

## Capítulo 2

# Difracción de Fresnel e información compleja

La Holografía permite el almacenamiento y representación de información compleja mediante diversas técnicas, y entre las más empleadas, se halla la que utiliza la interferencia de luz coherente para obtener el holograma que contiene la información a representar. La representación de objetos mediante la holografía pasa por la captación y posterior reconstrucción de frentes de onda complejos. Estos frentes de onda normalmente se obtienen de la difracción de luz coherente procedente del objeto. Así en el cálculo de hologramas se debe considerar la teoría de la difracción. En este capítulo por tanto, introducimos la teoría escalar de la difracción, la holografía y la aproximación de Fresnel, mencionaremos el método de cálculo empleado en este trabajo y finalmente presentaremos el comportamiento de la información compleja en la aproximación de Fresnel usada en la reconstrucción de frentes de onda.

### 2.1. Teoría escalar de la difracción

La teoría escalar de la difracción permite tratar el comportamiento de la propagación de la luz de una forma simplificada, ya que no tiene en cuenta el carácter vectorial de las ondas electromagnéticas. Esta simplificación da resultados precisos si se cumplen dos condiciones básicas: a) la abertura de difracción debe ser grande comparada con la longitud de onda y b) la distancia de observación del campo difractado debe ser suficientemente grande en comparación con las dimensiones de la abertura, en estas condiciones la polarización del campo electromagnético no varía, lo que permite prescindir del formalismo vectorial. Teniendo esto en cuenta vemos que la teoría escalar de la difracción es adecuada para plantear la reconstrucción de objetos me-

diante la propagación de la luz, objeto de estudio en el presente trabajo.

Consideremos una onda escalar perfectamente monocromática  $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{-i\omega t}$ . En el vacío cumple la ecuación de ondas:

$$\Delta U(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Y la parte espacial  $U(\vec{r})$  cumple, por tanto, la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta U(\vec{r}) = -k^2 U(\vec{r}) \quad (2.2)$$

Donde  $\vec{r}$  representa el vector posición y  $k$  el número de onda,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $k = 2\pi n \frac{\nu}{c} = 2\pi/\lambda$ . El cálculo de  $U(\vec{r})$  en cualquier punto del espacio se puede realizar utilizando el teorema de Green: sean  $U(P)$  y  $G(P)$  dos funciones de valores complejos cualesquiera, continuas y con la primera y segunda derivadas continuas dentro de un recinto cerrado  $V$ , entonces se cumple:

$$\int_V [G\Delta U - U\Delta G] dv = \int_S \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.3)$$

Donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  es la derivada de  $G$  o  $U$  respecto la dirección normal a la superficie  $S$ . La elección de una función  $G$  y de una superficie  $S$  adecuadas permiten la aplicación directa de este teorema para resolver el problema de la difracción.

### 2.1.1. Teorema integral de Helmholtz-Kirchoff. Formulación de Rayleigh-Sommerfeld

Consideremos un punto  $P \in V$  donde realizaremos la observación del campo y centraremos el origen de coordenadas. Definimos una posible función de Green como:

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.4)$$

Para evitar la discontinuidad en  $r = 0$  definimos una superficie esférica  $S_\epsilon$  alrededor del punto con radio  $\epsilon$  infinitesimal. Por tanto la nueva superficie de integración será  $S' = S + S_\epsilon$  y el nuevo volumen  $V' = V - V_\epsilon$ . La función  $G$  es una onda esférica de amplitud unidad y por tanto cumple la ecuación de Helmholtz (ver ecuación 2.2). Así al aplicar el teorema de Green en el nuevo recinto de integración  $V'$  obtenemos:

$$\int_{V'} [G\Delta U - U\Delta G] dv = - \int_{V'} [k^2 GU - k^2 UG] dv = 0 \quad (2.5)$$

por tanto,

$$\int_{S'} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = 0 \quad (2.6)$$

y teniendo en cuenta que  $S = S' + S_\epsilon$ ,

$$- \int_{S_\epsilon} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \int_S \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.7)$$

Para evaluar la integral sobre la superficie  $S_\epsilon$  se calcula el límite cuando el radio  $\epsilon$  tiende a 0:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.8)$$

Si tenemos en cuenta que la superficie  $S_\epsilon$  es esférica podemos evaluar la derivada respecto la normal de la función  $G$ , ya que  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon}$  y sobre la superficie  $G = \exp(ik\epsilon)/\epsilon$ , con lo que,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[ \frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \quad (2.9)$$

Substituyendo dentro de la integral y teniendo en cuenta que  $ds = \epsilon^2 d\Omega$ , donde  $d\Omega$  es el diferencial de ángulo sólido,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - U \left[ \frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right] \epsilon^2 d\Omega \quad (2.10)$$

De los tres sumandos dentro de la integral solo uno no es igual a cero, ya que las funciones y sus derivadas están acotadas. Si se considera además la continuidad de  $U$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{S_\epsilon} U \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega = -U(P) \int_{S_\epsilon} d\Omega = -4\pi U(P) \quad (2.11)$$

Finalmente si aplicamos este resultado a la ecuación 2.7 obtenemos lo que se conoce como el teorema integral de Helmholtz-Kirchoff:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds \quad (2.12)$$

Si se aplica este teorema al problema de la difracción de una onda escalar a través de una abertura contenida en una superficie plana, al utilizar la función de Green de la ecuación 2.4 se obtiene la fórmula de Fresnel-Kirchoff, que da resultados experimentales suficientemente precisos pero tiene ciertas inconsistencias formales en el desarrollo matemático, derivadas de la imposición de ciertas condiciones de contorno. Estas dificultades se solventan utilizando el formalismo de Rayleigh-Sommerfeld que utiliza una nueva función de Green, con la que no es necesario imponer condiciones de contorno ni requiere la utilización de una iluminación con ondas esféricas. La nueva función de Green tiene la siguiente forma:

$$G(P) = \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikR)}{R} \quad (2.13)$$

La geometría del problema se describe en la figura 2.1,  $P$  es el punto donde se realiza la observación,  $P'$  es un punto simétrico a  $P$  respecto al plano  $\Sigma$ .  $R$  y  $r$  son las distancias de los puntos  $P'$  y  $P$  a un punto cualquiera de la abertura  $\Sigma$ . Para los puntos pertenecientes al plano  $\Sigma$  se cumple que  $G(P_\Sigma) = 0$  y además  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) = -\cos(\vec{n}, \vec{R})$ .

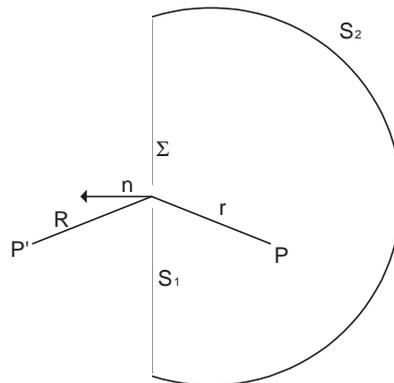


Figura 2.1: Geometría para la fórmula de Rayleigh-Sommerfeld

Si aplicamos el teorema de Helmholtz-Kirchoff con la nueva función de Green obtendremos la fórmula de difracción, para ello antes hay que considerar la derivada de  $G$  respecto la normal en los puntos de la superficie  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial n} &= \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} - \cos(\vec{n}, \vec{R}) \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R} = \\
&= 2 \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \approx 2 \cos(\vec{n}, \vec{r}) ik \frac{\exp(ikr)}{r}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Esta expresión se puede sustituir en la integral de Helmholtz-Kirchoff considerando además que  $G(P_\Sigma) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
U(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[ G(P_\Sigma) \frac{\partial U}{\partial n}(P_\Sigma) - U(P_\Sigma) \frac{\partial G}{\partial n}(P_\Sigma) \right] ds = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} U(P_\Sigma) \frac{\partial G}{\partial n}(P_\Sigma) ds = \\
&= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(P_\Sigma) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) ds
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Este resultado se conoce como la fórmula de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld. En el caso de iluminación con ondas esféricas este resultado es igual al de la fórmula de Fresnel-Kirchoff, una explicación más detallada se puede hallar en [Goo96] y [CJVB01]. Cuando los ángulos son pequeños, es decir, las distancias axiales son mucho mayores que las distancias laterales, el factor de oblicuidad se puede aproximar a la unidad,  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$ , y la fórmula queda como:

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(P_\Sigma) \frac{\exp(ikr)}{r} ds \tag{2.16}$$

## 2.2. Aproximación de Fresnel

El siguiente paso para aproximar el cálculo de la difracción se realiza considerando el caso de coordenadas rectangulares, fijando unos ejes de coordenadas en  $(x_0, y_0)$  en la pantalla que contiene la abertura y considerando el eje  $z$  como el eje normal al del plano que contiene la abertura, con origen en dicho plano, como se muestra en la figura 2.2. El punto  $P$  de observación tendrá coordenadas  $(x, y, z)$ . Si se consideran distancias de observación mayores que las distancias transversales asociadas el término del factor de oblicuidad se puede aproximar como  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$ , así la fórmula de Rayleigh-Sommerfeld (ver ecuación 2.15) en coordenadas cartesianas queda como,

$$U(P) \approx \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \frac{\exp(ik\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2)})}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2)}} dx_0 dy_0 \tag{2.17}$$

La distancia entre un punto de la abertura  $(x_0, y_0, 0)$  y el punto de observación  $P(x, y, z)$  es,

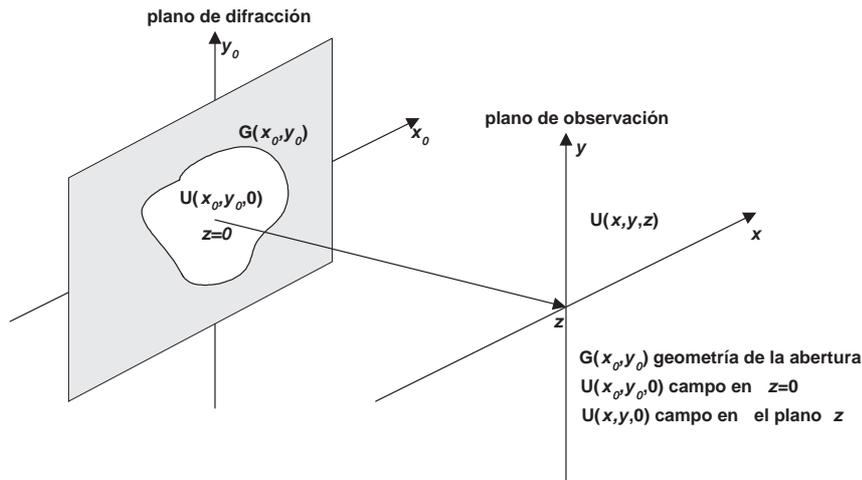


Figura 2.2: Geometría de la difracción de Fresnel

$$r = \sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2)} = z \sqrt{\left(1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}\right)} \quad (2.18)$$

La aproximación de Fresnel se realiza entonces si se verifica que  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ll z^2$ , entonces se puede aproximar  $r$  por  $z$ . En el caso de la exponencial este cambio no se puede realizar directamente ya que el periodo de las oscilaciones es muy rápido (debido al factor  $2\pi/\lambda$ ) y la sustitución directa puede producir errores importantes en la estimación del ángulo. Lo que se hace es aproximar la raíz mediante una serie de Taylor hasta primer grado,

$$r = z \sqrt{\left(1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}\right)} \approx z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2z^2}\right] \quad (2.19)$$

Esta aproximación equivale a aproximar una esfera por una superficie parabólica. De esta forma obtenemos la fórmula de difracción de Fresnel,

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \exp\left(\frac{ik}{2z}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right) dx_0 dy_0 \quad (2.20)$$

Los límites de integración se extienden al campo de la abertura  $\Sigma$ . Estos límites se pueden extender de  $-\infty$  a  $+\infty$  considerando que el campo eléctrico fuera de la abertura es cero y haciendo  $\psi(x, y) = U(x, y, 0)G(x, y)$ , con  $G(x, y)$  la función que describe la geometría de la abertura. La integral de la difracción de Fresnel puede ser interpretada como el producto de convolución entre el campo en el plano  $z = 0$ ,  $\psi(x, y)$ , y la respuesta impulsional  $h(x, y, z)$ :

$$U(x, y, z) = \psi(x, y) * h(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0, z) dx_0 dy_0, \quad (2.21)$$

donde,

$$h(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \quad (2.22)$$

Esta función  $h(x, y, z)$  que forma el núcleo de la convolución corresponde a la expresión de una onda esférica con origen en  $z = 0$  que ha viajado una distancia  $z$ , multiplicada por el factor  $1/i\lambda$ . Por tanto en la aproximación de Fresnel, el campo eléctrico escalar a una distancia  $z$  se obtiene mediante la convolución del campo en  $z = 0$  con una onda esférica que ha viajado la distancia  $z$ .

Otra interpretación se puede obtener si se desarrollan los binomios  $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$  de la integral de difracción (ecuación 2.20),

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right) dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\left(\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right)} e^{-\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\left(\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right)} e^{-2\pi i\left(\frac{x}{\lambda z}x_0 + \frac{y}{\lambda z}y_0\right)} dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Así la difracción de Fresnel se puede obtener a partir de una Transformada de Fourier escalada  $\lambda z$  de  $\psi(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right)$  y una multiplicación por unos factores de fase constantes en el plano  $z$ :

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \text{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right)] \quad (2.24)$$

Si se consideran distancias de observación  $z$  grandes, que cumplan  $z \gg \frac{k(x^2 + y^2)_{max}}{2}$ , entonces la exponencial dentro de la integral anterior se puede aproximar a 1, obteniendo así la aproximación de Fraunhofer para la difracción:

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \text{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)] \quad (2.25)$$

En este caso la difracción es directamente proporcional a una transformada de Fourier del campo eléctrico en la abertura, escalada  $\lambda z$ . Los términos exponenciales que

aparecen fuera de la integral no se pueden aproximar ya que las dimensiones del plano de observación no tienen por que ser pequeñas respecto a  $z$ , de todas formas, si se considera solo la intensidad del campo eléctrico estos términos quedan anulados al realizar el cuadrado del campo,  $I(x, y, z) \propto |\text{TF}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)]|^2$ .

## 2.3. Holografía

La holografía, introducida por Dennis Gabor en 1948 [Gab48], consiste fundamentalmente en la captación y reconstrucción, tanto del módulo como de la fase, de frentes de onda procedentes de un objeto iluminado con luz coherente. Se trata, por tanto, de un problema con dos pasos, uno la captación de información compleja y por otro lado la representación de esta información.

Para la captación de información compleja hay que emplear alguna técnica que transforme ésta en valores reales y positivos, dado que la mayoría de medios de registro solo responden a la intensidad de la luz. Los métodos usuales para realizar esta transformación utilizan técnicas interferométricas. Así para conservar la información de la fase se utiliza una onda de referencia que se hace interferir con la que procede del objeto, y la intensidad que se capta corresponde a la suma de los dos frentes.

Si consideramos que  $a(x, y) = |a(x, y)| \exp[-i\phi(x, y)]$  es el frente de onda del objeto a reconstruir y  $A(x, y) = |A(x, y)| \exp[-i\psi(x, y)]$  la onda de referencia que se le suma tenemos que la amplitud resultante al realizar la interferencia será,

$$U(x, y) = a(x, y) + A(x, y) \quad (2.26)$$

y por tanto la intensidad que se registra es:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= U^2(x, y) = |A(x, y)|^2 + |a(x, y)|^2 + A^*(x, y)a(x, y) + A(x, y)a^*(x, y) = \\ &= |A(x, y)|^2 + |a(x, y)|^2 + 2|A(x, y)||a(x, y)| \cos[\psi(x, y) - \phi(x, y)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Los dos primeros términos de la intensidad solo proporcionan información sobre la amplitud de las dos funciones, pero el tercero además presenta información sobre la diferencia de las dos fases. Escogiendo apropiadamente la onda de referencia se puede recuperar la información de la fase del objeto al reconstruir el holograma. Para ello

consideramos que la intensidad se puede registrar de forma lineal, ya sea por transmisión o reflexión. Así tenemos que la función que se utiliza para obtener la reconstrucción será  $T(x, y) = T_0 + \beta' I(x, u)$ . En el caso de considerar un registro fotográfico,  $T_0$  corresponde a la respuesta de la emulsión sin exposición y  $\beta'$  a la pendiente de la recta en la zona en que la respuesta de la transmitancia a la exposición es lineal. Sí la iluminamos con una onda de reconstrucción coherente  $B(x, y)$  tenemos que la luz transmitida (en el caso de una transparencia) es,

$$B(x, y)T(x, y) = B(x, y)[T_0 + \beta'(|A(x, y)|^2 + |a(x, y)|^2)] + \beta' B(x, y)A^*(x, y)a(x, y) + \beta' B(x, y)A(x, y)a^*(x, y) \quad (2.28)$$

En el segundo término aparece  $a(x, y)$ , de forma que se puede obtener la reconstrucción del frente de onda del objeto original dependiendo de la elección de las ondas de referencia y reconstrucción; si estas se escogen de forma que sean iguales y uniformes,  $A(x, y) = B(x, y)$ , este término será  $\beta' A^2 a(x, y)$ , y se obtiene un frente de onda que reconstruye el objeto. Aparece además un término proporcional al conjugado del frente de onda  $a^*(x, y)$ , que da lugar a una reconstrucción virtual del objeto. Y queda un primer término que presenta las interferencias de las amplitudes, y que introducirá ruido en las reconstrucciones. Para evitar este factor se deben separar las distintas componentes, uno de los métodos más empleados es el que introdujeron Leith y Upatnieks [LU62][LU64], consistente en usar una fase lineal en la onda de referencia de forma que en la reconstrucción el término  $a(x, y)$  sale desplazado respecto al eje de iluminación (ver figura 2.3), de esta forma se obtiene el objeto libre del ruido del término central. Así si la onda de referencia es  $A(x, y) = A \exp(-iky \sin \theta)$  la intensidad que obtenemos de la interferencia será,

$$I(x, y) = A^2 + a^2(x, y) + A^* a(x, y) \exp(iky \sin \theta) + A a^*(x, y) \exp(-iky \sin \theta) \quad (2.29)$$

Si pasamos esta intensidad a una transparencia de forma lineal y la iluminamos con una onda plana uniforme,  $B(x, y) = B$ , tendremos la siguiente distribución:

$$B(x, y)T(x, y) = B[t_0 + \beta'(A^2 + a^2(x, y))] + \beta' B A^* a(x, y) \exp(iky \sin \theta) + \beta' B A a^*(x, y) \exp(-iky \sin \theta) \quad (2.30)$$

El primer término con las interferencias de las amplitudes sale centrado en la dirección con la que se ilumina el holograma, el segundo término presenta la reconstrucción de  $a(x, y)$  multiplicada por la fase lineal conjugada de la onda de referencia que

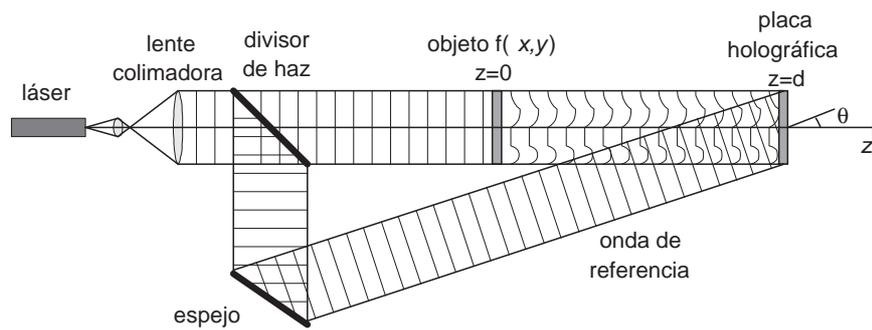


Figura 2.3: Grabación de un holograma de Leith-Upatnieks

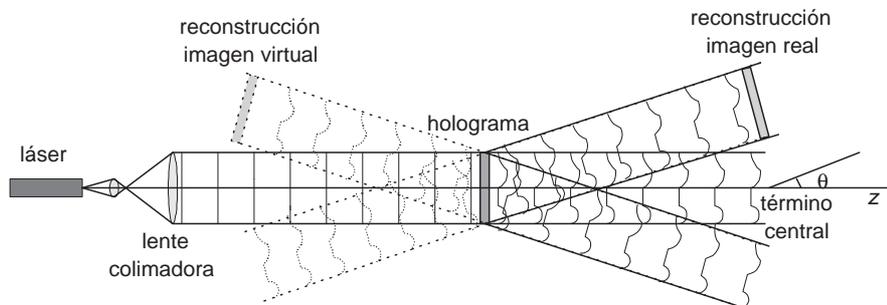


Figura 2.4: Reconstrucción de un holograma de Leith-Upatnieks

desplaza al objeto por encima del eje de propagación  $z$ , y el último término presenta el frente de onda del objeto conjugado,  $a^*(x,y)$ , multiplicado por la fase lineal de la onda de referencia, lo que desplaza este término por debajo del eje  $z$ , lo que da lugar a la reconstrucción virtual del objeto detrás del holograma (ver figura 2.4).

Existen diferentes tipos de hologramas dependiendo de las técnicas de captación o representación empleadas, una primera clasificación se basa en las condiciones de difracción entre el objeto y la placa holográfica, así podemos tener hologramas de Fresnel, de Fraunhofer o de Fourier. Si se tiene en cuenta el soporte en el que se encuentra el holograma podemos tener hologramas de transmisión o de reflexión. Por último la combinación de diversas técnicas holográficas ha dado lugar a multitud de distintos tipos de hologramas con diversas finalidades visuales como por ejemplo estereogramas, multiplexados, de color, de falso color, etc. [Sax94]

## 2.4. Hologramas de Fresnel digitales

La aparición de los ordenadores ha permitido el desarrollo de la holografía digital, tanto en la generación de hologramas por ordenador (CGH, *computer generated holograms*) como en la captación de hologramas por medios digitales. La idea de los hologramas generados por ordenador consiste en codificar la información compleja de un frente de onda, mediante algoritmos de cálculo, en una función que se pueda representar en un soporte que solo admite valores positivos. Los primeros hologramas generados por ordenador fueron creados por Brown y Lohman en 1966 [BL66]. Desde entonces el desarrollo de los ordenadores y otros dispositivos digitales ha ido asociado al desarrollo de nuevos métodos que permiten generar los hologramas digitalmente [Lee70] [Bur70] [Tri87] [Les92] [Luc93] [HST97] [JPOPBV97] [MSL<sup>+</sup>97] [PSWB97] [MT00] [YD02]. Todos estos métodos pasan por calcular la propagación del objeto y por codificar la función compleja de forma que se pueda representar.

En este trabajo utilizamos la fórmula de propagación de Fresnel (ver ecuación 2.20) para calcular los hologramas que más tarde serán utilizados para reconstruir la información deseada. Sea  $f(x, y)$  la función que se quiere reconstruir a una distancia  $d$ , es decir, al iluminar el holograma calculado, mediante la propagación de la luz queremos que el frente de onda en  $d$  sea  $f(x, y)$ . Por tanto para obtener la información compleja que tiene que representar el holograma lo que hacemos es calcular la difracción de Fresnel de  $f(x, y)$  desde  $z = d$  hasta  $z = 0$ , es decir, retropropagarlo una distancia  $-d$ :

$$U(x, y, 0) = \text{TFres}[f(x, y), -d] = \frac{\exp(-ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \exp\left(\frac{-ik}{2d}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right) dx_0 dy_0 \quad (2.31)$$

La información que incluirá a codificar en el holograma será  $U(x, y, -d)$ , al propagarla de nuevo con la transformada de Fresnel a una distancia  $d$  se recupera el objeto  $f(x, y)$ ,

$$U(x, y, d) = \text{TFres}[U(x, y, 0), d] = \text{TFres}[\text{TFres}[f(x, y), -d], d] \propto f(x, y) \quad (2.32)$$

De esta forma se puede simular mediante la transformada de Fresnel la reconstrucción del holograma que se ha calculado.

## 2.5. Cálculo de la transformada de Fresnel

Por tanto, es necesario implementar un algoritmo que permita realizar el cálculo de la difracción de Fresnel para obtener la información compleja que representará el holograma. Para ello se puede utilizar una de las dos aproximaciones presentadas en la sección 2.2. Una opción consiste en utilizar la expresión que da la propagación de Fresnel expresada como una transformada de Fourier escalada:

$$U(x, y, d) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \exp\left(\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right) \text{TF}_{\lambda d}[f(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right)] \quad (2.33)$$

Esta fórmula se puede implementar utilizando un algoritmo para el cálculo de la transformada de Fourier, como el de la FFT (*Fast Fourier Transform*) [CHL88] [PT+92], los problemas de utilizar este método pueden aparecer al considerar la función exponencial que multiplica a  $f(x, y)$  dentro de la transformada. Esta función oscila muy rápidamente ya que su frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda  $\lambda$ , que es mucho más pequeña que la distancia  $d$  y que el tamaño del objeto  $f(x, y)$ , esto puede crear problemas de muestreo al discretizar esta función. Otro factor a tener en cuenta es el cambio de escala que se produce al calcular la reconstrucción del holograma a diferentes distancias. Estos problemas se pueden evitar si se utiliza la interpretación como convolución de la transformada de Fresnel:

$$U(x, y, d) = f(x, y) * h(x, y, d) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0, d) dx_0 dy_0 \quad (2.34)$$

Donde  $h(x, y, d)$  es la función núcleo de la convolución,

$$h(x, y, d) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \exp\left(\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right) \quad (2.35)$$

En este caso la frecuencia de las oscilaciones de la exponencial sigue siendo inversamente proporcional a la longitud de onda. Para calcular entonces la integral utilizaremos el teorema de la convolución de la transformada de Fourier,

$$\text{TF}[f(x, y) * h(x, y, d)] = \text{TF}[f(x, y)] \text{TF}[h(x, y, d)] = F(u, v) H(u, v, d) \quad (2.36)$$

donde la transformada de Fourier de la función  $h(x, y, d)$ , es la función de transferencia  $H(u, v, d)$ , conocida y que tiene una expresión analítica:

$$H(u, v, d) = \exp(ikd) \exp(-i\pi\lambda d(u^2 + v^2)) \quad (2.37)$$

La frecuencia del término exponencial es ahora directamente proporcional a la longitud de onda, con lo que se solventan los posibles problemas de muestreo en la discretización. Así, para obtener la propagación de Fresnel primero debe realizarse la transformada de Fourier del objeto, que debe tener dimensión  $2^N$  al utilizar el algoritmo FFT, luego se multiplica por la función  $H(u, v, d)$  discretizada y finalmente se hace una transformada de Fourier inversa del resultado. Al realizar la transformada del objeto debemos tener en cuenta que también este bien discretizada. Así, el algoritmo implementado en este trabajo calcula la siguiente expresión:

$$U(m, n, d) = \exp(ikd) \text{FFT}^{-1}[\exp(-i\pi\lambda d((m\Delta_u)^2 + (n\Delta_v)^2)) \text{FFT}[f(m, n)]] \quad (2.38)$$

Donde  $(m, n)$  son los índices de las funciones discretizadas,  $\Delta_u$  y  $\Delta_v$  son los factores de transformación entre las unidades discretas y las unidades espaciales, estos valores dependen directamente del tamaño del objeto  $f(x, y)$  que se quiere propagar. Sea  $l_x \times l_y$  las dimensiones en mm del objeto,  $N_x \times N_y$  el número de píxeles en los que se discretiza y  $\Delta_x \times \Delta_y$  el tamaño de cada píxel, entonces,

$$\Delta_u = \frac{1}{l_x} = \frac{1}{N_x \Delta_x} \quad \text{y} \quad \Delta_v = \frac{1}{l_y} = \frac{1}{N_y \Delta_y} \quad (2.39)$$

Existen otros métodos para calcular la propagación de un objeto. Una posible alternativa es utilizar la transformada fraccionaria de Fourier para el cálculo de la difracción de Fresnel [OM95] [GMD96] [MB98a] [MGF<sup>+</sup>99] [Hwa03], aunque para ciertos casos tiene problemas de precisión al determinar la fase; otras opciones para el cálculo de Fresnel son la utilización de wavelets [Onu93] [MNG97] o nuevas aproximaciones en el cálculo de la integral de Fresnel [SH91]. Otra alternativa es no utilizar la aproximación de Fresnel y realizar los cálculos mediante la difracción exacta punto a punto mediante trazado de rayos o la propagación de planos [MT00] [AR03] [Les92], técnicas que requieren mayor tiempo de cálculo. Otros miembros de nuestro laboratorio también han desarrollado estudios para el cálculo exacto de la difracción [FBBV98] [BFB99] [BFB01] [BFB02].

## 2.6. Información compleja en el dominio de Fresnel

A la hora de codificar la función compleja que contendrá el holograma es interesante conocer como se comporta la información al propagarla mediante la fórmula de Fresnel, de esta forma podemos saber si existen unas partes más relevantes que otras,

lo que permitiría realizar una selección de la información de la función a codificar a la hora de representar el holograma en soportes que pueden presentar distintas limitaciones. Es decir, poder solo representar valores positivos o tener limitada la resolución, en particular, en el caso de utilizar pantallas de cristal líquido, en las que la modulación compleja de la luz se halla limitada a ciertas configuraciones debido a las características de los dispositivos. Para conocer como se comportan la información compleja al propagarse llevamos a cabo el análisis siguiente, consistente en estudiar la reconstrucción de un holograma de Fresnel de una imagen a distintas distancias, usando las diferentes partes de la función compleja: parte real, parte imaginaria, módulo y fase, así como usando toda la función compleja o la intensidad de la misma.

Para ello partimos de una imagen  $f(x, y)$  de  $128 \times 128$  píxeles, que retropropagamos mediante la fórmula de Fresnel a una distancia  $-d$ , la distribución compleja que obtenemos,  $U(x, y, -d)$ , formará el holograma, que al propagarlo a una distancia  $d$  reconstruye la imagen original. De esta forma calculamos la reconstrucción de la imagen usando parte de la información, en los casos en que se usa solo la parte real,  $\text{Re}[U(x, y, -d)]$ , la parte imaginaria,  $\text{Im}[U(x, y, -d)]$ , la amplitud,  $|U(x, y, -d)|$ , o la fase,  $\exp(i\phi(x, y, -d))$  y un último caso considerando la intensidad,  $|U(x, y, -d)|^2$ . Los cálculos se han realizado variando la distancia  $d$  entre 0 y 3000 mm, para dos imágenes distintas, la primera es una imagen de grises que presenta la figura de un pez (ver figura 2.6(a)), y la segunda es una imagen binaria que muestra el logo de la Universidad de Barcelona, formado por la sombra de un edificio y las letras UB (ver figura 2.9(a)). Para las imágenes se ha considerado un tamaño de píxel  $\Delta p = 0,04233$  mm, que corresponde al tamaño de unas de las pantallas de cristal líquido disponibles en el laboratorio, y se han utilizado cuatro longitudes de onda distintas,  $\lambda = 457,9$  nm, que corresponde a un azul característico de los láseres de Ar:Ion,  $\lambda = 532$  nm, que corresponde al verde de un láser de Nd:YAG,  $\lambda = 632,8$  nm, que da el rojo de un láser de He-Ne, y  $\lambda = 658$  correspondiente al rojo de un láser diodo.

Para evaluar la calidad de las diferentes reconstrucciones utilizamos el error RMS (*root mean squared*) entre la amplitud de la imagen ideal original y la de la reconstrucción,

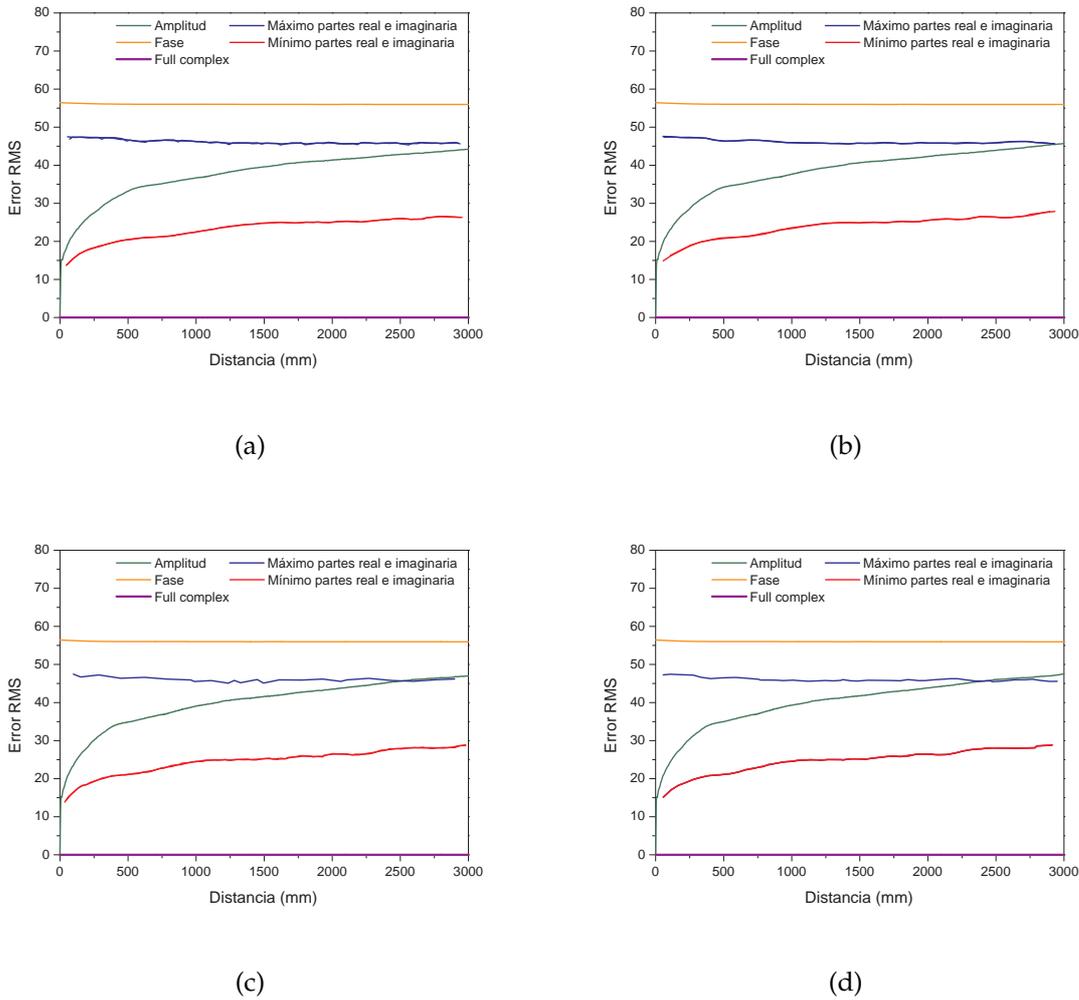
$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (A_{recons}[i] - A_{ideal}[i])^2} \quad (2.40)$$

donde  $N$  es el número de píxeles de la imagen. Los resultados de estas simulaciones, el error RMS en relación a la distancia, se muestran en las figuras 2.5 y 2.8, para las dos imágenes, respectivamente. Hay que tener presente que este error es absoluto para cada imagen y esta referido a los niveles de gris de la misma, por tanto, para establecer comparaciones entre los resultados para distintas imágenes hay que tener en cuenta la diferencia de energía entre ellas, para poder considerar el error relativo. En el caso de las imágenes que utilizamos tenemos que para la imagen del pez de la figura 2.6(a) la amplitud media es de 20.4 y la energía media es de 3227.9 por píxel y para la imagen del logo de la figura 2.9(a) la amplitud media es de 9.3 y la energía media de 2181.1 por píxel.

### 2.6.1. Amplitud y fase

Las reconstrucciones utilizando solo la intensidad o solo la amplitud presentan un comportamiento similar. En el caso de utilizar la intensidad el error RMS que se obtiene sin embargo es dos órdenes de magnitud mayor (no se representa en los gráficos de las figuras 2.5 y 2.8). En ambos casos el error aumenta con la distancia, primero rápidamente y después de forma más lineal, además este aumento es mayor según es mayor la longitud de onda. Para distancias pequeñas los valores de error son bajos, la imagen no se ha degradado mucho debido a la propagación, y los resultados de la óptica geométrica son todavía válidos. Por otro lado los errores obtenidos al reconstruir solo con la fase se mantienen prácticamente constantes para todas las distancias y longitudes de onda, por tanto la información que contiene la fase es prácticamente constante. La diferencia entre los errores de las distintas imágenes depende de las diferentes características de los objetos que se representan, como la geometría y la energía de la imagen.

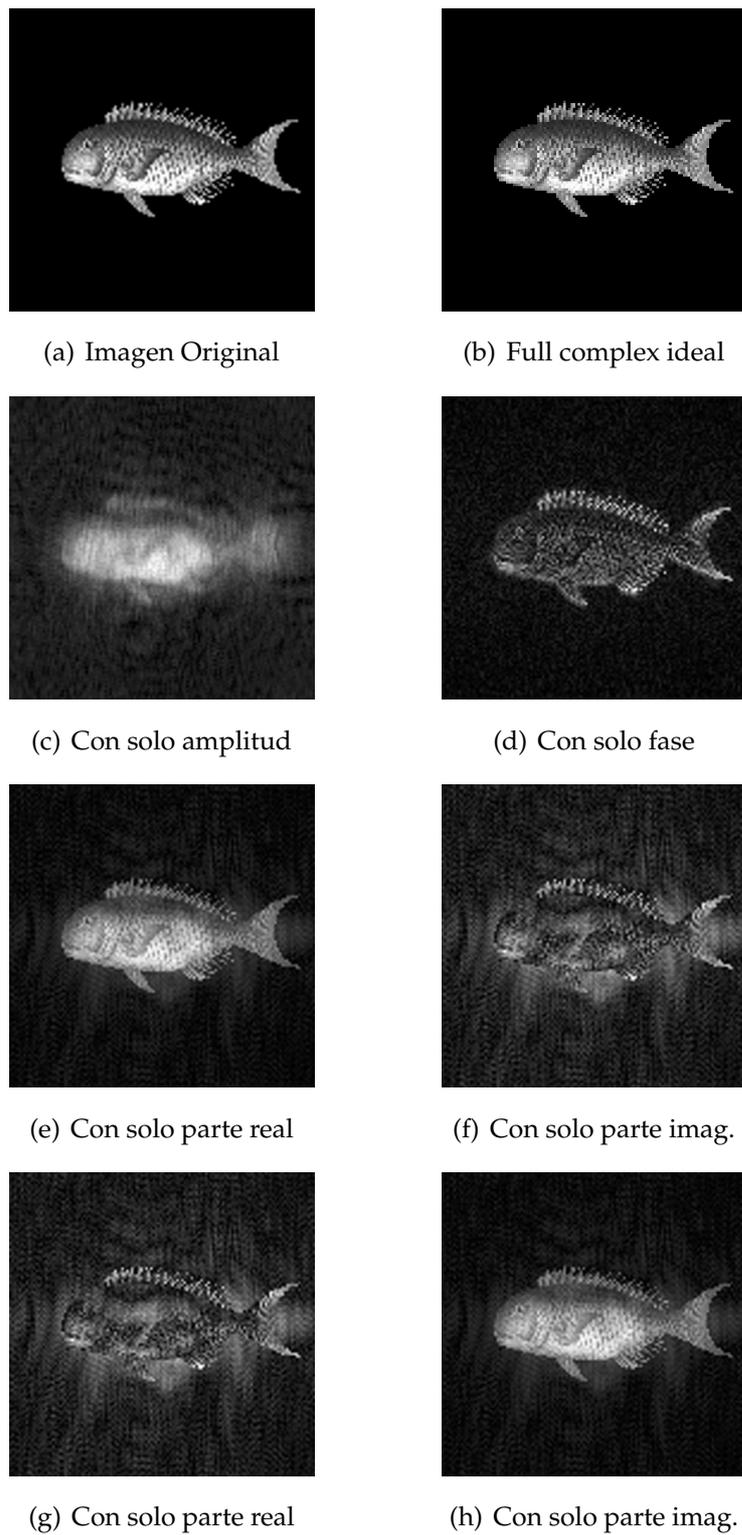
Para entender mejor estos resultados en las figuras 2.6 y 2.9 se presentan las imágenes de las amplitudes reconstruidas, a 516 mm con  $\lambda = 632,8$  nm, del pez y el logo, respectivamente. Las imágenes 2.6(b) y 2.9(b) presentan la reconstrucción utilizando toda la información compleja (full complex), con lo que los resultados son prácticamente idénticos a los de las imágenes originales (2.6(a) y 2.9(a)), esto resulta en el



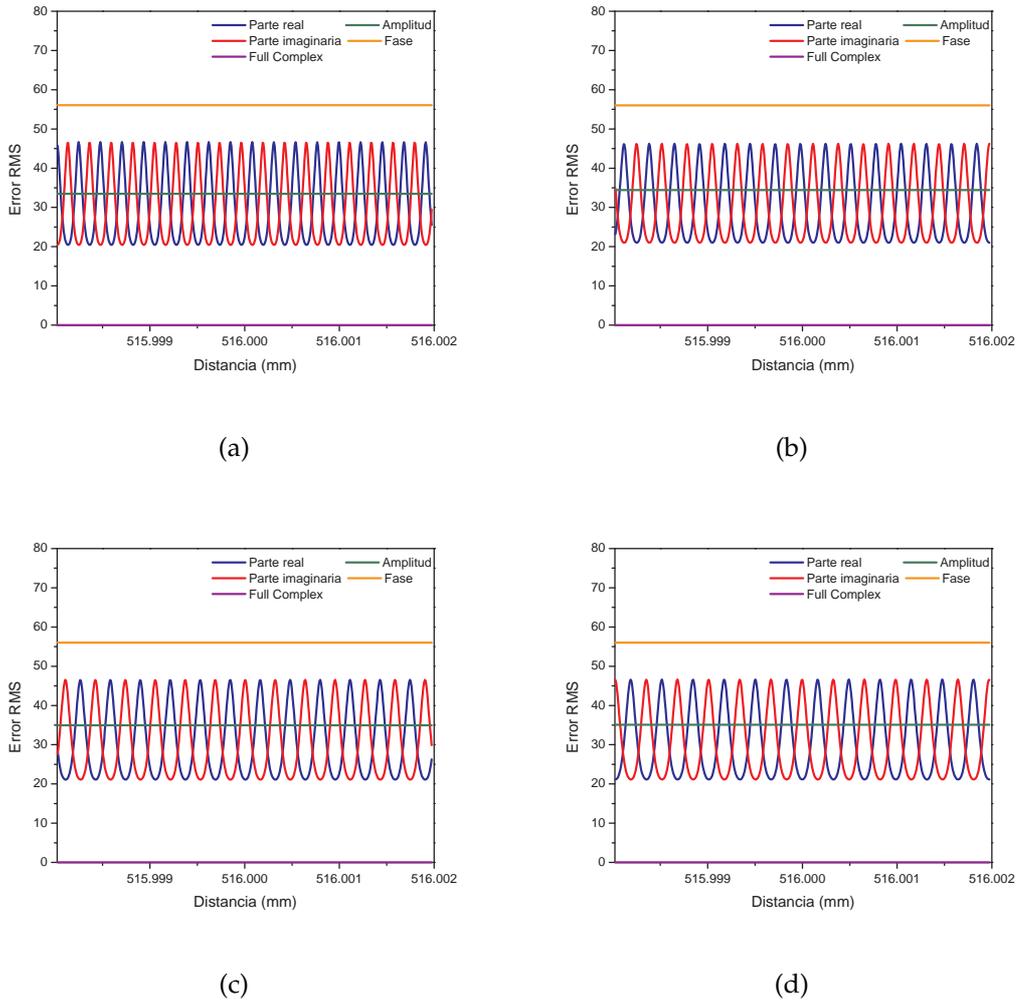
**Figura 2.5:** Gráficos del error RMS para la reconstrucción del pez (figura 2.6(a)) de 0 a 3000 mm utilizando las distintas partes de la distribución compleja: (a) con  $\lambda = 457,9$  nm, (b) con  $\lambda = 532$  nm, (c) con  $\lambda = 632,8$  nm, y (d) con  $\lambda = 658$  nm

error prácticamente nulo que se puede observar en los gráficos de las figuras 2.5 y 2.8 en el caso de utilizar la función compleja completa. En las imágenes 2.6(c) y 2.9(c) vemos las reconstrucciones obtenidas al usar solo la amplitud, en este caso las imágenes solo presentan la información que corresponde a las bajas frecuencias. Por otro lado, las reconstrucciones obtenidas utilizando solo la fase (imágenes 2.6(d) y 2.9(d)) presentan la información de alta frecuencia como los detalles y bordes del objeto. Así de hecho la amplitud y la fase tienen papeles complementarios.

La amplitud de la transformada de Fourier de la mayoría de las imágenes tiene un comportamiento decreciente y una forma similar en el espacio de frecuencias. Op-



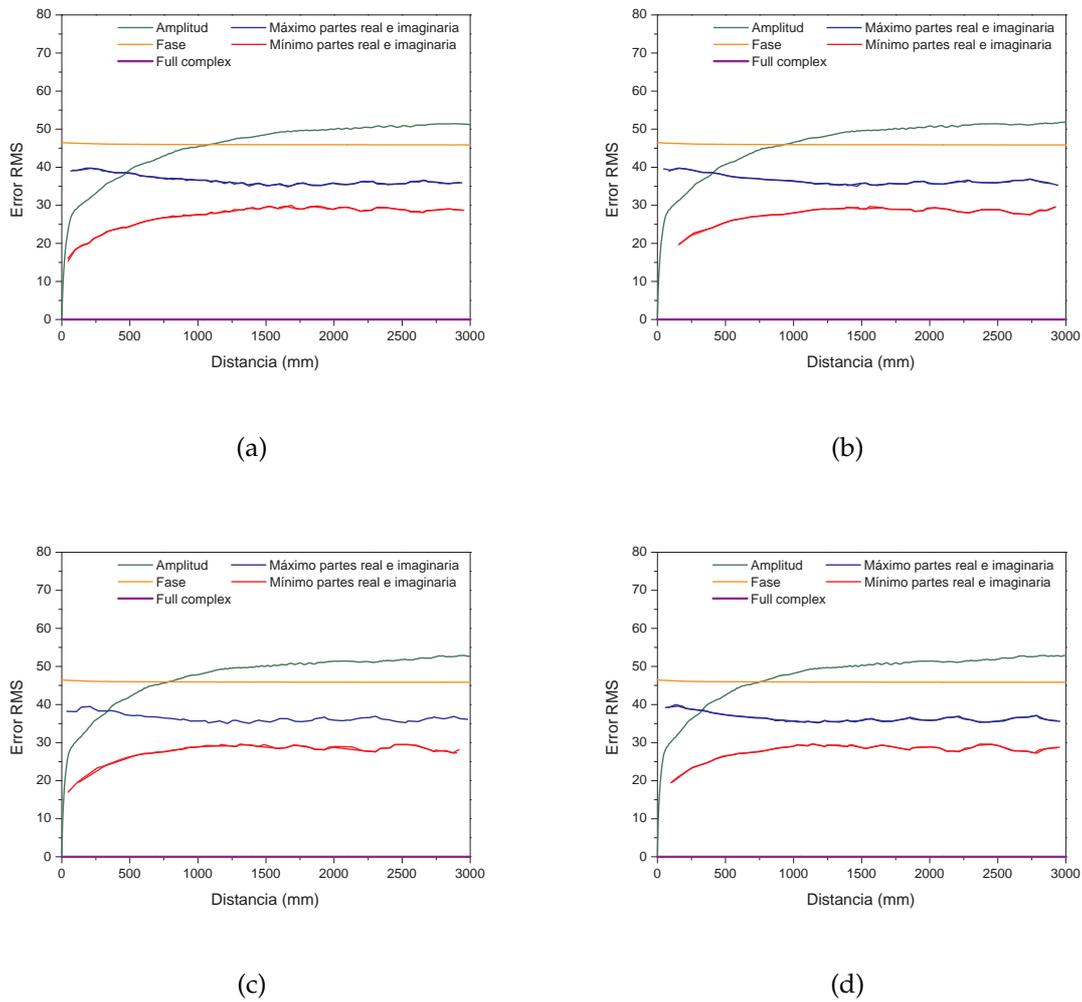
**Figura 2.6:** Imágenes de la amplitud de las reconstrucciones del pez: (b)-(f) a 516 mm y (g)-(h) a  $516+\lambda/4$  mm usando las distintas partes de la distribución compleja (con  $\lambda = 632,8$  nm y  $\Delta p = 42,33$   $\mu\text{m}$ )



**Figura 2.7:** Gráficos del error RMS para la reconstrucción del pez (figura 2.6(a)) alrededor de los 516 mm utilizando las distintas partes de la distribución compleja: (a) con  $\lambda = 457,9$  nm, (b) con  $\lambda = 532$  nm, (c) con  $\lambda = 632,8$  nm, y (d) con  $\lambda = 658$  nm

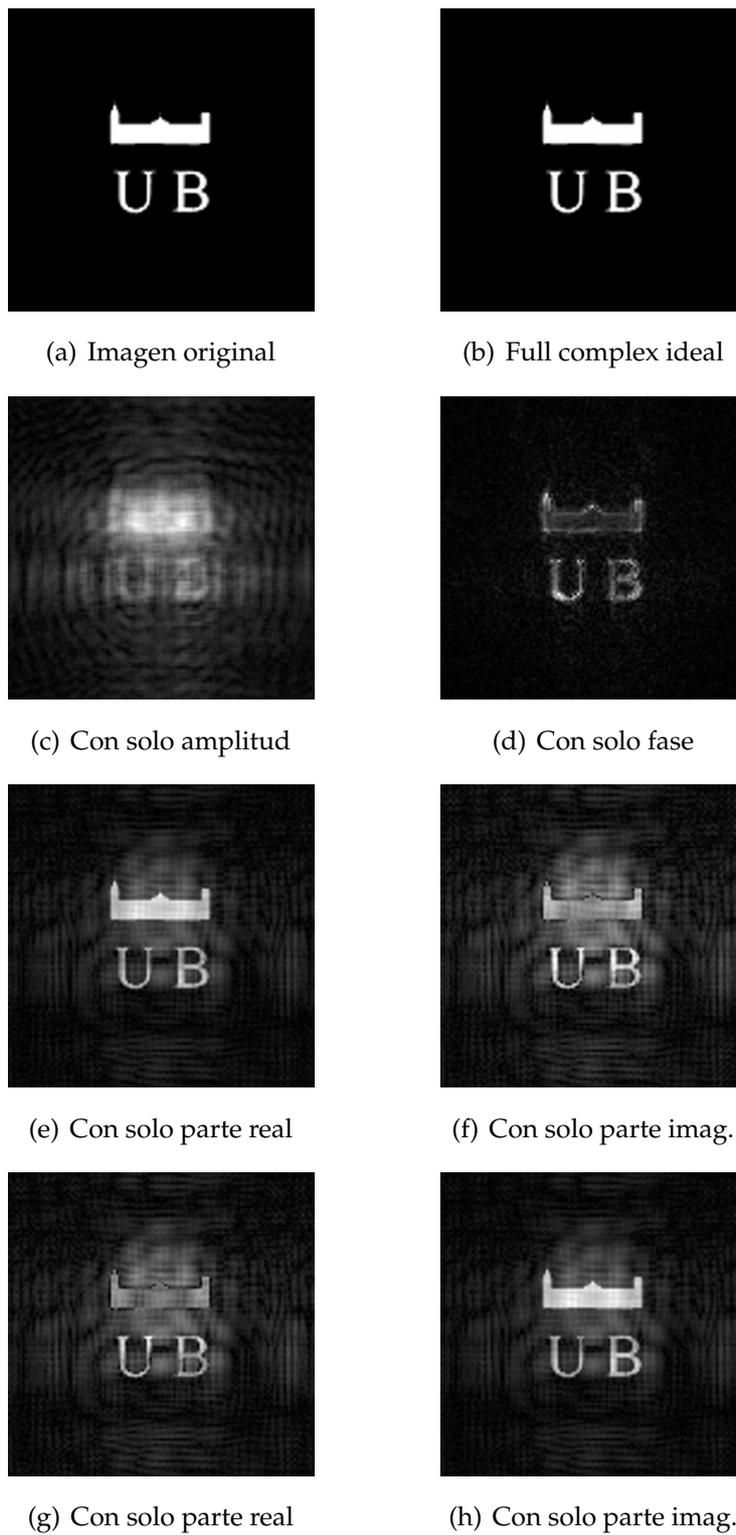
penheim y Lim [OL81] mostraron que la fase contiene mucha de la información esencial de una imagen, y bajo ciertas condiciones, para reconstruir completamente una imagen con solo la información de la fase es suficiente. Esto es cierto para muchas imágenes, excepto si estas presentan cierta relevancia en alguna de las direcciones o si tienen periodicidades. En este caso la amplitud de la transformada de Fourier presenta valores muy elevados para ciertas frecuencias y otras zonas donde los valores tienden a cero [JVCC91].

Aquí utilizamos imágenes descritas por una función de valores reales y positivos,  $U(x, y, 0) = f(x, y)$ , que tienen un contenido frecuencial ordinario, en el sentido des-

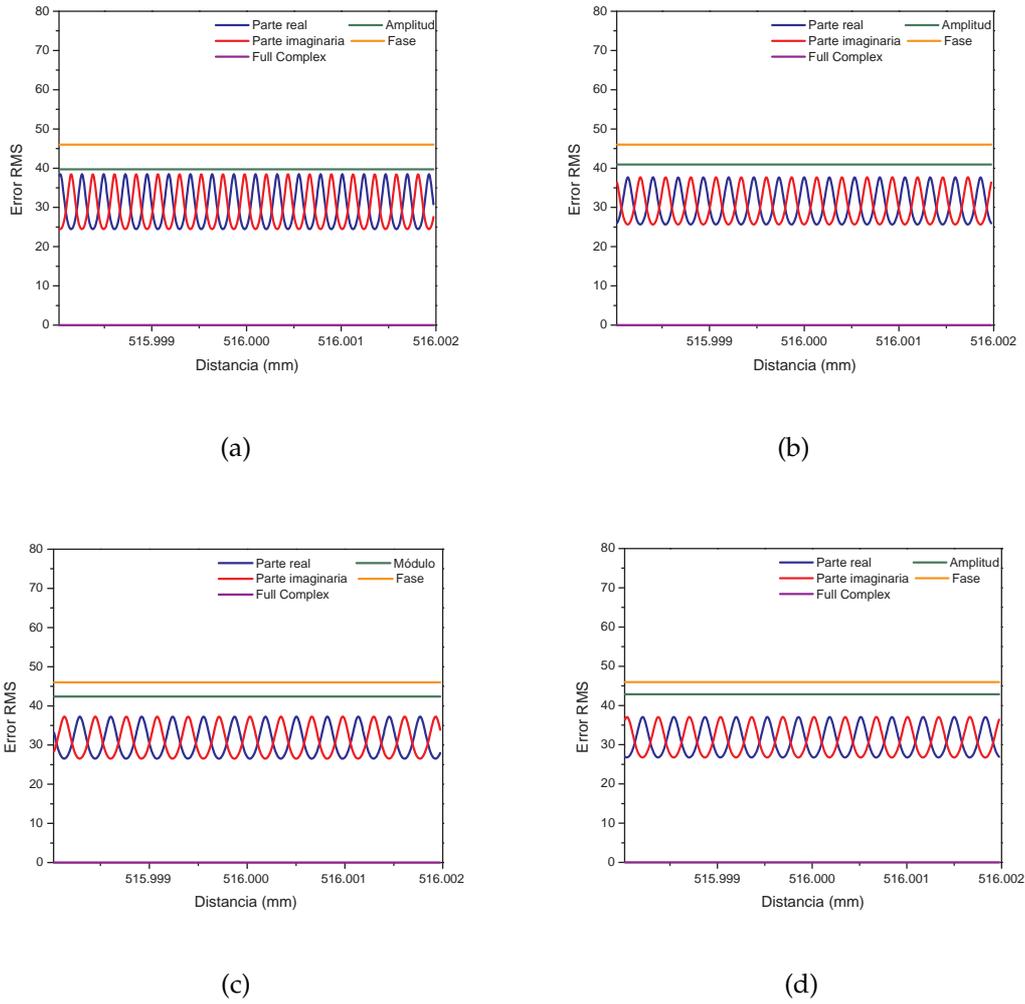


**Figura 2.8:** Gráficos del error RMS para la reconstrucción del logo (figura 2.9(a)) de 0 a 3000 mm utilizando las distintas partes de la distribución compleja: (a) con  $\lambda = 457,9$  nm, (b) con  $\lambda = 532$  nm, (c) con  $\lambda = 632,8$  nm, y (d) con  $\lambda = 658$  nm

crita en [OL81], con más peso en las bajas frecuencias que en las altas. Cuando este campo se retropropaga, pasa a ser una función compleja,  $U(x, y, -d) = |U(x, y, -d)| \exp(i\phi(x, y, -d))$ . La amplitud del campo retropropagado mantiene el dominio en las bajas frecuencias y presenta un aspecto similar al de la amplitud de la imagen original. Al propagar esta función para obtener la reconstrucción de la imagen original,  $\text{TFres}[U(x, y, -d), d]$ , se conserva la información en el espacio de Fourier, donde siguen predominando las bajas frecuencias. Esto se puede ver considerando las transformadas de Fourier de las dos distribuciones:



**Figura 2.9:** Imágenes de la amplitud de las reconstrucciones del logo: (b)-(f) a 516 mm y (g)-(h) a  $516+\lambda/4$  mm usando las distintas partes de la distribución compleja (con  $\lambda = 632,8$  nm y  $\Delta p = 42,33$   $\mu\text{m}$ )



**Figura 2.10:** Gráficos del error RMS para la reconstrucción del logo (figura 2.9(a)) alrededor de los 516 mm utilizando las distintas partes de la distribución compleja: (a) con  $\lambda = 457,9$  nm, (b) con  $\lambda = 532$  nm, (c) con  $\lambda = 632,8$  nm, y (d) con  $\lambda = 658$  nm

$$\begin{aligned} \text{TF}[| U(x, y, -d) |] &= A(u, v, -d) \exp(i\Phi(u, v, -d)) \\ \text{TF}[\text{TFres}[| U(x, y, -d) |, d]] &= A(u, v, 0) \exp(i\Phi(u, v, 0)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones 2.36 y 2.37 podemos escribir la siguiente igualdad,

$$A(u, v, 0) \exp(i\Phi(u, v, 0)) = e^{ikd} \exp(-i\pi\lambda d(u^2 + v^2)) A(u, v, -d) \exp(i\Phi(u, v, -d)) \quad (2.42)$$

de donde se puede concluir que  $A(u, v, 0) = A(u, v, -d)$ .

En cuanto a las reconstrucciones utilizando solo la fase, cabe remarcar que en las imágenes comunes la contribución de las bajas frecuencias es varios ordenes de magnitud mayor que la de las altas, en cambio en las distribuciones de solo fase (con variación suave y valores acotados), el peso de las distintas frecuencias es más uniforme lo que implica un refuerzo en los bordes y detalles.

### 2.6.2. Partes real e imaginaria

Cuando se utiliza solo la parte real o la parte imaginaria de la función para calcular la reconstrucción los errores RMS que se obtienen oscilan en función de la distancia de propagación entre un valor mínimo y otro máximo. En los gráficos de las figuras 2.5 y 2.8 están representadas las envolventes de los errores máximos y mínimos para las partes real e imaginaria. Las dos partes tienen un comportamiento complementario, es decir cuando el error de una es máximo, la de la otra parte es mínimo. En los gráficos de las figuras 2.7 y 2.10 se presenta este comportamiento en detalle, en una pequeña zona alrededor de los 516 mm para las cuatro longitudes de onda y para las dos imágenes. En estas gráficas se puede observar que el período de las oscilaciones de los errores corresponde a  $\lambda/2$ . En las imágenes 2.6(e) y 2.9(e) se presentan las reconstrucciones obtenidas con la parte real a 516 mm utilizando la longitud de onda de 632.8 nm, esta distancia corresponde a un mínimo del error al utilizar la parte real, lo que da una reconstrucción de una calidad aceptable, donde se puede reconocer el objeto y sus detalles aunque presenta cierto ruido. En cambio las reconstrucciones a la misma distancia utilizando solo la parte imaginaria (imágenes 2.6(f) y 2.9(f)) presentan una mala reconstrucción que corresponden a un máximo en el error RMS. El caso inverso sucede cuando las reconstrucciones se realizan a la distancia  $516 + \lambda/4$  mm, entonces la imagen con la reconstrucción con menor error corresponde a la de la parte imaginaria (imágenes 2.6(h) y 2.9(h)), y la que tiene mayor error es la obtenida con la parte real (imágenes 2.6(g) y 2.9(g)). Para analizar este comportamiento consideramos la parte real o imaginaria de la función  $U(x, y, 0)$ , la parte real de  $U(x, y, -d)$  se puede expresar como la suma de  $U(x, y, -d)$  y su conjugada  $U^*(x, y, -d)$ :

$$\text{Re}[U(x, y, -d)] = \frac{1}{2}(U(x, y, -d) + U^*(x, y, -d)) = \frac{1}{2}(U(x, y, -d) + U(x, y, d)) \quad (2.43)$$

Al propagar  $\text{Re}[U(x, y, -d)]$  una distancia  $d$ , hasta  $z = 0$  donde se reconstruye el objeto tenemos que los dos campos se superponen,

$$\begin{aligned} \text{TFres}[\text{Re}[(U(x, y, -d)], d] &= \frac{1}{2}(\text{TFres}[U(x, y, -d), d] + \text{TFres}[U(x, y, d), d]) = \\ &= \frac{1}{2}(U(x, y, 0) + U(x, y, 2d)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

De forma similar, para la parte imaginaria tenemos,

$$\text{Im}[U(x, y, -d)] = \frac{1}{2i}(U(x, y, -d) - U^*(x, y, -d)) = \frac{1}{2i}(U(x, y, -d) - U(x, y, d)) \quad (2.45)$$

y al propagarlo hasta  $z = 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{TFres}[\text{Im}[(U(x, y, -d)], d] &= \frac{1}{2i}(\text{TFres}[U(x, y, -d), d] - \text{TFres}[U(x, y, d), d]) = \\ &= \frac{1}{2i}(U(x, y, 0) - U(x, y, 2d)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Así cuando la reconstrucción se realiza a los 516 mm, no se pierde mucha información al reconstruir la imagen usando solo la parte real, ya que  $U(x, y, 2d)$  está sobrepuesto a  $U(x, y, 0)$ , de todas formas este término contribuye en la aparición del ruido de fondo. Cuando se utiliza la parte imaginaria la imagen es muy ruidosa, ya que en este caso la reconstrucción presenta la diferencia entre  $U(x, y, 0)$  y  $U(x, y, 2d)$ , actuando de forma similar a un proceso de extracción de bordes.

Como se ha visto es posible encontrar otras distancias donde la mejor reconstrucción se obtenga con la parte imaginaria. Estas oscilaciones en los errores RMS de las reconstrucciones se explican teniendo en cuenta la fórmula de la difracción de Fresnel (ver ecuación 2.31) para una distancia  $z = 2d$ , el término de fase  $\exp(ik2d)$  tiene valor 1 para distancias que verifican  $d = m\lambda/2$  y valor -1 para  $d = (2m + 1)\lambda/4$ , donde  $m$  es un número natural. Por lo tanto  $U(x, y, 0)$  y  $U(x, y, 2d)$  interfieren constructivamente o destructivamente dependiendo de la distancia, como se muestra en la tabla 2.1.

En resumen, las reconstrucciones utilizando solo parte de la información compleja dependen de la distancia de reconstrucción y de la parte seleccionada. En los casos de la parte real e imaginaria se pueden obtener reconstrucciones aceptables a ciertas distancias, aunque presentan un comportamiento oscilatorio que depende de la longitud de onda utilizada, que hace que las reconstrucciones para otras distancias tengan un error mayor. En el caso de utilizar solo la fase este error es estable para todas las distancias y longitudes de onda, pero la reconstrucción que se obtiene esta

Parte propagada	distancia propagación: $d = m\lambda/2$	$d = (2m + 1)\lambda/4$
$\text{Re}[U(x, y, -d)]$	Interferencia constructiva, error RMS mínimo	Interferencia destructiva, error RMS máximo
$\text{Im}[U(x, y, -d)]$	Interferencia destructiva, error RMS máximo	Interferencia constructiva, error RMS mínimo

**Tabla 2.1:** Distancias de interferencias constructivas o destructivas para las reconstrucciones utilizando la parte real o imaginaria

muy deteriorada, y solo presenta información de altas frecuencias. Utilizando solo la amplitud el error aumenta con la distancia, y las reconstrucciones presentan solo la información de bajas frecuencias del objeto. Los resultados idóneos en las reconstrucciones se obtienen cuando se utiliza toda la información compleja. En próximos capítulos veremos como se puede utilizar el máximo de la información utilizando pantallas de cristal líquido, que presentan limitaciones a la hora de presentar valores complejos.