Universitat de Barcelona
Departament de Física Fonamental
Facultat de Física

CUANTIZACIÓN DE ONDAS GRAVITATORIAS PLANAS

Manuel Montejo Estevez

Septiembre 1999

Programa de doctorado: *Mètodes Estadístics en la Física*

Bienio: 1995-97

Memoria presentada por

Manuel Montejo Estevez

para optar al título de

Doctor en Ciencias Físicas.

Certifico que la presente tesis doctoral ha sido realizada bajo mi dirección. Barcelona, Septiembre de 1999.

Enric Verdaguer Oms
Catedrático de Física Teórica
Departament de Física Fonamental
Universitat de Barcelona

Agradecimientos

Después de cuatro años dedicados a esta tesis, este trabajo no habría llegado a buen fin sin toda la gente que me ha apoyado.

En primer lugar quiero agradecer a Enric Verdaguer la gran oportunidad que me ofreció al aceptar dirigirme la tesis y la ayuda que me ha prestado en todo momento.

También quiero agradecer especialmente a Guillermo Mena la colaboración que hemos mantenido durante estos años cuyo fruto es este trabajo. Gracias por enseñarme tantas cosas y por los empujones que me has dado cuando estaba atascado, y muchas gracias por la hospitalidad recibida en mis visitas a Madrid. También debo agradecer a Pedro Gonzalez y Luis Garay que mi estacia fuera tan agradable.

Me gustaría mencionar a un profesor de Física del Instituto, "Karla", del que me quedan unos vagos recuerdos, pero que, en definitiva, es el culpable de que yo haya llegado a escribir esta tesis. Después de terminar la carrera en Bilbao aterricé (más me hubiera valido coger un avión, porque aquel viaje en tren fué una pesadilla) en Barcelona gracias al consejo de Alex Feinstein, quién me presentó a Enric. Por delante tenía cuatro años para terminar algo llamado "tesis" y todo eran cosas nuevas, *fins i tot el català, que com veieu he pogut aprendre en aquest temps.* De la ciudad no me puedo quejar, me ha gustado tanto que me quedaré a vivir aquí, con este sol y el *pa amb tomàquet* (esto si que es un buen invento).

He tenido la suerte de tener muy buenos compañeros durante este tiempo y a todos les estoy agradecido. A Oscar, Chema, Jordi, Montse, Amilcar, Victor, Alvaro, Bart, Ferran, Albert, Marta, y a Roberto por todos los buenos ratos que hemos pasado juntos. Y a los de planta 6, a Jose Mari, Assun, Francesc y a Paula. A todos los *freres fonamentaux*, por lo bien que lo he pasado, aunque casi siempre me adjudicaran el papel de negro. También quiero agradecer a Mangel los ratos que pasamos subiendo montañas. A Dani, Deivid, Andreu, Rafa, y al Che por todas las farras que nos hemos pegado. A los *companys* del departamento, a Carlos, Raul, Miquel, Tomás, el Marian, la Marian, Marc, Sergio, Iván, Napo, Albert, Josep Maria, David, Xavi ... Igualmente le agradezco a Charo, compañera de despacho, toda la ayuda que me ha prestado y a Charis, con el que siempre discutía pero me ayudó igualmente. Del mismo modo quiero dar las gracias a Carme y Olga, que siempre me han facilitado las cosas.

Quiero mencionar aquí a Victor, Xec y Jordi, con los que he convivido estos años, y de los que guardo un buen recuerdo, ha sido muy divertido. Y también a mi novia, Ainara, ha sido quién me ha apoyado siempre, animándome a terminar este trabajo. Incluso ha tenido que aguantarme estos últimos meses.

Por último, hago constar la financiación del Gobierno Vasco de este proyecto, que ha sido el que me ha dado de comer durante estos años.

A mis padres

Indice

Capítulo 1

Introducción

En este último siglo el panorama de la física ha sufrido un profundo cambio, debido fundamentalmente a dos teorías innovadoras, la Relatividad Especial (RE) y la Mecánica Cuántica (MC). Ambas teorías presentan una visión de la realidad diferente a lo establecido hasta entonces y en cada caso se plantean retos intelectuales muy atractivos. Por lo tanto, no es de extrañar que estas teorías hayan acaparado la atención de los físicos durante gran parte de este siglo.

Por un lado la MC gobierna los fenómenos que ocurren a escala atómica. Se ha trabajado mucho en este campo y está respaldada por grandes éxitos experimentales. En el otro extremo tenemos la Relatividad General (RG), que gobierna los fenómenos a escalas macroscópicas y superiores, es una teoría relativista de la interacción gravitatoria. Desde un punto de vista práctico en la mayoría de los casos podemos seguir utilizando la mecánica Newtoniana, las correciones relativistas sólo son necesarias en algunos cálculos que requieren mucha precisión. Sin embargo, la RG también es una teoría del espacio-tiempo y en este último aspecto difiere radicalmente de la teoría Newtoniana de la gravitación. Al contrario que la MC la RG está avalada experimentalmente tan sólo por unas pocas pruebas.

La RG nos muestra la geometría del mundo en el que vivimos como una propiedad física, íntimamente ligada a la materia. Siempre hemos trabajado con una geometría continua, y quizás ahora haya llegado el momento de cuestionar la validez de este postulado. Es posible que al mirar en una escala suficientemente pequeña descubramos que los objetos geométricos son discretos y que la visión continua de la geometría tan solo es una aproximación. En este caso encontraríamos que cantidades geométricas como áreas, volúmenes, longitudes, etc. tendrían un espectro discreto, es decir, la geometría estaría cuantizada. Esta visión puede no ser más sorprendente que lo que ocurre en una átomo de hidrógeno, donde las cantidades físicas como la energía, el momento angular, etc. también están cuantizadas.

Si tomamos las constantes fundamentales de ambas teorías podemos obtener una constante de longitud, la longitud de Planck

$$l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \times 10^{-33}\ cm.$$

donde $\hbar = 1.1$ x $10^{-34} Js$ es la constante reducida de Planck, $G = 6.7$ x $10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-1}$ es la constante de Newton y $c = 3.00$ x $10^{10} cms^{-1}$ es la velocidad de la luz. Como ocurre en otros casos, la presencia de una escala característica indica un comportamiento diferente en las regiones por encima y por debajo de esta escala. Entonces, para distancias del orden de la longitud de Planck o inferiores, los aspectos discretos de la geometría jugarían un papel importante y es posible que aparezcan nuevos fenómenos físicos, seguramente algunos inesperados porque por ahora no tenemos resultados experimentales en este campo. Recientemente se han propuesto algunos experimentos [3, 4] para medir efectos cuánticos gravitacionales, aunque por el momento están un par de ordenes de magnitud por debajo de lo que se puede medir ahora. En el caso de la RG clásica se habían propuesto ideas considerando sistemas análogos en materia condensada (por ejemplo [118]) o en fluidos [117, 116].

Durante muchos años se ha trabajado en la construcción de una teoría del "todo" que incluya todas las interacciones que conocemos, aunque por el momento esta teoría fundamental se resiste. Un paso más modesto hacia este objetivo es construir una teoría que proporcione una descripción cuántica de los fenomenos gravitatorios. El trabajo realizado en esta tesis pretende ser una pequeña contribución a esta meta.

Para ello seguiremos el método de cuantización canónico, es decir, partiendo de una teoría clásica en el formalismo hamiltoniano tratamos de obtener su correspondiente teoría cuántica. En el caso de la RG este método de cuantización se estancó al llegar a la ecuación de Wheeler-DeWitt [121, 71], en ese punto las dificultades para completar la cuantización parecían insalvables. Sin embargo, gracias al programa de Ashtekar [9], la cuantización canónica de la gravedad ha recibido un impulso muy importante y se han hecho progresos significativos en este campo.

Este enfoque particular cuenta con la ventaja de que se trata de un método no perturbativo y esto es importante en el caso de la cuantización de la gravedad porque esta teoría presenta problemas insalvables en un análisis perturbativo [54, 2].

La tarea de obtener una teoría general que englobe ambas teorías (RG y MC) es muy compleja. Sin embargo, en lugar de atacar el problema en general se pueden introducir algunas simplificaciones para obtener un problema manejable. Si somos capaces de resolver este problema simplificado obtendremos una teoría que describa efectos cuánticos gravitacionales. En este caso, los resultados que obtenemos pueden no ser válidos para la teoría completa, y entonces uno se pregunta si ha servido de algo este proceso. La respuesta es afirmativa porque en el modelo simplificado tenemos problemas similares a los de la teoría completa y al solucionar estas dificultades desarrollaremos una cierta *intuición* para tratar de atacar la teoría general, tanto para resolver las dicultades matemáticas como las conceptuales.

Nosotros seguiremos esta filosofía, vamos a construir un modelo sencillo, exigiendo ciertas simetrías, lo que implica congelar algunos grados de libertad del modelo. No obstante, a pesar de la simplificación veremos que al final se pueden extraer conclusiones importantes.

A la hora de simplificar la teoría general debemos tener cuidado para no eliminar demasiadas cosas. La idea es añadir simetría pero conservando parte de la complejidad de la teoría, es decir, no eliminaremos completamente la invariancia bajo difeomorfismos para tener ligaduras en el modelo, también queremos tener infinitos grados de libertad para tener una teoría cuántica de campos. Esta clase de modelos son llamados modelos de midisuperespacio.

Nuestro objetivo es construir un modelo cuántico para ciertos sistemas gravitatorios, en este caso serán las ondas gravitatorias planas [27], unas soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que presentan simetrías análogas a las ondas electromagnéticas en un espacio-tiempo plano. Vamos a cuantizar un modelo de midisuperespacio para las ondas gravitatorias planas puras.

Desde un punto de vista físico este tipo de soluciones son interesantes porque describen radiación gravitatoria a nivel no perturbativo, son soluciones exactas que representan campos gravitatorios intensos. Se cree [27] que proporcionan una buena descripción del espacio-tiempo para regiones suficientemente alejadas de una fuente de radiación finita. Además tienen otras propiedades geométricas interesantes, por ejemplo la focalización de las geodésicas, en particular de los conos de luz [98]. En el caso de estudiar colisiones de ondas estos fenómenos de focalización pueden dar lugar a que se formen singularidades de curvatura [52]. Estas propiedades reflejan la naturaleza no lineal de la interacción gravitatoria.

Aparte del interés físico estas soluciones también son atractivas desde un punto de vista matemático. Las ondas gravitatorias planas están dentro de los espacio-tiempos que tienen dos vectores de Killing espaciales [115]. En esencia, esta simetría hace que todos los campos dependan solamente de dos coordenadas, y permite establecer una analogía con los modelos σ en dos dimensiones y los sistemas integrables [37, 45]. Dado que se ha trabajado mucho en este campo se pueden aplicar técnicas de estos modelos para resolver el nuestro y viceversa.

A continuación vamos a explicar como está organizado el material de esta tesis.

En el capítulo 2 se explica que son los modelos de midisuperespacio y sus propiedades. También se resume brevemente el método de cuantización canónico revisando los puntos más importantes cuando se aplica al caso particular de la RG. Después analizaremos como se aplica este método en los modelos de midisuperespacio y también daremos un breve repaso a los trabajos realizados en modelos de midisuperespacio.

En el capítulo 3 centraremos nuestro interés en los espacio-tiempos con dos vectores de Killing. Veremos que este tipo de soluciones son interesantes, tanto desde un punto de vista físico (muchas de estas soluciones describen situciones que podemos encontrar en el Universo), como desde un punto de vista matemático (tenemos una relación directa entre estas soluciones, los modelos σ no lineales y los sistemas integrables). Además la mayoría de los sistemas gravitatorios que se han cuantizado pertenecen a estas soluciones.

En el caso de que los vectores de Killing admitan superficies ortogonales existe un criterio invariante [43] que permite clasificar las soluciones en tres clases (llamemoslas espacial, temporal y nula). Entre los modelos de midisuperespacio cuantizados en la literatura sólo encontramos soluciones de tipo espacial o temporal (por ejemplo, como representantes de cada una tenemos las ondas cilíndricas [11] en el caso espacial y el modelo de Godwy [77] en el caso temporal). Con nuestro trabajo nos proponemos completar el análisis de estas clases cuantizando un modelo de midisuperespacio de una solución de la clase que falta, las ondas planas [27].

En el capítulo 4 se repasan las propiedades geométricas de las ondas gravitatorias planas puras. Mencionaremos los diferentes tipos de coordenadas que se pueden utilizar para describir estos espacio-tiempos, y explicaremos el fenómeno de focalización. En este capítulo también se especifican las soluciones que vamos a cuantizar y qué tipo de coordenadas utilizaremos.

Después de estos capítulos introductorios y de repaso, útiles para situarnos en materia, comenzaremos la discusión de nuestro modelo. En el capítulo 5 presentamos una fijación parcial del gauge válida para todos los espacio-tiempos con dos vectores de Killing que elimine los difeomorfismos relacionados con las coordenadas asociadas a los Killing. Este caso nos sirve como ejemplo para aprender como se debe hacer correctamente una fijación del gauge.

En el capítulo 6 se presentará un modelo de midisuperespacio para las ondas gravitatorias planas. Nos proponemos fijar el gauge y añadir la simetría necesaria para obtener un modelo reducido libre de ligaduras cuyas soluciones sean precisamente las ondas gravitatorias planas. Utilizaremos los resultados para la fijación del gauge del capítulo anterior y realizaremos el proceso de reducción en dos etapas, eliminando la libertad gauge remanente. Obtendremos el espacio de fases reducido de nuestro modelo y también la forma simpléctica y el hamiltoniano reducidos.

Además del modelo para las ondas planas generales obtendremos un modelo para el caso particular de ondas con polarización lineal. En este caso también se obtiene un modelo reducido libre de ligaduras cuya estructura simpléctica y hamiltoniano son muy simples.

A continuación, después de haber completado el análisis clásico del modelo nuestro objetivo es obtener una teoría cuántica consistente para él. En el capítulo 7 se desarrolla esta tarea. Estudiamos la cuantización para el caso de las ondas linealmente polarizadas, en primer lugar consideramos un caso sencillo, las soluciones de tipo onda *sandwich*, y después tratando el caso general. Definiremos unos operadores regularizados para la métrica y obtendremos el espacio de Hilbert de estados. En definitiva, contruiremos una teoría cuántica consistente para el modelo de midisuperespacio considerado.

En el capítulo 8 extraeremos las conclusiones físicas que se derivan del modelo cuántico que hemos construido. Estudiremos las fluctuaciones de la métrica, la existencia de estados clásicos y la validez de la aproximación semiclásica. Fundamentalmente realizaremos este análisis sobre estados coherentes.

Finalmente, en el capítulo 9 se cierra este trabajo con un repaso de los objetivos que se han conseguido e indicando futuras líneas de investigación . También incluimos varios apéndices A,B,C que tratan los sistemas con ligaduras, el formalismo hamiltoniano para la RG, y la geometría simpléctica respectivamente. El objetivo es hacer un breve recordatorio a la vez que esto sirve para fijar la notación que usamos en la tesis. En el último apéndice se detallan los cálculos de las contribuciones de los términos de superficie a la acción.

Capítulo 2

Modelos de midisuperespacio

Debido a la complejidad de las ligaduras el análisis canónico de la Relatividad General es dificil de abordar, sin embargo, podemos considerar modelos más sencillos y tratar de cuantizarlos. De esta forma, simplificaremos el caso general para obtener una modelo que podamos resolver. La idea de este enfoque es que resolviendo estos casos más sencillos podemos extraer conclusiones que nos guiarán en la construcción de una teoría cuántica de la gravedad. Esto es en esencia un modelo de midisuperespacio: una teoría de campos que se obtiene por una reducción de simetría de la Relatividad General.

DeWitt [39] explotó esta idea en la cuantización de espacio-tiempos homogéneos e isotrópicos rellenos con materia y poco después Misner [84] estudió estos modelos sin el requerimiento de isotropía. Con estos primeros trabajos se abría camino el estudio de la Cosmología Cuántica.

El siguiente modelo [70] estudiado correspondió a las ondas de Einstein-Rosen [44], soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que describen ondas con simetría cilíndrica y una única polarización. Este modelo representa un salto cualitativo respecto a los anteriores, que el número de grados de libertad es infinito y tenemos por lo tanto una teoría de campos.

Más adelante se han estudiado diferentes modelos, que repasaremos brevemente al final del presente capítulo.

Todos estos modelos se pueden separar en dos tipos: modelos de minisuperespacio y midisuperespacio. Tendremos un modelo de minisuperespacio cuando imponemos tanta simetría que eliminamos todos los grados de libertad locales, y por lo tanto al cuantizar la teoría obtenemos una teoría mecanico-cuántica. Sin embargo, si al simplificar la teoría añadiendo simetría todavía tenemos grados de libertad locales, al cuantizar obtenemos una teoría cuántica de campos, en este caso se trata de un modelo de midisuperespacio. El número de grados de libertad marca la diferencia entre ambos casos. En los modelos de midisuperespacio encontraremos los problemas usuales de las teorías cuánticas de campos (regularización,...).

Ahora veremos porque se han utilizados términos tan contradictorios "mini-superespacio", "midi-superespacio" para llamar a estos modelos. En primer lugar necesitamos entender a que se llama superespacio, término que fue acuñado por Wheeler [122]. En el formalismo canónico se estudia como evoluciona una hipersuperficie de Cauchy Σ, entonces el conjunto de todas las posibles 3-métricas para Σ es el superespacio. Las soluciones de las ecuaciones de Einstein están incluidas en este conjunto. Si se considera un modelo con cierta simetría se restringen las soluciones a una parte de este superespacio. Por este motivo estos modelos adoptaron el nombre de modelos de minisuperespacio o midisuperespacio, dependiendo de cuanto se reducía el superespacio al imponer la simetría. El término minisuperespacio fue introducido por Misner [83]. Posteriormente, el primer modelo de midisuperespacio fue estudiado por Kuchar [70]. En este trabajo, dándose cuenta de la necesidad de incorporar más complejidad en los modelos de minisuperespacio, Kuchar estudia las ondas de Einstein-Rosen e introduce el término midisuperespacio para marcar la diferencia entre este modelo y los que se habían estudiado hasta la fecha.

Esta clase de modelos, en particular, los modelos de midisuperespacio son a veces una aproximación razonable de la teoría completa. En el caso de un modelo de minisuperespacio hemos simplificado demasiado la teoría. En cambio, un modelo de midisuperespacio se parece mucho al caso general: tenemos una teoría cuántica de campos, tiene ligaduras debido a la libertad gauge, en definitiva, al tratar de cuantizar un modelo de este tipo aparecen muchos de los problemas de la teoría completa.

La estrategia de considerar un modelo simplificado para que se pueda resolver muchas veces ha dado buenos resultados. Por ejemplo, antes de obtener la Mecánica Cuántica se estudio la cuantización de un átomo de hidrógeno. Casi siempre es más fácil comenzar por un modelo sencillo.

Desde un punto de vista práctico la filosofía a seguir consiste en tratar de resolver los problemas en estos modelos sencillos para desarrollar ideas que más adelante servirán para atacar las dificultades de la teoría completa. En el caso de la cuantización de la gravedad no solamente se trata de resolver las dificultades matemáticas sino que nos enfrentamos a dificultades conceptuales mucho más importantes y también mucho más interesantes.

La validez de la aproximación de modelos de midisuperespacio y minisuperespacio sólo ha sido considerada recientemente en algunos casos muy concretos [113, 109]. En estos trabajos se hace un desarrollo en torno a los modos de minisuperespacio y se estudia el efecto que tienen el resto de modos agrupados en un término de *backreaction* sobre los modos de minisuperespacio.

Un punto muy importante en la cuantización de estos modelos es que se trata de un método no perturbativo. Dado el éxito obtenido con métodos perturbativos en el campo de la física de partículas, la aplicación de estos métodos a la cuantización de la RG fue inmediata. Sin embargo, la teoría que se obtiene no es renormalizable [54, 2]. Esto parece indicar que debemos seguir otras estrategias porque puede ocurrir que los fenómenos a pequeña escala sean realmente importantes y se escapen a un análisis perturbativo, como ocurre en fenómenos críticos.

A continuación revisaremos los puntos más importantes, especialmente en el caso de la RG, del proceso de cuantización canónico.

2.1 Cuantización canónica

El método canónico de cuantización se basa en la cuantización de un sistema hamiltoniano clásico. Se empieza con un sistema descrito por un lagrangiano a partir del cuál se obtienen las ecuaciones de movimiento. El siguiente paso consiste en hacer una transformación de Legendre para obtener una descripción hamiltoniana del sistema.

Una vez que el sistema está descrito por el formalismo hamiltoniano se puede pasar a su cuantización. Tenemos un conjunto de variables canónicas y un álgebra obtenida con el corchete de Poisson entre estas variables. La idea básica de la cuantización canónica consiste en trasladar este álgebra clásico a un álgebra cuántico, donde los corchetes serán substituidos por conmutadores y los observables clásicos pasarán a ser operadores cuánticos, es decir,

$$\begin{array}{lcl} \text{Teoría clásica} & \Rightarrow & \text{Teoría cuántica} \\[2ex] A, B, C \text{ observables} & \Rightarrow & \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \text{ operadores hermíticos} \\[2ex] \{A, B\} = C & \Rightarrow & [\ \hat{A}, \hat{B}\ ] = -i\hbar\hat{C} \end{array}$$

Los $\{\ ,\ \}$ denotan los corchetes de Poisson definidos para las funciones del espacio de fases clásico y los $[\ ,\ ]$ denotan los conmutadores entre operadores cuánticos.

Ahora nos falta tener un espacio de Hilbert de estados sobre el que actúen los operadores cuánticos y nos encontraremos con el problema de la elección del producto interno que determine este espacio de Hilbert. También podemos tener problemas de ordenación al pasar de una expresión clásica a su correspondiente operador cuántico porque las variables clásicas conmutan siempre pero no ocurre lo mismo con los operadores cuánticos. Otros problemas serán la regularización de los operadores, anomalías, etc.

2.1.1 Cuantización canónica de la RG

Vayamos ahora la caso de la RG, consideramos una variedad $\mathcal{M}$ de cuatro dimensiones pero con la siguiente limitación: vamos a considerar sólo espacio-tiempos con una topología ${}^3\Sigma \times I\!R$, siendo ${}^3\Sigma$ una hipersuperficie espacial que además es una hipersuperficie de Cauchy, es decir, cualquier curva temporal que pasa por un punto cualquiera de $\mathcal{M}$ intersecta ${}^3\Sigma$, bien en el futuro o bien en el pasado. Esta limitación es necesaria para poder obtener una descripción hamiltoniana de la teoría. La RG está descrita por la acción de Hilbert-Einstein

$$S = \int_{\mathcal{M}} dx^4 \sqrt{-g}\, R(g_{\mu\nu}), \qquad \mu, \nu = 0..4. \tag{2.1}$$

donde las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son las variables de la teoría, g es el determinante de la métrica y R es el escalar de Ricci. La formulación hamiltoniana standard para la RG fue desarrollada por Arnowitt, Deser y Misner [5] a principios de los años 60, por este motivo esta formulación también es conocida como formalismo ADM. El apéndice B contiene una descripción más detallada.

La descripción hamiltoniana necesita de un parámetro (el tiempo) respecto al cuál evoluciona el sistema. En el caso de la RG se introduce este parámetro haciendo una foliación del espacio-tiempo, la coordenada temporal es el parámetro que etiqueta cada hoja. Con esta foliación parece que se rompe explícitamente la invariancia relativista de la teoría al adjudicar un papel privilegiado esta coordenada temporal, diferenciándola así de las demás coordenadas. Sin embargo, no está tan claro que realmente se pierda la covariancia de la teoría porque si se recurre al espacio de fases covariante (véase el apéndice D) se puede reformular la teoría de forma que se respete la covariancia de la RG. En esta formulación se introducen los objetos necesarios para el formalismo canónico (el espacio de fases, la forma simpléctica, ...) de forma covariante por lo que el formalismo es independiente de la elección de coordenadas. Por lo tanto la elección de una coordenada particular como el tiempo es sólo un instrumento necesario para calcular los resultados, respetando implícitamente la covariancia de la teoría.

Una vez obtenida la versión hamiltoniana de la RG nos encontramos con el siguiente problema: la teoría tiene ligaduras. Este es el obstáculo más importante de cara a la cuantización. Toda la complejidad de la teoría está codificada en las ligaduras. El formalismo hamiltoniano para sistema con ligaduras fue desarrollado por Dirac [40] y tenemos un resumen en el apéndice A. La presencia de las ligaduras está ligada a la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría. Es más, el hamiltoniano del sistema es una combinación de ligaduras por lo que estas no sólo imponen unas restricciones en el espacio de fases sino que además gobiernan la dinámica del sistema. Las variables canónicas del espacio de fases son h_{ij} (B.3) y los momentos Π^{ik} (B.11) donde $i, k = 1..3$. Las ligaduras reducirán los grados de libertad: tenemos 12 variables en el espacio de fases, (g_{ik}, Π^{ik}), y 4 ligaduras (B.14, B.15) de primera[1] clase, como ya hemos dicho están relacionadas con la libertad gauge de la teoría, por lo tanto, nos quedan $12 - 4 \times 2 = 4$ grados de libertad en el espacio de fases, que son los grados de libertad físicos de la teoría.

Un paso adelante en la simplificación de este problema fue desarrollado por Abhay Ashtekar. En 1986 presentó una reformulación de la RG usando otras variables canónicas [6, 7]. En este formalismo las conexiones son las variables básicas de la teoría, juegan el papel que antes tenían las componentes de la métrica g_{ik}. Desde este punto de vista se puede expresar la RG como una teoría de Yang-Mills con ligaduras adicionales. Las expresiones de las ligaduras se simplifican drásticamente pasando a ser polinomios (a lo sumo cuadráticos) en las variables canónicas (recordemos que en el caso anterior, en las ligaduras aparecía el escalar de curvatura). Otra ventaja adicional es que se puede trabajar con métricas degeneradas, con lo que esta teoría es más general.

Con todo esto se abrió un camino muy prometedor para llegar a la gravedad cuántica porque se podían utilizar algunas técnicas de cuantización que tanto éxito habían tenido en las teorías de Yang-Mills. Se han hecho notables avances en este campo(la cuantización algebraica [9], la representación de *loops* [105, 106], los *spin networks* [107], ...).

Llegados a este punto tenemos un sistema clásico con ligaduras y queremos abordar su cuantización. Fundamentalmente tenemos dos alternativas:

- **Cuantización en el espacio de fases reducido**. Las ligaduras son eliminadas clásicamente mediante una fijación del gauge. Así se obtiene un espacio de fases reducido donde sólo están los verdaderos grados de libertad del sistema. Entonces se pasa a cuantizar el sistema.

- **Cuantización “a la Dirac”**. La otra posibilidad consiste en incorporar las ligaduras a nivel cuántico. Se imponen como operadores que aniquilarán los estados físicos.

A continuación vamos a ver con más detalle en que consiste cada método y que dificultades o problemas tienen.

- En la cuantización en el **espacio de fases reducido** debemos eliminar las ligaduras clásicamente. Recordemos que la RG tiene cuatro ligaduras de primera clase ligadas a la invariancia bajo difeomorfismos

[1] Véase la definición en el apéndice A

de la teoría. Para eliminarlas debemos añadir cuatro condiciones que fijen el gauge "adecuadamente", es decir, las condiciones gauge han de ser conservadas por la evolución dinámica del sistema y también se tiene que verificar que la superficie de fijación de gauge (generada por las condiciones gauge) intersecta transversalmente a las órbitas gauge (generadas por las ligaduras) de forma que se extrae un único punto de la órbita gauge. Una vez fijado el gauge no falta más que reducir el sistema y eliminar las ligaduras para quedarnos con los verdaderos grados de libertad dinámicos de la teoría, que serán dos variables y sus respectivos momentos conjugados.

Con este proceso hemos eliminado las ligaduras y obtenemos el espacio de fases reducido. Ya se puede pasar a la cuantización, que como hemos visto se trata de pasar el álgebra clásico entre las variables reducidas a un álgebra cuántico entre operadores.

Sin embargo, en la teoría general no se ha encontrado una fijación gauge que permita la cuantización. Incluso en casos más sencillos este esquema de cuantización puede presentar dificultades, en primer lugar, tenemos que asegurarnos de que al reducir el espacio de fases se obtiene una variedad simpléctica, y entonces puede ocurrir que el álgebra de Poisson de las variables reducidas sea muy complicado, o que lo sea el hamiltoniano. En definitiva, el haber conseguido eliminar las ligaduras no nos garantiza conseguir cuantizar el sistema reducido.

- Analizemos ahora el esquema de cuantización **"a la Dirac"**. Las ligaduras serán impuestas a nivel cuántico, de momento nos olvidamos de ellas y cuantizamos el sistema de la manera habitual. Las variables canónicas (h_{ik}, Π^{ik}) pasarán a ser operadores cuánticos que actúan sobre funcionales de onda $\Psi[h_{ik}]$ que representan los estados. El álgebra de Poisson se traslada a una álgebra entre los operadores cuánticos y tendremos la representación usual

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ik}\Psi\left[h_{ik}\right] &= h_{ik}\Psi\left[h_{ik}\right] \\ \hat{\Pi}^{ik}\Psi\left[h_{ik}\right] &= -i\frac{\delta}{\delta h_{ik}}\Psi\left[h_{ik}\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

A continuación, dado que las soluciones tienen que ser invariantes bajo difeomorfismos y como precisamente las ligaduras son los generadores de estos difeomorfismos, implementaremos las ligaduras como operadores cuánticos $\hat{C}$. Los estados Ψ que sean aniquilados por estos operadores serán invariantes bajo difeomorfismos y por lo tanto serán estados físicos.

$$\hat{C}\left[\hat{h}_{ik}, \hat{\Pi}^{ik}\right]\Psi_f = 0 \tag{2.3}$$

Para que el espacio físico Ψ_f sea un espacio de Hilbert necesitamos introducir un producto interno. Aquí tenemos un problema difícil porque el método canónico no nos dice como obtener este producto interno. Además no tenemos una simetría que nos ayude a seleccionarlo, como ocurre por ejemplo en electromagnetismo (en este caso la simetría que tenemos es el grupo de Poincare, y se pide que esta simetría sea implementada en la teoría cuántica por una transformación unitaria; con este requerimiento se tiene la prescripción para seleccionar el producto interno). Los estados Ψ deben ser normalizables y los observables serán operadores autoadjuntos, ambas cosas respecto al producto interno elegido.

Al pasar las ligaduras a operadores cuánticas tendremos los problemas usuales de ambigüedad en la ordenación y la regularización comunes a las teorías cuánticas de campos. Sin embargo, podemos encontrar soluciones formales al requerimiento de que los estados sean aniquilados por las ligaduras. Estas ecuaciones significan que las soluciones son invariantes bajo difeomorfismos. Entonces, podemos olvidarnos de las tres ligaduras asociadas a difeomorfismos en la superfice espacial Σ si consideramos funcionales que dependan de la geometría de esta superficie, es decir, de propiedades invariantes bajo difeomorfismos en esta superficie. Entonces sólo nos queda la ligadura hamiltoniana (B.14), eligiendo alguna ordenación y regularizandola de alguna manera podríamos convertir esta ligadura en una ecuación de onda. Esta es conocida como ecuación de Wheeler-DeWitt y sus soluciones nos darían los estados físicos. Como podemos ver, para la RG todo este proceso es complejo, tiene arbitrariedades y presenta dificultades por lo que no ha sido resuelto para el caso general.

Hemos visto que tenemos dos alternativas en el proceso de cuantización, que en general darán resultados diferentes. Hay algunos trabajos [103, 100] que comparan estos dos métodos para sistemas sencillos pero sus conclusiones no ayudan a inclinarnos por uno u otro. En algunos casos la cuantización “a la Dirac” reproduce la teoría cuántica correcta y en otros funciona la cuantización en el espacio de fases reducido. No obstante, debemos tener en cuenta que ambos métodos tienen muchas ambigüedades y sólo una elección adecuada de ellas nos llevará a la teoría cuántica correcta. Quizás pudiera ocurrir que ambos métodos, cada uno con su prescripción correspondiente, fueran equivalentes, pero por el momento este tema sigue abierto.

2.2 Cuantización de modelos de midisuperespacio

La cuantización de estos modelos se obtiene siguiendo el procedimiento canónico. Dado que en estos modelos vamos a imponer ciertas simetrías, debemos analizar primero en que casos se puede reducir por simetría una teoría y cuál es el método correcto para llevar a cabo esta reducción.

Consideramos una teoría general descrita por una acción y queremos estudiar las soluciones que tengan cierta simetría, que será representada por un grupo G. Entonces, buscamos la expresión más general para los campos de la teoría con esta simetría. Estos serán los campos invariantes, y dependerán de algunas funciones arbitrarias, las cuales son los campos reducidos. Para obtener las ecuaciones de movimiento de estos campos reducidos sólo tenemos que sustituir las expresiones de los campos invariantes en las ecuaciones de movimiento generales y así obtenemos las ecuaciones de movimiento reducidas.

Como normalmente las ecuaciones de movimiento las obtenemos de un Lagrangiano uno siente la tentación de utilizar el siguiente atajo: sustituir los campos invariantes en el lagrangiano para obtener un lagrangiano reducido a partir del cuál se deriven las ecuaciones de campo reducidas. Sin embargo, este proceso en general no es equivalente al anterior y podemos obtener ecuaciones de movimiento erróneas. En este caso debemos asegurarnos que hacer la variación de la acción y después imponer la simetría es equivalente a imponer la simetría en la acción y hacer después la variación.

Desde el punto de vista de la geometría simpléctica para que el proceso reducción sea consistente debemos asegurarnos que en la reducción obtenemos una variedad simpléctica, es decir, cuando consideramos la reducción del espacio de fases a una región definida por unas condiciones, en primer lugar, esta región debe ser una variedad y además la forma simpléctica inducida sobre esta región debe ser no degenerada y cerrada.

Una vez que en nuestro modelo hemos impuesto la simetría necesaria y hemos obtenido la descripción hamiltoniana correcta podemos pasar a la cuantización, eligiendo reducir el espacio de fases primero y luego cuantizar o hacer la cuantización “a la Dirac”. Sin embargo, debemos notar que ya hemos seguido, en una primera etapa, el método de cuantización en el espacio de fases reducido, es decir, al imponer la simetría en el modelo (y posiblemente eliminar alguna ligadura) ya estamos reduciendo el espacio de fases.

A la vista de todas las ambigüedades que aparecen en el proceso de canónico de cuantización los modelos de midisuperespacio son buenos especímenes con los que experimentar. Por un lado, retienen suficiente complejidad de la teoría general como para asemejarse a ella, mientras que por otro lado, tienen bastante simetría como para poder llevar a cabo la cuantización. Entonces, podemos comparar los resultados obtenidos utilizando diferentes métodos de cuantización ayudándonos a comprender el proceso de cuantización correcto.

Finalmente, vamos a hacer un breve repaso de los modelos de midisuperespacio que han sido cuantizados completamente.

En primer lugar tenemos las ondas cilíndricas con una polarización. Este fue el primer modelo de midisuperespacio que se estudió en un trabajo pionero de Kuchar [70] en 1971. La cuantización de este midisuperespacio realizada por Ashtekar y Pierri [11] completa los trabajos previos de Kuchar y Allen [1]. Curiosamente, Allen pasó por alto que el modelo que estudió, un campo escalar acoplado a gravedad en 2+1 dimensiones, era equivalente al caso tratado por Kuchar. Esta equivalencia permite resolver este modelo, se eliminan las ligaduras y se reduce el espacio de fases, resultando que los grados de libertad que quedan están en el campo escalar. Se cuantiza el modelo, se obtiene una representación de Fock, unos operadores para la métrica y se pueden estudiar las fluctuaciones de la métrica.

Posteriormente se han realizado varios trabajos que analizan los efectos cuánticos gravitacionales que ocurren en este modelo. En primer lugar, el trabajo de Ashtekar [8] muestra unos resultados sorprendentes: En muchos estados, que están centrados en soluciones clásicas con curvatura pequeña, esperaríamos un buen comportamiento semiclásico, pero esto no ocurre si tenemos partículas (sólo con tener más de una) con frecuencias superiores a la de Planck. Por lo tanto, aunque en la teoría contenga un número infinito de estados con un comportamiento semiclásico, solamente tendremos una clase muy restringida de soluciones clásicas. Por otro lado, Gambini y Pullin [46] estudian lo que ocurre considerando otra clase de estados coherentes. En este caso, las fluctuaciones en la métrica pueden ser menores, pero el precio que se ha de pagar es la pérdida de coherencia en los campos materiales. Finalmente, A.E. Domínguez y M. H. Tiglio [41] repiten el análisis de las fluctuaciones en el formalismo NSF (Null Surface Formulation) [68].

El trabajo de Korotkin y Samtleben [65] generaliza el modelo de las ondas cilíndricas para el caso de dos polarizaciones. Es muy interesante este caso, porque en este sistema se puede estudiar la interacción no lineal entre las dos polarizaciones. Se cuantiza el modelo en el espacio de fases reducido y se introduce una representación de Fock. Así podemos construir cualquier estado a partir del vacío y también podemos calcular el valor esperado de los observables físicos.

Otro modelo con simetría cilíndrica estudiado por Mena Marugán [76] es la familia de soluciones estáticas de Levi-Civita [69]. Se han cuantizado las soluciones que describen el campo gravitatorio exterior de una cuerda cósmica recta y este modelo permite hacer predicciones acerca del valor del ángulo de déficit.

El modelo de Gowdy con la topología de un 3-toro ha sido cuantizado por Mena Marugán [77], revisando el trabajo de Husain [55, 56], y los estudios preliminares llevados a cabo por Berger [21, 22]. Este caso es un buen ejemplo donde se completa el programa de cuantización de Ashtekar. En este caso se cuantiza el sistema "a la Dirac", las variables clásicas pasan a ser operadores lineales que actúan sobre un espacio vectorial y se introduce un producto interno. La única ligadura que tiene el modelo pasa a ser un operador y se obtienen los estados cuánticos que son aniquilados por este operador, a partir de los cuales se construye el espacio de Hilbert físico. Finalmente se introducen los observables físicos del modelo.

Otro modelo similar, con una topología $T^2 \times R^2$, ha sido estudiado por Beetle [16]. En este caso las órbitas de los vectores de Killing son compactas, sin embargo no posee superficies espaciales compactas como el modelo de Godwy. Otra novedad es que no es asintóticamente plano como el modelo para las ondas de Einstein-Rosen. Análogamente a este último caso, la reducción de este modelo es equivalente a un campo escalar acoplado a gravedad en 2+1 dimensiones. Se cuantiza el modelo en el espacio de fases reducido y las conclusiones apuntan por el mismo camino que los resultados obtenidos para el modelo de Ashtekar y Pierri, reproduciendo los mismos efectos cuánticos de la gravedad [8].

En otro trabajo [38] se estudia un campo escalar en un espacio-tiempo de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker. Este modelo de midisuperespacio se ha cuantizado "a la Dirac" y el punto más interesante es que podemos estudiar el cambio de topología.

Además de estos modelos también tenemos bastantes modelos de minisuperespacio que han sido cuantizados. Los primeros trabajos fueron universos homogéneos e isótropos [39] y el universo de Mixmaster [84]. Recientemente, con el formalismo introducido por Ashtekar para la RG se reavivó el interés por estos modelos. Se estudiaron diversos ejemplos de minisuperespacio utilizando este nuevo formalismo y para ver las ventajas que tenía. La mayoría de los casos son modelos de Bianchi [74, 75, 63, 64, 88, 13, 14, 50, 12] y también espacio-tiempos con simetría esférica [62, 61]. Hay otros modelos en los que sólo se ha completado el estudio clásico. En ellos el interés está en analizar con el formalismo de Ashtekar soluciones que inducen una métrica degenerada en la foliación 3+1, por lo que no pueden ser estudiados con el formalismo ADM. La mayoría de lo modelos estudiados son soluciones con simetría esférica [19, 20, 67, 24].

Respecto a las ondas planas hay algunos trabajos en la literatura. Por un lado tenemos un trabajo de Borissov [28] en el que se analiza los estados *weave* para las ondas planas en el contexto del formalismo de Ashtekar. Por otro lado hay una serie de trabajos de Neville [92, 93, 94, 95, 96] en los que se estudian una serie de soluciones a las ligaduras correspondientes a las ondas planas, también en el contexto del formalismo de Ashtekar. Sin embargo, salvo el primer trabajo [92], en el que se hace un análisis clásico de los observables para las ondas planas, en el resto de trabajos no se tratan las ondas planas. Estos trabajos se basan en unos resultados previos de Husain y Smolin [57] que estudian un modelo cuya simetría es la existencia de dos vectores de Killing espaciales que conmutan. Por lo tanto, aunque hablan de ondas planas gravitatorias realmente están considerando una simetría planar. Como veremos las ondas planas gravitatorias tienen más simetría aparte de estos dos vectores de Killing, tienen un grupo de simetrías de cinco parámetros.

En esta tesis se estudia la cuantización de un modelo de midisuperespacio para las ondas planas gravitatorias planas puras linealmente polarizadas y los resultados están publicados en [78, 79, 80, 81].

Capítulo 3

Espacio-tiempos con 2 vectores de Killing

El hecho de que las ondas planas estén dentro de las soluciones que poseen dos vectores de Killing no justifica que dedique todo un capítulo a estas soluciones. Sin embargo, por las razones que más adelante se explican he creído conveniente incluir unas breves consideraciones sobre esta clase de espacio-tiempos.

En primer lugar, algunas de estas soluciones describen situaciones físicas muy interesantes que se podemos encontrarnos en el Universo. Por otro lado, tienen una estructura subyacente que las hace atractivas desde un punto de vista matemático. Estas propiedades permiten relacionar estas soluciones con otras teorías de campos y en algunos casos son equivalentes a modelos de otras áreas. Finalmente, si miramos en la literatura los sistemas gravitatorios que han sido completamente cuantizados nos daremos cuenta que la mayoría corresponden a soluciones de este tipo. Naturalmente, la cuantización de estas soluciones es atrayente porque son modelos con interés físico y por sus propiedades matemáticas nos ayudan en el trabajo. Por lo tanto estas soluciones tienen mucha "miga" y de aquí que repase sus propiedades.

3.1 Interés físico

Vamos a repasar algunas de estas soluciones que son interesantes desde un punto de vista físico.

En primer lugar tenemos soluciones describen modelos cosmológicos espacialmente inhomogéneos: por ejemplo, los modelos que se obtienen rompiendo la homogeneidad en algunas soluciones de tipo Bianchi [69]. Tenemos el modelo de Gowdy [51] con la topología de un 3-toro que es una solución de vacío anisotrópica e inhomogénea obtenida como una generalización de Kasner [72].

Otras soluciones describen radiación gravitacional [43]. Tenemos los casos de ondas con simetría cilíndrica y con simetría plana. Las ondas de Einstein-Rosen [44] son soluciones exactas que describen ondas gravitatorias cilíndricas con una polarización. El caso de dos polarizaciones [69] es muy interesante porque se puede estudiar la interacción no lineal entre las dos polarizaciones. Por otro lado, también se han estudiado las ondas con simetría plana [27]. Estas soluciones son conocidas como ondas gravitatorias planas y son interpretadas como una buena aproximación al campo gravitatorio cuando estamos suficientemente lejos del origen de la radiación. Estas ondas pueden ser puramente gravitatorias, puramente electromagnéticas o ambos casos dependiendo de la fuente. Tanto en el caso cilíndrico como en el plano son soluciones exactas de ondas gravitatorias y representa campos gravitatorios intensos.

Si buscamos propiedades geométricas interesantes también las encontraremos en algunas de estas soluciones. Consideremos las soluciones de ondas planas. En estos espacio-tiempos ocurre el fenómeno de la focalización de los conos de luz [98]. Las geodésicas que parten de un punto del espacio-tiempo, al atravesar la onda son focalizadas y en el futuro se vuelven a juntar. Esto impide que exista una hipersuperficie espacial de Cauchy global en estas soluciones. En el capítulo siguiente explicaremos esta propiedad. También podemos encontrar singularidades: si consideramos la colisión de dos ondas planas [111], en algunos casos se forman singularidades en el espacio-tiempo futuro [52].

3.2 Interés matemático

Desde un punto de vista matemático los espacio-tiempos con dos vectores de Killing también han llamado la atención y hay bastantes trabajos en la literatura. La razón está en que estas soluciones poseen una estructura matemática muy útil, tienen un grupo de simetrías infinito, el grupo de Geroch [48], que actúa transitivamente sobre el espacio de las soluciones. Varios métodos de generación de soluciones se han descrito para estos espacio-tiempos. Uno de los más prácticos ha sido el *inverse-scattering* de Belinskii y Zakharov [17, 18] que ha permitido generar nuevas soluciones, llamadas soluciones solitónicas. Un resumen se puede encontrar en la referencia [115]. La simetría subyacente en estos modelos permite relacionar directamente estos modelos con los sistemas integrables [37, 45].

La presencia de los dos vectores de Killing espaciales permite que en muchos casos se pueda reducir la teoría Einsteniana a una teoría de campos integrable de dos dimensiones [17, 73, 66, 10, 23] . Algunas reducciones son equivalentes a modelos σ no lineales acoplados a 2D-gravedad dilatónica [30] o a modelos chirales.

Este paralelismo con los sistemas integrables, los modelos σ no lineales y los modelos chirales, permite aprovechar las técnicas desarrolladas para estos casos y al revés, la investigación en los modelos con dos vectores de Killing puede arrojar luz sobre algunos problemas de los modelos anteriores.

3.3 Modelos de midisuperespacio

Como ya hemos dicho la mayoría de los modelos de midisuperespacio que han sido cuantizados completamente corresponden a soluciones con dos vectores de Killing. Del repaso que hicimos en el capítulo anterior tenemos los siguientes:

- Las ondas cilíndricas con una polarización [11].
- El caso general de dos polarizaciones con simetría cilíndrica [65].
- La familia de soluciones estáticas de Levi-Civita [76].
- El modelo de Gowdy [77].

Después de haber repasado los puntos interesantes de los espacio-tiempos con dos vectores de Killing espaciales vamos a presentar una posible clasificación de estas soluciones.

3.4 Geometrías con dos vectores de Killing

Consideramos los espacio-tiempos que admiten un grupo de isometrías locales que actúan sobre órbitas espaciales de dos dimensiones. Nos referiremos al grupo como G_2. Tendremos dos vectores de Killing espaciales que llamaremos η y ξ. Asociadas a este grupo hay dos posibles álgebras de Lie no equivalentes, dependiendo de si conmutan o no los generadores del grupo.

Llamaremos G_2I al grupo abeliano. En caso de que no conmuten los vectores, siempre se pueden redefinir de forma que se verifica $[\eta, \xi] = \eta$ y el grupo se denomina G_2II. Esquemáticamente,

η, ξ	Vectores de Killing espaciales
G_2I (Caso Abeliano)	G_2II (Caso No Abeliano)
$[\eta, \xi] = 0$	$[\eta, \xi] = \eta$

A continuación vamos a presentar una posible clasificación para soluciones de las ecuaciones de Einstein que incluyen un G_2 atendiendo a los siguientes criterios: si el grupo actúa ortogonal-transitivamente y si los vectores de Killing admiten hipersuperficies ortogonales. Si se cumple la primera condición entonces existen 2-superficies ortogonales a las órbitas del grupo y se pueden elegir unas coordenadas locales en las que la métrica será diagonal por bloques. Un vector v^a admitirá hipersuperficies ortogonales si verifica la propiedad

$$v_{[a}\nabla_b v_{c]} = 0$$

donde los corchetes [,] denotan antisimetrización. En el trabajo de Wainwright [119] se presenta esta clasificación para el caso abeliano. Análogamente se puede hacer esta clasificación para el caso G_2II [108]. Nosotros vamos a centrarnos en el caso abeliano que es el que nos interesa. En este caso hay cuatro posibilidades diferentes:

Clase A : el grupo no actúa ortogonal-transitivamente.

A(i) : no tenemos ningún Killing que admita superficies ortogonales.

A(ii) : un Killing admite superficies ortogonales (podemos tener dos Killing que admitan superficies ortogonales pero no serán ortogonales entre sí).

Clase B : el grupo actúa ortogonal-transitivamente.

B(i) : no tenemos ningún Killing que admita superficies ortogonales.

B(ii) : tenemos dos Killing ortogonales que admiten superficies ortogonales.

A continuación estudiaremos las posibles formas de la métrica introduciendo un sistema de coordenadas locales (t, x, y, z), donde hemos elegido las coordenadas (y, z) adaptadas a los Killing, es decir,

$$\xi = \partial/\partial y, \qquad \eta = \partial/\partial z \tag{3.1}$$

por lo tanto, las componentes de la métrica no dependerán de estas coordenadas. Para esta clase de espacio-tiempos, con un G_2 que actúa sobre órbitas no nulas la métrica se puede escribir como [99]

$$ds^2 = -e^{2k(t,x)}dt^2 + g_{ij}(t,x)dx^i dx^j \tag{3.2}$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ y $\{x^i\}$=(x, y, z). Equivalentemente, vamos a utilizar la siguiente expresión de la métrica

$$ds^2 = -e^{2k}dt^2 + e^{2h}dx^2 + W[f(dy + w_1dz + w_2dx)^2 + f^{-1}(dz + w_3dx)^2] \tag{3.3}$$

donde las funciones k, h, W, f y w_i son funciones de (t, x) y podemos definirlas de forma invariante en función de los vectores de Killing es

$$\begin{aligned} W^2 &= (\xi^\alpha \xi_\alpha)(\eta^\beta \eta_\beta) - (\xi^\alpha \eta_\alpha)^2, \\ Wf &= \xi^\alpha \xi_\alpha, \qquad Wfw_1 = \xi^\alpha \eta_\alpha \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\alpha, \beta = 0..3$. Ahora vamos a ver la forma de la métrica en cada caso de la clasificación que hemos hecho.

- clase A(i): $w_i \neq 0$, i=1..3 ($\oplus$ *significa término no nulo*)

$$\begin{bmatrix} \oplus & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \oplus & \oplus & \oplus \\ 0 & \oplus & \oplus & \oplus \\ 0 & \oplus & \oplus & \oplus \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

- clase A(ii): $w_1 = w_2 = 0$ ó $w_1 = w_3 = 0$,

$$\begin{bmatrix} \oplus & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \oplus & \oplus & 0 \\ 0 & \oplus & \oplus & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

- clase B(i): $w_2 = w_3 = 0$,

$$\begin{bmatrix} \oplus & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \oplus & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \oplus & \oplus \\ 0 & 0 & \oplus & \oplus \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

- clase B(ii): $w_1 = w_2 = w_3 = 0$,

$$\begin{bmatrix} \oplus & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \oplus & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \oplus & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \oplus \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Después de obtener esta clasificación y con un vistazo a la bibliografía nos damos cuenta de que la mayoría de las soluciones con un G_2 que se conocen están dentro de la clase B, en particular se han estudiado más soluciones del tipo $B(ii)$ [44, 59, 112, 51]. Obviamente, esto ocurre porque son las soluciones más sencillas.

3.4.1 Clasificación invariante

Ahora vamos a ver con más detalle las soluciones de tipo B. En estas soluciones tenemos la métrica en dos cajas 2x2. El determinante de la caja correspondiente a las órbitas de los vectores de Killing es el escalar W^2. Esta función,

$$W = \sqrt{(\xi^\alpha \xi_\alpha)(\eta^\beta \eta_\beta) - (\xi^\alpha \eta_\alpha)^2} \tag{3.9}$$

nos proporciona un criterio para clasificar invariantemente las soluciones [43]. Tendremos tres grupos de acuerdo con el carácter (espacial, temporal o nulo) del gradiente de W, es decir,

$$\begin{aligned} W_{,\alpha} W^{,\alpha} = 0 &\;\Rightarrow\; \textit{clase nula} \\ W_{,\alpha} W^{,\alpha} < 0 &\;\Rightarrow\; \textit{clase temporal} \\ W_{,\alpha} W^{,\alpha} > 0 &\;\Rightarrow\; \textit{clase espacial} \end{aligned}$$

Como soluciones representativas de cada grupo tenemos: las ondas planas [27] para el caso nulo, el modelo de Gowdy [51] con la topología de un 3-toro para el caso temporal y las ondas de Einstein-Rosen [44] para el caso espacial. Sin embargo, podemos tener soluciones donde el carácter del gradiente de W cambie de una región a otra.

En nuestro repaso de los modelos de midisuperespacio de soluciones con un G_2 hemos visto que el modelo de Gowdy y las ondas de Einstein-Rosen ya han sido cuantizadas, [77] y [11] respectivamente. Sin embargo, hasta la fecha no hay ningún modelo de la clase nula cuantizado. En este tesis nosotros completaremos este tarea agotando así el análisis de la cuantización de las diferentes clases de espacio-tiempos con dos vectores de Killing (en el caso de que los Killing admitan hipersuperficies ortogonales). Vamos a cuantizar las ondas gravitatorias planas puras.

Capítulo 4

Geometría clásica

En este capítulo pretendemos hacer un repaso de las propiedades geométricas de los espacio-tiempos correspondientes a ondas gravitatorias planas puras. Son unas soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que son interpretadas como ondas gravitatorias y se asume que proporcionan una buena aproximación del espacio-tiempo en regiones suficientemente alejadas de una fuente de radiación finita [27]. Es importante notar que estas soluciones son soluciones exactas, al contrario que las ondas gravitatorias estudiadas en la aproximación lineal [43], la amplitud de la perturbación del espacio-tiempo puede ser arbitrariamente grande, por lo tanto estamos estudiando campos gravitatorios fuertes.

4.1 Definición de ondas planas

Las ondas gravitatorias planas puras[1] se definen como soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que tienen simetrías análogas a las que presentan las ondas electromagnéticas en el espacio de Minkowski.

Consideremos una onda electromagnética plana en el espacio plano y analizemos que simetrías presenta. Elegimos coordenadas $\{t, x, y, z\}$ y asumamos que se propaga en la dirección positiva del eje x. En primer lugar, el campo tiene el mismo valor en todo el frente de onda. Podemos implementar esta simetría con un grupo de 3 parámetros que deja el campo electromagnético invariante. Las simetrías son translaciones en las direcciones transversas z, y y translaciones en la dirección nula $t - x =$ *constante*. Ademas hay otras simetrías que no son tan evidentes porque son simetrías 4-dimensionales que

[1] Entre los trabajos de la literatura destacaría [27] que es muy completo. También citaré el libro de Griffiths [52] dedicado exclusivamente a la colisión de ondas planas y contiene casi toda la bibliografía sobre las ondas planas.

pueden ser descritas con un grupo de 2 parámetros que lleva las superficies $t - x =$ *constante* a ellas mismas y podrían ser llamadas "rotaciones nulas". Por lo tanto podemos implementar la simetría de estas ondas con un grupo de 5 parámetros.

Después de considerar el caso electromagnético definiremos las ondas gravitatorias planas como soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que admiten un grupo de simetrías de 5 parámetros. Se puede ver [27] que no hace falta hacer más suposiciones acerca de la estructura del grupo o de los subespacios invariantes, el resto se obtiene a partir de la definición anterior.

La métrica para una onda plana gravitatoria general se puede escribir como

$$ds^2 = -dUdV + H_{ab}X^aX^bdU^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 \tag{4.1}$$

donde las funciones H_{ab}, $(a, b = 1, 2)$, son funciones de U. Esta expresión fue considerada por vez primera por Brinkman [31, 32] y también estudiada por Baldwin y Jeffrey [15]. Posteriormente tenemos los trabajos de [104, 25, 27, 98]. Para una descripción más completa se puede mirar [69] o [52].

Las ondas planas pertenecen a un grupo más general de soluciones de tipo onda, *pp-waves* (plane-fronted gravitational waves with parallel rays) [69]. Ahora presentaremos un breve repaso de sus propiedades.

Las *pp-waves* se definen como espacio-tiempos que admiten un vector nulo k covariantemente constante,

$$\nabla_b k_a = 0 \tag{4.2}$$

Si elegimos una tétrada que incluya este vector obtenemos que los coeficientes espinoriales [69] $\rho = \sigma = \kappa = 0$, por lo tanto, este vector es tangente a una congruencia de geodésicas nulas sin expansión, sin rotación y sin distorsión. Como la congruencia no tiene rotación existirá una familia de 2-superficies ortogonales a k que pueden ser interpretadas como frentes de onda. Además como la congruencia no tiene expansión estos frentes de onda serán planos y teniendo en cuenta que $\tau = 0$, los rayos ortogonales al frente de ondas serán paralelos.

Estas soluciones son de vacío, Einstein-Maxwell null o campos radiativos puros. Podemos escribir la métrica como,

$$ds^2 = -dUdV + H(U, \zeta, \bar{\zeta})dU^2 + d\zeta d\bar{\zeta} \tag{4.3}$$

siendo $\zeta = X^1 + iX^2$.

Esta métrica es invariante frente a transformaciones de coordenadas del tipo

$$\zeta' \;=\; e^{i\alpha}(\zeta + h(U)), \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} V' &= a(V + \dot{h}(U)\bar{\zeta} + \dot{\bar{h}}(U)\zeta + g(U)), \\ U' &= a^{-1}(U + U_0), \\ H' &= a^2(H - \ddot{h}(U)\bar{\zeta} - \ddot{\bar{h}}(U)\zeta + \dot{h}(U)\dot{\bar{h}}(U) - \dot{g}(U)) \end{aligned}$$

siendo α, a, U_0 constantes reales, $g(U)$ una función real y $h(U)$ una función compleja.

El escalar de Ricci es nulo y las ecuaciones de Einstein de vacío se reducen a

$$R_{UU} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{X^1} H + \partial^2_{X^2} H\right) = 0 \tag{4.5}$$

y como esta ecuación es lineal entonces se pueden superponer las soluciones. Esto significa que las ondas gravitatorias de este tipo que se propagan en las misma dirección no interaccionan.

Otra propiedad de las *pp-waves* es que son tipo de Petrov N o conformalmente planas. Por este motivo este tipo de soluciones está asociado a ondas gravitatorias.

Después de haber repasado las propiedades de las *pp-waves* vayamos ahora el caso particular de las ondas planas. Este caso ocurre cuando la función H es cuadrática en las coordenadas X^1, X^2.

$$H = H_{ab}(U)\, X^a\, X^b \tag{4.6}$$

Los términos lineal e independiente pueden ser absorbidos con una transformación del tipo (4.4) y así la métrica se escribe entonces como (4.1). Tenemos dos casos interesantes: Esta métrica describirá una onda plana electromagnética con tensor de Weyl nulo cuando $H_{22} = H_{11}$ y $H_{12} = 0$, es decir,

$$ds^2 = -dU dV + H(U)\left[(X^1)^2 + (X^2)^2\right] dU^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 \tag{4.7}$$

En cambio, se tratara de una onda plana gravitatoria pura cuando $H_{22} = -H_{11}$. En lo que sigue nos centraremos en este caso. La expresión de la métrica es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dU dV + +(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \\ & \left[H_{11}(U)\left[(X^1)^2 - (X^2)^2\right] + H_{12}(U) X^1 X^2\right] dU^2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2 Coordenadas armónicas y de grupo

La métrica anterior representa una onda gravitatoria plana pura y las coordenadas que se han utilizado, $\{U, V, X^1, X^2\}$, reciben el nombre de coordenadas armónicas. Recordemos que estas coordenadas recorren todo el eje real y para cualquier par de funciones $H_{11}(U), H_{12}(U)$ esta métrica es una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío. La ventaja más importante de estas coordenadas es que cubren todo el espacio-tiempo con un solo atlas y además toda la información sobre la curvatura está contenida en una única componente de la métrica g_{UU}. Sin embargo, puede resultar mas útil trabajar con otras coordenadas que muestren más explícitamente la simetría de las ondas planas. Por este motivo vamos a introducir las coordenadas de grupo $\{u, v, x^1, x^2\}$. La métrica se escribirá como

$$ds^2 = -dudv + h_{ab}(u)dx^a dx^b \tag{4.9}$$

La relación entre ambas coordenadas viene descrita por la transformación

$$\begin{aligned} V &= v + \frac{1}{2}\dot{h}_{ab}(u)x^a x^b, \\ X^a &= P^a_b(u)x^b, \\ U &= u \end{aligned} \tag{4.10}$$

siendo

$$h_{ab} = P^k_a(u)P^k_b(u) \tag{4.11}$$

y la matriz $P^a_b(u)$ es la solución de

$$\ddot{P}^a_b(u) = H_{ak}(u)P^k_b(u) \tag{4.12}$$

con condiciones iniciales que verifican la siguiente ligadura

$$\dot{P}^k_a(u)P^k_b(u) - P^k_a(u)\dot{P}^k_b(u) = 0 \tag{4.13}$$

Al contrario, también podemos pasar de las coordenas de grupo a las coordenadas armónicas resolviendo las ecuaciones (4.11) y (4.13) para obtener la matriz P^a_b y entonces utilizando la ecuación (4.12) obtendremos H_{ab}.

En estas coordenadas, de nuevo las ecuaciones de Einstein se reducen a una sola ecuación

$$R_{uu} = -\frac{1}{2}h^{ab}(h_{ab})'' - \frac{1}{4}(h^{ab})'(h_{ab})' = 0 \tag{4.14}$$

y la prima denota derivada respecto u.

En las coordenadas de grupo los vectores de Killing que generan el grupo de 5 parámetros son

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \partial_{x^1} \\ \xi_2 &= \partial_{x^2} \\ \xi_3 &= \partial_v \\ \xi_4 &= x^1\partial_v + N_{22}(u)\partial_{x^1} - N_{12}(u)\partial_{x^2} \\ \xi_5 &= x^2\partial_v + N_{11}(u)\partial_{x^2} - N_{12}(u)\partial_{x^1} \end{aligned} \tag{4.15}$$

siendo

$$N_{ab}(u) = \int duh^{-2}h_{ab}, \qquad h = det(h_{ab}) \tag{4.16}$$

y los únicos conmutadores no nulos son

$$[\xi_1, \xi_4] = \xi_3, \tag{4.17}$$

$$[\xi_2, \xi_5] = \xi_3 \tag{4.18}$$

Hemos visto que con estas coordenadas es más explicita la simetría de las ondas pero tienen el inconveniente de que no cubren todo el espacio-tiempo con un único atlas porque veremos que son singulares para un cierto valor de u_f en el que $\det[h_{ab}(u_f)] = 0$ [98, 49, 47]. Sin embargo, esta singularidad es sólo una singularidad de coordenadas y no tenemos divergencias en la curvatura. Por el momento dejaremos el estudio de esta singularidad para la última sección.

4.3 Ondas linealmente polarizadas y Ondas Sandwich

Las ondas planas gravitatorias son soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que describen radiación gravitatoria. Como hemos visto estas funciones tienen dos grados de libertad que son dos funciones de la coordenada u. Estas funciones se pueden relacionar con las propiedades físicas de la onda: la amplitud y la dirección de polarización. Para la expresión de la métrica en coordenadas armónicas (4.8) la función H se puede escribir como

$$H = h(U)\left[\cos\alpha(U)\left[(X^1)^2 - (X^2)^2\right] + 2\sin\alpha(U)X^1X^2\right] \tag{4.19}$$

donde $h(U)$ esta relacionada con la amplitud de la onda y $\alpha(U)$ es la polarización.

Si $\alpha(U)$ es una constante tendremos una onda linealmente polarizada y siempre se pueden rotar las coordenadas de forma que $H_{12} = 0$, o equivalentemente $\alpha = 0$. En este caso el vector de polarización está alineado con la dirección de la coordenada X^1 y la métrica se escribe como

$$ds^2 = -dUdV + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + H_{11}(U)\left[(X^1)^2 - (X^2)^2\right]dU^2 \tag{4.20}$$

En coordenadas de grupo el elemento de línea de una onda plana linealmente polarizada se puede escribir como

$$ds^2 = -dudv + h_{11}(dx^1)^2 + h_{22}(dx^2)^2 \tag{4.21}$$

por lo tanto la métrica es diagonal y la única ecuación de Einstein nos da la relación entre h_{11} y h_{22}. Una de ellas puede ser elegida arbitrariamente.

Ahora vamos a considerar otra subfamilia de soluciones de ondas planas que son conocidas por el nombre de ondas *Sandwich*. Para muchos propósitos es más útil considerar ondas de duración finita, en otras palabras, espacio-tiempos en los que la radiación gravitatoria se concentra en una región y el resto del espacio-tiempo es plano. Así se define una onda *Sandwich*, es una onda plana cuya amplitud es diferente de cero en un intervalo finito de la coordenada u.

Estas soluciones son interesantes para estudiar como interaccionan las ondas gravitatorias con otros sistemas. Por ejemplo se puede considerar un sistema que al principio está en el espacio-tiempo plano, más adelante le atraviesa la perturbación gravitatoria, para volver finalmente al espacio plano.

Normalmente estas soluciones consisten en una región con onda entre dos regiones planas, todas las zonas enlazadas adecuadamente.

4.4 Nuestras coordenadas

Finalmente en esta sección queremos especificar el tipo de espacio-tiempos que vamos a estudiar posteriormente en el modelo de midisuperespacio. En primer lugar, dado que las ondas planas no admiten una superficie de Cauchy global [98] no se podrán estudiar con el formalismo canónico. Lo que podemos hacer en este caso es estudiar sólo un trozo del espacio-tiempo que si sea globalmente hiperbólico. Introduciremos coordenadas de grupo en el espacio-tiempo y veamos a que parche nos restringiremos. Haciendo el siguiente cambio de variables que introduce las funciones y, z, v

$$\begin{aligned} h_{11} &= e^{z-y/2}, \quad h_{12} = -ve^{z-y/2}, \\ h_{22} &= (v^2+e^y)e^{z-y/2}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

la métrica (4.9) se escribe

$$ds^2 = -d\tilde{u}dv + e^{z-y/2}[(dx^1)^2 - 2vdx^1dx^2 + (v^2+e^y)(dx^2)^2] \tag{4.23}$$

y para que sea definida positiva todas las funciones deben ser reales. La única ecuación de Einstein no trivial es

$$\frac{d^2(e^{z/2})}{d\tilde{u}^2} = -\frac{e^{z/2}}{16}\left[\left(\frac{dy}{d\tilde{u}}\right)^2 + 4\left(\frac{dv}{d\tilde{u}}\right)^2 e^{-y}\right] \tag{4.24}$$

y de aquí podemos deducir que la función $F = e^{z/2}$ debe ser una función convexa de la coordenada $\tilde{u}$. Como esta función no es negativa, se anulará en algún punto, lugar donde la métrica será degenerada y tendremos una singularidad de coordenadas. Por lo tanto la coordenada $\tilde{u}$ tendrá un rango de variación restringido, en cambio, las demás coordenadas recorren todo el eje real.

Ahora vamos a estudiar con detalle el comportamiento de la función $F(\tilde{u})$. Tenemos tres posibles casos:

- Si $d^2F/d\tilde{u}^2 = 0$, o equivalentemente las variables y, z son constantes, $F(\tilde{u})$ será una función lineal en $\tilde{u}$. Esta solución corresponde al espacio de Minkowski[2].

- Si $d^2F/d\tilde{u}^2 < 0$ y la función $F(\tilde{u})$ se anula en dos puntos. En este caso, la función crece desde el primer cero hasta su máximo y luego vuelve a cero de nuevo. El valor en el máximo puede hacerse igual a uno mediante un reescalado de las coordenadas x^a.

- Si $d^2F/d\tilde{u}^2 < 0$ y la función $F(\tilde{u})$ se anula en un sólo punto. Ahora podemos hacer que esta función sea estrictamente creciente cambiando el signo de las coordenadas $\tilde{u}, v$ si es necesario. Entonces si miramos el comportamiento de F para valores grandes de $\tilde{u}$, puede ocurrir que tienda a infinito o a un límite finito. En este último caso, siempre podemos hacer que este límite sea la unidad reescalando las coordenadas x^a.

Con esto hemos agotado las posibilidades. Lo más importante es que en todos los casos siempre existe una región $\mathcal{B}$ del espacio-tiempo en el que la función $F(\tilde{u})$ crece desde cero hasta uno. Vamos a descartar el caso en que las funciones y, v, z sean constantes que se corresponde trivialmente con Minkowski, con esto no eliminamos la solución plana porque si $F(\tilde{u})$ es lineal en $\tilde{u}$ y y, v son contantes tendremos esta solución.

En la región $\mathcal{B}$ la variable z crece de $-\infty$ a 0. Entonces introduciremos el siguiente cambio de coordenadas

$$d\tilde{u} = e^{2w-z+y/2}du \tag{4.25}$$

siendo w una función desconocida de u, y asumiremos que el rango de esta coordenada es todo el eje real. Podemos fijar

$$z(\tilde{u}[u]) = -e^{-u} \equiv z_0(u) \tag{4.26}$$

porque $z_0(u)$ es estrictamente creciente en el recorrido de u y crece de $-\infty$ a 0. Con este cambio el desconocimiento en la variable z está codificado en w,

[2]Se puede ver que existe una transformación local de coordenadas que nos lleva al elemento de línea de Minkowski [27].

y hemos llevado la singularidad de coordenadas en $e^{z/2} = 0$ a $u = -\infty$. La métrica (4.23) será

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2w-z_0(u)+y/2}\, du\, dv + \\ & \quad e^{z_0(u)-y/2}[(dx^1)^2 - 2v dx^1 dx^2 + (v^2+e^y)(dx^2)^2] \end{aligned} \tag{4.27}$$

y las ecuaciones de Einstein se reducen a una ecuación de primer orden para w que puede resolverse explícitamente

$$\begin{aligned} w &= \frac{\ln(z_0')}{2} + \frac{3z_0}{4} - \frac{y}{4} + \int_{u_0}^{u} \frac{1}{16 z_0'} \left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y}\right] \\ &\equiv w_0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Aquí u_0 es una constante real fija y la prima en z_0', y', v' denota la derivada respecto a u. La constante de integración que debería aparecer en esta fórmula ha sido reabsorbida con una transformación de escala en la coordenada v.

Ahora si hacemos el cambio de coordenadas $v = 2t - u$ obtenemos el elemento de línea que describe el trozo del espacio-tiempo de las ondas planas que estamos considerando. Este es,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2w_0(u)-z_0(u)+y/2}[-dt^2 + (du-dt)^2] + \\ & \quad e^{z_0(u)-y/2}[(dx^1)^2 - 2v dx^1 dx^2 + (v^2+e^y)(dx^2)^2] \end{aligned} \tag{4.29}$$

donde todas las coordenadas son reales y su rango de variación es todo $I\!\!R$. La métrica anterior es una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein para cualquier par de funciones arbitrarias $y(u), v(u)$.

Estas son la soluciones que queremos cuantizar en nuestro modelo. Hemos visto que la anterior métrica describe la solución más general de una onda gravitatoria plana pura, sólo debemos tener en cuenta que esta métrica no describe todo el espacio-tiempo tiempo que recubriríamos con las coordenadas armónicas. En el modelo tendremos dos grados de libertad, las funciones y, v.

A la vista de la expresión de la métrica (4.29), esta puede ser interpretada como el elemento de línea ADM (B.6) para espacio-tiempos con métricas diagonales por bloques 2x2, con la función lapso y la componente N^u particularizadas a la elección $N = e^{w_0 - z_0/2 + y/4}$ y $N^u = -1$. Además la métrica considerada tiene dos vectores de Killing espaciales que conmutan, ∂_{x^a}, y aparte de no depender en las coordenadas x^a, tampoco depende de t.

Vamos a utilizar esta conexión entre las ondas planas y los espacio-tiempos con dos vectores de Killing para fijar el gauge en nuestro modelo. Partiremos del tratamiento hamiltoniano para estos espacio-tiempos y después imponiendo unas condiciones, básicamente que las soluciones no dependan del tiempo, recuperaremos un modelo que describe las ondas planas. En el siguiente capítulo estudiaremos una fijación del gauge para los espacio-tiempos con dos vectores de Killing y explicaremos que condiciones nos llevan a las ondas planas.

4.5 Focalización de los conos del luz

Las ondas planas gravitatorias tienen unas propiedades geométricas muy interesantes como es la ausencia de una hipersuperficie de Cauchy espacial como consecuencia de la focalización que estas ondas ejercen sobre los conos de luz. Este hecho fue estudiado por vez primera por Penrose [98], posteriormente están los trabajos [26, 47]. En esta sección pretendemos describir cualitativamente este fenómeno de focalización, para un estudio más detallado les referimos a las anteriores referencias.

Para una onda plana en coordenadas de grupo hemos visto que el determinante de la métrica es una función convexa y positiva (4.24), por lo tanto se anulará en para cierto valor $u = u_f$. En ese punto tendremos una singularidad de coordenadas. Para entender que es lo que ocurre se analiza un caso sencillo. Por ejemplo, consideremos una onda *sandwich* en coordenadas de grupo. Ahora estudiaremos una familia de geodésicas nulas que inciden perpendicularmente sobre la onda (con diferentes parámetros de impacto). En la región plana antes de que pase la onda esta familia de geodésicas son líneas rectas. Después al pasar la onda las geodésicas se desvían de tal forma que en la región plana posterior todas las geodésicas convergen hacia un punto de focalización, que se corresponde con el valor $u = u_f$ (donde tenemos la singularidad de coordenadas). Para estudiar rigurosamente que ocurre recurrimos a las coordenadas armónicas que son válidas para todo el espacio-tiempo. Entonces se puede ver las geodésicas anteriores al atravesar la onda son focalizadas hacia el mismo punto independientemente del parámetro de impacto y además lo alcanzan en un tiempo finito.

En el trabajo [47] se estudian casos más generales y otras familias de geodésicas nulas. En estos casos la región de focalización puede convertirse en una línea recta o una parábola dependiendo del caso particular.

En el trabajo [26] que ocurre con un conjunto de partículas test inicialmente en reposo en el espacio plano. Después de pasar una onda *sandwich* linealmente polarizada las partículas comienzan a moverse y colisionan en un tiempo finito independientemente de cuánta distancia las separe inicialmente.

A la vista de esta propiedad de las ondas planas se plantea la cuestión de estudiar qué ocurre cuando dos ondas planas colisionan. Hay muchos trabajos en la literatura sobre colisión de ondas gravitatorias [52]. En algunos casos la focalización mutua de las ondas da lugar a que se formen una singularidad real de curvatura en la región futura. En otros casos, sólo se forma un horizonte de Cauchy.

Capítulo 5

Fijación del gauge para ST con 2 Killing

En este capítulo vamos a estudiar el formalismo hamiltoniano para los espacio-tiempos que poseen dos vectores de Killing espaciales y que conmutan. A continuación presentaremos una fijación parcial del gauge que es válida para todos estos espacio-tiempos.

Comencemos con el formalismo ADM (Véase el apéndice B). Evidentemente nos restringiremos a espacio-tiempos que admiten una foliación global, con lo que la métrica se puede escribir en la forma 3+1 como:

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \tag{5.1}$$

Vamos a emplear la notación $\{x^i\} \equiv (x^1, x^2, u)$ para las coordenadas de las secciones de tiempo constante. Además, asumiremos que las coordenadas t y u recorren todo el eje real, e impondremos que $\partial_{x^a}, (a = 1, 2)$ sean los vectores de Killing. Por lo tanto, la métrica será independiente de las coordenadas x^a. Esto implica que podemos integrar estas coordenadas en la acción de Hilbert-Einstein(B.1) y se obtiene un factor global constante

$$\mathcal{S} = \int dx^1 dx^2 \tag{5.2}$$

Vamos a absorber este factor en la constante de Newton.

$$\frac{1}{16\pi G}\int dx^1 dx^2 = \frac{1}{16\pi G}\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_e} \tag{5.3}$$

En el caso que este área sea infinita necesitamos hacer una regularización, que consistirá en tomar el límite $\mathcal{S} \to \infty$ del caso compacto. Para evitar arrastrar esta constante, fijaremos la constante de Newton efectiva de acuerdo a la relación:

$$\frac{1}{16\pi G_e} = 1 \tag{5.4}$$

Las variables canónicas serán la métrica inducida sobre las secciones espaciales h_{ij} y sus momentos conjugados Π^{ij} que se definen en (B.11). Los corchetes de Poisson entre las variables canónicas son

$$\{h_{ij}(u), \Pi^{kl}(\bar{u})\} = \delta_i^{(k}\delta_j^{l)}\delta(u-\bar{u}) \tag{5.5}$$

donde δ_i^j es la delta de Kronecker, y $\delta(u)$ es la delta de Dirac sobre la recta real, y la forma simpléctica en el espacio de fases es

$$\Omega = \int du\, \mathbf{d}\Pi^{ij} \wedge \mathbf{d}h_{ij} \tag{5.6}$$

siendo $\mathbf{d}$ la derivada exterior y $\wedge$ el producto exterior. Recordemos que el factor constante que se obtiene al integrar las coordenadas x^1, x^2 se ha reabsorbido en la constante de Newton (5.3).

Como ya sabemos, tenemos dos clases de ligaduras: la ligadura hamiltoniana $\mathcal{C}$ y las ligaduras de momentos $\mathcal{C}_i$, estas últimas generan los difeomorfismos sobre la sección espacial. En lugar de utilizar $\mathcal{C}$, vamos a trabajar con esta ligadura densitizada, $\tilde{\mathcal{C}} \equiv h^{1/2}\mathcal{C}$. Teniendo en cuenta esto, las expresiones para las ligaduras son:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}} &\equiv -h\ {}^3R + (h_{ik}h_{jl} - \frac{1}{2}h_{ij}h_{kl})\Pi^{ij}\Pi^{kl} = 0, \\ \mathcal{C}_i &\equiv -2h_{ij}D_k\Pi^{kj} = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde D_i es la derivada covariante compatible con la métrica inducida y ${}^3R$ es su escalar de curvatura.

La evolución temporal de cualquier función del espacio de fases será

$$\dot{f} = \partial_t f + \{f, \int du\, (\underset{\sim}{N}\tilde{\mathcal{C}} + N^i\mathcal{C}_i)\} \tag{5.8}$$

siendo ∂_t la derivada parcial con respecto a la dependencia explícita con el tiempo t y $\underset{\sim}{N} = h^{-1/2}N$ es la función lapso densitizada.

5.1 Caso ortogonal

Para los espacio-tiempos que estamos estudiando es posible eliminar la libertad gauge asociada a las ligaduras $\mathcal{C}_a$, $a = 1, 2.$, ligaduras que generan los difeomorfismos en las coordenadas de los vectores de Killing.

Teniendo en cuenta que la métrica no depende de las coordenadas x^a se puede ver que estas ligaduras pueden reescribirse como

$$\mathcal{C}_a = -2\left(h_{ai}\Pi^{iu}\right)' \tag{5.9}$$

donde la prima denota la derivada parcial respecto a la coordenada u.

Para fijar el gauge exigiremos que en las secciones de tiempo constante el eje de la coordenada u sea ortogonal a las órbitas del grupo expandidas por los vectores de Killing ∂_{x^a}. Esto es equivalente a las condiciones

$$h_{au} = 0, \quad a = 1, 2. \tag{5.10}$$

A continuación debemos asegurar que estas condiciones son "adecuadas" para fijar el gauge. Por un lado, las órbitas gauge generadas por las ligaduras $\mathcal{C}_a$ tienen que intersectar transversalmente la superficie definida en el espacio de fases por las condiciones (5.10) y las ligaduras (5.7). Y por otro lado, las condiciones que fijan el gauge (5.10) deben ser preservadas por la dinámica del sistema.

La primera condición es equivalente a probar que las condiciones de fijación del gauge tienen corchetes de Poisson no nulos con las ligaduras $\mathcal{C}_a$. Si hacemos este cálculo[1] obtenemos

$$\{h_{au}, \int du\, N^b \mathcal{C}_b\} = h_{ab}(N^b)' \tag{5.12}$$

y si tenemos en cuenta que h_{ab} es definida positiva, entonces los corchetes anteriores en general serán distintos de cero (con elegir $(N^a)' \neq 0$ ya lo aseguramos).

La segunda condición consiste en pedir que la fijación del gauge sea compatible con la dinámica, esto quiere decir que debe existir una elección para las componentes N^a del vector desplazamiento que asegure, en la superficie definida por las ligaduras, que las condiciones (5.10) son conservadas por la evolución dinámica. En otras palabras $\dot{h}_{au}$ debe ser nulo, modulo ligaduras y condiciones de fijación del gauge, para una elección particular de N^a. De nuevo, si tenemos en cuenta que la métrica no depende de x^a y usando (5.8) podemos calcular

$$\dot{h}_{au} = h_{ab}(N^b)' + 4\underset{\sim}{N}\, h_{ab} h_{uu} \Pi^{bu} \tag{5.13}$$

siempre teniendo cuidado en sustituir las condiciones de fijación después de haber calculado los corchetes de Poisson.

Por otro lado, la solución de las ligaduras $\mathcal{C}_a = 0$ para los momentos es

$$\Pi^{au} = h^{ab} f_b(t) \tag{5.14}$$

[1]Basta usar la definición de los corchetes de Poisson entre dos funciones del espacio de fases $A(h_{ij}, \Pi^{ij})$ y $B(h_{ij}, \Pi^{ij})$

$$\{A, B\} \equiv \int dx^3 \left[\frac{\delta A}{\delta h_{ij}(x)} \frac{\delta B}{\delta \Pi^{ij}(x)} - \frac{\delta B}{\delta h_{ij}(x)} \frac{\delta A}{\delta \Pi^{ij}(x)} \right] \tag{5.11}$$

siendo $f_a(t)$ dos funciones arbitrarias del tiempo, que serán reales porque los momentos también lo son. Entonces la fijación del gauge será preservada por la dinámica si se cumple

$$(N^a)' = -4\underset{\sim}{N}\, h_{uu} h^{ab} f_b(t) \tag{5.15}$$

Ahora vamos a considerar que las componentes N^a del vector desplazamiento se anulan cuando $u \to \pm\infty$. Dado que hemos impuesto $h_{au} = 0$, esta última condición significa que las órbitas del grupo expandidas por los vectores de Killing ∂_{x^a} son asintóticamente ortogonales a las superficies con coordenadas t y u, es decir, asintóticamente tendremos la métrica en dos cajas 2x2.

Ahora si integramos en u ambos términos de la ecuación (5.15), contraemos el resultado con $f_a(t)$, y usamos la condición

$$\lim_{u \to \pm\infty} N^a = 0 \tag{5.16}$$

se llega al resultado

$$\int_{I\!R} du\, \underset{\sim}{N}\, h_{uu} h^{ab} f_a f_b = 0 \tag{5.17}$$

En esta ecuación el integrando es real, entonces, para que se anule esta integral, el integrando debe anularse al menos en algún punto. Teniendo en cuenta que la métrica h_{ab} es definida positiva, y que $\underset{\sim}{N}$ y que h_{uu} también son estrictamente positivos, se cumplirá que $f_a = 0$ en ese punto. Pero, como las funciones f_a no dependen de la coordenada u, estas funciones serán idénticamente nulas. Por lo tanto, reuniendo las soluciones de las ligaduras y las soluciones que aseguran la consistencia en la fijación del gauge cuando se impone la condición (5.16) tenemos

$$\begin{aligned} \Pi^{au} &= 0 \\ N^a &= 0 \\ h_{au} &= 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

y entonces la métrica es diagonal en dos bloques 2x2.

Hemos visto que si imponemos $\lim_{u \to \pm\infty} N^a = 0$, para asegurar la consistencia en el proceso de fijación del gauge se verificará que N^a se anula en todo el espacio-tiempo y no sólo en el infinito, es decir, en esta fijación de gauge si exigimos que la métrica sea diagonal por bloques asintóticamente, lo será en todo el espacio-tiempo.

Después de esta fijación parcial del gauge, las variables canónicas y sus momentos conjugados (h_{au}, Π^{au}), así como las ligaduras $\mathcal{C}_a$, son eliminadas del sistema. El resto de variables y sus momentos son un conjunto de variables canónicas para el modelo con el gauge fijado. El elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{uu}(du + N^u dt)^2 + h_{ab}dx^a dx^b \tag{5.19}$$

donde todas las funciones métricas dependen sólo de las coordenadas t y u. La estructura simpléctica (5.6) es

$$\Omega = \int du \left(\mathbf{d}\Pi^{uu} \wedge \mathbf{d}h_{uu} + \mathbf{d}\Pi^{ab} \wedge \mathbf{d}h_{ab}\right) \tag{5.20}$$

5.2 Fijación del gauge "correcta"

Ahora que hemos completado la fijación del gauge, es un buen momento para revisar si hemos efectuado correctamente la fijación del gauge. Dado que este mismo proceso se repetirá varias veces a lo largo del trabajo me gustaría repasarlo para que quede bien claro como se debe hacer una fijación del gauge correctamente. La anterior fijación nos servirá como ejemplo.

Consideremos un sistema que tiene C_i, $i = 1..n$ ligaduras de primera clase. Estas ligaduras generarán transformaciones gauge por ser de primera clase. Para eliminarlas debemos añadir tantas condiciones de fijación, g_i, como ligaduras queramos eliminar. Por ejemplo, vamos a eliminar k ligaduras. Tenemos el sistema

Ligaduras	$C_i = 0, \;\; i = 1..k$
Condiciones de fijación	$g_i = 0, \;\; i = 1..k$

y utilizaremos la siguiente notación: $\chi_{\mathcal{A}} \equiv (C_i, g_i)$, $\mathcal{A} = 1..2k$, será el conjunto formado por las ligaduras C_i y las condiciones de fijación g_i. El símbolo $\approx$ denotará que se cumple la igualdad cuando tomamos la restricción a la superficie definida por $g_i = 0$, es decir,

$$F \approx G \qquad \Leftrightarrow \qquad F|_{g_i=0} = G|_{g_i=0} \tag{5.21}$$

Para que las condiciones g_i permitan fijar el gauge correctamente se tienen que verificar las siguientes condiciones:

(i) El conjunto formado por las condiciones de fijación y las ligaduras ha de ser un sistema de segunda clase, en otras palabras, esto significa que la superficie gauge intersecta transversalmente la superficie definida por las condiciones de fijación y las ligaduras, permitiendo extraer un único punto de cada órbita gauge. La condición que nos asegura esto es

$$det(A_{\mathcal{AB}}) \not\approx 0 \tag{5.22}$$

donde la matriz A se define como $A_{\mathcal{AB}} = \{\chi_{\mathcal{A}}, \chi_{\mathcal{B}}\}$.

(ii) Las condiciones de fijación que hemos impuesto tienen que ser conservadas por la evolución dinámica del sistema. Esta condición equivale a exigir que el corchete de Poisson de las condiciones de fijación con el hamiltoniano H del sistema es nulo cuando nos restringimos a la superficie definida por las ligaduras, es decir,

$$\dot{g}_i \equiv \{g_i, H\} \approx 0, \qquad i = 1..k \tag{5.23}$$

Si se verifican estas condiciones tendremos un problema de fijación de gauge bien puesto y podremos hacer la reducción.

Repasemos la fijación del gauge de la sección anterior. Queremos eliminar dos ligaduras ($\mathcal{C}_a$, $a = 1, 2$), por lo tanto se añaden dos condiciones de fijación ($g_a \equiv h_{au} = 0$). Hemos probado que es un sistema de segunda clase (5.12) y también que las condiciones g_a son preservadas por la dinámica (5.15). Entonces el proceso de reducción es correcto. Hemos eliminado los grados de libertad (h_{au}, Π^{au}) del sistema (cada ligadura y cada condición g_a elimina un grado de libertad). En el proceso de reducción también quedan fijados los multiplicadores de Lagrange que acompañan a las ligaduras, al asegurar la compatibilidad con la dinámica obtenemos las ecuaciones que deben cumplir. En el caso anterior las ecuaciones (5.15) fijan las componentes N^a. Con este ejemplo hemos aprendido como hacer la fijación correctamente.

5.3 Cambio de variables

A continuación vamos a hacer un cambio de variables, pasaremos de $h_{ab}(t, u)$ y $h_{uu}(t, u)$ a $\{q^\alpha\} \equiv \{v(t, u), w(t, u), y(t, u), z(t, u)\}$ porque simplifican las cosas y además nos ayudarán a establecer la conexión con las ondas planas. La transformación es

$$\begin{aligned} h_{11} &= e^{z-y/2}, \quad h_{12} = -ve^{z-y/2} \\ h_{22} &= (v^2 + e^y)e^{z-y/2} \\ h_{uu} &= e^{2w-z+y/2} \end{aligned} \tag{5.24}$$

La métrica (5.19) pasará a escribirse

$$ds^2 = e^{2w-z+y/2}[-e^{2z}\underset{\sim}{N}^2dt^2 + (du + N^u dt)^2] +
e^{z-y/2}[(dx^1)^2 - 2vdx^1dx^2 + (v^2 + e^y)(dx^2)^2] \tag{5.25}$$

Aquí hemos densitizado el lapso utilizando

$$h = e^{2w+z+y/2} \tag{5.26}$$

Ahora para que la métrica inducida sea definida positiva basta exigir que las nuevas variables q^α sean funciones reales.

El cambio de variables que hemos realizado es una transformación puntual. Entonces podemos obtener fácilmente los momentos conjugados $\{p_\alpha\}$ a las nuevas variables utilizando la relación

$$p_\alpha = \Pi^{uu}\frac{\partial h_{uu}}{\partial q^\alpha} + \Pi^{ab}\frac{\partial h_{ab}}{\partial q^\alpha} \tag{5.27}$$

teniendo en cuenta que h_{uu} y h_{ab} tienen que ser consideradas como funciones de q^α.

Recordemos que todavía tenemos dos ligaduras en este modelo gravitatorio, que se pueden obtener haciendo la restricción en $\tilde{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{C}_u$ al caso en que la métrica no dependa de x^a y $h_{au} = \Pi^{au} = 0$. Después de hacer los cálculos la expresión para la ligaduras en función de las nuevas variables y momentos son: para la ligadura $\mathcal{C}_u$,

$$\mathcal{C}_u = -p'_w + p_w w' + p_v v' + p_y y' + p_z z' \tag{5.28}$$

y para la ligadura hamiltoniana densitizada es

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}} &= \frac{e^{2z}}{16}\left[(y')^2 + 4(v')^2e^{-y} - 4z'(4w' + y' - 5z') + 16z''\right]\\ &\quad + p_v^2e^y - 2p_wp_y - p_wp_z + 4p_y^2\end{aligned} \tag{5.29}$$

A continuación vamos a hacer explícita la conexión de estos espacio-tiempos con las ondas planas. En el modelo de midisuperespacio que presentaremos para las ondas planas utilizaremos la fijación parcial del gauge que hemos hecho en la sección anterior (porque las ondas planas incluyen dos vectores de Killing espaciales en su grupo de simetría) y las siguientes consideraciones nos guiarán en la fijación del gauge remanente.

La métrica (5.25) sería análoga a la métrica para las ondas planas (4.29) si fijáramos $z = z_0$ y $w = w_0$, además de particularizar la función lapso y la componente N^u a $N = e^{w_0-z_0/2+y/4}$ y $N^u = -1$. Sin embargo, todavía queda una diferencia entre ambas, para las ondas planas las soluciones no dependen de t. En la métrica (5.25) si queremos que las soluciones no dependan de t podemos hacer los siguiente: como z_0 es una función fija de u y w_0 está determinada por las ecuaciones de Einstein en función de y, v, bastará exigir que las derivadas temporales $\dot{y}, \dot{v}$ se anulen para eliminar la dependencia en t de la métrica. Si utilizamos la definición de la curvatura extrínseca K_{ij}(B.7) con las coordenadas $x^i \equiv \{x^1, x^2, u\}$ podemos demostrar que la condición $\dot{v} = \dot{y} = 0$ en las soluciones clásicas es equivalente a

$$\begin{aligned} 4h^{1/2}e^{-2z_0+y/2}K_{11} &= 2z_0' - y' \\ 4h^{1/2}e^{-2z_0+y/2}K_{12} &= vy' - 2vz_0' - 2v' \end{aligned} \tag{5.30}$$

siendo $h = e^{2w_0+z_0+y/2}$. Además estas ecuaciones implican que $\dot{v}$ y $\dot{y}$ se anulan aunque cambiemos los valores de w_0, N y N^u en la métrica (5.25) siempre que N^u no dependa de x^a y no modifiquemos el cociente $N/N^u = -h^{1/2}e^{-z_0}$.

Si ahora utilizamos la definición (B.11) podemos obtener los nuevos momentos canónicos en función de la curvatura extrínseca

$$\begin{aligned} &p_v = -h^{1/2}e^{-z-y/2}(vK_{11} + K_{12}) \\ &p_w = -h^{1/2}e^{-z-y/2}[(v^2 + e^y)K_{11} + 2vK_{12} + K_{22}] \\ &p_y = -\frac{1}{2}h^{1/2}e^{-z+y/2}K_{11} \\ &p_z = -h^{1/2}e^{-2w+z-y/2}K_{uu} \end{aligned} \tag{5.31}$$

Estas expresiones nos serán de utilidad más adelante.

5.4 Caso no ortogonal

Recordemos que en la fijación del gauge anterior hemos restringido nuestro análisis a soluciones en las que la métrica es diagonal por bloques. Ahora vamos a estudiar el caso en que los vectores de Killing no admitan hipersuperficies ortogonales. Si tenemos unas funciones $f_a(t)$ distintas de cero, las componentes N^a serán las soluciones de la ecuación

$$(N^a)' = -4\underset{\sim}{N} h_{uu}h^{ab}f_b(t) \tag{5.32}$$

y las soluciones para los momentos son

$$\Pi^{au} = h^{ab}f_b(t) \tag{5.33}$$

Utilizando estas relaciones la métrica será

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{uu}du^2 + h_{ab}dx^a dx^b + 2h_{ij}N^i dx^j dt \tag{5.34}$$

que en función de las nuevas variables se escribe

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2w-z+y/2}\left[-e^{2z}\underset{\sim}{N}^2 dt^2 + (du + N^u dt)^2\right] + \\ & e^{z-y/2}\left[(dx^1)^2 - 2v dx^1 dx^2 + (v^2 + e^y)(dx^2)^2 \right. \\ & \left. +2(N^1 - vN^2) dt dx^1 + 2(N^2(v^2+e^y) - vN^1) dt dx^2\right] \end{aligned} \tag{5.35}$$

Por último, las expresiones para las ligaduras son las siguientes, $\mathcal{C}_u$ es la misma que el caso anterior,

$$\mathcal{C}_u = -p_w' + p_w w' + p_v v' + p_y y' + p_z z' \tag{5.36}$$

y la ligadura hamiltoniana densitizada se diferencia sólo en unos términos extra

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}} &= \frac{e^{2z}}{16}\left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y} - 4z'(4w' + y' - 5z') + 16z''\right] \\ & +p_v^2 e^y - 2p_w p_y - p_w p_z + 4p_y^2 \\ & +2e^{2w-2z}\left[f_1^2(v^2 + e^y) + f_2^2 + 2v f_1 f_2\right] \end{aligned} \tag{5.37}$$

Capítulo 6

Modelo de midisuperespacio para las ondas planas

En este capítulo presentaremos un modelo de midisuperespacio para las ondas gravitatorias planas puras. Nos proponemos estudiar soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein que pueden ser descritas por la métrica (4.29).

Nuestro punto de partida será la fijación del gauge que hemos realizado en el capítulo anterior para los espacio-tiempos con dos vectores de Killing en el caso ortogonal ya que hemos visto que las ondas planas pueden ser consideradas como un caso particular de estos espacio-tiempos. Recordando la expresión de la métrica (5.25) tenemos

$$(6.1)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2w-z+y/2}[-e^{2z}\underset{\sim}{N}^2 dt^2 + (du + N^u dt)^2] + \\ &\quad e^{z-y/2}[(dx^1)^2 - 2v dx^1 dx^2 + (v^2 + e^y)(dx^2)^2] \end{aligned} \tag{6.2}$$

y en el sistema quedan dos ligaduras (5.28) , (5.29)

$$\mathcal{C}_u = -p'_w + p_w w' + p_v v' + p_y y' + p_z z' \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}} &= \frac{e^{2z}}{16}\left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y} - 4z'(4w' + y' - 5z') + 16z''\right] \\ &\quad + p_v^2 e^y - 2p_w p_y - p_w p_z + 4p_y^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

el hamiltoniano es

$$H = \int du\, (\underset{\sim}{N}\tilde{\mathcal{C}} + N^u \mathcal{C}_u) \tag{6.5}$$

y la estructura simpléctica (5.6)

$$\Omega = \int du \, (\mathbf{d}p_z \wedge \mathbf{d}z + \mathbf{d}p_y \wedge \mathbf{d}y + \mathbf{d}p_v \wedge \mathbf{d}v + \mathbf{d}p_w \wedge \mathbf{d}w) \tag{6.6}$$

Recordemos también que todas las variables $y, v, z, w, p_y, p_v, p_w, p_z$ y las funciones $\underset{\sim}{N}, N^u$ dependen solamente de las coordenadas (t, u)

6.1 Fijación-Reducción del gauge

El proceso de fijación del gauge y eliminación de las ligaduras lo vamos a hacer en dos etapas. En la primera, fijaremos los difeomorfismos en la coordenada u. En la siguiente eliminaremos la ligadura que nos queda y además añadiremos más simetría para obtener un modelo cuyas soluciones sean las ondas planas.

6.1.1 Fijación de los difeomorfismos en u

Comencemos por la primera fijación, queremos eliminar la libertad gauge asociada con la ligadura $\mathcal{C}_u$, que genera difeomorfismos en la coordenada u. Una manera de fijar esta libertad consiste en fijar la coordenada u mediante el valor de una variable métrica. Necesariamente la relación entre ambas debe ser biyectiva. En este caso podemos fijar que la variable z sea igual a z_0 (4.26) porque hemos visto que se trata de una función estrictamente creciente en u. La condición que imponemos para fijar el gauge será:

$$\chi_u \equiv z - z_0 = z + e^{-u} = 0 \tag{6.7}$$

Con esta relación se puede obtener la coordenada u a partir del valor de la variable métrica z y viceversa.

Ahora debemos comprobar que efectivamente esta condición permite fijar el gauge asociado a la ligadura $\mathcal{C}_u$. Como hemos visto en el capítulo anterior debemos asegurarnos que las relaciones

Ligaduras	$\mathcal{C}_u = 0$
Condiciones de fijación	$\chi_u = 0$

permiten fijar el gauge correctamente. Se deben verificar las dos condiciones (5.22) y (5.23). A continuación demostraremos que en este caso se cumplen ambas.

- En primer lugar, la ligadura y la condición de fijación forman un sistema de segunda clase. Basta ver que el corchete de Poisson entre ambas no se anula. Calculándolo obtenemos

$$\{\chi_u, \int du\, N^u \mathcal{C}_u\} = z_0' N^u \tag{6.8}$$

módulo la condición (6.7). Como z_0' no se anula en ningún punto, este corchete es distinto de cero si $N^u \neq 0$.

- Ahora falta ver que la condición (6.7) es compatible con la evolución dinámica. Debe existir una elección para N^u que se cumpla

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_u &= \{\chi_u, \int du\, (\underset{\sim}{N}\tilde{\mathcal{C}} + N^u \mathcal{C}_u)\} \\ &= -p_w \underset{\sim}{N} + z_0' N^u = 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Usando la condición (6.7) la solución que buscamos es

$$N^u = \frac{p_w \underset{\sim}{N}}{z_0'} \tag{6.10}$$

y notemos que N^u está bien definido siempre porque z_0' no se anula.

Hemos visto que tenemos una fijación del gauge correcta. La variable z queda fijada por la condición (6.7), mientras que N^u esta dado por (6.10). Ahora sólo nos queda resolver la ligadura $\mathcal{C}_u = 0$ para p_z. De forma inmediata obtenemos

$$p_z = p_z^0 \equiv \frac{1}{z_0'}(p_w' - p_w w' - p_v v' - p_y y') \tag{6.11}$$

Antes de hacer la reducción me gustaría reseñar que para que el proceso de fijación sea correcto sólo hemos necesitado hacer uso de que $z_0' \neq 0$. Por lo tanto, se podía haber elegido otra función cuya derivada no se anulara en ningún punto y el proceso de fijación estaría bien.

Ahora ya podemos reducir el sistema. Las relaciones (6.7, 6.11, 6.10) permiten eliminar los grados de libertad (z, p_z) y la ligadura $\mathcal{C}_u$. Así se obtiene un modelo reducido cuyo espacio de fases está descrito por el conjunto de variables canónicas (v, w, y, p_v, p_w, p_y). La forma simpléctica es

$$\bar{\Omega} = \int du\, (\mathbf{d}p_v \wedge \mathbf{d}v + \mathbf{d}p_w \wedge \mathbf{d}w + \mathbf{d}p_y \wedge \mathbf{d}y) \tag{6.12}$$

y el hamiltoniano

$$\bar{H} = \int du\, \underset{\sim}{N}\tilde{\mathcal{C}} \tag{6.13}$$

donde $\mathcal{C}_r$ es la única ligadura que queda en el sistema. La expresión la ligadura hamiltoniana densitizada $\tilde{\mathcal{C}}_r \equiv \tilde{\mathcal{C}}(z = z_0, p_z = p_z^0)$ es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_r &= \frac{e^{2z_0(u)}}{16}\Big[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y} - 4z_0(u)'(4w' + y' - 5z_0(u)') + 16 z_0(u)''\Big] \\ &\quad + p_v^2 e^y - 2p_w p_y - p_w p_z^0 + 4p_y^2 \end{aligned} \tag{6.14}$$

donde tenemos que sustituir la ecuación (6.11) para p_z^0.

6.1.2 Fijación y reducción final

Como en el modelo reducido sólo queda una ligadura basta con añadir una condición para fijar la libertad gauge asociada a esta ligadura. Sin embargo, además de esta condición de fijación vamos a imponer dos condiciones extra, las cuáles deben ser interpretadas como simetrías que exigimos al modelo. Hasta ahora sólo hemos impuesto que tengamos dos vectores de Killing espaciales, que conmutan y que admiten superficies ortogonales, y recordemos que las ondas planas tienen mucha más simetría, poseen un grupo de simetrías de cinco parámetros.

Por lo tanto el proceso de reducción que llevaremos a cabo no sólo consiste en fijar la libertad gauge que queda, sino que a la vez estamos imponiendo unas condiciones de simetría en el modelo. El objetivo es reducir el espacio de fases, de forma que las soluciones de este modelo sean las ondas gravitatorias planas descritas por (4.29).

Las condiciones de simetría necesarias para llegar a tal modelo consisten esencialmente en imponer que las soluciones no dependan del tiempo. Hemos visto en el capítulo anterior que para una métrica de la forma (5.25) con $z = z_0$ y $N^u = -e^{z_0}\underset{\sim}{N}$, la independencia del tiempo de las variables y, v está garantizada si se verifican (5.30). Usando las relaciones (5.31) podemos reescribir estas condiciones como

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv p_y - \frac{e^{z_0}}{8}(y' - 2z_0') = 0, \\ \chi_2 &\equiv 2e^{y - z_0} p_v - v' = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

y teniendo en cuenta la relación (6.10), estas condiciones asegurarán que y, v no dependerán del tiempo en las soluciones clásicas si se cumple también

$$\chi_0 \equiv p_w + z_0' e^{z_0} = 0. \tag{6.16}$$

En este caso las condiciones (6.15) también aseguran que los momentos p_y, p_z no dependen del tiempo en las soluciones clásicas. Tampoco dependerá el momento p_w si se verifica (6.16).

Por la tanto, la única variable que podría depender del tiempo es w. Para evitar esto vamos a imponer que

$$\chi_3 \equiv w - w_0 = 0 \tag{6.17}$$

donde w_0 es la función definida en (4.28). Entonces, vamos a exigir que w tenga el mismo valor que toma para las soluciones correspondientes a ondas gravitatorias planas. Como w_0 depende sólo de y, v tenemos garantizada la independencia temporal en las soluciones clásicas.

Ahora vamos a escribir la ligadura del sistema $\tilde{\mathcal{C}}_r$ en función de estas condiciones. La expresión que toma es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_r &= (2y'\chi_1 + e^{z_0-y}v'\chi_2 + 2w'\chi_0 - 2\chi_0')\frac{\chi_0}{2z_0'} + 4\chi_1^2 \\ &+\frac{e^{2z_0-y}}{4}\chi_2^2 - 2(\chi_1 + e^{z_0}\chi_3')\chi_0 + e^{z_0}\chi_0' \end{aligned} \tag{6.18}$$

Aquí podemos ver que si imponemos como condiciones de simetría $\chi_1 = \chi_2 = 0$ en nuestro modelo, la condición $\chi_0 = 0$ es una solución de la ligadura $\tilde{\mathcal{C}}_r$. Por lo tanto, la superficie definida en el espacio de fases por las condiciones $\chi_I = 0$ $(I = 0, ..., 3)$ es una sección de la superficie definida por la ligadura $\tilde{\mathcal{C}}_r = 0$.

Resumiendo las condiciones anteriores, vamos a hacer la reducción de la siguiente forma: Exigiremos las condiciones (6.15) como condiciones de simetría, y también impondremos la condición (6.17) para fijar el gauge asociado a $\tilde{\mathcal{C}}_r$. Veremos que el proceso de reducción es correcto y que finalmente recuperaremos como solución a la ligadura $\tilde{\mathcal{C}}_r$ la condición $\chi_0 = 0$.

Veamos ahora que el problema de fijación de gauge es correcto. Tenemos las relaciones

Ligaduras	$\tilde{\mathcal{C}}_r = 0$
Condiciones de fijación	$\chi_1 = 0$ $\chi_2 = 0$ $\chi_3 = 0$

Y para que el proceso de fijación sea correcto debemos comprobar que se cumplen las condiciones (5.22) y (5.23). El conjunto $\{\tilde{\mathcal{C}}_r, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ lo escribiremos como $\{\chi_{\mathcal{A}}\}$, donde $\mathcal{A} = 0, ..., 3$.

- Para demostrar que la reducción es admisible en primer lugar debemos asegurarnos que el conjunto $\{\chi_{\mathcal{A}}\}$, formado por las condiciones (fijación + simetría) y la ligadura, es un sistema de segunda clase en la superficie de reducción que estamos considerando. Vamos a definir

$$\chi(g) = \int du \sum_{\mathcal{A}} g_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{A}} \tag{6.19}$$

donde $\{g_{\mathcal{A}}\}$ es un conjunto de funciones C_0^∞ de u, es decir, son funciones de u diferenciables y con soporte compacto. Entonces, imponer que $\chi_{\mathcal{A}} = 0$ es equivalente a pedir que $\chi(g)$ se anule para todas las posibles elecciones de $g_{\mathcal{A}}$. Para demostrar que el conjunto $\{\chi_{\mathcal{A}}\}$ es un sistema de segunda clase tenemos que ver que no existe ninguna combinación de la forma $\chi(g)$, excepto la trivial, que conmute débilmente con todas las $\chi_{\mathcal{A}}$.

Veamos que ocurre esto pero antes mencionaremos una propiedad muy útil de la expresión (6.18) para la ligadura hamiltoniana $\tilde{\mathcal{C}}_r$. Como casi todos los términos son cuadráticos en las condiciones χ_I si queremos calcular el corchete de Poisson sobre la superficie definida por estas condiciones entre esta ligadura y cualquier función del espacio de fases Θ sólo sobrevive el último término, es decir, tenemos la siguiente propiedad

$$\{\Theta, \tilde{\mathcal{C}}_r\} \approx \{\Theta, e^{z_0}\chi_0'\} \tag{6.20}$$

Ahora, haciendo uso de esta propiedad es fácil obtener el resultado

$$\{\tilde{\mathcal{C}}_r, \chi(g)\} \approx -e^{z_0} g_3' \tag{6.21}$$

entonces como $e^{z_0} \neq 0$ y la función g_3 es C_0^∞, se sigue que $\chi(g)$ conmuta débilmente con $\tilde{\mathcal{H}}_r$ solamente si g_3 es cero.

Ahora vamos a llamar $\bar{\chi}(g)$ a $\chi(g)$ en el caso de que $g_3 = 0$. Después de unos cuantos cálculos podemos obtener la expresión

$$\sum_{\mathcal{A}=1}^{2} g_{\mathcal{A}} \{\chi_{\mathcal{A}}, \bar{\chi}(g)\} \approx -\frac{1}{8}(e^{z_0} g_1^2 + 16 e^{y-z_0} g_2^2)' \tag{6.22}$$

De aquí, como el término entre paréntesis es una suma de funciones no negativas y las funciones g_1, g_2 son C_0^∞ si se anula el corchete de Poisson entre $\bar{\chi}(g)$ y χ_1 o χ_2, esto implica que las funciones g_1 y g_2 son nulas.

Por otro lado, tenemos que

$$\{\chi_3, \hat{\chi}(g)\} \approx -(e^{z_0} g_0)' \tag{6.23}$$

donde $\hat{\chi}(g)$ denota la restricción de $\chi(g)$ al caso en que g_0 es la única función de $\{g_{\mathcal{A}}\}$ distinta de cero. Si tenemos en cuenta que $g_0 \in C_0^\infty$, este último corchete de Poisson se anula si $g_0 = 0$.

Hemos visto que para que $\chi(g)$ conmute débilmente con todas las $\{\chi_{\mathcal{A}}\}$, las funciones $\{g_{\mathcal{A}}\}$ deben ser idénticamente nulas. Por lo tanto, no existe ninguna combinación lineal de $\{\chi_{\mathcal{A}}\}$ que sea de primera clase, es decir, que conmute débilmente con todas. Entonces, queda demostrado que es un sistema de segunda clase.

- Ahora nos queda ver que se verifica la segunda condición en el proceso de reducción: las condiciones que imponemos deben ser compatibles con la evolución dinámica del sistema. Vamos a demostrar ahora que la sección definida por $\chi_I = 0$ $(I = 0, ..., 3)$ en la superficie de ligaduras es preservada por la dinámica para una elección adecuada del lapso densitizado. Usando la propiedad (6.20) de la ligadura $\tilde{\mathcal{C}}_r$ podemos hacer

$$\dot{\rho}^\alpha = \{\rho^\alpha, \int du\, \underset{\sim}{N} \tilde{\mathcal{C}}_r\} \approx \{\rho^\alpha, \int du\, \underset{\sim}{N} e^{z_0} \chi_0'\} \tag{6.24}$$

y teniendo en cuenta que las variables $\{\rho^\alpha\} \equiv \{v, y, p_v, p_w, p_y\}$ conmutan con χ_0 obtenemos

$$\dot{\rho}^\alpha \approx 0 \tag{6.25}$$

y por lo tanto, las variables ρ^α serán independientes del tiempo en las soluciones clásicas. Para llegar a este resultado, no hemos utilizado la condición $\chi_3 = 0$. Como en las expresiones χ_1, χ_2 no aparece w tenemos que las condiciones $\chi_1 = \chi_2 = 0$ son preservadas por la evolución temporal.

Sólo nos queda asegurar que χ_3 es compatible con la dinámica. Al igual que antes, utilizando la propiedad (6.20) y como $\{\chi_3, \chi_0\} = \{w, \chi_0\}$ obtenemos

$$\dot{\chi}_3 \approx -(e^{z_0} \underset{\sim}{N})' \approx \dot{w} \tag{6.26}$$

Por lo tanto, si pedimos que la condición $\chi_3 = 0$ sea compatible con la dinámica estamos asegurando que la variable w sea independiente del tiempo en las soluciones. Esta última igualdad nos da una ecuación para el lapso, cuya solución es

$$\underset{\sim}{N} = F(t) e^{-z_0} \tag{6.27}$$

Con esto terminamos de comprobar que el proceso de reducción es correcto, las condiciones que hemos impuesto son adecuadas (en el sentido de que forman un sistema de segunda clase con la ligadura) y también son compatibles con la dinámica, por lo tanto ya podemos hacer la reducción. El lapso está dado por la ecuación (6.27). Las condiciones de fijación nos dan las expresiones para los momentos p_y, p_v y la variable w en función de y, v. Finalmente, la solución de la ligadura (6.16) nos proporciona una expresión para el momento p_w. Reagrupando las expresiones tenemos

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{N} &= F(t)e^{-z_0} \\
p_y &= \frac{e^{z_0}}{8}(y' - 2z_0') \\
p_v &= \frac{1}{2}v' e^{z_0-y} \\
w &= \frac{\ln(z_0')}{2} + \frac{3z_0}{4} - \frac{y}{4} + \int_{u_0}^{u} \frac{1}{16z_0'}\left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y}\right] \\
p_w &= -z_0' e^{z_0}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Hemos eliminado del sistema las variables (p_y, p_v, w, p_w) y la ligadura $\tilde{\mathcal{C}}_r$. Ahora tenemos dos grados de libertad, las variables de la métrica y, v. Antes de pasar a estudiar el modelo reducido que hemos obtenido vamos a estudiar los términos de superficie y veremos que en este caso no tenemos ninguna contribución. Es necesario este análisis para asegurar un proceso de reducción riguroso.

6.2 Términos de superficie

En todo el proceso de reducción y también en la fijación del gauge para los espacio-tiempos con dos vectores de Killing nada hemos mencionado acerca de los términos de superficie. En esta sección pretendemos analizar estos términos para el caso que estamos estudiando.

En el apéndice B tenemos un resumen del formalismo hamiltoniano para la Relatividad General. La acción tiene una serie de términos de superficie (B.26,B.27) que pueden contribuir significativamente al hamiltoniano en el caso de que no se anulen. Estos términos pueden afectar al proceso de fijación del gauge porque en la condición (5.23) aparece el hamiltoniano. Veamos cuando serán importantes estos términos.

Las contribuciones de los términos de superficie se obtienen integrando sobre la frontera de la variedad $\mathcal{M}$. Entonces, en primer lugar podemos descartar todos aquellos términos que estén integrados sobre una superficie $t = constante$ porque contribuirán con una constante en la acción. Por ejemplo, en nuestro caso eliminaremos de la acción términos de la forma

$$S \sim \int dt du \partial_t f(h_{ij}, \Pi^{ik}) = \int du \left[f(h_{ij}, \Pi^{ik})\right]_{t=t_0}^{t=t_1} \tag{6.29}$$

en cambio, los términos sobre fronteras $u = cte.$ pueden añadir contribuciones al hamiltoniano

$$S \sim \int dtdu\partial_u f(h_{ij}, \Pi^{ik}) = \int dt \left[f(h_{ij}, \Pi^{ik})\right]_{u=u_0}^{u=u_1} \tag{6.30}$$

$$\Downarrow$$

$$H \rightarrow H + \left[f(h_{ij}, \Pi^{ik})\right]_{u=u_0}^{u=u_1} \tag{6.31}$$

En nuestro caso estos últimos términos no afectan al proceso de fijación del gauge ya que los términos de superficie y las condiciones de fijación conmutan bajo corchetes de Poisson porque los términos de superficie están evaluados en $u = \pm\infty$. Sin embargo, hay una condición en la que esto no es así, en la última reducción hemos fijado $w - w_0 = 0$, y esta función no es local, tenemos la integración

$$w_0 \sim \int_{u_0}^{u} \frac{1}{16z_0'}\left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y}\right] \tag{6.32}$$

entonces la variable $w(\infty)$ no sólo dependerá de los grados de libertad de y, v en $u = \infty$ sino que también depende de los valores de y, v en todo el intervalo (u_0, ∞). Por este motivo, si en los términos de superficie aparece una variable que se ha fijado con una condición de este tipo, tendremos una contribución no trivial.

Vayamos ahora al proceso de reducción que hemos seguido. Los términos de superficie que tenemos de partida los podemos dejar hasta el final porque en todas las reducciones, salvo en la última, las condiciones de fijación son locales. Entonces los términos de superficie no afectan al proceso de reducción. Ahora, como en la última reducción imponemos una condición no local estos términos podrían dar lugar a contribuciones en el hamiltoniano reducido del sistema. En el apéndice D hemos calculado estos términos de superficie para este caso y las contribuciones que obtenemos son triviales, o bien se anulan o bien son términos como los que hemos descartado (6.29).

En definitiva, no tenemos ninguna contribución de superficie y el hamiltoniano reducido lo podemos obtener de (6.5) haciendo la reducción.

6.3 Sistema reducido

Después del proceso de fijación del gauge y reducción del sistema hemos obtenido un sistema libre de ligaduras, cuyos grados de libertad son las dos funciones métricas y, v. El hamiltoniano del sistema reducido es nulo, ya que hemos eliminado las ligaduras y no tenemos contribuciones de términos de superficie. Esto nos dice que las soluciones clásicas serán dos funciones $y(u), v(u)$ que no dependerán de t. Esto era lo que esperábamos, porque las condiciones de simetría que exigimos en la última reducción precisamente aseguraban esta independencia temporal.

Las soluciones también dependen de una función arbitraria, $F(t)$, que aparece en el lapso. Sin embargo, esta función puede ser reabsorbida con una redefinición del tiempo

$$T = \int^t F(\bar{t}) d\bar{t} \tag{6.33}$$

y así la métrica se transforma de la siguiente forma

$$e^{2w_0 - z_0 + y/2}[-e^{2z_0} F(t)^2 e^{-2z_0} dt^2 + (du - F(t)dt)^2] \tag{6.34}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{2w_0 - z_0 + y/2}[-dT^2 + (du - dT)^2] \tag{6.35}$$

Recordando que

$$z_0 = -e^{-u} \tag{6.36}$$

$$w_0 = \frac{\ln(z_0')}{2} + \frac{3z_0}{4} - \frac{y}{4} + \int_{u_0}^{u} \frac{1}{16 z_0'} \left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y} \right] \tag{6.37}$$

la métrica para el modelo reducido será

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & z_0 e^{z_0/2} e^{\Phi} (du^2 - 2dT du) + \\ & e^{z_0 - y/2}[(dx^1)^2 - 2v dx^1 dx^2 + (v^2 + e^y)(dx^2)^2] \end{aligned} \tag{6.38}$$

siendo

$$\Phi = \frac{1}{8} \int_{u_0}^{u} \frac{1}{z_0'} \left[(y')^2 + 4(v')^2 e^{-y} \right] \tag{6.39}$$

Este modelo reducido describe los espacio-tiempos tiempos (4.29) que queríamos estudiar, que se corresponden a ondas gravitatorias planas y de vacío. Como hemos visto, las soluciones clásicas del sistema reducido son dos funciones arbitrarias $y(u), v(u)$.

En este modelo la dinámica es trivial porque el hamiltoniano es nulo. Toda la información relevante para cuantizar el sistema esta codificada en la estructura simpléctica. La forma simpléctica reducida Ω_r del sistema se obtiene haciendo el *pull-back* de la forma simpléctica (6.12) a la superfice del espacio de fases definida por las condiciones $\chi_I = 0$ $(I = 0, ...3)$. Teniendo en cuenta que p_w es una función fija de u por la relación $\chi_0 = 0$ obtendremos

$$\Omega_r = \int du \, \frac{e^{z_0}}{8} [\mathbf{d}y' \wedge \mathbf{d}y + 4\mathbf{d}(v' e^{-y}) \wedge \mathbf{d}v] \tag{6.40}$$

Ahora explicaremos el proceso que se ha de seguir para obtener la acción reducida de este sistema, que por supuesto lleva a los mismos resultados, el hamiltoniano del sistema es nulo y las soluciones serán dos funciones de u arbitrarias.

Comenzamos por la acción de Hilbert-Einstein en la descomposición 3+1 e imponemos que la métrica es independiente de las coordenadas x^a $(a = 1, 2)$. Integramos en esas coordenadas y absorbemos el área correspondiente en la constante de Newton G, imponiendo que la constante efectiva sea $1/16\pi$, como explicamos en (5.3). Hemos eliminado las ligaduras y por lo tanto se pueden hacer igual a cero los términos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_i$. La acción reducida S_r sólo tendrá contribuciones de la densidad lagrangiana $\Pi^{ij} \dot{h}_{ij}$, es decir,

$$S_r = \int dt du \, \Pi^{ij} \dot{h}_{ij} \tag{6.41}$$

Entonces substituiremos $\Pi^{au} = 0$ y las relaciones (6.28), (6.7) y (6.11) para obtener finalmente la acción reducida

$$S_r = \int dt du \, \frac{e^{z_0}}{8} (y' \dot{y} + 4v' e^{-y} \dot{v}) \tag{6.42}$$

En este modelo reducido la acción es lineal en las derivadas temporales, por lo tanto el hamiltoniano de este sistema es nulo. Esto ocurre en la elección de coordenadas que hemos hecho (t, u). El Hamiltoniano ha de ser nulo en estas coordenadas porque es el generador de la evolución en t y hemos visto que las soluciones son funciones de u que no dependen del tiempo. Si utilizáramos otras coordenadas obtendríamos otro hamiltoniano diferente. Este punto se tratará con más detalle en el caso de las ondas linealmente polarizadas.

A partir de la estructura simpléctica que hemos obtenido tenemos definidos los corchetes de Dirac entre los grados de libertad del sistema reducido. Si escribimos la forma simpléctica como

$$\Omega = \int dx \int d\tilde{x} \, \Omega_{\alpha\beta}(x, \tilde{x}) \, \mathbf{d}X^\alpha(x) \wedge \mathbf{d}X^\beta(\tilde{x}) \tag{6.43}$$

donde $\mathbf{d}X^\alpha(x)$ denota $(\mathbf{d}y, \mathbf{d}v)$ en el punto x. Para obtener el corchete de Dirac entre dos funciones A, B del espacio de fases reducido tenemos que invertirla,

$$\{A, B\}_D = \int dx \int d\tilde{x} \, \Omega^{\alpha\beta}(x, \tilde{x}) \, A_\alpha(x) B_\beta(\tilde{x}) \tag{6.44}$$

donde A_α son las componentes de $\mathbf{d}A \equiv A_\alpha \mathbf{d}X^\alpha$.

En nuestro modelo la forma simpléctica es cerrada ($\mathbf{d}\Omega_r = 0$) y veremos que en general es no degenerada. Sin embargo, la expresión de $\Omega_{\alpha\beta}(x,\tilde{x})$ es bastante complicada y a pesar de nuestros intentos no hemos conseguido invertirla para definir los corchetes de Dirac. Ahora veremos que, salvo en algunos puntos excepcionales, esta forma simpléctica es no degenerada, por lo menos en su condición débil. $\Omega_{\alpha\beta}$ pasa de $\mathbf{d}X^\alpha$ a su dual $\mathbf{d}X_\beta$ según la relación

$$\mathbf{d}X^\alpha(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{d}X_\beta(x) = \int d\tilde{x}\; \Omega_{\beta\alpha}(x,\tilde{x})\, \mathbf{d}X^\alpha(\tilde{x}) \tag{6.45}$$

Calcularemos los elementos $\mathbf{d}X_\alpha$ de forma que al actuar $\Omega_{\alpha\beta}$ sobre ellos se anula, es decir,

$$\int d\tilde{x}\; \Omega_{\beta\alpha}(x,\tilde{x}) \mathbf{d}X^\alpha(\tilde{x}) = 0 \tag{6.46}$$

Cambiando la variable y por $y + z_0$, las componentes de la forma simpléctica se pueden escribir como

$$\Omega_{\alpha\beta}(x,\tilde{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\partial_x[\delta(x-\tilde{x})]e^{z_0(\tilde{x})} & -\frac{1}{4}v'(x)e^{-y(x)}\delta(x-\tilde{x}) \\ -\frac{1}{4}v'(x)e^{-y(x)}\delta(x-\tilde{x}) & -\frac{1}{2}\partial_x[\delta(x-\tilde{x})]e^{-y(\tilde{x})} \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

y la solución para la ecuación (6.46) es

$$\begin{aligned} \mathbf{d}y' &= -2v'e^{-z}e^{-y}\mathbf{d}v \\ \mathbf{d}v' &= -\frac{1}{2}v'\mathbf{d}y \end{aligned} \tag{6.48}$$

Por lo tanto, en general no hay degeneración. Si quisieramos estudiar algún caso en particular que tuviera puntos degenerados, estos deberían ser eliminados de alguna forma para tener una forma simpléctica adecuada.

Llegados a este punto dejaremos de lado el análisis de la estructura simpléctica en el caso de dos polarizaciones. Aunque nosotros no la hayamos encontrado, posiblemente existe una transformación canónica de las variables del espacio de fases que lleve a una expresión más manejable de la forma simpléctica. Por lo tanto este tema queda abierto.

Después de obtener un modelo reducido libre de ligaduras podemos pasar a su cuantización. Para ello, se debe trasladar el álgebra clásica de Poisson obtenida de la estructura simpléctica (6.40) a un álgebra cuántica entre operadores. En este caso toda la complejidad está codificada en la estructura simpléctica. Esta situación es diferente a otros modelos de midisuperespacio para espacio-tiempos con dos vectores de Killing, como por ejemplo el modelo de Gowdy [77], en el cuál, el álgebra de Poisson es sencilla y toda la dificultad está en el hamiltoniano reducido. En la próxima sección trataremos el caso de las ondas con polarización lineal y veremos que en ese caso se obtiene una estructura simpléctica manejable.

6.4 Ondas linealmente polarizadas

Las ondas planas con polarización lineal[1] que vamos a estudiar se corresponden con el caso particular de la métrica (4.29) en el que la variable v se anula. Una vez que tenemos un modelo para las ondas planas nos planteamos estudiar el caso de las ondas linealmente polarizadas. Sólo tenemos que imponer la condición $v = 0$ en el modelo y hacer la reducción. Sin embargo, como no hemos llegado a obtener los corchetes de Dirac del modelo, no es posible hacer la reducción.

Para obtener un modelo reducido que describa las ondas planas con polarización lineal vamos a seguir la siguiente estrategia: Repetimos todos los pasos llevados a cabo en el modelo anterior hasta llegar a la última reducción. En este punto incorporaremos la condición $v = 0$ como una simetría más y demostraremos que es posible reducir el sistema correctamente con estas condiciones. De nuevo, repetiremos el proceso de reducción. Tenemos las relaciones

Ligaduras	$\tilde{\mathcal{C}}_r = 0$
Condiciones de fijación	$\chi_1 = 0$ $\chi_2 = 0$ $\chi_3 = 0$ $\chi_4 = 0$

y debemos asegurarnos que se cumplen las condiciones (5.22) y (5.23).

- Para demostrar que efectivamente se trata de un sistema de segunda clase seguiremos razonamientos análogos al caso anterior. Ahora llamaremos

[1] Véase la Sección 4.3

$\{\chi_{\mathcal{A}}\} \equiv \{\tilde{\mathcal{C}}_r, \chi_1, \chi_2, \chi_3\, \chi_4\}$ donde $\mathcal{A} = 0, ..., 4$. Construimos una combinación lineal de estas condiciones

$$\chi(g) = \int du \sum_{\mathcal{A}} g_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{A}} \tag{6.49}$$

donde $\{g_{\mathcal{A}}\}$ es un conjunto C_0^∞ de funciones de u. Es sencillo ver que

$$\{\chi_4, \chi(g)\} \approx 2e^{y-z_0} g_2 \tag{6.50}$$

de forma que para anular este corchete necesitamos que $g_2 = 0$. Entonces χ_4 conmuta con todas las condiciones excepto con χ_2, los corchetes de $\chi(g)$ con $\tilde{\mathcal{C}}_r, \chi_1$ y χ_3 son iguales que en el caso de las ondas planas generales. Por lo tanto, para que el corchete con $\tilde{\mathcal{C}}_r$ se anule debe cumplirse $g_3 = 0$ como en el caso general. Llamaremos $\bar{\chi}(g)$ a $\chi(g)$ con $g_2 = g_3 = 0$. Como el corchete de $\bar{\chi}(g)$ con χ_1 no se ve afectado por la presencia del término χ_4, tenemos que la ecuación (6.22) para las ondas con dos polarizaciones sigue siendo válida si hacemos $g_2 = 0$. De esta forma, la anulación del corchete con χ_1 implica que $g_1 = 0$. Sea $\hat{\chi}(g)$ la restricción de $\bar{\chi}(g)$ a $g_1 = 0$. Puesto que la presencia del término χ_4 en $\hat{\chi}(g)$ no modifica el corchete con χ_3, exigir que tal corchete sea nulo conlleva, igual que en el caso general, que $g_0 = 0$. Sólo nos queda

$$\{\chi_2, \int du g_4 \chi_4\} = -2e^{y-z_0} g_4 \tag{6.51}$$

y obviamente, para que se anule este corchete necesitamos que $g_4 = 0$.

Por lo tanto, hemos visto que no existe ninguna combinación de $\chi(g)$ que conmute débilmente con todas las $\chi_{\mathcal{A}}$ y con esto queda demostrado que el problema de fijación-reducción está bien puesto.

- Ahora sólo nos queda demostrar que las condiciones χ_I $(I = 1..4)$ son conservadas por la evolución dinámica del sistema. Sólo nos hace falta asegurarlo para la condición $\chi_4 = 0$, porque las demás ya habíamos visto que eran compatibles con la dinámica. Pero esto ya lo tenemos hecho porque en el caso general también demostramos que $\dot{v} \equiv 0$, así que ya esta todo hecho.

En definitiva, el proceso de fijación-reducción es correcto. Podemos realizar la reducción igual que en el caso de las dos polarizaciones pero ahora incorporando la condición $v = 0$. La métrica para el modelo reducido es

$$\begin{aligned} ds^2 &= z_0(u) e^{z_0(u)/2} e^{\Phi(u)} [du^2 - 2dT du] \\ &+ e^{z_0(u)} \left[e^{-y(u)} (dx^1)^2 + e^{y(u)} (dx^2)^2 \right] \end{aligned} \tag{6.52}$$

siendo

$$\Phi(u) = -\int_{u_0}^{u} \frac{dr}{2z_0(r)}[y'(r)]^2 \tag{6.53}$$

$$z_0(u) = -e^{-u} \tag{6.54}$$

Aquí $y'(u)$ es la derivada de $y(u)$ y u_0 es una constante. Esta métrica es una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío para cualquier función y. Describe una onda gravitatoria plana con polarización lineal, siempre teniendo en mente que no representa todo el espacio-tiempo que puede ser cubierto con coordenadas armónicas.

En este sistema reducido el único grado de libertad está en la función y, la cuál reemplazaremos por la función Y, definida por la relación

$$y(u) = \sqrt{2}e^{-z_0(u)/2}Y(u) \tag{6.55}$$

para simplificar la expresiones de la acción y la estructura simpléctica. Así, podemos escribir la acción reducida para este sistema como

$$S_r = \int dt \int du\, Y'\dot{Y} \tag{6.56}$$

y la forma simpléctica sobre cualquier sección de tiempo constante

$$\Omega_r = \int_\Sigma du\, \mathbf{d}Y' \wedge \mathbf{d}Y \tag{6.57}$$

En este caso el hamiltoniano también es cero. Como ya hemos explicado en el caso anterior, esto es debido a la particular elección de coordenadas. En este caso son (t, u) y como las soluciones son funciones $Y(u)$ que no evolucionan en t, el generador de esta evolución temporal, es decir, el Hamiltoniano, ha de ser nulo. Si ahora hacemos un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} & \partial_T &= \partial_{\bar{T}} - \partial x \\ u &= x + \bar{T} & \partial u &= \partial x \end{aligned} \tag{6.58}$$

la acción se tranformará en

$$S_r = \int d\bar{T}dx\, [\, \partial_x Y \partial_{\bar{T}} Y - (\partial_x Y)^2\,] \tag{6.59}$$

y el hamiltoniano del sistema ya no será nulo, tendremos

$$H_r = \int dx\, (\partial_x Y)^2 \tag{6.60}$$

Capítulo 7

Cuantización del modelo

En este capítulo vamos construir una teoría cuántica para el modelo de midisuperespacio que describe las ondas planas linealmente polarizadas. En el capítulo anterior completamos la reducción eliminando todas las ligaduras, y ahora pasaremos a la cuantización, por lo tanto estamos siguiendo el esquema de cuantización en el espacio de fases reducido.

Escribiremos de nuevo la métrica de este modelo

$$\begin{aligned} ds^2 &= z_0(u)e^{z_0(u)/2}e^{\Phi(u)}dudV \\ &+ e^{z_0(u)}\left[e^{-y(u)}(dx^1)^2 + e^{y(u)}(dx^2)^2\right] \end{aligned} \tag{7.1}$$

siendo

$$\Phi(u) = -\int_{u_0}^{u} \frac{dr}{2z_0(r)}[y'(r)]^2, \qquad z_0(u) = -e^{-u} \tag{7.2}$$

donde prima denota derivada respecto a u, coordenada que recorre todo el eje real y u_0 es una constante. Los grados de libertad del sistema están en la función $y(u)$, que es arbitraria. Si hacemos el cambio

$$y(u) = \sqrt{2}e^{-z_0(u)/2}Y(u) \tag{7.3}$$

la expresión para la acción del modelo es

$$S = \int_{t_0}^{t_f} dt \int_{\Sigma} du\, Y'\dot{Y} \tag{7.4}$$

y la forma simpléctica es

$$\Omega = \int_{\Sigma} du\, \mathbf{d}Y' \wedge \mathbf{d}Y \tag{7.5}$$

donde t_0 y t_f son los valores inicial y final de la coordenada tiempo.

Antes de atacar la cuantización del caso general vamos a considerar un caso más sencillo en el que la onda no cubre todo el espacio-tiempo, ocupa una zona limitada por regiones planas (como ocurre en las ondas *sandwich*[1]). Después pasaremos al caso de una onda plana linealmente polarizada general. Construiremos los operadores de la métrica regularizados y completaremos la cuantización del modelo.

7.1 Modelo con modos discretos

Comencemos analizando el caso en que el espacio-tiempo es plano fuera de la región, $u \in I_L \equiv [-L, L]$, donde L es una constante positiva. Si queremos ser más precisos, supondremos que la función $y(u)$ de la métrica (7.1) es constante para la región $u > L$ y $u < -L$. Por lo tanto, lo mismo pasará con la función $\Phi(u)$ de la ecuación (7.2). Se puede comprobar fácilmente que para la región $|u| > L$ el espacio-tiempo es plano. Dentro del intervalo no exigiremos ninguna condición sobre $y(u)$, y lo mismo para el campo $Y(u)$, que será arbitrario. Esta clase de métricas podemos interpretarlas con una especie de ondas sandwich (ya que no imponemos ninguna condición en los extremos del intervalo sobre las derivadas de la métrica y se necesitan unas condiciones de juntura adecuadas para tener un espacio-tiempo de tipo onda sandwich).

A continuación vamos a suponer que las soluciones de ondas planas que estamos considerando son suficientemente suaves, es decir, la restricción de $Y(u)$ al intervalo I_L es continua. Entonces el campo Y tiene unos límites bien definidos a acercarnos a los dos extremos del intervalo desde el interior, es decir, cuando u tiende a L^- y a $-L^+$. Además podemos restringirnos a considerar soluciones que verifiquen:

$$\lim_{u \to L^-} Y(u) = \lim_{u \to -L^+} Y(u) \tag{7.6}$$

La razón es la siguiente: supongamos que el campo $Y(u)$ no verifica esta condición, entonces si le añadimos una función de la forma $Ce^{z_0(u)/2}$ con una constante C adecuada podemos obtener un campo $\bar{Y}(u)$ que cumpla la ecuación anterior. Ahora, podemos ver que las métricas obtenidas con los campos $Y(u)$ y $\bar{Y}(u)$ se diferencian en una transformación de escala

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow Ax^1 \\ x^2 &\rightarrow x^2/A \end{aligned} \tag{7.7}$$

donde la constante A es igual a $e^{-C/\sqrt{2}}$. Por lo tanto, como esta transformación de escala deja invariantes los dominios de definición de las coordenadas x^a,

[1]Véase la Section 4.3

que son la línea real, las geometrías descritas por los campos $Y(u)$ y $\bar{Y}(u)$ son equivalentes. Por consiguiente, la condición de contorno (7.6) nos permite eliminar el exceso de geometrías equivalentes.

La condición (7.6) nos va a permitir extender el campo $Y(u)$, restringido a I_L, a una función periódica sobre todo el eje real, con periodo $2L$. Para no complicar innecesariamente la notación seguiremos llamando $Y(u)$ a esta función periódica que coincide con la original $Y(u)$ en el intervalos I_L. Como esta función es periódica y además es suave podemos expandirla en la siguiente serie de Fourier

$$Y(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \left(a_n e^{-in\pi u/L} + a_n^{\star} e^{in\pi u/L} \right). \tag{7.8}$$

y cómo $Y(u)$ es real también lo será a_0 y además $a_n^{\star}$ debe ser el complejo conjugado de a_n. En principio, los coeficientes de Fourier de la expansión dependerán de la coordenada t. Sin embargo, como el hamiltoniano es nulo, estos coeficientes no dependerán del tiempo en las soluciones clásicas.

Veamos ahora que el coeficiente a_0 desaparece de la acción reducida y de la estructura simpléctica. Escribiremos el campo como

$$Y(u) = a_0 + a_u \tag{7.9}$$

donde en a_u hemos metido el resto de los modos. Entonces sustituyendo esta expresión en la acción (7.4) obtenemos

$$\begin{aligned} S &= \int dt\, du\, \dot{Y} Y' \\ &= \int dt\, du\, \dot{a}_0 a_u' + \int dt\, du\, \dot{a}_u a_u' \\ &= \int dt\, \dot{a}_0 \left[a_u\right]_{u=-\infty}^{u=+\infty} + \int dt\, du\, \dot{a}_u a_u' \\ &= \int dt\, du\, \dot{a}_u a_u' \end{aligned} \tag{7.10}$$

ya que el término evaluado en el infinito se cancela porque la función es periódica. En la estructura simpléctica (7.5) ocurre lo mismo

$$\begin{aligned} \Omega &= \int du\, \mathbf{d}Y' \wedge \mathbf{d}Y \\ &= \int du\, \mathbf{d}a_u' \wedge (\mathbf{d}a_0 + \mathbf{d}a_u) \\ &= \mathbf{d}\left(\left[a_u\right]_{u=-\infty}^{u=+\infty} \right) \wedge \mathbf{d}a_0 + \int du\, \mathbf{d}(a_u' \wedge \mathbf{d}a_u \\ &= \int du\, \mathbf{d}a_u' \wedge \mathbf{d}a_u \end{aligned} \tag{7.11}$$

donde de nuevo como la función es periódica se cancela el término evaluado en el infinito.

Por lo tanto el modo cero se desacopla de los demás grados de libertad del sistema y es una constante de movimiento. Esto nos permite restringir nuestro estudio al caso en que a_0 tenga un valor determinado (que no depende de u). Es decir, el modo cero lo separamos del resto y lo estudiaremos clásicamente.

Para sacar partido de este hecho podemos exigir que el campo Y se anule en un punto u_0 del intervalo I_L, es decir, fijaremos el valor del modo cero como $a_0 = -Y(u_0)$. Con esta elección estamos seleccionando el valor de Y en el punto u_0 como el valor de referencia respecto del cuál el campo Y será medido. Después de estas consideraciones la expansión de Fourier se escribe como

$$\begin{aligned} Y(u|u_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \left[a_n \left(e^{-in\pi u/L} - e^{-in\pi u_0/L} \right) \right. \\ &+ \left. a_n^\star \left(e^{in\pi u/L} - e^{in\pi u_0/L} \right) \right], \end{aligned} \tag{7.12}$$

que puede ser interpretado como un campo bilocal (es decir, la diferencia entre los valores del campo en dos puntos). En esta última ecuación hemos querido hacer explícita la dependencia con el punto u_0. Ahora si substituimos esta serie en la estructura simpléctica reducida y teniendo en cuenta que el modo cero se desacopla de los demás, obtenemos

$$\Omega = -i \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{d}a_n \wedge \mathbf{d}a_n^\star \tag{7.13}$$

y de aquí los únicos corchetes de Poisson diferentes de cero son

$$\{a_n, a_m^\star\} = -i\delta_n^m \tag{7.14}$$

donde δ es la delta de Kronecker. En general, todos los coeficientes a_n $(n \geq 1)$ son complejos y además complejos conjugados de $a_n^\star$, por lo tanto podemos interpretar los grados de libertad de nuestro modelo como un conjunto infinito y discreto de variables de tipo creación y aniquilación.

Para cuantizar el modelo no tenemos más que introducir una representación de Fock, que vamos a tratar con detalle en la sección (7.3). Ahora, nos ocuparemos de la regularización de los campos, necesaria para evitar divergencias ultravioletas.

El operador Y necesita ser regularizado. Desde un punto de vista físico la explicación de esta regularización es la siguiente: cuando realizamos una medida física del campo (bilocal) $Y(u|u_0)$ no podremos precisar con total exactitud las posiciones de los puntos u y u_0. Por tanto, realizaremos la medida en un pequeño entorno de estos puntos y el resultado será

$$Y_R(u|u_0)=\int_{I\!R} d\bar{u} g(u-\bar{u}) \int_{I\!R} d\bar{u}_0 g(u_0-\bar{u}_0) Y(\bar{u}|\bar{u}_0), \tag{7.15}$$

donde $g(u)$ es una función test suave de soporte compacto y de integral unidad,

$$g(u) \in C^\infty(I\!R), \qquad \int_{I\!R} du g(u) = 1 \tag{7.16}$$

Como el campo Y (que es físicamente relevante) sólo coincide con su expansión periódica en el intervalo I_L la regularización que hemos hecho será válida si la integración que hacemos en (7.15) produce el mismo resultado que si la restringimos a I_L. Llamaremos $I_\epsilon \equiv [-\epsilon, \epsilon]$ al soporte de $g(u)$, entonces se debe verificar que

$$\epsilon \ll L \tag{7.17}$$

para garantizar que nuestras medidas son lo suficientemente buenas y permiten diferenciar un gran número de regiones en I_L. Es fácil comprobar que para puntos u, u_0 que pertenezcan al intervalo $I_{L-\epsilon} \equiv [-L+\epsilon, L-\epsilon]$ la integral (7.15) no recibe ninguna contribución de fuera de I_L.

Teniendo en cuenta las propiedades de la función $g(u)$ y sustituyendo la expansión de Fourier de $Y(u|u_0)$ en la relación (7.15) obtenemos la siguiente expresión para el campo regularizado

$$Y_R(u|u_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n^\star(u|u_0) a_n + f_n(u|u_0) a_n^\star \right], \tag{7.18}$$

donde

$$f_n(u|u_0) = \frac{e^{in\pi u/L} - e^{in\pi u_0/L}}{\sqrt{n}} \tilde{g}\left(\frac{n\pi}{L}\right), \tag{7.19}$$

$f_n^\star$ es su complejo conjugado, y $\tilde{g}$ es la transformada de Fourier de g. Para puntos cuyos valores absolutos se encuentren entre $L-\epsilon$ y L, las expresiones (7.18) y (7.19) deben ser modificadas. Sin embargo, de aquí en adelante supondremos que estamos considerando el caso $u, u_0 \in I_{L-\epsilon}$, es decir, que todas las medidas se realizan en puntos interiores de I_L suficientemente alejados de los bordes.

Por otro lado, como $g(u)$ es una función suave de soporte compacto, su transformada de Fourier pertenece a $\mathcal{S}(I\!R)$, el espacio de Schwartz de funciones test suaves de decrecimiento rápido en el infinito. Teniendo en cuenta esta propiedad, es fácil probar que la secuencia $f \equiv \{f_n; n \geq 1\}$ es de cuadrado sumable, $[f \in l^2]$. Esto nos permitirá en la sección (7.3) introducir un operador bien definido que represente el campo que medimos $Y_R(u|u_0)$.

Finalmente vamos a remarcar que las expresiones (7.18) y (7.19) seguirían siendo válidas, (pero reemplazando $\tilde{g}$ por $1/\sqrt{2\pi}$), aunque no hubiéramos realizado el promedio en torno de los puntos u y u_0. En ese caso, la secuencia f que obtendríamos no pertenecería al espacio de Hilbert l^2, debido a las contribuciones divergentes de los modos de frecuencias altas ($n \geq 1$).

7.2 Modos continuos

En esta sección volveremos al caso general en el cuál el campo $Y(u)$ describe una onda plana arbitraria linealmente polarizada. Vamos a imponer como condición de contorno que el campo sea del orden de la unidad en más y menos infinito[2].

En este caso también es aplicable el razonamiento que usamos en el modelo con modos discretos para eliminar geometrías equivalentes. Recordemos que dos soluciones Y_1, Y_2 equivalentes bajo un reescalado de coordenadas del tipo

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow Ax^1 \\ x^2 &\rightarrow x^2/A \end{aligned} \tag{7.20}$$

se diferencian en $Y_1 - Y_2 = Ce^{z_0/2}$, siendo $C = -\sqrt{2}\ln A$ y A una constante. Esto permite restringir nuestro estudio a los campos que verifiquen

$$\lim_{u\to\infty} Y(u) = \lim_{u\to-\infty} Y(u). \tag{7.21}$$

Ahora extraeremos del campo Y su valor en el infinito Y_∞ que podría depender de t, aunque igual que pasa con Y en las soluciones clásicas este valor es constante. Análogamente al caso anterior veremos que no contribuye ni a la acción reducida ni a la estructura simpléctica del sistema. Escribiremos el campo como

$$Y(u) = \mathcal{Y}(u) + Y_\infty \tag{7.22}$$

donde tenemos que

$$\lim_{u\to\pm\infty} \mathcal{Y}(u) = 0 \tag{7.23}$$

Podemos repetir el proceso llevado a cabo en (7.10) y (7.11) y de nuevo resultará que

$$S = \int dt\, du\, \dot{\mathcal{Y}}\mathcal{Y}' \tag{7.24}$$

$$\Omega = \int du\, \mathbf{d}\mathcal{Y}' \wedge \mathbf{d}\mathcal{Y} \tag{7.25}$$

[2]Diremos que una función $f(u)$ es de orden $g(u)$ en un punto u_0, y lo escribiremos como $f(u) = O[g(u)]$ cuando $u \to u_0$ si existe el límite de f/g en el punto u_0.

ya que el término de superfice se cancela usando la condición (7.21).

Análogamente a lo que ocurre con a_0 en la sección anterior el valor en el infinito del campo se desacopla de los demás grados de libertad del sistema. Por lo tanto, podemos analizar consistentemente cualquier sector del espacio de soluciones donde esta función toma un determinado valor. Vamos a aprovechar este hecho restringiéndonos al estudio de las soluciones donde $Y(u|u_0)$ se anule en el punto fijo u_0 como hicimos en la sección anterior. De nuevo, este punto se debe considerar desde un punto de vista físico como el punto donde tomamos el valor de referencia para medir el campo.

Además de suponer que el campo tenga un valor constante en el infinito, vamos a requerir que el campo Y pueda ser expresado como una transformada de Fourier. De nuevo, estamos repitiendo los pasos del modelo de modos discretos. Teniendo en cuenta que el campo se anula en u_0 podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} Y(u|u_0) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k}}\Big[a(k)\left(e^{-iku}-e^{-iku_0}\right) \\ &+ a^\star(k)\left(e^{iku}-e^{iku_0}\right)\Big] \end{aligned} \tag{7.26}$$

y como $Y(u|u_0)$ es real, las funciones $a(k)$ y $a^\star(k)$ serán complejas conjugadas respectivamente. Por otro lado la condición de contorno (7.21) puede ser trasladada a condiciones sobre $a(k)$. Definiremos

$$b(k)=\theta(k)a(k)+\theta(-k)a^\star(|k|), \qquad c(k)=\frac{b(k)}{\sqrt{2|k|}}, \tag{7.27}$$

donde θ es la función escalón de Heaviside. Es fácil comprobar que

$$Y(u|u_0)=\tilde{c}(u)-\tilde{c}(u_0) \tag{7.28}$$

siendo $\tilde{c}$ la transformada de Fourier de c. Por lo tanto, basta asegurar que c es absolutamente integrable [$c\in L^1(I\!R)$] para asegurar que se verifica la condición de contorno (7.21), porque en ese caso $\tilde{c}$ es una función continua que se anula en el infinito †[102]. En particular, se puede probar que c pertenece a $L^1(I\!R)$ si nos aseguramos de que $a(k)$ es de cuadrado integrable sobre el eje real positivo [$a\in L^2(I\!R^+)$] y si existen constantes $\alpha>1/2$ y $\beta<1/2$ tales que

$$a(k)=O[k^{-\alpha}] \text{ as } k\to\infty \tag{7.29}$$

$$a(k)=O[k^{-\beta}] \text{ as } k\to 0. \tag{7.30}$$

Todos estas condiciones se cumplirán si, por ejemplo, la función $b(k)$ que hemos definido anteriormente pertenece al espacio de Schwartz $\mathcal{S}(I\!R)$.

Podemos considerar las funciones $a(k)$ y $a^\star(k)$ como los grados de libertad de este modelo. En principio, estas funciones deberían depender de la coordenada temporal t, pero como el campo Y es constante en las soluciones clásicas, estas funciones son independientes del tiempo clásicamente. Ahora, si sustituimos la igualdad (7.26) en la estructura simpléctica y teniendo en cuenta la relación (7.21) podemos obtener

$$\Omega = -i \int_0^\infty dk\, \mathbf{d}a(k) \wedge \mathbf{d}a^\star(k) \tag{7.31}$$

de lo que se deduce que los únicos corchetes de Poisson no nulos entre nuestras variables son

$$\{a(k), a^\star(\bar{k})\} = -i\delta(k - \bar{k}) \tag{7.32}$$

Por lo tanto, podemos interpretar los grados de libertad de las ondas planas linealmente polarizadas como un conjunto de variables del tipo creación y aniquilación. Utilizando el formalismo estándar podremos cuantizar el sistema introduciendo un espacio de Fock.

En la sección anterior ya discutimos el proceso de regularización del campo y aquí ocurrirá lo mismo. Al realizar una medida física del campo (bilocal) $Y(u|u_0)$ estamos haciendo un promedio como en (7.15) sobre un entorno de los puntos u y u_0 cuyo resultado es

$$Y_R(u|u_0) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2}} \left[f^\star(k, u|u_0) a(k) + f(k, u|u_0) a^\star(k) \right] \tag{7.33}$$

donde, para $k > 0$,

$$f(k, u|u_0) = \frac{e^{iku} - e^{iku_0}}{\sqrt{k}} \tilde{g}(k). \tag{7.34}$$

Merece la pena señalar que estas expresiones pueden ser obtenidas de las ecuaciones (7.18) y (7.19) en el límite continuo (cuando L y n tienen a infinito pero manteniendo $k = n\pi/L$ constante), hecho que apoya nuestras conclusiones. Además, en el límite $L \to \infty$, la región donde el espacio-tiempo es plano en el modelo con modos discretos es llevada a menos infinito y el intervalo $I_{L-\epsilon}$ (donde las fórmulas (7.18) y (7.19) son válidas) se convierte en toda la recta real.

Por otro lado, como g es una función test suave de soporte compacto, su transformada de Fourier $\tilde{g}$ pertenece al espacio de Schwartz $\mathcal{S}(I\!R)$. Por lo tanto, $f(k, u|u_0)$ es una función de cuadrado integrable sobre el eje real positivo para todos los valores finitos de u y u_0, $[f \in L^2(I\!R^+)]$. Esta propiedad la utilizaremos en la siguiente sección para obtener un operador bien definido que represente el campo Y_R en la teoría cuántica.

7.3 Cuantización

En las secciones anteriores hemos estudiado el modelo clásicamente ultimando todos los detalles para pasar a su cuantización, que llevaremos a cabo en esta sección. Hemos visto que en los dos modelos que hemos considerado, cuando realizamos una medida del campo Y (asumiendo que se anula en el punto u_0) obtenemos un resultado de la forma:

$$Y_R(u|u_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a(f_{u|u_0}) + a^\star(f_{u|u_0})\Big) \tag{7.35}$$

donde f es un vector de un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ que depende de los puntos u y u_0. Llamaremos $\langle\ ,\ \rangle$ a su producto interno. En el modelo con modos discretos, $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert l^2 de secuencias de cuadrado sumable, $f(u|u_0)$ denota la secuencia $\{f_n(u|u_0);\ n \geq 1\}$ de la ecuación (7.19), y los operadores de creación y aniquilación representan

$$\begin{aligned} a(f_{u|u_0}) &= \sum_{n\geq 1} f_n(u|u_0)a_n \\ a^\star(f_{u|u_0}) &= \sum_{n\geq 1} f_n^\star(u|u_0)a_n^\star \end{aligned} \tag{7.36}$$

En el caso general de una onda plana linealmente polarizada, $\mathcal{H}$ es es espacio de Hilbert $L^2(I\!R^+)$, $f(u|u_0)$ es la función de $k \in I\!R^+$ definida en la ecuación (7.34) y los operadores de creación y aniquilación son continuos en este caso,

$$\begin{aligned} a(f_{u|u_0}) &= \int dk\ f_k(u|u_0)a(k) \\ a^\star(f_{u|u_0}) &= \int dk\ f_k^\star(u|u_0)a^\star(k) \end{aligned} \tag{7.37}$$

La cuantización del campo (bilocal) $Y_R(u|u_0)$ puede llevarse a cabo construyendo la representación de Fock de las variables de creación y aniquilación. Partiendo del espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}$ construimos primero el producto tensorial

$$\mathcal{H}^{(n)} = \otimes_{m=1}^{n}\mathcal{H} \tag{7.38}$$

y lo simetrizaremos con el operador S_n que actúa sobre estados

$$\phi^{(n)} \equiv \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \in \mathcal{H}^{(n)} \tag{7.39}$$

de la siguiente forma

$$\phi_s^{(n)} \equiv S_n\phi^{(n)} = \sum_\sigma \frac{1}{n!}\phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} \tag{7.40}$$

donde la suma se extiende sobre todas las permutaciones σ. El espacio de Fock simétrico sobre $\mathcal{H}$ se define como

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \equiv \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_s^{(n)} = \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{H} \tag{7.41}$$

donde $\otimes_s^n$ denota el producto tensorial simetrizado con S_n. Llamaremos $\mathcal{H}_s^{(n)} = S_n \mathcal{H}^{(n)}$ a los subespacios de n-partículas y $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ será el subespacio de vectores de partículas finitas, es decir, el subespacio de vectores $\phi_s \equiv \{\phi_s^{(n)};\ n \geq 0\}$ tal que $\phi_s^{(n)}$ se anula para todos los índices n menos un número finito de índices. Una propiedad muy importante de $\mathcal{F}_0$ es que se trata de un subespacio denso en $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Introduciremos el operador de aniquilación $\hat{a}(f)$ en $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ con dominio $\mathcal{F}_0$ definiendo como actúa sobre vectores de la forma (7.39)

$$\hat{a}(f)\phi_s^{(n)} = \sum_{\sigma} \frac{\sqrt{n}}{n!} \langle \phi_{\sigma(1)}, f \rangle \phi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} \tag{7.42}$$

con $n \geq 1$ mientras que $\hat{a}(f)$ se anula en $\mathcal{H}_s^{(0)}$. Este operador se puede cerrar para cualquier $f \in \mathcal{H}$. Su adjunto es el operador creación $\hat{a}^\star(f)$, cuya restricción al subespacio de vectores de finitas partículas se puede obtener mediante la fórmula †[102]:

$$\hat{a}^\star(f)\phi_s^{(n)} = \sqrt{n+1}\, S_{n+1} \left(f \otimes \phi_s^{(n)} \right) \tag{7.43}$$

Entonces, ahora podemos interpretar cada vector $\phi_s^{(n)}$ de $\mathcal{H}_s^{(n)}$ como el estado cuántico $|\phi_s^{(n)}\rangle$ obtenido del vacío $|0\rangle$ mediante la acción repetida de n operadores de operadores de creación. Para estados de la forma (7.39) tenemos:

$$|\phi_s^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, \hat{a}^\star(\phi_1) \cdots \hat{a}^\star(\phi_n)\, |0\rangle \tag{7.44}$$

El factor constante que acompaña esta última expresión es un factor de normalización introducido por conveniencia. El vacío $|0\rangle$ se caracteriza por ser el único estado que es destruido por todos los operadores de aniquilación y tiene norma unidad. Se corresponde con el vector $\phi_s^{(0)} = 1$.

Para cada vector f de $\mathcal{H}$ podemos introducir el operador de Segal [102], $\Phi_S[f]$, operador que representa al campo, y se define sobre $\mathcal{F}$ como

$$\Phi_S[f] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\, \hat{a}(f) + \hat{a}^\star(f) \, \right) \tag{7.45}$$

y tenemos el siguiente teorema

Theorem X.41 de [102]

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\Phi_S(\cdot)$ su correspondiente cuantización de Segal. Entonces tenemos las siguientes propiedades

(a) (Hermiticidad) Para cada $f \in \mathcal{H}$, $\Phi_S(f)$ es esencialmente autoadjunto sobre $\mathcal{F}_0$, conjunto de estados de partículas finitas.

(b) (Ciclicidad del vacío) Ω_0 pertenece al dominio de todos los productos finitos $\Phi_S(f_1)\cdots\Phi_S(f_n)$ y el conjunto $\{\Phi_S(f_1)\cdots\Phi_S(f_n)\Omega_0 \,|\, f_i$ y n arbitrarios$\}$ es total en $\mathcal{F}_S(\mathcal{H})$.

(c) (Relaciones de conmutación) Para cada $\Psi \in \mathcal{F}_0$ y para $f, g \in \mathcal{H}$,

$$\Phi_S(f)\Phi_S(g)\Psi - \Phi_S(g)\Phi_S(f)\Psi = i\ Im(\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}})\Psi \tag{7.46}$$

Además, si $W(f)$ denota el operador unitario $e^{i\Phi_S(f)}$, entonces

$$W(f+g) = e^{-i\ Im(\langle f,g\rangle)/2} W(f)W(g) \tag{7.47}$$

(d) (Continuidad) Si $f_n \to f$ en $\mathcal{H}$, entonces

$$\begin{array}{ll} W(f_n)\Psi \to W(f)\Psi & \text{para todo } \Psi \in \mathcal{F}_S(\mathcal{H}) \\ \Phi_S(f_n)\Psi \to \Phi_S(f)\Psi & \text{para todo } \Psi \in \mathcal{F}_0 \end{array}$$

(e) Para todo operador unitario U de $\mathcal{H}$,

$$\Gamma(U) : D(\overline{\Phi_S(f)}) \to D(\overline{\Phi_S(Uf)})$$

y para $\Psi \in D(\overline{\Phi_S(Uf)})$,

$$\Gamma(U)\overline{\Phi_S(f)}\Gamma(U)^{-1}\Psi = \overline{\Phi_S(f)}\Psi$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Estos resultados nos permitirán abordar la cuantización de nuestro modelo. Para representar el campo (bilocal) $Y_R(u|u_0)$ introducimos el operador de Segal

$$\hat{Y}_R[f] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}(f) + \hat{a}^\star(f)\right) \tag{7.48}$$

definido sobre $\mathcal{F}_0$. Además por la propiedad (7.46) se verifica la relación de conmutación

$$\left[\hat{Y}_R[f], \hat{Y}_R[g]\right] = i\mathrm{Im}\langle g, f\rangle \tag{7.49}$$

donde Im denota la parte imaginaria y hemos hecho $\hbar = 1$. Por el teorema anterior tenemos garantizado que este operador tiene un cierre autoadjunto, que también llamaremos $\hat{Y}_R[f]$.

Ahora nos centraremos en los operadores que aparecen en la métrica. Necesitamos introducir operadores para las componentes

$$h_{aa} = e^{z_0(u)} e^{-(-1)^a \sqrt{2} e^{-z_0(u)} Y} \qquad a = 1,2 \tag{7.50}$$
$$h_{uu} = z_0(u) e^{z_0(u)/2} e^{\Phi(u)} \tag{7.51}$$

Reemplazaremos el campo Y por el bilocal $Y_R(u|u_0)$ y construiremos los operadores a partir del operador (7.48). Para las componentes diagonales de la métrica h_{aa} tenemos el operador regularizado y positivo:

$$\begin{aligned} \hat{h}^R_{aa}(u|u_0) &= \exp z_0(u) \exp\left\{-e^{-z_0(u)} ||f(u|u_0)||^2/2\right\} \\ &\times \exp\left\{(-1)^a \sqrt{2} e^{-z_0(u)/2} \hat{Y}_R[f(u|u_0)]\right\} \end{aligned} \tag{7.52}$$

donde, $||f||$ es la norma de $f \in \mathcal{H}$ y hemos remarcado la dependencia con los puntos u y u_0. Recordemos que en el caso de modos discretos, hemos restringido los puntos al interior del intervalo $I_{L-\epsilon}$, mientras que en el caso general u y u_0 pueden tener cualquier valor de la recta real.

El factor

$$\exp\left\{-e^{-z_0(u)} ||f(u|u_0)||^2/2\right\}$$

que aparece en el lado derecho de (7.52) puede ser entendido de la siguiente manera: hemos elegido orden normal en la exponencial de $\hat{Y}_R[f(u|u_0)]$, así nos aseguramos que el valor esperado en el vacío del operador $\hat{h}^R_{aa}$ reproduce el resultado clásico de la dos-métrica h_{ab} cuando el campo Y es cero, es decir, para el espacio-tiempo plano. Teniendo en cuenta que en $\mathcal{F}_0$ se verifica

$$[\hat{a}(f), \hat{a}^\star(g)] = \langle g, f \rangle \tag{7.53}$$

y la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (nos referiremos posteriormente a ella como CBH)

$$e^{\hat{b}} e^{\hat{c}} = e^{[\hat{b},\hat{c}]/2} e^{(\hat{b}+\hat{c})} \tag{7.54}$$

válida cuando el conmutador de $\hat{b}$ y $\hat{c}$ es un c-número, podemos llegar sin excesivos problemas a la expresión anterior para $\hat{h}^R_{aa}$.

El otro operador correspondiente a la restante componente de la métrica

$$h_{uu} = -z_0(u) e^{z_0(u)/2} e^{\Phi} \tag{7.55}$$

siendo

$$\Phi = -\int_{u_0}^{u} \frac{dr}{z_0(r)} \left[\left(e^{-z_0(r)/2} Y(r)\right)'\right] \tag{7.56}$$

también puede ser construido a partir de $\hat{Y}_R[f(u|u_0)]$. En este caso, el cálculo es un poco más engorroso, pero no presenta dificultad. Además, como veremos en el siguiente capítulo este operador no añade nada nuevo a las conclusiones del modelo y la existencia de efectos cuánticos importantes puede estudiarse sin necesidad de hacer una definición particular de este operador.

Simplemente comentaremos como se define el operador. En primer lugar definimos

$$\hat{\Phi}_R(u|u_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} dr\, \frac{\theta(u-r)\theta(r-u_0)}{z_0(r)} : \left[\left(e^{-z_0(r)/2}\hat{Y}_R[f]\right)'\right]^2 : \qquad (7.57)$$

donde θ es la función escalón de Heaviside y : : indican ordenación normal. Se puede ver que este operador está densamente definido en el espacio de Fock simétrico $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ y por lo tanto es esencialmente autoadjunto. Por el teorema espectral podemos definir su exponencial que multiplicada por $-z_0(u)e^{z_0(u)/2}$ proporciona un operador bien definido y positivo que puede ser considerado el equivalente cuántico de h_{uu}. En resumen, para obtener un operador bien definido hemos reemplazado el campo $Y(u)$ por el operador de Segal $\hat{Y}[f]$ en la expresión clásica de Φ y después hemos tomado orden normal.

7.3.1 Notas sobre la cuantización

Después de haber explicado todo el proceso de cuantización y la introducción de los operadores cuánticos, vamos a comentar algunos aspectos del proceso que hemos seguido.

En primer lugar discutiremos la conexión de este modelo con otros trabajos de la literatura, en particular, los trabajos de Morchio, Pierotti y Strocchi (MPS) [89, 90, 101] sobre el campo escalar sin masa en dos dimensiones. Con esto pretendemos clarificar los posibles puntos que hayan quedado oscuros en la sección anterior.

Ya habíamos señalado que muchos modelos de midisuperespacio para espacio-tiempos con dos vectores de Killing espaciales eran equivalentes a modelos en dos dimensiones. Vayamos a nuestro modelo para una onda plana general linealmente polarizada. Es fácil darse cuenta que en este caso el campo $Y(u)$ se corresponde con los modos que se desplazan hacia izquierda de un campo escalar en dos dimensiones sin masa, (solamente tenemos que hacer el cambio de coordenadas $u = x + t$ para verlo más claro).

Es sabido que en dos dimensiones el caso sin masa del campo escalar presenta divergencias infrarrojas y ultravioletas. En los trabajos de MPS se analiza con detalle este caso. Para eliminar las divergencias infrarrojas de la teoría es necesaria una regularización, esta consiste en sustraer el modo cero, de lo que resulta una función de dos puntos que viola el postulado de positividad, este es el precio que tenemos que pagar para obtener unas funciones de Wightman bien definidas. Al fallar ese postulado, ya no es posible utilizar el teorema de reconstrucción [110] de las teorías cuánticas de campos (TCC) que permite recuperar todos los valores esperados de los campos de la teoría a partir de las funciones de n puntos en el vacío. En [91] se presenta un teorema de reconstrucción para una TCC con una métrica indefinida que nos asegura tener una teoría cuántica coherente.

En esencia, el problema es que al violarse la positividad no tendremos definido un producto escalar y nos faltará la estructura de espacio de Hilbert, en otras palabras, tendremos una arbitrariedad al asociar un espacio de estados a las funciones de Wightman. El método que proponen MPS consiste en buscar de entre todos los posibles espacios de Hilbert asociados a las funciones de Wightman uno que sea maximal, es decir, que no existe otro espacio de Hilbert que lo contenga (asociado a las mismas funciones de Wightman). Así tendremos el conjunto más grande de estados y entonces nos aseguramos que tenemos la máxima información. Después de tener este espacio de Hilbert deberemos imponer unas condiciones (basándonos en argumentos físicos) que determinen un subespacio que será el conjunto de estados físicos. Esta condición suele llamarse *condición subsidiaria* (esta condición es análoga a la condición de Gupta-Bleuer en QED).

Para el campo escalar sin masa en dos dimensiones MPS siguen este proceso. Imponer que el espacio de Hilbert sea maximal lleva a obtener un espacio de Krein [29], y esto permite utilizar toda la estructura matemática de esta clase de espacios. Completan la cuantización de la teoría (producto escalar, vacío único, estados físicos, ...) e incluso definen operadores como la exponencial del campo y la exponencial de Wick del campo. Un resultado interesante es que el espacio de Hilbert se puede descomponer en una suma directa de dos espacios de Hilbert, los estados que se mueven a la derecha (modos R) y los estados que se mueven a la izquierda (modos L). Entonces, todos los resultados obtenidos para la teoría son igualmente válidos en cada uno de estos espacios.

Antes hemos visto que nuestro modelo es equivalente a los modos L de un campo escalar sin masa en dos dimensiones y por lo tanto podríamos aprovechar todos los resultados obtenidos para este caso. Sin embargo, nosotros hemos optado por utilizar un campo bilocal en lugar de seguir la cuantización "a la Krein". Nos basamos en los argumentos físicos que hemos explicado para considerar el campo bilocal $Y_R(u|u_0)$ como el campo básico de nuestra teoría y cuantizamos este campo.

Respecto a la regularización del campo básico (7.33) de la teoría, por un lado hemos eliminado las divergencias infrarrojas exigiendo que el campo se anule en u_0 tanto clásica como cuánticamente, con esto eliminamos el modo cero que produce las contribuciones divergentes; por otro lado, las divergencias ultravioletas se eliminan cuando hacemos el promedio en torno de los puntos u y u_0 con una función suave g de soporte compacto. Podemos basarnos en razones físicas para la elección del punto u_0 ya que el valor del campo en este punto será el valor de referencia para todas las medidas. Volviendo a la función g, es razonable imponer que el soporte de esta función sea del orden de la longitud de Planck. Sin embargo, la forma de la función es arbitraria, y aquí tenemos una ambigüedad en el proceso de cuantización. En el modelo de midisuperespacio para las ondas cilíndricas con una polarización [11] también aparece una ambigüedad similar cuando se define un operador regularizado para la métrica.

Capítulo 8

Fluctuaciones en la métrica

Una vez que tenemos una teoría cuántica para el modelo de las ondas planas linealmente polarizadas podemos pasar a extraer las conclusiones físicas que se siguen de esta teoría; es lo que vamos a hacer en este capítulo. En particular queremos estudiar si existen estados cuánticos en nuestro modelo que admitan una descripción clásica del espacio-tiempo. Para ello debemos estudiar las fluctuaciones de la métrica en esos estados.

Parece natural considerar como posibles candidatos los estados coherentes del campo básico $Y_R[f]$ porque todos estos estados están fuertemente centrados en torno a las soluciones clásicas. En la literatura, la mayoría de los análisis de efectos cuánticos importantes se han llevado a cabo estudiando las fluctuaciones en la geometría para estados de esta clase [8]. Sin embargo, en los modelos que han sido considerados, la geometría estudiada ha sido obtenida por una reducción a tres dimensiones a través de un vector de Killing. Aquí, nosotros vamos a estudiar el comportamiento cuántico de las ondas planas linealmente polarizadas desde un punto de vista de cuatro dimensiones.

Para empezar vamos a obtener las fluctuaciones del vacío, $|0\rangle$, estado que representa el espacio-tiempo plano. Para este estado es muy sencillo el cálculo. Tenemos que el valor esperado del operador de Segal es

$$\langle \hat{Y}_R[f] \rangle_0 \,=\, 0 \tag{8.1}$$

Ahora vamos a analizar las fluctuaciones cuánticas en la métrica en este estado. En lo que sigue, restringiremos nuestro análisis al operador $\hat{h}^R_{aa}$, que describe la métrica de las órbitas de los Killing en nuestro modelo de midisuperespacio para las ondas planas con polarización lineal. Las conclusiones serán independientes del comportamiento cuántico de h_{uu}, la otra componente no trivial de la métrica para las ondas planas con polarización lineal. Definiremos

$$F(u) = e^{z_0(u)}, \qquad A_a(u) = (-1)^a \sqrt{2} F(u)^{-1/2} \tag{8.2}$$

(con $a = 1, 2$) y eliminaremos de nuestra notación la dependencia explícita con los puntos u y u_0. Podemos escribir el operador $\hat{h}^R_{aa}$ de forma compacta

$$\hat{h}^R_{aa} = F \ : \exp\left(A_a \hat{Y}_R[f]\right) : \tag{8.3}$$

donde los dos puntos indican orden normal. El valor esperado para el vacío es

$$\langle \hat{h}^R_{aa} \rangle_0 \ = \ F \tag{8.4}$$

y recuperamos la solución clásica correspondiente al espacio-tiempo plano.

Ahora calcularemos las fluctuaciones en el vacío. Para cualquier observable $\hat{b}$ la incertidumbre en un estado Ψ se define como

$$\Delta_\Psi \hat{b} \ \equiv \ \sqrt{\langle \hat{b}^2 \rangle_\Psi - (\langle \hat{b} \rangle_\Psi)^2} \tag{8.5}$$

Nos interesan más las fluctuaciones relativas que se definen como el cuadrado del cociente entre la incertidumbre y el valor esperado, es decir,

$$\left(\frac{\Delta_\Psi \hat{b}}{\langle \hat{b} \rangle_\Psi} \right)^2 \tag{8.6}$$

En el caso de ser pequeñas será aceptable la aproximación del operador por su valor clásico.

Para el vacío no es difícil calcular las fluctuaciones relativas de la métrica. El resultado es

$$\left(\frac{\Delta_0 \hat{h}^R_{aa}}{\langle \hat{h}^R_{aa} \rangle_0} \right)^2 = \exp\left(\frac{A_a^2 ||f||^2}{2} \right) - 1. \tag{8.7}$$

A continuación, vamos a repetir los cálculos para un estado coherente general y después analizaremos los resultados. Dado un vector c cualquiera en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (en caso de modos discretos se trata de l^2, mientras que en el caso general de una onda plana linealmente polarizada es $L^2(I\!R^+)$) definiremos un estado coherente $|c\rangle$ como

$$|c\rangle \ = \exp\left(-||c||^2/2\right) \, \exp\left\{\hat{a}^\star(c)\right\} \, |0\rangle \tag{8.8}$$

El factor numérico de esta expresión asegura que la norma de $|c\rangle$ es la unidad. Usando la fórmula (7.49) y teniendo en cuenta que el vacío es destruido por los operadores de aniquilación, no es muy difícil obtener que, para cualquier $f \in \mathcal{H}$, el valor esperado del operador de Segal en cualquier estado coherente es

$$\langle \hat{Y}_R[f] \rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle c, f \rangle + \langle f, c \rangle \right) \tag{8.9}$$

Si dejamos de lado el valor de f, este valor esperado coincide con el campo clásico obtenido reemplazando las variables de aniquilación a con el vector $c \in \mathcal{H}$ (y las de creación $a^\star$ con su complejo conjugado $c^\star$).

Por otro lado, para cada vector fijo $f \in \mathcal{H}$, llamaremos $\hat{Y}_R[if]$ al momento canónico del campo $\hat{Y}_R[f]$. Entonces, de la ecuación (7.49), el conmutador de ambos operadores es el c-número imaginario

$$i\,||f||^2 \tag{8.10}$$

Se puede comprobar que todos los estados coherentes tienen la misma incertidumbre en el campo $\hat{Y}_R[f]$ y en su momento canónico. Además, para todos los vectores $f \in \mathcal{H}$, el producto de estas incertidumbres es

$$\frac{||f||^2}{2} \tag{8.11}$$

que es el valor mínimo [58].

Ahora pasemos a analizar el comportamiento cuántico de la métrica en estos estados coherentes. Usando la fórmula CBH (7.54) y la ecuación (7.49) obtenemos el valor esperado del operador $\hat{h}^R_{aa}$, que describe la caja de la métrica correspondiente a los vectores de Killing. El resultado es

$$\langle F : \exp\left(A_a \hat{Y}_R[f]\right) : \rangle_c = F \exp\left(\sqrt{2} A_a \mathrm{Re}\langle c, f\rangle\right) \tag{8.12}$$

donde hemos usado que A_a es un c-número real y Re denota la parte real. Por lo tanto, podemos ver que el valor esperado de $\hat{h}^R_{aa}$ en un estado coherente coincide con el valor clásico obtenido de la solución del campo (8.9). En particular, de esta expresión recuperamos el resultado para el vacío, que es el estado coherente correspondiente a $c = 0$.

No es difícil obtener las fluctuaciones relativas de este operador en un estado coherente $|c\rangle$. Se pueden calcular usando la fórmula (7.54) y el resultado es

$$\left(\frac{\Delta_c \hat{h}^R_{aa}}{\langle \hat{h}^R_{aa}\rangle_c}\right)^2 = \exp\left(\frac{A_a^2 ||f||^2}{2}\right) - 1. \tag{8.13}$$

Notemos que esta expresión es independiente del estado coherente que estemos considerando, por lo tanto, se obtiene el mismo resultado como hemos calculado previamente para el vacío (8.4).

En general tendremos grandes fluctuaciones en la métrica cuando del valor esperado de $\hat{h}^R_{aa}$ sea grande. Sin embargo, la aproximación de esta métrica por su valor clásico (8.9) será válida siempre que las fluctuaciones relativas de $\hat{h}^R_{aa}$ sean pequeñas. De las ecuaciones (8.2) y (8.13) obtenemos que esto ocurrirá si y solo si

$$e^{-z_0(u)} ||f(u|u_0)||^2 \ll 1 \tag{8.14}$$

Antes de continuar con este análisis, vamos a comentar las implicaciones del principio de incertidumbre para operadores de la forma de $\hat{h}^R_{aa}$. Recordemos que este operador es la exponencial de un campo de Segal multiplicado por un c-número y es un operador diferente para cada par de puntos u y u_0. Consideremos dos operadores de este tipo

$$\hat{b} = F : e^{\hat{Y}_R[f]} : \qquad , \qquad \hat{c} = G : e^{\hat{Y}_R[g]} : \tag{8.15}$$

Sabemos que el producto de incertidumbres de $\hat{b}$ y $\hat{c}$ siempre es mayor que la mitad de la norma del valor esperado de $[\hat{b}, \hat{c}]$ [58]. En nuestro caso, el conmutador $[\hat{b}, \hat{c}]$ es un operador cuántico proporcional a

$$FG : e^{\hat{Y}_R[f+g]} : \tag{8.16}$$

Por lo tanto, su valor esperado dependerá del estado analizado. Como consecuencia, no está claro cuál es valor mínimo permitido para el producto de incertidumbres de $\hat{b}$ y $\hat{c}$. Entonces, parece más natural considerar, por ejemplo, el producto de incertidumbres dividido por el valor esperado de $FG : e^{\hat{Y}_R[f+g]} :$ Esta cantidad está acotada por el c-número

$$|e^{\langle g,f\rangle/2} - e^{\langle f,g\rangle)/2}|/2 \tag{8.17}$$

y, para estados coherentes coincide con el producto de las fluctuaciones relativas de $\hat{b}$ y $\hat{c}$, como podemos comprobar utilizando la ecuación (8.12). Si usamos técnicas como las que se explican en [58] se puede probar que la cantidad que hemos considerado no está minimizada en estados coherentes para vectores genéricos $f, g \in \mathcal{H}$.

Ahora volveremos al análisis de las fluctuaciones en al métrica. Para todo el conjunto de estados coherentes (8.8) hemos visto que la descripción clásica del espacio-tiempo será válida solo si se cumple la condición (8.14) en todos los puntos u. Recordemos que u_0 es un punto fijo convenientemente elegido donde las componentes diagonales de la métrica en las direcciones x^a, $(a = 1, 2)$, toman el valor $e^{-z_0(u_0)}$ por convención, tanto clásica como cuánticamente.

En general, la desigualdad (8.14) no se cumplirá si la norma del vector $f(u|u_0)$ o la función $e^{-z_0(u)}$ son demasiado grandes en algún punto u. Como la forma de la función $f(u|u_0)$ (y también su norma) pueden depender del método de regularización empleado en cuantización, concentraremos nuestro análisis en la posibilidad de que $e^{-z_0(u)}$ sea significativamente grande, hecho que aparentemente no se ve afectado por las ambigüedades encontradas en la construcción de la teoría cuántica. Teniendo en cuenta la definición (4.26) de z_0 este factor es una doble exponencial

$$e^{-z_0(u)} = e^{e^{-u}} \tag{8.18}$$

y cuado u tiende a $-\infty$ se dispara. Precisamente esa es la región donde las geodésicas nulas son focalizadas por la onda plana, como hemos visto en el capítulo 4. Por lo tanto, es de esperar que el comportamiento cuántico del espacio-tiempo sea radicalmente diferente a su aproximación clásica cerca de esta región de focalización.

Para asegurar esta última conclusión tenemos que demostrar que la norma de $f(u|u_0)$ es estrictamente positiva cuando $u \to -\infty$. Entonces, no se verificará la condición (8.14) cuando u sea grande y negativo.

En primer lugar vamos a analizar el modelo con modos discretos. Fijaremos $u_0 = 0$ y $u = -L/3$ por conveniencia. En particular, si $L \gg \epsilon$, los puntos u y u_0 pertenecerán al intervalo $[-L+\epsilon, L-\epsilon]$. Usando la expresión (7.19) no es difícil demostrar que

$$||f(-L/3|0)|| \rangle |\tilde{g}(\pi/L)| \tag{8.19}$$

y como $\tilde{g}$ es la transformada de Fourier de una función suave con integral unidad tenemos que

$$\tilde{g}(0) \ = \ 1 \tag{8.20}$$

En el límite $L \to \infty$, el punto $u = -L/3$ se acerca a la región donde focalizan las geodésicas nulas y de la ecuación (8.19) tenemos que la norma de $f(-L/3|0)$ está acotada inferiormente por la unidad.

Por lo tanto, para el modelo con modos discretos estudiado en la sección (7.1), las fluctuaciones relativas de la métrica se disparan cuando $u \ll 0$. Entonces, al acercarnos a esta región se destruye la aproximación del espacio-tiempo clásico para los estados coherentes.

Analizemos ahora que ocurre en el caso de una onda plana general con polarización lineal. Podemos calcular la norma

$$||f(u|u_0)|| = 4\int_0^\infty dk\, \frac{|\tilde{g}_k|^2}{k} sin^2[k(u-u_0)] \tag{8.21}$$

donde tenemos que recordar que la función $\tilde{g}$ pertence al espacio de Schwartz $\mathcal{S}(I\!R)$. Entonces la norma es positiva, aunque en el límite $u \to \infty$ diverge. Sin embargo, si consideramos el límite $u \to \infty$ pero manteniendo constante la distancia entre los puntos u y u_0 ya no tenemos ningún problema y la norma tiene un valor finito y positivo.

De nuevo concluimos que al acercarnos a la hipersuperficie donde focalizan las geodésicas nulas las fluctuaciones relativas en la métrica $\hat{h}^R_{aa}$ son muy grandes. En esta región, la descripción clásica del espacio-tiempo, como una onda plana linealmente polarizada, no es válida para ningún estado coherente.

Además estos resultados se aplican igualmente al vacío, estado cuántico que debería describir el espacio-tiempo plano. Entonces, los efectos cuánticos gravitatorios sobre el vacío no pueden ser despreciados cuando nos acercamos a la región de focalización de los ondas planas linealmente polarizadas.

8.1 Análisis de los resultados

Hemos estudiado el comportamiento cuántico del operador de la métrica $\hat{h}^R_{aa}$ sobre estados coherentes (8.8) del campo (bilocal) básico $\hat{Y}_R[f]$.

El valor esperado de este operador coincide con el resultado clásico. Sin embargo, las fluctuaciones relativas de la métrica son muy grandes para todos los estados coherentes cuando u se hace muy grande y negativa. Para estos valores nos acercamos a la región donde las ondas planas focalizan las geodésicas nulas. Por lo tanto, cerca de esta región deja de tener sentido la descripción clásica del espacio-tiempo y los efectos cuánticos gravitacionales deben ser tenidos en cuenta.

Es aún más importante notar que estos resultados se repiten para el vacío, estado que describe el espacio-tiempo plano. Este hecho plantea serias dudas sobre la validez de la aproximación semiclásica en el siguiente sentido: si introducimos campos materiales en este modelo y construimos una teoría cuántica de campos sobre el espacio-tiempo plano, esta aproximación semiclásica fallará porque las fluctuaciones de la geometría plana son importantes. Algunos indicios de ello, como es la divergencia del tensor de energía-momento, ya se muestran en este caso [47, 42]. Debemos recurrir a la teoría cuántica completa de este modelo para estudiar que es lo que ocurre.

En este modelo hemos considerado los estados coherentes que minimizan el producto de las incertidumbres del operador de Segal y su momento conjugado. Sería muy interesante estudiar las fluctuaciones de la métrica en otra clase de estados cuánticos, aunque este análisis no afecta a los resultados obtenidos para el vacío. Además, aunque sea posible encontrar estados con menos fluctuaciones en la métrica, sería a costa de perder coherencia en el operador de Segal como ocurre en [46].

Los resultados que hemos obtenido dependerán de las elecciones que hemos hecho tanto en la construcción del modelo como en el proceso de cuantización. Vamos a comentar algunos puntos.

Las relaciones de conmutación (7.32) admiten representaciones que son unitariamente inequivalentes a la que hemos empleado. Entonces, podría ocurrir que nuestras conclusiones no fueran válidas para alguna de estas representaciones. Sin embargo, nos gustaría resaltar que la representación de Fock que hemos introducido garantiza que el operador básico de nuestra teoría (7.33) es autoadjunto para todos los vectores f. Además, la existencia de un vacío cíclico que representa al solución clásica plana hace de nuestra representación una elección natural. De cualquier forma, el espíritu de este trabajo no consiste en demostrar que la descripción clásica del espacio-tiempo es eliminada por la Gravedad Cuántica, sino que la existencia de esta aproximación no tiene que ser asumida ni exigida a priori hasta que no sepamos más acerca de la Gravedad Cuántica.

Respecto a la regularización del campo básico de la teoría, que se explica en el capítulo 7, aunque tenemos algunas ambigüedades (como el hecho de que la forma de la función g sea arbitraria), el proceso que hemos seguido para analizar las fluctuaciones de la métrica resulta bastante insensible al método de regularización empleado, como ya señalamos en la sección anterior. Las fluctuaciones se disparan porque el factor $e^{-z_0(u)}$ explota cuando u tiende a infinito y no se debe a que la norma de $f(u|u_0)$ diverja también en ese límite. Si nos acercamos a la región $u \to -\infty$ mantiendo la distancia entre los puntos u y u_0 (este significa que nos acercamos al infinito y el punto de referencia para las medidas también) la norma permanece finita.

A continuación vamos a contrastar los resultados obtenidos en nuestro modelo con los de otros trabajos de la literatura, fundamentalmente con el análisis de Ashtekar [8] para el modelo de las ondas cilíndricas [11], ya que otros trabajos, como el de Beetle [16] avalan sus conclusiones. Nuestros resultados van por el mismo camino, la existencia de importantes efectos gravitatorios cuánticos que deben ser tenidos en cuenta. Se cuestiona la validez de la aproximación semiclásica incluso en el régimen de energías bajas. En el modelo de las ondas cilíndricas aunque existen infinitos estados con buen comportamiento semiclásico, sólo recuperamos una clase muy restringida de soluciones clásicas. En algunas estados, centrados en soluciones clásicas con curvatura pequeña, esperaríamos que fuera valida la aproximación semiclásica. Sin embargo, la existencia de partículas (basta con un par) con frecuencia superior a la de Planck invalida esa aproximación por las fluctuaciones enormes que tiene la métrica. En nuestro modelo se agudiza este comportamiento porque incluso para el vacío, que se corresponde con el espacio-tiempo plano, no sirve la aproximación semiclásica por las enormes fluctuaciones de la métrica cerca de la región donde focalizan las geodésicas nulas.

Respecto al sistema de coordenadas empleado, este sólo cubre una región del espacio-tiempo completo. Este tipo de coordenadas presenta una singularidad de coordenadas en la región donde focalizan las geodésicas que puede ser eliminada si usamos las coordenadas armónicas, las cuales cubren todo el espacio-tiempo. Ante esto, uno se pregunta si el hecho de que se disparen las fluctuaciones relativas no se podría evitar utilizando las coordenadas armónicas. Sin embargo, los espacio-tiempos descritos por estas coordenadas no son globalmente hiperbólicos, y este motivo impide utilizar el formalismo canónico de la RG en este caso. Por lo tanto, se tienen que utilizar métodos no estándares para cuantizar las ondas gravitatorias planas en coordenadas armónicas. Además sería de esperar que la teoría cuántica corrigiera los intensos efectos gravitacionales en la región donde focalizan las geodésicas igual que se espera que las singularidades sean eliminadas en la teoría cuántica. En cambio, en este modelo ocurre todo lo contrario.

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo hemos obtenido un modelo cuántico para un sistema gravitatorio y hemos estudiado sus propiedades. El sistema gravitatorio considerado son las ondas planas, soluciones de las ecuaciones de Einstein de vacío con un grupo de simetrías de cinco parámetros. Estos espacio-tiempos corresponden a ondas gravitatorias exactas y se asume que proporcionan una buena aproximación de las ondas gravitatorias cuando estamos en regiones suficiente lejanas a fuentes de emisión intensas. Podríamos separar el trabajo en cuatro bloques:

- En primer lugar repasamos el método de cuantización que seguiremos así como las propiedades geométricas de los espacio-tiempos que estamos estudiando.

- Después planteamos una fijación del gauge general para espacio-tiempos que admiten dos vectores de Killing espaciales.

- A partir de estos resultados imponemos nuevas condiciones en el modelo que eliminan la libertad gauge remanente y añaden la simetrías necesarias para que al reducir el sistema se obtenga un modelo que describe las ondas planas gravitatorias.

- Estudiamos la cuantización de este modelo para el caso de las ondas con polarización lineal y a continuación analizamos las fluctuaciones de la geometría y la validez de la aproximación clásica.

A continuación vamos a revisar todos los resultados obtenidos que se pueden enumerar en los siguientes puntos.

- Hemos obtenido una fijación del gauge parcial válida para todos los espacio-tiempos que tengan dos vectores de Killing espaciales. De esta forma se pueden eliminar las ligaduras relacionadas con los difeomorfismos en las coordenadas asociadas a los vectores de Killing. En el caso de que estos vectores admitan asintóticamente hipersuperficies ortogonales, hemos visto que en esta fijación del gauge los vectores de Killing admitirán hipersuperficies ortogonales en todo el espacio-tiempo. Para efectuar la reducción de estos modelos se han de tener en cuenta las condiciones de contorno particulares de cada caso.

- Para estudiar las ondas planas utilizamos los resultados anteriores dado que en el grupo de simetría de estos espacio-tiempos tiene dos vectores de Killing espaciales. Después añadimos una condición de fijación de gauge que elimina los difeomorfismos en la coordenada u. Finalmente fijamos la libertad gauge que falta con otra condición más y a la vez exigimos dos condiciones de simetría para obtener un modelo que describa las ondas planas. Hemos reducido el sistema asegurándonos que no tenemos contribuciones de términos de superficie y hemos obtenido un modelo libre de ligaduras donde sólo aparecen los grados de libertad físicos. Hemos obtenido la forma simpléctica y el hamiltoniano reducidos, siendo este último nulo debido a la particular elección de coordenadas.

- También hemos presentado un modelo de midisuperespacio que describe las ondas planas con polarización lineal. Para obtener este modelo basta con añadir una condición extra de simetría en la última reducción del caso general. En este caso la forma simpléctica es suficientemente sencilla para obtener los corchetes de Dirac entre los auténticos grados de libertad.

- Después del análisis clásico del modelo de midisuperespacio hemos abordado su cuantización en el caso de las ondas con polarización lineal. Los grados de libertad de este modelo están en un campo Y para el que introducimos un desarrollo de Fourier. Previamente al estudio del caso general, hemos tratado soluciones en las que sólo hay onda en una cierta región del espacio-tiempo y el resto es plano. En este caso tenemos un desarrollo en modos discreto, mientras que es continuo en el caso general. Con la expansión de Fourier podemos expresar el campo como conjunto infinito de variables de tipo aniquilación-creación.

  Hemos eliminado del modelo las geometrías equivalentes relacionadas mediante un reescalado de las coordenadas asociadas a los vectores de Killing. Además hemos visto como el modo cero se desacopla del resto de grados de libertad, por lo que puede ser tratado clásicamente. Teniendo en cuenta estas propiedades podemos restringir nuestro análisis consistentemente a campos que se anulen en un punto u_0. Este punto puede ser fijado arbitrariamente y debe ser interpretado como el punto de referencia respecto al que se hacen las medidas físicas. Como no se pueden precisar con total exactitud los puntos u y u_0, en cualquier medida física realmente se medirá un promedio en un pequeño entorno de estos puntos. Teniendo en cuenta esto, el campo que mediremos físicamente será un campo bilocal $Y_R(u|u_0)$.

Partiendo de $Y_R(u|u_0)$ como campo básico del modelo hemos introducido una representación de Fock y describimos este campo por un operador de Segal. Hemos cuantizado el sistema sobre el espacio de Hilbert de funciones sobre la recta real de cuadrado sumable (secuencias de cuadrado sumable en el caso de modos discretos).

En la regularización del campo básico las divergencias infrarrojas son eliminadas por el requerimiento de que el valor del campo se anule en el punto de referencia u_0 tanto clásica como cuánticamente. El buen comportamiento ultravioleta se asegura cuando hacemos el promedio del campo alrededor de los puntos u, u_0 con una función suave g de soporte compacto (es razonable asumir que este soporte sea del orden de la longitud de Planck). Esta función, cuya forma es arbitraria, introduce una ambigüedad en el proceso de cuantización, de manera similar a como ocurre en otros modelos.

Hemos construido unos operadores regularizados y bien definidos para la métrica a partir de este campo básico. Hemos demostrado que para los operadores correspondientes a la parte diagonal de la métrica son autoadjuntos y positivos. Hemos visto que el otro operador independiente está bien definido.

- Hemos analizado el comportamiento de los operadores diagonales de la métrica sobre los estados coherentes del campo de Segal, estados que minimizan la incertidumbre del producto del campo por su momento conjugado. Como resultado obtenemos que el valor esperado de los operadores de la métrica en estos estados coincide con el resultado clásico y también hemos calculado las fluctuaciones relativas, que no dependen del estado coherente en particular que estemos considerando. Para estos estados, a pesar de recuperar el resultado clásico en promedio, las fluctuaciones relativas de la métrica se disparan al acercarnos a la región donde las ondas planas focalizan las geodésicas nulas. Por lo tanto las geometrías cuánticas descritas por estos estados no admiten una descripción clásica en esa región. Se debe tener en cuenta que el anterior efecto cuántico está ligado a la no linearidad de la gravedad, ya que la focalización es consecuencia de esta.

Es importante notar que estas conclusiones se aplican igualmente para el vacío, estado que describe el espacio-tiempo plano y que también es un estado coherente. Esto plantea serias dudas sobre la validez de la aproximación semiclásica, no es razonable estudiar la cuantización de campos materiales sobre un *background* clásico cuando hemos visto que en este modelo hasta el espacio-tiempo plano tiene fluctuaciones considerables.

- Hemos comparado los resultados obtenidos en nuestro modelo con los demás trabajos de la literatura. Las conclusiones apuntan en la misma dirección, la aproximación semiclásica no tiene por qué ser asumida a priori en la teoría cuántica de la gravedad. En este modelo, aunque tenemos estados centrados en soluciones clásicas las fluctuaciones se disparan invalidando dicha aproximación. En otros modelos ocurre lo mismo.

Por último me gustaría resaltar que el modelo también tiene un carácter pedagógico. El objetivo fundamental era obtener un modelo cuántico para un sistema gravitatorio particular, para después estudiar sus propiedades. Hemos aprendido como enfrentarnos a los problemas que plantea este modelo y esto nos debe ser de ayuda cuando consideremos la teoría general, tenemos una visión limitada de como son las cosas. Sin embargo, este modelo nos enseña que al enfrentarnos a la cuantización de la gravedad algunas cosas que se dan por supuestas de partida deben ser revisadas con mucho cuidado. Este es el caso de la aproximación semiclásica, en este modelo el estado cuántico correspondiente al espacio-tiempo plano presenta fluctuaciones enormes en una zona, y por lo tanto no es válido un tratamiento clásico. Tampoco tienen porque recuperarse siempre los resultados clásicos en algún límite, como ocurre en este modelo. Puede ocurrir que la aproximación clásica sea una teoría efectiva pero que en la teoría cuántica de la gravedad no tengamos estados con un comportamiento clásico global.

Finalmente, algunos puntos han quedado abiertos para futuros trabajos. Este es el caso de la cuantización del caso general de dos polarizaciones, del que hemos hecho algún comentario. A la vista de este trabajo, un objetivo interesante que se nos plantea consiste en estudiar el caso de colisión de ondas gravitatorias. Estos espacio-tiempos tienen propiedades muy interesantes, en algunos casos la colisión de las ondas da lugar a singularidades de curvatura en el futuro. Surge la duda de si se reproducirán los mismos resultados que hemos obtenido para este modelo en el que la singularidad era de coordenadas. Un primer paso puede ser utilizar el formalismo que hemos introducido para espacio-tiempos con dos vectores de Killing. Sin embargo, este objetivo es complicado dado que ni siquiera conocemos la solución general para estos espacio-tiempos.

Otra línea de investigación consiste en introducir un campo escalar en el modelo y estudiar su interacción con las ondas planas linealmente polarizadas. Esta interacción ya ha sido considerada en el caso general de una onda con las dos polarizaciones usando la aproximación semiclásica, es decir, cuantizando sólo el campo escalar [49, 47]. Con las dudas que hemos planteado sobre la validez de esta aproximación, sería interesante ver que resultados se obtienen en un modelo en el cuál se cuantice tanto el campo escalar como el espacio-tiempo.

Apéndice A

Sistemas con ligaduras

La mayoría de los sistemas interesantes en la Física son sistemas singulares que presentan ligaduras. Esto ocurre cuando no tenemos una correspondencia biunívoca entre el espacio de configuraciones y el espacio de fases.

Consideremos un sistema descrito por un lagrangiano $\mathbf{L}(q^k, \dot{q}^k, t)$. Las ecuaciones de **Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \tag{A.1}$$

nos dictan como evoluciona el sistema en el **espacio de configuraciones** $(q^k, \dot{q}^k)$. Ahora para tener una descripción hamiltoniana del sistema definimos los **momentos conjugados**

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \tag{A.2}$$

invirtiendo esta relación

$$\dot{q}^k = \dot{q}^k(q^k, p_k, t) \tag{A.3}$$

podemos pasar del espacio de configuraciones $(q^k, \dot{q}^k)$ al **espacio de fases** (q^k, p_k). El **hamiltoniano** se obtiene haciendo la transformada de Lagrange

$$H(q^k, p_k) = p_k \dot{q}^k() - L(q^k, \dot{q}^k(), t) \tag{A.4}$$

donde $\dot{q}^k()$ indica que se tiene que sustituir la relación (A.3). En el caso de que no se puede invertir la relación (A.2) tendremos un lagrangiano **singular**. Esto ocurre cuando

$$det(W_{ij}) = 0, \qquad W_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 L}{\dot{q}^i \dot{q}^j} \tag{A.5}$$

y reescribiendo las ecuaciones de movimiento como

$$W_{ij}(q, \dot{q}, t)\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}(q, \dot{q}, t)\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{A.6}$$

vemos que las aceleraciones $\ddot{q}^k$ no están determinadas unívocamente y para las mismas condiciones iniciales $(q, \dot{q})$ tendremos diferentes evoluciones. Las soluciones del sistema deberán satisfacer ciertas condiciones en el espacio de fases

$$\Psi_\alpha(q, p, t) = 0 \tag{A.7}$$

y en el de configuraciones

$$\phi_\alpha(q, \dot{q}, t) = 0 \tag{A.8}$$

Algunas **ligaduras** se obtienen directamente de que no podemos invertir las ecuaciones para los momentos (A.2), estas se llaman primarias. Pero aparecen más ligaduras al imponer que las primarias sean compatibles con la dinámica del sistema y así sucesivamente hasta que no tengamos nuevas ligaduras y tengamos un sistema compatible con la dinámica o en caso contrario no haya solución.

Al hamiltoniano le debemos añadir una combinación lineal de ligaduras con unos parámetros arbitrarios(salvo que hayan sido fijados en el proceso de estabilización).

$$H = H_0 + \lambda^\alpha \Psi_\alpha(q, p, t) \tag{A.9}$$

entonces las soluciones no serán únicas y pueden depender de estos parámetros, hecho relacionado con la libertad gauge de la teoría.

Debemos restringir el espacio de fases a la superficie definida por el conjunto de ligaduras $\Psi_\alpha = 0$. Así las soluciones del sistema estarán dentro de esta superficie y el proceso de estabilización nos asegura que la evolución dinámica no las lleva fuera de esta superficie. Vamos a utilizar el símbolo $\approx$ para denotar la igualdad cuando nos restrigimos a la superficie de ligaduras, es decir,

$$A(q, p) \approx B(q, p) \Leftrightarrow A(q, p)|_{\Psi_\alpha = 0} = B(q, p)|_{\Psi_\alpha = 0} \tag{A.10}$$

Tendremos por ejemplo,

$$H \approx H_0 \tag{A.11}$$

Considerando el conjunto $\{\Psi_\alpha\}$ de ligaduras de un sistema singular, podemos clasificarlas en dos tipos:

- ϕ_i será de **Primera clase** si $\{\phi_i, \Psi_\alpha\} \approx 0, \qquad \forall \Psi_\alpha$
- ξ_i será de **Segunda clase** en caso contrario.

Las ligaduras de primera clase están relacionadas con la libertad **gauge** de una teoría. Por lo tanto todas las teorías gauge tendrán un lagrangiano singular pero no ocurrirá lo contrario.

A.1 Eliminación de las ligaduras

A continuación vamos a presentar un método desarrollado por Dirac para eliminar las ligaduras del sistema. Primero trataremos el caso en el que no haya ninguna ligadura de primera clase, después cuando todas las ligaduras sean de primera clase y finalmente como tratar sistemas con ambos tipos de ligaduras.

Sistemas sin ninguna ligadura de primera clase

Tendremos un conjunto $\{\chi_i\}$, $i = 1..2k$ de ligaduras de segunda clase y con él definimos la matriz antisimétrica

$$C_{ij} = \{\chi_i, \chi_j\} \tag{A.12}$$

que es invertible porque $det(C_{ij}) \neq 0$ ya que en caso contrario el sistema no sería de segunda clase. El hecho de que el número de ligaduras de segunda clase sea par se explica porque si construimos la matriz C_{ij} al ser antisimétrica si es de rango impar su determinante es cero.

Ahora definimos el corchete de Dirac $\{\ ,\ \}_D$

$$\{F(q,p), G(q,p)\}_D \equiv \{F, G\} + \{F, \chi_i\}(C^{-1})^{ij}\{\chi_j, G\} \tag{A.13}$$

que sustituirá al corchete de Poisson. Tiene las mismas propiedades y además se verifica que cualquier observable del espacio de fases (incluso las ligaduras) conmutan con las ligaduras bajo este nuevo corchete, es decir,

$$\{F(q,p), \chi_i\}_D = 0, \qquad \forall \chi_i \tag{A.14}$$

y también proporciona la evolución dinámica

$$\dot{F}(q,p) = \{F(q,p), H\}_D \tag{A.15}$$

El punto clave en que en estas relaciones utilizamos el $=$ en lugar de $\approx$ y no necesitamos restringirnos a la superficie de ligaduras, con lo que podemos sustituir las ligaduras en el hamiltoniano y en cualquier observable del espacio de fases y olvidarnos de ellas. Las ligaduras reducen los grados de libertad del sistema y los corchetes de Dirac nos dan la relación entre las variables reducidas del sistema. Para un sistema con $2n$ grados de libertad y $2k$ ligaduras de segunda clase los grados de libertad físicos son $2n - 2k$.

Sistemas con todas las ligaduras de primera clase

En este caso el proceso de eliminación es diferente. Este tipo de ligaduras está relacionado con la libertad gauge de la teoría y para eliminarlas debemos añadir condiciones adicionales para fijar el gauge. Para hacer la fijación adecuadamente debemos asegurarnos que la superficie de las ligaduras intersecta transversalmente la superficie de las condiciones de gauge y además que las condiciones que fijan el gauge son preservadas por la evolución dinámica del sistema. En un sistema con $2n$ grados de libertad y ϕ_i, $i = 1..k$ ligaduras de primera clase debemos añadir k condiciones $g_i = 0$ que verifiquen

$$det(\{g_i, \phi_j\}) \not\approx 0 \tag{A.16}$$

esto asegura que el conjunto $\{g_i, \phi_j\}$ es de segunda clase y que el gauge está bien fijado. La segunda condición

$$\{g_i, H\} \approx 0 \tag{A.17}$$

asegura que la evolución dinámica preserva las condiciones g_i. A continuación podemos introducir el corchete de Dirac como en el caso anterior porque el conjunto $\{g_i, \phi_j\}$ es de segunda clase. Así se eliminan las ligaduras de la teoría y de los $2n$ grados de libertad originales y con k ligaduras de primera clase nos quedan $2n - 2k$ grados de libertad físicos.

Sistemas con ambos tipos de ligaduras

El proceso de eliminación de las ligaduras se puede hacer por etapas, es decir, si tenemos un conjunto de ligaduras de segunda clase podemos eliminar unas cuantas en un paso, construir el corchete de Dirac y después eliminar las restantes y obtener el corchete de Dirac definitivo. Esto significa que el corchete de Dirac para los grados de libertad físicos se puede construir por etapas y esto es precisamente lo que debemos hacer en un sistema que tenga tanto ligaduras de primera como de segunda clase.

Bibliografía

Para estudiar más extensamente el formalismo hamiltoniano para sistemas con ligaduras se puede mirar el trabajo original de Dirac [40] en el que esta todo y muy bien explicado.

También mencionaré un trabajo de Matschull [82] donde se explica de forma muy clara el programa de Dirac basándose en ejemplos.

Apéndice B

Formalismo Hamiltoniano para la RG

La descripción hamiltoniana standard para la Relatividad General fue desarrollada por Arnowitt, Deser y Misner [5] a principios de los 60. Por este motivo, en muchos sitios es llamada formulación ADM. La RG para el vacío está descrita por la acción de Hilbert-Einstein

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} dx^4\sqrt{-g}\, R(g_{\mu\nu}) \tag{B.1}$$

siendo g el determinante de la métrica, y $R(g_{\mu\nu})$ es escalar de curvatura. Para evitar arrastrar constantes elegiremos $1/16\pi G = 1$. Las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son los campos de la teoría y para obtener las ecuaciones de movimiento tenemos que hacer la variación de la acción respecto a las variables $g_{\mu\nu}$. El resultado es

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \qquad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 0 \tag{B.2}$$

que son las ecuaciones de Einstein de vacío. Si queremos considerar el acoplamiento con materia u otros campos tendremos que añadir términos a la acción.

En la descripción hamiltoniana de la teoría es necesario la presencia de tiempo para que podamos hablar de evolución. Por lo tanto, vamos a separar el espacio-tiempo en espacio y tiempo. Nos restringiremos a espacio-tiempos globalmente hiperbólicos(admiten una superficie de Cauchy) con la topología $I\!R \times {}^3\Sigma$ donde ${}^3\Sigma$ será un hipersuperficie espacial y de Cauchy, es decir, los conos de luz que parten de ${}^3\Sigma$ expanden todo el espacio en la dirección futura de ${}^3\Sigma$.

Tenemos una foliación de todo el espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales Σ_t etiquetadas por una función del espacio-tiempo $t = t(x^\mu)$. Llamaremos n^μ al vector unitario normal a la hipersuperficie Σ_t. La métrica $g_{\mu\nu}$ induce unívocamente una métrica sobre Σ_t,

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{B.3}$$

Asociado con la foliación introducimos un vector t^μ que verifique

$$t^\mu \partial_\mu t = 1 \tag{B.4}$$

y que puede ser interpretado como el flujo del tiempo. Sin embargo, este tiempo introducido es ficticio porque no se puede relacionar con una medida de un reloj hasta que no hayamos determinado la métrica resolviendo las ecuaciones de Einstein.

Descomponemos t^μ en componentes normal y tangente a Σ_t

$$t^\mu = N n^\mu + N^\mu \tag{B.5}$$

N es la función lapso y N^μ es un vector tangente a Σ_t. Se pueden elegir unas coordenadas $\{t, x\}$ de forma que la expresión para la métrica sea

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{B.6}$$

Además de tener definida la curvatura intrínseca h_{ij} sobre Σ_t también tenemos definida la curvatura extrínseca K_{ij}

$$K_{\mu\nu} \equiv h_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu \tag{B.7}$$

donde ∇ es la derivada covariante asociada a $g_{\mu\nu}$

Tenemos definidas las cantidades fundamentales para el formalismo canónico. Por un lado la métrica intrínseca h_{ij} nos da la geometría de la superficie Σ_t, la curvatura extrínseca K_{ij} contiene la información sobre la evolución temporal de Σ_t. Por último las funciones N, N^i no son variables dinámicas y sólo dan información sobre la foliación.

Haciendo uso de las relaciones de Gauss-Kodazzi [120] podemos escribir la acción (B.1) como

$$S = \int dt \int_\Sigma d^3x \quad [\, \mathcal{L} + T.S.(a)\,] \tag{B.8}$$

donde la densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} \;\; = \;\; N\sqrt{h}\, ({}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2) \tag{B.9}$$

y tenemos un término que es una divergencia

$$T.S.(a) \;\; = \;\; \sqrt{-g}\, [\, \nabla_\mu(n^\mu \nabla_\nu n^\nu) - \nabla_\mu(n^\nu \nabla_\nu n^\mu)\,] \tag{B.10}$$

donde h es el determinante de h_{ij}, ${}^3R$ es la curvatura y $K = h_{ij}K^{ij}$. Por el momento nos olvidaremos de $T.S.(a)$ porque se trata de término de superficie. En otra sección haremos un análisis más detallado de estos términos.

Tomaremos como variables canónicas $\{\ h_{ij}, N, N^i\ \}$ y calcularemos sus momentos conjugados

$$\Pi^{ij} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{h}_{ij}} = \sqrt{h}(K^{ij} - Kh^{ij}) \tag{B.11}$$

en el caso de N, N^i sus momentos son nulos, por lo tanto tendremos ligaduras en la teoría. Ahora realizamos la transformación de Legendre para obtener el Hamiltoniano

$$H(h_{ij}, \Pi^{ij}) = \int_\Sigma d^3x\ \ (\Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}) \tag{B.12}$$

y sustituyendo $\dot{h}_{ij}$ en términos de h_{ij} y Π^{ij} se obtiene

$$H(h_{ij}, \Pi^{ij}) = \int_\Sigma d^3x\ \ (\underset{\sim}{N}\tilde{C} + N^i\tilde{C}_i) +\ T.S.(b) \tag{B.13}$$

siendo la ligadura hamiltoniana densitizada

$$\tilde{C} \ \ = \ \ -h\ {}^3R + (h_{ik}h_{jl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - \frac{1}{2}\Pi^2) \tag{B.14}$$

y las ligaduras de los momentos

$$\tilde{C}_i \ \ = \ \ -2h_{ik}D_j\Pi^{jk} \tag{B.15}$$

Notemos que la función lapso ha sido densitizada de acuerdo a $\underset{\sim}{N} = h^{-1/2}N$. En el hamiltoniano podemos tener una contribución de superficie,

$$T.S.(b) = 2\int_\Sigma d^3x\ D_j(N^ih_{ik}\Pi^{jk}) \tag{B.16}$$

que igual que antes la dejaremos de lado por el momento, para más adelante estudiarla en otra sección.

Como ya hemos anticipado las variables $\underset{\sim}{N}, N^i$ no tienen información dinámica y la variación de la acción respecto a ellas nos da las ligaduras

$$\frac{\delta S}{\delta \underset{\sim}{N}} \ \ = \ \ 0, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{C} = 0 \tag{B.17}$$

$$\frac{\delta S}{\delta N^i} \ \ = \ \ 0, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{C}_i = 0 \tag{B.18}$$

por lo tanto, hacen el papel de multiplicadores de Lagrange. Las variables canónicas son $\{h_{ij}, \Pi^{ij}\}$ y tienen los corchetes de Poisson habituales

$$\{h_{ij}(x), \Pi^{kl}(y)\} = \delta_i^k\delta_j^l\delta(x-y) \tag{B.19}$$

B.1 Ligaduras

Vamos a estudiar ahora el significado de las ligaduras. Para simplificar los cálculos es conveniente suavizar las ligaduras con unas funciones test arbitrarias,

$$
\begin{aligned}
C(\underset{\sim}{N}) &= \int_\Sigma d^3x\, \underset{\sim}{N}\tilde{C}(h_{ij},\Pi^{ij}) && \text{(B.20)}\\
C(\vec{N}) &= \int_\Sigma d^3x\, N^i\tilde{C}_i(h_{ij},\Pi^{ij}) && \text{(B.21)}
\end{aligned}
$$

Estas ligaduras forman un sistema de primera clase. Si calculamos el álgebra de Poisson obtenemos

$$
\begin{aligned}
\{C(\vec{N}),C(\vec{M})\} &= C(\mathcal{L}_{\vec{M}}\vec{N}), && \text{(B.22)}\\
\{C(\vec{N}),C(\underset{\sim}{M})\} &= C(\mathcal{L}_{\vec{N}}\underset{\sim}{M}), && \text{(B.23)}\\
\{C(\underset{\sim}{N}),C(\underset{\sim}{M})\} &= C(\vec{K}) && \text{(B.24)}
\end{aligned}
$$

donde el vector $\vec{K}$ se define como $K^i = hh^{ij}(\underset{\sim}{N}\partial_j\underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{M}\partial_i\underset{\sim}{N})$. Fijaros que no es un álgebra de Lie porque las constantes de estructura no son constantes (en la última ecuación podemos ver la dependencia con h_{ij} en la definición de K^i).

Entonces las ligaduras están directamente relacionadas con la libertad gauge de la teoría, la invariancia bajo difeomorfismos. Si calculamos el corchete de Poisson entre la ligadura $C(\vec{N})$ y una función del espacio de fases $f(h_{ij},\Pi^{ij})$ obtenemos

$$\{f(h_{ij},\Pi^{ij}),C(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}}f(h_{ij},\Pi^{ij}) \qquad \text{(B.25)}$$

donde $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie a lo largo de $\vec{N}$. Técnicamente, es el generador infinitesimal de traslaciones sobre Σ_t. Por lo tanto la ligadura $C(\vec{N})$ genera difeomorfismos sobre la superficie Σ_t. Análogamente la ligadura $C(\underset{\sim}{N})$ está asociada a la invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo de la teoría.

Debemos notar en este caso que las ligaduras generan la evolución dinámica de la teoría porque el hamiltoniano es una suma de ligaduras.

B.2 Términos de superficie

En el proceso que hemos seguido hasta obtener las ligaduras han aparecido varios términos de superficie en (B.10,B.16), que hemos dejado de lado, ahora los recuperaremos. En la acción estos términos contribuyen como

$$(a) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\,[\,\nabla_\mu(n^\mu\nabla_\nu n^\nu) - \nabla_\mu(n^\nu\nabla_\nu n^\mu)\,] \tag{B.26}$$

$$(b) \quad \Rightarrow \quad -2\int_{\mathcal{M}} d^4x\; D_j(N^i h_{ik}\Pi^{jk}) \tag{B.27}$$

Según las condiciones de contorno del sistema que estemos estudiando estos términos pueden anularse o no. En el caso de que no sean nulos es muy importante añadir al hamiltoniano las contribuciones de estos términos, porque en caso contrario no recuperaremos las ecuaciones de Einstein correctas.

Para no dar lugar a confusión mencionaremos que en otros trabajos se añade de partida a la acción de Hilbert-Einstein los términos de superficie necesarios para cancelar los que aparecen y así obtener para el hamiltoniano la expresión

$$H = \int_\Sigma d^3x \;\; (\underset{\sim}{N}\tilde{C} + N^i\tilde{C}_i) \tag{B.28}$$

Por conveniencia, nosotros optamos por partir de la acción de Hilbert-Einstein (B.1) y calcular después los términos de superficie que aparecen.

Bibliografía

En principio mencionaremos el trabajo original de Arnowitt, Deser y Misner [5]. Sin embargo para estudiar con más detalle el formalismo hamiltoniano para la RG es preferible recurrir a un presentación más reciente. Entre las muchas de la literatura citaré un par, [120] y [53]. Quizás en esta última esta más claro.

Respecto a los términos de superficie se puede recurrir a las mismas referencias. En el trabajo de Hawking y Hunter [53] se analizan con más detalle.

Apéndice C

Geometría Simpléctica

Vamos a presentar la **mecánica clásica** desde un punto de vista geométrico. La elegancia de esta versión radica en que tenemos una descripción del sistema independiente de la elección de las coordenadas. De manera estándar, para un sistema con N grados de libertad el **espacio de fases** es una variedad $\mathcal{M}$ de $2N$ dimensiones. Cada estado del sistema esta representado por un punto de $\mathcal{M}$. El **hamiltoniano**, H, es una función definida en $\mathcal{M}$ que dicta la evolución temporal del sistema. Veamos como, introduciremos en $\mathcal{M}$ una 2-forma w que sea no degenerada y cerrada. Dado H tenemos definido dH y mediante w podemos asociar a todo dH un campo vectorial V_H

$$w(V_H) + dH = 0 \tag{C.1}$$

Por lo tanto el flujo de este campo vectorial nos dice como evoluciona temporalmente el sistema. La 2-forma w proporciona la relación entre el espacio tangente en un punto de $\mathcal{M}$ y el espacio cotangente. De esta forma toda función F del espacio de fases tiene asociada una 1-forma dF y campo vectorial V_F.

Los **observables** de nuestro sistema son funciones definidas en el espacio de fases. Recordemos que tenemos unas estructura importante definida en el espacio de fases, dados dos observables F, G tenemos definido otro observable $\{ F, G\}$, que es el **corchete de Poisson** de F y G. Mediante w podemos escribir de la siguiente forma

$$\{F, G\} \equiv dF(V_G) \tag{C.2}$$

es decir, el corchete de Poisson de dos observables se obtiene por la contracción de la 1-forma y el campo vectorial asociados a cada observable respectivamente. También se puede escribir como

$$\{F, G\} \equiv w(V_G, V_F) \tag{C.3}$$

Con esto ya tenemos todos los ingredientes para el estudio clásico del sistema. Vuelvo a insistir en que esta descripción es independiente de las coordenadas. Para aclarar las ideas vamos a fijar un sistema de coordenadas y reescribiremos de nuevo todo.

Las coordenadas del espacio de fases serán (p, q). La 2-forma w sera

$$w = dp \wedge dq \tag{C.4}$$

entonces para un observable $F(p, q)$ tenemos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp \qquad V_F = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \tag{C.5}$$

y la expresión habitual del corchete de Poisson es

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} \tag{C.6}$$

En resumen, el objeto básico para la descripción de un sistema clásico es una variedad diferenciable $2N$ dimensional $\mathcal{M}$ dotada de una 2-forma w no degenerada y cerrada. A este par $(\mathcal{M},w)$ se le llama una **variedad simpléctica** y w es la forma simpléctica. La exigencia de que w sea no degenerada nos asegura que la relación proporcionada por w entre los espacios tangente y cotangente es un isomorfismo, es decir, que a toda función del espacio de fases se le asocia un único campo vectorial, y viceversa. Que w sea cerrada significa que

$$dw = 0 \tag{C.7}$$

Cada punto del espacio de fases representa un estado del sistema. Ahora para estudiar la dinámica del sistema necesitamos un Hamiltoniano H, que nos da evolución temporal de cada estado como ya hemos descrito. La evolución de un observable es

$$\dot{F} \equiv \{F, H\} \tag{C.8}$$

En este formalismo una **transformación canónica** ρ es una transformación que preserva la estructura simpléctica, es decir,

$$w(\rho X, \rho Y) = w(X, Y) \tag{C.9}$$

C.1 Espacio de fases covariante

La geometría simpléctica es una herramienta potente para el estudio de la dinámica de sistemas clásicos, así como las simetrías y la cuantización de ellos. Proporciona una descripción covariante del formalismo hamiltoniano, sin embargo, cuando elegimos unas coordenadas (q, p) en el espacio de fases rompemos la covariancia explícita de la teoría. Para mantener la covariancia desarrollaremos el concepto del **espacio de fases covariante**. La idea principal de este método consiste en considerar que tenemos una correspondencia unívoca entre las soluciones clásicas de un sistema y los valores de las qs y las ps para el tiempo cero. Esto nos permite definir covariantemente el espacio de fases como el espacio de soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Llamemos $\mathcal{Z}$ a este espacio de soluciones. Para teorías de campos lagrangianas se ha desarrollado el formalismo que permite estudiar la geometría diferencial de $\mathcal{Z}$ y definir de manera covariante una estructura simpléctica sobre este espacio. En [34] tenemos los resultados para teorías de Yang-Mills, para la RG y para teorías de cuerdas.

Cuando tenemos una teoría gauge, el espacio de fases físicamente relevante será el espacio de soluciones módulo las transformaciones gauge $\mathcal{Z}/\mathcal{G}$. Para que este espacio sea una variedad simpléctica debemos asegurarnos que la forma simpléctica sea no degenerada y que sea invariante frente a transformaciones gauge. Otro punto delicado es asegurar que $\mathcal{Z}/\mathcal{G}$ sea una variedad diferenciable. Para la RG pueden aparecer problemas, pero, en el caso de espacio-tiempos asintóticamente planos no hay problemas (justamente en esta clase de espacio-tiempos podemos definir la energía y el momento totales).

La expresión para la forma simpléctica en el caso de la RG es la siguiente:

$$w = \int_\Sigma d\Sigma_\alpha \sqrt{g} \left[\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta \ln g) - \delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} (\delta g^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \delta \ln g) \right] \quad \text{(C.10)}$$

siendo

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\beta} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) \quad \text{(C.11)}$$

además δ es la derivada exterior en $\mathcal{Z}$, ∇ es la derivada covariante y Σ una hipersuperficie de Cauchy arbitraria.

Bibliografía

Un buen libro que contiene un capítulo dedicado a la geometría simpléctica es [123], aunque quizás sea demasiado formal. Se puede consultar también el report sobre teorías canónicas de sistemas lagrangianos [60].

Respecto al espacio de fases covariante en las referencias [33] y [34] están todos los detalles.

Apéndice D

Cálculo de los términos de superficie

En este apéndice vamos a calcular explicítamente los términos de superficie para el modelo de midisuperespacio que hemos presentado para las ondas planas. Veremos que efectivamente se anulan y por lo tanto no tendremos ninguna contribución extra al hamiltoniano en el proceso de reducción. Recordemos que la métrica del sistema reducido es

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2w_0-z_0+y/2}(du^2-2dTdu)+ \\ & e^{z_0-y/2}[(dx^1)^2-2vdx^1dx^2+(v^2+e^y)(dx^2)^2] \end{aligned} \tag{D.1}$$

En primer lugar vamos a calcular los términos (B.27) de tipo (b).

$$\begin{aligned} T.S.(b) &= \frac{1}{16\pi G}\int_\Sigma d^3x\ 2D_j(N^ih_{ik}\Pi^{jk}) \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_\Sigma d^3x\ 2\partial_j(N^ih_{ik}\Pi^{jk}) \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} du\ \partial_u(N^ih_{ik}\Pi^{uk}) \\ &= 2\left[\,N^i\,h_{ik}\,\Pi^{uk}\,\right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \tag{D.2}$$

donde hemos utilizado que la métrica, el lapso, los momentos y las componentes de N^i no dependen de las coordenadas x^1, x^2 y hemos reescalado la constante de Newton efectiva de acuerdo a $16\pi G=1$. Si ahora sustituimos las condiciones $h_{au}=0$ y $\Pi^{au}=0$ obtenemos,

$$T.S.(b) \;=\; 2\,[\,N^u\,h_{uu}\,\Pi^{uu}\,]_{-\infty}^{\infty} \tag{D.3}$$

Haciendo un poco de cálculo podemos expresar Π^{uu} en función de los nuevos momentos utilizando las relaciones (5.27) que definen el cambio. El resultado es

$$\Pi^{uu} = \frac{1}{2}\,(h_{uu})^{-1}\,P_w \tag{D.4}$$

Ahora utilizando este resultado y que $N^u = -1$ obtenemos que la contribución de superficie es

$$\begin{aligned} T.S.(b) &= -\left[P_w\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= P_w(u=-\infty) - P_w(u=\infty) = 0 \end{aligned} \tag{D.5}$$

y podemos ver que es nula porque P_w va a cero tanto en $-\infty$ como en $+\infty$. Esto se verifica fácilmente de su expresión

$$P_w = -z_0' e^{z_0}, \qquad z_0 = -e^{-u} \tag{D.6}$$

Ahora vamos a calcular las contribuciones de los otros (B.26) términos de superficie.

$$T.S.(a) = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\;\nabla_\mu\left(n^\mu\nabla_\nu n^\nu - n^\nu\nabla_\nu n^\mu\right) \tag{D.7}$$

$$= \int dtdu\,\partial_u\left[N\,h^{1/2}\left(n^u\nabla_\nu n^\nu - n^\nu\nabla_\nu n^u\right)\right] \tag{D.8}$$

$$= \int dt\;\left[\underset{\sim}{N}\,h(\,n^u\nabla_\nu n^\nu - n^\nu\nabla_\nu n^u)\right]_{u=-\infty}^{u=\infty} \tag{D.9}$$

donde de nuevo hemos utilizado que nada depende de las coordenadas x^1, x^2 y que $16\pi G = 1$.

El vector n^μ se escribe como

$$n^\mu \equiv\; (1/N, -N^u/N, 0, 0) =\; (h_{uu}^{-1/2}, -h_{uu}^{-1/2}, 0, 0) \tag{D.10}$$

entonces para la métrica (6.38) después de hacer un poco de cálculo obtenemos el siguiente resultado

$$n^u\nabla_\nu n^\nu - n^\nu\nabla_\nu n^u \;=\; -\frac{1}{2}h_{uu}^{-1}(3h_{uu}^{-1}\partial_T h_{uu} + 2\partial_T z_0 - 2\partial_u z_0) \tag{D.11}$$

y teniendo en cuenta que z_0 no depende de T y que

$$\underset{\sim}{N}\,h\; = e^{z_0}h_{uu} \tag{D.12}$$

el término de superficie se convierte en

$$T.S.(a) \;=\; \int dT\;\left[-\frac{1}{2}e^{z_0}\,(h_{uu}^{-1}\partial_T h_{uu} - 2\partial_u z_0)\right]_{u=-\infty}^{u=\infty} \tag{D.13}$$

El segundo término no contribuye porque $z_0' e^{z_0}$ se anula para $u = \pm\infty$. Entonces, si tenemos en cuenta que

$$h_{uu} = e^{2w_0 - z_0 + y/2} \tag{D.14}$$

y que z_0 no depende de T, podemos escribir el término que nos queda como

$$\begin{aligned} T.S.(a) &= \int dT \left[-\frac{1}{2}\,\partial_T \left(e^{z_0}(2w_0 + \frac{y}{2}) \right) \right]_{u=-\infty}^{u=\infty} && \text{(D.15)} \\ &= \left[\left[-\, e^{z_0}(w_0 + \frac{y}{4}) \right]_{u=-\infty}^{u=\infty} \right]_{T=-\infty}^{T=\infty} && \text{(D.16)} \end{aligned}$$

y por lo tanto este término de superficie no es más que una constante que no contribuye al hamiltoniano.

Con esto terminamos el análisis de los términos de superficie. Hemos visto que en nuestro modelos de midisuperespacio para las ondas planas no tenemos ninguna contribución de superficie.

Bibliografía

[1] M. Allen, Class. Quantum Grav. **4**, 149 (1987).

[2] E. Alvarez, Rev. Mod. Phys. **61**, 561, (1989).

[3] G. Amelino-Camelia, *Gravity-wave interferometers as probes of a low-energy effective quantum gravity*, gr-qc/9903080.

[4] G. Amelino-Camelia, Nature **398**, 216, (1999).

[5] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, "The Dynamics of General Relativity" in *Gravitation, an Introduction to Current Research*, edited by L. Witten, Wiley, New York, (1962).

[6] A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244, (1986).

[7] A. Ashtekar, Phys. Rev. D**36**, 1587, (1987).

[8] A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **77**, 4864 (1996).

[9] A. Ashtekar, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, World Scientific, Singapore, (1991).

[10] A. Ashtekar and V. Hussain, Int. J. Mod. Phys. D**7**, 549, (1998).

[11] A. Ashtekar and M. Pierri, J. Math. Phys. **37**, 6250 (1996).

[12] A. Ashtekar and J. Pullin, Ann. Israel Phys. Soc. **9**, 65 (1990).

[13] A. Ashtekar, R. S. Tate, and C. Uggla, Int. J. Mod. Phys. D **2**, 15 (1993).

[14] A. Ashtekar, R. S. Tate, and C. Uggla, *Midisuperspaces: Symmetries and Quantization*, gr-qc/9302026.

[15] O. R. Baldwin and G. B. Jeffrey, Proc. R. Soc. London, **A408**, 175 (1926).

[16] C. Beetle, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 471 (1998).

[17] V. A. Belinkskii and V. E. Zakharov, Sov. Phys., JETP 48, 985, (1978).

[18] V. A. Belinkskii and V. E. Zakharov, Sov. Phys., JETP 50, 1, (1980).

[19] I. Bengtsson, Class. Quantum Grav. **5**, L139 (1988).

[20] I. Bengtsson, Class. Quantum Grav. **7**, 27 (1990).

[21] B. K. Berger, Ann. Phys. (N.Y.) **83**,458 (1974).

[22] B. K. Berger, Ann. Phys. (N.Y.) **156**, 155 (1984).

[23] D. Bernard and B. Julia, Nucl. Phys. B **547**, 427, (1997).

[24] L. Bombelli and R. J. Torrece, Class. Quantum Grav. **7**, 1427 (1990).

[25] H. Bondi, Nature, **179**, 1072, (1957).

[26] H. Bondi and F. A. E. Pirani, Proc. Roy. Soc. **421A**, 395, (1989).

[27] H. Bondi, F. A. E. Pirani and I. Robinson, Proc. Roy. Soc. **251A**, 519, (1959).

[28] R. Borissov, Phys. Rev. D **49**, 923 (1994).

[29] J. Bognar, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer, Berlin (1974).

[30] P. Breitenlohner, D. Maison and G. Gibbons, Commun. Math. Phys. **120**, 295, (1988).

[31] H. W. Brinkman, Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.) **9**, 1 (1923).

[32] H. W. Brinkman, Math. Ann. **94**, 119 (1925).

[33] C. Crnkovic and E. Witten, *300 Years of Gravitation*, p. 676, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

[34] C. Crnkovic, Nucl. Phys. **B228**, 419, (1987).

[35] J. Cruz, D. J. Navarro, and J. Navarro-Salas, *General Covariance and Free Fields in Two Dimensions*, hep-th/9712194.

[36] J. Cruz, A. Miković, and J. Navarro-Salas, Phys. Lett. B **437**, 273, (1998).

[37] A. Das, *Integrable models*, World Scientific, Singapoure, (1989).

[38] V. A. De Lorenci, J. Martin, N. Pinto-Neto, and I. Damião Soares Phys. Rev. D **56**, 3329 (1997).

[39] B. S. DeWitt, Phys. Rev. 160, 1113 (1967).

[40] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University Press, New York, (1964).

[41] A. E. Domínguez and M. H. Tiglio, Phys. Rev. D**69**: 064001 (1999).

[42] M. Dorca and E. Verdaguer, Nucl. Phys. **B403**, 770, (1993).

[43] J. Ehlers and W. Kundt, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten, Wiley, New York, (1962).

[44] A. Einstein and N. Rosen, J. Franklin Inst. **223**, 43 (1937).

[45] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer-Verlag, Berlin, (1987).

[46] R. Gambini and J. Pullin, Mod. Phys. Lett. A **12**, 2407 (1997).

[47] J. Garriga and E. Verdaguer, Phys. Rev. D**43**, 391 (1991).

[48] R. Geroch, J. Math. Phys. **13**, 394, (1972).

[49] G. W. Gibbons, Comm. Math. Phys. **45**, 191 (1975).

[50] G. González and R. S. Tate, Class. Quant. Grav. **12**, 1287, (1995).

[51] R. H. Gowdy, Ann. Phys. (N.Y.) **83**, 203 (1974).

[52] J. B. Griffiths, *Collindig Plane Waves in General Relativity*, Oxford University Press, (1991).

[53] S. W. Hawking and C. J. Hunter, *The Gravitational Hamiltonian in the Presence of Non-Orthogonal Boundaries*, Class. Quant. Grav. **13**, 2735, (1996).

[54] G.'t Hooft and M. Veltman, Ann. Inst. Henri Poincaré, **A20**, 69, (1974).

[55] V. Husain, Phys. Rev. D **50**, 6207 (1994).

[56] V. Husain, Phys. Rev. D **53**, 4327 (1996).

[57] V. Husain and L. Smolin, Nucl. Phys. **B327**, 205 (1989).

[58] R. Jackiw, J. Math. Phys. **9**, 339, (1968).

[59] K. Kahn and R. Penrose, Nature, **229**, 185, (1971).

[60] H. A. Kastrup, Phys. Rep. **101**, 1, (1983).

[61] H. Kastrup and T. Thiemann, Nucl. Phys. **B425**, 665 (1994).

[62] H. Kastrup and T. Thiemann, Nucl. Phys. **B399**, 211 (1993).

[63] H. Kodama, Prog. Theor. Phys. **80**, 1024 (1988).

[64] H. Kodama, Phys. Rev. D **42**, 2548 (1990).

[65] D. Korotkin and H. Samtleben, Phys. Rev. Lett. **80**, 14 (1998).

[66] D. Korotkin and H. Samtleben, Comm. Math. Phys. **190**, 411, (1997).

[67] S. Koshti and N. Danhich, Class. Quantum Grav. **6**, L223 (1989).

[68] C. N. Kozameh, *Gravitation and relativity: at turn of the millenium*, edited by N. Dahdhich and J. Narlikar, Proceedings of the 15th International Conference on General Relativity and Gravitation, IUCAA publishig, Poona, India, (1998).

[69] D. Kramer, H. Stephani, M. A. H. MacCallum, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press, (1980).

[70] K. Kuchař, Phys. Rev. D **4**, 955 (1971).

[71] K. Kuchar, *Quantum Gravity 2*, p. 329, edited by C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama, Clarendon press, Oxford, (1981).

[72] M. A. H. MacCallum, *Carguese Lectures in Physics*, edited by E. Schtzman, Gordon and Breach, New York, (1984).

[73] D. Maison, Phys. Rev. Lett. **41**, 521, (1978).

[74] N. Manojlović and G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **48**, 3704 (1993).

[75] N. Manojlović and G. A. Mena Marugán, Int. J. Mod. Phys. D**4**, 749 (1995).

[76] G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **53**, 3156 (1996).

[77] G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **56**, 908 (1997).

[78] G. A. Mena Marugán and M. Montejo, Phys. Rev. D **58**: 104017 (1998).

[79] G. A. Mena Marugán and M. Montejo, *Plane waves in quantum gravity: breakdown of the classical spacetime*, gr-qc/9906101.

[80] G. A. Mena Marugán and M. Montejo, *Canonical quantization of gravitational plane waves*, Proceedings of the International Seminar on Mathematical Cosmology, Edited by M. Rainer and H.-J. Schmidt, World Scientific, Singapur, (1999).

[81] G. A. Mena Marugán and M. Montejo, Rep. Math. Phys. (1999). En prensa.

[82] H.-J. Matschull, *Dirac's Canonical Quantization Programme*, quant-ph/9606031.

[83] magic

[84] C. W. Misner, Phys. Rev. Lett. 22, 1071 (1969).

[85] C. W. Misner, *Magic Without Magic*, edited by J. R. Klauder, W. H. Freeman, San Francisco, (1972).

[86] V. Moncrief, Phys. Rev. D**23**, 312 (1981).

[87] V. Moncrief, Ann. Phys. **132**, 87 (1981).

[88] V. Moncrief and M. Ryan, Phys. Rev. D **44**, 2375 (1991).

[89] G. Morchio, D. Pierotti and F. Strocchi, J. Math. Phys. **31**, 1467 (1990).

[90] G. Morchio, D. Pierotti and F. Strocchi, J. Math. Phys. **33**, 777 (1992).

[91] G. Morchio and F. Strocchi, Ann. Inst. Henri Poincaré, **33A**, 251 (1980).

[92] D. E. Neville, Class. Quantum Grav. **10**, 2223 (1993).

[93] D. E. Neville,Phys. Rev. D **55**, 766 (1997).

[94] D. E. Neville,Phys. Rev. D **55**, 2069 (1997).

[95] D. E. Neville,Phys. Rev. D **56**, 3485 (1997).

[96] D. E. Neville,Phys. Rev. D **57**, 986 (1998);

[97] R. S. Palais, Commun. Math. Phys. 69, 19, (1979).

[98] R. Penrose, Rev. Mod. Phys. **37**, 215, (1965).

[99] A. Z. Petrov, *Einstein Spaces*, Pergamon Press (1969).

[100] M. S. Plyushchay and A. V. Razumov, *Dirac versus reduced phase space quantization*, hep-th/9412137

[101] D. Pierotti, Lett. Math. Phys. , **15**, 219 (1988).

[102] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, (1975).

[103] J. D. Romano and R. S. Tate, Class. Quantum Grav. **6**, 1487, (1989).

[104] N. Rosen, Phys. Z. Sovjet Union, **12**, 366 (1937).

[105] C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **61**, 1155, (1988).

[106] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. **B331**, 80, (1990).

[107] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. **B442**, 593, (1995).

[108] A. M. Sintes i Olives, *Inhomogeneus cosmologies with special properties*, Ph. D. Dissertation, UIB, (1996).

[109] S. Sinha and B. L. Hu, Phys. Rev. D**44**, 1028, (1991).

[110] R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, (1964).

[111] P. Szekeres, Nature, **228**, 1183, (1970).

[112] P. Szekeres, J. Math. Phys. **13**, 286, (1972).

[113] C. G. Torre, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1081, (1999).

[114] M. Varadarajan, Phys. Rev. D **57**, 3463 (1998).

[115] E. Verdaguer, Phys. Rep. **229**, 1, (1993).

[116] M. Visser, *Acoustic Black Holes*, gr-qc/9901047.

[117] M. Visser, Class. Quant. Grav. **15**, 1767, (1998).

[118] G. E. Volovik, *Superfluid ^{3}He, Particle Physics and Cosmology*, cond-mat/9711031

[119] J. Wainwright, J. Phys. A, **14**, 1131, (1981).

[120] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, (1984).

[121] J. Wheeler, *Relativity, Groups, and Topology*, p. 316, edited by C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach, New York, (1964).

[122] J. A. Wheeler, *Battelle Rencontres; 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, edited by C. De Witt and J. A. Wheeler, Benjamin and Co., New York, (1968).

[123] N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford University Press, New York, (1980).