UNIVERSITAT DE BARCELONA

Mesura del trencament de separatrius en famílies de difeomorfismes amb punts hiperbòlics

Ernest Fontich Julià

MESURA DEL TRENCAMENT DE SEPARATRIUS EN FAMILIES DE DIFEOMORFISMES AMB PUNTS HIPERBÒLICS

Memòria presentada per
Ernest Fontich i Julià
per aspirar al grau de
Doctor en Matemàtiques
(per la Universitat de
Barcelona)

Carles Simó i Torres,

Catedràtic d'Anàlisi Numèrica de la

Facultat de Matemàtiques de la

Universitat de Barcelona,

CERTIFICA

Que la present memòria ha estat realitzada sota la seva direcció per Ernest Fontich i Julià, i que constitueix la seva tesi per aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques

Barcelona, a 5 de setembre de 1985

A la Teresa

Als meus pares

INDEX

CAPITOL 1

INTRODUCCIO

Introducció

Comencem donant unes definicions relatives a difeomorfismes i fluxos que s'usaran contínuament al llarg d'aquest treball

Sigui F un difeomorfisme d'un obert de $\mathbb{R}^n$ en la seva imatge

Definició

Diem que p és un punt fix hiperbòlic de F si F(p)=p i DF(p) representa una matriu hiperbòlica, és a dir, una matriu que té tots els seus valors propis amb mòdul diferent de 1

Per a tot punt fix hiperbòlic, p, hi ha dues varietats de dimensions adequades dites varietat invariant estable i varietat invariant inestable, notades habitualment per $W^s(p)$ i $W^u(p)$, tals que si un punt pertany a $W^s(p)$, els iterats positius d'ell per F, tendeixen al punt fix i si pertany a $W^u(p)$ hi tendeixen els iterats negatius

Les varietats invariants són una de les eines més importants en l'estudi dels sistemes dinàmics La seva existència es pot provar per diversos mètodes (16,18,28,31,32 43)

Donem l'enunciat precís pel cas d'un difeomorfisme diferenciable

Teorema 1 2

Sigui F un difeomorfisme d'un obert A de $\mathbb{R}^n$ en la seva imatge, de classe C^r amb un punt fix hiperbòlic p

Siguin E_1 i E_2 els subespais vectorials generats pels vectors propis de DF(p) de valor propi amb mòdul més gran i més petit que 1 respectivament

Llavors

1) $W^s(p)=\{x \in A \lim_{n\to\infty} F^n(x)=p\}$

2) Existeix un entorn V de p tal que, localment,

$$W^s(p)=\{x \in A,\ F^n(x) \in V, n \geqslant 0\}$$

3) $W^s(p)$ és una varietat diferenciable ae classe C^r tal que el seu espai tangent en p és E_1

4) $W^u(p)=\{x \in F(A), \lim_{n\to\infty} F^{-n}(x)=p\}$

5) Existeix un entorn U de p tal que, localment,

$$W^u(p)=\{x \in F(A),\ F^{-n}(x) \in U, n \geqslant 0\}$$

6) $W^u(p)$ és una varietat diferenciable de classe C^r tal que el seu espai tangent en p és E_2

De 1) i 4) es dedueix immediatament que $W^s(p)$ i $W^u(p)$ són objectes invariants en el sentit que si un punt pertany a ells, les seves imatges per F i F^{-1} també hi pertanyen

El teorema també és vàlid per a difeomorfismes analítics (28) i en espais de Banach (18,31,32,43)

També existeix un teorema de la varietat invariant per a conjunts invariants més generals que els punts fixos, els anomenats conjunts hiperbòlics (18,19)

Definició 1 3

Donats dos punts hiperbòlics p_1 i p_2 i $q \in W^s(p_1) \cap W^u(p_2)$, es diu que q és homoclínic si $p_1=p_2$ i $q \neq p_1$, i es diu que q és heteroclínic si $p_1 \neq p_2$

Si q és un punt homoclínic d'un difeomorfisme F, llavors $F^k(q), k \in Z$, també són punts homoclínics per la invariància de $W^s(p)$ i $W^u(p)$ Així l'existència d'un punt homoclínic dóna lloc a l'existència d'una família de punts homoclínics

En general pot haver-hi diverses famílies de punts homoclínics Si el difeomorfisme està definit en un subconjunt del pla, conserva orientació i té una família de punts homoclínics, forçosament n'ha de tenir una altra

Tot això val també per a punts heteroclínics

Definició 1 4

Es diu que un punt homoclínic és transversal si la suma dels espais tangents a W^s i W^u en el punt homoclínic és l'espai total

Les definicions i resultats descrits s'apliquen a punts q-periòdics considerant F^q en comptes de F En aquest cas les interseccions de varietats invariants de punts de la mateixa òrbita periòdica també es diuen punts homoclínics

Definició 1 5

Un difeomorfisme F definit en un obert A de $\mathbb{R}^2$ és integrable si existeix una funció G, no constant, definida en A, tal que G(F(x))=F(x) per a tot x de A

La funció G, quan existeix, rep el nom d'integral primera

Aquest concepte d'integrabilitat depèn de la regularitat que exigim a la funció G En general exigim la mateixa que la que té F

Pel cas analític, en el pla, hi ha el seguent resultat

Teorema 1 6 (30)

Sigui F $A\subset R^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfisme analític amb un punt fix hiperbòlic i un punt homoclínic transversal Llavors F no té integral primera analítica

Considerem ara un camp donat per x=f(x)

Definició 1 7

Es diu que p és un punt singular hiperbòlic si f(p)=0 i tot els valors propis de Df(0) tenen part real diferent de zero

Associat a un punt singular hiperbòlic també existeixen varietats invariants

Es té un teorema completament anàleg al 1 2 canviant F pel flux solució $\varphi(t,x)$ de x=f(x), la condició dels valors propis de DF(p) per la dels de Df(p) exigint ara que tinguin part real positiva per a E_1 i part real negativa per a E_2 i els límits $\lim_{n\to\infty} F^n(x)$ i $\lim_{n\to\infty} F^{-n}(x)$ per $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x)$ i $\lim_{t\to \infty} \varphi(t,x)$

Definició 1 8

Sigui $\dot{x}=f(x)$ amb dos punts singulars hiperbòlics p_1 i p_2 φ es diu òrbita heteroclínica si $p_1 \neq p_2$ i $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)=p_1$ i $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)=p_2$ Si $p_1=p_2$ i $\varphi(t)\neq p_1$, es diu òrbita homoclínica

En el cas dos dimensional, les òrbites homoclíniques i heteroclíniques també es diuen separatrius

Definició 1 9

Si γ és una òrbita periòdica, de període T, de $\dot{x}=f(x)$, es diu que és hiperbòlica si els valors propis de

$$\int_0^T Df(\gamma(t))dt \quad \text{tenen mòdul diferent de 1}$$

També existeixen varietats invariants per a òrbites periòdiques (21,41)

En aquest cas parlarem d'òrbites homoclíniques referint-nos a òrbites que, sense ser l'òrbita periòdica, tendeixen a ella per a t tendint a ∞ i per a t tendint a $-\infty$
Anàlogament per a les òrbites heteroclíniques

Situem-nos en el cas d'un difeomorfisme en el pla L'existència d'una família de punts homoclínics transversals dóna lloc, en una regió propera a les varietats invariants , a una dinàmica altament impredictible, adjectivada en la literatura com caòtica, estocàstica, etc, que s'explica pel fet que es pot introduir el shift de Bernouilli com subsistema (42) del sistema considerat L'amplada d'aquesta zona d'estocasticitat on la dinàmica apareix com aleatòria (encara que no ho és, perquè el sistema és determinista) està relacionada amb la separació entre les varietats invariants estable i inestable, essent menor quan aquesta separació és menor (8) Pot haver-hi diverses zones d'estocasticitat, associades a diferents punts homoclínics (corresponents a altres punts fixos o periòdics) Això fa que sigui interessant tenir fites superiors de la separació entre les varietats invariants

En aquest treball donarem fites superiors d'aquesta separació per a famílies de difeomorfismes del pla que depenen d'un paràmetre, que tenen un punt homoclínic per a tot valor del paràmetre, i que, bàsicament, compleixen que els difeomorfismes són pròxims a la identitat i que els valors propis de la seva diferencial en el punt fix tendeixen a 1 ,quan el paràmetre tendeix a un cert valor (que normalment suposarem que és zero)

Les suposicions que fem no ens restringeixen a casos molt particulars Una família de difeomorfismes amb un punt fix, es pot posar en general, prop dels valors (del paràmetre) pels quals el punt fix és parabòlic, en la forma descrita a través de canvis lineals i escalats

Essencialment obtenim que les fites són de l'ordre d'una potència del paràmetre que depèn de la classe de diferenciabilitat de F Si F és de classe C^∞ la fita és de l'ordre de qualsevol potència del paràmetre

Si F és analític la fita és exponencialment petita respecte del paràmetre

Aquesta situació apareix quan s'estudia el comportament d'un difeomorfisme conservatiu al voltant d'un punt fix el líptic (45) Usant una forma normal quasi ressonant (4,11) es detecten els punts periòdics, el líptics i hiperbòlics, que dóna el teorema de Poincaré-Birkhoff (5)

Si suposem que els valors propis de DF en el punt fix són $\exp(i(2\pi p/q+d))$ amb d petit, es detecten punts q periòdics i els valors propis de DF^q en aquests punts són del tipus $1+O(d^{q/4})$ Si d és prou petit F^q és una pertorbació d'un flux temps $d^{q/4}$ d'un sistema hamiltonià amb un grau de llibertat que té òrbites homoclíniques

Genèricament les òrbites homoclíniques es trenquen per efecte de la pertorbació, però el fet que F sigui conservatiu fa que les varietats invariants es tallin i hi hagi punts homoclínics

També apareix aquesta situació en aplicacions de Poincaré de sistemes hamiltonians amb dos graus de llibertat Vegeu (25) per al sistema de Hénon-Heiles Per a exemples en el problema restringit de tres cossos vegeu (6 12,24)

El cas anàleg per a fluxos és el d'un sistema conservatiu de dos graus de llibertat que depèn d'un petit paràmetre que té un punt singular hiperbòlic i una separatriu (òrbita homoclínica) associada a ell, de manera que la dinàmica sobre la separatriu és lenta (de l'ordre de ε^k), els valors propis, en la singularitat són del tipus $1+O(\varepsilon^k)$, i està pertorbat per una funció d'ordre de ε^{k+1}

En sistemes de més de dos graus de llibertat la separació entre les varietats invariants està relacionada amb la velocitat de difusió (2,5)

Per una altra banda existeix una conjectura relacionada amb aquesta situació deguda a Simó que enunciem pel cas de difeomorfismes (existeix una versió anàloga per a fluxos conservatius) (37,38 40)

Conjectura

Sigui F_ε una família de difeomorfismes del pla analítics, conservatius, depenent analíticament de ε amb un punt fix hiperbòlic i una família de punts homoclínics associats a ell, la posició d' un dels quals depèn analíticament de ε Suposem que els valors propis de DF_ε en el punt fix són del tipus $1+O(\varepsilon^k)$ i el moviment sobre les varietats invariants és $O(\varepsilon^k)$, llavors l'angle que formen les varietats invariants en un punt homoclínic (fora d'un petit entorn del punt fix) té, genèricament, un comportament asimptòtic del tipus

$$A\,\varepsilon^s R_e \exp(-B/\ln\lambda)$$

on A,B i s són constants A i s reals, $A>0$, B és complexa amb Re $B>0$ i λ és valor propi major que 1 de DF_ε

Lazutkin ha estat el primer en demostrar analíticament sobre un exemple aquest tipus de comportament (22)

L'angle que formen les varietats invariants en un punt homoclínic i la separació màxima d'aquestes en un entorn del punt homoclínic estan relacionats essencialment per una constant per ε^k

La fita que es dóna en aquest treball per a la separació entre les varietats invariants en el cas que tracta la conjectura, és molt semblant al comportament asimptòtic predit i a més dóna la constant B (la seva part real) més precisament, es té que per a $\eta > 0$ existeixen $\varepsilon_0 > 0$ i $N > 0$, tals que la separació és menor que

$$N \exp(-2\pi(\delta-\eta)/\ln\lambda)$$

on δ és la distància a l'eix real de la singularitat més propera a aquest de l'òrbita homoclínica d'un camp que es construeix en la demostració i que és tal que el seu flux ε^k aproxima a F_ε

En els exemples veiem que es verifica el comportament asimptòtic de la conjectura amb Re $B=2\pi\delta$ cosa que prova que la fita és, en certa manera òptima, almenys pel que fa a la part exponencial

Per estimar la separació entre les varietats invariants per a fluxos hi ha, en general, el mètode de Melnikov (9,20, 27,46) , però en aquest cas no és aplicable (33) Malgrat tot, si calculem formalment la separació, ens dóna el mateix tipus de comportament

En certa manera la separació entre les varietats invariants ens dóna una mesura més o menys quantitativa de la manca d'integrabilitat En relació amb això cal assenyalar els resultats de Ziglin (47) que donen condicions suficients de no integrabilitat per a sistemes hamiltonians, basant-se en la monodromia al voltant de singularitats (complexes) del flux

Pel que fa al desenvolupament del treball, en el capítol 2 s'estudien les varietats invariants de famílies de difeomorfismes n-dimensionals en el cas diferenciable quan els valors propis de la diferencial d'aquests tendeixen a 1 Al final es dóna una aplicació per assegurar l'existència de punts homoclínics en el cas conservatiu

En el capítol 3 es donen fites de la separació entre les varietats invariants en el cas 2-dimensional i diferenciable En el capítol 4 es donen fites pel cas de fluxos del tipus $x=f(x)+\varepsilon g(x,t/\varepsilon,\varepsilon)$ amb x pertanyen a $\mathbb{R}^2$

En el capítol 5 es prova que es pot donar la forma normal de Birkhoff uniformement per a tots els difeomorfismes d'una família de les descrites en el cas analític i a partir d'aquí s'estudia el comportament de les varietats invariants locals

En el capítol 6 es globalitzen aquestes i es troba la fita per a la separació en el cas analític També es fan algunes consideracions sobre la integrabilitat de difeomorfismes analítics i el fet que la integrabilitat és un fenomen de codimensió infinita Finalment el capítol 7 recull un parell d'exemples per il lustrar els mètodes descrits

Àdhuc cada capítol porta una introducció que descriu el seu contingut detalladament

Aprofito l'avinentesa per expressar el meu profund agraïment al Doctor Carles Simó pel mestratge que he rebut d'ell des de molt abans de començar aquest treball, i per les idees i suggeriments que m'ha donat per a la realització del mateix Haig d'esmentar la meva dona Teresa per l'ajut que m'ha donat en tot moment i per la seva col laboració en la sempre enutjosa tasca de mecanografiat

CAPÍTOL 2

COMPORTAMENT DE LES VARIETATS INVARIANTS

2 1 Introducció

En aquest capítol estudiarem per a famílies de difeomorfismes amb un punt fix hiperbòlic (que suposarem l'origen) el comportament de les varietats invariants d'aquest en el cas que els valors propis de la diferencial dels difeomorfismes tendeixen a 1 quan el paràmetre tendeix a zero i que la família de difeomorfismes és propera, en un cert sentit, al flux temps una certa potència del paràmetre d'un camp autònom

Provarem que si els difeomorfismes són de classe C^{r+1}, les varietats invariants i totes les seves derivades fins a ordre r tendeixen a les varietats invariants del camp autònom i a les seves derivades,respectivament,quan el paràmetre tendeix a zero Més precisament, donat un punt d'una varietat invariant del camp, no necessàriament en un petit entorn del punt hiperbòlic, sigui g una funció tal que la seva gràfica ens doni, localment a l'entorn d'aquest punt, aquesta varietat invariant, llavors provarem que per a valors del paràmetre prou petits la corresponent varietat invariant dels difeomorfismes de la família,es pot posar com a gràfica d'una funció del mateix tipus (que depèn del paràmetre) i que aquesta funció i totes les seves derivades fins a ordre r tendeixen a g i a les seves corresponents derivades quan el paràmetre tendeix a zero

La principal dificultat rau en el fet que els valors propis en el punt hiperbòlic tendeixen a 1, cosa que, en principi, no permet controlar uniformement les varietats invariants Aquesta dificultat es compensa, en part, per la hipòtesi que els difeomorfismes siguin, en el sentit que es precisarà, propers a la identitat, i en part per fet que la família de difeomorfismes associats al flux temps una potència del paràmetre d'un cert camp és propera i que les seves varietats invariants no depenen del paràmetre

En l'apartat 2 2, la proposició 2 1 és, de fet, un lema per als teoremes 2 4 i 2 5

La proposició 2 2 i el corol lari 2 3 ens donen les relacions entre el flux temps ε^{α} d'un camp autònom $\dot{x}=f(x)$ i les famílies de difeomorfismes

$$F_{\varepsilon}(x)=x+\varepsilon^{\alpha}f(x),$$

$$F_{\varepsilon}(x)=x+\varepsilon^{\alpha}f(x)+\varepsilon^{\alpha+\beta}g\ (x,\varepsilon),$$

relacions que es necessiten en els capítols seguents i que serveixen per, donada una família de difeomorfismes de les esmentades, trobar un camp tal que el seu flux temps ε^{α} l'aproximi

En l'apartat 2 3, els teoremes 2 4 i 2 5 són el resultat principal del capítol i proven la proximitat entre les varietats invariants descrita més amunt

Finalment el darrer apartat dóna una primera aplicació d'aquest teorema que assegura l'existència de punts homoclínics per a famílies de difeomorfismes conservatius complint certes hipòtesis

En aquest capítol, si F és una aplicació suficientment diferenciable, $|D^kF|$ representa $|D^kF| = \sup_{x\in U} |D^kF(x)|$, on U és el domini considerat per a F i $|D^k F(x)|$ és la norma de $D^k F(x)$ com a aplicació multilineal

Mentre no es digui el contrari, en l'espai $\mathbb{R}^n$ es considera una norma qualsevol, per exemple l'euclidiana Com és usual, admetem el conveni $D^0 F=F$ i per tant $|F|= \sup_{x\in U} |F(x)|$

2 2 Proximitat de difeomorfismes

La seguent proposició només serà usada en $\mathbb{R}^n$, però l'enunciem en espais de Banach perquè la demostració no és més difícil en espais de Banach que en $\mathbb{R}^n$

Proposició 2 1

Siguin F_ε , G_ε dues famílies de difeomorfismes de classe C^{r+1} de $U \subset E$ en la seva imatge continguda en E' on E i E' són espais de Banach i U és un obert convex

Si

$$\text{i)} \quad |DF_\varepsilon - I|, |DG_\varepsilon - I| < C\varepsilon^\alpha,$$

$$\text{ii)} \quad |D^kF_\varepsilon|, \ |D^kG_\varepsilon| < L_k\,\varepsilon^\alpha \qquad , \ 2 \leqslant k \leqslant r+1,$$

$$\text{iii)} \quad |D^kG_\varepsilon - D^kF_\varepsilon| < M_k\,\varepsilon^{\alpha+1} \qquad , \ 0 \leqslant k \leqslant r,$$

per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, amb $\alpha > 0$,

llavors

$$1) \ |DF_\varepsilon^{-1} - I| \ , \ |DG_\varepsilon^{-1} - I| < C'\varepsilon^\alpha ,$$

$$2) \ |DF_\varepsilon^{-1} - I| \ , \ |DG_\varepsilon^{-1} - I| < L'_k\,\varepsilon^\alpha \qquad , \quad 0 \leqslant k \leqslant r+1,$$

$$3) \ |D^kG_\varepsilon^{-1} - D^kF_\varepsilon^{-1}| < M'_k\,\varepsilon^{\alpha+1} \qquad , \quad 0 \leqslant k \leqslant r,$$

en $F_\varepsilon(U) \cap G_\varepsilon(U)$ per a $0<\varepsilon<\varepsilon'_0$ on $\varepsilon'_0 = \min(\varepsilon_0, (2C)^{-1/\alpha})$

Demostració

Per comoditat d'escriptura durant la demostració no escriurem el subíndex ε corresponent a F i a G

Provem 1) Observem primer que si $\emptyset$ és lineal inversible i $|\phi - I| < 1$, de $(I+\phi-I)^{-1} \circ (I+\phi-I) = I$

deduïm que

$$(I+\phi-I)^{-1} + (I+\phi-I)^{-1} \circ (\phi-I) = I$$

d'on

$$|(I+\phi-I)^{-1}| - |(I+\phi-I)^{-1}|\ |\phi-I| \leqslant 1$$

i per tant

$$|\phi^{-1}| = |(I+\phi-I)^{-1}| \leqslant \frac{1}{1-|\phi-I|}$$

Llavors en F(U)

$$|DF^{-1}-I| = |(DF\quad F^{-1})^{-1}-I| = |(DF\quad F^{-1})^{-1}(I-DF\quad F^{-1})| \leqslant$$

$$\leqslant |(DF\quad F^{-1})^{-1}|\,|I-DF\quad F^{-1}| \leqslant \frac{1}{1-|DF\quad F^{-1}-I|}\,|I-DF\quad F^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-C\varepsilon^{\alpha}}\, C\varepsilon^{\alpha} < 2C\varepsilon^{\alpha}$$

ja que DF és inversible en $F^{-1}(x)$ per a tot $x \in F(U)$ i

$|DF\quad F^{-1}-I| < C\varepsilon^{\alpha} < 2C\varepsilon_0^{\alpha} < 1$

Anàlogament es prova que $|DG^{-1}-I| < 2C\varepsilon^{\alpha}$ en G(U)

Per provar 2) introduïm les seguents definicions (1)

Donats E,F,G espais de Banach definim

$$\lambda^{i,j_1, \quad ,j_i} \quad L^i(F,G) \times L^{j_1}(E,F) \times \quad \times L^{j_i}(E,F) \longrightarrow L^k(E,G)$$

amb $i>1$ i $j_1+ \quad +j_i=k$, per l'expressió

$$\lambda^{i,j_1, \quad ,j_i}(A,B_1, \quad ,B_i)\ (e_1, \quad ,e_k) =$$

$$=A(B_1(e_1, \quad ,e_{j_1}), \quad ,B_i(e_{j_1+ \quad +j_{i-1}+1}, \quad ,e_k))$$

$\lambda^{i,j_1, \quad ,j_i}$ és multilineal i té norma $\leqslant 1$

$\mathrm{Sim}^k \quad L^k(E,F) \longrightarrow L^k(E,F)$

definit per

$$\mathrm{Sim}^k A = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma(A)$$

on $\sigma(A)(e_1, \quad ,e_k) = A(e_{\sigma(1)}, \quad ,e_{\sigma(k)})$

Sim^k és lineal i $|\mathrm{Sim}^k| \leqslant 1$

$\alpha^{k+1} \quad L(F,E) \times \overset{k+1}{\smile} \times L(F,E) \longrightarrow L^k(L(E,F),L(F,E))$

definit per

$$\alpha^{k+1}(\chi_1, \quad ,\chi_{k+1})(\psi_1, \quad ,\psi_k) = (-1)^k \chi_1 \psi_1 \chi_2 \psi_2 \qquad \chi_k \psi_k \chi_{k+1}$$

$\mathrm{Inv} \times \overset{k+1}{\smile} \times \mathrm{Inv} \; GL(E,F) \longrightarrow GL(E,F) \times \overset{k+1}{\smile} \times GL(F,F)$

definit per

$$(\mathrm{Inv} \times \quad \times \mathrm{Inv})(\varphi) = (\varphi^{-1}, \quad ,\varphi^{-1})$$

Amb aquesta notació

$$D^k(g \; f) = \mathrm{Sim}^k \sum_{i=1}^{k} \; \sum_{j_1 + \quad + j_i = k} c_k(j_1, \quad ,j_i) \lambda^{i,j_1, \quad ,j_i}$$

$$\circ (D^i g \; f \times D^{j_1} f \times \quad \times D^{j_i} f)$$

on $c_k(j_1, \quad ,j_i)$ és un enter que només depèn dels índexs que el caracteritzen i

$$D^k \mathrm{Inv} = k! \; \mathrm{Sim}^k \alpha^{k+1} \; (\mathrm{Inv} \times \overset{k+1}{\smile} \times \mathrm{Inv})$$

Notem que de 1) es dedueix que $\left|(DF\ F^{-1})^{-1}\right| = \left|DF^{-1}\right| < 1+C\,\varepsilon^{\alpha}$
Provarem 2) per inducció Per a k=2 tenim

$$D^2F^{-1}=D(DF^{-1})=D(DF\ F^{-1})^{-1}=D(\ \mathrm{Inv}\ DF\ F^{-1})=$$

$$=D(\ \mathrm{Inv})\ DF\ F^{-1}\ D(DF)\ F^{-1}\ DF^{-1} =$$

$$=D(\mathrm{Inv})\ DF\ F^{-1}\ D^2F\ F^{-1}\ (DF\ F^{-1})^{-1} =$$

$$= -(DF\ F^{-1})^{-1}\ (D^2F\ F^{-1}\ (DF\ F^{-1})^{-1})\ (DF\ F^{-1})^{-1}$$

Llavors

$$\left|D^2F^{-1}\right| \leqslant \left|(DF\ F^{-1})^{-1}\right|\left|D^2F\ F^{-1}\right|\left|(DF\ F^{-1})^{-1}\right|\left|(DF\ F^{-1})^{-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+C\,\varepsilon^{\alpha})^3\ L_2\,\varepsilon^{\alpha} < (1+C\,\varepsilon_0^{\alpha})^3\ L_2\,\varepsilon^{\alpha} < (\tfrac{3}{2})^3 L_2\,\varepsilon^{\alpha} \equiv L_2'\,\varepsilon^{\alpha}$$

Suposem que sigui cert per a $k-1 \geqslant 1$,

$$D^kF^{-1}=D^{k-1}(DF^{-1})=D^{k-1}(DF\ F^{-1})^{-1}= D^{k-1}(\mathrm{Inv}\ DF\ F^{-1})=$$

$$=D^{k-1}(\mathrm{Inv}\ (DF\ F^{-1}))$$

Per a $e_1, \quad , e_{k-1} \in E'$ amb $|e_1|, \quad , |e_{k-1}| \leqslant 1$,

(No escriurem el punt on es calcula la derivada per simplificar la notació)

$$D^{k-1}(\mathrm{Inv}\ (DF\ F^{-1}))(e_1, \quad , e_{k-1}) = \mathrm{Sim}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{*} c_{k-1} \lambda^{i, j_1, \quad j_i}$$

$$(D^i\mathrm{Inv}\ (DF\ F^{-1}) \times D^{j_1}(DF\ F^{-1}) \times \quad \times D^{j_i}(DF\ F^{-1}))(e_1, \quad , e_{k-1}) =$$

$$=\mathrm{Sim}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{*} c_{k-1}\ i'\ \mathrm{Sim}^i \Big[-(DF\ F^{-1})^{-1}(D^{j_1}(DF\ F^{-1})(e_1, \quad , e_j))$$

$$(DF\ F^{-1})^{-1} \qquad (DF\ F^{-1})^{-1}(D^{j_i}(DF\ F^{-1})(e_\ell, \quad e_{k-1}))(DF\ F^{-1})^{-1}\Big],$$

on $\sum_{*}$ vol dir suma pels indexs tals que $j_1 + \quad + j_i = k-1$,

$c_{k-1}=c_{k-1}(j_1, \quad ,j_i)$ i $\ell=j_1+ \quad +j_{i-1}+1$

Fixem-nos en $D^{j_r}(DF\ F^{-1})$

$$D^{j_r}(DF\ F^{-1})=Sim^{j_r}\sum_{i=1}^{j_r}\sum_{**} c_{j_r}(i_1, \quad ,i_{j_r})\lambda^{i,i_1, \quad ,i_{j_r}}$$

$$(D^i(DF)\ F^{-1}xD^{i_1}F^{-1}x \quad xD^{i_{j_r}}F^{-1})$$

on $\sum_{**}$ vol dir suma pels indexs tals que $i_1+ \quad +i_{j_r}=j_r$

En les derivades de la darrera expressió sempre hi ha almenys una derivada d'ordre superior a 1 Llavors

$$|D^{j_r}(DF\ F^{-1})|\leq|Sim^{j_r}|\left[\sum_{i=1}^{j_r}\sum_{**} c_{j_r}(i_1, \quad ,i_{j_r})|\lambda^{i,i_1, \quad ,i_{j_r}}|\right.$$

$$\left.|D^{i+1}F\ F^{-1}||D^{i_1}F^{-1}| \quad |D^{i_{j_r}}F^{-1}|\right]\leq\bar{L}'_{j_r}\varepsilon^\alpha$$

on $\bar{L}'_{j_r}$ és una constant(potser gran) que depèn només de j_r, $L_1,L_2, \quad L_{j_r+1},C$

Així doncs

$$|D^{k-1}(Inv\ (DF\circ F^{-1}))(e_1, \quad ,e_{k-1})|\leq$$

$$\leq|Sim^{k-1}|\left[\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{*}c_{k-1}\ i'|Sim^i||D(F\ F^{-1})^{-1}||D^{j_1}(DF\ F^{-1})(e_1, \quad ,e_{j_1})|\right.$$

$$\left.|(DF\ F^{-1})^{-1}| \quad |(DF\circ F^{-1})^{-1}||D^{j_i}(DF\ F^{-1})(e_\ell, \quad ,e_{k-1})||(DF\ F^{-1})^{-1}|\right]\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{*}c_{k-1}\ i'(1+C\varepsilon^\alpha)^{i+1}\bar{L}'_{j_1}\bar{L}'_{j_2} \quad \bar{L}'_{j_i}(\varepsilon^\alpha)^i\leq L'_k\varepsilon^\alpha$$

on L'_k depèn només de $k,C,L_1\ L_2, \quad ,L_k$, per tant

$$|D^{k-1}Inv\ DF\ F^{-1}|=\sup|(D^{k-1}Inv\ DF\ F^{-1})(e_1, \quad ,e_{k-1})|\leq L'_k\varepsilon^\alpha$$

on el suprem es pren per a tots els $e_1, \quad ,e_{k-1}$ amb norma menor o igual que 1

Per a $|D^k G|$ es prova igualment

Passem a provar 3) Per a $x \in F(U) \cap G(U)$ $\quad G\, G^{-1}(x) - F \circ F^{-1}(x) = 0$

Així, en $F(U) \cap G(U)$

$$0 = G\, G^{-1} - F\, F^{-1} = G\, G^{-1} - G\, F^{-1} + G\, F^{-1} - F\, F^{-1}$$

Llavors

$$0 = |G\, G^{-1} - G\, F^{-1}| - |G\, F^{-1} - F\, F^{-1}| \geqslant \inf_{\xi \in U} |DG(\xi)|\, |G^{-1} - F^{-1}| - |G-F|$$

d'on

$$|G^{-1} - F^{-1}| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{\xi \in U} |\,|DG(\xi)|\,|} |G-F|$$

De la condició $|DG - I| \leqslant C\varepsilon^{\alpha}$ tenim que $|DG| \geqslant 1 - C\varepsilon^{\alpha}$, per tant

$$|G^{-1} - F^{-1}| \leqslant \frac{1}{1 - C\varepsilon^{\alpha}} |G-F| \leqslant \frac{1}{1 - C\varepsilon^{\alpha}} M_0 \varepsilon^{\alpha+1} < 2M_0 \varepsilon^{\alpha+1}$$

Podem prendre $M_0' = 2M_0$

Per a $k=1$, en $F(U) \cap G(U)$

$$0 = (DG^{-1})^{-1} DG^{-1} - (DF^{-1})^{-1} DF^{-1} =$$

$$= (DG^{-1})^{-1} DG^{-1} - (DG^{-1})^{-1} DF^{-1} + (DG^{-1}) DF^{-1} - (DF^{-1})^{-1} DF^{-1}$$

i llavors

$$0 = |(DG^{-1})^{-1} DG^{-1} - (DG^{-1})^{-1} DF^{-1}| - |(DG^{-1})^{-1} DF^{-1} - (DF^{-1})^{-1} DF^{-1}|$$

Diem (1^*) a la primera diferència i (2^*) a la segona

$$(1^*) = |(DG^{-1})^{-1} (DG^{-1} - DF^{-1})| \geqslant |DG^{-1}|^{-1} |DG^{-1} - DF^{-1}|$$

ja que $|AB| \geqslant |A^{-1}|^{-1} |B|$

$$(2^*) \leqslant |DG\, G^{-1} - DF\, F^{-1}|\, |DF^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant (|DG\, G^{-1} - DG\, F^{-1}| + |DG\, F^{-1} - DF\, F^{-1}|)\, |DF^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{\xi \in U} |D^2 G(\xi)|\, |G^{-1} - F^{-1}| + M_1 \varepsilon^{\alpha+1})\, |DF^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant (L_2 \varepsilon^{\alpha} M_0' \varepsilon^{\alpha+1} + M_1 \varepsilon^{\alpha+1})(1 + C'\varepsilon^{\alpha})$$

Per tant

$$|DG^{-1}-DF^{-1}| \leq |DG^{-1}|(L_2\varepsilon^{\alpha}M_0'\varepsilon^{\alpha+1}+M_1\varepsilon^{\alpha+1})(1+C'\varepsilon^{\alpha}) \leq$$
$$\leq (1+C'\varepsilon^{\alpha})^2(L_2M_0'+M_1)\varepsilon^{\alpha+1} \leq 2^2(L_2M_0'+M_1)\varepsilon^{\alpha+1} \equiv M_1'\varepsilon^{\alpha+1}$$

Per a $k>1$ ho provarem per inducció Per a $k=2$ escrivim $D^2G^{-1}-D^2F^{-1}$ en funció de les derivades de G i F a través de les fórmules anteriors i ho descomposem en forma telescòpica Llavors $|D^2G^{-1}-D^2F^{-1}|$ és menor que la suma de les normes de les diferències

Tenint en compte que

$$|DG^{-1}-DF^{-1}| \leq M_1'\varepsilon^{\alpha+1},$$

$$|D^2G\,G^{-1}-D^2F\,F^{-1}| \leq |D^2G\,G^{-1}-D^2G\circ F^{-1}|+|D^2G\,F^{-1}-D^2F\,F^{-1}| \leq$$
$$\leq \sup_{\xi\in U} |D^3G(\xi)|\,|G^{-1}-F^{-1}|+|D^2G-D^2F| \leq L_3\varepsilon^{\alpha}M_0'\varepsilon^{\alpha+1}+M_2\varepsilon^{\alpha+1} \leq$$
$$\leq (L_3M_0'+M_2)\varepsilon^{\alpha+1},$$

$$|DG^{-1}|,|DF^{-1}| \leq 1+C'\varepsilon^{\alpha},$$

$$|D^2G\,G^{-1}|,|D^2F\,F^{-1}| \leq L_2\varepsilon^{\alpha},$$

resulta que $|D^2G^{-1}-D^2F^{-1}| \leq M_2'\varepsilon^{\alpha+1}$,

on M_2' depèn de $C', M_0', M_1', L_2, L_3, M_2$ les quals depenen de $C, L_1, L_2, L_3, M_1, M_2$

Suposem que és cert per a $k-1 \geq 1$ Siguin $e_1, \quad e_{k-1} \in E'$ amb $|e_1|, \quad ,|e_{k-1}| \leq 1$ Com abans no escrivim el punt on es calcula la derivada

$$(D^kG^{-1}-D^kF^{-1})(e_1, \quad ,e_{k-1}) = (D^{k-1}DG^{-1}-D^{k-1}DF^{-1})(e_1, \quad ,e_{k-1}) =$$
$$= \left[D^{k-1}(\mathrm{Inv}\ DG\ G^{-1})-D^{k-1}(\mathrm{Inv}\ DF\ F^{-1})\right](e_1, \quad ,e_{k-1}) =$$

$$=-\operatorname{Sim}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{*} c_{k-1\ l'}\operatorname{Sim}^{l}$$

$$\Big[(DG\ G^{-1})^{-1}D^{j_1}(DG\ G^{-1})(e_1, \quad ,e_{j_1})(DG\ G^{-1})^{-1}$$

$$(DG\ G^{-1})^{-1}D^{j_l}(DG\ G^{-1})(e_\ell, \quad ,e_{k-1})(DG\ G^{-1})^{-1} -$$

$$-\ (DF\ F^{-1})^{-1}D^{j_1}(DF\ F^{-1})(e_1, \quad ,e_{j_1})(DF\ F^{-1})^{-1}$$

$$(DF\ F^{-1})^{-1}D^{j_l}(DF\ F^{-1})(e_\ell, \quad ,e_{k-1})(DF\ F^{-1})^{-1}\Big]$$

Per estudiar aquestes diferències considerem primer (notem que $j_1, \quad ,j_l \leqslant l \leqslant k-1$) $D^j(DG\ G^{-1})-D^j(DF\ F^{-1})$

$$|D^j(DG\ G^{-1})-D^j(DF\ F^{-1})|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l-1}^{j}\ \sum_{**} c_j\,|D^{l+1}G\ G^{-1}x \quad xD^{j_l}G-D^{l+1}F\ F^{-1}x \quad xD^{j_l}F^{-1})$$

Posant la darrera diferència en forma telescòpica, usant la desigualtat triangular i tenint en compte que

$$|D^{j_r}G^{-1}-D^{j_r}F^{-1}|\leqslant M'_{j_r}\ \varepsilon^{\alpha+1}, \qquad (j_r\leqslant k-1),$$

$$|D^{l+1}G\ G^{-1}-D^{l+1}F\ F^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant|D^{l+1}G\ G^{-1}-D^{l+1}G\ F^{-1}|+|D^{l+1}G\ F^{-1}-D^{l+1}F\ F^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\xi\in U}|D^{l+2}G(\xi)|\ |G^{-1}-F^{-1}|+|D^{l+1}G-D^{l+1}F|\leqslant$$

$$\leqslant L_{l+2}\ \varepsilon^{\alpha}M'_0\,\varepsilon^{\alpha+1}+M_{l+1}\,\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant(L_{l+2}M'_0+M_{l+1})\,\varepsilon^{\alpha+1}, \qquad (l+1\leqslant k)$$

$$|D^{l+1}G\ G^{-1}|,|D^{l+1}F\ F^{-1}|\leqslant L_{l+1}\ \varepsilon^{\alpha}, \qquad (l+1\leqslant k)$$

$$|D^{j_r}G^{-1}|,|D^{j_r}F^{-1}|\leqslant L'_{j_r}\ \varepsilon^{\alpha}, \qquad (j_r\leqslant k-1)$$

es veu que $|D^j(DG\ G^{-1})-D^j(DF\ F^{-1})| \leq \bar{L}'_j \varepsilon^{\alpha+1}$ per a $j \leq k-1$

on $\bar{L}'_j$ depèn de $j, L_1, \ \ L_{j+1}, M_1, \ \ , M_j, M'_0, \ \ , M'_j$

Finalment prenent mòdul en l'expressió obtinguda per a $(D^kG^{-1}-D^kF^{-1})(e_1, \ \ , e_{k-1})$, escrivint en forma telescòpica les diferències que s'obtenen, usant la desigualtat triangular i les consideracions anteriors s'arriba a que

$|D^kG^{-1}-D^kF^{-1}| \leq M'_k \varepsilon^{\alpha+1}$ amb M'_k independent de ε

Això acaba la demostració

La seguent proposició ens dóna per a una família de difeomorfismes propers a la identitat, un camp tal que el flux temps adequat (petit) d'ell, ens dóna una bona aproximació dels difeomorfismes

<u>Proposició 2 2</u>

Sigui f una funció de classe C^{r+L} en A, obert de $\mathbb{R}^n$

Sigui $\varphi(t,x)$ el flux solució de l'equació $\dot{x}=f(x)$, $x \in A$

Definim $G_\varepsilon \ B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow A$ per $G_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon^\alpha, x)$ on B és un compacte contingut en A $(\alpha>0)$

Llavors existeix ε_0 tal que si $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

1) G_ε està ben definit,
2) $|DG_\varepsilon - I| < C\varepsilon^\alpha$ en B,
3) $|D^kG_\varepsilon| < L_k \varepsilon^\alpha$ en B, $2 \leq k \leq r$

Si definim, a més, $F_\varepsilon \ A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ per $F_\varepsilon(x) = x + \varepsilon^\alpha f(x)$,

4) Existeix un obert A' tal que $B \subset A' \subset A$ i $F_\varepsilon|_{A'}$ és difeomorfisme,
5) $|DF_\varepsilon - I| < C'\varepsilon^\alpha$ en B,

6) $|D^k F_\varepsilon| < L'_k \varepsilon^\alpha$ en B, $2 \leq k \leq r$,

7) $|D^k G_\varepsilon - D^k F_\varepsilon| < M'_k \varepsilon^{2\alpha}$ en B, $0 \leq k \leq r$

Nota

f de classe C^{r+L} vol dir que f és de classe C^r i $D^r f$ és Lipschitz

Demostració

Al llarg de la demostració B+s indicarà $\overline{\bigcup_{x\in B} B_s(x)}$

Si $\mathbb{R}^n$-A és buit, considerem B'=B+1 Si $\mathbb{R}^n$-A no és buit considerem $\bar{B}_R$, una bola de radi R prou gran perquè $B \subset \bar{B}_R$ i perquè $(\mathbb{R}^n - A) \cap \bar{B}_R \neq \emptyset$ Llavors $(\mathbb{R}^n - A) \cap \bar{B}_R$ és compacte i està ben definida la distància entre aquest conjunt i B Diem β a aquesta distància i considerem $B' = B + \beta/2$ Així $B \subset B' \subset A$

Definim $K_n = \sup_{x\in B'} |D^n f(x)|$

Pel teorema d'existència de solucions d'equacions diferencials, si $\varepsilon^\alpha < \beta/4K_0$ i si $x \in B$, la solució $\varphi(t,x)$ de $\dot{x}=f(x)$ verificant $\varphi(0,x)=x$ està definida per a $|t| < \varepsilon_0^\alpha$ i $\varphi(t,x) \in B'$ per a $|t| < \varepsilon^\alpha$ A més com que B' és compacte, $\varphi(\varepsilon^\alpha, x) \in B' \subset A$ Això prova 1)

Per provar 2) notem que $DG_\varepsilon(x) = D_2\varphi(t,x)|_{t=\varepsilon^\alpha}$ on D_2 significa derivada respecte de les condicions inicials $D_2\varphi$ satisfà l'equació

$$D_1 D_2 \varphi = Df\ \varphi\ D_2\varphi \qquad \text{amb} \quad D_2\varphi(0,x) = I$$

Llavors

$$D_2\varphi(t,x) = I + \int_0^t Df(\varphi(s,x))D_2\varphi(s,x)ds ,$$

d'on, per a $0 < t < \varepsilon^{\alpha}$, podem deduir

$$|D_2\varphi(t,x)-I| \leqslant \int_0^t |Df(\varphi(s,x))|ds +$$

$$+ \int_0^t |Df(\varphi(s,x))|\,|D_2\varphi(s,x)-I|ds$$

Tenim que $\varphi(s,x) \in B'$ i per tant $|Df(\varphi(s,x))| \leqslant K_1$, d'on

$$|D_2\varphi(t,x)-I| \leqslant K_1 \int_0^t ds + K_1 \int_0^t |D_2\varphi(s,x)-I|ds$$

i pel lema de Gronwall

$$|D_2\varphi(t,x)-I| \leqslant K_1 t \exp K_1 t$$

Suposem que $\varepsilon_0^{\alpha} K_1 < 1$ Llavors

$$|DG_{\varepsilon}(x)-I| = |D_2\varphi(\varepsilon^{\alpha},x)-I| \leqslant K_1\varepsilon^{\alpha}\exp K_1\varepsilon^{\alpha} < K_1 e\, \varepsilon^{\alpha}$$

Prenem $C=K_1 e$ En particular hem obtingut que per a $0 < t < \varepsilon^{\alpha}$,

$$|D_2\varphi(t,x)| \leqslant 1+K_1 t \exp K_1 t \leqslant 1+e$$

Per provar 3), provarem per inducció que si $0 < t < \varepsilon^{\alpha}$

$|D_2^k\varphi(t)| \leqslant L_k'\varepsilon^{\alpha}$, on escrivim $\varphi(t)$ en comptes de $\varphi(t,x)$

$D_2^k\varphi$ satisfà l'equació

$$D_1 D_2^k\varphi = D_2^k D_1\varphi = D_2^k(f\ \varphi) =$$

(2 1) $$= \mathrm{Sim}^k \sum_* c_k(j_1)\lambda^{1,j_1} (D^1 f\ \varphi \times D_2^{j_1}\varphi) +$$

$$+\mathrm{Sim}^k \sum_{i=2}^{k} \sum_* c_k(j_1, \quad ,j_i)\lambda^{i,j_1, \quad ,j_i}(D^i f\ \varphi \times D_2^{j_1}\varphi \times \quad \times D_2^{j_i}\varphi)$$

amb la condició $D_2^k\varphi(0)=0$ $(k \geqslant 2)$ i on $\sum_*$ indica suma estesa als índexs j tals que $j_1+ \quad +j_i=k$

El primer sumand de (2 1) pren la forma

$$\mathrm{Sim}^k\ \lambda^{1,k}(Df\ \varphi \times D_2^k\varphi)$$

i com que $D^2\varphi$ és simètrica podem prescindir de Sim^k

En el segon sumand, com que $j_1+ \quad +j_1=k$ i $i\geqslant 2$, les j són menors que k i per tant només hi intervenen derivades de φ d'ordre estrictament menor que k

Llavors $D_2^k\varphi$ satisfà l'equació lineal

$$D_1D_2^k\varphi(t)=\Lambda(t)D_2^k\varphi(t)+b_k(t)$$

en l'espai de Banach $E^k=L^k(E,E)$ on hem escrit E en comptes de $\mathbb{R}^n$ $\Lambda(t)$ $E^k\longrightarrow E^k$ està definit per

$$\Lambda(t)A=\lambda^{1,k}\ (Df(\varphi(t))xA) \qquad \text{si } A\in E^k$$

Evidentment $\Lambda(t)$ és lineal i

$$|\Lambda(t)A| = |\lambda^{1,k}\ (Df(\varphi(t))xA)| \leqslant |\lambda^{1,k}|\,|Df(\varphi(t))|\,|A|\leqslant$$

$$\leqslant 1 \sup_{x\in B'} |Df(x)|\,|A|\leqslant K_1|A|$$

que implica que $|\Lambda(t)|\leqslant K_1$ si $0<t<\varepsilon^{\alpha}$ i $b_k(t)\in E^k$ és el segon sumand de (2 1) i verifica

$$|b_k(t)|=|\operatorname{Sim}^k \sum_{i=2}^{k}\ \sum_{*} c_k\lambda^{i,j_1, \quad ,j_i}(D^i f(\varphi(t))xD_2^{j_1}\varphi(t)x \quad xD_2^{j_i}\varphi(t))|\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=2}^{k}\ \sum_{*} c_k|D^i f(\varphi(t))|\,|D_2^{j_1}\varphi(t)| \quad |D_2^{j_i}\varphi(t)|$$

Per trobar una afitació de $|D_2^k\varphi|$ usarem la fórmula de la variació de les constants Abans considerem l'equació lineal homogènea

$$U'=\Lambda U \qquad \text{on } U(t)\in L(E^k,E^k) \quad \text{i} \quad U(0)=I_{E^k}$$

Verifica que

$$U(t)=I+\int_0^t \Lambda U(s)ds$$

i

$$|U(t)|\leqslant 1+\int_0^t|\Lambda U(s)|ds\leqslant 1+K_1\int_0^t|U(s)|ds$$

i pel lema de Gronwall

$$|U(t)| \leqslant \exp K_1 t\,, \qquad \text{si } 0 < t < \varepsilon^{\alpha}$$

Llavors, si $0 < t < \varepsilon^{\alpha}$,

$$D_2^k \varphi(t) = U(t)\left[D_2^k \varphi(0) + \int_0^t U(-s) b_k(s)\,ds\right]$$

i com que per a $k \geqslant 2$, $D_2^k \varphi(0) = 0$

$$|D_2^k \varphi(t)| \leqslant \int_0^t |U(t-s)|\,|b_k(s)|\,ds \leqslant \int_0^t (\exp K_1 |t-s|)|b_k(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant (\exp K_1 t) \int_0^t |b_k(s)|\,ds$$

Si $k=2$,

$$|b_2(t)| \leqslant |D^2 f(\varphi(t))|\,|D_2 \varphi(t)|\,|D_2 \varphi(t)| \leqslant K_2 (1+e)^2$$

i

$$|D_2^2 \varphi(t)| \leqslant e \int_0^t K_2 (1+e)^2 ds = K_2 (1+e)^2 e\, \varepsilon^{\alpha}, \quad \text{si } 0 < t < \varepsilon^{\alpha}$$

Prenem $L_2 = K_2(1+e)^2 e$ i per tant $|D^2 G_{\varepsilon}(x)| \leqslant L_2 \varepsilon^{\alpha}$ en B

Si suposem certes les afitacions per a $k \geqslant 2$, llavors és clar que $|b_{k+1}(t)|$ és menor que una constant N_{k+1} independent de ε si $0 < t < \varepsilon^{\alpha}$ i $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, i tenim

$$|D_2^{k+1} \varphi(t)| \leqslant (\exp K_1 t) \int_0^t N_{k+1} ds \leqslant e N_{k+1}\, \varepsilon^{\alpha}$$

Prenem $L_{k+1} = N_{k+1} e$ i per tant $|D^{k+1} G_{\varepsilon}(x)| \leqslant L_{k+1}\, \varepsilon^{\alpha}$ en B

Per provar 4) considerem $A' = \bigcup_{x \in B} B_{\beta/4}(x)$ que és obert i està contingut en B'

Veiem primer que F_{ε} és injectiva Si $x, y \in A'$, $F_{\varepsilon}(x) = F_{\varepsilon}(y)$ és equivalent a $x + \varepsilon^{\alpha} f(x) = y + \varepsilon^{\alpha} f(y)$ i a $x - y = \varepsilon^{\alpha}(f(x) - f(y))$, per tant

$$|x-y| \leqslant \varepsilon^{\alpha}(|f(x)| + |f(y)|) \leqslant \varepsilon^{\alpha} 2K_0 < \varepsilon_0^{\alpha} 2K_0 < \beta/2$$

D'altra banda, si $x, y \in A'$ llavors $\bar{B}_{\beta/4}(x)$ i $\bar{B}_{\beta/4}(y)$ estan contingudes en B' i com que $|x-y| < \beta/2$, el segment que uneix x amb y està contingut en la unió d'elles i per tant en B' Llavors

$$|x-y| = \varepsilon^{\alpha}|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon^{\alpha}|Df(\xi)|\,|x-y|$$

on ξ pertany a B' i $|x-y| \leqslant \varepsilon^{\alpha} K_1 |x-y|$ que implica que $|x-y|=0$ perquè $\varepsilon^{\alpha}K_1 < 1$

A més $DF_{\varepsilon}(x)=I+\varepsilon^{\alpha}Df(x)$ i $|DF_{\varepsilon}(x)-I| \leqslant \varepsilon^{\alpha}K_1 < 1$

Això indica que $DF_{\varepsilon}(x)$ és un isomorfisme (i homeomorfisme) per a tot $x \in A' \subset B'$ per tant F_{ε} és un difeomorfisme definit en A' Això prova 4)

5) ja està provat Notem que $K_1 < K_1 e = C'$

Per provar 6) cal tenir en compte que $D^kF_{\varepsilon}(x)=\varepsilon^{\alpha}D^kf(x)$ i

$|D^kF_{\varepsilon}(x)| \leqslant \varepsilon^{\alpha}|D^kf(x)| < \varepsilon^{\alpha}K_k$ si $k \geqslant 2$

Prenem $L_k' = K_k$

$\varphi(t,x)$ verifica l'equació $\dot{\varphi}=f\,\varphi$ amb $\varphi(0,x)=x$ que es pot expressar en la forma

$$\varphi(t,x) = x + \int_0^t f(\varphi(s,x))\,ds$$

Llavors per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$G_{\varepsilon}(x)-F_{\varepsilon}(x) = x + \int_0^{\varepsilon^{\alpha}} f(\varphi(s,x))\,ds - x - \varepsilon^{\alpha}f(x) = \int_0^{\varepsilon^{\alpha}} (f(\varphi(s,x))-f(x))\,ds\,,$$

però

$$f(\varphi(s,x))-f(x) = f(\varphi(s,x))-f(\varphi(0,x)) = \frac{d}{dt}(f(\varphi(t,x)))\Big|_{t=\xi} s =$$

$$= Df(\varphi(\xi,x))\dot{\varphi}(\xi\ x)s = Df(\varphi(\xi,x)))f(\varphi(\xi,x))s$$

Com que $0<\xi<s<\varepsilon^{\alpha}<\varepsilon_0^{\alpha}$, $\varphi(\xi,x) \in B'$ i per tant

$$|Df(\varphi(\xi,x))| \leqslant K_1 \quad \text{i} \quad |f(\varphi(\xi,x))| \leqslant K_0$$

Llavors $|f(\varphi(s,x))-f(x)| \leqslant K_1K_0 s$ i

$$|G_{\varepsilon}(x)-F_{\varepsilon}(x)| \leqslant \int_0^{\varepsilon^{\alpha}} K_1K_0 s\,ds = \frac{1}{2}K_0K_1\varepsilon^{2\alpha}$$

Com que $D_2^k\varphi$ satisfa l'equació $D_1D_2^k\varphi=D_2^k(f\ \varphi)$,

$$D_2^k\varphi(t,x)=D_2^k\varphi(0,x)+\int_0^t D_2^k(f\ \varphi)(s,x)ds$$

i per tant

$$D^kG_\varepsilon(x)-D^kF_\varepsilon(x)=D_2^k\varphi(0,x)-D^kI(x)+\int_0^{\varepsilon^\alpha}(D_2^k(f\ \varphi)(s\ x)-D^kf(x))ds$$

Quan $k=1$, $D_2^k\varphi(0,x)-D^kI(x)=I-I=0$ i quan $k>1$, $D_2^k\varphi(0,x)-D^kI(x)=0-0=0$

Llavors

$$D^kG_\varepsilon(x)-D^kF_\varepsilon(x)=\int_0^{\varepsilon^\alpha}(D_2^k(f\ \varphi)(s,x)-D^kf(\varphi(0,x)))ds$$

Afirmem que $|D_1D_2^k\varphi(t,x)|<P_k$ $,1\leqslant k\leqslant r,\ 0<t<\varepsilon^\alpha$, amb P_k independent de ε

En efecte, per a $k=1$ és cert ja que $D_1D_2\varphi(t,x)=Df(\varphi(t,x))D_2\varphi(t\ x)$

i $\quad |D_1D_2\varphi(t,x)|\leqslant|Df(\varphi(t,x))|\,|D_2\varphi(t,x)|\leqslant K_1(1+e)$

Prenem $P_1=K_1(1+e)$ Suposant certa l'afirmació per a $k-1\geqslant 0$, com que $D_1D_2^k\varphi(t,x)=D^k(f\ \varphi)(t,x)$ tenim

$$|D_1D_2^k\varphi(t,x)|\leqslant|\mathrm{Sim}^k|\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{*}c_k|\lambda^{i,j_1,\quad,j_i}|$$

$$|D^if\ \varphi(t,x)|\,|D_2^{j_1}\varphi(t,x)|\quad|D_2^{j_i}\varphi(t,x)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{*}c_kK_iL_{j_1}\quad L_{j_i}$$

on c_k vol dir $c_k(j_1,\quad j_i)$ Diem P_k a aquesta darrera constant, que és independent de ε Això prova l'afirmació

Com a conseqüència tenim

$$|D_2\varphi(s,x)-D_2\varphi(0,x)|\leqslant|D_1D_2\varphi(\xi,x)|\,|s|\leqslant P_1\,\varepsilon^\alpha$$

i si $j>1$,

$$|D_2^j\varphi(s,x)|=|D_2^j\varphi(s,x)-D_2^j\varphi(0,x)|\leqslant|D_1D_2^j\varphi(\xi,x)|\,|s|\leqslant P_j\,\varepsilon^\alpha$$

Després, $D_2^k(f\ \varphi)(s,x)-D^kf(\varphi(0,x))=$

$$=\mathrm{Sim}^k \sum_{*} c_k \lambda^{k,j_1,\quad,j_k} \circ (D^kf(\varphi(s,x))xD_2^{j_1}\varphi(s,x)x \quad xD_2^{j_k}\varphi(s,x))-D^kf(\varphi(0,x))$$

$$+\mathrm{Sim}^k \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{*} c_k \lambda^{i,j\ ,\quad j_i} \circ (D^if(\varphi(s,x))xD_2^{j_1}\varphi(s,x)x \quad xD_2^{j_i}\varphi(s,x))$$

Diem e_1 al primer sumand i e_2 al segon

$$e_1=\lambda^{k,1,\quad,1}(D^kf(\varphi(s,x))xD_2\varphi(s,x)x \quad xD_2\varphi(s,x))-$$

$$-\lambda^{k,1,\quad,1}(D^kf(\varphi(0,x))xD_2\varphi(0,x)x \quad xD_2\varphi(0,x))$$

on hem usat que D^kf és simètrica i que $D_2\varphi(0,x)=I$

Escrivim aquesta darrera diferència en forma telescòpica i obtenim k+1 diferències D' aquestes, k diferències tenen norma menor que

$$K_k(1+e)^{k-1}|D_2\varphi(s,x)-D_2\varphi(0,x)|\leq K_k(1+e)^{k-1}P_1\varepsilon^\alpha$$

i l'altra menor que

$$|D^kf(\varphi(s,x))-D^kf(\varphi(0,x))|\leq |D^{k+1}f(\xi)||\varphi(s,x)-\varphi(0,x)|$$

Observem que

$$\varphi(s,x)-\varphi(0,x)=\int_0^s f(\varphi(u,x))du$$

i que $|\varphi(s,x)-\varphi(0,x)|\leq K_0 s\leq K_0\varepsilon^\alpha$

Per tant $|e_1|\leq K_k k(1+e)^{k-1}P_1\varepsilon^\alpha+K_{k+1}K_0\varepsilon^\alpha \equiv Q\varepsilon^\alpha$

on Q s'autodefineix per la igualtat

Si k=r $|D^rf(\varphi(s,x))-D^rf(\varphi(0,x))|\leq \mathrm{Lip}D^rf\ |\varphi(s,x)-\varphi(0,x)|$ i s'arriba al mateix resultat

D'altra banda

$$|e_2|\leq \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{*} c_k\ |D^if(\varphi(s,x))||D_2^{j_1}\varphi(s,x)| \quad |D_2^{j_i}\varphi(s,x)|$$

on tots els sumands contenen una j major que 1 Llavors cada sumand és més petit que una constant independent de ε per ε^{α} Com que el nombre de sumands és independent de ε, tenim que existeix Q' tal que

$$|e_2| \leqslant Q' \varepsilon^{\alpha}$$

Finalment tenim que

$$|D_2^k (f\ \varphi)(s,x) - D^k f(\varphi(0,x))| \leqslant (Q+Q\ )\varepsilon^{\alpha}$$

per a $0 < s < \varepsilon^{\alpha}$ i per tant

$$|D^k G_{\varepsilon}(x) - D^k F_{\varepsilon}(x)| \leqslant \int_0^{\varepsilon^{\alpha}} (Q+Q')\varepsilon^{\alpha} ds = (Q+Q')\varepsilon^{2\alpha}$$

Prenem $M_k' = Q+Q'$ Això acaba la demostració

<u>Corol lari 2 3</u>

Sigui F_{ε} una família de difeomorfismes de $A \subset \mathbb{R}^n$, obert, en la seva imatge, del tipus

$$F_{\varepsilon}(x) = x + \varepsilon^{\alpha} f(x) + \varepsilon^{\alpha+\beta} g(x,\varepsilon) \qquad (\alpha,\beta > 0)$$

on f és de classe C^{r+L} en A i $g(x,\varepsilon)$ és de classe C^r respecte de x en A i $D^k g(x,\varepsilon)$ està afitada en A x $[0,\varepsilon_0']$ per a $0 \leqslant k \leqslant r$ Sigui G_{ε} el flux temps ε^{α} de $x = f(x)$

Llavors, donat B, compacte contingut en A, existeix $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ tal que

1) $|DF_{\varepsilon} - I| < C\ \varepsilon^{\alpha}$,

2) $|D^k F_{\varepsilon}| < L\ \varepsilon^{\alpha}$, $\qquad (2 \leqslant k \leqslant r)$

3) $|D^k G_{\varepsilon} - D^k F_{\varepsilon}| < M_k\ \varepsilon^{\alpha+\beta}$, $\qquad (0 \leqslant k \leqslant r)$,

en B, per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

Demostració

Considerem $\tilde{F}_{\varepsilon}(x)=x+\varepsilon^{\alpha}f(x)$ És immediat que

$$|D^1F_{\varepsilon}(x)-D^1\tilde{F}_{\varepsilon}(x)| \leqslant P_1\varepsilon^{\alpha+\beta}$$

en B, per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ on P_1 són les fites de $D^1g(x,\varepsilon)$ Aplicant la desigualtat triangular i la proposició 2 2 s'acaba la demostració

Observació

La proposició 2 2 i el corol lari 2 3 són òbviament vàlids si

$$F_{\varepsilon}(x)=x+a\varepsilon^{\alpha}f(x)+\varepsilon^{\alpha+\beta}g(x,\varepsilon)$$

i G_{ε} representa el flux temps $a\varepsilon^{\alpha}$ de $\dot{x}=f(x)$, on a és una constant positiva És en aquesta forma que s'usarà en el capítol 6

2 3 Proximitat de les varietats invariants

En aquest apartat es prova el resultat principal d'aquest capítol

Teorema 2 4

Sigui F_ε una família de difeomorfismes de classe C^{r+1} $(r\geq 1)$, de $A\subset\mathbb{R}^n$, obert, en la seva imatge depenent d'un paràmetre ε

Sigui X un camp autònom de classe C^{r+1} en A i sigui G_ε el flux temps ε^α d'aquest camp, $(\alpha\geq 1)$

Suposem que

i) $(0,0)\in A$ i és un punt fix hiperbòlic de G_ε i F_ε per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

ii) $DF_\varepsilon(0,0)$ i $DG_\varepsilon(0,0)$ diagonalitzen

Si λ_i són els valors propis de $DF_\varepsilon(0,0)$ i μ_i els de $DG_\varepsilon(0,0)$, verifiquen que $\lambda_i=1+a_i\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$, amb $a_i<0$ per a $1\leq i\leq \ell$ i $a_i>0$ per a $\ell+1\leq i\leq n$, i que $\lambda_i-\mu_i=O(\varepsilon^{\alpha+1})$,

iii) $|DF_\varepsilon-I|<C\varepsilon^\alpha$

$|D^kF_\varepsilon|<L_k\varepsilon^\alpha$, $\quad 2\leq k\leq r+1$

$|D^kF_\varepsilon-D^kG_\varepsilon|<M_k\varepsilon^{\alpha+1}$, $\quad 0\leq k<r$,

en A, per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

Llavors, si f_ε i g_ε són funcions tals que les seves gràfiques representen la varietat invariant estable de l'origen de F_ε i G_ε respectivament, localment a l'entorn d'un punt de les varietats contingut en A, es té que

$$|D^kf_\varepsilon-D^kg_\varepsilon|=O(\varepsilon)\quad \text{per a } 0\leq k\leq r$$

Observacions

La hipòtesi i) no és restrictiva ja que sempre es pot fer una translació per portar el punt fix a l'origen

Més en general, podem suposar que G_ε és el flux temps $a\varepsilon^\alpha$ d'un camp X, amb $a>0$, ja que això representa el flux temps ε^α del camp aX com és clar a partir d'un canvi de temps

En el decurs de la seguent i de les properes demostracions quan apliquem el teorema del valor mig, l'argument de la derivada de la funció serà un element ξ adequat

Demostració

Per la proposició 2 2 podem suposar que

$$|DG_\varepsilon - I| < C\varepsilon^\alpha$$
$$|D^kG_\varepsilon| < L_k\varepsilon^\alpha$$

Farem la demostració per a $r=0$ i $r=1$ provant primer el cas local i després el cas global Després per a $r>1$ ho provarem per inducció

Escrivim $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $E_1 = \mathbb{R}^\ell$ i $E_2 = \mathbb{R}^{n-\ell}$

Usarem la norma $|(x,y)| = \max(|x|,|y|)$ per a $(x,y) \in E_1 \times E_2$

Observem que les varietats invariants de G_ε són les varietats invariants del camp X i per tant són independents de ε

Per facilitar el desenvolupament de la demostració introduirem diversos lemes, les demostracions dels quals estaran al final de la demostració principal

Comencem provant el cas local

Lema 2 4 1

Existeix un canvi lineal S independent de ε tal que en les noves variables(que anomenarem x,y) G_ε pren la forma

$$\tilde{G}_\varepsilon(x,y) = S^{-1}G_\varepsilon S(x,y) = (A(\varepsilon)x + \bar{X}(\varepsilon,x,y), B(\varepsilon)y + \bar{Y}(\varepsilon,x,y))$$

amb $\bar{X}$ i $\bar{Y}$ sense termes lineals en x,y

i existeix a>0 tal que $|B^{-1}(\varepsilon)|<1-a\varepsilon^{\alpha}$ i $|A(\varepsilon)|<1-a\varepsilon^{\alpha}$

Considerem ara $\tilde{F}_{\varepsilon}=S^{-1}F_{\varepsilon}S$ i escrivim la seva part lineal en la forma

$$(A(\varepsilon)x,B(\varepsilon)y)+(C_1(\varepsilon,x,y),C_2(\varepsilon,x,y))$$

i la resta

$$(X(\varepsilon,x,y),Y(\varepsilon,x,y))$$

Per comoditat d'escriptura, a partir d'ara no escriurem la dependència en ε

Lema 2 4 2

En $S^{-1}(A)$ i per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$|D\tilde{G}-I|,|D\tilde{F}-I|<C\,\varepsilon^{\alpha}$$

$$|D^k\tilde{G}|,|D^k\tilde{F}|<L''_k\,\varepsilon^{\alpha},\quad 2\leqslant k\leqslant r+1,$$

$$|D^k\tilde{G}-D^k\tilde{F}|<M_k\,\varepsilon^{\alpha+1},\quad 0\leqslant k\leqslant r$$

Com a consequència d'aquest lema

$$|C|=|(C_1,C_2)|=|S^{-1}D\tilde{F}(0,0)S-S^{-1}D\tilde{G}(0,0)S|=|S^{-1}(D\tilde{F}(0,0)-D\tilde{G}(0,0))S|\leqslant$$
$$\leqslant|S^{-1}|\,|S|\;M_1\varepsilon^{\alpha+1}\equiv M_1\,\varepsilon^{\alpha+1},$$

$$|D^k(\bar{X},\bar{Y})|=|D^k\tilde{G}-D^k(A(\varepsilon)x,B(\varepsilon)y)|=|D^k\tilde{G}|\leqslant L_k\,\varepsilon^{\alpha}\quad \text{si } k\geqslant 2,$$

$$|D^k(X,Y)|=|D^k\tilde{F}-D^k(A(\varepsilon)x,B(\varepsilon)y)-D^k(C_1(\varepsilon,x,y),C_2(\varepsilon,x,y))|\leqslant$$
$$\leqslant L_k\,\varepsilon^{\alpha}\quad \text{si } k\geqslant 2 \text{ i}$$

$$|D^k(\bar{X},\bar{Y})-D^k(X,Y)|=|D^k\tilde{G}-D^k(A(\varepsilon)x,B(\varepsilon)y)-D^k\tilde{F}+D^k(A(\varepsilon)x,B(\varepsilon)y)+$$
$$+D^k(C_1(\varepsilon,x,y),C_2(\varepsilon,x,y))|\leqslant$$
$$\leqslant|D^k\tilde{G}-D^k\tilde{F}|+|D^k(C_1(\varepsilon,x,y),C_2(\varepsilon,x,y))|$$

que és menor que $M_k\varepsilon^{\alpha+1}+M_1\varepsilon^{\alpha+1}\equiv\bar{M}_k\varepsilon^{\alpha+1}$ si k=1 i menor que $M'_K\varepsilon^{\alpha+1}$ si k>1

Pel teorema de la varietat estable sabem que $\tilde{F}$ i $\tilde{G}$ tenen una varietat invariant estable de l'origen cada un que es poden representar localment com les gràfiques de dues funcions f i g respectivament, de classe C^{r+1}, f i g $E_1(r) \longrightarrow E_2$ amb $|Df|, |Dg| \leq 1$ en $E_1(r)$ que representa la bola tancada de radi r en E_1 Suposem que $E(r) \subset S^{-1}(A)$ Diem d_k a les cotes de $D^k g$ en $E_1(r)$ Com que $(\bar{X},\bar{Y})=o((x,y))$ i $|D\bar{X}|, |D\bar{Y}|=o(\varepsilon^{\alpha})$, existeix r_1 independent de ε (') tal que $r_1 \leq r$ i $|D\bar{X}|, |D\bar{Y}| < \frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}$ en $E(r_1)$ (Assenyalem que $D\bar{X}$ i $D\bar{Y}$ representen les diferencials respecte de les variables x y)

Considerem el canvi $\bar{R}$ definit per

$$\bar{R}(x,y)=(x,y+g(x))$$

per portar la varietat invariant estable de $\tilde{G}$ al subspai E_1

Definim $\tilde{\tilde{G}}=\bar{R}^{-1}\tilde{G}\bar{R}$

$$\tilde{\tilde{G}}(x,y)=\bar{R}^{-1}\tilde{G}(x,y+g(x))=\bar{R}^{-1}(Ax+\bar{X}(x,y+g(x)),B(y+g(x))+\bar{Y}(x,y+g(x)))=$$
$$=(Ax+\bar{X}(x,y+g(x)),B(y+g(x))+\bar{Y}(x,y+g(x))-$$
$$-g(Ax+\bar{X}(x,y+g(x))))$$

La condició que E_1 és invariant es tradueix en que la segona component de $\tilde{\tilde{G}}$ aplicada a $(x,0)$ és zero, és a dir,

$$Bg(x)+\bar{Y}(x,g(x))-g(Ax+\bar{X}(x,g(x)))=0$$

o

$$g(x)=B^{-1}(g(Ax+\bar{X}(x,g(x)))-\bar{Y}(x,g(x)))$$

Anàlogament per a $\tilde{F}$, considerem el canvi R definit per

$$R(x,y)=(x,y+f(x))$$

Definim $\tilde{\tilde{F}}=R^{-1}\tilde{F}R$

$$\tilde{\tilde{F}}(x,y)=(Ax+C_1(x,y+f(x))+X(x,y+f(x)),$$
$$B(y+f(x))+C_2(x,y+f(x))+Y(x,y+f(x))-g(Ax+C_1(x,y+f(x))+$$
$$+X(x,y+f(x))))$$

La condició que E_1 sigui invariant és

$$f(x)=B^{-1}\left[f(Ax+C_1(x,f(x))+X(x,f(x))-C_2(x,f(x))-Y(x,f(x))\right]$$

Introduïm la seguent notació,

$$\bar{x}=(x,g(x)),\quad x=(x,f(x))$$

$$\bar{z}=Ax+\bar{X}(x,g(x)),\quad z=Ax+C_1(x,f(x))+X(x,f(x))$$

Observem que si $|x|<r_1$

$$|(x,g(x))|=\max(|x|,|g(x)|)\leqslant|x|<r_1\qquad(|Dg|\leqslant 1 \text{ en } E_1(r))$$

i $$|(x,f(x))|<r_1$$

Usant que $|Ax|\leqslant(1-a\varepsilon^{\alpha})|x|$ tenim

$$|\bar{z}|\leqslant|Ax|+|\bar{X}(x,g(x))|<(1-a\varepsilon^{\alpha})|x|+\frac{2}{3}a\varepsilon^{\alpha}|x|=(1-\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha})|x|<|x|$$

ja que $|\bar{X}(x,g(x))-\bar{X}(0,0)|\leqslant|D_x\bar{X}(\xi_1)||x|+|D_yX(\xi_2)||g(x)|\leqslant$

$$\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|x|+\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|g(x)|\leqslant\frac{2}{3}a\varepsilon^{\alpha}|x|,$$

$$|z^{\circ}|\leqslant|Ax|+|C_1(x,f(x))|+|X(x,f(x))|<(1-a\varepsilon^{\alpha})|x|+M_1\varepsilon^{\alpha+1}|x|+\frac{2}{3}a\varepsilon^{\alpha}|x|=$$

$$=(1-\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}+M_1\varepsilon^{\alpha+1})|x|<|x|$$

si ε_0 prou petit, és a dir, si $\varepsilon_0<\frac{a}{3M_1}$

Notem que per a $x\in E_1(r_1)$

$$|\bar{X}(\bar{x}^{\circ})-X(x^{\circ})|\leqslant|\bar{X}(\bar{x})-\bar{X}(x^{\circ})|+|\bar{X}(x)-X(x^{\circ})|\leqslant$$

$$\leqslant|D_y\bar{X}(\xi)||g(x)-f(x)|+\bar{M}_0\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|g-f|+\bar{M}_0\varepsilon^{\alpha+1}$$

Igualment

$$|\bar{Y}(\bar{x}^{\circ})-Y(x)|\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|g-f|+\bar{M}_0\varepsilon^{\alpha+1}$$

A més

$$|\bar{z}-z|\leqslant|\bar{X}(\bar{x})-X(x^{\circ})|+|C_1(x,f(x))|\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|g-f|+\bar{M}_0\varepsilon^{\alpha+1}+$$

$$+M_1\varepsilon^{\alpha+1}|x|\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|g-f|+(\bar{M}_0+M_1r_1)\varepsilon^{\alpha+1}$$

Recordem que $|g|$ i $|g-f|$ volen dir la norma del suprem en $E_1(r_1)$ de g i g-f i que $|g(x)|$ vol dir la norma de l'element $g(x)\in E_2$ Afitem

$$|g(x)-f(x)|=|B^{-1}(g(\bar{z}^{\circ})-\bar{Y}(\bar{x})-f(z)+C_2(x^{\circ})+Y(x))|\leqslant$$

$$\leqslant|B^{-1}|\left[|g(\bar{z})-f(z)|+|\bar{Y}(\bar{x})-Y(x)|+|C_2(x)|\right]\leqslant$$

$$\leqslant |B^{-1}| \ \left[|g(\bar z^\circ)-g(z^\circ)|+|g(z\ )-f(z\ )|+\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha|g-f|+\bar M_0\,\varepsilon^{\alpha+1}+M_1\,\varepsilon^{\alpha+1}|x|\right]\leqslant$$
$$\leqslant |B^{-1}| \ \left[\frac{a}{3}\,\varepsilon^\alpha\,|g-f|+(\bar M_0+M_1r_1)\,\varepsilon^{\alpha+1}+|g-f|+\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha|g-f|+(\bar M_0+M_1r_1)\varepsilon^{\alpha+1}\right]\leqslant$$

$$(1-a\varepsilon^\alpha)\,((1+\frac{2a}{3}\varepsilon^\alpha)\,|g-f|+2\,(\bar M_0+M_1r_1)\,\varepsilon^{\alpha+1})$$

on hem usat que

$$|g(\bar z^\circ)-g(z^\circ)|\leqslant|Dg(\xi)|\,|\bar z\ -z\ |\leqslant|\bar z\ -z^\circ|$$

amb la qual cosa

$$|g-f|\leqslant(1-a\,\varepsilon^\alpha)\,(1+\frac{2a}{3}\,\varepsilon^\alpha)\,|g-f|+(1-a\,\varepsilon^\alpha)\,2\,(\bar M_0+M_1r_1)\,\varepsilon^{\alpha+1}$$

i

$$|g-f|\leqslant\frac{2\,(\bar M_0+M_1r_1)\,\varepsilon^{\alpha+1}}{1-(1-\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha-\frac{2a^2}{3}\varepsilon^{2\alpha})}\leqslant\frac{2\,(\bar M_0+M_1r_1)\,\varepsilon^{\alpha+1}}{\frac{a}{3}\,\varepsilon^\alpha}=$$

$$=\frac{6}{a}\,(\bar M_0+M_1r_1)\,\varepsilon\equiv K_0\,\varepsilon$$

Abans de passar a afitar $Dg(x)-Df(x)$ fem unes afitacions prèvies

$$|D_x\bar X(\bar x^\circ)-D_xX(x\ )|\leqslant|D_x\bar X(\bar x\ )-D_x\bar X(x\ )|+|D_x\bar X(x^\circ)-D_xX(x^\circ)|\leqslant$$

$$\leqslant|D_{xy}\bar X(\xi)|\,|g(x)-f(x)|+\bar M_1'\,\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant L_2\,\varepsilon^\alpha|g-f|+\bar M_1\,\varepsilon^{\alpha+1}<$$

$$<L_2K_0\,\varepsilon^{\alpha+1}+\bar M_1\,\varepsilon^{\alpha+1}=(L_2K_0+\bar M_1)\,\varepsilon^{\alpha+1}$$

$$|D_y\bar X(\bar x^\circ)Dg(x)-D_yX(x^\circ)Df(x)|\leqslant|D_y\bar X(\bar x^\circ)Dg(x)-D_y\bar X(\bar x^\circ)Df(x)|+$$

$$+|D_y\bar X(\bar x^\circ)Df(x)-D_y\bar X(x^\circ)Df(x)|+|D_y\bar X(x^\circ)Df(x)-D_yX(x^\circ)Df(x)|\leqslant$$

$$\leqslant|D_y\bar X(\bar x^\circ)|\,|Dg(x)-Df(x)|+|D_y\bar X(\bar x\ )-D_y\bar X(x^\circ)|\,|Df(x)|+$$

$$+|D_y\bar X(x^\circ)-D_yX(x^\circ)|\,|Df(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha|Dg-Df|+|D_{yy}\bar X(\xi')|\,|g(x)-f(x)|+\bar M_1''\,\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha|Dg-Df|+(L_2K_0+\bar M_1)\,\varepsilon^{\alpha+1}$$

Igualment per a $|D_x\overline{Y}(\overline{x}\ )-D_xY(x^\circ)|$ i per a

$|D_y\overline{Y}(\overline{x}\ )Dg(x)-D_yY(x\ )Df(x)|$

Avaluem

$$|Dg(x)-Df(x)|=|B^{-1}\Big\{Dg(\overline{z}\ )(A+D_x\overline{X}(\overline{x}^\circ)+D_y\overline{X}(\overline{x}\ )Dg(x))-D_x\overline{Y}(\overline{x}^\circ)-$$

$$-D_y\overline{Y}(\overline{x}\ )Dg(x)-\Big[Df(z\ )(A+D_xX(x\ )+D_yX(x\ )Df(x)+D_xC_1(x\ )+$$

$$+D_yC_1(x^\circ)Df(x))-D_xY(x^\circ)-D_yY(x^\circ)Df(x)-D_xC_2(x\ )-$$

$$-D_yC_2(x^\circ)Df(x)\Big]\Big\}\ |$$

Introduim la seguent notació

$$\overline{e}_1=A+D_x\overline{X}(\overline{x}\ )+D_y\overline{X}(\overline{x}^\circ)Dg(x)$$

$$e_1=A+D_xX(x\ )+D_yX(x^\circ)Df(x)+D_xC_1(x\ )+D_yC_1(x^\circ)Df(x)$$

$$e_2=Dg(\overline{z}^\circ)\overline{e}_1-Df(z^\circ)e_1,$$

$$e_3=D_x\overline{Y}(\overline{x}^\circ)-D_xY(x\ ),$$

$$e_4=D_y\overline{Y}(\overline{x}^\circ)Dg(x)-D_yY(x^\circ)Df(x),$$

$$e_5=D_xC_2(x^\circ)+D_yC_2(x^\circ)Df(x)$$

Així

$$|Dg(x)-Df(x)| \leqslant |B^{-1}|\Big[|e_2|+|e_3|+|e_4|+|e_5|\Big]$$

Afitem

$$|\overline{e}_1| \leqslant |A|+|D_x\overline{X}(\overline{x}\ )|+|D_y\overline{X}(\overline{x}^\circ)Dg(x)| \leqslant (1-a\,\varepsilon^\alpha)+\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha+\frac{a}{3}\varepsilon^\alpha<1$$

$$|\overline{e}_1-e_1| \leqslant |D_x\overline{X}(\overline{x}^\circ)-D_xX(x\ )|+|D_y\overline{X}(\overline{x}\ )Dg(x)-D_yX(x^\circ)Df(x)|+$$

$$+|D_xC_1(x^\circ)+D_yC_1(x\ )Df(x)| \leqslant$$

$$\leqslant (L_2K_0+\bar{M}_1)\varepsilon^{\alpha+1}+\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|Dg-Df|+(L_2K_0+\bar{M}_1)\varepsilon^{\alpha+1}+M_1\varepsilon^{\alpha+1}$$

$$|e_2| \leqslant |Dg(\bar{z}\ )\bar{e}_1-Dg(z^{\circ})\bar{e}_1|+|Dg(z^{\circ})\bar{e}_1-Df(z^{\circ})\bar{e}_1|+$$

$$+|Df(z\ )\bar{e}_1-Df(z^{\circ})e_1| \leqslant$$

$$\leqslant d_2\,\frac{a}{3}\,\varepsilon^{\alpha}K_0\varepsilon+(\bar{M}\ _0+M\ _1r_1)\varepsilon^{\alpha+1}+|Dg-Df|+\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|Dg-Df|+$$

$$+(2(L_2K_0+\bar{M}_1)+M_1)\varepsilon^{\alpha+1}$$

$$|e_3| \leqslant (L_2K_0+\bar{M}_1)\varepsilon^{\alpha+1}$$

$$|e_4| \leqslant \frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}|Dg-Df|+(L_2K_0+\bar{M}_1)\varepsilon^{\alpha+1}$$

$$|e_5| \leqslant 2M_1\varepsilon^{\alpha+1}$$

Llavors

$$|Dg(x)-Df(x)| \leqslant (1-a\,\varepsilon^{\alpha})\,(|Dg-Df|+\frac{2a}{3}\varepsilon^{\alpha}|Dg-Df|+N\varepsilon^{\alpha+1})$$

on N és la suma de tots els coeficients de $\varepsilon^{\alpha+1}$

$$|Dg-Df| = \sup_{x\in E_1(r_1)} |Dg(x)-Df(x)| \leqslant (1-a\varepsilon^{\alpha})\,(1+\frac{2a}{3}\varepsilon^{\alpha})|Dg-Df|+$$

$$+(1-a\,\varepsilon^{\alpha})N\varepsilon^{\alpha+1},$$

i per tant

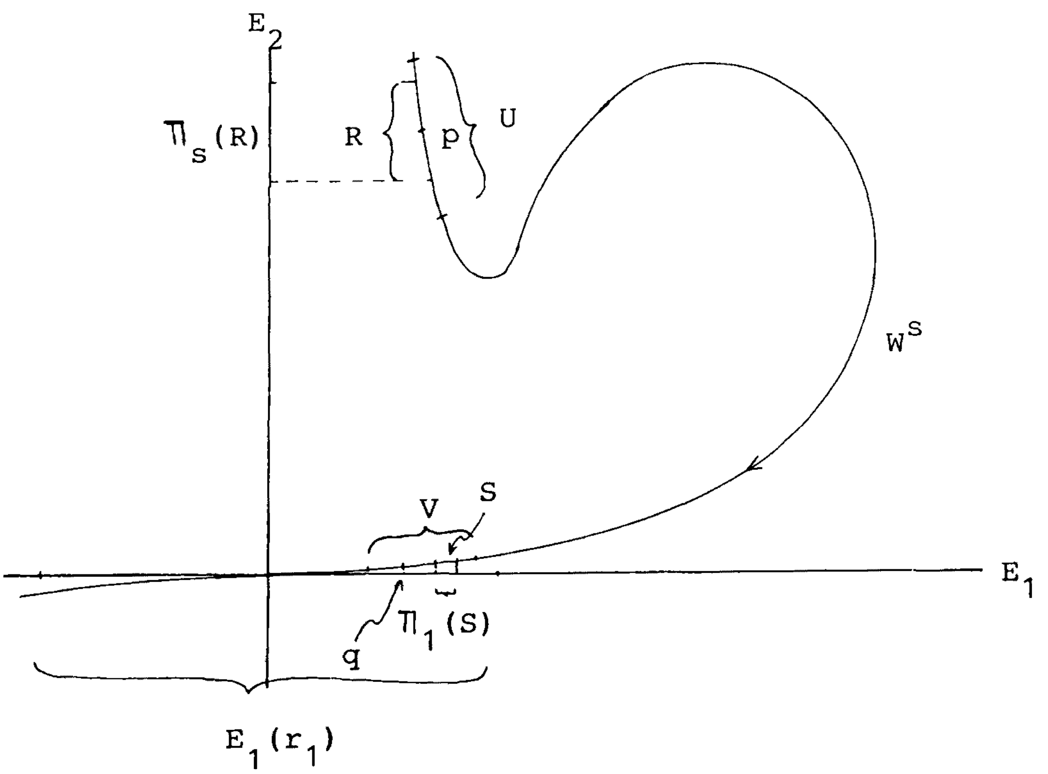
$$|Dg-Df| \leqslant \frac{N\,\varepsilon^{\alpha+1}}{1-(1-\frac{a}{3}\varepsilon^{\alpha}-\frac{2a^2}{3}\varepsilon^{2\alpha})} \leqslant \frac{3N}{a}\varepsilon \equiv K_1\varepsilon$$

Passem a estudiar el cas global

A partir d'ara tornem a escriure G i F en comptes de $\tilde{\tilde{G}}$ i $\tilde{\tilde{F}}$

Fins ara tenim afitacions només en $E_1(r_1)$ Hem d'estendre-les mentre les varietats invariants estables es mantinguin dins de $S^{-1}(A)$ Per la proposició 2 1, F^{-1} i G^{-1} verifiquen les mateixes desigualtats de la hipòtesi iii) que F i G amb noves constants C', L'_k i M'_k en F $(S^{-1}(A)) \cap G$ $(S^{-1}(A))$

Sigui W^s la varietat invariant de G (Recordem que és independent de ε)



Sigui $p \in W^s$ Existeix un entorn U de p tal que la component connexa de $U \cap W^s$ que conté a p es pot posar com a gràfica d'una funció $E_s \longrightarrow E_r$ on E_s i E_r són subspais vectorials de E de dimensions ℓ i $n-\ell$ respectivament i que contenen ℓ i $n-\ell$ rectes coordenades respectivament No tenen perquè ser E_1 i E_2 necessàriament El dibuix enganya perquè és bidimensional

Direm G_1 a G_ε amb $\varepsilon=1$

Com que $\lim_{n\to\infty} G_1^n(p) - 0$, existeix n_0 natural tal que per a tot $n \geqslant n_0$, $G_1^n(p) \in E(r_1)$

Escollim $m > n_0$ i considerem $q=G_1^m(p)$

Per continuïtat existeix un entorn V de q tal que

$$G_1^{-m}(V \cap W^s) \subset U \cap W^s$$

(Ens referim a les components connexes de $V \cap W^s$ i $U \cap W^s$ que contenen a q i a p respectivament)

A més suposem que $U \cap W^s$ i tot el tros de varietat invariant W^s d'aquí fins a l'origen està contingut en $(S^{-1}(A)-3\delta\varepsilon) \cap E(\rho-1)$

on ρ és un número suficientment gran i

$$\delta=\max(me^{mC'}M_0', C'\varepsilon_o^{\alpha-1}(\rho+1), e^{mC}K_0)$$

Sigui $0<\varepsilon<\varepsilon$,

$$G_1^{-m}(q)=\varphi(-m,q)=\varphi(-\varepsilon^\alpha\frac{m}{\varepsilon^\alpha},q)=\varphi(-\varepsilon^\alpha(N+d),q)=\varphi(-\varepsilon^\alpha N,\varphi(-\varepsilon^\alpha d\ q))$$

$$=G_\varepsilon^{-N}(\varphi(-\varepsilon^\alpha d,q))$$

on N i d representen la part entera i la part decimal de $\frac{m}{\varepsilon^\alpha}$ respectivament

A més

$$G^{-N}(\varphi(-\varepsilon^\alpha d,V\cap W^s))=\varphi(-\varepsilon^\alpha N,\varphi(-\varepsilon^\alpha d,V\cap W^s))=$$

$$=\varphi(-\varepsilon^\alpha(N+d),V\cap W^s)=\varphi(-m,V\cap W^s)\subset U\cap W^s\ ,$$

és a dir, existeix un entorn $R=\varphi(-m,V\cap W^s)$ de p en W^s i un obert S en W^s contingut en $E(r_1)$ tal que $G^{-N}(S)=R$

($S=\varphi(-\varepsilon^\alpha d,V\cap W^s)$ Notem que $d<1$)

Definim els operadors projecció

$$\Pi_s\ E\longrightarrow E_s \qquad \Pi_r\ E\longrightarrow E_r$$

Considerem la funció $\Pi_s\ G^{-N}(I,g)$ definida per

$$\Pi_s\ G^{-N}(I,g)(x)=\Pi_s\varphi(-\varepsilon^\alpha N,x,g(x))$$

Com que $-\varepsilon^{\alpha}N > -m$ i $-\varepsilon^{\alpha}N < -(m-\varepsilon^{\alpha})$, considerem la família $\Pi_s \varphi(\beta, x\ g(x))$ amb $-m \leqslant \beta \leqslant -(m-\varepsilon^{\alpha})$

El fet que W^s es pugui posar com a gràfica d'una funció implica que $D(\Pi_s \varphi(-m,x,g(x)))$ no s'anul la mai en $\Pi_1(V) \cup \Pi_1(G_1(V))$ Per continuïtat, si ε_0 és prou petit, tampoc s'anul la $D(\Pi_s \varphi(\beta,x,g(x))$ per a $\beta \in [-m,-m+\varepsilon^{\alpha}]$ Llavors existeixen les seguents quantitats i són independents de ε

$$d_1' = \inf\{D(\Pi_s \varphi(\beta\ x,g(x))) \ ,\ x \in \Pi_1(V) \cap \Pi_1(G_1(V))\ ,\ \beta \in [-m,-m+\varepsilon^{\alpha}]\}$$

$$d_2' = \sup\{D(\Pi_r \varphi(\beta,x,g(x))) \ ,\ x \in \Pi_1(V) \cap \Pi_1(G_1(V))\ \ \beta \in [-m\ -m+\varepsilon^{\alpha}]\},$$

$$d_3' = \sup\{D(\Pi_s \varphi(\beta,x,g(x)))^{-1},\ x \in \Pi_s(R)\ \ \beta \in [-m,-m+\varepsilon^{\alpha}]\}$$

La funció tal que la seva gràfica ens dóna la varietat invariant estable de G a l'entorn de p ve donada per

$$\Pi_r\, G^{-N}\ (I,g)\ \left[\Pi_s\ G^{-N}\ (I,g)\right]^{-1}\Big|_{\Pi_s(R)}$$

L'anomenem g_e

<u>Lema 2 4 3</u>

Si per a $0 \leqslant k < N$ $G^{-k}(x) \in (S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon) \cap E(\rho)$ llavors per als mateixos valors de k

$$F^{-k}(x) \in (S^{-1}(A)-\delta\varepsilon) \cap E(\rho+1) \subset F(S^{-1}(A)) \cap G(S^{-1}(A))$$

i $$|F^{-k}(x)-G^{-k}(x)| \leqslant k(1+C'\varepsilon^{\alpha})^k M_0'\, \varepsilon^{\alpha+1} \leqslant me^{mC'} M_0'\, \varepsilon$$

<u>Lema 2 4 4</u>

Si per a $0 \leqslant k \leqslant N$ $G^{-k}(x) \in (S^{-1}(A)-3\delta\varepsilon) \cap E(\rho-1)$

llavors si $|x-\xi| < K_0\varepsilon$ i $0 \leqslant k \leqslant N$ es té que

$$G^{-k}(\xi) \in (S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon) \cap E(\rho)$$

i $$|DG^{-k}(\xi)| < (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k} < e^{mC'}$$

Considerem la seguent afitació en $\Pi_1(S)$ (Π representarà Π_s o Π_r)

$$|\Pi\, G^{-N}\circ(I,g)-\Pi\, F^{-N}(I,f)| \leqslant |\Pi\, G^{-N}(I,g)-\Pi\, G^{-N}(I,f)|+$$

$$+|\Pi\, G^{-N}(I,f)-\Pi\, F^{-N}(I,f)| \leqslant$$

$$\leqslant |G^{-N}(I,g)-G^{-N}(I,f)|+|G^{-N}(I\ f)-F^{-N}(I,f)|$$

Com que $(I,g)(x)=(x,g(x)) \in W^s$ llavors $G^{-k}(x,g(x)) \in W^s$ i per hipòtesi $G^{-k}(x,g(x)) \in (S^{-1}(A)-3\delta\varepsilon) \cap E(\rho-1)$ si $0 \leqslant k \leqslant N$

Com que $|(I,g)(x)-(I,f)(x)|=\max(|Ix-Ix|,|g(x)-f(x)|)=$ $=|g(x)-f(x)| \leqslant K_0\varepsilon$ tenim que

$$|G^{-N}(x,g(x))-G^{-N}(x,f(x))| \leqslant |DG^{-N}(\xi_3)|\,|(x,g(x))-(x,f(x))|$$

amb $|\xi_3-(x,g(x))| \leqslant K_0\varepsilon$, per tant

$$|G^{-N}(x,g(x))-G^{-N}(x,f(x))| \leqslant e^{mC'}K_0\varepsilon$$

Pel lema 2 4 4, com que $G^{-k}(x,g(x)) \in (S^{-1}(A)-3\delta\varepsilon) \cap E(\rho-1)$ i $|g(x)-f(x)| < K_0\varepsilon$ per a $0 \leqslant k \leqslant N$ tenim que

$$G^{-k}(x,f(x)) \in (S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon) \cap E(\rho)$$

i aplicant el lema 2 4 3 tenim que

$$|G^{-N}(I,f)-F^{-N}(I,f)| \leqslant me^{mC'}M_0'\varepsilon$$

Finalment

$$|\Pi\circ G^{-N}(I,g)-\Pi\, F^{-N}(I,f)| \leqslant (K_0+mM_0')e^{mC'}\varepsilon \equiv N_2\varepsilon$$

Lema 2 4 5

Si per a $0\leqslant k\leqslant N$ $G^{-k}(x)\in(S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon)\cap E(\rho)$

llavors $|DG^{-N}(x)-DF^{-N}(x)|<(L_2me^{mC'}M_0'+M_1')me^{mC'}\varepsilon$

Lema 2 4 6

En la hipòtesi del lema anterior

$$|D^2G^{-k}(x)| \leqslant \sum_{i=k-1}^{2k-2}(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{i}L_2'\varepsilon^{\alpha}< e^{2mC'}\ \frac{L_2'}{C'}$$

per a $1\leqslant k\leqslant N$

Considerem ara, en $\Pi_1(S)$,

$$|D(\Pi\circ G^{-N}(I,g))-D(\Pi\, F^{-N}(I,f))|=|\Pi\, DG^{-N}\ (I,g)(I,Dg)-\Pi\circ DF^{-N}\ (I,g)\ (I,Df)|\leqslant$$

$$\leqslant|DG^{-N}\circ(I,g)(I,Dg)-DG^{-N}\ (I,g)(I,Df)|\ +$$

$$+\ |DG^{-N}\ (I,g)(I,Df)-DF^{-N}\circ(I,f)(I,Df)|\leqslant$$

$$\leqslant|DG^{-N}\circ(I,g)|\,|Dg-Df|+\Big[|DG^{-N}\circ(I,g)-DG^{-N}(I,f)|+$$

$$+|DG^{-N}\circ(I,f)-DF^{-N}\circ(I,f)|\Big]\ |(I,Df)|\leqslant$$

$$\leqslant e^{mC'}K_1\varepsilon+\ |D^2G^{-N}(\xi)|\,|g-f|+(L_2'me^{mC'}M_0'+M_1')me^{mC'}\varepsilon\ \leqslant\ N_3\varepsilon$$

on N_3 és el coeficient de ε en l'expressió anterior,

ja que $DG^{-N}(x,g(x))\in(S^{-1}(A)-3\delta\varepsilon)\cap E(\rho-1)$ i

$|(x,g(x))-(x,f(x))| < K_0\varepsilon$

Llavors el lema 2 4 4 ens assegura que $G^{-N}(x,f(x)) \in (S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon)\cap E(p)$ i podem aplicar el lema 2 4 5

Com que $\Pi_s G^{-N}(I,g)$ és inversible en $\Pi_1(S)$, això ens diu que per a ε prou petit $\Pi_s F^{-N}(I,f)$ serà inversible en $\Pi_1(S)$

A més, com que

$$|\Pi_s G^{-N}(I,g)-\Pi_s F^{-N}(I,f)| \leqslant N_2\varepsilon$$

$(\Pi_s G^{-N}(I,g))^{-1}$ i $(\Pi_s F^{-N}\circ(I,f))^{-1}$ estan ambdues definides en $\Pi_s(R)-N_2\varepsilon\equiv\bar{R}$

Ara podem considerar

$$\Pi_r\ F^{-N}(I,g)\ (\Pi_s\ F^{-N}\circ(I,g))^{-1}|_{\bar{R}}$$

la qual està ben definida i ens dóna una funció tal que la seva gràfica ens representa la varietat invariant estable de F prop de p Diem f_e a aquesta funció

Introduïm la notació

$$\varphi_s=\Pi_s G^{-N}(I,g), \qquad \varphi_r=\Pi_r G^{-N}(I,g),$$

$$\psi_s=\Pi_s F^{-N}(I,f), \qquad \psi_r=\Pi_r F^{-N}(I,f)$$

<u>Lema 2 4 7</u>

$$|\varphi_s^{-1}-\psi_s^{-1}| \leqslant d_4' N_2\varepsilon \qquad \text{en } \bar{R}$$

on $d_4' > 0$

Avaluem ara $|g_e-f_e|$ en $\bar{R}$,

$$|g_e-f_e|=|\varphi_r\ \varphi_s^{-1}-\Psi_r\ \Psi_s^{-1}|\leqslant|\varphi_r\ \varphi_s^{-1}-\varphi_r\ \Psi_s^{-1}|+|\varphi_r\ \Psi_s^{-1}-\Psi_r\ \Psi_s^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\Pi_1(S)}|D\varphi_r(\xi)|\,|\varphi_s^{-1}-\Psi_s^{-1}|+|\varphi_r-\Psi_r|\leqslant d_2d_4'N_2\varepsilon+N_2\varepsilon$$

Avaluem $|Dg_e-Df_e|$ en $\bar{R}$,

$$|Dg_e-Df_e|=|D\varphi_r\ \varphi_s^{-1}D\varphi_s^{-1}-D\Psi_r\ \Psi_s^{-1}D\Psi_s^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant|D\varphi_r\ \varphi_s^{-1}D\varphi_s^{-1}-D\varphi_r\ \Psi_s^{-1}D\varphi_s^{-1}|+ \qquad (1^*)$$

$$+|D\varphi_r\ \Psi_s^{-1}D\varphi_s^{-1}-D\Psi_r\ \Psi_s^{-1}D\varphi_s^{-1}|+ \qquad (2^*)$$

$$+|D\Psi_r\ \Psi_s^{-1}D\varphi_s^{-1}-D\Psi_r\ \Psi_s^{-1}D\Psi_s^{-1}| \qquad (3^*)$$

Per afitar (1) necessitem una fita de $D^2\varphi_r$

$$D^2\varphi_r=D^2(\Pi_r G^N\ (I,g))=D(\Pi_r DG^N\ (I,g)(I,Dg))=$$

$$\Pi_r\left[D^2G^N\ (I,g)((I,Dg),(I,Dg))+DG^N\ (I,g)(0,D^2g)\right]$$

Per tant

$$|D^2\varphi_r|\leqslant|D^2G^N|\,|(I,Dg)|^2+|DG^N|\,|D^2g|$$

que és menor o igual que una constant independent de ε que anomenarem N_4

Així

$$(1^*)\leqslant|D\varphi_r\varphi_s^{-1}-D\varphi_r\ \Psi_s^{-1}|\,|D\varphi_s^{-1}|\leqslant|D^2\varphi_r(\xi)|\,|\varphi_s^{-1}-\Psi_s^{-1}|\,|D\varphi_s^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant N_4d_4'N_2\,\varepsilon\, d_3',$$

$$(2^*)\leqslant|D\varphi_r\ \Psi_s^{-1}-D\Psi_r\circ\Psi_s^{-1}|\,|D\varphi_s^{-1}|\leqslant N_3d_3'\varepsilon$$

pel que segueix al lema 2 4 6 ,

$$(3^*)\leqslant|D\Psi_r\ \Psi_s^{-1}|\,|D\varphi_s^{-1}-D\Psi_s^{-1}|$$

Abans de continuar afitant, notem que si A i B són aplicacions lineals inversibles

$$|A^{-1}-B^{-1}| \leqslant |A^{-1}|\,|B^{-1}|\,|A-B|$$

i que si a més, $|A-B| \leqslant |A^{-1}|^{-1}$ llavors

$$|B^{-1}| \leqslant 1/(|A^{-1}|^{-1}-|A-B|)$$

Llavors

$$|D\varphi_s^{-1}-D\psi_s^{-1}| = |(D\varphi_s)^{-1}\,\varphi_s^{-1}-(D\psi_s)^{-1}\,\psi_s^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant |(D\varphi_s)^{-1}\circ\varphi_s^{-1}-(D\varphi_s)^{-1}\,\psi_s^{-1}|+|(D\varphi_s)^{-1}\,\psi_s^{-1}-(D\psi_s)^{-1}\,\psi_s^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant |D(D\varphi_s)^{-1}|\,|\varphi_s^{-1}-\psi_s^{-1}|+|(D\varphi_s)^{-1}-(D\psi_s)^{-1}|$$

$|D(D\varphi_s)^{-1}|$ és menor que una constant independent de ε que anomenem N_5

Si ε és prou petit podem utilitzar les anteriors fórmules amb $A=D\varphi_s$ i $B=D\psi_s$ perquè $\sup_{\Pi_1(S)}(D\varphi_s)^{-1}$ és una certa quantitat independent de ε Tenim que

$$|(D\psi_s)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{|(D\varphi_s)^{-1}|}-|(D\varphi_s)^{-1}-(D\psi_s)^{-1}|}$$

i per tant $|(D\psi_s)^{-1}|$ és afitat Sigui N_6 una fita

Llavors $|(D\varphi_s)^{-1}-(D\psi_s)^{-1}| \leqslant d_3'N_6N_3\,\varepsilon$ Per tant

$$(3^*) \leqslant N_5\,\frac{N_2}{d_1'}\,\varepsilon + d_3'N_6N_3\,\varepsilon$$

Finalment

$$|Dg_e-Df_e| \leqslant (N_2N_4d_3'/d_1'+N_3d_3'+d_4'N_2N_5+N_3N_6d_3')\,\varepsilon$$

Suposem que el teorema és cert per a $r-1 \geqslant 0$ i suposem que F i G són de classe C^{r+1}

Definim les seguents aplicacions

$$\Delta F \quad A \times \mathbb{R}^n \longrightarrow F(A) \times \mathbb{R}^n \quad \text{per} \quad \Delta F(x,v) = (F(x), DF(x)v)$$

$$\Delta G \quad A \times \mathbb{R}^n \longrightarrow G(A) \times \mathbb{R}^n \quad \text{per} \quad \Delta G(x,v) = (G(x), DG(x)v)$$

que són, de fet famílies de difeomorfismes ja que depenen de ε i

$$(\Delta F)^{-1}(y,w) = (F^{-1}(y), DF^{-1}(y)w)$$

$$(\Delta G)^{-1}(y,w) = (G^{-1}(y), DG^{-1}(y)w)$$

com es comprova immediatament

Observem que ΔF té $(0,0)$ com a punt fix hiperbòlic ja que

$$D(\Delta F)(x,v) = \begin{pmatrix} DF(x) & 0 \\ D^2F(x)(v, \ ) & DF(x) \end{pmatrix}$$

i per tant

$$D(\Delta F)(0,0) = \begin{pmatrix} DF(0) & 0 \\ 0 & DF(0) \end{pmatrix}$$

Com que $DF(0)$ és una matriu hiperbòlica $D(\Delta F)(0,0)$ també ho és Llavors ΔF té la varietat invariant estable de $(0,0)$ que anomenarem $W^s_{\Delta F}$

<u>Lema 2 4 8</u>

Si a l'entorn d'un cert punt p, la varietat invariant estable de F es pot posar com a gràfica d'una funció, que per simplicitat de notació suposarem que és del tipus $U \subset E_1 \longrightarrow E_2$ que direm f, llavors, en un entorn de (p,φ), la varietat invariant estable de ΔF es pot posar com a gràfica de la funció $U \times \mathbb{R}^{\ell} \longrightarrow E_2 \times \mathbb{R}^{\ell}$ definida per $(x,v) \longmapsto (f(x),Df(x)v)$

Veiem que per a ΔF es verifiquen les hipòtesis del teorema en $A \times E(\beta)$ on $E(\beta)$ és una bola de radi $\beta > 0$ en $\mathbb{R}^n$

En primer lloc és clar que ΔF és un difeomorfisme de classe C^r

Com que $G(x) = \varphi(\varepsilon^{\alpha},x)$ i $DG(x) = D_2\varphi(\varepsilon^{\alpha},x)$ $(x \in S^{-1}(A))$

amb $D_1\varphi(t,x) = X(\varphi(t,x))$ i $D_1D_2\varphi(t,x) = DX(\varphi(t,x))D_2\varphi(t,x))$

tenim que

$$D_1D_2\varphi(t,x)v = DX(\varphi(t,x))D_2\varphi(t,x)v \qquad (v \in \mathbb{R}^n)$$

Llavors ΔG és el flux temps ε^{α} del camp definit per

$$(X,DX)(x,v) = (X(x),DX(x)v)$$

el qual és de classe C^r

La hipòtesi i) ja està provada

Per a la hipòtesi ii), observant la matriu de $D(\Delta F(0,0))$ es veu que aquesta diagonalitza i té els mateixos valors propis que $DF(0,0)$ El mateix passa per a $D(\Delta G)(0,0)$

Per provar iii), sigui $(x,v) \in A \times E(\beta)$

$$|D(\Delta F)(x,v) - I| = \left| \begin{pmatrix} DF(x) & 0 \\ D^2F(x)(v,\ ) & DF(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right|$$

Sigui $u = \binom{u_1}{u_2} \in \mathbb{R}^{2n}$ amb $|u| \leq 1$ (Això implica que $|u_1|, |u_2| \leq 1$)

$$\left| (D(\Delta F(x,v) - I)\binom{u_1}{u_2} \right| = \left| \begin{pmatrix} (DF(x)-I)u_1 \\ D^2F(x)(v,u_1) + (DF(x)-I)u_2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$=\max\left[|DF(x)-I||u_1|,|D^2F(x)||v||u_1|+|DF(x)-I||u_2|\right]\leqslant$$

$$\leqslant L_2\varepsilon^{\alpha}|v|+C\varepsilon^{\alpha}\leqslant(L_2\beta+C)\varepsilon^{\alpha}$$

$$|D^k(\Delta F)(x,v)|=|(D^kF(x)\ \ D^{k+1}F(x)(v,\ ))|=$$
$$=\max\left[|D^kF(x)|\ \ |D^{k+1}F(x)(v\ \ )|\right]\leqslant L_k\varepsilon^{\alpha}+L_{k+1}\ \varepsilon^{\alpha}|v|=(L_k+L_{k+1}\beta)\varepsilon^{\alpha}$$

$$|D^k\Delta F(x\ \ v)-D^k\Delta G(x,v)|=|(D^kF(x)\ \ D^{k+1}F(x)(v,\ ))-$$
$$-(D^kG(x)\ \ D^{k+1}G(x)(v,\ ))|=$$

$$=\max\left[|D^kF(x)-D^kG(x)|\ \ |(D^{k+1}F(x)-D^{k+1}G(x))(v,\ )|\right]\leqslant$$
$$\leqslant(M_k+M_{k+1}\beta)\varepsilon^{\alpha+1}$$

Llavors com a conclusió per a ε prou petit, si $\bar{f}$ i $\bar{g}$ representen les funcions tals que les seves gràfiques ens donen les varietats invariants estables de ΔF i ΔG respectivament a l'entorn d'un cert punt, tenim que

$$|D^k\bar{f}-D^k\bar{g}|=O(\varepsilon)\qquad 0\leqslant k\leqslant r-1$$

però això vol dir que

$$|D^k(f,Df\ )-D^k(g,Dg\ )|=O(\varepsilon)$$

on f i g representen les varietats invariants estables de F i G Per tant

$$|D^{k+1}f-D^{k+1}g|=O(\varepsilon)\qquad o\leqslant k\leqslant r-1$$

Això acaba la demostració del teorema

Donem ara les demostracions dels lemes

<u>Demostració del lema 2 4 1</u>

Només cal veure que la matriu que porta la part lineal de

G_ε a l'origen a forma diagonal no depén de ε Per això és suficient que les direccions pròpies de $DG_\varepsilon(0,0)$ no depenguin de ε

Escrivim $G_\varepsilon(x,y)=\varphi(\varepsilon^\alpha,x,y)$ on φ és el flux solució del camp X Llavors $DG_\varepsilon(0,0)=D_2\varphi(t,x,y)|_{(\varepsilon^\alpha,0\ 0)}$ on D_2 és la derivada respecte de les condicions inicials i $D_2\varphi(t\ x\ y)$ verifica l'equació

$$D_1D_2\varphi(t,x,y)=DX(\varphi(t,x,y))D_2\varphi(t,x,y)$$

amb la condició $D_2\varphi(0,x\ y)=I$ $\varphi(t,0,0)=(0,0)$ és solució perquè $G_\varepsilon(0,0)=(0,0)$

Llavors $D_1D_2\varphi(t,0,0)=DX(0,0)D_2\varphi(t,0,0)$ on ara $M\equiv DX(0,0)$ és una matriu numèrica i per tant $D_2\varphi(t,0,0)=\exp Mt$ i $D_2G_\varepsilon(0,0)=D_2\varphi(\varepsilon^\alpha,0,0)=\exp M\varepsilon^\alpha$

Si v és un vector propi de exp M, és vector propi de M i també de $\exp M\varepsilon^\alpha$

A més

$$B^{-1}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1/\mu_{\ell+1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\mu_n \end{pmatrix}$$

i per tant $|B^{-1}(\varepsilon)| = \sup_{\ell+1\leq i\leq n} (1/\mu_i)=1/(1+a_s\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1}))$

amb $a_s = \inf_{\ell+1\leq i\leq n} (a_i)$ Per tant, si ε és prou petit, existeix $a'>0$ tal que $|B^{-1}(\varepsilon)|< 1-a'\varepsilon^\alpha$

Anàlogament es veu que existeix $a>0$ tal que $|A(\varepsilon)|< 1-a\ \varepsilon^\alpha$

Prenem $a=\min(a',a\ )$

<u>Demostració del lema 2 4 2</u>

Tenim que

$D\tilde{G}-I=D(S^{-1}GS)-I=S^{-1}(DG\ S)\ S-I=S^{-1}(DG\circ S-I)\ S$

Per tant

$|D\tilde{G}-I|\leq|S^{-1}||DG\ S-I||S|<|S||S^{-1}|C\,\varepsilon^{\alpha}$

Prenem

$C = C|S||S^{-1}|$

Igualment per a $|D\tilde{F}-I|$

A més

$D^2\tilde{G}=D(S^{-1}(DG\ S)S)= S^{-1}(D^2G\ S)\ S\ S$

i per inducció

$D^k\tilde{G}= S^{-1}(D^k\ G\circ S)\ S^k$

que implica que

$|D^k\tilde{G}|\leq|S^{-1}||D^kG\ S||S|^k<|S^{-1}||S|^k\ L_k\,\varepsilon^{\alpha}$

Prenem

$L_k = |S^{-1}||S|^k\ L_k$

Igualment per a $|D^k\tilde{F}|$

Finalment

$|D^k\tilde{G}-D^k\tilde{F}|=|S^{-1}(D^kG\ S)\ S^k- S^{-1}(D^kF\ S)\ S^k|=|S^{-1}(D^kG\ S - D^kF\ S)\ S^k|\leq$

$\leq|S^{-1}||D^kG\ S-D^kF\ S||S|^k\leq|S^{-1}||S|^kM_k\,\varepsilon^{\alpha+1}$

Prenem

$M_k'' = |S^{-1}||S|^k\ M_k$

Demostració del lema 2 4 3

Provem primer la inclusió $(S^{-1}(A)-\delta\varepsilon)\cap E(\rho+1)\subset F(S^{-1}(A))$

N'hi ha prou en provar que si $z\in S^{-1}(A)-\delta\varepsilon$, amb la condició $|z|<\rho+1$, llavors $F^{-1}(z)\in S^{-1}(A)$,perquè això vol dir que $F^{-1}(S^{-1}(A)-\delta\varepsilon)\subset S^{-1}(A)$ i com que F és bijectiva, que $S^{-1}(A)-\delta\varepsilon\subset F(S^{-1}(A))$

Si $z\in S^{-1}(A)-\delta\varepsilon$

$$|F^{-1}z-z|=|F^{-1}z-F^{-1}(0)-z|=|DF^{-1}(\xi)(z-0)-z|=|(DF^{-1}(\xi)-I)z|\leqslant$$

$$\leqslant|DF^{-1}(\xi)-I||z|\leqslant C'\varepsilon^{\alpha}|z|=C'\varepsilon^{\alpha-1}|z|\varepsilon\leqslant\delta\varepsilon$$

que implica

$$|F^{-1}z|\leqslant|z|+\delta\varepsilon$$

i per tant

$$F^{-1}(z)\in S^{-1}(A)$$

Igualment

$$(S^{-1}(A)-\delta\varepsilon)\cap E(\rho+1)\subset G(S^{-1}(A))$$

També tenim

$$k(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k}M_0'\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant N(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{N}M_0'\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant\frac{m}{\varepsilon^{\alpha}}(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{m/\varepsilon^{\alpha}}M'_0\,\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant$$

$$\leqslant m(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{mC'/C'\varepsilon^{\alpha}}M_0'\varepsilon<me^{mC'}M_0'\varepsilon$$

Si $x\in(S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon)\cap E(\rho)\subset F(S^{-1}(A))\cap G(S^{-1}(A))$

$$|F^{-1}(x)-G^{-1}(x)|\leqslant M_0'\,\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant l(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{l}M_0'\varepsilon^{\alpha+1}\leqslant\delta\varepsilon$$

que implica que

$$|F^{-1}(x)|\leqslant|G^{-1}(x)|+\delta\varepsilon$$

i per tant

$$F^{-1}(x)\in S^{-1}(A)-\delta\varepsilon \quad \text{i} \quad F^{-1}(x)\in E(\rho+1)$$

Aquí només cal que $\delta\varepsilon<1$

Suposant que l'afirmació sigui certa per a $k-1\geqslant 0$,

$$|F^{-k}(x)-G^{-k}(x)|=|F^{-1}F^{-(k-1)}(x)-G^{-1}G^{-(k-1)}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant|F^{-1}(F^{-(k-1)}(x))-G^{-1}(F^{-(k-1)}(x))|+|G^{-1}(F^{-(k-1)}(x))-G^{-1}(G^{-(k-1)}(x))|\leqslant$$

$$\leqslant M_0'\,\varepsilon^{\alpha+1}+|DG^{-1}(\xi)|\,|F^{-(k-1)}(x)-G^{-(k-1)}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant M_0'\,\varepsilon^{\alpha+1}+(1+C'\varepsilon^{\alpha})(k-1)(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k-1}M_0'\,\varepsilon^{\alpha+1}=$$

$$=\left[M_0'+(k-1)(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k}M_0'\right]\varepsilon^{\alpha+1}<k(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k}\varepsilon^{\alpha+1}<\delta\varepsilon$$

Per tant

$$|F^{-k}(x)|\leqslant|G^{-k}(x)|+\delta\varepsilon$$

que implica que

$$F^{-k}(x)\in(S^{-1}(A)-\delta\varepsilon)\cap E(\rho+1)$$

<u>Demostració del lema 2 4 4</u>

Si $x\in(S^{-1}(A)-3\delta\varepsilon)\cap E(\rho-1)$ implica que $\xi\in S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon$ i per tant $|DG^{-1}(\xi)|\leqslant 1+C'\varepsilon^{\alpha}$

De $G^{-1}(x)-G^{-1}(\xi)=DG^{-1}(\xi_1)(x-\xi)$ amb $|x-\xi_1|<|x-\xi|<K_0\varepsilon<\delta\varepsilon$

tenim que $\xi_1\in(S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon)\cap F(\rho)$ i per tant

$|G^{-1}(x)-G^{-1}(\xi)|\leqslant(1+C'\varepsilon^{\alpha})K_0\varepsilon<\delta\varepsilon$ d'on tenim que $G^{-1}(\xi)\in(S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon)\cap E(\rho)$

Suposant que sigui cert per a $k-1\geqslant 0$,

per la hipòtesi d'inducció $G^{-(k-1)}(\xi)\in S^{-1}(A)-2\delta\varepsilon$ i

$$|DG^{-(k-1)}(\xi)|\leqslant(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k-1},$$

per tant com que

$$DG^{-k}(\xi)=D(G^{-1}G^{-(k-1)})(\xi)=DG^{-1}(G^{-(k-1)}(\xi))DG^{-(k-1)}(\xi)$$

tenim

$$|DG^{-k}(\xi)| \leqslant (1+C'\varepsilon^{\alpha})(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k-1} = (1+C\ \varepsilon^{\alpha})^{k} \leqslant (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{m/\varepsilon^{\alpha}} =$$

$$= (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{mC'/C'\varepsilon^{\alpha}} < e^{mC'}$$

Com que

$$|G^{-k}(\xi) - G^{-k}(x)| \leqslant |DG^{-k}(\xi_2)|\ |\xi - x| \quad \text{amb}$$

$$|\xi_2 - x| < |\xi - x| < K_0\varepsilon$$

tenim que

$$|G^{-k}(\xi) - G^{-k}(x)| \leqslant e^{mC'} K_0 \varepsilon < \delta\varepsilon$$

que implica que

$$G^{-k}(\xi) \in (S^{-1}(A) - 2\delta\varepsilon) \cap E(\rho)$$

<u>Demostració del lema 2 4 5</u>

Pel lema 2 4 3, $F^{-k}(x) \in (S^{-1}(A) - \delta\varepsilon) \cap E(\rho+1)$ per a $0 \leqslant k \leqslant N$

$$DG^{-N}(x) = DF^{-N}(x) = \prod_{i=1}^{N} DG^{-1}(G^{-(N-i)}(x)) - \prod_{i=1}^{N} DF^{-1}(F^{-(N-i)}(x))$$

que escrivim en forma telescòpica Un dels termes és del tipus

$$DG^{-1}(G^{-(N-1)}(x)) \quad DG^{-1}(G^{-(N-i)}(x)) \quad DF^{-1}(x) -$$

$$- DG^{-1}(G^{-(N-1)}(x)) \quad DF^{-1}(F^{-(N-i)}(x)) \quad DF^{-1}(x) \quad ,$$

el qual, en norma, és més petit que

$$|DG^{-1}(G^{-(N-1)}(x))| \quad |DG^{-1}(G^{-(N-i+1)}(x))|\,|DG^{-1}(G^{-(N-i)}(x)) - DF^{-1}(F^{-(N-i)}(x))|$$

$$|DF^{-1}(F^{-(N-i-1)}(x))| \quad |DF^{-1}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{i-1} |DG^{-1}(G^{-(N-i)}(x)) - DF^{-1}(F^{-(N-i)}(x))| (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{N-i}$$

Diem e_6 a la darrera diferència,

$$|e_6| \leqslant |DG^{-1}(G^{-(N-1)}(x))-DG^{-1}(F^{-(N-1)}(x))|+$$

$$+ |DG^{-1}(F^{-(N-1)}(x))-DF^{-1}(F^{-(N-1)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |D^2G^{-1}(\xi)||G^{-(N-1)}(x)-F^{-(N-1)}(x)|+M_1'\varepsilon^{\alpha+1} \leqslant$$

$$\leqslant L_2'\varepsilon^{\alpha} me^{mC'}M_0'\varepsilon + M_1'\varepsilon^{\alpha+1} = (L_2' me^{mC'}M_0' + M_1')\varepsilon^{\alpha+1}$$

Finalment

$$|DG^{-N}(x)-DF^{-N}(x)| \leqslant N(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{N-1}(L_2' me^{mC'}M_0'+M_1')\varepsilon^{\alpha+1} <$$

$$< me^{mC'}(L_2' me^{mC'} M_0' + M_1')\varepsilon$$

<u>Demostració del lema 2 4 6</u>

Per a k=1 tenim $|D^2G^{-1}| < L_2'\varepsilon^{\alpha}$

Suposem que és cert per a $k-1 \geqslant 0$

Utilitzant la fórmula

$$D^2(g\ f)(x)(e_1,e_2)=Dg\ f(x)(D^2f(x)(e_1,e_2))+$$

$$+D^2g\ f(x)(Df(x)(e_1),Df(x)(e_2))$$

es té

$$D^2G^{-k}(x)(e_1,e_2)=D^2(G^{-(k-1)}G^{-1})(x)(e_1,e_2)=$$

$$= DG^{-(k-1)}\ G^{-1}(x)(D^2G^{-1}(x)(e_1,e_2)) +$$

$$+ D^2G^{-(k-1)}\circ G^{-1}(x)(DG^{-1}(x)(e_1),DG^{-1}(x)(e_2))$$

Si $|e_1|, |e_2| \leqslant 1$, prenent normes s'arriba a l'afitació

$$|D_2G^{-k}(x)(e_1,e_2)| \leqslant$$

$$\leqslant (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k-1} L_2'\varepsilon^{\alpha} + (\sum_{i=k-2}^{2k-4} (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{i}L_2'\varepsilon^{\alpha})(1+C'\varepsilon^{\alpha})^2 =$$

$$= \left[(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{k-1} + \sum_{i=k}^{2k-2} (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{i}\right] L_2' \varepsilon^{\alpha} =$$

$$= \sum_{i=k-1}^{2k-2} (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{i} L_2' \varepsilon^{\alpha}$$

A més, $\sum_{i=k-1}^{2k-2} (1+C'\varepsilon^{\alpha})^{i} < \frac{(1+C'\varepsilon^{\alpha})^{2N}}{C'\varepsilon^{\alpha}} < \frac{e^{2mC'}}{C\varepsilon^{\alpha}}$,

i amb això s'arriba a la conclusió

Demostració del lema 2 4 7

De $\varphi_s \varphi_s^{-1} = \psi_s \psi_s^{-1}$

$$0 = |\varphi_s\varphi_s^{-1} - \psi_s\psi_s^{-1}| \geq |\varphi_s\varphi_s^{-1} - \varphi_s\psi_s^{-1}| - |\varphi_s\psi_s^{-1} - \psi_s\psi_s^{-1}| \geq$$

$\geq (\sup_{\xi\in\bar R} |D\varphi_s^{-1}(\xi)|)^{-1} |\varphi_s^{-1} - \psi_s^{-1}| - |\varphi_s - \psi_s|$ i per tant

$$|\varphi_s^{-1} - \psi_s^{-1}| \leq \sup_{\xi\in\bar R} |D\varphi_s^{-1}(\xi)|\,|\varphi_s - \psi_s| \leq d_4' N_2 \varepsilon$$

on $d_4' = \sup_{\xi\in\bar R} |D\varphi_s^{-1}(\xi)|$

Demostració del lema 2 4 8

Provem per inducció que si $x \in U \subset E_1$ i $v \in \mathbb{R}^{\ell}$

$$(\Delta F)^k (x, f(x), v, Df(x)\ v) = (F^k(x, f(x)), D(F^k\ (I,f))(x)\ v)$$

Per a k=1 s'aplica la definició

Suposant que sigui cert per a $k-1 \geqslant 0$

$$(\Delta F)^k(x,f(x),v,Df(x)\ v)=\Delta F(F^{k-1}(x,f(x)),D(F^{k-1}\ (I,f))(x)\ v)=$$

$$=(F^k(x,f(x)),DF(F^{k-1}(x,f(x)))\ D(F^{k-1}\circ(I,f))(x)\ v)$$

La segona component és

$$DF(F^{k-1}\ (I,f)(x))\ D(F^{k-1}\ (I,f))(x)\ v=D(F^k\ (I,f))(x)\ v$$

i per comprovar que $(x,f(x),v,Df(x)\ v)\in W^s_{\Delta F}$ fem

$$\lim_{n\ \infty}(\Delta F)^n(x,f(x),v,Df(x)\ v)=\lim_{n\to\infty}(F^n(x,f(x)),D(F^n\ (I,f))(x)\ v)$$

La primera component tendeix a zero perquè $(x,f(x))\in W^s_F$

La segona component es pot mirar en la forma

$$DF^n(x,f(x))(v,Df(x)\ v)$$

que no és més que el transport per la diferencial del vector $(v,Df(x)\ v)$ tangent a W^s_F Però com que estem en la varietat estable aquesta quantitat tendeix a zero

Amb això s'acaben les demostracions dels lemes

Teorema 2 5

Amb les mateixes hipòtesis del teorema anterior tenim la mateixa conclusió respecte de les varietats invariants inestables

Demostració

En efecte, les varietats invariants inestables de F_ε i G_ε

són les varietats invariables estables de F_ε^{-1} i G_ε^{-1}

G_ε^{-1} és el flux temps ε^α del camp $-X$

Per aplicar el teorema anterior a F_ε^{-1} necessito comprovar les seves hipòtesis

i) i ii) són immediates

iii) és consequència de la proposició 2 1

2 4 Una aplicació Existència de punts homoclínics

Un problema difícil és, per a un difeomorfisme, o més en general, per a una família de difeomorfismes amb un punt fix hiperbòlic, provar que hi ha un punt homoclínic En general l'existència de simetries ajuda a determinar-ne l'existència

Els resultats del paràgraf anterior permeten de donar condicions per assegurar-ne l'existència per a famílies de difeomorfismes per a valors del paràmetre suficientment pròxims d'un cert valor (que considerarem 0)

Proposició 2 6

Sigui F_ε $U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una família de difeomorfismes conservatius de classe C^{r+1}, $(r\geqslant 1)$ del tipus

$$F_\varepsilon(x,y)=(\lambda x,\lambda^{-1}y) + \varepsilon^\alpha f(x,y) + \varepsilon^{\alpha+1} g(x,y,\varepsilon), \qquad (\alpha\geqslant 1),$$

amb $|g(x,y,\varepsilon)|\leqslant K$ per a $(x,y)\in U$ i $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

$\lambda = 1+a\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$, $a>0$ i la part lineal de f i g nulla Si

$$(2\ 2)\qquad \begin{aligned} x&=ax+f_1(x,y)\\ y&=-ay+f_2(x,y)\end{aligned}$$

té una òrbita homoclínica continguda en U, llavors per a ε prou petit F_ε té punts homoclínics

Demostració

En primer lloc observem que si F_ε és conservatiu per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ llavors (2 2) és un sistema conservatiu En efecte, de la condició det $DF_\varepsilon(x,y)=1$ que s'explicita

$$\det DF_\varepsilon(x,y) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\varepsilon^\alpha(a+D_x f_1(x,y))+O(\varepsilon^{\alpha+1}) & \varepsilon^\alpha D_y f_1(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}) \\ \varepsilon^\alpha D_x f_2(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}) & 1+\varepsilon^\alpha(-a+D_y f_2(x,y))+O(\varepsilon^{\alpha+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= 1+\varepsilon^\alpha(D_x f_1(x,y)+D_y f_2(x,y))+O(\varepsilon^{\alpha+1}) = 1,$$

obtenim que $D_x f_1(x,y)+D_y f_2(x,y) = 0$

Volem veure que es poden aplicar els teoremes 2 4 i 2 5

Per verificar i) manca veure que (0,0) és punt singular hiperbòlic de (2 2), que és immediat perquè la diferencial del camp(2 2) a l'origen és

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Si $G_\varepsilon(x,y)=\varphi(\varepsilon^\alpha, x,y)$ on $\varphi(t,x,y)$ és el flux solució de (2 2)

$$DG_\varepsilon(0,0) = \exp\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\varepsilon^\alpha = \begin{pmatrix} e^{a\varepsilon^\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-a\varepsilon^\alpha} \end{pmatrix}$$

i per tant els valors propis de $DG_\varepsilon(0,0)$ són

$$\lambda=e^{a\varepsilon^\alpha}=1+a\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{2\alpha}) \text{ i } \lambda^{-1}$$

que prova ii)

Finalment el corol lari 2 3 prova la hipòtesi iii)

Els teoremes 2 4 i 2 5 ens asseguren que les varietats invariants de F_ε estan a prop de les de G_ε

Les varietats invariants de G_ε coincideixen i són l'òrbita homoclínica de (2 2) Per tant les varietats invariants de F_ε estan properes entre si Com que F_ε és conservatiu s'han de tallar (26) Això prova l'existència d'un punt homoclínic i la proposició

CAPÍTOL 3

SEPARACIÓ ENTRE LES VARIETATS INVARIANTS PER A DIFEOMORFISMES

3 1 Introducció

En aquest capítol estudiem la separació entre les varietats invariants d'un punt hiperbòlic d'una família de difeomorfismes F_ε propera al flux temps ε^α d'un camp autònom que tingui separatriu homoclínica També estudiem el cas en que la família tingui dos punts hiperbòlics i el camp autònom tingui una separatriu heteroclínica

En les condicions adequades, una aplicació immediata dels teoremes 2 4 i 2 5 ens diu que les varietats invariants del punt hiperbòlic de F_ε estan a distància ordre de ε de les varietats invariants dei flux temps ε^α Si aquestes constitueixen una òrbita homoclínica llavors resulta que les branques de les varietats invariants estable i inestable de F_ε que estan a prop de l'òrbita homoclínica estan a distància ordre de ε entre si

Provarem que aquesta estimació es pot millorar extraordinàriament

Si els difeomorfismes F_ε són de classe C^{r+1} veurem que la distància és de l'ordre de $\varepsilon^{\alpha r}$ i si són de classe C^∞, la distància és de l'ordre de ε^k per a tot k Això vol dir que fixat k existeix una constant M independent de ε tal que la distància és menor que $M\varepsilon$ si ε és prou petit Aquesta constant depèn de k i pot créixer molt ràpidament en funció d'aquesta

El teorema 3 1 dóna condicions perquè hi hagi aquest comportament pel cas homoclínic i heteroclínic

El teorema 3 2 i el corol lari 3 3 donen condicions lleugerament diferents per obtenir les mateixes condicions

3 2 Separació entre les varietats invariants per a difeomorfismes

El seguent teorema dóna condicions per tenir afitacions per a la separació entre les varietats invariants de famílies de difeomorfismes

La hipòtesi iii) es verifica si la família és de la forma

$$F_\varepsilon(x,y)=(x,y)+\varepsilon^\alpha f(x,y)+\varepsilon^{\alpha+1}g(x,y,\varepsilon)$$

amb les derivades de f i g afitades en la regió considerada gràcies a la proposició 2 2 Aquesta forma no és molt restrictiva ja que moltes famílies de les considerades es poden posar en aquesta forma després de canvis de variables Vegeu els exemples del capítol 7

Teorema 3 1

Sigui F_ε una família de difeomorfismes de classe C^{r+1} de $A\subset\mathbb{R}^2$, obert, en la seva imatge Sigui X un camp autònom de classe C^{r+1} en A i sigui G_ε el flux temps ε^α d'aquest camp, $(\alpha\geqslant 1)$

Si

i) p_1 i p_2 són dos punts fixos hiperbòlics de F_ε i G_ε per a tot ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

ii) els valors propis de $DF_\varepsilon(p_j)$ són $\lambda_i^{(j)}=1+a_i\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$

i els de $DG_\varepsilon(p_j)$ són $\mu_i^{(j)}=1+a_i\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$,

$1\leqslant i,\ j\leqslant 2,$

iii) $|DF_\varepsilon - I| < C\,\varepsilon^\alpha$

$|D^k F_\varepsilon| < L_k\,\varepsilon^\alpha, \qquad 2 \leqslant k \leqslant r+1,$

$|D^k F_\varepsilon - D^k G_\varepsilon| < M_k\,\varepsilon^{\alpha+1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant r,$

en A per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

iv) Per a tot ε existeix un punt homoclínic de F_ε, si $p_1 = p_2$, o un punt heteroclínic si $p_1 \neq p_2$ Siguin W_1 i W_2 les varietats invariants associades a aquests punts homoclínics A més, els trossos de W_1 i W_2 des del punt fix fins al punt clínic corresponent estan contingudes en un compacte B contingut en A

Llavors

1) La separació entre W_1 i W_2 en una regió fixada és $O(\varepsilon^{\alpha r})$

2) Si $r = \infty$, la separació entre W_1 i W_2 és $O(\varepsilon^k)$ per a tot k

Demostració

Raonarem pel cas homoclínic, perquè el cas heteroclínic és anàleg

Pels teoremes 2 4 i 2 5 les varietats invariants de F_ε i G_ε són properes entre si

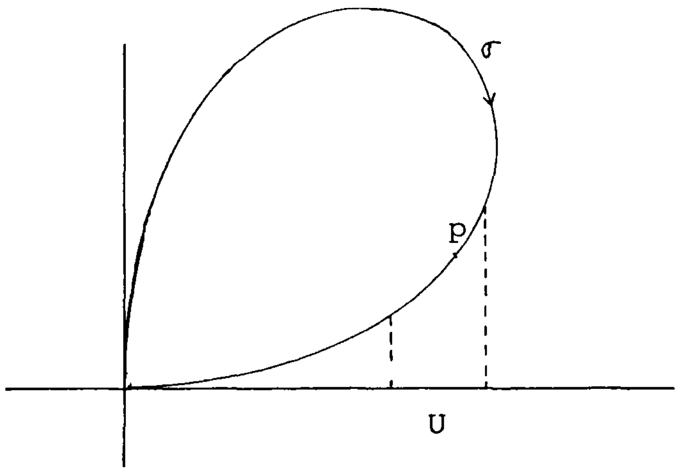
Sabem que les varietats invariants de G_ε són independents de ε Per tant, prop del punt homoclínic de F_ε les varietats invariants de G_ε són properes, però això obliga a que es tallin Com que les varietats invariants de G_ε són òrbites de X han de coincidir

Així tenim que X té una òrbita homoclínica, σ, (que coincideix amb les varietats invariants estable i inestable de l'origen de G_ε per a tot ε)

Evidentment σ està continguda en A

Sigui $\rho > 0$ tal que $B \subset B_\rho(0)$

Sigui P un punt de σ Sigui g $U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que la seva gràfica representa localment en un entorn de P a σ



De nou pels teoremes 2 4 i 2 5 les varietats invariants de F_ε es poden representar com a gràfiques de funcions f_1 $U-\delta \longrightarrow \mathbb{R}$, per a W_1, i f_2 $U-\delta \longrightarrow \mathbb{R}$, per a W_2 on $\delta > 0$ tal que $U-\delta \neq \emptyset$ i es verifica que

$$|D^k f_1 - D^k g| = O(\varepsilon)$$

(3 1)

$$|D^k f_2 - D^k g| = O(\varepsilon),$$

en $U-\delta$, per a $0 \leq k \leq r$

Sigui z un punt homoclínic de F_ε tal que $\Pi(z) \in U-\delta$, on Π és l'operador projecció adequat

Com que

$$|F_\varepsilon z - z| = |F_\varepsilon z - F_\varepsilon p_1 - z| \leqslant |DF_\varepsilon(\xi)\ z - z| = |DF_\varepsilon(\xi) - I\ ||z| <$$

$$< C\,\varepsilon^\alpha |z| < C\,\varepsilon^\alpha \rho$$

Llavors $F_\varepsilon z$ també és homoclínic i la distància entre ell i z és menor que $C\varepsilon^\alpha\rho$

També

$$|\Pi(F_\varepsilon z) - \Pi(z)| \leqslant |\Pi| |F_\varepsilon z - z| < C\,\varepsilon^\alpha\rho$$

Definim la funció $f=f^1-f^2$

Per la desigualtat triangular, de (3 1) obtenim que $|D^k f| = O(\varepsilon)$, $0 \leqslant k \leqslant r$

Si z és un punt homoclínic tal que $\Pi(z) \in U-\delta$, $f(\Pi(z))=0$

Com que la imatge d' un punt homoclínic també és homoclínic , per a ε prou petit hi ha r+3 punts en $U-\delta$ que són zeros de f Designarem, genèricament, per p_0 els zeros de f Entre dos zeros de f hi ha un zero de Df Per tant la separació màxima entre dos zeros de f és $2C\varepsilon^\alpha\rho$ Designarem per p_1 els zeros de Df Entre tres zeros de f hi ha un zero de D^2f La separació màxima entre dos zeros de D^2f és $3C\varepsilon^\alpha\rho$ Els anomenem p_2, etc

Provem ara 1) per contradicció

Suposem que la separació entre les varietats invariants no és $O(\varepsilon^{\alpha r})$ en la regió estudiada $(\Pi^{-1}(U-\delta))$

Això indica que existeix q_0 (que en general depèn de ε) tal que

$$|f(q_0)| > M\,\varepsilon^{\alpha r} \qquad \text{(M és una constant adequada)}$$

Llavors pel teorema del valor mitjà existeix q_1 tal que

$$|f(q_0)-f(p_0)|=|Df(q_1)|\,|q_0-p_0|<|Df(q_1)|C\varepsilon^{\alpha}\rho$$

però a la vegada

$$|f(q_0)-f(p_0)|=|f\ (q_0)|>M\varepsilon^{\alpha r},$$

i per tant

$$|Df(q_1)|>\frac{M\varepsilon^{\alpha r}}{C\varepsilon^{\alpha}\rho}$$

Aplicant de nou el teorema del valor mitjà existeix q_2 tal que

$$|Df(q_1)-Df(p_1)|=|D^2f(q_2)|\,|q_1-p_1|<|D^2f(q_2)|\ 2C\varepsilon^{\alpha}\rho$$

però

$$|Df(q_1)\ -Df(p_1)|=|Df(q_1)|>\frac{M\varepsilon^{\alpha r}}{C\varepsilon^{\alpha}\rho}$$

i per tant

$$|D^2f(q_2)|>\frac{M\varepsilon^{\alpha r}}{2\ C^2\rho^2\varepsilon^{2\alpha}}$$

Procedint per inducció s'obté que

$$|D^rf(q_r)|>\frac{M\varepsilon^{\alpha r}}{r!C^r\rho^r\varepsilon^{r\alpha}}$$

i això està en contradicció amb que $|D^rf|=O(\varepsilon)$

Per a provar 2, suposem que la separació entre W_1 i W_2 no és $O(\varepsilon^n)$ per a un cert n Com que F_ε és de classe C^{∞}, en particular és de classe C^{n+1} L'apartat 1) i el fet que $\alpha\geq 1$ acaben la demostració

Com ja hem dit, la presència de simetries pot ser útil per a verificar la condició que F_ε té un punt homoclínic per a tot ε, però en general és difícil de verificar-ho Per això donem un enunciat alternatiu sense aquesta hipòtesi per obtenir els mateixos resultats

Teorema 3 2

Siguin F_ε i X com al teorema 3 1 verificant i), ii), iii) amb $p_1=p_2$

Si a més,

iv) F_ε és una família de difeomorfismes conservatius,

v) X té una òrbita homoclínica σ

Llavors F_ε té punts homoclínics i es tenen les mateixes conclusions 1) i 2) del teorema 3 1

Demostració

Per i), ii) i iii) podem aplicar els teoremes 2 4 i 2 5 Llavors les varietats invariants estan a distància ordre de ε de σ i per tant a distància ordre de ε entre elles Com que F_ε és conservatiu s'han de tallar (26) Això prova l'existència d'un punt homoclínic A més les varietats invariants des de p_1 a aquest punt homoclínic estan prop de σ i per tant existeix un compacte contingut en A que conté aquests trossos de varietats Això acaba la demostració

Encara es pot donar un corol lari en el cas que disposem d'una forma més explícita de F_ε en el que no cal conèixer a priori el camp X

<u>Corol lari 3 3</u>

Sigui F_ε una família de difeomorfismes de $A\subset\mathbb{R}^2$, obert, en la seva imatge, de classe C^{r+1},del tipus

$$F_\varepsilon(x,y)=(\lambda x,\mu y)+\varepsilon^\alpha(f_1(x,y),f_2(x,y))+\varepsilon^{\alpha+1}(g_1(x,y,\varepsilon),g_2(x,y,\varepsilon)),$$

$$(\alpha\geqslant 1) \text{ amb } \lambda=1+a_1\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1}) \text{ i } \mu=1-a_2\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1}),\ a_1,a_2>0,$$

i f_1,f_2,g_1,g_2 no contenen termes lineals en x i y

Si F_ε té un punt homoclínic corresponent a les varietats invariants de l'origen per a tot ε, de manera que les varietats invariants des de l'origen fins al punt homoclínic estan contingudes en un compacte B contingut en A, llavors es tenen les mateixes conclusions del teorema 3 1

<u>Demostració</u>

Considerem el camp donat per

$$(3\ 2)\qquad \begin{aligned} x&=a_1x+f_1(x,y)\\ y&=-a_2y+f_2(x,y)\end{aligned}$$

Sigui G_ε el flux temps ε^α de (3 2)

Ës fâcil veure que

$$DG_\varepsilon(0,0) = \exp\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & -a_2\end{pmatrix}\varepsilon^\alpha = \begin{pmatrix} e^{a_1\varepsilon^\alpha} & 0\\ 0 & e^{-a_2\varepsilon^\alpha}\end{pmatrix}$$

i per tant els valors propis de $DG_\varepsilon(0,0)$ són del tipus

$1+a_1\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$ i $1-a_2\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$

Pel corol lari 2 3, donat un compacte $B\subset A$ es verifica que

$$|DF_\varepsilon - I| < C\varepsilon^\alpha$$

$$|D^k F_\varepsilon| < L_k \varepsilon^\alpha \quad , \; 2 \leq k \leq r+1 \, ,$$

$$|D^k F_\varepsilon - D^k G_\varepsilon| < M_k \varepsilon^{\alpha+1} \quad , \; 0 \leq k \leq r ,$$

en B, per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, amb ε_0 prou petit

Es verifiquen les hipòtesis del teorema 3 1 Això acaba la demostració

CAPÍTOL 4

SEPARACIO ENTRE LES VARIETATS INVARIANTS

PER A FLUXOS

4 1 Introducció

En aquest capítol estudiarem, aplicant els resultats del capítol anterior, la separació entre les varietats invariants d'òrbites periòdiques de sistemes del tipus

(4 1) $x=f(x)+\varepsilon g(x,\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)$

amb g T-periòdica respecte de t/ε , considerats com a pertorbacions de

(4 2) $x=f(x)$

amb un punt singular hiperbòlic i una separatriu homoclínica

Per això considerarem l'aplicació de Poincaré temps εT de (4 1), la qual està globalment ben definida per la periodicitat de g (3) i la compararem amb l'anàloga aplicació de Poincaré de (4 2)

Notem que (4 1) és equivalent a

(4 3) $x=\varepsilon f(x)+\varepsilon^2 g(x,t,\varepsilon)$

a través d'un escalat del temps i que (4 3) es pot interpretar com un sistema de dinàmica lenta pertorbat per una funció periòdica

Aquests sistemes apareixen en la teoria de promitjaments (20)

En (14) s'estudien exemples senzills, en el cas analític

En l'apartat 4 2 s'estableix l'existència d'una òrbita periòdica γ de (4 1) prop del punt singular hiperbòlic de (4 2), que suposarem, sense pèrdua de generalitat, que és l'origen i es dóna una fita de la seva amplitud que és essencial en els següents apartats La hiperbolicitat d'aquesta òrbita es prova en el teorema 4 3 que és quan es necessita

Les aplicacions de Poincaré citades més amunt són de fet difeomorfismes i en dependre de ε les podem considerar formant una família En l'apartat 4 3 estudiem la proximitat d'aquestes famílies Com que l'aplicació de Poincaré de (4 1) no té el mateix punt fix que la de (4 2) pel fet que el punt fix de (4 2) esdevé en (4 1) òrbita periòdica (considerant (4 1) com a pertorbació de (4 2)), a (4 1) li fem la translació $y=x-\gamma(t)$ perquè coincideixin obtenint així

(4 4) $$y=f(y+\gamma(t))+\varepsilon g(y+\gamma(t),\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon) -\gamma(t)$$

Considerarem les aplicacions de Poincaré associades a (4 2) i a (4 4) i utilitzarem tècniques semblants a les de la demostració de la proposició 2 2

Finalment en l'apartat 4 4 estudiem la separació entre les varietats invariants de l'òrbita periòdica de (4 1) obtenint resultats qualitativament anàlegs als del capítol anterior

4 2 Òrbita periòdica

Per a l'apartat 4 4 ens cal establir l'existència d'una òrbita periòdica de (4 1) prop del punt singular hiperbòlic de (4 2) i afitacions de la seva amplitud En aquest sentit donem la seguent proposició la demostració de la qual està inspirada en els mètodes de (15)

Suposarem que el punt singular és l'origen

Proposició 4 1

Sigui l'equació

(4 1) $\quad x=f(x)+\varepsilon g(x,t/\varepsilon,\varepsilon)$

on $f\ U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $g\ U\times\mathbb{R}\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ amb U, obert, contenint l'origen, són tals que

i) f és de classe C^2 en B_r (bola de radi r i centre l'origen) i $k_2^{(1)} \equiv \sup\limits_{x\in B_r} |D^2 f(x)|$

ii) g és de classe C^1 en $\bar{B}_r \equiv B_r\times\mathbb{R}\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$

i $k_0^{(2)} \equiv \sup\limits_{\bar{B}} |g(x,t,\varepsilon)|$ $\qquad$ i $k_1^{(2)} \equiv \sup\limits_{\bar{B}_r} |D_1^1 g(x,t,\varepsilon)|$

iii) $f(0)=0$ i $Df(0)$ és hiperbòlica

iv) g és T-periòdica respecte de la segona variable i

$$\int_0^T g(0,t,\varepsilon)dt=0 \quad \text{per a } |\varepsilon|<\varepsilon_0$$

Llavors (4 1) té una única òrbita periòdica γ de període εT tal que $|\gamma(t,\varepsilon)| < c\varepsilon^2$ per a tot t i $|\varepsilon|<\varepsilon_0$

Demostració

Per fer la demostració suposem que $\varepsilon>0$

Definim A=Df(0)

Prenem $c=2e^{1/2}Tk_0^{(2)}|A||A^{-1}|+1$ i

$$\varepsilon_0=\min\left(\frac{1}{2T|A|},\ \frac{1}{4k_1^{(2)}|A^{-1}|c},\ \left(\frac{1}{4|A^{-1}|k_2^{(1)}e^{1/2}c^2}\right)^{1/2},\left(\frac{1}{cr}\right)^{1/2}\right)$$

Introduïm la funció

$$\Psi(s)=f(\gamma(s))-A\gamma(s)+\varepsilon g(\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)$$

Provarem primer que γ és solució periòdica de (4 1) si i només si γ verifica

$$\gamma(t)=\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\int_0^{\varepsilon T}\phi(\varepsilon T-s)\Psi(s+t)\ ds$$

i és periòdica de període εT, on ϕ és la solució de $\dot\phi=Df(0)\phi$ amb $\phi(0)=I$ Evidentment $\phi(t)=\exp At$

En efecte, si γ és solució de

$$\dot x=Ax+f(x)-Ax+\varepsilon g(x,t/\varepsilon,\varepsilon)$$

verifica

$$\gamma(t)=\phi(t)\left[\gamma(0)+\int_0^t\phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds\right]$$

i si és εT-periòdica verifica a més $\gamma(t)=\gamma(t+\varepsilon T)$ per a tot t

Així

$$\phi(t)\left[\gamma(0)+\int_0^t\phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds\right]=\phi(t+\varepsilon T)\left[\gamma(0)+\int_0^{t+\varepsilon T}\phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds\right]=$$

$$=\phi(t+\varepsilon T)\left[\gamma(0)+\int_0^t\phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds+\int_t^{t+\varepsilon T}\phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds\right]$$

A l'última integral li fem el canvi s=u+t i obtenim

$$\int_0^{\varepsilon T}\phi^{-1}(u+t)\Psi(u+t)\ du$$

Tornem a escriure s en comptes de u i aïllem $\gamma(0)$

$$\left[\phi(t)-\phi(t+\varepsilon T)\right]\gamma(0)=-\phi(t)\int_0^t\phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds\ +$$

$$+\phi(t+\varepsilon T)\int_0^t \phi^{-1}(s)\Psi(s)\,ds + \phi(t+\varepsilon T)\int_0^{\varepsilon T}\phi^{-1}(s+t)\Psi(s+t)\,ds$$

Per aïllar $\gamma(0)$ necessitem que $\phi(t)-\phi(t+\varepsilon T)$ sigui inversible

$\phi(t)$ és inversible i $\phi(t)-\phi(t+\varepsilon T)=\phi(t)\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]$

D'altra banda

$$I-\phi(\varepsilon T)=I-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{k!}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{k!}=-\varepsilon TA\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{(k+1)!}$$

i l'operador que representa l'últim sumatori és inversible perquè

$$\left|I-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{(k+1)!}\right|=\left|-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{(k+1)!}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k|A|^k}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{e^{\varepsilon T|A|}-\varepsilon T|A|-1}{\varepsilon T|A|}\leqslant(\varepsilon T|A|)\leqslant(\varepsilon_0 T|A|)<1/2$$

si $\varepsilon T|A|\leqslant \ln 2$, on hem usat que per a $0<x\leqslant\ln 2$

$(e^x-x-1)/x<x$

A més

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{(k+1)!}\right)^{-1}\right|\leqslant 1/\left(1-\left|I-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{(k+1)!}\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant 1/(1-2(\varepsilon T|A|)^2)\leqslant 1/(1-\tfrac{1}{2})=2$$

Llavors $I-\phi(\varepsilon T)$ és inversible,

$$\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}=-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon T)^k A^k}{(k+1)!}\right)^{-1}\frac{1}{\varepsilon T}A^{-1}$$

i $\left|\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\right|\leqslant 2\,\frac{1}{\varepsilon T}\,|A^{-1}|$

Així

$$\gamma(0)=-\int_0^t \phi^{-1}(s)\Psi(s)\ ds+\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\phi(\varepsilon T)\int_0^{\varepsilon T}\phi^{-1}(s+t)\Psi(s+t)\ ds$$

i substituint a l'expressió de $\gamma(t)$

$$\gamma(t)=\phi(t)\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\phi(\varepsilon T)\int_0^{\varepsilon T}\phi^{-1}(s+t)\Psi(s+t)\ ds =$$

$$=\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\int_0^{\varepsilon T}\phi(\varepsilon T-s)\Psi(s+t)\ ds$$

Recíprocament, suposem que γ verifica aquesta darrera expressió A la integral li fem el canvi $u=s+t$ i obtenim

$$\gamma(t)=\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\int_t^{t+\varepsilon T}\phi(\varepsilon T-u+t)\Psi(u)\ du$$

Llavors

$$\gamma(t)=\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\left[\int_t^{t+\varepsilon T}\phi(\varepsilon T-u+t)\Psi(u)\ du+\phi(0)\Psi(t+\varepsilon T)-\phi(\varepsilon T)\Psi(t)\right]=$$

$$=\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\int_t^{t+\varepsilon T}A\phi(\varepsilon T-u+t)\Psi(u)\ du+\ \Psi(t)$$

on hem usat que Ψ és εT-periòdica, perquè γ ho és Per tant

$$\gamma(t)=A\gamma(t)+\Psi(t)=A\gamma(t)+f(\gamma(t))-A\gamma(t)+\varepsilon g(\gamma(t),t/\varepsilon,\varepsilon),$$

és a dir, γ és solució de (4 1) i és εT-periòdica

Per buscar solucions εT-periòdiques de (4 1) definim

$$\mathcal{X}=\{\gamma\ \mathbb{R}\longrightarrow U \text{ contínues, } \varepsilon T\text{-periòdiques tals que}$$
$$|\gamma(t)|\leqslant c\varepsilon^2 \text{ per a tot } t\}$$

i $\Lambda\ \mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$ definit per

$$(\Lambda\gamma)(t)=\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\int_0^{\varepsilon T}\phi(\varepsilon T-s)\Psi(s+t)\ ds$$

Anem a veure que Λ està ben definit i que és contracció Es clar que $\Lambda\gamma$ és contínua i εT-periòdica Per afitar $(\Lambda\gamma)(t)$ fem el canvi $s=\varepsilon z$ a la integral i obtenim

$$|(\Lambda\gamma)(t)|\leqslant\left|\left[I-\phi(\varepsilon T)\right]^{-1}\right|\left[\left|\int_0^T\varepsilon\phi(\varepsilon(T-z))\left[f(\gamma(\varepsilon z+t))-A\gamma(\varepsilon z+t)\right]dz\right|+\right.$$

$$+\left|\int_0^T \varepsilon^2\phi(\varepsilon(T-z))g(\gamma(\varepsilon z+t),(\varepsilon z+t)/\varepsilon,\varepsilon)dz\right|\Bigg]$$

Pel teorema de Taylor

$$|f(x)-f(0)-Df(0)x|\leqslant\frac{k_2^{(1)}|x|^2}{2'}$$

i com que $f(0)=0$, aplicant-ho als punts de γ,

$$|f(\gamma(\varepsilon z+t))-A\gamma(\varepsilon z+t)|\leqslant\frac{k_2^{(1)}|\gamma(\varepsilon z+t)|^2}{2'}\leqslant\frac{k_2^{(1)}c^2\varepsilon^4}{2}$$

i per tant la primera integral és menor que

$$\int_0^T \varepsilon|\phi(\varepsilon(T-z))|\,|f(\gamma(\varepsilon z+t))-A\gamma(\varepsilon z+t)|\ dz\leqslant$$

$$\leqslant c^2\varepsilon^5\frac{k_2^{(1)}}{2}\int_0^T e^{\varepsilon(T-z)A}\ dz\leqslant c^2\varepsilon^5\frac{k_2^{(1)}}{2}\ e^{\varepsilon T|A|}T$$

Per afitar la segona integral, primer integrem per parts fent

$$u=\phi(\varepsilon(T-z))\qquad\qquad v'=g(\gamma(\varepsilon z+t),(\varepsilon z+t)/\varepsilon,\varepsilon)$$

d'on $u'=-\varepsilon Ae^{\varepsilon(T-z)A}$ i $v=\int_0^z g(\gamma(\varepsilon s+t),(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)\ ds$

Així

$$\int_0^T \phi(\varepsilon(T-z))g(\gamma(\varepsilon z+t),(\varepsilon z+t)/\varepsilon,\varepsilon)\ dz=$$

$$=\int_0^T g(\gamma(\varepsilon s+t),(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)\ ds\ +$$

$$+\varepsilon A\int_0^T e^{\varepsilon(T-z)A}\Big(\int_0^z g(\gamma(\varepsilon s+t),(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)ds\Big)dz\ ,$$

integrals que anomenem I_1 i I_2

Usant la condició iv)

$$|I_1|\leqslant\left|\int_0^T\big[g(\gamma(\varepsilon s+t),(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)-g(0,(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)\big]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^T|D_1g(\xi,(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)\gamma(\varepsilon s+t)|ds\leqslant Tk_1^{(2)}c\,\varepsilon^2$$

$$|I_2| \leqslant \varepsilon|A| \int_0^T e^{\varepsilon T|A|} \left| \int_0^z g(\gamma(\varepsilon s+t),(\varepsilon s+t)/\varepsilon,\varepsilon)ds \right| dz \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon|A|e^{\varepsilon T|A|}T^2 k_0^{(2)}$$

Llavors

$$|(\Lambda\gamma)(t)| \leqslant 2\,\frac{1}{\varepsilon T}|A^{-1}|\,(c^2\varepsilon^5\,\frac{k_2^{(1)}}{2}\,e^{\varepsilon T|A|}T +$$

$$+\ \varepsilon^2(Tk_1^{(2)}c\,\varepsilon^2 + \varepsilon|A|e^{\varepsilon T|A|}T^2k_0^{(2)}))\leqslant$$

$$\leqslant (|A^{-1}|k_2^{(1)}e^{1/2}c^2\varepsilon_0^2 + 2k_1^{(2)}|A^{-1}|c\,\varepsilon_0 + 2e^{1/2}Tk_0^{(2)}|A||A^{-1}|)\,\varepsilon^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1/4+1/2+2e^{1/2}Tk_0^{(2)}|A||A^{-1}|)\,\varepsilon^2 < c\,\varepsilon^2$$

Per tant Λ està ben definit Per veure que és contracció fem

$$|(\Lambda\gamma)(t) - (\Lambda\sigma)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |[I-\phi(\varepsilon T)]^{-1}|\,\varepsilon \left[\int_0^T |\phi(\varepsilon(T-z))|\,|f(\gamma(\varepsilon z+t)) - A\gamma(\varepsilon z+t) - \right.$$

$$-(f(\sigma(\varepsilon z+t)) - A\sigma(\varepsilon z+t))|dz +$$

$$\left. +\varepsilon \int_0^T |g(\gamma(\varepsilon z+t),(\varepsilon z+t)/\varepsilon,\varepsilon) - g(\sigma(\varepsilon z+t),(\varepsilon z+t)/\varepsilon,\varepsilon)|dz \right]$$

La primera integral és menor que

$$\int_0^T e^{\varepsilon T|A|}|D(f-A)(\xi)|\,|\gamma(\varepsilon z+t) - \sigma(\varepsilon z+t)|dz \leqslant$$

$$\leqslant e^{1/2}\int_0^T |Df(\xi) - Df(0)|\,|\gamma-\sigma|dz \leqslant$$

$$\leqslant e^{1/2}|\gamma-\sigma| \int_0^T |D^2f(\xi')(\xi-0)|dz \leqslant e^{1/2}|\gamma-\sigma|Tk_2^{(1)}c\,\varepsilon^2$$

ja que $|\xi| < c\varepsilon^2 < r$

La segona integral és menor que

$$\int_0^T |D_1g(\xi,(\varepsilon z+t)/\varepsilon,\varepsilon)(\gamma(\varepsilon z+t) - \sigma(\varepsilon z+t))|dz \leqslant k_1^{(2)}|\gamma-\sigma|T$$

ja que $|\xi| < c\varepsilon^2 < r$

Llavors

$$|\Lambda\gamma-\Lambda\sigma| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(\Lambda\gamma)(t)-(\Lambda\sigma)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{1}{\varepsilon T}\,|A^{-1}|\,\varepsilon\Big[e^{1/2}Tk_2^{(1)}c\,\varepsilon^2|\gamma-\sigma|+\varepsilon k_1^{(2)}T|\gamma-\sigma|\Big]\leqslant$$

$$\leqslant (2|A^{-1}|e^{1/2}k_2^{(1)}c\,\varepsilon_0^2+2|A^{-1}|k_1^{(2)}\varepsilon_0)\,|\gamma-\sigma|\leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}\right)|\gamma-\sigma| = \frac{1}{c}\,|\gamma-\sigma|$$

Com que $c > 1$, pel lema de contracció Λ té un únic punt fix en $\mathcal{X}$, el qual és solució periòdica de (4 1) i verifica que és contínua, εT-periòdica i $|\gamma(t)| \leqslant c\,\varepsilon^2$ per a tot t

4 3 Proximitat de les aplicacions de Poincaré

Considerem els sistemes descrits en la introducció

(4 2) $\quad x=f(x)$

(4 4) $\quad x=f(x+\gamma(t))+g(x+\gamma(t),t/\varepsilon,\varepsilon)-\gamma(t)$,

on γ és l'orbita periòdica de (4 1) de l'apartat anterior Diem φ_1 i φ_2 als fluxos associats a (4 2) i (4 4) respectivament Definim

$$G_\varepsilon(x)=\varphi_1(\varepsilon T,x) ,$$

$$F_\varepsilon(x)=\varphi_2(\varepsilon T,x)$$

En la seguent proposició estudiem la proximitat de les famílies F_ε i G_ε Destaquem la tercera conclusió en la que la fita és $M_k\varepsilon^3$, quan per analogia a la proposició 2 2 només esperariem la fita $M_k\varepsilon^2$ Això es degut, bàsicament, a la condició que la mitjana respecte de la segona variable de g sigui nul la

Proposició 4 2

Si

i) f és de classe C^{r+L} en U, obert de $\mathbb{R}^n$, que conté l'origen

ii) g és de classe C^r en U respecte de x, $D_1^k g$ és contínua en $U\times\mathbb{R}\times[0,\varepsilon_0]$ per a $0\leq k\leq r$ i $D_1^r g$ és Lipschitz respecte de la primera variable en U ,

iii) $f(0)=0$ i $A\equiv Df(0)$ és hiperbòlica ,

iv) g és t-periòdica respecte de la segona variable i

$$\int_0^T g(x,s,\varepsilon)ds=0 \text{ per a } x\in U \text{ i } 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

Llavors, donat B, compacte contingut en U, que conté l'origen es té que

1) $|DG_\varepsilon - I|, |DF_\varepsilon - I| < C\varepsilon$

2) $|D^kG_\varepsilon|, |D^kF_\varepsilon| < L_k\varepsilon$, $(2 \leqslant k \leqslant r)$,

3) $|D^kG_\varepsilon - D^kF_\varepsilon| < M_k\varepsilon^3$, $(0 \leqslant k \leqslant r)$,

en B, per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

Demostració

Com a la proposició 2 2, si $\mathbb{R}^n - U$ és buit, considerem $B' = B+1$ i si $\mathbb{R}^n - U$ no és buit, considerem $\bar{B}_R$, una bola de radi prou gran perquè $B \subset \bar{B}_R$ i perquè $(\mathbb{R}^n - U) \cap \bar{B}_R \neq \emptyset$ Diem β a la distància entre $(\mathbb{R}^n - U) \cap \bar{B}_R$ i B i considerem finalment $B' = B + \beta/2$ Tenim que $B \subset B' \subset U$ Definim

$$K_n = \sup_{x \in B'} |D^n f(x)|, \qquad K'_n = \sup_{x \in B' x \mathbb{R} x [0,\varepsilon_0]} |D_1^n g(x, t/\varepsilon, \varepsilon)|$$

K'_n existeix perquè g és periòdica respecte de la segona variable Notem que

$$\gamma(t) = f(\gamma(t)) + \varepsilon g(\gamma(t), t/\varepsilon, \varepsilon)$$

i per tant

$$|\gamma(t)| \leqslant |f(\gamma(t)) - f(0)| + |f(0)| + \varepsilon |g(\gamma(t), t/\varepsilon, \varepsilon)| \leqslant$$

$$\leqslant |Df(\xi)|\,|\gamma(t)| + \varepsilon K'_0 \leqslant K_1 c\varepsilon^2 + K'_0\varepsilon$$

Si $(x,t,\varepsilon) \in B x \mathbb{R} x [0,\varepsilon_0]$ amb $\varepsilon_0 < \min((\beta/4c)^{1/2}, 1/3K'_0, (1/3K_1c)^{1/2})$ llavors

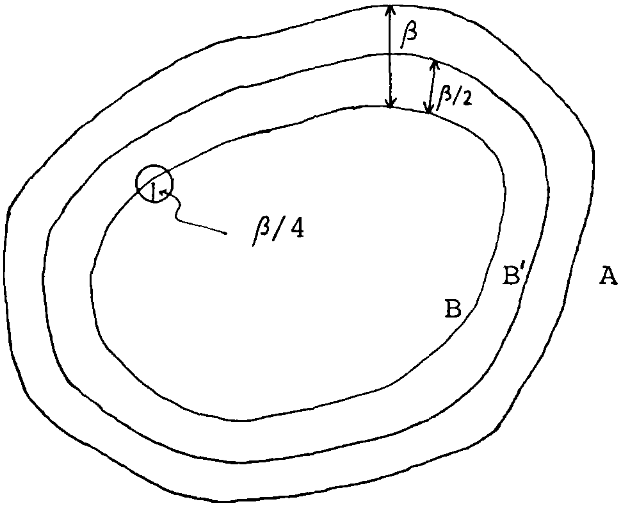
$$|f(x+\gamma(t)) + \varepsilon g(x+\gamma(t), t/\varepsilon, \varepsilon) - \gamma(t)| \leqslant$$

$$\leqslant K_0 + \varepsilon K'_0 + K_1 c\varepsilon^2 + K'_0\varepsilon \leqslant K_0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = K_0 + 1$$

perquè $|\gamma(t)| \leqslant c\varepsilon^2 \leqslant c\,\frac{\beta}{4c} = \frac{\beta}{4}$ que implica que

$x + \gamma(t) \in B + \frac{\delta}{4} \subset B'$

Si a més, $\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{\beta}{4(K_0+1)T}$, pel teorema d'existència d'equacions diferencials, la solució $\varphi(t,x)$ de (4 4) amb $\varphi(0,x)=x$ està definida per a $|t| \leqslant \varepsilon_0 T$ i $\varphi(t,x) \in B+\frac{\beta}{4}$ per a $|t| \leqslant \varepsilon_0 T$ per tant F_ε està ben definida en B



La proposició 2 2 ens assegura que G_ε també està ben definida en B Passem a provar 1)

L'afitació $|DG_\varepsilon - I| < C\varepsilon$ ja ens la dóna la proposició 2 2

$DF_\varepsilon(x)=D_2\varphi_2(\varepsilon,x)$ i $D_2\varphi_2(t,x)$ verifica

$$D_1D_2\varphi_2(t,x)=\left[Df(\varphi_2(t,x)+\gamma(t))+\varepsilon D_1g(\varphi_2(t,x)+\gamma(t),t/\varepsilon,\varepsilon)\right]D_2\varphi_2(t,x)$$

Llavors

$$D_2\varphi_2(t,x)-I=\int_0^t\left[Df(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))+\varepsilon D_1g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)\right]\left[D_2\varphi_2(s,x)-I\right]ds$$

$$+\int_0^t\left[Df(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))+\varepsilon D_1g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)\right]ds$$

i $\quad |D_2\varphi_2(t,x)-I| \leqslant$

$$\leqslant \int_0^t (K_1+\varepsilon K_1')|D_2\varphi_2(s,x)-I|\, ds + (K_1+\varepsilon K_1')\varepsilon T$$

i pel lema de Gronwall

$$|D_2\varphi_2(t,x)-I| \leqslant (K_1+\varepsilon K_1')\varepsilon T e^{(K_1+\varepsilon K_1')t} \qquad \text{si} \quad |t| \leqslant \varepsilon T$$

Per tant, si suposem a més que $\varepsilon_0 < \min(\frac{1}{K_1'}, \frac{1}{(K_1+1)T})$,

$$|DF_\varepsilon(x)-I| \leqslant (K_1+1)\varepsilon T e^{(K_1+1)\varepsilon T} < (K_1+1)Te\varepsilon \quad \text{per a } x\in B$$

Prenem C com el màxim de $(K_1+1)Te$ i la constant que verifica $|DG_\varepsilon - I| < C\varepsilon$

Provem 2) L'afitació $|D^kG_\varepsilon| < L_k\varepsilon$ ens la dóna la proposició 2 2

$D_2^k\varphi_2$ satisfà l'equació

$$D_1D_2^k\varphi_2(t,x)=D_2^k(f(\varphi_2(t,x+\gamma(t))+\varepsilon g(\varphi_2(t,x)+\gamma(t),t/\varepsilon,\varepsilon)-\gamma(t))$$

Desenvolupant, utilitzant la regla de la cadena introduïda en la demostració de la proposició 2 2, s'obté

$$\text{Sim}^k\circ\lambda^{1,k}\Big[(Df(\varphi_2(t,x)+\gamma(t))xD_2^k\varphi_2(t,x)+$$
$$+\varepsilon(D_1g(\varphi_2(t,x)+\gamma(t),t/\varepsilon,\varepsilon)xD_2^k\varphi_2(t,x))\Big]+b_k(t)$$

on $b_k(t)$ conté els restants termes, els quals contenen derivades de φ respecte de x d'ordre menor que k

Com que $D_2^k\varphi_2(t,x)$ és simètrica podem prescindir de l'operador Sim^k Com a la proposició 2 2 introduïm l'operador lineal $\Lambda(t)\ E^k \longrightarrow E^k$, on $E^k=L^k(E,E)$ definit per

$$\Lambda(t)A=\lambda^{1,k}((Df(\varphi_2(t,x)+\gamma(t))+\varepsilon D_1g(\varphi_2(t,x)+\gamma(t),t/\varepsilon,\varepsilon))xA)$$

Afitant, obtenim

$$|\Lambda(t)A| \leqslant (K_1+\varepsilon K_1')|A| \leqslant (K_1+1)|A|,$$

per tant $|\Lambda(t)| \leqslant K_1+1$

Considerem primer l'equació homogènea

$$U'=\Lambda(t)\ U \quad \text{on} \quad U(t)\in L(E^k,E^k) \quad \text{amb} \quad U(0)=I_{E^k}$$

Es verifica

$$U(t)=I+\int_0^t \Lambda(s)\ U(s)\ ds$$

i

$$|U(t)| \leqslant 1+\int_0^{|t|} |\Lambda(s)|\,|U(s)|ds \leqslant 1+(K_1+1)\int_0^{|t|} |U(s)|ds$$

i pel lema de Gronwall

$$|U(t)| \leqslant \exp(K_1+1)\,|t| \qquad \text{si} \quad |t|<\varepsilon T$$

Llavors, de

$$D_1D_2^k\varphi_2(t,x)=\Lambda(t)D_2^k\varphi_2(t,x)+b_k(t)$$

escrivim

$$D_2^k\varphi_2(t,x)=U(t)\Big[D_2^k\varphi_2(0,x)+\int_0^t U(-s)b_k(s)ds\Big]$$

on $D_2^k\varphi_2(0,x)=0 \quad (k\geqslant 2)$ i

$$|D_2^k\varphi_2(t,x)|=\int_0^t |U(t-s)b_k(s)|ds \leqslant \int_0^t (\exp(K_1+1)\,|t-s|)|b_k(s)|ds \leqslant$$

$$\leqslant \exp(K_1+1)t\int_0^t |b_k(s)|ds$$

Ara procedim per inducció, si k=2

$$|b_2(s)| \leqslant |D^2f(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))xD_2\varphi_2(s,x)xD_2\varphi_2(s,x)| +$$

$$+\varepsilon|D_1^2g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)xD_2\varphi_2(s,x)xD_2\varphi_2(s,x)| \leqslant$$

$$\leqslant K_2(1+(K_1+1)e\varepsilon)^2+\varepsilon K_2'(1+(K_1+1)e\varepsilon)^2 \leqslant (K_2+\varepsilon_0K_2')(1+e)^2$$

i $$|D_2^2\varphi_2(t,x)| \leqslant (\exp(K_1+1)t)(K_2+\varepsilon_0K_2')(1+e)^2t$$

Així

$$|D^2F_\varepsilon(x)| \leqslant (K_2+\varepsilon_0K_2')(1+e)^2eT\varepsilon$$

Prenem L_2 com el màxim de $(K_2+\varepsilon_0K_2')(1+e)^2eT$ i la constant

L_2 que verifica $|D^2 G_\varepsilon(x)| < L_2 \varepsilon$

Suposem que són certes les afitacions per a $k \geqslant 2$

És clar que $|b_{k+1}(t)|$ és menor que una constant N_{k+1} independent de ε Llavors

$$|D_2^{k+1}\varphi_2(t,x)| < (\exp(K_1+1)t)N_{k+1}t < N_{k+1}eT\varepsilon$$

que implica que

$$|D^{k+1}F_\varepsilon(x)| < N_{k+1}eT\varepsilon$$

Diem L_{k+1} al màxim de $N_{k+1}eT$ i la constant L_{k+1} que verifica $|D^{k+1}G_\varepsilon(x)| < L_{k+1}\varepsilon$

Finalment provem 3) Sabem que $|G_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(x)| = |\varphi_1(\varepsilon T,x) - \varphi_2(\varepsilon T\ x)|$

Per a $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon T$

$$|\varphi_1(t,x) - \varphi_2(t,x)| = |x + \int_0^t f(\varphi_1(s,x))ds - x -$$

$$- \int_0^t [f(\varphi_2(s,x)+\gamma(s)) + g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s), s/\varepsilon, \varepsilon) - \gamma(s)]\, ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\int_0^t [f(\varphi_1(s,x)) - f(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))]ds| +$$

$$+ |\int_0^t \varepsilon g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s), s/\varepsilon, \varepsilon)ds| + |\int_0^t \gamma(s)ds| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |Df(\xi)|\, |\varphi_1(s,x) - \varphi_2(s,x) - \gamma(s)|ds + \varepsilon K_0' t + c\varepsilon^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t K_1 |\varphi_1(s,x) - \varphi_2(s,x)|ds + \int_0^t K_1 |\gamma(s)|ds + \varepsilon K_0' t + c\varepsilon^2$$

i pel lema de Gronwall

$$|\varphi_1(t,x) - \varphi_2(t,x)| \leqslant (K_1 cT\varepsilon^3 + K_0' T\varepsilon^2 + c\varepsilon^2)e^{K_1 t} < (2c + K_0' T)e\varepsilon^2$$

Avaluem, ara, la diferència en $t = \varepsilon T$,

$$|\varphi_1(\varepsilon T,x) - \varphi_2(\varepsilon T,x)| \leqslant |\int_0^{\varepsilon T} [f(\varphi_1(s,x)) - f(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))]ds| +$$

$$+ |\int_0^{\varepsilon T} \varepsilon g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s), s/\varepsilon, \varepsilon)ds| + |\int_0^{\varepsilon T} \gamma(s)ds| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\varepsilon T} |Df(\xi)|\, |\varphi_1(s,x) - \varphi_2(s,x) - \gamma(s)|ds + |\int_0^{\varepsilon T} \varepsilon g(x, s/\varepsilon, \varepsilon)ds| +$$

$$+\left|\int_0^{\varepsilon T}\varepsilon\left[g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)-g(x,s/\varepsilon,\varepsilon)\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant (K_1(2c+K_1'T)\varepsilon T+cK_1T+K_1'cT^2\varepsilon_0+K_1'cT\varepsilon_0)\varepsilon^3 \equiv M_0\varepsilon^3$$

Provarem, ara, per inducció, que per a $1\leqslant k\leqslant r$,

$$|D_2^k\varphi_1(t,x)-D_2^k\varphi_2(t,x)|\leqslant \bar{M}_k\varepsilon^2 \quad \text{si} \quad x\in B \quad \text{i} \quad 0\leqslant t\leqslant \varepsilon T$$

Per a k=1,

$$|D_2\varphi_1(t,x)-D_2\varphi_2(t,x)|\leqslant \int_0^t |Df(\varphi_1(s,x))|\,|D_2\varphi_1(s,x)-D_2\varphi_2(s,x)|ds+$$

$$+\int_0^t |Df(\varphi_1(s,x)-Df(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))|\,|D_2\varphi_2(s,x)|ds +$$

$$+\left|\varepsilon\int_0^t D_1g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)D_2\varphi_2(s,x)ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t K_1|D_2\varphi_1(s,x)-D_2\varphi_2(s,x)|ds+K_2(M_0\varepsilon^2+c\varepsilon^2)(1+C\varepsilon)\varepsilon T+\varepsilon K_1'(1+C\varepsilon)\varepsilon T$$

i pel lema de Gronwall

$$|D_2\varphi_1(t,x)-D_2\varphi_2(t,x)|\leqslant \left[K_2(M_0+c)(1+C\varepsilon_0)T\varepsilon_0+K_1'(1+C\varepsilon_0)T\right]\varepsilon^2e^{K_1t}$$

Prenem $M_1=\left[K_2(M_0+c)(1+C\varepsilon_0)T\varepsilon_0+K_1'(1+C\varepsilon_0)T\right]e$

Suposem que és cert per a $i\leqslant k-1$

$$|D_2^k\varphi_1(t,x)-D_2^k\varphi_2(t,x)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t |\lambda^{1,k}((Df(\varphi_1(s,x))xD_2^k\varphi_1(s,x))-$$

$$-(Df(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))xD_2^k\varphi_2(s,x)))|\ ds\ +$$

$$+\varepsilon\int_0^t |\lambda^{1,k}(Dg(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)xD_2^k\varphi_2(s,x))|\ ds\ +$$

$$+\int_0^t\sum_{l=2}^k\sum_* |c_k\lambda^{l,j_1,\quad,j_l}(D^lf(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))x\quad xD_2^{j_l}\varphi_2(s,x)\ -$$

$$-D^lf(\varphi_1(s,x))x\quad xD_2^{j_l}\varphi_1(s,x))|\ ds\ +$$

$$+\left|\int_0^t \varepsilon\,\text{Sim}^k\circ\sum_{l=2}^k\sum_* c_k\lambda^{l,j_1,\quad,j_l}\circ\right.$$

$$\circ (D_1^i g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon\ \varepsilon) x \quad x D_2^{j\,i}\varphi_2(s,x)\ ds|$$

Diem I_1, I_2, I_3 i I_4 a les quatre darreres integrals

$$I_1 \leqslant \int_0^t \Big[|\lambda^{1,k} \circ (Df(\varphi_1(s,x)) x D_2^k \varphi_1(s,x) - Df(\varphi_1(s,x)) x D_2^k \varphi_2(s,x))| +$$

$$+ |\lambda^{1,k} \circ (Df(\varphi_1(s,x)) x D_2^k \varphi_2(s,x) - Df(\varphi_2(s,x)+\gamma(s)) x D_2^k \varphi_2(s,x))| \Big] ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |Df(\varphi_1(s,x))|\,|D_2^k\varphi_1(s,x) - D_2^k\varphi_2(s,x)|\,ds +$$

$$+ \int_0^t |Df(\varphi_1(s,x)) - Df(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))|\,|D_2^k\varphi_2(s,x)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t K_1 |D_2^k\varphi_1(s,x) - D_2^k\varphi_2(s,x)|\ ds + K_2(M_0\varepsilon^2 + c\varepsilon^2) L_k \varepsilon T \varepsilon$$

$$I_2 \leqslant \varepsilon \int_0^t |Dg(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)|\,|D_2^k\varphi_2(s,x)|\,ds \leqslant \varepsilon K_1' L_k \varepsilon T \varepsilon$$

Per afitar I_3 descomposem cada sumand en forma telescòpica de manera que tenim $i+1$ sumands En ells hi ha les derivades de f, que estan afitades per K_i, les derivades de φ_2 respecte de x, que estan afitades per $L_i\varepsilon$ excepte la primera, que ho està per $1+C\varepsilon_0$ Cada terme porta una diferència, o bé

$$|D^i f(\varphi_1(s,x)) - D^i f(\varphi_2(s,x)+\gamma(s))| \leqslant$$

$$\leqslant |D^{i+1} f(\xi)|\,|\varphi_1(s,x) - \varphi_2(s,x) - \gamma(s)| \leqslant K_{i+1}(M_0\varepsilon^2 + c\varepsilon^2)$$

(si $i=r$, llavors és menor que $\mathrm{Lip}\, D^r f\,|\varphi_1(s,x)-\varphi_2(s,x)-\gamma(s)|$),

o bé

$$|D_2^j\varphi_2(s,x) - D_2^j\varphi_1(s,x)|$$

amb $j<k$, que és menor que $M_j\varepsilon^2$ per hipòtesi d'inducció

Per tant $I_3 \leqslant P_k\varepsilon^3$ on P_k és una constant independent de ε

(la tercera ε prové de que integrem de 0 a t i $t<\varepsilon T$)

$$I_4 \leqslant \varepsilon \sum_{i=2}^{k} \sum_{*} c_k |D_1^i g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)| \quad |D_2^{j\,i}\varphi_2(s,x)|\,t \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=2}^{k} \sum_{*} c_k K_i' |D_2^{j_1}\varphi_2(s,x)| \quad |D_2^{j_i}\varphi_2(s,x)|\varepsilon T \leqslant P_k' \varepsilon^2$$

on P_k' és independent de ε

Resumint

$$|D_2^k\varphi_1(t,x)-D_2^k\varphi_2(t,x)| \leqslant K_2(M_0+c)L_k T\varepsilon^4+K_1'L_k T\varepsilon^3+P_k\varepsilon^3+P_k'\varepsilon^2 +$$

$$+\int_0^t K_1|D_2^k\varphi_1(s,x)-D_2^k\varphi_2(s,x)|ds$$

i pel lema de Gronwall

$$|D_2^k\varphi_1(t,x)-D_2^k\varphi_2(t,x)| \leqslant P_k'\varepsilon^2 e^{K_1 t} \leqslant P_k e\,\varepsilon^2$$

Prenem $\overline{M}_k=P_k e$, on P_k s'autodefineix

Afitem finalment $|D_2^k\varphi_1(\varepsilon T,x)-D_2^k\varphi_2(\varepsilon T,x)|$ Aquesta diferència dóna lloc a les integrals I_1, I_2, I_3 i I_4 avaluades entre o i t

$$I_1 \leqslant \int_0^{\varepsilon T} K_1|D_2^k\varphi_1(s,x)-D_2^k\varphi_2(s,x)|+K_2(M_0\varepsilon^2+c\varepsilon^2)L_k\varepsilon^2 T \leqslant$$

$$\leqslant K_1\overline{M}_k\varepsilon^3 T+K_2(M_0\varepsilon^2+c\varepsilon^2)L_k\varepsilon^2 T$$

Usem les mateixes afitacions per a I_2 i I_3

$$I_4 \leqslant \left|\int_0^{\varepsilon T}\varepsilon \operatorname{Sim}^k \sum_{i=2}^{k}\sum_{*} c_k\tilde{\lambda}\, D_1^i g(x,s/\varepsilon,\varepsilon)x \quad xD_2^{j_i}\varphi_2(s,x)\, ds\right|+$$

$$+\left|\int_0^{\varepsilon T}\varepsilon \operatorname{Sim}^k \sum_{i=2}^{k}\sum_{*} c_k\tilde{\lambda}\circ(D_1^i g(\varphi_2(s,x)+\gamma(s),s/\varepsilon,\varepsilon)-D_1^i g(x,s/\varepsilon,\varepsilon))x \quad xD_2^{j_i}\varphi_2(s,x)ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_0^{\varepsilon T}\varepsilon \operatorname{Sim}^k \sum_{i=2}^{k}\sum_{*} c_k\tilde{\lambda}\, D_1^i g(x,s/\varepsilon,\varepsilon)xJ_{j_1}x \quad xJ_{j_i}ds\right| +$$

$$\left|\int_0^{\varepsilon T}\varepsilon \operatorname{Sim}^k \sum_{i=2}^{k}\sum_{*} c_k\tilde{\lambda}\circ(D_1^i g(x,s/\varepsilon,\varepsilon)x \quad xD_2^{j_i}\varphi_2(s,x) -\right.$$

$$\left.-D_1^i g(x,s/\varepsilon,\varepsilon)xJ_{j_1}x \quad xJ_{j_i})ds\right| +$$

$$\varepsilon\sum_{i=2}^{k}\sum_{*} c_k K_{i+1}'|\varphi_2(\xi,x)+\gamma(\xi)-x||D_2^{j_1}\varphi_2(\xi',x)| \quad |D_2^{j_i}\varphi_2(\xi',x)|\varepsilon T$$

on $\tilde{\lambda}=\lambda^{i,j_1,\quad,j_i}$ i J_j és la identitat si $j=1$ i zero si $j>1$

El primer sumand és nul perquè $\int_0^{\varepsilon T} D_1^1 g(x,s/\varepsilon,\varepsilon)\, ds=0$

El segon sumand es descomposa en suma telescòpica i com que $|D_2^j \varphi_2(s,x)-J_j|$ és menor que $C\varepsilon$ si $j=1$ i menor que $L_j\varepsilon$ si $j>1$, tenim que és menor que $Q\varepsilon^3$, on Q és una constant independent de ε

El darrer terme conté, en cada sumand seu, una derivada de φ_2 d'ordre major que 1 per tant existeix Q', independent de ε, tal que aquest terme és menor que $Q'\varepsilon^3$ Per tant

$$|D_2^k \varphi_1(\varepsilon T,x)-D_2^k \varphi_2(\varepsilon T,x)| \leq M_k \varepsilon^3$$

4 4 Separació entre les varietats invariants

Considerem les equacions (4 1) i (4 2) en el pla $(x \in U \subset \mathbb{R}^2)$ Hem vist que si l'origen és punt singular hiperbòlic de (4 2), (4 1) té una òrbita periòdica prop d' ell Veurem que aquesta òrbita periòdica també és hiperbòlica Si considerem (4 1) i (4 2) com a sistemes tridimensionals en la forma

$$(4\ 5)\qquad \begin{aligned} x &= f(x)+\varepsilon g(x,\tau,\varepsilon) \\ \tau &= 1/\varepsilon\ , \end{aligned}$$

$$(4\ 6)\qquad \begin{aligned} x &= f(x) \\ \tau &= 1/\varepsilon\ , \end{aligned}$$

podem considerar el punt fix de (4 2) com la solució $(x(t),\tau(t))=(0,t)$, la qual té varietats invariants de dimensió dos L'òrbita periòdica de (4 1) considerada com a solució de (4 5) també té varietats invariants de dimensió dos El teorema 4 3 ens proporciona que les corresponents varietats invariants de (4 5) i (4 6) són properes entre si i que si (4 2) és conservatiu i té una separatriu (òrbita homoclínica) associada a l'origen, (4 5) té òrbites homoclíniques i la separació entre les varietats invariants de (4 5) té un comportament semblant al dels teoremes del capítol 3

Teorema 4 3

Siguin

(4 1) $x=f(x)+\varepsilon g(x,t/\varepsilon,\varepsilon)$,

(4 2) $x=f(x)$,

verificant

i) f i g són de classe C^{r+1} respecte de x en U, obert de $\mathbb{R}^2$, contenint l'origen i $D_1^k g(x,t,\varepsilon)$ contínua en $U\times\mathbb{R}\times[0,\varepsilon_0]$ per a $0\leqslant k\leqslant r+1$,

ii) $f(0)=0$ i Re Spec $Df(0)\neq 0$,

iii) tr $Df(x)=0$ i tr $D_1 g(x,t,\varepsilon)=0$ per a $x\in U$ i $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

iv) g és T-periòdica respecte de la segona variable i

$\int_0^T g(x,t,\varepsilon)\,dt=0$ per a $x\in U$ i $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

v) (4 2) té una òrbita homoclínica σ continguda en U

Llavors

1) (4 1) té una òrbita periòdica γ prop de l'origen, la qual és hiperbòlica

2) La separació entre les varietats invariants de γ, en una regió fixada és $O(\varepsilon^r)$ Si $r=\infty$ és $O(\varepsilon^k)$ per a tot k

Demostració

De ii) i iii) es dedueix que els valors propis de $Df(0)$ són reals i de signe oposat, ja que tr $Df(0)=0$ implica que

$$Df(0)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

i que els valors propis siguin $\mu_{\pm}=\pm\sqrt{a^2-bc}$ amb $a^2>bc$ perquè si fos $a^2<bc$, la part real dels valors propis seria nul la

Siguin G_ε i F_ε com a l'apartat 4 3, definits en un conjunt compacte B contingut en U i que contingui a l'òrbita homoclínica σ Anem a verificar que G_ε i F_ε compleixen les hipòtesis del teorema 3 2

ii) implica que $x(t)=0$ és solució de (4 2) i per tant $G_\varepsilon(0)=0$ per a tot ε Com que $x(t)=\gamma(t)$ és solució de (4 1), $x(t)=0$ és solució de (4 4) i per tant, també $F_\varepsilon(0)=0$

Com que $DG_\varepsilon(0)=\exp(Df(0)\varepsilon T)$, els valors propis d'aquesta diferencial són $\lambda_\pm=e^{\mu_\pm\varepsilon T}$ Escrivim

$$DG_\varepsilon(0)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad DF_\varepsilon(0)=\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Com que $|DF_\varepsilon-DG_\varepsilon|<M_1\varepsilon^3$, tenim que

$$|a'-a|,|b'-b|,|c'-c|,|d'-d|<M_1\varepsilon^3$$

Els valors propis de $DG_\varepsilon(0)$ i $DF_\varepsilon(0)$ són respectivament

$$\lambda_\pm=\frac{a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2} \qquad \lambda'_\pm=\frac{a'+d'\pm\sqrt{(a'+d')^2-4}}{2}$$

Avaluem la diferència

$$|\lambda_\pm-\lambda'_\pm|=\left|\frac{1}{2}(a+d-a'-d')\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+d)^2-4}-\sqrt{(a'+d')^2-4}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\varepsilon^3+\frac{1}{2}\left|\frac{(a+d)^2-(a'+d')^2}{\sqrt{(a+d)^2-4}+\sqrt{(a'+d')^2-4}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\varepsilon^3+\frac{1}{2}\left|\frac{(a+d+a'+d')(a+d-a'-d')}{\sqrt{(a+d)^2-4}}\right|$$

Com que la traça és un invariant, $a+d=e^{\mu_+\varepsilon T}+e^{\mu_-\varepsilon T}$

i $\quad (a+d)^2-4=(e^{\mu_+\varepsilon T}+e^{\mu_-\varepsilon T})^2-4=2(\mathrm{Ch}\,2\mu_+\varepsilon T-1)\geqslant 4(\mu_+T)^2\varepsilon^2$

Llavors

$$|\lambda_\pm-\lambda'_\pm|\leqslant M_1\varepsilon^3+\frac{1}{2}\,\frac{D2M_1\varepsilon^3}{2\mu_+T\varepsilon}=O(\varepsilon^2)$$

on $D > |a+d+a'+d'|$ Podem prendre $D=2(|DG_\varepsilon(0)|+|DF_\varepsilon(0)|)$ Per tant $\lambda'_{\pm}=\lambda_{\pm}+O(\varepsilon^2)=1\pm\mu_+\varepsilon T+O(\varepsilon^2)$ i llavors si ε és prou petit $\lambda'_+>1$ i $\lambda'_-<1$, que implica que l'òrbita γ és hiperbòlica i 0 és punt fix hiperbòlic de F_ε Això prova les hipòtesis i) i ii) iii) és conseqüència de la proposició 4 2 iv) i v) són conseqüències immediates de les hipòtesis

Llavors F_ε té punts homoclínics i la separació entre les varietats invariants és de l'ordre de ε^r És de l'ordre de ε^k per a tot k, si $r=\infty$

Si considerem $F_{t_0\ \varepsilon}(x)=\varphi_2(\varepsilon,t_0,x)$, on $\varphi_2(t\ t_0,x)$ és el flux solució de (4 4) amb $\varphi_2(t_0,t_0,x)=x$, resulta que $F_{t_0,\varepsilon}$ té les mateixes propietats que F_ε Les varietats invariants de $x(t)=0$, solució de (4 4), intersecció amb el pla $t=\alpha$ coincideixen amb les varietats invariants de l'origen de $F_{t_0,\varepsilon}$ amb $t_0=\varepsilon T-\alpha$ Això acaba la demostració per a les varietats invariants de (4 4) Les de (4 1) verifiquen el mateix perquè s'obtenen d'aquestes pes translació

CAPITOL 5

UNIFORMITAT DE LA FORMA NORMAL DE BIRKHOFF I VARIETATS INVARIANTS

5 1 Introducció

Per afitar la separació entre les varietats invariants, com en el capítol 3, per a famílies de difeomorfismes analítics i obtenir una fita més precisa necessitem tenir informació de les varietats invariants esteses als complexos

La forma normal de Birkhoff d'un difeomorfisme analític al voltant d'un punt fix hiperbòlic ens proporciona aquesta informació localment i a més ens dóna una integral primera local

En l'apartat 5 2, la proposició 5 3 ens dóna, a partir d'aquesta, una parametrització de les varietats invariants molt útil per al seguent capítol que, en certes condicions, gràcies a la proposició 5 2, és única

En l'apartat 5 3 es prova que, per a famílies de difeomorfismes del tipus que estudiem, és possible obtenir una única expressió (depenent del paràmetre) de la forma normal (i d'un canvi a forma normal) que permet controlar les varietats invariants complexes uniformement per a tots els valors del paràmetre

El problema principal és la convergència de la forma normal Per a les famílies que estudiem,els valors propis de la diferencial dels difeomorfismes en el punt hiperbòlic tendeixen a 1 quan el paràmetre tendeix a zero En principi això fa que el radi de convergència de la forma normal tendeixi a zero, però el fet que per a valors del paràmetre petits els difeomorfismes són prop de la identitat compensa aquest efecte i el radi de convergència es manté més gran que una certa constant La demostració d'aquest fet segueix la de la convergència de la forma normal de Birkhoff en (35) tenint en compte la dependència en el paràmetre, excepte la funció majorant usada i a l'èmfasi en les estimacions del radi de convergència

Finalment en l'apartat 5 4 s'estudia la proximitat dels canvis a forma normal avaluats en punts en que una de les coordenades és zero, que essencialment és la proximitat entre les varietats invariants, suposant que les corresponents famílies de difeomorfismes són properes en el sentit que es precisa

5 2 Forma normal de Birkhoff i varietats invariants

En primer lloc recordem la forma normal de Birkhoff d'un difeomorfisme analític al voltant d'un punt fix hiperbòlic Birkhoff va fer la part formal (7) Posteriorment Moser (29) i Siegel (34) varen provar la convergència

Teorema 5 1

Donat F, difeomorfisme del pla, analític en un entorn de l'origen, conservatiu, del tipus

(5 1) $\quad F(x,y)=(\lambda x+P(x,y),\lambda^{-1}y+Q(x,y))$

on P i Q no contenen termes lineals i $\lambda>1$, existeix un canvi C (no únic), analític en un entorn de l'origen tal que

(5 2) $\quad N=C^{-1}FC$

és del tipus

(5,3) $\quad N(\xi,\eta)=(\xi W(\xi\eta),\eta/W(\xi\eta))$

on $W(\xi\eta)=\lambda+\alpha_2\xi\eta+\alpha_4(\xi\eta)^2+$ és analítica en un entorn de l'origen A més N és únic satisfent aquestes condicions Vegeu (35)

La forma (5 1) assumida per a F no és restrictiva, ja que si F té l'origen com a punt fix hiperbòlic existeix un canvi lineal que el porta a la forma expressada amb λ, el valor propi major que 1 de DF(0,0)

Cal assenyalar que N és conservatiu, mentre que C no té perquè ser-ho, encara que sempre existeix un canvi conservatiu que verifica (5 2)

Si escrivim $C(\xi,\eta)=(\phi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta))$, en (35) es prova que C és únic si $\phi_\xi -1$ i $\psi_\eta -1$ no contenen potències de $\xi\eta$ soles

De l'expressió (5 3) és immediat que

$$N(\xi,0)=(\lambda\xi,0) \quad \text{i} \quad N(0,\eta)=(0,\frac{1}{\lambda}\eta)$$

i per tant és clar que $\eta=0$ i $\xi=0$ representen les varitats invariants de N Llavors $C(\xi,0)$ i $C(0,\eta)$ ens donen una parametrització de les varietats invariants de F, perquè com que $F^nC=CN^n$ (i també $F^{-n}C=CN^{-n}$) tenim

$$\lim_{n\to\infty} F^{-n}C(\xi,0)=\lim_{n\to\infty} CN^{-n}(\xi,0)=\lim_{n\to\infty} C(\lambda^{-n}\xi,0)=(0,0)$$

i

$$\lim_{n\to\infty} F^{n}C(0,\eta)=\lim_{n\to\infty} CN^{n}(0,\eta)=\lim_{n\to\infty} C(0,\lambda^{-n}\eta)=(0,0)$$

A més això prova l'analiticitat de les varietats invariants en el cas que F sigui analític i conservatiu

Hem indicat que el canvi C no és únic Malgrat això,

<u>Proposició 5 2</u>

En les hipòtesis del teorema 5 1, si suposem que C és del tipus

$$C(\xi,\eta)=(\xi+\sum_{k\geqslant 2}\phi_k(\xi,\eta),\eta+\sum_{k\geqslant 2}\psi_k(\xi,\eta))$$

on ϕ_k i ψ_k representen funcions homogènees d'ordre k, llavors $C(\xi,0)$ i $C(0,\eta)$ estan unívocament determinats

<u>Demostració</u>

Diem N a la forma normal de Birkhoff de F (CN=FC) Tenim que

$$CN(\xi,0)=C(\lambda\xi,0)=FC(\xi,0)$$

Suposem que

$$C(\xi,0)=(\sum_{n\geq 1} a_n\xi^n, \sum_{n\geq 1} b_n\xi^n)$$

amb $a_1=1$ i $b_1=0$ i que

$$F(x,y)=(\sum_{k,\ell\geq 1} c_{k\ell}x^k y^\ell, \sum_{k,\ell\geq 1} d_{k\ell}x^k y^\ell)$$

Substituint obtenim, per a ordre 1, la identitat $\lambda=\lambda$

Veiem ara, per inducció, que els coeficients a_n i b_n estan unívocament determinats

Per a ordre 2, tenim

$$a_2\lambda^2=\lambda a_2+c_{20}$$

$$b_2\lambda^2=\frac{1}{\lambda}b_2+d_{20},$$

d'on a_2 i b_2 resten determinats perquè λ no és arrel de 1

Suposant que a_k i b_k estan determinats fins a ordre n-1, per a ordre n tenim

$$a_n\lambda^n=\lambda a_n+ \text{ termes determinats}$$
$$b_n\lambda^n=\frac{1}{\lambda}b_n+ \text{ termes determinats},$$

relacions que com abans, determinen a_n i b_n

Anàlogament es prova la unicitat de $C(0,\eta)$

A través de la forma normal de Birkhoff podem obtenir una altra parametrització de les varietats invariants que serà essencial en el capítol següent, així com una integral primera analítica local

Proposició 5 3

Sigui F un difeomorfisme del pla, analític en un entorn de l'origen, conservatiu, amb l'origen com a punt fix hiperbòlic Llavors

1) Existeixen funcions $u_1(t), u_2(t), v_1(t)$ i $v_2(t)$ analítiques tals que localment $W^u=(u_1(t),u_2(t))$ i $W^s=(v_1(t),v_2(t))$ i verifiquen

$F(u_1(t),u_2(t))=(u_1(t+h),u_2(t+h))$

$F(v_1(t),v_2(t))=(v_1(t+h),v_2(t+h))$

on $h=\ln\lambda$ i λ és el valor propi de $DF(0,0)$ major que 1

2) Existeix E analítica definida en un entorn de les varietats invariants tal que

$E(F(x,y))=E(x,y)$

$E(u_1(t),u_2(t))=0$ i $E(v_1(t),v_2(t))=0$

<u>Demostració</u>

Pel teorema 5 1 existeix un canvi C analític, tal que

$$N(\xi,\eta)=C^{-1}FC(\xi,\eta)=(\xi W(\xi\eta),\eta W^{-1}(\xi\eta))$$

Sigui r el radi de convergència de C Descrivim la varietat invariant inestable de N pel paràmetre t de la seguent forma

$$(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=(e^{t-t_0},0)$$

Es verifica que

$$N(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=N(e^{t-t_0},0)=(\lambda e^{t-t_0},0)=$$
$$=(e^{\ln h}\, e^{t-t_0},0)=(\bar{u}_1(t+h),\bar{u}_2(t+h))$$

Definim

$$(u_1(t),u_2(t))=C(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))$$

per a $t\in\{t\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\,t<t_0+\ln r\}$

De $C^{-1}FC(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=(\bar{u}_1(t+h),\bar{u}_2(t+h))$

tenim que

$$FC(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=C(\bar{u}_1(t+h),\bar{u}_2(t+h))$$

és a dir

$$F(u_1(t),u_2(t))=(u_1(t+h),u_2(t+h))$$

Aquesta darrera expressió ens permet d'extendre u_1 i u_2 analíticament mentre $(u_1(t),u_2(t))$ pertanyi al domini de F

Per a la varietat invariant estable considerem

$$(\bar{v}_1(t),\bar{v}_2(t))=(0,e^{-(t-t_0')})$$

que verifica

$$N(\bar{v}_1(t),\bar{v}_2(t))=(\bar{v}_1(t+h),\bar{v}_2(t+h))$$

i anàlogament prenem

$$(v_1(t),v_2(t))=C(\bar{v}_1(t),\bar{v}_2(t))$$

La funció $\bar{E}(\xi,\eta)=\xi\eta$ verifica que

$$\bar{E}(N(\xi,\eta))=\bar{E}(\xi W(\xi\eta),\eta W^{-1}(\xi\eta))=\xi\eta W(\xi\eta)W^{-1}(\xi\eta)=\xi\eta=\bar{E}(\xi,\eta)$$

i $\bar{E}(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=\bar{E}(e^{t-t_0},0)=0$

$$\bar{E}(\bar{v}_1(t),\bar{v}_2(t))=\bar{E}(0,e^{-(t-t_0')})=0$$

Definim $E=\bar{E}C^{-1}$ Verifica que

$$E(F(x,y))=\bar{E}C^{-1}FCC^{-1}(x,y)=\bar{E}NC^{-1}(x,y)=\bar{E}C^{-1}(x,y)=E(x,y)$$

i que

$$E(u_1(t),u_2(t))=\bar{E}C^{-1}C(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=\bar{E}(\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t))=0$$

i anàlogament

$$E(v_1(t),v_2(t))=0$$

L'expressió $E(F(x,y))=E(x,y)$ permet d'estendre analítacament E a un entorn complex de les varietats invariants (localment)

<u>Observació</u>

De la demostració es veu que si F és una funció entera, u_1 u_2, v_1 i v_2 són funcions enteres E, en general, no ho és

5.3 Convergència de la forma normal de Birkhoff per a famílies de difeomorfismes

La seguent proposició prova l'existència d'una bola de radi independent de ε en la qual convergeixen la forma normal i el canvi a forma normal dels difeomorfismes de les famílies que s'estudien.

Proposició 5.4

Sigui F_ε una família de difeomorfismes analítics en un entorn de l'origen, preservant àrea, depenent analíticament del paràmetre ε, que tenen l'origen com a punt fix hiperbòlic i suposem que

$$F_\varepsilon(x,y)=(\lambda x+\varepsilon^\alpha f_1(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}),\lambda^{-1}y+\varepsilon^\alpha f_2(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}))$$

on $\lambda=1+a\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$ amb $a>0$ i f_1,f_2 i els termes indicats per $O(\varepsilon^{\alpha+1})$ tenen part lineal nul.la.

Llavors existeix r_0 independent de ε tal que el canvi C_ε i la forma normal N_ε de la proposició anterior són convergents en la bola de centre l'origen i radi r_0.

Demostració

Per simplificar la notació, durant la demostració no especificarem els subíndexs ε.

Escrivim

$$C(\xi,\eta)=(\phi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta))=(\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(\xi,\eta),\eta+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(\xi,\eta)),$$

$$N(\xi,\eta)=(\xi u(\xi\eta),\eta v(\xi\eta))$$

on $u(\xi\eta)=\lambda+\alpha_2\xi\eta+\alpha_4(\xi\eta)^2+$ i $v(\xi\eta)=\dfrac{1}{u(\xi\eta)}$,

$$F(x,y)=(p(x,y),q(x,y))$$

En (35) es prova que formalment es verifica $N=C^{-1}FC$

Introduïm ara una mica de notació Per a una funció S analítica escriurem

$$S(\xi,\eta)=\sum_{k,\ell=0}^{\infty}a_{k\ell}\xi^k\eta^\ell=\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_n(\xi,\eta)$$

on S_n és la suma estesa a $k-\ell=n$ $(n\in Z)$, i observem que en aquesta forma, si $u=u(\xi\eta)$ amb terme constant no nul,

$$S_n(u\xi,u^{-1}\eta)=\sum a_{k\ell}u^k u^{-\ell}\xi^k\eta^\ell=u^n S_n(\xi,\eta)$$

Escriurem també

$$\boxed{S}\ ,\ \boxed{S}(\xi,\eta)\quad \text{o}\quad \boxed{S(\xi,\eta)}$$

per representar la sèrie

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty}|a_{k\ell}|\xi^k\eta^\ell$$

Si $S_1(\xi,\eta)=\sum a_{k\ell}\xi^k\eta^\ell$ i $S_2(\xi,\eta)=\sum b_{k\ell}\xi^k\eta^\ell$ són dues sèries de potències, $S_1\prec S_2$ voldrà dir que $|a_{k\ell}|\leqslant b_{k\ell}$ per a tot k,ℓ Anàlogament per a sèries d'una variable En aquest cas direm que S_2 majora a S_1

Definim $P(x,y)=p(x,y)-\lambda x$ i $Q(x,y)=q(x,y)-\lambda^{-1}y$, les quals comencen en termes de grau dos

Trobem un majorant per a P Per a Q és anàleg

Com que P és analítica respecte totes les variables i és $O(\varepsilon^\alpha)$ respecte ε i d'ordre 2 respecte x, y podem escriure

$$P(x,y,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}\sum_{\substack{k+\ell\geq 2\\ h\geq 0}} b_{k\ell h}x^k y^\ell \varepsilon^h$$

Existeixen M_1, x_0, y_0 i ε_1 tals que

$$|b_{k\ell h}|<M_1/x_0^k y_0^\ell \varepsilon_1^h$$

Definint $\bar{b}_{k\ell}=\sum_h b_{k\ell h}\varepsilon^h$ tenim que

$$|\bar{b}_{k\ell}|\leq\sum_h |b_{k\ell h}\varepsilon^h|<\sum_h M_1/(x_0^k y_0 \varepsilon_1^h)\varepsilon^h = M_2/x_0^k y_0^\ell$$

si $\varepsilon/\varepsilon_1<N<1$ i $M_2=M_1/(1-N)$

Llavors escrivim

$$P(x,y,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}\sum_{k+\ell\geq 2}\bar{b}_{k\ell}x^k y^\ell$$

que té un majorant de la forma

$$G(x,y)=\varepsilon^{\alpha}\frac{c_0(x+y)^2}{1-c_1(x+y)}$$

amb c_0 i c_1 independents de ε

Suposem que aquestes constants són tals que G és una majorant comú a P i Q

La relació $N=C^{-1}FC$ es pot escriure $CN=FC$ i més explícitament

$$\phi(u\xi,v\eta)=P(\phi,\psi)+\lambda\phi$$
$$\psi(u\xi,v\eta)=Q(\phi,\psi)+\mu\psi,\qquad (\mu=\lambda^{-1})$$

Com que $\phi(u\xi,v\eta)=\phi(u\xi,\frac{1}{u}\eta)$ llavors $\phi_n(u\xi,v\eta)=u^n\phi_n(\xi,\eta)$

i per tant

$$(u^n-\lambda)\phi_n=(P(\phi,\psi))_n$$
$$(u^n-\mu)\psi_n=(Q(\phi,\psi))_n\qquad n\in Z$$

D'altra banda $\phi_1(\xi,\eta)=\sum_{k-\ell=1}a_{k\ell}\xi^k\eta^\ell = \sum_\ell a_{\ell+1,\ell}\xi^{\ell+1}\eta^\ell$,

però com que ϕ és únic amb la condició de que $\phi_\xi-1$ no continqui potències de $\xi\eta$, tenim que $(\phi_1)_\xi - 1 = \sum(\ell+1)a_{\ell+1\;\ell}\,\xi^\ell\eta^\ell$ i per tant $a_{\ell+1,\ell}=0$ si $\ell\neq 0$ D'aquesta manera deduïm que $\phi_1(\xi,\eta)=\xi$ Anàlogament tenim que $\Psi_{-1}(\xi,\eta)=\eta$ Això dóna

$$(u-\lambda)\xi = (P(\phi,\Psi))_1$$
$$(v-\mu)\eta = (Q(\phi,\Psi))_{-1}$$

Provarem ara les relacions

$$(u^n-\lambda)^{-1} \prec \frac{c_2}{1-c_2 s}, \qquad n\neq 1,$$

$$(u^n-\mu)^{-1} \prec \frac{c_2}{1-c_2 s}, \qquad n\neq -1,$$

on s és una sèrie majorant de $v-\mu$ i c_2 depèn de ε

Suposem primer que $n \leqslant 0$

$$(u^n-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(1-v^{|n|}\lambda^{-1})^{-1} = -\mu\frac{1}{1-\mu v^{|n|}} \prec \mu\sum_{k=0}^{\infty}(\lceil v\rceil^n\mu)^k \prec$$

$$\prec \frac{1}{1-\lceil v\rceil} = \frac{1}{1-\mu-s} \prec \frac{c_2}{1-c_2 s} \qquad \text{amb} \quad c_2 \geqslant \frac{1}{1-\mu}$$

Si $n>1$

$$(u^n-\lambda)^{-1} = u^{-n}(1-\lambda u^{-n})^{-1} = v^n\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda v^n)^k \prec \lceil v\rceil^n\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^{1/n}\lceil v\rceil^n)^{nk} \prec$$

$$\prec \lambda\lceil v\rceil^n\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^{1/n}\lceil v\rceil)^{nk} = (\lambda^{1/n}\lceil v\rceil)^n(1+(\lambda^{1/n}\lceil v\rceil)^k + \quad) \prec$$

$$\prec 1+\lambda^{1/2}\lceil v\rceil + (\lambda^{1/2}\lceil v\rceil)^2 + \quad = \frac{1}{1-\lambda^{1/2}\lceil v\rceil} = \frac{1}{1-\lambda^{1/2}(\mu+s)} \prec \frac{c_2}{1-c_2 s}$$

amb $c_2 \geqslant \lambda/(\lambda^{1/2}-1)$

Anàlogament si $n\geqslant 0$, $(u^n-\mu)^{-1} \prec \dfrac{1}{1-\lceil v\rceil} \prec \dfrac{c_2}{1-c_2 s}$ amb $c_2 \geqslant 1/(1-\mu)$

i si $n<-1$, $(u^n-\mu)^{-1} \prec \dfrac{\lambda}{1-\lambda^{1/2}\lceil v\rceil} \prec \dfrac{c_2}{1-c_2 s}$ amb $c_2 \geqslant \lambda/(\lambda^{1/2}-1)$

Prenem $\bar{c}_2=\max(1/(1-\mu),\lambda/(\lambda^{1/2}-1))$

Com que $1/(1-\mu)=(1/a\,\varepsilon^{\alpha})(1+O(\varepsilon))$ i

$\lambda/(\lambda^{1/2}-1)=(2/a\varepsilon^{\alpha})(1+O(\varepsilon))$ existeix $c_3>0$ tal que per a

$0<\varepsilon<\varepsilon_0, \bar{c}_2<c_3\varepsilon^{-\alpha}$

Prendrem a partir d'ara $c_2=c_3\varepsilon^{-\alpha}$ (c_3 no depén de ε)

Com que $\phi-\xi=\sum_{n\neq 1}\phi_n$ i $\psi-\eta=\sum_{n\neq -1}\psi_n$

$$\lceil\phi\rceil-\xi,\lceil\psi\rceil-\eta<\frac{c_2}{1-c_2 s}G(\lceil\phi\rceil,\lceil\psi\rceil)$$

i $\quad \eta s=\eta\lceil v-\mu\rceil<G(\lceil\phi\rceil,\lceil\psi\rceil)$

Fem $\xi=\eta$ i definim

$$W(\xi)=\frac{1}{\xi}(\lceil\phi\rceil-\xi+\lceil\psi\rceil-\eta)+c_2 s$$

i busquem una funció majorant per a W Primer considerem

$$\xi W(\xi)<\frac{2c_2}{1-c_2 s}G(\lceil\phi\rceil,\lceil\psi\rceil)+c_2\xi s<\frac{2c_2}{1-c_2 s}G(\lceil\phi\rceil,\lceil\psi\rceil)+c_2 G(\lceil\phi\rceil,\lceil\psi\rceil)<$$

$$<\frac{3c_2}{1-c_2 s}G(\lceil\phi\rceil,\lceil\psi\rceil)$$

però per la definició de W

$\frac{\lceil\phi\rceil-\xi}{\xi}<W$ que implica que $\lceil\phi\rceil<\xi(W+1)$,

$\frac{\lceil\psi\rceil-\xi}{\xi}<W$ que implica que $\lceil\psi\rceil<\xi(W+1)$

i $\quad c_2 s<W$

Llavors

$$\xi W(\xi)<\frac{3c_2}{1-c_2 s}G(\xi(W+1),\xi(W+1))<\frac{3c_2}{1-W}\;\frac{\varepsilon^{\alpha}c_0 4\xi^2(W+1)^2}{1-2c_1\xi(W+1)}<$$

$$<\frac{12c_0c_3\xi^2(1+W)^2}{1-W-2c_1\xi(W+1)}$$

i $\quad W(\xi) \prec \dfrac{12c_0c_3\xi(1+W)^2}{1-W-2c_1\xi(1+W)}$

Definim $V(\xi)=\dfrac{12c_0c_3\xi(1+V)^2}{1-V-2c_1\xi(1+V)}$ la qual verifica $W(\xi) \prec V(\xi)$

En efecte, si considerem $V(\xi)=\sum_{k\geq 1}\gamma_k\xi^k$ i $W(\xi)=\sum_{k\geq 1}\sigma_k\xi^k$ i les substituïm a les expressions que les defineixen podrem, per a V, determinar recurrentment els coeficients γ_k, per les mateixes relacions que apareixen per a W Llavors,per inducció es veu que $0<\sigma_k<\gamma_k$

V verifica $(12c_0c_3\xi+2c_1\xi+1)V^2+(24c_0c_3\xi+2c_1\xi-1)V+12c_0c_3\xi=0$,

que determina una única funció amb la condició $V(0)=0$ Com que els coeficients són independents de ε,el radi de convergència de V també ho és Llavors W convergeix en una bola de radi r_0 (independent de ε) i a més està afitada per una fita independent de ε

Així els majorants

$$\lceil v-\mu\rceil = s \prec \frac{1}{c_2}W=\frac{\varepsilon^\alpha}{c_3}W$$

$$\lceil\phi\rceil \prec \xi(W+1)$$

$$\lceil\psi\rceil \prec \xi(W+1)$$

ens diuen que $N_\varepsilon(\xi,\eta)=(\lambda x,\mu y)+O(\varepsilon^\alpha)$

ja que $\lceil u-\lambda\rceil = \left\lceil \frac{1}{v}-\frac{1}{\mu}\right\rceil = \left\lceil\frac{\mu-v}{\mu v}\right\rceil \prec \frac{c_4}{c_3}\varepsilon^\alpha W$ si ε és prou petit

A més $C_\varepsilon(\xi,\eta)=(\xi,\eta)+O(1)$ $\quad$ ($O(1)$ respecte de ε)

5 4 Proximitat de les formes normals de Birkhoff

Estudiem aquí, la proximitat de les varietats invariants locals per a famílies de difeomorfismes analítics conservatius que verifiquin bàsicament

$$|F_\varepsilon - G_\varepsilon| = O(\varepsilon^{\alpha+1})$$

i a diferència dels teoremes 2 4 i 2 5 els resultats seran per a valors complexos de les varietats invariants

Proposició 5 5

Siguin F_ε i G_ε dues famílies de difeomorfismes verificant les hipòtesis de la proposició 5 4 Suposem que $|F_\varepsilon - G_\varepsilon| = O(\varepsilon^{\alpha+1})$ i que els valors propis de $DF_\varepsilon(0,0)$ i $DG_\varepsilon(0,0)$ són iguals Si C_1 i C_2 són els canvis que porten F_ε i G_ε a la seva forma normal existeixen ε_0 i $r_1 > 0, K > 0$ independents de ε tals que

$$|C_1(\xi,0) - C_2(\xi,0)| < K\varepsilon ,$$

$$|C_1(0,\eta) - C_2(0,\eta)| < K\varepsilon ,$$

per a $|\xi|, |\eta| < r_1$ i $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

Demostració

En aquesta demostració si $I(x,y)$ és analítica escriurem

$$I(\xi,\eta) = \sum_{k,\ell \geq 0} a_{k\ell}\, \xi^k \eta^\ell = \sum_{n \geq 0} I_n(\xi,\eta)$$

on $I_n(\xi,\eta) = \sum_{k+\ell=n} a_{k\ell}\, \xi^k \eta^\ell$

Per economia d'escriptura no escriurem la dependència en ε

Introduïm la següent notació

$$F(x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y) + (P_1(x,y), Q_1(x,y))$$

$$G(x,y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y) + (P_2(x,y), Q_2(x,y))$$

$$C_1(\xi,\eta)=(\phi_1(\xi,\eta),\Psi_1(\xi,\eta)),$$
$$C_2(\xi,\eta)=(\phi_2(\xi,\eta),\Psi_2(\xi,\eta))$$

Es verifica que

$$C_1N_1(\xi,0)=FC_1(\xi,0),$$
$$C_2N_2(\xi\ 0)=GC_2(\xi,0)$$

Més explícitament

$$(\phi_1(\lambda\xi,0),\Psi_1(\lambda\xi,0))=C_1(\lambda\xi,0)=C_1N_1(\xi,0)=FC_1(\xi,0)=$$
$$=(P_1(\phi_1,\Psi_1)+\lambda\phi_1,Q_1(\phi_1,\Psi_1)+\lambda^{-1}\Psi_1),$$
$$(\phi_2(\lambda\xi,0),\Psi_2(\lambda\xi,0))=C_2(\lambda\xi,0)=C_2N_2(\xi,0)=GC_2(\xi,0)=$$
$$=(P_2(\phi_2,\Psi_2)+\lambda\phi_2,Q_2(\phi_2,\Psi_2)+\lambda^{-1}\Psi_2),$$

on aquí i d'ara endavant, les expressions que no porten explícitament l'argument estan avaluades en $(\xi,0)$

Escrivint les parts homogènees d'ordre n de les expressions anteriors

(5 4) $\quad (\phi_1(\lambda\xi,0))_n-\lambda(\phi_1(\xi,0))_n=(P_1(\phi_1,\Psi_1))_n,$

(5 5) $\quad (\Psi_1(\lambda\xi,0))_n-\lambda^{-1}(\Psi_1(\xi,0))_n=(Q_1(\phi_1,\Psi_1))_n,$

(5 6) $\quad (\phi_2(\lambda\xi,0))_n-\lambda(\phi_2(\xi,0))_n=(P_2(\phi_2,\Psi_2))_n,$

(5 7) $\quad (\Psi_2(\lambda\xi,0))_n-\lambda^{1}(\Psi_2(\xi,0))_n=(Q_2(\phi_2,\Psi_2))_n$

Tenint en compte que en general $(I(\lambda\xi,0))_n=\lambda^n(I(\xi,0))_n$, restant (5 6) de (5 4)

$$(\lambda^n-\lambda)(\phi_1(\xi,0)-\phi_2(\xi,0))_n=(P_1(\phi_1,\Psi_1))_n-(P_2(\phi_2,\Psi_2))_n=$$
$$=(P_1(\phi_1,\Psi_1)-P_1(\phi_1,\Psi_2)+P_1(\phi_1,\Psi_2)-P_1(\phi_2,\Psi_2)+$$
$$+P_1(\phi_2,\Psi_2)-P_2(\phi_2,\Psi_2))_n$$

Buscarem una sèrie majorant per a $\phi_1(\xi,0)-\phi_2(\xi,0)$ Abans notem que

$$\lceil P_1(x_1,y_1)-P_2(x_1,y_2)\rceil = \lceil \sum a_{k\ell}\, x_1^k y_1^\ell - \sum a_{k\ell}\, x_1^k y_2^\ell \rceil =$$

$$= \sum |a_{k\ell}|\, x_1^k (y_1^\ell - y_2^\ell) =$$

$$= \sum |a_{k\ell}|\, x_1^k (y_1^{\ell-1} + y_1^{\ell-2} y_2 + y_1^{\ell-3} y_2 + \quad + y_2^{\ell-1})(y_1-y_2) \prec$$

$$\prec \sum |a_{k\ell}|\, x_1^k (y_1+y_2)^{\ell-1}(y_1-y_2) \prec \lceil D_y P_1 \ (x_1, y_1+y_2)\rceil (y_1-y_2)$$

i anàlogament

$$\lceil P_1(x_1,y_2)-P_1(x_2,y_2)\rceil \prec \lceil D_x P_1 \ (x_1+x_2,y_2)\rceil (x_1-x_2)$$

Llavors

$$\lceil \phi_1(\xi,0)-\phi_2(\xi,0)\rceil_n \prec \frac{1}{\lambda^n-\lambda}\Big[(\lceil D_y P_1(\phi_1,\Psi_1+\Psi_2)\rceil \lceil \Psi_1-\Psi_2\rceil)_n +$$

$$+ (\lceil D_x P_1(\phi_1+\phi_2,\Psi_2)\rceil \lceil \phi_1-\phi_2\rceil)_n + (\lceil (P_1-P_2)(\phi_2,\Psi_2)\rceil)_n\Big]$$

Si $\lambda=1+a\varepsilon^\alpha+$ existeix a' tal que $0<a'<a$ i que si ε és prou petit es verifica $\lambda>1+a'\varepsilon^\alpha$

Així $\lambda^n-\lambda=\lambda(\lambda^{n-1}-1)>\lambda((1+a'\varepsilon^\alpha)^{n-1}-1)>\lambda(1+(n-1)a'\varepsilon^\alpha-1)>a'\varepsilon^\alpha$

si $n\geqslant 2$

Per tant

(5 8) $$\lceil \phi_1(\xi,0)-\phi_2(\xi,0)\rceil \prec \frac{1}{a'\varepsilon^\alpha}\Big[\lceil D_y P_1(\phi_1,\Psi_1+\Psi_2)\rceil \lceil \Psi_1-\Psi_2\rceil +$$

$$+ \lceil D_x P_1(\phi_1+\phi_1,\Psi_2)\rceil \lceil \phi_1-\phi_2\rceil + \lceil (P_1-P_2)(\phi_2,\Psi_2)\rceil\Big]$$

De la mateixa manera tenim que

(5 9) $$\lceil \Psi_1(\xi,0)-\Psi_2(\xi,0)\rceil \prec \frac{1}{a'\varepsilon^\alpha}\Big[\lceil D_y Q_1(\phi_1,\Psi_1+\Psi_2)\rceil \lceil \Psi_1-\Psi_2\rceil +$$

$$+ \lceil D_x Q_1(\phi_1+\phi_2,\Psi_2)\rceil \lceil \phi_1-\phi_2\rceil + \lceil (Q_1-Q_2)(\phi_2,\Psi_2)\rceil\Big]$$

Com que $P_1(x,y,\varepsilon)$ és entera (respecte de x,y), $|P_1(x,y,\varepsilon)|< M_1\varepsilon^\alpha$ i P_1 comença amb termes de segon grau tenim que

$$P_1(x,y,\varepsilon)=\varepsilon^\alpha \sum_{\substack{k,\ell\geqslant 2\\ h\geqslant 0}} c_{k\ell h}\, x^k y^\ell \varepsilon^h$$

D_xP_1 i D_yP_1 són també enteres i comencen amb termes de primer grau El mateix passa per a Q_1, D_xQ_1 i D_yQ_2

Pel teorema 5 1, $\emptyset_1$, $\emptyset_2$, Ψ_1 i Ψ_2 són analítiques en un entorn de l'origen

Sigui r_0 tal que les anteriors funcions convergeixen en la bola de radi r_0 $D_yP_1(\phi_1\ \Psi_1+\Psi_2)$, $D_xP_1(\phi_1+\phi_2,\Psi_2)$ $D_yQ_1(\phi_1,\Psi_1+\Psi_2)$ i $D_xQ_1(\phi_1+\phi_2,\Psi_2)$ són analítiques si $|\xi|<r_0$

Recordem que aquestes funcions estan avaluades en $(\xi,0)$

Sigui

$$\frac{\varepsilon^\alpha A_1\xi}{1-A_2\xi}$$

un majorant comú a totes elles vàlid per a $|\xi|<r_0$

Com que $|F-G|=O(\varepsilon^{\alpha+1})$ llavors $|P_1-P_2|=O(\varepsilon^{\alpha+1})$ i per tant existeix $M>0$ tal que $|P_1-P_2|<M\varepsilon^{\alpha+1}$ en $\{(\phi_2(\xi,0),\Psi_2(\xi,0)),\ |\xi|<r_0\}$ Així $P_1-P_2=\varepsilon^{\alpha+1}g(x,y,\varepsilon)$ on g és analítica

Llavors existeixen constants positives A_3,A_4,A_5 i A_6 tals que

$$P_1-P_2 \prec \varepsilon^{\alpha+1}\frac{A_3(x+y)^2}{1-A_4(x+y)} \qquad \text{i} \qquad Q_1-Q_2 \prec \varepsilon^{\alpha+1}\frac{A_5(x+y)^2}{1-A_6(x+y)}$$

Definim

$$\chi(\xi)=\lceil\phi_1-\phi_2\rceil(\xi,0)+\lceil\Psi_1-\Psi_2\rceil(\xi,0)$$

Sumant (5 8) i (5 9) obtenim

$$\chi(\xi)\prec\frac{1}{a'\varepsilon^\alpha}\left[\frac{\varepsilon^\alpha A_1\xi}{1-A_2\xi}\chi(\xi)+\varepsilon^{\alpha+1}\frac{A_3(\phi_2+\Psi_2)^2}{1-A_4(\phi_2+\Psi_2)}+\varepsilon^{\alpha+1}\frac{A_5(\phi_2+\Psi_2)^2}{1-A_6(\phi_2+\Psi_2)}\right]$$

Sigui

$$\frac{A_7\xi^2}{1-A_8\xi}$$

un majorant comú a

$$\frac{A_3(\phi_2+\Psi_2)^2}{1-A_4(\phi_2+\Psi_2)} \qquad \text{i} \qquad \frac{A_5(\phi_2+\Psi_2)^2}{1-A_6(\phi_2+\Psi_2)}$$

Llavors

$$\chi(\xi) < \frac{A_9\xi}{1-A_2\xi}\chi(\xi) + \varepsilon\frac{2A_7\xi^2}{1-A_8\xi}$$

Com a la demostració de la proposició 5 4 considerem $\bar{\chi}(\xi)$ definida per la mateixa relació anterior, però amb la igualtat $\bar{\chi}$ és una majorant de χ

$$\bar{\chi}(\xi) = \varepsilon\frac{2A_7\xi^2(1-A_2\xi)}{(1-A_8\xi)(1-(A_2+A_9)\xi)}$$

Com que les constants A_i són independents de ε tenim que existeixen r_1 i K_1 positives, independents de ε tals que

$$|(\phi_1-\phi_2)(\xi,0)| < \overline{\phi_1-\phi_2}(|\xi|,0) < K_1\varepsilon\,,$$

$$|(\Psi_1-\Psi_2)(\xi,0)| < \overline{\Psi_1-\Psi_2}(|\xi|,0) < K_1\varepsilon \qquad \text{si } |\xi| < r_1$$

Llavors

$$|(C_1-C_2)(\xi,0)| < \sqrt{2}K_1\varepsilon \qquad \text{si } |\xi| < r_1$$

Igualment es prova que

$$|(C_1-C_2)(0,\eta)| < \sqrt{2}K_2\varepsilon$$

Prenem $K=\max(\sqrt{2}K_1,\sqrt{2}K_2)$ Això acaba la demostració

CAPÍTOL 6

SEPARACIÓ ENTRE LES VARIETATS INVARIANTS PER A DIFEOMORFISMES ANALÍTICS

6 1 Introducció

En aquest capítol estudiarem la separació entre les varietats invariants per a famílies de difeomorfismes conservatius, propers a la identitat, amb punts homoclínics, descrites al començament del seguent paràgraf, en el cas analític, i obtindrem una fita de la separació molt més precisa que pel cas diferenciable En aquest cas la separació és exponencialment petita en funció del paràmetre o alternativament del logaritme del valor propi més gran que 1 Això ja ens mostra que una teoria clàssica de pertorbacions no és útil en aquest cas ja que no permet detectar aquesta petitesa

Sembla imprescindible usar les varietats invariants esteses als complexos per obtenir aquesta fita, cosa que només és possible per a famílies de difeomorfismes analítics

En primer lloc es busca un camp autònom conservatiu que tingui una òrbita homoclínica i el seu flux temps una potència adequada del paràmetre és proper a la família

L'òrbita homoclínica del camp és independent del paràmetre i és analítica en una banda complexa, l'amplada de la qual, ve determinada per la singularitat d'aquesta més propera a l'eix real Direm δ a aquesta amplada Després es globalitzen les varietats invariants complexes partint dels resultats locals del capítol anterior usant com a referència l'òrbita homoclínica del camp trobat Es globalitza també la integral primera local al voltant de les varietats invariants Això permet construir, a l'entorn d'un punt en que volem estudiar la separació, una funció periòdica, de període el logaritme del valor propi més gran que 1

De les propietats d'aquesta funció se'n dedueix la fita esmentada El resultat és, de forma més precisa, que donat qualsevol número η positiu existeix una constant positiva N tal que per a valors del paràmetre prou petits la separació és menor que

$$N \exp\left(-2\pi(\delta-\eta)/\ln\lambda\right)$$

En els exemples del capítol seguent es mostra com famílies que no són, en principi, exactament com les del tipus estudiat s'hi transformen a través de canvis lineals

Finalment en l'apartat 6 3 es fan algunes consideracions sobre la integrabilitat de difeomorfismes analítics

6.2 Separació entre les varietats invariants

En aquest capítol considerarem famílies de difeomorfismes $F_\varepsilon : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ del tipus

$$(6.1) \quad F_\varepsilon(x,y)=(\lambda x,\lambda^{-1}y)+\varepsilon^{\alpha}(f_1(x,y),f_2(x,y))+$$
$$+\varepsilon^{\alpha+1}(g_1(x,y,\varepsilon),g_2(x,y,\varepsilon))$$

amb $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ i $\alpha\in\mathbb{N}$, verificant

i) $F_\varepsilon(x,y)$ és real si x,y són reals,

ii) F_ε preserva àrea,

iii) F_ε és analític en $\mathbb{C}^2$ respecte de (x,y) i en $(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ respecte de ε, f_i i g_i $(i=1,2)$ comencen amb termes d'ordre 2 respecte de x,y,

iv) $\lambda=1+a\varepsilon^{\alpha}+O(\varepsilon^{\alpha+1})$ amb $a>0$

Aquestes condicions obliguen a que $(0,0)$ sigui punt fix hiperbòlic. Denotem que W^u i W^s les varietats invariants corresponents. Suposem a més la condició

v) Per a tot ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, existeix un punt homoclínic corresponent a W^u i W^s i existeix un conjunt compacte B que conté les parts reals de W^u i W^s des de l'origen fins al punt homoclínic.

Com al capítol anterior $h=\ln\lambda$.

Proposició 6.1

En les condicions anteriors existeix un camp autònom en $\mathbb{C}^2$, analític, conservatiu, amb imatge real sobre els reals que té l'origen com a punt singular hiperbòlic i té una òrbita homoclínica σ tal que per a ε petit les parts reals de les varietats invariants de l'origen de F_ε estan prop de la part real de σ en el sentit de la proposició 2 4

<u>Demostració</u>

La forma que prenen els difeomorfismes F_ε ens motiva a considerar el camp donat per

$$(6\ 2)\qquad \begin{aligned} x&=x+\frac{1}{a}f_1(x,y)\\ y&=-y+\frac{1}{a}f_2(x,y)\end{aligned}$$

Com que F_ε preserva mesura

$$\det\begin{pmatrix} 1+a\,\varepsilon^\alpha+\varepsilon^\alpha D_x f_1(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}) & \varepsilon^\alpha D_y f_1(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}) \\ \varepsilon^\alpha D_x f_2(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}) & 1-a\varepsilon^\alpha+\varepsilon^\alpha D_y f_2(x,y)+O(\varepsilon^{\alpha+1}) \end{pmatrix}=1$$

i per tant

$$1+\varepsilon^\alpha(a+D_x f_1(x,y)-a+D_y f_2(x,y))+O(\varepsilon^{\alpha+1})=1$$

i com que F_ε és analítica respecte de ε, ha de ser que

$$D_x f_1(x,y)+D_y f_2(x,y)=0$$

i per tant la divergència de (6 2) és nul la

És immediat que que (0,0) és un punt singular hiperbòlic de (6 2) ja que f_1 i f_2 comencen amb termes quadràtics

Suposarem sense explicitar-ho que $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ amb ε_0 suficientment petit

Per l'observació que segueix al corol lari 2 3, l'aplicació $\tilde{G}_\varepsilon$ definida com el flux temps $a\varepsilon^\alpha$ de (6 2) i l'aplicació $\tilde{F}_\varepsilon$ definida per

$$\tilde{F}_\varepsilon(x,y)=(x,y)+a\,\varepsilon^\alpha\left(x+\frac{1}{a}f_1(x,y),-y+\frac{1}{a}f_2(x,y)\right)$$

són tals que existeixen constants C, L_2, M_k tals que, en B

$$|D\tilde{F}_\varepsilon - I| < C\varepsilon^\alpha,$$
$$|D\tilde{G}_\varepsilon - I| < C\varepsilon^\alpha,$$
$$|D^2\tilde{F}_\varepsilon| < L_2\varepsilon^\alpha,$$
$$|D^k\tilde{G}_\varepsilon - D^k\tilde{F}_\varepsilon| < M_k\varepsilon^{2\alpha}, \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2)$$

A més, és immediat que, en B

$$|D^kF - D^k\tilde{F}| < M_k'\varepsilon^{\alpha+1}, \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2)$$

Per tant, utilitzant la desigualtat triangular es veu que es verifica la hipòtesi iii) dels teoremes 2 4 i 2 5 per a F_ε i $\tilde{G}_\varepsilon$, per a r=1

Per a la hipòtesi ii), com a la proposició 2 6

$$D\tilde{G}_\varepsilon(0,0) = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a\varepsilon^\alpha = \begin{pmatrix} e^{a\varepsilon^\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-a\varepsilon^\alpha} \end{pmatrix}$$

i per tant els valors propis són del tipus $1 \pm a\varepsilon^\alpha + O(\varepsilon^{\alpha+1})$
Llavors prop del punt homoclínic de F_ε les varietats invariants de $\tilde{G}_\varepsilon$ han de ser properes entre si Les varietats invariants de $\tilde{G}_\varepsilon$ són les de (6 2) que són independents de ε Com que el camp és conservatiu, si les varietats invariants són properes entre si, han de tallar-se i com que, a més, és autònom, han de coincidir Així resta provat que (6 2) té una òrbita homoclínica Els teoremes 2 4 i 2 5 acaben la demostració

Introduïm G_ε com el flux temps h de (6 2)
Per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existeix $b > 0$ tal que $|h - a\varepsilon^\alpha| < b\varepsilon^{\alpha+1}$
Llavors és fàcil provar que

$$|D^kG_\varepsilon - D^k\tilde{G}_\varepsilon| < M_k'\varepsilon^{\alpha+1} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2)$$

Usant la desigualtat triangular, existeixen constants M_k' tals que

$$|D^kF - D^kG| < M_k'\varepsilon^{\alpha+1} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2)$$

A mé_

$$DG_\varepsilon(0,0) = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} e^h & 0 \\ 0 & e^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

i per tant els valors propis d'aquesta diferencial coincideixen amb els de $DF_\varepsilon(0,0)$

Representem per u(t) i v(t) les parametritzacions de les varietats invariants inestable i estable de F_ε respectivament donades per la proposició 5 3, sense explicitar-ne la dependència en ε

La seguent proposició ens dóna una relació d'aquestes parametritzacions amb l'òrbita homoclínica σ de (6 2)

Proposició 6 2

Existeixen $r_1 > 0$ i $K > 0$, independents de ε, tals que

$$|u(t) - \sigma(t)| < K\varepsilon \qquad \text{si} \quad \operatorname{Re} t < \ln r_1 + t_0\,,$$

$$|v(t) - \sigma(t)| < K\varepsilon \qquad \text{si} \quad \operatorname{Re} t > \ln r_1 + t_0'\,,$$

per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, on t_0 i t_0' s'especifiquen en la demostració

Demostració

Primer expressarem σ en una forma convenient per a la comparació amb u i v

Com que (6 2) és conservatiu existeix H(x,y) entera (f_1 i f_2 són enteres) tal que

$$x = \frac{\partial H}{\partial y} = x + \frac{1}{a} f_1(x,y)$$
$$y = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y + \frac{1}{a} f_2(x,y)$$

En (29) es prova que existeix un canvi de variable canònic, analític, del tipus

$$C(\xi,\eta) = (\xi + \sum_{k\geq 2} \phi_k(\xi,\eta), \eta + \sum_{k\geq 2} \psi_k(\xi,\eta)),$$

convergent en un entorn de l'origen tal que, en les noves variables, H pren la forma

$$\bar{H}(\xi,\eta) = a_1 \xi\eta + a_2 (\xi\eta)^2 +$$

Sigui r_0' tal que si $|\xi| < r_0'$ i $|\eta| < r_0'$, C és convergent

En el nostre cas $a_1 = 1$ En efecte, recordem que els desenvolupaments de f_1 i f_2 comencen amb termes de grau dos

Com que

$$\frac{\partial H}{\partial y} = x + f_1(x,y)$$

tenim que

$$H(x,y) = xy + \int_0^y f_1(x,y)\,dy + R(x)$$

i d'aquí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y + \int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y)\right) dy + \frac{\partial R}{\partial x}$$

però també

$$\frac{\partial H}{\partial x} = y - f_2(x,y)$$

Comparant es dedueix que el desenvolupament de $\frac{\partial R}{\partial x}$ comença amb termes de grau dos, per tant el de R comença amb termes de grau tres Així

$$H(x,y) = xy +$$

i $\bar{H}(\xi,\eta) = H(\xi + \sum_{k\geq 2} \phi_k(\xi,\eta), \eta + \sum_{k\geq 2} \Psi_k(\xi,\eta)) = \xi\eta +$

és a dir, $a_1 = 1$ com volíem provar

Diem $\omega = \xi\eta$ Les equacions en les noves variables són

$$(6\ 3)\qquad \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} = \xi\frac{\partial \bar{H}}{\partial \omega} \\ \dot{\eta} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi} = -\eta\frac{\partial \bar{H}}{\partial \omega} \end{aligned}$$

i per tant el flux solució és

$$\bar{\varphi}(t,\xi,\eta) = (\xi e^{H_\omega(\xi\eta)t}, \eta e^{-H_\omega(\xi\eta)t})$$

ja que verifica (6 3) i $\bar{\varphi}(0,\xi,\eta) = (\xi,\eta)$

En particular, l'òrbita homoclínica ve donada localment

en aquestes variables per

$$\bar{\sigma}(t) = (\xi e^{t},0) = (\pm e^{t-t_0},0) \qquad \text{amb } \xi = \pm e^{-t_0}$$

si Re t és suficientment negatiu, i per

$$\bar{\sigma}(t) = (0,\eta e^{-t}) = (0,\pm e^{-(t-t_0')}) \qquad \text{amb } \eta = \pm e^{t_0'}$$

si Re t és suficientment gran (positiu)

Llavors (suposant $\xi,\eta > 0$)

$$(6\ 4)\qquad \begin{aligned} \sigma(t) &= C(e^{t-t_0},0) && \text{per a Re } t \text{ 'molt negatiu ,} \\ \sigma(t) &= C(0,e^{-(t-t_0')}) && \text{per a Re } t \text{ molt positiu ,} \end{aligned}$$

Anem, ara, a estudiar el canvi C més acuradament i a donar-li una altra interpretació Per això considerem el flux de (6 2) El representem per $\varphi_t(x,y)$ Representem per $\bar{\varphi}_t(x,y)$ el flux de (6 3) Tenim que

$$\varphi_t(x,y) = C\bar{\varphi}_t(\xi,\eta) = C\bar{\varphi}_t C^{-1}(x,y)$$

Diem $\bar{G}_\varepsilon$ al flux temps h de (6 3) L'anterior expressió pren la forma

$$G_\varepsilon(x,y) = C\bar{G}_\varepsilon C^{-1}(x,y)$$

o també

$\bar{G}_\varepsilon = C^{-1} G_\varepsilon C$

Com que

$$\bar{G}_\varepsilon(\xi,\eta) = (\xi e^{H_\omega(\xi\eta)h}, \eta e^{-H_\omega(\xi\eta)h}) =$$

$$(\xi(1+H_\omega(\xi\eta)h+\frac{(H_\omega(\xi\eta)h)^2}{2!}+\quad), \eta(1-H_\omega(\xi\eta)h+\frac{(H_\omega(\xi\eta)h)^2}{2!}+\quad))$$

veiem que $\bar{G}_\varepsilon$ està en forma normal de Birkhoff i que C és un canvi que porta G_ε a aquesta forma i a més té la propietat que és independent de ε Ja hem dit que el canvi a forma normal de Birkhoff no és únic, però,en el nostre cas, la proposició 5 2 prova que $C(\xi,0)$ i $C(0,\eta)$ estan univocament determinats

Siguin $C_2=C$ i C_1 el canvi (depenent de ε) que porta F_ε a forma normal En les condicions que estem, la proposició 5 5 ens assegura que existeixen ε_0 i $r_1>0$ i $K>0$ (independents de ε) tals que

$$|C_1(\xi,0)-C_2(\xi,0)| < K\varepsilon ,$$
$$|C_1(0,\eta)-C_2(0,\eta)| < K\varepsilon ,$$

per a $|\xi|,|\eta|<r_1$ i $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

Usant (5 4), (5 5) i (6 4) s'acaba la demostració

Proposició 6 3

L'òrbita homoclínica σ de (6 2) es pot estendre analíticament per a t pertanyent a una banda complexa del tipus

$$\{t \in \mathbb{C} ,\ |\mathrm{Im}\ t|<\delta\}$$

Demostració

Per la demostració de la proposició 6 2 sabem que existeixen τ_1, τ_2 reals que compleixen

$\sigma(t)=C(e^{t-t_0},0)$ si Re $t<\tau_1$

$\sigma(t)=C(0,e^{-(t-t_0')})$ si Re $t>\tau_2$

on C és analític

Per tant σ està ben definida en

$$\{t\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ t<\tau_1\}\cup\{t\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ t>\tau_2\}$$

L'interval $[\tau_1,\tau_2]$ és compacte i σ està definida per a t real, $t\in[\tau_1,\tau_2]$ Per l'analiticitat de σ podem estendre-la a una banda

$$\{t\in\mathbb{C},\ \tau_1\leqslant \mathrm{Re}\ t\leqslant\tau_2,\ |\mathrm{Im}\ t|<\delta\},$$

cosa que prova la proposició

<u>Observació</u>

Notem que,el δ maximal amb aquesta propietat, és la distància de l'eix real a la singularitat de σ més propera a aquest

El seguent teorema és el resultat principal d'aquest capítol

<u>Teorema 6 4</u>

Sigui F_ε una família de difeomorfismes del tipus (6 1) verificant les 5 condicions del començament de l'apartat Sigui δ el valor maximal que verifica la propietat de la proposició 6 3 Sigui P un punt real de l'orbita homoclínica de (6 2)

Llavors per a tot $\eta>0$ existeixen $\varepsilon_0>0$ i N>0 independent de ε tals que la distància entre les varietats invariants de F_ε prop de P és menor que

$$N \exp(-2\pi(\delta-\eta)/\ln\lambda)$$

per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

Demostració

Durant la demostració d'aquest teorema haurem de provar alguns lemes

Sigui r_0 el radi de la bola centrada a l'origen per la qual el canvi i la forma normal de la proposició 5 4 convergeixen Diem B_{r_0} a aquesta bola Com que $C_\varepsilon=I+O(1)$ (O(1) respecte de ε), existeix una bola de radi r_2, B_{r_2}, tal que $C_\varepsilon(B_{r_0})\supset B_{r_2}$ Si cal, restringim r_2 perquè en B_{r_2} es verifiqui la propietat de la proposició 5 5

Sigui C_ε el canvi que porta F_ε a la seva forma normal de Birkhoff estudiat en la proposició 5 4 Definim $\tilde{C}_\varepsilon$ per

$$C_\varepsilon(x,y)=(x,y)+\tilde{C}_\varepsilon(x,y)$$

$\tilde{C}_\varepsilon$ és d'ordre 2 en x,y i d'ordre 1 en ε, la seva inversa és del mateix tipus Si anomenem C_i^{-1} a la component i-èsima de C^{-1},

$$C_1^{-1}C_2^{-1}=xy+$$

on els punts indiquen termes d'ordre 3 en x,y i d'ordre 1 en ε

Així

$$D_y(C_1^{-1}C_2^{-1})=x+$$

on els punts indiquen termes d'ordre 2 en x,y i d'ordre 1 en ε

Per tant existeixen $r_3\leqslant r_2$ i $A>0$ tals que en B_{r_3}

$$|D_y(C_1^{-1}C_2^{-1})-x|<A|(x,y)|^2$$

Així si $(x,y)\in B_{r_3}-B_{r_3/2}$

$$|D_y(C_1^{-1}C_2^{-1})| > x-A|(x,y)|^2 > \frac{r_3}{2} - Ar_3^2 = \frac{r_3}{2}(1-2Ar_3)$$

Suposem, a més, que r_3 és prou petit perquè $1-2Ar_3 > 0$ i prenem

$$s_0 = \frac{r_3}{2}(1-2Ar_3)$$

Sigui ℓ_1 un segment real de σ contingut en $B_{r_3} - B_{r_3/2}$

Siguin $t_1 < t_2$ els valors reals tals que $\sigma(t_1)$ és l'extrem inferior de ℓ_1 i $\sigma(t_2)$ n'és l'extrem superior

Suposem, a més, que $\sigma(t) \subset B_{r_2}$ si

$$t \in \Delta_0 \equiv \{t \in \mathbb{C}\ ,\ t_1 \leqslant \text{Re } t \leqslant t_2,\ |\text{Im } t| < \delta - \eta\}$$

Si això no es verifiqués, només caldria restringir r_3 (i per tant ℓ_1, t_1 i t_2) ja que

$$\sigma(t) = (\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{nt}, \sum_{n\geqslant 1} b_n e^{nt}) \qquad \text{si Re } t < \tau_1$$

i per tant

$$|\text{Im}\sigma(t)| \leqslant ((\sum_{n\geqslant 1} |a_n| e^{n\text{Re}t})^2 + (\sum_{n\geqslant 1} |b_n| e^{n\text{Re}t})^2)^{1/2}$$

que tendeix a zero quan Re t tendeix a $-\infty$

Existeix $T_1 > 0$ tal que $P = \sigma(t_0)$ amb $t_0 \in (t_1+T_1, t_2+T_1)$

Existeix $T_2 > 0$ tal que $\sigma(t) \in B_{r_2}$ per a

$$t \in \Delta_2 \equiv \{t \in \mathbb{C}\ ,\ t_1+T_1+T_2 < \text{Re } t < t_2+T_1+T_2\ ,\ |\text{Im } t| < \delta - \eta\}$$

Això és possible perquè, anàlogament com abans $|\text{Im}\,\sigma(t)|$ tendeix a zero quan Re t tendeix a ∞

Sigui $\tilde{\Omega}_0 = \{z = \sigma(t)\ ,\ t \in \Delta_0\}$ Sigui φ el flux de (6 2)

De les anteriors definicions és clar que φ està definit per $z \in \tilde{\Omega}_0$ i $t \in [0, T_1+T_2]$ Per la continuïtat de φ existeix r tal que φ està definit per $z \in \tilde{\Omega}_0 + r$ i $t \in [0, T_1+T_2]$ i que $\varphi(t,z) \in B_{r_2}$ si $z \in \tilde{\Omega}_0 + r$ i $t \in \Delta_2$

Sigui $\Omega_0=\tilde{\Omega}_0+r$ Definim

$$\Omega = \left\{z=\varphi(t,w)\ ,\ 0\leqslant t\leqslant T_1+T_2\ ,\ w\in\Omega_0\right\}$$

Per sencillesa de notació escriurem l'equació (6 2) en la forma $\dot{z}=f(z)$ on $z=(x,y)$ De manera semblant escriurem

$$F_\varepsilon(z)=z+\varepsilon^\alpha f(z)+O(\varepsilon^{\alpha+1})$$

i

$$F_\varepsilon^{-1}(z)=z-\varepsilon^\alpha f(z)+O(\varepsilon^{\alpha+1})$$

Sigui $\overline{\Omega}$ l'adherència de Ω És compacte

Siguin M_2 i M_3 tals que en

$$|f|\leqslant M_2 \qquad |Df|\leqslant M_3$$

en $\overline{\Omega}$

Sigui $M_4=M_3+2$, de manera que per a ε_0 prou petit

$$|DF_\varepsilon(z)|<1+M_4\varepsilon^\alpha \quad \text{si } z\in\overline{\Omega} \quad \text{i} \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

i

$$M_5=\max\left(\frac{M_1}{M_4}\,e^{2M_4TC},\frac{M_2}{D}\right),$$

on $T=\max(T_1,T_2)$ i C i D verifiquen que $D<\dfrac{\varepsilon^\alpha}{h}<C$

Definim Ω^i i Ω_1^i (i=1,2,3) per

$$\Omega^i=\left\{z=\varphi(t,w),\ 0\leqslant t\leqslant T_1+T_2\ ,\ w\in\Omega_1^i\right\}\subset\Omega-2iM_5\varepsilon_0$$

amb ε_0 prou petit perquè $\Omega^i\neq\emptyset$ i

$$\Omega_2^i=\left\{z=\varphi(T_1,w)\ ,\ w\in\Omega_1^i\right\}$$

$$\Omega_3^i=\left\{z=\varphi(T_1+T_2,w)\ ,\ w\in\Omega_1^i\right\}$$

<u>Lema 6 4 1</u>

Existeix $M_1>0$ independent de ε tal que

$$|F_\varepsilon-G_\varepsilon|<M_1\varepsilon^{\alpha+1},$$

$$|F_\varepsilon^{-1} - G_\varepsilon^{-1}| < M_1 \varepsilon^{\alpha+1},$$

en Ω

Demostració

$\varphi(t,z)$ verifica $\dot\varphi(t,z)=f(\varphi(t,z))$ i $\varphi(0,z)=z$ i per tant

$$\varphi(h,z)-\varphi(0,z)=\int_L f(\varphi(s,z))ds,$$

on L és un camí que uneix 0 amb h L'escollim de manera que sigui real Com que

$$|f(\varphi(s,z))-f(\varphi(0,z))|=|D(f\circ\varphi)(\xi)||s|=$$
$$=|Df(\varphi(\xi,z))D_t\varphi(\xi,z)||s|=$$
$$=|Df(\varphi(\xi,z))f(\varphi(\xi,z))||s|\leqslant M_2M_3h, \qquad (0<\xi<h)$$

Per tant

$$|G_\varepsilon(z)-F_\varepsilon(z)| \leqslant \int_0^h M_2M_3h\ ds + O(\varepsilon^{\alpha+1}) = M_2M_3h^2 + O(\varepsilon^{\alpha+1}) = O(\varepsilon^{\alpha+1})$$

De la mateixa manera es prova l'altra afitació

Siguin $N_1=\left[\frac{T_1}{h}\right]$ i $N_2=\left[\frac{T_2}{h}\right]$ on els parèntesis indiquen part entera

Lema 6 4 2

Per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

1) Si $z\in\Omega_1^1$, $F_\varepsilon^n(z)\in\Omega$ per a $0\leqslant n\leqslant N_1$,

2) Si $z\in\Omega_1^1$, $|F_\varepsilon^n(z)-G_\varepsilon^n(z)|<M_5\varepsilon$ per a $0\leqslant n\leqslant N_1$,

3) $F_\varepsilon^{N_1}(\Omega_1^1)\subset\Omega_2^2$,

4) $F_\varepsilon^{-N_2}(\Omega_3^3)\subset\Omega_2^2$

Demostració

Provarem 1) i 2) per inducció

De fet provarem que

$$|F_\varepsilon^n(z)-G_\varepsilon^n(z)| \leqslant M_1 \left(\sum_{l=0}^{n-1}(1+M_4\varepsilon^\alpha)^l\right)\varepsilon^{\alpha+1}$$

Per a n=1

$$|F_\varepsilon(z)-G_\varepsilon(z)| < M_1\varepsilon^{\alpha+1} < M_5\varepsilon < M_5\varepsilon_0$$

Suposant que és cert per a n-1, $n \leqslant N_1$,

$$|F_\varepsilon^n(z)-G_\varepsilon^n(z)| \leqslant |F_\varepsilon F_\varepsilon^{n-1}(z)-F_\varepsilon G_\varepsilon^{n-1}(z)| + |F_\varepsilon G_\varepsilon^{n-1}(z)-G_\varepsilon G_\varepsilon^{n-1}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant |DF_\varepsilon(\xi)|\,|F_\varepsilon^{n-1}(z)-G_\varepsilon^{n-1}(z)| + M_1\varepsilon^{\alpha+1} \leqslant$$

$$\leqslant (1+M_4\varepsilon^\alpha)M_1\sum_{l=0}^{n-2}(1+M_4\varepsilon^\alpha)^l\varepsilon^{\alpha+1} + M_1\varepsilon^{\alpha+1} \leqslant$$

$$\leqslant M_1\sum_{l=0}^{n-1}(1+M_4\varepsilon^\alpha)^l\varepsilon^{\alpha+1} \leqslant \frac{M_1}{M_4}(1+M_4\varepsilon^\alpha)^n\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1}{M_4}e^{T_1M_4C}\varepsilon < M_5\varepsilon$$

Això implica que $F_\varepsilon^n(z) \in B_{M_5\varepsilon_0}(G_\varepsilon^n(z)) \subset \Omega$

Per provar 3), primer hem de provar que

$$|F_\varepsilon^{-n}(z)-G_\varepsilon^{-n}(z)| \leqslant 2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\sum_{l=0}^{n-1}(1+2M_4\varepsilon^\alpha)^l$$

si $z \in \Omega_2^2$ i $0 \leqslant n \leqslant N_1$

Notem que

$$2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\sum_{l=0}^{n-1}(1+2M_4\varepsilon^\alpha)^l \leqslant 2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\frac{(1+2M_4\varepsilon^\alpha)^{N_1-1}}{2M_4\varepsilon^\alpha} <$$

$$< 2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\frac{(1+2M_4\varepsilon^\alpha)^{T_1/}}{2M_4\varepsilon^\alpha} < \frac{M_1}{M_4}e^{2M_4T_1C}\varepsilon$$

Per a n=1, repetint el procés de la proposició 2 1

$$|F_\varepsilon^{-1}(z)-G_\varepsilon^{-1}(z)| \leqslant 2M_1\varepsilon^{\alpha+1} < M_5\varepsilon_0$$

que implica que

$$F_\varepsilon^{-1}(z) \in B_{M_5\varepsilon_0}(G_\varepsilon^{-1}(z)) \subset \Omega^1$$

Suposant certa l'afitació per a n-1, $1 \leq n \leq N_1$,

$$|F_\varepsilon^{-n}(z)-G_\varepsilon^{-n}(z)| \leq |F_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon^{-(n-1)}(z)-F_\varepsilon^{-1}G_\varepsilon^{-(n-1)}(z)|+$$

$$+|F_\varepsilon^{-1}G_\varepsilon^{-(n-1)}(z)-G_\varepsilon^{-1}G_\varepsilon^{-(n-1)}(z)| \leq$$

$$\leq |DF_\varepsilon^{-1}(\xi)|\,|F_\varepsilon^{-(n-1)}(z)-G_\varepsilon^{-(n-1)}(z)|+2M_1\varepsilon^{\alpha+1} \leq$$

$$\leq (1+2M_4\varepsilon^\alpha)\,2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\sum_{i=0}^{n-2}(1+2M_4\varepsilon^\alpha)^i+2M_1\varepsilon^{\alpha+1} \leq$$

$$\leq 2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\sum_{i=0}^{n-1}(1+2M_4\varepsilon^\alpha)^i < M_5\,\varepsilon$$

Això prova que $F_\varepsilon^{-n}(z) \in B_{M_5\varepsilon_0}(G_\varepsilon^{-n}(z)) \subset \Omega^1$ si $z \in \Omega_2^2$ i $0 \leq n \leq N_1$

Finalment

$$F_\varepsilon^{-N_1}(z) \in B_{M_5\varepsilon_0}(G^{-N_1}(z))$$

Com que

$$|G_\varepsilon^{-N_1}(z)-\varphi(-T_1,z)| = |\varphi(-N_1h,z)-\varphi(-T_1,z)| =$$

$$= |\varphi(-N_1h,z)-\varphi(-T_1+N_1h,\varphi(-N_1h,z))| =$$

$$= |z_0-\varphi(\theta h,z_0)|$$

on $z_0=\varphi(-N_1h,z)$ i $0<\theta<1$ i com que

$$\varphi(\theta h,z_0)-z_0 = \int_0^{\theta h} f(\varphi(s,z_0))\,ds$$

i $\quad |\varphi(\theta h,z_0)-z_0| \leq M_2\theta h < M_5 Dh < M_5\varepsilon_0^\alpha < M_5\varepsilon_0$,

tenim que

$$B_{M_5\varepsilon_0}(G_\varepsilon^{-N_1}(z)) \subset B_{2M_5\varepsilon_0}(\varphi(-T_1,z)) \subset \Omega_1^1$$

Per provar 4), igualment com per a 3) es prova que

$$|F_\varepsilon^{-n}(z)-G_\varepsilon^{-n}(z)| \leqslant 2M_1\varepsilon^{\alpha+1}\sum_{i=0}^{n-1}(1+2M_4\varepsilon^{\alpha})^i$$

si $z\in\Omega_3^3$ i $0\leqslant n\leqslant N_2$ i per tant tenim que

$$|F_\varepsilon^{-N_2}(z)-G_\varepsilon^{-N_2}(z)| \leqslant \frac{M_1}{M_4}e^{2M_4T_2C}\varepsilon < M_5\varepsilon_0$$

i que

$$F_\varepsilon^{-N_2}(z)\in B_{M_5\varepsilon_0}(G_\varepsilon^{-N_2}(z))\subset B_{2M_5\varepsilon_0}(\varphi(-T_2,z))\subset\Omega_2^2$$

on la penúltima inclusió es prova igualment que pel cas 3)

Això acaba la demostració del lema

Com que

$$F_\varepsilon^{-1}(v_1(t),v_2(t))=(v_1(t-h),v_2(t-h))$$

tenim que

$$F_\varepsilon^{-N_2}(v_1(t),v_2(t))=(v_1(t-N_2h),v_2(t-N_2h))$$

A més, per la proposició 6 2, si ε_0 és prou petit

$$(v_1(t),v_2(t))\in\Omega_3^3 \quad \text{per a} \quad t\in\Delta_2$$

Per tant

$$(v_1(t-N_2h),v_2(t-N_2h))\in\Omega_2^2 \quad \text{per a} \quad t\in\Delta_2$$

D'altra banda podem definir E en Ω_2^2 per

$$E(z)=E(F_\varepsilon^{-N_1}(z))$$

ja que pel lema 6 4 2 $F_\varepsilon^{-N_1}(\Omega_2^2)\subset\Omega_1^1$

Definim Ψ per $\Psi(t)=E(v_1(t),v_2(t))$ en

$$\Omega_0^*=\{t\in\mathbf{C},\ t_1+T_1+T_2-N_2h<\mathrm{Re}\ t<t_2+T_1+T_2-N_2h,\ |\mathrm{Im}\ t|<\delta-\eta\}$$

Lema 6 4 3

Per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

1) Ψ és h-periòdica,

2) $|\Psi(t)|\leqslant K_1$ en Ω^*_0,

3) Existeix $K>0$ tal que si $t\in\Omega^*_0\cap\mathbb{R}$, llavors

$$|\Psi(t)|<K\exp(-2\pi(\delta-\eta)/h)$$

Demostració

1) Per a ε_0 prou petit existeix t tal que t i $t+h\in\Omega^*_0$ Llavors

$$\Psi(t+h)=E(v_1(t+h),v_2(t+h))=E(F_\varepsilon(v_1(t),v_2(t)))=$$

$$=E(v_1(t),v_2(t))=\Psi(t)$$

2) Si $t\in\Omega^*_0$, $\Psi(t)=E(v_1(t),v_2(t))=E(F_\varepsilon^{-N_1}(v_1(t),v_2(t)))$

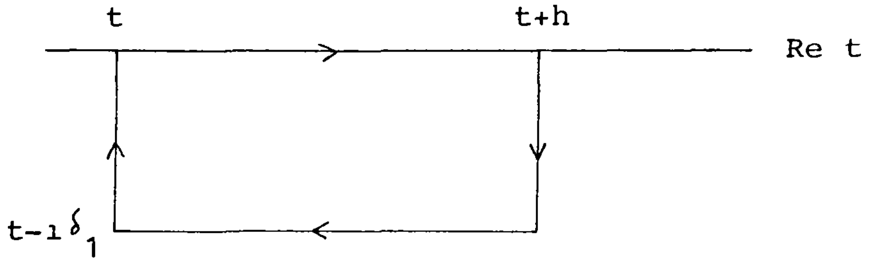
on $F^{-N_1}(v_1(t),v_2(t))\in\Omega^1_1$ Com que E és afitada en Ω^1, ja que és analítica en un domini més gran (recordem que $E=\bar{E}\ C^{-1}$ i $C^{-1}=I+O(1))$, i per tant existeix K_1 amb la propietat buscada

3) Com que Ψ és h-periòdica es pot desenvolupar en sèrie de Fourier i tenim que

$$\Psi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(in\frac{2\pi}{h}t)$$

on $$c_n=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Psi(s)\exp(-in\frac{2\pi}{h}s)\ ds$$

Per avaluar la integral per a $n>0$, considero el seguent camí complex



on prenem $\delta_1=\delta-\eta$ A l'interior d'aquest recinte la funció a integrar és analítica i per tant podem aplicar el teorema de Cauchy, d'on

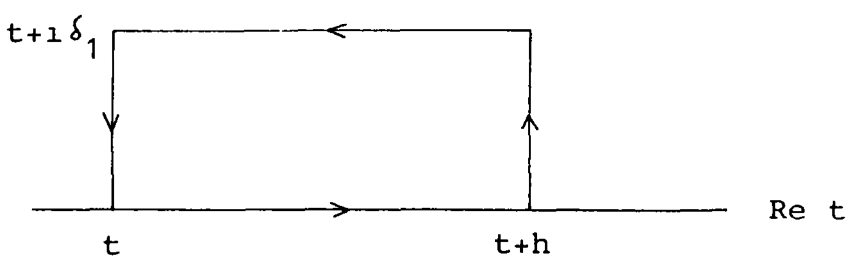
$$c_n+\frac{1}{h}\left[\int_0^{\delta_1}\Psi(t+h+is)\exp(-in\,\frac{2\pi}{h}\,(t+h+is))ds+\int_{t+h}^{t}\Psi(-i\delta_1+s)\exp(-in\,\frac{2\pi}{h}\,(-i\delta_1+s))ds+\int_{\delta_1}^{0}\Psi(t+is)\exp(-in\,\frac{2\pi}{h}\,(t+is))ds\right]=0$$

Per la periodicitat, la primera i la tercera integral, són iguals però amb el signe contrari Així

$$c_n=-\frac{1}{h}\int_{t+h}^{t}\Psi(-i\delta_1+s)\exp(-n\,\frac{2\pi}{h}\delta_1)\exp(-in\,\frac{2\pi}{h}s)ds$$

i $$|c_n|\leqslant\frac{\exp(-n\,\frac{2\pi}{h}\delta_1)}{h}\int_t^{t+h}|\Psi(-i\delta_1+s)|ds\leqslant K_1\,\exp(-n\,\frac{2\pi}{h}\delta_1)$$

Per a $n<0$ considerem el camí



i obtenim

$$|c_n|\leqslant K_1\,\exp(-|n|\,\frac{2\pi}{h}\delta_1)$$

Llavors si ε_0 és prou petit

$$|\Psi(t)-c_0| \leqslant 2K_1 \frac{\exp(-\frac{2\pi}{h}\delta_1)}{1-\exp(-\frac{2\pi}{h}\delta_1)} < 4K_1 \exp(-\frac{2\pi}{h}\delta_1)$$

Com que existeixen punts homoclínics reals, es a dir, existeixen valors de t reals pels quals $\Psi(t)=0$

$$|c_0| \leqslant 4K_1 \exp(-\frac{2\pi}{h}\delta_1)$$

Així

$$|\Psi(t)| \leqslant 8K_1 \exp(-\frac{2\pi}{h}\delta_1)$$

Lema 6 4 4

Per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ prop de P, la separació entre les varietats invariants de F_ε és menor que

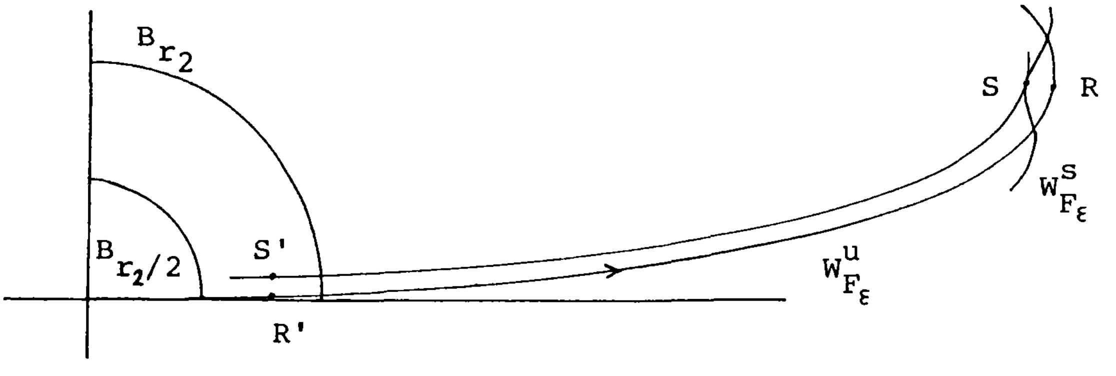
$$\frac{N}{h}\exp(-2\pi(\delta-\eta)/h)$$

on N és una constant positiva independent de ε

Demostració

Sigui $S \in W^s_{F_\varepsilon} \cap \Omega_2^2 \cap \mathbb{R}^2$

Escollim $R \in W^u_{F_\varepsilon} \cap \Omega_2^2 \cap \mathbb{R}^2$ de manera que $R'=(R_1',R_2')=F_\varepsilon^{-N_1}(R)$ i $S'=(S_1',S_2')=F_\varepsilon^{-N_1}(S)$ tinguin la mateixa primera component, és a dir, $R_1'=S_1'$



Calculem

$$D_yE=D_y(\bar{E}\ C^{-1})=D_\xi\bar{E}\ C^{-1}D_yC_1^{-1}+D_\eta\bar{E}\ C^{-1}D_yC_2^{-1}=$$

$$=\eta\circ C^{-1}D_yC_1^{-1}+\xi\ C^{-1}D_yC_2^{-1}=C_2^{-1}D_yC_1^{-1}+C_1^{-1}D_yC_2^{-1}=D_y(C_1^{-1}C_2^{-1})$$

D'altra banda

$$E(S)-E(R)=E(S')-E(R')=D_yE(\theta_0)(S_2'-R_2')$$

on $\theta_0\in\Omega_1^1$, ja que $S_1'=R_1'$ Així

$$|S_2'-R_2'|<\frac{1}{|D_yE(\theta_0)|}|E(S)-E(R)|<\frac{1}{s_0}|E(S)|<\frac{K}{s_0}\ \exp(-2\pi(\delta-\eta)/h)$$

ja que $E(R)=0$ D'altra banda, com que en Ω, $|DF_\varepsilon|<1+M_4\varepsilon^\alpha$, si $\theta_1\in\Omega_1^1$ llavors $F_\varepsilon^i(\theta_1)\in\Omega$ per a $0\leqslant i\leqslant N_1$ A més

$$DF_\varepsilon^{N_1}(\theta_1)=\prod_{i=0}^{n-1}DF_\varepsilon(F_\varepsilon^i(\theta_1))$$

i per tant

$$|DF_\varepsilon^{N_1}(\theta_1)|\leqslant(1+M_4\varepsilon^\alpha)^{N_1}\leqslant(1+M_4\varepsilon^\alpha)^{T_1/\varepsilon^\alpha}<e^{M_4T_1}$$

Per tant

$$|S_2-R_2|=|F_\varepsilon^{N_1}S'-F_\varepsilon^{N_1}R'|\leqslant|DF_\varepsilon^{N_1}(\theta_1)|\,|S'-R'|<e^{M_4T_1}|S_2'-R_2'|<$$

$$<\frac{K}{s_0}e^{M_4T_1}\exp(-2\pi(\delta-\eta)/h)$$

Prenem $N=\dfrac{K}{s_0}e^{M_4T_1}$

<u>Corol lari 6 5</u>

En el teorema anterior podem substituir la hipòtesi v) per v') (6 2) té una òrbita homoclínica σ associada a l'origen

Demostració

Igualment com al teorema 6 1, les varietats invariants de F_ε i G_ε són properes entre si Com que dues branques de les de G_ε coincideixen amb σ, dues branques de les de F_ε són properes entre si Com que F és conservatiu, han de tallar-se (26) Això prova l'existència d'un punt homoclínic A més, com que les corresponents branques (les seves parts reals) de les varietats invariants de F_ε són, des de l'origen fins al punt homoclínic, a distància de l'ordre de ε de σ, existeixen $\varepsilon_0>0$ i un conjunt compacte B tal que per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ B conté els esmentats trossos de varietats invariants

Cal assenyalar que en la demostració del teorema 6 4 no s'ha usat que F_ε sigui analítica en $\mathbb{C}^2$, sinó tans sols que sigui analítica en un entorn de l'òrbita homoclínica σ per a valors de t tals que $|\mathrm{Im}\ t|<\delta$

Seguint exactament les mateixes idees es prova,

Teorema 6 6

Sigui $F_\varepsilon\ U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, amb U obert i afitat, una família de difeomorfismes del tipus (6 1) tals que

i) F_ε preserva mesura

ii) F_ε és analític en U

iii) $\lambda=1+a\varepsilon^\alpha+O(\varepsilon^{\alpha+1})$ amb $a>0$ i $\alpha\in\mathbb{N}$,

iv) Per a tot ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ existeix un punt homoclínic corresponent a les varietats invariants de l'origen (que per la forma (6 1) i iii) és hiperbòlic) tal que les varietats invariants, des de l'origen fins al punt homoclínic, estan contingudes en un compacte contingut en U,

v) Si σ és l'òrbita homoclínica de (6 2) i F_ε es pot estendre a un entorn (en $\mathbb{C}^2$) de $\{\sigma(t), |\mathrm{Im}\ t|<\delta\}$ on δ és la distància de l'eix real a la singularitat de σ més propera a l'eix real

Llavors es té la mateixa conclusió que al teorema 6 4

Observació

Si en comptes de la hipòtesi v), F_ε només es pot estendre a $U^*=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\ (\mathrm{Re}\ z_1,\mathrm{Re}\ z_2)\in U,\ |\mathrm{Im}\ z_1|,|\mathrm{Im}\ z_2|<r\}$ on r és independent de ε, llavors la conclusió és que fixat un punt P de σ, existeixen $\varepsilon_0>0$ i N i η positius i independents de ε tals que la separació entre les varietats invariants de F_ε prop de P és menor que

$$N\ \exp(-2\pi\eta/\ln\lambda)$$

per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

6 3 Integrabilitat de difeomorfismes analítics

Sigui F_ε $U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una família de difeomorfismes analítics depenent analíticament del paràmetre ε amb un punt hiperbòlic i un punt homoclínic associat a ell per a tot ε

Les varietats invariants del punt hiperbòlic es poden posar localment, a l'entorn d'un punt d'aquestes com a gràfiques de funcions analítiques respecte una de les variables de $\mathbb{R}^2$ i de ε

Suposem que existeix una determinació analítica del punt homoclínic per a tot ε, és a dir, que la posició d'aquest és una funció analítica de ε (Això és possible provar-ho si existeixen simetries que obliguin a que un punt homoclínic estigui sobre una determinada recta o corba via el teorema de la funció implícita)

Definim com a funció angle de tall la funció que ens dóna l'angle que formen les rectes tangents a les varietats invariants del punt hiperbòlic en el punt homoclínic en funció del paràmetre

En aquesta situació l'angle de tall és una funció analítica

Com és sabut (30) , quan les varietats invariants d'un difeomorfisme 2-dimensional es tallen transversalment aquest no té integral primera analítica

En la situació que hem descrit, els difeomorfismes de la família només poden ser integrables, com a màxim per a un conjunt discret de valors del paràmetre

Per a les famílies estudiades en l'apartat anterior, per a valors petits del paràmetre, l'angle és exponencialment petit respecte d'aquest i per tant és difícil detectar numèricament que és diferent de zero Aquest raonament assegura que si veiem (numèricament o per algun altre mètode) que l'angle és diferent de zero per a un valor del paràmetre (potser gran) en la família hi ha com a màxim, un nombre discret de difeomorfismes integrables

De fet, per a difeomorfismes del pla, perquè hi hagi integrabilitat no tan sols ha de ser zero l'angle de tall sinó que les varietats invariants han de coincidir

Ens fixem ara en famílies de difeomorfismes del pla, analítics, depenent analíticament respecte de ε, on $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2, \quad)$ és un paràmetre multidimensional, que tenen un punt fix hiperbòlic i un punt homoclínic associat a ell que té una determinació analítica

Considerem la funció distància entre les varietats invariants mesurada convenientment per exemple, mesurada sobre la recta normal a una de les varietats, definida entre el punt homoclínic i la seva imatge És una funció analítica respecte d'una variable i del paràmetre ε

Escalant l'espai, de manera que la imatge del punt homoclínic estigui a distància unitat d'aquest, obtenim una funció que ens mesura la distància entre les varietats invariants, definida en l'interval $[0,1]$, analítica respecte de la variable i respecte de ε

És raonable pensar que per a famílies del tipus considerat que siguin genèriques, la funció obtinguda és, en certa manera, genèrica Perquè les varietats invariants coincideixin aquesta funció ha de ser nul la i perquè sigui nul la s'han d'anul lar totes les seves derivades en 0 (per exemple) Per a cada derivada que volem que s'anul li necessitem poder comptar amb una component ε_1 del paràmetre ε

Això indica que per a difeomorfismes del tipus considerat la integrabilitat és un fenomen de codimensió infinita

CAPÍTOL 7

EXEMPLES

7.1 Difeomorfismes quadràtics del pla que conserven àrea i orientació

Els difeomorfismes quadràtics del pla que conserven àrea i orientació amb un punt fix, no trivials (17,36) es transformen a través d'un canvi lineal i un escalat en difeomorfismes de la família definida per

(7.1) $$F_c(x,y)=(y,-x+2y^2+2cy)$$

amb $c\geq 1$ (13).

En particular s'hi poden transformar les aplicacions d'Hénon

$$F_{a,b}(x,y)=(1+y-ax^2,bx)$$

amb $b=-1$.

La família (7.1) té un únic punt fix, (0,0), per a $c=1$, el qual és parabòlic, i dos punts fixos, (0,0) i $(1-c,1-c)$, per a $c>1$. El primer sempre és hiperbòlic i el segon és el·líptic per a $1<c<3$, parabòlic per a $c=3$ i hiperbòlic per a $c>3$.

Ens interessem per les varietats invariants de l'origen que anomenem W^u i W^s.

Els difeomorfismes (7.1) es poden escriure com a composició de dues involucions, $F_c=I_1 \cdot I_{2,c}$

donades per

$I_1(x,y)=(y,x)$,

$I_{2,c}(x,y)=(x,y-2(y-x^2-cx))$

Això proporciona que les varietats invariants siguin simètriques respecte la recta $y=x$ i simètriques, paral le- lament a l'eix y, respecte $y=2x^2+2cx$

A (13) es prova que existeix un punt homoclínic corresponent a W^u i W^s sobre la recta $y=x$, la posició del qual és funció analítica respecte del paràmetre c per a $c>1$ i tendeix a $(0,0)$ quan c tendeix a 1

Malgrat que (7 1) no està en la forma (6 1) veurem com fent canvis de variable podrem usar el corol lari 6 5 per a provar que la separació entre W^u i W^s és exponencialment petita respecte del paràmetre, quan c tendeix a 1

Els valors propis de la diferencial de F_c a l'origen són

$$\lambda_{\pm} = c \pm \sqrt{c^2-1}$$

que tendeixen a 1 quan c tendeix a 1

Escollim com a nou paràmetre $\varepsilon = \sqrt{c-1}$ Així

$$\lambda_{\pm} = 1+\varepsilon^2 \pm \varepsilon\sqrt{2+\varepsilon^2} = 1 \pm \sqrt{2}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

A partir d'ara escriurem F_ε en comptes de F_c

Per a diagonalitzar la part lineal de F_ε fem el canvi lineal C_1 donat per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

i obtenim $\tilde{F}_\varepsilon$ donat per

$$(7\ 2) \quad \tilde{F}_\varepsilon(x,y) = \left(\lambda x + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2+\varepsilon^2}}(\lambda x + \lambda^{-1} y)^2 \ , \lambda^{-1} y - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2+\varepsilon^2}}(\lambda x + \lambda^{-1} y)^2\right)$$

Veiem que quan ε tendeix a zero $\tilde{F}_\varepsilon$ no està afitat

Fem ara l'escalat definit per

$$C_2(x,y)=(\varepsilon^2 x,\varepsilon^2 y)$$

i obtenim $\tilde{\tilde{F}}_\varepsilon$ donat per

$$(7\ 3)\qquad \tilde{\tilde{F}}_\varepsilon(x,y)=(\lambda x+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+\varepsilon^2}}(\lambda x+\lambda^{-1}y)^2,\lambda^{-1}y-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2+\varepsilon^2}}(\lambda x+\lambda^{-1}y)^2)$$

que és del tipus

$$(\lambda x,\lambda^{-1}y)+\varepsilon(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)^2,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)^2)+O(\varepsilon^2)$$

Considerem el camp donat per

$$(7\ 4)\qquad \begin{aligned} \dot{x}&=x+\frac{1}{2}(x+y)^2\\ \dot{y}&=-y-\frac{1}{2}(x+y)^2 \end{aligned}$$

el qual prové del hamiltonià

$$H(x,y)=xy+\frac{1}{6}(x+y)^3$$

Aquest hamiltonià té una separatriu (òrbita homoclínica) però és difícil d'obtenir-la directament en aquestes variables

Fem el canvi canònic

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

que ens transforma H en $\tilde{H}$ donat per

$$\tilde{H}(u,v)=\frac{1}{2}(u^2-v^2)+\frac{\sqrt{2}}{3}u^3$$

L'òrbita homoclínica ve donada per $\tilde{H}(u,v)=0$, és a dir, per

$$v^2=u^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}u^3$$

D'això i de les equacions del moviment

$$u=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial v}=-v$$

$$v=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial u}=-u-\sqrt{2}u^2$$

s'obté que aquesta és

$$u(t) = \frac{\alpha}{Ch^2 \beta t} \qquad v(t) = -2\alpha\beta \frac{Sh\beta t}{Ch^3 \beta t}$$

amb $\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ i $\beta = \frac{1}{2}$ i en les variables x,y és

$$(7.5) \quad x(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{Ch\beta t + 2\beta Sh\beta t}{Ch^3 \beta t} \qquad y(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{Ch\beta t - 2\beta Sh\beta t}{Ch^3 \beta t}$$

Així doncs, per a $\tilde{\tilde{F}}_\varepsilon$, es compleixen les hipòtesis del corol·lari 6.5. δ es troba immediatament de (7.5) ja que les singularitats més properes de l'òrbita homoclínica a l'eix real són $\pm\pi i$.

Per tant, donat $\eta>0$ existeixen $\varepsilon_0>0$ i $N>0$, tals que per a $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ la separació entre les varietats invariants de $\tilde{\tilde{F}}_\varepsilon$, en un entorn d'un punt prefixat, és menor que

$$N \exp 2\pi \frac{\pi+\eta}{\ln\lambda} \simeq N \exp 2\pi \frac{-\pi+\eta}{\sqrt{2}\,\varepsilon}$$

Pel que fa a la separació entre les varietats invariants de F_ε, la fita és la mateixa excepte un factor constant multiplicat per ε^2 degut als canvis fets per a portar F_ε a $\tilde{\tilde{F}}_\varepsilon$.

Aquesta fita és, en certa manera, òptima.

Anem a comparar-la amb un estudi numèric. F_c permet un estudi bastant aprofundit perquè cada iteració de F_c requereix només una multiplicació ja que podem escriure

$$F_c(x,y) = (y, -x+(y+y)(y+c))$$

L'angle de tall entre les varietats invariants en un punt homoclínic definit en l'apartat 6.3 dóna una certa mesura de la separació entre aquestes Com que la distància entre un punt homoclínic i la seva imatge és de l'ordre de ε, la separació entre les varietats invariants prop del punt homoclínic és aproximadament proporcional a ε per l'angle de tall

Calculem l'angle de tall en el punt homoclínic p situat sobre l'eix y=x En primer lloc aproximem W^u localment en un entorn de l'origen per un polinomi de grau 5 Després globalitzem aquesta fins al punt homoclínic i calculem la posició d'aquest Partint d'un punt suficientment pròxim a l'origen tal que iterant-lo N vegades s'obté p, iterant per la diferencial de F_ε un vector tangent a W^u en el primer punt obtenim un vector tangent a W^u en p

Per les simetries, l'angle de tall és el doble del que formen el darrer vector obtingut i la recta perpendicular a y=x en p

Per obtenir angles per a valors més petits del paràmetre simulem els números com a vectors enters Per això cal utilitzar rutines especials per a simular les operacions suma, producte i divisió Això ens ha permès treballar amb números fins a 285 xifres (la limitació és deguda al temps de càlcul emprat)

Els resultats es mostren en la seguent taula

λ	ε	c	angle de tall
1 3	0 18605210	1 03461538	0 9944869868 E-20
1 29	0 18054611	1 03259690	0 1293376504 E-20
1 28	0 175	1 03062500	0 1443569127 E-21
1 27	0 16941306	1 02870079	0 1358985633 E-22

λ	ε	c	angle de tall
1 26	0 16378460	1 02682540	0 1057707498 E-23
1 25	0 15811388	1 02500006	0 6649578268 E-25
1 24	0 15240015	1 02322581	0 3286291084 E-26
1 23	0 14664264	1 02150406	0 1236621438 E-27
1 22	0 14084057	1 01983606	0 3411759479 E-29
1 21	0 13499311	1 01822314	0 6597370324 E-31
1 20	0 12909945	1 01666667	0 8470514533 E-33
1 19	0 12315871	1 01516807	0 6762440325 E-35
1 18	0 11717002	1 01372881	0 3097994765 E-37
1 17	0 11113248	1 01235043	0 7374050504 E-40
1 16	0 10504515	1 01103448	0 8053530221 E-43
1 15	0 09890706	1 00978261	0 3446953298 E-46
1 14	0 09271726	1 00859649	0 4719315014 E-50
1 13	0 08647471	1 00747788	0 1584357293 E-54
1 12	0 08017837	1 00642857	0 9145215789 E-60
1 11	0 07382716	1 00545045	0 5589696243 E-66
1 10	0 06741999	1 00454545	0 1833626865 E-73
1 095	0 06419505	1 00412100	0 8290257666 E-78
1 090	0 06095568	1 00371560	0 1208043258 E-82
1 085	0 05770175	1 00332949	0 4639671871 E-88
1 080	0 05443310	1 00296296	0 3651730632 E-94
1 075	0 05114957	1 00261628	0 4281501825 E-101
1 070	0 04785101	1 00228972	0 4960887386 E-109
1 065	0 04453726	1 00198357	0 3320257434 E-118
1 060	0 04120816	1 00169811	0 6269958966 E-129
1 055	0 03786355	1 00143365	0 1256685466 E-142
1 050	0 03450327	1 00119048	0 6795065162 E-157
1,045	0 03112715	1 00096890	0 1368763698 E-175

1 040	0 02773501	1 00076923	0 5260040656 E-199

D'aquests resultats es pot pensar en trobar una expressió del tipus

$$A(\ln\lambda)^{B} \exp(-C/\ln\lambda)$$

per modelar la funció angle de tall Per adonar-nos que és realment una expressió molt fidel fem el seguent experiment Determinem A,B i C amb les dades corresponents als valors de λ 1 3, 1 29 i 1 28 Obtenim A=87692502, B=-8 268891734 i C=19 78502818 D'aquí l'angle predit per a λ=1 04 és 0 3102x10^{-199} , amb sorprenent acord amb el valor experimental

Fixem-nos que, essencialment, el valor corresponent a C en la fita trobada teòricament per a la separació entre W^{u} i W^{s} és $2\pi^{2}$=19 739209

El paper de η en la fita teòrica és afitar, en aquest cas i en general, el factor $(\ln\lambda)^{B}$ si $B<0$, cosa que fa perfectament perquè si ε és prou petit $(\ln\lambda)^{B} < \exp(\frac{\eta}{\ln\lambda})$

És clar que per a η més petit necessitarem ε_{0} més petit En aquest sentit considerarem que la fita és òptima

Si ara determinem B i C amb les dades corresponents als valors de λ 1 08, 1 07 i 1 06 obtenim B=-8 018273 i C=19 740035 Notem que la diferència relativa entre aquest darrer valor i $2\pi^{2}$ és 4 1854x10^{-5}

Si els determinem amb les dades corresponents als valors de λ 1 050, 1 045 i 1 040, obtenim B=-8 0082713 i C=19 739507 Ara la diferència relativa de C amb $2\pi^{2}$ és 1 5107x10^{-5}

De tot això és plausible, com a expressió asimptòtica de l'angle de tall, quan ε tendeix a zero, l'expressió

$$(7\ 6) \qquad A(\ln\lambda)^{-8}\exp(-2\pi^2/\ln\lambda)$$

Per a determinar més precisament el valor numèric de A calculem els valors de A a partir de (7 6) per a valors decreixents de λ i obtenim

λ	$A\times 10^{-8}$
1 12	1 09613
1 11	1 09756
1 10	1 09889
1 09	1 10011
1 08	1 10122
1 07	1 10221
1 o6	1 10308
1 05	1 10382
1 04	1 10445

i extrapolant, avaluem el valor buscat en $1\ 10554\times 10^{8}$ aproximadament

Per acabar, a través de (7 6) i el darrer valor trobat calculem alguns angles i donem l'error relatiu respecte dels angles calculats numèricament

λ	α	error relatiu
1 05	$0\ 680559\times 10^{-157}$	$1\ 55\times 10^{-3}$
1 10	$0\ 184471\times 10^{-73}$	$6\ 05\times 10^{-3}$
1 15	$0\ 349218\times 10^{-46}$	$1\ 31\times 10^{-2}$

1 20	$0\ 866132\text{x}10^{-33}$	$2\ 25\text{x}10^{-2}$
1 25	$0\ 687615\text{x}10^{-25}$	$3\ 41\text{x}10^{-2}$
1 30	$0\ 104185\text{x}10^{-19}$	$4\ 76\text{x}10^{-2}$

7 2 Aplicació standard i aplicació standard generalitzada

L'aplicació standard apareix en la literatura en diverses formes Una d'aquestes és

$$F_\varepsilon(x,y)=(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 \sin x, y+\varepsilon \sin x)$$

En comptes d'estudiar aquesta aplicació estudiarem una aplicació més general, que anomenarem aplicació standard generalitzada, definida per

$$F_\varepsilon(x,y)=(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 V'(x), y+\varepsilon V'(x)) \tag{7 7}$$

on V és una funció entera, periòdica de període 2π, parell, que té un únic mínim no degenerat en $(-\pi,\pi]$, situat en $x=0$ $(V'(0)>0)$

Aquesta reprodueix l'aplicació standard quan $V(x)=-\cos x$ F_ε és un difeomorfisme global de $\mathbb{C}^2$, analític i que preserva mesura El seu invers és

$$F_\varepsilon^{-1}(x,y)=(x-\varepsilon y, y-\varepsilon V'(x-\varepsilon y))$$

Per les condicions exigides a V els punts $(2k\pi,0)$ són els únics punts fixos hiperbòlics reals Hi ha d'haver també punts fixos el líptics

Per la periodicitat de F_ε respecte de x podem considerar que està definit en un cilindre obtingut identificant $x=0$ amb $x=2\pi$ Ens interessem per les varietats invariants de l'origen les anomenarem W^u i W^s Si diem $a=V''(0)$, els valors propis de $DF_\varepsilon(0,0)$ són

$$\lambda_\pm=1+\varepsilon^2\frac{a}{2}\pm(\varepsilon^2 a+\varepsilon^4 a^2/4)^{1/2}=1\pm\sqrt{a}\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

Per poder aplicar el corol lari 6 5 hem de posar primer F_ε en la forma (6 1) Per això fem un canvi que diagonalitzi la part lineal El canvi ve donat per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon a/2+(a+\varepsilon^2 a^2/4)^{1/2} & -\varepsilon a/2-(a+\varepsilon^2 a^2/4)^{1/2} \end{pmatrix}$$

Pel canvi, F_ε es transforma en $\tilde{F}_\varepsilon$ definit per

(7 8) $$\tilde{F}_\varepsilon(x,y)=(\lambda x+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}(V'(x+y)-a(x+y))+O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda^{-1}y-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}(V'(x+y)-a(x+y))+O(\varepsilon^2))$$

Considerem el camp

(7 9) $$x=x+\frac{1}{2a}(V'(x+y)-a(x+y))$$

$$y=-y-\frac{1}{2a}(V'(x+y)-a(x+y))$$

el qual prové del hamiltonià

$$H(x,y)=xy+\frac{1}{2a}(V(x+y)-\frac{a}{2}(x+y)^2)$$

Per obtenir la separatriu d' aquest hamiltonià fem primer un canvi canònic per facilitar-ne el càlcul Fem el canvi

(7 10) $$u=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

El hamiltonià en les noves variables pren la forma

$$\tilde{H}(u,v)=-\frac{v^2}{2}+\frac{1}{2a}V(\sqrt{2}u)$$

Les equacions del moviment són

(7 11) $$u=-v$$

$$v=-\frac{1}{\sqrt{2a}}V'(\sqrt{2}u)$$

La separatriu ve determinada per $\tilde{H}(u,v)=\tilde{H}(0,0)$, és a dir

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2a}(V(\sqrt{2}u)-V(0))$$

la qual està ben definida perquè $V(\sqrt{2}u)>V(0)$ si $u\neq\sqrt{2}k\pi\ (k\in Z)$

Tenint en compte (7 11)

$$(7\ 12)\qquad u=\pm\left(\frac{1}{a}(V(\sqrt{2}u)-V(0))\right)^{1/2}$$

De fet hi ha dues separatrius, una correspon al signe positiu i l'altra al negatiu

La proposició 2 6 ens assegura que $\tilde{F}_\varepsilon$ i per tant també F_ε tenen punts homoclínics En (10) es prova que si aquests existeixen n'hi ha d'haver un sobre la recta $x=\pi$

Es verifiquen les hipòtesis del corol lari 6 5 Ens manca calcular δ

Les singularitats de l'òrbita homoclínica de (7 9) són les mateixes que les de (7 11), ja que les equacions que la descriuen estan relacionades pel canvi (7 10) Busquem les de (7 11) perquè són més fàcils de trobar

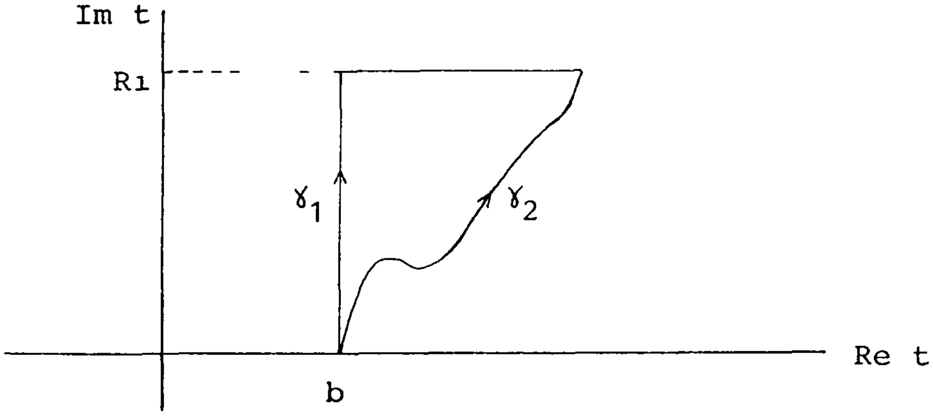
Suposem que $u(0)=b$ i busquem t^* tal que $u(t^*)=\infty$ De (7 12) s'ha de complir

$$(7\ 13)\qquad \pm\sqrt{a}\int_b^\infty (V(\sqrt{2}u)-V(0))^{-1/2}\,du=\int_0^{t^*}dt$$

però per a la primera integral escollim un camí complex de b a ∞ perquè sinó obtindríem t^* real (de fet ∞) i ja sabem que l'òrbita homoclínica no té singularitats reals

Definim $\Psi(u)=V(\sqrt{2}u)-V(0)$ Els zeros simples de Ψ donen lloc a punts de ramificació d'ordre 2 de la funció subintegral Els zeros dobles donen lloc a pols simples, etc

D'altra banda si x i R són reals amb R fixat i diferent de zero, $|\Psi(u+Ri)|^{-1/2}$ és de l'ordre de $e^{-\sqrt{2}|R|/2}$ (o menor) com es comprova desenvolupant Ψ en sèrie de Fourier Per tant la integral (7 13) en un camí de la forma $\{x+Ri, x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$ tendeix a zero quan $R \to \infty$ Llavors si tots els zeros no reals de Ψ són simples, (7 13) no depèn del camí d'integració que usem per avaluar-la si aquest no passa per l'eix real



En aquest darrer cas podem concloure que a l'entorn d'un punt d'una de les varietats invariants, donat $\eta > 0$ existeixen $\varepsilon_0 > 0$ i $N > 0$ tals que per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ la separació entre aquestes és menor que

$$N \exp((-2\pi|\mathrm{Im}\ t^*| - \eta)/\ln\lambda)$$

on $t^* = \sqrt{a} \int_b^\infty (V(\sqrt{2}u) - V(0))^{-1/2} du$

Si Ψ té zeros dobles o d'ordre més elevat cal fer un estudi dels camins que porten de b a ∞ i trobar quin dóna la singularitat més propera a l'eix real

Si V(x) és un polinomi trigonomètric del tipus

$$V(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k} \cos kx$$

tal que $V(\sqrt{2}x) - V(0)$ té els seus zeros no reals simples, (7 13) es pot reduir a una integral irracional (la condició $V''(0)>0$ és aquí $\sum_{k=1}^{n} kc_k > 0$) En efecte,

$$(V(\sqrt{2}u)-V(0))^{-1/2}=\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k}(1-\cos\sqrt{2}ku)\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k} 2\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2} ku\right)^{-1/2}$$

Per conveniència suposem que $b=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ i escollim el camí $\gamma_1=\left\{\frac{\pi}{\sqrt{2}}+i\sqrt{2}s,\ s\geqslant 0\right\}$ Llavors (7 13) esdevé

$$2\sqrt{a}i\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{k}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}k+iks\right)\right)^{-1/2}ds =$$

$$= 2\sqrt{a}i\int_0^\infty\left(c_1\cos^2 is+\frac{c_2}{2}\sin^2 i2s+\frac{c_3}{3}\cos^2 i3s+\quad\right)^{-1/2}ds\ ,$$

on usant relacions trigonomètriques podem escriure la funció subintegral com

$$\left(\cos^2 is\sum_{k=0}^{n-1} d_k\cos^{2k} is\right)^{-1/2}=(\mathrm{Ch}s)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} d_k \mathrm{Ch}^{2k}s\right)^{-1/2}$$

on d_k són constants obtingudes en substituir i reordenar

Fem el canvi $\mathrm{Ch}s=u$ i obtenim

$$2\sqrt{a}i\int_1^\infty u^{-1}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} d_k u^{2k}\right)(u^2-1)\right)^{-1/2}du=t^*$$

Si $V(x)=-\cos x-\frac{c}{2}\cos 2x$ es poden concretar més els càlculs

La condició perquè l'origen sigui hiperbòlic és $1+2c>0$

En aquest cas els zeros complexos de Ψ són simples (7 13) esdevé

$$\pm i\int_1^\infty u^{-1}((1-Au^2)(u^2-1))^{-1/2}du$$

on $A=2c/(1+2c)$

Fent el canvi $1/u^2=t$ obtenim

$$\pm\frac{1}{2}i\int_0^1 (-t^2+(A+1)t-A)^{-1/2}dt$$

Usem la primitiva (44)

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\left(\frac{2at+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

i obtenim per a $-1/2 < c \leq 0$

$$\mp\frac{1}{2}\left[-\pi/2-\arcsin((A+1)/(1-A))\right]i=\mp\frac{1}{2}\left[-\pi/2+\arcsin(-4c-1)\right]i =$$

$= \mp\frac{1}{2}(\arccos(-4c-1))i$ i per a $c \geq 0$, de

l'expressió anterior, usant que $\arcsin z= -i\ln(zi+\sqrt{1-z^2})$

$$\mp\frac{1}{2}\left[-\pi/2-i\ \ln(i(-4c-1)+\sqrt{1-(4c+1)^2}\right] i=$$

$$=\mp\frac{1}{2}\left[-\pi/2-i\ \ln(i(-4c-1+2\sqrt{4c^2+2c}))\right]i =$$

$$= \pm\left[\ln\ (\sqrt{2c+1}+\sqrt{2c})+\frac{\pi}{2}i\right]$$

Llavors podem concloure que en un entorn d'un punt, donat $\eta > 0$ existeixen $\varepsilon_0 > 0$ i $N > 0$ (depenents de c) tals que per a $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ la separació entre les varietats invariants de $\tilde{F}_\varepsilon$ és menor que

$$N \exp\ (-\pi(\arccos(-4c-1)-2\eta)/\ln\lambda) \quad \text{per a } -1/2 < c \leq 0$$

i menor que

$$N \exp\ (-(\pi^2-2\eta)/\ln\lambda) \quad \text{per a } c \geq 0$$

Aquestes fites estan plenament d'acord amb els resultats analítics de Lazutkin (23) i els numèrics de Simó (39)

BIBLIOGRAFIA

(1) Abraham,R ,Marsden,J E ,Ratiu,T , Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Addison-Wesley, Massachusetts (1983)

(2) Arnold,V I , "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom", Sov Math Dokl , 5, 581-585 (1964)

(3) Arnold,V ,I , Équations différentielles ordinaires, Mir, Moscou (1974)

(4) Arnold,V ,I , Méthodes Mathématiques de la Mécanique classique, Mir, Moscou (1976)

(5) Arnold,V I ,Avez,A , Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris (1967)

(6) Benseny,A , Contribució a l'estudi del problema restringit de 3 cossos per a valors petits del paràmetre de masses, Tesi, Univ de Barcelona (1984)

(7) Birkhoff,G ,D , "Surface transformations and their dynamical applications", Acta Math , 43, 1-119 (1922)

(8) Chirikov,B ,V , A universal instability of many-dimensional oscillators systems", Phys Reports, 52, 263-379 (1979)

(9) Chow,S N ,Hale,J K ,Mallet-Paret,J ,"An exemple of bifurcation to homoclinic orbits", J of Diff Eq ,37, 351-373 (1980)

(10) Cornfeld,I ,Sinai,Y ,G , comunicació privada a Carles Simó (1983)

(11) Delshams,A , Por qué la difusión de Arnold aparece genéricamente en sistemas hamiltonianos de 3 o más grados de libertad, Tesi, Univ de Barcelona (1983)

(12) Font,J , Variedades invariantes de L_3 en el problema restringido, Tesina, Univ de Barcelona (1984)

(13) Fontich,E , Integrabilitat de difeomorfismes conservatius del pla, Tesina, Univ de Barcelona (1983)

(14) Fontich,E , "Models for the splitting of separatrices' a Stability of the solar system and its minor natural and artificial bodies, ed per Szebehely,V , Reidel Publ Comp , Dordercht (1985)

(15) Hale,J ,K , Ordinary differential equations, Wiley-Interscience, New York (1969)

(16) Hartman,P , Ordinary differential equations, 2º edició, Birkhauser, Boston (1982)

(17) Hénon,M , "Numerical study of quadratic area preserving mappings ,Quart of App Math , 27, 291-312 (1969)

(18) Hirsch,M ,Pugh,C , "Stable manifolds and hyperbolic sets", Proc Symp in Pure Math , 14, AMS, 133-164 (1970)

(19) Hirsch,M ,Pugh,C ,Shub,M , Invariant manifolds, L N Math , 583, Springer, Berlin (1977)

(20) Holmes,P J ,Guckenheimer,J , Nonlinear oscillations,dynamical systems,and bifurcations of vector fields, Springer, Berlin (1983)

(21) Kelley,A , "The stable, center stable, center, center unstable and unstable manifolds", Appendix C a Abraham,R ,Robbin, J , Transversal mappings and flows, Benjamin-Cummings, New York (1967)

(22) Lazutkin,V F , comunicació privada a Carles Simó (1984)

(23) Lazutkin,V F , comunicació privada a Carles Simó (1985)

(24) Llibre,J ,Simó,C ,"Oscillatory solutions in the planar

restricted three body problem", Math Ann , 248, 153-184 (1980)

(25) Llibre,J ,Simó,C , 'On the Hénon-Heiles potential', Actas III C E D Y A ,Santiago de Compostela (1980)

(26) McGehee,R ,Meyer,K ,"Homoclinic points of area preserving diffeomorphisms', Amer Jour of Math , 96 , 409-421 (1974)

(27) Melkinov,V K , "On the stability of the center for time periodic perturbations , Trans Moscow Math Soc , 12, 3-56 (1963)

(28) Meyer,K , "The implicit function theorem and analytic differential equations" a Dynamical systems-Warwick 1974, L N Math , 468, Springer, Berlin (1975)

(29) Moser,J , "The analitical invariants of an area preserving mapping near a hyperbolic fixed point", Comm Pure Appl Math 9, 673-692, (1956)

(30) Moser,J , Stable and random motions in dynamical systems, Ann of Math studies, 77, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1973)

(31) Nitecki,Z ,Differentiable dynamics, M I T Press, Cambridge, Massachusetts (1971)

(32) Palis,J ,DeMelo,W , Geometric theory of dynamical systems, Springer, New York (1982)

(33) Sanders,J A , "Melnikov's method and averaging", Cel Mech , 28, 171-181 (1982)

(34) Siegel,C L , "Vereinfachter Beweis eines Satzes von J Moser", Comm Pure Appl Math , 10, 305-309 (1957)

(35) Siegel,C L ,Moser,J , Lectures on Celestial Mechanics, Springer, Berlin (1971)

(36) Simó,C ,"Una nota sobre las aplicaciones cuadráticas que conservan área' , Actas del V congreso de la agrupación de matemáticos de expresión latina , Madrid (1978)

(37) Simó,C ,'Integrability A difficult analytical ploblem , Pub Mat UAB, 22, 71-80 (1980)

(38) Simó,C , Homoclinic phenomena and quasi integrability a Stability of the solar system and its minor natural and artificial bodies, ed per Szebehely,V , Reydel Publ Comp , Dordrecht (1985)

(39) Simó,C , en Proceed Math Meth Cel Mech , Oberwolfach 85, per apareixer a Z A M M

(40) Simó,C ,Fontich,E ,'On the smallness of the angle between split separatrices", Proceed Colloque Géom Symplect et Mécanique, Montpellier (1985)

(41) Smale,S ,"Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms , Annali della Scuola Norm Sup Pisa, 17, 97-116 (1963)

(42) Smale,S ,Diffeomorphisms with many periodic points a Differential and combinatorial topology, a symposium in honor of Marston Morse, ed per S S Cairns, Princeton, New Jersey, Princeton Univ Press (1965)

(43) Sotomayor,J ,Liçoes de equaçoes diferenciais ordinárias, IMPA CNPq, Rio de Janeiro (1979)

(44) Spiegel,R M ,Manual de fórmulas y tablas matemáticas, McGraw-Hill, México (1970)

(45) Zehnder,E ,'Homoclinic points near elliptic fixed points", Comm Pure Appl Math , 26, 131-182 (1973)

(46) Ziglin,S L , Splitting of separatrices, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a solid body Trans Moscow Math Soc , 41, 283-298 (1982)

(47) Ziglin,S L , Branching of solutions and the nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics I,II , Func Anal Appl , 16, 181-189 (1983) i 17, 6-17 (1983)