

Estudi de sistemes dinàmics mitjançant la reducció de la seva dimensió

Miquel Bosch Gual

Memòria presentada per a aspirar
al grau de Doctor en Matemàtiques

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

Als meus pares

A la Maria

Agraïments

Aquest treball d'investigació té un únic autor, però no s'hauria fet sense la col·laboració d'altres persones. No puc deixar d'agrair-los-ho.

En primer lloc, vull deixar constància de l'ajuda decisiva de la meua família. La paciència amb que han acollit el meu malhumor ocasional, el suport permanent que he obtingut d'ells, i l'interès que han demostrat en què jo fes aquest treball, m'han aplanat molt el camí.

Quant a la part científica, agraeixo l'ajuda rebuda del Dr. Carles Simó en la direcció d'aquesta investigació. Ell em va introduir en l'apassionant camp dels Sistemes Dinàmics, i amb el grup que ell dirigeix he anat adquirint els coneixements que he hagut de menester en la confecció d'aquest treball. La seva experiència m'ha servit per a desencallat i encarrilat la feina en els moments més delicats. Els seus comentaris i suggeriments m'han estat molt útils.

Finalment, però no menys intensament, vull agrair el suport -indispensable per al resultat final- dels companys del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Les discussions i canvis d'impressions amb tots ells han estat decisives perquè jo anés incrementant i madurant, no només els aspectes relacionats amb aquesta tesi, sinó tots els meus coneixements en el camp de la Matemàtica Aplicada. He d'esmentar especialment el Dr. Joan Carles Tatjer, ja que, per afinitat en els temes d'investigació, m'ha explicat alguns resultats que m'eren obscurs; i el company de despatx Jaume Timoneda, per la seva col·laboració decisiva en la presentació final del treball.

Si he reeixit en els objectius marcats quan vaig començar aquesta investigació, tots els esmentats en tenen mèrit. Amb tot, jo sóc l'únic responsable de les limitacions, imprecisions, inexactituds -i, potser, errors- que s'hi trobaran.

Contingut

Introducció	1
1 Difeomorfismes del pla pròxims a endomorfismes en dimensió 1	5
1.1 Recull de conceptes i resultats bàsics	6
1.2 Extensió de punts periòdics	19
1.3 Extensió del teorema de Hartman-Grobman	28
1.4 Extensió de varietats invariants	36
1.5 Extensió de punts homoclínic	53
2 Bifurcacions homoclíniques i periòdiques en un sistema de pertor-	
 bació singular	57
2.1 Definicions i propietats bàsiques	59
2.2 El sistema degenerat	69
2.3 Òrbites homoclíniques	87
2.4 Corbes sella-node pròximes a les corbes homoclíniques	103
3 Atractors en un model de bifurcació de Silnikov-Hopf	118
3.1 Una família de difeomorfismes bidimensionals	120
3.2 Òrbites homoclíniques i periòdiques	129
3.3 Simulacions numèriques	144
3.4 Reducció a una aplicació unidimensional	151
3.5 Atractors de l'aplicació del cercle	155
Bibliografia	178

3.2	Òrbites homoclíniques a la segona. Cas $\epsilon < 0$. Les dues possibilitats per a la branca inferior.	132
3.3	Els diversos casos de la funció $t(x)$	133
3.4	Resolució de l'equació (3.7).	134
3.5	Aspecte global de les bifurcacions homoclíniques a la segona degudes a la branca inferior de W^u	136
3.6	Condicions d'existència d' $OH - 1$ en el cas $\epsilon > 0$	137
3.7	Paràmetres per als quals existeixen $OH - 1$	138
3.8	Procés de creació de $OH - 2$ quan $\epsilon > 0$	139
3.9	Diverses òrbites periòdiques atractores.	143
3.10	Aplicació de retorn sobre l'atractor en el cas límit $\mu = 0$	146
3.11	Atractors en el cas $\mu = 1$	149
3.12	Detalls d'un atractors estrany gros en el cas $\mu = 1$	151
3.13	Exemples d'aplicacions unidimensionals Ψ_r	153
3.14	Aplicacions H_d i h_d , amb els punts fixos senyalats.	158
3.15	Una corba de punts fixos de h , amb indicacions del valor propi associat.	160
3.16	Corbes de punts fixos associats al màxim.	161
3.17	Òrbita homoclínica tangencial de l'aplicació unidimensional.	165
3.18	Finestra de semblança amb l'aplicació logística. Atractor del màxim en funció del paràmetre.	169
3.19	Òrbita superestable de període dos, amb $k_1 = 1$ i $k_0 = 0$	171
3.20	Atractor del punt $\varphi = \pi$ en funció de d a tot el rang $(0, 1)$. Hem usat $c = 0$ i $e = 20$. La variable horitzontal és $\varphi \in (0, 2\pi)$; creix cap a l'esquerra. La variable vertical és el paràmetre $d \in (0, 1)$; creix cap a dalt.	174

Llista de taules

2.1	Valors de β per als quals neixen solucions \bar{t} de (2.12).	74
2.2	Antiimatges del punt $y = 5$ per l'aplicació T_0^-	83
2.3	Valors de μ per als quals neixen solucions $\tau < 0$ de (2.16).	93
2.4	Solucions de (2.16) per a $\mu = 0.04$, i valors corresponents de β	93
2.5	Punts cuspidals corresponents a òrbites de període 2.	106
3.1	Òrbites periòdiques atractores per a diversos valors de b	142

Introducció

L'objectiu d'aquest treball és mostrar com alguns aspectes dels sistemes dinàmics poden ser estudiats mitjançant sistemes de dimensió inferior. Normalment, fent la reducció s'alleugera la complexitat del problema; això fa que sigui estudiable més fàcilment. D'altra banda, convé tenir clar quines propietats es conserven i quines canvien en aquesta transformació, ja que és possible que alguna part de la informació es perdi en la reducció.

D'entrada, convé destacar que la frase "reducció de la dimensió" pot significar coses molt diverses. Així, per exemple, és usual aproximar una equació en derivades parcials (edp) per un sistema d'equacions diferencials ordinàries (edo), o bé canviar una equació diferencial ordinària d'ordre n per un difeomorfisme de dimensió $n - 1$ (via aplicació de Poincaré o de retorn), o, finalment, substituir una aplicació de dimensió n , fortament contractiva en $r (< n)$ direccions, per una altra de dimensió $n - r + s$ ($0 \leq s < r$), en la qual han quedat només s direccions contractives. A la literatura, són abundants els exemples de totes aquestes possibilitats. Tot seguit, parlarem dels casos més paradigmàtics.

Respecte al primer tipus de reducció, convé notar que es passa de dimensió infinita a dimensió finita. Normalment, això es fa considerant l'expansió de Galerkin de la solució i retenent només una quantitat finita de "modes". La justificació de la bondat d'aquesta reducció és extremadament difícil, i el seu ús és gairebé obligat, a causa que el treball amb l'edp original és molt costós. Un exemple molt conegut és en el camp de la mecànica de fluids; Lorenz ([36]) va introduir i estudiar un sistema de tres edo, la dinàmica del qual capturava part de la complexitat característica d'una edp que modela el problema de la convecció termal. Una aplicació pràctica d'aquest model són els processos de turbulència que es produeixen a l'atmosfera

terrestre. La evidència que aquest *model de Lorenz* tenia limitacions ha fet que s'hagi pensat en models més complexos, com és el cas del sistema de Curry ([15]), que té dimensió 14. No és aquest tipus de reducció el que ens interessa a nosaltres.

Quant al segon cas, cal destacar que la tècnica d'usar una secció de Poincaré no és pròpiament una reducció de dimensió, ja que el sistema continu (edo) i el sistema discret (difeomorfisme) són, de fet, totalment equivalents. Fins i tot es verifica un pas invers: qualsevol difeomorfisme es pot pensar com l'aplicació a temps constant d'un flux adequat, anomenat *suspensió*. En tot cas, cal destacar que la secció de Poincaré s'ha d'agafar transversal a les trajectòries del flux; i la tria d'aquesta secció s'ha de fer després d'un estudi que assegurí que les trajectòries qualitativament interessants la tallaran. D'altra banda, molt rarament una edo concreta dóna una aplicació de Poincaré explícita en termes de funcions elementals, sinó que aquesta aplicació s'ha de calcular integrant numèricament l'edo. Per això, algunes reduccions d'edo a difeomorfismes es fan, no mitjançant una aplicació de Poincaré exacta, sinó amb un model explícit de difeomorfisme que capturi les propietats més interessants. Normalment, aquest model s'inspira en resultats numèrics. Així, per exemple, l'*aplicació d'Hénon* ([26]) dóna, malgrat la seva senzillesa, una bona idea del tipus de fenòmens que apareixen en una aplicació de Poincaré del sistema de Lorenz. En particular, és destacable el parentiu entre l'*atractor d'Hénon* i l'*atractor de Lorenz*. També hi ha altres relacions naturals: el sistema de Lorenz té divergència constant, mentre que l'aplicació d'Hénon té jacobià constant. Recordem les raons que dóna Hénon en defensa del seu model: permet una exploració numèrica més ràpida i més precisa (per tant, permet anar més lluny), i admet una anàlisi matemàtica més fàcil. És per això que, actualment, aquesta aplicació té interès *per se*, independentment del fet que sigui un model reduït d'un altre sistema dinàmic ([51],[3]).

Finalment, comentem el tercer tipus de reducció. Ens interessen només aquells difeomorfismes que són dissipatius globalment (en tot el domini de definició). Si aquesta dissipació vé representada directament per algun paràmetre del sistema, llavors sembla natural estudiar el cas límit en què el paràmetre tendeix a 0. En aquest cas extrem, l'aplicació ha deixat de ser un difeomorfisme, i la imatge del domini té dimensió inferior a la del propi domini. Normalment, aquesta aplicació

és pot escriure de manera que algunes de les variables no juguen cap paper rellevant. S'obté així una aplicació de dimensió inferior. Seguint amb l'exemple anterior, si fem 0 el paràmetre de dissipació de l'aplicació d'Hénon, obtenim un endomorfisme de la recta real, concretament l'*aplicació logística*. Aquest és l'exemple més senzill possible d'aplicació unidimensional no lineal, en el sentit que és un polinomi de grau 2, i, malgrat això, la seva dinàmica pot ser extremadament complexa i algunes qüestions resten encara obertes. Des d'un punt de vista didàctic, es pot afirmar que aquesta aplicació és la millor manera d'introduir a un neòfit en el món del *caos*.

El present treball consta de tres parts clarament diferenciades, amb el nexce comú d'estudiar una aplicació unidimensional com a pas previ d'un estudi posterior bidimensional. Seguidament comentem les diferències de concepte entre els tres capítols. En el primer, relacionem les propietats dinàmiques d'un tipus de difeomorfismes del pla fortament dissipatius amb les de les aplicacions diferenciables de la recta real, en la línia del tercer tipus de reducció comentat abans. Això ho fem sense relacionar aquestes aplicacions amb cap flux. En els altres dos capítols, en canvi, hi ha una edo autònoma d'ordre 3 que és la que volem estudiar en principi; i passem de les edo a difeomorfismes bidimensionals mitjançant aplicacions de Poincaré (tal com hem comentat en el segon tipus de reducció), per a passar posteriorment a aplicacions unidimensionals. La transformació dels fluxos en difeomorfismes és fa, però, de manera diversa. En el segon capítol, el camp és lineal a trossos, i això permet que l'aplicació de Poincaré sigui la veritable, mentre que en el tercer capítol, coneixem només les propietats qualitatives del camp, i el que fem és "inventar" un model d'aplicació de Poincaré que retengui aquestes propietats. Aquests dos capítols també tenen en comú que la complexitat de la dinàmica està relacionada amb el *fenomen de Silnikov* ([50], mentre que una altra diferència és en la reducció a dimensió 1: en el capítol 2, mitjançant el pas al límit d'un paràmetre, s'obté una aplicació de la recta real amb discontinuïtats, que es pot pensar com l'aplicació de Poincaré d'un sistema dinàmic singular; mentre que al tercer es passa del difeomorfisme bidimensional, definit en dos anells, a un model d'aplicació unidimensional, definit en una circumferència. La reducció a dimensió 1 és, doncs, més analítica en el segon capítol, i més geomètrica (o intuïtiva) en el tercer.

Al començament de cada capítol hi ha un resum del seu contingut, i per això no

ho repetim aquí. Remarquem només algunes de les contribucions més important d'aquest treball. D'entre els diversos fenòmens dinàmics que tractem, ens interessen especialment aquells que provoquen més complexitat en la dinàmica. Per això, al primer capítol destacaria l'apartat relatiu a l'extensió de les varietats invariants d'un punt periòdic sella del cas unidimensional al bidimensional, ja que la possible intersecció d'aquestes és la causa de bifurcacions globals extremadament complexes, molt més que els fenòmens derivats de les bifurcacions locals. Del segon capítol cal fer notar que, al costat de les anàlisis que s'hi fan, ha calgut portar a terme una gran quantitat de càlculs numèrics, els quals potser no estan suficientment especificats en la redacció. Finalment, el tercer capítol té, com a eix central, l'estudi d'atractors del model unidimensional. Encara que també es donen resultats (analítics i numèrics) del difeomorfisme bidimensional, el treball amb l'aplicació unidimensional és molt més factible i barat. La senzillesa extrema d'aquest model el fa molt interessant de cara a estudis posteriors.

Capítol 1

Difeomorfismes del pla pròxims a endomorfismes en dimensió 1

En aquest capítol relacionarem aplicacions en dimensió 1 diferenciables i un tipus particular de difeomorfismes en dimensió 2 fortament dissipatius. Veurem que moltes propietats es conserven quan passem d'un cas a l'altre, però que també hi ha algunes diferències. Un cas paradigmàtic, i que serveix d'il·lustració, és la immersió de l'aplicació logística $f_a(x) = 1 - ax^2$ en l'aplicació d'Hénon

$$F_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y - ax^2 \\ bx \end{pmatrix}.$$

Un recull recent de propietats en aquest cas específic és [40], però hi ha moltes altres contribucions posteriors al treball original d'Hénon [26].

La idea bàsica de tot el que farem és la següent. La dinàmica d'un endomorfisme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és "equivalent" a la de l'aplicació "singular" $F_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida mitjançant

$$F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix};$$

i, usant mètodes pertorbatius, es poden estudiar quines propietats s'estenen de F_0 a difeomorfismes $F_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pròxims a F_0 (el paràmetre b té relació directa amb la dissipació).

Observem que F_0 contrau tot \mathbb{R}^2 a un subconjunt de la recta $y = 0$; en particular, no és un difeomorfisme.

Altres autors han estudiat aspectes particulars de perturbacions d'aplicacions singulars d'altres tipus, preferentment $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix}$; destaquem, per exemple, [38], [55], [31] i [56] (o [57]).

Començarem amb una recopilació (adaptada als nostres interessos) dels conceptes bàsics de sistemes dinàmics que ens fan falta per al desenvolupament posterior del capítol. Seguidament, estudiarem (per separat) l'extensió, de dimensió 1 a dimensió 2, de les propietats següents:

- Existència de punts periòdics, la seva estabilitat, i les possibilitats de bifurcacions de codimensió 1. Aquí, l'extensió no presenta cap problema.
- Validesa del teorema de Hartman-Grobman per a famílies d'aplicacions bidimensionals que depenen d'un paràmetre i tals que, quan el paràmetre pren un valor concret, donen una aplicació degenerada (en el sentit que la imatge de \mathbb{R}^2 és una corba unidimensional). Estudiem la dependència contínua de l'aplicació que conjuga amb la part lineal respecte al paràmetre.
- Demostrem la dependència diferenciable de les varietats invariants d'un punt periòdic hiperbòlic respecte a un paràmetre en el cas d'una família de difeomorfismes que són pertorbació d'una aplicació singular o degenerada.
- Acabem amb l'extensió de l'existència de punts homoclínic *transversals* dels cas degenerat al no degenerat i comentem les dificultats en l'extensió dels punts homoclínic tangencials.

1.1 Recull de conceptes i resultats bàsics

Recordarem aquí els conceptes i resultats que hem de menester en els apartats següents. L'interès principal és que, a diferència de la majoria de textos, les definicions i propietats estan adaptades (sempre que això és possible) al cas d'aplicacions diferenciables que no siguin necessàriament difeomorfismes locals. En contrapartida, ens restringim a espais euclidians de dimensió finita.

Sigui $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació diferenciable amb continuïtat. L'*òrbita*

endavant d'un punt $x \in \mathbb{R}^m$ és el conjunt

$$O_+(x) = \{f^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

on f^i significa la composició de f i vegades: $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_i$. Una òrbita endarrera de x és

$$O_-(x) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_0 = x, x_i = f(x_{i+1}) \forall i \geq 0\},$$

i una òrbita completa de x és la reunió de l'òrbita endavant i una òrbita endarrera. Observem que és possible que un punt no tingui cap òrbita endarrera (aquest és el cas si $x \notin \text{Im} f$) o que en tingui diverses; l'òrbita endavant, en canvi, és sempre única. Si f és un difeomorfisme llavors existeix una única òrbita de cadascun dels tipus per a cada $x \in \mathbb{R}^m$.

La dinàmica de f ve regida pel comportament asimptòtic de les òrbites dels punts de \mathbb{R}^m . Les òrbites finites tenen un interès especial. Un punt fix de f és un punt $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = x$; un punt periòdic de f és un punt fix d'algun iterat de f : si $f^n(x) = x$ i $f^i(x) \neq x \forall i = 1 \div n - 1$ llavors el conjunt $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ constitueix una òrbita periòdica de f i cadascun dels seus punts té període n . A continuació ens restringirem a punts fixos, però tot el que direm es pot adaptar fàcilment a punts periòdics canviant f per f^n (si n és el període).

Sigui $x \in \mathbb{R}^m$ un punt fix de f i siguin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ els valors propis de $Df(x)$ (matriu jacobiana de f en x); x és hiperbòlic si $|\lambda_i| \neq 1 \forall i = 1 \div m$ (notem que admetem la possibilitat que $0 \in \text{Spec } Df(x)$). Tenim la següent classificació de punts fixos hiperbòlics:

- a) $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m| < 1$: estable, atractor o pou,
- b) $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m| > 1$: repulsor o font,
- c) altrament: sella.

Un punt fix és inestable si és d'algun dels tipus b) o c). La causa dels noms usats és el resultat que recordem tot seguit.

Proposició 1.1.1 a) Si x és un punt fix atractor de f llavors existeix un entorn $U \subset \mathbb{R}^m$ de x tal que $\forall y \in U, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$.

b) Si x és un punt fix repulsor de f llavors existeix un entorn $U \subset \mathbb{R}^m$ de x tal que $\forall y \in U$ existeix una òrbita endarrera de y que tendeix cap a x .

Demostració: Considerem una norma $\| \cdot \|$ de \mathbb{R}^m tal que $\|Df(x)\| \leq k < 1$. Com que f és de classe C^1 , existeix una bola centrada a x , B_r , tal que $\forall z \in B_r$ també es verifica que $\|Df(z)\| \leq k < 1$. Usant el teorema del valor mitjà s'obté $\forall y \in B_r$: $\|f(y) - x\| = \|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| \sup_{z \in (x,y)} \|Df(z)\| \leq A\|y - x\|$.

Iterant aquesta desigualtat obtenim a):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n(y) - x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \|y - x\| = 0.$$

Quan a l'apartat b), observem que si x és repulsor llavors $Df(x)$ és un isomorfisme i, en conseqüència, l'aplicació f té inversa local: f^{-1} . El punt x és fix atractor per f^{-1} i usem l'apartat a). \square

Sovint treballem amb aplicacions f que són *dissipatives* globalment; això vol dir que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ es verifica $|\det(Df(x))| < 1$; en aquest cas, el tipus repulsor no es pot donar (la causa és que $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = \det(Df(x))$).

Els punts fixos hiperbòlics tenen "bones" propietats, com veurem a continuació.

Teorema 1.1.2 (de Hartman-Grobman, versió local) *Sigui $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfisme de classe C^1 i sigui x un punt fix hiperbòlic de f ; llavors existeixen entorns V de x i U de 0, i existeix un homeomorfisme $h : U \rightarrow V$ tals que*

$$h \circ Df(x) = f \circ h.$$

Es pot trobar una demostració a [45]. Dit d'una altra manera, en un entorn d'un punt fix hiperbòlic, f és *topològicament conjugada* (mitjançant h) a la seva part lineal $Df(x)$.

L'homeomorfisme h que dona la conjugació no és únic (per a un exemple, vegeu [45, pàg. 61]); ara bé, si imposem que h sigui de la forma $Id + u$, amb u funció contínua i fitada, i també que f sigui una pertorbació de la seva part lineal, llavors sí que hi ha unicitat. El següent resultat està demostrat a [53].

Teorema 1.1.3 (de Hartman-Grobman, versió global) *Considerem dos isomorfismes topològics $L_s : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ i $L_u : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^u$ que verifiquin $\|L_u^{-1}\|$,*

$\|L_s\| < 1$, i definim $L : \mathbb{R}^{u+s} \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$ mitjançant $L(x, y) = (L_u(x), L_s(y))$; llavors existeix $\epsilon = \epsilon(L) > 0$ tal que $\forall f : \mathbb{R}^{u+s} \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$ contínua, fitada i amb constant de Lipschitz menor que ϵ , existeix un únic homeomorfisme $h : \mathbb{R}^{u+s} \rightarrow \mathbb{R}^{u+s}$ de la forma $Id + u$, amb u contínua i fitada, de manera que $h \circ L = (L + f) \circ h$. A més, h depèn contínuament de f .

Notem, però, que el teorema de Hartman-Grobman no és cert, en general, per a aplicacions C^1 que no siguin difeomorfismes. Un exemple senzill el dona l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y) = (x^2, 2y)$. El punt $(0, 0)$ és fix i hiperbòlic, i verifica $Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (recordem que la nostra definició d'hiperbolicitat admet que 0 sigui valor propi de la part lineal). És evident que f i $L(x, y) = (0, 2y)$ no són topològicament conjugats: $\forall h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfisme, $h \circ L(\mathbb{R}^2)$ és una corba unidimensional, mentre que $f \circ h(\mathbb{R}^2)$ és un semiplà.

A continuació, explorarem amb més detall la semblança local d'una aplicació amb la seva part lineal en un entorn d'un punt fix hiperbòlic. El resultat és el teorema de la varietat estable. Fem abans unes definicions. Per a un punt fix $x = f(x)$ de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , definim el *conjunt estable*

$$W^s(x, f) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x\}$$

i el *conjunt inestable*

$$W^u(x, f) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m \text{ amb } y_0 = y,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x \text{ i } \forall n \geq 0 \ y_n = f(y_{n+1})\}$$

. Si no hi ha confusió amb l'aplicació, escriurem només $W^s(x)$ i $W^u(x)$, i si no hi ha confusió amb el punt fix, simplement W^s i W^u . Observem la diferència entre les dues definicions, deguda al fet que f pot ser no invertible (i, per tant, $\exists y \in \mathbb{R}^m$ tal que $\text{card } f^{-1}(\{y\}) \neq 1$); si f és un difeomorfisme llavors $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$.

Proposició 1.1.4 W^s i W^u són conjunts invariants, en el sentit $f(W^s) \subset W^s$ i $f(W^u) = W^u$.

Demostració: Si $y \in f(W^s)$ llavors $\exists z$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = x$ i $f(z) = y$; per tant, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$.

Si $y \in f(W^u)$ llavors $\exists z, \exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tals que $y = f(z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$, $z_0 = z$, i $z_n = f(z_{n+1})$. Definim $y_0 = y$, $y_n = z_{n-1} \forall n \geq 1$ i es verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ i $y_n = f(y_{n+1}) \forall n \geq 0$; per tant $y \in W^u$. A l'inrevés, si $y \in W^u$, sigui $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_0 = y$, $y_n = f(y_{n+1})$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$; suprimint el primer terme obtenim que una antiimatge de y és de W^u ; per tant $y \in f(W^u)$. \square

Nota. Es pot donar la possibilitat $W^s \not\subset f(W^s)$. Considerem, per exemple, una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, estrictament monòtona creixent, i que verifiqui $f'(x) \in (0, 1) \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$, de manera que $W^s(0) = \mathbb{R}$, mentre que $f(W^s) = (-1, 1)$. De fet, és fàcil veure l'equivalència $y \in f(W^s) \iff y \in W^s \cap \text{Imatge}(f)$.

Anàlogament al cas de difeomorfismes, els conjunts estable i inestable es poden generar a partir de trossos locals: $\forall \epsilon > 0$ definim el *conjunt estable ϵ -local*

$$W_\epsilon^s = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x \text{ i } \|f^n(y) - x\| \leq \epsilon \forall n \geq 0\},$$

i el *conjunt inestable ϵ -local*

$$W_\epsilon^u = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ que verifica } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x, y_0 = y \\ \text{i } \forall n \geq 0 y_n = f(y_{n+1}) \text{ i } \|y_n - x\| < \epsilon\}.$$

De les definicions, és trivial que W_ϵ^s i W_ϵ^u contenen x i que $W_\epsilon^s \subset W^s$ i $W_\epsilon^u \subset W^u$.

Proposició 1.1.5 a) $W^s = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(W_\epsilon^s)$,

b) $W^u = \bigcup_{k \geq 0} f^k(W_\epsilon^u)$.

Demostració: Si $y \in \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(W_\epsilon^s)$ llavors $\exists k \geq 0$ tal que $f^k(y)$ verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(f^k(y)) = x$ i $\|f^{n+k}(y) - x\| < \epsilon$. En particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$, i per tant $y \in W^s$. D'altra banda, si $y \in W^s$ llavors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$; per tant, donat $\epsilon > 0$, $\exists N \geq 0$ tal que $\forall n \geq N \|f^n(y) - x\| < \epsilon$. En particular, $f^N(y) \in W_\epsilon^s$; o sigui $y \in f^{-N}(W_\epsilon^s)$. Hem vist a); passem a b).

Suposem que $y \in f^k(W_\epsilon^u)$; llavors $\exists z \in W_\epsilon^u$ tal que $f^k(z) = y$. Per definició, $\exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ amb $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$, $z_0 = z$ i $\forall n \geq 0 z_n = f(z_{n+1})$ i $\|z_n - x\| < \epsilon$. Definim $y_0 = y = f^k(z)$, $y_1 = f^{k+1}(z), \dots, y_k = z = z_0, y_{k+j} = z_j \forall j > 0$ i s'obté $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ amb $y_0 = y$ i $y_n = f(y_{n+1})$; per tant $y \in W^u$. A l'inrevés, si

$y \in W^u$ llavors $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ amb $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$, $y_0 = y$ i $y_n = f(y_{n+1}) \forall n \geq 0$. Ara bé, donat $\epsilon > 0$, $\exists N \geq 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \|y_n - x\| < \epsilon$; en particular, $y_N \in W_\epsilon^u$ i, per tant $y = y_0 \in f^N(W_\epsilon^u)$. \square

Ens interessem per l'estructura que tenen aquests conjunts. Ja hem vist que si x és un punt fix atractor (respectivament repulsor) de f , llavors W^s (respectivament W^u) conté una bola oberta centrada en x . Ara bé, en el cas atractor, W^u és trivial (es redueix al punt x), en canvi, en el cas repulsor W^s pot tenir més punts, per exemple, les antiimatges successives de x .

Més en general, per a punts fixos hiperbòlics qualssevol, el *teorema de la varietat estable* afirma que W^s i W^u tenen estructura *local de varietats diferenciables*, les quals poden pensar-se com una generalització dels subspais *estable* (o *contractiu*) i *inestable* (o *expansiu*) del cas lineal. Recordem en primer lloc aquest cas.

Siguin $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal i $0 = L(0)$ punt fix hiperbòlic; podem associar a L una *descomposició canònica* de \mathbb{R}^m en suma directa, $\mathbb{R}^m = E^u \oplus E^s$, on E^u (respectivament E^s) és el subspai propi generalitzat corresponent als valors propis de mòdul > 1 (respectivament < 1). Es verifica $L(E^u) \subset E^u$, $L(E^s) \subset E^s$, $E^u = W^u(0, L)$ (*subspai inestable*) i $E^s = W^s(0, L)$ (*subspai estable*). A més, existeixen *normes adaptades*, $\|\cdot\|_u$ i $\|\cdot\|_s$, en E^u i E^s , respectivament, tals que $\|L|_{E^u}^{-1}\|_u < 1$ i $\|L|_{E^s}\|_s < 1$ (observem que $L|_{E^u}$ és un automorfisme; en canvi és possible que $L|_{E^s}$ no sigui invertible). La norma natural de \mathbb{R}^m associada a la descomposició anterior és $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_u, \|y\|_s\}$.

Nota. A causa que $\mathbb{R}^m = E^u \oplus E^s \simeq E^u \times E^s$, fem l'abús de notació d'escriure $(x, y) \in E^u \times E^s$ per a l'element de \mathbb{R}^m que té, com a descomposició en suma directa, l'expressió $x + y$, amb $x \in E^u$ i $y \in E^s$; la definició adequada de la norma seria: $\forall z \in \mathbb{R}^m \|z\| = \max\{\|pr_{E^u}(z)\|_u, \|pr_{E^s}(z)\|_s\}$.

Per al cas no lineal, tenim la següent generalització, que és una adaptació d'un resultat de [28].

Teorema 1.1.6 (de la varietat estable) *Sigui $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineal. Suposem que $0 = L(0)$ és un punt fix hiperbòlic, que $\mathbb{R}^m = E^u \oplus E^s$ és la descomposició canònica associada a L i que $\|\cdot\|_u$ i $\|\cdot\|_s$ són les normes adaptades corresponents. Sigui $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, amb $f(0) = 0$, $Df(0) = L$.*

Si la constant de Lipschitz de $f - L$ és suficientment petita llavors els conjunts

$$U = \bigcap_{n \geq 0} f^n(H), \text{ on } H = \{(x, y) \in E^u \times E^s : \|x\|_u \geq \|y\|_s\} \text{ i}$$

$$S = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V), \text{ on } V = \{(x, y) \in E^u \times E^s : \|y\|_s \geq \|x\|_u\}$$

són gràfiques d'aplicacions de classe C^r , $g^u : E^u \rightarrow E^s$ i $g^s : E^s \rightarrow E^u$, respectivament (per tant, són varietats diferenciables) i verifiquen:

a) $z \in U \iff$ Existeix alguna successió $(f^{-n}(z))_{n \geq 0}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(z) = 0$
 \iff Existeix alguna successió $(f^{-n}(z))_{n \geq 0}$ que està fitada; i

$$z \in S \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0 \iff f^n(z) \text{ està fitada.}$$

En particular, $U = W^u(0, f)$ i $S = W^s(0, f)$.

b) U és tangent a E^u en 0 i S és tangent a E^s en 0.

c) Les varietats U i S depenen contínuament (en norma C^r) de f .

Aquest resultat és, potser, més conegut en la seva versió local, ja que la hipòtesi $Lip(f - L)$ suficientment petit és molt restrictiva.

Teorema 1.1.7 (de la varietat estable local) Sigui $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, amb un punt fix hiperbòlic $0 = f(0)$ i considerem $L = Df(0)$ i $\mathbb{R}^m = E^u \oplus E^s$ la descomposició canònica associada a L . Llavors existeix $\epsilon > 0$ tal que els conjunts $W_\epsilon^u(0, f)$ i $W_\epsilon^s(0, f)$ són varietats diferenciables, tangents a E^u i E^s , respectivament, en el punt 0; i que són les gràfiques d'aplicacions $g^u : B_\epsilon^u \rightarrow B_\epsilon^s$ i $g^s : B_\epsilon^s \rightarrow B_\epsilon^u$ de classe C^r .

Nota. B_ϵ^u (respectivament B_ϵ^s) és la bola de E^u (respectivament E^s) centrada a l'origen i de radi ϵ .

Demostració: En una bola B_δ , suficientment petita, és cert que $Lip(f - L) < \tau$ petit. Canviem f per \tilde{f} de classe C^r tal que:

1) fora de B_δ , $\tilde{f} = L$,

2) dins de $B_{\delta/2}$, $\tilde{f} = f$.

Això es pot fer usant funcions del tipus "palangana": sigui $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\alpha(t) = 1 \forall |t| \leq \delta/2$ i $\alpha(t) = 0 \forall |t| \geq \delta$; definim $\tilde{f} = \alpha f + (1 - \alpha)L$.

Usant el teorema per a \tilde{f} , obtenim $W^u(0, \tilde{f})$ i $W^s(0, \tilde{f})$ que són gràfiques de funcions g^u, g^s . Restringint-nos a $B_{\delta/2}$ obtenim les varietats locals. \square

Fem unes quantes observacions referents a la importància que té, sobre les varietats, el fet que f sigui no invertible:

- 1) Si f és difeomorfisme i $x = f(x)$ és un punt fix hiperbòlic (això no val per a punts periòdics de període més gran que 1) llavors $W^s(x, f)$ i $W^u(x, f)$ són conjunts connexos; si f no és difeomorfisme, W^u és encara connex (ja que W_t^u és connex per ser la gràfica d'una aplicació contínua i $W^u = \bigcup_{k \geq 0} f^k(W_t^u)$ és reunió de connexos amb un punt comú: x), però W^s pot no ser-ho; per exemple, si considerem $f(x, y) = (x^2, 2y)$, llavors $(1, 0)$ és un punt fix repulsor amb $W^s = \{(1, 0)\} \cup \{(-1, 0)\}$.
- 2) Per a difeomorfismes, dos conjunts estables (o dos d'instables) no es poden tallar; en canvi, per a aplicacions no invertibles, dos conjunts estables diferents encara són disjunts (una successió no pot tenir dos límits diferents), però dos d'instables poden tenir intersecció no buida (una successió d'antiimatges pot tendir a un punt fix, i una altra successió a un altre).
- 3) Les patologies dels conjunts estable i inestable poden ser encara més xocants, com demostra el següent exemple. Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe C^∞ , creixent a $(-\infty, a)$, constant a (a, b) i decreixent a (b, ∞) , on $0 < a < b$. Suposem també que 0 és un punt fix repulsor amb $f'(0) > 1$ i, finalment, que $\forall x \in (a, b)$, $f(x) = c > b$ i $f(c) = 0$. En aquest cas, la varietat inestable local de 0 té dimensió 1 i l'estable és reduït al punt 0. Ara bé, el conjunt total W^s conté també l'interval (a, b) i el punt c ; o sigui, existeixen components connexes de W^s amb dimensions diferents.

Nota. Encara que nosaltres no continuem en aquesta direcció, els resultats referents a varietats invariants estable i inestable de punts periòdics hiperbòlics es poden estendre en dos sentits:

- a) per a *conjunts* hiperbòlics,

b) per a punts periòdics *no hiperbòlics*; això dóna lloc a varietats centre-estable, centre-inestable i central.

La forma dels conjunts estable i inestable és important ja que, si es tallen, la dinàmica esdevé molt complexa. Per simplicitat, ens limitarem a punts fixos.

Sigui x^0 un punt fix hiperbòlic d'una aplicació de classe C^1 , $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Una òrbita (completa) de f , $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_{n+1} = f(x_n)$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), s'anomena *òrbita homoclínica a x^0* si $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^0$. Excloem el cas trivial en què $x_n = x^0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, però pot ser $x_n = x^0$, $\forall n \geq n_0$. Els punts de l'òrbita diferents de x^0 s'anomenen *punts homoclínics a x^0* ; per les definicions, els punts homoclínics a x^0 són els elements de $W^s(x^0, f) \cap W^u(x^0, f) \setminus \{x^0\}$.

Proposició 1.1.8 a) *Si x^0 és atractor llavors no existeixen òrbites homoclíniques a x^0 .*

b) *Si x^0 és repulsor llavors, per tal que existeixin òrbites homoclíniques a x^0 , és necessari que $\text{card}(f^{-1}\{x^0\}) > 1$ i que existeixi $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n = x^0$ (en particular, f no pot ser un difeomorfisme).*

Demostració. a) La causa és que no es pot donar la condició $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = x^0$. Concretament, si x^0 és atractor llavors $\exists k \in (0, 1)$ tal que $\forall B_r(x^0)$, bola centrada a x^0 i de radi $r > 0$, amb r suficientment petit, es verifica:

$$\forall x \in B_r(x^0) \quad \|f(x) - x^0\| \leq k \|x - x^0\|.$$

En particular, si $x \in B_r(x^0)$ llavors $f(x) \in B_r(x^0)$.

Suposem que $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ verifica $x_{n+1} = f(x_n)$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$), $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = x^0$. Aleshores, $\forall r > 0$ prou petit, $\exists N \in \mathbb{Z}$ tal que, $\forall n \geq N$, $x_n \in B_r(x^0)$; però a causa de l'observació anterior, també $x_n \in B_r(x^0)$, $\forall n > N$. Per tant $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in B_r(x^0)$. Com que això val $\forall r > 0$ prou petit, ha de ser $x_n = x^0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b) La idea bàsica és que si x^0 no té cap altra antiimatge llavors és impossible que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^0$. D'una banda, si x^0 és repulsor llavors $\forall r > 0$ prou petit es verifica:

$$\forall x \in B_r(x^0), x \neq x^0, \exists n > 0 \text{ tal que } f^n(x) \notin B_r(x^0).$$

De l'altra, si $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ verifica $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^0$ llavors $\forall r > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ $x_n \in B_r(x^0)$. Però si $r > 0$ és prou petit,

l'observació anterior permet afirmar que $x_N = x^0$. Considerem ara x_{N-1} , si no és x^0 llavors ja tenim el que volíem; si és x^0 , repetim el procés anterior canviant N per $N - 1$. D'aquesta manera s'obté que, o bé x^0 té alguna altra antiimatge, o bé $x_n = x^0 \forall n \in \mathbb{Z}$. \square

Fins ara no ha fet falta que f fos difeomorfisme. En aquest cas, es verifica el següent resultat ([52]).

Teorema 1.1.9 (homoclínic de Smale) *Sigui $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfisme de classe C^1 amb un punt fix hiperbòlic $p = f(p)$ tal que existeix un punt $q \neq p$ on s'intersequen transversalment les varietats $W^s(p, f)$ i $W^u(p, f)$. Aleshores existeix un conjunt de Cantor $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, amb $q \in \Lambda$ i existeix $n > 0$ tals que $f^n(\Lambda) = \Lambda$ i $f^n|_{\Lambda}$ és topològicament equivalent a un automorfisme shift. En particular, en cada entorn d'un punt homoclínic transversal existeixen punts periòdics.*

Per a entendre el significat d'aquest resultat cal recordar que dues varietats M i N , contingudes a \mathbb{R}^m , s'intersequen transversalment en $q \in M \cap N$ quan es verifica $T_q M + T_q N = \mathbb{R}^m$, on $T_q M$ indica l'espai tangent a M en q . D'altra banda, recordem la definició del *shift*. Sigui S un conjunt finit, de cardinal $N \geq 2$; suposarem $S = \{0, 1, \dots, N - 1\}$. Sigui \sum_N el conjunt de successions biinfinites, $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, formades amb elements de S : $a_n \in S (\forall n \in \mathbb{Z})$. Llavors

$$d((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{N^{|i|}}$$

defineix una mètrica a \sum_N ; i \sum_N és homeomorf a un conjunt de Cantor. Definim l'*automorfisme shift* $\sigma : \sum_N \rightarrow \sum_N$ mitjançant

$$(\sigma\{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}\})_j = a_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}.$$

És una aplicació contínua i la seva dinàmica és molt complexa, encara que totalment determinada; concretament es verifica

- 1) el cardinal del conjunt de punts periòdics de període N és N^n ,
- 2) el conjunt de punts periòdics és dens a \sum_N , i
- 3) σ té una òrbita densa a \sum_N (és diu que σ és *topològicament transitiu*).

Existeixen algunes variacions del resultat anterior (vegeu [42], [24], [16]), per exemple:

- 1) Es poden fer hipòtesis que restringeixin la quantitat de *seqüències admissibles*, normalment mitjançant una *matriu de transició* (formada per zeros i uns) que caracteritza, per a cada símbol de S , quins altres símbols de S són permesos. Això porta a definir *subshifts de tipus finit*.
- 2) Es poden generalitzar els conceptes anteriors al cas d'un *alfabet* S amb una quantitat *numerable* de símbols.

Però totes fan referència a la complexitat de la dinàmica d'una aplicació si té òrbites homoclíniques transversals. A la secció 5 donarem la versió equivalent, per a aplicacions que no són difeomorfismes (però que són un tipus molt particular d'endomorfismes) de la propietat de transversalitat.

Fins ara hem fet referència a punts fixos (o periòdics) hiperbòlics. La pèrdua del caràcter hiperbòlic va generalment lligada a alguna *bifurcació local*, i el context natural per a estudiar aquest fenomen és mitjançant famílies d'aplicacions que depenen de paràmetres. Ens restringirem a les bifurcacions més senzilles, en què un sol paràmetre és suficient.

Sigui, doncs, $f_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in I$ (interval real), una família d'aplicacions de classe C^r , $r \geq 1$, i que depenen de forma C^1 de a . Suposem que, quan $a = a_0$, $x = x_0$ és un punt fix no hiperbòlic (si el període és n , canviem f_a per $f_a^n = \underbrace{f_a \circ \dots \circ f_a}_n$); això ens dona tres possibilitats:

- 1) $Df_{a_0}(x_0)$ té un valor propi 1,
- 2) $Df_{a_0}(x_0)$ té un valor propi -1,
- 3) $Df_{a_0}(x_0)$ té dos valors propis complexos conjugats, de mòdul 1.

Aquestes possibilitats no són excloents, sinó que poden donar-se simultàniament, augmentat així la *codimensió* de la bifurcació. En els propers apartats, però, només considerarem aplicacions, o bé en dimensió 1, o bé en dimensió 2 dissipatives ($|\det(Df_a(x_0))| < 1$); en aquests casos, la possibilitat 3) no es pot donar i, a més, 1) i 2) són excloents.

Així doncs, ens limitem a recordar dos tipus de bifurcacions locals de codimensió 1, les quals, per tal que no siguin degenerades, han de complir unes condicions de transversalitat adequades.

Una manera d'estudiar bifurcacions és usant la *teoria de la varietat central*, la qual permet reduir la dimensió de l'espai a la mínima necessària per al tipus concret de bifurcació. La idea essencial és la descomposició de l'espai \mathbb{R}^m en $E^s \oplus E^u \oplus E^c$, de manera que el caràcter no hiperbòlic queda capturat en la *varietat central* E^c , la dimensió de la qual és el cardinal dels valor propis de mòdul 1. Notem, però, que aquesta teoria és més complexa que la de les varietats estable i inestable; així, per exemple, es perd diferenciabilitat i no es pot assegurar la unicitat. Aquest punt de vista es pot trobar a [39] o [13]. Usant això, l'estudi de 1) o 2) es pot reduir al cas unidimensional.

Per als nostres propòsits preferim una formulació directa que no varii la dimensió inicial del problema. Ens interessa dimensió 2 (encara que els resultats només varien lleugerament per a dimensió qualsevol); en cada cas farem una adaptació a dimensió 1. Els resultats següents es poden trobar a [57].

Teorema 1.1.10 *Sigui $f_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a \in I$ (interval real) una família d'aplicacions de classe C^2 i que depèn de forma C^1 respecte al paràmetre a . Notarem també $f_a(p) \equiv f(p, a) \forall p \in \mathbb{R}^2, \forall a \in I$. Suposem que, quan $a = a_0$, p_0 és un punt fix ($f_{a_0}(p_0) = p_0$) que verifica:*

- 1) $\mu = 1$ és un valor propi simple de $Df_{a_0}(p_0)$, amb vector propi per la dreta v i vector propi per l'esquerra w . L'altre valor propi és λ , amb $|\lambda| \neq 1$.
- 2) $w^T D^2 f_{a_0}(p_0)(v, v) \neq 0$.
- 3) $w^T \frac{df}{da}(p_0, a_0) \neq 0$.

Llavors f_a desenvolupa una bifurcació sella-node genèrica en el punt p_0 quan $a = a_0$.

La tesi d'aquest teorema significa que existeix una corba C^1 a $U \times I_0$ (on I_0 és un interval contingut a I que conté a_0 i U és una bola de \mathbb{R}^2 que conté p_0) que passa per (p_0, a_0) i té una tangència quadràtica en aquest punt respecte al pla $a = a_0$. A més, cada punt (p, a) de la corba representa un punt fix de la funció: $f_a(p) = p$.

Geomètricament, això vol dir que, en un entorn de p_0 , la funció f_a (per $a \simeq a_0$), o bé té dos punts fixos quan $a > a_0$ i cap quan $a < a_0$, o bé en té dos per a $a < a_0$ i cap quan $a > a_0$ (dependent dels signes de les expressions 2) i 3)). Quan n'existeix dos, a més, un és una sella i l'altre és un node; aquest és atractor si $|\lambda| < 1$ o repulsor si $|\lambda| > 1$.

Nota. La dimensió corresponent al valor propi λ no juga cap paper rellevant; això fa que la reducció del teorema a dimensió 1 sigui immediata:

Si la família $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = f(x, a)$, verifica $f_{a_0}(x_0) = x_0$, $f'_{a_0}(x_0) = 1$, $f''_{a_0}(x_0) \neq 0$, $\frac{df}{da}(x_0, a_0) \neq 0$ llavors desenvolupa una bifurcació sella-node genèrica en x_0 per $a = a_0$.

De fet, aquest resultat ve a dir que, localment, qualsevol bifurcació sella-node genèrica és qualitativament igual a la de la família $f_a(x) = x \pm a + x^2$ en $a = x = 0$.

El resultat escaient quan un valor propi val -1 és el següent ([57]):

Teorema 1.1.11 *Sigui $f_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_a(p) \equiv f(p, a)$, $a \in I$ (interval real), una família d'aplicacions de classe C^3 i que depèn de forma C^1 respecte al paràmetre a . Suposem que, quan $a = a_0$, p_0 és un punt fix ($f_{a_0}(p_0) = p_0$) que verifica:*

- 1) *Spec($Df_{a_0}(p_0)$) = $\{\lambda, \mu\}$, amb $|\lambda| \neq 1$ i $\mu = -1$. Sigui v i w (respectivament v_1 i w_1) vectors propis per la dreta i per l'esquerra associats al valor propi μ (respectivament λ).*
- 2) $\frac{1}{2(1-\lambda)}(w^T D^2 f_{a_0}(p_0)(v, v_1))(w_1^T D^2 f_{a_0}(p_0)(v, v)) + \frac{1}{4}(w^T D^2 f_{a_0}(p_0)(v, v))^2 + \frac{1}{6}w^T D^3 f_{a_0}(p_0)(v, v, v) \neq 0$.
- 3) *En un entorn de $a = a_0$ i $p = p_0$, sigui $p(a)$ l'únic punt fix de f_a tal que $p(a_0) = p_0$ i sigui $\mu(a)$ el valor propi de $Df_a(p(a))$ tal que $\mu(a_0) = -1$; llavors $\frac{d\mu}{da}(a_0) \neq 0$.*

Llavors f_a desenvolupa una bifurcació flip genèrica en el punt p_0 quan $a = a_0$.

La tesi vol dir que, sota les hipòtesis del teorema, existeixen dues corbes de classe C^1 en un entorn de $(p_0, a_0) \in \mathbb{R}^2 \times I$ que verifiquen:

- a) *Ambdues passen pel punt (p_0, a_0) ; una representa punts fixos de f i l'altra, punts de període 2. Tots els punts són hiperbòlics, excepte p_0 quan $a = a_0$.*

- b) La corba de punts fixos té intersecció transversal amb el pla $a = a_0$; en $a = a_0$ el punt fix canvia d'estabilitat (de node a sella o a l'inrevés).
- c) La corba de punts 2-periòdics té una tangència quadràtica amb el pla $a = a_0$ en (p_0, a_0) ; o sigui, o bé f_a té en un entorn de p_0 , punts 2-periòdics per $a > a_0$ i no en té per $a < a_0$, o bé a l'inrevés.

Les diverses possibilitats dels punts b) i c) depenen dels signes de les expressions de 2) i 3).

Nota. En dimensió 1 el resultat és el següent:

Si la família $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = f(x, a)$, verifica $f_{a_0}(x_0) = 0$, $f'_{a_0}(x_0) = -1$, $\frac{1}{4}[f''_{a_0}(p_0)]^2 + \frac{1}{6}f'''_{a_0}(p_0) \neq 0$ i $\frac{d\mu}{da}(a_0) \neq 0$, on $\mu(a) = \frac{df}{dx}(p(a), a)$ i $p(a)$ és l'únic punt fix de f_a que existeix per $a \simeq a_0$ en un entorn de p_0 , llavors f_a desenvolupa una bifurcació flip genèrica en el punt p_0 quan $a = a_0$.

La tercera condició també es pot escriure com $(f_{a_0}^2)'''(p_0) \neq 0$, i la quarta és equivalent a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a}(p_0, a_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0, a_0) \frac{\partial f}{\partial a}(p_0, a_0) \neq 0$. Per tant, el model universal de bifurcació flip genèrica és $f_a(x) = (-1 \pm a)x \pm x^3$ en $a = x = 0$.

Per acabar, recordem que ens hem restringit a les bifurcacions genèriques de codimensió 1. Anulant alguna de les condicions de transversalitat i imposant-ne alguna altra s'obtenen altres bifurcacions, de codimensió més gran. La manera natural d'estudiar-les és usant famílies amb més paràmetres; algunes referències són [57] i [12].

1.2 Extensió de punts periòdics

En aquest apartat, estendrem algunes propietats de l'aplicació $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcions $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ "pròximes" al cas singular $F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$; més concretament, tractarem l'existència de punts periòdics, la seva estabilitat i les possibilitats de bifurcacions locals de codimensió 1.

Teorema 1.2.1 *Sigui $F_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una família uniparamètrica d'aplicacions que depenen de forma C^1 del paràmetre $b \in \mathbb{R}$ i tal que*

- a) $\forall b \neq 0$, F_b és un difeomorfisme de classe C^1 ,

b) $F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, on $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció de classe C^1 .

Segui p un punt periòdic de f de període n tal que $(f^n)'(p) \neq 1$. Llavors existeixen $b_0 > 0$ i una aplicació de classe C^1 , $z : I \equiv (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $z(b) = (x(b), y(b))$ tals que

- 1) $x(0) = p, y(0) = 0$,
- 2) $\forall b \in I$, $z(b)$ és un punt de període n de F_b ,
- 3) Si p és un atractor de f ($|(f^n)'(p)| < 1$) llavors $z(b)$ és un atractor de F_b , ($\forall b \in I$),
- 4) Si p és un repulsor de f ($|(f^n)'(p)| > 1$) llavors $z(b)$ és una sella de F_b , ($\forall b \in I$).

Demostració: A causa que $F_0^n(x, y) = (f^n(x), 0)$ (per tant, es conserva el tipus de la forma singular), és suficient fer la demostració per a període 1.

Definim $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mitjançant $G(x, y, b) = F_b(x, y) - (x, y)$. G és una funció de classe C^1 que verifica

$$G(p, 0, 0) = F_0(p, 0) - (p, 0) = (0, 0) \text{ i}$$

$$D_{(x,y)}G(p, 0, 0) = \begin{pmatrix} f'(p) - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

matriu no singular. Pel teorema de la funció implícita podem assegurar que existeixen b_0 i $z : I \equiv (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 verificant 1) i 2).

Considerem ara $M_b = D_{(x,y)}F_b(x(b), y(b)) \quad \forall b \in I$. Els valors propis de M_b depenen contínuament dels seus coeficients, i aquests són funció contínua de b . Com que, quan $b = 0$, els valors propis són $f'(p)$ i 0 , reduint I (si cal) es verificaran 3) i 4). \square

Quan $(f^n)'(p) = -1$, els apartats 1) i 2) encara són certs; ara bé, no es pot assegurar quin caràcter tindrà el punt $(x(b), y(b))$ per a $b \neq 0$ petit, ja que els valors propis de M_b són de la forma $O(b)$ i $-1 + O(b)$; per tant, $z(b)$ tant pot ser un pou com una sella. Cal posar més condicions sobre F_b per a assegurar de quin tipus és; això està tractat més endavant quan estenem la bifurcació flip.

D'altra banda, la possibilitat $|(f^n)'(p)| = 1$ correspon, generalment, a una bifurcació. A continuació veurem com es passa aquesta, si és genèrica, de dimensió 1 a dimensió 2.

Teorema 1.2.2 *Sigui $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una família biparamètrica d'aplicacions que depenen de forma C^1 de $a, b \in \mathbb{R}$ i tal que*

a) $\forall b \neq 0, F_{a,b}$ és un difeomorfisme de classe C^2 ,

b) $F_{a,0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, on $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una família d'aplicacions de classe C^2 ,

c) En $a = \alpha$, f_a desenvolupa una bifurcació sella-node genèrica de període n en el punt p , en el sentit que:

$$f_\alpha^n(p) = p, \quad \frac{d}{dx}(f_\alpha^n(p)) = 1, \quad \frac{d^2}{dx^2}(f_\alpha^n(p)) \frac{d}{da}(f_\alpha^n(p)) \neq 0 .$$

Llavors existeixen $b_0 > 0$ i una aplicació $z : I \equiv (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , $z(b) = (x(b), y(b), a(b))$, tals que

1) $x(0) = p, y(0) = 0$ i $a(0) = \alpha$,

2) $\forall b = \bar{b} \in I$ fixat, l'aplicació $F_{\bar{a},\bar{b}}$ desenvolupa una bifurcació sella-node genèrica de període n en $\bar{x} = x(\bar{b}), \bar{y} = y(\bar{b}), \bar{a} = a(\bar{b})$; o sigui

(a) $F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$,

(b) $\text{Spec}\{D_{(x,y)}F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})\} = \{\lambda, \mu\}$ amb $|\lambda| \neq 1, \mu = 1$,

(c) $w^T D_{(x,y)}^2 F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})(v, v) \neq 0$,

(d) $w^T D_a F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$,

on v i w són vectors propis no nuls de $DF_{\bar{a},\bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$ per la dreta i l'esquerra, respectivament, de valor propi $\mu = 1$.

Demostració: Suposem, per a simplificar, que el període és $n = 1$ i sigui $F_{a,b}(x, y) = (F_1(x, y, a, b), F_2(x, y, a, b))$. Notarem $z = (x, y, a, b)$. Definim una funció de classe C^1 $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mitjançant

$$G(z) = \begin{pmatrix} F_1(z) - x \\ F_2(z) - y \\ \left(\frac{dF_1}{dx}(z) - 1\right) \left(\frac{dF_2}{dy}(z) - 1\right) - \frac{dF_1}{dy}(z) \frac{dF_2}{dx}(z) \end{pmatrix} .$$

Observem que G s'anul·la quan $F_{a,b}(x, y) = (x, y)$ i $1 \in \text{Spec}[D_{(x,y)}F_{a,b}(x, y)]$. Usant que F_1 és f_a i F_2 és 0 quan $b = 0$, es veu que $G(p, 0, \alpha, 0) = (0, 0, 0)$ i que

$$D_{(x,y,a)}G(p, 0, \alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{da}[f_\alpha(p)] \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{d^2}{dx^2}[f_\alpha(p)] & 0 & \frac{d^2}{dx da}[f_\alpha(p)] \end{pmatrix} \equiv J$$

verifica $\det J = -\frac{d^2}{dx^2}[f_\alpha(p)]\frac{d}{da}[f_\alpha(p)] \neq 0$. Pel teorema de la funció implícita, existeixen b_0 i la funció z de classe C^1 , verificant 1), 2(a) i 2(b) (excepte la condició $|\lambda| \neq 1$). Les condicions $|\lambda| \neq 1$, 2(c) i 2(d) també són certes, si b_0 és prou petit, per continuïtat, ja que quan $b = 0$ es verifica

- $D_{(x,y)}F_{\alpha,0}(p, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\lambda = 0$, $w = v = (1, 0)$ (per exemple),
- $w^T D_{(x,y)}^2 F_{\alpha,0}(p, 0)(v, v) = \frac{d^2}{dx^2}[f_\alpha(p)] \neq 0$ i
- $w^T D_\alpha F_{\alpha,0}(p, 0)(v, v) = \frac{d}{da}[f_\alpha(p)] \neq 0$.

I totes aquestes expressions són també funció contínua de b_0 . \square

Nota. En el càlcul de les expressions on apareixen derivades hem usat el fet següent. Sigui $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció de classe C^n i sigui $q \in \mathbb{R}^m$; llavors $D^n h(q) : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_n \rightarrow \mathbb{R}^m$ és una aplicació multilinear definida mitjançant

$$D^n h(q)(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \frac{d^n f}{dx_{i_1} \dots dx_{i_n}}(q)$$

on $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ és la base canònica de \mathbb{R}^m .

Teorema 1.2.3 Sigui $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una família biparamètrica d'aplicacions de classe C^1 respecte $a, b \in \mathbb{R}$ i tal que

- a) $\forall b \neq 0$, $F_{a,b}$ és un difeomorfisme de classe C^3 ,
- b) $F_{a,0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, on $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una família d'aplicacions de classe C^3 ,

c) En $a = \alpha$, f_a desenvolupa una bifurcació flip genèrica de període n en el punt p , en el sentit que

- $f_\alpha^n(p) = p$,
- $\frac{df_\alpha^n}{dx}(p) = -1$ (per tant, existeix una funció $x(a)$, definida en un entorn de $a = \alpha$, amb $x(\alpha) = p$, la qual representa l'únic punt fix de f_a en un entorn de p),
- $\frac{d^3 f_\alpha^{2n}}{da^3}(p) \neq 0$ i
- $\frac{d\mu}{da}(\alpha) \neq 0$, on $\mu(a) = \frac{df_a}{dx}(x(a))$.

Llavors existeixen $b_0 > 0$ i una aplicació $z : I \equiv (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , $z(b) = (x(b), y(b), a(b))$, tals que

1) $x(0) = p$, $y(0) = 0$, $a(0) = \alpha$,

2) $\forall b = \bar{b} \in I$ fixat, l'aplicació $F_{a,\bar{b}}$ desenvolupa una bifurcació flip genèrica de període n en $\bar{x} = x(\bar{b})$, $\bar{y} = y(\bar{b})$, $\bar{a} = a(\bar{b})$, o sigui:

(a) $F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$,

(b) $\text{Spec}\{D_{(x,y)} F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})\} = \{\lambda, \mu\}$ amb $|\lambda| \neq 1$, $\mu = -1$,

(c) $\frac{1}{2(1-\lambda)} \{w^T D_{(x,y)}^2 F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})(v, v_1)\} \{w_1^T D_{(x,y)}^2 F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})(v, v)\} +$
 $+\frac{1}{4} \{w^T D_{(x,y)}^2 F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})(v, v)\}^2 +$
 $+\frac{1}{6} \{w^T D_{(x,y)}^3 F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})(v, v, v)\} \neq 0$,

on v i w (v_1 i w_1) són, respect., vectors propis de $D_{(x,y)} F_{\bar{a},\bar{b}}^n(\bar{x}, \bar{y})$ de valor propi -1 (λ), tals que $w^T v = w_1^T v_1 = 1$.

(d) Per al paràmetre a variant en un entorn de \bar{a} , sigui $(\bar{x}(a), \bar{y}(a))$ el punt n -periòdic de $F_{a,\bar{b}}$ tal que $\bar{x}(\bar{a}) = \bar{x}$, $\bar{y}(\bar{a}) = \bar{y}$ ($\bar{x}(a)$, $\bar{y}(a)$ existeixen localment pel teorema de la funció implícita), i sigui $\mu(a)$ el valor propi de $D_{(x,y)} F_{a,\bar{b}}^n(\bar{x}(a), \bar{y}(a))$ tal que $\mu(\bar{a}) = -1$; llavors $\frac{d}{da} \mu(\bar{a}) \neq 0$.

Demostració: Com al teorema anterior, suposem $n = 1$ i que F s'expressa $F_{a,b}(x, y) = (F_1(x, y, a, b), F_2(x, y, a, b))$. Recordem que quan $b = 0$, F_1 és f i F_2 val 0.

Definim $G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mitjançant

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, a, b) - x \\ F_2(x, y, a, b) - y \end{pmatrix}.$$

G és una funció de classe C^3 respecte x, y i de classe C^1 respecte a, b ; a més, $G(p, 0, \alpha, 0) = (0, 0)$ i

$$\det[D_{(x,y)}G(p, 0, \alpha, 0)] = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}f_\alpha(p) - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Pel teorema de la funció implícita, existeixen funcions de classe C^1 , $x(a, b)$ i $y(a, b)$ (definides en un entorn U de $a = \alpha, b = 0$) tals que $\forall a, b \in U$ $(x(a, b), y(a, b))$ és l'únic punt fix de $F_{a,b}$ en un entorn de $(p, 0)$, i $x(\alpha, 0) = p, y(\alpha, 0) = 0$.

En particular, resulta de la unicitat que, quan $b = 0$, $x(a, 0)$ és la funció $x(a)$ de la condició c) i $y(a, 0) = 0$.

Considerem ara $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, funció de classe C^1 , definida per

$$\begin{aligned} H(a, b) &= \det\{D_{(x,y)}F_{a,b}(x(a, b), y(a, b)) + Id\} = \\ &= \left[\frac{dF_1}{dx}(x(a, b), y(a, b), a, b) + 1 \right] \left[\frac{dF_2}{dy}(x(a, b), y(a, b), a, b) + 1 \right] - \\ &\quad - \frac{dF_2}{dx}(x(a, b), y(a, b), a, b) \frac{dF_1}{dy}(x(a, b), y(a, b), a, b). \end{aligned}$$

Recordem que, quan $b = 0$, $x(a, 0)$ és $x(a)$ (i, en particular, $x(\alpha) = p$), $y(a, 0) = 0$, F_1 és f i F_2 val 0; per tant H verifica

- $H(\alpha, 0) = \frac{df_\alpha}{dx}(p) + 1 = 0$,
- $H(a, 0) = \frac{d^f a}{dx}(x(a)) = \mu(a)$ i
- $\frac{dH}{da}(\alpha, 0) = \frac{d\mu}{da}(\alpha) \neq 0$.

Pel teorema de la funció implícita, existeix una funció de classe C^1 , $a(b)$, en un entorn, I , de $b = 0$ tal que $\forall b \in I, H(a(b), b) = 0$.

Tornem a escriure $x(b)$ per a designar $x(a(b), b)$, i $y(b)$ per a $y(a(b), b)$; llavors $x(b), y(b), a(b)$ són les funcions que verifiquen 1), 2(a), i 2(b) (excepte la condició

$|\lambda| \neq 1$). La resta de condicions es verifiquen, en un entorn prou petit de 0, per continuïtat respecte del cas $b = 0$, ja que tant λ , com l'expressió que apareix a 2(c), com $\frac{d\mu}{d\bar{a}}(\bar{a})$ són funcions contínues de \bar{b} . La comprovació per $\bar{b} = 0$ és la següent:

$$2(b) \quad D_{(x,y)} F_{\alpha,0}(p,0) = \begin{pmatrix} \frac{df_{\alpha}}{dx}(p) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ per tant } \lambda = 0 \neq 1 \text{ quan } \bar{b} = 0.$$

2(d) Si $\bar{b} = 0$, llavors $\bar{a} = \alpha$, i ja sabem, per hipòtesi, que $\frac{d\mu}{d\bar{a}}(\alpha) \neq 0$.

2(c) Podem prendre $v = w = (1,0)$ i $v_1 = w_1 = (0,1)$. Usant l'observació anterior al teorema per a $F_{\bar{a},\bar{b}} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $q = (\bar{x}, \bar{y})$ obtenim que l'expressió de 2(c) és

$$\frac{1}{2(1-\lambda)} \frac{d^2 F_1}{dx dy}(q) \frac{d^2 F_2}{dx^2}(q) + \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 F_1}{dx^2}(q) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 F_1}{dx^3}(q) \right).$$

Quan $\bar{b} = 0$ (per tant, $\bar{a} = \alpha$, $\bar{x} = p$, $\bar{y} = 0$, F_1 és f_{α} i F_2 val 0) obtenim

$$\frac{1}{4} \left(\frac{d^2 f_{\alpha}}{dx^2}(p) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 f_{\alpha}}{dx^3}(p) \right).$$

D'altra banda (i eliminant temporalment el paràmetre α perquè és irrellevant), la derivació successiva de $(f \circ f)(x)$ porta a

$$(f \circ f)'''(x) = f'''(f(x))f'(x)^3 + 3f''(f(x))f'(x)f''(x) + f'(f(x))f'''(x).$$

Substituint $x = p$ i usant $f(p) = p$ i $f'(p) = -1$ obtenim

$$(f \circ f)'''(p) = -3f''(p)^2 - 2f'''(p).$$

Aquesta relació entre derivades permet transformar l'expressió que havíem obtingut de 2(c) quan $\bar{b} = 0$ en $-\frac{1}{12} \left(\frac{d^3 f_{\alpha}^2}{dx^3}(p) \right)$, que és $\neq 0$ per hipòtesi. \square

Notes:

- 1) Les extensions que hem fet del cas unidimensional ($b = 0$), al cas bidimensional ($b \neq 0$) estan basades en el teorema de la funció implícita i, en conseqüència, només són vàlides per a $|b|$ suficientment petit; lluny de $b = 0$, no podem

assegurar res, i, de fet, hi pot haver diferències amb el cas unidimensional. En el cas de l'aplicació d'Hénon $F_{a,b}(x, y) = (1 + y - ax^2, bx)$, per exemple, algunes corbes de bifurcació sella-node contenen punts aïllats que corresponen a bifurcacions de codimensió 2: cusp i flip de codimensió 2 (vegeu [5],[40], [6]); en canvi, quan $b = 0$, l'aplicació logística $f_a(x) = 1 - ax^2$ només té bifurcacions del tipus sella-node i flip genèriques (vegeu [17]).

2) Aquest tipus de resultats es poden demostrar de manera més sintètica usant teoria de transversalitat en espais de jets de funcions de classe C^∞ . A [31] hi ha un raonament d'aquests per a un cert tipus de famílies.

En el pla de paràmetres (a, b) , cada corba $(a(b), b)$, $|b| < b_0$ és una *corba de bifurcació* (sella-node o flip). La funció $a(b)$ és diferenciable i és fàcil calcular $a'(0)$ en funció de derivades de f en $a = \alpha$, $x = p$. Encara més, si la família biparamètrica F és C^∞ (o analítica) llavors també ho és la funció $a(b)$ (serveixen les mateixes demostracions), i es poden calcular més derivades en $b = 0$. Això involucra càlculs senzills però pesats. Fem, per exemple, el cas de $a'(0)$ i $a''(0)$ per a bifurcacions sella-node.

Notem $z(b) = (x(b), y(b), a(b), b)$.

Les corbes $x(b), y(b)$ i $a(b)$ verifiquen

$$F_1(z(b)) = x(b) ,$$

$$F_2(z(b)) = y(b) ,$$

$$\left[\frac{dF_1}{dx}(z(b)) - 1 \right] \left[\frac{dF_2}{dy}(z(b)) - 1 \right] - \frac{dF_1}{dy}(z(b)) \frac{dF_2}{dx}(z(b)) = 0 .$$

Per a simplificar les expressions que sortiran, fem un canvi de notació. Posem $F_1(x, y, a, b) = f_a(x) + g(x, y, a, b) = f(x, a) + g(x, y, a, b)$, i $F_2 = h$ (hem suprimit els subíndexs perquè aquests els usarem per a indicar derivades parcials). A més, no escriurem el punt b on s'avalua cada funció. Les equacions anteriors s'escriuen ara:

$$f + g = x ,$$

$$h = y ,$$

$$(f_x + g_x - 1)(h_y - 1) - g_y h_x = 0 .$$

Derivem respecte b cada equació i fem $b = 0$, de manera que g , h i totes les derivades successives respecte (només) x , y , a són 0. Queda:

$$f_x(p, \alpha)x'(0) + f_a(p, \alpha)a'(0) + g_b(p, 0, \alpha, 0) = x'(0),$$

$$h_b(p, 0, \alpha, 0) = y'(0),$$

$$f_{xx}(p, \alpha)x'(0) + f_{xa}(p, \alpha)a'(0) + g_{xb}(p, 0, \alpha, 0) + (f_x(p, \alpha) - 1)h_{yb}(p, 0, \alpha, 0) = 0.$$

Usant que $f_x(p, \alpha) = 1$, $f_a(p, \alpha) \neq 0$ i $f_{xx}(p, \alpha) \neq 0$, obtenim

$$a'(0) = \frac{-g_b(p, 0, \alpha, 0)}{f_a(p, \alpha)}, \quad y'(0) = h_b(p, 0, \alpha, 0)$$

i

$$x'(0) = \frac{f_{xa}(p, \alpha)g_b(p, 0, \alpha, 0) - f_a(p, \alpha)g_{xb}(p, 0, \alpha, 0)}{f_{xx}(p, \alpha)f_a(p, \alpha)}.$$

Per a calcular $a''(0)$, cal tornar a derivar i fer $b = 0$. Només queden els termes

$$(f_{xx}x' + f_{xa}a')x' + (f_{ax}x' + f_{aa}a')a' + f_a a'' + g_{xb}x' + g_{yb}y' + g_{ab}a' + \\ + g_{xb}x' + g_{yb}y' + g_{ab}a' + g_{bb} = 0$$

i, per tant, es pot aïllar $a''(0)$ fàcilment.

Acabem aquest apartat amb una il·lustració de l'extensió de les corbes de bifurcació en el cas d'una família senzilla del "tipus" Hénon (polinomial de grau 2): considerem $F_{a,b}(x, y) = (a - x^2 + b^2y, bx)$. En aquest cas, se sap que les bifurcacions d'òrbites periòdiques de la família unidimensional $f_a(x) = a - x^2$ són totes del tipus sella-node o flip genèriques ([17]) que creen òrbites (no les destrueixen) en el sentit creixent de a ; això permet comptar la quantitat de bifurcacions de cada període (vegeu, per exemple, [23]). A més, analitzant el comportament de la successió d'imatges del punt crític de f_a , es pot descriure completament l'ordre en què es produeixen aquestes bifurcacions ([40]). El conjunt de bifurcacions té una *estructura fractal*: és una estructura que es va repetint a escales successivament més petites.

Per al cas bidimensional, tenim:

Proposició 1.2.4 *Siguin $F_{a,b}(x, y) = (a - x^2 + b^2y, bx)$ i $f_a(x) = a - x^2$; llavors*

- a) Per a cada $N > 0$, existeix $b_0 > 0$ tal que $\forall b \in (-b_0, b_0)$, l'ordre de totes les bifurcacions (respecte al paràmetre a) d'òrbites periòdiques de període $\leq N$ de $F_{a,b}(x, y)$ és el mateix que el de l'aplicació $f_a(x)$.
- b) $\forall b \neq 0$ fixat, l'ordre de totes les bifurcacions d'òrbites periòdiques de $F_{a,b}$ és diferent del de f_a (o sigui, a l'apartat anterior no podem eliminar la condició de període $\leq N$).

Demostració: a) La quantitat de bifurcacions de període $\leq N$ és finita. Per a cadascuna d'elles, existeix una corba de bifurcació $a(b)$ ($|b|$ petit). Prenent b_0 suficientment petit, totes aquestes corbes no es tallaran entre sí a la zona $|b| < b_0$.

b) Es dedueix del resultat de Newhouse ([43],[44]): per a qualsevol $b \neq 0$, $F_{a,b}$ és conjugada a l'aplicació d'Hénon, i per a aquesta, existeixen valors de a per als quals coexisteixen infinites òrbites periòdiques atractores (mentre que per a f_a , només en pot haver una ([14])). Això només és possible si diverses corbes $a(b)$ es tallen entre sí. \square

1.3 Extensió del teorema de Hartman-Grobman

Ja hem dit que el teorema de Hartman-Grobman no és cert, en general, per a aplicacions que no siguin difeomorfismes locals. El nostre cas d'aplicació singular F_0 és, però, molt especial; i el teorema és encara cert. Tot seguit veurem que F_0 és localment topològicament conjugada a la seva part lineal.

Proposició 1.3.1 Sigui $F_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació singular $F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, amb $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , i sigui $x_0 = f(x_0)$ un punt fix hiperbòlic de f tal que $f'(x_0) \neq 0$. Llavors existeixen entorns $U, V \subset \mathbb{R}^2$, de $(0, 0)$ i $(x_0, 0)$, respectivament, i existeix un homeomorfisme $h : U \rightarrow V$, tals que

$$h \circ L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_0 \circ h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in U;$$

$$\text{on } L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x_0)x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demostració: Escriurem $\lambda = f'(x_0)$. Només cal trobar un homeomorfisme h_1 d'un entorn U_1 de $0 \in \mathbb{R}$ en un entorn V_1 de $x_0 \in \mathbb{R}$ que verifiqui

$$h_1 \circ L_1(x) = f \circ h_1(x), \quad \forall x \in U_1,$$

on $L_1(x) = \lambda x, \forall x \in \mathbb{R}$; ja que, en aquest cas, $h(x, y) = (h_1(x), y)$ és un homeomorfisme de $U \equiv U_1 \times \mathbb{R}$ en $V \equiv V_1 \times \mathbb{R}$ que verifica el que volem:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in U, \quad h \circ L(x, y) &= h(L_1(x), 0) = (h_1 \circ L_1(x), 0) = \\ &= (f \circ h_1(x), 0) = F_0(h_1(x), y) = F_0 \circ h(x, y). \end{aligned}$$

L'existència de h_1 , la dóna el teorema de Hartman-Grobman local 1.1.2 en dimensió 1. Farem, però, una *demostració constructiva*; això és, explicitarem un homeomorfisme h_1 que conjuga localment f i L_1 . La idea d'aquesta construcció es pot trobar a [45, pàg. 63] o [16, pàg. 55]. La fem perquè ens servirà per a mostrar la falta d'unicitat de la conjugació.

Per a fixar idees, suposem que $0 < \lambda < 1$; tots els altres casos es farien anàlogament. Com que f és de classe \mathcal{C}^1 , existeix un interval $I = (a, b)$ que conté x_0 i tal que $0 < f'(x) < 1, \forall x \in I$. Per tant, es verifica:

- 1) f és estrictament monòtona creixent en I ,
- 2) x_0 és l'únic punt fix de f en I , i a trau tots els punts de I : $I \subset W^s(x_0, f)$.

En particular, f té inversa local, definida a $f(I)$. Reduïm, si cal, l'interval I inicial de manera que existeixi un únic $f^{-1}(x), \forall x \in I$.

A causa de les propietats de f en I , es poden trobar x_- i x_+ tals que

$$a < x_- < f(x_-) < x_0 < f(x_+) < x_+ < b.$$

Llavors $D \equiv [x_-, f(x_-)) \cup (f(x_+), x_+] \subset I$ és un *domini fonamental local* de f ; això vol dir que qualsevol òrbita (endavant o endarrera) d'un punt de I entra només una vegada en D abans de deixar I ; l'única excepció és el punt fix x_0 .

D'altra banda, un domini fonamental de $L_1(x) = \lambda x$ és $E \equiv [-1, -\lambda) \cup (\lambda, 1]$: $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, l'òrbita (sencera) de x , $O(x) = \{L_1^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$, té un únic element a E .

Passem ja a definir h_1 . Comencem fent que $h_1 : E \longrightarrow D$ apliqui linealment cada component connexa de E en la corresponent component connexa de D : sigui $h_1 : [-1, -\lambda) \longrightarrow [x_-, f(x_-))$ definida per $h_1(x) = x_- + [f(x_-) - x_-] \frac{x+1}{-\lambda+1}$, i, anàlogament, $h_1 : (\lambda, 1] \longrightarrow (f(x_+), x_+]$, $h_1(x) = x_+ + [f(x_+) - x_+] \frac{x-1}{\lambda-1}$. A continuació, estenem la definició de h_1 a tot I de manera natural: $\forall x \neq 0$, sigui $n \in \mathbb{Z}$ l'únic enter tal que $L^n(x) \in E$ i definim $h_1(x) = f^{-n} \circ h \circ L^n(x)$. Notem que això té sentit encara que $n < 0$ ja que f té inversa a D . Finalment, sigui $h(0) = x_0$.

És immediat comprovar que $h : I \longrightarrow h_1(I)$ és homeomorfisme i que verifica $h_1 \circ L_1 = f \circ h_1$. \square

Nota. No és necessari que h_1 sigui lineal en cada component connexa de E ; de fet, qualsevol homeomorfisme creixent va bé. Això demostra que l'homeomorfisme h_1 que conjuga no és únic.

La versió global del teorema de Hartman-Grobman (amb unicitat de conjugació inclosa), per a aplicacions singulars del tipus que ens interessa, és la següent.

Proposició 1.3.2 *Sigui $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}$, una aplicació lineal singular amb $|\lambda| \neq 0, 1$. Aleshores existeix $\epsilon > 0$ tal que, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció fitada amb $Lip(f) < \epsilon$ llavors existeix un únic homeomorfisme $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u(x) \\ y \end{pmatrix}$, amb $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada, tal que*

$$(L + F_0) \circ h = h \circ L,$$

on $F_0 = (f \circ pr_x, 0)$. A més, h depèn de manera contínua de f .

Nota. Hem notat $pr_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ com l'aplicació projecció en la primera component: $pr_x(x, y) = x$.

Demostració. Volem resoldre

$$(L + (f \circ pr_x, 0)) \circ (I + (u \circ pr_x, 0)) = (I + (u \circ pr_x, 0)) \circ L.$$

Aquesta equació és equivalent a

$$L \circ (u \circ pr_x, 0) - (u \circ pr_x, 0) \circ L = -(f \circ pr_x, 0) \circ (I + (u \circ pr_x, 0)).$$

En components, cal que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \lambda(u(x)) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(\lambda(x)) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(x + u(x)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

independent de y .

Per consegüent, la condició és, realment, unidimensional. Cal que es verifiqui $L_1 \circ u - u \circ L_1 = -f \circ (I + u)$, on $L_1(x) = \lambda x$; o bé, $(L_1 + f) \circ (I + u) = (I + u) \circ L_1$, amb u contínua i fitada. I això és, simplement, el teorema de Hartman-Grobman global en dimensió 1; o sigui, el teorema 1.1.3 amb un dels subspais de dimensió 1 i l'altre trivial. \square

En aquesta segona versió és important notar que, amb analogia al teorema 1.1.3, l'homeomorfisme h que conjuga és únic. A causa d'això, la pregunta natural sembla ser: Com varia l'homeomorfisme h quan pertorbem L i F_0 ? Més concretament, i tenint present el teorema 1.2.1 respecte pertorbacions de punts hiperbòlics singulars, fem les consideracions següents.

Qüestió: *Suposem que $L_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $|b| \leq b_0$, és una família d'aplicacions lineals de la forma $L_b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(b)x \\ \mu(b)y \end{pmatrix}$ i que verifica:*

a) *Les funcions $\lambda(b)$ i $\mu(b)$ depenen contínuament de b .*

b) *$|\lambda(b)| \neq 0, 1 \quad \forall |b| \leq b_0$; i $0 < |\mu(b)| < 1 \quad \forall |b| \leq b_0$, amb $\lim_{b \rightarrow 0} \mu(b) = 0$.*

Suposem que $F_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F_b(x, y) = (F_1(x, y, b), F_2(x, y, b))$, $|b| \leq b_0$, és una família d'aplicacions fitades, que depèn contínuament de b i que verifica les condicions $F_1(x, y, 0) = f(x)$, $F_2(x, y, 0) = 0$, $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ens preguntem si podem trobar $\epsilon > 0$ tal que, si $Lip(F_b) < \epsilon$, $\forall |b| \leq b_0$, llavors existeix una única família d'homeomorfismes $h_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $|b| \leq b_0$ de la forma $h_b = Id + u_b$ amb u_b contínues i fitades, que depenen contínuament de b , i tal que $(L_b + F_b) \circ h_b = h_b \circ L_b$, $\forall |b| \leq b_0$.

A primer cop d'ull, la resposta pot semblar positiva a causa de l'observació següent. Per a $b \neq 0$ fixat, estem en les hipòtesis del teorema 1.1.3 i, per tant, existeix $\epsilon_b > 0$ tal que, si $Lip(F_b) < \epsilon_b$ llavors $L_b + F_b$ i L_b són topològicament conjugats mitjançant un únic homeomorfisme h_b de la forma $h_b = Id + u_b$, amb u_b

contínua i fitada. D'altra banda, quan $b = 0$ podem usar la proposició anterior per a trobar $\epsilon_0 > 0$ amb propietats anàlogues.

Per tal que la resposta a la pregunta anterior fos afirmativa, només caldria veure:

- 1) $\min_{|b| \leq b_0} \epsilon_b > 0$ (o bé, equivalentment, que existeix un mateix $\epsilon > 0$ per a tots els valors de b), i
- 2) que h_b depèn contínuament de b .

Malauradament, això no és possible si usem les tècniques estàndard de demostració del teorema de Hartman-Grobman; veurem que s'obtenen condicions sobre ϵ_b que fan que $\epsilon_{b \rightarrow 0} \rightarrow 0$.

Això ho comprovarem tot seguit. Més concretament, refinant la demostració del teorema de Hartman-Grobman (versió global) de manera que valgui per a tota una família (en lloc d'una única aplicació), veurem que la resposta a la qüestió (o bé als punts 1) i 2)) és *afirmativa si ens mantenim lluny del cas singular*, això és, si fem que b varii a $0 < b_1 \leq b \leq b_0$. Els nostres raonaments no serveixen a $0 < b \leq b_0$ perquè la compacitat és essencial. Seguirem els passos de [53].

Teorema 1.3.3 *Sigui $L_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $0 < b_1 \leq b \leq b_0$, una família d'aplicacions lineals bijectives de la forma $L_b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(b)x \\ \mu(b)y \end{pmatrix}$ i que verifica*

- a) $\lambda(b)$ i $\mu(b)$ són funcions contínues de b ,
- b) $|\lambda(b)|, |\mu(b)| \neq 0, 1 \quad \forall b \in [b_1, b_0]$.

Llavors existeix $\epsilon > 0$ tal que, per a qualsevol família $F_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $b \in [b_1, b_0]$, d'aplicacions que depenen contínuament del paràmetre b i tals que $Lip(F_b) < \epsilon$ ($\forall b \in [b_1, b_0]$) es verifica el següent resultat:

existeix una única família d'homeomorfismes $h_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $b \in [b_1, b_0]$, de la forma $h_b = Id + u_b$, amb u_b contínua i fitada, tal que

$$(L_b + F_b) \circ h_b = h_b \circ L_b \quad \forall b \in [b_1, b_0].$$

A més, h_b (o u_b) depèn contínuament de b .

Nota. Remarquem l'afirmació final: la conjugació h_b depèn contínuament del paràmetre b ; ja que això és diferent de les afirmacions del teorema 1.1.3 i la proposició anterior, en què la continuïtat de l'homeomorfisme h era respecte a la pertorbació f .

Demostració. Comencem amb un parell d'observacions que s'usaran més endavant sense dir-ho explícitament.

- 1) A \mathbb{R}^2 usem la *norma del màxim*: $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. Les normes posteriors que es definiran en espais de funcions estan associades a aquesta norma vectorial.
- 2) La *constant de Lipschitz* de $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és $Lip(F) = \sup_{z \neq t} \frac{\|F(z) - F(t)\|}{\|z - t\|}$. Si $Lip(F) < +\infty$ llavors es diu que F és *lipschitziana*. Si $Lip(F) < 1$ llavors F és una *contracció*. Si F és lineal llavors $Lip(F) = \|F\|$. Finalment, es verifica $Lip(F \circ G) \leq Lip(F)Lip(G)$. Tot això serveix en un espai normat qualsevol (encara que no sigui \mathbb{R}^2).

Cal distinguir casos, segons $(0, 0)$ sigui sella o node de L_b , $\forall b \in [b_1, b_0]$. Suposem que és una sella, i que, per exemple, $|\lambda(b)| > 1$, $|\mu(b)| < 1 \quad \forall b \in [b_1, b_0]$. Els altres casos, en què $(0, 0)$ és pou o font, es fan anàlogament. Són encara més senzills ja que només hi ha un subspai invariant no trivial.

Siguin $\bar{\mu} = \max_{b \in [b_1, b_0]} \{|\mu(b)|\}$, $\bar{\lambda} = \max_{b \in [b_1, b_0]} \left\{ \frac{1}{|\lambda(b)|} \right\}$ i $\tau = \max\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\}$; per les hipòtesis sobre $\lambda(b)$ i $\mu(b)$, es verifica $\tau \in (0, 1)$.

El significat de τ és el següent: $\forall b \in [b_1, b_0]$, definim funcions $L_b^u(x) = \lambda(b)x$ i $L_b^s(x) = \mu(b)x$, llavors $(L_b^u)^{-1}$ i L_b^s són contraccions, i $\|(L_b^u)^{-1}\|, \|L_b^s\| < \tau$ (fita independent de τ). A més a més, $L_b(x, y) = (L_b^u(x), L_b^s(y))$ i, per consegüent,

$$\|L_b\| = \max\{\|L_b^u\|, \|L_b^s\|\} = \max\{|\lambda(b)|, |\mu(b)|\} = |\lambda(b)| \geq 1/\bar{\lambda} \quad \forall b \in [b_1, b_0].$$

Sigui \mathcal{F} l'espai vectorial d'aplicacions $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínues i fitades. Amb la norma uniforme (o del suprem) $\|u\| = \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \|u(z)\|$, \mathcal{F} és un espai de Banach.

Lema 1.3.4 *Sigui $G_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $b \in [b_1, b_0]$ una família d'homeomorfismes; llavors $\forall b \in [b_1, b_0]$ l'operador lineal $\mathcal{L}_b : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definit per $\mathcal{L}_b(u) = L_b \circ u - u \circ G_b$ és invertible i $\|\mathcal{L}_b^{-1}\| < \frac{1}{1-\tau}$ (fita independent del valor particular de b i de G_b).*

Demostració Fixat b , la demostració feta a [53, pàg. 288] permet afirmar $\|\mathcal{L}_b^{-1}\| < \frac{1}{1-\tau(b)}$, on $\tau(b) = \max\{\|(L_b^u)^{-1}\|, \|L_b^s\|\}$. Com que $\tau(b) < \tau, \forall b \in [b_1, b_0]$, obtenim el resultat. \square

Lema 1.3.5 *Existeix $\epsilon > 0$ tal que $\forall b \in [b_1, b_0]$ es verifica: si F_b i G_b són aplicacions fitades de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 amb $Lip(F_b), Lip(G_b) < \epsilon$, llavors l'equació*

$$(L_b + F_b) \circ h = h \circ (L_b + G_b) \quad (1.1)$$

té solució única de la forma $h_b = Id + u_b$, amb u_b contínua i fitada. A més, h_b és homeomorfisme.

Demostració. Fixem $b \in [b_1, b_0]$. Suposem $h = Id + u$, amb $u \in \mathcal{F}$, llavors l'equació (1.1) és $(L_b + F_b) \circ (Id + u) = (Id + u) \circ (L_b + G_b)$, i aquesta és equivalent a

$$L_b \circ u - u \circ (L_b + G_b) = G_b - F_b \circ (Id + u). \quad (1.2)$$

Definim un operador lineal $\mathcal{L}_b : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ usant

$$\mathcal{L}_b(u) = L_b \circ u - u \circ (L_b + G_b) = L_b \circ u - u \circ L_b \circ (Id + L_b^{-1} \circ G_b).$$

Suposem que $\|L_b^{-1}\|Lip(G_b) < 1$; aleshores $Lip(L_b^{-1} \circ G_b) < 1$ i, per tant, $Id + L_b^{-1} \circ G_b$ és un homeomorfisme. Podem usar el lema anterior per a convenir que \mathcal{L}_b és invertible i que $\|\mathcal{L}_b^{-1}\| < \frac{1}{1-\tau}$. En conseqüència, (1.2) és equivalent a

$$u = T_b(u) \equiv \mathcal{L}_b^{-1}(G_b - F_b \circ (Id + u)). \quad (1.3)$$

D'altra banda, si suposem que $Lip(F_b) < \epsilon$ llavors l'operador T_b verifica

$$\|T_b(u) - T_b(v)\| \leq \|\mathcal{L}_b^{-1}\| \cdot \|F_b \circ (Id + u) - F_b \circ (Id + v)\| \leq \frac{1}{1-\tau} \epsilon \|u - v\|;$$

i si $\epsilon < 1 - \tau$, resulta que T_b és una contracció. Per tant, T_b té un únic punt fix. Per l'equivalència entre (1.1) i (1.3), hem vist que (1.1) té una única solució sota les hipòtesis $Lip(G_b) < \frac{1}{\|L_b^{-1}\|}$ i $Lip(F_b) < 1 - \tau$.

Per a veure que l'aplicació contínua $Id + u$ és un homeomorfisme, es calcula la seva inversa. Considerem $(Id + v) \circ (L_b + F_b) = (L_b + G_b) \circ (Id + v)$; el mateix mètode que acabem d'usar permet afirmar que, si es verifiquen les condicions següents

$Lip(F_b) < \frac{1}{\|L_b^{-1}\|}$ i $Lip(G_b) < 1 - \tau$, l'equació té una única solució $v \in \mathcal{F}$. Comprovem que $(Id + u) \circ (Id + v) = (Id + v) \circ (Id + u) = Id$. Es verifica

$$\begin{aligned} (Id + u) \circ (Id + v) \circ (L_b + F_b) &= (Id + u) \circ (L_b + G_b) \circ (Id + v) = \\ &= (L_b + F_b) \circ (Id + u) \circ (Id + v) . \end{aligned}$$

Per la unicitat de solució en el cas $G_b = F_b$ obtenim $(Id + u) \circ (Id + v) = Id$. Anàlogament es veu la composició en sentit contrari.

Així doncs, hem vist que per a qualsevol $b \in [b_1, b_0]$, si prenem $\epsilon_b < \frac{1}{\|L_b^{-1}\|}$ i $\epsilon_b < 1 - \tau$, llavors el lema és cert per a aquest b i aquest valor de ϵ_b particulars.

Com que

$$\min_b \frac{1}{\|L_b^{-1}\|} = \frac{1}{\max_b \|L_b^{-1}\|} = \frac{1}{\max_b \left\{ \frac{1}{|\lambda(b)|}, \frac{1}{|\mu(b)|} \right\}} = \frac{1}{\max_b \left| \frac{1}{\mu(b)} \right|} = \min_b |\mu(b)| \equiv \delta ,$$

resulta que el valor $\epsilon = \min\{\delta, 1 - \tau\}$ serveix per a tot $b \in [b_1, b_0]$. \square

Acabem la demostració del teorema. Prenem el valor $\epsilon > 0$ proveït pel lema 1.3.5; per a cada $b \in [b_1, b_0]$, sigui $h_b = Id + u_b$ tal que $u_b \in \mathcal{F}$ és l'únic punt fix de l'operador

$$T_b(u) = \mathcal{L}_b^{-1}(-F_b \circ (Id + u)) ,$$

on $\mathcal{L}_b(u) = L_b \circ u - u \circ L_b$.

Pels lemes anteriors, h_b verifica tot el que volem. L'únic punt destacable és la dependència contínua respecte el paràmetre b , això és conseqüència del fet que el punt fix d'una contracció depèn contínuament de la contracció. Més concretament (i seguint amb la notació anterior), es verifica

$$\begin{aligned} \|u_b - u_c\| &= \|T_b(u_b) - T_c(u_c)\| \leq \|T_b(u_b) - T_b(u_c)\| + \|T_b(u_c) - T_c(u_c)\| \leq \\ &\leq k\|u_b - u_c\| + \|T_b(u_c) - T_c(u_c)\| . \end{aligned}$$

Hem suposat que la constant de Lipschitz de la contracció T_b és $k \in [0, 1)$. Per tant,

$$\|u_b - u_c\| \leq \frac{\|T_b(u_c) - T_c(u_c)\|}{1 - k} .$$

Com que $\lambda(b)$, $\mu(b)$ i F_b són funcions contínues de b , també ho són L_b , \mathcal{L}_b i, finalment, T_b . Per tant, quan c s'acosta a b , la part de la dreta (i, en conseqüència, també la de l'esquerra) de la desigualtat anterior s'acosta a 0. \square

Nota. Si b_1 s'acosta a 0 i si $\lim_{b \rightarrow 0} \mu(b) = 0$, llavors el valor de δ en la demostració del lema 1.3.5 tendeix a 0. Per tant, i tal com havíem afirmat, la constant ϵ per la qual valdria el teorema tendeix cap a 0. Queda oberta la qüestió de si això depèn del mètode específic que hem usat.

Observem, però, que això no està en contradicció amb la proposició 1.3.2 (que correspon al cas singular $b = 0$), ja que en aquesta hem reduït el tipus de conjugació a la forma $h(x, y) = (x + u(x), y)$. Si haguéssim considerat el cas més general $h(x, y) = (x + u_1(x, y), y + u_2(x, y))$, llavors la condició $(L + F_0) \circ h = h \circ L$ seria equivalent a

$$\begin{pmatrix} \lambda(x + u_1(x, y)) + f(x + u_1(x, y)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + u_1(\lambda x, 0) \\ u_2(\lambda x, 0) \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

I és obvi que no hi ha unicitat de solució $u_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada.

1.4 Extensió de varietats invariants

En aquesta secció estudiarem com són les varietats invariants dels punts fixos hiperbòlics de l'aplicació bidimensional degenerada F_0 -per als punts periòdics, només cal considerar una potència adequada de F_0 -, i com es transformen quan passem al cas no degenerat F_b , $b \neq 0$. Veurem que la dependència respecte b és diferenciable.

Cal dir que el càlcul explícit de varietats invariants és una cosa atípica; generalment només és possible obtenir expressions aproximades. Per a F_0 ho podem fer a causa de la seva forma tan particular. Algunes idees usades aquí, les hem manllevat de [57], on es pot trobar un estudi de les varietats invariants de l'aplicació d'Hénon fortament dissipativa, relacionant-les amb el cas singular $b = 0$.

Considerem, doncs, $F_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, amb $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 i sigui $x^0 \in \mathbb{R}$ un punt fix hiperbòlic no singular de f ($f(x^0) = x^0$, $|f'(x^0)| \neq 0, 1$). Això és equivalent a dir que $p \equiv (x^0, 0) \in \mathbb{R}^2$ és un punt fix hiperbòlic de F_0 , amb valors propis de $DF_0(p)$ iguals a $f'(x^0)$ i 0.

Si x^0 és atractor per f llavors p és atractor per F_0 i, en conseqüència:

- $W_{loc}^s(p, F_0)$ és una bola de \mathbb{R}^2 ;

- $W_{loc}^u(p, F_0) = \{p\}$ és trivial.

Ens limitarem al cas (més interessant) que x^0 és repulsor de f : $|f'(x^0)| > 1$. Ara $p = (x^0, 0)$ és un punt fix de tipus sella de F_0 . Calcularem les varietats invariants de p respecte F_0 a partir de les de x^0 respecte f . Per a evitar confusions reservarem la notació W^s i W^u per a les primeres, mentre que les segones seran S i U .

Comencem amb la varietat estable. Es verifica

$$\begin{aligned} W^s(p, F_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} F_0^n(x, y) = (x^0, 0)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^0\}. \end{aligned}$$

Hem usat que la segona component de la funció F_0 és 0. Si definim rectes "verticals" $R_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = z\}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, llavors $W^s(p, F_0) = \cup_{z \in S} R_z$, on $S \equiv W^s(x^0, f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^0\}$ és el conjunt estable de x^0 per f .

Lema 1.4.1 S és exactament el conjunt d'antiimatges de x^0 per f :

$$S = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\{x^0\}), \text{ on } f^{-n}(\{x^0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f^n(x) = x^0\}, \forall n \geq 0.$$

Demostració. De les definicions de S i $f^{-n}(\{x^0\})$, és evident que es verifica la inclusió $S \supset \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\{x^0\})$; fem l'altra. Com que f és de classe \mathcal{C}^1 i x^0 és repulsor, existeixen $k > 1$ i $\alpha > 0$ tals que

$$\forall y \in I \equiv (x^0 - \alpha, x^0 + \alpha), |f'(y)| \geq k > 1;$$

en particular, usant el teorema del valor mitjà, obtenim

$$\forall y \in I, |f(y) - x^0| = |f(y) - f(x^0)| \geq k|y - x^0|.$$

Suposem que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^0$, i sigui $N \geq 0$ el mínim nombre natural tal que $\forall n \geq N, f^n(x) \in I$. Llavors $\forall n > N$ es verifica

$$\begin{aligned} \alpha &\geq |f^N(x) - x^0| = |f(f^{N-1}(x)) - f(x^0)| \geq k|f^{N-1}(x) - x^0| \geq \\ &\geq \dots \geq k^{n-N}|f^N(x) - x^0|. \end{aligned}$$

Com que $\lim_{n \rightarrow \infty} k^{n-N} = \infty$, ha de ser $f^N(x) = x^0$. \square

Això ens descriu bastant bé $W^s(p, F_0)$. Passem ara a la varietat inestable. Es verifica

$$\begin{aligned} W^u(p, F_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (z_n)_{n \geq 0} = ((x_n, y_n))_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}^2 \text{ tal que} \\ &\quad (x_0, y_0) = (x, y), \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p \text{ i } \forall n \geq 0, z_n = F_0(z_{n+1})\} = \\ &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R} \text{ tal que } x_0 = x, \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^0 \text{ i } \forall n \geq 0, x_n = f(x_{n+1})\} = \\ &= U \times \{0\} , \end{aligned}$$

on $U \equiv W^u(x^0, f)$ és el conjunt inestable de x^0 per f .

Hem usat la relació entre F_0 i f : $F_0(x, y) = (f(x), 0)$. A causa del caràcter repulsor de x^0 per f , és clar que U conté $U_{loc, \epsilon} = (x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon)$, per a $\epsilon > 0$ prou petit. Podem calcular la varietat total iterant: $U = \cup_{n \geq 0} f^n(U_{loc, \epsilon})$. D'això es dedueix que U és un interval (reunió d'intervals amb un punt comú: x^0) i, per tant, que $W^u(p, F_0)$ és un conjunt connex.

Els càlculs precedents demostren el següent resultat:

Proposició 1.4.2 *Siguin x^0 un punt fix repulsor d'una aplicació de classe C^1*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } p = (x^0, 0); \text{ aleshores}$$

1) $W^s(p, F_0) = S \times \mathbb{R}$ (reunió de rectes verticals); on S és el conjunt estable de x^0 per f , i coincideix amb el conjunt d'antiimatges de x^0 per f :

$$S = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\{x^0\}) = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists n \geq 0 \text{ tal que } f^n(z) = x^0\} .$$

2) $W^u(p, F_0) = U \times \{0\}$; on U és el conjunt inestable de x^0 per f , el qual és un interval de \mathbb{R} que es pot calcular mitjançant $U = \cup_{n \geq 0} f^n(U_{loc, \epsilon})$, amb $U_{loc, \epsilon} = (x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$ suficientment petit. \square

Observem, doncs, que la varietat estable de p per F_0 és reunió de rectes verticals, amb tantes rectes com successives antiimatges de x^0 per f . En particular, $W^s(p, F_0)$ no és, en general, connexa. La màxima component connexa que conté el punt p és $W_{loc}^s(p, F_0) = \{(x^0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Això està d'acord amb el fet que $(0, 1)$ sigui

vector propi de $DF_0(p)$ associat al valor propi 0. La condició perquè $W^s(p, F_0)$ sigui connexa i, per tant, coincideixi amb $W_{loc}^s(p, F_0)$ és que x^0 no tingui cap altra antiimatge per f que el mateix x^0 : $f^{-1}(\{x^0\}) = \{x^0\}$. Per a punts periòdics de període $k > 1$, aquesta observació s'aplica al punt considerat com a fix de F_0^k .

La varietat inestable, en canvi, sí que és connexa; de fet és un interval contingut a l'eix $y = 0$. Això també està d'acord amb que $(1, 0)$ és vector propi associat al valor propi $f'(x^0)$ de $DF_0(p)$. En general, no es pot precisar la forma de l'interval: pot ser finit, infinit, obert, tancat, etc. depenent de f i x^0 . A vegades és útil tenir una expressió parametritzada.

Proposició 1.4.3 *Amb la notació anterior, si f és de classe C^r , amb $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (o analítica), llavors existeix una funció $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $z(t) = (x(t), 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, de classe C^r (o analítica) i tal que*

- a) $z(0) = p = (x^0, 0)$,
- b) $W^u(p, F_0) = z(\mathbb{R})$,
- c) $F_0(z(t)) = z(\lambda t)$, on $\lambda = f'(x^0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demostració. És anàloga a la que hi ha a [57] per al cas d'Hénon singular. Si $z(t) = (x(t), y(t))$, la condició c) és equivalent a $f(x(t)) = x(\lambda t)$ i $0 = y(\lambda t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Per tant, ha de ser $y \equiv 0$ i, per tal de provar a) i c) només cal demostrar que existeix una funció $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de classe C^r (o analítica) tal que $f(x(t)) = x(\lambda t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, i $x(0) = x^0$. Dit d'una altra manera, cal conjuguar f amb $L(x) = \lambda x$ mitjançant una funció de la mateixa classe que f .

Pels resultats de Hartman [25] i Sternberg [54] això és possible, localment, a causa que, per ser la dimensió 1 i $|\lambda| \neq 0, 1$, no hi poden haver *resonàncies*: $\lambda^n \neq \lambda$ $\forall n \geq 2$. Així doncs, existeix $x(t)$ per a t en un entorn $I \equiv (-\delta, \delta)$ de 0. Per a estendre x a tot \mathbb{R} , usem l'equació funcional $x(\lambda t) = f(x(t))$ iterativament: $\forall k \geq 1$, $\forall t \in \lambda^k I - \lambda^{k-1} I$, definim $x(t) = f(x(\frac{t}{\lambda}))$. Com que $|\lambda| > 1$, aquest procés defineix $x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Comprovem b). Donat $x(t)$, amb $t \in \mathbb{R}$ fixat, definim $x_n = x(\frac{t}{\lambda^n})$, $\forall n \geq 0$; llavors es verifica

- 1) $x_0 = x(t)$,

$$2) f(x_{n+1}) = f(x(\frac{t}{\lambda^{n+1}})) = x(\lambda \frac{t}{\lambda^{n+1}}) = x(\frac{t}{\lambda^n}) = x_n, \forall n \geq 0,$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{\lambda^n}) = x(0) = x^0.$$

Per tant, $x(t) \in U \equiv W^u(x^0, f)$. Com que les segones components de $z(t)$ i $W^u(p, F_0)$ són (ambdues) 0, hem vist que $z(\mathbb{R}) \subset W^u(p, F_0)$.

Per a acabar, cal veure $U \subset x(\mathbb{R})$. Considerem $U_{loc, \epsilon} = (x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon)$, amb $\epsilon > 0$ prou petit, de manera que $U = \cup_{n \geq 0} f^n(U_{loc, \epsilon})$. Com que x és injectiva en un entorn de 0, siguin $t_- < 0 < t_+$ tals que $x((t_-, t_+)) = U_{loc, \epsilon}$; en particular $U_{loc, \epsilon} \subset x(\mathbb{R})$. Usant l'equació funcional es veu, iterativament, que $f^n(U_{loc, \epsilon}) \subset x(\mathbb{R})$, $\forall n \geq 0$. Per exemple, si $x_1 \in f(U_{loc, \epsilon})$, siguin $x_0 \in U_{loc, \epsilon}$ tal que $x_1 = f(x_0)$ i $t_0 \in (t_-, t_+)$ tal que $x(t_0) = x_0$; llavors es verifica

$$x_1 = f(x_0) = f(x(t_0)) = x(\lambda t_0).$$

Per tant $f(U_{loc, \epsilon}) \subset x(\mathbb{R})$. Anàlogament per a tot $n > 1$. \square

Observem que, encara que la primera component de $z(t)$, $x(t)$, és injectiva en un entorn de 0, pot no ser-ho globalment, a causa que la definim iterativament usant $f: x(t) = f(x(\frac{t}{\lambda}))$, i f no és injectiva, en general.

D'altra banda, $x(t)$ no és l'única conjugació; concretament, si $x(t)$ ho és, llavors $\forall \alpha \neq 0$, $\bar{x}(t) = x(\alpha t)$ també ho és:

$$f(\bar{x}(t)) = f(x(\alpha t)) = x(\lambda \alpha t) = x(\alpha(\lambda t)) = \bar{x}(\lambda t).$$

La pregunta natural és si hi ha unicitat excepte la constant multiplicativa. En el cas analític, la resposta és afirmativa.

Proposició 1.4.4 *Si f és analítica, llavors existeix una única funció entera $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, que verifica $f(x(t)) = x(\lambda t)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$), $x(0) = x^0$ i $x'(0) = \alpha$.*

Demostració. Només cal veure que les derivades successives de x en 0 estan completament determinades (això demostrarà la unicitat localment; l'extensió a tot \mathbb{R} es dedueix directament de l'equació funcional). Això es comprova, recurrentment, derivant l'expressió $f(x(t)) = x(\lambda t)$, substituint $t = 0$ i aïllant la derivada corresponent. Així, obtenim

$f'(x(t))x'(t) = \lambda x'(\lambda t)$ i $f''(x(t))x'(t)^2 + f'(x(t))x''(t) = \lambda^2 x''(\lambda t)$. Fent $t = 0$, queda $f''(x^0)\alpha^2 + \lambda x''(0) = \lambda^2 x''(0)$; i, per tant, $x''(0) = \frac{f''(x^0)\alpha^2}{\lambda^2 - \lambda} \equiv \alpha_2$.

Tornant a derivar, s'obté

$$f'''(x(t))x'(t)^3 + 3f''(x(t))x'(t)x''(t) + f'(x(t))x'''(t) = \lambda^3 x'''(\lambda t);$$

quan $t = 0$, queda $f'''(x^0)\alpha^3 + 3f''(x^0)\alpha\alpha_2 + \lambda x'''(0) = \lambda^3 x'''(0)$; i, per consegüent, $x'''(0) = \frac{f'''(x^0)\alpha^3 + 3f''(x^0)\alpha\alpha_2}{\lambda^3 - \lambda}$.

Així es poden trobar totes les derivades. Observem que apareixen factors $\lambda^k - \lambda$, $k \geq 2$, els quals són no nuls a causa que $|\lambda| \neq 0, 1$. \square

Passem a veure com es modifiquen les varietats invariants si pertorbem la funció $F_0(x, y) = (f(x), 0)$. Considerem la família F_b , $|b| < b_0$, que varia diferenciablement respecte b . D'entrada, observem que el punt fix pot canviar de lloc. Fent una translació per a cada valor de b , podem suposar que és sempre a l'origen. També els valors propis de $DF_b(0)$ depenen de b , però si eren $|f'(0)| > 1$ i 0 quan $b = 0$, llavors l'origen serà una sella per a tot b prou petit. Prenent les direccions pròpies com a eixos podem suposar que la part lineal de F_b és diagonal. Aquest preàmbul serveix per a justificar que l'expressió de la família F_b que apareix en el pròxim teorema no és gens restrictiva.

El resultat següent expressa que les varietats invariants d'un punt fix de F_b depenen diferenciablement del paràmetre b .

Teorema 1.4.5 *Considerem una família d'aplicacions $F_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, amb $|b| < b_0$, de la forma*

$$F_b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(b)x + f_1(x, y, b) \\ \mu(b)y + f_2(x, y, b) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

i que verifica les propietats següents:

- a) *Les funcions λ i μ són de classe \mathcal{C}^2 respecte el paràmetre b ; les funcions f_1 i f_2 són de classe \mathcal{C}^1 respecte x, y i b (per tant, $F(x, y, b) = F_b(x, y)$ és de classe \mathcal{C}^1).*
- b) $\forall |b| < b_0$, $|\lambda(b)| > 1$ i $|\mu(b)| < 1$; a més, $\mu(0) = 0$.
- c) $\forall |b| < b_0$, $f_1(0, 0, b) = f_2(0, 0, b) = D_x f_1(0, 0, b) = D_y f_1(0, 0, b) = D_x f_2(0, 0, b) = D_y f_2(0, 0, b) = 0$.

d) $f_1(x, y, 0) = f(x)$ i $f_2(x, y, 0) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Aleshores existeixen X, Y i $I \subset \{|b| < b_0\}$, entorns de $0 \in \mathbb{R}$, i dues aplicacions, $g^u : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ i $g^s : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 tals que

$$1) g^u(0, b) = g^s(0, b) = D_x g^u(0, b) = D_y g^s(0, b) = 0, \forall b \in I;$$

$$2) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = g^s(y, b), y \in Y\} \subset W^s(0, F_b), \forall b \in I;$$

$$3) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = g^u(x, b), x \in X\} \subset W^u(0, F_b), \forall b \in I;$$

$$4) g^u(x, 0) = 0, \forall x \in X; g^s(y, 0) = 0, \forall y \in Y.$$

Demostració. Fem abans una observació. A causa de les suposicions que fem, ja sabem per la proposició 1.4.2 com són les varietats invariants, quan $b = 0$, en un entorn de $(0, 0)$ i, efectivament, són gràfiques de funcions que verifiquen 4). També per a cada $b \neq 0$, el teorema de la varietat estable ens diu que les varietats són gràfiques de funcions de classe C^1 . Tot això, però, no ens dóna la dependència C^1 de les varietats respecte el paràmetre b . Per a veure això, s'ha de refer la demostració de l'existència de les varietats locals per a tota la família a la vegada.

Notem que, a causa que admitem comportament no bijectiu per a F_b , hem de fer tant l'estable com la inestable, ja que no podem deduir una de l'altra invertint F_b . Això és el que passa a [45], on s'usa una demostració d'Irwin ([32], [33]) basada en el teorema de la funció implícita per a l'estable i la (més geomètrica) *transformació de grafs* ([27]) per a la inestable. A [57], però, s'usa la idea d'Irwin per a demostrar la diferenciabilitat de les dues varietats invariants respecte paràmetres en el cas particular de la família d'Hénon fortament dissipativa; l'èxit, també, per al cas inestable, sembla lligat a la forma particular d'aquesta família.

Nosaltres farem amb detall el cas de la varietat inestable per a la família més general (1.4) i donarem només un esquema per a la varietat estable (els detalls són anàlegs al cas inestable). Segurament, aquesta demostració es pot adaptar per a casos d'aplicacions singulars encara més generals.

Comencem amb algunes definicions. A \mathbb{R}^2 usarem la norma del màxim, definida per $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Sigui B_β l'interval de \mathbb{R} de centre 0 i radi $\beta > 0$. Sigui K el conjunt de successions $\{\gamma(n)\}_{n \geq 0}$ de \mathbb{R}^2 que convergeixen a $(0, 0)$; amb la norma $\|\gamma\| = \sup_{n \geq 0} \|\gamma(n)\|$ és un espai de Banach. Definim també els conjunts

$G = \{\gamma \in K \mid \gamma(n) \in B_\beta \times B_\beta \ \forall n \geq 0\}$ i sigui $J = \{b \in \mathbb{R} \mid |b| < b_0\}$. Reduint, si convé, β i b_0 podem trobar $a \in (0, 1)$ tal que $\frac{1}{|\lambda(b)|}, |\mu(b)| < a, \forall b \in J$; i $c > 0$ tal que $|f_1(z, b)|, |f_2(z, b)| < c, \forall z \in B_\beta \times B_\beta, \forall b \in J$.

Definim una aplicació $H : B_\beta \times G \times J \rightarrow K$ mitjançant

$$H(x, \gamma, b)(n) = \gamma(n) - \left(\begin{array}{c} \lambda(b)^{-n}x - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b) \\ \sum_{i=n}^{\infty} \mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b) \end{array} \right), \forall n \geq 0. \quad (1.5)$$

Lema 1.4.6 *L'aplicació H està ben definida.*

Demostració. Observem que els exponents de $\mu(b)$ són sempre positius (≥ 0); per això no importa que $\mu(0) = 0$. A més a més, la sèrie és convergent ja que es pot majorar per una de geomètrica de raó $a \in (0, 1)$. L'única cosa que hem de veure és que $\forall x \in B_\beta, \forall \gamma \in G, \forall b \in J$ es verifica $H(x, \gamma, b) \in K$.

Vegem que la segona component de $H(x, \gamma, b)(n)$ tendeix a 0 quan $n \rightarrow \infty$.

Tenim

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=n}^{\infty} \mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b) \right| &\leq \sum_{i=n}^{\infty} a^{i-n} \sup_{i \geq n} |f_2(\gamma(i+1), b)| = \\ &= \frac{1}{1-a} \sup_{i \geq n} |f_2(\gamma(i+1), b)|. \end{aligned}$$

Com que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma(n)\| = 0$ i $f_2(\cdot, \cdot, b)$ és contínua en $0 \in \mathbb{R}^2$ i $f_2(0, b) = 0, \forall b \in J$, resulta que podem fer el suprem tan petit com vulguem prenent n prou gran.

Quant a la primera component, d'una banda es verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda(b)^{-n}x] = 0$ (ja que $|\lambda(b)| > 1$). Per a la resta de l'expressió, observem que per a qualssevol valors $0 \leq m < n$ es verifica

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |\lambda(b)|^{i-n} |f_1(\gamma(i+1), b)| + \sum_{i=m}^{n-1} |\lambda(b)|^{i-n} |f_1(\gamma(i+1), b)| \leq \\ &\leq a^{m-n} c \sum_{i=0}^{m-1} a^{i-m} + \frac{1}{1-a} \sup_{i \geq m} |f_1(\gamma(i+1), b)|. \end{aligned}$$

Com abans, la segona expressió tendeix a 0 quan $m \rightarrow \infty$; per tant, donat $\epsilon > 0$, podem considerar un valor de m tal que la segona part és menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Aleshores,

com que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{m-n} = 0$, podem prendre n prou gran de manera que la primera expressió també sigui menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Això demostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} H(x, \gamma, b) = 0$. \square

A continuació el nostre propòsit és el d'aplicar el teorema de la funció implícita a H per tal de veure que per a cada x i cada b existeix un $\gamma \in G$ tal que $H(x, \gamma, b) = 0$. Abans, però, hem de verificar les hipòtesis que fan falta.

Lema 1.4.7 *L'aplicació H és contínua.*

Demostració. Sigui K_1 el conjunt de successions reals que convergeixen a 0 amb la norma del suprem: $\|(x_n)_{n \geq 0}\| = \sup_{n \geq 0} |x_n|$, de manera que $K = K_1 \times K_1$. Només cal veure que són contínues les aplicacions següents:

- 1) $H_1 : B_\beta \times J \longrightarrow K_1$ definida per $H_1(x, b)(n) = \lambda(b)^{-n}x$,
- 2) $H_2 : G \times J \longrightarrow K_1$ definida per $H_2(\gamma, b)(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b)$, i
- 3) $H_3 : G \times J \longrightarrow K_1$ definida per $H_3(\gamma, b)(n) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b)$.

Això es dedueix del fet que λ i μ són funcions contínues de b , i f_1 i f_2 funcions contínues dels seus arguments.

- $|H_1(x, b)(n) - H_1(\bar{x}, \bar{b})(n)| = |\lambda(b)^{-n}x - \lambda(\bar{b})^{-n}\bar{x}| \leq$
 $\leq |\lambda(b)^{-n}x - \lambda(b)^{-n}\bar{x}| + |\lambda(b)^{-n}\bar{x} - \lambda(\bar{b})^{-n}\bar{x}| =$
 $= |\lambda(b)|^{-n}|x - \bar{x}| + |\bar{x}||\lambda(b)^{-n} - \lambda(\bar{b})^{-n}| \leq$
 $\leq |x - \bar{x}| + |\bar{x}||1 - \left(\frac{\lambda(\bar{b})}{\lambda(b)}\right)^{-n}|, \forall n \geq 0.$

Si $\bar{x} \rightarrow x$ i $\bar{b} \rightarrow b$ (per tant $\lambda(\bar{b}) \rightarrow \lambda(b)$) llavors l'expressió de la dreta tendeix a 0, $\forall n \geq 0$.

- $|H_2(\gamma, b)(n) - H_2(\bar{\gamma}, \bar{b})(n)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda(b)^{i-n}| |f_1(\gamma(i+1), b) - f_1(\bar{\gamma}(i+1), \bar{b})| +$
 $+ \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda(b)^{i-n} - \lambda(\bar{b})^{i-n}| |f_1(\bar{\gamma}(i+1), \bar{b})| \leq$
 $\leq \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i} |f_1(\gamma(i+1), b) - f_1(\bar{\gamma}(i+1), \bar{b})| + c \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda(b)^{i-n} - \lambda(\bar{b})^{i-n}|.$

Si $\bar{\gamma} \rightarrow \gamma$ i si $\bar{b} \rightarrow b$ llavors aquesta expressió de la dreta tendeix a 0, $\forall n \geq 0$.

- $|H_3(\gamma, b)(n) - H_3(\bar{\gamma}, \bar{b})(n)| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |\mu(b)^{i-n}| |f_2(\gamma(i+1), b) - f_2(\bar{\gamma}(i+1), \bar{b})| +$
 $+ \sum_{i=n}^{\infty} |\mu(b)^{i-n} - \mu(\bar{b})^{i-n}| |f_2(\bar{\gamma}(i+1), \bar{b})| \leq$
 $\leq \sum_{i=n}^{\infty} a^{i-n} |f_2(\gamma(i+1), b) - f_2(\bar{\gamma}(i+1), \bar{b})| + c \sum_{i=n}^{\infty} a^{i-n} |1 - \left(\frac{\mu(\bar{b})}{\mu(b)}\right)^{i-n}|.$

L'expressió de la dreta es pot fer tant petita com vulguem ($\forall n \geq 0$) prenent $|\bar{\gamma} - \gamma|$ i $|\bar{b} - b|$ prou petits. \square

Lema 1.4.8 *L'aplicació H és de classe C^1 .*

Demostració. Calcularem explícitament les derivades parcials D_1H , D_2H i D_3H i veurem que són contínues.

- Fixem $\gamma \in G$ i $b \in J$ i considerem la dependència de H respecte x . Per la definició (1.5) es verifica

$$\|H(x+h, \gamma, b) - H(x, \gamma, b)\| = \sup_{n \geq 0} \|(-\lambda(b)^{-n}h, 0)\|.$$

Per tant, és evident que existeix $D_1H : B_\delta \times G \times J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, K)$ definida mitjançant $D_1H(x, \gamma, b)(h)(n) = (-\lambda(b)^{-n}h, 0)$, $\forall n \geq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}$; a més, D_1H és contínua trivialment.

- Per a veure que existeix $D_2H : B_\delta \times G \times J \rightarrow \mathcal{L}(K, K)$ i és contínua, comprovarem que $\forall n \geq 0$ i $\forall u \in K$ l'expressió

$$E = u(n) - \begin{pmatrix} -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda(b)^{i-n} D_1 f_1(\gamma(i+1), b)(u(i+1)) \\ \sum_{i=n}^{\infty} \mu(b)^{i-n} D_1 f_2(\gamma(i+1), b)(u(i+1)) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

és $D_2H(x, \gamma, b)(u)(n)$. Efectivament, si (per a simplificar la notació) convenim $\gamma_{i+1} = \gamma(i+1)$, $u_{i+1} = u(i+1)$ i eliminem la dependència respecte b , llavors es verifica

$$\begin{aligned} & \|H(x, \gamma + u)(n) - h(x, \gamma)(n) - E\| \leq \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i-n} [f_1(\gamma_{i+1} + u_{i+1}) - f_1(\gamma_{i+1}) - D_1 f_1(\gamma_{i+1}) u_{i+1}] \\ -\sum_{i=n}^{\infty} \mu^{i-n} [f_2(\gamma_{i+1} + u_{i+1}) - f_2(\gamma_{i+1}) - D_1 f_2(\gamma_{i+1}) u_{i+1}] \end{pmatrix} \right\| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda^{i-n}| |f_1(\gamma_{i+1} + u_{i+1}) - f_1(\gamma_{i+1}) - D f_1(\gamma_{i+1}) u_{i+1}| + \\ & + \sum_{i=n}^{\infty} |\mu^{i-n}| |f_2(\gamma_{i+1} + u_{i+1}) - f_2(\gamma_{i+1}) - D f_2(\gamma_{i+1}) u_{i+1}|. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Sigui $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (recordem que hem suprimit la dependència de b); com que f és de classe \mathcal{C}^1 , resulta que Df és uniformement contínua a $B_\delta \times B_\delta$:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall z, z+t \in B_\delta \times B_\delta$ amb $\|t\| < \delta$ es verifica

$$\|Df(z+t) - Df(z)\| < \epsilon .$$

D'altra banda, apliquem el teorema del valor mitjà a $g(t) = f(t) - Df(z)t$, la qual verifica $Dg(t)v = (Df(t) - Df(z))v$. Obtenim

$$\begin{aligned} \|f(z+t) - f(z) - Df(z)t\| &= \|g(z+t) - g(z)\| \leq \\ &\leq \|t\| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Dg(z+\theta t)\| \leq \|t\| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Df(z+\theta t) - Df(z)\| \leq \epsilon \|t\| \end{aligned}$$

A l'última desigualtat hem suposat que $z, z+t \in B_\delta \times B_\delta$ i $\|t\| < \delta$.

Substituint això a (1.7) i usant que $|\frac{1}{\lambda}|, |\mu| < a$ s'obté

$$\|H(x, \gamma+u, b)(n) - H(x, \gamma, b)(n) - E\| \leq \frac{1}{1-a} \epsilon \|u\| , \text{ si } \|u\| < \delta .$$

Això demostra que $D_2H(x, \gamma, b)(u)(n) = E$. Finalment, un raonament similar al del lema anterior demostra que D_2H és contínua.

- Comprovarem que existeix $D_3H : B_\delta \times G \times J \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, K) \simeq K$ definida mitjançant

$$\begin{aligned} D_3H(x, \gamma, b)(h)(n) &= \\ &= -h \left(\begin{array}{c} x \frac{d}{db}(\lambda(b)^{-n}) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d}{db}[\lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b)] \\ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{d}{db}[\mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b)] \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Diem E a la part de la dreta.

$$\text{Efectivament, } D \equiv H(x, \gamma, b+h)(n) - H(x, \gamma, b)(n) - E = - \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \text{ on}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= x \{ \lambda(b+h)^{-n} - \lambda(b)^{-n} - \frac{d}{db}[\lambda(b)^{-n}]h \} - \\ &- \sum_{i=0}^{n-1} \{ \lambda(b+h)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b+h) - \lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b) \} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d}{db} [\lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b)] h$$

i

$$E_2 = \sum_{i=n}^{\infty} \{ \mu(b+h)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b) - \mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b) \} - \\ - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{d}{db} [\mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b)] h .$$

Farem un raonament anàleg al punt anterior. Sigui $m(b)$ qualsevol de les funcions $\lambda(b)^{-n}$, $\lambda(b)^{i-n} f_1(\gamma(i+1), b)$ ($i = 0 \div n-1$), $\mu(b)^{i-n} f_2(\gamma(i+1), b)$ ($i \geq n$), amb $n \geq 0$. Com que m és de classe C^1 a \mathbb{R} , resulta que m' és uniformement contínua a J . Usant això i aplicant el teorema del valor mitjà a la funció $p(h) = m(b+h) - m(b) - m'(b)h$ s'obté

$$|m(b+h) - m(b) - m'(b)h| \leq |h| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |m'(b+\theta h) - m'(b)| \leq \epsilon |h|$$

per a qualsevol $\epsilon > 0$ si $|h| < \delta$ (δ depèn de ϵ).

Substituint això a l'expressió de D i usant que $|\frac{1}{\lambda(b)}|, |\mu(b)| \leq a < 1$ obtenim que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|D\|}{\|h\|} = 0$. \square

Hem vist, doncs, que H és de classe C^1 . A més a més, substituint $x = 0 \in \mathbb{R}$, $\gamma = 0 \in G$ i $b = 0 \in \mathbb{R}$ a la definició (1.5) i a l'expressió (1.6) de $D_2 H$ del lema 1.4.8 queda

$$1) H(0, 0, 0) = 0,$$

$$2) D_2 H(0, 0, 0)(u)(n) = u(n), \forall n \geq 0, \forall u \in K; \text{ per tant, } D_2 H(0, 0, 0) \text{ és la identitat de } K.$$

Pel teorema de la funció implícita existeixen entorns $X \subset B_\beta$ i $I \subset J$, de $0 \in \mathbb{R}$ i U de $(0, 0, 0) \in B_\beta \times G \times J$, i una aplicació $h : X \times I \rightarrow K$ de classe C^1 tals que es verifica:

$$(x, \gamma, b) \in U \text{ i } H(x, \gamma, b) = 0 \iff (x, b) \in X \times I \text{ i } \gamma = h(x, b). \quad (1.8)$$

En particular, $h(0, 0) = 0$ i $\forall x \in X, \forall b \in I \ H(x, h(x, b), b) = 0$.

Substituint l'expressió (1.5) de H en $0 = H(x, h(x, b), b)(0)$ obtenim

$$h(x, b)(0) = \left(x, \sum_{i=0}^{\infty} \mu(b)^i f_2(h(x, b)(i+1), b) \right).$$

Definim una aplicació $g : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mitjançant la segona component de l'expressió anterior:

$$g(x, b) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(b)^i f_2(h(x, b)(i+1), b),$$

de manera que es verifica $h(x, b)(0) = (x, g(x, b))$.

Aquesta funció g serà la g^u de l'enunciat. Observem que $g = pr_2 \circ L \circ h$, on $L : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ està definida per $L(\gamma) = \gamma(0)$ i $pr_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és la projecció natural sobre la segona component; en conseqüència g és de classe C^1 . El pas essencial que falta per a acabar la demostració en el cas inestable és el següent resultat.

Lema 1.4.9 $\forall x \in X, \forall b \in I, \forall n \geq 0$ es verifica

$$F_b^h(h(x, b)(n+1)) = h(x, b)(n).$$

Demostració. Usem la definició (1.5) de H en $H(x, h(x, b), b) = 0$; obtenim

$$h(x, b)(n) = \left(\begin{array}{c} \lambda(b)^{-n} x - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(b)^{i-n} f_1(h(x, b)(i+1), b) \\ \sum_{i=n}^{\infty} \mu(b)^{i-n} f_2(h(x, b)(i+1), b) \end{array} \right).$$

Canviem n per $n+1$ i usem la definició (1.4) de F_b ; es té

$$\begin{aligned} F_b^h(h(x, b)(n+1)) &= \\ &= \left(\begin{array}{c} \lambda(b)[\lambda(b)^{-n-1} x - \sum_{i=0}^n \lambda(b)^{i-n-1} f_1(h(x, b)(i+1), b)] + f_1(h(x, b)(n+1), b) \\ \mu(b)[\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(b)^{i-n-1} f_2(h(x, b)(i+1), b)] + f_2(h(x, b)(n+1), b) \end{array} \right). \end{aligned}$$

I aquesta expressió és, efectivament, igual a l'anterior. \square

Usant aquest lema recursivament surt

$$F_n^b(h(x, b)(n)) = F_b^{n-1}(h(x, b)(n-1)) = \dots = h(x, b)(0) = (x, g(x, b)).$$

Això ens diu que $\forall b \in I$ i $\forall x \in X$ el punt $(x, g(x, b))$ és de $W^u(0, F_b)$, ja que existeix una successió d'antiimatges $\{h(x, b)(n)\}_{n \geq 0}$ que convergeix cap a 0. Hem vist 3).

D'altra banda, usant que $\mu(0) = 0$ i que $f_2(x, y, 0) \equiv 0$, veiem

$$(x, g(x, 0)) = h(x, 0)(0) = (x, f_2(h(x, 0)(1), 0)) = (x, 0), \forall x \in X .$$

Això dona 4) per a g^u . Finalment, vegem 1). Sigui $b \in I$; a causa que $f(0, 0, b) = 0$ es té $H(0, 0, b) = 0$. Usant (1.8) obtenim $0 = h(0, b)$. Com que es verifica $h(0, b)(0) = (0, g(0, b))$, resulta que $g(0, b) = 0$. A més, si derivem l'expressió $H(x, h(x, b), b) = 0$ respecte x i fem $x = 0$ obtenim

$$D_1H(0, 0, b) + D_2H(0, 0, b) \frac{d}{dx}h(0, b) = 0 .$$

Substituint $x = 0$ i $\gamma = 0$ a l'expressió (1.6) de D_2H i usant les condicions de c) veiem que $D_2H(0, 0, b) = Id$. Per consegüent, $\frac{d}{dx}h(0, b) = -D_1H(0, 0, b)$.

Ara bé, podem usar l'expressió de la derivada D_1H del lema 1.4.8 per a obtenir $-D_1H(0, 0, b)(v) = -u$, on $u(n) = (-\lambda(b)^{-n}v, 0)$, $\forall n \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}$.

D'altra banda, derivem l'expressió $g = pr_2 \circ L \circ h$ respecte x i fem $x = 0$ (recordem que pr_2 i L són lineals):

$$\frac{d}{dx}g(0, b)(v) = pr_2 \circ L \circ \frac{d}{dx}h(0, b)(v) = pr_2 \circ (-v, 0) = 0, \forall v \in \mathbb{R} .$$

Això acaba la demostració en el cas inestable. La demostració per a la varietat estable és totalment anàloga (recordem que no es pot deduir de la inestable perquè la família F_b no és invertible). L'única diferència és la definició adequada de la funció H . Els passos que cal comprovar són els següents.

1) Definim $H : B_\beta \times G \times J \rightarrow K$ mitjançant

$$H(y, \gamma, b) = \gamma(n) - \left(\begin{array}{c} -\sum_{i=n}^{\infty} \gamma(b)^{n-1-i} f_1(\gamma(i), b) \\ \mu(b)^n y + \sum_{i=0}^{n-1} \mu(b)^{n-1-i} f_2(\gamma(i), b) \end{array} \right) \quad \forall n \geq 0 .$$

H està ben definida: $\forall y \in B_\beta, \forall \gamma \in G, \forall b \in J$ la sèrie és convergent i $H(y, \gamma, b) \in K$.

2) H és de classe C^1 .

3) Es verifica $H(0, 0, 0) = 0$ i $D_2H(0, 0, 0)$ és la identitat sobre K . Pel teorema de la funció implícita, existeixen entorns de $0 \in \mathbb{R}, Y \subset B_\beta$ i $I \subset J$, i existeix una única aplicació $h : Y \times I \rightarrow G$ de classe C^1 tal que $h(0, 0) = 0$ i $H(y, h(y, b), b) = 0 \forall y \in Y, \forall b \in I$.

- 4) Per a cada parella de valors y i b , $h(y, b)(0)$ és de la forma $(g(y, b), b)$. Això defineix una funció $g : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ que és de la mateixa classe de diferenciabletat que h . Aquesta g és la g^s de l'enunciat.
- 5) Es comprova que $h(y, b)(n+1) = F_b(h(y, b)(n))$, $\forall n \geq 0$. Aleshores, per inducció tenim $h(y, b)(n) = F_b^n(h(y, b)(0)) = F_b^n(g(y, b), y)$; això significa que $\text{graf}(g(\cdot, b)) \subset W^s(0, F_b)$.
- 6) Finalment, també és cert que $g(y, 0) = 0 \forall y \in Y$, i $g(0, b) = D_y g(0, b) = 0 \forall b \in I$. \square

Nota. És una simple (però llarga) comprovació que si la família F és de classe C^r ($r > 1$) llavors les aplicacions g^u i g^s també són de classe C^r . Això es pot fer usant tècniques similars a les dels lemes 1.4.7 i 1.4.8; però podem obtenir evidència d'això a partir de l'observació següent.

Sigui \mathcal{E} l'espai de funcions de $B_\beta \times B_\beta$ en \mathbb{R} que són restricció a $B_\beta \times B_\beta$ de funcions de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} de classe C^r . Per tant, $\forall f \in \mathcal{E}$ i $\forall i = 0 \div r$ $D^i f$ està fitada sobre $B_\beta \times B_\beta$ i podem definir la norma C^r a \mathcal{E} : $\|f\|_r = \max\{\|f\|, \|Df\|, \dots, \|D^r f\|\}$.

La funció H es pot escriure com $H_2 \circ H_1$, on:

- a) $H_1 : B_\beta \times G \times J \rightarrow B_\beta \times G \times B_1 \times B_1 \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ és l'aplicació

$$H_1(x, \gamma, b) = \left(x, \gamma, \frac{1}{\lambda(b)}, \mu(b), f_1(\cdot, \cdot, b), f_2(\cdot, \cdot, b) \right); \text{ i}$$

- b) $H_2 : B_\beta \times G \times B_1 \times B_1 \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow K$ és l'aplicació definida mitjançant

$$H_2(x, \gamma, \lambda, \mu, f_1, f_2)(n) = \gamma(n) - \left(\frac{\lambda^n x - \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} f_1(\gamma(i+1))}{\sum_{i=n}^{\infty} \mu^{i-n} f_2(\gamma(i+1))} \right), \forall n \geq 0.$$

Com que λ , μ , f_1 i f_2 són de classe C^r respecte b i $\lambda(b) \neq 0 \forall b \in J$ resulta evident que l'aplicació H_1 és de classe C^r .

Com que f_1 i f_2 són funcions de classe C^r i $|\mu| < 1$, és fàcil veure que H_2 és de classe C^r .

Una vegada sabut que les varietats invariants depenen diferenciablement del paràmetre b , ens adrecem al problema d'obtenir els seus desenvolupaments explícits

en potències de b . Això pot ser útil, quan $|b|$ sigui prou petit (això és, pertorbacions del cas singular, que és essencialment unidimensional), per a detectar interseccions homoclíniques.

Considerem, doncs, una família $F_b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) + h_1(x, y, b) \\ h_2(x, y, b) \end{pmatrix}$, amb f , h_1 i h_2 funcions suficientment diferenciables i que verifiquen $h_1(x, y, 0) = h_2(x, y, 0) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Sigui també $z_0 = (x_0, 0)$ un punt fix de F_0 de tipus sella, de manera que $\text{Espectre}(DF_0(z_0)) = \{f'(x_0), 0\}$ i $|f'(x_0)| > 1$. Notarem $z(b) = (x(b), y(b))$ el punt fix de F_b que és pertorbació de z_0 , i $\lambda(b)$, $\mu(b)$ els elements de $\text{Espectre}(DF_b(z(b)))$, amb vectors propis respectius normalitzats $v(b)$ i $w(b)$; de manera que $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $\lambda(0) = f'(x_0)$, $\mu(0) = 0$, $v(0) = (1, 0)$ i $w(0) = (0, 1)$. Totes aquestes funcions depenen diferenciablement de b .

Per a $b = 0$, ja sabem que en un entorn de z_0 les varietats estable i inestable són segments vertical i horitzontal: $\{(x_0, y) : |y| < \bar{y}\}$ i $\{(x, 0) : |x - x_0| < \bar{x}\}$, respectivament.

Per a $|b|$ suficientment petit busquem la varietat inestable W^u , en un entorn de $z(b)$, de la forma $(x, g(x, b))$, on $g(x, b) = g(x, 0) + \frac{\partial g}{\partial b}(x, 0)b + O(b^2)$. Com que

$$F_b \begin{pmatrix} x \\ g(x, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) + h_1(x, g(x, b), b) \\ h_2(x, g(x, b), b) \end{pmatrix},$$

resulta que la condició d'invariança de W^u és

$$h_2(x, g(x, b), b) = g(f(x) + h_1(x, g(x, b), b)) \quad (1.9)$$

per a $|b|$ i $|x - x(b)|$ prou petits. A més, cal que $g(x(b), b) = y(b)$ i que $\frac{\partial g}{\partial x}(x(b), b)$ sigui el pendent de $u(b)$.

Per allò que hem dit del cas $b = 0$, ja sabem que $g(x, 0) \equiv 0$. Busquem, doncs, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, 0)$. La derivada de (1.9) respecte b és

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, g(x, b), b) \frac{\partial g}{\partial b}(x, b) + \frac{\partial h_2}{\partial b}(x, g(x, b), b) = \\ & = \frac{\partial g}{\partial x}(f(x) + h_1(x, g(x, b), b)) \left[\frac{\partial h_1}{\partial y}(x, g(x, b), b) \frac{\partial g}{\partial b}(x, b) + \frac{\partial h_1}{\partial b}(x, g(x, b), b) \right] + \\ & \quad + \frac{\partial g}{\partial b}(f(x) + h_1(x, g(x, b), b)) . \end{aligned}$$

Quan $b = 0$ es verifica $g(x, 0) = h_1(x, y, 0) = h_2(x, y, 0) = 0$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}$) i, per tant, també són 0 les derivades primeres de g respecte x i de f_1 i f_2 respecte x o y . L'expressió anterior queda reduïda a

$$\frac{\partial h_2}{\partial b}(x, 0, 0) = \frac{\partial g}{\partial b}(f(x), 0) .$$

Finalment, en un entorn de x_0 existeix la inversa local de f . Això ens permet fer el canvi de $f(x)$ per x i obtenir

$$\frac{\partial g}{\partial b}(x, 0) = \frac{\partial h_2}{\partial b}(f^{-1}(x), 0, 0) .$$

Podem fer un càlcul anàleg per a la varietat estable. Notem els seus punts en un entorn de $y = 0$ com $(g(y, b), b)$. Volem calcular els coeficients de l'expressió $g(y, b) = g(y, 0) + \frac{\partial g}{\partial b}(y, 0)b + O(b^2)$. Sabem, del cas $b = 0$, que $g(y, 0) \equiv x_0, \forall y$. La condició d'invariança és, ara

$$f(g(y, b)) + h_1(g(y, b), y, b) = g(h_2(g(y, b), y, b), b) .$$

Derivant respecte b s'obté

$$\begin{aligned} f'(g(y, b)) \frac{\partial g}{\partial b}(y, b) + \frac{\partial h_1}{\partial x}(g(y, b), y, b) \frac{\partial g}{\partial b}(y, b) + \frac{\partial h_1}{\partial b}(g(y, b), y, b) &= \\ = \frac{\partial g}{\partial y}(h_2(g(y, b), y, b), b) \left[\frac{\partial h_2}{\partial x}(g(y, b), y, b) \frac{\partial g}{\partial b}(y, b) + \frac{\partial h_2}{\partial b}(g(y, b), y, b) \right] &+ \\ + \frac{\partial g}{\partial b}(h_2(g(y, b), y, b), b) . & \end{aligned}$$

Fem ara $b = 0$; per tant, $g(y, 0) \equiv x_0$ i $h_1(x, y, 0) = h_2(x, y, 0) = 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$. També són 0 les derivades de g respecte y i de h_1 i h_2 respecte x o y . Queden pocs termes en l'expressió anterior:

$$f'(x_0) \frac{\partial g}{\partial b}(y, 0) + \frac{\partial h_1}{\partial b}(x_0, y, 0) = \frac{\partial g}{\partial b}(0, 0) .$$

Fent $y = 0$ obtenim $\frac{\partial g}{\partial b}(0, 0) = \frac{\partial h_1}{\partial b}(x_0, 0, 0)/(1 - f'(x_0))$; per tant

$$\frac{\partial g}{\partial b}(y, 0) = \frac{1}{f'(x_0)} \left[\frac{\frac{\partial h_1}{\partial b}(x_0, 0, 0)}{1 - f'(x_0)} - \frac{\partial h_1}{\partial b}(x_0, y, 0) \right] .$$

Hem demostrat el resultat següent.

Proposició 1.4.10 Per a $|b| < b_0$, sigui $z(b) = (x(b), y(b))$ un punt fix sella de la família $F_b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) + h_1(x, y, b) \\ h_2(x, y, b) \end{pmatrix}$, on f , h_1 i h_2 són funcions de classe C^2 tals que $h_1(x, y, 0) = h_2(x, y, 0) \equiv 0$. Aleshores per a $|b|$ prou petit es verifica:

1) La varietat estable de $z(b)$ s'expressa, en un entorn de $y = 0$, com $x = g^s(y, b)$, on

$$g^s(y, b) = x(0) + \frac{1}{f'(x(0))} \left[\frac{\partial h_1}{\partial b}(x(0), 0, 0) - \frac{\partial h_1}{\partial b}(x(0), y, 0) \right] b + O(b^2) .$$

2) La varietat inestable del punt $z(b)$ s'expressa, en un entorn de $x = x(0)$, com $y = g^u(x, b)$, on

$$g^u(x, b) = \frac{\partial h_2}{\partial b}(f^{-1}(x), 0, 0)b + O(b^2) .$$

Aquí, f^{-1} representa la inversa local de f en un entorn de $x(0)$. \square

1.5 Extensió de punts homoclínic

En aquest darrer apartat relacionarem alguns punts homoclínic d'un endomorfisme $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ amb els de difeomorfismes $F_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que siguin pertorbacions de l'aplicació singular $F_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$. Si l'homoclínic és prou "regular", l'extensió es fa sense problemes; però hi ha casos degenerats en què el comportament per al cas bidimensional és molt diferent del cas unidimensional. Altres autors han tractat l'extensió de punts homoclínic per a casos singulars diferents al nostre, per exemple [31], [37], [38], [61], [55], [57].

Recordem que un punt homoclínic q a un punt fix hiperbòlic p d'un difeomorfisme $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ és *transversal* quan $W^s(p, f)$ i $W^u(p, f)$ s'intersequen transversalment en el punt q : $T_q(W^s) + T_q(W^u) = \mathbb{R}^m$, on $T_q(W)$ és el subspai tangent a la varietat W en el punt q . En aquest cas, tots els punts de l'òrbita generada per q són punts homoclínic transversals, i diem que és una *òrbita homoclínic transversal*.

Cal que donem una condició equivalent a la transversalitat per als casos d'aplicacions no invertibles que ens interessin. Suposem que x^0 és un punt fix *repulsor*

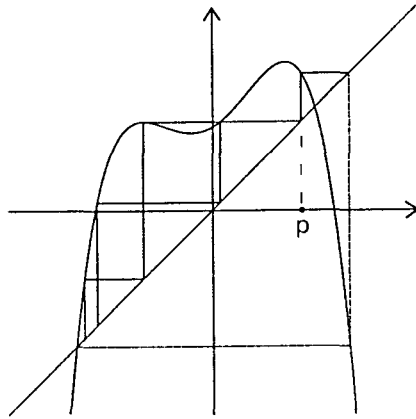


Figura 1.1: Exemple de punt que pertany a una òrbita homoclínica degenerada i a una de no degenerada.

de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ i que $O = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ és una òrbita homoclínica a x^0 . Diem que O és *no degenerada* si $Df(x_n)$ és un isomorfisme lineal, $\forall n \in \mathbb{Z}$; en cas contrari s'anomena *degenerada*.

Remarquem que, en el cas no invertible, un mateix punt q pot pertànyer a dos (o més) òrbites homoclíniques, i que una pot ser degenerada i l'altra no. Això fa que si parlem de *punts homoclínics que són o no degenerats* cal precisar a quina òrbita ens referim. La figura 1.1 mostra un exemple en dimensió 1 d'aquest comportament.

Teorema 1.5.1 *Siguin $F_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una família d'aplicacions que depenen de forma C^1 respecte al paràmetre $b \in \mathbb{R}$ i que verifica*

- a) $\forall b \neq 0$, F_b és un difeomorfisme de classe C^1 , i
- b) $F_0(x, y) = (f(x), 0)$, amb $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Suposem que x^0 és un punt fix repulsor de f i que p és un punt d'una òrbita homoclínica de x^0 no degenerada. Aleshores existeixen $b_0 > 0$ i una aplicació de classe C^1 $z : (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $z(b) = (p(b), q(b))$, tals que

- 1) $p(0) = p$, $q(0) = 0$, i
- 2) $\forall |b| < b_0$, $b \neq 0$ $z(b)$ és un punt homoclínic transversal de F_b .

Demostració. Sota les hipòtesis de l'enunciat sabem que $\forall |b|$ prou petit existeixen funcions $x(b)$ i $y(b)$ de classe C^1 tals que

- $(x(b), y(b))$ és un punt fix sella de $F_b, \forall b$;
- $x(0) = x^0, y(0) = 0$.

En particular, podem considerar els conjunts estable i inestable de $(x(b), y(b))$. En el cas $b = 0$ sabem relacionar aquests conjunts amb els relatius a x^0 per f . Si notem $z^0 = (x^0, 0)$ llavors

- $W^s(z^0, F_0) = S \times \mathbb{R}$, on $S \equiv W^s(x^0, f)$ és el conjunt d'antiimatges de x^0 per f ; i
- $W^u(z^0, F_0) = U \times \{0\}$, on $U \equiv W^u(x^0, f) = \cup_{n \geq 0} f^n(I^\epsilon)$, amb l'interval $I^\epsilon = (x^0 - \epsilon, x^0 + \epsilon)$. suficientment petit (de fet, tant petit com vulguem).

D'això és evident que si $p \in S \cap U$ és un punt homoclínic a x^0 per f llavors $(p, 0) \in (S \times \mathbb{R}) \cap (U \times \{0\})$ és homoclínic a z^0 per F_0 .

Lema 1.5.2 $W^u(z^0, F_0)$ i la component conexas de $W^s(z^0, F_0)$ que conté $(p, 0)$ són varietats diferenciables de dimensió 1 i s'intersequen transversalment en $(p, 0)$.

Demostració. Usarem el fet que p és d'una òrbita homoclínica no degenerada, la qual notarem $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ amb $x_0 = p$. Sigui $n \geq 0$ el primer valor que verifica $f^n(p) = x^0$. Per la banda dels negatius existeix un valor $-m < 0$ tal que $x_i \in I^\epsilon, \forall i \leq -m$; i aquest punts s'acosten monòtonament (en valor absolut) a x^0 :

$$|x_{i-1} - x^0| \leq k|x_i - x^0| < |x_i - x^0|, \quad \forall i \leq -m.$$

Per ser l'òrbita homoclínica no degenerada, $f'(x_i) \neq 0 \forall i \leq n$. En particular, f és estrictament monòtona en un entorn de cadascun d'aquests punts. Reduint ϵ (si cal), podem trobar intervals $I_i, \forall i \leq n$, tals que

- a) x_i és un punt interior de $I_i, \forall i \leq n$;
- b) $I_i \cap I_j = \emptyset, \forall i, j \leq n - 1, i \neq j$;
- c) $f : I_i \longrightarrow I_{i+1}$ és un difeomorfisme, $\forall i \leq n - 1$.

Ja sabem que U és un interval (per tant, una varietat de dimensió 1, encara que pot tenir vora). Per a demostrar el lema només cal veure

- 1) p és un punt interior de U , i
- 2) la component connexa de $W^s(z^0, F_0)$ que conté p és $\{p\} \times \mathbb{R}$.

El primer punt és evident, perquè p és interior a I_0 i $I_0 \subset U$. Per al segon, cal veure que S no conté cap interval no trivial que contingui p .

Suposem que $J \subset I_0$ és un interval que conté p i format per punts de $W^s(x^0, F_0)$; llavors $\forall x \in J, \exists n(x) > 0 \mid f^{n(x)}(x) = x^0$. Com que f^n és injectiva sobre J (a causa de c)), resulta que $\forall x \neq p, n(x) \neq n$.

Però pel mateix raonament que hem usat per a p el podem usar per a qualsevol $x \in J$ (prenent J prou petit); per tant: $\forall x, y \in J, x \neq y \rightarrow n(x) \neq n(y)$. Això és impossible si J és no trivial. \square

Acabem la demostració del teorema. Hem vist, durant la prova del lema, que existeix un segment $I_{-m} \times \{0\} \subset W^u(z^0, F_0)$ tal que $F_0^m(I_{-m} \times \{0\})$ interseca transversalment la component $\{p\} \times \mathbb{R}$ de $W^s(z^0, F_0)$. Com que F_b depèn diferencialment de b , resulta que també és cert, si $|b|$ és prou petit, que $F_b^m(I_{-m} \times \{0\})$ interseca transversalment $\{p\} \times \mathbb{R}$. Finalment, quan movem b a partir de 0, els conjunts $I_{-m} \times \{0\}$ i $\{p\} \times \mathbb{R}$ varien diferenciablement amb b ; en conseqüència, es manté la intersecció transversal per a $|b|$ prou petit. \square

Anàlogament a l'extensió dels punts periòdics no hiperbòlics, convindria introduir un altre paràmetre per a tractar el cas d'òrbites homoclíniques *degenerades*. Alguns autors ja han assenyalat, en casos concrets, que hi ha diferències molt grans entre l'endomorfisme unidimensional i el difeomorfisme bidimensional. Basta recordar que Tatjer [57] ha demostrat analíticament, per a l'aplicació d'Hénon $(x, y) \rightarrow (1 + y - ax^2, bx)$, que del punt $a = 2, b = 0$ (per al qual existeix una òrbita homoclínica degenerada associada a un punt fix repulsor de l'aplicació logística $f_a(x) = 1 - ax^2$), hi surt una *infininitat numerable* de corbes de classe C^1 que corresponen a "tangències" homoclíniques entre les varietats estable i inestable de la sella corresponent quan $b \neq 0$. Una interpretació coherent d'aquest fenomen és que, quan $b = 0$, en $a = 2$ no hi ha una única tangència homoclínica sinó moltes de coincidents. Una demostració més geomètrica d'aquest fet es pot trobar a [31].

Capítol 2

Bifurcacions homoclíniques i periòdiques en un sistema de pertorbació singular

En aquest capítol considerarem un sistema autònom de tres equacions diferencials ordinàries de primer ordre i amb dos paràmetres essencials, el qual és "poc regular" per dos motius:

- 1) Una de les equacions presenta un paràmetre petit ($\mu > 0$, $\mu \simeq 0$) com a factor d'una de les derivades. Això fa que la dinàmica sigui semblant a la que s'obté fent $\mu \rightarrow 0$. En aquest cas el sistema es torna *degenerat*, amb el moviment restringit a una superfície bidimensional i salts instantanis entre diverses components de la superfície.
- 2) El camp no és continu. Això provoca problemes en la definició de les solucions i en el domini admissible del camp.

En contrapartida, però, el camp és lineal a trossos; això fa possible tenir expressions explícites senzilles de les solucions i facilita el nostre estudi, tant analític com numèric.

Aquest sistema es pot incloure en una classe d'equacions diferencials ordinàries caracteritzada pel fet següent: existeix una superfície bidimensional S i un entorn \mathcal{U} de S tals que

- a l'exterior de \mathcal{U} , les solucions (a temps creixent) tendeixen ràpidament (en relació al moviment prop de S) cap a dins de \mathcal{U} ; i
- a \mathcal{U} , les solucions varien lentament (en relació al moviment exterior a \mathcal{U}) respecte el temps.

Això fa que les trajectòries típiques constin, alternativament, de trams de *moviment ràpid* i de *moviment lent*, situats, respectivament, a l'exterior i a l'interior de \mathcal{U} . El comportament límit pot ser, o bé un punt d'equilibri, o bé una solució periòdica (anomenada *oscil·lació de relaxació*), o bé una *solució caòtica* o *atractor estrany*. La regió de S a la qual s'acosten les *trajectòries ràpides* s'anomena *part estable* o *domini de moviment lent*. També es fa la distinció entre *variables ràpides* i *variables lentes*. Un fet essencial per a fer un estudi qualitatiu d'un camp amb aquestes característiques és que, si prenem una secció de Poincaré adequada pròxima a S , el flux determina una aplicació bidimensional que es pot aproximar bé per una d'unidimensional (aquesta és, de fet, l'aplicació de Poincaré del sistema degenerat).

Les característiques anteriors s'aconsegueixen, fonamentalment, amb l'existència d'un paràmetre (amb valors entorn de 0) que multiplica la derivada d'ordre més alt. Aquest tipus de sistemes s'anomenen de *pertorbació singular*, per a diferenciar-los de les *pertorbacions regulars*, les quals fan referència a equacions de la forma $\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu)$, amb condició inicial $y(0, \mu) = y^0$. En aquest últim cas, i per a f prou regular, es poden aplicar els teoremes de continuïtat i diferenciabilitat de solucions respecte paràmetres; a més, la solució en un temps finit, $y(t, \mu)$ ($t \in [0, T]$), es pot expressar en potències de μ fins a un cert ordre (que depèn de la diferenciabilitat de f), amb un reste que tendeix a 0 uniformement amb μ (vegeu, per exemple, [58]).

La teoria general dels sistemes de pertorbació singular es pot trobar a [41], on també hi ha exemples de sistemes físics (circuitos elèctrics i altres) regits per aquesta dinàmica. A [4] hi ha moltes altres referències. El sistema particular que nosaltres estudiem ha estat tractat anteriorment per J.P. Carcasses i C. Mira, a [10] i [11]. Fonamentalment, s'hi mostren resultats (només numèrics) referents a l'estructura de bifurcacions d'òrbites periòdiques. Això es fa tant per al *cas singular* $\mu = 0$ com per al cas general. Destaquem el següent resultat: el sistema té un altre paràmetre essencial, β ; i al pla de paràmetres es mostren cascades de corbes de bifurcació sella-node de període 2 (de fet, per dificultats numèriques,

només 3 o 4 corbes) que presenten punts "cusp", els quals semblen acumular-se de manera aproximadament geomètrica. És evident que amb tan poques corbes aquest tipus d'extrapolacions s'han de fer amb molta cura. El nostre propòsit és aprofundir aquest estudi; bàsicament, hi afegim dos tipus de contribucions: d'una banda fem un recompte sistemàtic de la quantitat de bifurcacions periòdiques que es poden produir, caracteritzant-les mitjançant una quantitat finita d'índexs naturals; i de l'altra, relacionem aquestes cascades de bifurcacions amb les bifurcacions homoclíniques del sistema, de manera totalment anàloga al *fenomen de Silnikov*. Vistes les dificultats numèriques del problema -malgrat això, calculem més corbes de període 2-, passem a estudiar cascades de període 1, i, en aquest cas, l'evidència numèrica (molt més clara que per a període 2) és que la quantitat de punts cuspidals és finita.

Començarem definint el camp i donant les seves propietats (analítiques i geomètriques) més bàsiques, fent esment especial de les dificultats que originen els punts 1) i 2). A continuació, estudiarem el cas degenerat $\mu = 0$ en què el camp és bidimensional; això es fa mitjançant una aplicació de Poincaré adequada, la qual és unidimensional, analítica a trossos i té una quantitat numerable de discontinuïtats. En aquest cas, i basant-nos en la localització de les discontinuïtats i en els intervals de monotonia de la funció, es poden caracteritzar les òrbites periòdiques superestables de període n mitjançant $2n$ índexs naturals. Després passarem a la detecció d'òrbites homoclíniques del sistema: deduïm les condicions analítiques que han de verificar i fem la resolució numèrica. Finalment, fem un estudi de les bifurcacions periòdiques que es produeixen prop dels homoclínics. Els nostres resultats no són concloents per a refutar la conjectura de Carcasses referent a les cascades de cusps, però donem evidències numèriques que no és cert un resultat anàleg per a període 1.

2.1 Definicions i propietats bàsiques

Considerem el sistema autònom d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre amb variables reals (x, y, z) :

$$\dot{x} = y - \delta z ,$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -x + 2\gamma y + \alpha z + \beta, \\ \mu \dot{z} &= h(x, y, z),\end{aligned}\tag{2.1}$$

on $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i μ són paràmetres reals, $\mu > 0$ (més endavant considerarem també el cas singular $\mu = 0$) i $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ és la funció definida per

$$h(x, y, z) = \begin{cases} 1 - z & \text{si } (x, y, z) \in D_+, \\ -1 - z & \text{si } (x, y, z) \in D_-. \end{cases}\tag{2.2}$$

Els conjunts D_{\pm} són

$D_+ = \{(x, y, z) \mid \text{o bé } z > 1 \text{ i } x > -1, \text{ o bé } -1 \leq z \leq 1 \text{ i } x+z > 0, \text{ o bé } z < -1 \text{ i } x > 1\},$

$D_- = \{(x, y, z) \mid \text{o bé } z > 1 \text{ i } x < -1, \text{ o bé } -1 \leq z \leq 1 \text{ i } x+z < 0, \text{ o bé } z < -1 \text{ i } x < 1\}.$

Aquest sistema modela un oscil·lador electrònic amb un diode i una resistència negativa ([46]). La funció h és una simplicació afí (a trossos) d'una funció cúbica; així els càlculs es poden fer més explícits. La relació de les variables i els paràmetres respecte a les característiques de l'oscil·lador es pot trobar a [10]. Nosaltres fixarem els valors dels paràmetres δ, γ i α com a la part numèrica de [10]: $\delta = 5, \gamma = 0.36, \alpha = 1 + \beta - 2\gamma\delta$. Dels dos paràmetres essencials que queden (μ i β), només ens interessen valors restringits; suposarem

- $\mu \in \mathbb{R}^+, \mu$ és petit;
- $\beta > -1$.

La raó és que volem que existeixin dos punts d'equilibri del tipus sella (els detalls són més endavant).

Les equacions (2.1) queden en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - 5z, \\ \dot{y} &= -x + 0.72y + (\beta - 2.6)z + \beta, \\ \mu \dot{z} &= h(x, y, z).\end{aligned}\tag{2.3}$$

El sistema (2.3) és, doncs, lineal a trossos; i no és continu a causa de les dues possibilitats per a la funció h . Els trets essencials de les trajectòries d'aquest sistema

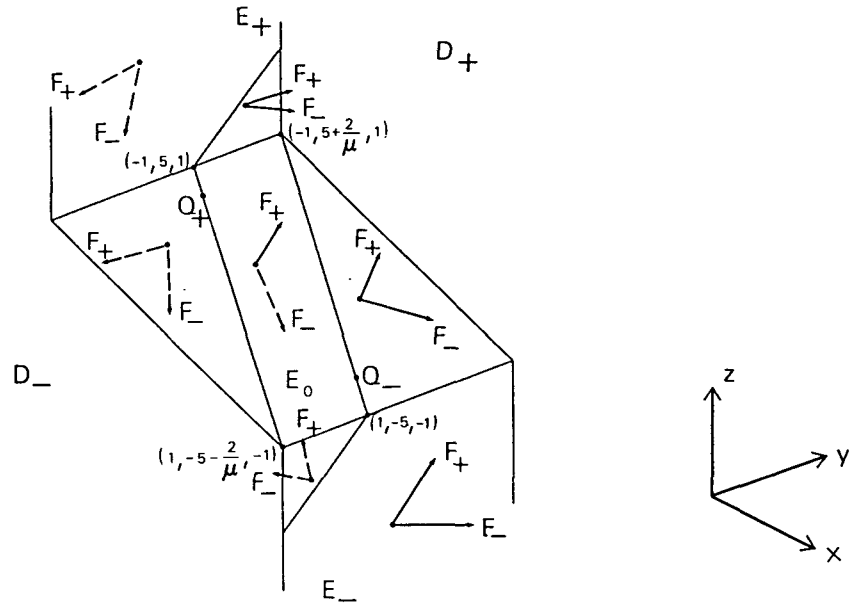


Figura 2.1: Camps F_{\pm} a la frontera dels dominis D_{\pm} .

són a la figura 2.2. Abans d'estudiar-ne les solucions, comentem la importància del fet que el camp estigui definit de dues maneres diferents.

Observem que, en principi, no hem definit h (i, per tant, tampoc el camp) en els punts de la frontera $E = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ que separa D_+ i D_- . La causa és que s'ha de vigilar la manera com es fa aquesta definició per tal que no tinguem incompatibilitats.

Notem $F_+ : D_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $F_- : D_- \rightarrow \mathbb{R}^3$ els dos camps que defineixen (2.3). Estenem F_+ i F_- a la frontera $E = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ per continuïtat. Aleshores el camp està doblement definit sobre E . Quins problemes provoca això? Comencem per veure com són els dos camps a la frontera. Classificarem els punts de la frontera depenent del comportament relatiu dels dos camps. La figura 2.1 mostra les diverses possibilitats i ajuda a seguir els pròxims raonaments.

Descomposem $E = E_+ \cup E_- \cup E_0$, on

$$E_+ = \{(x, y, z) | z > +1, x = -1\},$$

$$E_0 = \{(x, y, z) | -1 \leq z \leq 1, x + z = 0\} \text{ i}$$

$$E_- = \{(x, y, z) | z < -1, x = +1\}.$$

Lema 2.1.1 a) *Sigui $P = (x, y, z) \in E_+ \cup E_-$; aleshores*

- 1) Si $y > 5z$ llavors $F_+(P)$ i $F_-(P)$ apunten cap a D_+ ,
- 2) Si $y < 5z$ llavors $F_+(P)$ i $F_-(P)$ apunten cap a D_- ,

b) Sigui $P = (x, y, z) \in E_0$, aleshores

- 1) Si $y - (5 + \frac{1}{\mu})z + \frac{1}{\mu} > 0$ llavors $F_+(P)$ apunta cap a D_+ , i
si $y - (5 + \frac{1}{\mu})z + \frac{1}{\mu} < 0$ llavors $F_+(P)$ apunta cap a D_- ,
- 2) Si $y - (5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu} > 0$ llavors $F_-(P)$ apunta cap a D_+ , i
si $y - (5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu} < 0$ llavors $F_-(P)$ apunta cap a D_- .

c) En la resta de punts de E algun dels camps F_+ o F_- no és transversal a E .

Demostració. És immediata a partir de la definició (2.3) dels camps. Notem $F_{\pm} = (\dot{x}_{\pm}, \dot{y}_{\pm}, \dot{z}_{\pm})$. Per a l'apartat a) cal mirar el signe de $\dot{x}_+ = \dot{x}_- = \dot{x}$; per al b) cal mirar $\dot{x} + \dot{z}_{\pm}$. Surten trivialment les condicions de l'enunciat. \square

Sigui N el conjunt de punts de E en què algun dels camps no és transversal a E ; pel lema 2.1.1

$$N = \{(x, y, z) \in E_+ \cup E_- \mid y = 5z\} \cup \\ \cup \{(x, y, z) \in E_0 \mid y - (5 + \frac{1}{\mu})z + \frac{1}{\mu} = 0 \text{ o } y - (5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu} = 0\}.$$

Podem classificar els punts $P \in E \setminus N$ en tres classes:

I: Si els vectors $F_+(P)$ i $F_-(P)$ apunten cap al mateix "semispai" D_+ o D_- ;

II: Si $F_+(P)$ apunta cap a D_+ i $F_-(P)$ apunta cap a D_- ;

III: Si $F_+(P)$ apunta cap a D_- i $F_-(P)$ apunta cap a D_+ .

Si una trajectòria arriba a un punt del tipus I des d'una banda de E llavors es pot continuar cap a l'altra usant l'altre camp; només es perd la diferenciabilitat de la solució.

Els punts del tipus II, en canvi, no es poden assolir per cap banda en temps positiu; convé eliminar-los del domini de definició dels camps a causa de la incertesa que hi ha respecte cap a quina banda s'hauria de dirigir la solució que comencés en algun d'aquests punts.

Trivialment, els punts del tipus III serien atractors per les dues bandes; sortosament es verifica

Lema 2.1.2 *No existeix cap punt del tipus III a $E \setminus N$.*

Demostració. Usant a) i c) del lema anterior, no n'existeix a $E_+ \cup E_- \setminus N$. Per als punts $P \in E_0$ observem que $y - (5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu} < y - (5 + \frac{1}{\mu})z + \frac{1}{\mu}$ (ja que $\mu > 0$). Per tant, usant b) i c) de 2.1.1 tenim:

- Si $F_+(P)$ apunta cap a D_- aleshores $F_-(P)$ també;
- Si $F_-(P)$ apunta cap a D_+ aleshores $F_+(P)$ també. \square

A continuació, volem estendre la classificació I-II-III als punts de N . Per a saber cap a quina banda es dirigeixen les solucions dels camps, cal estudiar derivades superiors. Distingirem casos segons quin sigui el conjunt E_+ , E_0 o E_- on estigui situat el punt.

- Sigui $(x, y, z) \in E_+ \cap N$; això vol dir que $z > +1$, $x = -1$ i $\dot{x} = 0$ (o sigui, $y = 5z$). Llavors

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\pm} &= \dot{y}_{\pm} - 5\dot{z}_{\pm} = -x + 0.72y + (\beta - 2.6)z + \beta - \frac{5}{\mu}(\pm 1 - z) = \\ &= 1 + 3.6z + (\beta - 2.6)z + \beta - \frac{5}{\mu}(\pm 1 - z) = (1 + \beta + \frac{5}{\mu})z + (1 + \beta \mp \frac{5}{\mu}) > 2(1 + \beta) > 0, \end{aligned}$$

independentment del signe. Això significa que els dos camps es comporten de la mateixa manera en els punts de $E_+ \cap N$: les solucions tendeixen cap a la banda de D_+ . Per tant en aquests punts també podem definir les solucions, i és per això que els incloem en la classe I.

- Un estudi semblant es pot fer per als punts de $E_- \cap N$. Suposem que $(x, y, z) \in E_- \cap N$; això significa que $z < -1$, $x = +1$ i $y = 5z$; aleshores

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\pm} &= \dot{y}_{\pm} - 5\dot{z}_{\pm} = -x + 0.72y + (\beta - 2.6)z + \beta - \frac{5}{\mu}(\pm 1 - z) = \\ &= -1 + 3.6z + (\beta - 2.6)z + \beta - \frac{5}{\mu}(\pm 1 - z) = (1 + \beta + \frac{5}{\mu})z + (-1 + \beta \mp \frac{5}{\mu}) < -2 < 0. \end{aligned}$$

Per tant, sobre $E_- \cap N$, els dos camps dirigeixen les solucions cap a D_- , i podem incloure tots aquests punts en la classe I.

- Sigui ara $(x, y, z) \in E_0 \cap N$; aquests punts portaran més feina. Per la pertinença a E_0 , es verifica $x + z = 0$; però per a usar la pertinença a N cal distingir dos subcasos, en analogia a l'apartat b) del lema 2.1.1.

1) Suposem que $y - (5 + 1/\mu)z + 1/\mu = 0$. Això vol dir que F_+ és tangent a E_0 en el punt, mentre que F_- apunta cap a D_- . Mirem derivades superiors de F_+ :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_+ + \ddot{z}_+ &= \dot{y} - 5\dot{z}_+ - \frac{1}{\mu}\dot{z}_+ = -x + 0.72y + (\beta - 2.6)z + \beta - (5 + \frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu}(1 - z) = \\ &= z + 0.72 \left[(5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu} \right] + (\beta - 2.6)z + \beta - (5 + \frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu} + (5 + \frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu}z = \\ &= \left(2 + \beta + \frac{5.72}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right) z + \beta - \frac{5.72}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}.\end{aligned}$$

L'expressió anterior és una funció afí de z que, en els casos extrems $z = +1$ o $z = -1$, pren els valors $2(1 + \beta) > 0$ i $-2(1 + 5.72/\mu + 1/\mu^2) < 0$, respectivament. Això vol dir que sobre la recta $y - (5 + 1/\mu)z + 1/\mu = 0$, $x + z = 0$ es verifica:

- El punts pròxims a $z = +1$ són enviats per F_+ cap a D_+ .
- El punts pròxims a $z = -1$ són enviats per F_+ cap a D_- .
- La partició entre els dos comportaments anteriors es fa en un punt Q_+ amb component z igual a $\bar{z}_+ = \frac{1 + 5.72\mu - \beta\mu^2}{1 + 5.72\mu + (2 + \beta)\mu^2}$.

Incloem, doncs, els punts del cas b) en el tipus I; mentre que els del cas a) són del tipus II i, en conseqüència, convé eliminar-los del domini de definició. Per al punt de c) cal mirar el signe de la derivada tercera; un càlcul elemental dóna, per a aquest punt,

$$\frac{d^3}{dt^3}(x_+ + z_+) = \frac{2(\beta + 1)}{\mu} > 0.$$

Per tant, la solució de F_+ per Q_+ tendeix cap a D_+ en temps positiu. Convé, doncs, eliminar també Q_+ del domini. Observem que, així com μ s'acosta a 0, \bar{z}_+ s'acosta a 1 i, per tant, eliminem menys punts de la recta.

2) Considerem, finalment, el cas que $y - (5 + 1/\mu)z - 1/\mu = 0$. Això correspon, pel lema 2.1.1, al fet que, sobre aquesta recta de $x + z = 0$, F_+ dirigeix les solucions cap a D_+ , mentre que F_- és tangent a $x + z = 0$. Ara bé, es verifica

$$\begin{aligned}\ddot{x}_- + \ddot{z}_- &= \dot{y} - 5\dot{z}_- - \frac{1}{\mu}\dot{z}_- = -x + 0.72y + (\beta - 2.6)z + \beta - (5 + \frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu}(-1 - z) = \\ &= \left(2 + \beta + \frac{5.72}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\right)z + \beta + \frac{5.72}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}.\end{aligned}$$

Quan $z = -1$, l'expressió anterior val $-2 < 0$; mentre que quan $z = +1$ val $2(1 + \beta + 5.72/\mu + 1/\mu^2) > 0$. Sigui $\bar{z}_- = \frac{-1 - 5.72\mu - \beta\mu^2}{1 + 5.72\mu + (2 + \beta)\mu^2}$ la coordenada z del punt Q_- de la recta en què l'expressió s'anul·la. Aquesta coordenada és pròxima a -1 quan μ és petit; a més, ens permet distingir:

- El punts de la recta amb component z a l'interval $(-1, \bar{z}_-)$ són enviats per F_- cap a D_- ; per tant, són del tipus II i convé eliminar-los del domini de definició dels camps.
- El punts de la recta amb component z a l'interval $(\bar{z}_-, 1)$ són enviats per F_- cap a D_+ ; això vol dir que poden ser inclosos a la classe I.
- En el punt Q_- calculem derivades terceres i obtenim

$$\frac{d^3}{dt^3}(x_- + z_-) = -\frac{2}{\mu} < 0.$$

Per tant, Q_- és enviat per F_- cap a D_- i, en conseqüència, també l'eliminem.

Reunint totes les observacions anteriors obtenim el resultat següent.

Proposició 2.1.3 *Sigui Z el conjunt format pels punts $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifiquen $-1 \leq z \leq 1$, $x + z = 0$, i, a més, alguna de les condicions següents:*

- $(5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu} < y < (5 + \frac{1}{\mu})z + \frac{1}{\mu}$.
- $y = (5 + \frac{1}{\mu})z - \frac{1}{\mu}$ i $z \geq \frac{1 + 5.72\mu - \beta\mu^2}{1 + 5.72\mu + (2 + \beta)\mu^2}$.
- $y = (5 + \frac{1}{\mu})z + \frac{1}{\mu}$ i $z \leq \frac{-1 - 5.72\mu - \beta\mu^2}{1 + 5.72\mu + (2 + \beta)\mu^2}$.

Considerem F_+ definit sobre $\bar{D}_+ \setminus Z$ i F_- sobre $\bar{D}_- \setminus Z$. Aleshores

1) $\forall P \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$ hi passa una única solució del camp global.

2) Qualsevol solució està definida per a tot temps positiu.

Demostració. Pels raonaments anteriors, tots els punts del tipus II són dins de Z . Si els eliminem del domini de definició, la resta de punts són del tipus I i, per tant, no hi ha cap indeterminació en la trajectòria que passa per ells. \square

Considerarem, doncs, que el domini de definició del camp (2.3) és $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus Z$. Observem que hi pot haver solucions que no siguin definides per a tot temps negatiu a causa que caiguin a Z (punts del tipus II).

Les propietats elementals del sistema (2.3) en el cas no degenerat estan resumides en el següent resultat.

Proposició 2.1.4 Considerem (2.3) en el cas no degenerat $\mu > 0$ i sigui $\beta > -1$. Aleshores es verifica:

1) Existeixen $P_+ = (1 + 2\beta, 5, +1) \in D_+$ i $P_- = (-1, -5, -1) \in D_-$, punts d'equilibri del tipus sella-focus inestable que tenen els mateixos valors propis $-\frac{1}{\mu}$ i $0.36 \pm i\sqrt{1 - 0.36^2} \equiv a \pm ib$. A més, la varietat estable local de P_+ (respectivament P_-) està continguda a la recta per P_+ (respectivament P_-) de vector director

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 + \beta + \frac{5}{\mu} \\ 5 + \frac{2.6 - \beta}{\mu} \\ 1 + \frac{0.72}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \end{pmatrix},$$

i la varietat inestable local de P_+ (respectivament P_-) està continguda al pla $z = +1$ (respectivament $z = -1$).

2) La solució general del sistema homogeni associat a (2.3) és

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = k_1 v e^{-\frac{t}{\mu}} + \left[k_2 \begin{pmatrix} \cos bt \\ a \cos bt - b \sin bt \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} \sin bt \\ b \cos bt + a \sin bt \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{at}.$$

La solució general del camp no homogeni F_+ (respect. F_-) té la mateixa expressió amb l'afegit de la solució particular constant $\begin{pmatrix} 1 + 2\beta \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (respectivament $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$).

3) La solució particular de F_+ pel punt (x_0, y_0, z_0) té constants

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{z_0 - 1}{v_3}, \\ k_2 &= x_0 - 1 - 2\beta - k_1 v_1, \\ k_3 &= \frac{y_0 - 5 - k_1 v_2 - k_2 a}{b}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La solució particular de F_- pel punt (x_0, y_0, z_0) té constants

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{z_0 + 1}{v_3}, \\ k_2 &= x_0 + 1 - k_1 v_1, \\ k_3 &= \frac{y_0 + 5 - k_1 v_2 - k_2 a}{b}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

4) Si $\mu < \frac{1}{0.72}$ llavors la divergència del camp és negativa. A més, qualsevol òrbita entra en temps finit a la regió $|z| \leq 1$ i no en surt més.

Demostració. Són càlculs absolutament elementals. Observem només que la condició $\beta > -1$ fa falta per a l'existència real del punt P_+ . \square

Nota. També té sentit considerar el sistema anterior quan $\beta \leq -1$. En aquest cas el punt d'equilibri P_+ no existeix realment, però la seva existència "virtual" (a D_-) dóna un comportament de les solucions a D_+ similar al que hem explicat.

A continuació donem més detalls geomètrics de les trajectòries del camp definit per les equacions (2.2)-(2.3) en el cas $\mu > 0$ suficientment petit. La figura 2.2 mostra els aspectes essencials. És important adonar-se del paper clau que juga la superfície S corresponent als punts en què canvia el signe de \dot{z} ; concretament $S = S_+ \cup S_0 \cup S_-$, on

$$S_+ = \{(x, y, z) | x \geq -1, z = +1\},$$

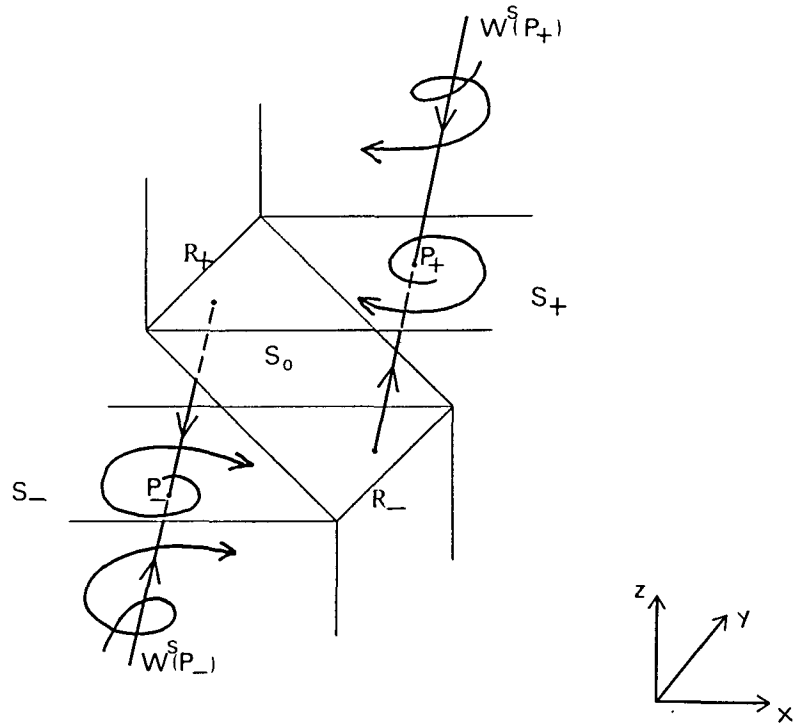


Figura 2.2: Trets característics del camp (2.3).

$$S_0 = \{(x, y, z) | z \in [-1, 1], x + z = 0\} \text{ i}$$

$$S_- = \{(x, y, z) | x \leq +1, z = -1\} .$$

S està formada, doncs, per tres trossos plans, amb plegaments (no diferenciables) en les rectes $R_+ = \{(x, y, z) | x = -1, z = +1\}$ i $R_- = \{(x, y, z) | x = +1, z = -1\}$. De fet, les equacions (2.2)-(2.3) són un model simplificat d'un sistema més real, en què la superfície S és diferenciable i el camps en els dominis que separa S no són lineals ([46]).

Sigui $P_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ un punt inicial. Si $\mu > 0$ és prou petit llavors la component vertical del camp domina sobre les altres dues i, en conseqüència, la solució per P_0 s'acosta ràpidament a algun dels dos semiplans de S . Suficientment a prop d'aquests plans les trajectòries es comporten de manera semblant a les que el camp indueix sobre S_+ i S_- ; això és, són espirals que s'allunyen del focus corresponent (exceptuem el cas que siguem situats en una varietat estable). A causa que cada focus és un repulsor global dins del seu semiplà, aquestes trajectòries acabaran tallant la superfície E de separació de D_+ i D_- en algun punt pròxim a R_+ o R_- . D'aquesta manera la trajectòria passa a l'altra banda de E , on el procés es repeteix: moviment "vertical" ràpid per a acostar-se al semiplà S_+ o S_- corresponent, combinat amb moviment "horitzontal" espiral lent per a allunyar-se del focus.

L'explicació anterior justifica que S s'anomeni *varietat lenta*. També es diu que z és una *variable ràpida* i que x i y són *variables lentes*. Per a les definicions precises en un context més general es pot consultar [4].

2.2 El sistema degenerat

La idea bàsica que usarem per a estudiar el sistema (2.3) és la d'aprofitar la reducció de dimensió que suposa el fet de prendre $\mu = 0$. Observem, en primer lloc, que les rectes $x + z = 0$, $y - (5 + \frac{1}{\mu})z \pm \frac{1}{\mu} = 0$ que limitaven la regió prohibida Z de la proposició 2.1.2 tendeixen a coincidir, respectivament, amb R_+ i R_- ; de manera que Z passa a ser tota la banda definida per $x + z = 0$, $-1 \leq z \leq 1$, excepte les dues semirectes

$$\begin{aligned}\tilde{R}_+ &= \{(x, y, z) \in R_+ \mid y < 5\} \text{ i} \\ \tilde{R}_- &= \{(x, y, z) \in R_- \mid y > -5\} .\end{aligned}$$

D'altra banda, el límit $\mu \rightarrow 0$ també es pot pensar com fer $\dot{z} \rightarrow \pm\infty$ a la tercera equació de (2.2) (el signe depèn del domini, D_+ o D_- , i del valor de z); i això es pot interpretar en el sentit que el moviment vertical del camp és instantani cap a la zona determinada per $h(x, y, z) = 0$; en particular, la variable z només pot prendre els valors ± 1 (depenent del domini D_\pm). Observem també que si $\mu \rightarrow 0$ llavors la divergència del camp tendeix a $-\infty$.

Obtenim, doncs, un *sistema degenerat o reduït* (perquè l'ordre és menor que el del sistema original) amb el moviment restringit a la varietat lenta, la qual està formada pels dos semiplans S_+ i S_- , excepte dues semirectes que són situades a la zona Z que s'elimina del domini; concretament:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - 5z , \\ \dot{y} &= -x + 0.72y + (\beta - 2.6)z + \beta ,\end{aligned}\tag{2.6}$$

on $(x, y, z) \in \tilde{S}_+ \cup \tilde{S}_-$, i

$$\begin{aligned}\tilde{S}_+ &= \{(x, y, z) \mid z = +1 \text{ i, o bé } x > -1, \text{ o bé } x = -1 \text{ i } y < 5\} , \\ \tilde{S}_- &= \{(x, y, z) \mid z = -1 \text{ i, o bé } x < +1, \text{ o bé } x = +1 \text{ i } y > -5\} .\end{aligned}$$

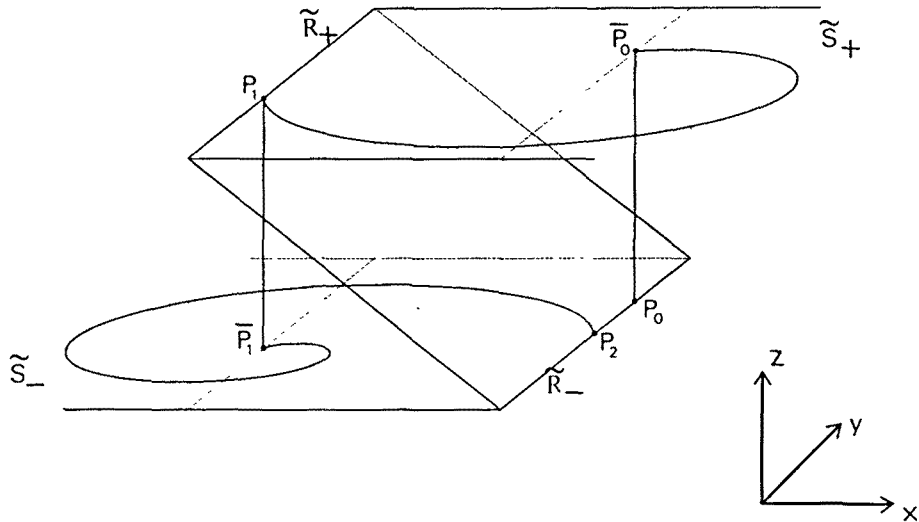


Figura 2.3: Solucions discontinües del camp degenerat.

Pels comentaris anteriors, sembla natural referir-se a (2.6) amb el nom de *sistema lent*. Pròpiament no és un sistema dinàmic: no està ben definit perquè no podem continuar indefinidament les solucions per a temps tendint a $\pm\infty$; però si pensem en les observacions sobre el pas al límit que hem fet, té sentit definir les solucions endavant de (2.6) de la següent manera:

Donat un punt inicial sobre \tilde{S}_+ (respectivament \tilde{S}_-), seguim la seva trajectòria sota (2.6) fins que assolim la semirecta \tilde{R}_+ (respec. \tilde{R}_-) en un punt $(-1, y_1, +1)$ (respec. $(+1, y_1, -1)$). A continuació saltem al punt $(-1, y_1, -1)$ (respectivament $(+1, y_1, +1)$) sobre l'altre semiplà. D'aquí continuem la trajectòria usant (2.6) a \tilde{S}_- (respec. \tilde{S}_+) fins a arribar a un punt $(+1, y_2, -1)$ de \tilde{R}_- (respec. $(-1, y_2, +1)$ de \tilde{R}_+), on tornem a saltar instantàniament a l'altra branca. Aquest procés es repeteix indefinidament, excepte si en algun dels salts assolim un dels punts d'equilibri P_{\pm} .

A causa dels salts instantanis d'una branca a l'altra, aquestes trajectòries s'anomenen *solucions discontinües* (vegeu la figura 2.3). Des d'aquest punt de vista queda clar perquè ens referim a les equacions (2.3) com un sistema de *pertorbació singular*: (2.3) és una pertorbació del cas singular (2.6).

Aquesta definició que acabem de donar permet definir unívocament la solució que passa per un punt donat qualsevol *només per a temps creixent*. Observem que, per a temps decreixent, es perd la unicitat de solucions. Considerem, per exemple, la solució a temps enrere del camp (2.6) per un punt situat al semiplà \tilde{S}_- ;

cada vegada que creuem la recta $x = -1$ (i això passa una quantitat numerable de vegades) podem fer un salt enrere cap a la recta \tilde{R}_+ del semiplà \tilde{S}_+ , i cada salt dóna una trajectòria diferent. Triada una d'aquestes, continuem la solució enrere dins de \tilde{S}_+ ; també cada vegada que talem la recta $x = +1$ (ara, això pot passar una quantitat infinita, finita o nul·la de vegades) podem tornar a saltar a \tilde{S}_- . Aquest procés es pot repetir indefinidament.

A continuació, definirem i estudiarem una aplicació de Poincaré unidimensional T_0 , associada al sistema degenerat. Per a fer això, caldrà resoldre explícitament (2.6), de manera totalment anàloga al cas no degenerat.

Considerem com a secció de Poincaré la recta $R_- = \{(x, y, z) | x = +1, z = -1\}$. La idea geomètrica de com actua aquesta aplicació és molt senzilla i es pot veure a la figura 2.3. Donat $P_0 = (+1, y_0, -1) \in R_-$, definim successivament:

- $\bar{P}_0 = (+1, y_0, +1)$.
- $P_1 = (-1, y_1, +1)$ és el punt d'intersecció amb la semirecta \tilde{R}_+ de la solució de (2.6) per \bar{P}_0 . Aquest punt existeix excepte si $\bar{P}_0 = P_+$, cas en què no estarà definida T_0 .
- $\bar{P}_1 = (-1, y_1, -1)$.
- $P_2 = (+1, y_2, -1)$ és el punt d'intersecció amb la semirecta \tilde{R}_- de la solució de (2.6) per \bar{P}_1 . Com abans, això és impossible quan $\bar{P}_1 = P_-$.

Tot això defineix $T_0 : P_0 \longrightarrow P_2$ com a composició de $T_0^+ : P_0 \longrightarrow P_1$ i $T_0^- : P_1 \longrightarrow P_2$. Notem que cada aplicació inclou un salt i una resolució dels sistema (2.6) sobre un semiplà \tilde{S}_\pm . Abusant de la notació, suprimim els salts i continuem usant T_+^0 i T_-^0 per a indicar les aplicacions unidimensionals que transformen y_0 en y_1 i y_1 en y_2 , respectivament.

Els càlculs explícits per a obtenir aquests punts són molt senzills, a causa que els camps són lineals. A \tilde{S}_+ ($z = +1$) tenim

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 5, \\ \dot{y} &= -x + 0.72y + 2\beta - 2.6. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En canvi a \tilde{S}_- ($z = -1$) el sistema és

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + 5, \\ \dot{y} &= -x + 0.72y + 2.6.\end{aligned}\tag{2.8}$$

La solució general de (2.7) és

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + 2\beta + e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt), \\ y(t) &= 5 + e^{at}[k_1(a \cos bt - b \sin bt) + k_2(b \cos bt + a \sin bt)];\end{aligned}\tag{2.9}$$

i la solució particular que té condicions inicials $(x(0), y(0)) = (+1, y_0)$ pren, com a valors de les constants

$$\begin{aligned}k_1 &= -2\beta, \text{ i} \\ k_2 &= \frac{1}{b}(y_0 - 5 - k_1 a).\end{aligned}$$

El temps d'estada, $t_1 > 0$, d'aquesta solució a \tilde{S}_+ fins a assolir \tilde{R}_+ és la primera solució positiva de l'equació

$$e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt) + 2 + 2\beta = 0.\tag{2.10}$$

Substituint t_1 a (2.9) obtenim P_1 : $x_1 = x(t_1) = -1$ i $y_1 = y(t_1)$. Tot seguit passem a l'altre semiplà i considerem la solució general del camp (2.8):

$$\begin{aligned}x(t) &= -1 + e^{at}(\bar{k}_1 \cos bt + \bar{k}_2 \sin bt), \\ y(t) &= -5 + e^{at}[\bar{k}_1(a \cos bt - b \sin bt) + \bar{k}_2(b \cos bt + a \sin bt)].\end{aligned}\tag{2.11}$$

Si les condicions inicials són $(x(0), y(0)) = (-1, y_1)$, obtenim

$$\begin{aligned}\bar{k}_1 &= 0, \text{ i} \\ \bar{k}_2 &= \frac{1}{b}(y_1 + 5).\end{aligned}$$

Determinem el temps d'estada a \tilde{S}_- , $t_2 > 0$, resolent l'equació

$$\bar{k}_2 e^{at} \sin bt - 2 = 0.$$

Ens interessa la primera solució positiva $t = t_2$. Substituint-la a (2.11) obtenim $x_2 = 1$ i $y_2 = y(t_2)$.

Describem a continuació les propietats essencials d'aquestes aplicacions T_0^\pm . Prèviament, estudiem una equació que ens farà falta posteriorment.

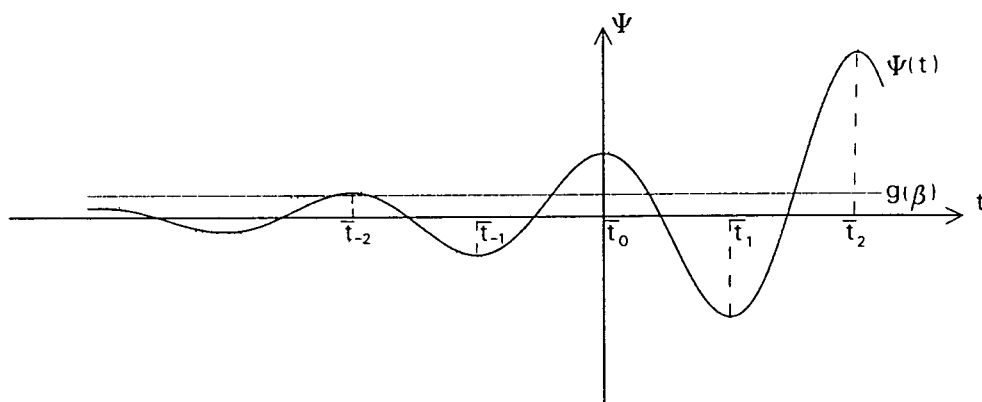


Figura 2.4: Funció $\Psi(t)$.

Lema 2.2.1 *Sigui $\beta > -1$. L'equació*

$$\Psi(t) \equiv e^{at}(\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt) = \frac{\beta}{1 + \beta} \equiv g(\beta) \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad (2.12)$$

verifica

- 1) *Té una quantitat numerable d'arrels positives.*
- 2) *Si $\beta \neq 0$ llavors té una quantitat finita (eventualment zero) d'arrels negatives, mentre que si $\beta = 0$ llavors en té una quantitat numerable.*
- 3) *Les arrels es creen quan $\beta \rightarrow 0^+$ o $\beta \rightarrow 0^-$ en els punts $\bar{t}_i = i\pi/b$ per als valors*

$$\beta_i = \frac{(-1)^i e^{ai\pi/b}}{1 - (-1)^i e^{ai\pi/b}}, \quad \forall i = \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 3, 5, \dots$$

Demostració. És immediata a partir de la gràfica de $\Psi(t)$ (figura 2.4). Aquesta funció té tots els seus zeros simples i situats en els punts $t_k = (\arctan(b/a) + k/\pi)/b$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$), on hem suposat que la funció \arctan pren el valor a $(-\pi/2, \pi/2)$; mentre que els seus extrems són les arrels de

$$0 = \Psi'(t) = -e^{at} \sin(bt)/b,$$

o sigui, $t = \bar{t}_i = i\pi/b$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. En aquests punts, Ψ pren els valors $\Psi_i = (-1)^i e^{ai\pi/b}$.

i	β_i	\bar{t}_i
...
5	-0.99767396 ...	16.83683422 ...
3	-0.97433823 ...	10.10210053 ...
1	-0.77069718 ...	3.36736684 ...
-1	-0.22930281 ...	-3.36736684 ...
-3	-0.02566176 ...	-10.10210053 ...
-5	-0.00232603 ...	-16.83683422 ...
...
-8	0.00006140 ...	-26.93893475 ...
-6	0.00069415 ...	-20.20420106 ...
-4	0.00789803 ...	-13.46946737 ...
-2	0.09711918 ...	-6.73473368 ...

Taula 2.1: Valors de β per als quals neixen solucions \bar{t} de (2.12).

Observem que $\lim_{i \rightarrow -\infty} \Psi_i = 0$ i $\lim_{i \rightarrow +\infty} |\Psi_i| = +\infty$, mentre que $g(\beta)$ ($\beta > -1$) és funció monòtona creixent de β , amb imatge a $(-\infty, +1)$. Això dóna els apartats 1) i 2).

Les solucions de (2.12) es creen quan $g(\beta)$ pren algun valor extrem: $\Psi_i = g(\beta)$. Això només és possible per a $i < 0$ qualsevol i per a $i > 0$ senar, a causa de la limitació $g(\beta) < 1$; a més, s'obté la condició de l'enunciat. \square

Uns quants valors de β_i (en ordre creixent) i de \bar{t}_i són a la taula 2.1. Remarquem que la quantitat d'arrels augmenta quan ens acostem a $\beta = 0$, tant per $\beta > 0$ com per $\beta < 0$; en particular, la quantitat d'arrels negatives de (2.12) és 0 si $\beta \in (-1, \beta_{-1})$, 2 si $\beta \in (\beta_{-1}, \beta_{-3})$, 4 si $\beta \in (\beta_{-3}, \beta_{-5})$, ..., 5 si $\beta \in (\beta_{-6}, \beta_{-4})$, 3 si $\beta \in (\beta_{-4}, \beta_{-2})$ i 1 si $\beta \in (\beta_{-2}, \infty)$.

Proposició 2.2.2 *Amb la notació anterior, l'aplicació T_0^+ definida per $T_0^+(y_0) = y_1$ verifica les propietats següents:*

a) *Si $\beta = 0$ llavors no està definida per a $y_0 = 5$; si $\beta \neq 0$, està definida $\forall y_0 \in \mathbb{R}$.*

b) $\text{Imatge}(T_0^+) = (-\infty, 5)$.

c) T_0^+ és discontinua en els punts

$$\bar{y}_k = 5 + \frac{2(1+\beta)}{b} e^{at_k} \sin(bt_k),$$

on $\{t_k\}_{-k_0 < k < 0}$ són les arrels negatives de l'equació (2.12). D'aquestes, n'hi ha una quantitat finita ($k_0 \geq 0$) si $\beta \neq 0$ o infinita numerable ($k_0 = +\infty$) si $\beta = 0$. La imatge de tots aquests punts és un mateix valor $T_0^+(\bar{y}_k) = Y_+ \simeq 5 - 11.95813(1+\beta) < 5$. Fora d'aquests punts, la funció és analítica.

d) En el cas $\beta = 0$ es verifica

- $\bar{y}_{-1} < \bar{y}_{-3} < \bar{y}_{-5} < \dots < 5 < \dots < \bar{y}_{-6} < \bar{y}_{-4} < \bar{y}_{-2}$,
- els valors \bar{y}_k s'acumulen a $y_0 = 5$ de manera geomètrica i alternada, amb raó $-e^{\pi a/b}$:

$$\frac{\bar{y}_k - 5}{\bar{y}_{k+1} - 5} = -e^{\pi a/b}, \quad i$$

- T_0^+ és monòtona en cadascun dels intervals

$$(-\infty, \bar{y}_{-1}), (\bar{y}_{-1}, \bar{y}_{-3}), (\bar{y}_{-3}, \bar{y}_{-5}), \dots, (\bar{y}_{-4}, \bar{y}_{-2}), (\bar{y}_{-2}, +\infty),$$

creixent en els primers i decreixent en els darrers.

e) En el cas $\beta \neq 0$ i $\beta = \beta_i$ (per a algun β_i del lema 2.2.1) es verifica

- $\bar{y}_{-1} < \bar{y}_{-3} < \bar{y}_{-5} < \dots < \bar{y}_{-(k_0-1)} = 5 < \bar{y}_{-(k_0-2)} < \dots < \bar{y}_{-6} < \bar{y}_{-4} < \bar{y}_{-2}$,
- $y_0 = 5$ és un punt de discontinuïtat de T_0^+ , i
- T_0^+ és monòtona en cadascun dels intervals

$$(-\infty, \bar{y}_{-1}), (\bar{y}_{-1}, \bar{y}_{-3}), \dots, (\bar{y}_{-(k_0-3)}, 5),$$

$$(5, \bar{y}_{-(k_0-2)}), \dots, (\bar{y}_{-4}, \bar{y}_{-2}), (\bar{y}_{-2}, +\infty),$$

creixent en els primers i decreixent en els darrers.

f) En el cas $\beta \neq 0$ i $\beta \neq \beta_i$ (per a tots els β_i del lema 2.2.1) es verifica

- $\bar{y}_{-1} < \bar{y}_{-3} < \bar{y}_{-5} < \dots < \bar{y}_{-(k_0-1)} < 5 < \bar{y}_{-(k_0-2)} < \dots < \bar{y}_{-6} < \bar{y}_{-4} < \bar{y}_{-2}$,
- $y_0 = 5$ és un punt regular de T_0^+ ,

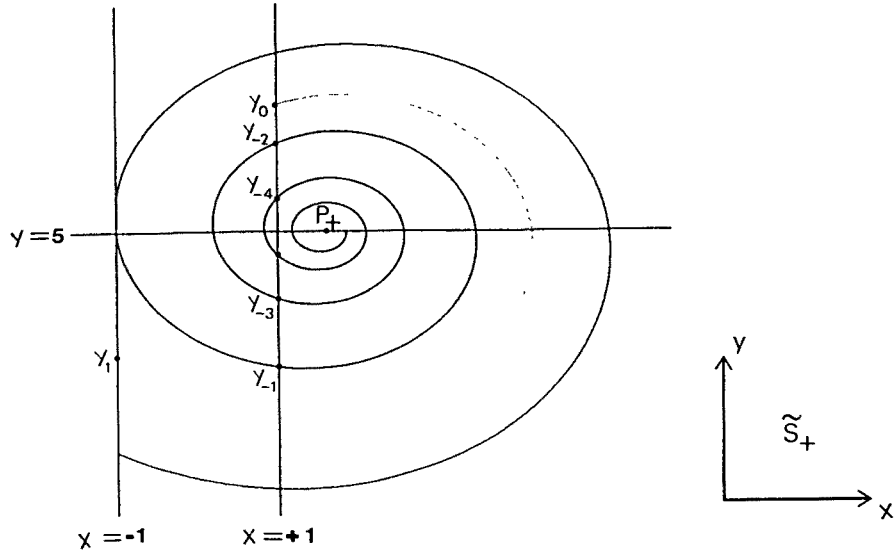


Figura 2.5: Òrbita crítica que determina discontinuïtats de T_0^+ . Cas $\beta > 0$.

- T_0^+ és monòtona en cadascun dels intervals

$$(-\infty, \bar{y}_{-1}), (\bar{y}_{-1}, \bar{y}_{-3}), \dots, (\bar{y}_{-(k_0-3)}, \bar{y}_{-(k_0-1)}),$$

$$(\bar{y}_{-(k_0-2)}, \bar{y}_{-(k_0-4)}), \dots, (\bar{y}_{-4}, \bar{y}_{-2}), ; (\bar{y}_{-2}, +\infty),$$

creixent en els primers i decreixent en els darrers; mentre que a l'interval $(\bar{y}_{-(k_0-1)}, \bar{y}_{-(k_0-2)})$, T_0^+ té un únic extrem relatiu (màxim) en el punt $y_0 = 5$.

Demostració. La figura 2.5 permet seguir més fàcilment els raonaments. L'apartat a) és conseqüència del fet que el punt d'equilibri P_+ és repulsor global del semiplà \tilde{S}_+ . L'única solució que no s'allunya de P_+ és l'estacionària, la qual està situada sobre la recta $x = +1$ només en el cas $\beta = 0$ (i correspon al punt $y_0 = 5$). L'apartat b) es dedueix del signe de \dot{x} sobre $x = -1$:

$$\dot{x} < 0 \iff y < 5.$$

El punt de tangència $y = 5$ no l'inclouem perquè és de la regió Z .

Per a provar la resta de l'enunciat, el punt clau és considerar la solució $(x(t), y(t))$ de (2.7) a S_+ amb condicions inicials $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 0$ ($\Leftrightarrow x(0) = -1, y(0) = 5$). Usant (2.9) obtenim els valors de les constants: $k_1 = -2(1 + \beta)$ i $k_2 = 2(1 + \beta)a/b$.

Si imposem que $x(t) = +1$ obtenim precisament l'equació (2.12), de la qual ens interessen les arrels negatives: en té una quantitat infinita si $\beta = 0$, o finita si $\beta \neq 0$. Siguin $\dots < t_{-3} < t_{-2} < t_{-1} < 0$ aquests valors de t . Els valors corresponents de la variable y són $\bar{y}_k = y(t_k) = 5 + e^{at_k}[(k_1 a + k_2 b) \cos bt_k + (-k_1 b + k_2 a) \sin bt_k]$, i substituint k_1 i k_2 s'obté l'expressió de l'enunciat.

Hem seguit la solució enrera a partir de $(-1, 5)$. Considerem ara $T_0^+ : y_0 \rightarrow y_1$, amb y_0 situat sobre la recta $x = +1$ i en un entorn suficientment petit d'un punt \bar{y}_k , $k < 0$. Si y_0 és a la banda més llunyana de $y = 5$, llavors la solució del camp que passa per y_0 assoleix la recta $x = -1$ en un punt $y_1 < 5$, $y_1 \approx 5$; mentre que si y_0 és a la banda més pròxima llavors ha de donar una volta més entorn de P_+ abans d'assolir la recta $x = -1$. Això provoca una discontinuïtat en el temps que es tradueix en una discontinuïtat en el punt final y_1 . Quan y_0 és algun \bar{y}_k , la solució pel punt $(+1, y_0)$ passa per $(-1, +5)$, i dona una volta més fins a assolir un punt $(-1, Y_+)$; el temps que passa en aquesta volta és la primera arrel positiva de l'equació $0 = 1 + e^{at}(-\cos bt + \frac{a}{b} \sin bt)$, o sigui $t = \bar{t} \simeq 4.83267311$ (independent de β); i el valor de y s'obté substituint a (2.9): $Y_+ = 5 + \frac{2}{b}(1 + \beta)e^{a\bar{t}} \sin b\bar{t} \simeq 5 - 11.9581316(1 + \beta)$. Fora d'aquests punts, és evident que l'aplicació T_0^+ és analítica, ja que el camp ho és (de fet, és lineal). Així veiem c).

Per a la resta de l'enunciat, la distinció de casos està causada pels resultats del lema 2.2.1. Considerem la component x de qualsevol òrbita del camp: $x(t) = 1 + 2\beta + e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt)$, i busquem els seus valors extrems, caracteritzats per la condició $x'(t) = 0$; resulta que $x'(t) = e^{at}[(ak_1 + bk_2) \cos bt + (ak_2 - bk_1) \sin bt] = y(t) - 5$, o sigui, aquests valors són, precisament, aquells en què la component y val 5. En particular, això val per a l'òrbita característica estudiada anteriorment i, per tant, és evident que els punts \bar{y}_k (definites com les interseccions d'aquesta òrbita amb $x = +1$) han d'estar situats alternativament a bandes diferents de $y = 5$: $\bar{y}_{-1} < \bar{y}_{-3} < \dots \leq 5 \leq \dots < \bar{y}_{-4} < \bar{y}_{-2}$. A més, la igualtat només pot ser certa per a valors de β per als quals l'òrbita característica sigui tangent a $x = +1$; o sigui, quan $\beta = \beta_i$ per a algun β_i del lema anterior. Això dona els primers punts de d), e) i f), i els segons de e) i f).

La monotonia en cadascun dels intervals es dedueix del fet que dues trajectòries diferents del camp no es poden tallar. El caràcter d'extrem de $y_0 = 5$ en el cas

genèric f) és conseqüència de l'equivalència $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = 5$ (comentada anteriorment) i del fet que l'aplicació és monòtona localment en cadascun dels dos costats de $y = 5$ (per la mateixa raó d'unicitat de solució). La convergència geomètrica en el cas $\beta = 0$ es dedueix del fet que els valors t_k ($k < 0$) són les solucions negatives de $\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt = 0$; o sigui, $t_k = \frac{1}{b}[\arctan(\frac{b}{a}) - k\pi]$. Per tant $t_{k+1} = t_k - \frac{\pi}{b}$ i

$$\frac{\bar{y}_k - 5}{\bar{y}_{k+1} - 5} = \frac{e^{at_k} \sin(bt_k)}{e^{at_{k+1}} \sin(bt_{k+1})} = -\frac{e^{at_k}}{e^{at_k} e^{-\frac{a\pi}{b}}} = -e^{\frac{a\pi}{b}}. \square$$

Nota. Si β és suficientment pròxim a -1 llavors T_0^+ no té cap discontinuïtat; el valor crític de β es pot obtenir de la condició $\bar{y}_{-1} = 5$. Això equival a la creació, quan $\beta \rightarrow 0^-$, de les primeres arrels negatives de l'equació (2.12): $\frac{\beta}{1+\beta} = \Psi_{-1} = e^{-a\pi/b}$; o sigui $\beta = \beta_{-1} \simeq -0.22930281 \dots$.

Anàlogament, si β és suficientment gran, llavors T_0^+ té una única discontinuïtat, corresponent a l'únic punt de la recta $x = +1$ tal que la trajectòria per ell a temps positiu passa per $(-1, 5)$. El valor crític correspon a la creació, quan $\beta \rightarrow 0^+$, de dos arrels negatives més de (2.12); això passa en el valor determinat per $\frac{\beta}{1+\beta} = \Psi_{-2} = e^{-2a\pi/b}$; o sigui $\beta = \beta_{-2} \simeq +0.09711918 \dots$.

D'altra banda, simulacions numèriques mostren que, en els intervals de monotonia (tots els limitats per valors \bar{y}_{-k} , excepte l'interval central del cas f), T_0^+ verifica $|DT_0^+(y)| > 1$. Una demostració d'aquest fet en el cas $\beta = 0$ és totalment anàloga a la que fem en la pròxima proposició per a T_0^- . En el cas $\beta \neq 0$ es pot usar la mateixa idea, però els càlculs es fan molt llargs i es necessiten fites molt fines. La importància d'aquest fet rau en la localització d'òrbites periòdiques estables de T_0^- o T_0^+ : han de tenir punts a l'interval central $(\bar{y}_{-(k_0-1)}, \bar{y}_{-(k_0-2)})$.

A continuació, demostrarem una proposició anàloga a l'anterior, però per al camp definit a \tilde{S}_- .

Proposició 2.2.3 *Amb la notació anterior, l'aplicació T_0^- definida per $T_0^-(y_1) = y_2$ verifica les propietats següents:*

- a) *Està definida $\forall y_1 \neq -5$.*
- b) *$T_0^-(\mathbb{R} \setminus \{-5\}) = (-5, \infty)$.*
- c) *T_0^- és discontinua en els punts*

$$\bar{y}_k = -5 - \frac{2}{b} e^{at_k} \sin bt_k,$$

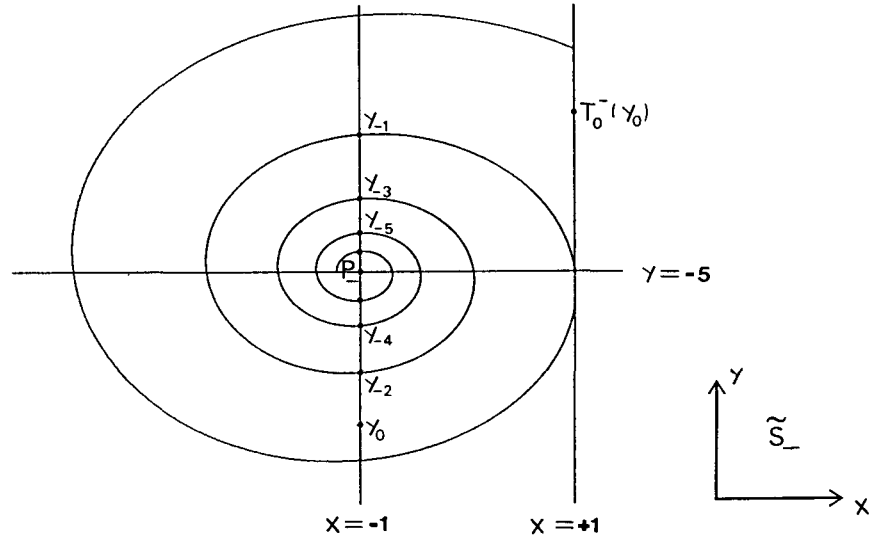


Figura 2.6: Òrbita crítica que determina discontinuïtats de T_0^- .

on $t_k = \frac{1}{b}(\arctan(\frac{b}{a}) + k\pi)$, $\forall k < 0$; i és analítica en tots els altres.

En particular, els punts de discontinuïtat s'acumulen al valor $y_1 = -5$ de manera geomètrica i alternada, amb raó $-e^{\pi a/b}$:

$$\frac{\bar{y}_k + 5}{\bar{y}_{k+1} + 5} = -e^{\pi a/b}.$$

d) Tots els punts \bar{y}_k ($k < 0$) tenen la mateixa imatge $Y_- \simeq 6.9581316\dots$

e) T_0^- és estrictament monòtona en cadascun dels intervals

$$(-\infty, \bar{y}_{-2}), (\bar{y}_{-2}, \bar{y}_{-4}), (\bar{y}_{-4}, \bar{y}_{-6}), \dots, (\bar{y}_{-5}, \bar{y}_{-3}), (\bar{y}_{-3}, \bar{y}_{-1}), (\bar{y}_{-1}, +\infty);$$

decreixent en els primers i creixent en els darrers. A més, $|T_0^-(y)| > 1 \forall y$ punt regular.

Demostració. És totalment anàloga a la de la proposició anterior, amb la simplificació addicional que, en aquest cas, no apareix el paràmetre β . Això correspon al cas $\beta = 0$ d'abans (vegeu la figura 2.6).

Usem les expressions (2.11). La solució $(x(t), y(t))$ de (2.8) per $x(0) = 1$ i $\dot{x}(0) = 0$ ($\leftrightarrow y(0) = -5$) té constants $\bar{k}_1 = 2$ i $\bar{k}_2 = -\frac{2a}{b}$. Aquesta solució talla $x = -1$ per als valors de t que són solució de

$$e^{at}[\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt] = 0.$$

Aquesta equació és més senzilla que (2.12); per això no l'estudiem en un lema a part. Així, les seves arrels negatives són els t_k de l'enunciat. Substituint a (2.11) obtenim

$$\begin{aligned}\bar{y}_k = y(t_k) &= -5 + e^{at_k}[(\bar{k}_1 a + \bar{k}_2 b) \cos bt_k + (-\bar{k}_1 b + \bar{k}_2 a) \sin bt_k] = \\ &= -5 + e^{at_k} \sin bt_k \left[-2b - \frac{2a^2}{b}\right] = -5 - \frac{2}{b} e^{at_k} \sin bt_k ,\end{aligned}$$

la qual és també l'expressió de l'enunciat. Amb aquestes variacions, la demostració de a), b), c) i d) usa els mateixos raonaments que la proposició anterior. Observem només com es calcula Y_- : cal que la solució $(x(t), y(t))$ anterior torni a tallar la recta $x = +1$; així, t ha de ser la primera solució positiva de l'equació $e^{at}(\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt) = 1$, o sigui, $t \simeq 4.8326731 \dots$; i el valor corresponent de y és, efectivament $Y_- = -5 - \frac{2}{b} e^{at} \sin bt \simeq 6.9581316 \dots$

Per a l'últim apartat, només cal veure que $\forall y \in (\bar{y}_{-1}, +\infty) DT_0^-(y) > 1$, ja que per als altres intervals, l'expressió de la derivada es pot reduir a aquest interval multiplicant per la raó $-e^{\pi a/b}$ tantes vegades com mitjes voltes dóna la solució entorn de P_- . Vegem-ho. Si y és d'un altre interval llavors es pot escriure $T_0^-(y) = T_0^-|_{(\bar{y}_{-1}, +\infty)} \circ F \circ \dots \circ F(y)$, on F és l'aplicació associada al primer retorn del camp sobre la recta $x = -1$, i $F \circ \dots \circ F(y) \in (\bar{y}_{-1}, +\infty)$. És immediat que $DF(y) = -e^{a\pi/b}$, $\forall y \neq -5$. Efectivament, les constants d'integració del camp (2.8) amb condicions inicials $x = -1$ i $y \neq -5$ són $k_1 = 0$ i $k_2 = (y + 5)/b$; el temps de vol fins a tornar a tallar $x = -1$ és la primera arrel positiva de $\frac{y+5}{b} e^{at} \sin bt = 0$, o sigui, $\sin bt = 0$, $t = \pi/b$ i $\cos bt = -1$; i l'aplicació F s'escriu, doncs, $F(y) = -5 + \frac{y+5}{b} e^{at}(b \cos bt + a \sin bt) = -5 - (y + 5)e^{a\pi/b}$. En conseqüència, si n és la quantitat de vegades que apliquem F , la regla de la cadena ens dóna $DT_0^-(y) = DT_0^-(F^n(y))(-e^{a\pi/b})^n$, tal com havíem afirmat.

Suposem, doncs, que $y > \bar{y}_{-1} = -5 - \frac{2}{b} e^{at-1} \sin bt_{-1}$, on $t_{-1} = \frac{1}{b}[\arctan(b/a) - \pi]$. Notem $y_2 \equiv y_2(y) \equiv T_0^-(y)$. El temps ($\tau = \tau(y)$) que la solució per $(-1, y)$ tarda a arribar a $x = +1$ és la primera arrel positiva de l'equació $f(t) \equiv e^{at} \sin bt = \frac{2b}{y+5}$. Observem que $\frac{2b}{y+5} < \frac{2b}{\bar{y}_{-1}+5} = \frac{-b^2}{e^{at-1} \sin bt_{-1}} = be^{-at-1}$, ja que $\sin bt_{-1} = -b$; mentre que si busquem el primer extrem positiu, t_e , de la funció $f(t)$, s'ha de verificar $0 = f'(t_e) = e^{at_e}(b \cos bt_e + a \sin bt_e)$ i obtenim $t_e = \frac{1}{b}[\arctan(-b/a) + \pi] = -t_{-1}$; i, en aquest punt, f pren el valor $f(-t_{-1}) = -e^{-at-1} \sin bt_{-1} = be^{-at-1}$. Per tant,

$\forall y > \bar{y}_{-1}$, $\tau = \tau(y) \in (0, -t_{-1})$ i, a més, $b \cos b\tau + a \sin b\tau > 0$.

Recordem, finalment, que $y_2(y) = -5 + \frac{y+5}{b} e^{a\tau} (b \cos b\tau + a \sin b\tau)$. Calculem formalment les derivades de y_2 respecte y :

- Derivant l'equació del temps $(y+5)e^{a\tau} \sin b\tau = 2b$ obtenim

$$e^{a\tau} [\sin b\tau + (y+5)(b \cos b\tau + a \sin b\tau)\tau'] = 0,$$

$$\text{o, equivalentment, } \tau' = \frac{-\sin b\tau}{(y+5)(b \cos b\tau + a \sin b\tau)}.$$

- Derivant l'expressió de y_2 obtenim

$$b \frac{dy_2}{dy} = e^{a\tau} (b \cos b\tau + a \sin b\tau) + \tau' [2ab \cos b\tau + (a^2 - b^2) \sin b\tau],$$

i usant l'expressió de τ' queda

$$\frac{dy_2}{dy} = \frac{be^{a\tau}}{b \cos b\tau + a \sin b\tau}.$$

- Tornem a derivar per a obtenir

$$\frac{d^2 y_2}{dy^2} = \frac{be^{a\tau} \tau' \sin b\tau}{(b \cos b\tau + a \sin b\tau)^2}.$$

Com que $\sin b\tau > 0$, resulta que $\tau'(y) < 0$ i $\frac{d^2 y_2}{dy^2} < 0$. Per tant, $\frac{dy_2}{dy}(y)$ és monòtona decreixent, i una fita inferior la dóna el cas límit $y \rightarrow +\infty$. Això correspon a $\tau \rightarrow 0$ i obtenim $\frac{dy_2}{dy} \rightarrow +1$. Així s'acaba la demostració. \square

Alguns exemples d'aplicacions T_0^+ i T_0^- es poden trobar a [11].

La composició de les dues aplicacions anteriors, $T_0 = T_0^- \circ T_0^+$, és una aplicació de Poincaré del sistema degenerat, i captura tota la fenomenologia, ja que qualsevol òrbita (excepte els punts d'equilibri P_{\pm}) talla \tilde{R}_+ o \tilde{R}_- en algun moment. Així, per exemple, les òrbites periòdiques del sistema (2.6) corresponen a òrbites periòdiques de l'aplicació T_0 , i la seva estabilitat també està relacionada.

Notem que T_0 té una infinitat numerable de discontinuïtats, causades per les que tenen T_0^+ i T_0^- ; en la resta de punts, T_0 és analítica i la seva derivada es pot calcular per la regla de la cadena: $DT_0(y) = DT_0^-(T_0^+(y))DT_0^+(y)$. A més, T_0 aplica \mathbb{R} (excepte el punt 5 en el cas $\beta = 0$) dins de $(-5, +\infty)$; per tant, qualsevol òrbita periòdica de T_0 ha de tenir tots els punts en aquesta semirecta. De fet, i a

causa del caràcter repulsor dels punts d'equilibri, si prenem $y_0 \gg 5$ suficientment gran resulta que $y_1 \ll -5$ i que $y_2 > y_0$. En conseqüència, les possibles òrbites periòdiques de T_0 han de tenir tots els seus punts en un entorn (la grandària del qual depèn de β) del punt 5.

Si, a més, volem que l'òrbita periòdica sigui estable, caldrà que alguns dels seus punts siguin suficientment pròxims a $y = 5$, ja que aquesta és l'única zona on és possible tenir $|DT_0^+(y)| < 1$. En particular, una òrbita periòdica és *superestable* si i només si conté el punt $y = 5$. El caràcter lineal dels camps permet localitzar fàcilment els punts fixos superestables. Per a explicitar la dependència respecte el paràmetre β , notarem l'aplicació de Poincaré com $T_{0,\beta}$.

Proposició 2.2.4 *Existeix un conjunt numerable de valors de β : $\beta_{0,0}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{1,j}$ ($\forall j \geq 0$), $\beta_{3,j}$ ($\forall j \geq 0$), $\beta_{k,j}$ ($\forall k \geq 4$, $\forall j \geq 0$, $j \neq 1$) tals que*

- 1) $\forall k, j$ possibles $T_{0,\beta_{k,j}}$ té un punt fix superestable;
- 2) $\forall k = 1, 3, 4, 5, \dots$ fixat, la successió $\{\beta_{k,j}\}_j$ convergeix de manera alternada i asimptòticament geomètrica, amb raó $-e^{a\pi/b}$, a un valor $\bar{\beta}_k$;
- 3) la successió $\{\bar{\beta}_k\}_k$ convergeix cap a 0 de manera alternada i asimptòticament geomètrica, amb raó $-e^{a\pi/b}$; i
- 4) llevat dels anteriors, no existeix cap més valor de $\beta > -1$ per al qual $T_{0,\beta}$ tingui un punt fix superestable.

Nota. Geomètricament, els índexs k i j compten la quantitat de mitjes voltes que l'òrbita periòdica superestable del camp (2.6) (la qual té una part a \tilde{S}_+ i una altra a \tilde{S}_-) dóna entorn dels punts d'equilibri P_{\pm} . Cada tria d'aquests índexs (dins dels rangs donats a l'enunciat) determina un únic valor de β per al qual existeix un punt fix superestable de T_0 .

D'altra banda, remarquem que hi ha valors de $\beta < -1$ per als quals també existeix un punt fix superestable, però ja hem dit que no considerem el cas $\beta < -1$.

Demostració. El punt fix superestable ha de ser necessàriament $y = 5$; per tant, hem de resoldre (en la variable β) l'equació $T_0(5) = 5$, o bé $T_0^- \circ T_{0,\beta}^+(5) = 5$ (recordem que T_0^- no depèn de β). Això és, la imatge del punt 5 per $T_{0,\beta}^+$ ha de ser

j	y_j
0	3.76803172...
2	-4.22383634...
4	-4.93129244...
...	...
3	-5.23092922...
1	-7.60872143...

Taula 2.2: Antiimatges del punt $y = 5$ per l'aplicació T_0^- .

alguna de les antiimatges de 5 per T_0^- . En primer lloc calculem aquestes últimes; usant (2.11) obtenim que es poden expressar

$$y_j = -5 + 2e^{at_j} \left(5 \cos bt_j + \frac{5a-1}{b} \sin bt_j \right), \forall j \geq 0;$$

on t_j és alguna de les arrels negatives de l'equació $e^{at}(\cos bt + \frac{5-a}{b} \sin bt) = 0$; o sigui $t_j = (\arctan(-b/(5-a) - j\pi)/b, \forall j \geq 0$.

Alguns dels valors y_j (ordenats) són a la taula 2.2; verifiquen les propietats següents:

- són tots a l'interval $(-7.61, 3.77)$;
- s'acumulen en el punt -5 geomètricament, amb raó $-e^{a\pi/b}$, ja que dos valors consecutius de t_j difereixen en π/b mentre que els valors de les funcions trigonomètriques només canvien de signe; per tant, $\frac{y_j+5}{y_{j+1}+5} = \frac{2e^{at_j}}{2e^{at_{j+1}}}(-1) = -e^{a\pi/b}$;
- j indica la quantitat de mitjes voltes que l'arc d'òrbita entre $(+1, +5)$ i $(-1, y_j)$ dóna entorn de P_- (vegeu la figura 2.6).

Així doncs, busquem valors de $\beta \in (-1, +\infty)$ tals que la funció $g(\beta) \equiv T_{0,\beta}^+(5)$ prengui algun valor $y_j, j \geq 0$. Notem que g no està definida en $\beta = 0$. La figura 2.7 (que és qualitativa) permet seguir més fàcilment els raonaments. Usant les expressions (2.9) obtenim que $g(\beta) = 5 + \frac{2\beta}{b} e^{at(\beta)} \sin bt(\beta)$, on $t(\beta)$ és la primera

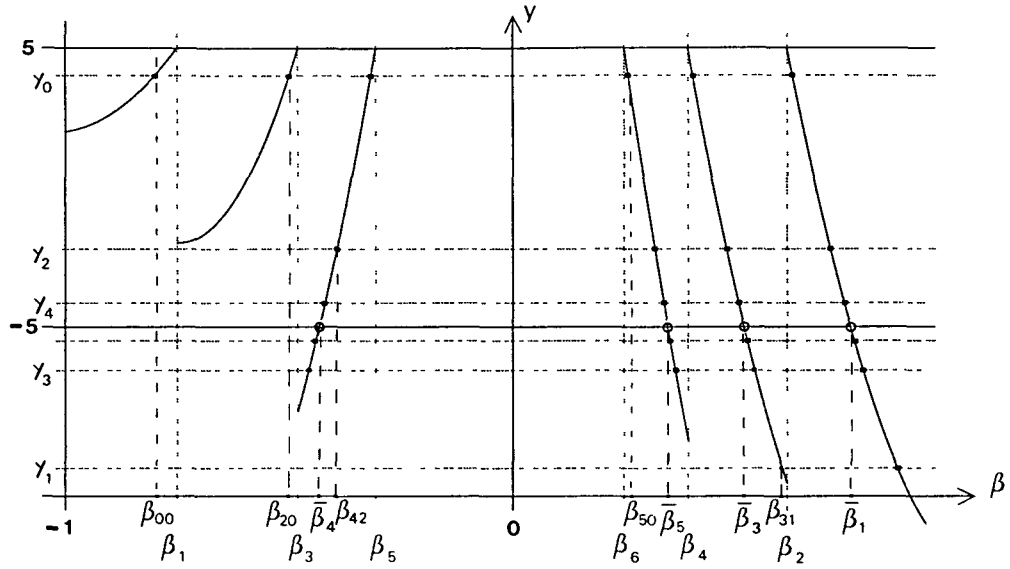


Figura 2.7: Aspecte qualitatiu de la funció $g(\beta) = T_{0,\beta}^+(5)$.

arrel positiva de l'equació

$$\Psi(t) \equiv e^{at}(\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt) = \frac{1 + \beta}{\beta} \equiv f(\beta),$$

la qual s'assembla molt a (2.12). Estudiem com es comporta $t(\beta)$: quan β varia a $(-1, 0)$, $f(\beta)$ recorre monòtonament l'interval $(-\infty, 0)$, mentre que si β varia a $(0, +\infty)$ llavors $f(\beta)$ recorre monòtonament $(+1, +\infty)$. En qualsevol dels dos casos, la funció $t(\beta)$ presenta una quantitat numerable de discontinuïtats en els punts β tals que $f(\beta)$ sigui un valor extrem (relatiu) de $\Psi(t)$ (i pertanyi a $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$). Uns càlculs elementals permeten obtenir aquests valors: $\beta = \beta_k = \frac{-1}{1 - (-1)^k e^{ka\pi/b}}$, $\forall k > 0$; els quals verifiquen $-1 < \beta_1 < \beta_3 < \dots < 0 < \dots < \beta_4 < \beta_2$ i, a més,

$$\frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} = \frac{1 - (-1)^k e^{ka\pi/b}}{1 - (-1)^{k-1} e^{(k-1)a\pi/b}} = \frac{(-1)^{k-1} e^{-(k-1)a\pi/b} + e^{a\pi/b}}{(-1)^{k-1} e^{-(k-1)a\pi/b} - 1} \rightarrow -e^{a\pi/b}$$

quan $k \rightarrow +\infty$. Notarem $I_0 = (-1, \beta_1)$; $I_k = (\beta_{k-1}, \beta_{k+1})$, $\forall k \geq 2$ parell; $I_1 = (\beta_2, +\infty)$; i $I_k = (\beta_{k+1}, \beta_{k-1})$, $\forall k \geq 3$ senar. La funció $t(\beta)$ és, doncs, contínua i monòtona en cadascun dels intervals I_k . A més, es verifica $t(I_k) \subset (\frac{k\pi + \pi/2}{b}, \frac{(k+1)\pi}{b})$ i, per tant, la funció sin és monòtona en cada $t(I_k)$. Això fa que la funció g també sigui monòtona respecte β en cadascun dels intervals.

Els valors que donen les discontinuïtats corresponen al fet que l'òrbita (enrera) del camp pel punt $(-1, 5)$ (vegeu la figura 2.5) talla tangencialment la recta $x = +1$ en el punt $y = +5$. Això ens permet calcular fàcilment la variació de g en cada interval:

$$g(I_k) = (Y_+(\beta_{k-1}), +5), \quad \forall k \geq 2.$$

Si recordem que $Y_+(\beta) \simeq 5 - 11.9581316\dots(1 + \beta)$ obtenim

- $g(Y_+(\beta_2)) = -4.2160\dots \in (y_2, y_0)$;
- $g(Y_+(\beta_3)) = -8.1194\dots < y_1$;
- $g(Y_+(\beta_k)) \in (y_1, y_3), \forall k \geq 4$.

D'altra banda, és fàcil comprovar que $g(I_0) = (1.819084\dots, +5)$ (amb $1.8190 \in (y_2, y_0)$) i $g(I_1) = (-\infty, +5)$.

Usant el teorema de Bolzano i la monotonia de g en cada interval I_k obtenim:

- la condició $(\exists \beta \in I_0 \text{ tal que } g(\beta) = y_j \text{ per a algun } j \geq 0)$ només és certa per a $j = 0$ en un únic valor $\beta_{0,0}$;
- la condició $(\exists \beta \in I_1 \text{ tal que } g(\beta) = y_j \text{ per a algun } j \geq 0)$ és certa per a cada $j \geq 0$ en un únic valor $\beta_{1,j}$;
- la condició $(\exists \beta \in I_2 \text{ tal que } g(\beta) = y_j \text{ per a algun } j \geq 0)$ només és certa per a $j = 0$ en un únic valor $\beta_{2,0}$;
- la condició $(\exists \beta \in I_3 \text{ tal que } g(\beta) = y_j \text{ per a algun } j \geq 0)$ és certa per a cada $j \geq 0$ en un únic valor $\beta_{3,j}$;
- $\forall k \geq 4$, la condició $(\exists \beta \in I_k \text{ tal que } g(\beta) = y_j \text{ per a algun } j \geq 0)$ és certa per a cada $j \geq 0, j \neq 1$, en un únic valor $\beta_{k,j}$.

Aquests són els valors de l'enunciat, i això demostra 1) i 4). Per a veure 2), fixem $k \in \{1, 3, 4, 5, \dots\}$ i considerem la bijecció $g : I_k \longrightarrow g(I_k)$.

Els valors $\beta_{k,j}$ verifiquen $g(\beta_{k,j}) = y_j$, i sabem que la successió $\{y_j\}_{j \geq 0}$ convergeix cap a -5 geomètricament, amb raó $-e^{a\pi/b}$. Sigui $\bar{\beta}_k$ l'únic punt de I_k tal que $g(\bar{\beta}_k) = -5$. Per la continuïtat i la monotonia de g , és evident que $\beta_{k,j} \rightarrow \bar{\beta}_k$,

quan $j \rightarrow +\infty$. Cal veure que la convergència és asimptòticament geomètrica. Efectivament, pel teorema del valor mitjà

$$g(\beta_{k,j}) - g(\bar{\beta}_k) = g'(\xi_j)(\beta_{k,j} - \bar{\beta}_k), \quad \xi_j \in (\beta_{k,j}, \bar{\beta}_k);$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{k,j} - \bar{\beta}_k}{\beta_{k,j+1} - \bar{\beta}_k} &= \frac{(g(\beta_{k,j}) - g(\bar{\beta}_k))g'(\xi_j)}{(g(\beta_{k,j+1}) - g(\bar{\beta}_k))g'(\xi_{j+1})} = \\ &= \frac{g'(\xi_j)(y_j + 5)}{g'(\xi_{j+1})(y_{j+1} + 5)} = \frac{g'(\xi_j)}{g'(\xi_{j+1})} \left(-e^{a\pi/b}\right) \rightarrow -e^{a\pi/b}. \end{aligned}$$

Finalment, vegem 3). Cada $\bar{\beta}_k$ ($k \neq 0, 2$) està determinat pel fet de ser l'únic element de I_k que verifica $g(\bar{\beta}_k) = -5$. Notem $I_k = (a_k, b_k), \forall k \geq 0$. Com que es verifica

$$a_0 < b_0 = a_2 < b_2 = a_4 < \dots < 0 < \dots < b_5 = a_3 < b_3 = a_1 < b_1,$$

és immediat que $\{\bar{\beta}_k\}_{k \geq 3} \rightarrow 0$ de manera alternada. Però, a més, sabem que $a_k = Y_+(\beta_k) = 5.11.9581 \dots (1 + \beta_k)$, amb $\beta_k \rightarrow 0$ de manera geomètrica (alternada) de raó $-e^{a\pi/b}$; per tant, també $\bar{\beta}_k$ (que és a l'interval determinat per a_{k-1} i a_{k+1}) convergeix cap a 0 de manera asimptòticament geomètrica amb raó $-e^{-a\pi/b}$. \square

Es poden obtenir resultats semblants per a les òrbites periòdiques superestables de període més gran, encara que la demostració esdevé cada vegada més complexa. El resultat que podem esperar és el següent:

Fixat $n \geq 1$, existeix un conjunt numerable de valors de β per als quals $T_{0,\beta}$ té una òrbita periòdica superestable de període n . Aquests valors es poden numerar així:

$$\beta = \beta_i, \quad \text{amb } i = (i_1, i_2, \dots, i_{2n}) \in S \subset \mathbb{N}^{2n},$$

i S conté un conjunt $S_m = \{(i_1, \dots, i_{2n}) \in \mathbb{N}^{2n} | i_j \geq m \forall j = 1 \div 2n\}$, per a un m adequat. Cada òrbita superestable està formada per $2n$ arcs d'espiral, situats alternativament a \tilde{S}_+ i \tilde{S}_- , i cada índex i_j representa la quantitat de mitjes voltes que un d'aquests arcs dóna entorn de P_+ (si j senar) o P_- (si j parell). L'estructura dels valors β_i és la següent:

- *Fixats i_1, \dots, i_{2n-1} i fent $i_{2n} \rightarrow +\infty$, $\beta_{i_1, \dots, i_{2n}}$ convergeix a $\beta_{i_1, \dots, i_{2n-1}}^{(1)}$.*

- Fixats i_1, \dots, i_{2n-2} i fent $i_{2n-1} \rightarrow +\infty$, $\beta_{i_1, \dots, i_{2n-1}}^{(1)}$ convergeix a $\beta_{i_1, \dots, i_{2n-2}}^{(2)}$.
- ...
- Fixat i_1 i fent $i_2 \rightarrow +\infty$, $\beta_{i_1, i_2}^{(2n-2)}$ convergeix a $\beta_{i_1}^{(2n-1)}$.
- Fent $i_1 \rightarrow +\infty$, $\beta_{i_1}^{(2n-1)}$ convergeix a 0.

Totes les convergències són asimptòticament geomètriques, de raó límit $-e^{-a\pi/b}$.

Més endavant usarem aquests valors de superestabilitat per a detectar numèricament les bifurcacions sella-node (en el cas degenerat), les quals ens serviran com a valors inicials d'un mètode de continuació que ens permetrà dibuixar l'estructura de les bifurcacions en el cas no degenerat.

A més de les òrbites periòdiques superestables, i de manera anàloga, també es poden numerar les òrbites homoclíniques del sistema degenerat. Això ho farem a la pròxima secció com a pas preliminar per a determinar les òrbites homoclíniques del cas no degenerat.

2.3 Òrbites homoclíniques

En aquesta secció calcularem el lloc geomètric dels valors dels paràmetres (μ, β) per als quals existeix alguna òrbita homoclínica a algun dels punts d'equilibri P_+ o P_- . De fet, veurem que no hi ha òrbites homoclíniques a P_- i que sí que n'hi ha a P_+ si $\mu > 0$ és prou petit (i que la quantitat augmenta sense fita quan $\mu \rightarrow 0^+$).

Sabem que les òrbites del camp estan formades per trams situats alternativament a D_+ i D_- . Això passa també per a les òrbites homoclíniques. Direm que una òrbita és *homoclínica a la primera* a P_+ (o bé d'*ordre 1*) si consta només d'un tram a D_- , a *la segona* (o d'*ordre 2*) si n'hi té dos, etc.; amb el benentès que entre dos trams consecutius a D_- hi ha un tram a D_+ , i que per a acabar de completar l'òrbita cal considerar els dos trams de D_+ adjacents a P_+ .

Totes aquestes consideracions es poden fer de manera anàloga per a P_- . La figura 2.8 dona l'aspecte qualitatiu de la projecció sobre el pla (x, z) d'una òrbita homoclínica de segon ordre per a P_+ .

Nota. La noció d'òrbita homoclínica es pot estendre sense cap dificultat al cas degenerat $\mu = 0$. Cada tram (a D_+ o D_-) passa a ser un arc d'espiral (situat a

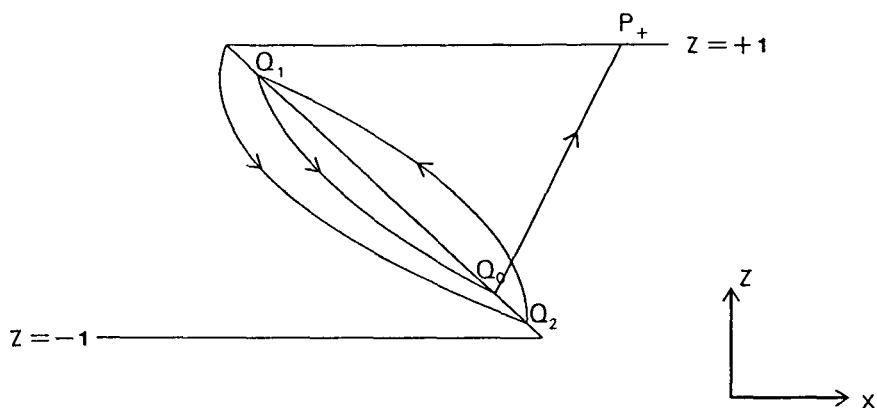


Figura 2.8: Secció lateral d'una òrbita homoclínica a la segona a P_+ .

\tilde{S}_+ o a \tilde{S}_-), seguit d'un salt vertical instantani (des de \tilde{R}_+ a \tilde{S}_- , o des de \tilde{R}_- a \tilde{S}_+). Observem que, en el cas d'òrbites homoclíniques a P_+ , l'últim salt ha d'anar de \tilde{R}_- a P_+ ; com que el salt és completament vertical, això només és possible en el cas $\beta = 0$. Aquesta és, doncs, una condició necessària d'existència d'òrbites homoclíniques a P_+ de qualsevol ordre.

La manera de detectar òrbites homoclíniques a P_+ (a P_- es fa anàlogament) és la següent. Partint del punt d'equilibri, seguim la branca inferior de la varietat estable per a temps negatiu fins a la frontera E (la raó de seguir la varietat estable a temps negatiu en lloc de la inestable a temps positiu, és que la primera és de dimensió 1, mentre la segona és de dimensió 2). Sigui Q_0 el punt de tall; a continuació seguim l'òrbita del camp F_- per Q_0 (també en temps negatiu). Si volem una òrbita homoclínica a la primera, intersequem aquesta òrbita amb el pla $z = +1$ i impossem que la coordenada x del punt corresponent valgui -1 ; això ens dóna una equació que cal resoldre. En canvi, si volem una òrbita homoclínica d'ordre superior, calculem la intersecció amb $x + z = 0$ (en un punt Q_1); tot seguit integrem el camp F_+ enrera una altra vegada fins que talleu $x + z = 0$ en Q_2 . Si volem una òrbita homoclínica a la segona, integrem per segona vegada F_- enrera a partir de Q_2 i busquem el punt de tall de l'òrbita amb el pla $z = +1$. La condició d'homoclínic és, una altra vegada, que la component x valgui -1 .

Aquest procés es pot repetir tantes vegades com es vulgui. Comencem per limitar el rang de validesa dels paràmetres (μ, β) ja que algun dels punts Q_i anteriors pot no estar ben definit a causa que tingui components x, z de mòdul > 1 , o bé sigui

a la zona Z que havíem suprimit del domini. En aquests casos no poden existir òrbites homoclíniques a P_+ .

Lema 2.3.1 *Una condició necessària per tal que el sistema (2.3) tingui òrbites homoclíniques a P_+ és que $0 < \beta < \frac{\mu(\mu+5)}{0.72\mu+1}$.*

Demostració. Recordem que $P_+ = (1 + 2\beta, 5, 1)$. La varietat estable de P_+ té localment (mentre no sortim de D_+) una expressió paramètrica de la forma

$$\begin{aligned}x &= (1 + 2\beta) + \lambda v_1, \\y &= 5 + \lambda v_2, \\z &= 1 + \lambda v_3,\end{aligned}$$

on $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ està donat a la proposició 2.1.4. És immediat calcular el punt Q_0 d'intersecció amb el pla $x + z = 0$; dóna

$$\begin{aligned}x_0 &= (1 + 2\beta) - \frac{2(1 + \beta)v_1}{(v_1 + v_3)}, \\y_0 &= 5 - \frac{2(1 + \beta)v_2}{(v_1 + v_3)}, \\z_0 &= 1 - \frac{2(1 + \beta)v_3}{(v_1 + v_3)}.\end{aligned}$$

Com que $\beta > -1$, v_1 i $v_3 > 0$, resulta clar que $z_0 < 1$. A més, si fos $z_0 \leq -1$ llavors l'òrbita enrera per Q_0 sota el camp F_- verificaria

- o bé va cap a P_- (si $z_0 = -1$);
- o bé la component z tendeix a $-\infty$ (si $z_0 < -1$).

En qualsevol dels dos casos no hi pot haver una òrbita homoclínica a P_+ . És immediat comprovar que la condició $z_0 > -1$ és equivalent a $\beta < \frac{\mu(\mu+5)}{0.72\mu+1}$.

D'altra banda, mirem com és el camp F_- en Q_0 . Es verifica

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= y_0 - 5z_0 = -2(1 + \beta) \frac{v_2 - 5v_3}{v_1 + v_3}, \text{ i} \\ \dot{z}_0 &= \frac{1}{\mu}(-1 - z_0) = \frac{2 - v_1 + \beta v_3}{\mu(v_1 + v_3)}.\end{aligned}$$

Substituïm els valors de v_1, v_2, v_3 i obtenim fàcilment $\dot{x}_0 + \dot{z}_0 = \frac{2\beta}{\mu}$.

Per tant, si $-1 < \beta < 0$ aleshores el camp F_- en Q_0 apunta cap a D_- ; això fa que no puguem seguir el camp enrera (en unes altres paraules: sòm a la zona prohibida Z).

El cas $\beta = 0$ correspon a la situació de tangència; en aquest cas, un càlcul senzill mostra que

$$\ddot{x}_0 + \ddot{z}_0 = \frac{2}{v_1 + v_3} \left(\frac{10}{\mu} + \frac{36}{\mu^2} \right) > 0$$

i, en conseqüència, tampoc no es pot seguir el camp F_- enrera cap a la zona D_- .
□

Nota. Destaquem les raons per les quals hi ha les limitacions sobre el rang de paràmetres (μ, β) . De la demostració anterior deduïm:

- Quan els paràmetres s'acosten a la rama d'hipèrbola $\beta = \frac{5\mu + \mu^2}{1 + 0.72\mu}$, el punt Q_0 tendeix a la recta R_- .
- Quan els paràmetres s'acosten a la recta $\beta = 0$, el punt Q_0 tendeix a la zona Z que no pertany al domini.

Podem acabar ara de precisar la condició d'homoclínic a la primera de P_+ .

Proposició 2.3.2 *La condició necessària i suficient perquè existeixi una òrbita homoclínica a la primera de P_+ és que els paràmetres $\mu > 0$ i $\beta \in (0, \frac{\mu(\mu+5)}{1+0.72\mu})$ verifiquin l'equació*

$$0 = 5\mu + (1 + \beta)\mu^2 + e^{a\tau} \{ [(1 - 4.28\mu) + \beta(1 + 0.72\mu)] \cos b\tau + \frac{1}{b} [5 - a + (1 + 4.28a)\mu + \beta(-a + (1 - 0.72a)\mu)] \sin b\tau \}, \quad (2.13)$$

on

$$\tau = \tau(\mu, \beta) = \mu \log \frac{(5\mu + \mu^2) - (1 + 0.72\mu)\beta}{(1 + 5.72\mu + 2\mu^2) + \mu^2\beta} < 0. \quad (2.14)$$

Demostració. Usant les expressions de la proposició 2.1.4 calculem les constants k_1 , k_2 i k_3 de la solució $(x(t), y(t), z(t))$ del camp F_- pel punt Q_0 del lema anterior.

Calculem el temps $t = \tau$ per al qual la component z pren el valor $+1$: usant les expressions de k_1 , v_3 i $z(t)$ s'obté $1 = (z_0 + 1)e^{-t/\mu} - 1$, o sigui $\tau = \mu \log \left(\frac{z_0 + 1}{2} \right)$.

A la zona determinada pel lema 2.3.1 es verifica $\tau < 0$. La condició d'homoclínic a la primera és $x(\tau) = -1$. Substituïm l'expressió explícita de $x(t)$ i operem per a obtenir (2.13)-(2.14). \square

Nota. L'expressió (2.14) és equivalent a

$$\beta = \beta(\mu, \tau) = \frac{(5\mu + \mu^2) - (1 + 5.72\mu + 2\mu^2)e^{\tau/\mu}}{(1 + 0.72\mu) + \mu^2 e^{\tau/\mu}}. \quad (2.15)$$

En particular, això vol dir que per a cada $\mu > 0$ fixat, hi ha una bijecció entre β i τ . Concretament, β és funció estrictament monòtona decreixent de τ , i alguns valors característics són:

- $\beta \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow \tau \rightarrow 0^-$;
- $\beta = 0 \Leftrightarrow \tau = \mu \log \frac{5\mu + \mu^2}{1 + 5.72\mu + 2\mu^2}$;
- $\beta \rightarrow \frac{\mu(5+\mu)}{1+0.72\mu} \Leftrightarrow \tau \rightarrow -\infty$.

Per tant, l'equació (2.13) es pot considerar tant en les variables (μ, β) com en (μ, τ) . Els arguments que vénen a continuació fan pensar que la segona opció és numèricament millor.

Observem també que la bijecció anterior deixa d'existir en el cas degenerat $\mu = 0$, ja que $\beta(0, \tau) = 0$, $\forall \tau < 0$.

Volem estudiar com són les solucions de (2.13) a la zona determinada pel lema 2.3.1. Per a fer-nos una idea de la complexitat que això comporta, tractarem en primer lloc una simplificació substancial.

Considerem l'equació

$$5\mu + e^{a\tau}(\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau) = 0 \quad (2.16)$$

de les variable μ i τ en la zona $\mu > 0$, $\tau < 0$. Això correspon a prendre límit $\mu \rightarrow 0^+$ a tot arreu excepte en el terme 5μ , ja que $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \beta(\mu) = 0$. La figura 2.9 mostra com resoldre gràficament (2.16) en la variable τ .

Sigui $\Psi(\tau) = e^{a\tau}(\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau)$. Fixat un valor $\mu > 0$, existeix una quantitat finita (eventualment 0) de valors $\tau < 0$ que són solució de l'equació $\Psi(\tau) = -5\mu$. Aquestes solucions apareixen a parells quan $\mu \rightarrow 0^+$ en valors de bifurcació μ_k tals que $-5\mu_k$ és algun valor mínim de Ψ .

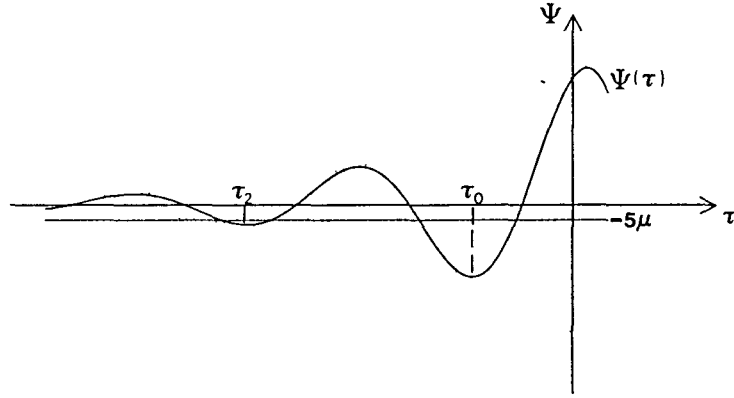


Figura 2.9: Resolució gràfica de l'equació (2.16).

Calculem aquests mínims. Usant que $a^2 + b^2 = 1$ s'obté

$$\Psi'(\tau) = e^{a\tau} \left(5 \cos b\tau + \frac{5a-1}{b} \sin b\tau \right)$$

i, per tant, una condició necessària de mínim és $\cos b\tau = \frac{1-5a}{5b} \sin b\tau$, o bé

$$\tau = \tau_k = \frac{1}{b} \left[\arctan \left(\frac{-5b}{5a-1} \right) - k\pi \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Notem que $\frac{-5b}{5a-1} < 0$; com que volem $\tau < 0$, considerem el valor de la funció arctan a $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ i $k \geq 0$.

D'altra banda, mirem quan la condició és suficient. Es verifica

$$\Psi(\tau_k) = e^{a\tau_k} \left(\frac{1-5a}{5b} + \frac{5-a}{b} \right) \sin b\tau_k = \frac{26-10a}{5b} e^{a\tau_k} \sin b\tau_k;$$

en conseqüència, $\Psi(\tau_k) > 0$ si k és senar i $\Psi(\tau_k) < 0$ si k és parell. Això indica que els mínims corresponen a valors parells de k . Els primers valors de les bifurcacions $\mu_k = -\frac{1}{5}\Psi(\tau_k)$ són, doncs, els de la taula 2.3.

A més, és fàcil trobar un comportament asintòtic per als valors μ_k :

$$\frac{\mu_{k+2}}{\mu_k} = \frac{\Psi(\tau_{k+2})}{\Psi(\tau_k)} = \frac{e^{a\tau_{k+2}}}{e^{a\tau_k}} = e^{\frac{-2\pi a}{b}}.$$

Hauríem pogut considerar (2.16) com una equació per a les variables (μ, β) si hi haguéssim afegit una simplificació de (2.14):

$$\tau = \mu \log(5\mu - \beta).$$

k	$-\frac{1}{5}\Psi(\tau_k) = \mu_k$
0	0.55129...
2	0.04880...
4	0.00432...
...	...

Taula 2.3: Valors de μ per als quals neixen solucions $\tau < 0$ de (2.16).

τ	β
-0.259084...	0.198461...
-3.434113...	$0.2 - 5.19...10^{-38}$
-7.668859...	$0.2 - 5.45...10^{-84}$
-8.895923...	$0.2 - 2.59...10^{-97}$

Taula 2.4: Solucions de (2.16) per a $\mu = 0.04$, i valors corresponents de β .

La taula 2.4, calculada resolent numèricament (2.16) per al valor $\mu = 0.04$ i substituint després $\beta = 5\mu - e^{\frac{\tau}{\mu}}$, dóna idea de les dificultats numèriques que pot comportar treballar amb les variables (μ, β) , a causa que serà difícil distingir entre els diversos valors de β .

Així doncs, treballem amb les variables (μ, τ) . Escrivim l'equació (2.13) com $H(\mu, \tau) = 0$. Hem resolt (2.13)-(2.15) numèricament. La tècnica que s'ha usat és iteració simple: fixat $\tau < 0$ hem inicialitzat μ_0 com la solució del model simplificat (2.16) i hem calculat recursivament $\mu_{i+1} = -\frac{1}{5}(H(\mu_k, \tau) - 5\mu_k)$. A més, s'ha fet una escombrada de valors de $\mu > 0$ i $\tau < 0$ per a "assegurar" que no hi ha més solucions que aquestes. Així podem formular la

Conjectura 2.3.1 *Per a cada valor fixat de $\tau < 0$, considerem l'equació (2.13)-(2.15) en funció només de la variable μ a la semirecta $\mu > 0$. Es verifica*

- 1) *Si $\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau \geq 0$ llavors l'equació no té cap solució.*
 - 2) *Si $\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau < 0$ llavors l'equació té una única solució $\mu = \mu(\tau) > 0$.*
- A més,*

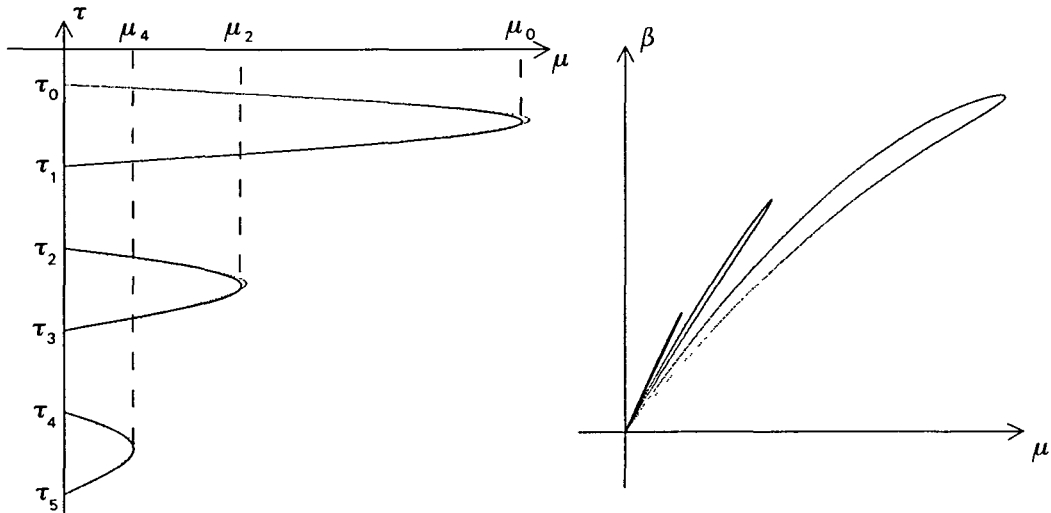


Figura 2.10: a) Solucions (μ, τ) de les equacions (2.13)-(2.15). b) Solucions (μ, β) de les equacions (2.13)-(2.14).

- a) $\mu(\tau)$ depèn diferenciablement de τ ,
- b) si $\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau$ tendeix a 0 (això és equivalent a dir que τ tendeix a algun valor $\tau_k = \frac{1}{b} \left[\arctan\left(\frac{-b}{5-a}\right) - k\pi \right]$, $k \geq 0$) llavors $\mu(\tau)$ tendeix a 0.

L'aspecte d'aquestes solucions és el que mostra la figura 2.10.a). Observem que $\tau_{k+1} - \tau_k = -\frac{\pi}{b} \simeq -3.36737$. Hem dibuixat amb línia discontinua la solució de l'equació simplificada (2.16): $\bar{\mu}(\tau) = \frac{-1}{5} e^{a\tau} \left(\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau \right)$. Veiem, per tant, que $\bar{\mu}(\tau)$ és una bona aproximació de $\mu(\tau)$. El dibuix és qualitatiu en la direcció μ . Recordem que a escala real es verifica $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+2}}{\mu_k} = e^{-2\pi a/b} \simeq 0.088522$; per tant, l'acumulació cap a $\mu = 0$ és molt més ràpida.

Usant la bijecció entre β i τ (per a cada $\mu > 0$ fixat), podem transladar les solucions al pla de paràmetres originals (μ, β) . S'obté, qualitativament, la figura 2.10.b): una quantitat numerable de llaços situats a la regió determinada pel lema 2.3.1, externs entre sí, cada vegada més curts (amb raó geomètrica) i agafats tots ells en el punt $\mu = \beta = 0$. Notem que, segons els resultats de la taula 2.4, a escala real només seria distingible la llaçada més gran.

Cal comentar les dificultats d'obtenir una demostració analítica de la proposició anterior. És fàcilment comprovable que $H(\mu, \tau)$ ($\mu > 0$, $\tau < 0$) és una funció contínua tal que, per a cada $\tau < 0$ fixat, verifica

- $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} H(\mu, \tau) = e^{a\tau}(\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau)$, i
- $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} H(\mu, \tau) = +\infty$.

Per tant, si H fos monòtona creixent respecte μ llavors el resultat seria immediat. Aquesta última condició, malauradament, no és certa.

D'altra banda, sí que és possible usar mètodes pertorbatius per a demostrar que les solucions són tal com s'afirma a la proposició *si ens restringim a una franja* $0 < \mu < \epsilon$ *suficientment estreta*, però això no és suficient per a demostrar 2.3.3.

Nota. En el cas 2), en què existeix una solució (μ, τ) , l'índex k (parell) tal que $\tau \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ està relacionat amb la quantitat de voltes que el tram d'òrbita homoclínica contingut a D_- dona entorn de la varietat estable local de P_- . Això és més clar en el cas degenerat. Quan $\mu = 0$, l'equació (2.15) passa a ser $\beta = 0$ ($\forall \tau < 0$), i (2.13) és $0 = e^{a\tau}(\cos b\tau + \frac{5-a}{b} \sin b\tau)$. Les solucions negatives són, doncs, $\tau_k = (\arctan(\frac{-5}{5-a} - k\pi)/b \forall k \geq 0$. En conseqüència, en el cas degenerat $\mu = 0$, coexisteixen una quantitat numerable d'òrbites homoclíniques d'ordre 1 per a $\beta = 0$; cada òrbita es pot caracteritzar per un índex natural $k \geq 0$ que indica la quantitat de mitjes voltes que l'òrbita dona entorn de P_- (específicament, $k + 1$ és la quantitat de vegades que l'òrbita talla la recta $x = -1, z = -1$).

A més, des del punt de vista numèric, la resolució de (2.13) en el cas no degenerat s'hauria pogut fer usant continuació respecte a μ , a partir de les solucions del cas $\mu = 0$.

A continuació ens acarem amb el problema de trobar homoclínics de segon ordre a P_+ . La figura 2.8 pot ser útil. Comencem per precisar el procés (llarg però fàcil) que ens determina quines condicions cal que verifiquin els paràmetres.

- 0) Ja coneixem les expressions de $v = (v_1, v_2, v_3)$ i $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (primer punt de tall de $W^s(P_+)$ amb el pla $x + z = 0$) en funció de $\mu > 0$ i $\beta \in (0, \frac{\mu(\mu+5)}{1+0.72\mu})$.
- 1) Considerem la solució $s^1(t) = (x^1(t), y^1(t), z^1(t))$ del camp F_- amb condició inicial $s^1(0) = Q_0$ i sigui $t_1 < 0$ el primer valor negatiu del temps tal que $x^1(t_1) + z^1(t_1) = 0$.
- 2) Sigui $Q_1 = s^1(t_1) = (x_1, y_1, z_1)$. Cal que $|x_1|, |z_1| < 1$.

- 3) Sigui ara $s^2(t) = (x^2(t), y^2(t), z^2(t))$ la solució del camp F_+ que passa pel punt Q_1 en temps 0 i considerem la primera solució negativa, $t_2 < 0$, de $x^2(t_2) + z^2(t_2) = 0$.
- 4) Sigui $Q_2 = s^2(t_2) = (x_2, y_2, z_2)$. Cal que $|x_2|, |z_2| < 1$.
- 5) Tornem a considerar la solució $s^3(t) = (x^3(t), y^3(t), z^3(t))$ del camp F_- amb condició inicial $s^3(0) = Q_2$ i imposem que $z^3(t) = +1$. Aquesta equació té solució explícita única $t = t_3 < 0$ en funció de μ, β, t_1 i t_2 .
- 6) Cal que es verifiqui $x^3(t_3) = -1$.

Així doncs, la condició d'homoclínic a la segona a P_+ porta a quatre equacions

$$\begin{aligned}x^1(t_1) + z^1(t_1) &= 0 \\x^2(t_2) + z^2(t_2) &= 0 \\z^3(t_3) &= +1 \\x^3(t_3) &= -1\end{aligned}$$

amb cinc incògnites μ, β, t_1, t_2 i t_3 . A més, s'han de verificar condicions addicionals:

- les limitacions ja conegudes sobre μ i β ,
- t_1 ha de ser la primera arrel negativa de la primera equació,
- $|z_1| < 1$,
- t_2 ha de ser la primera arrel negativa de la segona equació, i
- $|z_2| < 1$.

Finalment, remarquem també que de la tercera equació es pot aïllar explícitament t_3 en funció de les altres incògnites (μ, β, t_1 i t_2). Substituint l'expressió obtinguda a la quarta equació, podem reduir el problema a resoldre tres equacions amb quatre incògnites. De fet, però, en semblança amb el cas d'homoclínics d'ordre 1, resulta que de la tercera equació també es pot aïllar β en funció de μ, t_1, t_2 i t_3 . Tenint presents els problemes numèrics que causava treballar amb β , es recomanable considerar les tres equacions (primera, segona i quarta) en les incògnites μ, t_1, t_2 i t_3 .

Proposició 2.3.3 *Les condicions que han de verificar els paràmetres μ i β per tal que existeixin òrbites homoclíniques a la segona a P_+ són les següents:*

$$\begin{aligned} c_1(v_1 + v_3)e^{-t_1/\mu} + c_2e^{at_1} \cos bt_1 + c_3e^{at_1} \sin bt_1 - 2 &= 0, \\ d_1(v_1 + v_3)e^{-t_2/\mu} + d_2e^{at_2} \cos bt_2 + d_3e^{at_2} \sin bt_2 + 2 + 2\beta &= 0, \quad i \quad (2.17) \\ 2\frac{v_1}{v_3} + e^{at_3}(e_2 \cos bt_3 + e_3 \sin bt_3) &= 0; \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} i) \quad c_1 &= \frac{z_0+1}{v_3}, \quad c_2 = x_0 + 1 - c_1v_1 \quad i \quad c_3 = \frac{1}{b}(y_0 + 5 - c_1v_2 - ac_2), \\ \text{amb } z_0 = -x_0 &= 1 - 2(1 + \beta)\frac{v_3}{v_1+v_3} \quad i \quad y_0 = 5 - 2(1 + \beta)\frac{v_2}{v_1+v_3}; \\ ii) \quad d_1 &= \frac{z_1-1}{v_3}, \quad d_2 = x_1 - 1 - 2\beta - d_1v_1 \quad i \quad d_3 = \frac{1}{b}(y_1 - 5 - d_1v_2 - ad_2), \\ \text{amb } z_1 = -x_1 &= c_1v_3e^{-t_1/\mu} - 1 \quad i \\ y_1 &= c_1v_2e^{-t_1/\mu} + c_2e^{at_1}(a \cos bt_1 - b \sin bt_1) + c_3e^{at_1}(b \cos bt_1 + a \sin bt_1) - 5; \\ iii) \quad e_1 &= \frac{z_2+1}{v_3}, \quad e_2 = x_2 + 1 - e_1v_1 \quad i \quad e_3 = \frac{1}{b}(y_2 + 5 - e_1v_2 - ae_2), \\ \text{amb } z_2 = -x_2 &= d_1v_3e^{-t_2/\mu} + 1 \quad i \\ y_2 &= d_1v_2e^{-t_2/\mu} + d_2e^{at_2}(a \cos bt_2 - b \sin bt_2) + d_3e^{at_2}(b \cos bt_2 + a \sin bt_2) + 5; \\ i \text{ amb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(\mu, t_1, t_2, t_3) = \quad (2.18) \\ &= \frac{5\mu + \mu^2 - (1 + 5.72\mu + 2\mu^2)(e^{t_1/\mu} - e^{(t_1+t_2)/\mu} + e^{(t_1+t_2+t_3)/\mu})}{1 + 0.72\mu + \mu^2(e^{t_1/\mu} - e^{(t_1+t_2)/\mu} + e^{(t_1+t_2+t_3)/\mu})}. \end{aligned}$$

A més, t_1 (respectivament t_2) ha de ser la primera arrel negativa de la primera (respectivament segona) equació de (2.17), i $|z_0|$, $|z_1|$ i $|z_2|$ han de ser menors que 1.

Demostració. Només cal resseguir els passos 1-6 ressenyats més amunt i usar els resultats de la primera secció referents a les fòrmules explícites de les solucions dels camps F_+ i F_- . Senyalem només que quan s'imposa que alguna solució $(x(t), y(t), z(t))$ verifiqui $x(t) + z(t) = 0$ s'obté una condició (per al temps) de l'estil de la primera i la segona de (2.17), de les quals no es pot aïllar explícitament el temps; mentre que si imposem $z(t) = +1$ llavors existeix una expressió explícita per al temps. Concretament, l'equació $z^3(t_3) = +1$ del pas 5) pren la forma $e_1v_3e^{-t_3/\mu} - 1 = 1$; per tant, $t_3 = \mu \log(\frac{e_1v_3}{2})$. Substituint enrera les expressions de e_1 , z_2 , d_1 , z_1 , c_1 , z_0 , v_1 , v_2 i v_3 s'obté una expressió afí en β , la qual es pot transformar en (2.18). \square

El problema que tenim ara és resoldre les tres equacions de (2.17) en les variables (μ, t_1, t_2, t_3) . Per a fer-ho numèricament cal usar algun mètode iteratiu; convé, doncs, tenir alguna aproximació inicial $(\mu^0, t_1^0, t_2^0, t_3^0)$. Per semblança amb el cas d'ordre 1, considerem un sistema simplificat; més exactament, mirem com són les condicions quan $\mu \rightarrow 0^+$.

Lema 2.3.4 *Quan $\mu \rightarrow 0^+$, les equacions (2.17) es transformen en*

$$e^{at_1} (\cos bt_1 + A \sin bt_1) = 0 ,$$

$$e^{at_2} \left\{ \cos bt_2 + \left[A - e^{at_1} (A \cos bt_1 - \sin bt_1) \right] \sin bt_2 \right\} = 0 , \quad (2.19)$$

$$e^{at_3} \left\{ \cos bt_3 + \left[A - e^{at_2} \left\{ \left[A - e^{at_1} (A \cos bt_1 - \sin bt_1) \right] \cos bt_2 - \sin bt_2 \right\} \right] \sin bt_3 \right\} = 0 ,$$

on $A = \frac{5-a}{b} \simeq 4.973459$.

Demostració. Usarem el símbol \approx per a indicar que dues expressions tenen el mateix límit quan $\mu \rightarrow 0^+$. Ja hem dit que $\beta(\mu) \approx 0$. Observem també que $\frac{v_1}{v_3} \approx 0$ i $\frac{v_2}{v_3} \approx 0$. Mirem com queden els coeficients de la primera equació de (2.17):

- $c_1(v_1 + v_3) = (z_0 + 1) \frac{v_1 + v_3}{v_3} = \left[2 - 2(1 + \beta) \frac{v_3}{v_1 + v_3} \right] \frac{v_1 + v_3}{v_3}$; substituint les expressions de v_1, v_3 i β s'obté $c_1(v_1 + v_3) = 2 \frac{(1 + 5.72\mu + \mu^2)E}{1 + 0.72\mu + \mu^2 E}$, on $E = e^{t_1/\mu} - e^{(t_1+t_2)/\mu} + e^{(t_1+t_2+t_3)/\mu}$. Per tant, $c_1(v_1 + v_3)e^{-t_1/\mu} \approx 2$.
- $c_2 = x_0 + 1 - c_1 v_1 = 2(1 + \beta) \frac{v_3}{v_1 + v_3} - c_1(v_1 + v_3) \frac{v_1}{v_1 + v_3} \approx 2 - 2 \cdot 0 = 2$.
- $c_3 = \frac{1}{b}(y_0 + 5 - c_1 v_2 - ac_2) = \frac{1}{b} \left(10 - 2(1 + \beta) \frac{v_2}{v_1 + v_3} - c_1 v_2 - ac_2 \right) \approx \frac{1}{b}(10 - 0 - 2a) = \frac{10-2a}{b}$.

Així doncs, la primera equació de (2.17) es transforma en

$$2 + 2e^{at_1} \cos bt_1 + \frac{10 - 2a}{b} e^{at_1} \sin bt_1 - 2 = 0 ,$$

que és la primera de (2.19).

Les altres equacions s'obtenen de manera totalment anàloga. Notem només que per a obtenir l'expressió final de la segona equació de (2.17) usem la primera, i que per a la tercera usem la primera i la segona. Concretament, s'obté

- $d_1(v_1 + v_3)e^{-t_2/\mu} \approx -2$,

- $d_2 \approx -2, i$
- $d_3 \approx \frac{1}{b} \left\{ -10 + 2a + 2e^{at_1} \left[5 \cos bt_1 + \frac{5a-1}{b} \sin bt_1 \right] \right\}$.

Per tant, la segona equació de (2.17) es pot transformar en

$$e^{at_2} \left\{ \cos bt_2 + \frac{1}{b} \left[5 - a - e^{at_1} \left(5 \cos bt_1 + \frac{5a-1}{b} \sin bt_1 \right) \right] \sin bt_2 \right\} = 0 .$$

Usant que $\cos bt_1 + \frac{5-a}{b} \sin bt_1 = 0$ aquesta equació es pot escriure com la segona de (2.19).

Finalment, s'obté

- $e_2 \approx 2, i$
- $e_3 \approx \frac{2}{b} \left\{ 5 - a + e^{at_2} [b \sin bt_2 + \{-5 + a + e^{at_1} [(5-a) \cos bt_1 - b \sin bt_1]\} \cos bt_2] \right\}$.

Aquestes expressions porten a l'última equació de (2.19). \square

Lema 2.3.5 *Les solucions negatives $(t_1, t_2, t_3), t_1, t_2, t_3 < 0$, de (2.19) són, exactament, totes les de la forma $(t_{1,k_1}^0, t_{2,k_1,k_2}^0, t_{3,k_1,k_2,k_3}^0), \forall k_1, k_2, k_3 \geq 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (1, 0, 0)$, on*

$$\begin{aligned} t_{1,k_1}^0 &= \frac{1}{b} \left[\arctan \left(\frac{-1}{A} \right) - k_1 \pi \right] \simeq -0.2126814 - 3.3673668k_1 , \\ t_{2,k_1,k_2}^0 &= \frac{1}{b} \left[\arctan \left(\frac{-1}{A_{2,k_1}} \right) - k_2 \pi \right] \simeq -1.3966480 - 3.3673668k_2 , \\ t_{3,k_1,k_2,k_3}^0 &= \frac{1}{b} \left[\arctan \left(\frac{-1}{A_{3,k_1,k_2}} \right) - k_3 \pi \right] \simeq -0.2423991 - 3.3673668k_3 ; \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} A &= \frac{5-a}{b} , \\ A_{2,k_1} &= A - e^{at_{1,k_1}^0} \left(A \cos bt_{1,k_1}^0 - \sin bt_{1,k_1}^0 \right) \quad i \\ A_{3,k_1,k_2} &= A - e^{at_{2,k_1,k_2}^0} \left(A_{2,k_1} \cos bt_{2,k_1,k_2}^0 - \sin bt_{2,k_1,k_2}^0 \right) . \end{aligned}$$

Demostració. És un càlcul elemental. Suposarem que la funció arctan pren valors a $(-\pi/2, +\pi/2)$. Llavors, les solucions negatives ($t_1 < 0$) de la primera equació són, efectivament, les de l'enunciat (k_1 pot prendre tots els valors $0, 1, 2, \dots$).

Per a cadascun d'aquests valors t_{1,k_1}^0 , avaluem l'expressió A_{2,k_1} , de manera que la segona equació és totalment anàloga a la primera amb el canvi de A per A_{2,k_1} . Observem que $A_{2,k_1} \geq A - e^{at_{1,0}^0} \sqrt{1+A^2} \simeq 0.2743807 > 0$, de manera que les solucions t_2 de la segona equació són, també, les de l'enunciat ($\forall k_2 \geq 0$). Finalment, fixats $k_1 \geq 0$ i $k_2 \geq 0$, calculem A_{3,k_1,k_2} , de manera que l'última equació és anàloga a la primera amb el canvi de A per A_{3,k_1,k_2} . Aquesta expressió és positiva $\forall (k_1, k_2) \neq (1, 0)$ i, per tant, en tots aquests casos, les solucions de l'última equació són els valors de l'enunciat $\forall k_3 \geq 0$. En canvi, en el cas particular $k_1 = 1, k_2 = 0$, el valor de la constant és $A_{3,1,0} \simeq -1.100069$ i, en conseqüència, $\arctan(-1/A_{3,1,0}) \simeq 0.737784$. Això vol dir que en aquest cas hem de prendre $k_3 \geq 1$ (i descartar el cas $k_3 = 0$). \square

Nota. Les equacions (2.19) són el cas límit de les equacions (2.17) quan fem $\mu = 0$. En aquest pas formal hem suprimit les limitacions que hi havia sobre els temps i les variables de les equacions (2.17). Dit d'una altra manera, no hem tingut en compte la possibilitat real d'existència de l'òrbita homoclínica a la segona associada als índexs k_1, k_2 i k_3 . Expliquem això amb més detalls.

Anàlogament al cas d'OH-1, aquests índexs representen la quantitat de mitjes voltes que els trams de l'òrbita homoclínica a temps enrere, situats consecutivament a \tilde{S}_-, \tilde{S}_+ i \tilde{S}_- , donen entorn de P_-, P_+ i P_- , respectivament. La figura 2.11 mostra l'esquema relatiu a l'òrbita homoclínica a la segona (en el cas degenerat $\mu = 0$) que té índexs $k_1 = 2, k_2 = 2$ i $k_3 = 0$. Des d'un punt de vista geomètric, si seguim l'òrbita homoclínica a temps negatiu, cal que, després de cada salt instantani d'un semipla a l'altre, s'arribi a un punt des del qual sigui possible continuar l'òrbita enrere. Això vol dir que aquest punts d'arribada dels salts no poden estar situats a les semirectes $x = +1, z = -1, y < -5$ (en el semiplà \tilde{S}_-) o $x = -1, z = +1, y > 5$ (en el semiplà \tilde{S}_+). Concretament, hem vist numèricament que això elimina les ternes d'índexs següents:

- $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 \geq 0$ qualsevol, i
- $k_1 \geq 1$ qualsevol, $k_2 = 1, k_3 = 0$.

D'altra banda, el lema 2.3.5 es podia deduir també integrant directament les equacions (2.7) (quan $\beta = 0$) i (2.8) dels camps en el cas degenerat $\mu = 0$ i imposant les condicions d'homoclínic de segon ordre a P_+ , sense passar abans pel cas no

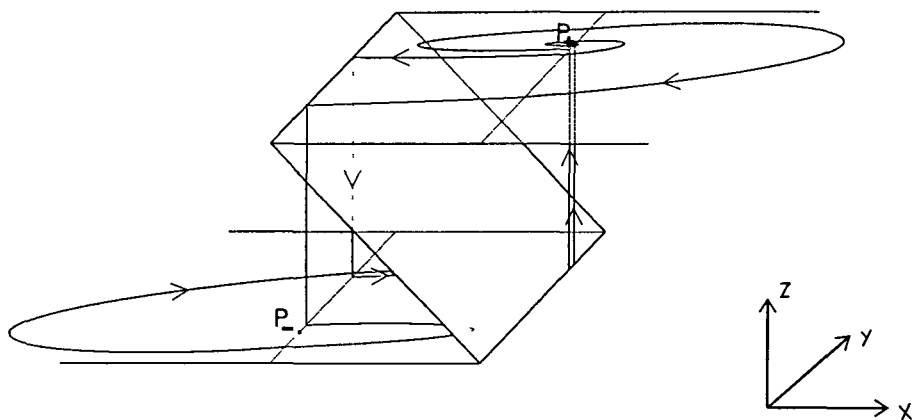


Figura 2.11: Òrbita homoclínica a la segona a P_+ relativa als índex $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ i $k_3 = 0$ en el cas $\mu = 0$.

degenerat.

Una vegada conegudes les solucions de (2.19), o bé, equivalentment, les de (2.17) en el cas degenerat $\mu = 0$, podem usar un mètode de continuació per a seguir-les cap a la zona $\mu > 0$. Comentem breument el mètode numèric que hem usat i els resultats obtinguts.

En lloc de resoldre les tres equacions a la vegada, les hem anat resolent d'una en una, de manera cíclica. Concretament, si els valors calculats t_1^i , t_2^i , t_3^i són solucions de (2.17) per a $\mu = \mu^i \geq 0$, llavors considerem fixat un valor $\mu = \mu^{i+1} (> \mu^i)$ i calculem, consecutivament

- $\beta = \beta(\mu^{i+1}, t_1^i, t_2^i, t_3^i)$ usant (2.18);
- t_1^* , com la solució (pròxima a t_1^i) de la primera equació de (2.17), havent fixat $\mu = \mu^{i+1}$, $t_2 = t_2^i$ i $t_3 = t_3^i$;
- t_2^* , com la solució (pròxima a t_2^i) de la segona equació de (2.17), havent fixat $\mu = \mu^{i+1}$, $t_1 = t_1^*$ i $t_3 = t_3^i$;
- t_3^* , com la solució (pròxima a t_3^i) de la tercera equació de (2.17), havent fixat $\mu = \mu^{i+1}$, $t_1 = t_1^*$ i $t_2 = t_2^*$.

Seguidament, tornem a anomenar t_j^i a t_j^* , $\forall j = 1, 2, 3$, i repetim el procés fins a obtenir-la precisió desitjada.

D'aquesta manera avançem en el paràmetre μ . És interessant fer un comentari sobre la inestabilitat numèrica d'algunes expressions que apareixen a les equacions (2.17). Considerem, per exemple, el terme $c_1(v_1 + v_3)e^{-t_1/\mu}$ de la primera equació. Hem vist que el valor d'aquesta expressió tendeix a 2 quan $\mu \rightarrow 0^+$. Ara bé, per separat, és verifica $c_1(v_1 + v_3) \rightarrow 0$ i $e^{-t_1/\mu} \rightarrow \infty$. Per tant, per a valors de μ molt pròxim a 0, no és numèricament correcte calcular l'expressió anterior directament, sinó que convé modificar-la. Fent substitucions i operant es pot aconseguir

$$\bullet c_1(v_1 + v_3)e^{-t_1/\mu} = 2 \frac{(1+5.72\mu+\mu^2)[1-e^{t_2/\mu}(1-e^{t_3/\mu})]}{1+0.72\mu+\mu^2(e^{t_1/\mu}[1-e^{t_2/\mu}(1-e^{t_3/\mu})])},$$

que és numèricament millor. De la mateixa manera,

$$\bullet d_1(v_1 + v_3)e^{-t_2/\mu} = -2 \frac{(1+5.72\mu+\mu^2)(1-e^{t_3/\mu})}{1+0.72\mu+\mu^2(e^{t_1/\mu}[1-e^{t_2/\mu}(1-e^{t_3/\mu})])}.$$

Amb aquest mètode hem obtingut les corbes de valors dels paràmetres per als quals existeix una òrbita homoclínica a la segona a P_+ . A causa del fet que ara tenim tres índexs (k_1, k_2, k_3) , hi ha moltes més corbes que no pas en el cas d'OH-1. A més, si fixem els valors de k_1 i k_2 i variem k_3 , l'aspecte de les diferents corbes, al pla (μ, t_3) o (μ, β) és totalment anàleg a les figures 2.10.a) i 2.10.b) corresponents a OH-1.

Deixem ara l'estudi de les òrbites homoclíniques al punt P_+ i passem al punt d'equilibri P_- situat a D_- . En aquest cas el resultat no és tan complex.

Teorema 2.3.6 *En el cas no degenerat $\mu > 0$ no existeix cap òrbita homoclínica a P_- .*

Demostració. Recordem que $P_- = (-1, -5, -1)$ i que la varietat estable local té vector director $v^T = (v_1, v_2, v_3) = (1 + \beta + \frac{5}{\mu}, 5 + \frac{2.6-\beta}{\mu}, 1 + \frac{0.72}{\mu} + \frac{1}{\mu^2})$. Considerem els punts de la varietat estable parametritzats per $\lambda \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = (-1 + \lambda v_1, -5 + \lambda v_2, -1 + \lambda v_3)$. El punt d'intersecció amb el pla $x + z = 0$ correspon a $\lambda = \frac{2}{v_1 + v_3}$, i defineix el punt $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ amb

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 + \frac{2v_1}{v_1 + v_3}, \\ y_0 &= -5 + \frac{2v_2}{v_1 + v_3}, \\ z_0 &= -1 + \frac{2v_3}{v_1 + v_3}. \end{aligned}$$

Només cal veure que no està definida la solució del camp F_+ pel punt Q_0 a la zona D_+ . Això impossibilita el poder continuar l'òrbita enrera cap a D_+ (de fet, això correspon al fet que Q_0 pertany a la regió prohibida Z definida a la proposició 2.1.3).

Es verifica $\dot{x}_0 = y_0 - 5z_0 = \frac{2(v_2 - 5v_3)}{v_1 + v_3}$ i $\dot{z}_0 = \frac{1}{\mu}(1 - z_0) = \frac{2v_1}{(v_1 + v_3)\mu}$. Per tant,

$$\dot{x}_0 + \dot{z}_0 = \frac{2}{v_1 + v_3} \left(v_2 - 5v_3 + \frac{1}{\mu}v_1 \right) = 0.$$

Hem substituït les expressions v_1 , v_2 i v_3 . Això vol dir que el camp F_+ és tangent en Q_0 al pla $x + z = 0$. Calculem derivades superiors:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \ddot{z}_0 &= \dot{y}_0 - 5\dot{z}_0 + \frac{1}{\mu}(-\dot{z}_0) = -x_0 + 0.72y_0 + (\beta - 2.6)z_0 + \beta - \left(5 + \frac{1}{\mu}\right) \frac{1}{\mu}(1 - z_0) = \\ &= 1 - \frac{2v_1}{v_1 + v_3} + 0.72 \left(-5 + \frac{2v_2}{v_1 + v_3} \right) + \\ &\quad + \left(\beta - 2.6 + \frac{5}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right) \left(-1 + \frac{2v_3}{v_1 + v_3} \right) + \beta - \frac{5}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} = \\ &= -2 \left(\frac{5}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right) + \frac{2}{v_1 + v_3} \left[-v_1 + 0.72v_2 + \left(\beta - 2.6 + \frac{5}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right) v_3 \right] = \\ &= \frac{2}{v_1 + v_3} \left[- \left(1 + \frac{5}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \right) v_1 + 0.72v_2 + (\beta - 2.6)v_3 \right]. \end{aligned}$$

Substituint les expressions de v_1 , v_2 i v_3 i simplificant s'obté $\ddot{x}_0 + \ddot{z}_0 = \frac{-10}{\mu} < 0$. En conseqüència, la solució del camp F_+ p er Q_0 entra a D_- tant en temps positiu com negatiu. \square

2.4 Corbes sella-node pròximes a les corbes homoclíniques

Hem vist a la secció 2.3 que, a la zona del pla (μ, β) limitada per les rectes $\beta = 0$ i $\mu = 0.6$, i per l'arc d'hipèrbola $\beta(1 + 0.72\mu) = 5\mu + \mu^2$ ($0 < \mu < 0.6$), existeixen una quantitat infinita de corbes tals que, per cada tria de valors dels parámetros sobre qualsevol d'elles, el sistema (2.3) té alguna  orbital homoclínica al punt d'equilibri P_+ . Les anomenarem *corbes homoclíniques*. Fixem ara un d'aquests valors (μ, β) , i recordem que P_+ és del tipus sella-focus i que els valors propis de $DF_+(P_+)$ són

$-\frac{1}{\mu}$ i $a \pm ib$, amb $a = 0.36$ i $a^2 + b^2 = 1$; o sigui, el valor propi real té mòdul més gran que la part real dels valors propis complexos.

Això significa que estem en les hipòtesis de l'anomenat *teorema de Silnikov* ([50]). Per tant, podem afirmar que existeixen una infinitat de horseshoes de Smale per a l'aplicació de Poincaré definida en un entorn de l'òrbita homoclínica. En particular, coexisteixen una quantitat infinita d'òrbites periòdiques. Encara més, si pertorbem el sistema (variem μ i β lleugerament, de manera que sortim de la corba) llavors es conserva una quantitat finita de horseshoes ([60]). En conseqüència, en un entorn de la corba homoclínica hi haurà una gran quantitat de bifurcacions d'òrbites periòdiques. A més, com que tenim dos paràmetres, les bifurcacions de codimensió 1 (per exemple, les de tipus sella-node) formen corbes; i podem esperar que existeixin valors discrets de (μ, β) per als quals les bifurcacions són de codimensió 2.

En aquesta secció estudiarem alguns aspectes de la complexa estructura de les corbes de bifurcació sella-node (les anomenarem *corbes sella-node*) del sistema (2.3) en la proximitat de les corbes homoclíniques. Convé recordar alguns resultats obtinguts numèricament per Carcasses i Mira. A [10] i [11], s'hi mostren algunes corbes sella-node (i les seves flips associades) de períodes 1, 2 i 4, d'una aplicació de Poincaré associada al flux. En algunes de les corbes sella-node s'identifiquen punts cuspidals, els quals són classificats depenent de quin sigui el comportament de les corbes de bifurcació flip associades (de manera semblen a la que es pot trobar a [12]). A les diverses zones on hi ha una forta concentració de corbes, s'hi fan ampliacions. Això permet trobar, visualment, diverses seqüències de corbes que semblen acumular-se geomètricament. Totes aquestes corbes estan situades en la proximitat de les corbes homoclíniques que nosaltres hem calculat a la secció anterior, i això fa pensar, en la línia del comentari fet en el paràgraf anterior, que aquestes són les hipotètiques corbes límit.

Nosaltres estem interessats especialment en el cas anomenat "cascade isoordinal alternée de zones échangeur", del qual s'en dóna un exemple mitjançant corbes de bifurcació sella-node de període 2. Cadascuna d'aquestes corbes té dos punts cuspidals, els quals semblen acumular-se cap a un punt d'una corba homoclínica a la segona. Per problemes d'instabilitat numèrica (ja que les corbes s'acumulen geomètricament amb un factor pròxim a 10 i, a més, hi ha moltes altres corbes en

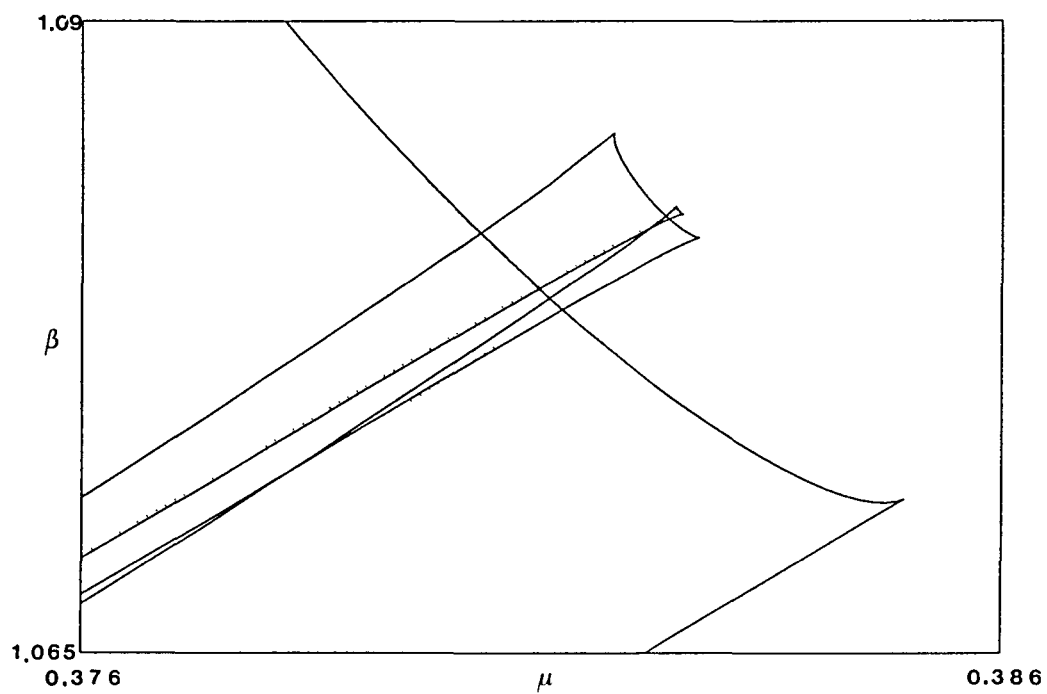
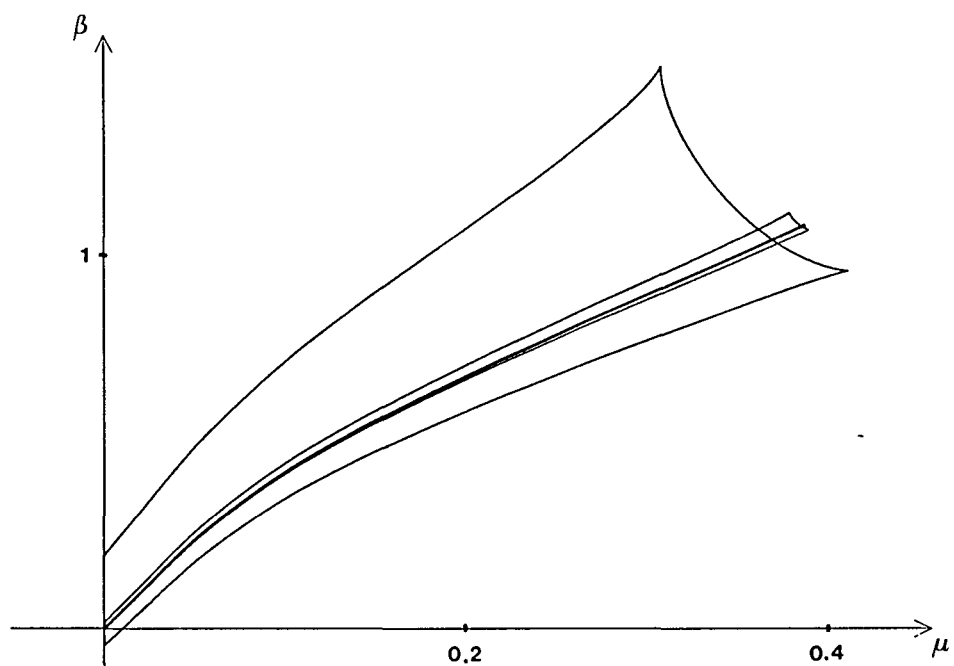


Figura 2.12: A dalt: corbes sella-node de període 2 al pla (μ, β) . A baix: ampliació de la zona amb punts cuspidals.

corba	μ	β	y_0	z_0
1	0.305595...	1.519311...	3.480669...	-0.701243...
1	0.406772...	0.960085...	3.400000...	-0.622713...
2	0.374304...	1.118725...	3.506408...	-0.632519...
2	0.384952...	1.071068...	3.492769...	-0.625869...
3	0.381816...	1.085541...	3.499149...	-0.627458...
3	0.382747...	1.081384...	3.497264...	-0.627059...
4	0.382573...	1.082319...	3.498015...	-0.627079...
4	0.382500...	1.082640...	3.498219...	-0.627075...

Taula 2.5: Punts cuspidals corresponents a òrbites de període 2.

aquesta zona), els autors només obtenen tres corbes i, per tant, sis punts cuspidals. Nosaltres hem pogut calcular també la quarta corba d'aquesta successió i també té dos punts cuspidals (més endavant donarem una idea del mètode de càlcul i de les dificultats numèriques que es tenen). La figura 2.12 mostra, a la part superior, les quatre corbes (a causa del fort factor de compressió, només s'en veuen tres), mentre que la inferior és una ampliació de tres d'aquestes corbes en la proximitat dels punts cuspidals (també s'hi han inclòs punts esparsos situats a l'OH-2 a la qual s'acumulen les corbes periòdiques). Observem, però, que l'aspecte qualitatiu de la quarta corba ha sofert un canvi substancial: a la part més llunyana de l'eix $\mu = 0$ (que és la zona on hi ha els punts cuspidals) té forma de "cua de peix". Si pensem que aquestes corbes són, realment, la projecció sobre el pla (μ, β) de corbes situades en espais de dimensió superior, podem pensar que la cinquena corba (malauradament, no l'hem poguda calcular) ja ha "girat" suficientment, de manera que la seva projecció ja no presenta cap cusp.

Per a sortir de dubtes, sembla necessari fer una anàlisi de les corbes sella-node a l'entorn de la corba homoclínica. Més concretament, ¿quines condicions ha de verificar l'eventual punt límit (situat sobre la corba homoclínica) de la hipotètica successió de cusps? Tornarem a aquesta qüestió tot seguit, quan refem els càlculs per a període 1. De moment, remarquem l'evidència numèrica d'acumulació geomètrica: la taula 2.5 dóna valors aproximats dels 8 punts cuspidals que hem calculat.

Nota. Pels resultats de les seccions 2.2 i 2.3, és fàcil saber a quina corba homoclínica està associada una determinada corba sella-node. En el cas de període 2, per exemple, la corba periòdica té quatre índexs, corresponents a les vegades que l'òrbita, a l'espai (x, y, z) , gira, successivament, a l'entorn de les varietats estables de P_+ i P_- . La corba homoclínica associada té els seus tres índexs iguals als tres primers de la corba periòdica; com més elevat sigui el quart índex, més pròxima és la corba periòdica a l'homoclínica.

Hem vist, doncs, que a causa de les dificultats numèriques, no podem calcular gaire corbes sella-node en el cas de període 2. Per això hem repetit els càlculs en el cas de període 1 i per a la zona pròxima a la corba homoclínica més gran, ja que aquest cas permet calcular una quantitat més gran de corbes. Expliquem més detalls del procés en aquest cas, així com els resultats obtinguts.

- Usant les idees exposades a la proposició 2.2.4, podem calcular valors de β per als quals l'aplicació de Poincaré degenerada ($\mu = 0$) té un punt fix superestable. Recordem que la proposició ens donava tots els valors possibles, sense deixar-nos-en cap. Notem aquests valors mitjançant $\beta_{k,j}^0$ i recordem que k i j tenen relació amb les vegades que l'òrbita degenerada talla les rectes $\{x = +1, z = +1\}$ o $\{x = -1, z = -1\}$, respectivament.
- Seguidament, usem continuació respecte al valor propi associat al punt fix de l'aplicació unidimensional fins a obtenir els valors de bifurcació sella-node, que notarem $\beta_{k,j}$. Al mateix temps, també obtenim els valors corresponents de la variable y , que notarem $y_{k,j}$.
- Considerem ara l'aplicació de Poincaré bidimensional associada al sistema no degenerat, amb secció situada al pla $x + z = 0$, en la proximitat de la recta $x = +1, z = -1$; la notarem $T_{\mu,\beta}$. A causa de la doble definició del camp, segons siguem a D_+ o D_- , aquesta aplicació és composició de dues. A més, no és possible definir-les de manera explícita a causa que el temps que passa l'òrbita en cada semispai ve determinat per una equació no resoluble explícitament. Per a trobar les bifurcacions sella-node, cal resoldre el sistema

de tres equacions

$$\begin{cases} (y, z) = T_{\mu, \beta}(y, z) \\ 1 \in \text{Espectre } DT_{\mu, \beta}(y, z) \end{cases}$$

en les quatre incògnites μ , β , y i z . Usant un mètode de continuació a partir dels valors corresponents al cas degenerat $\mu = 0$ ($\beta = \beta_{k,j}$, $y = y_{k,j}$ i $z = -1$) podem calcular les corbes solució del sistema anterior a l'espai (μ, β, y, z) . Remarquem que, en el procés d'avaluació de la funció $T_{\mu, \beta}$, cal obtenir els valors dels temps de vol als dos semispais $x + z > 0$ i $x + z < 0$, que notarem, respectivament t_0 i t_1 . Si es vol, aquestes variables, així com les equacions que les determinen, es poden considerar també en el sistema.

Aquests valors, a més, ens serveixen per a classificar les corbes, ja que tenen relació amb els índexos associats, i calcular només les que ens interessin. Així, si volem obtenir les corbes sella-node pròximes a la corba homoclínica més gran, cal recordar que aquesta es podia dibuixar al pla $(\mu, -t_1)$, (figura 2.10.a) amb valors del temps compresos entre $\tau_0 \simeq 0.21268$ i $\tau_1 \simeq 3.58005$; això correspon als valors de $\beta_{k,j}$ amb $j = 0$ i $j = 1$. Aquestes són, doncs, les úniques corbes que ens cal seguir.

Els resultats obtinguts numèricament usant el mètode que acabem de descriure en el cas de període 1 i llaçada més gran estan representats a les figures 2.13 i 2.14. Mirem la primera. En a) hem dibuixat les corbes solució senceres en el pla de paràmetres; a b) hem considerat la representació (μ, t_1) ; i a c) hem puntejat una representació espacial en (μ, β, y) . D'una banda, observem que els punts $\beta_{k,j}$ corresponents a $\mu = 0$ estan units dos a dos mitjançant alguna de les corbes de bifurcació (això és semblant a les corbes homoclíniques de la figura 2.10.b, encara que en aquests cas totes feien cap al valor $\mu = \beta = 0$). De l'altra, en aquest cas de període 1, només dues corbes (les corresponents als valors $\beta_{k,j}$ més llunyans de 0) presenten un parell de cusps (notem, de passada, que les dificultats numèriques fan que la primera corba s'aturi en la proximitat de la seva segona cusp). Els valors aproximats de (μ, β) són, amb quatre decimals, $(0.2084, 0.)$, $(0.0641, 3.0737)$, $(0.5294, 1.7637)$ i $(0.4976, 2.1603)$. A partir de la tercera, les corbes al pla de paràmetres ja semblen totalment suaus. Això es veu clarament a la figura 2.14, on hem ampliat la zona pròxima a la part més llunyana de $\mu = 0$. També hem dibuixat alguns punts

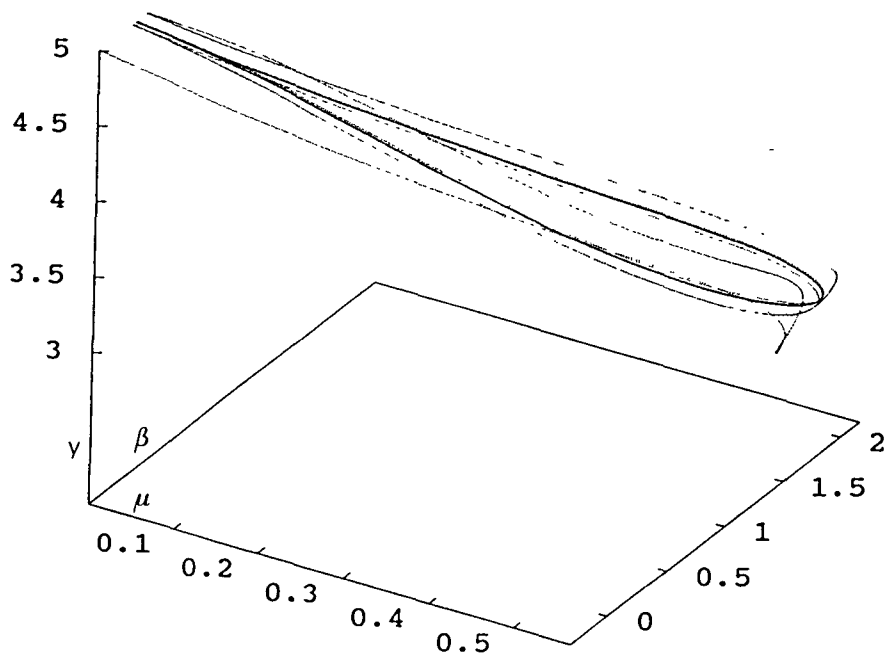
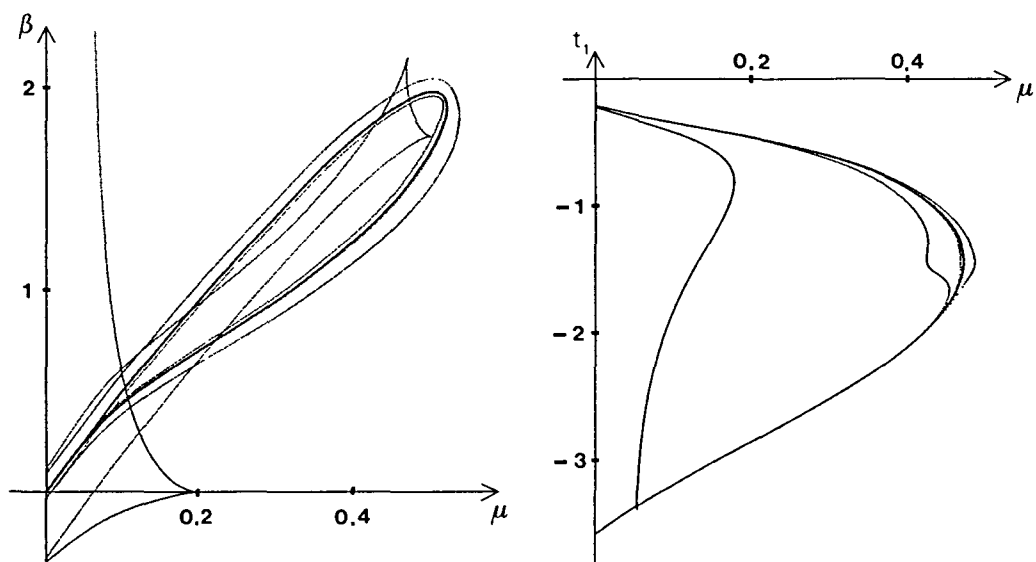


Figura 2.13: a) Corbes sella-node de període 1 al pla de paràmetres (μ, β) . b) Les mateixes corbes al pla (μ, t_1) . c) Les mateixes corbes en les variables (μ, β, y) .

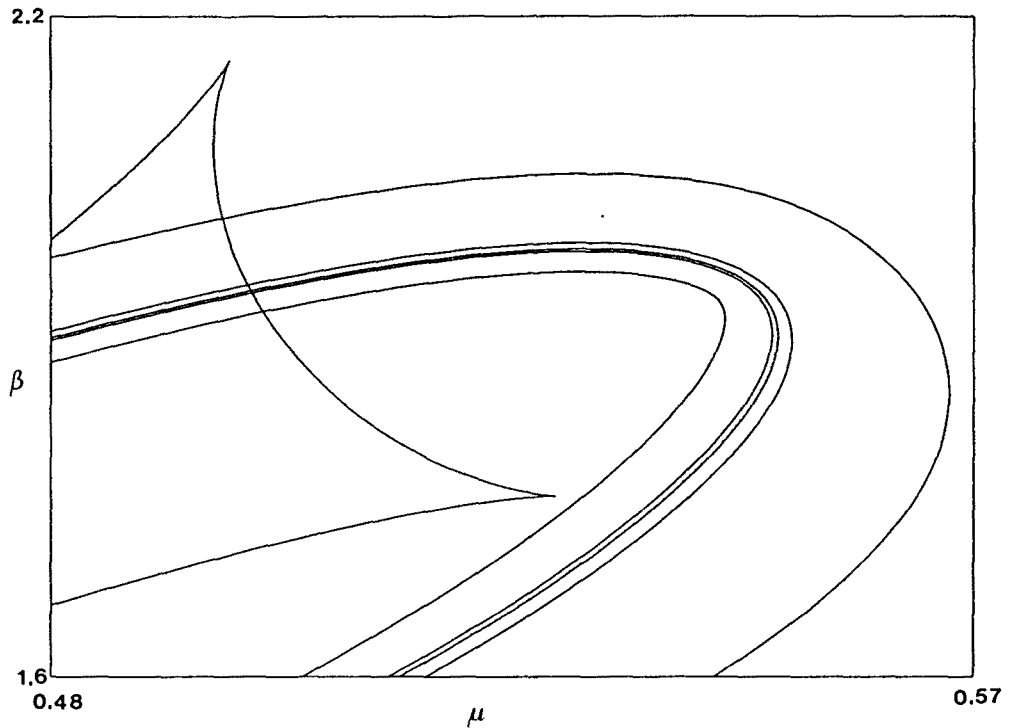


Figura 2.14: Ampliació de les corbes sella-node de període 1 que s'acumulen a una corba homoclínica.

discontinus de la corba homoclínica.

Observem que a l'espai (μ, β, y) totes les corbes són suaus, tal com mostra la figura 2.13c), on hem suprimit la primera corba perquè estava situada molt lluny de les altres. Les cusps s'observen només en la projecció sobre el pla de paràmetres (μ, β) ; al pla (μ, t_1) no s'en observa. A més, la tercera corba té encara una forma lleugerament diferent de la corba homoclínica.

Fem un últim comentari referent a la figura 2.13a). La corba homoclínica i les corbes periòdiques associades suficientment pròximes no són simètriques, en el sentit que les parts superiors són bastant rectes, mentre que les part inferior presenten una ondulació més forta. A la segona corba amb cusps, en canvi, aquesta situació és a la inversa. Dit d'una altra manera, entre la segona i la tercera corbes hi ha hagut un gir. Aquest fenomen és, precisament, el que observàvem per a període 2. Això ens permetia intuir que la cinquena corba ja hauria girat completament i, consegüentment, no tindria cusps.

Així doncs, en aquest cas de període 1, sembla evident que no existeix una successió de punts cuspidals. Això no es veu tan clar en el cas de període 2. Donem alguns detalls d'un possible estudi analític que permetés afirmar si les corbes sella-node situades suficientment a prop d'alguna corba homoclínica tenen o no punts cuspidals. Per dificultats operacionals, ens hem de restringir a òrbites homoclíniques i a òrbites periòdiques "a la primera" (això és, amb només un tram de l'òrbita en cada semispai).

Imposem, doncs, les condicions que s'han de verificar per tal que existeixi un punt fix de l'aplicació de Poincaré associada al camp (2.3). Per tal de poder comparar més bé les corbes sella-node amb les homoclíniques, integrarem els camps enrere (a temps negatiu), ja que això és el que fem en el cas homoclínic. Sigui (x_0, y_0, z_0) , $x_0 = -z_0$, un punt fix de $T_{\mu, \beta}$, situat al pla $x + z = 0$, en la proximitat de $z = -1$; i sigui (x_1, y_1, z_1) la seva imatge enrere pel flux definit pel camp F_- , també situat a $x + z = 0$, però ara, en la proximitat de $z = +1$. Per la proposició 2.1.4, cal que es verifiqui

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1^1 v_2 e^{-t_1/\mu} + e^{at_1} \left[k_2^1 (a \cos bt_1 - b \sin bt_1) + k_3^1 (b \cos bt_1 + a \sin bt_1) \right] - 5, \text{ i} \\ z_1 &= k_1^1 v_3 e^{-t_1/\mu} - 1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

on $t_1 < 0$ és el temps de vol de la solució al semispai $x + z < 0$; o sigui, ha de verificar

$$0 = k_1^1 (v_1 + v_3) e^{-t_1/\mu} + e^{at_1} (k_2^1 \cos bt_1 + k_3^1 \sin bt_1) - 2. \quad (2.21)$$

Notem que les constants d'integració k_1^1 , k_2^1 i k_3^1 (les expressions explícites de les quals són les fórmules (2.5)) depenen linealment de les condicions inicials x_0 , y_0 i z_0 . De manera totalment anàloga, integrant al semispai $x + z > 0$ i imposant que el punt sigui fix s'obtenen les condicions

$$\begin{aligned} y_0 &= k_1^0 v_2 e^{-t_0/\mu} + e^{at_0} \left[k_2^0 (a \cos bt_0 - b \sin bt_0) + k_3^0 (b \cos bt_0 + a \sin bt_0) \right] + 5, \text{ i} \\ z_0 &= k_1^0 v_3 e^{-t_0/\mu} + 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

on $t_0 < 0$ és la primera solució negativa de l'equació

$$0 = k_1^0 (v_1 + v_3) e^{-t_0/\mu} + e^{at_0} (k_2^0 \cos bt_0 + k_3^0 \sin bt_0) + 2 + 2\beta. \quad (2.23)$$

Com abans, podem expressar k_1^0 , k_2^0 i k_3^0 en funció de x_1 , y_1 , z_1 , v_1 , v_2 i v_3 (fórmules (2.4)).

Com que sabem $x_0 = -z_0$, $x_1 = -z_1$ i que v_1 , v_2 i v_3 depenen exclusivament dels paràmetres, deduïm que (2.20)-(2.23) és un conjunt de 6 equacions i 8 incògnites: t_0 , t_1 , y_0 , y_1 , z_0 , z_1 , μ i β .

Ja hem comentat abans que hem calculat numèricament punt periòdics de l'aplicació de Poincaré resolent equacions com les anteriors. Ara ens proposem tractar analíticament el sistema (2.20)-(2.23); i, per a això, començarem reduint la quantitat d'equacions i d'incògnites, ja que l'estudi posterior serà conceptualment més simple. Els càlculs que vénen a continuació són bastant elementals, però pesats (per això hem usat un manipulador algebraic). En lloc de donar senceres totes les expressions que surten en les successives transformacions de les equacions (2.20)-(2.23), preferim explicitar totes les idees amb detall però escriure només els termes més rellevants.

Suposem donats els valors de μ , β , t_0 i t_1 . Substituint les expressions de k_1^0 i k_1^1 , les segones equacions de (2.20) i (2.22) són lineals respecte z_0 i z_1 , i no depenen de y_0 i y_1 . Resolent-les obtenim

$$z_0 = z_0(t_0, t_1, \mu) = \frac{-1 + 2e^{-t_0/\mu} - e^{-t_0/\mu}e^{-t_1/\mu}}{e^{-t_0/\mu}e^{-t_1/\mu} - 1},$$

$$z_1 = z_1(t_0, t_1, \mu) = \frac{+1 - 2e^{-t_1/\mu} + e^{-t_0/\mu}e^{-t_1/\mu}}{e^{-t_0/\mu}e^{-t_1/\mu} - 1}.$$

Observem que quan t_0 tendeix a $-\infty$ (l'òrbita periòdica "tendeix" a l'homoclínica) es verifica $z_1 \rightarrow 1$.

Posant aquests valors a k_1^0 , k_1^1 , k_2^0 i k_2^1 , tenim també aquestes constants expressades en funció de μ , β , t_0 i t_1 . En canvi, substituint-los a k_3^0 i k_3^1 , aquestes constants depenen de y_0 i y_1 . Però ara, les primeres equacions de (2.20) i (2.22) són lineals respecte y_0 i y_1 , la qual cosa permet aïllar també fàcilment aquestes variables en funció de μ , β , t_0 i t_1 . Ambdues tenen expressions de la forma

$$\frac{(\alpha_{00} + \alpha_{01}e^{at_0}) + (\alpha_{10} + \alpha_{11}e^{at_0})e^{-t_0/\mu}}{(\delta_{00} + \delta_{01}e^{at_0}) + (\delta_{10} + \delta_{11}e^{at_0})e^{-t_0/\mu}},$$

on els coeficients α_{ij} i δ_{ij} depenen de

- constants,
- els paràmetres μ i β (de fet, els numeradors linealment de β , mentre que els denominadors no hi depenen),

- funcions trigonomètiques $\cos bt_0$, $\sin bt_0$, $\cos bt_1$ i $\sin bt_1$,
- funcions exponencials e^{at_1} i $e^{-t_1/\mu}$.

El denominador és el mateix per a y_0 i y_1 . Suficientment a prop de l'òrbita homoclínica, $-t_0$ és gran, i el valor corresponent de la variable y és, aproximadament, α_{10}/δ_{10} . Remarquem només que $\delta_{10} = -b^2 v_3 e^{-t_1/\mu} \neq 0$. Això fa que les expressions de y_0 i y_1 no presentin cap problema de regularitat per a valor prou negatiu de t_0 .

Una vegada coneguts y_0 i y_1 , ja podem trobar explícitament k_3^0 i k_3^1 ; i, substituint tot això a (2.21) i (2.23), el sistema anterior queda reduït a un de 2 equacions amb 4 incògnites: μ , β , t_0 i t_1 . Els seus denominadors són el mateix i coincideix amb el de les expressions anteriors de y_0 i y_1 , mentre que els numeradors tenen, respectivament, l'estructura següent:

$$(\rho_{00} + \rho_{01}e^{at_0}) + (\rho_{10} + \rho_{11}e^{at_0})e^{-t_0/\mu} \text{ i}$$

$$(\tau_{00} + \tau_{01}e^{at_0} + \tau_{02}e^{2at_0}) + (\tau_{10} + \tau_{11}e^{at_0} + \tau_{12}e^{2at_0})e^{-t_0/\mu} ,$$

on els coeficients ρ_{ij} i τ_{ij} verifiquen les mateixes condicions d'abans. La diferència entre les equacions és causada pel fet que no donem el mateix tractament a t_0 que a t_1 : prendrem valors de t_0 tan negatius com convingui, mentre que t_1 no variarà gaire. Per això ens interessa destacar les exponencials en la variable t_0 . De fet, les dues equacions tenen una estructura anàloga si intercanviem t_0 i t_1 , ja que als coeficients de la primera equació apareix el terme e^{2at_1} , mentre que als de la segona només apareix e^{at_1} .

En particular, el denominador de les dues equacions no depèn del paràmetre β , mentre que els numeradors hi depenen linealment, a causa que aquest paràmetre apareix d'aquesta manera en el camp i en les expressions de v_1 i v_2 (això ja ens passava quan calculàvem òrbites homoclíniques a la primera). De cara al seu ús en les transformacions que vénen a continuació, descomposarem

$$v_1 \equiv v_{10} + v_{11}\beta \text{ , i}$$

$$v_2 \equiv v_{20} + v_{21}\beta \text{ ;}$$

o sigui, $v_{10} = 1 + \frac{5}{\mu}$, $v_{11} = 1$, $v_{20} = 5 + \frac{2\delta}{\mu}$ i $v_{21} = -\frac{1}{\mu}$.

És fàcil, doncs, eliminar β entre les dues equacions. Així, si aïllem aquesta variable del numerador de la segona equació, obtenim

$$\beta = \beta(t_0, t_1, \mu) = \frac{(\lambda_{00} + \lambda_{01}e^{at_0} + \lambda_{02}e^{2at_0}) + (\lambda_{10} + \lambda_{11}e^{at_0} + \lambda_{12}e^{2at_0})e^{-t_0/\mu}}{(\sigma_{00} + \sigma_{01}e^{at_0} + \sigma_{02}e^{2at_0}) + (\sigma_{10} + \sigma_{11}e^{at_0} + \sigma_{12}e^{2at_0})e^{-t_0/\mu}}$$

amb les observacions ja conegudes per als coeficients λ_{ij} i σ_{ij} . Més concretament, els termes dominants del numerador i del denominador, quan $-t_0$ és gran, s'expressen

- $\lambda_{10} = -b^2 [v_{10} (e^{-t_1/\mu} - 1) - v_3]$, i
- $\sigma_{10} = -b^2 [(v_3 - 1)e^{-t_1/\mu} + 1]$.

En particular, remarquem que $\sigma_{10} \neq 0$ i, consegüentment, el denominador de β no s'anul·la si $-t_0$ és prou gran.

Substituint aquesta expressió de β al numerador de la primera equació hem reduït el sistema d'equacions inicials a una sola equació amb tres variables: μ , t_0 i t_1 ; la qual té l'estructura següent:

- el denominador és el mateix que el de l'expressió de β ,
- el numerador s'expressa

$$\begin{aligned} & (\gamma_{00} + \gamma_{01}e^{at_0} + \gamma_{02}e^{2at_0} + \gamma_{03}e^{3at_0}) + \\ & (\gamma_{10} + \gamma_{11}e^{at_0} + \gamma_{12}e^{2at_0} + \gamma_{13}e^{3at_0})e^{-t_0/\mu} + \\ & (\gamma_{20} + \gamma_{21}e^{at_0} + \gamma_{22}e^{2at_0} + \gamma_{23}e^{3at_0})e^{-2t_0/\mu}. \end{aligned}$$

En la proximitat de la corba homoclínica, només cal considerar el numerador. El terme principal (quan $-t_0$ és gran) és γ_{20} , seguit de $\gamma_{21}e^{at_0}$. Les seves expressions són:

$$\begin{aligned} \gamma_{20} = & 2b^3v_3 \left\{ (-1 + v_{10}e^{-t_1/\mu})(b - v_{21} \sin bt_1) + \right. \\ & \left. + e^{at_1} [(v_{10} + v_3 - 2) - (v_3 - 1)e^{-t_1/\mu}] (a \sin bt_1 - b \cos bt_1) \right\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{21} = -2bv_3e^{-t_1/\mu} \left\{ b^2e^{-t_1/\mu}(v_{10} - 1)(b \cos bt_0 - a \sin bt_0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +be^{at_1} \{ \\
& ab \left[(2v_{10} - v_3)e^{-t_1/\mu} + (v_{10} + v_3 - 3) \right] (\sin bt_0 \cos bt_1 + \cos bt_0 \sin bt_1) \\
& b^2 \left[(2v_{10} + v_3)e^{-t_1/\mu} - (v_{10} + v_3 + 1) \right] (\cos bt_0 \cos bt_1 - \sin bt_0 \sin bt_1) \\
& - (e^{-t_1/\mu} - 1)bv_{21} \sin bt_0 \cos bt_1 \\
& + (e^{-t_1/\mu}v_{10} - 1) \sin bt_0 \sin bt_1 \\
& - [e^{-t_1/\mu}(2v_{10} - 1) - 1] \cos bt_0 \sin bt_1 \} \\
& +be^{2at_1} \{ \\
& [(v_{10} + v_3 - 2) - (v_3 - 1)e^{-t_1/\mu}](\sin^2 bt_1 - 2b^2)(b \cos bt_0 + a \sin bt_0) \\
& - (e^{-t_1/\mu}v_{10} - 1)v_{21} \sin bt_1(b \cos bt_0 + a \sin bt_0)(b \cos bt_1 + a \sin bt_1) \\
& + (e^{-t_1/\mu} - 1)v_{21}b^2 \sin bt_0 \} \\
& \}
\end{aligned}$$

Hem obtingut, doncs, una única equació $F(t_0, t_1, \mu) = 0$. Treballant només amb els termes dominants i usant mètodes pertorbatius entorn d'un punt qualsevol situat sobre la corba homoclínica, sembla factible estudiar si les corbes corresponents a zeros dobles

$$\begin{aligned}
F(t_0, t_1, \mu) &= 0, \\
\frac{\partial F}{\partial t_0}(t_0, t_1, \mu) &= 0,
\end{aligned}$$

tenen punts cuspidals.

Tot seguit, fem un comentari referent a la relació entre òrbites homoclíniques i periòdiques, el qual, a més, ens servirà de comprovació parcial dels càlculs precedents. Si pensem en l'aspecte geomètric de les òrbites homoclíniques i periòdiques "a la primera", és evident que una òrbita homoclínica es pot pensar com una òrbita periòdica de període infinit; més precisament, és el temps superior $|t_0|$ el que val infinit. Això és, si prenem valors de μ , β i $t_1 = \tau$ que verifiquin les condicions (2.13) i (2.15) d'existència d'òrbita homoclínica a la primera a P_+ i fem $t_0 \rightarrow -\infty$, s'hauria de verificar l'equació anterior. Per tal de comprovar això, tornem a calcular les condicions d'òrbita homoclínica trobades a la secció 2.3, però usant la notació actual. Posem (x_0, y_0, z_0) per a indicar el punt on la varietat estable de P_+ talla per primera vegada el pla $x + z = 0$, considerem el flux enrere definit pel camp F_- a partir del punt anterior, i sigui (x_1, y_1, z_1) el punt de la recta $x = -1, z = +1$ on

l'òrbita homoclínica torna a tallar $x + z = 0$. El temps de vol a $x + z < 0$, $t_1 < 0$, ve determinat per la condició $z_1 = +1$, o sigui verifica l'equació

$$(v_1 - \beta v_3)e^{-t_1/\mu} = v_1 + v_3, \quad (2.24)$$

i la condició $x_1 + z_1 = 0$ s'expressa

$$0 = 2b(v_1 - \beta v_3)e^{-t_1/\mu} - bv_3 + \quad (2.25)$$

$$+ 2e^{at_1} \{ [v_1 - (1 + \beta)v_3] (a \sin bt_1 - b \cos bt_1) + (5v_3 - v_2) \sin bt_1 \} .$$

Recordem que v_1 i v_2 també depenen de β . En qualsevol cas, de l'equació (2.25) podem aïllar

$$\beta = \frac{v_{10}(e^{-t_1/\mu} - 1) - v_3}{(v_3 - 1)e^{-t_1/\mu} + 1};$$

i aquest valor és precisament igual a λ_{10}/σ_{10} . Així doncs, quan $t_0 \rightarrow -\infty$, el valor de β corresponent a l'existència del punt fix tendeix al valor de la corba homoclínica.

Substituint aquesta expressió a (2.26) obtenim la condició que han de verificar μ i $t_1 (< 0)$ per tal que existeixi una OH-1:

$$0 = H(t_1, \mu) \equiv 2b(-1 + v_{10}e^{-t_1/\mu}) +$$

$$+ 2e^{at_1} \left\{ [(v_{10} + v_3 - 2) - (v_3 - 1)e^{-t_1/\mu}] (a \sin bt_1 - b \cos bt_1) \right.$$

$$\left. + v_{21}(1 - v_{10}e^{-t_1/\mu}) \sin bt_1 \right\};$$

i es dóna la circumstància que el coeficient dominant de l'equació única es pot escriure

$$\gamma_{20} = b^3 v_3 e^{-t_1/\mu} H(t_1, \mu).$$

Per tant, comprovem efectivament la relació existent entre òrbites homoclíniques i òrbites periòdiques amb $t_0 \rightarrow -\infty$.

Tornant a l'equació única, cal remarcar que el seu estudi no ens permetria afirmar si les corbes sella-node al pla de paràmetres (μ, β) tenen o no cusps, ja que hem eliminat la variable β . Hem de fer un pas enrere i quedar-nos amb les dues equacions anteriors a l'eliminació. A més, cal afegir-hi la condició de sella-node: 1 ha de ser un valor propi de la diferencial de l'aplicació de Poincaré en el punt fix. Uns càlculs anàlegs als que hem fet per a les dues equacions permeten escriure també aquesta equació en les variables que ens queden. Això ens dóna

tres equacions en 4 variables (μ, β, t_0, t_1) . Idealment, caldria eliminar t_0 i t_1 per a obtenir una única equació que determina les corbes sella-node: $S(\mu, \beta) = 0$; i estudiar si, arbitràriament a prop de la corba homoclínica, poden existir punts cuspidals.

Malauradament, l'eliminació anterior no és possible portar-la a la pràctica i, en conseqüència, es fa obligat conservar les tres equacions. Una condició suficient per a concloure que la quantitat de cusps és finita és que, en un punt solució de les tres equacions, el vector tangent a la corba sella-node corresponent no té nul·les simultàniament les components μ i β . Caldria treballar, doncs, amb dues equacions més.

Les dificultats per a portar a terme l'estudi que hem esmentat semblen força considerables, però l'evidència numèrica de les figures ens porta a creure que l'acumulació de cusps, si més no en el cas de període 1, no es produeix.