau de Doctor en Matemàtiques.

Departament d'Estadística.
Universitat de Barcelona.

Barcelona, novembre de 1995.

CERTIFICO que la present memòria
ha estat realitzada per
Carles Rovira Escofet,
al Departament d'Estadística
de la Universitat de Barcelona,
sota la meva direcció.

Dra. Marta Sanz Solé.
Departament d'Estadística.
Universitat de Barcelona.

Barcelona, novembre de 1995.

Als meus pares

Agraïments

A la Marta Sanz, directora d'aquesta tesi, per tot el temps i l'atenció que m'ha dedicat. Sense els seus coneixements i el seu ajut aquest treball no hauria estat possible.

A la meva germana i els amics i les amigues que m'han donat suport durant aquests anys.

Al Pelut i al Xip que tanta companyia m'han fet.

Índex

Presentació

A principis de la decada dels 40, K. Itô va introduir la integral estocàstica, per integrands uniparàmetrics i adaptats. La teoria de la integració estocàstica va permetre desenvolupar l'estudi de les anomenades equacions diferencials estocàstiques.

Posteriorment la definició d'integral estocàstica s'ha estès a processos multiparamètrics i a processos no adaptats. A partir d'aquestes extensions s'han pogut estudiar les equacions diferencials estocàstiques en derivades parcials i les equacions diferencials estocàstiques anticipatives.

Presentem aquí l'estudi de les propietats de dues equacions diferencials estocàstiques: una en derivades parcials per processos biparamètrics que convertim en una equació integral estocàstica en el pla, i una difusió amb condició inicial anticipativa. Sobre la primera estudiem el suport topològic de la llei de la solució, establim un principi de grans desviacions quan considerem petites perturbacions del soroll que governa l'equació i provem l'existència i regularitat de la llei de la solució. L'estudi de l'equació anticipativa es centra en l'existència i regularitat de la llei de la solució sota hipòtesis de diferents graus de degeneració. També s'estudia el cas en que l'equació anticipativa està governada per un moviment brownià de dimensió infinita.

Equacions diferencials estocàstiques en el pla

A l'article *Sur une Equation Différentielle Stochastique* [C], l'any 1972, R. Cairoli va estudiar l'equació integral estocàstica

$$dX(s,t) = a(X(s,t))W(ds,dt) + b(X(s,t))dsdt,$$

$(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, on W és el procés de Wiener definit en el pla. Sota certes condicions de regularitat sobre els coeficients, va obtenir l'existència i unicitat de la solució.

Posteriorment, altres autors han estudiat diferents tipus d'equacions diferencials estocàstiques amb paràmetre bidimensional. Cal destacar, entre d'altres, els articles de J. Yeh [Y] o de D. Nualart i J. Yeh [N-Y].

Al curs que J.B. Walsh va donar a Saint–Flour, *An introduction to partial differential equations* [W], s'introdueixen diverses equacions diferencials estocàstiques en derivades parcials. En particular, estudia l'equació parabòlica, coneguda per "l'equació del cable",

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(t,x) - \psi(X(t,x)) + f(X(t,x))W(dt,dx), \quad t>0,\, 0<x<L,\\
&\frac{\partial X}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial X}{\partial x}(t,L) = 0, \quad t>0,\\
&X(0,x) = X_0(x).
\end{aligned}$$

Va establir l'existència i unicitat de la solució, donant-la en la forma integral

$$\begin{aligned}
X(t,x) = &\int_0^L G_t(x,y)X_0(y)dy + \int_0^t\int_0^L G_{t-s}(x,y)\psi(X(s,y))dsdy\\
&+\int_0^t\int_0^L G_{t-s}(x,y)f(X(s,y))W(ds,dy)
\end{aligned}$$

on $G_{t-s}(x,y)$ és la solució fonamental de l'equació del calor amb condicions de contorn. Treballs posteriors han estudiat les propietats de la solució d'aquesta equació. Així, R.B. Sowers [So] obté un principi de grans desviacions per l'equació pertorbada; V. Bally, A. Millet i M. Sanz [B-M-S] estudien el suport de la llei de la solució; E. Pardoux i Z. Tusheng [P-Z] obtenen l'existència de densitat i V. Bally i E. Pardoux [B-P] demostren la regularitat de la densitat.

Seguint la metodologia presentada per J.B. Walsh, l'any 1988, R. Carmona i D. Nualart, a l'article *Random Nonlinear Wave Equations: Smoothness of the solutions* [C-N], estudien l'equació diferencial estocàstica de tipus hiperbòlic, coneguda com "equació d'ona"

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(t,x) = a\big(X(t,x)\big)W(dt,dx) + b\big(X(t,x)\big),$$

$t \in [0,\infty)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$. Per donar sentit a aquesta equació, l'escriuen en forma integral de la manera següent,

$$X(t,x) = X_0 + \int\int_{D(t,x)} \Big(a\big(X(s,y)\big)W(ds,dy) + b\big(X(s,y)\big)dsdy\Big),$$

on $D(t,x)$ és el triangle determinat pels punts $(0,x-t)$, $(0,x+t)$ i $(t,0)$. Estudien l'existència i unicitat de la solució sota certes condicions de regularitat sobre els coeficients, obtenen una propietat de Markov per la solució i demostren l'existència i regularitat de la densitat de la llei de la solució en un punt fix.

L'any 1990, M. Farré a [F 1], introdueix el següent tipus d'equació diferencial estocàstica hiperbòlica

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t}(s,t) = a_3(X,s,t)W(ds,dt) + a_4(X,s,t) + a_2(X,s,t)\frac{\partial X}{\partial s}(s,t) + a_1(X,s,t)\frac{\partial X}{\partial t}(s,t).$$

Dóna sentit a l'equació, presentant-la en la forma integral

$$\begin{aligned} X(s,t) &= X_0 + \int_{R_{s,t}} a_1(u,v)X(u,dv)du + \int_{R_{s,t}} a_2(u,v)X(du,v)dv \\ &\quad + \int_{R_{s,t}} a_3(X,u,v)W(du,dv) + \int_{R_{s,t}} a_4(X,u,v)dudv, \end{aligned}$$

$(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$, on $R_{s,t}$ indica el rectangle $(0,s]\times(0,t]$. Sota certes condicions sobre els coeficients, demostra l'existència i unicitat de la solució dins la classe de les semimartingales representables. Utilitzant aquest tipus de representació demostra també l'existència de densitat de la solució en un instant de temps fixat. Aquests resultats estan recollits a [F 2] i [F-N].

Al Capítol 1 d'aquesta memòria s'estudia aquesta equació des d'un nou punt de vista. Seguint les idees presentades per Walsh, es dóna sentit a la solució de l'equació utilitzant la funció de Green, que indicarem per $\gamma_{s,t}(u,v)$, associada a l'operador diferencial

$$\mathcal{L}f(s,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s,t) - a_1(s,t)\frac{\partial f}{\partial t}(s,t) - a_2(s,t)\frac{\partial f}{\partial s}(s,t).$$

S'obté així una representació integral de la forma

$$X(s,t) = X_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)[a_3(X,u,v)W(du,dv) + a_4(X,u,v)dudv].$$

A partir d'aquesta representació, s'estudia el suport de la solució, es demostra l'existència i regularitat de la densitat i s'obté un principi de grans desviacions per l'equació pertorbada. Aquests resultats estan recollits als articles [R-S 2] i [R-S 3].
El mateix principi de grans desviacions es pot també demostrar utilitzant la representació de la solució donada per Farré. Aquest resultat es troba a [R-S 1].

Equacions diferencials estocàstiques anticipatives

El 1975, A.V. Skorohod presenta a *On a generalization of a stochastic integral* [Sk] una extensió de la integral d'Itô, coneguda com la integral de Skorohod, que permet integrar processos no adaptats. D. Nualart i E. Pardoux a l'article *Stochastic calculus with anticipating integrands* [N-P] publicat el 1988, introdueixen la integral de Stratonovich generalitzada, que permet integrar processos no adaptats. També en aquest mateix article, desenvolupen el càlcul estocàstic anticipatiu, tant per la integral de Skorohod com per la integral de Stratonovich generalitzada. Aquesta última té l'avantatge que satifà les regles del càlcul diferencial ordinari.

Un cop desenvolupat el càlcul estocàstic anticipatiu, es poden formular equacions diferencials estocàstiques tals que les seves solucions siguin processos no adaptats. Aquest és el cas, per exemple, en que la condició inicial no és independent del procés de Wiener o quan imposem condicions que relacionen els valors del procés als instants inicials i finals del temps.

Considerarem una equació diferencial estocàstica del tipus:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{k} \int_0^t A_i(X_s) \circ dW_s^i + \int_0^t A_0(X_s) ds,$$

$k < \infty$, $t \in [0,1]$, on $W = \{W_t,\, t \in [0,1]\}$ és un moviment brownià d–dimensional a l'espai canònic $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i X_0 és una variable aleatòria integrable qualsevol.

Sota certes hipòtesis sobre els coeficients, D. Ocone i E. Pardoux van demostrar a *A generalized Itô-Ventzell formula. Application to a class of anticipating stochastic differential equations* [O-P], l'existència i unicitat de la solució (en realitat ho van demostrar per una classe més general d'equacions). Utilitzant una fórmula de substitució, la solució de l'equació s'escriu com $\varphi_t(X_0)$, on $\{\varphi_t(x),\, t \in [0,1],\, x \in \mathbb{R}^d\}$ és el flux associat a l'equació anterior, és a dir, és la solució de l'equació diferencial estocàstica adaptada

$$\varphi_t(x) = x + \sum_{i=1}^{k} \int_0^t A_i(\varphi_s(x)) \circ dW_s^i + \int_0^t A_0(\varphi_s(x)) ds,$$

$t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^d$.

S'han estudiat diverses propietats del procés anticipatiu $\varphi_t(X_0)$, composició del flux estocàstic amb una condició inicial aleatòria anticipativa. El 1992, a *Large deviations for a class of anticipating diferential equations* [M-N-S], A. Millet, D. Nualart i M. Sanz obtenen un principi de grans desviacions. També el 1992, a *Support theorems for a class of anticipating stochastic differential equations* [M-N], A. Millet i D. Nualart estudien el problema del suport.

El 1991, T. Masuda demostra l'existència de densitat a *Absolute continuity of distributions of solutions of anticipating stochastic differential equations* [Mas]. La regularitat de la densitat és estudiada per M.E. Caballero, B. Fernández i D. Nualart a *Smoothness of distributions for solutions of anticipating stochastic differential equations* [C-F-N], publicat el 1995.

El treball que presentem segueix la línia iniciada per Masuda i per Caballero, Fernández i Nualart. A [C-F-N] es demostra la regularitat de la densitat sota una hipòtesi de Hörmander restringida i per una condició inicial afitada. En el Capítol 2 d'aquesta memòria s'estèn aquest resultat en diverses direccions. Primer de tot, s'obté la regularitat de la densitat suposant que la condició inicial pertany a l'espai $\bigcap_{p\geq 2} L^p(\Omega)$, afeblint per tant la hipòtesi d'afitació de la condició inicial. S'obté després un resultat anàleg amb una hipòtesi de Hörmander no restringida, generalitzant també el resultat de [C-F-N]. Finalment, seguint les idees presentades per Bell i Mohammed a *An extension of Hörmander's Theorem for infinitely degenerate second-order operators* [B-M 1], presentem un resultat on s'obté regularitat de la densitat en un cas degenerat, en el que la hipòtesi de Hörmander falla en un conjunt determinat de punts que satisfan unes certes condicions. Aquests resultats estan recollits a [R-S 4].

Finalment, s'estudia l'equació

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t A_i(X_s) \circ dW_s^i + \int_0^t A_0(X_s) ds,$$

$t \in [0,1]$. El cas adaptat $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$ ha estat estudiat per Nguyen Minh Duc, D. Nualart i M. Sanz el 1990 a *Application of Malliavin Calculus to a Class of Stochastic Differential Equations* [N-N-S]. En aquest article demostren l'existència i la regularitat de la densitat de la solució.

Al Capítol 3 es dóna sentit a la solució en el cas anticipatiu, mitjançant la composició del flux estocàstic amb la condició inicial anticipativa, i es demostra, seguint la metodologia de [N-N-S], l'existència i la regularitat de la densitat a un instant de temps t fixat.

ESTUDI D'UNA EQUACIÓ HIPERBÒLICA

Capítol 1.

1.1. INTRODUCCIÓ

El primer capítol d'aquesta memòria està dedicat a estudiar la següent equació diferencial estocàstica en derivades parcials

$$\frac{\partial^2 X_{s,t}}{\partial s\, \partial t} = a_1(s,t)\, \frac{\partial X_{s,t}}{\partial t} + a_2(s,t)\, \frac{\partial X_{s,t}}{\partial s} + a_3(X,s,t)\, \dot{W}_{s,t} + a_4(X,s,t), \tag{1.1.1}$$

$(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$, $X_{s,t} = X_0$ sobre els eixos.
Per $\{\dot{W}_{s,t},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ denotem un soroll blanc en $\left(\mathbb{R}^2_+,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)\right)$, X_0 és una variable aleatòria $\mathcal{F}_{0,0}$-mesurable, on $\{\mathcal{F}_{s,t},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ és la filtració natural associada al drap brownià $\{W_{s,t},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$; a_i , $i = 1,2$ són funcions reals definides es $\mathbb{R}^2_+$ i a_i, $i = 3,4$ són funcions reals definides en $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2_+) \times \mathbb{R}^2_+$.

El cas $a_1 = a_2 \equiv 0$ ha estat estudiat en profunditat (veieu per exemple, [C] o [Y]); presentant la solució en la seva forma integral corresponent

$$X_{s,t} = X_0 + \int_{R_{s,t}} [a_3\,(X,u,v)\; dW_{u,v} + a_4\,(X,u,v)\; du\, dv], \tag{1.1.2}$$

on $R_{s,t}$ és el rectangle $(0,s] \times (0,t]$ i la integral estocàstica és la integral d'Itô a dos paràmetres definida a [W-Z] (veieu també [C-W]).

A [F-N], Farré i Nualart han analitzat l'equació (1.1.1) des del punt de vista següent. Es considera una solució de (1.1.1), un procés $X = \{X_{s,t},\ (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ continu i $\mathcal{F}_{s,t}$-adaptat, que satisfaci l'equació integral

$$X_{s,t} = X_0 + \int_{R_{s,t}} \big[a_1(u,v)\ X(u,dv)\,du + a_2(u,v)\ X(du,v)\,dv + a_3(X,u,v)\ dW_{u,v} + a_4(X,u,v)\,du\,dv\big]. \tag{1.1.3}$$

Les dues primeres integrals estocàstiques mixtes en (1.1.3) tenen sentit quan X pertany a la classe dels processos amb dos paràmetres anomenats *Semimartingales representables.* Els processos d'aquesta classe es poden escriure com la suma d'integrals estocàstiques i mixtes respecte el drap brownià i d'una integral de Lebesgue. Aquesta classe de processos ha estat estudiada a [Gu-P 1].

Al Teorema 2.1 de [F-N] s'estableix l'existència i unicitat de la solució de (1.1.3) dins la classe de les semimartingales representables. Sota el conjunt d'hipòtesis (H_1)

$(H_1 1)$ existeix una constant $C > 0$ tal que, per tot $f,\ f' \in \mathcal{C}, (s,t) \in T$ i $i = 3,4$

$$|\,a_i(f,s,t) - a_i(f',s,t)\,| \le C \sup_{0 \le (u,v) \le (s,t)} |\,f(u,v) - f'(u,v)\,|\,,$$
$$|\,a_i(f,s,t)\,| \le C \sup_{0 \le (u,v) \le (s,t)} \big(1 + |\,f(u,v)\,|\big)\,,$$

$(H_1 2)$ a_i, $i = 1,2$, són afitades,

han demostrat, utilitzant tècniques del càlcul estocàstic a dos paràmetres, que l'única solució de (1.1.3) satisfà

$$X_{s,t} = X_0 + \int_{R_{s,t}} a_3(X,u,v)\ dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \int_0^t \beta_1(w;u,v)\,dw\ dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \int_0^s \beta_2(u,v;r)\,dr\ dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \varphi(u,v)\,du\,dv\,, \tag{1.1.4}$$

on

$$\beta_1(w;u,v) = a_2(u,w)\,\mathbf{1}_{\{v \le w\}} \left(a_3(X,u,v) + \int_0^w \beta_1(w';u,v)\,dw'\right), \tag{1.1.5}$$

$$\beta_2(u,v;r) = a_1(r,v)\,\mathbf{1}_{\{u \le r\}} \left(a_3(X,u,v) + \int_0^r \beta_2(u,v;r')\,dr'\right), \tag{1.1.6}$$

$$\varphi(u,v) = a_4(X,u,v) + a_1(u,v) \int_0^u \varphi(r,v)dr + a_2(u,v) \int_0^v \varphi(u,w)\,dw + a_1(u,v) \int_{R_{u,v}} \beta_1(v;r,w)\ dW_{r,w} + a_2(u,v) \int_{R_{u,v}} \beta_2(r,w;u)\ dW_{r,w}\,, \tag{1.1.7}$$

$u, v, w, r \in \mathbb{R}_+$.

A partir d'aquest moment, anomenarem *solució forta* de (1.1.1) al procés $\{X_{s,t},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ definit per (1.1.4).

Recentment, Norris (veieu [No]) ha demostrat un teorema d'existència i unicitat per una classe d'equacions diferencials estocàstiques hiperbòliques més general que (1.1.1). El mètode que utilitza està basat també en el càlcul estocàstic a dos paràmetres per a semimartingales. El seu teorema és útil per tal de construir processos en varietats Riemannianes, en particular, una drap brownià a valors en una varietat.

El treball que es presenta al primer capítol d'aquesta memòria tracta de l'estudi de l'equació (1.1.1) des d'un altre punt de vista. Per altres casos estudiats a la literatura sobre equacions diferencials estocàstiques parabòliques i el.líptiques en derivades parcials, sembla natural plantejar-se la solució de l'equació a partir del mètode de Riemann per l'equació determinista anàloga a (1.1.1). Considererem l'operador diferencial de segon ordre $\mathcal{L}$ definit per

$$\mathcal{L} f(s,t) = \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\, \partial t} - a_1(s,t)\, \frac{\partial f(s,t)}{\partial t} - a_2(s,t)\, \frac{\partial f(s,t)}{\partial s} \tag{1.1.8}$$

i indicarem per $\gamma_{s,t}(u,v)$, $0 \le u \le s$, $0 \le v \le t$ la funció de Green associada a aquest operador.
Definirem aleshores la solució de l'equació (1.1.1), com un procés $X = \{X_{s,t},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ continu i $\mathcal{F}_{s,t}$-adaptat que satisfaci l'equació integral

$$X_{s,t} = X_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\ \left[a_3(X,u,v)\ dW_{u,v} + a_4(X,u,v)\, du\, dv\right]. \tag{1.1.9}$$

Aquesta expressió és un generalització de la (1.1.2).
A les diferents seccions d'aquest capítol s'estudia la solució de (1.1.1) des d'aquest nou punt de vista.

A la segona secció, es demostra l'existència i unicitat de la solució (Teorema 1.2.1) utilitzant l'expressió (1.1.9) sota el conjunt d'hipòtesis (H_2), una mica més fort que el conjunt (H_1). Es comprova que la nova solució coincideix amb la solució feble, és a dir, és la solució si ens ho mirem com distribucions (Proposicions 1.2.3 i 1.2.4). Per aquesta raó, anomenarem *solució feble* a aquest nou procés. S'estableix després que les dues nocions de solució, la feble i la forta, són equivalents (Proposició 1.2.5).

La representació (1.1.9) serà més apropiada que la (1.1.4) per l'estudi de les propietats del procés solució de (1.1.1), de manera que, a partir d'aquest moment s'utilitzarà bàsicament la nova representació de la solució.

A la tercera secció, s'estableix un resultat d'aproximacions de la solució (Teorema 1.3.5). A partir d'aquest resultat, seguint el mètode presentat a [M-S 1] i [M-S 2], obtenim un teorema del suport pel procés solució (Teorema 1.3.4).

A la quarta, s'apliquen les eines del càlcul de Malliavin per deduir l'existència i regularitat de la densitat de la llei de $X_{s,t}$, $s \cdot t \neq 0$ (Teorema 1.4.4). Per $a_1 = a_2 \equiv 0$ i X multidimensional, aquest problema ha estat estudiat a [N-S 1] i [N-S 2]. L'existència de densitat també ha estat provada a [F 2] a partir de la representació (1.1.4), però usant la (1.1.9), aquesta qüestió esdevé més senzilla.

A la cinquena secció, s'estableix un principi de grans desviacions per la família $\{X^\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ de solucions de (1.1.9) obtingudes per pertorbacions del soroll blanc (Teorema 1.5.6). Per $a_1 = a_2 \equiv 0$ i X multidimensional, aquest resultat ha estat estudiat a [D-D]. En comparació amb aquest article, la nostra equació presenta la dificultat que el procés $\{\int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\ a_3(X,u,v)\ dW_{u,v},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ no és una martingala, de manera que cal desenvolupar desigualtats exponencials per aquests tipus de processos. El principi de grans desviacions pot obtenir-se també a partir de la representació (1.1.4), però la feina a realitzar és molt més llarga.

Finalment, a la darrera secció, es desenvolupen algunes propietats de la funció de Green associada a l'operador (1.1.8) que s'utilitzen al llarg de tot el capítol.

Al llarg d'aquesta capítol les constants que apareixen a les demostracions són anomenades C o C_p (si depenen de p), encara que puguin variar d'un lloc a un altre. Els punts de $\mathbb{R}^2_+$ els indicarem usualment per $z = (s,t)$, $\eta = (u,v)$ o $\alpha = (r,w)$.

1.2. EXISTÈNCIA I UNICITAT DE LA SOLUCIÓ

Preliminars

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar que sota el conjunt d'hipòtesis (H_2), que explicitarem més endavant, l'únic procés continu i adaptat que satisfà l'equació estocàstica integral (1.1.9) coincideix amb la solució feble de (1.1.1), és a dir, la solució en el sentit de distribucions. A més a més, la solució de (1.1.9) satisfà (1.1.4). Per tant, ambdues interpretacions de l'equació d'evolució (1.1.1) –a través de (1.1.4), tal com ha estat proposada a [F-N], o utilitzant (1.1.9)– seran equivalents.

Resultats

Sigui $T = [0,1]^2$ amb l'ordre parcial usual definit coordenada a coordenada i sigui $\mathcal{C} = \mathcal{C}(T;\mathbb{R})$, l'espai de les funcions contínues definides sobre T.

Considerem funcions $a_i : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2$ i funcions mesurables $a_i : \mathcal{C}\times T \to \mathbb{R}$, $i = 3,4$, causals, és a dir, per cada $z \in T$, $a_i(\cdot\,,z)$ és mesurable respecte la σ-àlgebra generada per les funcions contínues $g : [0,z] \to \mathbb{R}$. Sobre aquest tipus de coeficients, definim el conjunt d'hipòtesis (H_2) amb els que treballarem tota aquesta secció.

$(H_2 1)$ a_3 i a_4 són funcions globalment Lipschitz en $f \in \mathcal{C}$ i satisfan una condició de restricció en el creixement. És a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que, per tot $f,\, f' \in \mathcal{C}, (s,t) \in T$ i $i = 3,4$

$$|\, a_i(f,s,t) - a_i(f',s,t)\,| \leq C \,\, |\, f(s,t) - f'(s,t)\,|\,,$$
$$|\, a_i(f,s,t)\,| \leq C \,\, \big(1 + |\, f(s,t)\,|\big)\,,$$

$(H_2 2)$ $a_i\,,\; i = 1,2$, són derivables, afitades, amb derivades afitades.

Sota la hipòtesi $(H_2 2)$ i fixat $(s,t) \in T$, sigui $\gamma_{s,t}(u,v)$ la funció definida en $\{\,(u,v) : (0,0) \leq (u,v) \leq (s,t)\,\}$ que satisfà

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \big(a_1(u,v)\; \gamma_{s,t}(u,v)\big)}{\partial v} + \frac{\partial \big(a_2(u,v)\; \gamma_{s,t}(u,v)\big)}{\partial u} = 0\,,\\
&\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u} + a_1(u,v)\; \gamma_{s,t}(u,v) = 0 \quad \text{si} \quad v = t\,,\\
&\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial v} + a_2(u,v)\; \gamma_{s,t}(u,v) = 0 \quad \text{si} \quad u = s\,,\\
&\gamma_{s,t}(u,v) = 1 \quad \text{si} \quad u = s\,,\; v = t\,.
\end{aligned}$$

L'estudi de l'existència i les propietats d'aquesta funció està desenvolupat a la Secció 1.6. Com ja s'ha comentat a la introducció i com s'explica a la Secció 1.6, $\gamma_{s,t}(u,v)$ serà la funció de Green associada a l'operador $\mathcal{L}$ definit a (1.1.8).

El primer pas, consistirà en estudiar l'existència i la unicitat de la solució de l'equació integral (1.1.9). El mètode utilitzat és estàndard i està basat en les aproximacions de Picard.

Teorema 1.2.1. *Suposem que els coeficients $a_i\,,\; i = 1,2,3,4$, satisfan les hipòtesis (H_2) i que X_0 és una variable aleatòria $\mathcal{F}_{0,0}$-mesurable que pertany a $L^{2p}(\Omega)$ per algun $p \geq 1$. Aleshores, existeix una única solució contínua i adaptada $X = \{X_{s,t},\; (s,t) \in T\}$ de (1.1.9) que està afitada en $L^{2p}(\Omega)$.*

Prova. Definim les aproximacions de Picard

$$\begin{aligned}
X^{(0)} &= X_0\,,\\
X^{(n+1)}(s,t) &= X_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v) a_4\big(X^{(n)},u,v\big)\, du\, dv\\
&\quad + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v) a_3\big(X^{(n)},u,v\big) dW_{u,v}\,.
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Els processos $X^{(n)}$ estan ben definits per tot $n \geq 0$.

Utilitzant (1.6.7), que ens diu que la funció de Green està uniformement afitada, les desigualtats de Burkholder i de Hölder, i la hipòtesi $(H_2 1)$ obtenim fàcilment

$$E\big(|X^{(n+1)}(s,t) - X^{(n)}(s,t)|^{2p}\big) \le C_p \int_{R_{s,t}} E\big(|X^{(n)}(u,v) - X^{(n-1)}(u,v)|^p\big)dudv$$

per $n \ge 1$, i per tot $(s,t) \in T$. De la mateixa manera,

$$E\big(|X^{(1)}(s,t) - X^{(0)}(s,t)|^{2p}\big) \le C_p E\left(\int_{R_{s,t}} (1 + |X_0|^2)^p dudv\right) \le C_p\,.$$

I combinant les dues darreres desigualtats

$$E\big(|X^{(n+1)}(s,t) - X^{(n)}(s,t)|^{2p}\big) \le \frac{(C_p)^{n+1}}{(n!)^2}\,.$$

Aleshores, utilitzant arguments estàndards, obtenim que $X^{(n)}(s,t)$ convergeix en $L^{2p}(\Omega)$ i que la convergència és uniforme en T. Sigui $X(s,t) = L^2 - \lim_{n\to\infty} X^{(n)}(s,t)$. És fàcil comprovar que $X(s,t)$ és una solució de (1.1.9) i que està afitada en $L^{2p}(\Omega)$.

Per demostrar la unicitat, considerem dos processos X, Y tals que

$$\sup_{(s,t)\in T} \big\{E\big(|X(s,t)|^{2p}\big) + E\big(|Y(s,t)|^{2p}\big)\big\} < +\infty$$

i que satisfacin l'equació integral (1.1.9). Aleshores, la propietat d'isometria, la desigualtat de Schwarz, (1.6.7) i la hipòtesi $(H_2 1)$ ens donen

$$E\big(|X(s,t) - Y(s,t)|^2\big) \le C \int_{R_{s,t}} E\big(|X(u,v) - Y(u,v)|^2\big)dudv, \quad (s,t) \in T\,.$$

I aplicant el lema de Gronwall obtenim

$$E\big(|X(s,t) - Y(s,t)|^2\big) = 0$$

de manera que la unicitat queda provada. ∎

Utilitzant el criteri clàssic de continuïtat de Kolmogorov (veieu, per exemple, el Corol.lari 1.2 de [W]), es pot demostrar fàcilment el següent resultat.

Proposició 1.2.2. *Suposem que se satisfà (H_2) i que $X_0 \in L^p(\Omega)$ per tot $p \ge 2$. Aleshores, quasi segurament, les trajectòries de X, solució de (1.1.9), són α-Hölder contínues per cada $\alpha \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.*

Prova. N'hi ha prou amb demostrar

$$E(|X(s,t) - X(s+h,t+k)|^{2p}) \le C_p\,(\sqrt{h^2+k^2})^{(p-1)},$$

per tot $p \ge 1$. Aleshores, escollint p prou gran i aplicant el criteri de Kolmogorov finalitzem la demostració. ∎

El soroll blanc $\{\dot{W}_{s,t},\ (s,t) \in T\}$ és la derivada *formal* del drap brownià (que no és diferenciable en cap punt). Es pot donar un altre significat a l'expressió formal (1.1.1) mitjançant una formulació feble. Precisarem ara aquesta nova formulació i provarem alguns resultats que expliquen perquè podem anomenar solució feble de (1.1.1) a l'únic procés que satisfà (1.1.9).

Sigui $\mathcal{C}^2$ el conjunt de les funcions $\varphi : T \to \mathbb{R}$ tals que existeixen $\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}$, $\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\varphi(s,t)}{\partial s\,\partial t}$. Multipliquem els dos costats de (1.1.1) per una funció φ de $\mathcal{C}^2$ i integrem sobre $R_{s,t}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{R_{s,t}} \big[a_3(X,u,v)\,\varphi(u,v)\,dW_{u,v} + a_4(X,u,v)\,\varphi(u,v)\,du\,dv\big] \\
&\quad = \int_{R_{s,t}} \Big(\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} - a_1(u,v)\,\frac{\partial X}{\partial v} - a_2(u,v)\,\frac{\partial X}{\partial u}\Big)\,\varphi(u,v)\,du\,dv\,.
\end{aligned}$$

Integrant per parts el costat dret d'aquesta igualtat obtenim

$$\begin{aligned}
&\int_{R_{s,t}} \big[a_3(X,u,v)\,\varphi(u,v)\,dW_{u,v} + a_4(X,u,v)\,\varphi(u,v)\,du\,dv\big] \\
&= X(s,t)\,\varphi(s,t) - X_0\,\varphi(0,0) + X_0 \int_0^s a_1(u,0)\,\varphi(u,0)\,du \\
&+ X_0 \int_0^t a_2(0,v)\,\varphi(0,v)\,dv - \int_0^s X(u,t)\,\Big(\frac{\partial\varphi(u,t)}{\partial u} + a_1(u,t)\,\varphi(u,t)\Big)du \\
&- \int_0^t X(s,v)\,\Big(\frac{\partial\varphi(s,v)}{\partial v} + a_2(s,v)\,\varphi(s,v)\Big)\,dv + \int_{R_{s,t}} X(u,v)\,\Big(\frac{\partial^2\varphi(u,v)}{\partial u\,\partial v} \\
&+ \frac{\partial\big(a_1(u,v)\,\varphi(u,v)\big)}{\partial v} + \frac{\partial\big(a_2(u,v)\,\varphi(u,v)\big)}{\partial u}\Big)\,du\,dv\,. \qquad (1.2.2)
\end{aligned}$$

Podem plantejar ara el següent resultat.

Proposició 1.2.3. *Suposem $(H_2 1)$ i $(H_2 2)$. Aleshores, existeix com a màxim un únic procés continu $\{X_{s,t},\ (s,t) \in T\}$ que satisfà (1.2.2) per tot $\varphi \in \mathcal{C}^2$, i tal que $X_{s,t} = X_0$ si $s \cdot t = 0$.*

Prova. Fixem $(s,t) \in T$. A la Proposició 1.6.1 demostrem que la funció de Green $\gamma_{s,t}$, associada a l'operador $\mathcal{L}$, pertany a $\mathcal{C}^2$. Sigui X un procés que satisfaci (1.2.2) per tot $\varphi \in \mathcal{C}^2$, amb $X(s,t) = X_0$ sobre els eixos. Per $\varphi \equiv \gamma_{s,t}$ i a partir de les propietats (P) obtenim

$$\begin{aligned}\int_{R_{s,t}} &\gamma_{s,t}(u,v)\big[a_3(X,u,v)\; dW_{u,v} + a_4(X,u,v)\big]\, du\, dv \\ &= X(s,t) - X_0\, \gamma_{s,t}(0,0) + X_0\Big[\int_0^s a_1(u,0)\gamma_{s,t}(u,0)\, du + \int_0^t a_2(0,v)\; \gamma_{s,t}(0,v)\, dv\Big].\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Siguin X^1 i X^2 dos processos amb les mateixes propietats que X. La identitat (1.2.3) implica

$$\begin{aligned}X^1(s,t) - X^2(s,t) = \int_{R_{s,t}} &\gamma_{s,t}(u,v)\big[\big(a_3(X^1,u,v) - a_3(X^2,u,v)\big)\;\; dW_{u,v} \\ &+ \big(a_4(X^1,u,v) - a_4(X^2,u,v)\big)\; du\, dv\big].\end{aligned}$$

La propietat d'isometria de la integral estocàstica, la desigualtat de Hölder, (1.6.7) i $(H_2 2)$ impliquen

$$E\left(|X^1(s,t) - X^2(s,t)|^2\right) \le C \int_{R_{s,t}} E\left(|X^1(u,v) - X^2(u,v)|^2\right) du\, dv\,.$$

Aleshores, utilitzant el lema de Gronwall i la continuïtat de X^1 i X^2 obtenim $X^1(s,t) = X^2(s,t)$ per tot $(s,t) \in T$, q.s. ∎

Per la proposició següent obtindrem que la solució de l'equació integral (1.1.9) és en realitat la solució feble de l'equació.

Proposició 1.2.4. *Suposem que se satisfan $(H_2 1)$ i $(H_2 2)$. L'única solució de (1.1.9) satisfà (1.2.2).*

Prova. Sigui $\{X(s,t), (s,t) \in T\}$ la solució de (1.1.9). Donada una funció test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ qualsevol, sigui

$$\begin{aligned}V(s,t) = &\int_{R_{s,t}} \varphi(u,v)\big[a_3(X,u,v)\; dW_{u,v} + a_4(X,u,v)\; du\, dv\big] \\ &- \Big[X(s,t)\; \varphi(s,t) - X_0\big[\varphi(0,0) - \int_0^s a_1(u,0)\; \varphi(u,0)\, du - \int_0^t a_2(0,v)\; \varphi(0,v)\, dv\big] \\ &- \int_0^s X(u,t)\Big(\frac{\partial\varphi(u,t)}{\partial u} + a_1(u,t)\; \varphi(u,t)\Big)\, du \\ &- \int_0^t X(s,v)\Big(\frac{\partial\varphi(s,v)}{\partial v} + a_2(s,v)\; \varphi(s,v)\Big)\, dv \\ &+ \int_{R_{s,t}} X(u,v)\Big(\frac{\partial^2\varphi(u,v)}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\big(a_1(u,v)\varphi(u,v)\big)}{\partial v} + \frac{\partial\big(a_2(u,v)\varphi(u,v)\big)}{\partial u}\Big) du dv\Big]\,.\end{aligned}$$

L'equació (1.1.9) i el teorema de Fubini impliquen

$$V(s,t) = X_0 V^0(s,t) + \int_{R_{s,t}} V_{s,t}(u,v)\left[a_4(X,u,v)\,dudv + a_3(X,u,v)\,dW_{u,v}\right],$$

on

$$\begin{aligned} V_{s,t}(u,v) = {} & \varphi(u,v) - \gamma_{s,t}(u,v)\,\varphi(s,t) + \int_u^s \gamma_{r,t}(u,v)\Big(\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial r} + a_1(r,t)\,\varphi(r,t)\Big)\,dr \\ & + \int_v^t \gamma_{s,w}(u,v)\Big(\frac{\partial\varphi(s,w)}{\partial w} + a_2(s,w)\,\varphi(s,w)\Big)\,dw \\ & - \int_u^s\int_v^t \gamma_{r,w}(u,v)\Big(\frac{\partial^2\varphi(r,w)}{\partial r\,\partial w} + \frac{\partial\left(a_1(r,w)\,\varphi(r,w)\right)}{\partial w} \\ & + \frac{\partial\left(a_2(r,w)\,\varphi(r,w)\right)}{\partial r}\Big)\,dr\,dw \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

i

$$\begin{aligned} V^0(s,t) = {} & -\varphi(s,t) + \varphi(0,0) - \int_0^s a_1(u,0)\,\varphi(u,0)\,du - \int_0^t a_2(0,v)\,\varphi(0,v)\,dv \\ & + \int_0^s \Big(\frac{\partial\varphi(u,t)}{\partial u} + a_1(u,t)\varphi(u,t)\Big)\,du + \int_0^t \Big(\frac{\partial\varphi(s,v)}{\partial v} + a_2(s,v)\varphi(s,v)\Big)\,dv \\ & - \int_{R_{s,t}} \Big(\frac{\partial^2\varphi(u,v)}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\left(a_1(u,v)\,\varphi(u,v)\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(a_2(u,v)\,\varphi(u,v)\right)}{\partial u}\Big)\,du\,dv\,. \end{aligned}$$

Integrant per parts (1.2.4) (utilitzem aquí la Proposició 1.6.2),

$$\begin{aligned} V_{s,t}(u,v) = {} & \int_u^s \varphi(r,v)\Big(a_1(r,v)\,\gamma_{r,v}(u,v) - \frac{\partial\gamma_{r,v}(u,v)}{\partial r}\Big)\,dr \\ & + \int_v^t \varphi(u,w)\Big(a_2(u,w)\,\gamma_{u,w}(u,v) - \frac{\partial\gamma_{u,w}(u,v)}{\partial w}\Big)\,dw \\ & - \int_u^s\int_v^t \varphi(r,w)\Big(\frac{\partial^2\gamma_{r,w}(u,v)}{\partial r\,\partial w} - a_1(r,w)\frac{\partial\gamma_{r,w}(u,v)}{\partial w} - a_2(r,w)\frac{\partial\gamma_{r,w}(u,v)}{\partial r}\Big)\,dw\,dr\,. \end{aligned}$$

Les propietats (1.6.11), (1.6.12) i (1.6.13) de la funció de Green garanteixen que $V_{s,t}(u,v) = 0$ per tot $(0,0) \le (u,v) \le (s,t)$. Els mateixos arguments demostren que $V^0(s,t) = 0$. D'aquesta manera $V \equiv 0$. I per tant, el procés X satisfà (1.2.2). ∎

L'últim resultat d'aquest capítol presenta l'equivalència entre les nocions de solució feble i forta de (1.1.1).

Proposició 1.2.5. *Sota les hipòtesis (H_2) la solució de (1.1.9) satisfà (1.1.4).*

Prova. Sigui X un procés que satisfà (1.1.9), $\beta_1(w;u,v)$, $\beta_2(u,v;r)$ definits com a (1.1.5) i (1.1.6), respectivament. L'equació integral (1.6.1) satisfeta per la funció de Green, (1.1.5) i (1.1.6) impliquen

$$\int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\, a_3(X,u,v)\, dW_{u,v} = \int_{R_{s,t}} a_3(X,u,v)\Big[1+ \int_u^s a_1(r,v)\,\gamma_{s,t}(r,v)\,dr + \int_v^t a_2(u,w)\,\gamma_{s,t}(u,w)\,dw\Big]\, dW_{u,v}, \tag{1.2.5}$$

$$\begin{aligned}
&\int_v^t a_3(X,u,v)\, a_2(u,w)\,\gamma_{s,t}(u,w)\,dw \\
&= \int_v^t \Big(\beta_1(w;u,v) - a_2(u,w)\int_0^w \beta_1(w';u,v)\,dw'\Big)\gamma_{s,t}(u,w)\,dw \\
&= \int_v^t \beta_1(w;u,v)\Big(\gamma_{s,t}(u,w) - \int_w^t a_2(u,w')\,\gamma_{s,t}(u,w')\,dw'\Big)\,dw \\
&= \int_v^t \beta_1(w;u,v)\Big(1+\int_u^s a_1(r,w)\,\gamma_{s,t}(r,w)\,dr\Big)\,dw \\
&= \int_0^t \beta_1(w;u,v)\,dw + \int_u^s\int_v^t a_1(r,w)\,\gamma_{s,t}(r,w)\,\beta_1(w;u,v)\,dr\,dw\,,
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

i de manera anàloga

$$\begin{aligned}
&\int_u^s a_3(X,u,v)\, a_1(r,v)\,\gamma_{s,t}(r,v)\,dr \\
&= \int_0^s \beta_2(u,v;r)\,dr + \int_u^s\int_v^t a_2(r,w)\,\gamma_{s,t}(r,w)\,\beta_2(u,v;r)\,dr\,dw\,.
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Substituïm la integral estocàstica de (1.1.9) pel costat dret de (1.2.5). Aleshores, utilitzant (1.2.6) i (1.2.7) obtenim

$$\begin{aligned}
X(s,t) &= X_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\, a_4(X,u,v)\,du\,dv + \int_{R_{s,t}} a_3(X,u,v)\, dW_{u,v} \\
&+ \int_{R_{s,t}} \Big[\int_0^t \beta_1(w;u,v)\,dw + \int_0^s \beta_2(u,v;r)\,dr\Big] dW_{u,v} \\
&+ \int_{R_{s,t}} \Big(\int_u^s\int_v^t \gamma_{s,t}(r,w)\, a_1(r,w)\,\beta_1(w;u,v)\,dr\,dw\Big) dW_{u,v} \\
&+ \int_{R_{s,t}} \Big(\int_u^s\int_v^t \gamma_{s,t}(r,w)\, a_2(r,w)\,\beta_2(u,v;r)\,dr\,dw\Big) dW_{u,v}\,.
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Sigui

$$a(X,u,v) = a_4(X,u,v) + a_1(u,v)\int_{R_{u,v}} \beta_1(v;r,w)\, dW_{r,w}$$
$$+\, a_2(u,v)\int_{R_{u,v}} \beta_2(r,w;u)\, dW_{r,w}\,.$$

L'equació (1.2.8) es pot escriure com

$$X(s,t) = X_0 + \int_{R_{s,t}} \left[a_3(X,u,v) + \int_0^t \beta_1(w;u,v)\,dw + \int_0^s \beta_2(u,v;r)\,dr\right] dW_{u,v}$$
$$+ \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\; a(X,u,v)\,du\,dv\,. \tag{1.2.9}$$

Sigui

$$Z(s,t) = \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\; a(X,u,v)\,du\,dv\,.$$

Els resultats sobre la funció de Green demostrats a la Secció 1.6 demostren que q.s. $\omega \in \Omega$, $Z(s,t)$ és la solució de l'equació diferencial en derivades parcials

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial s\,\partial t} = a(X,s,t) + a_1(s,t)\,\frac{\partial Z}{\partial t} + a_2(s,t)\,\frac{\partial Z}{\partial s}\,,$$

$Z(s,t) = 0$ si $s \cdot t = 0$. La funció $\varphi(s,t) = \frac{\partial^2 Z}{\partial s\,\partial t}$ satisfà

$$\varphi(s,t) = a(X,s,t) + a_1(s,t)\int_0^s \varphi(u,t)\,du + a_2(s,t)\int_0^t \varphi(s,v)\,dv\,,$$

que és una expressió del tipus (1.1.7).

Conseqüentment, (1.2.9) demostra que X satisfà

$$X(s,t) = X_0 + \int_{R_{s,t}} \left[a_3(X,u,v) + \int_0^t \beta_1(w;u,v)\,dw + \int_0^s \beta_2(u,v;r)\,dr\right] dW_{u,v}$$
$$+ \int_{R_{s,t}} \varphi(u,v)\,dudv\,.$$

Per tant, X és la solució forta de (1.1.1). ∎

Observació. Com ja hem comentat a la Secció 1.1, Farré i Nualart van demostrar a [F-N] l'existència i unicitat de la solució de (1.1.3) sota les hipòtesis (H_1), que són més febles que les (H_2) utilitzades per demostrar l'existència i unicitat amb la nova formulació. Com que el procés $\{ \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\, a_3(X,u,v)\, dW_{u,v},\ (s,t) \in T \}$ no satisfà les propietats de martingala, no podem utilitzar les desigualtats maximals per estimar els seus moments, de manera que la hipòtesi $(H_1 2)$ no ens serveix per estudiar l'existència i unicitat de la solució feble.

1.3. TEOREMA DEL SUPORT

Preliminars

Aquesta secció està dedicada a estudiar el suport de la llei de la solució de l'equació (1.1.1). El mètode que utilitzarem serà el que caracteritza el suport a partir d'aproximacions de la solució obtingudes mitjançant els anomenats "esquelets". Dins d'aquesta secció podem distingir tres parts: a la primera es donen les definicions generals i es recorda breument la base del mètode que utilitzarem, a la segona part s'obté el resultat d'aproximació i la tercera i última part està dedicada a obtenir el teorema del suport per la nostra equació.

Definició 1.3.1. *Donada una variable aleatòria $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ que pren valors en un espai de Banach separable $(\mathbb{B}, \|\ \|)$, anomenarem suport topològic de la llei de probabilitat de F al més petit tancat A de $\mathbb{B}$ tal que $P \circ F^{-1}(A) = 1$.*

Stroock i Varadhan van desenvolupar l'anomenat Teorema del Suport per les difusions. Considereu l'equació diferencial estocàstica

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left[\sigma(s, X_s) \circ dW_s + b(s, X_s)\, ds\right], \quad t \in [0, \tau],$$

definida en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ amb condició inicial determinista X_0, $\sigma : [0,\tau] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$, $b : [0,\tau] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funcions mesurables i $W = \{W_t, t \in [0,\tau]\}$ un procés de Wiener estàndard d-dimensional.
El teorema del suport ens dóna una caracterització del suport topològic de la probabilitat $P \circ X^{-1}$ a l'espai $\mathcal{C}([0,\tau]; \mathbb{R}^m)$, és a dir, una descripció del tancat més petit F de $\mathcal{C}([0,\tau]; \mathbb{R}^m)$, amb la topologia associada a la convergència uniforme, tal que $(P \circ X^{-1})(F) = 1$.
Sigui $\mathcal{H}_0$ el conjunt de les funcions regulars sobre $\mathbb{R}^d$. Per cada $h \in \mathcal{H}_0$ considerem la solució de l'equació diferencial

$$\Phi_t^h = X_0 + \int_0^t \left[\sigma(s, \Phi_s^h)\, dh_s + b(s, \Phi_s^h)\, ds\right], \quad t \in [0, \tau].$$

Suposant $\sigma \in \mathcal{C}_b^{1,2}$ i b uniformement Lipschitz en la segona variable i afitada, Stroock i Varadhan van provar que l'adherència del conjunt $\{\Phi^h, h \in \mathcal{H}_0\}$ en $\mathcal{C}\big([0,\tau]; \mathbb{R}^m\big)$ és el suport de X, $\mathrm{supp}(P \circ X^{-1})$.

Posteriorment, el resultat de Stroock i Varadhan ha estat estès a espais més generals, com per exemple a espais de Hölder o de Besov ([BA-G-L], [G-N-S], [Me]). Altres visions alternatives s'han presentat a [Gy-P], [Mac] o [M-S 1].

Anem a recordar una proposició que sintetitza un dels mètodes coneguts, basat en la utilització d'esquelets, per obtenir teoremes del suport. A partir d'aquest moment, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota l'espai canònic associat al procés de Wiener multiparamètric d-dimensional $W = \{W_z, z \in [0,\tau]^k\}$ (en el nostre cas k serà 2) i $\mathcal{H}$ l'espai de Cameron-Martin corresponent.

Proposició 1.3.2. *Sigui $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ un vector aleatori que pren valors en un espai de Banach separable $(\mathbb{B}, \| \quad \|)$ i sigui $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$.*
(a) Sigui $\xi_1 : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathbb{B}$ una funció mesurable tal que existeix una successió de variables aleatòries $H_n : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}_0$ tals que per tot $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P\{\|F(\omega) - \xi_1(H_n(\omega))\| > \epsilon\} = 0. \tag{1.3.1}$$

Aleshores,

$$\mathrm{supp}(P \circ F^{-1}) \subset \overline{\xi_1(\mathcal{H}_0)}. \tag{1.3.2}$$

(b) Sigui $\xi_2 : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathbb{B}$ una funció mesurable tal que per cada $h \in \mathcal{H}_0$ existeix una successió de transformacions mesurables $T_n^h : \Omega \longrightarrow \Omega$ tals que per qualsevol $n \geq 1$, $P \circ (T_n^h)^{-1}$ és absolutament contínua respecte P. Si

$$\limsup_n P\{\|F(T_n^h(\omega)) - \xi_2(h)\| < \epsilon\} > 0\,, \quad \epsilon > 0. \tag{1.3.3}$$

Aleshores,

$$\overline{\xi_2(\mathcal{H}_0)} \subset \mathrm{supp}(P \circ F^{-1}). \tag{1.3.4}$$

La notació $\overline{(\quad)}$ indica l'adherència en la norma $\| \; \|$.

Prova: [M-S 1] La condició (1.3.1) ens dóna la convergència en probabilitat de la successió $\{\xi_1(H_n), n \geq 1\}$ cap a F. El Teorema de Portmanteau implica

$$1 = \limsup_n \left[P \circ \left(\xi_1(H_n)\right)^{-1}\right] \overline{\left(\xi_1(\mathcal{H}_0)\right)} \leq \left(P \circ F^{-1}\right) \overline{\left(\xi_1(\mathcal{H}_0)\right)},$$

i per tant, per la definició del suport, (1.3.2) queda demostrat.
Suposem ara (1.3.3). Existirà un $n > 0$ tal que

$$P\{\|F(T_n^h(\omega)) - \xi_2(h)\| < \epsilon\} > 0.$$

Com que $P \circ (T_n^h)^{-1}$ és absolutament contínua respecte P, s'obté que

$$P\{\|F(\omega) - \xi_2(h)\| < \epsilon\} > 0$$

i per tant, $\xi_2(h) \in \mathrm{supp}(P \circ F^{-1})$. Aleshores, (1.3.4) queda provat, ja que $h \in \mathcal{H}_0$ és arbitrària i $\mathrm{supp}(P \circ F^{-1})$ és un conjunt tancat. ∎

Utilitzant aquest mètode, Millet i Sanz [M-S 2] han caracteritzat el suport de la llei de la solució d'una equació diferencial estocàstica hiperbòlica en derivades parcials. De la mateixa manera, el cas parabòlic ha estat estudiat per Bally, Millet i Sanz a [B-M-S].

Recordem també un lema tècnic que ens caldrà utilitzar.

Lema 1.3.3. [B-M-S] *Sigui* $\{V_n(z),\ z \in T\}$ *una successió de processos estocàstics a valors en* $\mathbb{R}$ *i* $p \in (1, \infty)$ *que satisfan*

(i) Per tot $z \in T$,

$$\lim_n E(\,|V_n(z)|^p) = 0\,.$$

(ii) Existeix $\gamma > 0$ *tal que per qualssevol* z *i* $\overline{z}$

$$\sup_n E\big(\,|V_n(z) - V_n(\overline{z})|^p\big) \leq C\ d(z, \overline{z})^{2+\gamma}\,.$$

Aleshores, per tot $\alpha \in (0,\ \frac{\gamma}{p})$ *i* $r \in [1, p)$,

$$\lim_n E(\,\|V_n\|_\alpha^r) = 0.$$

Resultats

Volem aplicar la Proposició 1.3.2 per tal d'establir la caracterització en norma Hölder del suport topològic de la llei del procés $\{X_z,\ z \in T\}$, solució de l'equació diferencial estocàstica hiperbòlica (1.1.1) quan els coeficients a_i, $i = 3, 4$ són del la forma $a_i(f, z) = a_i(f_z)$, $f \in \mathcal{C}$, $z \in T$ i X_0 és una variable aleatòria $\mathcal{F}_{0,0}$–mesurable.

Sota aquestes condicions, segons els resultats de la Secció 1.2, en realitat podem considerar l'equació

$$X_z = X_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) a_4(X_\eta) d\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) a_3(X_\eta) dW_\eta, \tag{1.3.5}$$

$z \in T$.

A més a més, al llarg d'aquesta secció considerem el conjunt d'hipòtesis (H_3) sobre els coeficients:

$(H_3 1)$ a_i, $i = 3, 4$ són funcions Lipschitz i afitades definides sobre $\mathbb{R}$. A més a més, a_3 és de classe $\mathcal{C}^3$ amb derivades afitades fins tercer ordre.

$(H_2 2)$ a_i, $i = 1, 2$ són derivables, afitades amb derivades afitades.

Com que les hipòtesis (H_3) són més fortes que les hipòtesis (H_2), l'equació (1.3.5) està ben definida i te solució única.

El cas $a_i \equiv 0$, $i = 1,2$ ha estat estudiat a [M-S 2]. En aquest cas la funció de Green corresponent és $\gamma_z(\eta) = \mathbf{1}_{R_z}(\eta)$. En el cas més general que estudiem aquí, les dificultats addicionals que apareixen es resolen a partir de l'estudi de la funció de Green i els resultats que sobre ella s'obtenen a la Secció 1.6.

Sigui $\mathcal{H}$ el conjunt de les funcions $h : T \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutament contínues amb derivada de quadrat integrable. És a dir, si $\dot{h}$ denota la derivada parcial creuada de segon ordre $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}$ aleshores, $h_z = \int_{R_z} \dot{h}_\eta d\eta$ i $\dot{h} \in L^2(T;\mathbb{R})$. $\mathcal{H}$ s'anomena l'espai de Cameron–Martin associat a W. Per cada $h \in \mathcal{H}$ sigui $\|h\|^2_{\mathcal{H}} = \int_T |\dot{h}_z|^2 dz$.
Fixat $h \in \mathcal{H}$, considerem l'equació diferencial

$$S^h_z = X_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big(a_4(S^h_\eta) + a_3(S^h_\eta)\,\dot{h}_\eta\Big)\,d\eta, \quad z \in T. \qquad (1.3.6)$$

L'objectiu fonamental d'aquesta secció és demostrar el teorema següent.

Teorema 1.3.4. *Suposem que els coeficients de l'equació (1.3.5) satisfan les hipòtesis* (H_3). *Aleshores, per qualsevol* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, *l'adherència del conjunt* $\{S^h, h \in \mathcal{H}\}$ *en la topologia de la norma* α*–Hölder és el* supp $(P \circ X^{-1})$.

Com en altres exemples d'equacions diferencials estocàstiques en derivades parcials (per exemple, [B-M-S] i [M-S 2]), el Teorema 1.3.4 serà la conseqüència d'un resultat d'aproximacions en norma Hölder per la solució de (1.3.5).

Introduïm ara la notació que utilitzarem en aquesta secció.
Donats dos punts $z = (s,t)$ i $z' = (s',t')$ de T, notarem per $z \otimes z'$ el punt (s,t').
Fixat un enter positiu n, considerem la partició diàdica de T,

$$\mathcal{P}^n = \{z_{i,j} = (i2^{-n}, j2^{-n}),\ 0 \le i,j \le 2^n - 1\}$$

i sigui $\Delta_{i,j} = \big(z_{i,j}, z_{i+1,j+1}\big], 0 \le i,j \le 2^n - 1$. Donat $z \in T$, considerem $z_n = z_{i-1,j-1}$ si $z \in \Delta_{i,j}$ amb $i.j \neq 0$ i $z_n = 0$, altrament. Direm també $\tilde{z}_n = z_{i,j}$ si $z \in \Delta_{i,j}$.
Sigui $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ i Δ un rectangle en T, aleshores $f(\Delta)$ denota l'increment de f en el sentit d'una funció de distribució.

Considerem la següent successió d'aproximacions pel drap brownià:

$$\omega^n(z) = 0, \quad \text{si} \quad z \in \Delta_{i,j} \quad \text{amb} \quad i.j = 0$$

i

$$\omega^n_z - \omega^n_{z\otimes\tilde{z}_n} - \omega^n_{\tilde{z}_n\otimes z} + \omega^n_{\tilde{z}_n} = 2^{2n} W(\Delta_{i-1,j-1})\Big(s - \frac{i}{2^n}\Big)\Big(t - \frac{j}{2^n}\Big),$$

si $z \in \Delta_{i,j}$ amb $i.j \neq 0$. Les transformacions $\omega \mapsto \omega^n$ defineixen una successió de variables aleatòries $\{H_n, n \geq 1\}$ a valors en $\mathcal{H}$. Observem

$$\dot{\omega}_z^n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad z \in \Delta_{i,j} \quad \text{amb} \quad i.j = 0\,, \\ 2^{2n} W(\Delta_{i-1,j-1}), & \text{si} \quad z \in \Delta_{i,j} \quad \text{amb} \quad i.j \neq 0\,. \end{cases}$$

A més a més, per $n \geq 1$ i $p \in [1, \infty)$

$$\sup_{z \in T} E\big(|\dot{\omega}_z^n|^{2p}\big) \leq C_p\, 2^{2np}\,. \tag{1.3.7}$$

Abans de res, donarem un resultat per aproximar la solució d'un tipus d'equació integral estocàstica més general que la definida a (1.3.5). Fixada $h \in \mathcal{H}$, considerem els processos adaptats $\{Y_z, z \in T\}$ i $\{Y_z^n, z \in T\}$ solucions de

$$\begin{aligned} Y_z^n = Y_0 &+ \int_{R_z} \gamma_z(\eta) F(Y_\eta^n) dW_\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) G(Y_\eta^n) \dot{h}_\eta d\eta \\ &+ \int_{R_z} \gamma_z(\eta) H(Y_\eta^n) \dot{\omega}_\eta^n d\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) B(Y_\eta^n) d\eta\,, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

i

$$\begin{aligned} Y_z = Y_0 &+ \int_{R_z} \gamma_z(\eta)[F + H](Y_\eta^n) dW_\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) G(Y_\eta^n) \dot{h}_\eta d\eta \\ &+ \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big(B(Y_\eta) + H'(Y_\eta)F(Y_\eta) + \frac{1}{4} H'(Y_\eta)H(Y_\eta)\Big)\gamma_z(\eta) d\eta \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

on Y_0 és una variable aleatòria $\mathcal{F}_{0,0}$–adaptada i els coeficients satisfan el conjunt d'hipòtesis (H_3') següent

$(H_3'1)$ F, G, H i B són funcions Lipschitz i afitades definides en $\mathbb{R}$,
$(H_3'2)$ F és de classe $\mathcal{C}^1$ amb derivada afitada i H és de classe $\mathcal{C}^3$ amb derivades afitades fins les de tercer ordre.

L'existència i la unicitat de les solucions de (1.3.8) i (1.3.9) sota les hipòtesis (H_3') es poden demostrar fàcilment utilitzant aproximacions de Picard i fent uns càlculs anàlegs als del Teorema 1.2.1.

El primer objectiu que tenim és demostrar un resultat d'aproximacions que ve donat pel teorema següent.

Teorema 1.3.5. *Per qualssevol $p \in [1, \infty)$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$,*

$$\lim_{n \to \infty} E\big(\|Y_z^n - Y_z\|_\alpha^p\big) = 0,$$

on $\|\ \ \|_\alpha$ denota la norma α-Hölder a l'espai de les funcions a valors reals definides sobre T.

La demostració d'aquest teorema serà una conseqüència immediata del Lema tècnic 1.3.3 i de les Proposicions 1.3.6 i 1.3.7.

Proposició 1.3.6. *Per qualssevol $z, z' \in T$, $p \in [1, \infty)$*

$$\sup_n E\big(|Y_z^n - Y_{z'}^n|^{2p}\big) + E\big(|Y_z - Y_{z'}|^{2p}\big) \le C_p \; d(z, z')^p \,, \tag{1.3.10}$$

on d és la distància euclidiana en T.

Proposició 1.3.7. *Per qualssevol $z \in T$, $p \in [1, \infty)$ i $n \ge 0$,*

$$E\big(|Y_z^n - Y_z|^{2p}\big) \le C_p \, 2^{-np} \,. \tag{1.3.11}$$

Les demostracions de les Proposicions 1.3.6 i 1.3.7 estan basades en els següents lemes, corol.laris i proposicions.

Lema 1.3.8. *Sigui*

$$\Big\{A_{i,j} = \sum_{\substack{0 \le k \le i-1 \\ 0 \le \ell \le j-1}} a_{k,\ell}\, b_{k,\ell}, \; i = 0, \dots, i_0 - 1; \; j = 0, \dots, j_0 - 1\Big\}$$

un procés estocàstic i $\{\mathcal{F}_{i,j}, \; i, j \ge 1\}$ una filtració que satisfà les condicions usuals. Suposem que $a_{k,\ell}$ és una variable aleatòria $\mathcal{F}_{k,\ell+2} \vee \mathcal{F}_{k+2,\ell}$-mesurable i que $b_{k,\ell}$ és una variable aleatòria centrada $\mathcal{F}_{k+2,l+2}$-mesurable independent de $\mathcal{F}^*_{k,\ell} := \mathcal{F}_{k,j_0} \vee \mathcal{F}_{i_0,\ell}$, $k = 0, \dots, i_0 - 2$, $\ell = 0, \dots, j_0 - 2$. Aleshores, per tot $p \in [1, \infty)$

$$E\big(|A_{i,j}|^{2p}\big) \le C_p (i.j)^{p-1} \sum_{\substack{0 \le k \le i-1 \\ 0 \le \ell \le j-1}} E\big(|a_{k,\ell}|^{2p}\big) E\big(|b_{k,\ell}|^{2p}\big) \,. \tag{1.3.12}$$

Prova. Siguin $I = \{0, 1, \dots, \; i - 1\}$, $J = \{0, 1, \dots, \; j - 1\}$. Podem considerar la descomposició

$$A_{i,j} = \sum_{\rho=1}^{4} A_{i,j}^{(\rho)} \,,$$

on

$$A_{i,j}^{(1)} = \sum_{\substack{(k,\ell) \in I \times J \\ k = \dot{2},\, \ell = \dot{2}}} a_{k,\ell}\, b_{k,\ell} \,, \qquad A_{i,j}^{(2)} = \sum_{\substack{(k,\ell) \in I \times J \\ k = \dot{2},\, \ell = \dot{2}+1}} a_{k,\ell}\, b_{k,\ell} \,,$$

$$A_{i,j}^{(3)} = \sum_{\substack{(k,\ell) \in I \times J \\ k = \dot{2}+1,\, \ell = \dot{2}}} a_{k,\ell}\, b_{k,\ell} \,, \qquad A_{i,j}^{(4)} = \sum_{\substack{(k,\ell) \in I \times J \\ k = \dot{2}+1,\, \ell = \dot{2}+1}} a_{k,\ell}\, b_{k,\ell} \,.$$

Establirem (1.3.12) per cada $A_{i,j}^{(\rho)}$, $\rho = 1, \dots, 4$. Com que els raonaments que utilitzarem pels quatre termes seran semblants donarem només els detalls per $\rho = 3$. En definitiva, provarem que

$$M_{i,j}^{(3)} = \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} a_{2k+1,2\ell}\, b_{2k+1,2\ell}\,,$$

satisfà (1.3.12) per tota parella d'enters positius (i,j) amb $2i-1 \le i_0 - 2$ i $2j-2 \le j_0 - 2$. Sigui $\mathcal{G}_{i,j} = \mathcal{F}_{2i+1,2j}$. El procés $\{M_{i,j}^{(3)},\ \mathcal{G}_{i,j},\ (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 2i-1 \le i_0-2,\ 2j-2 \le j_0-2\}$ és una martingala discreta a dos paràmetres.
Veiem-ho. Clarament, $M_{i,j}^{(3)}$ és $\mathcal{G}_{i,j}$–mesurable. A més a més,

$$\begin{aligned}
E\left(M_{i+1,j}^{(3)} - M_{i,j}^{(3)}/\mathcal{G}_{i,j}\right) &= E\left(\sum_{\ell=0}^{j-1} a_{2i+1,2\ell}\, b_{2i+1,2\ell}/\mathcal{F}_{2i+1,2j}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{j-1} E\left(E\left(a_{2i+1,2\ell}\, b_{2i+1,2\ell}/\mathcal{F}^*_{2i+1,2\ell}\right)/\mathcal{F}_{2i+1,2j}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{j-1} E\left(a_{2i+1,2\ell}\, E\left(b_{2i+1,2\ell}\right)/\mathcal{F}_{2i+1,2j}\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

De manera anàloga podem veure que

$$E\left(M_{i,j+1}^{(3)} - M_{i,j}^{(3)}/\mathcal{G}_{i,j}\right) = 0\,,$$

i establim així la propietat de martingala.
Al tractar-se d'una martingala, podem aplicar la desigualtat de Burkholder. Utilitzant que $a_{k,\ell}$ i $b_{k,\ell}$ són independents i la desigualtat de Hölder obtenim

$$E\left(|M_{i,j}^{(3)}|^{2p}\right) \le C_p\,(i.j)^{p-1} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} E\left(|a_{k,\ell}|^{2p}\right) E\left(|b_{k,\ell}|^{2p}\right).$$

que és el resultat que voliem provar. ∎

Sigui $\mathcal{F}^*_\eta := \mathcal{F}_{\eta_n + (0,\frac{2}{2^n})} \vee \mathcal{F}_{\eta_n + (\frac{2}{2^n},0)}$. El Lema 1.3.8. ens serà útil per obtenir majoracions de les normes L^p d'integrals respecte de $\{\omega_z^n, z \in T\}$ de processos $\mathcal{F}^*_\eta$–adaptats. Els dos corol.laris següents són dues formulacions abstractes de situacions que trobarem diverses vegades en aquesta secció.

Corol.lari 1.3.9. *Fixem $z \in T$. Sigui g una funció determinista definida en T i $\{F(\eta), \eta \in T\}$ un procés $\mathcal{F}^*_\eta$ –adaptat. Aleshores, per qualsevol $p \in [1,\infty)$*

$$E\Big(\Big|\int_{R_z} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta\Big|^{2p}\Big) \le C_p \sup_{\eta \ge z_{1,1}} |g(\eta)|^{2p} \sup_{\eta \ge z_{1,1}} E\big(|F(\eta)|^{2p}\big).$$

Prova. Diem $M_z = \int_{R_z} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}_\eta^n d\eta$. És evident que

$$M_z = \sum_{\substack{0\le\alpha\le 2^n-1\\ 0\le\beta\le 2^n-1}} 2^{2n}W(\Delta_{\alpha,\beta}) \int_{\Delta_{\alpha+1,\beta+1}\cap R_z} g(\eta)F(\eta)d\eta\,.$$

Fixat n, sigui

$$a^n_{\alpha,\beta} = 2^{2n}\int_{\Delta_{\alpha+1,\beta+1}\cap R_z} g(\eta)F(\eta)d\eta.$$

Aleshores, el Lema 1.3.8 implica

$$\begin{aligned} E\big(|M_z|^{2p}\big) &\le C_p\, 2^{2n(p-1)} \sum_{\substack{0\le\alpha\le 2^n-1\\ 0\le\beta\le 2^n-1}} E\big(|W(\Delta_{\alpha,\beta})|^{2p}\big)E\Big(\Big|2^{2n}\int_{\Delta_{\alpha+1,\beta+1}\cap R_z} g(\eta)F(\eta)d\eta\Big|^{2p}\Big)\\ &\le C_p \sup_{\eta\ge z_{1,1}} |g(\eta)|^{2p} \sup_{\eta\ge z_{1,1}} E\left(|F(\eta)|^{2p}\right). \end{aligned}$$

■

Corol.lari 1.3.10. *Fixats $z, z' \in T$, $z' \ge z_{1,1}$, $z' = (s,t)$, $z = (s+b,t)$, $b > 0$. Sigui g una funció determinista definida en T i $\{F(\eta), \eta \in T\}$ un procés $\mathcal{F}^*_\eta$ –adaptat. Aleshores, per qualsevol $p \in [1,\infty)$*

$$E\Big(\Big|\int_{R_z - R_{z'}} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta\Big|^{2p}\Big) \le C_p\, b^p \sup_{\eta\ge z_{1,1}} |g(\eta)|^{2p} \sup_{\eta\ge z_{1,1}} E\big(|F(\eta)|^{2p}\big), \tag{1.3.13}$$

Prova. Suposem que $z' \in \Delta_{i_0,j_0}$, $z \in \Delta_{i_1,j_0}$, amb $i_1 > i_0 + 1$. Els casos $i_1 = i_0 + 1$ i $i_1 = i_0$ es poden tractar de manera semblant. Direm $M^n(z,z') = \int_{R_z - R_{z'}} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta$. Clarament,

$$M^n(z,z') = \sum_{k=1}^{3} M^n_k(z,z'),$$

on

$$\begin{aligned} M^n_1(z,z') &= \int_{R_{(i_0+1)2^{-n},t} - R_{z'}} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta,\\ M^n_2(z,z') &= \int_{R_{i_1 2^{-n},t} - R_{(i_0+1)2^{-n},t}} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta,\\ M^n_3(z,z') &= \int_{R_z - R_{i_1 2^{-n},t}} g(\eta)F(\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta. \end{aligned}$$

El Lema 1.3.8 implica

$$E\big(|M_1^n(z,z')|^{2p}\big) = E\Big(\Big| \sum_{1\le\beta\le 2^{n-1}} 2^{2n} W(\Delta_{i_0-1,\beta-1})$$

$$\int_{\Delta_{i_0,\beta}\cap(R_{(i_0+1)2^{-n},t}-R_{z'})} g(\eta)F(\eta)d\eta\Big|^{2p}\Big)$$

$$\le C_p\, 2^{n(p-1)} \sum_{1\le\beta\le 2^{n-1}} 2^{4np} E\big(|W(\Delta_{i_0-1,\beta-1})|^{2p}\big)$$

$$E\Big(\Big|\int_{\Delta_{i_0,\beta}\cap(R_{(i_0+1)2^{-n},t}-R_{z'})} g(\eta)F(\eta)d\eta\Big|^{2p}\Big) \le C_p b^p \sup_{\eta\ge z_{1,1}} |g(\eta)|^{2p} \sup_{\eta\ge z_{1,1}} E\big(|F(\eta)|^{2p}\big).$$

De manera anàloga,

$$E\big(|M_2^n(z,z')|^{2p}\big) = E\Big(\Big| \sum_{\substack{i_0+1\le\alpha\le i_1\\ 0\le\beta\le 2^n-1}} 2^{2n} W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})$$

$$\int_{\Delta_{\alpha,\beta}\cap(R_{i_1 2^{-n},t}-R_{(i_0+1)2^{-n},t})} g(\eta)F(\eta)d\eta\Big|^{2p}\Big)$$

$$\le C_p\big[(i_1-(i_0+1))2^n\big]^{p-1} \sum_{\substack{i_0+1\le\alpha\le i_1\\ 0\le\beta\le 2^n-1}} E\big(|W(\Delta_{\alpha,\beta})|^{2p}\big) \sup_{\eta\ge z_{1,1}} |g(\eta)|^{2p} \sup_{\eta\ge z_{1,1}} E\big(|F(\eta)|^{2p}\big)$$

$$\le C_p b^p \sup_{\eta\ge z_{1,1}} |g(\eta)|^{2p} \sup_{\eta\ge z_{1,1}} E\big(|F(\eta)|^{2p}\big).$$

Podem obtenir la mateixa fita per $E\big(|M_3^n(z,z')|^{2p}\big)$. D'aquesta manera (1.3.13) queda provat.
Observem que podem intercanviar els papers de les coordenades s i t. ∎

Lema 1.3.11. *Per qualssevol* $p\in[1,\infty)$, $n\ge 0$,

$$\sup_{z\ge z_{1,1}} E\big[|Y^n(z_n,z]|^{2p}\big] \le C_p\, 2^{-2np}. \tag{1.3.14}$$

Prova. Per $z > z_{1,1}$, descomposem el rectangle R_z en quatre rectangles,

$$R_z = \bigcup_{j=1}^4 \tilde R_j(z),$$

amb

$$\tilde R_1(z) = R_{z_n}, \quad \tilde R_2(z) = \big(z_n\otimes 0,\ z\otimes z_n\big],$$

$$\tilde R_3(z) = \big(z_n, z\big], \quad \tilde R_4(z) = \big(0\otimes z_n,\ z_n\otimes z\big].$$

Definim

$$h_z^{(1)}(\eta) = \gamma_z(\eta) - \gamma_{z\otimes z_n}(\eta) - \gamma_{z_n\otimes z}(\eta) + \gamma_{z_n}(\eta),$$
$$h_z^{(2)}(\eta) = \gamma_z(\eta) - \gamma_{z\otimes z_n}(\eta),$$
$$h_z^{(3)}(\eta) = \gamma_z(\eta),$$
$$h_z^{(4)}(\eta) = \gamma_z(\eta) - \gamma_{z_n\otimes z}(\eta).$$

La Proposició 1.6.3 implica

$$\sup_\eta \left|h_z^{(1)}(\eta)\right| \leq C\ 2^{-2n} \qquad \text{i} \qquad \sup_\eta \left|h_z^{(2)}(\eta)\right| + \sup_\eta \left|h_z^{(4)}(\eta)\right| \leq C\ 2^{-n},$$

(veieu (1.6.9) i (1.6.10), respectivament). Aleshores, podem escriure

$$Y^n(z_n, z] = Y_z^n - Y_{z\otimes z_n}^n - Y_{z_n\otimes z}^n + Y_{z_n}^n = \sum_{i=1}^4 \left(T_{i,F}^n(z) + T_{i,G}^n(z) + T_{i,H}^n(z) + T_{i,B}^n(z)\right), \quad (1.3.15)$$

on

$$T_{i,F}^n(z) = \int_{\tilde{R}_i(z)} h_z^{(i)}(\eta)\ F(Y_\eta^n) dW_\eta,$$
$$T_{i,G}^n(z) = \int_{\tilde{R}_i(z)} h_z^{(i)}(\eta)\ G(Y_\eta^n)\, \dot{h}_\eta d\eta,$$
$$T_{i,H}^n(z) = \int_{\tilde{R}_i(z)} h_z^{(i)}(\eta)\ H(Y_\eta^n)\, \dot{\omega}_\eta d\eta,$$
$$T_{i,B}^n(z) = \int_{\tilde{R}_i(z)} h_z^{(i)}(\eta)\ B(Y_\eta^n)\, d\eta.$$

Anem ara a comprovar que

$$E\left(|T_{i,F}^n(z)|^{2p} + |T_{i,G}^n(z)|^{2p} + |T_{i,H}^n(z)|^{2p} + |T_{i,B}^n(z)|^{2p}\right)$$
$$\leq C_p(1 + \|h\|_{\mathcal{H}}^{2p})\, 2^{-2np}, \quad (1.3.16)$$

per $i = 1, \cdots, 4$. Recordem que $\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_T |\dot{h}_z|^2\, dz$.
Les desigualtats de Burkholder i de Hölder impliquen,

$$E\left(|T_{1,F}^n(z)|^{2p}\right) \leq C_p\, E\left(\Big| \int_{\tilde{R}_1(z)} |h_z^{(1)}(\eta)|^2 F^2(Y_\eta^n) d\eta\Big|^p\right) \leq C_p\ 2^{-4np}.$$

Per la desigualtat de Hölder obtenim

$$E\left(|T_{2,G}^n(z)|^{2p}\right) \leq E\left(\Big|\Big(\int_{\tilde{R}_2(z)} |h_z^{(2)}(\eta)|^2 G^2(Y_\eta^n) d\eta\Big)\Big(\int_T |\dot{h}_\eta|^2\Big)\Big|^p\right)$$
$$\leq C_p\, \|h\|_{\mathcal{H}}^{2p}\ 2^{-3np}$$

i

$$E\left(|T^n_{4,B}(z)|^{2p}\right) \le C_p\, E\left(2^{-n(2p-1)} \int_{\tilde{R}_4(z)} |h^{(4)}_z(\eta)|^{2p} B^{2p}(Y^n_\eta) d\eta\right)$$
$$\le C_p\, 2^{-4np}\,.$$

Aplicant les desigualtats de Burkholder i de Hölder i utilitzant l'estimació (1.3.7), obtenim

$$E\left(|T^n_{3,H}(z)|^{2p}\right) \le C_p\, E\left(2^{-2n(2p-1)} \int_{\tilde{R}_3(z)} |h^{(3)}_z(\eta)|^{2p} H^{2p}(Y^n_\eta)|\dot{\omega}^n_\eta|^{2p} d\eta\right)$$
$$\le C_p\, 2^{-2n(2p-1)} \int_{\tilde{R}_3(z)} E\left(|\dot{\omega}^n_\eta|^{2p}\right) d\eta \le C_p\, 2^{-2np}\,.$$

De manera anàloga a aquests termes, és fàcil veure que la resta d'ells, és a dir, tots els del tipus $T^n_{i,F}, T^n_{i,G}, T^n_{i,H}$ i $T^n_{i,B}$ $i = 1, \ldots, 4$ es poden afitar per $C_p\big(1 + \|h\|^{2p}_{\mathcal{H}}\big)\, 2^{-2np}$. Aleshores, la identitat (1.3.15) conjuntament amb (1.3.16) impliquen (1.3.14). ∎

Podem donar ara ja les demostracions de les Proposicions 1.3.6 i 1.3.7.

Prova de la Proposició 1.3.6. Suposem primer $z' = (s,t)$, $z = (s+b,t)$. Considerem la descomposició

$$Y^n_z - Y^n_{z'} = \sum_{i=1}^4 M_i(z,z'),$$

on

$$M_1(z,z') = \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta) F(Y^n_\eta) dW_\eta + \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta) G(Y^n_\eta)\dot{h}_\eta d\eta$$
$$+ \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta) B(Y^n_\eta) d\eta,$$
$$M_2(z,z') = \int_{R_{z'}} (\gamma_z(\eta) - \gamma_{z'}(\eta)) F(Y^n_\eta) dW_\eta + \int_{R_{z'}} (\gamma_z(\eta) - \gamma_{z'}(\eta)) G(Y^n_\eta)\dot{h}_\eta d\eta$$
$$+ \int_{R_{z'}} (\gamma_z(\eta) - \gamma_{z'}(\eta)) B(Y^n_\eta) d\eta,$$
$$M_3(z,z') = \int_{R_{z'}} (\gamma_z(\eta) - \gamma_{z'}(\eta)) H(Y^n_\eta)\dot{\omega}^n_\eta d\eta,$$
$$M_4(z,z') = \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta) H(Y^n_\eta)\dot{\omega}^n_\eta\, d\eta.$$

Utilitzant les desigualtats de Burkholder i Hölder i la propietat (1.6.7) de la funció gamma, podem obtenir les estimacions següents:

$$E(|M_1(z,z')|^{2p}) \le C_p \Big\{ E\Big(\Big| \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma^2_z(\eta) F^2(Y^n_\eta) d\eta \Big|^p\Big)$$
$$+ E\Big(\Big(\int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma^2_z(\eta) G^2(Y^n_\eta) d\eta\Big)^p \|h\|^{2p}_{\mathcal{H}}\Big) + E\Big(\Big| \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta) B(Y^n_\eta) d\eta \Big|^{2p}\Big) \Big\} \le C_p b^p$$

i de manera anàloga, però utilitzant ara la propietat (1.6.9) de la funció de Green,

$$E(|M_2(z,z')|^{2p}) \le C_p\, b^{2p}.$$

La fórmula de Taylor implica,

$$\begin{aligned} H(Y^n_\eta) &= H(Y^n_\eta) - H\big(Y^n_{\eta_n\otimes\eta} + Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}\big) + H\big(Y^n_{\eta_n\otimes\eta} + Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}\big) \quad (1.3.17)\\ &= H'\big(Y^n_{\eta,\eta_n}\big)\big(Y^n_\eta - Y^n_{\eta_n\otimes\eta} - Y^n_{\eta\otimes\eta_n} + Y^n_{\eta_n}\big) + H\big(Y^n_{\eta_n\otimes\eta} + Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}\big)\end{aligned}$$

on Y^n_{η,η_n} indica un punt que depèn de Y^η_n i $Y^n_{\eta_n\otimes\eta} + Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}$. Aleshores, $M_3(z,z') = M_{3,1}(z,z') + M_{3,2}(z,z')$, amb

$$M_{3,1}(z,z') = \int_{R_{z'}} \big(\gamma_z(\eta) - \gamma_{z'}(\eta)\big)H'\big(Y^n_{\eta,\eta_n}\big)Y^n(\eta_n,\eta]\dot\omega^n_\eta d\eta,$$

$$M_{3,2}(z,z') = \int_{R_{z'}} \big(\gamma_z(\eta) - \gamma_{z'}(\eta)\big)H\big(Y^n_{\eta_n\otimes\eta} + Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}\big)\dot\omega^n_\eta d\eta.$$

El Lema 1.3.11, (1.3.7) i (1.6.9) impliquen

$$E\big(|M_{3,1}(z,z')|^{2p}\big) \le C_p\, b^{2p}\, 2^{2np} \sup_{\eta\ge z_{1,1}} E\left(|Y^n(\eta_n,\eta]|^{4p}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_p\, b^{2p}.$$

Per altra banda, el Corol.lari 1.3.9 implica

$$E\big(|M_{3,2}(z,z')|^{2p}\big) \le C_p\, b^{2p},$$

de manera que tenim

$$E\big(|M_3(z,z')|^{2p}\big) \le C_p\; b^{2p}.$$

Finalment, utilitzem de nou (1.3.17) i escrivim $M_4(z,z') = M_{4,1}(z,z') + M_{4,2}(z,z')$, on

$$M_{4,1}(z,z') = \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta,\underline{\eta}_n})Y^n(\eta_n,\eta]\dot\omega^n_\eta d\eta,$$

$$M_{4,2}(z,z') = \int_{(z'\otimes 0,z]} \gamma_z(\eta)H\big(Y^n_{\eta_n\otimes\eta} + Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}\big)\dot\omega^n_\eta d\eta.$$

Aleshores, com abans, és fàcil veure

$$E\big(|M_{4,1}(z,z')|^{2p}\big) \le C_p\, b^{2p}$$

mentre que el Corol.lari 1.3.10 implica

$$E\big(|M_{4,2}(z,z')|^{2p}\big) \le C_p\, b^{p}.$$

I així, tenim

$$E\left(|M_4(z,z')|^{2p}\right) \le C_p\; b^{p}.$$

D'aquesta manera hem obtingut

$$E\left(|Y^n_{s+b,t} - Y^n_{s,t}|^{2p}\right) \le C_p\, b^p\,.$$

Com que el paper que juguen les dues variables és simètric, és clar que

$$E\left(|Y^n_{s,t+b} - Y^n_{s,t}|^{2p}\right) \le C_p\, b^p\,.$$

I per tant,

$$\sup_n E\big(|Y^n_z - Y^n_{z'}|^{2p}\big) \le C_p\, d(z,z')^p.$$

Observem que l'equació que defineix Y_z es pot considerar un cas particular de la que defineix Y^n_z. Per tant, (1.3.10) queda també provat. ■

Prova de la Proposició 1.3.7. Utilitzarem la notació següent

$$\psi(x) := H'(x)F(x) + \frac{1}{4}H'(x)H(x)\,.$$

Observem que ψ és Lipschitz.
Siguin

$$\begin{aligned}
I^n_1(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(F(Y^n_\eta) - F(Y_\eta) + H(Y^n_\eta) - H(Y_\eta)\big)dW_\eta,\\
I^n_2(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(G(Y^n_\eta) - G(Y_\eta)\big)\dot{h}_\eta\, d\eta\,,\\
I^n_3(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(B(Y^n_\eta) - B(Y_\eta) + \psi(Y^n_\eta) - \psi(Y_\eta)\big)d\eta,\\
I^n_4(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)H(Y^n_\eta)\dot{\omega}^n_\eta d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)H(Y^n_\eta)dW_\eta \; - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\psi(Y^n_\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$Y^n_z - Y_z = \sum_{i=1}^{4} I^n_i(z)\,.$$

Les desigualtats de Burkholder i Hölder impliquen

$$E(\,|I^n_i(z)|^{2p}) \le C_p \int_{R_z} E(\,|Y^n_\eta - Y_\eta|^{2p})\, d\eta\,,\; i = 1,3,$$

$$E(\,|I^n_2(z)|^{2p}) \le C_p\,\|h\|^{2p}_{\mathcal{H}} \int_{R_z} E(\,|Y^n_\eta - Y_\eta|^{2p})\, d\eta\,.$$

Tenim, per tant

$$E(\,|Y^n_z - Y_z|^{2p}) \le C_p E(|I^n_4(z)|^{2p}) + C_p(1 + \|h\|^{2p}_{\mathcal{H}}) \int_{R_z} E(\,|Y^n_\eta - Y^n_\eta|^{2p})\, d\eta.$$

I utilitzant un lema tipus Gronwall,

$$E(\,|Y_z^n - Y_z|^{2p}) \le C_p \sup_{z\in T} E(|I_4^n(z)|^{2p}).$$

A la Proposició 1.3.15 establirem la propietat següent

$$\sup_{z\in T} E\big(|I_4^n(z)|^{2p}\big) \le C_p 2^{-np}, \tag{1.3.18}$$

de manera que s'acaba així la prova d'aquesta proposició. ∎

La propietat (1.3.18) és la clau pel resultat d'aproximacions que cerquem. La demostració d'aquest resultat és bastant llarga i tècnica, de manera que presentem separadament en els tres lemes següents algunes estimacions auxiliars.

Lema 1.3.12. *Per qualssevol $z \in T$, $p \in [1,\infty)$, $n \ge 1$,*

$$\begin{aligned} E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y_{\eta_n}^n)\Big(F(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} dW_\xi + H(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} \dot\omega_\xi^n\, d\xi\Big)\dot\omega_\eta^n\, d\eta \\ - \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n)\psi(Y_{\eta_n}^n) d\eta\Big|^{2p}\Big) \le C_p 2^{-2np}. \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Prova. Suposem que $z \in \Delta_{i_0,j_0}$. Considerem

$$\begin{aligned} T_1^{(n)}(z) &= \int_{R_z - R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n) H'(Y_{\eta_n}^n)\Big(F(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} dW_\xi + H(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} \dot\omega_\xi^n d\xi\Big)\dot\omega_\eta^n d\eta\,, \\ T_2^{(n)}(z) &= \int_{R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n) H'(Y_{\eta_n}^n)\Big(F(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} dW_\xi + H(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} \dot\omega_\xi^n d\xi\Big)\dot\omega_\eta^n d\eta \\ &\quad - \int_{R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n)\psi(Y_{\eta_n}^n)\, d\eta, \\ T_3^{(n)}(z) &= -\int_{R_z - R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n)\psi(Y_{\eta_n}^n)\, d\eta\,. \end{aligned}$$

Aleshores

$$\begin{aligned} &\int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y_{\eta_n}^n)\Big(F(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} dW_\xi + H(Y_{\eta_n}^n)\int_{(\eta_n,\eta]} \dot\omega_\xi^n\, d\xi\Big)\,\dot\omega_\eta^n\, d\eta \\ &\qquad - \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n)\,\psi(Y_{\eta_n}^n)\, d\eta = \sum_{i=1}^{3} T_i^{(n)}(z). \end{aligned}$$

És evident que,

$$E\,(|T_3^{(n)}(z)|^{2p}) \le C_p\, 2^{-2np}.$$

Per les desigualtats de Hölder i de Schwarz obtenim

$$E(|T_1^{(n)}(z)|^{2p}) \leq C_p\, 2^{-2np}\, 2^{2np} \sup_{\eta \geq z_{1,1}} E\Big(\Big|F(Y^n_{\eta_n}) \int_{(\eta_n,\eta]} dW_\xi + H(Y^n_{\eta_n}) \int_{(\eta_n,\eta]} \dot\omega^n_\xi d\xi\Big|^{4p}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C_p\, 2^{-2np}.$$

I com que el costat esquerra de la desigualtat (1.3.19) està afitat per

$$C_p \sum_{i=1}^{3} E(|T_i^{(n)}(z)|^{2p}),$$

només ens cal demostrar

$$E\left(|T_2^{(n)}(z)|^{2p}\right) \leq C_p\, 2^{-2np}. \tag{1.3.20}$$

Per cada $\eta \in \Delta_{\alpha,\beta}$ amb $\alpha.\beta \neq 0$ descomposem el rectangle $(\eta_n, \eta]$ en quatre rectangles, de la manera següent

$$(\eta_n, \eta] = \bigcup_{j=1}^{4} R_j(\eta),$$

amb

$$R_1(\eta) = \Delta_{\alpha-1,\beta-1}, \quad R_2(\eta) = \left(z_{\alpha,\beta-1},\, \eta \otimes z_{\alpha,\beta}\right],$$
$$R_3(\eta) = \left(z_{\alpha,\beta}, \eta\right], \quad R_4(\eta) = \left(z_{\alpha-1,\beta},\; z_{\alpha,\beta} \otimes \eta\right].$$

Per $z = z_{i_0,j_0}$, $z' \in \Delta_{i_0,j_0}$ i $r = 1, \ldots, 4$ definim

$$U_r^n = \int_{R_z} \gamma_{z'}(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) F(Y^n_{\eta_n}) \Big(\int_{R_r(\eta)} dW_\xi\Big)\, \dot\omega^n_\eta\, d\eta,$$
$$V_r^n = \int_{R_z} \gamma_{z'}(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) H(Y^n_{\eta_n}) \Big(\int_{R_r(\eta)} \dot\omega^n_\xi\, d\xi\Big)\, \dot\omega^n_\eta\, d\eta.$$

Aleshores, la demostració de (1.3.20) es redueix a comprovar les desigualtats següents

$$E\left(\Big|U_1^n - \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) F(Y^n_{\eta_n})\, d\eta\Big|^{2p}\right) \leq C_p\, 2^{-2np} \tag{1.3.21}$$

$$E\left(\Big|V_3^n - \frac{1}{4}\int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) H(Y^n_{\eta_n})\, d\eta\Big|^{2p}\right) \leq C_p\, 2^{-2np} \tag{1.3.22}$$

$$E\left(|U_r^n|^{2p}\right) \leq C_p\, 2^{-2np} \quad \text{per} \quad r = 2,3,4, \tag{1.3.23}$$

$$E\left(|V_r^n|^{2p}\right) \leq C_p\, 2^{-2np} \quad \text{per} \quad r = 1,2,4. \tag{1.3.24}$$

Anem a veure primer (1.3.21). Tenim

$$U_1^n = \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq i_0 - 1 \\ 1 \leq \beta \leq j_0 - 1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) F(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1}) W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})$$

i que

$$\int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) F(Y^n_{\eta_n}) d\eta = \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) F(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) 2^{-2n}$$
$$+ \gamma_z(0) H'(Y^n_0) F(Y^n_0) 2^{-2n}(i_0 + j_0 - 1) \,.$$

Aplicant la desigualtat de Burkholder podem afitar el costat esquerra de la desigualtat (1.3.21) per

$$C_p\, E\Big(\Big| \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) F(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) \big(|W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})|^2 - 2^{-2n}\big) \Big|^{2p} \Big)$$
$$+ C_p\, 2^{-2np} \le C_p \Big\{ E\Big(\sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} \big| |W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})|^2 - 2^{-2n} \big|^2 \Big)^p + 2^{-2np} \Big\}$$
$$\le C_p \Big\{ 2^{2n(p-1)} \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} \big\{ E\big(\big| |W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})|^{4p} + 2^{-4np} \big| \big) + 2^{-2np} \big\} \Big\} \le C_p\, 2^{-2np}.$$

La prova de (1.3.22) és semblant. En aquest cas,

$$V_3^n = \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1}) W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})$$
$$\times 2^{4n} \int_{\Delta_{\alpha,\beta}} \Big(\int_{(z_{\alpha,\beta},\eta]} d\xi \Big) d\eta \,.$$

i utilitzant els mateixos arguments que abans la fita que obtenim és

$$C_p\, E\Big(\Big| \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} \frac{1}{4}\, \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) \big(|W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})|^2 - 2^{-2n}\big) \Big|^{2p} \Big)$$
$$+ C_p\, 2^{-2np} \le C_p\, 2^{-2np} \,.$$

Passarem ara a demostrar (1.3.23). El raonament és el mateix pels diferents valors de r, de manera que només donarem els càlculs explícits per $r = 2$.

$$U_2^n = \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le i_0-1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) F(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}) W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})\, 2^{2n}$$
$$\times \int_{\Delta_{\alpha,\beta}} W(R_2(\eta)) d\eta$$

i per tant, Burkholder implica

$$E(|U_2^n|^{2p}) \le C_p\, 2^{2n(p-1)} \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le i_0-1}} 2^{4np} E(|W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})|^{2p}) E\Big(\Big| \int_{\Delta_{\alpha,\beta}} W(R_2(\eta)) d\eta \Big|^{2p} \Big)$$
$$\le C_p\, 2^{-2np}.$$

Per acabar comprovem (1.3.24). Com abans, farem només el cas $r = 2$,

$$V_2^n = \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le i_0-1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1})H'(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}})H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}})W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})W(\Delta_{\alpha-1,\beta-2})$$
$$\times 2^{4n}\int_{\Delta_{\alpha,\beta}}\int_{R_2(\eta)} d\xi\, d\eta\,.$$

I com en el cas anterior

$$E\big(|V_2^n|^{2p}\big) \le C_p\, 2^{2n(p-1)} \sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-1\\ 1\le\beta\le j_0-1}} 2^{8np}\Big(\int_{\Delta_{\alpha,\beta}}\int_{R_2(\eta)} d\xi\, d\eta\Big)^{2p}$$
$$\times E\big(|W(\Delta_{\alpha-1,\beta-2})|^{2p}\big)E\big(|W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1})|^{2p}\big) \le C_p\, 2^{-2np}\,.$$

Així, (1.3.20) queda demostrat i per tant també (1.3.19) és cert. ∎

Lema 1.3.13. *Per qualssevol $z \in T$, $p \in [1,\infty)$, $n \ge 1$,*

$$E\Big(\Big|\int_{R_z}\gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})Y^n(\eta_n,\eta]\dot\omega^n_\eta\, d\eta - \int_{R_z}\gamma_z(\eta)\psi(Y^n_\eta)d\eta\,\Big|^{2p}\Big) \le C_p\, 2^{-np}. \tag{1.3.25}$$

Prova. Utilitzant la notació introduïda a (1.3.15), recordem

$$Y^n(z_n,z] = \sum_{i=1}^{4}\big(T^n_{i,F}(z)+T^n_{i,G}(z)+T^n_{i,H}(z)+T^n_{i,B}(z)\big).$$

Definim

$$T^n_{1,2,4}(\eta) := \sum_{i=1,2,4}\big(T^n_{i,F}(\eta)+T^n_{i,G}(\eta)+T^n_{i,H}(\eta)+T^n_{i,B}(\eta)\big)\,.$$

Aleshores, podem escriure

$$E\Big(\Big|\int_{R_z}\gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})Y^n(\eta_n,\eta]\dot\omega^n_\eta\, d\eta - \int_{R_z}\gamma_z(\eta)\psi(Y^n_\eta)\, d\eta\Big|^{2p}\Big)$$
$$\le C_p\sum_{j=1}^{4}U_j^n(z),$$

on

$$U_1^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z}\gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})T^n_{1,2,4}(\eta)\dot\omega^n_\eta d\eta\Big|^{2p}\Big)\,,$$
$$U_2^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z}\gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})T^n_{3,G}(\eta)\dot\omega^n_\eta d\eta\Big|^{2p}\Big)\,,$$
$$U_3^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z}\gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})T^n_{3,B}(\eta)\dot\omega^n_\eta d\eta\Big|^{2p}\Big),$$
$$U_4^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z}\gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})(T^n_{3,F}(\eta)+T^n_{3,H}(\eta))\dot\omega^n_\eta d\eta - \int_{R_z}\gamma_z(\eta)\psi(Y^n_\eta)d\eta\Big|^{2p}\Big)\,.$$

Al Lema 1.3.11 hem comprovat

$$E\big(|T^n_{1,2,4}(\eta)|^{2p}\big) \le C_p\, 2^{-2np} \; .$$

Per altra banda, és clar que $T^n_{1,2,4}(\eta)$ és $\mathcal{F}^*_\eta$–mesurable (veieu Corol.lari 1.3.9 per la notació). Aplicant el mateix Corol.lari 1.3.9 obtenim

$$U^n_1(z) \le C_p\, 2^{-2np} \; .$$

També el Corol.lari 1.3.9, (1.6.10) i la Proposició 1.3.6, ens donen

$$\begin{aligned}
U^n_2(z) &= E\bigg(\Big| \int_{R_z} \gamma_z(\eta) H'(Y^n_{\eta_n}) \Big(\int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) G(Y^n_\xi) \dot h_\xi \, d\xi \Big) \dot\omega^n_\eta \, d\eta \Big|^{2p} \bigg) \\
&\le C_p \bigg\{ E\bigg(\Big| \int_{R_z} \gamma_z(\eta) H'(Y^n_{\eta_n}) G(Y^n_{\eta_n}) \Big(\int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) \dot h_\xi \, d\xi \Big) \omega w^n_\eta \, d\eta \Big|^{2p} \bigg) \\
&\quad + E\bigg(\Big| \int_{R_z} \gamma_z(\eta) H'(Y^n_{\eta_n}) \Big(\int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) \big(G(Y^n_{\eta_n}) - G(Y^n_\xi)\big) \dot h_\xi \, d\xi \Big) \dot\omega^n_\eta \, d\eta \Big|^{2p} \bigg) \bigg\} \\
&\le C_p \, \|h\|^{2p}_{\mathcal{H}} \, 2^{-np} + C_p \, 2^{2np} \sup_\eta E\Big(\Big| \int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) \big(G(Y^n_{\eta_n}) - G(Y^n_\xi)\big) \dot h_\xi \, d\xi \Big|^{4p} \Big)^{\frac12} \\
&\le C_p \big(1 + \|h\|^{2p}_{\mathcal{H}}\big) \, 2^{-np} \; .
\end{aligned}$$

Utilitzant $E\big(|T^n_{3,B}(\eta)|^{4p}\big) \le C_p\, 2^{-8np}$, la desigualtat de Hölder i (1.3.7), és fàcil comprovar

$$U^n_3(z) \le C_p\, 2^{-2np} \; .$$

D'aquesta manera, la prova de (1.3.25) es redueix a demostrar

$$U^n_4(z) \le C_p\, 2^{-np} \; .$$

Definim

$$\begin{aligned}
U^n_{4,1}(z) &= E\Big(\Big| \int_{R_z} \big(\gamma_z(\eta) - \gamma_z(\eta_n)\big) H'(Y^n_{\eta_n}) \Big[\int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) F(Y^n_\xi) dW_\xi \\
&\quad + \int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) H(Y^n_\xi) \dot\omega^n_\xi d\xi \Big] \dot\omega^n_\eta \, d\eta \Big|^{2p} \Big), \\
U^n_{4,2}(z) &= E\Big(\Big| \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) \Big[\int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) \big(F(Y^n_\xi) - F(Y^n_{\eta_n})\big) dW_\xi \\
&\quad + \int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi) \big(H(Y^n_\xi) - H(Y^n_{\eta_n})\big) \dot\omega^n_\xi d\xi \Big] \dot\omega^n_\eta \, d\eta \Big|^{2p} \Big), \\
U^n_{4,3}(z) &= E\bigg(\Big| \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H'(Y^n_{\eta_n}) \Big(F(Y^n_{\eta_n}) \int_{(\eta_n,\eta]} dW_\xi + H(Y^n_{\eta_n}) \int_{(\eta_n,\eta]} \dot\omega^n_\xi \, d\xi \Big) \\
&\quad \times \dot\omega^n_\eta d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) \psi(Y^n_{\eta_n}) d\eta \Big|^{2p} \bigg), \\
U^n_{4,4}(z) &= E\Big(\Big| \int_{R_z} \big(\gamma_z(\eta_n) \psi(Y^n_{\eta_n}) - \gamma_z(\eta) \psi(Y^n_\eta) \big) d\eta \Big|^{2p} \Big).
\end{aligned}$$

Utilitzant arguments semblants als del Lema 1.3.11 obtenim

$$\begin{aligned} U_{4,1}^n(z) &\leq C_p\, 2^{-2np}\, 2^{2np} \sup_{\eta > z_{1,1}} E\big(|T_{3,F}^n(\eta) + T_{3,H}^n(\eta)|^{4p}\big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_p\, 2^{-2np}. \end{aligned}$$

Observeu que per tot $\xi \in (\eta_n, \eta]$

$$\begin{aligned} E\big(|\gamma_\eta(\xi)F(Y_\xi^n) - F(Y_{\eta_n}^n)|^{2p}\big) &\leq C_p E\big(\big|2^{-n} + |Y_\xi^n - Y_{\eta_n}^n|\big|^{2p}\big) \\ &\leq C_p\, 2^{-np}, \end{aligned}$$

aleshores el Lema 1.3.11 i la desigualtat de Burkhölder impliquen

$$\begin{aligned} U_{4,2}^n(z) \leq C_p\, 2^{2np} \sup_\eta \Big\{ & E\Big(\Big| \int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi)\big(F(Y_\xi^n) - F(Y_{\eta_n}^n)\big) dW_\xi \Big|^{4p}\Big) \\ & + E\Big(\Big| \int_{(\eta_n,\eta]} \gamma_\eta(\xi)\big(H(Y_\xi^n) - H(Y_{\eta_n}^n)\big)\dot{\omega}_\xi^n\, d\xi \Big|^{4p}\Big)\Big\}^{\frac{1}{2}} \\ \leq C_p\, 2^{2np}&(2^{-6np} + 2^{-6np})^{\frac{1}{2}} \leq C_p\, 2^{-np}. \end{aligned}$$

També és fàcil comprovar

$$E\big(|\gamma_z(\eta_n)\psi(Y_{\eta_n}^n) - \gamma_z(\eta)\psi(Y_\eta^n)|^{2p}\big) \leq C\, E\big(\big|2^{-n} + |Y_{\eta_n}^n - Y_\eta^n|\big|^{2p}\big) \leq C_p\, 2^{-np}$$

de manera que

$$U_{4,4}^n(z) \leq C_p\, 2^{-np}.$$

Finalment, al Lema 1.3.12 hem demostrat que

$$U_{4,3}^n(z) \leq C_p\, 2^{-np}.$$

I com que $U_4^n(z) \leq C \sum_{i=1}^4 U_{4,i}^n(z)$, el resultat queda provat. ∎

Lema 1.3.14. *Per qualssevol $z \in T$, $p \in [1,\infty)$, $n \geq 1$,*

$$E\Big(\Big| \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(H(Y_\eta^n) - H(Y_{\eta_n}^n)\big)\dot{\omega}_\eta^n\, d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\psi(Y_\eta^n) d\eta \Big|^{2p}\Big) \leq C_p\, 2^{-np}.$$

Prova. La fórmula de Taylor ens dóna

$$H(Y_\eta^n) - H(Y_{\eta_n}^n) = H'(Y_{\eta_n}^n)(Y_\eta^n - Y_{\eta_n}^n) + \frac{1}{2}\, H''(Y_{\eta_n}^n)(Y_\eta^n - Y_{\eta_n}^n)^2 \\ + \frac{1}{6} H'''(\overline{Y}^n_{\eta,\eta_n})(Y_\eta^n - Y_{\eta_n}^n)^3,$$

on $\overline{Y}^n_{\eta,\eta_n}$ indica un punt entre Y_η^n i $Y_{\eta_n}^n$. Utilitzant la descomposició

$$Y_\eta^n - Y_{\eta_n}^n = Y^n\big((\eta_n,\eta]\big) + (Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}) + (Y^n_{\eta_n\otimes\eta} - Y^n_{\eta_n}),$$

podem escriure

$$E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(H(Y_\eta^n) - H(Y^n_{\underline{\eta}_n})\big)\dot\omega_\eta^n\, d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\psi(Y_\eta^n)d\eta\Big|^{2p}\Big) \\ \leq C_p \sum_{j=1}^{5} J_j^n(z)$$

on

$$J_1^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})Y^n(\eta_n,\eta]\dot\omega_\eta^n d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\psi(Y_\eta^n)d\eta\Big|^{2p}\Big),$$
$$J_2^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)H'(Y^n_{\eta_n})\big[(Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}) + (Y^n_{\underline{\eta}\otimes\eta} - Y^n_{\eta_n})\big]\dot\omega_\eta^n d\eta\Big|^{2p}\Big),$$
$$J_3^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)H''(Y^n_{\eta_n})\, G_3^n(\eta)\, \dot\omega_\eta^n d\eta\Big|^{2p}\Big),$$
$$J_4^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)H''(Y^n_{\eta_n})\, G_4^n(\eta)\, \dot\omega_\eta^n d\eta\Big|^{2p}\Big),$$
$$J_5^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \frac{1}{6}\gamma_z(\eta)\, H'''(\overline{Y}^n_{\eta,\eta_n})(Y_\eta^n - Y^n_{\eta_n})^3\dot\omega_\eta^n\, d\eta\Big|^{2p}\Big),$$

amb

$$G_3^n(\eta) = \frac{1}{2}Y^n(\eta_n,\eta]^2 + Y^n(\eta_n,\eta]\big[(Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}) + (Y^n_{\eta_n\otimes\eta} - Y^n_{\eta_n})\big],$$
$$G_4^n(\eta) = \frac{1}{2}\big((Y_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}) + (Y_{\eta_n\otimes\eta} - Y^n_{\eta_n})\big)^2.$$

Pel Lema 1.3.13 sabem que $J_1^n(z) \leq C_p 2^{-np}$.
El Corol.lari 1.3.9 i la Proposició 1.3.6 impliquen

$$J_2^n(z) \leq C_p \sup_{\eta\geq z_{1,1}} E\big(|Y^n_{\eta\otimes\eta_n} - Y^n_{\eta_n}|^{2p} + |Y_{\eta_n\otimes\eta} - Y^n_{\eta_n}|^{2p}\big) \\ \leq C_p\, 2^{-np},$$
$$J_4^n(z) \leq C_p \sup_{\eta\geq z_{1,1}} E\big(|G_4^n(\eta)|^{2p}\big) \leq C_p\, 2^{-2np}.$$

Finalment, utilitzant la Proposició 1.3.6 i el Lema 1.3.11 es pot comprovar que

$$E\big(\,|G_3^n(\eta)|^{4p}\big) \le C_p\, 2^{-6np},$$

$$E\big(\,|Y_\eta^n - Y_{\eta_n}^n|^{12p}\big) \le C_p\, 2^{-6np}.$$

de manera que s'obté

$$J_i^n(z) \le C_p\, 2^{2np}\, 2^{-3np} \le C_p\, 2^{-np}, \;\; i = 3,5$$

I el lema queda demostrat. ∎

Proposició 1.3.15. *Per tot* $p \in [1,\infty)$, $n \ge 1$,

$$\sup_{z\in T} E\big(|I_4^n(z)|^{2p}\big) \le C_p 2^{-np},$$

on

$$I_4^n(z) = \int_{R_z} \gamma_z(\eta) H(Y_\eta^n)\dot\omega_\eta^n d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta) H(Y_\eta^n) dW_\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\psi(Y_\eta^n) d\eta\,.$$

Prova. Considerem la descomposició:

$$E(|I_4^n(z)|^{2p}) \le C_p\big(\tilde J_1^n(z) + \tilde J_2^n(z) + \tilde J_3^n(z) + \tilde J_4^n(z)\big)$$

amb

$$\tilde J_1^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(H(Y_\eta^n) - H(Y_{\eta_n}^n)\big)\dot\omega_\eta^n d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\psi(Y_\eta^n) d\eta\Big|^{2p}\Big),$$

$$\tilde J_2^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \big(\gamma_z(\eta) - \gamma_z(\eta_n)\big) H(Y_{\eta_n}^n)\dot\omega_\eta^n d\eta\Big|^{2p}\Big),$$

$$\tilde J_3^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H(Y_{\eta_n}^n)\dot\omega_\eta^n d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H(Y_{\eta_n}^n) dW_\eta\Big|^{2p}\Big),$$

$$\tilde J_4^n(z) = E\Big(\Big|\int_{R_z} \Big(\big(\gamma_z(\eta_n) - \gamma_z(\eta)\big) H(Y_{\eta_n}^n) + \gamma_z(\eta)\big(H(Y_{\eta_n}^n) - H(Y_\eta^n)\big)\Big) dW_\eta\Big|^{2p}\Big).$$

Al Lema 1.3.14 hem demostrat

$$\tilde J_1^n(z) = C_p\, 2^{-np}.$$

El Corol.lari 1.3.9 implica

$$\tilde J_2^n(z) = C_p\, 2^{-2np}.$$

Utilitzant la desigualtat de Burkholder, la Proposició 1.3.6, (1.6.7) i (1.6.8) tenim

$$\tilde J_4^n(z) \le C_p\, E\Big(\Big|\int_{R_z} \big(\gamma_z(\eta_n) - \gamma_z(\eta)\big)^2 H^2(Y_{\eta_n}^n) + \gamma_z^2(\eta)\big(H(Y_{\eta_n}^n) - H(Y_\eta^n)\big) d\eta\Big|^p\Big) \le C_p\, 2^{-np}.$$

Per tant, la prova de la proposició es redueix a demostrar

$$\tilde{J}_3^n(z) \le C_p\, 2^{-np}. \tag{1.3.26}$$

Sigui $z \in \Delta_{i_0,j_0}$, aleshores,

$$\begin{aligned}
&\int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H(Y^n_{\eta_n}) \dot{\omega}^n_\eta d\eta - \int_{R_z} \gamma_z(\eta_n) H(Y^n_{\eta_n}) dW_\eta \\
&= \int_{R_z - R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n) H(Y^n_{\eta_n})(\dot{\omega}^n_\eta d\eta - dW_\eta) + \int_{R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n) H(Y^n_{\eta_n})(\dot{\omega}^n_\eta d\eta - dW_\eta).
\end{aligned}$$

La desigualtat de Burkholder implica

$$E\Big(\Big| \int_{R_z - R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n) H(Y^n_{\eta_n})(\dot{\omega}^n_\eta d\eta - dW_\eta)\Big|^{2p}\Big) \le C_p\, 2^{-np}.$$

A més a més,

$$\begin{aligned}
&\int_{R_{z_{i_0,j_0}}} \gamma_z(\eta_n) H(Y^n_{\eta_n})(\dot{\omega}^n_\eta d\eta - dW_\eta) \\
&\quad = \sum_{\substack{1 \le \alpha \le i_0 - 1 \\ 1 \le \beta \le i_0 - 1}} \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}})\, \big(W(\Delta_{\alpha-1,\beta-1}) - W(\Delta_{\alpha,\beta})\big) \\
&\qquad - \sum_{1 \le \alpha \le i_0 - 1} \gamma_z(0) H(Y^n_0) W(\Delta_{\alpha,0}) - \sum_{1 \le \beta \le j_0 - 1} \gamma_z(0) H(Y^n_0) W(\Delta_{0,\beta}) \\
&\quad = \sum_{\substack{1 \le \alpha \le i_0 - 2 \\ 1 \le \beta \le j_0 - 2}} W(\Delta_{\alpha,\beta}) \big(\gamma_z(z_{\alpha,\beta}) H(Y^n_{z_{\alpha,\beta}}) - \gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1}) H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}})\big) \\
&\qquad - \sum_{1 \le \beta \le j_0 - 1} W(\Delta_{i_0-1,\beta}) \gamma_z(z_{i_0-2,\beta-1}) H(Y^n_{z_{i_0-1,\beta-1}}) \\
&\qquad - \sum_{1 \le \alpha \le i_0 - 2} W(\Delta_{\alpha,j_0-1}) \gamma_z(z_{\alpha-1,j_0-2}) H(Y^n_{z_{\alpha-1,j_0-2}}) \\
&\qquad + \sum_{1 \le \alpha \le i_0 - 2} W(\Delta_{\alpha,0}) \big(\gamma_z(z_{\alpha,0}) - \gamma_z(0)\big) H(Y^n_0) \\
&\qquad + \sum_{1 \le \beta \le j_0 - 2} W(\Delta_{0,\beta}) \big(\gamma_z(z_{0,\beta}) - \gamma_z(0)\big) H(Y^n_0) \\
&\qquad - \big(W(\Delta_{0,j_0-1}) + W(\Delta_{i_0-1,0})\big) \gamma_z(0) H(Y^n_0)\,.
\end{aligned}$$

És clar que,

$$E\Big(\big|\big(W(\Delta_{0,j_0-1}) + W(\Delta_{i_0-1,0})\big)\gamma_z(0) H(Y^n_0)\big|^{2p}\Big) \le C_p\, 2^{-2np}.$$

La desigualtat de Burkholder, la Proposició 1.3.6 i les propietats de γ impliquen

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\big|\sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-2\\ 1\le\beta\le j_0-2}} W(\Delta_{\alpha,\beta})\big(\gamma_z(z_{\alpha,\beta})H(Y^n_{z_{\alpha,\beta}})-\gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1})H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}})\big)\big|^{2p}\Big)\\
&\le C_p\ E\Big(\big|\sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-2\\ 1\le\beta\le j_0-2}} |W(\Delta_{\alpha,\beta})|^2\big(\gamma_z(z_{\alpha,\beta})H(Y^n_{z_{\alpha,\beta}})-\gamma_z(z_{\alpha-1,\beta-1})H(Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}})\big)^2\big|^{p}\Big)\\
&\le C_p\ 2^{2n(p-1)}\sum_{\substack{1\le\alpha\le i_0-2\\ 1\le\beta\le j_0-2}} E\big(|W(\Delta_{\alpha,\beta})|^{2p}\big)E\big(\big|2^{-2n}+|Y^n_{z_{\alpha,\beta}}-Y^n_{z_{\alpha-1,\beta-1}}|^2\big|^p\big)\\
&\le C_p\ 2^{-np}.
\end{aligned}
$$

De manera semblant

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\big|\sum_{1\le\beta\le j_0-1} W(\Delta_{i_0-1,\beta})\gamma_z(Z_{i_0-2,\beta-1})H(Y^n_{z_{i_0-2,\beta-1}})\big|^{2p}\Big)\\
&\qquad\le C_p\,E\Big(\sum_{1\le\beta\le j_0-1}|W(\Delta_{i_0-1,\beta})|^{2p}\Big)\le C_p\,2^{-np}.
\end{aligned}
$$

Mitjançant càlculs del mateix tipus podem afitar la resta de termes per $C_p\,2^{-np}$, així demostrem (1.3.28) i finalitzem la prova de la proposició. ∎

Entrem ja a l'última part d'aquesta secció: la demostració del Teorema 1.3.4, és a dir, el teorema que caracteritza el suport. Abans de passar a la demostració ens cal introduir una mica més de notació.

Fixat $h\in\mathcal{H}$, $a\in\mathbb{R}$ considerem l'equació diferencial

$$
\begin{aligned}
S^a_z(h)=X_0&+\int_{R_z}\gamma_z(\eta)\Big(a_4\big(S^a_\eta(h)\big)-a\,a_3'\big(S^a_\eta(h)\big)a_3\big(S^a_\eta(h)\big)\Big)d\eta\\
&+\int_{R_z}\gamma_z(\eta)\,a_3\big(S^a_\eta(h)\big)\,\dot h_\eta\,d\eta\,,
\end{aligned}
\tag{1.3.27}
$$

$z\in T$. Observem que (1.3.27) és un cas particular de l'equació (1.3.8).

Direm ρ^a a l'adherència respecte la topologia α–Hölder $\big(\alpha\in(0,\frac12)\big)$ del conjunt $\{S^a(h),\ h\in\mathcal{H}\}$.

Fixat $h\in\mathcal{H}$, sigui $T^h_n(w)=w-w^n+h$. Una extensió del Teorema de Girsanov per processos a dos paràmetres (veieu [Gu-P 2]) ens diu que la mesura $P\circ(T^h_n)^{-1}$ és absolutament contínua respecte P, per tot $n\ge1$.

Observem, que els processos $\{S^a_z(w^n),\ z\in T\}$ i $\{X_z(w-w^n+h),\ z\in T\}$ són solucions particulars de (1.3.8). Per exemple, sigui $X^n(w):=X(w-w^n+h)$, $h\in\mathcal{H}$. Aproximant les integrals estocàstiques per sumes de Riemann, és fàcil veure que X^n satisfà la següent equació diferencial estocàstica

$$X_z^n = X_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big[a_4(X_\eta^n) + a_3(X_\eta^n)\dot{h}_\eta - a_3(X_\eta^n)\dot{\omega}_\eta^n\big]\, d\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) a_3(X_\eta^n)\, dW_\eta\,.$$

Podem donar ja la prova del teorema del suport.

Prova del Teorema 1.3.4. El nostre objectiu és comprovar les convergències següents per tot $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(w: \ \|X(w) - S^{\frac{1}{4}}(w^n)\|_\alpha > \varepsilon\big) = 0 \tag{1.3.28}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} P\big(w: \ \|X(w - w^n + h) - S^{\frac{3}{4}}(h)\|_\alpha > \varepsilon\big) = 0\,, \ h \in \mathcal{H}, \tag{1.3.29}$$

que, d'acord amb la Proposició 1.3.2, asseguren les inclusions

$$\rho^{\frac{3}{4}} \subset \operatorname{supp}(P \circ X^{-1}) \subset \rho^{\frac{1}{4}}\,.$$

Finalment, veurem que $\rho^a = \rho^0$ per tot $a \in \mathbb{R}$, de manera que

$$\operatorname{supp}\,(P \circ X^{-1}) = \rho^0\,.$$

A les expressions (1.3.8) i (1.3.9) escollim $Y_0 = X_0$ i els coeficients

$$F = G = 0, \ H = a_3 \quad \text{i} \quad B = a_4 - \frac{1}{4}\, a_3'\, a_3.$$

Aleshores, $Y_z^n = S_z^{\frac{1}{4}}(w^n)$ i $Y_z = X_z$. D'aquesta manera obtenim la convergència (1.3.28) com un cas particular de la Proposició 1.3.2.
Escollim ara

$$F = G = a_3\,, \ H = -a_3 \quad \text{i} \quad B = a_4,$$

aleshores, $Y_z^n = X_z(w - w^n + h)$ i $Y_z = S_z^{\frac{3}{4}}(h)$. En aquest cas obtenim (1.3.29) directament de la Proposició 1.3.2.
Per finalitzar, ens cal demostrar, que per tot $a \in \mathbb{R}$,

$$\{S^0(h), \ h \in \mathcal{H}\} = \{S^a(h), \ h \in \mathcal{H}\}\,. \tag{1.3.30}$$

Fixat $h \in \mathcal{H}$, sigui $S^a(h)$ la solució de (1.3.27). Definim $g \in \mathcal{H}$ de la manera següent: $\dot{g} := \dot{h} - a\, a_3'\big(S^a(h)\big)$. Aleshores, el procés $S^0(g)$ satisfà

$$S_z^0(g) = X_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big[a_4\big(S_\eta^0(g)\big) + a_3\big(S_\eta^0(g)\big)\Big(\dot{h}_\eta - a\, a_3'\big(S_\eta^a(h)\big)\Big)\Big] d\eta\,.$$

La unicitat de la solució de (1.3.27) implica $S_z^0(g) = S_z^a(h)$. Per tant,

$$\{S^a(h), \ h \in \mathcal{H}\} \subset \{S^0(h), \ h \in \mathcal{H}\}.$$

L'altre inclusió es pot demostrar de la mateixa manera. Així, queda demostrat (1.3.30) i finalitzem la prova del teorema. ∎

1.4. REGULARITAT DE LA LLEI

Preliminars

Sigui $E = \{z = (s,t) \in T : s \cdot t = 0\}$. Aquesta secció està dedicada a obtenir condicions suficients que assegurin l'existència i la regularitat de la densitat de la llei de probabilitat de X_z, solució de l'equació (1.1.1) pels $z \notin T \setminus E$.

Els resultats que obtindrem estan basats en la utilització del Càlcul de Malliavin. Recordarem ara breument les seves bases per poder plantejar amb precisió els teoremes que necessitarem.

Siguin $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espai canònic associat amb el drap brownià W i $\mathbb{E}$ un espai de Hilbert separable. Un vector aleatori $F : \Omega \to \mathbb{E}$ direm que és regular si

$$F = \sum_{i=1}^{M} f_i (W_{z_1}, \ldots, W_{z_n}) v_i , \tag{1.4.1}$$

on $f_i \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $z_1, \ldots, z_n \in T$, $v_1, \ldots, v_M \in \mathbb{E}$. On $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunt de les funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ que són afitades amb totes les derivades afitades. Denotarem per $\mathcal{S}$ el conjunt de les variables aleatòries regulars.
La derivada de Malliavin de F (donada per (1.4.1)) serà el vector aleatori que pren valors a l'espai $L^2(T, \mathbb{E})$, definit per

$$D_\eta F = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^k} (W_{z_1}, \ldots, W_{z_n}) \, 1_{[0,z_i]}(\eta) \, v_i .$$

Definirem la k-èssima derivada de F per iteració, $D^k_{\eta_1 \cdots \eta_k} F = D_{\eta_1} \left(\ldots (D_{\eta_k} F) \right)$.
Per cada $p \in [1, \infty)$ i qualsevol número natural N, denotarem per $D^{N,p}(\mathbb{E})$ la completació de $\mathcal{S}$ respecte la norma

$$\|F\|^p_{N,p} = \|F\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{E})} + \sum_{k=1}^{N} E \, \|D^k F\|^p_{L^2(T^k;\mathbb{E})} .$$

Definim $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{E}) = \bigcap_{p,N} \mathbb{D}^{N,p}(\mathbb{E})$. Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ escriurem $\mathbb{D}^\infty$ i $\mathbb{D}^{N,p}$ en comptes de $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{E})$ i $\mathbb{D}^{N,p}(\mathbb{E})$, respectivament.
Donem ara els resultats fonamentals que utilitzarem. El primer teorema és útil per demostrar l'existència de la densitat d'una variable aleatòria. El segon, a més de l'existència, dóna també la regularitat de la densitat.

Teorema 1.4.1. [B-H] *Sigui $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria que satisfà les condicions següents,*
(i) $F \in \mathbb{D}^{1,1}_{\mathrm{loc}}$,
(ii) $\int_T |D_\eta F|^2 \, d\eta > 0$ q.s..
Aleshores, la llei de F és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 1.4.2. [Mal] *Sigui $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria que satisfà les condicions següents:*
(i) $F \in \mathbb{D}^\infty$,
(ii) $\left(\int_T |D_\eta F|^2 \, d\eta\right)^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p$.
Aleshores, la llei de F és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ i la densitat és continuament diferenciable.

Recordem també un lema tècnic que haurem d'utilitzar.

Lema 1.4.3. [L-N-S] *Sigui $\{F_n,\ n \geq 1\}$ una successió de vectors aleatoris en $\mathbb{D}^{1,p}(\mathbb{E})$, $p \in [2, \infty)$, que convergeixen en $L^p(\Omega; \mathbb{E})$ cap a una variable aleatòria F. Suposem que la successió $\{D F_n,\ n \geq 1\}$ és afitada en $L^p\big(\Omega;\ L^2(T; \mathbb{E})\big)$, és a dir,*

$$\sup_n E\left(\int_T \|D_\eta F_n\|^2_{\mathbb{E}} \, d\eta\right)^{p/2} < \infty .$$

Aleshores, $F \in \mathbb{D}^{1,p}(\mathbb{E})$.

<u>**Resultats**</u>

Dins d'aquesta secció considerarem $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ i que els coeficients de l'equació (1.1.1) satisfan el següent conjunt d'hipòtesis (H_4)

$(H_4 1)$ $a_i : \mathbb{R} \times T \to \mathbb{R}$, $i = 3, 4$, són mesurables, infinitament diferenciables respecte la primera variable amb derivades de qualsevol ordre uniformement afitades. A més a més,

$$\sup_{z \in T} |\, a_i(x, z) \,| \leq C(1 + |x|) .$$

$(H_2 2)$ $a_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, són derivables, afitades amb derivades afitades.

Sota aquestes hipòtesis, pels resultats de la Secció 1.2, sabem que la solució de l'equació satisfà també l'equació integral estocàstica

$$X_z = X_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \, [a_3(X_\eta, \eta) \, dW_\eta + a_4(X_\eta, \eta) \, d\eta].$$

Introduïm també algunes hipòtesis addicionals que necessitarem per plantejar el resultat fonamental d'aquesta secció.

$(H_4 3)$ $\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_3(x,u,v) - a_3(x,u',v')| \le C(|u-u'| + |v-v'|)$, $u,u',v,v' \in [0,1]$,

$(H_4 4)$ $\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ v\in[0,1]}} |a_4(x,u,v) - a_4(x,u',v)| \le C|u-u'|$, $u,u' \in [0,1]$,

$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ v\in[0,1]}} |\partial_1 a_3(x,u,v) - \partial_1 a_3(x,u',v)| \le C|u-u'|$, $u,u' \in [0,1]$,

$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ (u,v)\in T}} |\partial_2^2 a_3(x,u,v)| \le C$,

on per $\partial_j a_3(x,u,v)$, $j = 1,2$, entenem la derivada parcial de $a_3(x,u,v)$ respecte de x i de u, respectivament.

Fixat $z = (s,t) \in T \setminus E$,

$(H_4 5)$ $a_3(X_0, 0, t) \neq 0$,

$(H_4 6)$ $a_3(X_0, 0, v) = 0$, per qualsevol $v \in (0,t]$, i

$$\partial_2 a_3(X_0,0,t) + \partial_1 a_3(X_0,0,t) \int_0^t \gamma_{0,t}(0,w)\, a_4(X_0,0,w)\, dw \neq 0\,.$$

L'objectiu bàsic d'aquesta secció es demostrar el teorema següent.

Teorema 1.4.4. *Suposem que se satisfan les hipòtesis $(H_4 1)$, $(H_2 2)$ i $(H_4 3)$. Fixem $z = (s,t) \in T \setminus E$ i suposem que es compleixen o bé $(H_4 5)$ o bé $(H_4 4)$ i $(H_4 6)$. Aleshores, la llei de X_z és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$ i la seva densitat és infinitament diferenciable.*

Observació. La conclusió d'aquest teorema també es pot obtenir intercanviant els papers de les variables t i s a les hipòtesis $(H_4 4)$, $(H_4 5)$ i $(H_4 6)$.

A [F 2], Farré va demostrar, utilitzant el Teorema 1.4.1, l'existència de densitat sota les hipotèsis següents

$(H_4' 1)$ $a_i : \mathbb{R}\times T \to \mathbb{R}$, $i = 3,4$, són mesurables, afitades i derivables respecte la primera variable amb derivada afitada. A més a més, a_3 és uniformement contínua respecte la primera variable.

$(H_4' 2)$ $a_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, són mesurables, afitades i Lipschitz.

$(H_4' 3)$ $a_3(X_0, 0, t) \neq 0$.

La demostració la va fer utilitzant la representació (1.1.4) de la solució com una semimartingala representable. Això fa que la prova sigui tècnicament complicada i que sembli difícil plantejar-se el problema de la regularitat de la densitat.

Aquí utilitzarem la representació feble de la solució a partir de la funció de Green. Encara que imposen hipòtesis més fortes que les de [F 2], ens permeten demostrar l'existència i la regularitat de la densitat utilitzant el Teorema 1.4.2.

Com que X_z és unidimensional i la funció $\gamma_z(\cdot)$ és regular i estrictament positiva en $u = s$ i en $v = t$ (veieu la Secció 1.6), la demostració no presenta les dificultats tècniques de [N-S 1] o [N-S 2]. De totes maneres, el mètode utilitzat ens ofereix una aproximació alternativa al teorema de Hörmander, tant amb hipòtesis restringides com amb no restringides, per a processos biparamètrics en dimensió ú.

La prova del Teorema 1.4.4 vindrà donada per un conjunt de proposicions auxiliars.

La primera proposició estarà dedicada a obtenir la condició *(i)* del Teorema 1.4.2. Necessitarem presentar primer un lema tècnic que és una generalització del Lema 1.4.3.

Lema 1.4.5. *Sigui $\{F_n\,,\ n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries en $\mathbb{D}^{N,p}$, $N \geq 1$, $p \in [2,\infty)$. Suposem que existeix $F \in \mathbb{D}^{N-1,p}$ tal que $\{D^{N-1} F_n\,,\ n \geq 1\}$ convergeix cap a $D^{N-1} F$ en $L^p\left(\Omega;\ L^2\left(T^{N-1}\right)\right)$ quan n tendeix cap a infinit, i que, a més a més, la successió $\{D^N F_n\,,\ n \geq 1\}$ és afitada en $L^p\left(\Omega;\ L^2(T^N)\right)$. Aleshores, $F \in \mathbb{D}^{N,p}$.*

Prova. Per conveni, direm $\mathbb{D}^{0,p} = L^p(\Omega)$. Per $N = 1$, el Lema 1.4.5 es redueix al Lema 1.4.3 amb $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.
Per $N > 1$, diem $G_n = D^{N-1} F_n$, $G = D^{N-1} F$. La successió $\{G_n\,,\ n \geq 1\}$ i el vector aleatori G satisfan les hipòtesis del Lema 1.4.3 amb $\mathbb{E} = L^2(T^{N-1})$. Per tant $D^{N-1} F \in \mathbb{D}^{1,p}\left(L^2\left(T^{N-1}\right)\right)$ i així, $F \in \mathbb{D}^{N,p}$. ∎

Utilitzant el Lema 1.4.5 podem ara ja provar la proposició següent.

Proposició 1.4.6. *Suposem $(H_4 1)$ i $(H_2 2)$. Per tot enter $N \geq 1$ i $p \in [2, \infty)$, $X_z \in \mathbb{D}^{N,p}$.*

Prova. Considerem les aproximacions de Picard definides en (1.2.1), que en aquest cas seran

$$
\begin{aligned}
X_z^{(0)} &= X_0\,, \\
X_z^{(n+1)} &= X_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\left[a_3\left(X_\eta^{(n)}, \eta\right) dW_\eta + a_4\left(X_\eta^{(n)}, \eta\right) d\eta\right], \quad n \geq 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.4.2}
$$

Comprovarem ara que la successió $\{F_n \equiv X_z^{(n)}\ \ n \geq 1\}$ satisfà les hipòtesis del Lema 1.4.5. Ho veurem fent inducció sobre la N.

Fem primer el cas $N = 1$. Al Teorema 1.2.1 hem demostrat la convergència de les aproximacions de Picard $\{X_z^{(n)}\,,\ n \geq 0\}$ cap a X_z en $L^p(\Omega)$, per qualsevol $p \in [2, \infty)$. Demostrarem ara les dues propietats següents

(i) per tot $n \geq 0$, $X_z^{(n)} \in \mathbb{D}^{1,p}$,
(ii) $\sup\limits_n \sup\limits_{\alpha, z \in T} E\left(|D_\alpha X_z^{(n)}|^p\right) < +\infty$.

Observem que si es satisfan les dues propietats, tindrem que $\{X_z^{(n)},\ n \geq 1\}$ satisfà les hipòtesis del Lema 1.4.5 per $N = 1$ (en realitat haurem demostrat unes hipòtesis més fortes que les del lema) i per tant $X_z \in \mathbb{D}^{1,p}$.

La propietat (i) es comprova fent inducció sobre n, utilitzant les regles de la derivació estocàstica, la regularitat dels coeficients i (1.6.7). A més a més, per les mateixes regles de derivació, obtenim que les derivades satisfan l'equació

$$\begin{aligned} D_\alpha X_z^{(0)} &= 0 \\ D_\alpha X_z^{(n+1)} &= \gamma_z(\alpha)\, a_3(X_\alpha^{(n)}, \alpha) \\ &+ \int_{(\alpha,z]} \gamma_z(\eta)\, D_\alpha X_\eta^{(n)} \left[\partial_1 a_3\,(X_\eta^{(n)}, \eta)\, dW_\eta + \partial_1 a_4(X_\eta^{(n)}, \eta)\, d\eta\right], \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

$0 \le \alpha \le z$.
Sigui $C_0 = \sup_n \sup_{z\in T} E(\,|X_z^{(n)}|^p)$. Aleshores (1.4.3) i (1.6.7) impliquen

$$\begin{aligned} E(\,|D_\alpha X_z^{(1)}|^p) &= E\left(|\gamma_z(\alpha)\, a_3(X_0, \alpha)\,|^p\right) \le C_p\, C_0\,, \\ E(\,|D_\alpha X_z^{(n)}|^p) &\le C_p \left\{C_0 + \int_{(\alpha,z]} E(\,|D_\alpha X_\eta^{(n-1)}|^p)\, d\eta\right\}, \quad n \ge 2\,. \end{aligned}$$

I per tant, (ii) queda demostrat.

Per tal de treballar fàcilment amb les derivades de qualsevol ordre de $X_z^{(n)}$ i X_z, utilitzarem la notació introduïda a [B-P].
Sigui $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in T^N$; notarem per $|\alpha|$ la longitut de α, és a dir, N. Direm $\hat{\alpha}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_N)$, $i = 1, \ldots, N$. Donada una variable aleatòria $Y \in \mathbb{D}^{N,p}$, escriurem com $D_\alpha^N Y$ la derivada iterativa $D_{\alpha_N} D_{\alpha_{N-1}} \ldots D_{\alpha_1} Y$. Sigui $f \in \mathcal{C}_b^{\infty,0}(\mathbb{R} \times T)$, l'espai de les funcions contínues definides en $\mathbb{R} \times T$, infinitament diferenciables respecte la primera variable i amb derivades afitades. Posarem

$$\Gamma_\alpha(f, X_z, z) = \sum_{m=1}^{N} \sum f^{(m)}\,(X_z, z) \prod_{i=1}^{m} D_{p_i}^{(p_i)}\, X_z\,, \tag{1.4.4}$$

on el segon sumatori s'estén sobre totes les particions $p_1, \ldots, p_m$ de longitut m d' α i $f^{(m)}$ denota la m-èssima derivada de f respecte la primera variable. De manera anàloga, definirem $\Gamma_\alpha(f, X_z^{(n)}, z)$.
Suposem ara que $\{F_n = X_z^{(n)},\ n \ge 0\}$, $F = X_z$ satisfan les hipòtesis del Lema 1.4.5 per $N-1$ $(N > 1)$ i $p \in [2, \infty)$, o més precisament, que satisfan el conjunt d'hipòtesis

(H_{N-1})
(a) $\{X_z^{(n)},\ n \ge 0\} \subset \mathbb{D}^{N-1,p}$,
(b) $D^{N-2} X_z^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} D^{N-2} X$ en $L^p(\Omega,\ L^2(T^{N-2}))$,
(c) $\sup_n \sup_{z\in T} \sup_{|\alpha|=N-1} E(\,|D_\alpha^{N-1} X_z^{(n)}\,|^p) < +\infty$.

Aleshores, pel Lema 1.4.5, $X_z \in \mathbb{D}^{N-1,p}$. Volem comprovar per tant (H_N).

La prova de (a) de (H_N) es fa per inducció sobre n. A més a més, s'obté

$$
\begin{aligned}
D_\alpha^N X_z^{(0)} &= 0\,,\\
D_\alpha^N X_z^{(n+1)} &= \sum_{i=1}^{N} \Gamma_{\hat{\alpha}_i}(a_3, X_{\alpha_i}^{(n)}, \alpha_i)\, \gamma_z(\alpha_i)\\
&+ \int_{(\sup \alpha, z]} \gamma_z(\eta)\, \left[\Gamma_\alpha(a_3, X_\eta^{(n)}, \eta)\, dW_\eta + \Gamma_\alpha(a_4, X_\eta^{(n)}, \eta)\, d\eta\right], \qquad (1.4.5)
\end{aligned}
$$

on $\sup\, \alpha := \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_N$.
La convergència (b) de (H_N) es pot comprovar fàcilment si s'observa que $D^{N-1} X_z^{(n)}$, $n \geq 1$, i $D^{N-1} X_z$ satisfan equacions del mateix tipus que (1.4.5).
Definim

$$\Delta_\alpha(f, X_z^{(n)}, z) = \Gamma_\alpha(f, X_z^{(n)}, z) - f^{(N)}(X_z^{(n)}, z)\, D_\alpha^N X_z^{(n)}\,.$$

Per $n \geq 0$, podem escriure

$$
\begin{aligned}
D_\alpha^N X_z^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{N} &\Gamma_{\hat{\alpha}_i}(a_3, X_{\alpha_i}^{(n)}, \alpha_i)\, \gamma_z(\alpha_i) + \int_{(\sup \alpha, z]} \gamma_z(\eta)\, [\Delta_\alpha(a_3, X_\eta^{(n)}, \eta)\, dW_\eta\\
&+ \Delta_\alpha(a_4, X_\eta^{(n)}, \eta)\, d\eta]\\
&+ \int_{(\sup \alpha, z]} \gamma_z(\eta)\, D_\alpha^N X_\eta^{(n)}\, [a_3^{(N)}(X_\eta^{(n)}, \eta)\, dW_\eta + a_4^{(N)}(X_\eta^{(n)}, \eta)\, d\eta]\,. \qquad (1.4.6)
\end{aligned}
$$

Observem que, en els dos primers termes, al costat dret de la igualtat (1.4.6) només apareixen derivades de $X_z^{(n)}$ d'ordre menor o igual a $N-1$. D'aquesta manera, la condició (c) de (H_{N-1}) implica

$$
\begin{aligned}
&\sup_n \sup_{|\alpha|=N} \sup_\eta E\left(|\Delta_\alpha(a_j, X_\eta^{(n)}, \eta)|^p\right) \leq C_p\,, \quad j = 3, 4,\\
&\sup_{n,i} \sup_{|\alpha|=N} \sup_\eta E\left(|\Gamma_{\hat{\alpha}_i}(a_3, X_{\alpha_i}^{(n)}, \alpha_i)|^p\right) \leq C_p\,. \qquad (1.4.7)
\end{aligned}
$$

I ajuntant (1.4.6) i (1.4.7) s'obté

$$
\begin{aligned}
&E\left(|D_\alpha^N X_z^{(1)}|^p\right) \leq C_p\,,\\
&E\left(|D_\alpha^N X_z^{(n+1)}|^p\right) \leq C_p \left\{1 + \int_{(\sup \alpha, z]} E\left(|D_\alpha^N X_\eta^{(n)}|^p\right) d\eta\right\},
\end{aligned}
$$

per tot $n \geq 1$, $z \in T$ i $|\alpha| = N$. Així es demostra la condició (c) del conjunt d'hipòtesis (H_N) i es completa la prova de la proposició. ∎

La derivada de Malliavin de X_z satisfà l'equació

$$D_\alpha X_z = \gamma_z(\alpha)\, a_3(X_\alpha, \alpha) + \int_{(\alpha,z]} \gamma_z(\eta)\, D_\alpha X_\eta \left[\partial_1 a_3(X_\eta, \eta)\, dW_\eta + \partial_1 a_4(X_\eta, \eta)\, d\eta\right],$$

$0 \le \alpha \le z$.

Definim $\{Y_z(\alpha),\ 0 \le \alpha \le z \le (1,1)\}$ com la solució de

$$Y_z(\alpha) = \gamma_z(\alpha) + \int_{(\alpha,z]} \gamma_z(\eta)\, Y_\eta(\alpha) \left[\partial_1 a_3(X_\eta, \eta)\, dW_\eta + \partial_1 a_4(X_\eta, \eta) d\eta\right]. \tag{1.4.8}$$

Utilitzant aproximacions de Picard i els arguments del Teorema 1.2.1, és fàcil demostrar l'existència i la unicitat de la solució de l'equació (1.4.8). Com a conseqüència obtenim també la desigualtat següent

$$\sup_{0 \le \alpha \le z} E\left(|Y_z(\alpha)|^{2p}\right) \le C_p.$$

Per la unicitat de solució de l'equació que satisfà $D_\alpha X_z$, tenim la igualtat

$$D_\alpha X_z = a_3\,(X_\alpha, \alpha)\; Y_z(\alpha).$$

Fixats $\varepsilon, \beta, \delta \in (0,1)$, $z = (s,t) \in T \backslash E$, definim els conjunts $D^z_\beta(\varepsilon) = (0, \varepsilon^\beta) \times (0,t)$, $C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon) = (0, \varepsilon^\beta) \times (t - \varepsilon^\delta, t)$.
El lema següent ens donarà unes estimacions per $p \in [1, \infty)$ que ens seran útils la resta de la secció.

Lema 1.4.7. *Per qualsevol* $p \in [1, \infty)$,

$$\sup_{\alpha \in D^z_\beta(\varepsilon)} E\left(|X_\alpha - X_0|^{2p}\right) \le C_p\, \varepsilon^{\beta p}, \tag{1.4.9}$$

$$\sup_{\alpha \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E\left(|Y_z(\alpha) - \gamma_z(\alpha)|^{2p}\right) \le C_p\, \varepsilon^{\delta\, p}. \tag{1.4.10}$$

Prova. Per demostrar (1.4.9) utilitzem les desigualtats de Burkholder i de Hölder, (1.6.7), el creixement lineal d'a_i, $i = 3, 4$ i l'afitació en L^{2p} del procés $\{X_z,\ z \in T\}$. De manera que obtenim

$$E(|X_\alpha - X_0|^{2p}) \le C_p\left(|R_\alpha|^{2p-1} + |R_\alpha|^{p-1}\right) \int_{R_\alpha} E(|X_\eta|^{2p}) d\eta,$$

que ens dóna (1.4.9).
De manera anàloga, utilitzant que hem vist que el procés $\{Y_z(\alpha)\}$ està uniformement afitat en $L^{2p}(\Omega)$, (1.4.10) s'obté fàcilment a partir de l'expressió (1.4.8). ∎

La proposició següent ens donarà la condició *(ii)* del Teorema 1.4.2 sota les hipòtesis $(H_4 3)$ i $(H_4 5)$. Aquesta última correspon a la condició de Hörmander restringida.

Proposició 1.4.8. *Suposem $(H_4 1)$, $(H_2 2)$ i $(H_4 3)$. Fixat $z = (s,t) \in T \setminus E$ suposem $(H_4 5)$. Aleshores, $\left(\int_{R_z} |D_\alpha X_z|^2 \, d\alpha \right)^{-1} \in L^p(\Omega)$, per qualsevol $p \in [1, \infty)$.*

Prova. N'hi ha prou amb demostrar

$$P\Big\{ \int_{R_z} |\, a_3(X_\alpha, \alpha) Y_z(\alpha)\,|^2 \, d\alpha \le \varepsilon \Big\} \le \varepsilon^p \,, \; p \in [1, \infty) \,, \tag{1.4.11}$$

per tot $\varepsilon \le \varepsilon_0$, on ε_0 depèn de p, z i dels coeficients de l'equació (1.1.1).
Fixem $\varepsilon \in (0,1)$ i escollim $\beta \in \left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{2}\right)$. Aleshores,

$$P\Big\{ \int_{R_z} |a_3(X_\alpha, \alpha) Y_z(\alpha)|^2 \, d\alpha \le \varepsilon \Big\} \le p_1(\varepsilon, \beta) + p_2(\varepsilon, \beta) \tag{1.4.12}$$

amb

$$\begin{aligned} p_1(\varepsilon,\beta) &= P\Big\{ \int_0^{\varepsilon^\beta} \int_{t-\varepsilon^\beta}^{t} a_3^2(X_{r,w}, r, w)\; Y_z^2(r,w)\, dr\, dw \le \varepsilon \,, \\ &\qquad \int_0^{\varepsilon^\beta} \int_{t-\varepsilon^\beta}^{t} a_3^2(X_0, 0, t)\; \gamma_z^2(0,t)\, dr\, dw > 4\,\varepsilon \Big\} \,, \\ p_2(\varepsilon,\beta) &= P\Big\{ \int_0^{\varepsilon^\beta} \int_{t-\varepsilon^\beta}^{t} a_3^2(X_0, 0, t)\; \gamma_z^2(0,t)\, dr\, dw \le 4\,\varepsilon \Big\} \,. \end{aligned}$$

Volem comprovar que per qualsevol $q \in [1, \infty)$,

$$\sup_{(r,w) \in (0,\varepsilon^\beta) \times (t-\varepsilon^\beta, t)} E\left(|a_3(X_{r,w}, r, w)\; Y_z(r,w) - a_3(X_0, 0, t)\; \gamma_z(0,t)\,|^{2q} \right) \le C_q\; \varepsilon^{\beta q} \,. \tag{1.4.13}$$

En efecte. Les hipòtesis $(H_4 1)$ i $(H_4 3)$ sobre el coeficient a_3 impliquen

$$\begin{aligned} |\, a_3(X_{r,w}, r, w)\; Y_z(r,w) - a_3(X_0, 0, t)\; \gamma_z(0,t)\,| &\le C\, \big\{ (1 + |X_{r,w}|\,)\; |Y_z(r,w) - \gamma_z(0,t)\,| \\ &\quad + |\, \gamma_z(0,t)\,|\; \big[\, |X_{r,w} - X_0| + |r| + |w - t|\,\big] \big\} \,, \end{aligned}$$

on observem que per (1.6.8)

$$|Y_z(r,w) - \gamma_z(0,t)| \le C\, \big\{ |Y_z(r,w) - \gamma_z(r,w)| + |r| + |w - t| \big\},$$

de manera que (1.4.13) s'obté de les estimacions (1.4.9) i (1.4.10) amb $\beta = \delta$.

Aleshores, per la desigualtat de Txebixef,

$$\begin{aligned} p_1(\varepsilon,\beta) &\leq P\Big\{ \int_0^{\varepsilon^\beta} \int_{t-\varepsilon^\beta}^t \left[a_3(X_{r,w},r,w)\; Y_z(r,w) - a_3(X_0,0,t)\; \gamma_z(0,t) \right]^2 dr\, dw > \varepsilon \Big\} \\ &\leq \varepsilon^{q(2\beta-1)} \sup_{(r,w)\in(0,\varepsilon^\beta)\times(t-\varepsilon^\beta,t)} E\left(|a_3(X_{r,w},r,w)\; Y_z(r,w) - a_3(X_0,0,t)\gamma_z(0,t)\,|^{2q} \right) \\ &\leq C_q\; \varepsilon^{q(3\beta-1)}\,. \end{aligned}$$

Com que $\beta > \frac{1}{3}$, existirà $\varepsilon_1 > 0$ tal que $p_1(\varepsilon,\beta) \leq \varepsilon^p$, per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Diem $K := \big|\, a_3(X_0,0,t)\; \gamma_z(0,t) \,\big|$. Per la hipòtesis (H_45) i (1.6.14), $K > 0$. Aleshores

$$p_2(\varepsilon,\beta) = P\{K^2\varepsilon^{2\beta} \leq 4\varepsilon\}.$$

Com que $\beta < \frac{1}{2}$ existirà $\varepsilon_2 > 0$ tal que $p_2(\varepsilon,\beta) = 0$ per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

La desigualtat (1.4.12) i els resultats demostrats per $p_1(\varepsilon,\beta)$, $p_2(\varepsilon,\beta)$ impliquen (1.4.11).■

La demostració del Teorema 1.4.4 amb hipòtesis de Hörmander no restringides vindrà donada per la proposició següent.

Proposició 1.4.9. *Suposem (H_41), (H_22) i (H_43). Fixat $z \in T\setminus E$ suposem que se satisfan (H_44) i (H_46). Aleshores,* $\left(\int_{R_z} |D_\alpha X_z|^2\, d\alpha \right)^{-1} \in L^p(\Omega)$, *per qualsevol $p \in [1,\,\infty)$.*

Abans de demostrar la proposició, presentarem uns resultats auxiliars, recollits en un lema tècnic, que es compleixen sota les hipòtesis de la Proposició 1.4.9.

Fixat $z = (s,t) \in T\setminus E$ definim

$$Z^z_\zeta = X_0 + \int_{R_\zeta\cap R_z} \gamma_{0,t}(0,v) \left[a_3(X_\eta,\eta)\, dW_\eta + a_4(X_\eta,\eta)\, d\eta \right],\ \zeta \in T\,,\ \eta = (u,v).$$

Observem que $\Big\{ \int_{R_\zeta\cap R_z} \gamma_{0,t}(0,v)\, a_3(X_\eta,\eta)\, dW_\eta\,,\ \zeta \leq z \Big\}$ és una martingala biparamètrica respecte la filtració generada pel drap brownià. A més a més, és fàcil comprovar que $\sup_{\zeta\leq z} E(\,|Z^z_\zeta|^p\,) \leq C_p$.

Lema 1.4.10. *Sota les hipòtesis de la Proposició 1.4.9 i per $p \in [1, \infty)$ es compleix*

$$\sup_{\zeta \in D^z_\beta(\varepsilon)} E\left(|Z^z_\zeta - X_0|^{2p} + |X_\zeta - X_0|^{2p}\right) \leq C_p\, \varepsilon^{2\beta p} \tag{1.4.14}$$

$$\sup_{\zeta \in D^z_\beta(\varepsilon)} E\left(|X_\zeta - Z^z_\zeta|^{2p}\right) \leq C_p\, \varepsilon^{2\beta p} \tag{1.4.15}$$

$$\sup_{\zeta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E\left(|X_\zeta - Z^z_\zeta|^{2p}\right) \leq C_p \left\{ \varepsilon^{3\beta p} + \varepsilon^{(2\delta+\beta)p} \right\}. \tag{1.4.16}$$

Prova. (H_46), la propietat de Lipschitz d'a_3 i (1.4.9) impliquen, per $\zeta \in D^z_\beta(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
E\left(|Z^z_\zeta - X_0|^{2p}\right) &\leq C_p \left\{ E\left(\Big| \int_{R_\zeta} \gamma_{0,t}(0,v)\, \left(a_3(X_\eta, \eta) - a_3(X_0, \eta)\right) dW_\eta \Big|^{2p} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \Big| \int_{R_\zeta} \gamma_{0,t}(0,v) \left(a_3(X_0,\eta) - a_3(X_0,0,v)\right) dW_\eta \Big|^{2p} + \Big| \int_{R_\zeta} \gamma_{0,t}(0,v)\, a_4(X_\eta,\eta)\, d\eta \Big|^{2p} \right) \right\} \\
&\leq C_p \left\{ \varepsilon^{\beta(p-1)} \left(\int_{R_\zeta} E\left(|X_\eta - X_0|^{2p}\right) d\eta + \int_{R_\zeta} \varepsilon^{2\beta p}\, d\eta \right) + \varepsilon^{2\beta p} \right\} \leq C_p\, \varepsilon^{2\beta p}.
\end{aligned}$$

De manera anàloga, $E\left(|X_\zeta - X_0|^{2p}\right) \leq C_p\, \varepsilon^{2\beta p}$. I així hem demostrat (1.4.14).
Utilitzant la desigualtat triangular, (1.4.15) s'obté fàcilment de (1.4.14).
Per comprovar (1.4.16), apliquem les desigualtats de Burkholder i de Hölder i obtenim

$$\begin{aligned}
E\left(|X_\zeta - Z^z_\zeta|^{2p}\right) &\leq C_p \left\{ E\left(\Big| \int_{R_\zeta} \left(\gamma_\zeta(\eta) - \gamma_{0,t}(0,v)\right) a_3(X_\eta,\eta)\, dW_\eta \Big|^{2p} \right) \right. \\
&\quad \left. + E\left(\Big| \int_{R_\zeta} \left(\gamma_\zeta(\eta) - \gamma_{0,t}(0,v)\right) a_4(X_\eta,\eta)\, d\eta \Big|^{2p} \right) \right\} \\
&\leq C_p \left\{ |R_\zeta|^{p-1} \int_{R_\zeta} |\gamma_\zeta(\eta) - \gamma_{0,t}(0,v)|^{2p}\, E\left(1 + |X_\eta|^p\right) d\eta \right\}.
\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Les propietats (1.6.8) i (1.6.9) de la funció $\gamma_z(\cdot)$ impliquen

$$|\gamma_\zeta(\eta) - \gamma_{0,t}(0,v)| \leq C\left(|\zeta_1| + |\zeta_2 - t| + |u|\right),$$

on $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$. Per tant, per $\zeta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)$,

$$|\gamma_\zeta(\eta) - \gamma_{0,t}(0,v)| \leq C\left(\varepsilon^\beta + \varepsilon^\delta\right),$$

i combinant aquesta darrera estimació amb (1.4.17) obtenim (1.4.16). ∎

Prova de la Proposició 1.4.9. Volem demostrar (1.4.11). Per $\varepsilon, \beta, \delta \in (0,1)$, tenim

$$P\Big\{ \int_{R_z} |a_3(X_\alpha, \alpha) Y_z(\alpha)|^2 \, d\alpha \le \varepsilon \Big\} \le P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} |a_3(X_\alpha, \alpha) Y_z(\alpha)|^2 \, d\alpha \le \varepsilon \Big\}$$
$$\le q_1(\varepsilon, \beta, \delta) + q_2(\varepsilon, \beta, \delta), \tag{1.4.18}$$

amb

$$q_1(\varepsilon,\beta,\delta) = P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} |a_3(X_\eta, \eta)\, Y_z(\eta)|^2 \, d\eta \le \varepsilon,$$
$$\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} |a_3(Z^z_\eta, u, t)\, \gamma_z(u,t)|^2 \, d\eta > 4\,\varepsilon \Big\},$$
$$q_2(\varepsilon,\beta,\delta) = P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} |a_3(Z^z_\eta, u, t)\, \gamma_z(u,t)|^2 \, d\eta \le 4\,\varepsilon \Big\},$$

$\eta = (u, v)$.
Anem a veure que

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E\big(|a_3(X_\eta, \eta) Y_z(\eta) - a_3(Z^z_\eta, u, t)\, \gamma_z(u,t)|^{2q} \big) \le C_q\, (\varepsilon^{\delta q} + \varepsilon^{3\beta q}). \tag{1.4.19}$$

En efecte. (1.4.10), (1.6.7), (1.6.8), (1.4.16) i $(H_4 3)$ impliquen, per $\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)$

$$E\big(|a_3(X_\eta, \eta) Y_z(\eta) - a_3(Z^z_\eta, u, t) \gamma_z(u,t)|^{2q} \big) \le C_q\, E\big\{ (1 + |X_\eta|^{2q}) |Y_z(\eta) - \gamma_z(\eta)|^{2q}$$
$$+ (1 + |X_\eta|^{2q})\, |\gamma_z(\eta) - \gamma_z(u,t)|^{2q} + |\gamma_z(u,t)|^{2q}\, |X_\eta - Z^z_\eta|^{2q}$$
$$+ |\gamma_z(u,t)|^{2q}\, |a_3(Z^z_\eta, \eta) - a_3(Z^z_\eta, u, t)|^{2q} \big\}$$
$$\le C_q\, \big\{ \varepsilon^{\delta q} + \varepsilon^{2\delta q} + \varepsilon^{3\beta q} + \varepsilon^{(2\delta+\beta) q} + \varepsilon^{2\delta q} \big\} \le C_q\, (\varepsilon^{\delta q} + \varepsilon^{3\beta q}).$$

I per la desigualtat de Txebixef

$$q_1(\varepsilon,\beta,\delta) \le P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \big[a_3(X_\eta, \eta) Y_z(\eta) - a_3(Z^z_\eta, u, t) \gamma_z(u,t) \big]^2 \, d\eta > \varepsilon \Big\}$$
$$\le \varepsilon^{-q} E\Big(\Big| \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \big[a_3(X_\eta, \eta) Y_z(\eta) - a_3(Z^z_\eta, u, t) \gamma_z(u,t) \big]^2 d\eta \Big|^q \Big)$$
$$\le C_q\, \big(\varepsilon^{q(2\delta+\beta-1)} + \varepsilon^{q(\delta+4\beta-1)} \big). \tag{1.4.20}$$

Apliquem ara la fórmula d'Itô al procés $\{ Z^z_{u,v},\ u \in [0,1] \}$,

$$a_3(Z^z_{u,v}, u, t) = a_3(Z^z_{0,v}, u, t) + \int_{R_{u,v}} \partial_1\, a_3(Z^z_{r,v}, u, t)\, \gamma_{0,t}(0, w)$$
$$\times \{ a_3(X_{r,w}, r, w)\, dW_{r,w} + a_4(X_{r,w}, r, w)\, dr\, dv \}$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{R_{u,v}} \partial_1^2\, a_3(Z^z_{r,v}, u, t)\, \gamma^2_{0,t}(0, w)\, a_3^2(X_{r,w}, r, w)\, dr\, dw.$$

Fent un desenvolupament de Taylor obtenim

$$a_3(X_0, u, t) = \partial_2\, a_3(X_0, 0, t)\, u + \partial_2^2\, a_3(X_0, \bar{r}, t)\, \frac{u^2}{2}\,,$$

per algun $\bar{r} \in (0, u)$, ja que $a_3(X_0, 0, t) = 0$. Podem per tant escriure,

$$a_3(Z^z_{u,v}, u, t) - u\Big(\partial_2\, a_3(X_0, 0, t) + \partial_1\, a_3(X_0, 0, t) \int_0^v \gamma_{0,t}(0, w)\; a_4(X_0, 0, w)\, dw\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{4} M_j(u, v) \tag{1.4.21}$$

on,

$$M_1(u, v) = \int_{R_{uv}} \partial_1\, a_3(Z^z_{r,v}, u, t)\; \gamma_{0,t}(0, w)\; a_3(X_{r,w}, r, w)\, dW_{rw}\,,$$
$$M_2(u, v) = \int_{R_{uv}} \gamma_{0,t}(0, w)\, \big[\, \partial_1\, a_3(Z^z_{r,v}, u, t)\; a_4(X_{r,w}, r, w) - \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\; a_4(X_0, 0, w)\big]\, dr\, dw\,,$$
$$M_3(u, v) = \frac{1}{2} \int_{R_{uv}} \partial_1^2\, a_3(Z^z_{r,v}, u, t)\; \gamma^2_{0,t}(0, w)\; a_3^2(X_{r,w}, r, w)\, dr\, dw\,,$$
$$M_4(u, v) = \partial_2^2\, a_3(X_0, \bar{r}, t)\, \frac{u^2}{2}\,.$$

Aleshores, per $\eta = (u, v) \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)$,

$$\sum_{j=1}^{4} E\left(|M_j(\eta)|^{2q}\right) \le C_q\; \varepsilon^{3\beta q}\,, \quad q \in [1, \infty). \tag{1.4.22}$$

Veiem-ho. Com que $a_3(X_0, 0, w) = 0$, per qualsevol $w \le t$, la propietat de Lipschitz d'a_3 i (1.4.14) impliquen

$$E\left(\,|M_1(\eta)\,|^{2q}\right) = E\Big(\Big|\int_{R_{uv}} \partial_1 a_3(Z^z_{r,v}, u, t)\gamma_{0,t}(0, w)\; \big[a_3(X_{r,w}, r, w) - a_3(X_0, 0, w)\big]\, dW_{r,w}\Big|^{2q}\Big)$$
$$\le C_q\; \varepsilon^{\beta(q-1)} \int_{R_{uv}} \left(E\left(\,|X_{r,w} - X_0|^{2q}\right) + |r|^{2q}\right) dr\, dw \le C_q\; \varepsilon^{3\beta q}\,.$$

Per altra banda, les propietats de Lipschitz de $\partial_1\, a_3$ i a_4, $(H_4 4)$, (1.6.7) i (1.4.14) impliquen

$$E\left(\,|M_2(\eta)\,|^{2q}\right)$$
$$\le C_q\,\Big\{\, E\Big(\Big|\int_{R_{uv}} \gamma_{0,t}(0, w) a_4(X_{r,w}, r, w)\big[\partial_1 a_3(Z^z_{r,v}, u, t) - \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\,\big]\, dr\, dw\,\Big|^{2q}$$
$$+ \Big|\int_{R_{uv}} \gamma_{0,t}(0, w)\; \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\; \big(a_4(X_{r,w}, r, w) - a_4(X_0, 0, w)\big)\, dr\, dw\,\Big|^{2q}\Big)\Big\}$$
$$\le C_q\; \varepsilon^{4\beta q}\,.$$

Introduïnt també $a_3(X_0, 0, t)$ com a l'estudi de $M_1(\eta)$, és fàcil obtenir

$$E\left(|M_3(\eta)|^{2q}\right) \leq C_q\ \varepsilon^{2\beta q}\left(E(|X_{r,w} - X_0|^{4q}) + |r|^{4q}\right) \leq C_q\ \varepsilon^{6\beta q}.$$

Finalment $E\left(|M_4(\eta)|^{2q}\right) \leq C_q\ \varepsilon^{4\beta q}$ i (1.4.22) queda completament provat.
La identitat (1.4.21) implica

$$q_2(\varepsilon, \beta, \delta) \leq q_{21}(\varepsilon, \beta, \delta) + q_{22}(\varepsilon, \beta, \delta), \tag{1.4.23}$$

amb

$$q_{21}(\varepsilon, \beta, \delta) = P\left\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(u,t)\left(\sum_{j=1}^{4} M_j(\eta)\right)^2 d\eta > 4\,\varepsilon\right\},$$

$$q_{22}(\varepsilon, \beta, \delta) = P\left\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(u,t)\, u^2\ \left[\partial_2\, a_3(X_0, 0, t) + \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\int_0^v \gamma_{0,t}(0,w)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, a_4(X_0, 0, w)\, dw\right]^2 du\, dv < 16\,\varepsilon\right\}.$$

Utilitzant la desigualtat de Txebixef, (1.6.7) i (1.4.22) tenim

$$q_{21}(\varepsilon, \beta, \delta) \leq C_q\ \varepsilon^{(\delta + 4\beta - 1)q}. \tag{1.4.24}$$

Definim ara

$$q_{221}(\varepsilon, \beta, \delta) = P\left\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(u,t)\, u^2\left[\partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\int_v^t \gamma_{0,t}(0,w)\ a_4(X_0, 0, w)\, dw\right]^2\right.$$
$$\left.\times\, du\, dv > 16\,\varepsilon\right\},$$

$$q_{222}(\varepsilon, \beta, \delta) = P\left\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(u,t)\, u^2\left[\partial_2\, a_3(X_0, 0, t) + \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \int_0^t \gamma_{0,t}(0,w)\ a_4(X_0, 0, w)\, dw\right]^2 du\, dv < 64\,\varepsilon\right\},$$

de manera que

$$q_{22}(\varepsilon, \beta, \delta) \leq q_{221}(\varepsilon, \beta, \delta) + q_{222}(\varepsilon, \beta, \delta). \tag{1.4.25}$$

Per Txebixef, és fàcil veure que

$$q_{221}(\varepsilon, \beta, \delta) \leq C_q\ \varepsilon^{(3\delta + 3\beta - 1)q}. \tag{1.4.26}$$

Per altra banda, sigui $K = \left|\,\partial_2\, a_3(X_0, 0, t) + \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\int_0^t \gamma_{0,t}(0,w)\ a_4(X_0, 0, w)\, dw\,\right|$.
Com que per (1.6.16), $\gamma_z(u,t) = \exp\ \left(\int_u^s a_1(r,t)\, dr\right)$, i per tant, $\gamma_z(u,t) > C$, tenim que

$$\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(u,t)\ u^2\ \left[\partial_2\, a_3(X_0, 0, t) + \partial_1\, a_3(X_0, 0, t)\int_0^t \gamma_{0,t}(0,w)\ a_4(X_0, 0, w)\, dw\right]^2 du\, dv$$
$$\geq \frac{K^2}{3}\ C^2\ \varepsilon^{3\beta + \delta}.$$

I per tant,

$$q_{222}(\varepsilon,\beta,\delta) \leq P\left\{ \frac{K^2\,C^2}{3} \leq 64\,\varepsilon^{1-(3\beta+\delta)}\right\}. \tag{1.4.27}$$

Escollim ara $\delta,\beta \in (0,1)$ que satisfacin les desigualtats $2\delta+\beta-1>0$, $\delta+4\beta-1>0$ i $1-3\beta-\delta>0$ (per exemple, $\delta=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{7}$). Aleshores, per (1.4.18), (1.4.20), (1.4.23), (1.4.24), (1.4.25), (1.4.26) i (1.4.27) obtenim l'existència d'un $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que (1.4.11) es compleix per tot $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. I així s'acaba la prova. ∎

Prova del Teorema 1.4.4. Aplicarem el Teorema 1.4.2 a la variable aleatòria $F = X_z$. Els resultats establerts a les Proposicions 1.4.6, 1.4.8 i 1.4.9 demostren que es satisfan les hipòtesis del Teorema. ∎

Observació. Si els coeficients a_i, $i=3,4$, no depenen de $z \in T$, el Teorema 1.4.4 es pot donar sota el següent conjunt d'hipòtesis: (H_41), (H_22) i , o bé $a_3(X_0) \neq 0$, o bé $a_3(X_0)=0$ i $a_3'(X_0)\,a_4(X_0) \neq 0$.

1.5. GRANS DESVIACIONS

Preliminars

L'objectiu d'aquesta secció és estudiar les petites pertorbacions de (1.1.1). Es tractarà d'establir un Principi de Grans Desviacions (que escriurem de manera abreujada com PGD) per les solucions de l'equació (1.1.1) quan considerem petites pertorbacions del brownià que governa l'equació.

La primera part d'aquesta secció està dedicada a recordar que diu un PGD i a presentar el mètode que utilitzarem en el nostre cas per obtenir-lo. Provarem després un PGD utilitzant la formulació (1.1.9) de la solució. Per acabar, indicarem breument com obtenir el PGD utilitzant la representació (1.1.4). Les hipòtesis necessàries en aquest últim cas són més febles que les anteriors, però la demostració és molt més llarga i complicada.

Sigui $(\mathbb{E},\mathcal{E})$ un espai mètric separable i complet amb la σ-àlgebra de Borel corresponent. Sigui $(P_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0}$ una família de mesures de probabilitat en $(\mathbb{E},\mathcal{E})$ i $I:\mathbb{E}\longrightarrow[0,\infty)$ una funció semi-contínua inferiorment, anomenada *funcional d'acció* , tal que els conjunts $\{I \leq a\}$ són compactes per qualsevol $a \in [0,\infty)$.

Definició 1.5.1. *Direm que $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ satisfà un PGD amb funcional d'acció I si es compleix*

$$\varepsilon^2 \log P_\varepsilon \{O\} \geq - \wedge (O), \quad \text{per cada obert } O,$$
$$\varepsilon^2 \log P_\varepsilon \{F\} \leq - \wedge (F), \quad \text{per cada tancat } F,$$

on, donat un subconjunt $A \subset \mathbb{E}$, $\wedge(A) = \inf_{x \in A} I(x)$.

Aquesta definició es pot donar també pel cas en que la família de probabilitats és una successió.

Tenim diferents tècniques per construir nous PDGs a partir de famílies de probabilitats que ja en satisfan un. Un dels mètodes bàsics és conegut com el Principi de Contracció. El podem anunciar en el següent teorema.

Teorema 1.5.2. *Sigui $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ una família de probabilitats que satisfà un PGD en $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ amb funcional d'acció I. Suposem que existeix una funció contínua $\Phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, on $\mathbb{E}'$ és un espai mètric complet i separable. Aleshores, la família de mesures de probabilitats $Q_\varepsilon = P_\varepsilon \circ \Phi^{-1}$, definides en $\mathbb{E}'$, satisfà un PGD amb funcional d'acció J, on*

$$J(y) = \inf \{I(x), \Phi(x) = y\}.$$

Ara bé, en molts casos la funció Φ que sabem construir no és contínua. Aquest és, per exemple, el cas d'un procés de difusió quan definim la funció a partir de l'esquelet de la solució. Per exemple, considerem els processos $\{Z^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, solucions de

$$dZ_t^\varepsilon = \varepsilon\sigma(Z_t^\varepsilon)dW_t + b(Z_t^\varepsilon)dt,$$

$Z_0^\varepsilon = z_0 \in \mathbb{R}$, on b i σ són funcions reals prou regulars.
Si volem obtenir un PGD per la llei de la família $\{Z_t^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ podríem intentar aplicar el Teorema de Contracció. Pel Teorema de Schilder sabem que la família $\{\varepsilon W, \varepsilon > 0\}$ satisfà un PGD a l'espai de les funcions contínues $\mathcal{C}([0, t_0], \mathbb{R})$ amb funcional d'acció

$$I(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{t_0} |\dot{h}(s)|^2 ds, & \text{si } f \in \mathcal{H}_1; \\ \infty, & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $\mathcal{H}_1$ és l'espai de Cameron-Martin, és a dir, l'espai de les funcions reals absolutament contínues definides a $[0, t_0]$, que s'anul.len a l'origen i tenen derivada de quadrat integrable. Podem definir la funció que ve donada per l'esquelet i que a cada $f \in \mathcal{H}_1$ li fa correspondre la solució de

$$d\Phi(f)_t = \sigma(\Phi(f)_t)df_t + b(\Phi(f)_t)dt,$$

$\Phi(f)_0 = z_0$.
Observem que $\Phi(\varepsilon W) = Z^\varepsilon$. Per tant, si la funció fos contínua, aplicant el Principi de Contracció obtindríem un PGD pel procés de difusió. Aquesta funció, però, en general no és contínua.

Per solucionar aquest problema, Azencott va establir un mètode basat en una propietat que podem anomenar de quasi-continuïtat. Aquest mètode el presentem en el següent teorema.

Teorema 1.5.3. [A] *Siguin* (E_i, d_i), $i = 1, 2$ *dos espais mètrics complets i separables i* $X_i^\varepsilon : \Omega \to E_i$, $\varepsilon > 0$, $i = 1, 2$, *dues famílies de variables aleatòries. Suposem que* $\{X_1^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ *satisfà un PGD amb funcional d'acció* $\tilde{I} : E_1 \to [0, \infty]$. *Sigui* $F : \{\tilde{I} < +\infty\} \to E_2$ *una funció tal que las seves restriccions als conjunts compactes* $\{\tilde{I} \leq a\}$, $a \in [0, \infty)$, *són contínues en la topologia d'*E_1. *Per* $g \in E_2$, *diem*

$$I(g) = \inf\{\tilde{I}(f) : F(f) = g\}.$$

Suposem que per qualssevol $R, \rho, a > 0$ *existeixen* $\alpha > 0$ *i* $\varepsilon_0 > 0$ *tals que per* $f \in E_1$ *satisfent* $\tilde{I}(f) \leq a$ *i* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *tenim*

$$P\left\{ d_2(X_2^\varepsilon, F(f)) \geq \rho, d_1(X_1^\varepsilon, f) < \alpha \right\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right). \tag{1.5.1}$$

Aleshores, la família $\{X_2^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ *satisfà un PGD amb funcional d'acció I.*

Resultats

Considerem el conjunt d'hipòtesis (H_5) sobre els coeficients de l'equació (1.1.1),

$(H_5 1)$ $a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 3, 4$ són funcions Lipschitz afitades.
$(H_2 2)$ $a_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, són derivables, afitades amb derivades afitades.

Sota aquestes hipòtesis i amb $x_0 \in \mathbb{R}$, considerem la família $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ de processos indexats en T que satisfan l'equació estocàstica

$$X_z^\varepsilon = x_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \left[\varepsilon\, a_3(X_\eta^\varepsilon)\, dW_\eta + a_4(X_\eta^\varepsilon)\, d\eta\right]. \tag{1.5.2}$$

i que corresponen a les solucions de

$$\frac{\partial^2 X_{s,t}}{\partial s\, \partial t} = a_1(s,t)\, \frac{\partial X_{s,t}}{\partial t} + a_2(s,t)\, \frac{\partial X_{s,t}}{\partial s} + \varepsilon a_3(X, s, t)\, \dot{W}_{s,t} + a_4(X, s, t),$$

$(s,t) \in T$, $X_{s,t} = x_0$ sobre els eixos.

Establirem un PGD per $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ a l'espai $C_{x_0}(T)$ de les funcions reals contínues definides en T que prenen el valor x_0 sobre els eixos. El nostre objectiu serà aplicar el resultat d'Azencott a les variables aleatòries $X_1^\varepsilon = \varepsilon W$ i $X_2^\varepsilon = X^\varepsilon$ donades a (1.5.2).

El cas particular $a_1 = a_2 = 0$ ha estat estudiat a [D-D] seguint aquest mateix mètode.

Per poder obtenir l'estimació (1.5.1) ens calen dos tipus d'eines: desigualtats exponencials i un lema tipus Gronwall. Donarem primer de tot aquests resultats. Obtindrem una desigualtat exponencial per un tipus d'integral estocàstica que no serà una martingala. Aquest mateix problema ha estat estudiat a [So] en el context de les equacions diferencials estocàstiques en derivades parcials parabòliques.

Proposició 1.5.4. *Sigui $g_z(\eta)$ una funció real definida en T^2 amb $g_0(\cdot) = 0$. Suposem que existeix una constant positiva K_g tal que per tot z, $z' \in T$,*

$$\int_T \left(g_z(\eta) - g_{z'}(\eta) \right)^2 d\eta \leq K_g \; d(z, z'),$$

on d denota la distància Euclideana en T. Sigui $\sigma = \{\sigma(z),\ z \in T\}$ un procés estocàstic $\mathcal{F}_z$-adaptat. Aleshores, existeixen constants positives K_1 i K_2 tals que

$$P\Big\{ \sup_{z\in T} \Big| \int_T g_z(\eta)\, \sigma(\eta,\omega)\, dW_\eta \Big| \geq L \Big\} \leq \exp\Big(- \frac{L^2}{K_g K_\sigma^2} K_2 \Big) \tag{1.5.3}$$

per tot $L \geq 0$ amb $\frac{L}{K_g^{\frac12} K_\sigma} \geq K_1$, on $K_\sigma = \sup_{z\in T,\, \omega\in\Omega} |\sigma(z,\omega)|$.

Prova. Diem

$$I_z = \int_T g_z(\eta)\, \sigma(\eta,\omega)\, dW_\eta .$$

Suposem que sabem provar l'existència de constants positives C_1 i C_2 i d'una variable aleatòria B tals que

$$E(B) \leq \sqrt{2}, \tag{1.5.4}$$

$$\sup_{z\in T} |I_z| \leq C_1\, K_g^{\frac12}\, K_\sigma \left[(\ell n_+ B)^{\frac12} + C_2 \right], \tag{1.5.5}$$

on $\ell n_+ z = \max\{\ell n\, z,\ 0\}$. Aleshores, de (1.5.4) obtenim l'estimació

$$E\left(\exp(\ell n_+ B) \right) \leq 1 + \sqrt{2}$$

i utilitzant (1.5.5) i la desigualtat de Txebixef exponencial tenim

$$\begin{aligned}
P\Big\{ \sup_{z\in T} |I_z| \geq L \Big\} &\leq P\Big\{ (\ell n_+ B) \geq \Big(\frac{L}{C_1\, K_g^{\frac12}\, K_\sigma} - C_2 \Big)^2 \Big\} \\
&\leq E\Big[\exp(\ell n_+ B) \Big] \exp\Big\{ - \Big(\frac{L}{C_1\, K_g^{\frac12}\, K_\sigma} - C_2 \Big)^2 \Big\} \\
&\leq \exp\Big\{ - \Big(\frac{L}{C_1\, K_g^{\frac12}\, K_\sigma} - C_2 \Big)^2 + \ell n (1 + \sqrt{2}) \Big\} \\
&= \exp\Big\{ - \frac{L^2}{K_g K_\sigma^2} \Big[\Big(\frac{1}{C_1} - \frac{K_g^{\frac12} K_\sigma}{L} C_2 \Big)^2 - \frac{\ell n (1 + \sqrt{2})\, K_g K_\sigma^2}{L^2} \Big] \Big\},
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

si $\frac{L}{K_g^{\frac12} K_\sigma} \geq C_1\, C_2$.

Diem $K_2 := \frac{1}{8\,C_1^2}$, $K_1 := \max\{2\,C_1\,C_2\,,\sqrt{8}\,\left(\ell n\,(1+\sqrt{2})\,\right)^{\frac{1}{2}}\,C_1\}$, i suposem $\frac{L}{K_g^{\frac{1}{2}}\,K_\sigma} \geq K_1$.
El darrer terme de (1.5.6) és igual a

$$\exp\left\{-\frac{L^2}{K_g\,K_\sigma^2}\,8\,K_2\left[\left(1-\frac{K_g^{\frac{1}{2}}\,K_\sigma}{L}\,C_2\,C_1\right)^2-\frac{\ell n\,(1+\sqrt{2})\,K_g\,K_\sigma^2}{L^2}\,C_1^2\right]\right\}$$

i està afitat per

$$\exp\left\{-\frac{L^2}{K_g\,K_\sigma^2}\,8\,K_2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right]\right\}=\exp\left\{-\frac{L^2}{K_g\,K_\sigma^2}K_2\right\}.$$

Per tant, (1.5.3) queda demostrat.

Veurem ara les demostracions de (1.5.4) i (1.5.5). El mètode utilitzat és semblant a l'emprat a [So]. Utilitzant la desigualtat de Burkholder observem primer

$$\begin{aligned}E\left(\,|I_z-I_{z'}|^2\right)&=\int_T\left(g_z(\eta)-g_{z'}(\eta)\right)^2 E\left(\sigma^2(\eta,\omega)\right)d\eta\\&\leq K_g\,K_\sigma^2\,d(z,z')\,.\end{aligned}$$

Diem $\rho(y)=y^{\frac{1}{2}}\;2^{\frac{1}{4}}\;K_g^{\frac{1}{2}}\;K_\sigma$, $y\geq 0$, $\psi(x)=\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Sigui

$$B=\int_T\int_T\psi\left(\frac{I_z-I_{z'}}{\rho\left(d(z,z')/\sqrt{2}\right)}\right)dz\,dz'\,.$$

Anem a comprovar que B realment satisfà (1.5.4). Diem

$$g_{(z,z')}(\eta)=\left(g_z(\eta)-g_{z'}(\eta)\right)\frac{\sigma(\eta)}{\rho\left(d(z,z')/\sqrt{2}\right)}\,.$$

Si considerem la martingala contínua

$$\tilde{M}_r=\int_{R_{r1}}g_{(z,z')}(\eta)\,dW_\eta$$

respecte la filtració $\mathcal{F}_{r1}$, amb variació quadràtica associada

$$\langle\tilde{M}\rangle_r=\int_{R_{r1}}g_{(z,z')}^2(\eta)\,d\eta\leq 1\,,$$

és conegut que existeix un moviment brownià Z tal que $\tilde{M}_r=Z_{\langle\tilde{M}\rangle_r}$. D'aquesta manera, per les propietats del moviment brownià

$$\begin{aligned}E\left[\psi\left(\frac{I_z-I_{z'}}{\rho\left(d(z,z')/\sqrt{2}\right)}\right)\right]&=E\left[\exp\left(\frac{\tilde{M}_1^2}{4}\right)\right]\\&\leq E\left[\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\sup_{0\leq r\leq 1}|Z_r|^2\right)\right\}\right]=\sqrt{2}\,,\end{aligned}$$

i per tant $E(B)<+\infty$.

Podem aplicar ara el Lema de Garsia–Rodemich–Rumsey (veieu, per exemple, Teorema 1.1 de [W]), per cada ω-q.s. i z, $z' \in T$. Obtenim

$$|I_z - I_{z'}| \leq 8 \int_0^{d(z,z')} \psi^{-1}\left(\frac{B}{y^4}\right) d\rho(y),$$

i com que $I_0 = 0$,

$$\begin{aligned}\sup_{z\in T} |I_z| &\leq \sup_{z\in T} \left| 8 \int_0^{d(z,0)} \psi^{-1}\left(\frac{B}{y^4}\right) d\rho(y) \right| \\ &\leq 2^{\frac{9}{2}} \left| \int_0^{\sqrt{2}} \left((\ell n_+ B)^{\frac{1}{2}} + (\ell n_+\, y^{-4})^{\frac{1}{2}}\right) d\rho(y) \right|. \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Fent càlculs és fàcil comprovar

$$\int_0^{\sqrt{2}} (\ell n_+\, y^{-4})^{\frac{1}{2}}\, y^{-\frac{1}{2}}\, dy = 2\sqrt{2\pi}.$$

Finalment, (1.5.5) és una conseqüència de (1.5.7), ja que

$$\begin{aligned}\sup_{z\in T} |I_z| &\leq 2^{\frac{9}{2}} \left[(\ell n_+ B)^{\frac{1}{2}}\, \rho(\sqrt{2}) + K_g^{\frac{1}{2}}\, K_\sigma\, 2^{\frac{1}{4}}\, \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (\ell n_+ y^{-4})^{\frac{1}{2}}\, y^{-\frac{1}{2}}\, dy \right] \\ &\leq 2^5\, K_g^{\frac{1}{2}}\, K_\sigma \left[(\ell n_+ B)^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi} \right] \\ &= C_1\, K_g^{\frac{1}{2}}\, K_\sigma \left[(\ell n_+ B)^{\frac{1}{2}} + C_2 \right]\end{aligned}$$

amb $C_1 = 2^5$ i $C_2 = 2^{-\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}$. ∎

El lema tipus Gronwall que necessitem és el següent.

Lema 1.5.5. *Sigui $h : T \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció integrable no negativa que satisfà*

$$h(z) \leq K + \int_{R_z} \beta(\eta)\, h(\eta)\, d\eta\,, \quad z \in T\,,$$

on $K \geq 0$ i $\beta : T \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció integrable no negativa. Aleshores, per qualsevol $z \in T$,

$$h(z) \leq K\, \exp\left\{ \int_{R_z} \beta(\eta)\, d\eta \right\}.$$

Prova. És igual a la del Lema 4.13 de [L-S]. ∎

Denotarem per $\mathcal{H}_{x_0}$ el conjunt de les funcions absolutament contínues $f \in \mathcal{C}_{x_0}(T)$ amb $\int_T |\dot{f}(z)|^2 dz < +\infty$, on $\dot{f}(z)$ indica la derivada $\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s \, \partial t}$. Recordem que $\{\varepsilon W, \ \varepsilon > 0\}$ satisfà un PGD a $\mathcal{C}_0(T)$ amb funcional d'acció

$$\tilde{I}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \, \|f\|_{\mathcal{H}_0}^2, & \text{si } f \in \mathcal{H}_0; \\ +\infty, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per cada $f \in \mathcal{H}_0$, considerem la funció $\{ \, S(f)(z) \ \ z \in T \, \}$ que satisfà

$$S(f)(z) = x_0 + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \left[a_4 \left(S(f)(\eta) \right) + a_3 \left(S(f)(\eta) \right) \dot{f}(\eta) \right] d\eta \,. \tag{1.5.8}$$

Siguin $f, g \in \mathcal{H}_0$, $\|f\|_{\mathcal{H}_0} + \|g\|_{\mathcal{H}_0} \leq a$. Pel Lema 1.5.5 i $(H_5 1)$,

$$\| \, S(f) - S(g) \, \|_\infty \leq C \, \|\alpha\|_\infty \,,$$

on

$$\alpha(z) = \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \, a_3(S(g)(\eta)) \, \left(\dot{f}(\eta) - \dot{g}(\eta) \right) \, d\eta \,.$$

Suposem primer que a_3 és una funció de classe $\mathcal{C}^2$, afitada i amb les derivades afitades. Integrant per parts i utilitzant (1.6.7) es pot demostrar

$$\|\alpha\|_\infty \leq C \, \|f - g\|_\infty \,, \tag{1.5.9}$$

on la constant C depèn de $\|a_3\|_\infty + \|a_3'\|_\infty + \|a_3''\|_\infty$. En el cas general, (1.5.9) continua essent certa, com es pot comprovar fàcilment regularitzant a_3 mitjançant una convolució i passant al límit.

Fixem-nos que (1.5.9) ens indica que $f \longmapsto S(f)$ defineix una funció contínua de $\{ \, \|f\|_{\mathcal{H}_0} \leq a \, \}$ cap a $\mathcal{C}_{x_0}(T)$ respecte la topologia de la convergència uniforme.

L'objectiu d'aquesta secció és la demostració del resultat següent.

Teorema 1.5.6. *Sota les hipòtesis (H_5), la família de processos $\{X^\varepsilon, \ \varepsilon \geq 0\}$ solució de (1.5.2) satisfà un PGD a l'espai $\mathcal{C}_{x_0}(T)$ amb funcional d'acció*

$$I(g) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_T |\dot{f}(z)|^2 \, dz \,, \ \ g = S(f) \,, \ f \in \mathcal{H}_{x_0} \right\} ,$$

on $S(f)$ està definida a (1.5.8).

Com que ja tenim la continuïtat de la funció $f \longmapsto S(f)$, obtindrem el resultat transferint les estimacions de Ventzell–Freidlin, tal com ho presentem en el teorema següent.

Teorema 1.5.7. *Suposem (H_5). Per tot $f \in \mathcal{H}_0$, R, $\rho > 0$, $\varepsilon \in [0,1]$, existeix un $\alpha > 0$ tal que*

$$P\left\{ \|X^\varepsilon - S(f)\|_\infty > \rho\,,\ \|\varepsilon W - f\|_\infty < \alpha \right\} \le \exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon^2}\Big). \qquad (1.5.10)$$

Sigui $\{Y_z^\varepsilon,\ z \in T\}$ el procés definit per

$$Y_z^\varepsilon = x_0 + \int_{R_z} \varepsilon \gamma_z(\eta)\, a_3(Y_\eta^\varepsilon)\, dW_\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\big(a_4(Y_\eta^\varepsilon) + a_3(Y_\eta^\varepsilon)\, \dot f(\eta)\big)\, d\eta\,. \qquad (1.5.11)$$

La demostració del Teorema 1.5.7. es redueix a demostrar el resultat següent.

Teorema 1.5.8. *Per tot $f \in \mathcal{H}_0, R$, $\rho > 0$, existeix un $\alpha > 0$ tal que, per qualsevol $\varepsilon \in [0,1]$*

$$P\left\{ \|Y^\varepsilon - S(f)\|_\infty > \rho,\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha \right\} \le \exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon^2}\Big). \qquad (1.5.12)$$

Veiem-ho. Sigui $W_z^\varepsilon = W_z - \dfrac{1}{\varepsilon} f(z)$. Pel Teorema de Girsanov sabem que $\{W_z^\varepsilon\,,\ z \in T\}$ és un procés de Wiener respecte la probabilitat P^ε donada per

$$\frac{dP^\varepsilon}{dP} = \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_T \dot f(z)\, dW_z - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_T |\dot f(z)|^2\, dz \right\}.$$

Per cada $\rho, \alpha, \varepsilon > 0$, direm

$$B^\varepsilon = \Big\{ \|X^\varepsilon - S(f)\|_\infty > \rho\,,\ \|\varepsilon W - f\|_\infty < \alpha \Big\},$$
$$U^\varepsilon = \exp\Big\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_T \dot f(z)\, dW_z \Big\}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} P(B^\varepsilon) &\le P\Big\{ B^\varepsilon \cap \Big(U^\varepsilon \le \exp\big(\tfrac{\lambda}{\varepsilon^2}\big) \Big) \Big\} + P\Big\{ U^\varepsilon > \exp\big(\tfrac{\lambda}{\varepsilon^2}\big) \Big\} \\ &\le \exp\Big(\frac{\lambda + \frac{a}{2}}{\varepsilon^2}\Big)\, P^\varepsilon(B^\varepsilon) + P\Big\{ -\int_T \dot f(z)\, dW_z > \frac{\lambda}{\varepsilon} \Big\}, \end{aligned} \qquad (1.5.13)$$

on $a = \|f\|_{\mathcal{H}_0}^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considerem la martingala forta contínua $\Big\{ \int_{R_z} \dot f_\eta\, dW_\eta,\ z \in T \Big\}$. La desigualtat exponencial per martingales fortes establerta a la Proposició 5 de [D-D], implica l'existència de constants positives $\tilde K_1, \tilde K_2$ tals que

$$P\Big\{ \Big| \int_T \dot f(z)\, dW_z \Big| > \frac{\lambda}{\varepsilon} \Big\} \le \tilde K_1 \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{\tilde K_2\, \varepsilon^2 a} \Big),$$

per qualsevol $\lambda > 0$. Escollim $\lambda^2 \geq a\,\tilde{K}_2\,(R + \ell n\ \tilde{K}_1)$, aleshores

$$P\Big\{\,\big|\int_T \dot{f}(z)\,dW_z\big| > \frac{\lambda}{\varepsilon}\Big\} \leq \exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon^2}\Big). \tag{1.5.14}$$

A més a més, en termes de $\omega^\varepsilon = \omega - \frac{1}{\varepsilon}\,f$, el procés $X^\varepsilon(\omega)$ el podem escriure de la manera següent

$$X_z^\varepsilon(\omega) = X_z^\varepsilon\,(\omega^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,f\,) = x_0 + \int_{R_z} \varepsilon\,\gamma_z(\eta)\,a_3\big(X_\eta^\varepsilon\,(\omega^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,f\,)\,\big)\,dW_\eta^\varepsilon$$
$$+ \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\,\Big(a_4\,\big(X_\eta^\varepsilon\,(\omega^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,f)\big) + a_3\big(X_\eta^\varepsilon\,(\omega^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,f)\big)\,\dot{f}(\eta)\Big)\,d\eta\,.$$

Diem $Y^\varepsilon(\omega^\varepsilon) = X^\varepsilon\big(\omega^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,f\big)$. Aleshores,

$$P^\varepsilon(B^\varepsilon) = P\,\{\,\|Y^\varepsilon - S(f)\|_\infty > \rho\,,\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha\,\}\,,$$

amb Y^ε complint (1.5.11).
D'aquesta manera, (1.5.13), (1.5.14) i (1.5.12) ens completen la demostració del Teorema 1.5.7.

La demostració del Teorema 1.5.8 està dividida en un seguit de lemes i proposicions.

Lema 1.5.9. *Fixem $f \in \mathcal{H}_0$, $\|f\|_{\mathcal{H}_0} \leq a$. Aleshores, existeix una constant no negativa K depenent només dels coeficients i de a tal que, ω-q.s.*

$$\|\,Y^\varepsilon - S(f)\,\|_\infty \leq K\,\Big\|\int_{R_z} \varepsilon\,\gamma_z(\eta)\,a_3(Y_\eta^\varepsilon)\,dW_\eta\,\Big\|_\infty. \tag{1.5.15}$$

Prova. Les identitats (1.5.11) i (1.5.8) impliquen

$$|\,Y_z^\varepsilon - S(f)\,(z)\,| \leq \Big\|\int_{R_z} \varepsilon\,\gamma_z(\eta)\,a_3(Y_\eta^\varepsilon)\,dW_\eta\Big\|_\infty + C\int_{R_z} |\,Y_\eta^\varepsilon - S(f)\,(\eta)\,|\;|\,1 + \dot{f}(\eta)\,|\,d\eta\,.$$

Aplicant el Lema 1.5.5 obtenim l'estimació (1.5.15) amb $K = \exp\,\big(C(1+a)\big)$. ∎

Anem ara a plantejar una discretització del procés Y^ε. Necessitem però introduir primer una mica de notació.

Per $n \in \mathbb{N}$, $k, j = 0, 1, \cdots, n-1$, direm $s_k^n = \frac{k}{n}$, $t_j^n = \frac{j}{n}$, $z_{kj}^n = (s_k^n,\ t_j^n)$ i $\Delta_{k,j}^n = [s_k^n, s_{k+1}^n) \times [t_j^n, t_{j+1}^n)$. Definim ara $Y_z^{\varepsilon,n} = Y_{z_{kj}^n}^\varepsilon$ si $(s,t) \in \Delta_{k,j}^n$.

Proposició 1.5.10. *Per tot $R>0$ i $\mu>0$ existeix $n_0\in\mathbb{N}$, depenent de R i μ tal que per tot $n\geq n_0$ i $\varepsilon\in(0,1]$*

$$P\left\{\,\|Y^\varepsilon-Y^{\varepsilon,n}\|_\infty>\mu\,\right\}\leq\exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon^2}\Big).$$

Prova. Fixem n i diem $F^\varepsilon=\left\{\,\|Y^\varepsilon-Y^{\varepsilon,n}\|_\infty>\mu\,\right\}$, aleshores

$$F^\varepsilon\subset\bigcup_{k,j=0}^{n-1}\left(F^{\varepsilon,n}_{1,kj}\cup F^{\varepsilon,n}_{2,kj}\cup F^{\varepsilon,n}_{3,kj}\right), \tag{1.5.16}$$

amb

$$F^{\varepsilon,n}_{1,kj}=\Big\{\sup_{z\in\Delta^n_{kj}}\Big|\int_{R_z-R_{z^n_{kj}}}\varepsilon\,\gamma_z(\eta)\,a_3(Y^\varepsilon_\eta)\,dW_\eta\Big|>\frac{\mu}{3}\Big\},$$

$$F^{\varepsilon,n}_{2,kj}=\Big\{\sup_{z\in\Delta^n_{kj}}\Big|\int_{R_{z^n_{kj}}}\varepsilon\left(\gamma_z(\eta)-\gamma_{z^n_{kj}}(\eta)\right)a_3(Y^\varepsilon_\eta)\,dW_\eta\Big|>\frac{\mu}{3}\Big\},$$

$$F^{\varepsilon,n}_{3,kj}=\Big\{\sup_{z\in\Delta^n_{kj}}\Big|\int_T\left(\mathbf{1}_{R_z}(\eta)\,\gamma_z(\eta)-\mathbf{1}_{R_{z^n_{kj}}}(\eta)\,\gamma_{z^n_{kj}}(\eta)\right)\left(a_4(Y^\varepsilon_\eta)+a_3(Y^\varepsilon_\eta)\,\dot{f}_\eta\right)d\eta\,\Big|>\frac{\mu}{3}\Big\}.$$

Volem obtenir fites exponencials per les probabilitats $P(F^{\varepsilon,n}_{i,kj})$, $i=1,2,3$ per k,j fixats. Per $z=(s,t)$, sigui $\frac{z}{n}=\left(\frac{s}{n}\,,\,\frac{t}{n}\right)$.

Definim

$$\tilde{g}^1_z(\eta)=1_{R_{z^n_{kj}+\frac{z}{n}}\setminus R_{z^n_{kj}}}(\eta)\;\gamma_{z^n_{kj}+\frac{z}{n}}(\eta).$$

Aleshores

$$\sup_{z\in\Delta^n_{kj}}\Big|\int_{R_z-R_{z^n_{kj}}}\varepsilon\,\gamma_z(\eta)\;a_3(Y^\varepsilon_\eta)\,dW_\eta\,\Big|=\sup_{z\in T}\Big|\int_T\varepsilon\,\tilde{g}^1_z(\eta)\;a_3(Y^\varepsilon_\eta)\,dW_\eta\,\Big|.$$

És evident que $\tilde{g}^1_0\equiv0$. A més a més, per (1.6.9)

$$\int_T\left(\tilde{g}^1_z(\eta)-\tilde{g}^1_{z'}(\eta)\right)^2d\eta\leq C\,\frac{1}{n}\,d(z,z').$$

Aleshores, la Proposició 1.5.4 implica l'existència de constants positives K_1 i K_2 tals que

$$P(F^{\varepsilon,n}_{1,kj})\leq\exp\Big(-\frac{\mu^2n}{9\,C^3\,\varepsilon^2}\,K_2\Big),$$

quan $\frac{\mu\,n^{\frac{1}{2}}}{3\,C^{\frac{3}{2}}\,\varepsilon}\geq K_1$.

De manera anàloga

$$\sup_{z\in\Delta^n_{kj}} \Big| \int_{R_{z^n_{kj}}} \varepsilon \left(\gamma_z(\eta) - \gamma_{z^n_{kj}}(\eta) \right) a_3(Y^\varepsilon_\eta)\, dW_\eta \Big| = \sup_{z\in T} \Big| \int_T \varepsilon\, \tilde{g}^2_z(\eta)\; a_3(Y^\varepsilon_\eta)\, dW_\eta \Big|,$$

amb

$$\tilde{g}^2_z(\eta) = \mathbf{1}_{R_{z^n_{kj}}}(\eta) \left(\gamma_{z^n_{kj}+\frac{z}{n}}(\eta) - \gamma_{z^n_{kj}}(\eta) \right).$$

Aleshores $\tilde{g}^2_0 = 0$ i per tot $z,\ z' \in T$,

$$\int_T \left(\tilde{g}^2_z(\eta) - \tilde{g}^2_{z'}(\eta) \right)^2 d\eta \le C\, \frac{1}{n^2}\, d(z,\, z').$$

La Proposició 1.5.4 implica l'existència de constants K_1 i K_2 tals que

$$P\,(F^{\varepsilon,n}_{2,kj}) \le \exp\big(- \frac{\mu^2\, n^2}{9\, C^3\, \varepsilon^2}\, K_2 \big),$$

si $\frac{\mu\, n}{3\, C^{\frac{3}{2}}\, \varepsilon} \ge K_1$.

La desigualtat de Schwarz ens dóna

$$\sup_{z\in\Delta^n_{kj}} \Big| \int_T \left(\mathbf{1}_{R_z}(\eta)\, \gamma_z(\eta) - \mathbf{1}_{R_{z^n_{kj}}}(\eta)\, \gamma_{z^n_{kj}}(\eta) \right) \left(a_4(Y^\varepsilon_\eta) + a_3(Y^\varepsilon_\eta)\, \dot{f}(\eta) \right) d\eta \Big| \le \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

D'aquesta manera, per $n > \frac{9\, C^2}{\mu^2}$ el conjunt $F^{\varepsilon,n}_{3,kj}$ és buit i $P\,(F^{\varepsilon,n}_{3,kj}) = 0$.

Finalment, per (1.5.16)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \log P\,\{F^\varepsilon\} &\le \varepsilon^2 \log \Big\{ n^2 \Big(\exp\Big(- \frac{\mu^2\, n}{9\, C^3\, \varepsilon^2} K_2 \Big) + \exp\Big(- \frac{\mu^2\, n^2}{9\, C^3\, \varepsilon^2} K_2 \Big) \Big) \Big\} \\ &\le \varepsilon^2 \,(\log n^2 + \log 2) - \frac{\mu^2\, n\, K_2}{9\, C^3} \le -R \end{aligned}$$

per n prou gran i $\varepsilon \in [0,1]$. Això completa la prova de la proposició. ■

Proposició 1.5.11. *Per tot $R > 0$, $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$, existeixen $\mu_0 > 0$ (que no depèn de n) i $\alpha_0 > 0$ (depenent de n) tals que, per tot $\mu \le \mu_0$, $\alpha \le \alpha_0$ i $\varepsilon \in (0,1]$,*

$$\begin{aligned} P\Big\{ \Big\| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, a_3(Y^\varepsilon_\eta)\, dW_\eta \Big\|_\infty > \rho,\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha,\ \|Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n}\|_\infty \le \mu \Big\} \\ \le \exp\Big(- \frac{R}{\varepsilon^2} \Big). \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

Prova. Podem escriure

$$P\Big\{\Big\| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, a_3(Y^\varepsilon_\eta)\, dW_\eta \Big\|_\infty > \rho,\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha,\ \|Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n}\|_\infty \le \mu\Big\}$$

$$\le P\Big\{\Big\| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, \big(a_3(Y^\varepsilon_\eta) - a_3(Y^{\varepsilon,n}_\eta)\big)\, dW_\eta \Big\|_\infty > \frac{\rho}{2},\ \|Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n}\|_\infty \le \mu\Big\}$$

$$+ P\Big\{\Big\| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, a_3(Y^{\varepsilon,n}_\eta)\, dW_\eta \Big\|_\infty > \frac{\rho}{2},\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha\Big\}.$$

Observem que

$$\Big| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, a_3(Y^{\varepsilon,n}_\eta)\, dW_\eta \Big| = \Big| \sum_{j,k=0}^{n-1} \varepsilon\, a_3(Y^{\varepsilon,n}_{z^n_{k,j}}) \int_{R_z \cap \Delta^n_{kj}} \gamma_z(\eta)\, dW_\eta \Big|$$

$$\le C\,\varepsilon \sum_{j,k=0}^{n-1} \Big| \int_{R_z \cap \Delta^n_{kj}} \gamma_z(\eta)\, dW_\eta \Big|.$$

A la Secció 1.6 es demostra que $\gamma_z(\cdot)$ té derivades parcials de primer ordre i creuada de segon ordre afitades (Proposició 1.6.1). Aproximant la integral estocàstica per sumes de Riemann i fent un pas al límit, de manera anàloga a una integració per parts en el cas determinista, s'obté

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \gamma_z(\eta)\, dW_\eta &= W_{s_2,t_2}\, \gamma_z(s_2,t_2) - W_{s_1,t_2}\, \gamma_z(s_1,t_2) - W_{s_2,t_1}\, \gamma_z(s_2,t_1) \\
&+ W_{s_1,t_1}\, \gamma_z(s_1,t_1) \\
&- \int_{s_1}^{s_2} W_{u,t_2}\, \frac{\partial \gamma_z}{\partial u}(u,t_2)\, du + \int_{s_1}^{s_2} W_{u,t_1}\, \frac{\partial \gamma_z}{\partial u}(u,t_1)\, du \\
&- \int_{t_1}^{t_2} W_{s_2,v}\, \frac{\partial \gamma_z}{\partial v}(s_2,v)\, dv + \int_{t_1}^{t_2} W_{s_1,v}\, \frac{\partial \gamma_z}{\partial v}(s_1,v)\, dv \\
&+ \int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} W_{u,v}\, \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial u\, \partial v}(u,v)\, du\, dv\,.
\end{aligned}$$

Aleshores, per tot $\varepsilon \in (0,1]$, α i n tals que $\alpha < \frac{\rho}{18\, C^2\, n^2}$ tenim

$$P\Big\{\Big\| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, a_3(Y^{\varepsilon,n}_\eta)\, dW_\eta \Big\|_\infty > \frac{\rho}{2},\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha\Big\} = 0\,.$$

Considerem finalment $g_z(\eta) = \mathbf{1}_{R_z}(\eta)\, \gamma_z(\eta)$. La Proposició 1.5.4 implica l'existència de constants K_1 i K_2 tals que

$$P\Big\{\Big\| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, \big(a_3(Y^\varepsilon_\eta) - a_3(Y^{\varepsilon,n}_\eta)\big)\, dW_\eta \Big\|_\infty > \frac{\rho}{2},\ \|Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n}\|_\infty \le \mu\Big\}$$

$$\le \exp\Big(- \frac{\rho^2}{4\,\varepsilon^2\, C^3\, \mu^2}\, K_2\Big),$$

si $\mu \le \frac{\rho}{2\, C^{\frac{3}{2}}\, K_1}$.

I així, (1.5.17) es compleix per $\alpha \leq \frac{\rho}{18\, C^2\, n^2}$ i $\mu^2 \leq \frac{\rho^2 K_2}{4\, C^3\, R}$. ∎

Ara ja és possible donar la demostració del Teorema 1.5.7.

Prova del Teorema 1.5.7. Diem

$$A^\varepsilon = \left\{ \|Y^\varepsilon - S(f)\|_\infty > \rho \,,\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha \right\}.$$

La desigualtat (1.5.15) implica que per tot $n \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$, $A^\varepsilon \subset \cup_{i=1}^2 A_i^\varepsilon$, amb

$$A_1^\varepsilon = \left\{ \|Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n}\|_\infty > \mu \right\},$$
$$A_2^\varepsilon = \left\{ \| \int_{R_z} \varepsilon\, \gamma_z(\eta)\, a_3(Y_\eta^\varepsilon)\, dW_\eta \|_\infty > \frac{\rho}{K},\ \|\varepsilon W\|_\infty < \alpha,\ \|Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n}\|_\infty \leq \mu \right\}.$$

Els resultats de les Proposicions 1.5.9 i 1.5.10 completen la prova del teorema, i estableixen per tant el PGD per la família $\{X^\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. ∎

Com ja hem comentat, podem demostrar un PGD sense utilitzar la funció de Green, és a dir, treballant amb la representació (1.1.4) de la solució. Això ens permet treballar amb unes hipòtesis més febles que les que hem utilitzat fins ara en aquesta secció, però, per altra banda, fa que la demostració del PGD sigui més llarga i tècnicament més complicada. Com que l'estructura de la demostració és semblant a la que ja s'ha donat, indicarem breument les eines necessàries i algun punt especialment significatiu, sense donar les demostracions (veieu [R-S 1]).

El conjunt d'hipòtesis (H_5') que suposarem sobre els coeficients serà el següent:

$(H_5'1)$ $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 3, 4$ són funcions Lipschitz afitades.
$(H_5'2)$ $a_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ són funcions Lipschitz afitades.

Com abans, ens calen desenvolupar unes desigualtats exponencials i un lema tipus Gronwall adaptats a l'expressió actual. Necessitem primer definir una nova classe de processos.

Definició 1.5.12. *Sigui $p \geq 2$ i $\mathcal{L}_{tW}^p$ el conjunt dels processos $\beta_1 : [0,1] \times T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que són $\mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$-mesurables tals que*

(i) $\beta_1(t; u, v, \cdot)$ *és $\mathcal{F}_{u,t}$-mesurable i s'anul.la si $t < v$,*
(ii) $\|\beta_1\|_{\mathcal{L}_{tW}^p}^p := E \int_{[0,1]\times T} \beta_1^p(t;\eta) dt d\eta < \infty$.

De manera anàloga, $\mathcal{L}_{Ws}^p$ denotarà el conjunt dels processos $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{F}$-mesurables $\beta_2 : T \times [0,1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que

(i) $\beta_2(u, v; s, \cdot)$ *és $\mathcal{F}_{s,v}$-mesurable i s'anul.la si $s < u$,*
(ii) $\|\beta_2\|_{\mathcal{L}_{Ws}^p}^p := E \int_{T\times[0,1]} \beta_2^p(\eta; s)\, d\eta\, ds < +\infty$.

Fixat $\omega \in \Omega$, direm

$$\|\beta_1\|_p := \|\beta_1\|_{L^p([0,1]\times T)}.$$

Ens cal desenvolupar desigualtats exponencials per dos tipus de processos diferents. Estan recollides en les dues proposicions següents.

Proposició 1.5.13. *Sigui $p \in [1,\infty)$, $\beta_1 \in \mathcal{L}^{2p}_{tW}$. Existeixen constants positives K_1 i K_2, depenent només de p, tals que*

$$P\{\, \| \int_{[0,t]\times R_z} \beta_1(w;u,v)dW_{u,v}dw\|_\infty \geq L\,,\ \|\beta_1\|_{2p} \leq \beta \,\} \leq \exp\Big(-\frac{L^2}{\beta^2}K_2\Big)$$

per tot $\beta > 0$ i $L \geq 0$ amb $\frac{L}{\beta} \geq K_1$.

Pels processos $\beta_1 \in \mathcal{L}^2_{tW}$ definim $I_1(s,t) = \int_{R_{st}} \beta_1(t;s_1,t_2)dW_{s_1,t_2}$.

Proposició 1.5.14. *Sigui $\beta_1 \in \mathcal{L}^2_{tW}$ tal que*

(i) $\beta_1\big(t;u,v,\cdot\big)$ *és $\mathcal{F}_{u,v}$–adaptada,*

(ii) β_1 *està afitada, és a dir*

$$\sup_{(t,\eta)\in[0,1]\times T}\ \sup_{\omega\in\Omega} |\beta_1(t;\eta,\omega)| := \beta < +\infty,$$

(iii) existeix $K \geq 0$, que no depèn de ω, tal que per tot $r,t \in [0,1]$

$$\int_T |\,\beta_1(t;u,v) - \beta_1(r;u,v)\,|^2\, du\, dv \leq K|t-r|.$$

Aleshores, existeixen constants positives K_1 i K_2, tals que

$$P\,\{\, \|I_1\|_\infty > L \,\} \leq \exp\Big(-\frac{L^2}{(K+\beta^2)}K_2\Big)$$

per tot $L \geq 0$ tal que $\dfrac{L}{(K+\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \geq K_1$. *A més a més, K_1 and K_2 no depenen ni de K ni de β.*

Les demostracions de les desigualtats exponencials de les Proposicions 1.5.13 i 1.5.14, es poden fer seguint el mètode de la Proposició 1.5.4.
També ens cal un lema tipus Gronwall. La formulació adient a la situació actual és la següent.

Lema 1.5.15. *Sigui $h \in L^1(T, \mathbb{R})$ una funció no negativa tal que*

$$h(s,t) \leq \alpha(s,t) + K \int_0^t h(s,v)\, dv + K \int_0^s h(u,t)\, du$$

$(s,t) \in T$, amb $K \geq 0$ i $\alpha : T \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable i no negativa. Aleshores, existeixen constants positives K_1, K_2, que depenen només de K, tals que per qualsevol $(s,t) \in T$,

$$h(s,t) \leq \alpha(s,t) + K_1 \Big[\int_0^t \alpha(s,v) dv + \int_0^s \alpha(u,t)\, du + \int_0^t \int_0^s \alpha(u,v)\, du\, dv \Big]$$

i

$$\int_0^t \int_0^s h(u,v)\, du\, dv \leq K_2 \int_0^t \int_0^s \alpha(u,v)\, du\, dv.$$

Definirem l'esquelet de la manera següent. Donada $f \in \mathcal{H}_0$, considerem la funció $\{S(f)(z),\ z \in T\}$ tal que

$$\begin{aligned} S(f)(z) = x_0 &+ \int_{R_z} a_3\big(S(f)(u,v)\big)\ \dot{f}(u,v) du dv + \int_{[0,t]\times R_z} \beta_1^f(w;u,v) \dot{f}(u,v) du dv dw \\ &+ \int_{[0,s]\times R_z} \beta_2^f(u,v;r)\ \dot{f}(u,v) du dv dr + \int_{R_z} \varphi^f(u,v)\, du\, dv\,, \end{aligned}$$

amb

$$\beta_1^f(t;\, u,v) = a_2(u,t)\ 1_{\{v \leq t\}} \Big(a_3\big(S(f)(u,v)\big) + \int_0^t \beta_1^f(w;\, u,v)\, dw \Big)\ ,$$

$$\beta_2^f(u,v;\, s) = a_1(s,v)\ 1_{\{u \leq s\}} \Big(a_3\big(S(f)(u,v)\big) + \int_0^s \beta_2^f(u,v;\, r)\, dr \Big)\ ,$$

$$\begin{aligned} \varphi^f(s,t) = a_4\big(S(f)(s,t)\big) &+ a_1(s,t) \int_0^s \varphi^f(u,t)\, du + a_2(s,t) \int_0^t \varphi^f(s,v)\, dv \\ &+ a_1(s,t) \int_{R_z} \beta_1^f(t;\, u,v) \dot{f}(u,v) du dv + a_2(s,t) \int_{R_z} \beta_2^f(u,v;\, s)\ \dot{f}(u,v) du dv\ . \end{aligned}$$

Aleshores, la funció $\mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{C}_{x_0}(T)$, $f \longmapsto S(f)$ restringida als conjunts $\big\{\|f\|_{\mathcal{H}_0} \leq a\big\}$, $a \in (0, \infty)$, és contínua amb la topologia uniforme.

El problema de transferir les estimacions de Friedlin-Wentzell, es redueix a estudiar la probabilitat

$$P\{\, \| Y^\varepsilon - S(f) \|_\infty > \rho\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha \,\},$$

on Y^ε és el procés que satisfà

$$\begin{aligned} Y^\varepsilon_{s,t} = x_0 &+ \int_{R_{s,t}} \varepsilon a_3(Y^\varepsilon_{u,v})\, dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \int_0^t \beta_1^\varepsilon(w; u, v)\, dw\, dW_{u,v} \\ &+ \int_{R_{s,t}} \int_0^s \beta_2^\varepsilon(u, v; r)\, dr\, dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \varphi^\varepsilon(u, v)\, du\, dv \end{aligned}$$

on β_1^ε, β_2^ε i φ^ε corresponen a les expressions (1.1.5), (1.1.6) i (1.1.7), per l'equació (1.1.1) pertorbada. El procés Y^ε l'escriurem de forma abreujada com

$$Y^\varepsilon = x_0 + a_3^\varepsilon \cdot W + \beta_1^\varepsilon \cdot tW + \beta_2^\varepsilon \cdot Ws + \varphi^\varepsilon \cdot z.$$

Recordem també la notació

$$I_1^\varepsilon(s,t) = \int_{R_{st}} \beta_1^\varepsilon(t; s_1, t_2) dW_{s_1,t_2}, \quad I_2^\varepsilon(s,t) = \int_{R_{st}} \beta_2^\varepsilon(s_1, t_2; s) dW_{s_1,t_2}.$$

Aleshores, es demostra que existeixen dues constants no negatives K_1 i K_2 , depenent només dels coeficients i de a, tals que

$$\begin{aligned} \| Y^\varepsilon - S(f) \|_\infty \le K_2 \{\, &\| a_3^\varepsilon \cdot W \|_\infty + \| \beta_1^\varepsilon \cdot t\, W \|_\infty + \| \beta_2^\varepsilon \cdot W s \|_\infty \\ &+ K_1 \| I_1^\varepsilon \|_{L^1} + K_1 \| I_1^\varepsilon \|_{L^1} \,\}\,, \end{aligned}$$

q.s.

Definint el procés $Y^{\varepsilon,n}$, a base de discretitzar el procés Y^ε, tal i com ja hem fet abans, tenim per tot $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$,

$$\{\, \| Y^\varepsilon - S(f) \|_\infty > \rho\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha \,\} \subset \bigcup_{i=0}^{5} A_i^\varepsilon$$

amb

$$\begin{aligned} A_0^\varepsilon &= \{\, \| Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n} \|_\infty > \gamma \,\}\,, \\ A_1^\varepsilon &= \{\, \| a_3^\varepsilon \cdot W \|_\infty > \frac{\rho}{5K_2}\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha\,,\ \| Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n} \|_\infty \le \gamma \,\}\,, \\ A_2^\varepsilon &= \{\, \| \beta_1^\varepsilon \cdot t\, W \|_\infty > \frac{\rho}{5K_2}\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha\,,\ \| Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n} \|_\infty \le \gamma \,\}\,, \\ A_3^\varepsilon &= \{\, \| \beta_2^\varepsilon \cdot W s \|_\infty > \frac{\rho}{5K_2}\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha\,,\ \| Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n} \|_\infty \le \gamma \,\}\,, \\ A_4^\varepsilon &= \{\, \| I_1^\varepsilon \|_{L^1} > \frac{\rho}{5\, K_1\, K_2}\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha\,,\ \| Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n} \|_\infty \le \gamma \,\}\,, \\ A_5^\varepsilon &= \{\, \| I_2^\varepsilon \|_{L^1} > \frac{\rho}{5\, K_1 K_2}\,,\ \| \varepsilon W \|_\infty < \alpha\,,\ \| Y^\varepsilon - Y^{\varepsilon,n} \|_\infty \le \gamma \,\}. \end{aligned}$$

Aleshores, només cal demostrar que per tot $\varepsilon \in (0,1]$

$$P(A_i^\varepsilon) \leq \exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon^2}\Big) \qquad i = 0,..,5,$$

la qual cosa es fa de la manera següent. A_0^ε s'estudia tallant-lo amb els conjunts $B_1^\varepsilon = \{\|I_1^\varepsilon\|_\infty \leq C\}$ i $B_2^\varepsilon = \{\|I_2^\varepsilon\|_\infty \leq C\}$ i afitant la probabilitat mitjançant la desigualtat exponencial donada a la Proposició 1.5.13 i una desigualtat exponencial per martingales fortes (veieu Proposició 5, [D-D]). Els complementaris dels conjunts B_i^ε, $i = 1,2$, s'estudien amb la desigualtat exponencial de la Proposició 1.5.14. Utilitzant la desigualtat per martingales fortes [D-D], es tracta A_1^ε. Els conjunts A_2^ε i A_3^ε s'afiten gràcies a la desigualtat de la Proposició 1.5.13. Finalment, per tractar els dos últims conjunts cal aplicar la fórmula d'Itô de manera que el problema es redueix a estudiar les probabilitats de dos conjunts: una que es pot afitar per la Proposició 1.5.14 i una altra que es tracta amb la desigualtat per martingales fortes.

1.6. LA FUNCIÓ DE GREEN

Preliminars

En aquesta secció es donen alguns resultats sobre la funció de Green $\gamma_z(\eta)$ que s'utilitzen al llarg del primer capítol d'aquesta memòria. Recordarem primer de tot com es defineix la funció de Green associada a un operador diferencial en el cas determinista.

Considerem l'operador diferencial de segon ordre definit a (1.1.8)

$$\mathcal{L}f(s,t) = \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\, \partial t} - a_1(s,t)\,\frac{\partial f(s,t)}{\partial t} - a_2(s,t)\,\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}.$$

Resultats clàssics sobre equacions en derivades parcials ens diuen que si utilitzem la funció de Green γ associada a l'operador $\mathcal{L}$, podem escriure, sota certes condicions de regularitat dels coeficients, l'única solució de l'equació diferencial en derivades parcials

$$\mathcal{L}f(s,t) = b(s,t)$$

$(s,t) \in T$, $f(s,t) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si $s \cdot t = 0$, com

$$f(s,t) = x_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\, b(u,v)\, du\, dv.$$

La funció de Green associada a l'operador $\mathcal{L}$ es defineix de la manera següent (veieu, per exemple, [Sn]). Fixat $(s,t) \in T = [0,1]^2$, sigui $\gamma_{s,t}(u,v)$ la funció definida en $\{(u,v) :$

$(0,0) \leq (u,v) \leq (s,t)\,\}$ que satisfà les propietats (P) descrites a la Secció 1.2. Recordem-les:

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial(a_1(u,v)\gamma_{s,t}(u,v))}{\partial v} + \frac{\partial(a_2(u,v)\gamma_{s,t}(u,v))}{\partial u} = 0\,, \\ &\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u} = -a_1(u,v)\gamma_{s,t}(u,v) \qquad \text{quan} \quad v = t\,, \\ &\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial v} = -a_2(u,v)\gamma_{s,t}(u,v) \qquad \text{quan} \quad u = s\,, \\ &\gamma_{s,t}(u,v) = 1 \qquad \text{quan} \quad u = s,\ v = t\,. \end{aligned}$$

Resultats

Suposarem que els coeficients a_1 i a_2 satisfan la hipòtesi

($H_2 2$) $\quad a_i$, $i = 1, 2$, són afitats, derivables i amb derivades afitades.

Sota aquesta hipòtesi establirem l'existència d'una funció $\gamma_{s,t}\,(u,v)$ que satisfarà la relació

$$\gamma_{s,t}\,(u,v) = 1 + \int_u^s a_1(r,v)\ \gamma_{s,t}\,(r,v)\, dr + \int_v^t a_2(u,w)\ \gamma_{s,t}\,(u,w)\, dw\,, \tag{1.6.1}$$

$(0,0) \leq (u,v) \leq (s,t)$. Comprovarem també l'existència de derivades parcials de primer ordre respecte u i v i de segon ordre creuada. La derivabilitat de la funció i (1.6.1) impliquen clarament les propietats (P), de manera que es tractarà de la funció de Green associada a $\mathcal{L}$.

Per finalitzar demostrarem un seguit de propietats de la funció γ que utilitzarem per estudiar les diferents propietats del procés solució de l'equació diferencial estocàstica (1.1.1).

La funció $\gamma_z(.)$ no la sabem donar de forma explícita. La construirem a partir d'una sèrie definida de forma iterativa. Aquesta representació ens permetrà estudiar les seves propietats d'una manera bastant senzilla.

Considerem les funcions

$$H_0\,(s,t;\ u,v) \equiv 1\,,$$

$$H_{n+1}\,(s,t;\ u,v) = \int_u^s a_1(r,v)\ H_n(s,t;\ r,v)\, dr + \int_v^t a_2(u,w)\ H_n(s,t;\ u,w)\, dw\,, \tag{1.6.2}$$

$(u,v) \leq (s,t)$, $n \geq 1$. Definim aleshores

$$\gamma_{s,t}\,(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\,(s,t;u,v)\,, \quad (u,v) \leq (s,t)\,. \tag{1.6.3}$$

Proposició 1.6.1. *La sèrie (1.6.3) que defineix la funció γ és absolutament convergent i satisfà (1.6.1). A més a més, per tot $(s,t) \in T$, $\gamma_{s,t}(\cdot)$ té derivades parcials de primer ordre respecte u i v i de segon ordre creuada, uniformement afitades sobre $\{(u,v) : 0 < u < s,\ 0 < v < t\}$.*

Prova. Veurem amb un raonament inductiu que per tot $n \geq 0$, $(u,v) \leq (s,t)$,

$$|H_n(s,t;u,v)| \leq C^n \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} \frac{(s-u)^\alpha}{\alpha!} \frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} . \tag{1.6.4}$$

Per $n = 0$ és evident. Si suposem que és cert per n, tenim, aplicant la hipòtesi d'inducció

$$\begin{aligned}
|H_{n+1}(s,t;u,v)| &= \Big| \int_u^s a_1(r,v) H_n(s,t;r,v)dr + \int_v^t a_2(u,w) H_n(s,t;u,w)\, dw \Big| \\
&\leq C^{n+1} \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} \frac{(s-u)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} \frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} + \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} \frac{(s-u)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!} \right) \\
&= C^{n+1} \sum_{\alpha=0}^{n+1} \binom{n+1}{\alpha} \frac{(s-u)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!} .
\end{aligned}$$

Aleshores és fàcil comprovar

$$\big|H_n(s,t;u,v)\big| \leq C^n \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(n-\alpha)!} \leq (2C)^n \max_{\alpha \in \{0,\cdot,n\}} \Big\{ \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(n-\alpha)!} \Big\},$$

on

$$\max_{\alpha \in \{0,\cdot,n\}} \Big\{ \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(n-\alpha)!} \Big\} = \begin{cases} \dfrac{1}{(\frac{n}{2}!)^2} & \text{quan } n \text{ és parell,} \\[2ex] \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{2}!\right)\left(\frac{n-1}{2}!\right)} & \text{quan } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Per tant, la sèrie definida a (1.6.3) és absolutament convergent i la funció γ està ben definida. A més a més, (1.6.2) i el teorema de Fubini, ens donen

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} H_{n+1}(s,t;u,v) &= \int_u^s a_1(r,v) \Big(\sum_{n \geq 0} H_n(s,t;r,v) \Big) dr \\
&+ \int_v^t a_2(u,w) \Big(\sum_{n\geq 0} H_n(s,t;u,w) \Big) dw
\end{aligned}$$

que implica clarament (1.6.1).

Volem comprovar ara la derivabilitat de la funció γ. N'hi ha prou amb demostrar que $H_n(s,t;u,v)$ és derivable per tot $n \geq 0$ i que la sèrie de les derivades és absolutament convergent. Comprovem primer, mitjançant un raonament inductiu, la derivabilitat respecte la u. Evidentment H_0 és derivable i (1.6.2) i la hipòtesi $(H_2 2)$ impliquen

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial u} &= -a_1(u,v)\,H_n(s,t;u,v) + \int_v^t \frac{\partial a_2(u,w)}{\partial u} H_n(s,t;u,w)\,dw \\ &+ \int_v^t a_2(u,w)\,\frac{\partial H_n(s,t;u,w)}{\partial u}\,dw\,.\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

D'aquesta manera és clar que $H_n(s,t;u,v)$ és derivable respecte u per tot $n \geq 0$. Comprovem ara que per tot $n \geq 0$, $(u,v) \leq (s,t)$

$$\Big|\frac{\partial H_n(s,t;u,v)}{\partial u}\Big| \leq C^n \sum_{\alpha=0}^{n-1}\Big(\sum_{\beta=\alpha}^{n-1}\binom{\beta}{\alpha}\Big)\frac{(s-u)^\alpha}{\alpha!}\Big[\frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} + \frac{(t-v)^{n-1-\alpha}}{(n-1-\alpha)!}\Big].$$

Per $n=0$ és evident. Suposem que és cert fins al pas n. De (1.6.4) i (1.6.5), tenim

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial u}\Big| &\leq C|H_n(s,t;u,v)| + C\int_v^t |H_n(s,t;u,w)|\,dw \\ &+ C\int_v^t \Big|\frac{\partial H_n(s,t;u,w)}{\partial u}\Big|dw \\ &\leq C^{n+1}\sum_{\alpha=0}^{n}\binom{n}{\alpha}\frac{(s-u)^\alpha}{\alpha!}\frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} + C^{n+1}\sum_{\alpha=0}^{n}\binom{n}{\alpha}\frac{(s-u)^\alpha}{\alpha!}\frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!} \\ &+ C^{n+1}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\Big(\sum_{\beta=\alpha}^{n-1}\binom{\beta}{\alpha}\Big)\frac{(s-u)^\alpha}{\alpha!}\Big[\frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!} + \frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!}\Big] \\ &= C^{n+1}\sum_{\alpha=0}^{n}\Big(\sum_{\beta=\alpha}^{n}\binom{\beta}{\alpha}\Big)\frac{(s-u)^\alpha}{\alpha!}\Big[\frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!} + \frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!}\Big].\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial u}\Big| &\leq C^{n+1}\sum_{\alpha=0}^{n}\Big(\sum_{\beta=\alpha}^{n}\binom{\beta}{\alpha}\Big)\frac{1}{\alpha!}\Big[\frac{1}{(n+1-\alpha)!} + \frac{1}{(n-\alpha)!}\Big] \\ &\leq (2\,C)^{n+1}\max_{\alpha\in\{0,\cdot,n\}}\Big\{\frac{1}{\alpha!}\frac{1}{(n-\alpha)!}\Big\}.\end{aligned}$$

D'aquesta manera, la sèrie és absolutament convergent i tenim

$$\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u} = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\partial H_n(s,t;u,v)}{\partial u},$$

i per tant

$$\left|\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u}\right| \leq C\,,$$

per tot $(u,v) < (s,t)$.
Fent servir aquest mateix mètode, podem estudiar la derivabilitat de γ respecte v i la derivada parcial creuada de segon ordre. ∎

Observació: Per continuïtat podem estendre les derivades parcials sobre $\{(u,v) : 0 < u \leq s\,,\ 0 < v \leq t\}$.

Proposició 1.6.2. *Fixat $(u,v) \in T$, la funció $(s,t) \longmapsto \gamma_{s,t}(u,v)$ té derivades parcials de primer ordre respecte s i t i de segon ordre creuada, uniformement afitades sobre $\{(s,t) \in T : u < s < 1,\ v < t < 1\}$.*

Prova. Utilitzarem un métode semblant al de la proposició anterior. És a dir, comprovarem que la derivabilitat de $H_n(s,t;u,v)$ es compleix per cada n i que la sèrie de les derivades és absolutament convergent.
Primer comprovarem que $H_n(s,t;u,v)$ és derivable respecte s per tot $n \geq 0$. Formalment (1.6.2) implica

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial s} &= a_1(s,v)H_n(s,t;s,v) + \int_u^s a_1(r,v)\,\frac{\partial H_n(s,t;r,v)}{\partial s}\,dr \\ &\quad + \int_v^t a_2(u,w)\,\frac{\partial H_n(s,t;u,w)}{\partial s}\,dw\,.\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Així, per inducció podem veure que, $H_n(s,t;u,v)$ és derivable respecte s per tot $n \geq 0$. També podem comprovar que

$$\left|\frac{\partial H_n(s,t;u,v)}{\partial s}\right| \leq C^n \sum_{\alpha=1}^{n} \binom{n}{\alpha} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,\frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!}.$$

Per $n = 0$ és evident. Si suposem que és cert fins el pas n, (1.6.6) i (1.6.4) impliquen

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial s}\right| &\leq C^{n+1}\binom{n}{0}\,\frac{(t-v)^n}{n!} + C^{n+1}\sum_{\alpha=1}^{n}\binom{n}{\alpha}\frac{(s-u)^{\alpha}}{\alpha!}\,\frac{(t-v)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!} \\ &\quad + C^{n+1}\sum_{\alpha=1}^{n}\binom{n}{\alpha}\,\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,\frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!} \\ &\leq C^{n+1}\sum_{\alpha=1}^{n+1}\binom{n+1}{\alpha}\,\frac{(s-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,\frac{(t-v)^{n+1-\alpha}}{(n+1-\alpha)!}\,.\end{aligned}$$

Per tant

$$\left|\frac{\partial H_n(s,t;u,v)}{\partial s}\right| \leq (2C)^n \max_{\alpha\in\{1,\cdot,n\}}\left\{\frac{1}{(\alpha-1)!}\,\frac{1}{(n-\alpha)!}\right\}$$

que assegura la convergència absoluta de la sèrie de les derivades i

$$\Big|\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s}\Big| \leq C\,.$$

De manera anàloga podem demostrar que

$$\Big|\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial t}\Big| \leq C\,.$$

Finalment, volem estudiar la derivada parcial creuada $\frac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s\,\partial t}$. Formalment, la igualtat (1.6.6) implica

$$\frac{\partial^2 H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial s\,\partial t} = a_1(s,v)\,\frac{\partial H_n(s,t;s,v)}{\partial t} + a_2(u,t)\,\frac{\partial H_n(s,t;u,t)}{\partial s}$$
$$+ \int_u^s a_1(r,v)\,\frac{\partial^2 H_n(s,t;r,v)}{\partial s\,\partial t}\,dr + \int_v^t a_2(u,w)\,\frac{\partial^2 H_n(s,t;u,w)}{\partial s\,\partial t}\,dw\,.$$

Com abans, per un procediment inductiu podem comprovar que,

$$\Big|\frac{\partial^2 H_n(s,t;u,v)}{\partial s\,\partial t}\Big| \leq C^n \sum_{\alpha=1}^{n-1} \binom{n}{\alpha} \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,\frac{(t-v)^{n-1-\alpha}}{(n-1-\alpha)!}$$
$$\leq (2\,C)^n \max_{\alpha\in\{1,\ldots,n-1\}} \Big\{\frac{1}{(\alpha-1)!}\,\frac{1}{(n-1-\alpha)!}\Big\}.$$

Per tant, $\frac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s\,\partial t}$, existeix i satisfà

$$\Big|\frac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s\,\partial t}\Big| \leq C\,.$$

■

Observació. Per un procediment de continuïtat podem estendre les derivades parcials de la proposició anterior a $\{(s,t) \in T;\ u \leq s,\ v \leq t\}$.

Per acabar aquest apartat donarem algunes propietats de la funció $\gamma_{s,t}(u,v)$. Algunes d'elles són conseqüències dels resultats que acabem de provar.

Proposició 1.6.3. *Existeix una constant universal $C > 0$ tal que*

$$\sup_{(s,t)\in T}\ \sup_{(u,v)\leq(s,t)} |\,\gamma_{s,t}(u,v)\,| \leq C\,, \tag{1.6.7}$$

$$\sup_{(s,t)\in T} |\,\gamma_{s,t}(u,v) - \gamma_{s,t}(\bar u,\bar v)\,| \leq C\,(\,|u-\bar u| + |v-\bar v|\,)\,, \tag{1.6.8}$$

$$\text{per tot}\quad (u,v),(\bar u,\bar v) \leq (s,t)\,,$$

$$\sup_{(u,v)\in T} |\,\gamma_{s,t}(u,v) - \gamma_{\bar s,\bar t}(u,v)\,| \leq C\,(\,|s-\bar s| + |t-\bar t|\,)\,, \tag{1.6.9}$$

$$\text{per tot}\quad (s,t),(\bar s,\bar t) \geq (u,v)\,,$$

$$\sup_{(u,v)\in T} |\gamma_{s,t}(u,v) - \gamma_{\bar s,t}(u,v) - \gamma_{s,\bar t}(u,v) + \gamma_{\bar s,\bar t}(u,v)| \leq C\,(\,|s-\bar s||t-\bar t|)\,, \tag{1.6.10}$$

$$\text{per tot}\quad (s,t),(\bar s,\bar t) \geq (u,v)\,.$$

Prova. La propietat (1.6.7) és una conseqüència de

$$|H_n(s,t;u,v)| \le (2C)^n \max_{\alpha\in\{0,\dots,n\}} \left\{ \frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{(n-\alpha)!} \right\}.$$

Els resultats (1.6.8), (1.6.9) i (1.6.10) són corol.laris de les Proposicions 1.6.1 i 1.6.2. ∎

Proposició 1.6.4. *Sigui $\gamma_{s,t}(u,v)$ la funció definida per la sèrie (1.6.3). Es compleixen*

$$a_1(s,t)\,\gamma_{s,t}(u,v) = \frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s} \quad \text{quan} \quad t=v\,, \tag{1.6.11}$$

$$a_2(s,t)\,\gamma_{s,t}(u,v) = \frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial t} \quad \text{quan} \quad s=u\,, \tag{1.6.12}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s\,\partial t} - a_1(s,t)\,\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial t} - a_2(s,t)\,\frac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s} = 0\,, \tag{1.6.13}$$

$$\gamma_{s,t}(s,v) > 0\,,\ \gamma_{s,t}(u,t) > 0\,,\ 0 \le v \le t\,,\ 0 \le u \le s\,. \tag{1.6.14}$$

Prova. Comprovem primer (1.6.11). El primer pas consisteix en demostrar que

$$a_1(s,t)\,H_n(s,t;u,v) = \frac{\partial H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial s}\,, \quad t=v\,,\ n\ge 0\,, \tag{1.6.15}$$

per inducció sobre n. Per $n=0$ el resultat és evident. Suposem que (1.6.15) és cert per tot $j \le n-1$. Aleshores, la igualtat (1.6.2) implica

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H_{n+1}(s,v;u,v)}{\partial s} - a_1(s,v)H_n(s,v;u,v)\\
&= a_1(s,v)H_n(s,v;s,v) + \int_u^s a_1(r,v)\frac{\partial H_n(s,v;r,v)}{\partial s}\,dr\\
&\quad - a_1(s,v)\int_u^s a_1(r,v)H_{n-1}(s,v;r,v)dr\\
&= \int_u^s a_1(r,v)\Big(\frac{\partial H_n(s,v;r,v)}{\partial s} - a_1(s,v)H_{n-1}(s,v;r,v)\Big)dr = 0\,.
\end{aligned}$$

i (1.6.15) és cert per tot $n \ge 1$. Això implica

$$a_1(s,v)\sum_{n\ge 0} H_n(s,v;u,v) = \sum_{n\ge 0} \frac{\partial H_{n+1}(s,v;u,v)}{\partial s}\,,$$

i per tant (1.6.11) queda demostrat.
La prova de (1.6.12) és anàloga. La igualtat (1.6.13) es pot comprovar establint primer

$$\frac{\partial^2 H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial s\,\partial t} - a_1(s,t)\,\frac{\partial H_n(s,t;u,v)}{\partial t} - a_2(s,t)\,\frac{\partial H_n(s,t;u,v)}{\partial s} = 0\,,$$

$n \geq 0$. Es demostra fàcilment a partir de (1.6.2), (1.6.15) i el seu anàleg

$$a_2(s,t)\; H_n\,(s,t;u,v) = \frac{\partial\, H_{n+1}\,(s,t;u,v)}{\partial t}\;, \qquad s = u\,,\; n \geq 0\,,$$

fent servir, com abans, un raonament inductiu sobre n. Així, es pot comprovar

$$\frac{\partial^2\, H_{n+2}(s,t;u,v)}{\partial s \partial t} - a_1(s,t)\;\frac{\partial\, H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial t} - a_2(s,t)\;\frac{\partial\, H_{n+1}(s,t;u,v)}{\partial s}$$

$$= \int_u^s a_1(r,v)\Big[\frac{\partial^2\, H_{n+1}(s,t;r,v)}{\partial s\,\partial t} - a_1(s,t)\;\frac{\partial\, H_n(s,t;r,v)}{\partial t} - a_2(s,t)\;\frac{\partial\, H_n(s,t;r,v)}{\partial s}\Big]\,dr$$

$$+ \int_v^t a_2(u,w)\Big[\frac{\partial^2\, H_{n+1}(s,t;u,w)}{\partial s\,\partial t} - a_1(s,t)\;\frac{\partial\, H_n(s,t;u,w)}{\partial t} - a_2(s,t)\;\frac{\partial\, H_n(s,t;u,w)}{\partial s}\Big]\,dw$$

$$+ a_1(s,v)\Big[\frac{\partial\, H_{n+1}(s,t;s,v)}{\partial t} - a_2(s,t) H_n(s,t;s,v)\Big]$$

$$+ a_2(u,t)\Big[\frac{\partial\, H_{n+1}(s,t;u,t)}{\partial s} - a_1(s,t) H_n(s,t;u,t)\Big] = 0.$$

Finalment volem veure (1.6.14). Si resolem l'equació diferencial satisfeta per $\gamma_{s,t}\,(u,v)$ (veure (P)),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,\gamma_{s,t}\,(u,v)}{\partial v} = -a_2(u,v)\;\gamma_{s,t}(u,v) & ,\quad u = s \\[2mm] \gamma_{s,t}(u,v) = 1 & ,\quad u = s\,,\; v = t\,, \end{cases}$$

obtenim

$$\gamma_{s,t}\,(s,v) = \exp\,\Big(\int_v^t a_2(s,w)\,dw\Big)$$

i, per tant $\gamma_{s,t}(s,v) > 0\,,\; 0 \leq v \leq t$. De la mateixa manera,

$$\gamma_{s,t}(u,t) = \exp\,\Big(\int_u^s a_1(r,t)\,dr\Big)\,, \tag{1.6.16}$$

i per tant $\gamma_{s,t}(u,t) > 0\,,\; 0 \leq u \leq s$. ∎

REGULARITAT DE LA DENSITAT DE LES SOLUCIONS D'EQUACIONS DIFERENCIALS ESTOCÀSTIQUES ANTICIPATIVES

Capítol 2.

2.1. INTRODUCCIÓ

Aquest capítol està dedicat a determinar condicions suficients per l'existència de densitat regular per la llei de probabilitat de la solució de l'equació diferencial estocàstica anticipativa

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^k A_j(X_s) \circ dW_s^j + A_0(X_s)\, ds \Big), \quad t \in [0,1], \tag{2.1.1}$$

a un instant de temps $t > 0$ fixat. Aquesta equació és un cas particular d'una classe general d'equacions diferencials estocàstiques anticipatives analitzada a [O-P].

Suposem que (2.1.1) està definida a l'espai de probabilitat canònic associat al procés de Wiener estàndard k–dimensional, $W = \{W_t, t \in [0,1]\}$, i que els coeficients A_j, $j = 0, 1, \cdots, k$, són funcions definides en $\mathbb{R}^d$ que prenen valors en $\mathbb{R}^d$ i que satisfan

(C) A_j, $j = 0, 1, \cdots, k$ són de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades parcials afitades, i $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^d A_j^i\, \partial_i A_j$ té derivades parcials afitades de primer ordre,

X_0 és una variable aleatòria arbitrària i la integral estocàstica és una integral de Stratonovich anticipativa.

L'objectiu és continuar el treball començat a [Mas] i a [C-F-N]. Fixat $x \in \mathbb{R}^d$, considerem les hipòtesis clàssiques

$(H(x))$ (condició de Hörmander no restringida)
L'àlgebra de Lie generada pels camps vectorials A_j, $[A_0, A_j]$, $1 \le j \le k$, al punt x és $\mathbb{R}^d$,

$(H_R(x))$ (condició de Hörmander restringida)
L'àlgebra de Lie generada pels camps vectorials A_j, $1 \le j \le k$, al punt x és $\mathbb{R}^d$.

A [Mas], Masuda demostra que si $(H(x))$ es compleix per tot $x \in \mathbb{R}^d$, aleshores la variable aleatòria X_t, $t \in (0,1]$, té densitat. En realitat, el resultat que obté és vàlid per una classe d'equacions més general que (2.1.1).

A [C-F-N] s'estudien condicions suficients per la regularitat de la densitat. El resultat principal (Teorema 5.2) estableix l'existència de densitat regular per les variables X_t, $t \in (0,1]$, si els coeficients de l'equació satisfan (C) i es compleixen les hipòtesis següents

(i) $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$,
(ii) $\sup_{\omega\in\Omega} |X_0(\omega)| \le K$, per alguna constant $K > 0$,
(iii) existeix $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ i una variable aleatòria positiva $\zeta \in \bigcap_{p\ge 1} L^p(\Omega)$, tal que

$$|D_s X_0 - D_t X_0| \le \zeta\, |t-s|^{\lambda+\frac{1}{2}},$$

per tot $s, t \in [0,1]$.
(iv) $(H_R(x))$ es compleix per tot $|x| \le K$.

L'objectiu d'aquest capítol és estendre aquest últim resultat en les direccions següents. Per un costat, volem eliminar la hipòtesi d'afitació sobre X_0 i poder treballar amb condicions de Hörmander no restringides. Per altra banda, volem estudiar la regularitat de la densitat de X_t sota el punt de vista presentat per Bell i Mohammed. A [B-M 1], Bell i Mohammed han demostrat una extensió i refinament del Teorema d'hipoel.lipticitat de Hörmander. En particular, el seu resultat permet que la condició $(H(x))$ no es satisfaci, de manera controlada, en una col.lecció de superfícies.

La hipòtesi $(H_R(x))$ admet una formulació equivalent. Considerem la matriu $E_m(x)$, amb columnes els camps vectorials A_j, $1 \le j \le k$, $[A_i, A_j]$, $1 \le i,j \le k, \cdots,$ $[A_{i_1}, [A_{i_2}, \cdots, [A_{i_{m-1}}, A_{i_m}]\cdots]]$, $1 \le i_1, \cdots, i_m \le k$, al punt x. Sigui $\lambda_m(x)$ el valor propi més petit de $E_m(x)E_m^*(x)$, on " $*$ " denota la transposada. És clar que, $(H_R(x))$ és equivalent a $\lambda_m(x) > 0$ per algun enter $m \ge 0$. De la mateixa manera, es pot obtenir un resultat anàleg per $(H(x))$. La formulació de les condicions de no degeneració, les escriurem utilitzant λ_m i el seu anàleg per $(H(x))$, μ_m. D'aquesta manera, en el cas restringit suposarem

(H_R) $(\lambda_m(X_0))^{-1} \in \bigcap_{p\ge 1} L^p(\Omega)$, per algun $m \ge 0$.

Observem, que si $\sup_{\omega\in\Omega} |X_0(\omega)| \le K$, la hipòtesi "$(H_R(x))$ per tot $|x| \le K$" implica (H_R).

A la Secció 2.2, estenem el Teorema 5.2 de [C-F-N] per qualsevol $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$, que satisfaci (H_R) i tal que la seva derivada DX_0 compleixi les condicions del Teorema 5.2 de [C-F-N] (Teorema 2.2.2). Una versió apropiada del Lema de Norris (Lema 2.2.1) esdevé una eina fonamental en la demostració d'aquest resultat.

A la tercera secció treballem amb una condició no restringida de no degeneració estrictament més feble que (H_R). Sota aquesta nova condició, obtenim també la regularitat de la densitat (Teorema 2.3.2). L'eina fonamental de la demostració és també una nova versió del Lema de Norris (Lema 2.3.1), que en aquest cas, és un refinament del demostrat a la secció anterior.

A la Secció 2.4, suposem, com a [C-F-N], que X_0 està afitada i generalitzem, sota aquesta hipòtesi, el Teorema 1.1 de [B-M 1] a l'equació (2.1.1) (Teorema 2.4.9). En particular, obtenim així una extensió del Teorema 5.2 de [C-F-N] en el sentit que permetem que la hipòtesi (iv) falli d'una manera "controlada". El fet que el rang de X_0 estigui inclòs dins d'un compacte juga un paper important a la demostració d'aquest resultat.

Introduïm alguns resultats i els convenis bàsics que utilitzarem. El desenvolupament i la presentació detallada d'aquests resultats es pot trobar a [N 1] i a [C-F-N].

Sigui $\{\varphi_t(x),\, x \in \mathbb{R}^d\}$ el flux estocàstic definit per l'equació estocàstica adaptada

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^k A_j(\varphi_s(x)) \circ dW_s^j + A_0(\varphi_s(x))\, ds\Big), \quad t \in [0,1].$$

Sota la hipòtesi (C), el procés $\{\varphi_t(X_0),\, t \in [0,1]\}$ és una solució de (2.1.1) (veieu [N 2], [M-N-S] o [O-P]). També sota la hipòtesi (C), tenim que el procés $\{\varphi_t(X_0),\, t \in [0,1]\}$ és l'única solució contínua a l'espai $\mathbb{L}^{1,4}_{2,\mathrm{loc}}$ (veieu [N 2]). A partir d'ara, quan parlem de X_t solució de l'equació (2.1.1) ens referirem a $\varphi_t(X_0)$.

Denotem per $\{Y_t(x)\}$ la derivada del flux, $\{\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)\}$, i per $\{Z_t(x)\}$ la seva inversa. Aquests processos satisfan les equacions

$$Y_t(x) = I + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^k \partial A_j(\varphi_s(x)) Y_s(x) \circ dW_s^j + \partial A_0(\varphi_s(x)) Y_s(x)\, ds\Big),$$

$$Z_t(x) = I - \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^k Z_s(x) \partial A_j(\varphi_s(x)) \circ dW_s^j + Z_s(x) \partial A_0(\varphi_s(x))\, ds\Big).$$

El Lema 2.1 [O-P] estableix estimacions trajectorials pels processos $\{\varphi_t(x)\}$, $\{Y_t(x)\}$ i $\{Z_t(x)\}$ i per les seves derivades. Aquestes estimacions són usades constantment al llarg d'aquest capítol i per això les recordem aquí.

Per qualssevol $\delta > 0, N \geq 1$ existeix una variable aleatòria positiva $\zeta(\delta, N) \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ tal que q.s.

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left(|\varphi_t(x)| + |\varphi_t^{-1}(x)| \right) \leq \zeta(\delta, N) \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}+\delta}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left(|\frac{\partial^j Y_t}{\partial x^j}(x)| + |\frac{\partial^j Z_t}{\partial x^j}(x)| \right) \leq \zeta(\delta, N) \left(1 + |x|^2\right)^{\delta}, \tag{2.1.2}$$

$0 \leq j \leq N$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Per obtenir la regularitat de la densitat utilitzarem el Càlcul de Malliavin. Per les definicions fonamentals ens remetem als Preliminars de la Secció 1.4. El criteri general per obtenir regularitat de la densitat que farem servir és el següent,

Teorema 2.1.1. [Mal] *Sigui $F = (F_1, \cdots, F_k)$ un vector aleatori d–dimensional tal que les seves components són de $\mathbb{D}^\infty$. Suposem que*

$$\left(\det < DF^i, DF^j >\right)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 2} L^p(\Omega).$$

Aleshores la llei de F és absolutament contínua i té densitat infitament diferenciable.

Observem que es tracta d'una versió d–dimensional del Teorema 1.4.2.

Si suposem que $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$, el Lema 2.3 [C-F-N] implica que $\varphi_t(X_0) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ per tot $t \in [0,1]$. A més a més,

$$D_r^j[\varphi_t(X_0)^i] = Y_t^{i,l}(X_0)\,[D_r^j X_0^l + \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\, Z_r^{l,h}(X_0)\, A_j^h(\varphi_r(X_0))],$$

$1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq d$. D'aquesta manera, la matriu de Malliavin $Q_t =< DX_t, DX_t >$ ve donada per $Q_t = Y_t(X_0)\, C_t\, Y_t(X_0)^*$, on $C_t^{h,j} = \sum_{l=1}^k \int_0^1 \Gamma_{r,t}^{h,l} \Gamma_{r,t}^{j,l}\, dr$, $1 \leq h, j \leq d$, i

$$\Gamma_{r,t}^{j,l} = D_r^l X_0^j + \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\, Z_r^{j,\alpha}(X_0)\, A_l^\alpha(\varphi_r(X_0)).$$

Fixem $t \in (0,1]$. Volem demostrar que $(\det Q_t)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Però, per (2.1.2) tenim que $\mathrm{E}(|Y_t(X_0)|^{-p}) < \infty$ i $\mathrm{E}(|Y_t(X_0)|^p) < \infty$ per tot $p \geq 1$. Així, en tenim prou si veiem que $(\det C_t)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Però, pel Lema 2.3.1 [N 1], serà suficient comprovar que per tot $p \geq 2$

$$\sup_{|\lambda|=1} P\left(\lambda^* C_t \lambda < \varepsilon\right) \leq \varepsilon^p$$

per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.

I aplicant el Teorema 2.1.1, la llei de X_t tindrà densitat de classe $\mathcal{C}^\infty$ respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

Per acabar, indiquem els convenis bàsics que s'utilitzen al llarg d'aquest capítol. Les sumes en índexos repetits s'omitiran i totes les constants es denotaran per C o C_p (quan depenen de p), encara que puguin anar variant.

2.2. CONDICIONS DE HÖRMANDER RESTRINGIDES

Preliminars

L'objectiu d'aquesta secció és estendre el Teorema 5.2 [C-F-N] per condicions inicials X_0 de l'equació (2.1.1) no necessariament afitades.

Resultats

Necessitem desenvolupar primer una versió del Lema 5.1 de [C-F-N] que no requereixi la hipòtesi d'afitació de la condició inicial.

Lema 2.2.1. *Siguin* $\alpha = \{\alpha_t(x) = (\alpha_t^l(x))_{l=1,\cdots,k},\ t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^d\}$, $V = \{V_t, t \in [0,1]\}$ *processos mesurables que compleixin*

(*H1*) $\{\alpha_t(x),\ t \in [0,1]\}$ *és adaptat, per qualsevol* $x \in \mathbb{R}^d$,

(*H2*) *per tot* $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$, $x \longrightarrow \alpha_t(x,\omega)$ *és una funció de classe* $\mathcal{C}^2$.

Sigui $T \in (0,1]$,

(*H3*) *existeix un real* $\mu > 0$ *i una variable aleatòria* $\zeta_1 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ *tals que, per tot* $K \geq 1$

$$\sup_{|x|\leq K,\, 0<t\leq T} \left(|\alpha_t(x)| + |\alpha_t'(x)| + |\alpha_t''(x)|\right) \leq \zeta_1 K^\mu, \quad \text{q.s.},$$

(*H4*) *existeix una variable aleatòria positiva* $\zeta_2 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ *i* $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ *tal que, per tot* $s,t \in [0,T]$

$$|V_t - V_s| \leq \zeta_2 \, |t-s|^{\lambda+\frac{1}{2}}, \quad \text{q.s.}$$

i $V_0 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$.

Diem $Y_t(x) = V_t + \int_0^t \alpha_s(x)\, dW_s$, $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d$ *i sigui* X_0 *una variable aleatòria d-dimensional que pertany a* $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. *Aleshores, per qualssevol* $\delta, \eta > 0$, *amb* $\delta\lambda > (2\lambda+1)\eta$, *per tot* $a, b > 0$ *i* $p \in [2,\infty)$ *existex un* $\varepsilon_0 > 0$ *depenent de* δ, η, a, b, p, T *i dels moments de* ζ_1, ζ_2, *tal que*

$$P\Big(\int_0^S |Y_t(X_0)|^2 dt \leq a\varepsilon^\delta,\ \int_0^S |\alpha_t(X_0)|^2 dt > b\varepsilon^\eta\Big) \leq \varepsilon^p, \tag{2.2.1}$$

per qualssevol $S : \Omega \longrightarrow [0,T]$ *i* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Comparant-lo amb el Lema 5.1 [C-F-N], aquí només ens cal suposar que $X_0 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. La nova hipòtesi $(H3)$ és més forta que (H_3) a [C-F-N] i té en compte el compacte $\{|x| \leq K\}$ on s'obté la fita. Tal com ja s'ha dit a la Secció 2.1, el Lema 2.1 [O-P] ens diu que el flux estocàstic $\varphi_t(x)$, la seva inversa $\varphi_t^{-1}(x)$ i les seves derivades respecte x satisfan la hipòtesi $(H3)$. A la demostració que donem, la nova hipòtesi sobre X_0 i $(H3)$ es combinen mitjançant un argument de localització, però la idea de fons és la mateixa que la de [C-F-N].

Prova del Lema 2.2.1. Per simplificar suposem $k = 1$. Fixem γ_1, γ_2, $\varepsilon > 0$ i diem $G_\varepsilon^1 = \{\zeta_1 \leq \varepsilon^{-\gamma_1}\}$, $G_\varepsilon^2 = \{\zeta_2 \leq \varepsilon^{-\gamma_2}\}$, $\rho = \lambda + \frac{1}{2}$. Seguint les idees de la demostració del Lema 4.2 [N-S 1] (veieu també Teorema 8.26 [St] i Pas 1 del Lema 5.1 [C-F-N]) obtenim

$$P\Big(\{\int_0^S |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^\delta, \int_0^S |\alpha_t(x)|^2 dt > b\varepsilon^\eta\} \cap G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2\Big)$$
$$\leq n\sqrt{2}\exp\Big(-2^{-7}b\big((ab^{-1})^{\frac{1}{2}} nK^\mu \varepsilon^{\frac{\delta}{2}-\eta-\gamma_1} + T^\rho n^{-\rho+\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\gamma_2-\frac{\eta}{2}}\big)^{-2}\Big), \quad (2.2.2)$$

per qualssevol $n \geq 1$ i $|x| \leq K$. Com en el Lema 5.1 de [C-F-N], la demostració de (2.2.2) consisteix en realitzar un canvi de temps de la martingala $M_t(x) = \int_0^t \alpha_s(x) dW_s$ de manera que obtenim un moviment brownià pel qual es coneixen desigualtats exponencials (veieu Lema 8.6 [I-W]).

Com que $\delta\lambda > (2\lambda+1)\eta$, podem escollir γ_1, γ_2, q, $w > 0$ de manera que $\frac{\delta}{2}-\eta-\gamma_1-w\mu-q > 0$, $\lambda q - \frac{\eta}{2} - \gamma_2 > 0$. Siguin $K = \varepsilon^{-w}$, $w > 0$ i $n \geq 1$ amb $n \leq \varepsilon^{-q} < n+1$. El costat dret de (2.2.2) està afitat per

$$\varepsilon^{-q}\sqrt{2}\exp\Big(-2^{-7}b\big((ab^{-1})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}-\eta-\gamma_1-w\mu-q} + T^\rho 2^\lambda \varepsilon^{\lambda q-\gamma_2-\frac{\eta}{2}}\big)^{-2}\Big), \quad (2.2.3)$$

i, per tant, (2.2.1) es compleix per $X_0 = x$ amb $|x| \leq \varepsilon^{-w}$.

Fixem β, $w > 0$. Existeixen $x_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{1, 2, \cdots, N_\varepsilon^{\beta,w}\}$ tals que

$$\{|x| \leq \varepsilon^{-w}\} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon^{\beta,w}} \{|x - x_i| \leq \varepsilon^\beta\}.$$

Observem que $N_\varepsilon^{\beta,w} \leq C\varepsilon^{-(w+\beta)d}$. Definim $A_i = \{\omega : |X_0(\omega) - x_i| \leq \varepsilon^\beta\}, i \in \{1, 2, \cdots, N_\varepsilon^{\beta,w}\}$, $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \cap \big(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\big)^c$, $i \in \{2, \cdots, N_\varepsilon^{\beta,w}\}$, i la variable aleatòria

$$X_\varepsilon(\omega) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon^{\beta,w}} x_i \mathbf{1}_{B_i}(\omega).$$

Diem $H_\varepsilon = \{|X_0| \leq \varepsilon^{-w}\}$. Aleshores, és clar que $H_\varepsilon \subset \{|X_0 - X_\varepsilon| \leq \varepsilon^\beta\}$.

Considerem la desigualtat

$$P\Big(\int_0^S |Y_t(X_0)|^2 dt \le a\varepsilon^\delta,\ \int_0^S |\alpha_t(X_0)|^2 dt > b\varepsilon^\eta\Big) \le \sum_{j=1}^6 T_j(\varepsilon), \tag{2.2.4}$$

amb

$$\begin{aligned}
T_1(\varepsilon) &= P((G_\varepsilon^1)^c), \quad T_2(\varepsilon) = P((G_\varepsilon^2)^c), \quad T_3(\varepsilon) = P(H_\varepsilon^c),\\
T_4(\varepsilon) &= P\Big(\{\int_0^S |Y_t(X_\varepsilon)|^2 dt \le 3a\varepsilon^\delta,\ \int_0^S |\alpha_t(X_\varepsilon)|^2 dt > \frac{1}{2}b\varepsilon^\eta\} \cap G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2\Big),\\
T_5(\varepsilon) &= P\Big(\{\int_0^S |\alpha_t^2(X_\varepsilon) - \alpha_t^2(X_0)| dt > \frac{1}{2}b\varepsilon^\eta\} \cap G_\varepsilon^1 \cap H_\varepsilon\Big),\\
T_6(\varepsilon) &= P\Big(\{\int_0^S |Y_t(X_\varepsilon) - Y_t(X_0)|^2 dt > \frac{1}{2}a\varepsilon^\delta\} \cap G_\varepsilon^1 \cap H_\varepsilon\Big).
\end{aligned}$$

La desigualtat de Txebixef implica, per qualsevol $q \ge 1$

$$\sum_{j=1}^3 T_j(\varepsilon) \le \varepsilon^{\gamma_1 q} E(\zeta_1^q) + \varepsilon^{\gamma_2 q} E(\zeta_2^q) + \varepsilon^{wq} E(|X_0|^q) \le C\varepsilon^{\Gamma q}, \tag{2.2.5}$$

amb $\Gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2, w\}$.

Els resultats obtinguts a la primera part de la prova (veieu (2.2.3)) impliquen

$$\begin{aligned}
T_4(\varepsilon) &\le \sum_{i=1}^{N_\varepsilon^{\beta,w}} P\Big(\{\int_0^S |Y_t(x_i)|^2 dt \le 3a\varepsilon^\delta,\ \int_0^S |\alpha_t(x_i)|^2 dt > \frac{1}{2}b\varepsilon^\eta\} \cap B_i \cap G_\varepsilon^1 \cap G_\varepsilon^2\Big)\\
&\le C\varepsilon^{-(w+\beta)d}\varepsilon^{-q}\sqrt{2}\exp\Big(-2^{-6}b\big((6ab^{-1})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}-\eta-\gamma_1-w\mu-q} + T^\rho 2^\lambda \varepsilon^{\lambda q-\gamma_2-\frac{\eta}{2}}\big)^{-2}\Big).
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

El teorema del valor mig i la hipòtesi $(H3)$ impliquen

$$T_5(\varepsilon) \le \frac{2}{b}\varepsilon^{-\eta} E\Big(\mathbf{1}_{G_\varepsilon^1 \cap H_\varepsilon} \int_0^S |\alpha_t^2(X_\varepsilon) - \alpha_t^2(X_0)| dt\Big) \le \frac{4}{b} T\varepsilon^{-\eta-2\gamma_1-2\mu w+\beta}. \tag{2.2.7}$$

Finalment, utilitzant les desigualtats de Txebixef i de Sobolev, la propietat local de la integral estocàstica i els resultats sobre derivació d'integrals estocàstiques que depenguin d'un paràmetre (veieu, per exemple [K]),

$$
\begin{aligned}
T_6(\varepsilon) \leq & \frac{2}{a}\varepsilon^{-\delta} E\Big(\big(\int_0^s \big|\big(\int_0^t \alpha_s(x)dW_s\big)_{|x=X_\varepsilon} - \big(\int_0^t \alpha_s(x)dW_s\big)_{|x=X_0}\big|^2 dt\big) \mathbf{1}_{G_\varepsilon^1 \cap H_\varepsilon}\Big) \\
\leq & \frac{2}{a}\varepsilon^{-\delta} \int_0^T E\Big(\sup_{|x-y|\leq \varepsilon^\beta,\, |x|,|y|\leq \varepsilon^{-w}} \big| \int_0^t (\alpha_s(x) - \alpha_s(y))dW_s\big|^2 \mathbf{1}_{G_\varepsilon^1}\Big) dt \\
\leq & \frac{2}{a}\varepsilon^{2\beta-\delta} \int_0^T E\Big(\sup_{|x|\leq \varepsilon^{-w}} \big| \int_0^t \alpha_s'(x)dW_s\big|^2 \mathbf{1}_{G_\varepsilon^1}\Big) dt \leq C\varepsilon^{2\beta-\delta-2\gamma_1-2w\mu-dw}.
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

Fixem $p \in [2,\infty)$. Aleshores, d'acord amb (2.2.4)–(2.2.8), i escollint $\beta > \max\{p+\eta+2\gamma_1+2\mu w,\ \frac{1}{2}(\delta+2\gamma_1+2w\mu+dw+p)\}$, obtenim (2.2.1). ∎

Podem ara demostrar el resultat de regularitat de la densitat per la solució de (2.1.1). Amb aquest objectiu, introduïm primer la notació necessària. Considerem els conjunts de camps vectorials

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \{ A_i,\ i = 1,\cdots,k \}, \\
\Sigma_j &= \{[A_i, V],\ i = 1,\cdots,k,\ V \in \Sigma_{j-1}\}, \quad j \geq 1.
\end{aligned}
$$

Per qualssevol enter no negatiu $m \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}^d$, sigui $E_m(x)$ la matriu amb columnes els camps vectorials de Σ_j, $0 \leq j \leq m$, al punt $x \in \mathbb{R}^d$. Sigui $\lambda_m(x)$ el valor propi més petit de $E_m(x)E_m^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $m \geq 0$, és a dir,

$$
\lambda_m(x) = \inf_{|v|=1} \sum_{j=0}^m \sum_{V\in\Sigma_j} |v^* V(x)|^2. \tag{2.2.9}
$$

Observem que $\lambda_m(x)$ és creixent respecte de m.

El teorema següent és el resultat fonamental d'aquesta secció.

Teorema 2.2.2. *Suposem que els coeficients $A_0, A_1, \cdots, A_k$ de l'equació (2.1.1) satisfan (C). Sigui $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ una variable aleatòria tal que*

(i) existeix $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ i una variable aleatòria positiva $\zeta \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ tal que,

$$
|D_s X_0 - D_t X_0| \leq \zeta |t-s|^{\lambda+\frac{1}{2}}, \qquad s,t \in [0,1],
$$

(ii) $D_0 X_0 = 0$ per alguna versió de DX_0,

(iii) per algun $j_0 \geq 0$,

$$
\big(\lambda_{j_0}(X_0)\big)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega).
$$

Aleshores, la variable aleatòria X_t solució de (2.1.1) té densitat regular per qualsevol $t \in (0,1]$.

Observació. Suposem que $|X_0| \leq K$ per alguna constant $K > 0$ i que existeix $j_0 \geq 0$ tal que per tot $|x| \leq K$, span$(\cup_{j=0}^{j_0} \Sigma_j)$ al punt x és $\mathbb{R}^d$. És clar que la condició de no degeneració *(iii)* es compleix. Per tant, el teorema anterior estén el Teorema 5.2 de [C-F-N].

Prova del Teorema 2.2.2. Per qualssevol $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$ i $\varepsilon > 0$ definim

$$\begin{aligned} E_0 =& \{\sum_{h=1}^{k} \int_0^1 \left(\lambda^* Z_s(X_0) A_h(\varphi_s(X_0)) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) + \lambda^* D_s^h X_0\right)^2 ds < \varepsilon\}, \\ E_j =& \{\sum_{V \in \Sigma_j} \int_0^1 \left(\lambda^* Z_s(X_0) V(\varphi_s(X_0))\right)^2 ds < \varepsilon^{m(j)}\}, \qquad j \geq 1, \end{aligned}$$

amb $m(j) = \gamma^j$, $0 < \gamma < \frac{\lambda}{2\lambda+1}$, $F = E_0 \cap E_1 \cap \cdots \cap E_{j_0}$, $A_\varepsilon = \{\zeta \leq \varepsilon^{-\Gamma}\}$, $\Gamma > 0$.

Volem veure que, per tot $p \geq 1$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$, $P(E_0) \leq \varepsilon^p$. Com hem explicat a l'última part de la Secció 2.1, aquesta desigualtat és suficient per establir el teorema.

Utilitzant $E_0 \subset \bigcup_{j=1}^{j_0}(E_{j-1} \cap E_j^c) \cup (F \cap A_\varepsilon) \cup A_\varepsilon^c$ i la desigualtat de Txebixef, la prova es redueix a comprovar

$$P(F \cap A_\varepsilon) \leq \varepsilon^p, \tag{2.2.10}$$

$$P(E_{j-1} \cap E_j^c) \leq \varepsilon^p, \qquad 1 \leq j \leq j_0. \tag{2.2.11}$$

$p \geq 1$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.

Definim

$$\begin{aligned} \Lambda_t = \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{V \in \Sigma_j} \int_0^t \left(\lambda^* Z_s(X_0) V(\varphi_s(X_0))\right)^2 ds + \sum_{h=1}^{k} \int_0^t & \left(\lambda^* Z_s(X_0) A_h(\varphi_s(X_0))\right. \\ & \left. + \lambda^* D_s^h X_0\right)^2 ds. \end{aligned}$$

Les hipòtesis *(i)*,*(ii)* impliquen, sobre el conjunt A_ε,

$$\begin{aligned} \Lambda_t \geq& \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in \Sigma_j} \int_0^{\varepsilon^\beta} \left(\lambda^* Z_s(X_0) V(\varphi_s(X_0))\right)^2 ds - \sum_{h=1}^{k} \int_0^{\varepsilon^\beta} |\lambda^* D_s^h X_0|^2 ds \\ \geq& \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in \Sigma_j} \int_0^{\varepsilon^\beta} \left(\lambda^* Z_s(X_0) V(\varphi_s(X_0))\right)^2 ds - C\varepsilon^{2(\lambda+1)\beta - 2\Gamma}. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Definim $H_\varepsilon = \{|X_0| < \varepsilon^{-w}\}$, $\varepsilon, w > 0$, i els temps aleatoris

$$S_1 = \inf\{s > 0 : \sup_{0 \leq \sigma \leq s} |Z_\sigma(X_0) - I| \geq \frac{1}{2}\}, \tag{2.2.13}$$

$$S_2^\varepsilon = \inf\{s > 0 : \sup_{0 \leq \sigma \leq s} |\varphi_\sigma(X_0) - X_0| \geq \varepsilon^{\frac{\beta}{3}}\}, \qquad \beta, \varepsilon > 0. \tag{2.2.14}$$

Per Sobolev, la desigualtat de Txebixef i el Lema 2.1 [O-P] obtenim

$$
\begin{aligned}
P\big(\{S_2^\varepsilon \le \varepsilon^\beta\} \cap H_\varepsilon\big) &\le \varepsilon^{-\frac{\beta}{3}q} E\big(\sup_{0\le|x|<\varepsilon^{-w}} \sup_{0\le s\le\varepsilon^\beta} |\varphi_s(x) - x|^q\big) \\
&\le C\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{3}q}\Big(\int_{\{|x|<\varepsilon^{-w}\}} \big(E(\sup_{0\le s\le\varepsilon^\beta} |\varphi_s(x) - x|^q) + E(\sup_{0\le s\le\varepsilon^\beta} |Y_s(x) - I|^q)\big)dx\Big) \\
&\le C\ \varepsilon^{\frac{\beta}{6}q - 2wq - wd}, \qquad q > d.
\end{aligned}
$$

De manera anàloga,

$$
P\big(\{S_1 \le \varepsilon^\beta\} \cap H_\varepsilon\big) \le C\,\varepsilon^{\frac{\beta}{2}q - 2wq - wd}, \qquad q > d.
$$

Per tant, per qualsevol $q > d$,

$$
P\big(\{S_2^\varepsilon \le \varepsilon^\beta\} \cap H_\varepsilon\big) + P\big(\{S_1 \le \varepsilon^\beta\} \cap H_\varepsilon\big) + P\big(H_\varepsilon^c\big) \le C\,\big(\varepsilon^{(\frac{\beta}{6} - 3w)q} + \varepsilon^{wq}\big). \tag{2.2.15}
$$

De (2.2.12) i, escollint β, Γ amb $m(j_0) < 2(\lambda + 1)\beta - 2\Gamma$, obtenim

$$
P\big(F \cap A_\varepsilon \cap \{S_1 > \varepsilon^\beta\} \cap \{S_2^\varepsilon > \varepsilon^\beta\}\big) \le p_1(\varepsilon) + p_2(\varepsilon),
$$

amb

$$
\begin{aligned}
p_1(\varepsilon) = P\Big(&\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V\in\Sigma_j} \int_0^{\varepsilon^\beta} \frac{|\lambda^* Z_s(X_0)V(\varphi_s(X_0))|^2}{|\lambda^* Z_s(X_0)|^2} ds \le 4\,(C + 2(j_0 + 1))\varepsilon^{m(j_0)}, \\
&\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V\in\Sigma_j} \int_0^{\varepsilon^\beta} \frac{|\lambda^* Z_s(X_0)V(X_0)|^2}{|\lambda^* Z_s(X_0)|^2} ds > 16\,(C + 2(j_0 + 1))\varepsilon^{m(j_0)},\ S_2^\varepsilon > \varepsilon^\beta\Big), \\
p_2(\varepsilon) = P\Big(&\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V\in\Sigma_j} \int_0^{\varepsilon^\beta} \frac{|\lambda^* Z_s(X_0)V(X_0)|^2}{|\lambda^* Z_s(X_0)|^2} ds \le 16\,(C + 2(j_0 + 1))\varepsilon^{m(j_0)}\Big).
\end{aligned}
$$

Pel teorema del valor mig, la hipòtesi (C) i $X_0 \in \bigcap_{p\ge1} L^p(\Omega)$, podem trobar una variable aleatòria positiva $\zeta \in \bigcap_{p\ge1} L^p(\Omega)$, tal que

$$
|V(\varphi_s(X_0)) - V(X_0)| \le \zeta\,|\varphi_s(X_0) - X_0|,
$$

per qualssevol $s \in [0, 1)$, $V \in \bigcup_{j=0}^{j_0} \Sigma_j$. Aleshores, utilitzant la desigualtat de Txebixef, per qualsevol $q \ge 1$

$$
\begin{aligned}
p_1(\varepsilon) &\le P\Big(\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V\in\Sigma_j} \int_0^{\varepsilon^\beta} \frac{|\lambda^* Z_s(X_0)\big(V(\varphi_s(X_0)) - V(X_0)\big)|^2}{|\lambda^* Z_s(X_0)|^2} ds > C\varepsilon^{m(j_0)},\ S_2^\varepsilon > \varepsilon^\beta\Big) \\
&\le P\big(\zeta^2\,\varepsilon^{\frac{5}{3}\beta} > C\varepsilon^{m(j_0)}\big) \ \le\ C\varepsilon^{(\frac{5}{3}\beta - m(j_0))q} E(\zeta^{2q}).
\end{aligned} \tag{2.2.16}
$$

Suposem, a més a més, $m(j_0) > \beta$; la hipòtesi *(iii)* ens dóna, per qualssevol $p \geq 1$ i ε prou petit

$$p_2(\varepsilon) \leq P\big(\lambda_{j_0}(X_0) \leq C\,\varepsilon^{m(j_0)-\beta}\big) \leq \varepsilon^p. \tag{2.2.17}$$

Siguin Γ, β, $w > 0$ complint les restriccions següents: $\beta > 18w$, $m(j_0) < 2(\lambda+1)\beta - 2\Gamma$, $\beta < m(j_0) < \frac{5}{3}\beta$. Aleshores, les estimacions (2.2.15), (2.2.16) i (2.2.17) impliquen (2.2.10).

Per la demostració de (2.2.11) ens remetem a [C-F-N] (Pas 2 a la prova del Teorema 5.2). Per exemple, per $j = 1$, apliquem la fórmula d'Itô a $Z_s(x)A_h(\varphi_s(x))$

$$\begin{aligned} Z_s(x)A_h(\varphi_s(x)) &= A_h(x) + \sum_{l=1}^{k}\int_0^s Z_r(x)[A_l, A_h](\varphi_r(x))dW_r^l \\ &+ \int_0^s Z_r(x)\big([A_0, A_h] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{k}[A_\varrho,[A_\varrho,A_h]]\big)(\varphi_r(x))dr. \end{aligned}$$

Aleshores (2.2.11) és un corol.lari del Lema 2.2.1. aplicat a

$$\begin{aligned} &\alpha_t^l(x) = \lambda^* Z_t(x)[A_l, A_h](\varphi_t(x)), \qquad l = 1, \cdots, k, \\ &V_t = \lambda^*\Big(A_h(X_0) + D_t^h X_0 + \int_0^t Z_s(X_0)\big([A_0, A_h] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{k}[A_\varrho,[A_\varrho,A_h]]\big)(\varphi_s(X_0))ds\Big), \end{aligned}$$

amb $a = \delta = 1$, $b = \frac{1}{k}, \eta = m(1)$.
La hipòtesi *(i)* i el Lema 2.1 de [O-P] ens asseguren la validesa de les hipòtesis necessàries.

Per $1 < j \leq j_0$ apliquem els mateixos arguments a

$$\begin{aligned} &\alpha_t^l(x) = \lambda^* Z_t(x)[A_l, V](\varphi_t(x)), \qquad l = 1, \cdots, k, \\ &V_t = \lambda^* V(X_0) + \lambda^* \int_0^t Z_s(X_0)\big([A_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{k}[A_\varrho,[A_\varrho,V]]\big)(\varphi_s(X_0))ds, \end{aligned}$$

$V \in \Sigma_{j-1}$. ∎

Exemple 2.2.3. Sigui $k = d = 2$. Considerem els camps vectorials

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x = (x_1, x_2)$. Aleshores

$$[A_1, A_2](x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \sin x_2 \\ -2\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Sigui $y = (x_1, 0)$, en aquest cas

$$E_1(y)E_1^*(y) = \begin{pmatrix} 2 & 2x_1+2 \\ 2x_1+2 & 4x_1^2+8 \end{pmatrix}.$$

Fent uns càlculs prou sencills, es veu

$$\inf\{\lambda_1(y);\, y = (x_1, 0),\, x_1 \in \mathbb{R}\} > 0.$$

Considerem qualsevol coeficient $A_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ infinitament diferenciable amb derivades parcials afitades i una condició inicial aleatòria $X_0 = (X_0^1, 0)$ que satisfaci les hipòtesis *(i)*,*(ii)* del Teorema 2.2.2. La hipòtesi *(iii)* d'aquest teorema es compleix, i per tant, X_t, $t \in (0,1]$ té densitat regular.
Per exemple, podem considerar $X_0^1 = W(h)$, on $W(h)$ és la integral d'Itô d'una funció $h \in L^2([0,1])$ que satisfaci $h_0 = 0$ i $|h_t - h_s| \leq C|t-s|^\gamma$, $t, s \in [0,1]$, per alguna $\gamma \in (0,1)$.

2.3. CONDICIONS DE HÖRMANDER NO RESTRINGIDES

Preliminars

Aquesta secció està dedicada a demostrar l'existència de densitat regular per la llei de la solució X_t de (2.1.1), $t \in (0,1]$, sota una condició de no degeneració, formulada en termes dels camps vectorials A_j, $j = 0, 1, \cdots, k$. Tindrem per tant una hipòtesi més general que la *(iii)* del Teorema 2.2.2.

Resultats

Com en el cas adaptat, ens cal una versió més refinada del Lema 2.2.1.

Lema 2.3.1. *Siguin* $\alpha = \{\alpha_t(x) = (\alpha_t^l(x))_{l=1,\cdots,k}\}$, $\beta = \{\beta_t(x)\}$, $\gamma = \{\gamma_t(x) = (\gamma_t^l(x))_{l=1,\cdots,k}\}$, $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^d$, *processos mesurables que satisfacin les següents condicions:*

(H1') per qualsevol $x \in \mathbb{R}^d$, $\{\alpha_t(x)\}, \{\beta_t(x)\}$ *i* $\{\gamma_t(x)\}$, $t \in [0,1]$ *són adaptats,*

(H2') per tot $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$, $x \rightarrow \alpha_t(x,\omega)$ *és una funció de classe* $\mathcal{C}^2$; $x \rightarrow \beta_t(x,\omega)$, $x \rightarrow \gamma_t(x,\omega)$ *són de classe* $\mathcal{C}^1$.

Considerem la família de variables aleatòries $h = \{h(x),\, x \in \mathbb{R}^d\}$ *tals que* $x \rightarrow h(x)$ *és* $\mathcal{C}^1$. *Sigui* $a_t(x) = h(x) + \int_0^t \beta_s(x)ds + \int \gamma_s(x)\, dW_s$, $t \in [0,1]$. *Suposem*

(H3') existeix un real $\mu > 0$ i una variable aleatòria positiva $\zeta_1 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ tals que, per qualsevol $K \geq 1$

$$\sup_{|x|\leq K,\, 0\leq t\leq T} \Big(|\alpha_t(x)| + |\alpha_t'(x)| + |\alpha_t''(x)| + |a_t(x)| + |a_t'(x)| + |\beta_t(x)| + |\gamma_t(x)|\Big) \leq \zeta_1 K^{\mu},$$

q.s., per algun $T \in (0,1]$.

Sigui Φ una variable aleatòria de $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Diem $Y_t(x) = \Phi + \int_0^t a_s(x)ds + \int_0^t \alpha_s(x)\, dW_s$, $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d$ i sigui X_0 una variable aleatòria d–dimensional que pertanyi a $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Aleshores, per qualssevol $\delta, \eta > 0$, amb $\delta > 8\eta$, per tot $a, b > 0$ i $p \in [2,\infty)$ existeix un $\varepsilon_0 > 0$ depenent de δ, η, a, b, p, T i dels moments de ζ_1 tal que

$$P\Big(\int_0^{t_0} |Y_t(X_0)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\delta},\ \int_0^{t_0} \big(|\alpha_t(X_0)|^2 + |a_t(X_0)|^2\big)dt > b\varepsilon^{\eta}\Big) \leq \varepsilon^p, \tag{2.3.1}$$

per tot $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ i $t_0 \in [0,T]$.

Prova. Per simplificar suposem $k = 1$. Fixem $\gamma_1, \varepsilon > 0$ i sigui $G_\varepsilon^1 = \{\zeta_1 \leq \varepsilon^{-\gamma_1}\}$. Fixem $x \in \mathbb{R}^d$ i $p \geq 2$. A la primera part de la prova, comprovarem l'existència de $w > 0$ i després de $\varepsilon_0 > 0$, depenent de $a, b, \delta, \eta, w, T, p$, tals que, per qualsevol $|x| \leq \varepsilon^{-w}$ i per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$P\Big(\{\int_0^{t_0} |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\delta},\ \int_0^{t_0} \big(|\alpha_t(x)|^2 + |a_t(x)|^2\big)dt > b\varepsilon^{\eta}\} \cap G_\varepsilon^1\Big) \leq \varepsilon^p. \tag{2.3.2}$$

En efecte. Siguin $r = \frac{1}{16}(\delta - 8\eta)$ i $q_1 = \frac{\delta}{4} - \frac{r}{2}$. Definim

$$R_1(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\delta},\ \int_0^{t_0} |\alpha_t(x)|^2 dt > \frac{b}{2}\varepsilon^{\eta}\} \cap G_\varepsilon^1\Big),$$
$$R_2(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\delta},\ \int_0^{t_0} |a_t(x)|^2 dt > \frac{b}{2}\varepsilon^{\eta},\ \int_0^{t_0} |\alpha_t(x)|^2 dt \leq \varepsilon^{q_1}\} \cap G_\varepsilon^1\Big),$$
$$R_3(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\delta},\ \int_0^{t_0} |\alpha_t(x)|^2 dt > \varepsilon^{q_1}\} \cap G_\varepsilon^1\Big).$$

Aleshores, la demostració de (2.3.2) es redueix a comprovar les estimacions per cada $R_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$.

El procés $V_t := \Phi + \int_0^t a_s(x)ds$, $|x| \leq \varepsilon^{-w}$ satisfà la hipòtesi $(H4)$ del Lema 2.2.1 amb $\lambda = \frac{1}{2}$ i $\zeta_2 = \zeta_1\, \varepsilon^{-\mu w}$. Observem, que $(H3')$ implica

$$|V_t - V_s| \leq |t-s| \sup_{|x|\leq \varepsilon^{-w}} |a_s(x)| \leq |t-s|\, \zeta_1\, \varepsilon^{-\mu w}.$$

Com que $\delta > \max\{4\eta, 4q_1\}$, la primera part de la demostració del Lema 2.2.1 (veieu (2.2.3)) ens dóna l'estimació que cercàvem per $R_1(\varepsilon), R_3(\varepsilon)$.

Estudiarem ara $R_2(\varepsilon)$. Ens cal introduir nova notació. Definim

$$M_t(x) = \int_0^t \alpha_s(x) dW_s, \quad A_t(x) = \int_0^t a_s(x) ds, \quad Q_t(x) = \int_0^t A_s(x)\gamma_s(x) dW_s,$$

$t \in [0, T]$, i considerem els conjunts

$$\begin{aligned} F &= \{ \int_0^{t_0} |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^\delta, \int_0^{t_0} |a_t(x)|^2 dt > \frac{b}{2}\varepsilon^\eta, \int_0^{t_0} |\alpha_t(x)|^2 dt \leq \varepsilon^{q_1} \}, \\ F_1 &= \{ < M(x) >_{t_0} < \rho_1, \sup_{0 \leq s \leq t_0} |M_s(x)| \geq \delta_1 \}, \\ F_2 &= \{ < Q(x) >_{t_0} < \rho_2, \sup_{0 \leq s \leq t_0} |Q_s(x)| \geq \delta_2 \}, \end{aligned}$$

on $< . >$ denota la variació quadràtica,

$$\begin{aligned} &\rho_1 = \varepsilon^{q_1}, \quad \delta_1 = \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1}, \quad x_1 = \frac{1}{2}(\frac{\delta}{4} - r), \\ &\rho_2 = 36a^2\varepsilon^{q_2}, \quad \delta_2 = \frac{b}{3}\varepsilon^{x_2}, \quad q_2 = 2\eta + r, \quad x_2 = \eta. \end{aligned}$$

Volem veure que

$$F \cap G_\varepsilon^1 \subset F_1 \cup F_2, \tag{2.3.3}$$

per $r = 2\gamma_1 + 2\mu w$.

Suposem que hem demostrat (2.3.3). Aleshores, la desigualtat exponencial per martingales implica

$$\begin{aligned} R_2(\varepsilon) = P(F \cap G_\varepsilon^1) &\leq P(F_1) + P(F_2) \leq 2\exp\big(- \frac{\delta_1^2}{2\rho_1}\big) + 2\exp\big(- \frac{\delta_2^2}{2\rho_2}\big) \\ &\leq 2\exp\big(- \frac{a^2}{8}\varepsilon^{-\frac{r}{2}}\big) + 2\exp\big(- \frac{b^2}{648a^2}\varepsilon^{-r}\big) \end{aligned}$$

de manera que ens completa l'estimació de $R_2(\varepsilon)$.

Anem per tant a demostrar (2.3.3). Fixem $\omega \notin F_1 \cup F_2$, $\omega \in G_\varepsilon^1$ tal que $\int_0^{t_0} |Y_t(x)|^2 dt \leq a\varepsilon^\delta$, $\int_0^{t_0} |\alpha_t(x)|^2 dt \leq \varepsilon^{q_1}$. Com que $\omega \notin F_1$, $\sup_{0 \leq t \leq t_0} | \int_0^t \alpha_s(x) dW_s| < \delta_1 = \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1}$. A partir d'ara, algunes vegades ometem la dependència dels processos en x. Denotem per λ la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Per la desigualtat de Txebixef,

$$\lambda\{t \in [0, t_0] : |Y_t(\omega)| \geq \varepsilon^{\frac{7}{16}\delta}\} \leq \varepsilon^{-\frac{7}{8}\delta} \int_0^{t_0} |Y_t(\omega)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\frac{\delta}{8}}$$

i per tant,

$$\begin{aligned}&\lambda\{t \in [0,t_0] : |V_t(\omega)| \geq \varepsilon^{\frac{7}{16}\delta} + \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1}\} \\ &= \lambda\{t \in [0,t_0] : |Y_t(\omega) - M_t(\omega)| \geq \varepsilon^{\frac{7}{16}\delta} + \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1}\} \leq a\varepsilon^{\frac{\delta}{8}}.\end{aligned}$$

Per $\varepsilon \leq \varepsilon_0(t_0)$, podem suposar que $a\varepsilon^{\frac{\delta}{8}} < \frac{1}{2}t_0$. Així, per qualsevol $t \in [0,t_0]$ existirà $s \in [0,t_0]$ tal que $|s-t| \leq a\varepsilon^{\frac{\delta}{8}}$ i $|V_s(\omega)| < \varepsilon^{\frac{7}{16}\delta} + \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1}$. En conseqüència, utilitzant $(H3')$ obtenim

$$\begin{aligned}|V_t(\omega)| &\leq |V_s(\omega)| + |A_s(\omega) - A_t(\omega)| \leq \varepsilon^{\frac{7}{16}\delta} + \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1} + \Big|\int_s^t a_r dr\Big| \\ &\leq \varepsilon^{\frac{7}{16}\delta} + \frac{a}{2}\varepsilon^{x_1} + a\varepsilon^{\frac{\delta}{8}-\gamma_1-\mu w} \leq 3a\varepsilon^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{4}-r)}.\end{aligned}$$

En particular, per $t=0$, $|\Phi(\omega)| \leq 3a\varepsilon^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{4}-r)}$ i la desigualtat triangular implica

$$|A_t(\omega)| \leq 6a\varepsilon^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{4}-r)}.$$

Aleshores,

$$< Q(x) >_{t_0} = \int_0^{t_0} |A_s(x)|^2 |\gamma_s(x)|^2 ds \leq 36a^2\varepsilon^{\frac{\delta}{4}-2r} = 36a^2\varepsilon^{2\eta+2r} < \rho_2.$$

Com que $\omega \notin F_2$, $|Q_{t_0}(x)| < \delta_2 = \frac{b}{3}\varepsilon^{x_2}$. Utilitzant la fórmula d'Itô obtenim

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0} |a_t(x)|^2 dt &= \int_0^{t_0} a_t(x) dA_t = a_{t_0}(x)A_{t_0}(x) - \int_0^{t_0} A_t(x)\beta_t(x)dt \\ &- \int_0^{t_0} A_t(x)\gamma_t(x)dW_t.\end{aligned}$$

I per tant, com que $\frac{\delta}{8} - r > \eta$,

$$\int_0^{t_0} |a_t(x)|^2 dt \leq 12a\varepsilon^{\frac{\delta}{8}-r} + \frac{b}{3}\varepsilon^{x_2} < \frac{b}{2}\varepsilon^{\eta}.$$

Això ens demostra (2.3.3) i completa la prova de (2.3.2).

Procedirem ara com a la demostració de la segona part del Lema 2.2.1. Utilitzarem també la mateixa notació. Considerem la descomposició

$$P\Big(\int_0^{t_0} |Y_t(X_0)|^2 dt \leq a\varepsilon^{\delta}, \int_0^{t_0} \big(|\alpha_t(X_0)|^2 + |a_t(X_0)|^2\big)dt > b\varepsilon^{\eta}\Big) \leq \sum_{j=1}^{6} \tilde{T}_j(\varepsilon),$$

amb

$$\tilde{T}_1(\varepsilon) = P((G^1_\varepsilon)^c), \qquad \tilde{T}_2(\varepsilon) = P(H^c_\varepsilon),$$
$$\tilde{T}_3(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |Y_t(X_\varepsilon)|^2 dt \le 3a\varepsilon^\delta, \int_0^{t_0} (|\alpha_t(X_\varepsilon)|^2 + |a_t(X_\varepsilon)|^2)dt > \frac{b}{2}\varepsilon^\eta\} \cap G^1_\varepsilon\Big),$$
$$\tilde{T}_4(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |\alpha^2_t(X_0) - \alpha^2_t(X_\varepsilon)|dt > \frac{b}{4}\varepsilon^\eta\} \cap G^1_\varepsilon \cap H_\varepsilon\Big),$$
$$\tilde{T}_5(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |a^2_t(X_0) - a^2_t(X_\varepsilon)|dt > \frac{b}{4}\varepsilon^\eta\} \cap G^1_\varepsilon \cap H_\varepsilon\Big),$$
$$\tilde{T}_6(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |Y_t(X_0) - Y_t(X_\varepsilon)|^2 dt > \frac{a}{2}\varepsilon^\delta\} \cap G^1_\varepsilon \cap H_\varepsilon\Big).$$

Els termes $\tilde{T}_1(\varepsilon), \tilde{T}_2(\varepsilon)$ s'afiten a partir de la desigualtat de Txebixef. Per afitar $\tilde{T}_3(\varepsilon)$ utilitzem el resultat obtingut a la primera part de la demostració. $\tilde{T}_4(\varepsilon)$ i $\tilde{T}_5(\varepsilon)$ es tracten com $T_5(\varepsilon)$ a la demostració del Lema 2.2.1. Finalment,

$$\tilde{T}_6(\varepsilon) \le \tilde{T}_{6,1}(\varepsilon) + \tilde{T}_{6,1}(\varepsilon),$$

amb

$$\tilde{T}_{6,1}(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |(\int_0^t \alpha_s(x)dW_s)_{|x=X_\varepsilon} - (\int_0^t \alpha_s(x)dW_s)_{|x=X_0}|^2 dt > \frac{a}{8}\varepsilon^\delta\} \cap G^1_\varepsilon \cap H_\varepsilon\Big),$$

i

$$\tilde{T}_{6,2}(\varepsilon) = P\Big(\{\int_0^{t_0} |\int_0^t (a_s(X_\varepsilon) - a_s(X_0))ds|^2 dt > \frac{a}{8}\varepsilon^\delta\} \cap G^1_\varepsilon \cap H_\varepsilon\Big).$$

Per tractar $\tilde{T}_{6,1}(\varepsilon)$ utilitzem els arguments aplicats a $T_6(\varepsilon)$ a la demostració del Lema 2.2.1. $\tilde{T}_{6,2}(\varepsilon)$ s'analitza com $\tilde{T}_5(\varepsilon)$.
Aleshores, escollint $\beta > \max\{p + \eta + 2\gamma_1 + 2\mu w, \frac{1}{2}(p + \delta + 2\gamma_1 + 2\mu w + dw)\}$ obtenim l'estimació (2.3.1). ∎

Considerem els conjunts de camps vectorials

$$\Sigma'_0 = \Sigma_0 = \{A_i, i = 1, \cdots, k\},$$
$$\Sigma'_j = \{[A_i, V], i = 1, \cdots, k, [A_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^k [A_\varrho, [A_\varrho, V]], V \in \Sigma'_{j-1}\}, \quad j \ge 1.$$

Per qualssevol enter no negatiu $m \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}^d$, sigui $L_m(x)$ la matriu amb columnes els camps vectorials de Σ'_j, $0 \leq j \leq m$, al punt x. Denotem per $\mu_m(x)$ el valor propi més petit de $L_m(x)L^*_m(x)$, és a dir,

$$\mu_m(x) = \inf_{|v|=1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{V \in \Sigma'_j} |v^* V(x)|^2, \tag{2.3.4}$$

És evident que, $\lambda_m(x) \leq \mu_m(x)$ (veieu (2.2.9)).

Podem donar ara l'anàleg del Teorema 2.2.2 sota una condició de no degeneració menys restrictiva.

Teorema 2.3.2. *Suposem que els coeficients $A_0, A_1, \cdots, A_k$ de l'equació (2.1.1) satisfan (C). Sigui $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que*
(i) existeix $t_0 \in (0,1]$ tal que, per alguna versió de DX_0, $D_s X_0 = 0$ per tot $s \in [0, t_0]$,
(ii) per algun enter $j_0 \geq 0$,

$$\left(\mu_{j_0}(X_0)\right)^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega).$$

Aleshores, per qualsevol $t \in (0,1]$, la solució X_t de (2.1.1) té densitat infinitament diferenciable.

Prova. L'esquema de la prova és el mateix que el de la prova del Teorema 2.2.2. Per completar la demostració, es donaran només els detalls que destaquin les diferències entre les dues. Considerem els conjunts

$$E'_j = \{ \sum_{V \in \Sigma'_j} \int_0^{t \wedge t_0} \left(\lambda^* Z_s(X_0) V(\varphi_s(X_0))\right)^2 ds < \varepsilon^{n(j)} \}, \qquad j \geq 0$$

amb $n(j) = 3^{-2j}$, $F' = \cap_{j=0}^{j_0} E'_j$.
De manera anàloga a la demostració del Teorema 2.2.2, i utilitzant la hipòtesi *(i)* en tenim prou demostrant $P(E'_0) \leq \varepsilon^p$ per tot $p \geq 1$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.
Així, la demostració es redueix a comprovar

$$P(F') \leq \varepsilon^p, \tag{2.3.5}$$

$$P\left(E'_{j-1} \cap (E'_j)^c\right) \leq \varepsilon^p, \qquad 1 \leq j \leq j_0. \tag{2.3.6}$$

per qualssevol $p \geq 1$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.

Per comprovar (2.3.5), considerem els temps aleatoris S_1, S_2^ε i l'estimació (2.2.15), reduint el problema a trobar la fita desitjada per $p_1(\varepsilon) = P\left(F' \cap \{S_1 > \varepsilon^\beta\} \cap \{S_2^\varepsilon > \varepsilon^\beta\}\right)$ per un $\beta > 0$ apropiat. Es comprova que

$$p_1(\varepsilon) \leq P\left(\mu_{j_0}(X_0) \leq C\varepsilon^{n(j_0)-\beta}\right).$$

Utilitzant ara la condició de no degeneració *(ii)*, (2.3.5) s'obté escollint, en aquest pas intermig, $\beta < n(j_0) < \frac{5}{3}\beta$.

Per $1 \leq j \leq j_0$,

$$P(E'_{j-1} \cap (E'_j)^c) \leq \sum_{V \in \Sigma'_{j-1}} P\Big(\int_0^{t\wedge t_0} |\lambda^* Z_s(X_0) V(\varphi_s(X_0))|^2 ds < \varepsilon^{n(j-1)},$$

$$\int_0^{t\wedge t_0} \Big(\sum_{l=1}^k |\lambda^* Z_s(X_0)[A_l, V](\varphi_s(X_0))|^2 + |\lambda^* Z_s(X_0)\big([A_0, V]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^k [A_\varrho, [A_\varrho, V]]\big)(\varphi_s(X_0))|^2 \Big) ds \geq \frac{\varepsilon^{n(j)}}{k} \Big).$$

Aplicarem ara el Lema 2.3.1 al procés $Y_t(x) = \Phi + \int_0^t a_s(x) ds + \int_0^t \alpha_s(x)\, dW_s$, amb

$$\Phi = \lambda^* V(X_0),$$

$$a_s(x) = \lambda^* Z_s(x)\Big([A_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^k [A_\varrho, [A_\varrho, V]]\Big)(\varphi_s(x)),$$

$$\alpha_s^l(x) = \lambda^* Z_s(x)[A_l, V](\varphi_s(x)), \qquad l = 1, \cdots, k.$$

Ho podem fer ja que la fórmula d'Itô implica

$$\lambda^* Z_t(x) \tilde{V}(\varphi_t(x)) = \lambda^* \tilde{V}(x) + \lambda^* \Big(\int_0^t Z_s(x)[A_l, \tilde{V}](\varphi_s(x)) dW_r^l$$

$$+ \int_0^t Z_s(x)\Big([A_0, \tilde{V}] + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^k [A_\varrho, [A_\varrho, \tilde{V}]]\Big)(\varphi_s(x)) ds \Big), \qquad (2.3.7)$$

per qualsevol funció C^∞, $\tilde{V} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, i així, $Y_t(X_0) = \lambda^* Z_t(X_0) V(\varphi_t(X_0))$.
A més a més, (2.3.7) per $\tilde{V} = [A_0, V] + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^k [A_\varrho, [A_\varrho, V]]$ ens dóna la descomposició $a_s(x) = h(x) + \int_0^t \beta_s(x) ds + \int_0^t \gamma_s(x)\, dW_s$ amb

$$h(x) = \lambda^* \tilde{V}(x),$$

$$\beta_s(x) = \lambda^* Z_s(x)\Big([A_0, \tilde{V}] + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^k [A_\varrho, [A_\varrho, \tilde{V}]]\Big)(\varphi_s(x)),$$

$$\gamma_s^l(x) = \lambda^* Z_s(x)[A_l, \tilde{V}](\varphi_s(x)).$$

Clarament, les hipòtesis del Lema 2.3.1 es compleixen. En particular, $(H3')$ és conseqüència del Lema 2.1 [O-P]. Per tant, (2.3.6) queda provat. ∎

Exemple 2.3.3. Siguin $k = 1$, $d = 2$. Considerem els camps vectorials

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \; A_0(x) = \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$x = (x_1, x_2)$. En aquest cas, $\Sigma_0 = \{A_1\}$ i $\Sigma_j = \{0\}$, per qualsevol $j \geq 1$. Per tant $\lambda_m(x) = 0$ per qualsevol $m \geq 0$ i la condició *(iii)* del Teorema 2.2.2 no es compleix.
El parèntesi de Lie $[A_0, A_1]$ en el punt x és

$$\begin{pmatrix} -2x_1 \cos x_2 \\ 2 \sin x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Sigui $y = (x_1, 0)$, aleshores

$$L_1(y) L_1^*(y) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 + 1 & 4x_1 \\ 4x_1 & 4x_1^2 + 1 \end{pmatrix},$$

i, suposant que $x_1 \geq 0$, $\mu_1(y) = 4x_1^2 - 4x_1 + 1$. Així

$$\inf\{\mu_1(y);\; y = (x_1, 0),\; x_1 \geq 1\} = 1.$$

Considerem la condició inicial $X_0 = (X_0^1, 0)$ amb $X_0^1 = 1 + \left(\int_{t_0}^1 h_s dW_s \right)^2$, $t_0 > 0$ i $h \in L^2([0,1])$. Aleshores, les hipòtesis del Teorema 2.3.2 es compleixen i per tant, X_t té densitat regular, per qualsevol $t \in (0, 1]$.

Observació. La hipòtesi *(i)* del Teorema 2.3.2 s'ha imposat per tal de poder aplicar el Lema 2.3.1. Si s'estengués aquest lema permetent que Φ fos un procés estocàstic, la hipòtesi *(i)* es podria afeblir.

2.4. UN CAS DEGENERAT

Preliminars

Aquesta secció està dedicada a estudiar l'existència de densitat regular per la llei de la solució de (2.1.1) quan la condició de Hörmander no es compleix. El nostre objectiu serà establir una versió anticipativa del Teorema 1.1 [B-M 1].

Utilitzarem la notació introduïda a la secció anterior. Seguint [B-M 1], tenim les definicions i els resultats següents.

Definició 2.4.1. *Un vector $x \in \mathbb{R}^d$ s'anomena un punt de Hörmander si existeix un enter no negatiu $m \geq 0$ tal que $\mu_m(x) > 0$.*

Clarament $\mu_m(x) > 0$, si i només si, l'envoltura lineal dels camps vectorials de $\cup_{j=0}^{m} \Sigma_j'$ al punt x és $\mathbb{R}^d$.

Sigui $\mathcal{H}_m = \{x \in \mathbb{R}^d : \mu_m(x) > 0\}$, $\mathcal{H} = \cup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m$. $\mathcal{H}$ és el conjunt de tots els punts de Hörmander.

Definició 2.4.2. [B-M 2] *Un punt $x \in \mathbb{R}^d$ satisfà la propietat (ED)(p, m) (condició de degeneració exponencial) si existeixen $m \geq 1$, un entorn obert U de x, una funció de classe $\mathcal{C}^2$, $\phi : U \to \mathbb{R}$ i $p \in (-1, 0)$ tals que*

(e_1) $\phi(x) = 0$ i $\left(\nabla\phi(x)\right)^* A_i(x) \neq 0$, per algun $i = 1, \cdots, k$,

(e_2) $\mu_m(y) \geq \exp\left(- |\phi(y)|^p \right)$, per tot $y \in U$.

Sota certes restriccions geomètriques, les propietats introduïdes a les Definicions 2.4.1 i 2.4.2 són disjuntes. Considerem les següents hipòtesis, suposant que $\mathcal{H}^c \neq \emptyset$,

(h_1) $\mathcal{H}^c$ està inclòs a una $\mathcal{C}^2$–subvarietat N de $\mathbb{R}^d$ de codimensió 1 i, per cada $x \in \mathcal{H}^c$ almenys un dels camps vectorials $A_1, \cdots, A_k$ és transversal a N,

(h_2) per qualsevol $x \in \mathcal{H}^c$, existeixen $m \geq 0$, un entorn obert U_1 de x i $p \in (-1, 0)$ tals que $\mu_m(y) \geq \exp\left(- [d(y, N)]^p \right)$, $\forall y \in U_1$, on d denota la distància euclidiana.

Al Lema 3.4 [B-M 1] es demostra que, sota (h_1) i (h_2), per qualsevol $x \in \mathbb{R}^d$ existeix un $m \geq 0$ tal que, o bé $\mu_m(x) > 0$ o bé x satisfà (ED)(p, m) per algun $p \in (-1, 0)$.

Abans d'establir els nous resultats, recordem-ne alguns de [B-M 1] encara no massa difosos. Començarem amb els Lemmes 3.1, 3.2 i 3.3 de [B-M 1]. Aquest últim serà una eina bàsica a la demostració del nostre teorema, mentre que els altres dos són necessaris per plantejar l'últim amb precisió. Donarem també una versió del resultat fonamental de [B-M 1].

Definició 2.4.3. [B-M 1] *Una variable aleatòria no negativa X s'anomena exponencialment positiva si existeixen constants positives c_1 i c_2 (a les que anomenarem les característiques de X) tals que $P(X \leq \varepsilon) < \exp(-c_1\varepsilon^{-1})$ per tot $\varepsilon \in (0, c_2)$.*

Lema 2.4.4. [B-M 1] *Sigui $y : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un procés d'Itô de la forma*

$$dy(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) dW_t^i + b(t)dt, \quad 0 \leq t \leq T,$$

on $a_1, \cdots, a_k, b : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ són processos adaptats i afitats q.s. per una constant determinista c_3. Sigui $r > 0$ i definim

$$\tau := \inf\{s > 0 : |y(s) - y(0)| = r\} \wedge T.$$

Aleshores τ és un temps d'atur exponencialment positiu, i les característiques de τ només depenen de r, c_3, k i d.

Lema 2.4.5. [B-M 1] *Sigui* $y : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *un procés d'Itô com el del Lema 2.4.4. Suposem que* $\tau \le T$ *és un temps d'atur exponencialment positiu tal que almenys un dels coeficients* a_i *de la difusió satisfà la condició:* $|a_i| \ge \delta$, *per tot* $0 \le s \le \tau$, *per algun* $\delta > 0$. *Aleshores, per tot* $m \ge 2$, *existeixen constants positives* c_3, c_4 *i* T_0 *tals que per tot* $t \in (0, T_0)$ *i* $\varepsilon \in (0, c_4 t^{m+1})$, *es compleix*

$$P\Big(\int_0^{t\wedge\tau} |y(u)|^m du \ < \ \varepsilon\Big) \ < \ \exp\big\{ - c_5 \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}} \big\}. \tag{2.4.1}$$

Les constants c_4 *i* c_5 *es poden escollir de manera que només depenguin de* m, c_3, δ *i les característiques de* τ. *La constant* T_0 *depèn només de les característiques de* τ.

Lema 2.4.6. [B-M 1] *Sigui* τ *un temps d'atur exponencialment positiu i* $p \in (-1, 0)$. *Suposem que* y *és un procés d'Itô com el del Lema 2.4.4. Suposem que* y *i* τ *satisfan una estimació com la (2.4.1) per algun* $m > -\frac{p}{p+1}$. *Aleshores, existeixen constants positives* T_1, c_6, c_7 *i* $q > 1$ *tals que per tot* $t \in (0, T_1)$ *i* $\varepsilon < \exp\{-c_6 t^{-\frac{1}{q}}\}$,

$$P\Big(\int_0^{t\wedge\tau} \exp(|y(u)|^p) du \ < \ \varepsilon\Big) \ < \ \exp\big\{ - c_7 |\log\varepsilon|^q \big\}.$$

A més a més, les constants T_1, c_6, c_7 *i* q *queden completament determinades per* c_3 *del Lema 2.4.4,* c_4, c_5 *i* m *de (2.4.1),* p *i les característiques de* τ.

Donarem per acabar una versió probabilística del Teorema 1.1 de [B-M 1] aplicat a l'equació (2.1.1).

Teorema 2.4.7. [B-M 1]*Suposem que els coeficients* A_j, $j = 0, \cdots, k$ *de l'equació (2.1.1) estan afitats i són de classe* C^∞ *amb derivades parcials afitades de tots els ordres. Sigui* $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$ *tal que existeix un* $m \ge 0$ *tal que, o bé* $\mu_m(x_0) > 0$ *o bé* x_0 *satisfà (ED)(p, m) per algun* $p \in (-1, 0)$. *Aleshores* X_t *té densitat regular per qualsevol* $t \in (0, 1]$.

Quan x_0 satisfà $\mu_m(x_0) > 0$ es tracta del cas adaptat ja conegut. En canvi, quan x_0 satisfà (ED)(p, m), ens trobem amb un cas degenerat, ja que $\mu_m(x_0) = 0$. En el mètode presentat per Bell i Mohammed, s'utilitza que en un entorn de x_0, $\mu_m(.) \ge \exp(-|\phi(.)|^p)$. Aleshores, mitjançant la fórmula d'Itô es comprova que se satisfan les hipòtesis del Lema 2.4.5 i per tant, aplicant el Lema 2.4.6 podem obtenir el resultat desitjat.

L'objectiu fonamental d'aquesta secció serà generalitzar al cas anticipatiu el Teorema 2.4.7.

Resultats

El nostre objectiu és establir una versió anticipativa del Teorema 1.1 [B-M 1]. Comencem donant un petit lema tècnic.

Lema 2.4.8. Si $\mathcal{C}$ és un compacte inclòs a $\mathcal{H}$, existeixen un enter $j_0 \geq 0$ i $\eta_0 \in (0, \infty)$ tals que $\mu_{j_0}(x) \geq \eta_0$, per tot $x \in \mathcal{C}$.

Prova. Per cada $x \in \mathcal{C}$, existeixen $m_x \geq 0$ i $\eta_x > 0$ tals que $\mu_{m_x}(x) > \eta_x$. Per la continuïtat de la funció $y \longrightarrow \mu_{m_x}(y)$, existeix $\delta_x > 0$ tal que, per tot $y \in B_{\delta_x}(x)$, $\mu_{m_x}(y) \geq \frac{\eta_x}{2}$. La família $\{B_{\delta_x}(x),\ x \in \mathcal{C}\}$ és un recobriment del compacte $\mathcal{C}$. Sigui $\{B_{\delta_{x_l}}(x),\ l = 1, \cdots, l_0\}$ un subrecobriment finit. Diem $\eta_0 = \frac{1}{2}\min\{\eta_{x_l},\ l = 1, \cdots, l_0\}$, $j_0 = \max\{m_{x_l},\ l = 1, \cdots, l_0\}$. Aleshores, donat $x \in \mathcal{C}$, existeix x_l tal que $x \in B_{\delta_{x_l}}(x_l)$, i com que μ_m creix amb la m,

$$\mu_{j_0}(x) \geq \mu_{m_{x_l}}(x) \geq \frac{\eta_{x_l}}{2} \geq \eta_0.$$

∎

Podem donar ja el resultat fonamental d'aquesta secció.

Teorema 2.4.9. *Suposem que els coeficients A_j, $j = 0, \cdots, k$ de l'equació (2.1.1) estan afitats i són de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades parcials afitades. Sigui $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que*

(i) $|X_0| \leq K$, per alguna constant positiva K,

(ii) existeix $t_0 \in (0, 1]$ tal que, per alguna versió de DX_0, $D_s X_0 = 0$ per tot $s \in [0, t_0]$.

Si, a més a més, es compleixen (h_1) i (h_2), X_t té densitat regular per qualsevol $t \in (0, 1]$.

Observació. Pel teorema anterior sabem que l'existència de densitat regular de la variable X_t, $t \in (0, 1]$, es pot assegurar en exemples on la hipòtesi següent no és certa:

(A) existeix $j_0 \geq 0$ tal que l'envoltura lineal de $\cup_{j=0}^{j_0} \Sigma'_j$ a qualsevol punt x del compacte $\overline{B}_K(0)$ és $\mathbb{R}^d$.

Prova del Teorema 2.4.9. Suposem primer $\overline{B}_K(0) \cap \mathcal{H}^c = \emptyset$. En aquest cas, $\overline{B}_K(0)$ és un compacte inclòs a $\mathcal{H}$. Pel Lema 2.4.8, sabem que existeixen $j_0 \geq 0$ i $\eta_0 > 0$ tals que

$$\inf_{|x| \leq K} \mu_{j_0}(x) \geq \eta_0.$$

D'aquesta manera, la hipòtesi *(i)* implica que $\mu_{j_0}(X_0) \geq \eta_0$, q.s. Com que es satisfan les hipòtesis del Teorema 2.3.2, X_t té densitat regular per qualsevol $t \in (0, 1]$.

Suposem ara $\overline{B}_K(0) \cap \mathcal{H}^c \neq \emptyset$. Com que $\mathcal{H}^c$ és un tancat, $\overline{B}_K(0) \cap \mathcal{H}^c$ és compacte. Fixem $x \in \mathcal{H}^c$. Les hipòtesis (h_1) i (h_2) impliquen l'existència d'entorns oberts de x, U_x i V_x i d'una funció de classe $\mathcal{C}^2$, $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}$ tals que

- $\phi_x(x) = 0$, $|(\nabla\phi_x(y))^* A_{i_x}(y)| \geq \frac{1}{2}|(\nabla\phi_x(x))^* A_{i_x}(x)| > 0$, per algun $i_x \in \{1, \cdots, k\}$ i per qualsevol $y \in V_x$,
- existeixen un enter $m_x \geq 0$ i $p_x \in (-1, 0)$ amb $\mu_{m_x}(y) \geq \exp\big(-|\phi_x(y)|^{p_x}\big)$, per tot $y \in U_x$.

Sigui $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}(x) \subset U_x \cap V_x$. Considerem un recobriment finit $\{B_{\frac{2}{3}\delta_{x_i}}(x_i), i = 1, \cdots, n\}$ de $\overline{B}_K(0) \cap \mathcal{H}^c$. Per simplificar la notació, escriurem $B_{\delta_i}(x_i)$ en comptes de $B_{\frac{2}{3}\delta_{x_i}}(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$. Diem $\mathcal{W} = \cup_{i=1}^n B_{\delta_i}(x_i)$. Com que $\mathcal{W}^c \cap \overline{B}_K(0)$ és compacte i està inclòs a $\mathcal{H}$, pel Lema 2.4.8 existeixen un enter $\chi_0 \geq 0$ i un real $\eta_0 > 0$ tals que

$$\mu_{\chi_0}(x) \geq \eta_0, \quad \text{per tot } x \in \mathcal{W}^c \cap \overline{B}_K(0).$$

Diem $j_0 = \max\{\chi_0, m_{x_i}, i = 1, \cdots, n\}$. Observem que

$$\mu_{j_0}(x) \geq \eta_0, \quad \text{per tot } x \in \mathcal{W}^c \cap \overline{B}_K(0), \tag{2.4.2}$$

$$\mu_{j_0}(y) \geq \exp\big(-|\phi_{x_i}(y)|^{p_{x_i}}\big), \quad \text{per tot } y \in U_{x_i}, i = 1, \cdots, n. \tag{2.4.3}$$

Procedim ara com a la demostració del Teorema 2.3.2. Considerem el temps aleatori S_1 definit a (2.2.13) que satisfà

$$P(S_1 \leq \varepsilon) \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}q}, \quad q > d.$$

Aquesta desigualtat es pot obtenir utilitzant els arguments emprats per deduir (2.2.15). Aquí, però, gràcies a la hipòtesi *(i)*, no és necessari introduir el conjunt H_ε.

Aleshores, utilitzant el Lema 2.3.1, la demostració es redueix a comprovar la desigualtat següent

$$p(\varepsilon) := P\Big(\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in \Sigma'_j} \int_0^{t\wedge t_0 \wedge S_1} |\lambda^* V(\varphi_s(X_0))|^2 ds < C\varepsilon^{n(j_0)}\Big) \leq \varepsilon^p, \tag{2.4.4}$$

per qualssevol $\lambda \in B_1(0)$, $p \geq 1$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.

A la demostració del Teorema 1.1 [B-M 1], es comprova (2.4.4) per X_0 determinista. Aquí, la idea és, com a [C-F-N], aproximar X_0 per una variable discreta.

Sigui $\gamma > 0$ i $\{B_{\varepsilon^\gamma}(z_i), z_i \in \overline{B}_K(0), i = 1, \cdots, N_\varepsilon^\gamma\}$ un recobriment finit de $\overline{B}_K(0)$. Observem que $N_\varepsilon^\gamma \leq C(K,d)\,\varepsilon^{-\gamma d}$. Definim els conjunts $A_i = \{\omega : |X_0(\omega) - z_i| \leq \varepsilon^\gamma\}$, $i = 1, 2, \cdots, N_\varepsilon^\gamma$, $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \cap \big(\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j\big)^c$, $i \in \{2, \cdots, N_\varepsilon^\gamma\}$, i la variable aleatòria

$$X^{\gamma,\varepsilon}(\omega) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon^\gamma} z_i \mathbf{1}_{B_i}(\omega).$$

És clar que
$$\sup_{\omega\in\Omega} |X_0(\omega) - X^{\gamma,\varepsilon}(\omega)| \le \varepsilon^\gamma. \tag{2.4.5}$$
Aleshores, $p(\varepsilon) \le p_1(\varepsilon) + p_2(\varepsilon)$ amb

$$p_1(\varepsilon) = P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma'_j}\int_0^{S_3} |\lambda^* V(\varphi_s(X^{\gamma,\varepsilon}))|^2 ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big),$$
$$p_2(\varepsilon) = P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma'_j}\int_0^{S_3} |\lambda^*\big(V(\varphi_s(X_0)) - V(\varphi_s(X^{\gamma,\varepsilon}))\big)|^2 ds > C\varepsilon^{n(j_0)}\Big),$$
on $S_3 = t\wedge t_0 \wedge S_1$.
La definició de $X^{\gamma,\varepsilon}$ implica

$$p_1(\varepsilon) \le \sum_{i=1}^{N_\varepsilon^\gamma} P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma'_j}\int_0^{S_3} |\lambda^* V(\varphi_s(z_i))|^2 ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big).$$

Observem que la propietat (2.4.2) implica l'existència de $\tilde\eta > 0$ tal que $\mu_{j_0}(y) \ge \frac{1}{2}\eta_0$ per qualsevol y tal que $d(y, \mathcal{W}^c \cap \overline{B}_K(0)) \le \tilde\eta$. Definim $\delta = \frac{1}{3}\min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}\}$ i $\eta = \delta \wedge \tilde\eta$.
Fixem ara $i \in \{1, 2, \cdots, N_\varepsilon^\gamma\}$. Definim el temps d'atur
$$\tau_1(\eta) = \inf\{s > 0 : |\varphi_s(z_i) - z_i| \ge \eta\} \wedge t.$$
Suposem primer que $z_i \in \mathcal{W}^c \cap \overline{B}_K(0)$. Aleshores

$$P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma'_j}\int_0^{S_3} |\lambda^* V(\varphi_s(z_i))|^2 ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big) \le P\Big(\int_0^{\tau_1(\eta)\wedge S_3} \mu_{j_0}(\varphi_s(z_i))ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big)$$
$$\le P\big(\tau_1(\eta) \le C\varepsilon^{n(j_0)}\big) + P\big(S_1 \le C\varepsilon^{n(j_0)}\big).$$
A més a més,
$$P\big(\tau_1(\eta) \le C\varepsilon^{n(j_0)}\big) \le C\varepsilon^{\frac{n(j_0)}{2}q}, \quad q \ge 2.$$

Suposem ara que $z_i \in \mathcal{W} \cap \overline{B}_K(0)$. Existeix $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $z_i \in B_{\delta_j}(x_j)$. Aleshores $B_\delta(z_i) \subset B_{\delta_{x_j}}(x_j) \subset U_{x_j} \cap V_{x_j}$ i (2.4.3) implica

$$P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma'_j}\int_0^{S_3} |\lambda^* V(\varphi_s(z_i))|^2 ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big) \le P\Big(\int_0^{\tau_1(\eta)\wedge S_3} \mu_{j_0}(\varphi_s(z_i))ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big)$$
$$\le P\Big(\int_0^{\tau_1(\eta)\wedge S_3} \exp\big(-|\phi_{x_j}(\varphi_s(z_i))|^{p_{x_j}}\big)ds \le C\varepsilon^{n(j_0)}\Big). \tag{2.4.6}$$
Pel Lema 2.4.6, el costat dret de (2.4.6) està afitat per $\exp\big(-\tilde{C}|\log\varepsilon|^q\big)$, per $q > 1$, $\tilde{C} > 0$ independents de z_i i ε prou petit.

Recollint les diferents estimacions obtingudes, tenim que $p_1(\varepsilon) \leq \varepsilon^p$, per qualssevol $p \geq 1$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.

Finalment, com que els camps vectorials $V(x)$ són $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades afitades, (2.4.5) i (2.1.2) impliquen

$$
\begin{aligned}
|V(\varphi_s(X_0)) - V(\varphi_s(X^{\gamma,\varepsilon}))| &\leq C \sup_{|x-y|\leq\varepsilon^\gamma,\, |x|\leq K} |\varphi_s(x) - \varphi_s(y)| \\
&\leq C \sup_{|z|\leq K+1} |\nabla\varphi_s(z)|\, \varepsilon^\gamma \leq C(K)\, \tilde{\zeta}\, \varepsilon^\gamma,
\end{aligned}
$$

on $\tilde{\zeta}$ és una variable aleatòria de $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$.
Aleshores, per la desigualtat de Txebixef

$$
p_2(\varepsilon) \leq C\, \varepsilon^{q(\gamma - n(j_0))}, \qquad q \geq 1
$$

Així, escollint $\gamma > n(j_0)$, obtenim la fita que volíem per $p_2(\varepsilon)$ i, d'aquesta manera, (2.4.4) queda provat. ∎

Observació. La compacitat i les fites exponencials del Lema 2.4.6 són els ingredients claus de la demostració del Teorema 2.4.9. Per aplicar aquest lema, necessitem que els coeficients A_j, $j = 0, \cdots, k$, siguin afitats. No està clar com poder evitar aquesta restricció.

Exemple 2.4.10. [K-S] Siguin $k = d = 3$. Considerem els camps vectorials

$$
A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

$A_0 \equiv 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, on $\sigma(z) = \exp(\,-|z|^p\,)$, $p \in (-1, 0)$. La condició de Hörmander no es compleix a l'hiperplà $N = \{x_1 = 0\}$. Però, aquests punts satisfan (h_1) i (h_2). Veiem-ho, $\mu_0(y) = \sigma^2(y_1) = \exp\big(\, -[d(y,N)]^p\,\big)$, per qualsevol $y \in \mathbb{R}^3$.

Sigui X_0 un vector aleatori en $\mathbb{R}^3$ amb $X_0^1 = 0$ i complint *(i)* i *(ii)* del Teorema 2.4.9; per exemple,

$$
X_0 = \Big(0, 1, \frac{|W_1 - W_{t_0}|^2}{1 + |W_1 - W_{t_0}|^2}\Big), \quad t_0 \in (0,1).
$$

Aleshores, la solució corresponent X_t de (2.1.1) té densitat regular per qualsevol $t \in (0, 1]$.

UNA EQUACIÓ ANTICIPATIVA GOVERNADA PER UN MOVIMENT BROWNIÀ DE DIMENSIÓ INFINITA

Capítol 3.

3.1. INTRODUCCIÓ

Aquest capítol està dedicat a estudiar l'existència i regularitat de la densitat de la solució de l'equació

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^{\infty} A_j(X_s) \circ dW_s^j + A_0(X_s)\,ds\Big), \quad t \in [0,1], \tag{3.1.1}$$

a un instant de temps $t > 0$ fixat. Els coeficients A_l, $l \geq 0$, són funcions definides en $\mathbb{R}^d$ que prenen valors en $\mathbb{R}^d$ i X_0 és una variable aleatòria arbitrària.

Definim $\tilde{A}_0^M = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M} A_l \partial A_l$ per $M \geq 1$ i $\tilde{A}_0 = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} A_l \partial A_l$. De manera anàloga a la hipòtesi (C) de la Secció 2.1, al llarg d'aquesta secció suposarem que els coeficients satisfan el conjunt d'hipòtesis (H)

(H_1) $A_l, l \geq 0$ són de classe $\mathcal{C}^\infty$,

(H_2) per qualsevol multiíndex $(n_1, \cdots, n_j)$ amb $n = n_1 + \cdots + n_j$, $n \geq 1$

$$K_1 := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} \Big[\sum_{l=1}^{\infty} \Big|\frac{\partial^n A_l^i}{\partial x_{i_1}^{n_1} \cdots \partial x_{i_j}^{n_j}}(x)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^n A_0^i}{\partial x_{i_1}^{n_1} \cdots \partial x_{i_j}^{n_j}}(x)\Big|^2\Big] < \infty,$$

$$K_2 := \sup_{M \geq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} \Big|\frac{\partial^n \tilde{A}_0^{M,i}}{\partial x_{i_1}^{n_1} \cdots \partial x_{i_j}^{n_j}}(x)\Big|^2 < \infty.$$

El nostre treball seguirà els esquemes de [N-N-S] i de la Secció 2.2 d'aquesta memòria. A [N-N-S] s'estudia l'existència i regularitat de la densitat pel cas en que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$, tractant-se per tant d'una equació no anticipativa. El mètode emprat es basa en obtenir una successió que aproxima la solució en $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ i que permet transferir a la solució X_t condicions suficients per obtenir la regularitat de la densitat.

A la Secció 3.2 demostrem l'existència i regularitat de la densitat de la solució de (3.1.1) (Teorema 3.2.10).

Com en els altres capítols, denotarem totes les constants per C o C_p (quan depenguin de p), encara que puguin variar d'un pas a un altre.

3.2. REGULARITAT DE LA DENSITAT

Preliminars

Definim el flux associat a l'equació (3.1.1),

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^{\infty} A_j(\varphi_s(x)) \circ dW_s^j + A_0(\varphi_s(x))\, ds \Big), \tag{3.2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,1]$.

Sota les hipòtesis (H), és fàcil demostrar que la funció $x \to \varphi_t(x)$ té una versió que és un diffeomorfisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ per tot $t \in [0,1]$. La demostració d'aquest resultat és com la de Kunita a [K] pel cas en que hi ha una suma finita d'integrals estocàstiques, amb la diferència que cal utilitzar la desigualtat de Burkholder per integrals hilbertianes. Anomenarem $Y_t(x) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(x)$ i $Z_t(x)$ a la seva inversa. Aquests processos satisfan les següents equacions estocàstiques lineals

$$Y_t(x) = I + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \partial A_j(\varphi_s(x)) Y_s(x) \circ dW_s^j + \partial A_0(\varphi_s(x)) Y_s(x)\, ds \Big), \tag{3.2.2}$$

$$Z_t(x) = I - \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^{\infty} Z_s(x) \partial A_j(\varphi_s(x)) \circ dW_s^j + Z_s(x) \partial A_0(\varphi_s(x))\, ds \Big), \tag{3.2.3}$$

$t \in [0,1]$.

Considerem també la successió de fluxos $\{\varphi_t^M(x),\, x \in \mathbb{R}^d,\, t \in [0,1]\}_{M\geq 1}$, definida per les equacions

$$\varphi_t^M(x) = x + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^M A_j(\varphi_s^M(x)) \circ dW_s^j + A_0(\varphi_s^M(x))\, ds\Big), \tag{3.2.4}$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,1]$. És ben conegut (veieu [K]) que per cada M la funció $x \to \varphi_t^M(x)$ és un $\mathcal{C}^\infty$–difeomorfisme. De manera anàloga a (3.2.2) i (3.2.3) podem definir els processos $\frac{\partial \varphi_t^M}{\partial x}(x) = Y_t^M(x)$ i $Z_t^M(x)$.

Acabem els preliminars recordant tres lemes. El primer és un lema tècnic que utilitzarem diverses vegades. Els altres dos ens donen les eines que necessitarem en aquesta secció.

Lema 3.2.1. [N 2, Lema 5.3.1] *Sigui $\{Y_n(\theta), \theta \in \mathbb{R}^d\}_{n\geq 1}$ una successió de processos que convergeixen en probabilitat cap a $\{Y(\theta),\, \theta \in \mathbb{R}^d\}$ per cada $\theta \in \mathbb{R}^d$. Suposem que*

$$E(|Y_n(\theta) - Y_n(\theta')|^p) \leq C(p,K)|\theta - \theta'|^\alpha,$$

per tot $|\theta|, |\theta'| \leq K$, $n \geq 1$, $K > 0$ i per algunes constants $p > 0$ i $\alpha > d$. Aleshores, per qualsevol vector aleatori d–dimensional F es compleix

$$P - \lim_{n\to\infty} Y_n(F) = Y(F).$$

Lema 3.2.2. [N-N-S] *Sigui $\{F_M,\, M \geq 1\}$ una successió de vectors aleatoris d–dimensionals de $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$, tal que $F_M \to F$ en $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$. Denotem per Γ_M (respectivament Γ) la matriu de Malliavin de F_M (resp. F). Si $\sup_{M\geq M_0} E(\{\det\Gamma_M\}^{-p}) < \infty$ per tot $p \geq 2$ i algun $M_0 \geq 1$, aleshores $E(\{\det\Gamma\}^{-p}) < \infty$ per tot $p \geq 2$.*

Lema 3.2.3. [N-N-S] *Sigui $\{C_M,\, M \geq 1\}$ una successió de matrius simètriques no negatives d'ordre d. Suposem que existeix $M_0 \geq 1$ tal que*

(i) $\sup_{M\geq M_0} E(|C_M|^p) < \infty$, *per tot $p \geq 2$,*

(ii) per tot $p \geq 2$ existeix $\varepsilon_0(p)$ tal que per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$

$$\sup_{M\geq M_0} \sup_{|v|=1} P(v^* C_M v < \varepsilon) \leq C\varepsilon^p,$$

per alguna constant $C > 0$.

Aleshores, $\sup_{M\geq M_0} E(\{\det C_M\}^{-p}) < \infty$ *per tot $p \geq 2$.*

Resultats

El nostre objectiu és demostrar la regularitat de la densitat de la solució de (3.1.1). Veurem primer que $\varphi_t(X_0)$ és una solució de l'equació. No estudiarem el problema de la unicitat de la solució, però quan parlem de la solució X_t de (3.1.1) ens referirem sempre a $\varphi_t(X_0)$. De la mateixa manera, parlarem indistintament de X_t^M o de $\varphi_t^M(X_0)$.

Obtindrem l'existència i la regularitat de la densitat mitjançant el Teorema 2.1.1. Haurem de comprovar per tant les dues condicions suficients, que $\varphi_t(X_0) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i que la matriu de Malliavin associada a X_t, que notarem per Γ_t, satisfà $E(\{\det\Gamma_t\}^{-p}) < \infty$ per qualsevol $p \geq 2$. Seguint el mètode utilitzat a [N-N-S], considerarem la successió de variables $\{\varphi_t^M(X_0)\}_{M\geq 1}$ que aproximarà $X_t = \varphi_t(X_0)$ de manera convenient.

Comencem estudiant l'existència de la solució.

Proposició 3.2.4. *Suposem que els coeficients A_l, $l \geq 1$ són de classe C^3 amb derivades parcials afitades i A_0 és de classe C^1. A més a més, suposem que satisfan, per tot $j \in \{1,\cdots,d\}$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} [\sum_{l=1}^{\infty} |\frac{\partial A_l^i}{\partial x_j}(x)|^2 + |\frac{\partial A_0^i}{\partial x_j}(x)|^2] < \infty, \tag{3.2.5}$$

$$\sup_{M\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} |\frac{\partial \tilde{A}_0^{M,i}}{\partial x_j}(x)|^2 < \infty.$$

Aleshores, per qualsevol vector aleatori $X_0 \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$, el procés $X = \{\varphi_t(X_0),\ t \in [0,1]\}$ satisfà l'equació diferencial estocàstica anticipativa (3.1.1).

Prova: En tenim prou comprovant

$$\Big(\sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t A_l(\varphi_s(x)) \circ dW_s^l\Big)_{|x=X_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t A_l(\varphi_s(X_0)) \circ dW_s^l.$$

Clarament, sota les hipòtesis (3.2.5), el costat dret de l'expressió anterior té sentit. Per tant, si demostrem

$$P - \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{l=1}^{m} \int_0^t A_l(\varphi_s(x)) \circ dW_s^l\Big)_{|x=X_0} = \Big(\sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t A_l(\varphi_s(x)) \circ dW_s^l\Big)_{|x=X_0}, \tag{3.2.6}$$

ja haurem acabat.

En efecte. A partir de la desigualtat de Burkholder, el lema de Gronwall i el teorema del valor mig es comprova

$$E\big(|A_l(\varphi_t(x)) - A_l(\varphi_t(y))|^p\big) \le C_p|x-y|^p,$$

per tot $x, y \in \mathbb{R}^d$, $s, t \in [0,1]$, $l \geq 1$. Utilitzant aquest últim resultat i aplicant la fórmula d'Itô a $A_l(\varphi_t(x))$ és fàcil comprovar

$$E\big(|A_l(\varphi_t(x)) - A_l(\varphi_t(y)) - A_l(\varphi_s(x)) + A_l(\varphi_s(y))|^p\big) \le C_p|x-y|^p|t-s|^{\frac{p}{2}},$$

per tot $|x|, |y| \leq K$, $K > 0$, $s, t \in [0,1]$, $l \geq 1$. I d'aquesta manera, com que $\varphi_t(x)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable, podem aplicar una fórmula de substitució (veieu per exemple Teorema 5.3.3 de [N 2]) i obtenim per tot $m \geq 1$

$$\Big(\sum_{l=1}^{m}\int_0^t A_l(\varphi_s(x)) \circ dW_s^l\Big)_{|x=X_0} = \sum_{l=1}^{m}\int_0^t A_l(\varphi_s(X_0)) \circ dW_s^l.$$

Aleshores, si comprovem (3.2.6), per la unicitat del límit obtindrem el resultat que cercàvem.

La demostració de (3.2.6) s'obté a partir del Lema 3.2.1. Definim

$$Y_m(x) = \sum_{l=1}^{m}\int_0^t A_l(\varphi_s(x)) \circ dW_s^l \quad \text{i} \quad Y(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\int_0^t A_l(\varphi_s(x)) \circ dW_s^l.$$

Per tal d'aplicar el lema ens cal comprovar que

$$E(|Y_m(x) - Y_m(y)|^p) \le C_p|x-y|^{\frac{p}{2}},$$

per tot $x, y \in \mathbb{R}^d$ amb $|x|$, $|y| \leq K$, on la C_p no depèn de la m, i que $Y_m(x)$ convergeix en L^p cap a $Y(x)$ per tot $x \in \mathbb{R}^d$. Aquests resultats s'obtenen fàcilment utilitzant les desigualtats de Hölder i de Burkholder. ∎

Estudiarem ara propietats de la successió de fluxos $\{\varphi^M\}$ i de les seves derivades. Comencem amb un lema tècnic, adaptació del Lema 2.1 de [O-P].

Lema 3.2.5. *Sigui $\psi^M = \{\psi_t^M(x),\, x \in \mathbb{R}^d,\, t \in [0,1]\}$ el procés solució de*

$$\psi_t^M(x) = x + \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^{M}\sigma_j(\psi_s^M(x))dW_s^j + \sigma_0(\psi_s^M(x))\,ds\Big),$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,1]$. Suposem que els coeficients σ_j, $j = 0, \cdots, M$ són de $C^4(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ i satisfan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{l=0}^{M}\Big[\Big|\frac{\partial\sigma_l^i}{\partial x}(x)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2\sigma_l^i}{\partial x^2}(x)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^3\sigma_l^i}{\partial x^3}(x)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^4\sigma_l^i}{\partial x^4}(x)\Big|^2\Big] := K_M < \infty.$$

Aleshores, existeix una versió de $\psi_t^M(x)$ que és contínua conjuntament en (t,x) i per tot $\delta > 0$ existeix una variable aleatòria positiva $\zeta_M(\delta) \in \cap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ tal que per tot $p \geq 2$

$$E(|\zeta_M(\delta)|^p) \leq C(p,\delta,K_M),$$

i q.s. per tot $x \in \mathbb{R}^d$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\psi_t^M(x)| \leq \zeta_M(\delta)\,(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}+\delta}, \tag{3.2.7}$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |(\psi_t^M)^{-1}(x)| \leq \zeta_M(\delta)\,(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}+\delta}, \tag{3.2.8}$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |(\frac{\partial \psi_t^M}{\partial x})^{-1}(x)| \leq \zeta_M(\delta)\,(1+|x|^2)^{\delta}, \tag{3.2.9}$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\frac{\partial^j \psi_t^M}{\partial x^j}(x)| \leq \zeta_M(\delta)\,(1+|x|^2)^{\delta}, \quad j=1,2, \tag{3.2.10}$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\frac{\partial^j}{\partial x^j}((\frac{\partial \psi_t^M}{\partial x})^{-1})(x)| \leq \zeta_M(\delta)\,(1+|x|^2)^{\delta}, \quad j=1,2. \tag{3.2.11}$$

Prova: És la mateixa que la del Lema 2.1 [O-P]. Només cal tenir en compte que les fites que obtenim no depenen directament de M, sinó que ho fan mitjançant la constant K_M. ∎

Observació. Segons el lema anterior, els moments de la variable $\zeta_M(\delta)$ depenen només de δ i de K_M (i per tant, no depenen directament de M). D'aquesta manera, si tenim uns coeficients σ_j, $j \geq 0$ que satisfan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d}\sum_{l=0}^{\infty} \Big[|\frac{\partial \sigma_l^i}{\partial x}(x)|^2 + |\frac{\partial^2 \sigma_l^i}{\partial x^2}(x)|^2 + |\frac{\partial^3 \sigma_l^i}{\partial x^3}(x)|^2 + |\frac{\partial^4 \sigma_l^i}{\partial x^4}(x)|^2 \Big] = K < \infty,$$

i considerem, per cada M, $\psi_t^M(x)$ el procés definit al Lema 3.2.5 i $\zeta_M(\delta)$ la variable aleatòria corresponent, els seus moments d'ordre p, per $p \geq 2$, tindran fites uniformes que dependran només de p, δ i K. Recollim aquest resultat en el corol.lari següent.

Corol.lari 3.2.6. *Considerem la successió de fluxos $\{\varphi_t^M(x)\}_{M\geq 1}$ definida per (3.2.4). Suposem que els coeficients A_j, $j \geq 0$ satisfan les hipòtesis (H). Fixat $\delta > 0$, sigui $\zeta_M(\delta)$ la variable aleatòria definida al Lema 3.2.5 per cada $M \geq 1$. Aleshores, per tot $p \geq 2$*

$$\sup_{M\geq 1} E(|\zeta_M(\delta)|^p) \leq C(p,\delta,K). \tag{3.2.12}$$

Proposició 3.2.7. *Suposem que els coeficients A_j, $j \geq 0$ satisfan (H). Aleshores, per qualssevol $p \geq 2$, $K > 0$*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{|x|\leq K} E\Big(\sup_{0\leq t\leq 1} |\varphi_t^M(x) - \varphi_t(x)|^p \Big) = 0, \tag{3.2.13}$$

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{|x|\leq K} E\Big(\sup_{0\leq t\leq 1} |\frac{\partial^j \varphi_t^M}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial^j \varphi_t}{\partial x^j}(x)|^p \Big) = 0, \qquad j = 1,2, \tag{3.2.14}$$

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{|x|\leq K} E\Big(\sup_{0\leq t\leq 1} |(\frac{\partial \varphi_t^M}{\partial x})^{-1}(x) - (\frac{\partial \varphi_t}{\partial x})^{-1}(x)|^p \Big) = 0, \tag{3.2.15}$$

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{|x|\leq K} E\Big(\sup_{0\leq t\leq 1} |\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \varphi_t^M}{\partial x})^{-1}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x})^{-1}(x)|^p \Big) = 0. \tag{3.2.16}$$

Prova: Els fluxos (3.2.1) i (3.2.4) els podem escriure com

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) &= x + \int_0^t \Big(\sum_{l=1}^{\infty} A_l(\varphi_s(x))dW_s^l + \tilde{A}_0(\varphi_s(x))ds \Big), \\ \varphi_t^M(x) &= x + \int_0^t \Big(\sum_{l=1}^{M} A_l(\varphi_s^M(x))dW_s^l + \tilde{A}_0^M(\varphi_s^M(x))ds \Big). \end{aligned}$$

Demostrarem primer (3.2.13). Fixem $K > 0$, $p \geq 2$. Donat x, $|x| \leq K$, per les desigualtats de Hölder i de Burkholder obtenim

$$\begin{aligned} E(\sup_{0\leq s\leq t} |\varphi_s^M(x) - \varphi_s(x)|^p) &\leq C_p \Big[\int_0^t E(\sup_{0\leq r\leq s} |\varphi_r^M(x) - \varphi_r(x)|^p) ds \\ &+ E(|\int_0^t |C_1^M(\varphi_s(x))|^2 ds|^{\frac{p}{2}}) + E(|\int_0^t C_2^M(\varphi_s(x))ds|^{\frac{p}{2}}) \Big], \end{aligned}$$

on

$$C_1^M(x) = \frac{1}{2} \sum_{l=M+1}^{\infty} A_l(x)\frac{\partial A_l}{\partial x}(x) \qquad \text{i} \qquad C_2^M(x) = \sum_{l=M+1}^{\infty} |A_l(x)|^2,$$

i on la constant C_p no depèn de la x. Si demostrem

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{|x|\leq K} E\Big(|\int_0^t |C_1^M(\varphi_s(x))|^2 ds|^{\frac{p}{2}}\Big) = 0, \tag{3.2.17}$$

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{|x|\leq K} E\Big(|\int_0^t C_2^M(\varphi_s(x))ds|^{\frac{p}{2}}\Big) = 0, \tag{3.2.18}$$

aplicant el lema de Gronwall obtindrem (3.2.13).

Demostrarem primer (3.2.18). Sota les hipòtesis (H), a [N-N-S] està demostrat $\sup_{|x|\leq K} E\big(\sup_{0\leq t\leq 1} |\varphi_t(x)|^p\big) \leq C_p$.
Per un argument de compacitat tenim que per tot $K' > 0$, $\varepsilon > 0$, existeix $M_{K',\varepsilon}$ tal que per tot $M \geq M_{K',\varepsilon}$

$$\sup_{|x|\leq K'} \sum_{l=M+1}^{\infty} |A_l(x)|^2 < \varepsilon.$$

Per les desigualtat de Txebixef i de Hölder, tenim per qualssevol M^*, $K^* > 0$,

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sup_{0\leq t\leq 1}\big(\sum_{l=M^*+1}^{\infty} |A_l(\varphi_t(x))|^2\big)^{\frac{p}{2}}\Big)\\
\leq & E\Big(\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\big(\sum_{l=M^*+1}^{\infty} |A_l(\varphi_t(x))|^2\big)^{\frac{p}{2}}\big)\ \mathbf{1}_{\{\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t(x)|>K^*\}}\Big)\\
&+E\Big(\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\big(\sum_{l=M^*+1}^{\infty} |A_l(\varphi_t(x))|^2\big)^{\frac{p}{2}}\big)\ \mathbf{1}_{\{\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t(x)|\leq K^*\}}\Big)\\
\leq & C_p\Big(1+E\big(\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t(x)|^{2p}\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(P\big(\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t(x)|>K^*\big)\Big)^{\frac{1}{2}}+\big(\sup_{|x|\leq K^*}\sum_{l=M^*+1}^{\infty}|A_l(x)|^2\big)^{\frac{p}{2}}\\
\leq & \frac{C_p}{K^*}\Big(E\big(\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t(x)|^2\big)\big(1+E\big(\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t(x)|^{2p}\big)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}+\big(\sup_{|x|\leq K^*}\sum_{l=M^*+1}^{\infty}|A_l(x)|^2\big)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Podem agafar ara $\sup_{|x|\leq K}$ als dos costats de la desigualtat anterior. Aleshores, fixat $\varepsilon > 0$, escollim $K^* > 0$ de manera que el primer sumant sigui menor o igual que $\frac{\varepsilon}{2}$. Un cop escollit K^*, determinen M^* de manera que per tot $M > M^*$

$$\sup_{|x|\leq K^*\vee K}\big(\sum_{l=M^*+1}^{\infty}|A_l(x)|^2\big)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

A partir d'aquí obtenim clarament (3.2.18). (3.2.17) es pot demostrar de manera semblant. Les demostracions de (3.2.14), (3.2.15) i (3.2.16) es fan utilitzant raonaments anàlegs. Cal fer servir però les representacions (3.2.2) i (3.2.3) i les equivalents per $Y_t^M(x)$ i $Z_t^M(x)$. ∎

Lema 3.2.8. *Suposem que els coeficients A_j, $j \geq 0$ satisfan (H) i que $X_0 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Aleshores, per qualsevol $p \geq 2$*

$$\sup_{M\geq 1}\Big[E\big(\sup_{0\leq t\leq 1}|\varphi_t^M(X_0)|^p\big)+E\big(\sup_{0\leq t\leq 1}\big|\frac{\partial\varphi_t^M}{\partial x}(X_0)\big|^p\big)+E\big(\sup_{0\leq t\leq 1}|Z_t^M(X_0)|^p\big)\Big]\leq C_p,$$
$$\sup_{0\leq t\leq 1}\Big[E\big(|\varphi_t(X_0)|^p\big)+E\big(\big|\frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(X_0)\big|^p\big)+E\big(|Z_t(X_0)|^p\big)\Big]\leq C_p.$$

Prova: El primer resultat s'obté a partir de (3.2.7), (3.2.9) i (3.2.10), combinats amb el Corol.lari 3.2.6. Per exemple, per (3.2.9) amb $\delta = \frac{1}{2}$ obtenim,

$$E(\sup_{0\leq t\leq 1} |Z_t^M(X_0)|^p) \leq E(|\zeta_M(\frac{1}{2})|^p(1+|X_0|^2)^{\frac{p}{2}})$$

i pel Corol.lari 3.2.6, com que $X_0 \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$

$$\sup_{M\geq 1} E(\sup_{0\leq t\leq 1} |Z_t^M(X_0)|^p) < \infty.$$

Per obtenir la segona desigualtat utilitzarem el Lema 3.2.1. Per exemple, és fàcil comprovar que el podem aplicar a la successió $\{\varphi_t^M(x)\}$, $M \geq 1$ i a la variable $\varphi_t(x)$, de manera que obtenim

$$P - \lim_{M\to\infty} \varphi_t^M(X_0) = \varphi_t(X_0).$$

Per tant, hi haurà uns sub-successió (que denotarem igual que la successió inicial) que convergirà quasi-segurament. Aleshores, pels resultats obtinguts a la primera part d'aquest lema i utilitzant el Lema de Fatou

$$\begin{aligned} E(|\varphi_t(X_0)|^p) &= E(\lim_M |\varphi_t^M(X_0)|^p) \leq \liminf_M E(|\varphi_t^M(X_0)|^p) \\ &\leq \sup_{M\geq 1} E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\varphi_t^M(X_0)|^p) \leq C_p. \end{aligned}$$

A més a més, com la C_p no depèn de t, tenim

$$\sup_{0\leq t\leq 1} E(|\varphi_t(X_0)|^p) \leq C_p.$$

La resta de termes es tracten de la mateixa manera. ∎

Podem comprovar ara ja el primer resultat que ens donarà l'existència i regularitat de la densitat.

Proposició 3.2.9. *Suposem que $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i que els coeficients A_j, $j \geq 0$ de l'equació (3.1.1) satisfan les hipòtesis (H). Aleshores, per tot $t \in [0,1]$, $\varphi_t(X_0) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i*

$$D_r^j[\varphi_t(X_0)^i] = Y_t^{i,l}(X_0)\,[D_r^j X_0^l + \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\, Z_r^{l,h}(X_0)\, A_j^h(\varphi_r(X_0))], \tag{3.2.19}$$

$1 \leq j$, $1 \leq i \leq d$.

Prova: S'ha d'aplicar el Lema 2.3 de [O-P] de la mateixa manera que al Lema 2.3 de [C-F-N]. Pel Lema 3.2.8, $\varphi_t(X_0)$ té moments de tots els ordres. Per arguments semblants als d'aquest últim lema es demostra per $p \geq 2$ i $j \geq 1$

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\left[E\Big(|\frac{\partial^j Y_t}{\partial x^j}(X_0)|^p + |\frac{\partial^j Z_t}{\partial x^j}(X_0)|^p\Big)\right] \leq C_p.$$

■

Podem ara demostrar el resultat de regularitat de la densitat per la solució de (3.1.1). Amb aquest objectiu, introduïm primer la notació necessària. Considerem, per cada $k \in \mathbb{N}$ els conjunts de camps vectorials

$$\begin{aligned}\Sigma_0^k &= \{ A_i,\, i = 1, \cdots, k \},\\ \Sigma_j^k &= \{[A_i, V],\, i = 1, \cdots, k,\ V \in \Sigma_{j-1}^k\}, \quad j \geq 1.\end{aligned}$$

Per qualssevol enter no negatiu $m \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}^d$, sigui $E_{m,k}(x)$ la matriu amb columnes els camps vectorials de Σ_j^k, $0 \leq j \leq m$, al punt $x \in \mathbb{R}^d$. Sigui $\lambda_{m,k}(x)$ el valor propi més petit de $E_{m,k}(x)E_{m,k}^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $m \geq 0$, és a dir,

$$\lambda_{m,k}(x) = \inf_{|v|=1} \sum_{j=0}^{m} \sum_{V\in\Sigma_j^k} |v^* V(x)|^2.$$

L'objectiu fonamental d'aquesta secció és demostrar el teorema següent.

Teorema 3.2.10. *Suposem que els coeficients A_j, $j \geq 0$ de l'equació (3.1.1) satisfan les hipòtesis (H). Sigui $X_0 \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ una variable aleatòria tal que*

(i) existeix $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ i una variable aleatòria positiva $\zeta \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ tal que,

$$|D_s X_0 - D_t X_0| \leq \zeta |t - s|^{\lambda + \frac{1}{2}}, \qquad s, t \in [0, 1],$$

(ii) $D_0 X_0 = 0$ per alguna versió de DX_0,

(iii) existeixen j_0, k_0 enters no negatius tals que,

$$\left(\lambda_{j_0,k_0}(X_0)\right)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega).$$

Aleshores, la variable aleatòria $X_t = \varphi_t(X_0)$ té densitat regular per qualsevol $t \in (0, 1]$.

Observació. Si suposem que la condició inicial està afitada, és a dir, que $|X_0| \leq K$ per alguna constant $K > 0$, si $\mathrm{span}\big(\cup_{j=1}^\infty \Sigma_j(x)\big) = \mathbb{R}^d$ per tot $|x| \leq K$, aleshores la condició *(iii)* es compleix.

En efecte. Fixat x, existeixen enters no negatius j_x i k_x tals que $\mathrm{span}\big(\cup_{j=0}^{j_x} \Sigma_j^{k_x}(x)\big) = \mathbb{R}^d$. Per continuïtat podem determinar $\delta_x > 0, \eta_x > 0$ tals que $\lambda_{j_x,k_x}(y) \geq \eta_x$ per tot $y \in B_{\delta_x}(x)$. Per un argument de compacitat, podem obtenir un subrecobriment finit del compacte $\{x, |x| \leq K\}$ format per les boles $B_{\delta_{x_1}}(x_1), \cdots, B_{\delta_{x_n}}(x_n)$. Diem $\eta = \min\{\eta_{x_1}, \cdots, \eta_{x_n}\}$, $j_0 = \max\{j_{x_1}, \cdots, j_{x_n}\}$, $k_0 = \max\{k_{x_1}, \cdots, k_{x_n}\}$. Aleshores $\lambda_{j_0,k_0}(y) \geq \eta$, per tot y, $|y| \leq K$, i per tant $\lambda_{j_0,k_0}(X_0) \geq \eta$ i es compleix *(iii)*.

Prova del Teorema 3.2.10 La demostració consisteix en comprovar les condicions del Teorema 2.1.1 per la variable $X_t = \varphi_t(X_0)$.
Per la Proposició 3.2.9 tenim que $\varphi_t(X_0) \in \mathbb{D}^\infty$.
Per comprovar que $E(\{\det\Gamma_t\}^{-p}) < \infty$ per tot $p \geq 2$, aplicarem els Lemes 3.2.2 i 3.2.3 a les variables $F = \varphi_t(X_0)$ i $F_M = \varphi_t^M(X_0)$. Seguint el mètode presentat a [N-N-S], la demostració es redueix a comprovar

(i) $\varphi_t^M(X_0) \longrightarrow \varphi_t(X_0)$ en $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ quan $M \to \infty$,

(ii) $\sup_{M\geq 1} E\big(\sup_{0\leq t\leq 1} |Z_t^M(X_0)|^p\big) < \infty$, per tot $p \geq 2$,

(iii) per cada $p \geq 2$, existeix $\varepsilon_0(p) > 0$ tal que per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$
$$\sup_{M\geq k_0} \sup_{|\lambda|=1} P\big(\lambda^* C_M(t)\lambda < \varepsilon\big) \leq C\varepsilon^p.$$

(on $C_M(t)$ és la matriu definida a la Secció 2.1 després del Teorema 2.1.1).
Per (ii) i (iii), aplicant el Lema 3.2.3, obtenim
$$\sup_{M\geq k_0} E(\{\det C_M(t)\}^{-p}) < \infty.$$
Aquest resultat implica
$$\sup_{M\geq k_0} E(\{\det\Gamma_t^M\}^{-p}) < \infty,$$
on Γ_t^M és la matriu de Malliavin associada a X_t^M. Aleshores, aquest últim resultat combinat amb (i) ens dóna, gràcies al Lema 3.2.2,
$$E(\{\det\Gamma_t\}^{-p}) < \infty,$$
per tot $p \geq 2$.

Prova de (i) Per demostrar la convergència en $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ en tenim prou provant les dues convergències següents:

(i_1) $X_t^M \longrightarrow X_t$ en $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ quan $M \to \infty$,

(i_2) $DX_t^M \longrightarrow DX_t$ en $L^2(\Omega;\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \otimes \mathbb{R}^d)$ quan $M \to \infty$.

Comprovem primer (i_1). Fixat $K > 0$, utilitzant les desigualtats de Hölder, de Txebixef i de Sobolev, obtenim
$$\begin{aligned}
E\big(|X_t^M - X_t|^2\big) &\leq E\big(|X_t^M - X_t|^2 \;\mathbf{1}_{\{|X_0|>K\}}\big) + E\big(|X_t^M - X_t|^2 \;\mathbf{1}_{\{|X_0|\leq K\}}\big)\\
&\leq \big(P(|X_0| > K)\big)^{\frac12} E\big(|X_t^M - X_t|^4\big)^{\frac12} + E\big(\sup_{|x|\leq K} |\varphi_t^M(x) - \varphi_t(x)|^2\big)\\
&\leq C\Big(\frac{1}{K} E(|X_0|^2)^{\frac12} E\big(|X_t^M|^4 + |X_t|^4\big)^{\frac12}\\
&\quad + E\Big(\int_{\{|x|\leq K\}} \big(|\varphi_t^M(x) - \varphi_t(x)|^2 + \big|\frac{\partial\varphi_t^M}{\partial x}(x) - \frac{\partial\varphi_t}{\partial x}(x)\big|\big)dx\Big)\Big).
\end{aligned}$$
Utilizant (3.2.13), (3.2.14) i el Lema 3.2.8, prenent límits obtenim
$$\lim_{M\to\infty} E\big(|X_t^M - X_t|^2\big) \leq \frac{C}{K}.$$
Com que podem agafar K tan gran com vulguem, obtenim (i_1).

Per comprovar (i_2) utilitzem la representació (3.2.19) i la seva equivalent per $D_r[\varphi_t^M(X_0)]$. En aquest cas tenim

$$D_r^j[\varphi_t^M(X_0)^i] = \begin{cases} Y_t^{M,il}(X_0)[D_r^j X_0^l + \mathbb{1}_{[0,t]}(r) Z_r^{M,lh}(X_0) A_j^h(\varphi_r^M(X_0))], & \text{si } j \le M; \\ Y_t^{M,il}(X_0) D_r^j X_0^l, & \text{si } j > M. \end{cases}$$

Volem demostrar

$$\lim_{M\to\infty} E\Big[\int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{d} |D_r^j[\varphi_t^M(X_0)^i] - D_r^j[\varphi_t(X_0)^i]|^2\Big) dr\Big] = 0.$$

És fàcil veure que en tenim prou comprovant els següents resultats per $p \ge 2$

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} E(|Y_t^M(X_0) - Y_t(X_0)|^p) = 0,\\
&\lim_{M\to\infty} E(\int_0^1 |Z_r^M(X_0) - Z_r(X_0)|^p dr) = 0,\\
&\lim_{M\to\infty} E(\int_0^1 |\varphi_r^M(X_0) - \varphi_r(X_0)|^p dr) = 0,\\
&E(|Y_t(X_0)|^p) \le C_p,\\
&E(\int_0^1 |\varphi_r(X_0)|^p dr) \le C_p,\\
&\sup_{M\ge 1} E(\sup_{0\le t\le 1} |Z_t^M(X_0)|^p) \le C_p,\\
&\sup_{M\ge 1} E(\sup_{0\le t\le 1} |\varphi_t^M(X_0)|^p) \le C_p,\\
&\lim_{M\to\infty} E\Big[\int_0^1 \Big(\sum_{j=M+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{d} |Y_t^{il}(X_0)\mathbf{1}_{[0,t]}(r) Z_r^{lh}(X_0) A_j^h(\varphi_r(X_0))|^2\Big) dr\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Els tres primers resultats s'obtenen a partir de (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15), (3.2.16) i del Lema 3.2.8. El primer d'ells s'obté de manera semblant a la demostració de la convergència (i_1). Pels altres dos, s'utilitzen el mateix tipus d'arguments, ja que per Fubini i convergència dominada en tenim prou demostrant

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} E(|Z_r^M(X_0) - Z_r(X_0)|^p) = 0,\\
&\lim_{M\to\infty} E(|\varphi_r^M(X_0) - \varphi_r(X_0)|^p) = 0,
\end{aligned}$$

per tot $r \in [0,1]$.

Les quatre desigualtats següents les hem obtingudes al Lema 3.2.8.

Finalment, la prova de l'última convergència es pot reduir a demostrar

$$\lim_{M\to\infty} E\Big[\int_0^1 \Big(\sum_{j=M+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{d}|A_j^h(\varphi_r(X_0))|^2\Big)^p dr\Big] = 0,$$

per $p \geq 2$. Ara, per convergència monòtona en tenim prou si veiem

$$\lim_{M\to\infty} E\Big[\Big(\sum_{j=M+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{d}|A_j^h(\varphi_r(X_0))|^2\Big)^p\Big] = 0,$$

per tot $r \in [0,1]$. La demostració d'aquest últim resultat és igual que la de (3.2.18).

Prova de (ii) Veieu el Lema 3.2.8.

Prova de (iii) L'estructura de la demostració és la mateixa que la del Teorema 2.2.2, utilitzant les estimacions uniformes que hem demostrat al Corol.lari 3.2.6. Per $M \geq k_0$ tenim

$$\begin{aligned} P(\lambda^* C_M(t)\lambda \leq \varepsilon) &= P\Big(\sum_{l=1}^{M}\int_0^1 (\lambda^* Z_s^M(X_0)A_l(\varphi_s^M(X_0))\mathbf{1}_{[0,t]}(s) + \lambda^* D_s^l X_0\big)^2 ds \leq \varepsilon\Big) \\ &\leq P\Big(\sum_{l=1}^{k_0}\int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0)A_l(\varphi_s^M(X_0)) + \lambda^* D_s^l X_0\big)^2 ds \leq \varepsilon\Big), \end{aligned}$$

per qualssevol $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$ i $\varepsilon > 0$. Definim

$$\begin{aligned} E_0^M &= \{\sum_{l=1}^{k_0}\int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0)A_l(\varphi_s^M(X_0)) + \lambda^* D_s^l X_0\big)^2 ds \leq \varepsilon\}, \\ E_j^M &= \{\sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}}\int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0)V(\varphi_s^M(X_0)))^2 ds \leq \varepsilon^{m(j)}\}, \qquad j \geq 1, \end{aligned}$$

amb $m(j) = \gamma^j$, $0 < \gamma < \frac{\lambda}{2\lambda+1}$, $F^M = E_0^M \cap E_1^M \cap \cdots \cap E_{j_0}^M$, $A_\varepsilon = \{\zeta \leq \varepsilon^{-\Gamma}\}$, $\Gamma > 0$.

Com en la demostració del Teorema 2.2.2, utilitzant la desigualtat de Txebixef, la prova es redueix a demostrar

$$\sup_{M\geq k_0} P(F^M \cap A_\varepsilon) \leq \varepsilon^p, \tag{3.2.20}$$

$$\sup_{M\geq k_0} P(E_{j-1}^M \cap (E_j^M)^c) \leq \varepsilon^p, \qquad 1 \leq j \leq j_0. \tag{3.2.21}$$

$p \geq 2$ i $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$.

Anem a demostrar primer (3.2.20). Fixat M, definim

$$\Lambda_t^M = \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}} \int_0^t \left(\lambda^* Z_s^M(X_0)V(\varphi_s^M(X_0))\right)^2 ds + \sum_{l=1}^{k_0} \int_0^t \left(\lambda^* Z_s^M(X_0)A_l(\varphi_s^M(X_0))\right.$$
$$\left. + \lambda^* D_s^l X_0\right)^2 ds.$$

Sobre el conjunt A_ε, tenim

$$\Lambda_t^M \geq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}} \int_0^{\varepsilon^\beta} \left(\lambda^* Z_s^M(X_0)V(\varphi_s^M(X_0))\right)^2 ds - C\varepsilon^{2(\lambda+1)\beta-2\Gamma},$$

on la C no depèn de la M.

Definim $H_\varepsilon = \{|X_0| < \varepsilon^{-w}\}$, $\varepsilon, w > 0$, i per cada M els temps aleatoris

$$S_1^M = \inf\{s > 0 : \sup_{0\leq\sigma\leq s} |Z_\sigma^M(X_0) - I| \geq \frac{1}{2}\},$$
$$S_2^{M,\varepsilon} = \inf\{s > 0 : \sup_{0\leq\sigma\leq s} |\varphi_\sigma^M(X_0) - X_0| \geq \varepsilon^{\frac{\beta}{3}}\}, \qquad \beta, \varepsilon > 0.$$

Per les desigualtats de Sobolev i de Txebixef, per $q > d$ tenim

$$P\big(\{S_2^{M,\varepsilon} \leq \varepsilon^\beta\} \cap H_\varepsilon\big) \leq \varepsilon^{-\frac{\beta}{3}q} E\big(\sup_{0\leq|x|<\varepsilon^{-w}} \sup_{0\leq s\leq\varepsilon^\beta} |\varphi_s^M(x) - x|^q\big)$$
$$\leq C\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{3}q}\Big(\int_{\{|x|<\varepsilon^{-w}\}} \big(E(\sup_{0\leq s\leq\varepsilon^\beta} |\varphi_s^M(x) - x|^q) + E(\sup_{0\leq s\leq\varepsilon^\beta} |Y_s^M(x) - I|^q)\big)dx\Big)$$
$$\leq C\;\varepsilon^{\frac{\beta}{6}q-2wq-wd},$$

on pel Corol.lari 3.2.6, (3.2.7) i (3.2.10), la constant C no depèn de M. Per exemple,

$$E(\sup_{0\leq s\leq\varepsilon^\beta} |\varphi_s^M(x) - x|^q) \leq C_q E\Big(\Big| \int_0^{\varepsilon^\beta} |\tilde{A}_0^M(\varphi_s^M(x))| ds\Big|^q + \Big| \int_0^{\varepsilon^\beta} [\sum_{l=1}^M |A_l(\varphi_s^M(x))|^2] ds\Big|^{\frac{q}{2}}\Big)$$
$$\leq C_q \varepsilon^{\beta(\frac{q}{2}-1)} E\Big(\int_0^{\varepsilon^\beta} (1 + |\varphi_s^M(x)|^q) ds\Big) \leq C_q \varepsilon^{\beta\frac{q}{2}}\big(1 + \sup_{M\geq k_0} E(\sup_{0\leq t\leq 1} |\varphi_s^M(x)|^q)\big).$$

De manera anàloga, utilitzant (3.2.7) i (3.2.9) obtenim

$$\sup_{M\geq k_0} P\big(\{S_1^M \leq \varepsilon^\beta\} \cap H_\varepsilon\big) \leq C\,\varepsilon^{\frac{\beta}{2}q-2wq-wd}, \qquad q > d.$$

Per tant, per qualsevol $q > d$,

$$\sup_{M\geq k_0}\left[P(\{S_2^{M,\varepsilon}\leq\varepsilon^\beta\}\cap H_\varepsilon)+P(\{S_1^M\leq\varepsilon^\beta\}\cap H_\varepsilon)+P(H_\varepsilon^c)\right]\leq C\left(\varepsilon^{(\frac{\beta}{6}-3w)q}+\varepsilon^{wq}\right). \tag{3.2.22}$$

Escollint β, Γ amb $m(j_0) < 2(\lambda+1)\beta-2\Gamma$, obtenim

$$P\big(F^M\cap A_\varepsilon\cap\{S_1^M>\varepsilon^\beta\}\cap\{S_2^{M,\varepsilon}>\varepsilon^\beta\}\big)\leq p_1^M(\varepsilon)+p_2^M(\varepsilon),$$

amb

$$p_1^M(\varepsilon)=P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}}\int_0^{\varepsilon^\beta}\frac{|\lambda^*Z_s^M(X_0)V(\varphi_s^M(X_0))|^2}{|\lambda^*Z_s^M(X_0)|^2}ds\leq 4(C+2(j_0+1))\varepsilon^{m(j_0)},$$

$$\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}}\int_0^{\varepsilon^\beta}\frac{|\lambda^*Z_s^M(X_0)V(X_0)|^2}{|\lambda^*Z_s^M(X_0)|^2}ds>16(C+2(j_0+1))\varepsilon^{m(j_0)},\ S_2^{M,\varepsilon}>\varepsilon^\beta\Big),$$

$$p_2^M(\varepsilon)=P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}}\int_0^{\varepsilon^\beta}\frac{|\lambda^*Z_s^M(X_0)V(X_0)|^2}{|\lambda^*Z_s^M(X_0)|^2}ds\leq 16(C+2(j_0+1))\varepsilon^{m(j_0)}\Big).$$

Pel teorema del valor mig, la hipòtesi (H) i $X_0\in\bigcap_{p\geq 1}L^p(\Omega)$, podem trobar una variable aleatòria positiva $\zeta\in\bigcap_{p\geq1}L^p(\Omega)$, que no depèn de M, tal que

$$|V(\varphi_s^M(X_0))-V(X_0)|\leq\zeta\,|\varphi_s^M(X_0)-X_0|,$$

per qualssevol $s\in[0,1)$, $V\in\bigcup_{j=0}^{j_0}\Sigma_j^{k_0}$. Aleshores utilitzant la desigualtat de Txebixef, per qualsevol $q\geq 1$

$$\begin{aligned}p_1^M(\varepsilon)&\leq P\Big(\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in\Sigma_j^{k_0}}\int_0^{\varepsilon^\beta}\frac{|\lambda^*Z_s^M(X_0)(V(\varphi_s^M(X_0))-V(X_0))|^2}{|\lambda^*Z_s^M(X_0)|^2}ds>C\varepsilon^{m(j_0)},\ S_2^{M,\varepsilon}>\varepsilon^\beta\Big)\\&\leq P\big(\zeta^2\,\varepsilon^{\frac{5}{3}\beta}>C\varepsilon^{m(j_0)}\big)\ \leq\ C\varepsilon^{(\frac{5}{3}\beta-m(j_0))q}E(\zeta^{2q}),\end{aligned}$$

i per tant

$$\sup_{M\geq k_0}p_1^M(\varepsilon)\leq C\varepsilon^{(\frac{5}{3}\beta-m(j_0))q}. \tag{3.2.23}$$

Suposem, a més a més, $m(j_0)>\beta$; aleshores la hipòtesi *(iii)* ens dóna, per qualsevol $p\geq 1$ i ε prou petit

$$\sup_{M\geq k_0}p_2^M(\varepsilon)\leq P\big(\lambda_{j_0,k_0}(X_0)\leq C\,\varepsilon^{m(j_0)-\beta}\big)\leq\varepsilon^p. \tag{3.2.24}$$

Siguin Γ, β, $w > 0$ complint les restriccions següents: $\beta > 18w$, $m(j_0) < 2(\lambda+1)\beta - 2\Gamma$, $\beta < m(j_0) < \frac{5}{3}\beta$. Aleshores, les estimacions (3.2.22), (3.2.23) i (3.2.24) impliquen (3.2.20).

Per la demostració de (3.2.21) utilitzarem el Lema 2.2.1. Per $j = 1$, tenim

$$
\begin{aligned}
P(E_0^M \cap (E_1^M)^c) &\leq P\Big(\sum_{l=1}^{k_0} \int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0) A_l(\varphi_s^M(X_0)) + \lambda^* D_s^l X_0)^2 ds < \varepsilon, \\
&\quad \sum_{V \in \Sigma_1^{k_0}} \int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0) V(\varphi_s^M(X_0)))^2 ds \geq \varepsilon^{m(j_1)}\Big) \\
&\leq \sum_{l=1}^{k_0} P\Big(\int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0) A_l(\varphi_s^M(X_0)) + \lambda^* D_s^l X_0)^2 de < \varepsilon, \\
&\quad \sum_{j=1}^{M} \int_0^t (\lambda^* Z_s^M(X_0)[A_j, A_l](\varphi_s^M(X_0)))^2 ds \geq \frac{\varepsilon^{m(j_1)}}{k_0}\Big).
\end{aligned}
$$

Apliquem la fórmula d'Itô a $Z_s^M(x) A_l(\varphi_s^M(x))$ i obtenim

$$
\begin{aligned}
Z_s^M(x) A_l(\varphi_s^M(x)) &= A_l(x) + \sum_{h=1}^{M} \int_0^s Z_r^M(x)[A_h, A_l](\varphi_r^M(x)) dW_r^h \\
&\quad + \int_0^s Z_r^M(x)\big([A_0, A_l] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{M}[A_\varrho, [A_\varrho, A_l]]\big)(\varphi_r^M(x)) dr.
\end{aligned}
$$

Aleshores apliquem el Lema 2.2.1 a

$$
\begin{aligned}
\alpha_t^h(x) &= \lambda^* Z_t^M(x)[A_h, A_l](\varphi_t^M(x)), \qquad h = 1, \cdots, M, \\
V_t &= \lambda^*\Big(A_l(X_0) + D_t^l X_0 + \int_0^t Z_s^M(X_0)\big([A_0, A_l] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{M}[A_\varrho, [A_\varrho, A_l]]\big)(\varphi_s^M(X_0)) ds\Big),
\end{aligned}
$$

amb $a = \delta = 1$, $b = \frac{1}{k_0}, \eta = m(1)$. Pel Lema 2.2.1 sabem que ε_0 depèn també dels moments de dues variables ζ_1, ζ_2 relacionades amb els processos α i V. Com que pel Corol.lari 3.2.6 i el Lema 3.2.8 els moments de $Z_s^M(x)$, $\varphi_s^M(x)$ i les seves derivades tenen fites uniformes en M, existirà $\varepsilon_0(p)$ tal que per tot $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$

$$
\sup_{M \geq k_0} P(E_0^M \cap (E_1^M)^c) \leq \varepsilon^p.
$$

Per $1 < j \leq j_0$ apliquem els mateixos arguments a

$$\alpha_t^l(x) = \lambda^* Z_t^M(x)[A_l, V](\varphi_t^M(x)), \qquad l = 1, \cdots, M,$$

$$V_t = \lambda^* V(X_0) + \lambda^* \int_0^t Z_s^M(X_0)\Big([A_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{M}[A_\varrho, [A_\varrho, V]]\Big)(\varphi_s^M(X_0))ds,$$

$V \in \Sigma_{j-1}^{k_0}$. ∎

Observació. Com en el Capítol 2 es pot demostrar una versió del Teorema 2.3.2 en la situació considerada en aquest capítol. En aquest cas, utilitzaríem una funció $\mu_{j,k}$ en comptes de la $\lambda_{j,k}$ del Teorema 3.2.10.

Referències

[A] R. Azencott: *Grandes déviations et applications* Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour VIII. Lecture Notes in Math. 779, 1–176. Springer Verlag (1980).

[B-H] N. Bouleau et F. Hirsch: *Propriétés d'absolute continuité dans les espaces de Dirichlet et applications aux équations différentielles stochastiques.* Seminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Math. 1204, 131–161. Springer Verlag (1986).

[B-M 1] D.R. Bell and S.-E.A. Mohammed: *An extension of Hörmander's Theorem for infinitely degenerate second-order operators.* Es publicarà a Duke Mathematical Journal.

[B-M 2] D.R. Bell and S.-E.A. Mohammed: *Degenerate stochastic differential equations, flows and hypoellipticity.* Preprint (1995).

[B-M-S] V. Bally, A. Millet and M. Sanz-Solé: *Approximation and support theorem in Hölder norm for parabolic stochastic partial differential equations.* Annals of Probability 23, 178–222 (1995).

[B-P] V. Bally and E. Pardoux: *Malliavin calculus for white noise driven parabolic spde's.* Preprint (1993).

[BA-G-L] G. Ben Arous, M. Gradinaru and M. Ledoux: *Hölder norms and the support theorem for diffusions.* Annales de l'Institut H. Poincaré 30, 415–436 (1994).

[C] R. Cairoli: *Sur une équation différentielle stochastique.* C. R. Acad. Sci. Paris 274, 1739–1742 (1972).

[C-F-N] M.E. Caballero, B. Fernández and D. Nualart: *Smoothness of distributions for solutions of anticipating stochastic differential equations.* Stochastics and Stochastics Reports 52, 303–322 (1995).

[C-N] R. Carmona and D. Nualart: *Random non linear wave equations: Smoothness of the solutions.* Probab. Theory and Rel. Fields 79, 469–508 (1988).

[C-W] R. Cairoli and J.B. Walsh: *Stochastic integrals in the plane.* Acta Math. 134, 111–183 (1975).

[D-D] H. Doss et M. Dozzi: *Estimations des grandes déviations pour les processus de diffusion paramàtre multidimensionnel.* Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math. 1204, 68–79. Springer Verlag (1986).

[F 1] M. Farré: *Estudi d'un tipus d'equació integral estocàstica en el pla.* Tesi de doctorat, Universitat de Barcelona (1990).

[F 2] M. Farré: *Hyperbolic stochastic differential equations: absolute continuity of the law of the solution at a fixed point.* Es publicará a Applied Mathematics and Optimization.

[F-N] M. Farré and D. Nualart: *Nonlinear stochastic integral equation in the plane.* Stochastic Processes and their Applications 46, 219–239 (1993).

[G-N-S] I. Gyöngy, D. Nualart and M. Sanz-Solé: *Approximation and support theorems in modulus spaces.* Probab. Theory and Rel. Fields 101, 495–509 (1995).

[Gu-P 1] X. Guyon et B. Prum: *Semimartingales à indice dans* $\mathbb{R}^2_+$. Thèse de Doctorat d'Etat. Sci. Math. Univ. de Paris-Sud, Orsay (1980).

[Gu-P 2] X. Guyon et B. Prum: *Le théoreme de Girsanov pour une classe de processus à paramètre multidimensionnel.* C. R. Acad. Sci. Paris 285, 565–567 (1977).

[Gy-P] I. Gyöngy and T. Prohle: *On the approximation of stochastic differential equations and on Stroock-Varadhan's support theorem.* Computers Math. Applic, 65–70 (1990).

[I-W] N. Ikeda and S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North Holland; Tokyo (1981).

[K] H. Kunita: *Stochastic differential equations and stochastic flow of diffeomorphisms,* École d'été de Probabilités de Saint-Flour, XII. Lecture Notes in Math. 1097, 144–300. Springer Verlag (1984).

[K-S] S. Kusuoka and D. Stroock: *Applications of the Malliavin Calculus, Part II.* Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Vol. 32, 1–76 (1985).

[L-N-S] D. Lépingle, D. Nualart et M. Sanz-Solé: *Dérivation stochastique des diffusions réflechies.* Annals de l'Institut H. Poincaré 25, 283–306 (1989).

[L-S] R.S. Liptser and A.N. Shiryayev: *Statistics of random processes I. General theory.* Springer Verlag (1977).

[Mac] V. Mackevičius: *On the support of the solution of stochastic differential equations.* Lietuvos Matematikos Rinkinys XXXVI (1), 91–98 (1986).

[Mal] P. Malliavin: *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators.* Proceedings of the International Conference on Stochastic Differential Equations of Kyoto 1976, 195–263. Wiley (1978).

[Mas] T. Masuda: *Absolute continuity of distributions of solutions of anticipating stochastic differential equations.* J. Funct. Anal. 95, 414–432 (1992).

[Me] M. Mellouk: *Support des diffusions dans les espaces de Besov-Orlicz.* C. R. Acad. Sci. Paris 319, 261–266 (1994).

[M-N] A. Millet and D. Nualart: *Support theorems for a class of anticipating stochastic differential equations.* Stochastics and Stochastics Reports 39, 1–24 (1992).

[M-N-S] A. Millet, D. Nualart and M. Sanz-Solé: *Large deviations for a class de anticipating stochastic differential equations.* Annals of Probability 20, 1902–1931 (1992).

[M-S 1] A. Millet and M. Sanz-Solé: *A Simple Proof of the Support theorem for Diffusion Processes.* Séminaire de Probabilités XXVIII. Lecture Notes in Math. 1583, 36–48. Springer Verlag (1994).

[M-S 2] A. Millet and M. Sanz-Solé: *The support of the solution to a hyperbolic SPDE.* Probab. Theory and Rel. Fields 98, 361–387 (1994).

[N 1] D. Nualart: *Malliavin Calculus and Related Topics.* Springer Verlag (1995).

[N 2] D. Nualart: *Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus.* École d'été de Probabilités de Saint-Flour, XXV. Lecture Notes in Math., a publicar.

[N-N-S] Nguyen Minh Duc, D. Nualart and M. Sanz-Solé: *Application of Malliavin Calculus to a Class of stochastic Differential Equations.* Probab. Theory and Rel. Fields 84, 549-571 (1990).

[N-P] D. Nualart and E. Pardoux: *Stochastic calculus with anticipating integrands.* Probab. Theory and Rel. Fields 78, 535–581 (1988).

[N-S 1] D. Nualart and M. Sanz-Solé: *Malliavin calculus for two-parameter Wiener functionals.* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70, 573–590 (1985).

[N-S 2] D. Nualart and M. Sanz-Solé: *Stochastic Differential Equations on the plane: Smoothness of the solution.* Journal of Multivariate Analysis 31, 1–29 (1989).

[N-Y] D. Nualart and J. Yeh: *Existence and uniqueness of strong solution to stochastic differential equation in the plane with a stochastic boundary process.* Journal of Multivariate Analysis 28, 149–179 (1989).

[No] J.R. Norris: *Twisted sheets.* J. Funct. Analysis 132, 273–334 (1995).

[O-P] P. Ocone and E. Pardoux: *A generalized Itô-Ventzell formula. Application to a class of anticipating stochastic differential equations.* Ann. Inst. Henri Poincaré 25, 39–71 (1989).

[P-T] E. Pardoux and Z. Tusheng: *Absolute Continuity of the Law of the Solution of a Parabolic SPDE.* J. Funct. Anal. 112, 447–458 (1993).

[R-S 1] C. Rovira and M. Sanz-Solé: *Large deviations for a nonlinear hyperbolic SPDE.* Mathematics Preprint Series 150, Universitat de Barcelona (1994).

[R-S 2] C. Rovira and M. Sanz-Solé: *A nonlinear hyperbolic SPDE: approximations and support.* In: Stochastic Partial Differential Equations, A. Etheridge (ed.). Lond. Math. Soc. Lect. Note 216, 241–261. Cambridge University Press (1995).

[R-S 3] C. Rovira and M. Sanz-Solé: *The law of the solution to a nonlinear hyperbolic SPDE.* Es publicará a Journal of Theorical Probability.

[R-S 4] C. Rovira and M. Sanz-Solé: *Anticipating stochastic differential equations: Regularity of the law.* Mathematics Preprint Series 178, Universitat de Barcelona (1995).

[Sn] I.N. Sneddon: *Elements of Partial Differential Equations.* Mac-Graw Hill (1957).

[Sk] A.V. Skorohod: *On a generalization of a stochastic integral.* Theory Probab. Apl. 20, 219–233 (1975).

[So] R.B. Sowers: *Large deviations for a reaction-diffusion equation with non-gaussian perturbations.* Annals of Probability 20, 504–537 (1992).

[St] D. Stroock: *Some applications of stochastic calculus to partial differential equations.* École d'été de Probabilités de Saint-Flour, XI. Lecture Notes in Math. 976, 267–382. Springer Verlag (1983).

[W] J.B. Walsh: *An introduction to stochastic partial differential equations.* École d'été de Probabilités de Saint-Flour, XIV. Lecture Notes in Math. 1180, 266–437. Springer Verlag (1986).

[W-Z] E. Wong and M. Zakai *Weak martingales and stochastic integrals in the plane.* Annals of Probability 4, 570–586 (1974).

[Y] H. Yeh: *Existence of strong solutions for stochastic differential equations in the plane.* Pacific J. Math. 97, 217–297 (1981).