Estudi Algebraic de les Extensions dels Càlculs Multivalorats de Łukasiewicz.

JOAN GISPERT I BRASÓ

Memòria presentada per optar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques per la Universitat de Barcelona

Director: Dr. Antoni Torrens Torrell

Corol.lari 8.7 *Una quasivarietat de MV-àlgebres és localment finita si, i només si, és n-acotada per algun $1 < n \in \omega$.* □

Una àlgebra **crítica** és una àlgebra finita que no pertany a la quasivarietat generada per les seves subàlgebres pròpies. La importància de les àlgebres crítiques ve donada pel següent resultat enunciat en [32, pàg. 128], però sense prova.

Teorema 8.8 [32] *Tota quasivarietat localment finita està generada per les seves àlgebres crítiques.*

Prova : Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat localment finita i sigui $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$. Pel teorema 1.1, si $\mathfrak{F} = \{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ finitament generada}\}$, aleshores $\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\mathfrak{F})$. Com que $\mathbb{K}$ és localment finita, aleshores

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ finita}\}) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbb{K}_{fin}),$$

on $\mathbb{K}_{fin}$ és la classe de totes les àlgebres finites de $\mathbb{K}$. Per tant, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbb{K}_{fin})$. En primer lloc veurem que si $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_{fin}$ aleshores $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ crítica }\})$. Ho demostrem per inducció sobre el cardinal d'$\mathbf{A}$. Si $|\mathbf{A}| = 1$, aleshores $\mathbf{A}$ és crítica i, trivialment, $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ crítica }\})$.
Suposem que $|\mathbf{A}| = n$. Si $\mathbf{A}$ és critica, $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ crítica }\})$. Sinó, tenim que $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \neq \mathbf{A}\})$. Com que per tota subàlgebra pròpia $\mathbf{B}$ d'$\mathbf{A}$, $|B| < n$, aleshores per hipòtesi d'inducció $\mathbb{Q}(\mathbf{B}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} : \mathbf{C} \text{ crítica }\})$. Així,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\mathbf{A}) &= \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} : \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}\}) \\
&= \mathbb{Q}(\{\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} : \mathbf{C} \text{ és crítica i } \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}\}) \\
&= \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ és crítica }\}).
\end{aligned}$$

Queda demostrada l'afirmació. Per tant hem vist que

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbb{K}_{fin}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ és crítica i } \mathbf{A} \in \mathbb{K}_{fin}\}) = \mathbb{Q}(\mathbb{K}_{Crit}) \subseteq \mathbb{K}$$

on $\mathbb{K}_{Crit}$ és la classe de totes les àlgebres crítiques de $\mathbb{K}$. □

El nostre objectiu és caracteritzar les MV-àlgebres crítiques. Per això necessitem un resultat previ:

Lema 8.9 *Si $\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l}$ és submergible en $\prod_{j \in J} \mathbf{Ł}_{m_j}$ on $\{m_j : j \in J\}$ és un conjunt finit de nombres naturals, aleshores*

1. *Per cada* $1 \leq i \leq l$ *existeix* $j \in J$ *tal que* $n_i | m_j$.

2. *Per cada* $j \in J$ *existeix* $1 \leq i \leq l$ *tal que* $n_i | m_j$.

Prova : 1) Si $\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l}$ és submergible en $\prod_{j \in J} \mathbf{L}_{m_j}$, aleshores

$$\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l} \in \mathbb{V}(\prod_{j \in J} \mathbf{L}_{m_j}) = \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{m_j}; j \in J\}).$$

Per tant, per qualsevol $1 \leq i \leq l$, $\mathbf{L}_{n_i} \in \mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{m_j}; j \in J\})$. I com que $\{m_j : j \in J\}$ és un conjunt finit, aleshores d'un resultat de Jónsson [14, pàg 149] es dedueix que els subdirectament irreductibles de $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{m_j}; j \in J\})$ són $\mathbb{I}(\{\mathbf{L}_n : \exists j \in J \ \mathbf{L}_n \subseteq \mathbf{L}_{m_j}\})$. Així, per cada $1 \leq i \leq l$ existeix $j \in J$ tal que $\mathbf{L}_{n_i} \subseteq \mathbf{L}_{m_j}$, ja que $\mathbf{L}_{n_i}$ és simple i per tant subdirectament irreductible. Per tant, $n_i | m_j$.
2) Per cada $j \in J$ considerem la projecció natural: $\pi_j : \prod_{j \in J} \mathbf{L}_{m_j} \longrightarrow \mathbf{L}_{m_j}$.
Sigui $\gamma : \mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l} \rightarrow \prod_{j \in J} \mathbf{L}_{m_j}$ una immersió, aleshores per cada $j \in J$, $\gamma_j = \pi_j \circ \gamma$ és un homomorfisme de $\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l}$ en $\mathbf{L}_{m_j}$. Per tant

$$\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l} / Ker(\gamma_j) \cong \gamma_j(\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l}) \subseteq \mathbf{L}_{m_j}$$

És a dir que $\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l} / Ker(\gamma_j)$ és simple i per tant [20, teorema 4.1.19], $Ker(\gamma_j)$ és una congruència maximal de $\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l}$. De [22, lema 2.3] (vegeu també [64]) i del fet que tota àlgebra $\mathbf{L}_n$ és simple es dedueix que existeix $1 \leq k \leq l$ tal que

$$Ker(\gamma_j) = \mathbf{L}_{n_1}^2 \times \cdots \times \Delta_{\mathbf{L}_{n_k}} \cdots \times \mathbf{L}_{n_l 2}.$$

Per tant, per cada $j \in J$ existeix $1 \leq k \leq l$ tal que

$$\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l} / Ker(\gamma_j) \cong \mathbf{L}_{n_k} \subseteq \mathbf{L}_{m_j}.$$

Així $n_k | m_j$. □

Finalment obtenim una caracterització per les MV-àlgebres crítiques

Teorema 8.10 *Una MV-àlgebra* **A** *és crítica si, i només si,* **A** *és isomorfa a una MV-àlgebra finita* $\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l}$ *que satisfà les següents condicions:*

1. *Per tot* $1 \leq i, j \leq l$, $i \neq j$ *implica* $n_i \neq n_j$.

2. *Considerem la correspondència* $D : \omega \longrightarrow \mathcal{P}(\omega) : n \mapsto D(n) = \{d < \omega : d|n\}$. *Aleshores existeix com a màxim un* n_i, $1 \leq i \leq l$ *tal que*

$$|D(n_i) \cap \{n_j : 1 \leq j \leq l\}| > 1.$$

Prova : Suposem que $\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l}$ satisfà les condicions (1) i (2). En primer lloc veurem que:
Tota subàlgebra pròpia d'$\mathbf{A}$ és submergible en una subàlgebra d'$\mathbf{A}$ de la forma $\mathbf{Ł}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{d_l}$ *on* $d_i|n_i$ *per cada* $1 \leq i \leq l$ *i tal que existeix* $1 \leq j \leq l$ *tal que* $d_j \neq n_j$.
Sigui $\mathbf{B}$ una subàlgebra pròpia d'$\mathbf{A}$. Com que $\mathbf{A}$ és finita, $\mathbf{B}$ és finita i pel teorema 3.39, $\mathbf{B}$ és isomorf a $\mathbf{Ł}_{p_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{p_r}$. Per cada $1 \leq i \leq l$ considerem les projeccions naturals: $\pi_i : \mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l} \longrightarrow \mathbf{Ł}_{n_i}$. Sigui γ una immersió de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l}$. Per cada $1 \leq i \leq l$ definim $\gamma_i = \pi_i \restriction_{\mathbf{B}}$, aleshores $\mathbf{B}$ és submergible en $\gamma_1(\mathbf{B}) \times \cdots \times \gamma_l(\mathbf{B})$. A més, com que $\gamma_i(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{Ł}_{n_i}$, tenim que $\gamma_i(\mathbf{B}) = \mathbf{Ł}_{d_i}$ per un cert $d_i|n_i$.
Suposem que per cada $1 \leq i \leq l$, $\gamma_i(\mathbf{B}) = \mathbf{Ł}_{n_i}$. Aleshores, per cada $1 \leq i \leq l$, $\mathbf{B}/Ker(\gamma_i) \cong \mathbf{Ł}_{n_i}$. Com que $\mathbf{Ł}_{n_i}$ és simple, $Ker(\gamma_i)$ és una congruència maximal de $\mathbf{B}$ i de [22, lema 2.3] (vegeu també [64]) i del fet que tots els $\mathbf{Ł}_n$'s són simples es dedueix que

$$Ker(\gamma_i) = \mathbf{Ł}_{p_1}{}^2 \times \cdots \times \Delta_{\mathbf{Ł}_{n_k}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{p_r}{}^2.$$

Per tant, per cada $1 \leq i \leq l$ existeix $1 \leq k \leq r$ tal que $\mathbf{Ł}_{p_k} = \mathbf{Ł}_{n_i}$. Per la condició (1) $i \neq j$ implica $n_i \neq n_j$, per tant $l \leq r$ i

$$\mathbf{B} \cong \mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l} \times \mathbf{Ł}_{m_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_{r-l}}$$

I per tant $|\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}|$. Ara bé, això contradiu el fet que $\mathbf{B}$ sigui una subàlgebra pròpia d'$\mathbf{A}$ i l'afirmació queda demostrada.
Suposem que $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}\})$, aleshores

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISPP}_U(\{\mathbf{Ł}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{d_l} : \forall i\ d_i|n_i;\ \exists k\ d_k \neq n_k\}).$$

Com que $\{\mathbf{Ł}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{d_l} : \forall i\ d_i|n_i;\ \exists k\ d_k \neq n_k\}$ és un conjunt finit de MV-àlgebres finites, aleshores

$$\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l} \in \mathbb{ISP}(\{\mathbf{Ł}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{d_l} : \forall i\ d_i|n_i;\ \exists k\ d_k \neq n_k\}).$$

Per tant $\mathbf{L}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_l}$ és submergible en $\prod\limits_{k \leq n} (\mathbf{L}_{d_{1,k}} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_{l,k}})^{\alpha_k}$ on

$$\{\mathbf{L}_{d_{1,k}} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_{l,k}} : k \leq n\} \subseteq \{\mathbf{L}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_l} : \ \forall i \ d_i | n_i; \ \exists k \ d_k \neq n_k\}.$$

Com que que el conjunt $\{d_{t,k} : 1 \leq t \leq l; k \leq n\}$ és finit podem aplicar el lema 8.9. Suposem que existeixen $1 \leq i, j \leq l$ tals que $i \neq j$ i $n_i | n_j$, aleshores per les condicions 1) i 2), n_j és únic. Pel lema 8.9, existeix $d_{t,m}$ tal que $n_j | d_{t,m}$. És a dir existeix

$$\mathbf{L}_{d_{1,m}} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_{l,m}} \in \{\mathbf{L}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_l} : \ \forall i \ d_i | n_i; \ \exists k \ d_k \neq n_k\}$$

tal que $n_j | d_{t,m}$ per un cert $1 \leq t \leq l$. Per la condició 2), n_j no divideix cap n_i tret d'ell mateix. Per tant, com que d_t és un divisor de n_t, aleshores $n_t = d_{t,m} = n_j$ i per 1), $t = j$. Com que

$$\mathbf{L}_{d_{1,m}} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_{l,m}} \in \{\mathbf{L}_{d_1} \times \cdots \times \mathbf{L}_{d_l} : \ \forall i \ d_i | n_i; \ \exists k \ d_k \neq n_k\},$$

existeix $1 \leq r \neq j \leq l$ tal que $d_{r,m} | n_r$ i $d_{r,m} \neq n_r$. Ara bé per 2) del lema 8.9, existeix un $1 \leq s \neq r \leq l$ tal que $n_s | d_{r,m}$. Així hem trobat $n_s | n_r$, $n_i | n_j$, $r \neq s$, $i \neq j$ i $r \neq j$ i això contradiu la condició 2).
Si per tot $1 \leq i \neq j \leq l$, $n_i \not| n_j$, aleshores el mateix argument és vàlid prenent qualsevol n_j, $1 \leq j \leq l$.
Com que $\mathbf{A}$ és finita i $\mathbf{A} \notin \mathbb{Q}(\{\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}\})$, tenim que $\mathbf{A}$ és crítica.
Per demostrar el recíproc, si $\mathbf{A}$ és crítica, és finita i pel teorema 3.39, podem suposar sense pèrdua de generalitat que

$$\mathbf{A} = {\mathbf{L}_{n_1}}^{m_1} \times \cdots \times {\mathbf{L}_{n_k}}^{m_k}$$

per alguns $n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_k \in \omega$ tals que $n_i \neq n_j$ si $i \neq j$. Si no tots els m_i's són iguals a 1, aleshores la correspondència

$$\alpha \colon (\bar{a}(1), \ldots, \bar{a}(k)) \mapsto \alpha(\bar{a}) = \Big(\overbrace{(\bar{a}(1), \ldots, \bar{a}(1))}^{m_1}, \ldots, \overbrace{(\bar{a}(k), \ldots, \bar{a}(k))}^{m_k}\Big)$$

ens defineix un isomorfisme de $\mathbf{L}_{n_0} \times \cdots \times \mathbf{L}_{n_{k-1}}$ en una subàlgebra pròpia d'$\mathbf{A}$. Sigui $m =$ màx$\{m_1, \ldots, m_k\}$, aleshores la correspondència

$$\beta \colon {\mathrm{L}_{n_1}}^{m_1} \times \cdots \times {\mathrm{L}_{n_k}}^{m_k} \to {\mathrm{L}_{n_1}}^{m} \times \cdots \times {\mathrm{L}_{n_k}}^{m}$$

tal que per tot $1 \leq r \leq k$,

$$\beta((\bar{b}(1), \ldots, \bar{b}(k)))(r) = (\bar{b}(r)(1), \ldots, \bar{b}(r)(m_r), \overbrace{\bar{b}(r)(1), \ldots, \bar{b}(r)(1)}^{m-m_r}),$$

és una immersió d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{Ł}_{n_1}{}^m \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k}{}^m \cong (\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k})^m$. Així, $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k})$. Com que $\mathbf{A}$ és crítica, aleshores $m_1, \ldots, m_k = 1$. Per tant satisfà la condició 1). Suposem que no satisfaci la condició 2), aleshores existeixen $1 \leq j < r \leq k$ tals que

$$|D(n_j) \cap \{n_m : 1 \leq m \leq k\}| > 1 \text{ i } |D(n_r) \cap \{n_m : 1 \leq m \leq k\}| > 1.$$

És a dir, existeixen $i \neq j$ $s \neq r$ tals que $n_i | n_j$, $n_s | n_r$ i $j \neq r$.
Com que $n_i | n_j$, aleshores la correspondència que envia

$$(\bar{a}(1), \ldots, \bar{a}(j-1), \bar{a}(j+1), \ldots, \bar{a}(k))$$

a

$$(\bar{a}(1), \ldots, \bar{a}(j-1), \bar{a}(i), \bar{a}(j+1), \ldots, \bar{a}(k))$$

ens defineix un isomorfisme entre $\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{j-1}} \times \mathbf{Ł}_{n_{j+1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k}$ i una subàlgebra pròpia d'$\mathbf{A}$. Anàlogament,

$$\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{r-1}} \times \mathbf{Ł}_{n_{r+1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k} \in \mathbb{I}(\mathbb{S}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}).$$

Finalment, observi's que $\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k}$ és submergible en

$$\mathbf{Ł}_{n_1}{}^2 \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{j-1}}{}^2 \times \mathbf{Ł}_{n_j} \times \mathbf{Ł}_{n_{j+1}}{}^2 \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{r-1}}{}^2 \times \mathbf{Ł}_{n_r} \times \mathbf{Ł}_{n_{r+1}}{}^2 \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k}{}^2.$$

per mitjà de la correspondència δ definida:

$$\delta(\bar{a}(1), \ldots, \bar{a}(k))(i) = \begin{cases} (\bar{a}(i), \bar{a}(i)) & \text{si } i \neq j, r \\ \bar{a}(i) & \text{si } i = j, r \end{cases}.$$

Per tant

$$\mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{j-1}} \times \mathbf{Ł}_{n_{j+1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k}, \mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{r-1}} \times \mathbf{Ł}_{n_{r+1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_k}\})$$

en contradicció amb el fet que $\mathbf{A}$ és crítica. □

Corol.lari 8.11 *El nombre de MV-àlgebres crítiques no isomorfes d'una subvarietat pròpia de MV-àlgebres és finit.*

Prova : Si $\mathbb{K}$ és una varietat pròpia de MV-àlgebres, ja hem vist en el capítol 6 (vegeu el teorema 6.3) que $\mathbb{K}$ conté un nombre finit de $\mathbf{Ł}_n$'s. Sigui $M = \{n \in \omega : \mathbf{Ł}_n \in \mathbb{K}\}$. $|M| < \omega$. Pel teorema 8.10, totes les àlgebres crítiques de $\mathbb{K}$ són:

$$\mathbb{I}(\{\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l} : \text{ satisfent 1) i 2) del teorema 8.10 i } n_i \in M\}).$$

Com que $|M|$ és finit tenim que el nombre de MV-àlgebres crítiques no isomorfes de $\mathbb{K}$ és finit. □

D'aquest darrer resultat deduïm:

Teorema 8.12 *Una quasivarietat de MV-àlgebres és localment finita si, i només si, és finitament generada.*

Prova : Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat localment finita de MV-àlgebres, pel teorema 8.6 i el corol.lari 8.7, $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ és una subvarietat pròpia de $\mathbb{W}$. I pel corol.lari 8.11 el nombre de MV-àlgebres crítiques no isomorfes en $\mathbb{K}$ és finit. Pel teorema 8.8, $\mathbb{K}$ està generada per les seves àlgebres crítiques, per tant, com que tota quasivarietat és tancada per imatges isomorfes, $\mathbb{K}$ és finitament generada.
El recíproc ens ve donat pel corol.lari 8.5 □

Dels teoremes 8.12, 8.4 i 8.8 obtenim

Teorema 8.13 *Una quasivarietat de MV-àlgebres és n-acotada per algun $n \in \omega$ si, i només si, és finitament generada. A més, està generada per les seves àlgebres crítiques.* □

El següent resultat ens permet distingir quasivarietats n-acotades a partir dels seus generadors.

Teorema 8.14 *Si $\{\mathbf{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{il(i)}} : i \in I\}$ i $\{\mathbf{Ł}_{m_{j1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_{jl(j)}} : j \in J\}$ són dues famílies finites de MV-àlgebres crítiques, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{il(i)}} : i \in I\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{m_{j1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_{jl(j)}} : j \in J\})$$

si, i només si,
Per tot $i \in I$, existeix $\emptyset \neq H \subseteq J$ tal que:

1. *Per tot $1 \leq k \leq l(i)$ existeixen $j \in H$ i $1 \leq r \leq l(j)$ tal que $n_{ik} | m_{jr}$.*
2. *Per tot $j \in H$ i $1 \leq r \leq l(j)$ existeix $1 \leq k \leq l(i)$ tal que $n_{ik} | m_{jr}$.*

Prova : Si $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{il(i)}} : i \in I\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{m_{j1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_{jl(j)}} : j \in J\})$, aleshores per tot $i \in I$, existeix $\emptyset \neq H \subseteq J$ tal que $\mathbf{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{il(i)}}$ és submergible en $\prod_{j \in H} (\mathbf{Ł}_{m_{j1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_{jl(j)}})^{\alpha_j}$, ja que $\{\mathbf{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{il(i)}} : i \in I\}$ és un conjunt finit d'àlgebres finites. Aleshores, pel lema 8.9, es satisfan les dues condicions que volem demostrar.
Per demostrar el recíproc anem a veure que per tot $i \in I$,

$$\mathbf{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_{il(i)}} \in \mathbb{ISP}(\{\mathbf{Ł}_{m_{j1}} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_{jl(j)}} : j \in H\})$$

on H és el subconjunt de J que ens ve donat per les hipòtesis. Per la condició 1), per cada $1 \leq k \leq l(i)$, triem un $j \in H$ que anomenem j_k i triem un $1 \leq r_k \leq l(j_k)$ tal que $n_k | m_{j_k r_k}$, aleshores és fàcil veure que la correspondència

$$\beta\colon \text{Ł}_{n_{i1}} \times \cdots \times \text{Ł}_{n_{il(i)}} \to \prod_{1 \leq k \leq l(i)} \text{Ł}_{m_{j_k 1}} \times \cdots \times \text{Ł}_{m_{j_k l(j_k)}} \ : \bar{a} \mapsto \beta(\bar{a})$$

on $\beta(\bar{a})(k)(r) = \begin{cases} \bar{a}(k) & \text{si } k = r \\ \bar{a}(l) & \text{per algun } 1 \leq l \leq l(i) \text{ tal que } n_l | m_{j_k r} \text{ si } r \neq k \\ & \text{existeix per la condició 2)} \end{cases}$

és una immersió. □

8.2 Axiomatització. Aplicacions i Exemples

Volem estudiar l'axiomatització d'aquestes quasivarietats. En general el fet de ser finitament generada no implica que sigui finitament axiomatitzable. Per exemple: Sigui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbf{A})$ on $\mathbf{A} = \langle \{0,1,2\}, f, g \rangle$ de tipus $(1,1)$ amb f i g definides: $f(0) = 1$, $g(0) = 2$ i $f(x) = g(x) = x$ per tot $x \neq 0$. $\mathbb{K}$ no és finitament axiomatitzable i sí finitament generada (vegeu [29, pàg. 147]).

Donades dues quasivarietats $\mathbb{K}$ i $\mathbb{K}'$ d'àlgebres del mateix tipus tals que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$, diem que $\mathbb{K}$ és **finitament axiomatitzable relativament a $\mathbb{K}'$** si, i només si existeix un conjunt *finit* $\Sigma \subseteq Qeq$ de quasiequacions de manera que $\mathbb{K} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{K}' : \mathbf{A} \models \Sigma\}$.

Lema 8.15 [33, lema 4.2] *Sigui $\mathbb{M}$ una quasivarietat localment finita de tipus finit, per qualsevol quasivarietat $\mathbb{K}$ continguda en $\mathbb{M}$ les següents condicions són equivalents:*

1. *$\mathbb{K}$ no és finitament axiomatitzable relativament a $\mathbb{M}$*
2. *Existeix una successió infinita $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$ d'àlgebres finites de $\mathbb{M}$ que satisfà:*
   - *(a) $|\mathbf{A}_i| < |\mathbf{A}_{i+1}|$ per tot i;*
   - *(b) $\mathbf{A}_i \notin \mathbb{K}$ per tot i;*
   - *(c) Tota subàlgebra pròpia d'$\mathbf{A}_i$ pertany a $\mathbb{K}$.* □

D'aquest resultat i del corol.lari 8.11 es dedueix:

Teorema 8.16 *Tota quasivarietat de MV-àlgebres n-acotada és finitament axiomatitzable.*

Prova : Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat de MV-àlgebres n-acotada. És clar que $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ és una varietat pròpia de MV-àlgebres, n-acotada i pel teorema 8.6 és localment finita. Observi's que qualsevol MV-àlgebra finita $\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\mathbb{K})$ que satisfà les condicions (b) i (c) és una MV-àlgebra crítica. Del corol.lari 8.11 es dedueix que el nombre de MV-àlgebres crítiques no isomorfes de $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ és finit. Per tant és impossible obtenir una successió infinita d'àlgebres finites de $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ que satisfacin les condicions (a), (b) i (c). En conseqüència, pel lema 8.15, $\mathbb{K}$ és finitament axiomatitzable relativament a $\mathbb{V}(\mathbb{K})$. I com que tota varietat de MV-àlgebres és finitament axiomatitzable (vegeu teorema 6.16), aleshores $\mathbb{K}$ és finitament axiomatitzable. □

Recordem (vegeu el capítol 6) les axiomatitzacions de les varietats n-acotades, és a dir del tipus $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_1}, \ldots, \mathbf{Ł}_{n_r}\})$ amb $n_1, \ldots, n_r < n$. Usarem l'axiomatització donada per Rodríguez i Torrens que en [65] demostren que la varietat generada per $\mathbf{Ł}_n$ és axiomatitzable per **MV1.**, ..., **MV6.** més un únic axioma $\varphi(x) \approx 1$, que denotem per $v_n(x) \approx 1$. A més, per tot $n_1, \ldots, n_r < \omega$, $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_1}, \ldots, \mathbf{Ł}_{n_r}\})$ s'axiomatitza per l'equació $v_{n_1}(x) \vee \cdots \vee v_{n_r}(x) \approx 1$ [72, teorema 1.8]. Mostrarem alguns exemples d'axiomatitzacions efectives per algunes quasivarietats n-acotades.

Donada una quasivarietat $\mathbb{K}$ de MV-àlgebres, definim la següent classe (Aquesta classe fou introduïda per primera vegada en [34]):

$$(\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n \notin \mathbb{IS}(\mathbf{A})\}.$$

Per la propietat 3.35, la quasiequació

$$(n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1$$

es satisfà en una MV-àlgebra no trivial $\mathbf{A}$ si, i només si, $\mathbf{A}$ no conté $\mathbf{Ł}_n$. Per tant $(\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n)$ és axiomatitzable per:

- Axiomes de $\mathbb{K}$
- $(n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1$.

En conseqüència, com que $\mathbb{K}$ és una quasivarietat, $(\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n)$ és una classe quasiequacional i per tant també és una quasivarietat. Hom comprova sense dificultat que es satisfan les següents propietats:

8.17 $((\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n) : \mathbf{Ł}_m) = ((\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_m) : \mathbf{Ł}_n) = (\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n) \cap (\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_m) = (\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n, \mathbf{Ł}_m)$.

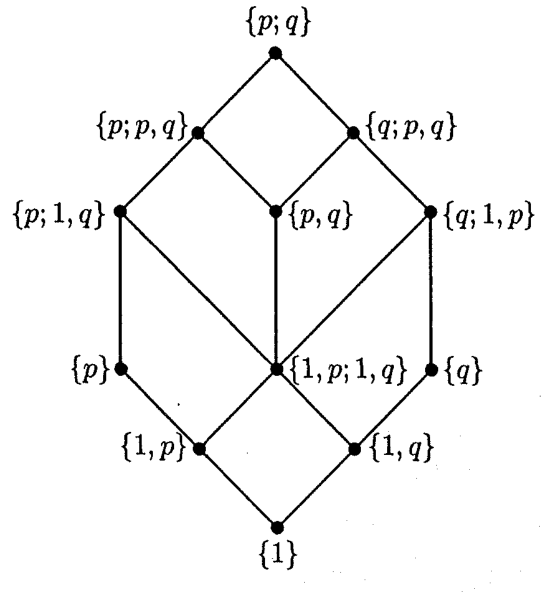
8.18 $(\mathbb{K} : \mathbf{Ł}_n) = \mathbb{K}$ *si, i només si,* $\mathbf{Ł}_n \notin \mathbb{K}$.

Com a primer exemple, considerem totes les subquasivarietats de $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\})$, on p i q són dos nombres primers diferents. Com que el conjunt dels divisors de p o de q és $\{1, p, q\}$, per la caracterització donada en el teorema 8.10, obtenim que totes les MV-àlgebres crítiques de $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\})$ són

$$\mathbb{I}(\{\mathbf{Ł}_1, \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q, \mathbf{Ł}_p \times \mathbf{Ł}_q\}).$$

D'aquesta manera podem obtenir totes les subquasivarietats de $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\})$ (vegeu figura 8.1).

Figura 8.1: Reticle de totes les subquasivarietats de $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\})$.



$\{n_1, \ldots, n_l; m_1, \ldots, m_k\}$ abreuja $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{n_l}, \mathbf{Ł}_{m_1} \times \cdots \times \mathbf{Ł}_{m_k}\})$.

Ja sabem que les subvarietats de $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\})$ són $\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\})$, $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_p)$, $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_q)$ i $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_1)$, i s'axiomatitzen per **MV1.**, ..., **MV6.** i respectivament $v_p(x) \vee v_q(x) \approx 1$, $v_p(x) \approx 1$, $v_q(x) \approx 1$ i $v_1(x) \approx 1$. A partir de l'axiomatització de $(\mathbb{K} : \text{\L}_n)$ i del següent resultat hom pot obtenir una axiomatització efectiva d'algunes de les subquasivarietats de $\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\})$.

Teorema 8.19 *Les següents igualtats són vàlides:*

1. $\mathbb{Q}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_p \times \text{\L}_q\}) = (\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_q)$.
2. $\mathbb{Q}(\{\text{\L}_q, \text{\L}_p \times \text{\L}_q\}) = (\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_p)$.
3. $\mathbb{Q}(\text{\L}_p \times \text{\L}_q) = (\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_p, \text{\L}_q)$.
4. $\mathbb{Q}(\text{\L}_1 \times \text{\L}_p) = (\mathbb{V}(\text{\L}_p) : \text{\L}_p)$.
5. $\mathbb{Q}(\text{\L}_1 \times \text{\L}_q) = (\mathbb{V}(\text{\L}_q) : \text{\L}_q)$.

Prova : 1) Com que $\text{\L}_p$ i $\text{\L}_p \times \text{\L}_q$ no contenen $\text{\L}_q$, aleshores

$$\mathbb{Q}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_p \times \text{\L}_q\}) \subseteq (\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_q).$$

Per la propietat 8.18, $(\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_q)$ és una subquasivarietat pròpia de $\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\})$ i per tant localment finita. Així, n'hi ha prou en veure que totes les MV-àlgebres crítiques de $\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\})$ que no contenen $\text{\L}_q$ pertanyen a $\mathbb{Q}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_p \times \text{\L}_q\})$. Les úniques MV-àlgebres crítiques de $\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\})$ que no contenen $\text{\L}_q$, tret d'isomorfisme, són

$$\{\text{\L}_1, \text{\L}_p, \text{\L}_1 \times \text{\L}_p, \text{\L}_1 \times \text{\L}_q, \text{\L}_p \times \text{\L}_q\} \subseteq \mathbb{Q}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_p \times \text{\L}_q\})$$

2) s'obté com 1).
3) es dedueix de ... pietat 8.17.
4) Com ... i $\{\text{\L}_1, \text{\L}_1 \times \text{\L}_p\}$ són, llevat d'isomorfisme,
les ... s de $\mathbb{V}(\text{\L}_p)$ que no contenen $\text{\L}_p$, tenim que

□

... s tres subquasivarietats de $\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\})$

... *hores*

... *vels axiomes de* $(\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_q)$

... $) \approx 1 \Rightarrow v_p(y) \approx 1.$

En ... *axiomes de* $(\mathbb{V}(\{\text{\L}_p, \text{\L}_q\}) : \text{\L}_p)$
quasiequ...
dificultat qu... $1 \Rightarrow v_q(y) \approx 1.$

3. $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q\})$ *és axiomatitzable pels axiomes de* $(\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\}) : \mathbf{Ł}_q, \mathbf{Ł}_p)$

més $\quad rx \approx 1 \;\&\; r(\neg x) \approx 1 \Rightarrow x \approx 1.$

Prova : 1) Com que $\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q$ no contenen $\mathbf{Ł}_q$, aleshores satisfan els axiomes de $(\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\}) : \mathbf{Ł}_q)$. A més, la quasiequació

$$rx \approx 1 \;\&\; r(\neg x) \approx 1 \Rightarrow v_p(y) \approx 1$$

és vàlida en $\mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q$, ja que per qualsevol $a \in Ł_1 \times Ł_q$,

$$ra = (1,1) \text{ implica } r(\neg a) \neq (1,1).$$

Com que $\mathbf{Ł}_p$ satisfà l'equació $v_p(y) \approx 1$, aleshores $\mathbf{Ł}_p$ és també model de

$$rx \approx 1 \;\&\; r(\neg x) \approx 1 \Rightarrow v_p(y) \approx 1.$$

Per tant, $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q\})$ satisfà l'anterior quasiequació.
Com que la classe dels models de la quasiequació

$$rx \approx 1 \;\&\; r(\neg x) \approx 1 \Rightarrow v_p(y) \approx 1$$

continguda en $(\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\}) : \mathbf{Ł}_q)$ és una classe r-acotada, n'hi ha prou en veure que totes les MV-àlgebres crítiques de $(\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\}) : \mathbf{Ł}_q)$ que satisfan la quasiequació pertanyen a $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q\})$.
Les MV-àlgebres crítiques de $(\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\}) : \mathbf{Ł}_q)$ són

$$\mathbb{I}(\{\mathbf{Ł}_1, \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q, \mathbf{Ł}_p \times \mathbf{Ł}_q\}).$$

Observi's que totes satisfan la quasiequació menys la MV-àlgebra $\mathbf{Ł}_p \times \mathbf{Ł}_q$.
Si prenem, per exemple $x = y = (\frac{p-1}{p}, \frac{q-1}{q})$,

$$r(\frac{p-1}{p}, \frac{q-1}{q}) = (1,1) \quad \text{i} \quad r(\neg(\frac{p-1}{p}, \frac{q-1}{q})) = r(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) = (1,1),$$

$$\text{però en canvi } v_p(\frac{p-1}{p}, \frac{q-1}{q}) \neq (1,1).$$

Com que $\{\mathbf{Ł}_1, \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q\} \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q\})$, aleshores 1) queda demostrat.
2) es demostra com 1).
3) Com que $\mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_1 \times \mathbf{Ł}_q \in (\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_p, \mathbf{Ł}_q\}) : \mathbf{Ł}_q, \mathbf{Ł}_p)$ i no hi ha cap element

a de $\mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_p$ o de $\mathrm{L}_1 \times \mathrm{L}_q$ tal que $ra = (1,1)$ i $r(\neg a) = (1,1)$, aleshores $\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_p, \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_q$ satisfan els axiomes.
Usant un argument similar al de 1), podem veure que, llevat d'isomorfisme, les úniques MV-àlgebres crítiques de $(\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_p, \mathbf{L}_q\}) : \mathbf{L}_q, \mathbf{L}_p)$ que satisfan la quasiequació

$$rx \approx 1 \ \& \ r(\neg x) \approx 1 \Rightarrow x \approx 1,$$

són $\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_p, \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_q\} \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_p, \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_q\})$. Per tant queda demostrat 3). □

El segon exemple són totes les subquasivarietats de la varietat $\mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^r})$ on p és un nombre primer i $r \in \omega$.

Teorema 8.21 *La classe de les MV-àlgebres crítiques de* $\mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^r})$ *és*

$$\mathbb{I}\Big(\{\mathbf{L}_{p^s} : s \leq r\} \cup \{\mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m} : n < m \leq r\}\Big).$$

Prova : Com que les MV-àlgebres del tipus $\mathbf{L}_{p^s}$ amb $s \leq r$ o $\mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m}$ amb $n < m \leq r$ pertanyen a $\mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^r})$ i satisfan les condicions del teorema 8.10, aleshores són crítiques.
Per veure l'altra implicació, sigui $\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^r})$ una MV-àlgebra crítica. Com que tots els divisors de p^r són p^s amb $s \leq r$, tenim que, per la condició 1) del teorema 8.10, $\mathbf{A}$ és isomorf a una àlgebra del tipus

$$\mathbf{L}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbf{L}_{p^{n_k}}$$

amb $n_i < n_j$ si $i < j$ i $n_i \leq r$ per tot $1 \leq i \leq k$.
Ara bé, si $k > 2$, aleshores $\mathbf{A}$ no satisfà la condició 2) del teorema 8.10 i per tant no seria crítica. Per tant $k = 1$ o $k = 2$. □

Del lema 8.9 en deduïm les següents propietats:

Lema 8.22 *Siguin* $n_1, \ldots, n_k < \omega$ *i* $m_1, , \ldots, n_k < \omega$ *tals que* $n_i < m_i$ *per tot* $1 \leq i \leq k$.

1. $\mathbf{L}_{p^{n_i}} \times \mathbf{L}_{p^{m_i}} \subseteq \mathbf{L}_{p^{n_j}} \times \mathbf{L}_{p^{m_j}}$ *si, i només si,* $n_i \leq n_j$ *i* $m_i \leq m_j$.

2. $\mathbf{L}_{p^{n_i}} \times \mathbf{L}_{p^{m_i}} \subseteq \mathbf{L}_{p^s} \times \mathbf{L}_{p^s}$ *si, i només si,* $m_i \leq s$.

3. $\mathbf{L}_{p^s} \subseteq \mathbf{L}_{p^{n_j}} \times \mathbf{L}_{p^{m_j}}$ *si, i només si,* $s \leq n_j$. □

Teorema 8.23 *Tota subquasivarietat de* $\mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^r})$ *és d'un dels següents tipus:*

1. $\mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^s})$ *amb* $s \leq r$.

2. $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{p^{n_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_1}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{n_k}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_k}}\})$ *de manera que* $n_i < m_i \leq r$ *per tot* $1 \leq i \leq k$, *i* $n_i < n_j$ *i* $m_i > m_j$ *si* $i < j$.

3. $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{p^{n_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_1}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{n_k}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_k}}, \mathbf{Ł}_{p^s}\})$ *de manera que* $n_i < s < m_i \leq r$ *per tot* $1 \leq i \leq k$, *i* $n_i < n_j$ *i* $m_i > m_j$ *si* $i < j$.

Prova : Sigui $\mathbb{K}$ una subquasivarietat de $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_{p^r})$, pel teorema 8.12, $\mathbb{K}$ està finitament generada per les seves MV-àlgebres crítiques, per exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\})$. Pel teorema 8.21, per qualsevol $1 \leq i \leq k$

$$\mathbf{A}_i \cong \mathbf{Ł}_{p^s} \text{ amb } s \leq r \quad \text{o} \quad \mathbf{A}_i \cong \mathbf{Ł}_{p^n} \times \mathbf{Ł}_{p^m} \text{ amb } n < m \leq r.$$

Per tant, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{p^{s_1}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{s_j}}, \mathbf{Ł}_{p^{n_{j+1}}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_{j+1}}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{n_k}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_k}}\})$. Sigui

$$\mathfrak{G} = \{\mathbf{Ł}_{p^{s_1}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{s_j}}, \mathbf{Ł}_{p^{n_{j+1}}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_{j+1}}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{n_k}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_k}}\}.$$

A continuació donarem un procediment recursiu per obtenir una subfamília de generadors que satisfacin les nostres condicions i que generin $\mathbb{K}$:
Primer pas: Sigui $m'_1 = \text{màx}\{s_1, \ldots, s_j, m_{j+1}, \ldots, m_k\}$. Si $m'_1 = s_l$ per algun $1 \leq l \leq j$, aleshores, pel lema 8.22

$$\{\mathbf{Ł}_{p^{s_1}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{s_j}}, \mathbf{Ł}_{p^{n_{j+1}}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_{j+1}}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{n_k}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m_k}}\} \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{p^{s_l}}).$$

Per tant, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{p^{s_l}}) = \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_{p^{s_l}})$.
Segon pas: Si $m'_1 \neq s_l$ per tot $1 \leq l \leq j$, sigui $n'_1 = \text{màx}\{n_i : m_i = m'_1\}$. Considerem $\mathfrak{G}_1 = \{\mathbf{Ł}_{p^s} \in \mathfrak{G} : s > n'_1\} \cup \{\mathbf{Ł}_{p^n} \times \mathbf{Ł}_{p^m} \in \mathfrak{G} : n > n'_1\}$. Observi's que si $\mathbf{Ł}_{p^s} \in \mathfrak{G}_1$, aleshores $n'_1 < s < m'_1$; i també que si $\mathbf{Ł}_{p^n} \times \mathbf{Ł}_{p^m} \in \mathfrak{G}_1$, aleshores $n'_1 < n$ i $m < m'_1$. Per tant, pel lema 8.22,

$$\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}_1 \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{p^{n'_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m'_1}}).$$

En conseqüència

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{p^{n'_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m'_1}}\} \cup \mathfrak{G}_1) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_{p^{n'_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m'_1}}) \vee \mathbb{Q}(\mathfrak{G}_1).$$

Com que $\mathbf{Ł}_{p^{n'_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m'_1}} \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}_1$, aleshores $|\mathfrak{G}_1| < |\mathfrak{G}|$.
En aquest punt, tornem al primer pas, però ara fem servir $\mathfrak{G}_1$ enlloc de $\mathfrak{G}$. I procedim recursivament.
Aquest algorisme s'acaba ja que $\mathfrak{G}$ és finit. Al final tindrem una successió finita $\mathbf{Ł}_{p^{n'_1}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m'_1}}, \ldots, \mathbf{Ł}_{p^{n'_l}} \times \mathbf{Ł}_{p^{m'_l}}$ i probablement $\mathbf{Ł}_{p^{m'_{l+1}}}$ tal que satisfà les condicions enunciades en el teorema. □

Finalment construirem una axiomatització finita per cada una de les subquasivarietats de $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_{p^r})$.

Teorema 8.24

1. *$\mathbb{V}(\text{Ł}_{p^s})$ amb $s \leq r$, és axiomatitzable per* **MV1.**,...,**MV6.** *més* $v_{p^s}(x) \approx 1$.

2. *$\mathbb{Q}(\{\text{Ł}_{p^{n_1}} \times \text{Ł}_{p^{m_1}}, \ldots, \text{Ł}_{p^{n_k}} \times \text{Ł}_{p^{m_k}}\})$ de manera que $n_i < m_i \leq r$, per tot $1 \leq i \leq k$, i $n_i < n_j$ i $m_i > m_j$ si $i < j$, és axiomatitzable per:*

   (a) **MV1.**,...,**MV6.**
   (b) $v_{p^{m_1}}(x) \approx 1$.
   (c) $(p^{n_k+1} - 1)\neg x \approx x \Rightarrow x \approx 1$.
   (d) $(p^{n_{j-1}+1} - 1)\neg x \approx x \Rightarrow v_{p^{m_j}}(y) \approx 1$ *per tot* $2 < j \leq k$.

3. *$\mathbb{Q}(\{\text{Ł}_{p^{n_1}} \times \text{Ł}_{p^{m_1}}, \ldots, \text{Ł}_{p^{n_k}} \times \text{Ł}_{p^{m_k}}, \text{Ł}_{p^s}\})$ de manera que $n_i < s < m_i \leq r$, per tot $1 \leq i \leq k$, i $n_i < n_j$ i $m_i > m_j$ si $i < j$, és axiomatitzable per:*

   (a) **MV1.**,...,**MV6.**
   (b) $v_{p^{m_1}}(x) \approx 1$.
   (c) $(p^{s+1} - 1)\neg x \approx x \Rightarrow x \approx 1$.
   (d) $(p^{n_{j-1}+1} - 1)\neg x \approx x \Rightarrow v_{p^{m_j}}(y) \approx 1$ *per tot* $2 < j \leq k$.
   (e) $(p^{n_k+1} - 1)\neg x \approx x \Rightarrow v_{p^s}(y) \approx 1$.

Prova : 1) Es dedueix de l'axiomatització donada per Torrens [68, 72].
2) Com que $\mathfrak{G} = \{\text{Ł}_{p^{n_1}} \times \text{Ł}_{p^{m_1}}, \ldots, \text{Ł}_{p^{n_k}} \times \text{Ł}_{p^{m_k}}\} \subseteq \mathbb{V}(\text{Ł}_{p^{m_1}})$, els membres de $\mathbb{Q}(\mathfrak{G})$ són models d' (a) i (b).
A més, $\mathfrak{G} \subseteq \mathbb{V}(\text{Ł}_{p^r}) : \text{Ł}_{p^{n_k+1}}$, ja que $\text{Ł}_{p^{n_k+1}} \not\subseteq \mathbf{A}$ per qualsevol $\mathbf{A} \in \mathfrak{G}$. Per tant, tota MV-àlgebra de $\mathfrak{G}$ és model de (c).
Per la propietat 3.35, si $\mathbf{A} \in \mathfrak{G}$ no conté $\text{Ł}_{p^{n_{j-1}+1}}$, aleshores satisfà (d). D'altra banda, si $\mathbf{A} \in \mathfrak{G}$ conté $\text{Ł}_{p^{n_{j-1}+1}}$, aleshores pertany a la varietat generada per $\text{Ł}_{p^{m_j}}$, i per tant també és model de (d).
Així doncs com que tot membre de $\mathfrak{G}$ és model de les equacions i quasiequacions $(a), (b), (c)$ i (d), aleshores $\mathbb{Q}(\mathfrak{G})$ és una classe de models d' $(a), (b)$, (c) i (d).
Per demostrar l'altra inclusió, observi's que (a) i (b) axiomatitzen $\mathbb{V}(\text{Ł}_{p^{m_1}})$ i per tant, la classe de models d' $(a), (b), (c)$ i(d) és una subquasivarietat de $\mathbb{V}(\text{Ł}_{p^{m_1}})$. Així, és una quasivarietat p^{m_1}-acotada i per tant, pel teorema 8.13, n'hi ha prou en demostrar que tota MV-àlgebra crítica de $\mathbb{V}(\text{Ł}_{p^{m_1}})$ que

satisfà (c) i (d) pertany a $\mathbb{Q}(\mathfrak{G})$.
Sigui $\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^{m_1}})$ una MV-àlgebra crítica, pel teorema 8.21,

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_{p^s} \text{ amb } s \leq m_1 \quad \text{o} \quad \mathbf{A} \cong \mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m} \text{ amb } n < m \leq m_1.$$

Si $\mathbf{A}$ satisfà (c), aleshores $\mathbf{L}_{p^{n_k+1}} \not\subseteq \mathbf{A}$. Per tant

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_{p^s} \text{ amb } s \leq n_k \quad \text{o} \quad \mathbf{A} \cong \mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m} \text{ amb } n < m \leq m_1 \text{ i } n \leq n_k.$$

$\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_{p^s}$, amb $s \leq n_k$, implica $\mathbf{L}_{p^s} \subseteq \mathbf{L}_{p^{n_k}} \times \mathbf{L}_{p^{m_k}}$. Per tant, $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\mathfrak{G})$.
Si $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m}$, amb $n < m \leq m_1$ i $n \leq n_k$, aleshores tenim diverses possibilitats:
- $n \leq n_1$: Pel lema 8.22, com que $m \leq m_1$, aleshores tenim que $\mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m} \subseteq \mathbf{L}_{p^{n_1}} \times \mathbf{L}_{p^{m_1}}$. Per tant, $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\mathfrak{G})$.
- $n_1 < n \leq n_k$: Existeix un únic $2 \leq j \leq k$ tal que $n_{j-1} < n \leq n_j$. Per tant, $\mathbf{L}_{p^{n_{j-1}+1}} \subseteq \mathbf{A}$. Com que $\mathbf{A}$ és un model de (d) i $\mathbf{L}_{p^{n_{j-1}+1}} \subseteq \mathbf{A}$, aleshores $\mathbf{A}$ és model de la quasiequació $v_{p^{m_j}}(y) \approx 1$. Per tant, $\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\mathbf{L}_{p^{m_j}})$ i $m \leq m_j$. A més, $n \leq n_j$, en conseqüència, pel lema 8.22, $\mathbf{L}_{p^n} \times \mathbf{L}_{p^m} \subseteq \mathbf{L}_{p^{n_j}} \times \mathbf{L}_{p^{m_j}}$ i $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\mathfrak{G})$.

3) Es demostra anàlogament a 2). □

Capítol 9

Quasivarietats Congruent Distributives

9.1 Caracterització

Recordem que una quasivarietat $\mathbb{K}$ és **congruent distributiva** si per cada $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$, el reticle $\mathbf{Con}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$ de les congruències de $\mathbf{A}$ relatives a $\mathbb{K}$ és distributiu (vegeu capítol 1).

Una quasivarietat $\mathbb{K}$ satisfà la **propietat de les interseccions de congruències principals equacionalment definibles**, escriurem **EDPM** (de l'anglès equational definable principal (congruences) meets) si existeix un sistema finit

$$\Delta = \{\langle p_i(x,y,z,w), q_i(x,y,z,w)\rangle \quad i = 0,\ldots,n-1\}$$

de parelles de termes 4-aris tal que, per qualsevol $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ i $a,b,c,d \in A$,

$$\Theta_{\mathbb{K}}(a,b) \cap \Theta_{\mathbb{K}}(c,d) = \bigvee_{i<n}{}_{\mathbb{K}}\ \Theta_{\mathbb{K}}(p_i^{\mathbf{A}}(a,b,c,d), q_i^{\mathbf{A}}(a,b,c,d)).$$

Anomenem Δ, *sistema de termes d'interseccions principals.*

Teorema 9.1 *La classe $\mathbb{W}$ de totes les MV-àlgebres és una varietat congruent distributiva, té EDPM i*

$$\Delta = \{\langle((x \odot \neg y) \oplus (y \odot \neg x)) \wedge ((z \odot \neg w) \oplus (w \odot \neg z)), 0\rangle\}$$

és un sistema de termes d'interseccions principals per $\mathbb{W}$.

Prova : En la secció 3.2 hem vist que la varietat $\mathbb{W}$ és aritmètica, en particular és congruent distributiva.
La segona part de la demostració es dedueix de l'isomorfisme entre el reticle de congruències i el reticle d'ideals de MV-àlgebres i de la propietat 3.24: per qualsevol $\mathbf{A} \in \mathbb{W}$ i per tot $a, b \in A$,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \wedge b \rangle. \qquad \square$$

El següent resultat general ens permetrà trobar una caracterització per totes les quasivarietats congruent distributives de MV-àlgebres.

Teorema 9.2 [29, 2.7] *Sigui $\mathbb{L}$ una varietat amb EDPM i sigui*

$$\Delta = \langle p_i(x, y, z, w), q_i(x, y, z, w) \rangle, \quad i < n,$$

un sistema de termes d'interseccions principals per $\mathbb{L}$. Aleshores donada una quasivarietat $\mathbb{K}$ continguda en $\mathbb{L}$ les següents propietats són equivalents:

1. *$\mathbb{K}$ té EDPM i Δ és un sistema de termes d'interseccions principals per $\mathbb{K}$.*
2. *$\mathbb{K}$ té EDPM.*
3. *$\mathbb{K}$ és congruent distributiva.*
4. *$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbb{M})$, amb $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{L}_{FSI}$.* $\square$

Recordem que $\mathbb{L}_{FSI}$ és la classe de les àlgebres de $\mathbb{L}$ finitament subdirectament irreductibles.

A partir dels teorema anterior i del teoremes 9.1 i 9.2 deduïm:

Corol.lari 9.3 [36, corol.lari 2.8] *Una quasivarietat $\mathbb{K}$ de MV-àlgebres és congruent distributiva si, i només si, està generada per MV-cadenes.*

Prova : Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbb{M})$, on $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{C}_W$, aleshores com que $\mathbb{W}$ és una varietat congruent distributiva amb EDPM i com que pel corol.lari 3.31, $\mathbb{W}_{FSI} = \mathbb{C}_W$, aleshores del teorema 9.2 deduïm que $\mathbb{K}$ és congruent distributiva. Suposem que $\mathbb{K}$ no està generada per MV-cadenes, aleshores no existeix cap $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{C}_W = \mathbb{W}_{FSI}$ tal que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathbb{M})$, així pel teorema 9.2, $\mathbb{K}$ no és congruent distributiva. $\square$

En el capítol 7 hem obtingut una classificació de les quasivarietats generades per MV-àlgebres simples. Del corol.lari anterior deduïm que les quasivarietats generades per MV-àlgebres simples són quasivarietats congruent distributives ja que tota MV-àlgebra simple és cadena. Observem que en el capítol 8, no totes les quasivarietats n-acotades són congruent distributives. Només les n-acotades generades per cadenes ho són i en aquest cas estan generades per MV-àlgebres simples i són varietats. El nostre objectiu és aprofundir una mica més i fer un estudi de les quasivarietats generades per MV-cadenes de rang finit.

9.2 Quasivarietats generades per cadenes de rang finit

Recordem que el teorema 5.6 ens caracteritza les MV-cadenes de rang finit. Si $\mathbf{A}$ és una cadena de rang n no simple, aleshores existeix un grup abelià totalment ordenat $\mathbf{G}$ i $0 < b \in G$, tal que

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n^{G,b}.$$

Si $\mathbf{A}$ és una MV-cadena de rang n simple aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n \cong \mathbf{Ł}_n^{\{0\},0}$.
Del teorema 5.12, deduïm que per tota cadena $\mathbf{A}$ de rang n,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\mathbf{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$$

A més, pel corol.lari 6.10 tenim que

$$\mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n) \text{ si } \mathbf{Rad}(\mathbf{A}) = \{0\} \quad \text{i} \quad \mathbb{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n^\omega) \text{ si } \mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$$

El nostre objectiu és obtenir una caracterització semblant per quasivarietats. Recordem que pel teorema 6.15, $\mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n) = \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n)$ i $\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$. Si $\mathbf{A}$ és una MV-cadena de rang n tal que $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) = \{0\}$, aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n$ i trivialment tenim que

$$\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n) = \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n) = \mathbb{V}(\mathbf{A})$$

El següent resultat restringeix a un cert tipus de cadenes la generalització del corol.lari 6.10 per quasivarietats.

Teorema 9.4 *Si* $\mathbf{A}$ *és una MV-cadena de rang* n *tal que* $\mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$, *aleshores* $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$ *si, i només si,* $\mathbf{A}$ *conté* $\mathbf{Ł}_n$

Prova : Si $\mathbf{A}$ conté $\mathbf{Ł}_n$, aleshores pel lema 6.8, $\mathbf{A}$ conté $\mathbf{Ł}_n^\omega$, per tant

$$\mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^\omega) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n^\omega) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$$

Si $\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^\omega)$, aleshores $\mathbf{Ł}_n^\omega \in \mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{ISPP}_U(\mathbf{A})$. Com que $\mathbf{Ł}_n$ és simple i $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_n^\omega$, pel lema 7.13 tenim que $\mathbf{Ł}_n \in \mathbb{ISP}_U(\mathbf{A})$ i pel lema 7.14 obtenim que $\mathbf{Ł}_n \in \mathbb{IS}(\mathbf{A})$. □

A continuació obtindrem uns resultats d'immersió entre cadenes de rang n. Recordem que $\mathbf{Ł}_n^d = \mathbf{Ł}_n^{Z,d}$.

Lema 9.5 *Sigui* $\mathbf{G}$ *un grup abelià totalment ordenat. Si* $b \in G$ *és divisible per* $d \in \omega$, *aleshores* $\mathbf{Ł}_n^d$ *és submergible en* $\mathbf{Ł}_n^{G,b}$.

Prova : És una simple verificació veure que l'aplicació de $\mathbf{Ł}_n^d$ en $\mathbf{Ł}_n^{G,b}$:

$$\left(\frac{r}{n}, l\right) \longmapsto \left(\frac{r}{n}, l\frac{b}{d}\right)$$

és una immersió. □

Teorema 9.6 *Per tot* $n, k \in \omega$, *si* $m.c.d.(k,n) = d$, *aleshores* $\mathbf{Ł}_n^k$ *és submergible en* $\mathbf{Ł}_n^d$.

Prova : Si $n = 1$, és trivial, ja que

$$\mathbf{Ł}_n^k \cong \mathbf{Ł}_n^\omega \cong \mathbf{Ł}_n^d.$$

Sigui $n \neq 1$. Sigui α una solució entera de l'equació $n\alpha + d \equiv 0 \pmod{k}$ tal que $0 \leq \alpha < k$. Aquesta equació té solució si, i només si, $d|m.c.d.(k,n)$. Considerem la següent correspondència de $\mathbf{Ł}_n^k$ en $\mathbf{Ł}_n^d$:

$$\left(\frac{r}{n}, l\right) \longmapsto \left(\frac{r}{n}, l\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - r\alpha\right).$$

Anem a veure que està ben definit:

Com que α és una solució entera entre 0 i k de l'equació $n\alpha + d \equiv 0 \text{ mod}(k)$, aleshores $l\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - r\alpha$ és sempre un enter. Cal veure que si $\left(\frac{r}{n}, l\right) \in \mathbf{Ł}_n^k$, aleshores $h\left(\left(\frac{r}{n}, l\right)\right) \in \mathbf{Ł}_n^d$.

Observem que $(0,0) \leq \left(\frac{r}{n}, l\right) \leq (1,k)$ si i només si, $0 < \frac{r}{n} < 1$ o ($r = 0$ i $0 \leq l$) o ($r = n$ i $l \leq k$).

Si $0 < \frac{r}{n} < 1$ aleshores

$$(0,0) \leq h\left(\left(\frac{r}{n}, l\right)\right) = \left(\frac{r}{n}, l\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - r\alpha\right) \leq (1,d).$$

Si $r = 0$ i $0 \leq l$, aleshores

$$(0,0) \leq h((0,l)) = \left(0, l\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right)\right) < (1,d).$$

Si $r = n$ i $l \leq k$, aleshores

$$(0,0) < h((1,l)) = \left(1, l\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - n\alpha\right) = \left(1, \frac{n\alpha(l-k)+l}{k}\right) \leq (1,d).$$

Observem que h és homomorfisme:

- $h((0,0)) = (0,0)$.
- $h\left(\neg\left(\frac{r}{n}, l\right)\right) =$

$$\begin{aligned}
&= h\left(\left(\frac{n-r}{n}, k-l\right)\right)\\
&= \left(\frac{n-r}{n}, (k-l)\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - (n-r)\alpha\right)\\
&= \left(\frac{n-r}{n}, n\alpha + d - l\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - n\alpha + r\alpha\right)\\
&= \left(\frac{n-r}{n}, d - \left(l\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - r\alpha\right)\right)\\
&= \neg\left(\frac{r}{n}, l\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - r\alpha\right)\\
&= \neg h\left(\left(\frac{r}{n}, l\right)\right).
\end{aligned}$$

- Observem que $\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right) \oplus \left(\frac{r_2}{n}, l_2\right) = \left(\frac{r_1+r_2}{n}, l_1+l_2\right)$ si, i només si, $r_1 + r_2 < n$ o ($r_1 + r_2 = n$ i $l_1 + l_2 \leq k$).
  Si $r_1 + r_2 < n$ o ($r_1 + r_2 = n$ i $l_1 + l_2 \leq k$) aleshores

$$\begin{aligned}
&h\left(\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right) \oplus \left(\frac{r_2}{n}, l_2\right)\right) = h\left(\left(\frac{r_1+r_2}{n}, l_1+l_2\right)\right)\\
&= \left(\frac{r_1+r_2}{n}, (l_1+l_2)\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - (r_1+r_2)\alpha\right)\\
&= \left(\frac{r_1}{n}, l_1\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - r_1\alpha\right) \oplus \left(\frac{r_2}{n}, l_2\left(\frac{n\alpha+d}{k}\right) - r_2\alpha\right)\\
&= h\left(\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right)\right) \oplus h\left(\left(\frac{r_2}{n}, l_2\right)\right).
\end{aligned}$$

Si $r_1 + r_2 > n$ o ($r_1 + r_2 = n$ i $l_1 + l_2 > k$) aleshores

$$\begin{aligned} & h\left(\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right) \oplus \left(\frac{r_2}{n}, l_2\right)\right) = h((1,k)) = (1,d) \\ & = \left(\frac{r_1}{n}, l_1\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - r_1\alpha\right) \oplus \left(\frac{r_2}{n}, l_2\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - r_2\alpha\right) \\ & = h\left(\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right)\right) \oplus h\left(\left(\frac{r_2}{n}, l_2\right)\right). \end{aligned}$$

Anem a veure que h és injectiu. Siguin $\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right)$ i $\left(\frac{r_2}{n}, l_2\right)$ dos elements de $\mathbf{L}_n^k$.

$$h\left(\left(\frac{r_1}{n}, l_1\right)\right) = h\left(\left(\frac{r_2}{n}, l_2\right)\right)$$

si, i només si,

$$\frac{r_1}{n} = \frac{r_2}{n} \text{ i } l_1\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - r_1\alpha = l_2\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) - r_2\alpha$$

si, i només si,

$$r_1 = r_2 \text{ i } l_1\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right) = l_2\left(\frac{n\alpha + d}{k}\right)$$

Com que $n\alpha + d \neq 0$, és equivalent a

$$r_1 = r_2 \text{ i } l_1 = l_2$$

Per tant h és una immersió. □

Donat que tota cadena de rang n ve determinada per un grup abelià totalment ordenat $\mathbf{G}$ i per un element $0 < b \in G$, a continuació treballarem sobre grups totalment ordenats amb un element positiu distingit.

Recordem que un grup abelià totalment ordenat és un ℓ-grup tal que el seu ordre parcial és total. L'estudi dels grups totalment ordenats, no necessàriament abelians, és molt extens (vegeu com a text de refrència [45]). A continuació enunciarem un quants resultats que usarem més endavant.

Teorema 9.7 [4] *Tot grup abelià totalment ordenat és lliure de torsió.* □

Teorema 9.8 [47, T.8.4, pàg 45] *Tot grup abelià lliure de torsió finitament generat és lliure, i per tant admet una base finita.i.e. existeixen elements $a_1, \ldots, a_n$ tals que generen tot el grup i són Z-independents.* □

D'ambdós teoremes deduïm:

Corol.lari 9.9 *Tot grup abelià totalment ordenat finitament generat té una base finita. i.e. existeixen elements $a_1, \ldots, a_n$ tals que generen tot el grup i són Z-independents.* □

Sigui **G** un grup totalment ordenat. Donats $a, b \in G$ direm que a i b són **arquimedianament equivalents** (o pertanyen a la mateixa classe arquimediana), ho denotarem per $a \asymp b$ si, i només si, existeixen $n, m \in \omega$ tals que $|a| < n|b|$ i $|b| < m|a|$ ($|a|$ denota el valor absolut de a). Es demostra fàcilment que $\asymp$ és una relació d'equivalència.
Donats $a, b \in G$, escriurem $a \ll b$ si, i només si, per tot $n \in \omega$, $n|a| < |b|$. És fàcil veure que si $a, b \in G$, $a \asymp b$, aleshores per tot $n, m \in \omega$

$$ma + nb \asymp a \asymp b \quad \text{o} \quad ma + nb \ll a, b.$$

Direm que un grup totalment ordenat **G** és **arquimedià** si, i només si, per tot $0 \neq a, b \in G$, $a \asymp b$.

Teorema 9.10 (Teorema de Hölder) [4, pàg 49] *Tot grup totalment ordenat arquimedià és isomorf a un subgrup de* **R**. □

Teorema 9.11 [45, pàg. 104] *Tot grup abelià totalment ordenat finitament generat és isomorf a un producte lexicogràfic finit de subgrups de* **R** *finitament generats.* □

El nostre objectiu és poder submergir un grup abelià totalment ordenat en un ultraproducte de **Z** de manera que si tinc un element distingit, aquest conservi totes les propietats de divisibilitat.

Teorema 9.12 *Siguin* **G** *un subgrup de* **R** *finitament generat, $\mathcal{F}$ un ultrafiltre no principal sobre ω arbitrari i $\alpha \in \mathbf{Z}^\omega$ una successió estrictament creixent ($\alpha(i) < \alpha(j)$ si $i < j$). Si definim $\beta \in \mathbf{Z}^\omega$:*

$$\beta(j) \;=\; \textit{mín}\{p \in \omega : p \textit{ primer i } p \geq \alpha(j)\} \textit{ per tot } j \in \omega. \qquad (9.1)$$

aleshores per tot element $0 < b \in G$ que no tingui divisors llevat de 1, existeix una immersió de grup totalment ordenat $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ que satisfà les següents condicions:

(i) Per tot $0 \neq q \in G$, $h(q) \asymp \alpha/\mathcal{F}$;

(ii) $h(b) = \beta/\mathcal{F}$, en conseqüència, $h(b)$ no té divisors llevat de 1;

(iii) Per tot $g \in G$ existeix $\gamma \in h(g)$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{\gamma(j)}{\beta(j)} = \dfrac{g}{b}$.

Prova: Pel corol.lari 9.9, $\mathbf{G}$ admet una base finita. Com que b no té divisors llevat de 1, sense pèrdua de generalitat podem prendre com a base $B = \{b = e_1, \ldots, e_m\}$ amb $e_i > 0$ per tot $1 \leq i \leq m$. Demostrem el teorema per inducció sobre m, el rang de $\mathbf{G}$.
Si $m = 1$, aleshores qualsevol $g \in G$ es pot expressar de forma única com $g = m_g b$, $m_g \in Z$. L'aplicació $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ definida per

$$g = m_g b \mapsto h(g) = (m_g\beta)/\mathcal{F} = m_g(\beta/\mathcal{F}) \tag{9.2}$$

és una immersió que preserva l'ordre. És ben sabut que donat un enter positiu n, sempre existeix un nombre primer p tal que $n < p \leq 2n$ (vegeu per exemple [48, teorema 6.24]). En conseqüència, es dedueix de (9.1) que $\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$, per tant $\alpha/\mathcal{F} \asymp \beta/\mathcal{F}$. Per tant, per tot $0 \neq g \in G$

$$h(g) = m_g(\beta/\mathcal{F}) \asymp \alpha$$

i es satisfà la condició (i). Sigui p un nombre primer qualsevol, per (9.1), el conjunt $J_p = \{j \in \omega \mid p \text{ no divideix } \beta(j)\}$ és un conjunt cofinit de ω, per tant $J_p \in \mathcal{F}$ ja que tot ultrafiltre no principal de I conté els subconjunts de I cofinits. Així, $h(b) = \beta/\mathcal{F}$ no és divisible per cap nombre primer, i h satisfà la condició (ii). Per qualsevol $g = m_g b \in G$ definim $\gamma = m_g\beta$. Aleshores $\gamma \in h(g)$ i

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma(j)}{\beta(j)} = \lim_{j\to\infty} \frac{m_g\beta(j)}{\beta(j)} = m_g = \frac{g}{b},$$

satisfent la condició (iii).
Si $\mathbf{G}$ te rang $m = n + 1$. Considerem la base

$$B = \{b = e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}.$$

Sigui $\mathbf{G}^b$ el subgrup de $\mathbf{G}$ generat per $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Per hipòtesi d'inducció, existeix una immersió de grup totalment ordenat:

$$h^b\colon \mathbf{G}^b \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F} \tag{9.3}$$

que satisfà (amb les modificacions adequades) les condicions (i)-(iii). Definim la següent successió $\eta \in \mathbf{Z}^\omega$

$$\eta(j) = \min\{m \in \omega \mid m \geq \beta(j)\frac{e_{n+1}}{b}\}, \text{ per tot } j \in \omega \tag{9.4}$$

Observem que $\eta(j) > 0$ per tot $j \in \omega$. Estenem h^b a l'homomorfisme de grup totalment ordenat $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ de la següent manera:

$$h(e_{n+1}) = \eta/\mathcal{F}, \quad h(e_i) = h^\flat(e_i), \qquad \text{per tot } 1 \leq i \leq n. \tag{9.5}$$

$h(b) = h(e_1) = h^\flat(e_1) = \beta/\mathcal{F}$ i per tant no té divisors llevat de 1 i h satisfà la condició (ii). Anem a veure que h satisfà la condició (iii). Per definició, $\dfrac{\eta(j)-1}{\beta(j)} < \dfrac{e_{n+1}}{b} \leq \dfrac{\eta(j)}{\beta(j)}$, per tant, $\left|\dfrac{\eta(j)}{\beta(j)} - \dfrac{e_{n+1}}{b}\right| < \dfrac{1}{\beta(j)}$, i de (9.1) deduïm,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\eta(j)}{\beta(j)} = \frac{e_{n+1}}{b}. \tag{9.6}$$

Per tot $g \in G$ existeix un únic element $g^\flat \in G^\flat$ i un únic enter m_g tal que $g = m_g e_{n+1} + g^\flat$. Per hipòtesi d'inducció existeix $\gamma^\flat \in h^\flat(g^\flat)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma^\flat(j)}{\beta(j)} = \frac{g^\flat}{b}.$$

Definim $\gamma \in h(g)$ com: $\gamma = m_g\eta + \gamma^\flat$. Aleshores

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma(j)}{\beta(j)} = m_g \lim_{j\to\infty} \frac{\eta(j)}{\beta(j)} + \lim_{j\to\infty} \frac{\gamma^\flat(j)}{\beta(j)} = m_g \frac{e_{n+1}}{b} + \frac{g^\flat}{b} = \frac{g}{b},$$

i per tant h satisfà la condició (iii).
Suposem $0 < q \in G$. Com que l'ordre en $\mathbf{G}$ és l'heredat de $\mathbf{R}$ i $b > 0$, $\mathbf{G}$ és arquimedià i per tant existeixen dos nombres naturals $m, k \geq 1$ tals que $mq > b$ i $kb > q$. Per la condició (iii) existeix $\chi \in h(q)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m\chi(j)}{\beta(j)} = \frac{mq}{b} > 1 \quad \text{i} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{\chi(j)}{k\beta(j)} = \frac{q}{kb} < 1.$$

D'on deduïm que per un j *suficientment gran*, $m\chi(j) > \beta(j)$ i $k\beta(j) > \chi(j)$. Per tant, per hipòptesi d'inducció,

$$h(q) = \chi/\mathcal{F} \asymp \beta/\mathcal{F} = h(b) = h^\flat(b) \asymp \alpha/\mathcal{F},$$

i h satisfà la condició (i).
Donat que h satisfà (iii) i $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ és un grup *totalment ordenat*, usant un argument anàleg a l'anterior es demostra fàcilment que h preserva l'ordre. Per demostrar que és immersió, observem que, per hipòtesi d'inducció, $h^\flat$ és una immersió de grup totalment ordenat, i per (9.5), el conjunt $\{h(e_1), \ldots, h(e_n)\}$ és $\mathbf{Z}$-independent en $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$. Només ens manca demostrar, doncs, que $h(e_{n+1})$ és $\mathbf{Z}$-independent del conjunt $\{h(e_1), \ldots, h(e_n)\}$. Suposem que $mh(e_{n+1}) =$

$h(r)$ per algun $r \in G^b$, i $m \neq 0$. Com que h satisfà (iii), aleshores existeix $\rho \in h(r)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\rho(j)}{\beta(j)} = \frac{r}{b}. \tag{9.7}$$

Necessàriament $\frac{me_{n+1}}{b} \neq \frac{r}{b}$, ja que la igualtat $me_{n+1} = r$ contradiu la $\mathbf{Z}$-independència de $B = \{b, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$. Per (9.6),

$$\lim_{j\to\infty} \frac{m\eta(j)}{\beta(j)} = \frac{me_{n+1}}{b},$$

i aleshores de (9.7) deduïm que per un j suficientment gran $m\eta(j) \neq \rho(j)$. Com que $\mathcal{F}$ és no principal, aleshores $m\eta/\mathcal{F} \neq \rho/\mathcal{F}$, per tant, $mh(e_{n+1}) = m\eta/\mathcal{F} \neq \rho/\mathcal{F} = h(r)$, contradient la primera hipòtesi. En conseqüència h és immersió de grup totalment ordenat. □

Corol.lari 9.13 *Siguin* $\mathbf{G}$ *un subgrup de* $\mathbf{R}$ *finitament generat,* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltre no principal sobre* ω*. Aleshores per tota* $\alpha \in \mathbf{Z}^\omega$ *successió estrictament creixent i tot element* $b \in G$*, existeix una immersió de grup totalment ordenat* $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ *tal que* $h(b)$ *té exactament els mateixos divisors en* $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ *que* b *té en* $\mathbf{G}$*, i per quasevol* $0 \neq g \in G$*,* $h(g) \asymp \alpha/\mathcal{F}$*.* □

Teorema 9.14 *Siguin* $\mathbf{G}$ *un grup totalment ordenat finitament generat i* $b \in G$*. Si* $\mathcal{F}$ *és un ultrafiltre no principal sobre* ω*, aleshores existeix una immersió de grup totalment ordenat de* $\mathbf{G}$ *en* $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ *de manera que la imatge de* b *té exactament els mateixos divisors en* $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ *que els que té* b *en* $\mathbf{G}$*.*

Prova : Pel teorema 9.11, sense pèrdua de generalitat podem suposar que $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{G}_n$, on $\mathbf{G}_i \subseteq \mathbf{R}$ són subgrups finitament generats. Suposem $0 < b \in G$. Considerem la següent successió $\alpha \in \mathbf{Z}^\omega$estrictament creixent definida per:

$$\alpha = (1, 2, 3, \ldots). \tag{9.8}$$

Afirmem que: existeix una immersió $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ que satisfà les següents condicions:

(a) Existeix $\zeta \in \mathbf{Z}^\omega$ estrictament creixent, tal que per tot $g \in G$, $h(g) \ll \zeta/\mathcal{F}$,

(b) $h(b)$ té exactament els mateixos divisors en $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ que els que té b en $\mathbf{G}$.

Demostrem l'afirmació per inducció sobre n,

Si $n = 1$, usant el corol.lari 9.13 obtenim una immersió $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ tal que $h(b)$ té els mateixos divisors que b, i per qualsevol $0 \neq g \in G$, $h(g) \asymp \alpha/\mathcal{F}$. Per tant, si prenem $\zeta = (1, 4, 9, 16, \ldots)$, aleshores $\alpha/\mathcal{F} \ll \zeta/\mathcal{F}$.

Si n=m+1, aleshores

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{G}_{m+1}, \tag{9.9}$$

Identifiquem (mòdul isomorfisme) $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_1 \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$. Escrivim $\mathbf{G}'$ enlloc de $\{0\} \otimes \mathbf{G}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{G}_{m+1}$. Qualsevol $g \in G$ s'expressa de forma única com $g = g_1 + g'$, amb $g_1 \in G_1$ i $g' \in G'$. Sigui $d \geq 1$ el més gran divisor de $b = b_1 + b'$. L'existència ve donada pel fet que $\mathbf{G}$ és finitament generat. Sigui $c = b/d$, per construcció c no té divisors llevat de 1. Com ja hem esmentat anteriorment, existeixen $c_1 \in G_1$ i $c' \in G'$ unívocament determinats tals que

$$c = \frac{b}{d} = \frac{b_1}{d} + \frac{b'}{d} = c_1 + c'. \tag{9.10}$$

Si ens oblidem dels casos trivials, podem suposar que c_1 i c' són ambdós diferents de 0. Per tant, són $\mathbf{Z}$-independents. Per hipòtesi d'inducció, existeix una immersió $h'\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ que satisfà les següents condicions::

(a') Existeix $\zeta' \in \mathbf{Z}^\omega$ un successió estrictament creixent tal que per qualsevol $l \in G'$, $h'(l) \ll \zeta'/\mathcal{F}$,

(b') $h'(c')$ té exactament els mateixos divisors en $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ que els que té c' en $\mathbf{G}'$.

Pel corol.lari 9.13, podem obtenir una immersió $h_1\colon \mathbf{G}_1 \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ tal que

(i) Per qualsevol $0 \neq g_1 \in G_1$, $h_1(g_1) \asymp \zeta'/\mathcal{F}$,

(ii) $h_1(c_1)$ té les mateixos divisors en $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ que els que té c_1 en $\mathbf{G}_1$.

Per tot $a \in G$, definim

$$\mathrm{Div}(a) = \{n \in \omega : n \text{ divideix } a\}. \tag{9.11}$$

De (9.10) i la $\mathbf{Z}$-independència de c_1 i c', deduïm que

$$\mathrm{Div}(c_1) \cap \mathrm{Div}(c') = \mathrm{Div}(c) = \{1\}. \tag{9.12}$$

Considerem el conjunt P definit per:

$$P = \{p \in \omega \mid p \text{ és primer i } p \notin \mathrm{Div}(c_1) \cup \mathrm{Div}(c')\}. \tag{9.13}$$

Observem que P és un subconjunt infinit de ω. Si ordenem P amb l'odre natural de ω, podem escriure $P = \{p_0 < p_1 < \ldots\}$. Sigui $\pi \in \mathbf{Z}^\omega$ la successió estrictament creixen definida de la següen forma

$$\pi(j) = p_0 p_1 \cdots p_j, \text{ per tot } j \in \omega \tag{9.14}$$

Definim en $\mathbf{Z}^\omega$ la següent operació binària: $\bullet\colon \mathbf{Z}^\omega \times \mathbf{Z}^\omega \to \mathbf{Z}^\omega$

$$(\mu, \nu) \mapsto \mu \bullet \nu = (\mu(j)\nu(j))_{j\in\omega}.$$

Això ens permet definir de forma natural una operació binària en $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ (que també denotem per $\bullet$), estipulant que per tot $\mu, \nu \in \mathbf{Z}^\omega$, $\mu/\mathcal{F} \bullet \nu/\mathcal{F} = (\mu \bullet \nu)/\mathcal{F}$. Considerem l'aplicació $h\colon \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$ definida per

$$h(g) = \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(g_1) + h'(g'), \tag{9.15}$$

per tot $g = g_1 + g' \in G$, amb $g_1 \in G_1$ i $g' \in G'$. Demostrarem que

$$h(g) \ll (\alpha \bullet \pi \bullet \zeta')/\mathcal{F}. \tag{9.16}$$

Si $g_1 = 0$, aleshores de la condició (a'), juntament amb (ii) i (9.14), obtenim la conclusió desitjada. Si $g_1 \neq 0$ aleshores de les condicions (a') i (i) obtenim

$$h(g') = h'(g') \ll \zeta'/\mathcal{F} \asymp h_1(g_1) \ll \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(g_1) = h(g_1). \tag{9.17}$$

Com que $h'(g') \ll \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(g_1)$, per (9.15) tenim que

$$h(g_1) = \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(g_1) \asymp \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(g_1) + h'(g') = h(g). \tag{9.18}$$

Ara, usant (i),

$$h(g) \asymp \pi/\mathcal{F} \bullet \zeta'/\mathcal{F} \ll \alpha/\mathcal{F} \bullet (\pi/\mathcal{F} \bullet \zeta'/\mathcal{F}), \tag{9.19}$$

per tant deduïm (9.16). I h satisfà la condició (a), ja que $(\alpha \bullet \pi \bullet \zeta')$ és una successió estrictament creixent.
Volem veure que h és una immersió. h és homomorfisme ja que h_1 i h' són homomorfismes. Per (9.17), $h(G_1) \cap h(G') = \{0\}$ i per tant com que $h(G_1) = \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(G_1)$, $h(G') = h'(G')$, i h_1 i h' són injectives, aleshores h és injectiva. Sigui $0 < g \in G$, $g = g_1 + g'$, amb $g_1 \in G_1$, $g' \in G'$. Si $g_1 = 0$, aleshores $g' > 0$, per tant per (9.15), $h(g) = h'(g') > 0$ ja que h' preserva l'ordre. Si $g_1 > 0$, aleshores $h_1(g_1) > 0$ perquè h_1 preserva l'ordre.

A fortiori, $\pi/\mathcal{F} \bullet h_1(g_1) > 0$.Com que per (9.17), $h(g') \ll h(g_1)$, aleshores de (9.15), arribem a la conclusió que $h(g) > 0$.
Volem demostrar que

(iii) Si un nombre primer p divideix $h(c')$ i $\pi/\mathcal{F} \bullet h_1(c_1)$, aleshores p divideix $h_1(c_1)$.

En efecte, per la condició (b') juntament amb (9.15), p divideix c', per tant $p \notin P$, i per tot $j \in \omega$, p no divideix $\pi(j)$. En conseqüència p no divideix $\pi/\mathcal{F}$, per tant necessàriament p ha de dividir $h_1(c_1)$, com desitjàvem.
Un cop demostrat (iii), estem en situació de demostrat que

$$h(c) = \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(c_1) + h'(c') = \pi/\mathcal{F} \bullet h_1(c_1) + h(c')$$

no té divisors llevat de 1. Com que h és una immersió $h(c_1)$ i $h(c')$ són elements $\mathbf{Z}$-independents de $\mathbf{Z}^\omega/\mathcal{F}$, per tant per (9.15), també ho són $\pi/\mathcal{F} \bullet h_1(c_1)$ i $h'(c')$. Suposem que existeix un nombre primer $p \in \mathrm{Div}(h(c))$ aleshores, de les condicions (ii) i (iii),

$$p \in \mathrm{Div}(\pi/\mathcal{F} \bullet h_1(c_1)) \cap \mathrm{Div}(h(c')) \subseteq \mathrm{Div}(h_1(c_1)) \cap \mathrm{Div}(h'(c'))$$

$$= \mathrm{Div}(c_1) \cap \mathrm{Div}(c') = \{1\},$$

ja que l'únic divisor de c és 1, i c_1 i c' són $\mathbf{Z}$-independents. Hem arribat doncs a una contradicció, en conseqüència $h(c)$ no té divisors llevat de 1. Obviament $h(b) = dh(c)$ satisfà la condició (b), i ja hem demostrat totes les condicions desitjades.
El cas $b < 0$ és similar i el cas $b = 0$ es dedueix trivialment. □

Hem assolit el nostre objectiu per grups abelians totalment ordenats finitament generats. Via la caracterització de les MV-cadenes de rang n, recuperem el treball de classificació de les quasivarietats

Corol.lari 9.15 *Sigui* $\mathbf{A}$ *una MV-cadena no simple de rang* n*, finitament generada. Si* $d = \textit{màx}\{m \in \omega : \mathbf{L}_m \in \mathbb{IS}(\mathbf{A})\}$*, aleshores*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\mathbf{L}_n^d)$$

Prova : Si $\mathbf{A}$ és una cadena de rang n no simple, aleshores pel teorema 5.6, $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_n^{G,b}$, per algun $\mathbf{G}$ grup totalment ordenat no trivial i $0 < b \in G$. Com que $\mathbf{A}$ és finitament generada, aleshores $\mathbf{G}$ és també finitament generat. Cal remarcar que com que $\mathbf{L}_d \subseteq \mathbf{A}$, aleshores b és divisible per d i no ho és per cap altre divisor de n que no sigui divisor de d. Pel teorema anterior, podem trobar una immersió

$$h_{\mathcal{F}} : \mathbf{G} \to \mathbf{Z}^{\omega}/\mathcal{F}$$

tal que $h_{\mathcal{F}}(b)$ té exactament els mateixos divisors que b. Considerem la immersió de MV-àlgebres:

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n^{G,b} & \to & \mathbf{Ł}_n^{Z^{\omega}/\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}(b)} \\ (\frac{r}{n}, a) & \mapsto & (\frac{r}{n}, h_{\mathcal{F}}(a)) \end{array}$$

Sigui $\mathrm{Div}(b)^c = \omega \setminus \mathrm{Div}(b)$. Com que $\mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(b)^c$ és un conjunt finit i $h_{\mathcal{F}}(b) > 0/\mathcal{F}$, aleshores existeix $\beta \in h_{\mathcal{F}}(b)$, tal que $k \not| \beta(i) > 0$ per tot $k \in \mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(b)^c$ i per tot $i \in \omega$. Pel lema 4.6, $\mathbf{Ł}_n^{Z^{\omega}/\mathcal{F}, h_{\mathcal{F}}(b)}$ és isomorf a $\prod_{i \in I} \mathbf{Ł}_n^{\beta(i)}/\mathcal{F}$. Per tant

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{Ł}_n^{\beta(i)} : i \in \omega\})$$

Pel teorema 9.6, per tot $i \in \omega$, $\mathbf{Ł}_n^{\beta(i)} \subseteq \mathbf{Ł}_n^{d_i}$, on $d_i = m.c.d.(\beta(i), n)$. I com que per tot $k \in \mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(b)^c$ i per tot $i \in \omega$, $k \not| \beta(i)$, aleshores $d_i \in \mathrm{Div}(n) \cap \mathrm{Div}(b) = \mathrm{Div}(d)$ per tot $i \in \omega$. Aplicant doncs el lema 9.5, tenim que per tot $i \in \omega$, $\mathbf{Ł}_n^{d_i} \subseteq \mathbf{Ł}_n^{d}$. En conseqüència hem demostrat que

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISIP}_U\mathbb{IS}(\{\mathbf{Ł}_n^{d_i} : i \in \omega\}) \subseteq \mathbb{ISIP}_U\mathbb{ISIS}(\mathbf{Ł}_n^{d}) = \mathbb{ISP}_U(\mathbf{Ł}_n^{d})$$

□

Finalment obtenim una caracterització de les quasivarietats generades per una cadena de rang n.

Teorema 9.16 *Sigui* $\mathbf{A}$ *una MV-cadena no simple de rang* n. *Si* $d =$ *màx*$\{k \in \omega : \mathbf{Ł}_k \in \mathbb{IS}(\mathbf{A})\}$, *aleshores*

$$\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^{d})$$

Prova : Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $\mathbf{A} = \mathbf{Ł}_n^{G,b}$, per algun $\mathbf{G}$ no trivial i $0 < b \in G$. Com que $\mathbf{Ł}_d \subseteq \mathbf{A}$,, aleshores b és divisible per d i per tant pel lema 9.5, $\mathbf{Ł}_n^{d} \in \mathbb{IS}(\mathbf{A})$. Trivialment

$$\mathbb{Q}(\mathbf{Ł}_n^{d}) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{A})$$

Per veure l'altra inclusió recordem que pel teorema 1.1,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ finitament generada}\})$$

Observem que tota subàlgebra finitament generada d'$\mathbf{A}$ es pot submergir en una subàlgebra finitament generada d'$\mathbf{A}$ de rang n. Per tant,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U\mathbb{IS}(\{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ finitament generada i } rank(\mathbf{B}) = n\})$$

Sigui $\mathbf{B} \in \{\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ finitament generada i } rank(\mathbf{B}) = n\}$. Pel corol.lari 9.15, $\mathbf{B} \in \mathbb{ISP}_U(\mathbf{L}_n^{d_B})$ on $d_B = \text{màx}\{k \in \omega : \mathbf{L}_k \in \mathbf{B}\}$. Com que $d = \text{màx}\{k \in \omega : \mathbf{L}_k \in \mathbf{A}\}$, aleshores $d_B|d$ i per tant pel lema 9.5, $\mathbf{L}_n^{d_B} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}_n^d)$. Per tant hem demostrat que

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U\mathbb{ISISP}_U\mathbb{IS}(\mathbf{L}_n^d) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{L}_n^d)$$

□

Lema 9.17 *Siguin $d_1, d_2, n \in \omega$ tals que $d_i|n$ per $i = 1, 2$ i $d_1 \neq d_2$. Aleshores*

$$\mathbb{Q}(\mathbf{L}_n^{d_1}) \neq \mathbb{Q}(\mathbf{L}_n^{d_2}).$$

Prova : Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $d_1 \not| d_2$. Per tant $\mathbf{L}_{d_1} \notin \mathbb{IS}(\mathbf{L}_n^{d_2})$. Pel lema 3.35, $\mathbf{L}_n^{d_2}$ satisfà la quasiequació:

$$(d_1 - 1)(\neg x) \approx x \Rightarrow x \approx 1,$$

mentre que en $\mathbf{L}_n^{d_1}$ l'element $(\frac{d_1 - 1}{d_1}, d_1 - 1) \in \mathbf{L}_n^{d_1}$ satisfà

$$(d-1)(\neg(\frac{d_1 - 1}{d_1}, d_1 - 1)) = (d-1)(\frac{1}{d_1}, 1) = (\frac{d_1 - 1}{d_1}, d_1 - 1)$$

i $(\frac{d_1 - 1}{d_1}, d_1 - 1) \neq (1, d_1)$. Per tant $\mathbf{L}_n^{d_1}$ no satisfà la quasiequació anterior i per tant $\mathbb{Q}(\mathbf{L}_n^{d_1}) \neq \mathbb{Q}(\mathbf{L}_n^{d_2})$. □

Corol.lari 9.18 *La quasivarietat generada per una MV-cadena $\mathbf{A}$ no simple de rang finit ve determinada pel rang d'$\mathbf{A}$ i per $d = \text{màx}\{m \in \omega : \mathbf{L}_m \in \mathbb{IS}(\mathbf{A})\}$.* □

Corol.lari 9.19 *Si $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són dues MV-cadenes no simples amb el mateix rang finit, aleshores*

$$\mathbb{Q}(\mathbf{A}) = \mathbb{Q}(\mathbf{B})$$

si, i només si,

$$\{\mathbf{L}_m \in \mathbb{IS}(\mathbf{A})\} = \{\mathbf{L}_m \in \mathbb{IS}(\mathbf{B})\} \quad \square$$

9.3 Axiomatització

Pel teorema 9.16, si $\mathbb{K}$ és una quasivarietat congruent distributiva generada per MV-cadenes de rang finit, aleshores existeixen $\{n_i \in \omega : i \in I\}$, $\{m_j \in \omega : j \in J\}$ i per tot $i \in I$, $\beta(i) \subseteq \mathrm{Div}(n_i)$ tal que

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} i \in I\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J\})$$

amb $d_{ik} \in \beta(i)$ per tot $i \in I$ i $k \in \omega$. Per estudiar les axiomatitzacions d'aquestes quasivarietats ens ajudarem d'un resultat d'àlgebra universal.

Teorema 9.20 [29, teorema 3.7] *Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat amb EDPM de tipus finit. Aleshores donada $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{K}_{FSI}$ les següents condicions són equivalents:*

1. *$\mathbb{Q}(\mathbb{M})$ és finitament axiomatitzable.*
2. *$\mathbb{ISP}_U(\mathbb{M})$ és estrictament elemental.* □

Si adaptem aquest resultat al nostre cas, obtenim:

Teorema 9.21 $\mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} i \in I\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J\})$ *és finitament axiomatitzable si, i només si,* $\mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} i \in I\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J\})$ *és finitament axiomatitzable.* □

Ens restringim ara, a les quasivarietats que no generen com a varietat tota la classe de les MV-àlgebres. Pel teorema 6.4, $\mathbb{V}(\mathbb{K})$ només conté un nombre finit de $\mathbf{Ł}_n$'s, per tant,

9.22 *$\mathbb{K}$ és una quasivarietat congruent distributiva tal que $\mathbb{V}(\mathbb{K}) \neq \mathbb{W}$, si, i només si, existeixen $\{n_i \in \omega : i < r\}$ i $\{m_j \in \omega : j < s\}$ i per tot $i < r$, $\beta(i) \subseteq \mathrm{Div}(n_i)$ tal que*

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\}).$$

amb $d_{ik} \in \beta(i)$, per tot $i < r$ per tot $k < l_i < n_i$.

Teorema 9.23 $\mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\})$ *és una classe universal finitament axiomatitzable.*

Prova : Obviament és universal ja que és tancada per $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{P}_U$. Donarem una axiomatització universal efectiva: Recordem que en el capítol 6 hem vist que donada una subvarietat pròpia $\mathbb{K}$ de $\mathbb{W}$, podem obtenir-ne una axiomatització afegint-hi a l'axiomàtica de $\mathbb{W}$ un sol axioma del tipus $\varphi(x) \approx 1$ que denotem per $\alpha_{\mathbb{K}}(x) \approx 1$. Sigui

$$D = \{d \in \omega : d|n_i \text{ per algun } i < r\} \cup \{d \in \omega : d|m_j \text{ per algun } j < s\}.$$

Per cada $d \in D$, considerem el conjunt $F_d = \{d_{ik} : d|d_{ik}\} \cup \{m_j : d|m_j\}$. L'axiomàtica ve donada pels següents axiomes:

1. **MV1.**, **MV2.**, **MV3.**, **MV4.**, **MV5.** i **MV6.**
2. $\forall x \forall y\ [(\neg x \oplus y \approx 1) \text{ o } (\neg y \oplus x \approx 1)]$.
3. $\forall x\ \alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i}: i<r\in\omega\}\cup\{\mathbf{L}_{m_j}; j<s\})}(x) \approx 1$.

   Per cada $d \in D$ tal que $F_d \neq \emptyset$,

   - $\forall x \forall y\ (d-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow v_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i}: i\in I_d\}\cup\{\mathbf{L}_{m_j}; j\in J_d\})}(y) \approx 1$,
     on $I_d = \{i < r :$ existeix $d_{ik} \in F_d\}$ i $J_d = \{j < s : m_j \in F_d\}$

   Per cada $d \in D$ tal que $F_d = \emptyset$,

   - $\forall x\ (d-1)(\neg x) \not\approx x$

Totes les àlgebres de $\{\mathbf{L}^{d_{ik}}_{n_i} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{L}_{m_j}; j < s\}$ satisfan els axiomes de 1, 2 i 3, ja que són cadenes i pertanyen a la varietat $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i} : i < r \in \omega\} \cup \{\mathbf{L}_{m_j}; j < s\})$.
Sigui $\mathbf{L}^{e}_{n} \in \{\mathbf{L}^{d_{ik}}_{n_i} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{L}_{m_j}; j < s\}$. Com que $d_{ik} = e|n = n_i$ per algun $i \in I$ i algun $k < n_i$, aleshores $e \in D$. Sigui $d \in D$. Si $d \not| e$, aleshores $\mathbf{L}_d \not\subseteq \mathbf{L}^{e}_{n}$ i per la propietat 3.35, no existeix cap element $a \in \mathrm{L}^{e}_{n}$ tal que $(d-1)(\neg a) = a$. Per tant satisfà els axiomes

$$\forall x (d-1)(\neg x) \not\approx x$$

$$\forall x \forall y\ (d-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow \alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i}: i\in I_d\}\cup\{\mathbf{L}_{m_j}; j\in J_d\})}(y) \approx 1.$$

D'altra banda si $d|e$, tenim que $d_{ik} = e \in F_d \neq \emptyset$. Per tant $i \in I_d \subseteq I_d \neq \emptyset$ i obviament $\mathbf{L}^{d_{ik}}_{n_i} = \mathbf{L}^{e}_{n} \in \mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i} : i \in I_d\} \cup \{\mathbf{L}_{m_j}; j \in J_d\})$. En conseqüència, satisfà $\alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i}: i\in I_d\}\cup\{\mathbf{L}_{m_j}; j\in J_d\})}(y) \approx 1$ i per tant també satisfà l'axioma

$$\forall x \forall y\ (d-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow \alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{L}^{\omega}_{n_i}: i\in I_d\}\cup\{\mathbf{L}_{m_j}; j\in J_d\})}(y) \approx 1.$$

Sigui $\mathbf{Ł}_m \in \{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\}$. Sigui $d \in D$. Si $d \not| m$, aleshores $\mathbf{Ł}_d \not\subseteq \mathbf{Ł}_m$ i per tant, fent servir el mateix argument que en el cas anterior, $\mathbf{Ł}_m$ satisfà els axiomes

$$\forall x (d-1)(\neg x) \not\approx x$$

$$\forall x \forall y \ (d-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow \alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{\omega}: i \in I_d\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J_d\})}(y) \approx 1.$$

D'altra banda si $d|m$, tenim que $m_j = m \in F_d \neq \emptyset$ i per tant $j \in J_d$ i anàlogament al cas anterior tenim que satisfà l'axioma

$$\forall x \forall y \ (d-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow \alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{\omega}: i \in I_d\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J_d\})}(y) \approx 1.$$

Com que tots els axiomes són sentències universals i

$$\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\}$$

satisfan tots els axiomes, aleshores

$$\mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\})$$

també satisfà els axiomes.

Sigui $\mathbf{A}$ una àlgebra que satisfaci els axiomes donats. Com que satisfà 1,2 i 3, $\mathbf{A}$ és una MV-cadena i $\mathbf{A} \in \mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{\omega} : i < r \in \omega\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\})$. Per tant $rank(\mathbf{A}) = n \in D$. Sigui $k =$ màx$\{m \in D : \mathbf{Ł}_m \subseteq \mathbf{A}\}$. Si $\mathbf{A}$ és simple aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_k = \mathbf{Ł}_n$. Com que $\mathbf{A}$ satisfà els axiomes

$$(d-1)(\neg x) \not\approx x, \quad \text{per tot } d \in D \ \text{ tal que } F_d = \emptyset,$$

aleshores $F_n \neq \emptyset$ i per tant $I_n \cup J_n \neq \emptyset$. Per tant,

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{Ł}_n \in \mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{\omega} : i \in I_n\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J_n\}),$$

ja que satisfà la quasiequació

$$\forall x \forall y \ (n-1)(\neg x) \approx x \Rightarrow \alpha_{\mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{\omega}: i \in I_n\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J_n\})}(y) \approx 1.$$

Ara bé, com que per tot $i \in I_n$ existeix $t < l_i$ tal que $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{it}}$, i per tot $j \in J_n$, $\mathbf{Ł}_n \subseteq \mathbf{Ł}_{m_j}$, aleshores

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\}).$$

Si $\mathbf{A}$ no és simple, aleshores per la demostració del teorema 9.16, tenim que $\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\mathbf{Ł}_n^k)$. Fent servir el mateix argument d'abans tenim que $F_k \neq \emptyset$ i que $\mathbf{Ł}_n^k \in \mathbb{V}(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^\omega : i \in I_k\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j \in J_k\})$. A més, com que $\mathbf{Ł}_n^k$ no és simple, $I_k \neq \emptyset$ i existeix $i_0 \in I_k$ tal que $n|n_{i_0}$ i per tant com que per tot $i \in I_k$ existeix $t < l_i$ tal que $k|d_{it}$, aleshores tenim que $\mathbf{Ł}_n^k \subseteq \mathbf{Ł}_{n_{i_0}}^{d_{i_0 t_{i_0}}}$. Per tant

$$\mathbf{A} \in \mathbb{ISP}_U(\{\mathbf{Ł}_{n_i}^{d_{ik}} : i < r \in \omega, k < l_i < n_i\} \cup \{\mathbf{Ł}_{m_j}; j < s\}). \qquad \square$$

Així doncs dels teoremes 9.23 i 9.21 deduïm:

Corol.lari 9.24 *Tota quasivarietat $\mathbb{K}$ congruent distributiva de MV-àlgebres tal que $\mathbb{V}(\mathbb{K}) \neq \mathbb{W}$ és finitament axiomatitzable.* $\square$

Observació : Per obtenir una axiomatització efectiva d'aquestes quasivarietats es pot seguir el treball de Czelakowski i Dziobiak, [29], on donen un procediment per assolir l'axiomàtica d'una quasivarietat a partir dels axiomes de la classe universal, basant-se en el sistema de termes d'interseccions principals per aquesta quasivarietat i en la descomposició de les sentències universals com a conjunció de sentències universals bàsiques.

Capítol 10

Propietats algebraiques

A continuació enunciarem algunes propietats algebraiques de les quasivarietats estudiades. Hem triat aquestes propietats i no unes altres, pel seu equivalent lògic via el procés d'algebrització (vegeu secció 1.3).

10.1 (R)CEP i EDPC(R)

Ja hem esmentat en la secció 3.2 de la memòria que la varietat $\mathbb{W}$ és aritmètica, és a dir congruent distributiva i congruent permutable. A més en [24, 35] s'explicita un terme 2/3-minorador.

$$m(x, y, z) = ((x \odot \neg y) \oplus z) \wedge ((z \odot \neg y) \oplus x) \wedge (x \vee z)$$

D'aquest resultat es dedueix que

10.1 *Tota subvarietat pròpia de* $\mathbb{W}$ *és aritmètica amb terme* 2/3*-minorador* $m(x, y, z)$. □

En particular *tota subvarietat de* $\mathbb{W}$ *és congruent distributiva.* Pel cas de les subquasivarietats, ja hem obtingut anteriorment (corol.lari 9.3) la següent caracterització :

10.2 *Una quasivarietat* $\mathbb{K}$ *de MV-àlgebres és congruent distributiva si, i només si, està generada per MV-cadenes.* □

Gaitan en [36] estudia la propietat $(R)CEP$ en les quasivarietats de MV-àlgebres:

Teorema 10.3 [36]

1. *La varietat $\mathbb{W}$ té la propietat de l'extensió de congruències (CEP). En conseqüència tota subvarietat de $\mathbb{W}$ satisfà la CEP.*

2. *Les úniques quasivarietats de MV-àlgebres congruent distributives que satisfan la propietat (R)CEP són les varietats.*

3. *Una quasivarietat de MV-àlgebres que genera una subvarietat pròpia satisfà la (R)CEP si, i només si, és varietat.* □

Com a conseqüència d'aquests resultats i en el cas de les quasivarietats estudiades en aquesta memòria obtenim:

10.4 *Tota quasivarietat estricta de MV-àlgebres n-acotada no satisfà la (R)CEP* □

10.5 *Tota quasivarietat estricta congruent distributiva no satisfà (R)CEP* □

Recordem que una **funció de discriminació** sobre el conjunt A és una funció $f : A^3 \to A$ que satisfà la següent propietat: Per tot $a, b, c \in A$,

$$f(a,b,c) = \begin{cases} a & \text{si } a \neq b \\ c & \text{si } a = b \end{cases}$$

Una fórmula $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in Fm$ és un **terme discriminador de l'àlgebra A** si, i només si, $\varphi^{\mathbf{A}}$ és una funció de discriminació sobre A. Direm que una varietat d'àlgebres admet **terme discriminador comú (varietat amb terme discriminador)** si, i només si, existeix $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in Fm$ que és terme discriminador de qualsevol àlgebra de la varietat.

Teorema 10.6 [25, teorema 3.8] i [65, pàg. 5] $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_n)$ *és una varietat amb terme discriminador*

$$t_n(x,y,z) = (n((x \odot \neg y) \vee (y \odot \neg x)) \wedge x) \vee (\neg(n((x \odot \neg y) \vee (y \odot \neg x))) \wedge z) \qquad \square$$

Corol.lari 10.7 *Tota varietat del tipus* $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{n_1}, \ldots \mathbf{L}_{n_k}\})$ *és una varietat amb terme discriminador*

$$t_n(x,y,z) = (n((x \odot \neg y) \vee (y \odot \neg x)) \wedge x) \vee (\neg(n((x \odot \neg y) \vee (y \odot \neg x))) \wedge z)$$

on $n = màx\{n_1, \ldots, n_k\}$. □

El següent resultat es pot deduir de [10]

Teorema 10.8 *Una varietat de MV-àlgebres satisfà la propietat de les congruències principals equacionalment definibles (EDPC) si, i només si, és de la forma* $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{n_1}, \ldots \mathbf{L}_{n_k}\})$. □

Prova : Pel corol.lari 10.7, $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{n_1}, \ldots \mathbf{L}_{n_k}\})$ és una varietat amb terme discriminador i com que tota varietat amb terme discriminador satisfà EDPC (vegeu [7, pàg. 201]), aleshores $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{n_1}, \ldots \mathbf{L}_{n_k}\})$ satisfà EDPC.
Per veure el recíproc, sigui $\mathbb{K}$ una varietat de MV-àlgebres no generada per un nombre finit d'àlgebres simples finites, aleshores existeix una cadena $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$ que no és simple. Sigui $a \in \mathbf{Rad}(\mathbf{A}) \setminus \{0\}$. Observem que per tot $n \in \omega$, $\langle a \rangle = \langle na \rangle$, per tant per l'equivalència entre ideals i congruències tenim que $\Theta(a,0) = \Theta(na,0)$. Én particular $(na,0) \in \Theta(a,0)$ per tot $n \in \omega$. Considerem $\bar{\mathrm{a}}, \bar{c} \in A^\omega$ tals que pert tot $n \in \omega$, $\bar{\mathrm{a}}(n) = a$ i $\bar{c}(n) = na$. Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sobre ω no principal i construïm la MV-cadena $\mathbf{A}^\omega/\mathcal{F}$. Per tot $m \in \omega$, $m\bar{\mathrm{a}}/\mathcal{F} < \bar{c}/\mathcal{F}$, per tant $\langle \bar{\mathrm{a}}/\mathcal{F} \rangle \subsetneq \langle \bar{c}/\mathcal{F} \rangle$. En conseqüència $(\bar{c}/\mathcal{F}, \bar{0}/\mathcal{F}) \notin \Theta(\bar{\mathrm{a}}/\mathcal{F}, \bar{0}/\mathcal{F})$.
Si $\mathbb{K}$ satisfà EDPC, aleshores

$$\sigma_i^{\mathbf{A}}(na,0,a,0) = \tau_i^{\mathbf{A}}(na,0,a,0) \quad \text{per tot } n \in \omega \quad \text{i per tot } i < k$$

on $\{\sigma_i(x,y,z,w) \approx \tau_i(x,y,z,w) : i < k\}$ és el conjunt d'equacions definidores de les congruències principals. Per tant

$$\mathbf{A} \models \sigma_i \approx \tau_i[na,0,a,0] \quad \text{per tot } n \in \omega \quad \text{i per tot } i < k.$$

Per tant

$$\mathbf{A}^\omega/\mathcal{F} \models \sigma_i \approx \tau_i[\bar{c}/\mathcal{F}, \bar{0}/\mathcal{F}, \bar{\mathrm{a}}/\mathcal{F}, \bar{0}/\mathcal{F}] \quad \text{per tot } i < k$$

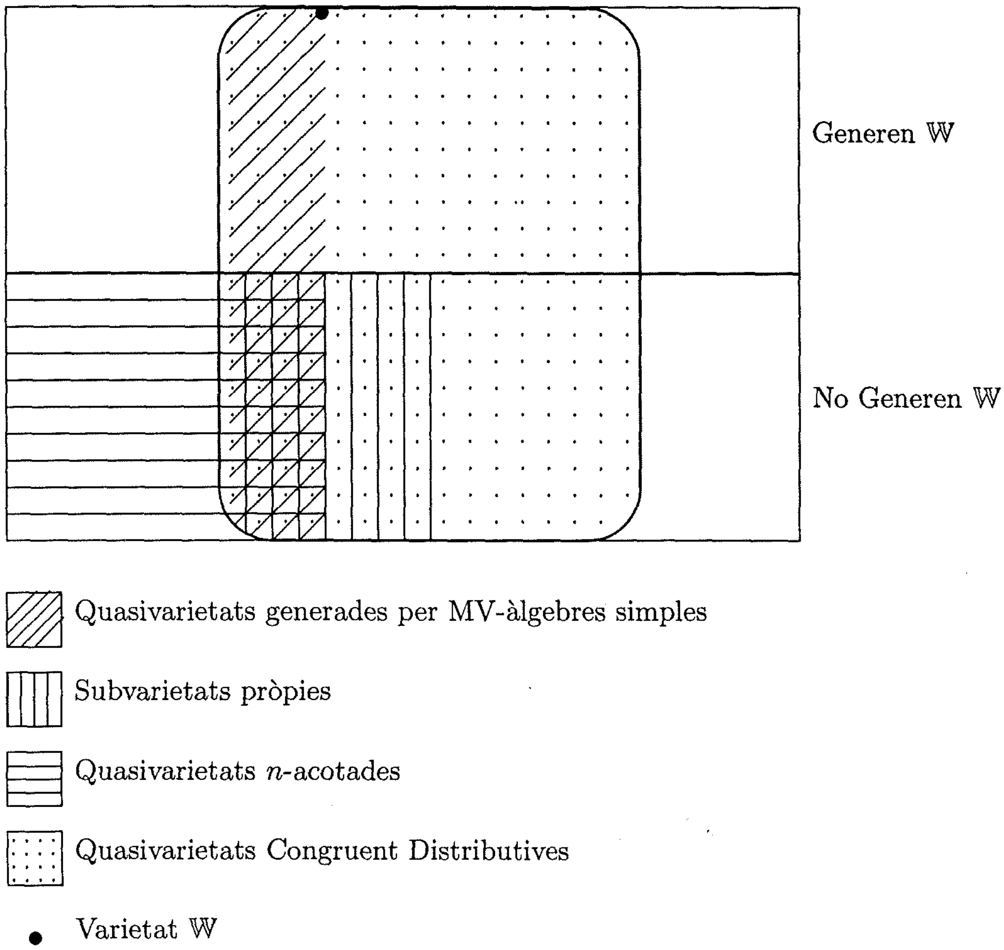
i això contradiu que $(\bar{c}/\mathcal{F}, \bar{0}/\mathcal{F}) \notin \Theta(\bar{\mathrm{a}}/\mathcal{F}, \bar{0}/\mathcal{F})$. □

D'aquest darrer teorema i dels resultats de Gaitan deduïm:

Teorema 10.9 *Les úniques quasivarietats de MV-àlgebres que satisfan EDPC(R) són les varietats* n*-acotades.*

Prova : Pel teorema 8.1 tota varietat n-acotada és del tipus $\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_{n_1}, \ldots \mathbf{L}_{n_k}\})$, en conseqüència pel resultat anterior satisfà EDPC.
Sigui $\mathbb{K}$ una quasivarietat de MV-àlgebres que satisfà EDPC(R), pel teorema 1.5, $\mathbb{K}$ és congruent distributiva i satisfà la (R)CEP. Del teorema 10.3 deduïm que $\mathbb{K}$ és varietat i pel teorema 10.8 i la caracterització de les varietats n-acotades $\mathbb{K}$ és n-acotada. □

Figura 10.1: Quasivarietats de MV-àlgebres.



QUASIVARIETATS DE MV-ÀLGEBRES				
TIPUS	CONG. DIST.	(R)CEP	EDPC(R)	AX.FINITA
Varietats	SI	SI	n-acotades SI no n-acotades NO	SI
Generades per Simples	SI	Varietats SI Estrictes NO	n-acotades SI no n-acotades NO	Varietats SI Estrictes ?
n-acotades	Varietats SI Estrictes NO	Varietats SI Estrictes NO	Varietats SI Estrictes NO	SI
Congruent Distributives	SI$^{\cdot\cdot}$	Varietats SI Estrictes NO	n-acotades SI no n-acotades NO	No generen $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}$ SI Generen $\mathbb{W}$ $\neq \mathbb{W}$?

Part IV

Conclusions

Capítol 11

Extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$

Ja hem vist en el teorema 3.1 que les MV-àlgebres i les àlgebres de Wajsberg són polinomialment equivalents, per tant, si bé les MV-àlgebres no tenen el llenguatge $\mathcal{L} = \{\rightarrow, \neg\}$, sí que podem trobar dues traduccions τ, ν:
$\tau : Fm_{\mathcal{L}}(X) \rightarrow Fm_{\{\oplus,\neg,0\}}(X)$

1. Si $x \in X$, $\tau(x) = x$
2. Si $\varphi, \psi \in Fm_{\mathcal{L}}(X)$, $\tau(\varphi \rightarrow \psi) = \neg\tau(\varphi) \oplus \tau(\psi)$
3. Si $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}(X)$, $\tau(\neg\varphi) = \neg\tau(\varphi)$

$\nu : Fm_{\{\oplus,\neg,0\}}(X) \rightarrow Fm_{\mathcal{L}}(X)$

1. Si $x \in X$, $\nu(x) = x$
2. Si $\xi, \eta \in Fm_{\{\oplus,\neg,0\}}(X)$, $\nu(\xi \oplus \eta) = \neg\nu(\xi) \rightarrow \nu(\eta)$
3. Si $\xi \in Fm_{\{\oplus,\neg,0\}}(X)$, $\nu(\neg\xi) = \neg\nu(\xi)$
4. $\nu(0) = \neg(x \rightarrow x)$

de manera que obtenim dues interpretacions una inversa de l'altra, de les conseqüències equacionals relatives $\models_{W_{alg}}$ i $\models_{\mathbf{W}}$ tals que:

Per tot $\mathbf{\Gamma} \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq_{\{\rightarrow,\neg\}}$,

1. $\mathbf{\Gamma} \models_{W_{alg}} \varphi \approx \psi$ si, i només si $\tau(\mathbf{\Gamma}) \models_{\mathbf{W}} \tau(\varphi) \approx \tau(\psi)$
2. $\varphi \approx \psi =\mid \models_{W_{alg}} \nu(\tau(\varphi)) \approx \nu(\tau(\psi))$

Per tot $\mathbf{\Delta}\cup\{\xi\approx\eta\}\subseteq Eq_{\{\oplus,\neg,0\}}$,

1. $\mathbf{\Delta}\models_{\mathbb{W}}\xi\approx\eta$ si, i només si $\nu(\mathbf{\Delta})\models_{Walg}\nu(\xi)\approx\nu(\eta)$

2. $\xi\approx\eta = \mid\models_{\mathbb{W}} \tau(\nu(\xi))\approx\tau(\nu(\eta))$

on $\tau(\mathbf{\Gamma})=\{\tau(\varphi)\approx\tau(\psi):\varphi\approx\psi\in\mathbf{\Gamma}\}$ i $\nu(\mathbf{\Delta})=\{\nu(\xi)\approx\nu(\eta):\xi\approx\eta\in\mathbf{\Delta}\}$.

Això ens permet afirmar, fent un abús de notació, que la varietat $\mathbb{W}$ és la quasivarietat semàntica equivalent de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ en el llenguatge $\langle\oplus,\neg,0\rangle$ ja que:
Per tot $\Gamma\cup\{\varphi,\psi\}\subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ i tot $\Delta\cup\{\xi,\eta\}\subseteq Fm_{\{\oplus,\neg,0\}}$

1. $\Gamma\vdash_\infty\varphi$ si, i només si, $\{\gamma\approx 1:\gamma\in\Gamma\}\models_{Walg}\varphi\approx 1$ si, i només si, $\{\tau(\gamma)\approx 1:\gamma\in\Gamma\}\models_{\mathbb{W}}\tau(\varphi)\approx 1$

2. $$\begin{aligned}\xi\approx\eta &= \mid\models_{\mathbb{W}} \{\neg\xi\oplus\eta\approx 1,\neg\eta\oplus\xi\approx 1\}\\ &= \mid\models_{\mathbb{W}} \{\nu(\tau(\xi)\to\tau(\eta))\approx 1,\nu(\tau(\eta)\to\tau(\xi))\approx 1\}\end{aligned}$$

En aquest cas el sistema d'equacions definidores és:

$$\{p\approx 1\} = \mid\models_{\mathbb{W}} \{p\approx\neg p\oplus p\} = \{\tau(p)\approx\tau(1)\};$$

el sistema de fórmules d'equivalència:

$$\{\neg p\oplus q,\neg q\oplus p\} = \{\tau(p\to q),\tau(q\to p)\}.$$

En conseqüència el sistema d'equacions definidores i el sistemes de fórmules d'equivalència pel $\{\oplus,\neg,0\rangle\}$ són la traducció (τ) del sistema d'equacions definidores i del sistema de fórmules d'equivalència per $\mathcal{L}$.

Anàlogament al cas de $Walg$, les subquasivarietats de $\mathbb{W}$ són quasivarietats semàntiques equivalents en el llenguatge $\{\oplus,\neg,0\}$ de les respectives extensions finitàries de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$. Per tant, un cop fet l'estudi algebraic d'algunes quasivarietats de MV-àlgebres, via el procés invers d'algebrització obtenim una caracterització d'algunes extensions finitàries del càlcul infinit-valorat de Łukasiewicz.

Recordem que donada una subquasivarietat de MV-àlgebres $\mathbb{K}$ obtenim la següent extensió $\langle\mathcal{L},\{\langle\mathbf{A},\mathbf{1}\rangle:\mathbf{A}\in\mathbb{K}\}\rangle$.
Observació: Entendrem que quan especifiquem el llenguatge $\mathcal{L}$, aleshores en $\langle\mathcal{L},\models_{\{\langle\mathbf{A},\mathbf{1}\rangle:\mathbf{A}\in\mathbb{K}\}}\rangle$, $\mathbf{A}$ és en realitat l'àlgebra de Wajsberg equivalent a $\mathbf{A}\in\mathbb{K}$.
Ja hem vist en la secció 1.2 que si $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_i:i\in I\})$, aleshores de la

definició de submatriu, producte, producte reduït i ultraproducte de matrius tenim que

$$\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1\rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}} \rangle \quad = \quad \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1\rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{ISPP}_U(\{\mathbf{A}_i : i \in I\})\}} \rangle \quad =$$

$$= \quad \langle \mathcal{L}, \models_{\mathbb{ISPP}_U(\{\langle \mathbf{A}_i,1\rangle : i \in I\})} \rangle \quad = \quad \langle \mathcal{L}, \models^f_{\{\langle \mathbf{A}_i,1\rangle : i \in I\}} \rangle$$

El següent esquema ens permet veure les correspondències entre les classes de quasivarietats que hem estudiat i les seves equivalents extensions finitàries.

Extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	**Subquasivarietats de $\mathbb{W}$**
$\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{W}$
$\langle \mathcal{L}, \vdash_{n+1} \rangle$	$\longleftrightarrow$	$\mathbb{V}(\mathbf{Ł}_n)$
Extensions Axiomàtiques de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	Subvarietats de $\mathbb{W}$
Extensions Finitàries No Axiomàtiques de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	Subquasivarietats estrictes de $\mathbb{W}$
Extensions Finitàries Primàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	Subquasivarietats generades per MV-àlgebres simples
Extensions finitàries finitvalorades de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	Subquasivarietats n-acotades
Extensions finitàries Distributives de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$	$\longleftrightarrow$	Subquasivarietats congruent distributives de $\mathbb{W}$

11.1 Extensions axiomàtiques de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$

Recordem que una extensió axiomàtica de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ és tota lògica obtinguda a partir de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ afegint-hi només axiomes i cap regla nova.
Per la propietat 2.10, hi ha un isomorfisme entre les extensions axiomàtiques

de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ i les subvarietats de $\mathbb{W}$. Per la caracterització de les subvarietats de $\mathbb{W}$ i pel teorema 6.15, tenim que tota subvarietat pròpia de $\mathbb{W}$ és del tipus,

$$\mathbb{V}(\{\mathbf{L}_i : i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega : j \in J\}) = \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_i : i \in I\} \cup \{\mathbf{L}_j^\omega : j \in J\}),$$

amb $I, J \subseteq \omega$ finits disjunts. Per tant les extensions axiomàtiques de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ es poden caracteritzar de la següent forma:

Teorema 11.1 *$\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és una extensió axiomàtica pròpia de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ si, i només si existeixen $I, J \subseteq \omega$ dos subconjunts finits disjunts de nombres naturals tals que :*

$$\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle = \langle \mathcal{L}, \models^f_{\{\langle \mathbf{L}_i, 1\rangle : i \in I\} \cup \{\langle \mathbf{L}_j^\omega, 1\rangle : j \in J\}} \rangle \qquad \square$$

Aquest resultat és equivalent al resultat de Komori en [44] en què caracteritza les teories plenament invariants de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$.

Corol.lari 11.2 *El conjunt de les extensions axiomàtiques de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ és numerable.* $\square$

Com que tota varietat de MV-àlgebres és finitament axiomatitzable, aleshores del corol.lari 1.19 deduïm:

Teorema 11.3 [44] *Tota extensió axiomàtica de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ és finitament axiomatitzable.* $\square$

De l'axiomatització de les varietats de MV-àlgebres donada per Panti [63], de l'algorisme d'axiomatització de la secció 2.2 i de la traducció ν abans esmentada, obtenim que tota extensió axiomàtica $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ tal que la seva varietat semàntica equivalent és $\mathbb{K}$, és axiomatitzable per

Ł1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Ł2. $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \nu) \to (\varphi \to \nu))$

Ł3. $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

Ł4. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Ł*. $\nu(\alpha_{\mathbb{K}}(\varphi))$

i la regla **Modus Ponens:** $\langle \{\varphi, \varphi \to \psi\}, \psi \rangle$.

11.2 Extensions finitàries primàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$

Recordem que les lògiques multivalorades de Łukasiewicz, foren introduïdes semànticament a partir de les àlgebres que hem anomenat subàlgebres de Łukasiewicz. Donada una subàlgebra **S** de Łukasiewicz obtenim la lògica S-valorada $\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{S},1 \rangle} \rangle$.

Ja hem vist en el capítol 2 que aquestes lògiques només són finitàries si, i només si, la subàlgebra de Łukasiewicz definidora és finita. I en aquest cas obtenim els càlculs finitvalorats de Łukasiewicz:

$$\langle \mathcal{L}, \models_{\langle \mathbf{L}_n,1 \rangle} \rangle = \langle \mathcal{L}, \vdash_{n+1} \rangle$$

A partir de les lògiques S-valorades, obtenim les lògiques finitàries S-valorades $\langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle \mathbf{S},1 \rangle} \rangle$. Pel teorema 1.7 tenim que

$$\langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle \mathbf{S},1 \rangle} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models^f_{\mathbb{ISPP}_U(\langle \mathbf{S},1 \rangle)} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\mathbf{S})\}} \rangle$$

Recordem que pel teorema de completesa forta tenim que el càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz coincideix amb la lògica finitària $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$-valorada:

$$\langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle [\mathbf{0},\mathbf{1}],1 \rangle} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{Q}([\mathbf{0},\mathbf{1}])\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A},1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbf{W}\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$$

És evident que tota lògica finitària S-valorada, així com les lògiques finitàries obtingudes a partir d'interseccions arbitràries de lògiques S-valorades, són extensions finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$, ja que tota subàlgebra de Łukasiewicz és subàlgebra de **[0,1]**. Anomenem a aquestes extensions finitàries que apareixen de forma natural, **extensions finitàries primàries** de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$.

Recordem que tota subàlgebra de Łukasiewicz és polinomialment equivalent a una MV-àlgebra simple. D'aquesta manera en el procés d'algebrització, les quasivarietats generades per MV-àlgebres simples que hem estudiat en el capítol 7, són les quasivarietats semàntiques equivalents de les extensions finitàries primàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$
Així del teorema 7.8 obtenim:

Teorema 11.4 *Siguin* **S** *i* **S′** *dues subàlgebres infinites de Łukasiewicz.*

$$\langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle \mathbf{S},1 \rangle} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models^f_{\langle \mathbf{S}',1 \rangle} \rangle \quad \textit{si, i només si} \quad S \cap Q = S' \cap Q$$

□

Del teorema 7.19 deduïm

Teorema 11.5 *$\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ és una extensió finitària primària de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ si, i només si existeixen $\alpha, \beta \subseteq \omega$ tals que*

$$\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle = \langle \mathcal{L}, \models^f_{\{\langle \mathbf{Ł}_n, 1\rangle : n \in \alpha\} \cup \{\langle \mathbf{S}_r, 1 \rangle : r \in \beta\}} \rangle,$$

on per qualsevol $r \in \beta$, $\mathbf{S}_r$ és una MV-àlgebra simple infinita tal que $\mathbf{S}_r \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Ł}_r$. □

11.3 Extensions dels càlculs finitvalorats

Direm que una extensió finitària $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ és **finitvalorada** si, i només si existeix un nombre finit $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ de MV-àlgebres finites (o equivalentment de àlgebres de Wajsberg finites) tal que $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\}} \rangle$. Obviament tot càlcul finitvalorat de Łukasiewicz i tota intersecció finita de càlculs finitvalorats de Łukasiewicz són extensions finitàries finitvalorades.

Observem que hi ha una correspondència 1 a 1 entre les extensions finitàries finitvalorades i les quasivarietats n-acotades. Si $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\}} \rangle$ és una extensió finitària finitvalorada de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$, aleshores pel teorema 1.7

$$\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\mathbb{ISPP}_U(\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\})} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}, 1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_i : i < k\})\}} \rangle.$$

Com que $\mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_i : i < k\})$ és una quasivarietat finitament generada, aleshores pel teorema 8.13, $\mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_i : i < k\})$ és una quasivarietat n-acotada per algun $n \in \omega$ i és la quasivarietat semàntica equivalent de $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\}} \rangle$. Pel procés d'algebrització, si $\mathbb{K}$ és una quasivarietat n-acotada, aleshores $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}, 1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}} \rangle$ és l'única extensió finitària de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ que té per quasivarietat semàntica equivalent $\mathbb{K}$. Pel teorema 8.13, $\mathbb{K}$ és finitament generada, per tant existeixen $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ MV-àlgebres finites tals que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}\})$. Així doncs pel corol.lari 1.8

$$\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}, 1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models^f_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i < k\}} \rangle$$

Per tant $\mathbb{K}$ és quasivarietat semàntica equivalent d'una extensió finitària finitvalorada. La injectivitat vé donada pel procés d'algebrització.

Teorema 11.6 *Una extensió finitària de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ és finitvalorada, si, i només si, és una extensió finitària d'algun càlcul finitvalorat de Łukasiewicz.*

Prova : Sigui $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ una extensió de $\langle \mathcal{L}, \vdash_n \rangle$ per algun $n \in \omega$. Com que la quasivarietat semàntica equivalent de $\langle \mathcal{L}, \vdash_n \rangle$ és $\mathbb{Q}(\mathbf{L}_{n-1})$, aleshores la subquasivarietat semàntica equivalent $\mathbb{K}$ de $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ és una subquasivarietat de $\mathbb{Q}(\mathbf{L}_{n-1})$, i per tant $(n-1)$-acotada. Pel teorema 8.13 és finitament generada. Per tant existeixen $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}$ MV-àlgebres finites tals que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}\})$. En conseqüència pel corol.lari 1.8,

$$\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle = \langle \mathcal{L}, \models^f_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i<k\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i<k\}} \rangle$$

Sigui $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i<k\}} \rangle$ una extensió finitària finitvalorada de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$. Pel teorema 8.13, $\mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_i : i < k\})$ és una quasivarietat de MV-àlgebres n-acotada per algun $n \in \omega$. Per tant $\mathbb{Q}(\{\mathbf{A}_i : i < k\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_n\}) \subseteq \mathbb{Q}(\mathbf{L}_m)$ on $m = m.c.m\{1, 2, \ldots, n\}$. En conseqüència $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i<k\}} \rangle$ és extensió finitària de $\langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}, 1 \rangle : \mathbf{A} \in \mathbb{Q}(\mathbf{L}_m)\}} \rangle = \langle \mathcal{L}, \vdash_{m+1} \rangle$. □

Del teorema 8.13, deduïm que tota extensió $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ d'un càlcul finitvalorat $\langle \mathcal{L}, \vdash_n \rangle$ està generada semànticament per un nombre finit de MV-àlgebres crítiques. És a dir existeixen $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_{k-1} \in \mathbb{V}(\mathbf{L}_{n-1})$ MV-àlgebres crítiques tals que $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle = \langle \mathcal{L}, \models_{\{\langle \mathbf{A}_i, 1 \rangle : i<k\}} \rangle$. Com que per qualsevol $m \in \omega$, el nombre de MV-àlgebres crítiques pertanyents a $\mathbb{V}(\mathbf{L}_m)$ és finit (vegeu corol.lari 8.11) aleshores:

Teorema 11.7 *Tot càlcul finitvalorat de Lukasiewicz té un nombre finit d'extensions finitàries.* □

Corol.lari 11.8 *El conjunt de les extensions finitàries dels càlculs de finitvalorats de Lukasiewicz és numerable.* □

Com que tota quasivarietat n-acotada és finitament axiomatitzable (vegeu teorema 8.16), del corol.lari 1.19 obtenim:

Teorema 11.9 *Tota extensió finitària d'algun càlcul finitvalorat de Lukasiewicz és finitament axiomatitzable.* □

11.4 Extensions finitàries distributives de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$

Direm que una extensió finitària és distributiva si el reticle de les seves teories és distributiu. Pel teorema 1.21, l'equivalent algebraic de les extensions finitàries distributives de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ són les subquasivarietats de $\mathbb{W}$ congruent distributives. De la caracterització de les quasivarietats congruent distributives obtenim una caracterització de les extensions finitàries distributives.

Teorema 11.10 *Una extensió finitària $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ és distributiva si, i només si, existeix una família $\mathcal{B}\subseteq\mathbb{C}_{\mathbf{W}}$ de cadenes de Wajsberg (polinomialment equivalents a les MV-cadenes) tal que:*

$$\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle=\langle\mathcal{L},\models^f_{\{\langle\mathbf{A},1\rangle:\mathbf{A}\in\mathcal{B}\}}\rangle \qquad \square$$

D'aquest resultat i de les caracteritzacions de cada tipus d'extensió deduïm:

Teorema 11.11

1. *Les extensions axiomàtiques i les extensions finitàries primàries de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ són extensions distributives.*
2. *Si $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ és una extensió finitària finitvalorada de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$, aleshores són equivalents:*
   (a) $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ és distributiva.
   (b) $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ és axiomàtica.
   (c) $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ és primària. $\square$

De la caracterització de les quasivarietats generades per cadenes de rang finit (2.10 i 9.22) obtenim també una caracterització de les extensions finitàries distributives pròpies no purament finitàries de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$.

Teorema 11.12 *Sigui $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ una extensió finitària distributiva pròpia de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$. Aleshores $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ és una extensió no purament finitària de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ si, i només si, existeixen $I,J\subseteq\omega$ subconjunts finits de naturals i per tot $j\in J$, $\beta_j\subseteq\mathrm{Div}(j)$ tals que*

$$\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle=\langle\mathcal{L},\models^f_{\{\langle\mathbf{Ł}_i,1\rangle:i\in I\}\cup\{\langle\mathbf{Ł}_j^{d_j},1\rangle:j\in J,d_j\in\beta_j\}}\rangle$$

Si $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ no és axiomàtica, aleshores és una extensió purament finitària distributiva pròpia de $\langle\mathcal{L},\models^f_{\{\langle\mathbf{Ł}_i,1\rangle:i\in I\}\cup\{\langle\mathbf{Ł}_j^\omega,1\rangle:j\in J\}}\rangle$. $\square$

Corol.lari 11.13 *Tota extensió axiomàtica pròpia de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$, té un nombre finit d'extensions finitàries distributives.*

De l'axiomatització finita de les quasivarietats generades per MV-cadenes de rang finit (corol.aris 1.19 i 9.24) deduïm:

11.14 *Tota extensió finitària distributiva de $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ no purament finitària és finitament axiomatitzable.* $\square$

11.5 Teorema Local de Deducció i Teorema de Deducció

Abans d'estudiar els teoremes de deducció de les extensions finitàries tractades, creiem necessari exposar primer la relació que hi ha entre elles (és la mateixa relació exposada en la gràfica de les quasivarietats de la pàgina 130).

Teorema 11.15

- *Si* $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és una extensió axiomàtica pròpia de* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$*, aleshores són equivalents:*
  1. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és primària.*
  2. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és finitvalorada.*
- *Si* $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és una extensió finitària primària pròpia de* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$*, aleshores són equivalents:*
  1. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és axiomàtica.*
  2. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és finitvalorada.*
  3. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és distributiva i no purament finitària de* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$
- *Si* $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és una extensió finitària finitvalorada de* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$*, aleshores són equivalents:*
  1. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és axiomàtica.*
  2. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és primària.*
  3. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és distributiva i no purament finitària de* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$
- *Si* $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és una extensió finitària distributiva no purament finitària de* $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$*, aleshores són equivalents:*
  1. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és primària.*
  2. $\langle \mathcal{L}, \vdash_* \rangle$ *és finitvalorada.* □

Ja hem vist en el primer capítol l'equivalència, via el procés d'algebrització, entre els teoremes de deducció i de deducció local de sistemes deductius i les propietats EDPC(R) i (R)CEP de les seves quasivarietats semàntiques equivalents (teoremes 1.22 i 1.23). Per veure quines extensions tenen Teorema Local de Deducció, del teorema 10.3 deduïm:

Teorema 11.16

1. *El càlcul infinitvalorat de Łukasiewicz té Teorema Local de Deducció i la família de termes de deducció és* $\{p \rightarrow_n q \in Fm_{\mathcal{L}} : n \in \omega\}$ (vegeu per exemple [27]).

2. *Tota extensió axiomàtica de* $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ *té Teorema Local de Deducció i la família de termes de deducció és* $\{p \rightarrow_n q \in Fm_{\mathcal{L}} : n \in \omega\}$.

3. *Una extensió finitària distributiva de* $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ *té Teorema Local de Deducció si, i només si, és axiomàtica.*

4. *Una extensió finitària no purament finitària té Teorema Local de Deducció si, i només si, és axiomàtica.* □

Dels teoremes 10.8, 10.9 i la caracterització de les extensions axiomàtiques deduïm que:

Teorema 11.17 *Si* $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ *és una extensió finitària de* $\langle\mathcal{L},\vdash_\infty\rangle$ *aleshores són equivalents:*

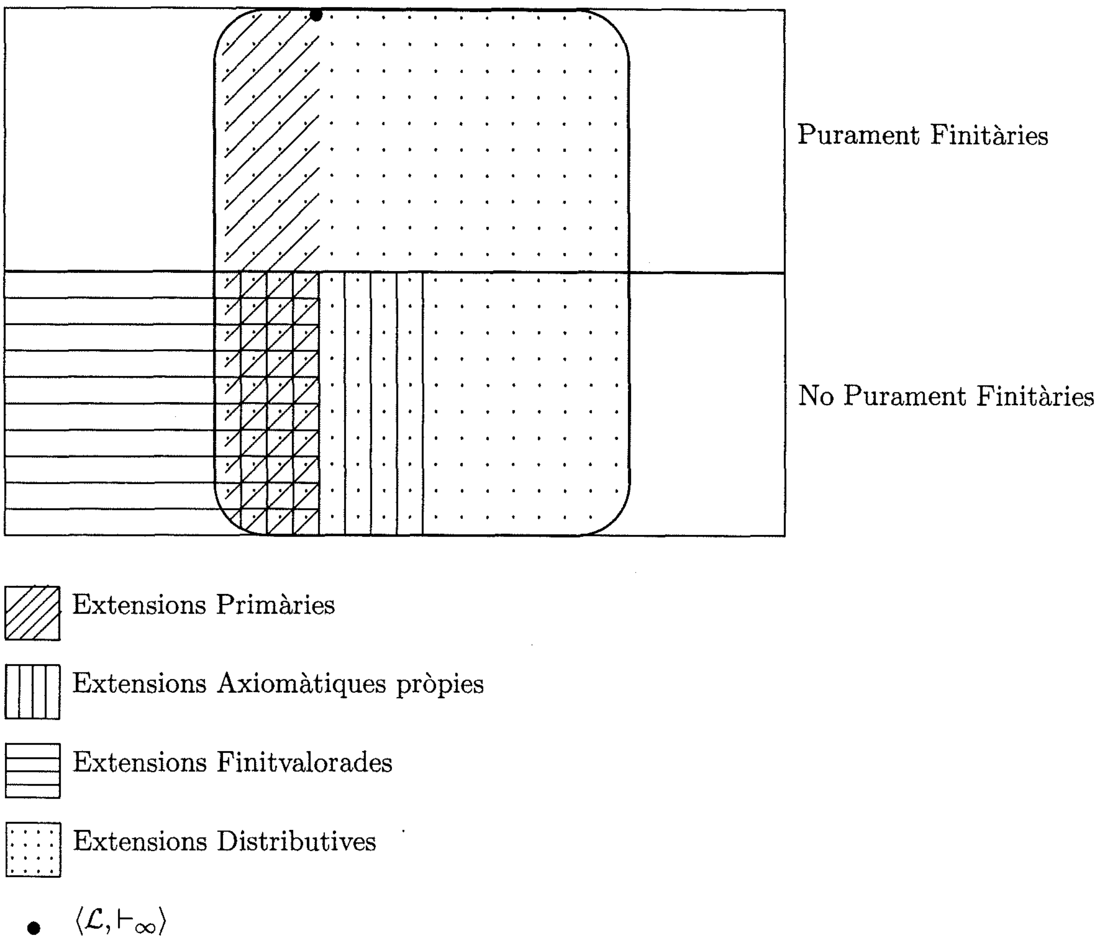
1. $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ *té Teorema de Deducció*

2. $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ *és axiomàtica i finitvalorada.*

3. $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle$ *és axiomàtica i primària.*

4. *Existeix* $\{n_0,\dots,n_{k-1}\} \subseteq \omega$ *tal que* $\langle\mathcal{L},\vdash_*\rangle = \langle\mathcal{L},\models_{\{\langle\mathbf{L}_{n_i},1\rangle : i<k\}}\rangle$ *i en aquest cas el terme de deducció és* $\{p \rightarrow_n q\}$ *on* $n = \text{màx}\{n_0,\dots,n_{k-1}\}$.
□

Figura 11.1: Extensions Finitàries de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$



EXTENSIONS FINITÀRIES DE $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$

TIPUS	DISTRIBUTIVES	LDT	TD	AX.FINITA
Axiomàtiques	SI	SI	finit-valorades SI infinit-valorades NO	SI
Primàries	SI	Ax. SI No Ax. NO	finit-valorades SI infinit-valorades NO	Ax. SI No Ax. ?
Finit-valorades	Ax. SI No Ax. NO	Ax. SI No Ax. NO	Ax. SI No Ax. NO	SI
Distributives	SI	Ax. SI No Ax. NO	finit-valorades SI infinit-valorades NO	No purament Finitàries SI Purament Finitàries ?

Apèndix A

Problemes oberts

En començar aquesta memòria ens proposàvem fer un estudi algebraic de les extensions dels càlculs multivalorats de Łukasiewicz. Creiem que hem assolit bona part d'aquests objectius. Ens hem decantat voluntàriament cap a la part algebraica i això ens ha portat a estudiar les quasivarietats de MV-àlgebres.

A l'hora de fer el treball, hem optat per les *extensions finitàries* de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$ per poder usar la teoria d'algebrització de Blok i Pigozzi (vegeu [8]). Resta obert l'estudi de les *extensions infinitàries* de $\langle \mathcal{L}, \vdash_\infty \rangle$.

Mentre avançàvem en la caracterització i classificació de les diferents quasivarietats tractades, han sorgit nous interrogants com per exemple:

- Estudi de les *quasivarietats no-congruent distributives.*
- Caracterització de les *quasivarietats generades per MV-cadenes infinites.*
- Estudi de l'*axiomatitzabilitat* de les quasivarietats generades per MV-àlgebres simples.
- Estudi de *classes universals* de MV-àlgebres.

Ens proposem tractar aquests temes en futures investigacions.

Bibliografia

[1] M.E.ADAMS AND W.DZIOBIAK, Q-universal Quasivarieties of Algebras, **Proceedings of the American Mathematical Society**. Vol.**120** N.**4** (1994), 1053-1059.

[2] J.L.BELL, A.B.SLOMSON, **Models and Ultraproducts: an introduction**. North-Holland, Amsterdam, 1971.

[3] L.P. BELLUCE, Semisimple algebras of infinite valued logic. **Canadian Journal of Mathematics, v. 38** (1986), 1356-1379.

[4] A. BIGARD, K. KEIMEL AND S. WOLFENSTEIN, **Groupes et anneaux réticulés**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 1977.

[5] W.J.BLOK AND I.M.A.FERRERIM, Hoops and their implicational reducts, **Algebraic Methods in Logic and in Computer Science**. **28** (1993), 219-230.

[6] W.J.BLOK AND I.M.A.FERRERIM, On the structure of hoops, preprint 1996.

[7] W.J.BLOK AND D.PIGOZZI, On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I, **Algebra Universalis**. **15** (1982), 195-227.

[8] W.J.BLOK AND D.PIGOZZI, Algebraizable logics, **Mem. Amer. Math. Soc**. 396, vol 77. Amer. Math. Soc., Providence, 1989.

[9] W.J.BLOK AND D.PIGOZZI, Local Deduction Theorems in Algebraic Logic, **Algebraic Logic** (Proc. Conf. Budapest 1988) (H.ANDREKA, J.D.MONK AND I.NEMETI, EDS.) Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. **54** (1991), 75-105.

[10] W.J.Blok and D.Pigozzi, Abstract Algebraic Logic and the Deduction Theorem, preprint.

[11] S.Bloom Some theorems on Structural Consequence Operations, **Studia Logica. 34** (1975), 1-9.

[12] B.Bosbach Concerning bricks, **Acta Mathematica Academiae Hungariae. 38** (1981), 89-104.

[13] L.Borkowski (Editor), **Selected works of J. Łukasiewicz**, North Holland, Amsterdam, 1970.

[14] S.Burris, H.P.Sankappanavar, **A course in Universal Algebra**. Springer Verlag, New York. 1981

[15] H.W.Buff Decidable and undecidable MV-algebras, **Algebra Universalis. 21** (1985), 234-249.

[16] C.C.Chang, Proof of an axiom of J. Lukasiewicz, **Trans. Amer. Math. Soc.. 87** (1958), 55-56.

[17] C.C.Chang, Algebraic analysis of many-valued logics, **Trans. Amer. Math. Soc.. 88** (1958), 467-490.

[18] C.C.Chang, A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms, **Trans. Amer. Math. Soc. 93** (1959), 74-80.

[19] C.C.Chang and H.J.Keisler, **Model Theory**. 3rd edition, North Holland, Amsterdam. 1990.

[20] R.Cignoli, I.M.L.D'Ottaviano and D.Mundici, **Algebras das Logicas de Łukasiewicz** UNICAMP, Brasil. 1994.

[21] R.Cignoli, I.M.L.D'Ottaviano and D.Mundici, **Algebraic Foundations of many-valued Reasoning**, versió augmentada en anglès de [20] (en premsa).

[22] R.Cignoli and A. Torrens, Retractive MV-Algebras, **Mathware & Soft Computing. 2** (1995), 157-165.

[23] R.Cignoli and A. Torrens, The poset of Prime l-ideals of an Abelian l-Group with Strong Unit, **Journal of Algebra. 184** (1996), 604-612.

[24] W.H.CORNISH, 3-permutability and quasicommutative BCK-algebras, **Mathematica Japonica. 25** (1980), 477-496.

[25] W.H.CORNISH, Varieties generated by finite BCK-algebras, **Bull. Austral. Math. Soc. 22** (1980), 411-413.

[26] W.H.CORNISH, On Iseki's BCK-algebras, **Lectures notes in Pure and Applied Mathematics. 74** (1982), 101-122.

[27] J.CZELAKOWSKI Local Deductions Theorems **Studia Logica. 45** (1986), 377-391.

[28] J.CZELAKOWSKI Consequence Operations Foundationals Studies **Theories, Models Cognitive Schemata** TMS-series Pol.Ac.Sciences., 1992.

[29] J.CZELAKOWSKI, W.DZIOBIAK, Congruence distributive quasivarieties whose finitely subdirectly irreducible members form a universal class, **Algebra Universalis. 27** (1990), 128-149.

[30] A.DINOLA, Representation and reticulation by quotients of MV-algebras, **Ricerche Mat. 40** (1991), 291-297.

[31] A.DINOLA AND A.LETTIERI, Equational Characterization of all Varieties of MV-algebras, preprint.

[32] W.DZIOBIAK, On subquasivariety lattices of semi-primal varieties, **Algebra Universalis. 20** (1985), 127-129

[33] W.DZIOBIAK, Finitely generated congruence distributive quasivarieties of algebras, **Fundamenta Mathematicae. 133** (1989), 47-57.

[34] I.M.A.FERRERIM, **On varieties and quasivarieties of hoops and their reducts**. Ph. D. Thesis, Univ. of Illinois at Chicago, 1992.

[35] J.M.FONT, A.J.RODRIGUEZ AND A.TORRENS, Wajsberg algebras, **Stochastica.8** (1984), n.1, 5-31.

[36] H.GAITAN, Quasivarieties of Wajsberg algebras, **Journal of Non-Classical Logic 2**, vol. 8 (1991), 79-101.

[37] J.GISPERT, A.TORRENS, Quasivarieties generated by Simple MV-algebras, **Studia Logica 61, 1** (1998), 71-91.

[38] V.A.GORBUNOV, Covers in subquasivariety lattices and independent axiomatizability, **Algebra i Logika.** **16** (1977), 507-548.

[39] G.GRÄTZER, **Universal Algebra** Springer-Verlag, Berlin, second edition. 1979.

[40] R.S.GRIGOLIA, Algebraic analysis of n-valued systems of Łukasiewicz-Tarski. **Proceedings of the University of Tbilisi**, A **6-7** (1973),121-132. (En Rus) Traducció en anglès [41].

[41] R.S.GRIGOLIA, Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski's n-valued logical systems. A R. WOJCICKI AND G.MALINOWSKI(Eds.) **Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi**. Ossolineum, Wroclaw, 1977. 81-92

[42] L.S.HAY, Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus, **Journal of Symbolic Logic 28** (1963), 77-86.

[43] J.F.P.HUDSON, **Piecewise linear topology**. W.Benjamin. New York. 1969.

[44] Y.KOMORI, Super-Łukasiewicz Propositional Logic, **Nagoya Math. J. 84** (1981), 119-133.

[45] A.I.KOKORIN AND V.M.KOPYTOV, **Fully ordered groups** Halsted Press. New York, 1974.

[46] F.LACAVA, Alcune propietá delle L-algebre e delle L-algebre esistenzialmente chiuse, **Bolletino Unione Matematica Italiana**. A(5), **16** (1979), 360-366.

[47] S.LANG, **Algebra** Addison-Wesley, U.S.A., third edition. 1993.

[48] W.LEVEQUE, **Fundamentals of Number Theory** Addison-Wesley, U.S.A., 1977.

[49] J.ŁOS AND R.SUSZKO, Remarks on Sentential Logics, **Indagationes Mathematicae, 29** (1958), 177-183.

[50] J.ŁUKASIEWICZ, O logice trójwartościowej, **Ruch Filozoficzny, 5** (1920), 170-171. Traducció en anglès [55, 16-18].

[51] J.ŁUKASIEWICZ, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, **C.R.Sci.Lett. Varsovie, cl.iii, 23** (1930), 51-77. Traducció en anglès [13].

[52] J.ŁUKASIEWICZ I A.TARSKI, Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. **C.R.Sci.Lett. Varsovie, cl.iii, 23** (1930), 22-29. Traducció en anglès [71]

[53] J.ŁUKASIEWICZ I A.TARSKI, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, **C.R.Sci.Lett. Varsovie, cl.iii, 23** (1930), 30-50. Traducció en anglès [13] i [71].

[54] P.MANGANI, Su certe algebre connesse con logiche a piú valori, **Bollettino Unione Matematica Italiana. 8** (1973), 68-78.

[55] S.MCCALL (ED.) **Polish Logic 1920-1939** Oxford University press, London, 1967.

[56] R.MCNAUGHTON, A theorem about infinite-valued statement calculi, **Journal of Symbolic Logic. 16** (1951), 1-13.

[57] C.A.MEREDITH, The dependence of an axiom of Łukasiewicz, **Trans. Amer. Math. Soc.. 87** (1958), 54.

[58] G.C.MOISIL, Recherches sur l'algèbre de la logique, **Ann. Sc. de la Université de Jassy. 22** (1936), 1-118.

[59] D.MUNDICI, Interpretation of AF C*-algebras in Łukasiewicz Sentential Calculus, **J. Funct. Anal. 65** (1986), 15-63.

[60] D.MUNDICI, MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras, **Mathematica Japonica 31** (1986), 889-894.

[61] D.MUNDICI, Mapping abelian ℓ-groups with strong unit one-one into MV-algebras, **Journal of Algebra 98** (1986), 76-81.

[62] M.NEWMAN, **Integral Matrices**. Academic Press, New York. 1972.

[63] G.PANTI, Varieties of MV-algebras, es publicarà al 1998 a **special issue on many-valued logics and their algebras**, editat per W.Carnielly.

[64] A.J.RODRIGUEZ, **Un Estudio Algebraico de los Cálculos Proposicionales de Łukasiewicz**. Ph. D. Thesis, Univ. of Barcelona, 1980.

[65] A.J.RODRIGUEZ I A.TORRENS, Wajsberg algebras and Post Algebras, **Studia Logica 53** (1994), 1-19.

[66] A.J.RODRIGUEZ, A.TORRENS I V.VERDU, Łukasiewicz logic and Wajsberg algebras, **Bull. Sec. Log. Polish Ac. Sc. 2**, **vol 19** (1990), 51-55.

[67] A.ROSE, J.B.ROSSER, Fragments of many-valued statement calculi, **Transactions of American Mathematical Society**, **87** (1958), 1-53.

[68] J.B.ROSSER I A.R.TURQUETTE, **Many-valued Logics**, Studies in Logic, North Holland, Amsterdam, 1952.

[69] S.SURMA, **Logical works of Wajsberg**, Ossolineum, Wroclaw, 1977.

[70] A.TARSKI, Fundamentale Begriffe der Methodologie der deuktiven Wissenschaften, **Monatschefte für Mathematik und Physik, 37** (1930), 361-504. Traducció en anglès [71]

[71] A.TARSKI, **Logic, Semantics, Metamathematics**, Clarendon Press, Oxford, 1956.

[72] A.TORRENS, Cyclic Elements in MV-algebras and Post Algebras. **Math. Log. Quart. 40** (1994), 431-444.

[73] T.TRACZYK, On the variety of bounded commutative BCK-algebras. **Mathematica Japonica 24** (1979), 263-272.

[74] M.WAJSBERG, Aksjomatyzacja trójwartosciowego rachunku zdan (Axiomatització del càlcul proposicional trivalent) **C.R.Sci.Lett. Varsovie, cl.iii, 23** (1931), 126-145. Traducció en anglès [55, 264-284]

[75] M.WAJSBERG, Beiträge zum Metaaussagenkakül. I, **Monatshefte für Mathematik und Physik**, **42** (1935), 221-242. Traducció en anglès [69].

[76] R.WOJCICKI,On matrix representations of consequence operations of Łukasiewicz's sentential calculi, **Z.M.L.** , **19** (1976), 239-247.

[77] R.WOJCICKI, **Theory of logical calculi**, Kluwer, Dordrecht, 1988.

[78] R.WOJCICKI AND G.MALINOWSKI (Eds.) **Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi**. Ossolineum, Wroclaw , 1977.

Índex de Matèries

Índex de Símbols

Fe d'errades

Pàgina 4, línia 15:	enlloc de "$(f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n))$" ha de ser "$(f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1,\ldots,b_n))$".
Pàgina 13, línia 13:	la referència "[28]" és incorrecta ha de ser "[28']" J. CZELAKOWSKI Reduced products of logical matrices **Studia Logica. 39** (1980), 19-43.
Pàgina 15, línia 2:	enlloc de "$\{\delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi) : \psi \in \Gamma\}$" ha de ser "$\bigcup\{\delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi) : \psi \in \Gamma\}$".
Pàgina 17, línia 12:	enlloc de "Aleshores" ha de ser "Si $\mathcal{L}$ finit, aleshores".
Pàgina 18, línia 14:	La definició del **Teorema Local de Deducció** ha de ser: "$\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ té **Teorema Local de Deducció** si, i només si, existeix una família $\Sigma(x,y) = \{E_i(x,y); i \in I\}$ amb $E_i(x,y) \subseteq Fm_{\mathcal{L}}(x,y)$ finit tal que per tot $\Gamma \cup \{\varphi,\psi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ si, i només si, existeix $i \in I$ tal que $\Gamma \vdash E_i(\varphi,\psi)$".
Pàgina 20, línia 19:	enlloc de "$\mathbf{Taut}_n \subseteq \mathbf{Taut}_m$" ha de ser "$\mathbf{Taut}_n \supseteq \mathbf{Taut}_m$".
Pàgina 22, línia 9:	enlloc de "contenen" ha de ser "les seves teories contenen".
Pàgina 35, línia 20:	Lema 3.13 apartat 2, obviament manca la condició "*(d)* $\neg\neg x = x$"

Pàgina 40, línia 19:	enlloc de "**A**" ha de ser "**A** no trivial".
Pàgina 40, línia -2:	enlloc de "àlgebres simples" ha de ser "MV-àlgebres simples no trivials".
Pàgina 44, línia 24:	enlloc de "numerador" ha de ser "denominador".
Pàgina 48, línia 7:	enlloc de "ultrafiltre" ha de ser "filtre propi".
Pàgina 51, línia 20:	enlloc de "$a \in A$" ha de ser "$a \in A \setminus \{0\}$".
Pàgina 54, línia 3:	enlloc de "*m.c.d.*" ha de ser "*m.c.m.*".
Pàgina 62, línia 22:	substituir tota la frase per "Com que $(b_{n_1}, \ldots, b_{n_k}) \in [0,1]^k$, aleshores".
Pàgina 68, línia -1:	enlloc de "$\mathbb{P}_U(\{\mathbf{Ł}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{Ł}_j^\omega\ j \in J\}) = \bigcup_{i \in I} \mathbb{P}_U(\mathbf{Ł}_i) \cup \bigcup_{j \in J} \mathbb{P}_U(\mathbf{Ł}_j^\omega)$" ha de ser $\mathbb{IP}_U(\{\mathbf{Ł}_i\ i \in I\} \cup \{\mathbf{Ł}_j^\omega\ j \in J\}) = \mathbb{I}\left(\bigcup_{i \in I} \mathbb{P}_U(\mathbf{Ł}_i) \cup \bigcup_{j \in J} \mathbb{P}_U(\mathbf{Ł}_j^\omega)\right)$.
Pàgina 71, línia 6:	enlloc de "$q\|j$" ha de ser "$q\|i$".
Pàgina 116, línia 16:	enlloc de "*grup totalment ordenat*" ha de ser "*grup abelià totalment ordenat*".
Pàgina 141, línia 4:	enlloc de "(n-1)-acotada" ha de ser "n-acotada".