

CAPÍTOL 6: EL PROBLEMA INVERS EN LA PROSPECCIÓ ELÈCTRICA

6.1 – INTRODUCCIÓ

Tal com s'explicava en el capítol 5, les dades mesurades aporten una imatge suavitzada del subsòl terrestre que s'anomena pseudosecció. Aquesta imatge no determina correctament el contrast de resistivitat elèctrica entre les estructures, ni tampoc és correcta la seva localització. Per aquesta raó, la interpretació de les dades requereix la resolució del problema invers.

La teoria de la inversió és un procés matemàtic utilitzat per solucionar problemes complexos en diferents àmbits de la ciència, però destaca la seva aplicació en el camp de la geofísica. D'una manera senzilla i generalitzada, es pot dir que el problema invers aporta una descripció de l'interior de la Terra ajustant les dades mesurades en superfície a un possible model del subsòl terrestre.

Els problemes que estudia la geofísica es consideren problemes indeterminats degut a la falta intrínseca de dades i a l'existència dels errors sobre les dades i sobre els models (Tarantola, 1987).

En l'actualitat, la inversió s'ha convertit en un procés necessari per interpretar les dades de camp, però presenta inconvenients com la no existència, la no unicitat o la

inestabilitat de la solució, que fan que no sigui un problema fàcil de resoldre. Quan es parla de la no unicitat del problema invers es fa referència a la impossibilitat de determinar una única solució a causa del conjunt finit de dades del que es disposa (Parker, 1977), és a dir, existeix un ampli ventall de models que són compatibles amb les dades mesurades. Per altra banda, el problema de la inestabilitat està lligat amb el propi procés de la inversió. El problema invers és un problema mal condicionat i per això, petites variacions en les dades poden provocar grans canvis en els paràmetres que defineixen el model. Una manera de reduir aquests problemes és introduir en el procés de la inversió tota aquella informació a priori procedent d'altres estudis geològics o d'altres mètodes geofísics (Pous et al. 1987).

La prospecció elèctrica de corrent continu és una tècnica que s'aplica per a resoldre problemes molt diversos. Algunes d'aquestes aplicacions són la localització d'àrees arqueològiques (Gad El-Quady et al., 1999; Chávez et al., 2001), la detecció de cavitats buides (Tejero et al., 2002), l'estudi d'estructures geològiques (Zhou et al., 2000; Batayneh, 2002; Seaton i Burbey, 2002; Baines et al., 2002) o l'estudi de problemes mediambientals (Seaton i Burbey, 2000).

Existeixen diversos algorismes d'inversió bidimensional de prospecció elèctrica que permeten descriure el subsòl terrestre a partir de la distribució de conductivitats (Sasaki, 1992; Oldenburg, 1994; Tsourlos et al., 1998; Loke, 1999; Olayinka et al., 2000; Pérez-Flores et al., 2001; Pain et al., 2002). L'inconvenient principal, però, és que aquests no permeten tenir accés al codi que controla els processos numèrics. Són programes que només permeten ser purs usuaris i on les dades observades és el fitxer d'entrada, i la sortida és un altre fitxer que mostra un possible model del subsòl.

L'objectiu d'aquest capítol és presentar un programa d'inversió i que permet tractar les dades obtingudes en campanyes de tomografia elèctrica o de perfils de sondejos elèctrics verticals. Per això s'estudien en detall tots els passos que es realitzen en el procés de la inversió. El programa té l'avantatge que presenta les operacions matemàtiques de forma oberta i clara. Això, permet que l'usuari pugui modificar el codi font del programa per aportar millores, adaptar el programa a altres tipus de dispositius o, en treballs futurs, realitzar els passos adients per resoldre el problema invers en tres dimensions.

6.2 - ANTECEDENTS

El problema invers en els mètodes geoelectrics va començar a ser investigat a principis dels anys trenta (Slichter, 1933; Langer 1933; Stevenson, 1934). Posteriorment, gràcies a la millora de la velocitat i de la memòria dels ordinadors es van desenvolupar tècniques numèriques que proporcionaven solucions més ajustades a les dades experimentals. Però, malgrat aquests avanços, durant els anys 70 i 80 la solució del problema invers encara precisava d'un temps de computació important, perquè s'utilitzava la modelització a través d'estructures molt simples com falles amb formes rectangulars (Olayinka, 1988), amb formes el·líptiques (Mundry i Homilus, 1972), o amb fronteres regulables entre diferents capes homogènies (Lee, 1972). Aquest mètode era útil per obtenir una primera estimació de la distribució de resistivitats elèctriques, però és evident, que presentava moltes limitacions en el tipus d'estructures geològiques que es podien representar.

Una tècnica posterior va ser l'anomenada back-projection o retroprojecció (Barber i Seagar, 1987; Lowry i Shive, 1990), la qual es basava en la idea de reconstruir el model utilitzant una suma ponderada dels potencials elèctrics mesurats. La seva utilització principal estava dirigida a la determinació de les zones amb altes i baixes resistivitats.

La indeterminació en la solució del problema invers comporta que la majoria dels algorismes actuals es basin en diferents formes del criteri dels mínims quadrats. Aquest mètode es basa en la linealització del problema i aporta una solució acceptable. Existeixen, però, variacions d'aquesta tècnica que ofereixen una millor convergència i un millor control de l'estabilitat de la solució. Sasaki (1992) utilitza la tècnica d'Occam (Constable, Parker, i Constable, 1987) per trobar el model que s'ajusta a les dades mesurades en la prospecció elèctrica, Loke i Barker (1996b) utilitzen també aquesta tècnica però amb una versió iterativa on s'implementa el mètode de Quasi-Newton que redueix el temps de computació de forma considerable.

Altres mètodes per solucionar l'equació del problema invers és la tècnica SVD, Singular Value Decomposition, (p.e. Avis i Barber, 1994) o l'aproximació Bayessiana que es basa en una aproximació estadística, on la informació sobre els paràmetres i les dades es pren com una variable aleatòria de la qual es coneix la funció de densitat de probabilitat i on és possible introduir informació a priori (p.e. Marcuello et al., 1992).

Totes aquestes tècniques requereixen la determinació de la matriu de derivades

parcials o matriu sensibilitat, la qual presenta un procés de càlcul bastant complex. Existeixen, però altres tècniques, com és el cas del mètode de Monte-Carlo, (Keilis-Borok i Yanouskaja, 1967; Anderssen et al., 1972) que permeten determinar la solució del problema invers d'una manera alternativa. El principi és molt simple; es parametriza l'espai de models amb un nombre gran però finit d'incògnites i , posteriorment, es genera una seqüència d'estructures aleatòries que són comparades amb les observacions per trobar una família de solucions. Aquest mètode precisa limitar el valor màxim i mínim de les incògnites per a reduir l'espai de paràmetres (Parker, 1977). El mètode de Monte-Carlo va ser aplicat tant als sondejos elèctrics verticals (Strenberg, 1979) com a la prospecció magnetotel·lúrica (Jones i Hutton, 1979b). L'aplicació d'aquest mètode a la prospecció elèctrica presenta l'inconvenient de l'elevat temps de computació, perquè per obtenir un conjunt dels possibles models que s'ajusten a les dades es requeriria aproximadament una setmana de càlculs. Ara bé, aquest conjunt aporta una visió àmplia de tot l'espai de solucions, mentre que els mètodes anteriors es limiten a buscar un mínim en aquest espai.

El mètode aplicat en el programa d'inversió que es presenta, es basa en la tècnica de Marquardt-Levenberg o també anomenada Ridge regression (Marquardt, 1963). Existeixen, però, variacions d'aquest mètode que tenen com a objectiu controlar els valors dels paràmetres i aconseguir un contrast suau (Smith i Vozof, 1984; deGroot-Hedlin i Constable, 1990; Sasaki, 1992).

El mètode en qüestió es defineix com una tècnica intermèdia entre el mètode de Gauss-Newton i el mètode del Gradient, tal com descriuen Marquardt (1963) i Lines et al. (1984).

Els tres mètodes es basen en el mètode matemàtic dels mínims quadrats, el qual consisteix en minimitzar una determinada funció objectiu. Un esquema que representa el funcionament dels tres mètodes, mètode de Gauss-Newton, mètode del Gradient i mètode de Marquardt-Levenberg es mostra el gràfic de la figura 6.1.

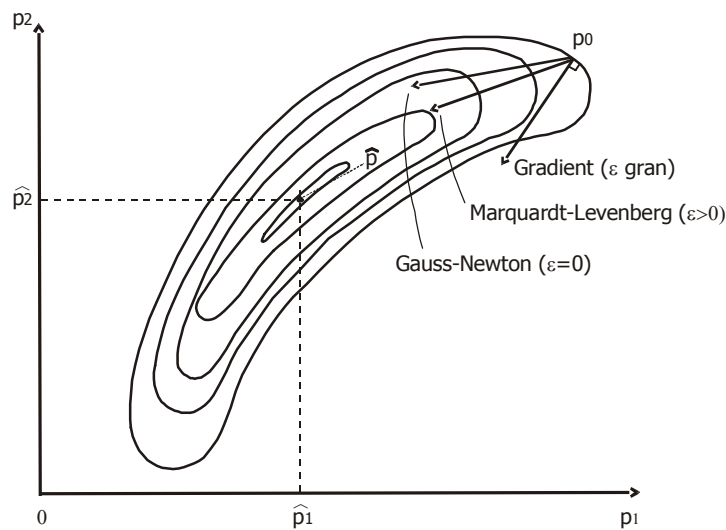


Figura 6.1. Relació geomètrica entre les solucions dels mètodes: Gauss-Newton, Gradient i Marquardt-Levenberg per a un model amb dos paràmetres (Lines i Treitel, 1984).

Les corbes contínues i tancades de la figura corresponen al comportament de la funció RMS, sobre el pla de dos paràmetres, p_1 - p_2 . Es recorda que aquesta funció, RMS, és una manera de quantificar l'ajust entre les respostes del model que resulta de la inversió i les dades experimentals.

Com mostra la figura, la inversió s'inicia des d'un model inicial que es representa mitjançant el vector de paràmetres \bar{p}_0 . El mètode del Gradient evoluciona en la direcció perpendicular a la corba des del punt inicial i el seu sentit indica la direcció del mínim del RMS. En la posició totalment extrema es troba la fletxa que indica la direcció i sentit de la solució pel mètode de Gauss-Newton. Finalment, el mètode de Marquardt-Levenberg ofereix un compromís entre aquests dos mètodes, de manera que la fletxa que indica la direcció i sentit de la solució en troba entremig de les altres dues.

Aquest esquema només representa la primera iteració del problema invers. Aplicacions successives dels mètodes permeten arribar a una solució que s'apropa al mínim representat en la figura 6.1 i designat com \hat{p} .

Seguidament, en els següents apartats, es descriuen els fonaments matemàtics sobre els quals es desenvolupa cadascuna d'aquestes tècniques.

6.2.1 - MÈTODE DE GAUSS-NEWTON

El mètode de Gauss-Newton soluciona problemes que presenten un comportament lineal entre els paràmetres i la resposta elèctrica mitjançant de la tècnica dels mínims quadrats. Ara bé, quan els problemes que es tracten no presenten aquest comportament lineal, s'opta per aplicar un procés iteratiu utilitzant un model inicial com una primera aproximació. Després de cada iteració, els paràmetres són actualitzats fins arribar a una estimació de la resposta que s'apropa més a les dades observades.

Com ja s'ha comentat anteriorment, el mètode dels mínims quadrats consisteix en fer mínima la funció objectiu, F . En el cas del mètode de Gauss-Newton aquesta funció és la suma quadràtica de la diferència entre la resposta elèctrica del model, \bar{y}_{calc} , i les observacions, \bar{y}_{obs} (p.e. Lines i Treitel, 1984):

$$F = (\bar{y}_{\text{obs}} - \bar{y}_{\text{calc}})^T (\bar{y}_{\text{obs}} - \bar{y}_{\text{calc}}) \quad (6.1)$$

El problema d'optimització utilitzant la funció anterior es determina derivant la funció objectiu respecte els paràmetres i igualant a zero. Així, l'expressió final de l'equació és:

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S}) \cdot \Delta \bar{p} = \mathbf{S}^T \cdot \Delta \bar{y} \quad (6.2)$$

En aquesta darrera expressió, S representa la matriu de derivades parcials, matriu Jacobiana, o matriu sensibilitat, la qual descriu la variació de les dades respecte de la variació dels paràmetres. La forma de determinar-la s'explicarà en els apartats posteriors.

El mètode de Gauss-Newton és un mètode no condicionat, el qual presenta greus dificultats quan els elements de la matriu $(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S})$ són valors molt petits. Aquests valors fan que el resultat del vector pertorbació dels paràmetres, $\Delta \bar{p}$, creixi il·limitadament fent que la solució del problema invers divergeixi, és a dir, sigui una solució no acceptable. Ara bé, aquesta tècnica presenta una ràpida convergència sempre que el model inicial no estigui molt allunyat del model real (Draper i Smith, 1981).

6.2.2 - MÈTODE DEL GRADIENT

El mètode del gradient és un algorisme matemàtic que permet trobar el mínim local més proper d'una determinada funció i presenta l'avantatge que la solució sempre es troba en la direcció decreixent d'aquesta mateixa funció. Això implica que la seva convergència està assegurada.

La funció objectiu, F , és la mateixa que s'utilitza en el mètode de Gauss-Newton, la suma quadràtica de la diferència entre les dades observades i la resposta teòrica del model. En aquest cas, però, per arribar a l'equació del problema invers s'imposa que el vector de variació de paràmetres, o vector de pertorbació, coincideixi amb el gradient descendent de la funció objectiu, F , (Smith i Shanno, 1971), (6.3) .

$$\Delta \bar{p} = - \frac{\partial(F)}{\partial \Delta \bar{p}} = - \frac{\partial}{\partial \Delta \bar{p}} \left[(\bar{y}_{\text{obs}} - \bar{y}_{\text{cal}})^T \cdot (\bar{y}_{\text{obs}} - \bar{y}_{\text{cal}}) \right] \quad (6.3)$$

Així, el problema invers es descriu a través de la següent equació:

$$\Delta \bar{p} = \alpha \cdot S^T \cdot \Delta \bar{y} \quad (6.4)$$

Aquest mètode és útil quan la resposta teòrica del model es troba força allunyada respecte dels observables i en conseqüència produeix un vector de pertorbació molt gran. Si pel contrari, el vector de pertorbació és molt petit, resposta teòrica propera a les dades experimentals, apareixen inestabilitats en la solució. L'inconvenient d'aquesta tècnica és que en general la seva convergència és lenta i es requereixen moltes iteracions per arribar a una solució propera a les dades experimentals (Lines i Treitel, 1984).

6.3 - MÈTODE DE MARQUARDT-LEVENBERG

El mètode de Marquardt Levenberg, també anomenat Ridge Regression, es pot classificar com un mètode híbrid perquè utilitza els avantatges del mètode de Gauss-

Newton i del mètode del Gradient.

El mètode de Marquardt-Levenberg és el més utilitzat per resoldre el problema invers sobre dades que representen estructures geològiques complexes, perquè presenta la característica que aporta molta estabilitat a la solució (Marquardt, 1963; Imman 1975; Petrick 1977). Aquesta propietat és molt important ja que en ocasions, encara que l'ajust sembli adequat, els valors de les resistivitats dels diferents paràmetres esdevenen exageradament grans o petites, en definitiva poc realistes. Utilitzant aquest mètode és possible trobar un model que s'ajusti a les dades observades amb uns raonables valors dels paràmetres.

Per això, en aquest treball s'ha escollit aquesta tècnica per resoldre el problema de la inversió bidimensional en la prospecció elèctrica de corrent continu. Els següents apartats descriuen en detall el mètode, les aproximacions i els processos que ajuden a disminuir el temps de computació, les limitacions i la implementació en el programa d'inversió.

6.3.1 - FONAMENTS TEÒRICS

El desenvolupament matemàtic d'aquesta tècnica de resolució també es basa en el mètode dels mínims quadrats. La diferència és que en aquesta ocasió s'imposa sobre la funció objectiu, F , una dependència amb les dades i amb els paràmetres. Això implica que el vector de paràmetres està lligat i no pot créixer de forma il·limitada prenent qualsevol valor (Marquardt, 1963). La funció objectiu es defineix en aquest cas com:

$$F = (\Delta\bar{y}^T \Delta\bar{y}) + \varepsilon \cdot (\Delta\bar{p}^T \Delta\bar{p}) \quad (6.5)$$

on ε és un multiplicador de Lagrange que va ser introduït per Levenberg al 1944 com un coeficient estabilitzador anomenat damping factor.

Es tracta, doncs, d'imposar que la funció objectiu sigui mínima i per això, l'equació que es determina després de derivar la funció F respecte de la variable vectorial dels paràmetres, s'iguala a zero seguint la resolució dels problemes d'optimització, (6.6).

$$\frac{\partial(\Delta\bar{y}^T \Delta\bar{y})}{\partial\Delta\bar{p}} + \varepsilon \frac{\partial(\Delta\bar{p}^T \Delta\bar{p})}{\partial\Delta\bar{p}} = 0 \quad (6.6)$$

Per a trobar el valor d'aquestes derivades s'utilitza la següent relació matemàtica $\nabla(A^T \cdot \phi \cdot A) = (\nabla \cdot A^T) \cdot \phi \cdot A + (\nabla \cdot (A^T \cdot \phi)) \cdot A$, de manera que l'equació final s'expressa de forma simplificada com:

$$(S^T \Delta\bar{y}) + \varepsilon \cdot \Delta\bar{p} = 0 \quad (6.7)$$

La matriu S^T és la matriu sensibilitat trasposta i es defineix com $\left(\frac{\partial(\Delta\bar{y})}{\partial\Delta\bar{p}}\right)^T$, $\Delta\bar{p}$ és el vector variació de paràmetres i, finalment, $\Delta\bar{y}$ és la diferència entre les dades calculades i les dades observades, tal com s'indica tot seguit.

$$(S^T (\bar{y}_{\text{calc}} - \bar{y}_{\text{obs}})) + \varepsilon \cdot \Delta\bar{p} = 0 \quad (6.8)$$

La linealització del problema es realitza utilitzant el desenvolupament de Taylor a primer ordre del vector dades calculades. El resultat és la següent expressió que representa de forma reduïda l'equació que defineix el problema invers amb el mètode de Marquardt-Levenberg:

$$(S^T S + \varepsilon \cdot I) \cdot \Delta\bar{p} = S^T \cdot \Delta\bar{y} \quad (6.9)$$

La solució d'aquest sistema és el valor del vector $\Delta\bar{p}$, el qual permet determinar el paràmetre final del model, \bar{p}_{j+1} , seguint un procés iteratiu. Una vegada els paràmetres finals són coneguts, es determina la seva resposta i es compara amb els valors observats calculant la seva diferència a través del RMS. Quan aquest valor és suficientment petit es considera que el model s'ajusta de forma adient a les observacions i per tant, la distribució de resistivitats elèctriques definida a través dels paràmetres és una interpretació acceptable del subsòl.

Els problemes de prospecció elèctrica, així com tots els problemes de geofísica, estan lligats a indeterminacions en les dades mesurades degudes als errors de resolució dels instruments de mesura. A més a més, s'han de tenir en compte altres tipus d'errors, com el soroll elèctric, els efectes de les inhomogeneïtats laterals, o tots aquells errors que apareixen de forma aleatòria i no poden ser controlats per l'usuari. Per tant, les dades mesurades presenten un error experimental que juga un paper important alhora de solucionar el problema invers.

Quan es realitza una mesura en el camp i té associat un error molt elevat, de forma intuïtiva es pensa en què aquesta dada està mal presa, és errònia, i el seu valor no es considera significatiu per a l'experiment que es realitza. Pel contrari, una dada amb un error molt petit serà considerada com una mesura important per a la resolució del problema. Seguint amb aquest raonament, els errors s'entenen com el pes associat a les dades i per aquesta raó, s'introdueix en l'equació del problema invers la matriu de pesos, definida com una matriu diagonal quadrada d'ordre $N \times N$, on N és la dimensió del vector de les dades mesurades i on cada component de la diagonal és l'invers de l'error experimental.

$$W_{(N \times N)} = \begin{pmatrix} 1/e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/e_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1/e_N \end{pmatrix}$$

El fet d'incorporar aquests errors provoca que l'equació del problema invers presenti una forma més complexa (p.e. Inman, 1975):

$$\left((S^T \cdot W^T) \cdot (W \cdot S) + \varepsilon \cdot I \right) \cdot \Delta \bar{p} = (S^T \cdot W^T) \cdot (W \cdot \Delta \bar{y}) \quad (6.10)$$

Així, l'ajust RMS es defineix de manera que presenta un comportament inversament proporcional amb els errors experimentals de les dades mesurades, e_i , tal com s'observa en l'equació (6.11):

$$\text{RMS} = \left(\frac{1}{N} \left(\frac{\Delta \bar{y}^T \cdot \Delta \bar{y}}{e^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.11)$$

on N és el nombre de dades adquirides.

Tal com es va descriure en el capítol 2, algunes dades observades poden dominar de manera massa determinant la solució del problema invers pel fet de tenir associat un error molt petit. Per evitar aquest fenomen, el programa dissenyat inclou un control sobre els errors experimentals a través de l'anomenat error llindar.

Coneixent l'equació que soluciona el problema invers a través del mètode de Marquardt-Levenberg, es discuteixen en els següents apartats els passos que aporten més problemes alhora de resoldre aquest procés, l'obtenció de la matriu sensibilitat i el tractament del paràmetre damping factor.

Posteriorment, es descriu tota la implementació del programa i en els apartats finals es mostren alguns exemples del funcionament del programa.

6.4 - MATRIU SENSIBILITAT

Com s'observa en l'equació (6.9), per solucionar l'equació del problema invers amb la tècnica de Marquardt-Levenberg és necessari conèixer el valor de la matriu sensibilitat o matriu Jacobiana, S.

En aquest apartat es descriu la tècnica utilitzada per a determinar el seu valor. El càlcul d'aquesta matriu és bastant difícil degut a les elevades dimensions que presenta. És una matriu rectangular d'ordre N x M, on N és el nombre d'observables i M és el nombre de paràmetres que defineixen el model. Per exemple, si en termes generals parlem d'unes 100 mesures i d'uns 80 paràmetres, llavors la matriu Jacobiana tindria uns 8000 components a determinar.

La següent expressió és una mostra de l'expressió de la matriu sensibilitat o matriu Jacobiana:

$$S_{ij(N \times M)} = \frac{\partial \ln \rho_{ai}}{\partial \ln \rho_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_M} \\ \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_M} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

En el programa desenvolupat aquesta matriu sensibilitat es calcula a partir d'una tècnica (Rodi, 1976), que utilitza el sistema d'equacions que resol el problema directe explicat en el capítol 5. Com a recordatori s'expressa a continuació la forma matricial del sistema d'equacions i es descriu el procés fins a determinar la matriu Jacobiana, S:

$$M \cdot \tilde{V} = \tilde{Q} \quad (6.13)$$

Derivant ambdós costats de l'expressió anterior respecte dels paràmetres del model, ens queda un nou sistema lineal d'equacions on apareix la matriu sensibilitat expressada en funció del potencial elèctric transformat, $\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{p}_j}\right)$.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \bar{p}_j}\right) \cdot \tilde{V} + M \cdot \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{p}_j}\right) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \bar{p}_j} \quad (6.14)$$

En aquesta equació el terme de les fonts és eliminat, perquè no existeix cap dependència d'aquestes amb els paràmetres. Així, l'equació final que cal resoldre presenta la següent forma:

$$M \cdot \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{p}_j}\right) = -\left(\frac{\partial M}{\partial \bar{p}_j}\right) \cdot \tilde{V} \quad (6.15)$$

La solució d'aquest sistema es realitza, igual que en la resolució del problema directe, a través del mètode directe de Choleski. A més a més, el temps necessari per a calcular

la incògnita del sistema, $\left(\frac{\partial \check{V}}{\partial \bar{p}_j}\right)$, es redueix de forma important a causa que la matriu M és una matriu coneguda i determinada també en la resolució del problema directe. Finalment, es calcula el valor de la matriu sensibilitat, S , en l'espai antitransformat mitjançant la integració simple de la següent expressió:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial \bar{p}_j} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\check{V}(x, z; k_y)}{\partial \bar{p}_j} dk_y$$

Com s'ha estat comentat anteriorment, la matriu sensibilitat, S , descriu com varia la resposta elèctrica del model, ρ_a , quan varien els valors dels paràmetres del model, ρ . La definició més utilitzada introdueix els logaritmes, és a dir:

$$S = \frac{\partial \ln \rho_a}{\partial \ln \rho} \quad (6.16)$$

Coneixent la relació entre la resistivitat aparent i la diferència de potencial elèctric entre dos punts de la superfície, $\rho_a = k \frac{\Delta V}{I}$, i sabent que la conductivitat és la inversa de la resistivitat elèctrica, el valor de la matriu sensibilitat S es dedueix a partir del següent desenvolupament:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} = \frac{I}{k} \frac{\partial \rho_a}{\partial \sigma} = \frac{I}{k} \frac{\rho_a}{\sigma} \frac{\partial \ln \rho_a}{\partial \ln \sigma} = - \frac{I}{k} \frac{\rho_a}{\sigma} \frac{\partial \ln \rho_a}{\partial \ln \rho} = - \frac{I}{k} \frac{\rho_a}{\sigma} S$$

És a dir:

$$S = - \frac{k}{I} \left(\frac{\sigma}{\rho_a} \right) \frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma} \quad (6.17)$$

on tots els valors són coneguts: els paràmetres del model, σ ó ρ , la seva resposta elèctrica, ρ_a , i la variació del potencial elèctric respecte dels paràmetres en tot els nusos de la malla, $\frac{\partial \Delta V}{\partial \sigma}$.

6.4.1 - APROXIMACIÓ QUASI - NEWTON

En l'apartat anterior s'ha descrit una manera de calcular la matriu sensibilitat i en concret, aquella que s'ha implementat en el programa d'inversió. Aquesta tècnica podria ser utilitzada per a cada iteració per determinar la matriu sensibilitat, però el temps d'execució es faria extraordinàriament gran.

S'ha comentat anteriorment que un dels problemes principals en la resolució del problema invers és el cost del càlcul de la matriu sensibilitat degut a la seva elevada dimensió. En el programa d'inversió que es presenta, aproximadament el 70 % del temps d'una iteració s'inverteix en calcular aquesta matriu Jacobiana.

Una tècnica que accelera de manera significativa el procés de càlcul és l'anomenada tècnica de Quasi-Newton (Broyden, 1965). L'ús d'aquest mètode en els programes d'inversió d'elèctrica en dues dimensions, va ser introduït per Shima l'any 1990 i posteriorment, Loke i Barker al 1996b el van utilitzar en el seu programa d'inversió basat en una variant del mètode de Marquardt-Levenberg.

Aquesta tècnica consisteix en actualitzar la matriu sensibilitat en cada iteració a través d'una aproximació que es defineix amb el següent desenvolupament:

$$S'_{k+1} = S'_k - \left[S'_k \cdot \Delta \bar{p}_k - \Delta \bar{y}_k \right] \cdot \frac{\Delta \bar{p}_k^T}{\Delta \bar{p}_k^T \Delta \bar{p}_k} \quad (6.18)$$

L'aproximació de la matriu sensibilitat en la iteració k+1 es determina a partir de la matriu sensibilitat, S'_k , el vector pertorbació de paràmetres, $\Delta \bar{p}$, i la variació de la resposta del model, $\Delta \bar{y}$, en la iteració anterior, k.

Es dedueix, doncs, a partir d'aquesta equació, que és necessari determinar el valor de la matriu sensibilitat en la primera iteració del procés, per poder calcular les aproximacions en les iteracions posteriors. Per això, en el programa dissenyat, s'opta per calcular de forma exacta la matriu sensibilitat o Jacobiana en la primera iteració seguint el procés descrit en l'apartat 6.4 encara que suposi invertir un temps de càlcul important. Una vegada és coneguda aquesta matriu s'aplica l'aproximació per tal de reduir significativament el temps de computació en les iteracions posteriors.

El fet d'utilitzar aproximacions en el càlcul de la matriu de sensibilitat comporta l'aparició de certs inconvenients:

- En primer lloc la convergència de la solució és més lenta. El mètode de Quasi - Newton té una convergència lineal mentre que el mètode de Gauss-Newton té una convergència quadràtica (Burden, Faires i Reynolds, 1981). Malgrat això, la reducció en el temps de computació en cada iteració compensa aquest inconvenient i els resultats són satisfactoris.
- En segon lloc, és important tenir present que aquesta tècnica està totalment subjecta a la propagació dels errors i pot causar, en algunes ocasions, inestabilitats en la solució final.

6.4.2 - REDUCCIÓ DE LA MATRIU SENSIBILITAT

Dins el treball d'intentar reduir el temps de computació pel càlcul de la matriu sensibilitat s'ha implementat un mètode per a reduir la seva dimensió. Aquesta tècnica ja ha estat aplicada en el programa d'inversió de dades magnetotel·lúriques en dues dimensions (Siripunvaraporn i Egbert, 2000), amb uns resultats molt satisfactoris, i el seu bon funcionament va permetre pensar en la possibilitat d'aplicar el mateix procés en la inversió de les dades elèctriques.

El procés consisteix en seleccionar unes dades per a tot el rang de paràmetres i calcular el valor exacte de la matriu sensibilitat només en els punts escollits. La resta de punts de la matriu es calculen utilitzant la interpolació lineal.

La figura 6.2 mostra com s'aplica aquesta tècnica de reducció sobre la matriu sensibilitat. Les files de la matriu marcades en negre són els components que es calculen de forma exacta en la primera iteració del procés i per a tots els paràmetres del model. Les files que no estan marcades són els valors que es calculen de forma aproximada a través de la interpolació lineal. En aquest exemple s'han escollit les files senars de la matriu, és a dir, que es redueix a la meitat el nombre de components que s'han de determinar. Ara bé, aquest salt pot ser més gran i reduir encara més el temps de computació del problema invers. Cal, però, tenir present que l'error en la determinació d'aquests components serà també més important.

La conseqüència immediata davant de la utilització d'aproximacions i interpolacions en el càlcul de la matriu sensibilitat és l'augment de les iteracions per determinar la

solució del problema invers, és a dir, una convergència més lenta. Però, malgrat això, s'aconsegueix que el problema invers sigui un procés més lleuger reduint tant el temps de computació com la memòria que es requereix per a emmagatzemar les magnituds d'elevades dimensions, com és el cas d'aquesta problemàtica matriu, la matriu sensibilitat o Jacobiana.

$$S_{ij(N \times M)} = \frac{\partial \ln \rho_{ai}}{\partial \ln \rho_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_2} & \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_3} & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{a1}}{\partial \ln \rho_M} \\ \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_2} & \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_3} & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{a2}}{\partial \ln \rho_M} \\ \frac{\partial \ln \rho_{a3}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{a3}}{\partial \ln \rho_2} & \frac{\partial \ln \rho_{a3}}{\partial \ln \rho_3} & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{a3}}{\partial \ln \rho_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_1} & \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_2} & \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_3} & \dots & \frac{\partial \ln \rho_{aN}}{\partial \ln \rho_M} \end{bmatrix}$$

Figura 6.2. Representació de la matriu Jacobiana on estan assenyalades en negre les files on es calcula explícitament el valor. Per a la resta de punts s'aplica la interpolació lineal.

6.5 - PARÀMETRE DAMPING FACTOR

Aquest coeficient va ser definit per Levenberg l'any 1944 quan va imposar en el mètode d'inversió una condició restrictiva sobre les variacions dels paràmetres del model. El nom d'aquest coeficient fa referència a la funció que exerceix sobre la matriu ($S^T \cdot S$), ja que efectivament, esmorteix la variació del vector de paràmetres limitant l'energia destinada a la seva pertorbació.

El valor del coeficient damping factor, ϵ , serveix per evitar inestabilitats en el sistema quan el valor dels components de la matriu ($S^T \cdot S$) són molt petits. És a dir, quan el problema s'enfronta amb una matriu singular o quasi-singular.

Una dependència lineal entre els paràmetres pot ser la causa que aquesta matriu estigui molt propera a ser singular. Tan sols les estructures molt simples permeten que

la matriu del sistema no sigui singular, estructures poc probables en els casos reals (Inman, 1975).

La funció del terme ε consisteix en evitar que els valors propis de la matriu $(S^T \cdot S + \varepsilon I)$ s'anul·lin, fent que aquest valor s'afegeixi als components de la diagonal de la matriu $(S^T \cdot S)$. Els valors propis d'aquest sistema d'equacions són els valors $(\lambda^2 + \varepsilon)$, on λ^2 són els valors propis de la matriu $(S^T \cdot S)$. Si aquests valors propis són molt petits s'incrementen amb el valor d' ε , fent que la inversió de la matriu pel mètode de Marquardt-Levenberg sigui molt més estable (Inman, 1975).

El valor d' ε es determina en cada iteració i controla la convergència de les solucions. Existeixen diferents estratègies que controlen aquest factor i eviten que sigui massa petit, i el procés divergeixi (aproximació al Mètode de Gauss-Newton, $\varepsilon \rightarrow 0$), o que sigui massa gran i tingui una convergència tan lenta que no es trobi una solució prou propera a les dades reals (aproximació al Mètode del Gradient, $\varepsilon \rightarrow$ valor gran).

La determinació d' ε no presenta una senzilla resolució, perquè no existeixen pautes que puguin guiar a l'usuari. L'experiència és l'eina més útil en aquest cas.

Un dels mètodes que no requereix la utilització del factor ε , és el mètode de Box-Kanemasu modificat. Tal com expliquen Beck i Arnold (1977), aquesta tècnica considera vàlida l'aproximació lineal en determinades regions i calcula automàticament la variació dels paràmetres del model utilitzant la direcció proporcionada pel mètode de Gauss-Newton, però modificant el valor de la pertorbació dels paràmetres. Els resultats obtinguts no són satisfactoris, perquè el seu principal inconvenient és que requereix solucionar dues vegades el problema directe augmentant significativament el temps d'execució per resoldre el problema invers. En conseqüència, es va optar per seguir amb el mètode de Marquardt-Levenberg i estudiar una manera de poder tractar el valor del paràmetre damping factor.

6.5.1 – TRACTAMENT DEL PARÀMETRE

En el programa d'inversió que es presenta s'ha optat per considerar el terme ε com una matriu diagonal i no com un escalar, amb les mateixes dimensions que la matriu

$(S^T \cdot S)$, és a dir, $(n_p \times n_p)$, on n_p és el nombre de paràmetres del model. Això, permet modificar els components d' ε en funció de la profunditat a la qual estan associats ajudant a estabilitzar la solució del problema invers (Loke, 1999).

Inicialment, el programa fixa el coeficient entre 0 i 1 per aquells paràmetres que es troben en la primera capa del model i defineixen les zones més superficials. Pels paràmetres que representen les capes més profundes, el valor del damping factor va augmentant. A més a més, en cada iteració el valor es redueix a la meitat, però evitant que arribi a un valor massa petit. El mínim damping factor normalment es considera una cinquena part del valor inicial (Loke, 1999). En el cas que el valor d' ε es redueixi massa i estigui per sota del valor llindar, llavors el seu valor torna a augmentar per evitar que hi hagi inestabilitats en la solució del sistema.

La determinació del coeficient ε és una elecció complicada pel fet que no existeixen valors concrets i fixes. L'experiència demostra que pels models sintètics els valors petits d' ε aporten resultats satisfactoris, en canvi, per a dades experimentals els valors depenen del soroll amb el qual han estat mesurades. En el cas que les dades tinguin un soroll elevat, el valor d' ε també ha de ser relativament gran. Quan l'error de les dades és petit s'ha de considerar un valor reduït del damping factor. Aquest raonament coincideix amb el presentat per Sasaki (1992).

Tots aquests valors han estat fixats després de realitzar moltes proves d'inversió, però poden ser modificats per l'usuari si aquest ho creu convenient. Els valors que han aportat una millor solució en les inversions han estat els següents: el valor inicial d' ε que s'associa als paràmetres més superficials pot oscil·lar entre 0.2 i 0.5. Aquest va augmentant un factor 1.20 per a les capes immediatament inferiors fins arribar als paràmetres més profunds del model.

El valor mínim permès pel programa es fixa en 0.04. En el cas que el valor calculat d' ε sobrepassi aquesta cota inferior s'opta per augmentar el valor amb un factor de 2.5. Aquestes pautes descrites són similars a les que utilitza Loke en el seu programa d'inversió, RES2DINV.

Simplement els valors suggerits pretenen ser una ajuda alhora de fixar el valor del terme ε per a optimitzar el procés de la inversió.

6.6 – IMPLEMENTACIÓ DEL PROGRAMA D'INVERSIÓ

El programa que s'ha dissenyat té la importància de disposar d'una eina pròpia per a realitzar les inversions, la qual mostra tots els processos matemàtics aplicats a les dades permetent que l'usuari tingui un control total sobre elles.

S'ha utilitzat el llenguatge Fortran 90 per escriure la implementació de tots els processos i, per tant, el programa pot ser utilitzat en qualsevol ordinador amb un compilador adequat per aquest llenguatge.

El disseny del programa presenta una forma molt senzilla. Una estructura central, la qual va cridant a les diferents subrutines per a realitzar els diferents processos matemàtics.

El programa només necessita tres fitxers d'entrada: les dades mesurades en el camp o observables, el fitxer que introdueix el model inicial com a primera aproximació, i la malla sondeig, que igual que en el cas de la modelització, controla el càlcul numèric del procés i depèn del tipus de dispositiu utilitzat.

Per trobar la solució del problema invers és imprescindible resoldre de forma ràpida i amb una bona precisió numèrica la modelització. Com ha estat mostrat en el capítol anterior, aquest objectiu ha estat totalment assolit en el treball. Gràcies a aquest bon funcionament del problema directe, part del procés de la inversió es pot dur a terme d'una manera també ràpida i amb una bona resolució numèrica. Existeixen, però, altres parts de l'algorisme d'inversió on els càlculs són encara lents i no es poden reduir de forma significativa.

Tots aquests aspectes són explicats en aquest apartat del treball on es tracta la inversió com en un procés complex que cal analitzar detingudament alhora d'aplicar-lo sobre les dades.

El programa es troba estructurat en les següents parts, figura 6.3:

- a) – Definició del model inicial, el qual serveix com a primera aproximació pel procés de la inversió. El format és exactament el mateix que s'utilitza per a definir la malla model en el procés de la modelització. Per tant, es donen a conèixer les resistivitats elèctriques que defineixen el model inicial, la localització de les fonts de corrent i les característiques del dispositiu utilitzat, nombre d'elèctrodes del perfil i separació entre ells. En el cas del problema invers, és molt important definir el nombre de

paràmetres amb el qual es vol determinar la distribució de resistivitat elèctrica del subsòl. En el cas de l'algorisme d'aquest programa s'ha de complir que el nombre de paràmetres sigui menor que el nombre de dades mesurades.

- b) Superposició de les dues malles (malla model i malla sondeig) per calcular la resposta elèctrica amb una bona resolució numèrica.
- c) Resolució del sistema d'equacions diferencials del problema directe en l'espai transformat, el qual determina el potencial elèctric, \check{V} , en tots els nusos de la malla que representen la superfície terrestre. Al mateix temps es resol el sistema d'equacions per trobar el valor de la matriu sensibilitat expressada en funció del potencial elèctric transformat, $\frac{\partial \check{V}}{\partial \sigma}$.
- d) Càlcul de les dues magnituds anteriors, \check{V} i $\frac{\partial \check{V}}{\partial \sigma}$, en l'espai antitransformat (x, y, z).
- e) Càlcul de la resposta elèctrica del model, ρ_a , i de la matriu sensibilitat expressada com $S = \frac{\partial \ln \rho_a}{\partial \ln \rho}$.
- f) Comparació entre les resistivitats calculades i les resistivitats mesurades i càlcul del coeficient RMS, el qual dóna idea de l'aproximació entre les dades calculades i les dades mesurades.
Si aquest valor és prou petit, 10^{-2} en el nostre cas, llavors el procés finalitza obtenint un model final que s'ajusta correctament a les dades experimentals. Si, pel contrari el valor del RMS és major que 10^{-2} , el procés es prepara per a una nova iteració, la qual s'explica en l'apartat g.
- g) La solució de l'equació que defineix el problema invers pel mètode de Marquardt-Levenberg es realitza a partir d'un valor inicial del factor damping factor.
Una vegada la matriu sensibilitat està ben determinada i no suposa cap problema, la solució del sistema donarà a conèixer la pertorbació dels paràmetres, $\Delta \vec{p}$. La

implementació de la solució d'aquesta equació és senzilla a nivell de programació i la incògnita es calcula solucionant el sistema a través de la descomposició de Choleski. Aquesta tècnica es troba implementada en forma de subrutina, perquè ha estat utilitzada en altres punts del programa, en concret per la solució del problema directe.

- h) Com els paràmetres inicials són coneguts s'extreuen els valors dels paràmetres finals que definiran un nou model del subsòl. Aquest nou model passa a comportar-se com el model inicial de l'apartat a).

Els passos des d'a) fins a e) es tornen a repetir per obtenir la resposta elèctrica d'aquest nou model.

- i) Es calcula de nou el valor de l'ajust, RMS, i es procedeix tal com s'ha indicat a l'apartat f).

Si el valor del RMS no és prou petit el programa decideix realitzar una nova iteració. El nombre màxim d'iteracions també pot ser fixat per l'usuari. Normalment es realitzen unes 20 iteracions, perquè el procés acaba oscil·lant al voltant d'un valor concret del coeficient RMS. Es diu que el problema invers s'ha estabilitzat i no aconsegueix trobar un model del subsòl que s'ajusti millor a les dades experimentals.

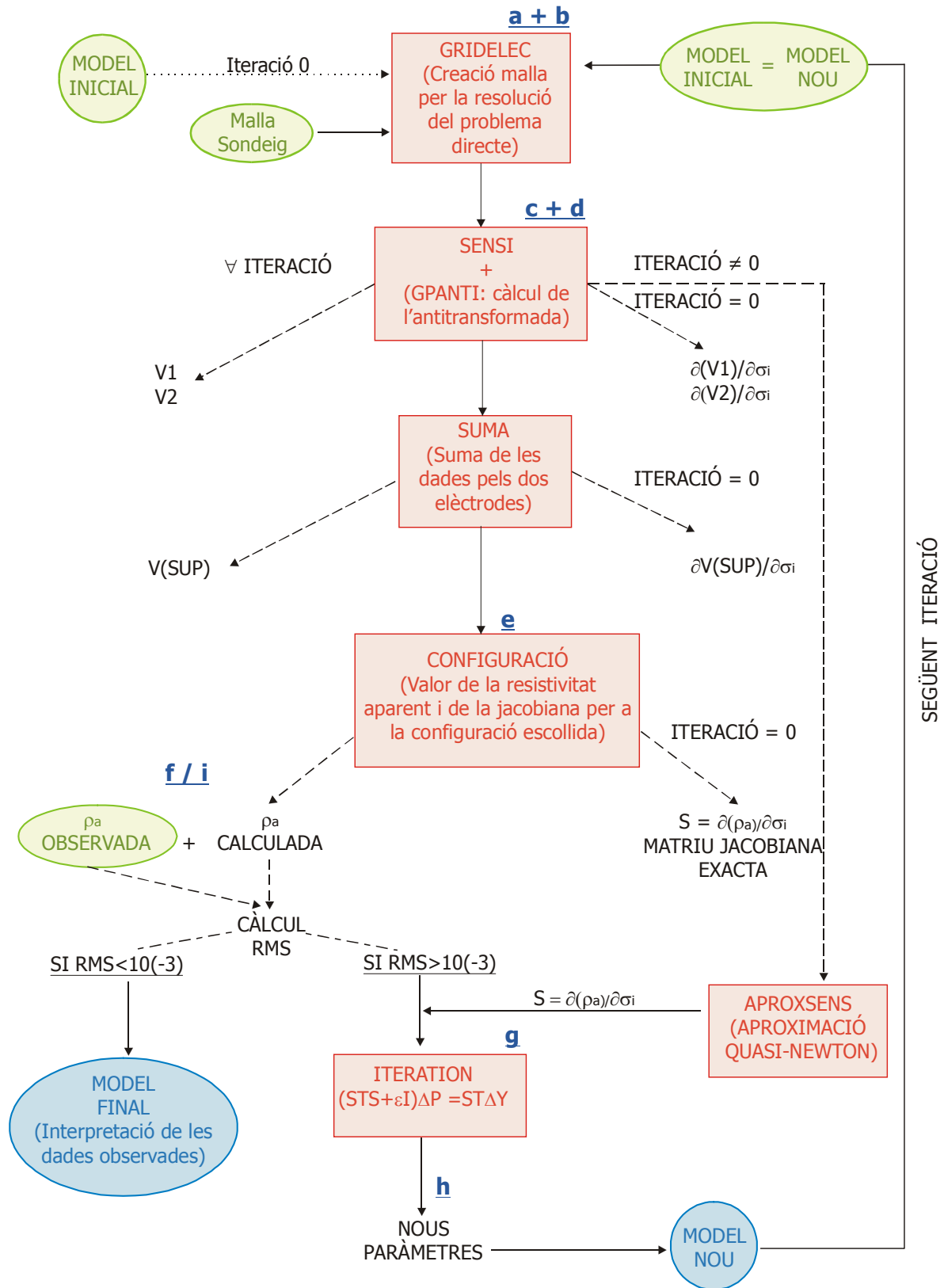


Figura 6.3. Esquema de l'algorisme d'inversió desenvolupat. Es mostren les dades d'entrada (verd), les dades de sortida (blau) i les subrutines dels processos matemàtics. Les lletres de color blau fosc indiquen cadascun dels passos explicats anteriorment.

6.7 – COMPARACIÓ ENTRE MÈTODES D'INVERSIÓ

Per tal d'il·lustrar els bons resultats que s'obtenen amb el mètode de Marquardt-Levenberg i les diferències que existeixen amb els altres dos mètodes, mètode de Gauss-Newton i mètode del Gradient, es presenten els resultats d'una inversió realitzada amb dades sintètiques.

S'han invertit les dades procedents d'un únic sondeig elèctric vertical sobre un model estratificat de dos capes. La capa superficial té un gruix de 30 metres i una resistivitat de $20 \Omega \cdot m$. La capa més profunda presenta una resistivitat de $500 \Omega \cdot m$, figura 6.4.

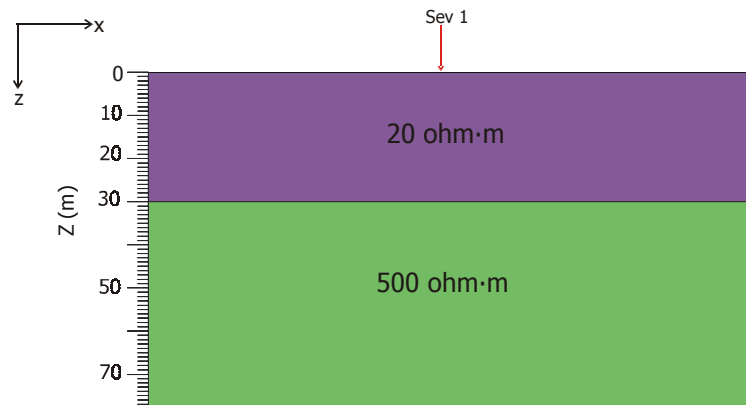


Figura 6.4. Model creat per determinar la resposta elèctrica i utilitzar aquestes dades per aplicar la inversió amb els tres mètodes, per la posterior comparació dels resultats.

En els tres casos el procés de la inversió s'inicia a partir del mateix model inicial, un medi homogeni de $1000 \Omega \cdot m$. Per poder realitzar les inversions amb els tres mètodes només és necessari modificar el valor d' ε en l'equació implementada en el programa, equació (6.9). Si $\varepsilon=0$, la inversió es resol pel mètode de Gauss-Newton. Si ε és molt gran, el mètode utilitzat és el del Gradient. Finalment, per a un valor intermedi d' ε , el problema invers es resol a través del mètode de Marquardt-Levenberg.

Les diferències entre els tres mètodes descrits es presenten en les figures 6.5 i 6.6. En la figura 6.5 es presenta l'evolució dels paràmetres que defineixen les dues capes del model per a cada iteració, i en la figura 6.6 es mostra el comportament del coeficient RMS també per a cada iteració i pels tres mètodes en qüestió.

El valor original de la resistivitat de la capa més profunda, $500 \Omega \cdot m$, es determina

pràcticament igual en els tres mètodes. En canvi, existeix molta discrepància amb el valor de la resistivitat elèctrica de la capa més superficial, figura 6.5.

El mètode de Gauss-Newton i el mètode de Marquardt-Levenberg obtenen uns valors molt semblants en cada iteració, però és aquest darrer mètode, el que determina un valor més ajustat a la capa original. Pel contrari, el mètode del Gradient presenta una discrepància important en la determinació del paràmetre de la primera capa, que es tradueix en un valor molt elevat de l'ajust, corba RMS de la figura 6.6.

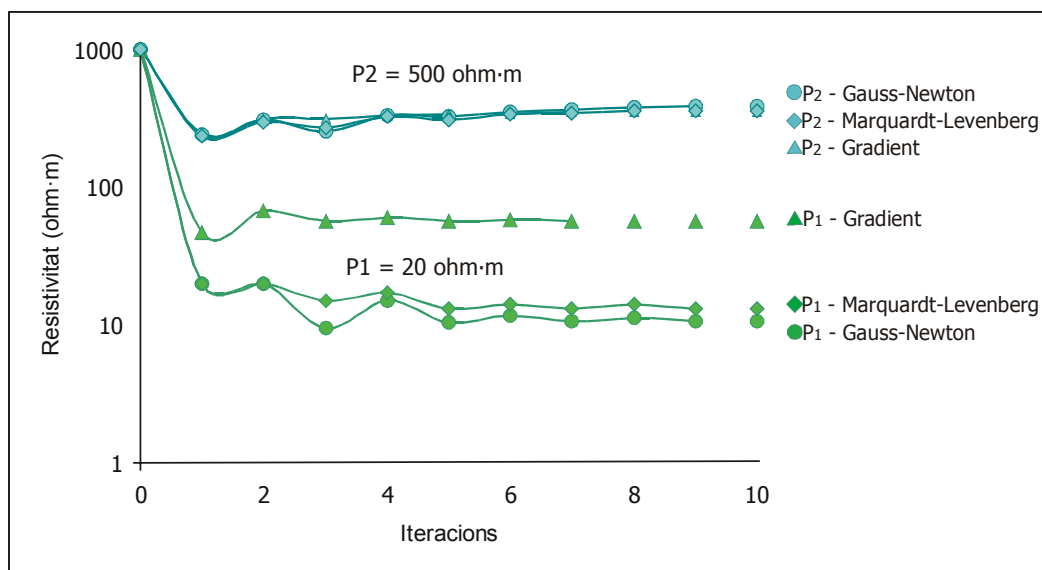


Figura 6.5. Evolució del valor dels paràmetres, p_1 i p_2 , en cada iteració del problema invers i pels tres mètodes descrits. L'evolució del paràmetre més profund, p_2 , es descriu a en color blau, i l'evolució del paràmetre superficial, p_1 , en color verd.

En els resultats de la figura 6.6 s'observa com els mètodes de Marquardt-Levenberg i Gauss-Newton evolucionen de manera molt semblant en les primeres iteracions de la inversió, però en els darrers passos, és el mètode de Marquardt-Levenberg el que arriba a un millor ajust amb un valor més petit del coeficient RMS (corba de color blau).

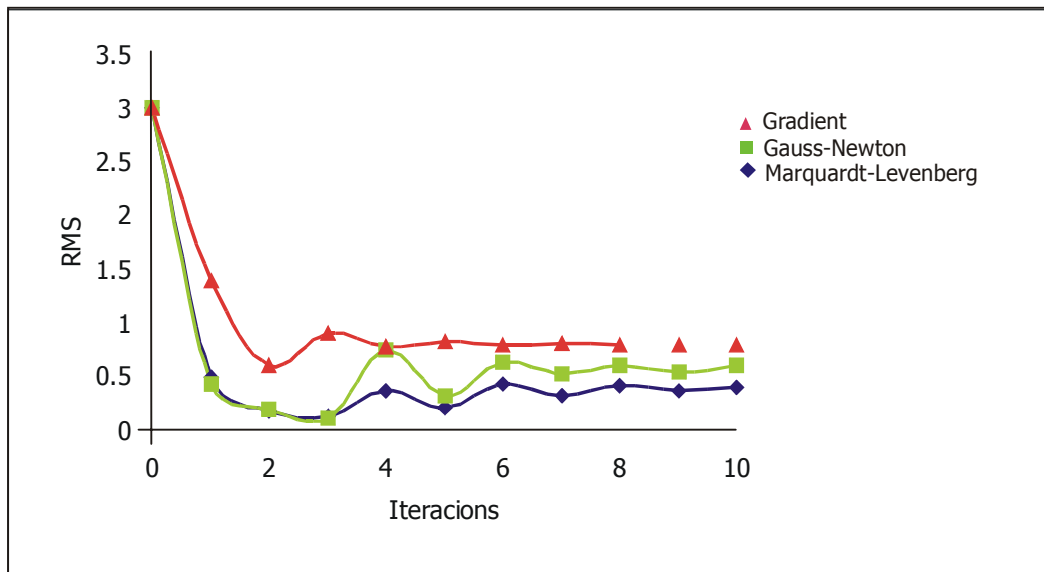


Figura 6.6. Mostra de l'evolució del coeficient RMS per a cada iteració i pels tres mètodes descrits.

6.8 - EXEMPLES AMB DADES SINTÈTIQUES

El programa d'inversió que es presenta en aquest treball i que en aquests moments disposa el grup de geofísica aplicada al qual estic vinculada, ha estat inicialment comprovat amb dades sintètiques.

La resposta elèctrica obtinguda a partir de la modelització actua com a fitxer d'entrada del programa d'inversió, el qual determina els valors dels paràmetres que defineixen el model final després de realitzar algunes iteracions per ajustar la resposta del model a les dades inicials.

Per verificar el bon funcionament del programa es presenten dos exemples amb dades sintètiques. Un primer exemple serveix per identificar estructures superficials i localitzar-les correctament. L'altre exemple determina les capes que constitueixen el subsòl i que pateixen variacions laterals. En els exemples s'han simulat prospeccions elèctriques de tomografia elèctrica amb configuracions Wenner-Schlumberger i Dipol-Dipol.

6.8.1 – EXEMPLE D'INVERSIÓ WENNER-SCHLUMBERGER

La figura 6.7 mostra el primer exemple, un cos resistent de $500 \Omega\cdot\text{m}$ situat a 1 metre de profunditat en un medi de $100 \Omega\cdot\text{m}$.

En la figura 6.8 es pot observar la resposta elèctrica per a un perfil amb una configuració Wenner-Schlumberger de 20 elèctrodes i una separació característica de 2 metres entre els elèctrodes. Aquestes dades serveixen com a fitxer d'entrada del problema invers que pretén recuperar el model de la figura 6.7.

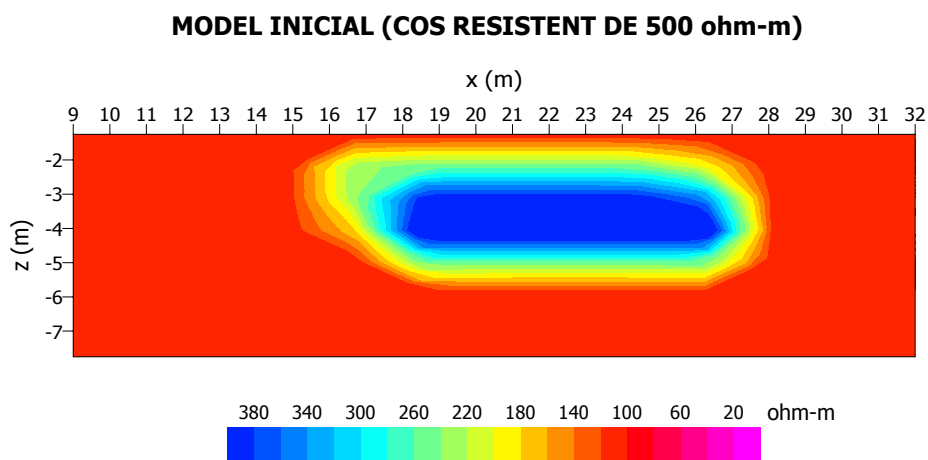


Figura 6.7. Model d'un cos resistent en un medi de $100 \text{ ohm}\cdot\text{m}$. El cos presenta 10 metres d'amplada, està situat a 1 metre de profunditat i arriba fins a 3 metres.

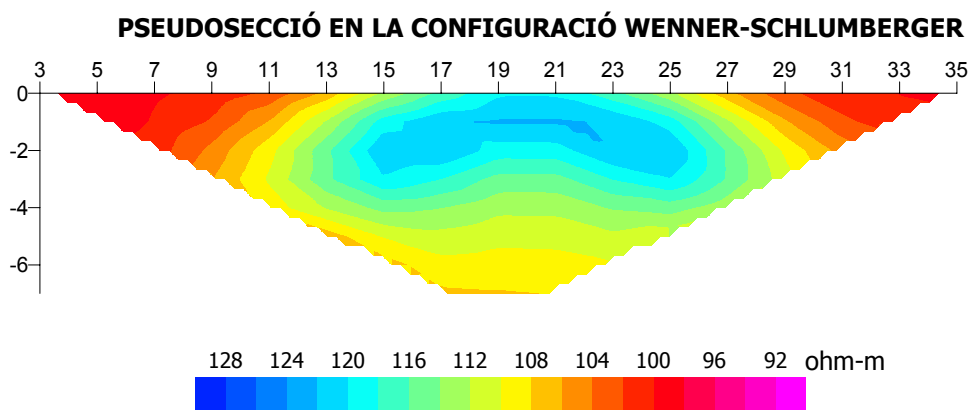


Figura 6.8. Mostra de la pseudosecció obtinguda sobre el model de la figura 6.7.

Els resultats es presenten en les figures 6.9 i 6.10. En la figura 6.9 es pot observar el model final de la inversió i en la figura 6.10 la seva corresponent resposta elèctrica. En el model final s'observa com es recupera perfectament el cos resistent però amb una extensió lateral més reduïda respecte del model original de la figura 6.7.

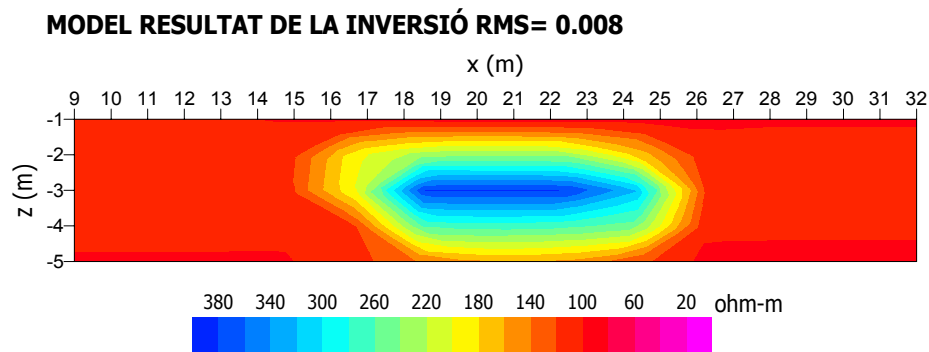


Figura 6.9. Model obtingut després de la inversió fins a una profunditat de 5 metres.

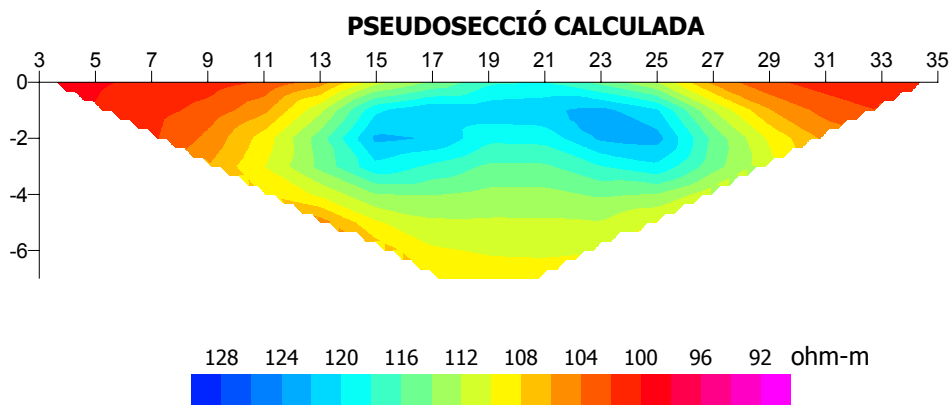


Figura 6.10. Mostra de la pseudosecció corresponent al model resultat de la inversió de la figura 6.9.

6.8.2 – EXEMPLE D'INVERSIÓ DIPOL-DIPOL

El segon exemple es realitza amb una configuració Dipol-Dipol de 23 elèctrodes separats una distància de 2 metres entre ells. El model es mostra en la figura 6.11 on s'observa la variació lateral de les capes que formen el subsòl. La capa més superficial

és conductora i presenta una resistivitat de $50 \Omega \cdot m$, mentre que la intrusió està representada per un material més resistent de $1000 \Omega \cdot m$. En la figura 6.12 es presenta la resposta elèctrica obtinguda amb el dispositiu dissenyat.

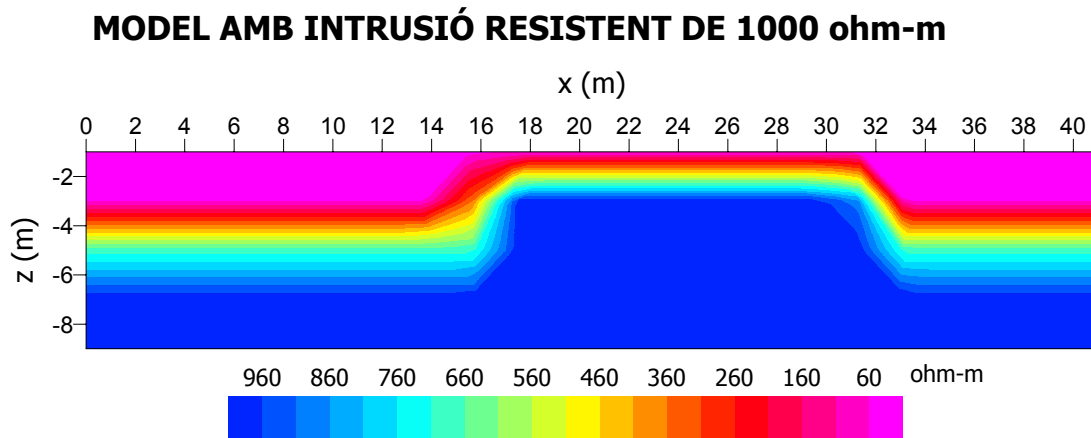


Figura 6.11. Model amb una variació lateral de les capes. La capa més superficial pateix un aprimament degut a la intrusió del material més resistent i més profund.

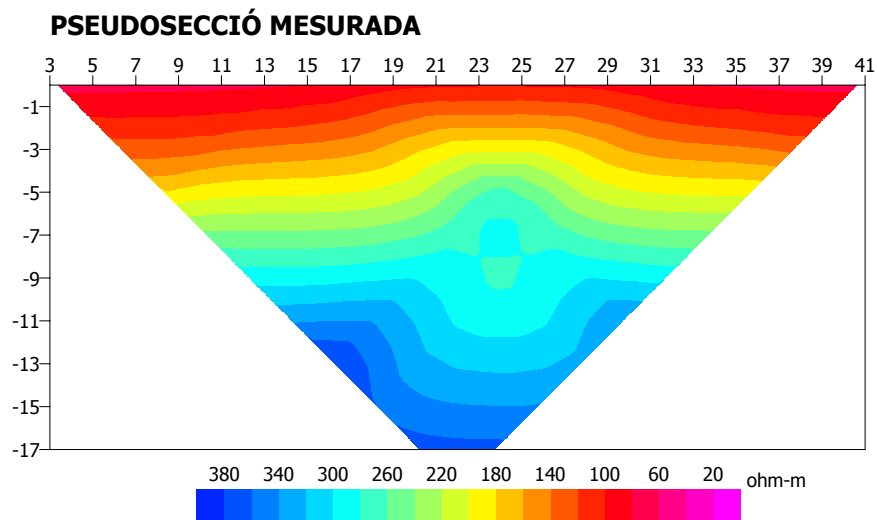


Figura 6.12. Mostra de la pseudosecció obtinguda sobre el model de la figura 6.11 amb una configuració Dipol-Dipol.

La pseudosecció de la figura 6.12 no presenta una imatge clara de l'estructura a la qual representa, figura 6.11. Com s'ha comentat en els apartats anteriors la pseudosecció pot portar, en ocasions, a realitzar una interpretació equivocada del subsòl terrestre. Per això és necessari procedir a l'aplicació del procés de la inversió sobre les dades i obtenir un model que interpreti correctament les dades mesurades. La figura 6.13 mostra el resultat de la inversió sobre aquestes dades. El model que s'obté identifica perfectament la intrusió encara que amb un valor de la resistivitat elèctrica més petit ($\approx 800 \Omega \cdot m$). En la figura 6.14 es pot observar que l'ajust obtingut és molt bo amb una resposta elèctrica molt propera a la de la figura 6.12.

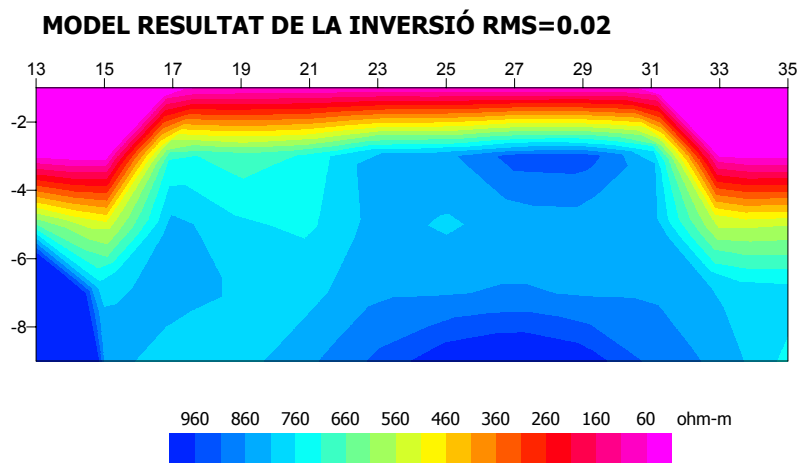


Figura 6.13. Model resultat de la inversió amb un ajust excel·lent determinat pel valor del RMS.

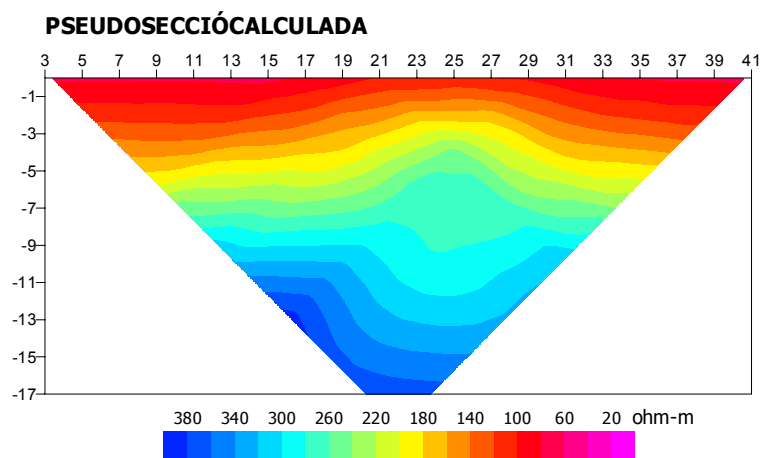


Figura 6.14. Pseudosecció obtinguda del model final de la figura 6.13 i que permet observar el bon ajust amb la imatge de la figura 6.12.

6.9 – CONCLUSIONS

Pràcticament totes les aportacions que es realitzen en la resolució del problema invers han estat descrites en el capítol anterior, ja que formen part de la resolució del problema directe: la utilització de les dues malles superposades, un nou mètode per a determinar el potencial antitransformat i la integració de la topografia en el càlcul de la resposta elèctrica.

Un nou mètode, però, s'introdueix en aquest programa d'inversió bi-dimensional, el qual consisteix en una reducció del càlcul de la matriu sensibilitat.

La determinació d'aquesta magnitud és l'inconvenient principal que presenta la resolució del problema invers a causa de les elevades dimensions. El temps de computació augmenta amb el nombre de paràmetres utilitzats per a definir el model i amb el nombre de dades mesurades. Per aquest motiu, el càlcul d'aquesta magnitud ha estat un dels punts més estudiats d'aquest apartat.

Aquesta tècnica està inspirada en altres programes d'inversió i altres mètodes de prospecció geofísica, i redueix el nombre de files on es calcula la matriu sensibilitat i aplica, posteriorment, la interpolació lineal per a trobar els elements intermedis de la matriu. El mètode aporta bons resultats i millora el temps de resolució, però presenta l'inconvenient que les aproximacions aplicades fan que la convergència del procés sigui més lenta.

Tal com es pot observar en els exemples teòrics que es presenten en aquest capítol, el programa d'inversió aporta resultats satisfactoris i el procés iteratiu de la inversió presenta un comportament molt estable, amb l'únic inconvenient que el temps de computació és encara elevat. Aquest, però no ha estat el factor al que s'ha donat més preferència en aquest programa, ja que és més important obtenir una solució que no divergeixi i que sigui compatible amb altra informació geofísica addicional.