

Modelización No Browniana de series  
temporales ...nancieras

Fernando Espinosa Navarro

Barcelona, Noviembre de 2001



# Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento de la Tesis	1
1.2. Estructura	4
1.3. Principales aportaciones	9
2. La crisis de la hipótesis de paseo aleatorio	13
2.1. Introducción a la modelización estocástica	13
2.1.1. Series temporales del tipo de interés interbancario español	15
2.1.2. Antecedentes y desarrollo de la modelización estocástica	19
2.2. Procesos con incrementos independientes y estacionarios	22
2.2.1. El movimiento browniano. Características Básicas	23
2.3. Modelización del tipo de interés	24
2.4. Comentarios sobre los resultados obtenidos	38
3. Primera corrección: los modelos <i>ARMA</i>	47
3.1. Modelos estocásticos lineales. Modelización Box-Jenkins	47
3.1.1. Modelo autorregresivo de orden $p$ , $AR(p)$	48
3.1.2. Modelos de medias móviles $MA(q)$	51
3.1.3. Modelos autorregresivos de medias móviles $ARMA(p, q)$ y modelos autorregresivos de medias móviles integrados $ARIMA(p, d, q)$	53
3.1.4. La función de autocorrelación muestral $FA$	54
3.1.5. La función de autocorrelación parcial $FAP$	55
3.1.6. Ejemplos de $FA$ y $FAP$ teóricas para algunos modelos de series temporales	57
3.2. Estimación de modelos $ARMA(p, q)$	62
3.3. Comentarios sobre los resultados obtenidos	78

4. Autosimilitud y memoria a largo plazo: modelos <i>ARFMA</i>	95
4.1. Introducción	95
4.2. Autosimilitud de procesos estacionarios	96
4.3. Memoria a largo plazo de procesos estacionarios	99
4.3.1. Movimiento browniano fraccionario	99
4.3.2. La ley empírica de Hurst y el análisis <i>R/S</i>	104
4.4. Los modelos <i>ARFIMA</i> ( $p, d, q$ )	105
4.4.1. Relación entre el exponente de Hurst y el parámetro de integración fraccional	107
4.5. Análisis de la memoria a largo en las series	108
4.6. Estimación del modelo <i>ARFMA</i>	112
4.6.1. Estimación de modelos <i>ARFMA</i> según la metodología Hosking sobre la serie de tipos de interés	118
4.7. Validación de los modelos estimados	126
4.8. Comentarios sobre los resultados obtenidos	137
5. Un paseo por el caos determinista	141
5.1. Introducción a la matemática del caos	141
5.1.1. Una visión histórica	142
5.1.2. Una definición de caos	145
5.1.3. Sistemas dinámicos. Una introducción	146
5.1.4. La ecuación logística	152
5.1.5. Nociones sobre atractores: Una visión introductoria	157
5.2. Detección del caos determinista en series temporales	168
5.2.1. Reconstrucción del espacio de fases	168
5.2.2. Dimensión de correlación	174
5.2.3. Exponentes de Lyapunov.	180
5.2.4. El test de residuos de Brock	188
5.2.5. El test <i>BDS</i>	189
5.3. Análisis de la no linealidad del tipo de interés	197
5.3.1. Estrategias de contraste	197
5.3.2. Análisis de la no linealidad en las series de tipos de interés interbancario del mercado español	198
5.4. Estimación de funciones no lineales	217
5.4.1. Representación global de funciones no lineales	218
5.4.2. Aproximación local de funciones	223

6. No estacionariedad en varianza: Modelos <i>GARCH</i>	227
6.1. Introducción . . . . .	227
6.2. Modelizando medias condicionales y varianzas . . . . .	229
6.2.1. Procesos <i>ARCH</i> (1) . . . . .	230
6.2.2. Los modelos <i>AR</i> (1)/ <i>ARCH</i> (1) . . . . .	232
6.2.3. Los modelos <i>ARCH</i> ( <i>q</i> ) . . . . .	235
6.2.4. Los modelos <i>GARCH</i> ( <i>p, q</i> ) . . . . .	235
6.3. Distribuciones con colas pesadas . . . . .	237
6.4. Comparación entre procesos <i>ARMA</i> y procesos <i>GARCH</i> . . . . .	240
6.5. Estimación de modelos <i>GARCH</i> sobre las series temporales . . . . .	240
6.6. Comentarios sobre los resultados obtenidos . . . . .	242
7. Retorno al paseo aleatorio: modelos con saltos	261
7.1. Introducción . . . . .	261
7.2. Modelización de saltos . . . . .	263
7.2.1. El proceso de Poisson como modelo de una sucesión de instantes de salto . . . . .	264
7.2.2. El modelo de Merton (1976) . . . . .	265
7.2.3. La teoría de los procesos de Lévy y procesos aditivos . . . . .	266
7.2.4. El modelo de Lévy-Merton generalizado . . . . .	268
7.3. Estimación de distribuciones de salto . . . . .	268
7.3.1. Detección de los saltos en las series temporales . . . . .	268
7.3.2. Aplicación práctica . . . . .	270
7.4. Comentarios sobre los resultados obtenidos . . . . .	294
8. Consideraciones ...nales	297
Apéndice 1. Introducción a la matemática fractal	309
.1. Introducción . . . . .	309
.2. Una breve introducción sobre fractales . . . . .	310
.2.1. ¿Cuánto mide la costa de Cataluña? . . . . .	310
.2.2. La dimensión fractal versus la dimensión euclídea . . . . .	314
.2.3. Generación de fractales de variable compleja . . . . .	327
.3. Propiedades de los fractales . . . . .	335
.4. El juego del caos . . . . .	336
Apéndice 2. Programas empleados y resultados obtenidos	339



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Planteamiento de la Tesis

El estudio de los mercados financieros es un tema ampliamente tratado en el ámbito de la Economía desde finales de la década de los 50. Básicamente, este análisis consiste en el contraste de la aleatoriedad de las rentabilidades y por lo tanto, indirectamente, de la eficiencia de dichos mercados. Especial mención requiere, llegados a este punto, la Hipótesis de Mercado Eficiente (*HME*), que mantiene que un mercado es eficiente cuando la nueva información, que es conocida rápidamente por todos los participantes, se absorbe instantáneamente y se incorpora a los precios del mercado. Así pues, en un mercado eficiente los precios de los distintos valores reflejan de inmediato toda la información relevante y el ajuste de los precios de cada activo se realiza de forma automática e independiente. Clásicamente esta hipótesis económica se ha traducido en la hipótesis matemática de que los incrementos relativos de los precios son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*iid*). En otras palabras, se supone que el mercado no tiene memoria y, por tanto, que las series de rendimientos pasados no sirven para predecir los rendimientos futuros.

Existen en la literatura muchos trabajos que tratan la *HME*. Destacan entre ellos los trabajos de Bachelier (1900), Kendall (1953), Roberts (1959), Osborne (1959), Moore (1964) y Fama (1964).

Hasta la segunda mitad de la década de los 80, el paradigma de la *HME* en el análisis financiero tenía una fuerte implantación. Una de las razones era la simplicidad en el tratamiento matemático que ofrecían los modelos asociados,

que suponían incrementos *iid* o linealidad en la relación entre variables. Sin embargo, las de...ciencias predictivas eran evidentes. Pero ir más allá de esos modelos implicaba unas necesidades de cómputo inasequibles. Destacar más en concreto que la modelización más compleja y a la vez más utilizada era la propuesta por Box y Jenkins en la década de los 70.

El Crash bursátil de Octubre de 1987 y sucesos más recientes, junto con un avance importante en las herramientas informáticas, han llevado a los economistas ...nancieros a reconsiderar el comportamiento de los mercados de valores, en particular, y de los mercados especulativos, en general; llegando a cobrar fuerza el nuevo paradigma de la no linealidad en la dinámica subyacente a los precios. Como resultado, a mediados de los 80, empezaron a ser conocidos en Economía y Finanzas los estudios sobre no linealidad desarrollados fundamentalmente en el campo de la Física. Destacar entre otros Granger (1980), Geweke y Porter-Hudak (1983), Mandelbrot (1983), Eckmann y Ruelle (1985), Bollerslev (1986), Engle y Bollerslev (1986), Brock (1986) y Brock, Dechert y Scheinkman (1987). Es en esa época cuando el paradigma de la *HME* comenzó a ser cuestionado como explicación del comportamiento de los mercados ...nancieros. La alta volatilidad registrada en los mercados ...nancieros puso de mani...esto la necesidad de elaborar teorías que la explicasen en función del comportamiento especulativo de los agentes del mercado. Sencillamente, lo que se propuso fue sustituir los modelos de tipo lineal por otros de tipo no lineal. En ese contexto entraron en juego los modelos fractales, los modelos caóticos, los modelos *GARCH*, etc... provocando una revolución en el campo de las ...nanzas cuantitativas.

En el contexto de la matemática fractal, se pueden considerar los modelos de memoria a largo plazo. La idea de memoria a largo plazo generaliza los modelos *ARMA* introducidos por Box y Jenkins considerados de memoria a corto plazo. Especial mención requiere el pistoletazo de salida que supuso el artículo de Hosking (1981) que introdujo el operador diferencia que permitió el paso a esa generalización.

La idea que hay detrás del punto de vista de la teoría del caos podría presentarse tal como sigue. Normalmente, la simplicidad y la regularidad se asocian siempre con la predictibilidad. En este sentido, podemos predecir cuándo se producirá la entrada del invierno astronómico, ya que la órbita de la tierra es simple y regular. Por otro lado, la complejidad y la irregularidad se asocian siempre con la impredictibilidad. Pero podemos llegar a ver que este planteamiento no siempre se cumple. Esta complejidad e irregularidad existe en la naturaleza. Es obvio. Solamente necesitamos mirar alrededor nuestro para observar que prác-



ticamente todo tiene apariencia aleatoria. Por ejemplo, si observamos el cielo en un día nublado podemos ver cómo las nubes van tomando infinitas formas, pero ninguna de estas se repite, cada nube es diferente. De ese modo, podemos diferenciarlas y reconocerlas. En definitiva, las nubes son complejas e irregulares, pero en conjunto poseen una característica que las distingue de otras estructuras en la naturaleza, como por ejemplo un árbol.

Llegados a este punto, se nos plantea una pregunta. ¿Es esa irregularidad completamente aleatoria o existe algún orden en ella que hace que, objetos con estructura compleja sean semejantes entre sí y totalmente diferentes a otros objetos también complejos?

Durante las últimas décadas físicos, matemáticos, astrónomos, biólogos y científicos de muchas otras disciplinas han intentado dar respuesta a esta pregunta, planteando un nuevo punto de vista sobre la complejidad en la naturaleza. Se ha demostrado que sistemas simples pueden dar lugar a la creación de un comportamiento extraño, un comportamiento que parece aleatorio pero que en el fondo es determinista. Este nuevo planteamiento ha sido bautizado como teoría del caos. Caos se define matemáticamente como aleatoriedad generada por un sistema determinista. Esta aleatoriedad es el resultado de la sensibilidad de los sistemas caóticos a las condiciones iniciales. Sin embargo, debido a que los sistemas son deterministas, el caos implica algún orden. Este sistema mezcla entre aleatoriedad y orden nos permite plantearnos un acercamiento diferente al estudio de los fenómenos a primera vista aleatorios que evolucionan con el tiempo. Destacar, a modo de anécdota, que los fundadores de la teoría del caos tienen un gran sentido del humor, ya que caos es la palabra griega para denotar la ausencia de orden. En general, los sistemas caóticos siguen reglas que no tienen por qué ser muy complicadas. Con sencillas reglas podemos llegar a obtener comportamientos de una increíble complejidad que, en ocasiones, podemos llegar a confundir con aleatoriedad. Por eso debemos utilizar la palabra pseudoaleatoriedad al referirnos a estos comportamientos.

Las bases de lo que ahora se entiende por teoría del caos fueron planteadas por el matemático francés Henri Poincaré en su trabajo sobre la teoría de la bifurcación. Sin embargo, debido al carácter no lineal de los problemas considerados y a la ausencia de ordenadores, el descubrimiento del caos no se produjo hasta 1963, año en que Edward Lorenz publicó un trabajo denominado Deterministic Nonperiodic Flows. Nació así un nuevo paradigma.

Después de todo esto la teoría del caos ha ido desarrollándose. Pero debemos destacar que la belleza del caos se reveló mediante el estudio de modelos no

lineales simples como la ecuación logística, el mapa de Hénon, el sistema de Lorenz y el sistema de Rössler.

Más tarde, el estudio del caos se trasladó al laboratorio. Así se pusieron en marcha experimentos ingeniosos para poder observar caos de baja dimensión (aquel en el que en su generación intervienen un número reducido de variables). Experimentos que llevaron al caos, de ser considerado como una simple curiosidad matemática, a una realidad física.

El siguiente paso fue detectar el caos fuera de los laboratorios, en la realidad. Se presentó un gran desafío y surgieron herramientas para este propósito como la dimensión de correlación, los exponentes de Lyapunov y el contraste *BDS* entre otros. Sin embargo, cabe decir que debemos ser conscientes de que, aunque tengamos instrumentos, estos tienen sus limitaciones. Todavía hoy, este campo es una ventana abierta a la investigación.

Otro punto de vista interesante es el de la modelización no lineal estocástica. En concreto la modelización mediante modelos *GARCH*, que pone en crisis la idea de estacionariedad de los incrementos al suponer heterocedasticidad.

Las limitaciones de la *HME* se han intentado también superar sin cambiar de perspectiva. En este contexto se incluyen los trabajos iniciados por Merton a partir de 1976 en que se introducen modelos con saltos, modelos que se inscriben en la teoría matemática de los procesos de Lévy, y más en general en la de los procesos aditivos.

## 1.2. Estructura

La presente Tesis está estructurada en 8 capítulos. El objeto de estudio va a ser una colección de series temporales del tipo de interés cotizado en el mercado interbancario español, durante el periodo comprendido entre el 4 de Enero de 1988 y el 31 de Diciembre de 1998. En concreto, las series de observaciones diarias del tipo de interés nominal para operaciones a 1 día, 1 semana, 15 días, 1 mes, 2 meses, 3 meses, 6 meses y 1 año.

La mayoría de las técnicas de análisis que utilizamos en la memoria (excepto las del capítulo 5) se inscriben en el marco general de la teoría de procesos estocásticos. Es decir, la pregunta que nos planteamos en su formulación más general es: ¿Cuál es el modelo estocástico más adecuado para describir la serie temporal del tipo de interés nominal? Pregunta que intentaremos responder partiendo de la utilización de los modelos más sencillos. Es decir, no escogere-

mos un modelo para nuestras series basándonos en la complejidad como única justificación, ni tampoco lo haremos por la sencilla razón de que esté de moda o sea de reciente creación. Lo que queremos es establecer un camino deductivo y lógico que nos permita determinar qué modelo puede llegar a ajustar mejor el comportamiento de una serie temporal.

Actualmente existen muchísimas referencias sobre el tema de la modelización estocástica de series financieras. En ellas podemos encontrar distintos modelos que a su vez son consecuencia de distintos enfoques. En general, proponer un modelo de tipo estocástico adecuado significa proponer un tipo de proceso estocástico como modelo del mecanismo aleatorio generador de los datos que observamos. Algunas de las referencias que consideramos recomendables son los trabajos de Bachelier (1900), Hurst (1951), Osborne (1959), recopilados en Cootner (1964), Box y Jenkins (1970), Hosking (1981), Engle y Bollerslev (1986), Feder (1989), Peters (1991b y 1994) y Mandelbrot (1997) entre otros.

En el Capítulo 2, en primer lugar presentamos las series del tipo de interés que nos proponemos analizar y en segundo lugar nos planteamos el problema de modelizar estos datos mediante un proceso estocástico clásico a tiempo continuo. Por lo tanto, vamos a considerar que en cada instante de tiempo el valor del tipo de interés es la realización de una cierta variable aleatoria. Por consiguiente, para un cierto periodo, tenemos una colección de variables aleatorias indexadas por el tiempo. Suponemos entonces que nuestros datos diarios son observaciones discretas de este proceso. Por ejemplo, cada día, la observación del instante de cierre. En resumen, tenemos entonces una muestra finita de observaciones equiespaciadas de un proceso a tiempo continuo.

Evidentemente, introducimos también aquí los conceptos generales de la teoría de procesos estocásticos a tiempo continuo necesarios para nuestro análisis, como es el de proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios, así como los hitos más importantes de la aplicación de esta teoría al problema de la modelización del tipo de interés. Así, siguiendo a Bachelier y Osborne llegamos a la conclusión que un proceso de precios logarítmicos, en una primera aproximación heurística, puede ser un proceso con incrementos independientes y estacionarios. Como nuestro tipo de interés nominal es un logaritmo del precio de un bono cupón cero, es razonable empezar la investigación suponiendo que estamos ante de un proceso de ese tipo.

El esquema que seguiremos en nuestro análisis a lo largo de toda la memoria viene determinado por el siguiente teorema, que podemos encontrar planteado y demostrado, por ejemplo, en Bouleau (1988), Gikhman y Skorohod (1974) o

Yeh (1973).

**Teorema 1.1** Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un proceso estocástico nulo en el origen que cumple las condiciones siguientes:

- $X_{t+h} | X_t$  es independiente de  $\sigma \{X_s, s \leq t\}$ .
- la ley de  $X_{t+h} | X_t$  no depende de  $t$ .
- las trayectorias son continuas casi seguramente.

Bajo estas condiciones el proceso  $X$  se puede escribir como  $\mu t + \sigma W_t$ , donde  $W$  es un proceso de movimiento browniano estándar,  $\mu$  es un parámetro real denominado tendencia y  $\sigma \geq 0$  es la volatilidad. En particular, cada  $X_t$  es una variable aleatoria con distribución normal de esperanza  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ .

Observemos que si un proceso estocástico cumple las hipótesis de este teorema, los incrementos diarios van a ser realizaciones independientes de una ley normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . ¿Es eso cierto en nuestro caso? O dicho de otra manera, ¿La serie de primeras diferencias de nuestros datos son una muestra de una distribución normal? La respuesta es negativa, como dejamos claro en el capítulo 2. Nos encontramos, en realidad, con el típico fenómeno de colas pesadas y apuntamiento.

A la vista del teorema anterior, las causas de esta desviación de la normalidad sólo pueden ser tres:

1. Que los incrementos no sean independientes.

En este caso la muestra de primeras diferencias sería una muestra de variables dependientes entre sí. Hay que abordar entonces el estudio de la estructura de correlaciones a distintos periodos. El caso más sencillo es sin duda el de los modelos *ARMA*. Un caso más complejo es el caso en que hay presencia de memoria a largo plazo y los datos deben ser modelizados mediante un modelo de tipo *ARFMA*.

2. Que los incrementos no sean estacionarios.

Esta es la hipótesis cuya falsedad, en el límite, es más grave, ya que si la distribución cambia en cada instante, poca estadística podremos utilizar. En la práctica tenemos innumerabilidad de modelos en que la volatilidad, o la deriva, cambian siguiendo una cierta función determinista de una única fuente de aleatoriedad de tipo browniano, como por ejemplo soluciones de una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t$$

o incluso la volatilidad, o la deriva, son a su vez soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales estocásticas dependientes de otras fuentes de aleatoriedad independientes o correlacionadas con la primera y entre sí. La versión de estos procesos en el marco de la teoría de series temporales son los procesos de tipo *GARCH*.

3. Que las trayectorias no sean continuas.

En ese caso el tipo de interés sería un proceso con incrementos independientes y estacionarios (o proceso de Lévy) pero que admite la posibilidad de saltos. La teoría de los procesos de Lévy está actualmente bastante desarrollada desde el punto de vista del cálculo estocástico, aunque no tanto sus aplicaciones a las finanzas. Desde el punto de vista estadístico, la distribución de probabilidad de los incrementos pasa a ser una distribución de la familia de las leyes infinitamente divisibles, que incluyen en particular, leyes con volatilidad infinita, las leyes estables, etc...

En el Capítulo 3 estudiamos el caso de los modelos *ARMA* para series estacionarias, teoría clásica desarrollada por Box y Jenkins durante los años 70. Ajustamos modelos *ARMA* a las series de primeras diferencias, que en esta primera etapa y a la vista de los resultados exploratorios obtenidos, suponemos estacionarias y con media nula. Posteriormente intentamos validar estos modelos mediante el análisis de los residuos obtenidos y en concreto el contraste de su carácter de ruido blanco. Para ello utilizamos además de un análisis minucioso de la función de autocorrelación muestral, el conocido contraste de *Ljung-Box*.

El rechazo del carácter de ruido blanco de los residuos obtenidos, tras ajustar modelos *ARMA*, nos obliga a plantear modelos más sofisticados. Si mantenemos la hipótesis que nuestras series de primeras diferencias son estacionarias y con media cero, el fracaso del contraste del carácter de ruido blanco de los residuos, puede ser debido a la insuficiencia de los modelos *ARMA*, para modelizar el carácter no independiente de nuestras observaciones. Nos planteamos por lo tanto, en el Capítulo 4, generalizar estos modelos a los llamados modelos *ARFMA* introducidos por Hosking (1981) y que se engloban en el marco de los objetos fractales. Se trata de generalizar la hipótesis de ruido blanco de los residuos, a la hipótesis más débil de ruido fraccionario. En términos de ecuaciones diferenciales estocásticas, se trata de sustituir el modelo del movimiento browniano, o de un proceso con incrementos independientes y estacionarios, como modelo de la fuente de aleatoriedad, por ejemplo por el modelo del movimiento browniano fraccionario. Este tipo de proceso, es un proceso gaussiano, de

incrementos estacionarios, autosimilar, pero no de incrementos independientes. En concreto en este capítulo presentamos primero las ideas de autosimilitud y memoria a largo plazo. Después introducimos el proceso de movimiento browniano fraccionario y su carácter de modelo para la llamada memoria a largo plazo. Pasamos después a presentar los modelos *ARFMA* para series temporales, así como la metodología *R/S*, desarrollada inicialmente por Hurst en el campo de la Hidrología en 1951; redescubierta, ampliada y introducida en el ámbito de la economía y las finanzas por Mandelbrot y últimamente presentada de nuevo por Peters. Finalmente, ajustamos modelos *ARFMA* a nuestras series de diferencias y validamos los resultados analizando los residuos. En relación a este capítulo hemos creído conveniente incluir al final de la memoria un apéndice sobre los objetos fractales y su geometría con la finalidad de dejar claros algunos de los conceptos utilizados.

Aún suponiendo que tuviéramos un modelo de tipo *ARMA* validado mediante el test de *Ljung-Box*, los residuos podrían estar solo incorrelacionados y no ser en realidad independientes entre si. Es por ello que en el Capítulo 5 abordamos nuestras series desde un punto de vista muy diferente. Presentamos en él la teoría de los sistemas dinámicos caóticos o teoría del caos determinista y damos ejemplos de cómo es posible crear, de manera determinista, series temporales de datos aparentemente independientes e idénticamente distribuidos. Por lo tanto, reflexionamos sobre la posibilidad que nuestros datos sean sencillamente la solución de un sistema dinámico de tipo caótico.

En el Capítulo 6 ponemos en duda el carácter estacionario en varianza de nuestras series. Es decir, estamos cuestionando la segunda hipótesis de nuestro teorema conductor. Como consecuencia, ajustamos modelos *GARCH* a nuestros datos, modelos no lineales que intentan describir el comportamiento heterocedástico.

En el capítulo 7 ponemos en duda la tercera de las hipótesis del teorema y rechazamos por lo tanto la continuidad de las trayectorias. En este caso nos encontramos en el contexto de los procesos de Lévy y los llamados modelos con saltos introducidos en Finanzas por Merton (1976). En concreto intentamos modelizar las series como procesos que saltan en determinados instantes y que evolucionan de forma browniana entre salto y salto.

Por último, en el Capítulo 8, comentamos los resultados obtenidos y presentamos las conclusiones de la memoria.

### 1.3. Principales aportaciones

El trabajo de investigación que presentamos en esta memoria se enmarca en el campo de la modelización del tipo de interés. No hace falta insistir ya sobre la importancia que el tipo de interés tiene en nuestra economía por lo que dejaremos este tema al margen.

Desde el punto de vista formal, en esta tesis, aunque en un principio no era nuestro objetivo primordial, acabamos postulando un modelo teórico concreto, que explica el comportamiento de las series de tipos de interés interbancario. Por otro lado, desde el punto de vista del enfoque aplicado, no sugerimos modificaciones significativas a procedimientos estadísticos que permitan realizar inferencia. Lo que sí hacemos es dar cohesión y validez a herramientas que se podían entender como autoexcluyentes y sin aplicación conjunta, como por ejemplo la utilización del test de Ljung-Box junto con el test *BDS*, o el dar a conocer los modelos *ARFMA* como un paso más en la generalización de los modelos *ARMA*. Por otro lado, intentamos también extender la aplicabilidad de las herramientas utilizadas ampliando su definición y matizando algunos detalles, como por ejemplo en la redefinición del proceso de detección de un comportamiento caótico, donde no nos limitamos únicamente a plantear lo que se propone en Belaire y Contreras (1996), si no que intentamos mejorarlo. Otro, por ejemplo, dentro del ámbito de los procesos de saltos, cuando construimos una banda de selección para contar aquellos casos que se salen de esa banda y así establecemos una metodología en la elección del parámetro  $h$ . Creemos, por tanto, que la orientación empleada permite que nuestras aportaciones resulten, aún que modestas, interesantes en el campo de la economía cuantitativa y financiera.

Aunque cada capítulo recoge las aportaciones en él presentadas, podemos, prescindiendo de otras menores, resumirlas en cuatro bloques o partes.

En primer lugar nos encontramos una parte dedicada a la metodología tradicional de series temporales, Box-Jenkins, generalizada hasta llegar a los modelos *ARFIMA*. En esta parte queremos destacar que, a pesar de la importancia de dichos modelos, éstos han pasado casi desapercibidos en el ámbito científico español. No tenemos constancia de ningún análisis sobre el tema con datos económicos o financieros españoles. Además, queremos reivindicar la importancia de un mecanismo como el análisis *R/S*.

Destacar también una segunda parte donde nos apartamos de la modelización estadística y nos introducimos en la teoría del caos. Influenciados por la filosofía

de los fractales, en el sentido de la repetición hasta el infinito de un comportamiento, razonamiento del que también se impregna la matemática del caos, nos proponemos otro punto de vista para abordar la problemática de la modelización de series temporales financieras y en particular la del tipo de interés. Son pocos los trabajos realizados en el país sobre este tema, los cuales, sobretodo se centran en series temporales extraídas del mercado bursátil o bien de cotizaciones de la divisa española, como el trabajo de Bajo et al. (1992), Blasco de las Heras y Santamaría (1994), Olmeda (1995), Belaire y Contreras (1996) y Belaire y Contreras (1998). Pero ninguno de ellos trata con una serie de tipos de interés. Además, queremos destacar una de las herramientas que, al igual que ocurre con las planteadas en la parte anterior, a pesar de su importancia, no han recalado en la ciencia de nuestro país: el test *BDS*.

Destacar por último, una tercera parte en la que planteamos los cimientos de la modelización no lineal estocástica. Como con anterioridad ya habíamos tocado la modelización lineal estocástica y la no lineal determinista, nos quedaba esta puerta por atravesar. Pero a pesar de lo que pueda parecer existe una gran variedad de modelos no lineales estocásticos. Dentro de toda esta oferta, hemos elegido por un lado los modelos *GARCH* para tener unos primeros resultados en este ámbito, no descartando la inclusión de otras familias de modelos no lineales en el futuro.

En lo que consideramos la cuarta parte, incluimos los modelos con saltos. En este caso presentamos una generalización del modelo de Merton permitiendo que la volatilidad sea distinta entre salto y salto.

Desde un punto de vista estrictamente financiero la memoria consiste en definitiva en un análisis minucioso de la hipótesis de paseo aleatorio, que a su vez proviene de la *HME*, basado en el análisis pormenorizado de sus hipótesis matemáticas. En particular como resultado de nuestro trabajo se insinúa una metodología sistemática de análisis de datos financieros, dando cohesión a una serie de métodos que se presentan a veces, en la literatura, de forma excluyente entre ellos, pero que, desde nuestro punto de vista, se pueden ir aplicando sucesivamente para así, llegar a comprender el comportamiento subyacente de la serie analizada.

Por lo tanto, de forma humilde y no exhaustiva, pretendemos presentar una estrategia de análisis que combina tanto metodología tradicional como actual, a la vez que motivar su posterior estudio por aquellos que se sientan interesados.

En conclusión, nuestras aportaciones son modestas. Sin embargo, las consideramos de interés y, sin duda, novedosas en el campo de la economía financiera y



cuantitativa. Sobre todo porque en nuestra opinión, es necesaria una ampliación del marco modelizador y metodológico que permita enfrentarnos, con mayor capacidad, a los difíciles problemas que se plantean en esta rama de la Economía.



## Capítulo 2

# La crisis de la hipótesis de paseo aleatorio

El azar es el pseudónimo de Dios cuando no quiere ...rmar.  
Anatole France

### 2.1. Introducción a la modelización estocástica

En este primer capítulo, aún de carácter introductorio, presentaremos las series de tipo de interés cuyo análisis nos ocupará la presente tesis. En primer lugar, intentaremos hacer un análisis descriptivo de las características estadísticas de cada una de las series expuestas.

Concretamente, aunque luego hablaremos de ello, analizaremos series del tipo de interés cotizado en el mercado interbancario. Este mercado está formado por las entidades bancarias, que acuden al mismo cuando tienen necesidades de liquidez. Obviamente esto sucede con bastante frecuencia puesto que la mayoría de los depósitos de los bancos, siempre en función del coeficiente de caja, están invertidos. Esto implica que cuando se presenta una situación en la que requieren un volumen mayor de efectivo del que disponen, acuden al mercado de préstamo interbancario con el objetivo de cubrir este déficit.

Posteriormente pasaremos a exponer la teoría clásica de modelización de series temporales financieras mediante procesos estocásticos. En este apartado nos centraremos en el análisis de uno de los conceptos base de todas, o casi todas, las teorías cuantitativas del mercado de capitales, la Hipótesis de Mercado

E...ciente, hipótesis que impregna todo el estudio de los mercados ...nancieros y, por tanto, de obligada discusión.

La *HME* o hipótesis de e...ciencia de los mercados a...rma en esencia que estos reaccionan racionalmente a la llegada de nueva información. En particular esta idea se explicita en las siguientes hipótesis:

- La llegada de información se traduce instantáneamente en cambios en los precios y estos reflejan correctamente toda la información disponible. El mercado está siempre en equilibrio. Los precios son justos e impiden la posibilidad de arbitrajes.
- Los agentes del mercado son homogéneos en sus objetivos y actúan de manera uniforme en la interpretación de la información obtenida, corrigiendo sus decisiones instantáneamente a medida que reciben nueva información.

En Samuelson (1965) se tradujo la *HME* a la hipótesis matemática de que los incrementos relativos de los precios son independientes (hipótesis que llamaremos de paseo aleatorio débil). Esta hipótesis es más fuerte que la hipótesis considerada actualmente como equivalente que es la hipótesis de ausencia de posibilidad de arbitraje o su versión matemática: la existencia de una medida martingala equivalente, bajo la cual, los precios son una martingala.

En la teoría de los mercados e...cientes la información incide directamente sobre los precios. Así, los precios se mueven cada vez que se recibe información. En consecuencia, en un mercado e...ciente no puede existir arbitraje, ya que los precios reflejan la información conocida. Si no ocurriese de esa forma el gran número de inversores asegurarían que los precios son justos, porque cuando detectasen un fallo actuarían sobre él corrigiendo la situación.

En esta visión, los inversores son considerados como racionales: conocen, en sentido colectivo, qué información es importante y cuál no.

Cabe añadir en cuanto a la formación de los precios, que después de procesar toda la información recibida y valorar el riesgo inherente, la conciencia colectiva de los inversores del mercado encuentra un precio de equilibrio. En otras palabras, la *HME* a...rma que el mercado está formado por tantos elementos que al interactuar entre ellos y al procesar la información recibida, sin quererlo, están haciendo que el mercado sea e...ciente.

En este sentido, los cambios en los precios que se puedan realizar hoy están causados por las noticias inesperadas. La información de ayer no es importante hoy y, en consecuencia, la variación en los precios, hoy, no está relacionada con

los precios de ayer. En definitiva, las variaciones en los precios son independientes y, si esto ocurre, estas variaciones son variables que siguen un paseo aleatorio.

Debemos destacar que existen tres tipos de eficiencia,

- Eficiencia en sentido débil, donde la información incluye únicamente la historia de los precios o rentabilidades.
- Eficiencia en sentido semi fuerte, donde la información incluye toda la información que es accesible de forma pública.
- Eficiencia en sentido fuerte, donde la información incluye toda la información conocida por cualquier agente del mercado.

Pero en definitiva, la *HME* en cualquiera de sus versiones afirma que la información del pasado, una vez que se ha conocido de forma generalizada, no afecta a la actividad del mercado.

En realidad históricamente la hipótesis de paseo aleatorio para los precios es anterior a la *HME*, y esta última no es más que la culminación de un proceso de racionalización en términos económicos de la primera.

### 2.1.1. Series temporales del tipo de interés interbancario español

A continuación, intentaremos presentar las series temporales con las que vamos a trabajar durante el desarrollo de la presente memoria. Como se ha comentado con anterioridad, el propósito de esta memoria es desgranar toda la posible información que pueda extraerse mediante la utilización de herramientas estadísticas no convencionales.

Las 8 gráficas siguientes muestran los datos diarios de tipo de interés nominal interbancario entre el 4 de Enero de 1988 y el 31 de Diciembre de 1998, facilitada por el Banco de España.

Serie temporal formada por 2734 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 1 día.

Serie temporal formada por 2707 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 1 semana.

Serie temporal formada por 2704 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 15 días.

Serie temporal formada por 2733 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 1 mes.

Serie temporal formada por 2305 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 2 meses.

Serie temporal formada por 2726 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 3 meses.



Serie temporal formada por 2589 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 6 meses.

Serie temporal formada por 2220 observaciones diarias del tipo de interés para operaciones a 1 año.

### 2.1.2. Antecedentes y desarrollo de la modelización estocástica

Tenemos ocho series de datos que podemos denotar por  $\{x_i, i = 0, \dots, T\}$  y cuyas gráficas acabamos de presentar. Podemos suponer de manera natural que estas series son series de observaciones equiespaciadas de un proceso estocástico a tiempo continuo, es decir observaciones de una colección de variables aleatorias  $\{X_t, t = 0, \dots, T\}$  donde  $t$  indica el tiempo, que suponemos continuo. Es interesante a veces observar también un proceso estocástico como la elección de una trayectoria según una determinada ley probabilística definida sobre el conjunto de trayectorias posibles. Este conjunto de trayectorias puede ser el conjunto de las

trayectorias continuas definidas sobre  $[0, 1[$  o el conjunto de las trayectorias sobre  $[0, 1[$  con saltos, continuas por la derecha y con límites por la izquierda, etc...

La primera referencia histórica de modelización de series financieras mediante procesos estocásticos es la tesis doctoral de Louis Bachelier: "Théorie de la spéculation" presentada en 1900. En dicho trabajo, Bachelier aplicó a acciones, bonos, futuros y opciones los métodos creados para el análisis de apuestas. La tesis de Bachelier es el trabajo pionero en previsión, muchos años por delante de su tiempo. En términos modernos Bachelier propone que los incrementos, por ejemplo diarios, de los precios son copias independientes e idénticamente distribuidas de una variable aleatoria con ley normal centrada y una cierta varianza. Por lo tanto Bachelier introdujo el proceso que actualmente llamamos de movimiento browniano como modelo de la evolución de los precios de un determinado bien, antes que A. Einstein lo propusiera para el propio movimiento browniano en un artículo de 1905 (en ese año genial, publicó dos artículos más: en uno propuso la explicación del efecto fotoeléctrico que le valió el premio Nobel y en otro presentó la teoría especial de la relatividad). Recordemos que el movimiento browniano, como veremos más adelante, es el movimiento de una partícula de polen que flota sobre un líquido, observado al microscopio, que se presenta como errático con cambios de dirección continuos en su desplazamiento, aparentemente aleatorios. Este movimiento fue descrito por primera vez por el botánico Robert Brown en 1828. Brown propuso que el movimiento era causado por el continuo impacto de moléculas del líquido sobre el grano de polen y no por el comportamiento vivo de éste.

Queda claro después de lo que acabamos de decir, que los incrementos del proceso, es decir las diferencias  $X_{t+h} - X_t$  para un incremento de tiempo  $h$  van a jugar un papel clave en la teoría. Lo que Bachelier para los precios y Einstein para la velocidad de una partícula propusieron, es que estos incrementos son independientes e idénticamente distribuidos con ley normal centrada. En nuestro caso nos interesaremos evidentemente por incrementos diarios.

La Tesis de Bachelier fue revolucionaria, pero, contrariamente a lo que pudiese parecer, bastante ignorada y olvidada. La aplicación al análisis estadístico de los mercados languideció, con la excepción del trabajo de Holbrook y Cowles en los años 30, hasta finales de la década de los 40. Los avances entonces fueron rápidos. Un cuerpo de trabajo que se convirtió en la base de la *HME* fue seleccionado mediante Cootner en su clásico volumen "The random character of Stock Market Prices", publicado en 1964. La antología de Cootner, es el

estándar seguido durante la primera edad de oro del análisis cuantitativo. Trata estrictamente sobre las características del mercado.

Durante las décadas comprendidas entre los años 20 y 40, el análisis de los mercados fue dominado por los fundamentalistas (seguidores de Graham y Dodd) y los tecnicistas (o analistas técnicos, seguidores de Magee). En los 50 se añadió un tercero los conocidos como cuantitativos (o analistas cuantitativos, seguidores de Bachelier).

Por naturaleza, los cuantitativos simpatizan más con los fundamentalistas que los tecnicistas, debido al hecho de que los fundamentalistas asumen que los inversores son racionales, en el sentido de que así se reafirman en sus conclusiones. Los tecnicistas asumen que el mercado se mueve o está guiado por la emoción, o espíritus animales, tal y como afirmó Keynes.

Pero, la hipótesis de que los precios del capital siguen un camino aleatorio se consolidó gracias a Osborne (1959), en un planteamiento formal sobre el movimiento browniano. Osborne en 1959 fue más allá de Bachelier y propuso que lo que podíamos suponer con incrementos independientes e idénticamente distribuidos era la serie de los logaritmos de los precios. En efecto, cualquier aproximación ingenua al problema se percata del hecho que las variaciones de precio dependen del precio absoluto. Lo importante no es la variación en el precio, sino el porcentaje de variación del precio en un determinado periodo. Así pues la cantidad interesante es:

$$Y_t = \frac{X_t - X_{t-h}}{X_{t-h}} = \frac{X_t}{X_{t-h}} - 1 \approx \log\left(\frac{X_t}{X_{t-h}}\right)$$

donde la última igualdad es consecuencia del hecho de que la expresión del desarrollo de Taylor de  $\log(x)$  alrededor de  $x = 1$  es, truncada a los dos primeros términos,  $x - 1$ .

En conclusión, podemos resumir la tesis de Osborne como sigue: el proceso de logaritmos de precios de un cierto bien es un proceso con incrementos independientes y estacionarios. Por lo tanto, el paso siguiente es profundizar en los modelos de procesos con incrementos independientes y estacionarios. Observemos que en particular la serie de los incrementos diarios de un proceso con incrementos independientes y estacionarios es una serie de observaciones independientes de una cierta ley de probabilidad.

## 2.2. Procesos con incrementos independientes y estacionarios

Introduciremos, a continuación, algunas de las definiciones básicas de la teoría de procesos estocásticos. Restringiremos las definiciones a procesos a valores reales y parámetro temporal positivo.

**Definición 2.1** Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $Y_t$  definidas sobre un cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , indexadas por un parámetro temporal  $t$ .

Otro punto de vista, a menudo fecundo, es considerar un proceso estocástico como una variable aleatoria definida sobre un cierto espacio de probabilidad que elige, según una cierta ley de probabilidad, una trayectoria en un cierto conjunto de trayectorias. En lo que nos atañe, el conjunto de trayectorias es el conjunto de funciones continuas sobre  $[0, 1)$  o el conjunto de funciones continuas por la derecha y con límites por la izquierda sobre  $[0, 1)$ .

**Definición 2.2** Un proceso estocástico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  es estacionario en sentido estricto si para toda familia finita de instantes  $t_1, t_2, \dots, t_k$  y para todo número real  $s$ , las leyes conjuntas de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$  y de  $(X_{s+t_1}, \dots, X_{s+t_k})$  son las mismas.

La interpretación que debemos extraer de las definiciones anteriores es que la estructura probabilística de un proceso estocástico estacionario es invariante por traslación en el tiempo, es decir, es independiente del intervalo temporal al que nos referimos. Del teorema anterior y suponiendo que las varianzas son finitas, se desprenden las siguientes propiedades:

1. Las esperanzas son constantes:  $E[X_t] = \mu = \text{cte } \forall t \geq 0$
2. La función de covarianzas  $\gamma(t, s) = E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)]$  es invariante por traslación en el tiempo. De acuerdo con esta propiedad, podríamos considerar  $\gamma(t, s)$  como una función de la diferencia entre los instantes  $t$  y  $s$ , es decir,

$$\gamma(t, s) = \gamma(0, t - s) \quad \forall t, s \geq 0, s \leq t$$

En ese sentido se utiliza la notación  $\gamma(t, s) = \gamma(t - s)$  para representar la covarianza entre las variables aleatorias  $X_t$  y  $X_s$ .

Observemos que si un proceso es estacionario en sentido estricto cumplirá las dos propiedades anteriores, pero dado un proceso cualquiera que cumpla ambas propiedades esto no implica que deba ser estacionario en sentido estricto. Es decir, a pesar de que ambas propiedades son bastante importantes, el cumplimiento de las mismas no garantiza la invarianza de las leyes de distribución del proceso. Debemos considerar una versión un poco más sencilla de estacionariedad, ya que muchas veces verificar la condición de estacionariedad estricta en la práctica es muy difícil, salvo en el caso de un proceso gaussiano, donde el hecho de que la media y la matriz de covarianzas especíquen completamente todas las distribuciones multidimensionales, garantiza la suficiencia de estas dos propiedades para considerar al proceso como estacionario estricto. Así pues si un proceso es de segundo orden y verifica las dos propiedades anteriores se le denomina proceso estacionario en sentido débil o informalmente y en el resto de la memoria, proceso estacionario. Notemos que la condición de ser de segundo orden hace referencia a la exigencia de varianzas finitas, condición necesaria para que las dos propiedades anteriormente establecidas tengan sentido.

### 2.2.1. El movimiento browniano. Características Básicas

Mucho se ha dicho ya sobre el movimiento browniano, por ello aquí, únicamente vamos a dar unas pinceladas sobre él, destacando aquellos aspectos importantes para la total comprensión de lo que nos concierne más adelante.

Robert Brown fue el primer científico en darse cuenta que el movimiento errático de una microscópica partícula de polen era físico, y no biológico, tal y como era creído hasta la fecha. Todo está sujeto a las fluctuaciones térmicas, así moléculas, macromoléculas, virus, partículas y otros muchos componentes de mundo natural están en un movimiento incesante con colisiones aleatorias debido a la energía térmica. Una partícula bajo una temperatura absoluta  $T$  tiene, en la media, una energía cinética de  $\frac{3}{2}kT$ , donde  $k$  es la constante de Boltzman. Einstein nos demostró que esto es así independientemente del tamaño de la partícula. Particularmente, el movimiento de una partícula, como puede demostrarse observando dicho movimiento bajo un microscopio, consiste aparentemente en desplazamientos en direcciones aleatorias y con amplitud con un valor característico. Es por eso que normalmente se utiliza el término paseo aleatorio para denominar este tipo de comportamiento. Notemos que se puede considerar en particular que el desplazamiento de la partícula en un intervalo concreto es independiente del desplazamiento de la partícula en otro intervalo.

Por otro lado, incrementando la resolución temporal solamente produciríamos un paseo aleatorio similar. Es por ello que se dice que el paseo aleatorio es autosimilar, particularidad que detallaremos más adelante.

Destacaremos, para analizar, algunas propiedades del movimiento browniano que nos van a ser de utilidad de aquí en adelante. Denotamos el movimiento browniano, también denominado proceso de Bachelier o proceso Wiener, por  $B(t)$ :

- La secuencia de incrementos  $B(n+1) - B(n)$ , para  $n \geq 0$ , es una secuencia de variables aleatorias independientes gaussianas de media cero y varianza 1. Por consiguiente,  $B(n)$  es la suma acumulada de una secuencia de variables aleatorias independientes gaussianas.
- La función  $B(t)$  es continua (realmente, casi seguramente continua, pero no vamos a entrar en la discusión de ese tecnicismo).
- La secuencia  $\{B(n+1) - B(n), n \geq 0\}$  se denomina ruido blanco gaussiano en tiempo discreto.
- El movimiento browniano es un proceso autosimilar.

### 2.3. Modelización del tipo de interés

Con mucha frecuencia, las series temporales económicas se comportan siguiendo una tendencia. En ese caso el proceso no es estacionario con respecto a la media. Si lo que existe detrás de esta tendencia es una transformación simple, al tomar diferencias podemos llegar a obtener un proceso estacionario. Si la variable es heterocedástica entonces el proceso no es estacionario con respecto a la varianza. En ese caso podemos tomar transformaciones logarítmicas de los datos para obtener estacionariedad. Normalmente, lo que nos vamos a encontrar son combinaciones de ambos métodos como la transformación  $\frac{1}{2} \log(x_t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(x_t) &= \frac{1}{2} \log(x_t) - \frac{1}{2} \log(x_{t-1}) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{x_t}{x_{t-1}} \\ &= \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \right) \\ &\approx \frac{1}{4} \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \end{aligned}$$

En el último paso, debido al hecho de que consideramos  $x$  muy pequeña, por tanto muy cercana a cero, podemos aproximar la función  $\log(1+x)$  por su desarrollo de Taylor en el origen truncado en el primer orden, obteniendo  $x$ .

Pero en caso de series del tipo de interés, el asunto es un poco más complejo. Para verlo vamos a denotar el proceso estocástico modelo de cualquiera de nuestras series temporales como  $r_t(\theta), t \geq 0$  donde  $\theta$  denota el plazo medido en años y  $t$  el día o el instante. Por lo tanto, un préstamo de una cantidad unitaria, hoy (día  $t$ ), se convierte en una cantidad  $e^{\theta r_t(\theta)}$  en la fecha  $t + \theta$ , donde  $\theta$  se expresa en años. Visto de otra forma, el precio de un rendimiento de cantidad unitaria, en la fecha  $t + \theta$ , viene dado por  $e^{-\theta r_t(\theta)}$ . Recordemos que en la práctica se aproxima, la función exponencial  $e^x$ , por los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor, obteniendo  $1 + x$ .

Entonces tenemos la siguiente expresión para nuestros procesos:

$$R_t(\theta) = \frac{1}{\theta} \log(P_t(\theta))$$

donde  $P_t(\theta)$  es el precio hoy ( $t$ ) de un bono cupón cero que devuelve la unidad monetaria en  $t + \theta$ .

Por lo tanto nuestros datos son observaciones equiespaciadas de un proceso de logaritmo de precios: los precios de bonos cupón cero. Así pues la tesis de Osborne se traduce en nuestro caso, dado que  $\frac{1}{\theta}$  es una constante, en suponer que la serie de los incrementos diarios del tipo de interés nominal  $\{y_i, i \geq 1\}$  donde  $y_i = x_i - x_{i-1}$ , es una serie de datos independientes e idénticamente distribuidos.

Llegados a este punto cabe hacer la observación que nuestros datos  $x_i$  no son datos observados directamente, como por ejemplo datos de cierre, sino que se trata de promedios diarios. De todas maneras no vamos a tener en consideración este particular y creemos que su influencia sobre las conclusiones no les resta a estas, validez.

Observemos que  $R_t(\theta)$  puede verse como un proceso que depende de dos variables. Fijada  $\theta$  tenemos la serie del tipo de interés nominal a plazo  $\theta$  años. Si en cambio fijamos  $t$ , tenemos la función  $R_t(\cdot)$  que indica los tipos de interés a distintos plazos en el día  $t$ . Se trata pues de la llamada estructura temporal del tipo de interés en esa fecha.

Nuestros datos son datos de tipo de interés a corto plazo, ya que todos los plazos considerados son plazos inferiores o iguales al año. Sabemos ya desde los años 70 que un modelo de proceso de incrementos independientes e idént-

ticamente distribuidos no es adecuado. Comprobaremos en este capítulo que efectivamente no lo es.

En efecto, en términos de ecuaciones diferenciales estocásticas, suponiendo un modelo de trayectorias continuas, si el tipo de interés a corto tuviera incrementos independientes e idénticamente distribuidos la ecuación estocástica correspondiente, para  $r(t) = R_t(\theta)$  con  $\theta$  fijado, sería,

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , y  $W$  es el movimiento browniano standard. El modelo más clásico es el modelo de Vasicek que supone como coeficiente de deriva  $c(\mu | r_t)$  en vez de  $\mu$ . Para una visión general de la modelización estocástica del tipo de interés se puede consultar: Rebonato (1996); Fontanals y Galisteo (1999) y Fontanals, Lacayo y Vives (2000).

En conclusión y siguiendo los planteamientos expuestos, podemos considerar de momento que al trabajar con logaritmos neperianos de precios, los incrementos son variables *iid*, y particularizando un poco más, variables gaussianas.

Tomaremos pues primeras diferencias de nuestros datos, ya que siguiendo lo expuesto parece lo lógico y esas serán las series temporales sobre las que trabajaremos. Para confirmar la consideración de tomar primeras diferencias hemos realizado el test de raíces unitarias aumentado de Dickey-Fuller, presentado en Dickey y Fuller (1979), y como resultado sobre la serie inicial hemos detectado la existencia de una raíz unitaria. En consecuencia, al diferenciar la serie inicial obtenemos una nueva serie que será estacionaria en media. Esto último no podemos asegurarlo totalmente, ya que el test aumentado de Dickey-Fuller únicamente comprueba el caso de estacionariedad en media ajustando un modelo autorregresivo, singular, por lo que no es un método de contraste de la estacionariedad en términos genéricos. Además, no queremos entrar en el tema de asegurar la estacionariedad de la serie ya que nos llevaría demasiado tiempo, por lo que a efectos de la presente consideraremos que la serie después de tomar diferencias, es estacionaria en media. Sino, los modelos que ajustemos no nos servirán y volveremos a este punto de partida considerando posibles modelos que consideren la no estacionariedad de la serie. Con respecto a la estacionariedad en varianza, únicamente decir que de momento supondremos que las series lo son.

Las gráficas de las series de incrementos o series de primeras diferencias son las siguientes. Notemos que presentamos dos gráficas para cada serie, a distinta escala. La primera recoge la serie al completo y la segunda es una ampliación



del rango  $[-1,1]$  que permite observar con detalle las fluctuaciones diarias.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 1 día.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 1 semana.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 15 días.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 1 mes.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 2 meses.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 3 meses.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 6 meses.

Representaciones para la serie de primeras diferencias a 1 año.

Como ya hemos comentado, el primer paso es contrastar la hipótesis de que estas series son series de observaciones independientes e idénticamente distribuidas, considerando previamente que el proceso generador de datos es continuo. Ya entraremos más adelante en consideraciones de la no continuidad, pero de momento asumimos que sí lo es. Por lo tanto, pasaremos a analizar las propiedades estadísticas de las series, que vamos a recoger en las siguientes tablas,

Estadísticos obtenidos sobre las series diferenciadas del tipo de interés a 1 día y 1 semana.

Estadísticos obtenidos sobre las series diferenciadas del tipo de interés a 15 días y 1 mes.

Estadísticos obtenidos sobre las series diferenciadas del tipo de interés a 2 meses y 3 meses.

Estadísticos obtenidos sobre las series diferenciadas del tipo de interés a 6 meses y 1 año.

Una vez observadas las tablas con las características estadísticas de cada una de las series, podemos destacar que como norma general, la media, para todas ellas, está muy cercana a 0. Podríamos decir que es prácticamente 0, lo cual viene a reforzar la hipótesis de que las series analizadas son estacionarias en media. En cuanto a la desviación estándar, decir que, como ya hemos comentado, supondremos que las series también son estacionarias en varianza. Siendo esto discutible, sin lugar a dudas, ya que observando los gráficos de las series diferenciadas, podemos sospechar que la desviación estándar no se mantiene constante para el periodo de estudio. Este planteamiento nos llevará a considerar otro tipo de modelización en el futuro, que considere este comportamiento de la varianza. Pero de momento y en orden a seguir el proceso deductivo normal, supondremos

dicha estacionariedad.

Se podrían discutir los resultados de otros estadísticos como por ejemplo los máximos, los mínimos o la asimetría, pero creemos que ninguno tienen tanta relevancia como la curtosis. Destacar respecto a este parámetro que es muy elevado. Recordemos que la curtosis en una distribución normal centrada es igual a 3 veces la desviación estándar. Vemos como, en nuestro caso particular, esto no se cumple. La curtosis es demasiado grande, por lo que seguramente los datos analizados no se comportarán según una ley gaussiana.

La importancia de la gaussianidad reside en el hecho de que la hipótesis de continuidad de las trayectorias añadida al carácter *iid* de los incrementos asegura en virtud del teorema presentado en la introducción que los incrementos diarios son una muestra de una distribución  $N(0, \sigma)$ .

Por lo tanto se trata de estudiar si los histogramas de frecuencias de nuestras muestras de incrementos son compatibles con la normalidad. Para ello realizaremos, en primer lugar, un análisis gráfico, donde compararemos los histogramas de nuestras series con la densidad de una ley normal con las mismas características estadísticas. También observaremos la representación de los gráficos  $Q_j$   $Q$ . Los gráficos  $Q_j$   $Q$  Normal y  $Q_j$   $Q$  Normal sin tendencias son gráficos que se realizan con los cuantiles de distribución de una variable respecto a los cuantiles de cualquiera de varias distribuciones de prueba, en nuestro caso la normal. Así, si la variable seleccionada coincide con la distribución de prueba, los puntos se concentran en torno a una línea recta.

Posteriormente realizaremos un contraste estadístico de normalidad para confirmar los resultados gráficos de forma numérica.

En primer lugar representaremos el histograma al completo de cada una de nuestras series. Como podrá observarse al existir un apuntamiento tan alto no podemos ver si existen colas pesadas, por lo que hemos repetido el histograma al lado, pero esta vez ampliando la imagen para destacar que existen colas pesadas,

## 2.3 Modelización del tipo de interés

33

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 día.

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 semana.

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 15 días.

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 mes.

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 2 meses.

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 3 meses.

Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 6 meses.



Histograma de frecuencias para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 año.

A continuación, presentamos los gráficos  $Q_i$  y  $Q$  de cada serie. Nótese que, para ninguna serie, coinciden con la línea recta que representaría la normalidad de la serie,

Gráfico  $Q_i$  y  $Q$  Normal y  $Q_i$  y  $Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 día.

Gráfico  $Q_i$  y  $Q$  Normal y  $Q_i$  y  $Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 semana.

Gráfico  $Q_i \sim Q$  Normal y  $Q_i \sim Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 15 días.

Gráfico  $Q_i \sim Q$  Normal y  $Q_i \sim Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 mes.

Gráfico  $Q_i \sim Q$  Normal y  $Q_i \sim Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 2 meses.

Gráfico  $Q_i$   $Q$  Normal y  $Q_i$   $Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 3 meses.

Gráfico  $Q_i$   $Q$  Normal y  $Q_i$   $Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 6 meses.

Gráfico  $Q_i$   $Q$  Normal y  $Q_i$   $Q$  Normal sin tendencia para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 año.

Como hemos podido denotar gráficamente, tenemos claro que los datos no siguen un patrón gaussiano. Para poder concluir de manera más formal que los datos no siguen una ley normal utilizaremos los conocidos contrastes estadísticos de normalidad de Jarque-Bera y de Kolmogorov-Smirnov, de los que solamente

comentaremos a grandes rasgos su funcionamiento, ya que son herramientas cuyo uso está muy extendido y se puede consultar cualquier manual de estadística para obtener más detalles.

El estadístico de Jarque-Bera, presentado en Jarque y Bera (1990), se define como,

$$JB = n \frac{\bar{A}^2}{6\hat{\mu}_3^2} + \frac{1}{24} \frac{\mu_4}{\hat{\mu}_2^2} \stackrel{H_0}{\gg} \chi^2(2) \quad (2)$$

donde  $H_0$  considera que los residuos están normalmente distribuidos y los  $\hat{\mu}_j$  son los momentos empíricos de orden  $j$ ,

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^j \quad \text{con } j = 2, 3, 4$$

Por otro lado, el test de Kolmogorov-Smirnov compara la función de distribución empírica de la muestra con una distribución teórica determinada, que será la normal en nuestro caso. El estadístico  $Z$  de Kolmogorov-Smirnov se calcula a partir de la diferencia mayor (en valor absoluto) entre las funciones de distribución empírica y teórica. Esta prueba de bondad de ajuste contrasta si las observaciones podrían razonablemente proceder de la distribución especificada.

Los resultados de ambos estadísticos, para las series analizadas, se presentan en la siguiente tabla,

## 2.4. Comentarios sobre los resultados obtenidos

Es ahora, en vista de todos los resultados obtenidos, cuando podemos concluir que la serie de incrementos del tipo de interés no se comportan según una distribución normal y por lo tanto no se cumplen las hipótesis planteadas por Bachelier y Osborne.

Notemos que la relación entre normalidad y *iid* no es inmediata. Podría pasar que aunque no sean normales, los incrementos si sean aun *iid* pero con otra distribución, como por ejemplo una distribución estable, como propone

Mandelbrot (1977). Es decir el tipo de interés podría ser un ejemplo de proceso de Lévy, es decir de proceso con incrementos *iid* pero no continuo. Esta hipótesis, como ya es conocido, es compatible con el fenómeno de las colas pesadas y apuntamiento.

Para contrastar el carácter *iid* de nuestros datos de incrementos podemos aplicar el test de Ljung-Box. A grandes rasgos este test se basa en el cálculo de los coeficientes de autocorrelación

$$r_i = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-i})}{\sqrt{\text{Var}(y_t) \text{Var}(y_{t-i})}}$$

donde  $i$  denota el orden de retardo.

La idea es la siguiente: si la serie, que suponemos estacionaria, no está autocorrelacionada, estos coeficientes serán nulos. Teniendo en cuenta esta idea se define el estadístico de Ljung-Box, presentado en Ljung y Box (1978), de la siguiente forma,

$$Q = n(n+2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i^2}{i} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(p)$$

Teniendo en cuenta que la distribución del estadístico es una  $\chi^2(p)$  se puede realizar un contraste de hipótesis, tomando como hipótesis nula la inexistencia de autocorrelación.

Para comprobar la validez del test de Ljung-Box, vamos a aplicar el test a una serie generada a partir de una simulación de 2000 observaciones de una variable  $N(0, 1)$ .

Como cabía esperar en este caso se acepta la hipótesis nula. Es decir no podemos afirmar de ninguna manera que los datos simulados estén autocorrelacionados.

A continuación realizaremos el mismo análisis sobre nuestras series de incrementos. Los resultados son los siguientes:

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 día.

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 semana.

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 15 días.

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 mes.



Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 2 meses.

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 3 meses.

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 6 meses.

Q-test o Test de Ljung-Box sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 año.

En conclusión, podemos destacar, observando los contrastes realizados, que los datos analizados están autocorrelacionados. Es decir, existe algún tipo de dependencia entre ellos.

Recordemos que lo que determina si se acepta o no la  $H_0$  es el p-value, o valor de probabilidad, asociado al estadístico. Los p-values representan el riesgo de rechazar  $H_0$ . Normalmente, se fija el nivel de significación deseado. Por ejemplo si el p-value es menor que 0,05 rechazamos  $H_0$ , si ocurre lo contrario aceptamos  $H_0$ . En todos los casos anteriores, este p-value es prácticamente cero, por lo que debemos decir que la serie tiene una alta autocorrelación.

En definitiva, detectamos una fuerte dependencia entre los datos. La intención, en una primera etapa, es eliminar esta dependencia mediante el ajuste de un modelo lineal siguiendo la metodología tradicional Box-Jenkins. Este es el objetivo del siguiente capítulo.

Por otro lado, una salida alternativa podría haber sido la eliminación de las observaciones que parecían no seguir el patrón de comportamiento de la serie. Es decir, el planteamiento de un análisis de observaciones outliers, eliminando las que se pudiesen considerar como tales. A ese respecto queremos decir que esa salida nos parecía y nos parece una salida válida en campos donde se pueda determinar que esas observaciones se deben por ejemplo a errores de medida, como podría ser en el campo de la física, pero en economía nos parece del todo inadecuada. Realizar esta criba nos parece que implica desvirtuar el carácter sensible frente a perturbaciones externas que impregna el ámbito económico. Para corroborar esta idea, baste decir que llevamos a cabo el análisis de observaciones outliers de dos maneras:

- En primer lugar consideramos outliers todas aquellas observaciones que cumplían

$$|x_j| > \mu_x + 2,5\sigma_x$$

donde  $\mu_x$  es la media de las observaciones y  $\sigma_x$  la desviación estándar. Por ejemplo en el caso de la serie de tipos a 1 día, la proporción de outliers era del 2%.

- Ampliamos ese análisis con la inclusión de otro criterio de detección de observaciones outliers, más acorde con la distribución de frecuencias de nuestra serie con apuntamiento y colas anchas, considerando como tales aquellas observaciones que cumplían

$$x > x_{0,75} + 1,5(x_{0,75} - x_{0,25})$$

$$x < x_{0,25} + 1,5(x_{0,75} - x_{0,25})$$

donde  $x_{0,25}$  es el primer cuartil (o percentil 25%) y  $x_{0,75}$  es el tercer cuartil (o percentil 75%), la diferencia entre los cuartiles expuestos,  $x_{0,75} - x_{0,25}$ ,

recibe el nombre rango intercuartil. Aproximadamente y, de nuevo, en función de la serie analizada, el número de observaciones a extraer de los datos rondaba la cifra de 16%.

Para ambos casos realizamos la extracción de las observaciones y ajustamos modelización Box-Jenkins. Para nuestra sorpresa todas las series se podían explicar a partir de un modelo  $AR(1)$ , modelo que a nuestro entender no refleja la complejidad del fenómeno analizado, aunque este es el modelo propuesto por Vasicek.

Como nota final destacar que para más información sobre criterios de selección de observaciones outliers consultar Frank y Althoen (1994).

## Capítulo 3

# Primera corrección: los modelos *ARMA*

Háblame sobre el pasado, y el futuro llegará a ser visible para mí.

Confucio

### 3.1. Modelos estocásticos lineales. Modelización Box-Jenkins

En este apartado vamos a presentar rápidamente los conceptos básicos de la modelización Box y Jenkins (1974).

El proceso  $Y$ , que modeliza los incrementos diarios, será ahora para nosotros una serie temporal de segundo orden, estacionaria y centrada. Los modelos planteados por Box-Jenkins, básicamente, intentan explicar una variable  $Y_t$  en función de su pasado y la historia de perturbaciones aleatorias.

A tenor de que este tipo de modelos son muy utilizados en la práctica, y por consiguiente son muy conocidos, nos vamos a limitar a destacar las características básicas de los mismos, ya que creemos que más importante que dar una definición de estos modelos es su correcta interpretación. Para un análisis más exhaustivo aconsejamos consultar Hamilton (1994), Brockwell y Davis (1996) y también Utzet (1992).

### 3.1.1. Modelo autorregresivo de orden $p$ , $AR(p)$

En primer lugar, vamos a destacar el modelo autorregresivo de orden  $p$ , que se puede definir como aquel modelo en el que el cambio en una variable en un momento determinado  $n$ , está linealmente correlacionado con los cambios producidos con anterioridad. Como característica principal, podemos destacar que la correlación decrece exponencialmente en función del tiempo.

En particular diremos que un proceso estacionario  $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es autorregresivo de primer orden,  $AR(1)$ , si cumple la siguiente relación,

$$Y_n = \phi Y_{n-1} + u_n \quad (3.1)$$

donde  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es un ruido *iid* y  $\phi$  es una constante que cumple  $|\phi| < 1$ . Nótese que si  $\phi = 1$  se obtendría un paseo aleatorio que es un proceso no estacionario.

Si iteramos la ecuación (3.1) obtenemos,

$$\begin{aligned} Y_n &= \phi^2 Y_{n-2} + \phi u_{n-1} + u_n \\ &\vdots \\ Y_n &= \phi^k Y_{n-k} + \phi^{k-1} u_{n-k+1} + \dots + u_n \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de estacionariedad del proceso se demuestra que

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k u_{n-k} \quad (\text{convergencia en media cuadrática}), \quad (3.2)$$

expresión que puede interpretarse como que en cada instante el proceso está causado por la contribución de todos los choques de ruido blanco anteriores. Pero, como  $|\phi| < 1$ , la contribución es menos importante a medida que estas se alejan del instante considerado. En general, un proceso estacionario que admite una representación del estilo,

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k u_k \quad (3.3)$$

con  $\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k| < \infty$  se dice que es causal.

Es fácil comprobar que  $E[Y_n] = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado la autocorrelación  $\rho_k$  tiene que cumplir la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \phi \rho_{k-1} \\ \rho(k) &= \phi^k, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Para trabajar con mayor comodidad con estos procesos, es necesario introducir el operador de retardo  $L$ , definido por,

$$LY_n = Y_{n-1}.$$

Reescribimos entonces la expresión (3.1) de la siguiente forma,

$$(1 - \phi L)Y_n = u_n$$

y si consideramos  $\phi(x) = 1 - \phi x$

$$\phi(L)Y = u.$$

El polinomio  $\phi(x) = 1 - \phi x$ , se denomina polinomio característico del proceso. Nótese que la condición  $|\phi| < 1$ , implica que la raíz del polinomio,  $\eta = \frac{1}{\phi}$ , satisface  $|\eta| < 1$  (suponiendo claro que  $\phi \neq 0$ ).

Si introducimos, ahora, los operadores de retardos iterados

$$L^k Y_n = L^{k-1}(LY_n) = Y_{n-k}$$

podremos reescribir la expresión (3.2) como,

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k L^k(u_n)$$

Nótese que, formalmente, lo que hemos hecho ha sido invertir el operador  $1 - \phi L$ , ya que como  $|\phi| < 1$ , y  $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j < \infty$ , entonces,

$$(1 - \phi y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k y^k$$

que es la suma de una progresión geométrica de razón de valor absoluto  $< 1$ .

Por otro lado, diremos que un proceso estacionario  $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es autorregresivo de orden 2 si cumple la siguiente ecuación,

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + \phi_2 Y_{n-2} + u_n$$

donde  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es ruido blanco. Es decir,  $Y_n$  es una regresión lineal sobre  $Y_{n-1}$  y  $Y_{n-2}$ . Si aplicamos el operador retardos a la anterior expresión, obtenemos,

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)Y_n = u_n$$

o también,

$$\mathcal{C}(L)Y = u$$

donde  $\mathcal{C}(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$  es el polinomio característico del proceso. Se puede comprobar que las autocorrelaciones tienen que cumplir la ecuación en diferencias,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k \geq 1 \quad (3.4)$$

Para el caso particular de  $k = 1$  y  $k = 2$  se obtienen las denominadas ecuaciones de Yule-Walker,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

(Nótese que como el proceso es real  $\rho_1 = \rho_{-1}$ ). Se trata de un sistema bilineal, es decir, dados  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , es lineal en  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , y al revés. Pero no solamente  $\rho_1$  y  $\rho_2$  pueden obtenerse en función de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , sino que la ecuación en diferencias (3.4) se puede resolver y obtener una expresión general para  $\rho_k$ , por eso,

$$1 - \phi_1 y - \phi_2 y^2 = 0$$

Si  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son las ecuaciones (reales distintas o complejas conjugadas; si tienen una raíz doble el razonamiento es similar), entonces las soluciones de (3.4) son,

$$\rho_k = a_1 \xi_1^k + a_2 \xi_2^k$$

donde  $\xi_1 = \frac{1}{\eta_1}$  y  $\xi_2 = \frac{1}{\eta_2}$ , donde  $a_1$  y  $a_2$  se determinan por las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \end{aligned}$$

para que las soluciones de  $\rho_k$  sean números razonables ( $|\rho_k| < 1$ ) es necesario que  $|\xi_1| < 1$  y  $|\xi_2| < 1$ , o equivalentemente, es necesario que las raíces del polinomio característico  $\mathcal{C}(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$  estén fuera del círculo unidad:  $|\eta_1| < 1$  y  $|\eta_2| < 1$ . Respecto a los coeficientes, todo esto se traduce en,

$$\begin{aligned} |1 - \phi_2| &< 1 \\ |\phi_1 + \phi_2| &< 1 \\ |\phi_2 - \phi_1| &< 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$



Concretando más las soluciones  $\rho_k$  se obtienen:

- Si  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son reales, entonces  $\rho_k$  es una suma de exponenciales.
- Si  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son complejos, entonces  $\rho_k$  decrece en forma sinusoidal.

Destacando, también que, bajo estas condiciones, el proceso se podrá escribir igual que en la expresión (3.3), con  $\sum_{k=0}^{p-1} |\phi_k| < 1$  (proceso causal). Se trata, de nuevo, de invertir el operador  $\phi(L)$ .

Generalizando, diremos que un proceso estacionario  $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es un proceso autorregresivo de orden  $p$  si cumple la ecuación,

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + \dots + \phi_p Y_{n-p} + u_n$$

donde  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es ruido *iid*. Análogamente a los casos anteriores esta ecuación se puede reescribir como,

$$\phi(L)Y = u$$

donde,

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \dots - \phi_p x^p$$

Las autocorrelaciones tienen que cumplir la ecuación en diferencias,

$$\phi(L)\rho_k = 0$$

que para  $k = 1, \dots, p$  se expresan como (ecuaciones de Yule-Walker):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

Razonando de igual forma que en el proceso  $AR(2)$ , para que las soluciones de la ecuación en diferencias existan, es necesario que las raíces del polinomio característico  $\phi(x)$  estén fuera del círculo unidad. También en este caso será un proceso causal.

### 3.1.2. Modelos de medias móviles $MA(q)$

Un proceso de medias móviles es aquel donde la serie resultante se obtiene a partir de una media móvil de una serie inobservable.

Diremos que un proceso estacionario  $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es un proceso de media móvil de orden  $q$  si cumple una ecuación del tipo,

$$Y_n = u_n + \theta_1 u_{n-1} + \dots + \theta_q u_{n-q}$$

donde  $u_n, n \in \mathbb{Z}$  es ruido *iid*.

Si utilizamos la expresión del operador de retardos, obtendríamos,

$$Y = \mathbb{E}(L)u$$

donde  $\mathbb{E}(x) = 1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q$ . En este punto, cabe destacar que no es necesario imponer ninguna restricción para que el proceso sea estacionario.

Si calculamos la función de autocorrelación obtenemos,

$$\rho(k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k} & \text{si } k = 0, \dots, q \\ 0 & \text{si } k > q + 1 \end{cases}$$

Si nos centramos, más concretamente, en un proceso *MA(1)*, tenemos

$$Y_n = u_n + \theta u_{n-1}$$

donde suponemos  $|\theta| < 1$ . Si iteramos inductivamente el proceso, o bien invertimos formalmente el operador  $(1 + \theta L)$ , obtenemos,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Y_{n-k} = u_n$$

Es decir, obtenemos un proceso *AR(1)* que cumple,

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\theta^k < 1$$

Se dice entonces que el proceso es invertible. La idea que hay detrás es que el efecto del pasado decrece con el tiempo. Esto implica, por otro lado, que la función de correlación parcial será siempre diferente de cero (cualquier  $Z_{n-k}$  tiene influencia directa sobre  $X_n$ ). Este razonamiento podría repetirse con cualquier media móvil *MA(q)*. Los modelos *MA(q)* son invertibles si las raíces del polinomio característico están todas fuera del círculo unitario. A partir de ahora, supondremos que todos los procesos de media móvil con los que trabajamos cumplen esta condición.

Habíamos comentado (véase expresión (3.3)) que dado un proceso *AR(p)* podíamos escribirlo como,

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k u_k$$

con  $\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k| < 1$ , es decir, como un proceso *MA(1)*. Podemos por tanto decir, aunque de forma un tanto informal, que tenemos una dualidad tipo

$$MA(q) \leftrightarrow AR(1) \leftrightarrow AR(p) \leftrightarrow MA(1)$$

lo que implicará, como veremos en el siguiente apartado, relaciones entre las funciones de autocorrelación muestral y funciones de autocorrelación muestral parcial entre cada proceso.

### 3.1.3. Modelos autorregresivos de medias móviles $ARMA(p, q)$ y modelos autorregresivos de medias móviles integrados $ARIMA(p, d, q)$

Un modelo  $ARMA(p, q)$  se presenta como una generalización de los dos anteriores. Así debemos entender el modelo  $ARMA$  como una suma de un proceso autorregresivo y un proceso de media móvil.

Diremos que un proceso estacionario  $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es un modelo autorregresivo de medias móviles  $ARMA(p, q)$  si cumple una ecuación del tipo,

$$Y_n - \phi_1 Y_{n-1} - \phi_2 Y_{n-2} - \dots - \phi_p Y_{n-p} = u_n - \theta_1 u_{n-1} - \theta_2 u_{n-2} - \dots - \theta_q u_{n-q}$$

donde  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es ruido *iid*.

Utilizando el operador de retardos se escribirá,

$$\Phi(L) Y_n = \varepsilon(L) u_n \tag{3.6}$$

donde,

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\ \varepsilon(L) &= 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q \end{aligned}$$

Supondremos que  $\Phi(L)$  y  $\varepsilon(L)$  no tienen raíces comunes y están todas fuera del círculo unidad. Así, aseguraremos la estacionariedad. Pero, el problema de la no estacionariedad puede venir por otro lado. Puede ser causada por la existencia de una raíz unitaria en  $\Phi(L)$ . En ese caso el polinomio  $\Phi(L)$  se podría reescribir de la siguiente forma,

$$\Phi(L) = (1 - L)^d \tilde{\Phi}(L) = r^d \tilde{\Phi}(L)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.6) obtendríamos un modelo  $ARMA(p-d, q)$  para  $r Y_n$ , el cual se denomina proceso  $ARIMA(p-d, d, q)$  para  $Y_n$ .

Diremos que un proceso estacionario  $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es un modelo autorregresivo de medias móviles integrado *ARIMA*( $p, d, q$ ) si cumple una ecuación del tipo,

$$r^d Y_n - \phi_1 r^{d-1} Y_{n-1} - \dots - \phi_p r^{d-p} Y_{n-p} = u_n + \theta_1 u_{n-1} + \dots + \theta_q u_{n-q}$$

donde  $\{Z_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es ruido blanco y  $d$  es el orden de integración, un número entero que determina el grado de diferenciación de la serie.

Utilizando el operador de retardos se escribirá,

$$\Phi(L) r^d Y_n = \Theta(L) u_n$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\ \Theta(L) &= 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q \end{aligned}$$

### 3.1.4. La función de autocorrelación muestral *FA*

Se denota la autocovarianza entre  $Y_n$  y  $Y_{n+k}$  como,

$$\gamma_{n, n+k} = \text{Cov}(Y_n, Y_{n+k})$$

y como los momentos no son dependientes del tiempo, debido al requerimiento de estacionariedad, el único parámetro relevante es el retardo  $k$ , y por lo tanto,

$$\gamma_{kn} = \gamma_k = \gamma_{-k}$$

En consecuencia,  $\gamma_0 = \text{Var}(Y_n)$  representa la varianza de  $Y_n$  para cada  $n$ .

Las autocorrelaciones del proceso  $Y_n$  se definen de la siguiente forma,

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(Y_n, Y_{n+k})}{\sqrt{\text{Var}(Y_n) \text{Var}(Y_{n+k})}}, \quad \text{para cualquier } n$$

y debido a la propiedad de estacionariedad del proceso se cumple que  $\rho_k = \rho_{-k}$ , pudiendo escribir la expresión teórica de la *FA* como

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

Un estimador razonable de la función de autocovarianza  $\gamma_k$  será la función de autocovarianza muestral,

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} (Y_j - \bar{Y})(Y_{j+k} - \bar{Y}), \quad k = 0, \dots, n-1$$

Para la función de autocorrelación  $\rho_k$  se utilizará,

$$\rho_k = \frac{b_k}{b_0}$$

Siendo esta función  $b_k$  la denominada función de autocorrelación muestral o empírica.

### 3.1.5. La función de autocorrelación parcial *FAP*

La función de autocorrelación parcial es necesaria como una segunda herramienta, junto con la *FA*, para ayudar a identificar el modelo de serie temporal.

Como introducción, para entender el concepto de coeficiente de correlación parcial, consideremos tres variables relacionadas según una dependencia lineal:  $X_n$ ,  $Y_n$  y  $Z_n$ . Ahora, nos podríamos preguntar cual es el coeficiente de correlación parcial entre  $Y_n$  y  $X_n$ . Para contestar a esto debemos considerar que un coeficiente de correlación parcial mide la correlación entre dos variables tras eliminar la influencia de otra variable (en nuestro ejemplo sería  $Z_n$ ). Para ello, deberemos realizar una regresión de las variables con respecto de la tercera,  $Z_n$ , y posteriormente trabajar con los residuos y obtener el coeficiente de correlación.

En efecto,

$$\begin{aligned} Y_n &= b_1 + \beta_1 Z_n \quad \varepsilon_n^Y = Y_n - b_1 - \beta_1 Z_n \\ X_n &= b_2 + \beta_2 Z_n \quad \varepsilon_n^X = X_n - b_2 - \beta_2 Z_n \end{aligned}$$

$$\rho_{Y,X}^{\alpha} = \frac{\sum \varepsilon_n^Y \varepsilon_n^X}{\sqrt{\sum (\varepsilon_n^Y)^2} \sqrt{\sum (\varepsilon_n^X)^2}}$$

La correlación parcial ( $\rho_k^{\alpha}$ ) entre  $Y_n$  y  $Y_{n-k}$  se calcula siguiendo esa idea. Si consideramos  $Y_n = f(Y_{n-1}, \dots, Y_{n-k+1})$ , tenemos

$$\rho_k^{\alpha} = \text{Corr}[Y_n - f(Y_{n-1}, \dots, Y_{n-k+1}), Y_{n-k}]$$

Si consideramos un proceso  $AR(p)$ , entonces sabemos que  $\rho_k^{\alpha} = 0$  si  $k > p$ . Esta es una propiedad importante para determinar el orden del proceso.

En efecto, si  $Y$  sigue un modelo  $AR(p)$ ,

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + \phi_2 Y_{n-2} + \dots + \phi_p Y_{n-p} + u_n$$

multiplicando por  $Y_{n_i}$  se obtiene,

$$Y_n Y_{n_i} = \phi_1 Y_{n_i-1} Y_{n_i} + \phi_2 Y_{n_i-2} Y_{n_i} + \dots + \phi_p Y_{n_i-p} Y_{n_i} + u_n Y_{n_i}$$

y tomando esperanzas,

$$\gamma_i = \phi_1 \gamma_{i-1} + \phi_2 \gamma_{i-2} + \dots + \phi_p \gamma_{i-p} \tag{3.7}$$

Finalmente, si dividimos por la varianza  $\gamma_0$ , obtenemos,

$$\rho_i = \phi_1 \rho_{i-1} + \phi_2 \rho_{i-2} + \dots + \phi_p \rho_{i-p} \tag{3.8}$$

Definimos la autocorrelación parcial de orden  $k$  para un proceso estocástico dado,  $\varphi_{kk}$ , mediante la resolución del conjunto de ecuaciones lineales en  $\varphi_{kj}$  ( $j = 1, \dots, k$ ),

$$\rho_i = \varphi_{k1} \rho_{i-1} + \varphi_{k2} \rho_{i-2} + \dots + \varphi_{kk} \rho_{i-k} \quad \text{con } i = 1, \dots, k \tag{3.9}$$

La idea es la siguiente: por ejemplo, para el caso particular de un proceso AR(1),  $k = 1$ , esto implica que solo tenemos una ecuación y un parámetro

$$\varphi_{11} = \rho_1$$

Para un proceso AR(2),  $k = 2$ , se tiene que resolver un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \varphi_{21} \rho_0 + \varphi_{22} \rho_1 \\ \rho_2 &= \varphi_{21} \rho_1 + \varphi_{22} \rho_0 \end{aligned}$$

En particular, definiremos la *FAP* mediante la serie  $\varphi_{kk} : k = 1, \dots, p$ ,  $\varphi_{kk} = 0$  para  $k > p$ , donde  $\varphi_{kk}$  es la solución del sistema de ecuaciones lineales presentado en la expresión (3.9), que podemos reescribir de forma matricial como,

$$\begin{matrix} \text{O} & \text{1} & \text{O} & & & & \text{1} & \text{O} & \text{1} \\ \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_k \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} & = & \begin{matrix} \text{O} & \text{1} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{kk} \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{para } k = 1, \dots, p$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Yule-Walker, pero únicamente se resuelve  $\varphi_{kk}$ , lo que se realiza utilizando la regla de Cramer:

$$\varphi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_{k-1} & \dots & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \rho_1 \\ \rho_{k-1} & \dots & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}} = \frac{jP_k^*j}{jP_kj}$$

Podemos decir que la *FAP* se define por la secuencia  $\varphi_{kk}$ :

$$\varphi_{kk} = \frac{jP_k^*j}{jP_kj}, \text{ para } k = 1, \dots, p \text{ y } \varphi_{kk} = 0, \text{ para } k > p$$

La estimación de la función de autocorrelación parcial se realiza mediante la utilización de las ideas de la definición que hemos dado: calcular el coeficiente de correlación entre dos variables una vez eliminada la influencia de las variables intermedias mediante regresiones lineales. Esta estimación, recibe el nombre de función de autocorrelación parcial muestral o empírica  $\hat{\varphi}_{kk}$ . En la práctica, normalmente, se utiliza algún algoritmo, por ejemplo, el algoritmo de Durbin-Levinson, a la hora de realizar los cálculos.

### 3.1.6. Ejemplos de *FA* y *FAP* teóricas para algunos modelos de series temporales

El modelo *AR*(1)

Este modelo viene definido por la expresión

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + u_n \text{ con } |\phi_1| < 1$$

A partir de la expresión (3.7), podemos afirmar que la expresión siguiente es válida:

$$\gamma_i = \phi_1 \gamma_{i-1} \text{ y por lo tanto } \gamma_i = \phi_1^i \gamma_0$$

Así podemos escribir la *FA* como,

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0} = \phi_1^i,$$

que es una función que decrece geoméricamente.

Si determinamos la *FAP* para  $p = 1$  se tiene  $k = i = 1$ , y

$$\varphi_{11} = \frac{j\rho_1j}{j1j} = \rho_1$$

estando claro que  $\varphi_{kk} = 0$  para  $k > 1$ . Por ejemplo:

$$\varphi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0, \quad (\phi_1 \neq 1)$$

En conclusión, para un modelo *AR*(1) la *FAP* tiene un único valor. Como puede observarse, por ejemplo, en la siguiente ...gura:

### El modelo *AR*(2)

La expresión de este modelo es la siguiente:

$$Y_n = \phi_1 Y_{n-1} + \phi_2 Y_{n-2} + u_n$$

con las restricciones de estacionariedad sobre los parámetros dadas en (3.5).

Utilizaremos la expresión (3.8) y calcularemos la *FA*. Se tiene:

$$\rho_0 = 1, \text{ entonces:}$$

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_{i-1} \quad \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2, \text{ y siguiendo esta relación}$$

$$\rho_i = \phi_1 \rho_{i-1} + \phi_2 \rho_{i-2},$$



función que decrece a cero para  $i \neq 1$ .

Respecto a la  $FA$ , para  $p = 2$ , se tiene  $k = 1, 2$ ,  $i = 1, 2$  y

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \frac{j\rho_1j}{j1j} = \frac{\phi_1}{1 - \rho_1} \\ \varphi_{22} &= \frac{\begin{matrix} -\rho_1 & \rho_2 \\ 1 & \rho_1 \end{matrix}}{\begin{matrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{matrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \dots = \phi_2 \\ \varphi_{kk} &= 0, \text{ para } k > 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la  $FA$  de un  $AR(2)$  tiene únicamente dos valores, como podemos ver en la siguiente figura:

### El modelo $AR(p)$

Generalizando lo obtenido para los modelos  $AR(1)$  y  $AR(2)$ , diremos que para el caso de un modelo  $AR(p)$ , la  $FA$  decrece asintóticamente hacia el cero cuando  $i \neq 1$ , y con respecto a la  $FAP$  diremos que se corta después de  $p$  retardos.

### El modelo $MA(1)$

Sea el modelo  $MA(1)$ :

$$Y_n = u_n + \theta_1 u_{n-1}, \text{ con } |j\theta_1j| < 1$$

Para obtener la  $FAP$  empezaremos considerando la siguiente relación,

$$\gamma_i = cov(Y_n, Y_{n-i}) = E[(u_n + \theta_1 u_{n-1})(u_{n-i} + \theta_1 u_{n-i-1})]$$

A partir de aquí es fácil ver que,

$$\begin{aligned} i = 0! \quad \gamma_0 &= \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 \\ i = 1! \quad \gamma_1 &= \theta_1 \sigma_u^2 \\ i = 2! \quad \gamma_2 &= 0, \text{ o de forma más general:} \\ i \geq 2! \quad \gamma_i &= 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que en términos de coeficientes de autocorrelación tengamos,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ \rho_i &= 0 \text{ para } i \geq 2 \end{aligned}$$

Llegados a este punto es importante destacar que  $|\rho_1| < \frac{1}{2}$  debido al hecho de que  $|\theta_1| < 1$ . Siendo esto siempre válido cuando nos encontremos con un modelo *MA(1)*. Para obtener la *FAP*, nos referiremos a la literatura sobre el tema, donde se expone que la *FAP* tiene la siguiente expresión,

$$\varphi_{22} = \frac{(1 - \theta_1^2)^{k+1} \theta_1^k \sigma_u^2}{1 - \theta_1^{2(k+1)}},$$

función que decrece hacia el cero. Gráficamente, el comportamiento de ambas funciones podría representarse de la siguiente forma,

El modelo *MA(2)*

El modelo *MA(2)* es:

$$Y_n = u_n + \theta_1 u_{n-1} + \theta_2 u_{n-2}$$

Seguidamente, expondremos un resumen de algunos resultados, pero para mayor detalle se puede consultar cualquier manual sobre series temporales, donde se detalla con mayor particularidad el tema.

Para la determinación de la *FAP* se analizan, de nuevo, las autocovarianzas:

$$\gamma_i = \text{cov}(Y_n, Y_{n-i}) = E[(u_n + \theta_1 u_{n-1} + \theta_2 u_{n-2})(u_{n-i} + \theta_1 u_{n-i-1} + \theta_2 u_{n-i-2})]$$

obteniéndose en particular

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \sigma_u^2 \\ i = 1 & \quad \gamma_1 = (\theta_1 + \theta_2 \theta_1) \sigma_u^2 \\ i = 2 & \quad \gamma_2 = \theta_2 \sigma_u^2 \\ i \geq 3 & \quad \gamma_i = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \rho_0 & = 1 \\ \rho_1 & = \frac{\theta_1(1 + \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_2 & = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_i & = 0 \text{ para } i \geq 3 \end{aligned}$$

Destacar que para un *MA(2)* es posible que  $\rho_1 > \frac{1}{2}$ . La *FAP* será una función que decae hacia cero. Un ejemplo de ambas funciones puede verse en la siguiente gráfica:

El modelo *ARMA*( $p, q$ )

Definimos el modelo *ARMA*( $p, q$ ) como,

$$\phi(L)Y_n = \theta(L)u_n,$$

siendo este una suma o combinación de un modelo *AR*( $p$ ) y un modelo *MA*( $q$ ). Por consiguiente, las propiedades del mismo serán también una suma de los dos anteriores. En particular las propiedades se pueden expresar según las siguientes reglas:

- La *FA* y *FAP* son una mezcla de exponenciales y/o ondas sinusoidales.
- La *FA* se parece a la de un proceso *AR*( $p$ ) después de  $q + p$  retardos, mientras que la *FAP* se parece a una *FAP* obtenida de un proceso *MA*( $q$ ) tras  $p + q$  retardos. En la práctica, se considera la estimación de los modelos *ARMA*( $p, q$ ) cuando las representaciones gráficas, de la *FA* y la *FAP*, no se parecen a las suministradas por los patrones aislados de *AR*( $p$ ) o *MA*( $q$ ).

### 3.2. Estimación de modelos *ARMA*( $p, q$ )

En este apartado daremos una pincelada y discutiremos la metodología de Box-Jenkins, metodología, cuyo resultado es llegar a obtener una estimación del modelo que describe los datos observados. Previamente, y siguiendo las indicaciones de Box y Jenkins (1976), debemos comprobar la estacionariedad de la serie. Por lo tanto, considerar la necesidad de una transformación en diferencias o de una transformación logarítmica o bien ambas. Particularmente, en nuestro caso, puesto que ya se ha tratado el tema de la estacionariedad en el capítulo anterior, consideraremos que nuestra serie es estacionaria y seguiremos con los pasos propuestos por Box-Jenkins para la estimación del modelo *ARMA*.

El primer paso esencial en la estimación de modelos *ARMA* consiste en el análisis de las correlaciones. Intentaremos así identificar, teniendo en cuenta la forma de las funciones de autocorrelación, el modelo de comportamiento de nuestros datos.

Posteriormente estimaremos el número y valor de los parámetros  $p$  y  $q$ . Tanto la *FA* como la *FAP* son necesarias para la identificación del modelo, ya que como hemos denotado en el apartado anterior, la relación entre la *FA*, la *FAP* y el modelo de serie temporal teórico es única. Pero, para realizar

correctamente el análisis de las correlaciones, deberemos aislar los valores de  $\hat{\rho}_k$  que sean significativamente diferentes de cero. Para ello, utilizaremos lo que se conoce como el test de intervalo  $0 \leq 2 \hat{\rho}_k \leq se(\hat{\rho}_k)$ , siendo  $se(\hat{\rho}_k)$  el error estándar del parámetro  $\hat{\rho}_k$ , que aproximadamente es,

$$se(\hat{\rho}_k) = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}{n} \sqrt{1 + 2 \sum_{i=1}^k \hat{\rho}_i^2}$$

bajo la hipótesis nula que  $\rho_i = 0$ , para  $i > k - 1$ .

A continuación presentamos el análisis de la  $FA$  y la  $FAP$  para las series objeto de nuestro estudio. Intentaremos determinar el modelo que debemos ajustar para cada caso.

En primer lugar, si estudiamos la *FAP* y la *FA* para la serie de diferencias de 1 día, podemos destacar que parece ser, y parece ser porque deberemos confirmarlo con mayor seguridad, que el mejor modelo que estimaría el comportamiento de la serie sería un *ARMA*, ya que vemos que ambas funciones decrecen exponencialmente. En la segunda está muy claro, mientras que en la primera, podemos observar que en los retardos 4, 5, 12 y 13 los coeficientes son significativos. El determinar el número de parámetros para cada caso es algo que tendremos que hacer a posteriori con un análisis más concreto.

Representación gráfica de la *FA* y la *FAP* para la serie de diferencias de 1 día.

Mediante el análisis de la *FAP* y la *FAM* para todas las demás series de diferencias analizadas llegamos a la misma conclusión: el mejor modelo es un *ARMA*, ya que las gráficas no se ajustan a ningún patrón aislado de *AR* o *MA*.

Representación gráfica de la *FA* y la *FAP* para la serie de diferencias de 1 semana.

Representación gráfica de la  $FA$  y la  $FAP$  para la serie de diferencias de 15 días.

Representación gráfica de la  $FA$  y la  $FAP$  para la serie de diferencias de 1 mes.

Representación gráfica de la  $FA$  y la  $FAP$  para la serie de diferencias de 2 meses.

Representación gráfica de la *FA* y la *FAP* para la serie de diferencias de 3 meses.

Representación gráfica de la *FA* y la *FAP* para la serie de diferencias de 6 meses.

Representación gráfica de la *FA* y la *FAP* para la serie de diferencias de 1 año.



Recapitulando, una vez estudiadas las autocorrelaciones para cada una de nuestras series temporales y visto que, en la mayoría de casos, el comportamiento no se ajusta a ningún patrón pre...jado de modelo  $AR(p)$  ni de  $MA(q)$ , podemos considerar que el mejor modelo sería una combinación de los dos. Por tanto, el modelo a estimar será un  $ARMA(p, q)$ . Pero, podemos destacar que es un análisis poco pragmático, de ahí que debamos de...nir otra metodología en la detección de los parámetros de los modelos.

Llegados a este punto, y considerando que la determinación del número de parámetros  $p$  y  $q$  no puede hacerse únicamente mediante la observación de las autocorrelaciones, deberemos, por tanto, recurrir a alguna herramienta que nos permita realizar una selección de entre todos los modelos existentes, de aquel que tenga mejores propiedades. Para ello, existen una gran variedad de criterios de selección que pueden utilizarse para la designación de un modelo apropiado. Básicamente, el mecanismo de selección de modelos mediante estos criterios, consiste en proponer unos valores iniciales de  $p$  y de  $q$ , estimar el modelo  $ARMA$  resultante y calcular el error estimado de la varianza del modelo propuesto,  $\mathbf{b}^2$ , y estructurar una medida en base a este valor. Por ejemplo, el más popular es el criterio de información de Akaike ( $CIA$ ), propuesto en Akaike (1974), y que se de...ne como ,

$$CIA(p, q) = \log \mathbf{b}^2 + \frac{2(p + q)}{N},$$

donde  $N$  es el número de observaciones.

Una vez calculados un número su...ciente de modelos  $ARMA$ , se considerará el mejor modelo aquel que posea un valor del  $CIA$  más pequeño.

Pero, tal y como hemos comentado, el criterio *CIA* no es el único. Un criterio que tiene mejores propiedades, como se puede comprobar en Mills (1999) o también en Opong et al. (1999), es el criterio de Schwarz (*CS*), presentado en Schwarz (1978) y definido como,

$$CS(p, q) = \log \mathbf{b}^2 + \frac{(p+q)}{N} \log N$$

A parte de tener mejores propiedades, penaliza más la inclusión de un mayor número de parámetros en el modelo propuesto, por lo que evita problemas de sobreparametrización y, por consiguiente, errores en la estimación de modelos con un número alto de parámetros. Para la estimación de los parámetros debemos considerar que, como hemos requerido la invertibilidad en el modelo, podemos reescribir la expresión (3.6) de la siguiente forma

$$u_t = \mathbf{E}^{-1}(L) \odot (L) Y_t$$

y podemos hallar aquellos valores de los parámetros que minimizan  $\mathbf{P} u_t^2$ .

Los resultados obtenidos por ambos criterios pueden observarse en las siguientes tablas. En primer lugar los resultados obtenidos mediante el criterio *CIA* y a continuación los obtenidos con el criterio *CS*. Hemos considerado valores desde 0 hasta 10 tanto para  $p$  como para  $q$ . Lo que supone, para cada una de las 8 series, el cálculo de 120 modelos *ARMA*, de entre los cuales estará el modelo que estimaremos.

Según criterio  $CIA$  debemos estimar un modelo  $ARMA(8, 5)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 1 día y un modelo  $ARMA(9, 7)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 1 semana.

Según criterio *CIA* debemos estimar un modelo *ARMA*(10, 10) para la serie del tipo de interés interbancario a 15 días y un modelo *ARMA*(8, 10) para la serie del tipo de interés interbancario a 1 mes.

Según criterio  $CIA$  debemos estimar un modelo  $ARMA(9, 9)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 2 meses y un modelo  $ARMA(10, 8)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 3 meses.

3. Primera corrección: Los modelos *ARMA*

CIA - Serie: 1 año	MA											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	X											
1	-3735.9363	-3735.9363	-3743.5747	-3746.0649	-3744.1443	-3744.6133	-3745.4447	-3744.4186	-3743.118	-3741.1747	-3743.6541	
2	-3743.1488	-3749.7727	-3747.9675	-3746.167	-3751.1782	-3746.7215	-3745.7277	-3742.6941	-3741.1249	-3747.0746	-3748.5362	
3	-3747.2513	-3745.2598	-3746.159	-3751.749	-3745.4206	-3755.1403	-3739.9	-3741.7949	-3739.9049	-3736.8678	-3744.6466	
4	-3745.2657	-3743.4946	-3751.2107	-3750.1674	-3745.0824	-3747.9926	-3749.6261	-3745.4064	-3737.7691	-3744.0664	-3755.1131	
5	-3745.0716	-3751.0624	-3745.5243	-3750.5445	-3747.5702	-3757.2349	-3747.3222	-3741.3894	-3751.3665	-3739.9952	-3751.4669	
6	-3745.6792	-3745.3532	-3745.6133	-3740.5963	-3749.9756	-3757.8893	-3741.9374	-3744.478	-3753.1546	-3748.8866	-3754.6324	
7	-3745.0864	-3743.352	-3742.9884	-3748.0488	-3742.9153	-3741.1636	-3745.5204	-3759.875	-3757.6226	-3743.2406	-3753.2469	
8	-3743.7902	-3741.0104	-3744.6166	-3736.4062	-3747.9122	-3746.6764	-3737.8696	-3752.6015	-3757.9774	-3754.2797	-3748.0912	
9	-3741.904	-3741.2218	-3740.7978	-3744.2635	-3743.5478	-3752.8926	-3745.3391	-3755.7819	-3752.8291	-3732.0759	-3747.3047	
10	-3745.4143	-3747.4591	-3744.1518	-3754.296	-3753.5716	-3755.9245	-3746.0887	-3747.195	-3748.4183	-3746.4666	-3757.3506	
Miramos de columnas	-3747.2513	-3751.0624	-3754.6133	-3754.296	-3753.5716	-3757.8893	-3755.5178	-3759.875	-3757.6226	-3751.2797	-3757.3506	

Según criterio *CIA* debemos estimar un modelo *ARMA*(3, 5) para la serie del tipo de interés interbancario a 6 meses y un modelo *ARMA*(7, 7) para la serie del tipo de interés interbancario a 1 año.

CS - Serie: 1 día		MA									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	X	3825.6219	3822.28	3830.0519	3835.1002	3832.8027	3839.9746	3843.9018	3844.2866	3845.4159	3855.2513
1		4127.0363	3822.5414	3829.6989	<b>3819.6113</b>	3845.8886	3834.5655	3855.5942	3846.7258	3854.6443	3862.564
2		3926.3427	3830.3679	3837.7774	3843.9836	3846.4673	3833.9808	3842.7837	3847.8739	3854.6458	3869.333
3		3868.1712	3823.783	3845.1103	3846.3703	3834.6742	3841.6698	3849.5413	3854.2877	3861.8744	3870.6534
4		3864.7065	3836.7967	3826.8502	3834.1977	3847.6773	3849.3488	3856.8112	3858.9109	3877.2172	3878.9012
5		3857.1927	3826.6624	3834.8852	3842.4196	3849.5776	3857.2379	3873.1544	3884.4444	3877.9049	3881.1432
6		3868.4467	3834.0865	3842.4682	3848.8326	3855.1147	3857.4319	3873.581	3880.4202	3876.3654	3887.0987
7		3864.7928	3841.8986	3849.5297	3857.0363	3856.8744	3867.8911	3877.951	3884.8833	3887.1171	3892.6216
8		3870.6653	3846.4543	3856.3019	3865.3682	3871.5023	3863.3781	3860.6204	3865.7385	3892.4659	3897.3727
9		3875.7274	3854.9688	3862.4621	<b>3868.018</b>	3879.1875	3880.7726	<b>3891.713</b>	3892.3052	3901.8422	3914.6247
10		3878.7154	3862.3418	3869.9974	3877.3091	3885.3194	3883.1205	3891.3026	3901.0704	3906.277	3921.1217
Mínimos de columnas		3857.1927	3822.5414	3822.28	<b>3819.6113</b>	3834.6742	3826.9301	3834.5655	3843.9018	3844.2866	3845.4159

CS - Serie: 1 semana		MA									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	X	-1379.6488	-1372.5995	-1389.9001	-1388.4681	-1391.0073	-1385.7203	-1388.9907	-1384.7625	-1384.3129	-1379.7287
1		-1379.0774	-1371.8277	-1392.8091	-1385.0622	-1387.1428	-1383.8667	-1385.8776	-1388.8048	-1380.9036	-1371.8713
2		-1374.1959	-1384.3132	-1391.8967	-1390.8887	-1388.8988	-1373.8526	-1395.2161	-1388.8888	-1381.0022	-1383.1628
3		-1391.1658	-1383.5325	-1389.1189	-1400.7787	-1386.8266	-1388.6051	-1388.2895	-1380.8476	-1382.6589	-1376.1566
4		-1383.8614	-1377.7872	-1389.2992	-1386.0894	-1380.4104	-1381.0617	-1375.7845	-1388.5774	-1389.4542	-1387.7918
5		-1386.836	-1380.9811	-1375.441	-1389.8888	-1387.7138	-1375.6636	-1400.9566	-1383.276	-1386.4584	-1382.0521
6		-1384.5736	-1400.0816	-1392.151	-1385.2653	-1392.8782	-1364.1895	-1382.0549	-1385.9363	-1368.5689	-1373.7855
7		-1384.8216	-1382.2216	-1384.9286	-1377.1612	-1364.9589	-1389.7346	-1385.41	-1374.8908	-1381.7375	-1374.9122
8		-1377.2606	-1383.9125	-1378.1803	-1372.6864	-1370.2467	-1366.4644	-1364.7006	-1346.6662	-1366.9544	-1363.3639
9		-1375.8191	-1378.6264	-1391.0441	-1372.626	-1382.8128	-1374.6241	-1379.0009	-1353.9063	-1340.5685	-1344.8899
10		-1374.5888	-1366.968	-1383.7865	-1375.5312	-1369.9126	-1373.7689	-1345.7818	-1371.2929	-1364.1491	-1357.156
Mínimos de columnas		-1391.1658	-1400.0816	-1392.8091	-1400.7787	-1388.8988	-1391.0073	-1385.8776	-1382.6589	-1385.0384	-1389.6989

Según criterio  $CS$  debemos estimar un modelo  $ARMA(1, 3)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 1 día y un modelo  $ARMA(1, 6)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 1 semana.

CS - Serie: 15 días		MA									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-922.113	-923.17632	-915.52183	-909.52785	-909.33126	-906.36462	-946.70521	-939.11107	-932.39923	-934.32134	-936.53997
1	-915.13274	-915.78877	-925.22512	-910.94705	-921.18326	-895.89449	-939.01814	-931.30523	-944.35822	-937.91338	-930.80087
2	-907.66613	-916.67236	-900.31261	-957.65935	-942.28328	-941.23169	-936.55971	-939.4231	-933.90416	-946.06443	-921.84946
3	-911.86727	-930.64981	-925.10523	-940.88392	-941.26113	-887.94712	-944.07405	-936.25489	-936.44801	-933.48347	-935.08335
4	-913.50655	-928.19352	-926.99849	-946.9384	-923.20399	-947.1318	-935.05816	-960.85751	-918.73404	-931.15085	-927.89309
5	-949.72128	-942.16046	-934.47884	-926.7032	-944.50221	-952.31589	-938.84774	-962.50231	-935.21795	-922.241	-938.36934
6	-942.18151	-934.26618	-932.60664	-927.89885	-941.43937	-954.82353	-951.83039	-943.15345	-935.77535	-942.64948	-934.63961
7	-934.28548	-933.49059	-943.13767	-937.28601	-919.00772	-933.24493	-922.3837	-894.28869	-941.34777	-931.00987	-921.52737
8	-927.52316	-929.97789	-915.78273	-907.17905	-904.50022	-931.89593	-925.40834	-935.97252	-931.35014	-931.56859	-925.73321
9	-920.36891	-919.52876	-923.0528	-907.80849	-907.51209	-945.38877	-927.70995	-936.91501	-917.96854	-938.8065	-929.54672
10	-949.72128	-942.16046	-943.13767	-957.6885	-944.50221	-954.82353	-938.84774	-962.50231	-944.35822	-946.06443	-938.36934
Mínimos de columnas											

CS - Serie: 1 mes		MA									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-3087.0511	-3094.3764	-3073.9131	-3093.7191	-3076.2965	-3068.8806	-3075.7393	-3067.3928	-3090.4983	-3081.9627	-3079.3905
1	-3091.6411	-3087.7907	-3097.3242	-3098.4967	-3100.264	-3092.1064	-3074.5256	-3081.2163	-3075.7233	-3065.5802	-3068.0739
2	-3090.6026	-3099.696	-3097.3626	-3099.2872	-3092.4203	-3084.5401	-3081.9394	-3077.1826	-3070.0609	-3073.4018	-3067.1075
3	-3103.2468	-3086.1589	-3080.548	-3093.0813	-3084.2864	-3081.8031	-3069.3293	-3068.587	-3066.794	-3049.5472	-3068.7197
4	-3097.8843	-3090.7502	-3087.1746	-3085.62	-3089.0016	-3088.9969	-3068.0813	-3069.2152	-3067.478	-3071.401	-3046.6437
5	-3090.3195	-3084.3764	-3073.9131	-3093.7191	-3076.2965	-3068.8806	-3075.7393	-3067.3928	-3090.4983	-3081.9627	-3079.3905
6	-3083.2628	-3087.1904	-3083.664	-3087.9153	-3069.3705	-3078.7464	-3076.3255	-3080.773	-3076.7654	-3070.446	-3064.8966
7	-3080.864	-3073.7745	-3073.2175	-3068.6146	-3058.2078	-3067.4815	-3067.1162	-3076.9942	-3087.9086	-3076.2852	-3061.395
8	-3072.9592	-3069.2673	-3069.1266	-3062.7207	-3065.0182	-3063.4752	-3064.1129	-3076.4461	-3071.6361	-3060.178	-3091.527
9	-3071.1632	-3063.2408	-3058.6911	-3052.7736	-3057.9575	-3053.6336	-3073.738	-3072.0469	-3072.738	-3052.132	-3040.2065
10	-3063.3059	-3056.3034	-3071.6549	-3052.8793	-3099.7237	-3073.9226	-3063.7231	-3067.4331	-3062.5326	-3060.6847	-3029.1103
Mínimos de columnas	-3103.2468	-3099.696	-3097.3626	-3104.0824	-3100.264	-3092.1064	-3082.631	-3083.0192	-3090.4983	-3081.9627	-3091.527

Según criterio *CS* debemos estimar un modelo *ARMA*(6, 6) para la serie del tipo de interés interbancario a 15 días y un modelo *ARMA*(0, 3) para la serie del tipo de interés interbancario a 1 mes.



CS - Serie: 2 meses		MA										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	X	-2421.5302	-2419.6229	-2414.6471	-2405.9096	-2402.6286	-2397.4111	-2389.6929	-2387.3813	-2381.9645	-2378.2687	
1		-2410.6918	-2417.9885	-2413.6793	-2406.9051	-2401.2469	-2393.1255	-2385.91	-2386.9885	-2379.2253	-2372.5543	
2		<b>-2423.5288</b>	-2414.9161	-2408.2588	-2414.0855	-2398.0317	-2390.2924	-2383.9278	-2387.024	-2379.2121	-2371.4796	
3		-2414.8674	-2415.2624	-2401.1245	-2408.2747	-2389.8986	-2380.6106	-2407.4551	-2389.8622	-2382.3874	-2374.8438	
4		-2407.8676	-2400.2698	-2401.2909	-2390.3941	-2385.6805	-2388.0156	-2378.1243	-2382.4169	-2375.1628	-2364.1838	
5		-2400.9916	-2406.1707	-2390.0468	-2390.8426	-2388.0627	-2383.2028	-2382.0902	-2385.7652	-2381.9688	-2378.1272	
6		-2386.8522	-2388.7571	-2385.3864	-2404.1888	-2379.343	-2383.1547	-2385.1682	-2374.6489	-2369.7706	-2374.8901	
7		-2388.6346	-2381.1362	-2387.6812	-2379.9602	-2383.5418	-2384.5053	-2379.0289	-2377.6096	-2367.5168	-2364.1923	
8		-2393.4112	-2385.0784	-2377.2918	-2392.6136	-2380.116	-2373.9552	-2371.901	-2362.6636	-2354.9617	-2333.8372	
9		-2376.2586	-2377.2672	-2372.7388	-2386.0632	-2377.1229	-2375.1076	-2383.2716	-2345.643	-2348.0554	-2371.9675	
10		-2370.9563	-2370.7159	-2364.8963	-2370.0613	-2363.3443	-2364.5903	-2366.4643	-2339.6281	-2339.9278	-2333.5686	
Mínimos de columnas		<b>-2423.5288</b>	-2421.5302	-2419.6229	-2414.6471	-2406.9096	-2405.6662	-2407.4551	-2389.9622	-2382.3874	-2378.2687	

CS - Serie: 3 meses		MA										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	X	-5203.5513	-5214.7298	-5209.3467	-5209.3467	-5193.6746	-5197.0898	-5190.9166	-5183.0477	-5175.3476	-5167.5372	
1		-5216.9536	-5209.0448	-5201.5148	-5195.7835	-5185.8097	-5180.7389	-5183.0885	-5175.1501	-5167.5085	-5160.6635	
2		<b>-5223.7566</b>	-5209.0448	-5201.4931	-5194.6773	-5185.6189	-5189.1375	-5182.8524	-5176.1805	-5167.6034	-5179.8768	
3		-5209.0463	-5201.2516	-5194.5186	-5201.508	-5194.0317	-5173.9306	-5193.6146	-5170.3648	-5151.68	-5163.0546	
4		-5201.1654	-5194.2615	-5189.233	-5178.7291	-5182.2154	-5180.4646	-5167.69	-5168.4002	-5144.0376	-5159.324	
5		-5195.1854	-5185.6756	-5194.7891	-5199.7544	-5179.5967	-5167.2002	-5187.1465	-5153.5749	-5156.2867	-5167.1879	
6		-5191.0069	-5189.1902	-5182.9166	-5175.6747	-5167.6365	-5200.2765	-5193.7204	-5165.6436	-5146.6377	-5167.2973	
7		-5191.1487	-5183.6886	-5175.6736	-5167.805	-5161.5349	-5164.8073	-5182.4874	-5146.1375	-5139.9808	-5153.769	
8		-5183.5917	-5175.6784	-5180.2380	-5161.1862	-5153.4364	-5160.0469	-5143.1776	-5182.6380	-5183.3880	-5126.5066	
9		-5175.6784	-5169.8521	-5161.5527	-5153.7407	-5144.8135	-5139.8738	-5130.4796	-5151.1845	-5178.2733	-5170.7618	
10		-5167.6289	-5162.3261	-5154.0236	-5144.0801	-5158.8075	-5147.2479	-5123.0627	-5160.8844	-5175.8531	-5134.531	
Mínimos de columnas		<b>-5223.7566</b>	-5216.9374	-5214.7298	-5209.3467	-5201.5861	-5200.2765	-5199.0898	-5193.8146	-5183.3880	-5179.8768	

Según criterio  $CS$  debemos estimar un modelo  $ARMA(2, 0)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 2 meses y un modelo  $ARMA(1, 0)$  para la serie del tipo de interés interbancario a 3 meses.

CS - Serie: 6 meses		MA												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
X	-4711.4578	-4710.475	-4713.1466	-4709.0425	-4701.2014	-4694.6746	-4688.6478	-4682.0026	-4681.8408	-4674.2495	-4666.4062			
1		<b>-4716.876</b>	-4709.662	-4701.2447	-4695.9691	-4689.3278	-4684.9352	-4678.1251	-4674.2193	-4666.3876	-4658.5968			
2			-4703.7024	-4696.0806	-4687.8285	-4684.3952	-4674.8217	-4672.3828	-4666.4098	-4663.5152	-4658.9291			
3				-4695.8977	-4693.7649	-4685.4218	-4683.8568	-4675.9749	-4668.6795	-4662.8908	-4658.1662			
4					-4690.0993	-4686.4323	-4678.5837	-4676.0188	-4669.652	-4661.7238	-4645.912			
5						-4693.1017	-4685.6121	-4683.7879	-4675.9701	-4665.9062	-4653.2807	-4636.9869		
6							-4685.4361	-4678.9237	-4675.8745	-4663.3488	-4653.6702	-4648.1915	-4641.1267	
7								-4688.9274	-4686.8185	-4674.3848	-4647.7564	-4640.5383	-4630.0739	
8									-4690.9061	-4685.1840	-4670.3666	-4636.4662	-4640.6563	-4620.4231
9										-4673.2052	-4665.2393	-4649.7369	-4632.9247	-4627.8005
10											-4653.8582	-4644.3768	-4630.4423	-4632.9247
												-4618.6499	-4619.182	-4611.048
Mínimos de columnas	-4714.376	<b>-4716.876</b>	-4713.1466	-4709.0425	-4701.2014	-4694.6746	-4688.6478	-4682.0026	-4681.8408	-4674.2495	-4666.4062			

CS - Serie: 1 año		MA												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
X	-3730.2046	-3733.1651	-3728.9504	-3721.6404	-3723.5695	-3713.4924	-3711.2159	-3704.4849	-3697.4795	-3689.8314	-3686.616			
1		-3723.0846	-3723.5673	-3721.6404	-3723.5695	-3713.4924	-3705.794	-3697.0556	-3689.7816	-3680.0264	-3685.7633			
2			<b>-3732.6883</b>	-3725.1483	-3717.0866	-3716.9474	-3709.7879	-3690.4816	-3682.8868	-3674.1089	-3676.1879			
3				-3722.4747	-3717.6349	-3709.4869	-3709.6018	-3688.5887	-3678.0352	-3675.6116	-3680.9505			
4					-3714.9705	-3717.0119	-3700.4439	-3686.0489	-3682.578	-3689.8588	-3674.2229			
5						-3716.8535	-3704.906	-3686.2269	-3672.9317	-3677.2024	-3665.9136			
6							-3708.9748	-3689.253	-3673.4797	-3670.3154	-3663.3554			
7								-3705.4195	-3689.9748	-3671.3578	-3662.0504			
8									-3689.1007	-3680.0076	-3661.9636			
9										-3687.9824	-3667.2879			
10											-3685.4046			
												-3689.9132	-3689.9132	
													-3688.0752	-3643.2544
Mínimos de columnas	-3731.7402	<b>-3732.6883</b>	-3723.5673	-3728.9504	-3723.5695	-3716.0893	-3711.2159	-3704.4849	-3697.4795	-3689.8314	-3686.616			

Seguindo el criterio *CS* debemos estimar un modelo *ARMA*(1, 1) para la serie del tipo de interés interbancario a 6 meses y un modelo *ARMA*(2, 1) para la serie del tipo de interés interbancario a 1 año.

Mediante el análisis de ambos criterios podemos denotar que, para el caso que nos ocupa, nuestra observación era razonada. Si aplicamos el criterio de Akaike, el resultado que obtenemos se basa en modelos que, o bien están sobre parametrizados, o bien que están sujetos a la estimación de un número muy alto de parámetros. Un ejemplo claro es el caso de la serie a 2 meses, donde podemos observar que, mediante el criterio  $CIA$ , el modelo que deberíamos estimar es un modelo  $ARMA(9, 9)$ . No tiene mucho sentido que el número de ambos parámetros sea tan grande. Ya que si miramos las funciones de autocorrelación, el hecho de considerar un  $MA(1)$  es equivalente al  $AR(1)$ . Por el contrario, si utilizamos la alternativa propuesta por Schwarz, obtenemos modelos más sencillos y manejables. Destacar, por último, que ambos criterios beben de la misma idea: realizar una selección a partir del análisis de los errores del modelo.

Por lo tanto y en vista de lo expuesto, a la hora de estimar los modelos  $ARMA$ , hemos tenido en cuenta las conclusiones obtenidas con el criterio de Schwarz. Llegando a obtener los siguientes resultados (para mayor detalle sobre los resultados obtenidos véase el Apéndice 2):

- Para la serie de incrementos a 1 día, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 3)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,8788$ ,  $\theta_1 = 1,46$ ,  $\theta_2 = -0,4582$  y  $\theta_3 = -0,0311$ .
- Para la serie de incrementos a 1 semana, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 6)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,8267$ ,  $\theta_1 = 0,774$ ,  $\theta_2 = 0,06389$ ,  $\theta_3 = 0,0919$ ,  $\theta_4 = -0,0501$ ,  $\theta_5 = -0,0956$  y  $\theta_6 = 0,1078$ .
- Para la serie de incrementos a 15 días, el modelo estimado es un  $ARMA(6, 6)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = -2,1086$ ,  $\phi_2 = 1,72$ ,  $\phi_3 = -0,21064$ ,  $\phi_4 = 1,2674$ ,  $\phi_5 = 1,4769$ ,  $\phi_6 = 0,5548$ ,  $\theta_1 = -2,0054$ ,  $\theta_2 = -1,474$ ,  $\theta_3 = 0,0612$ ,  $\theta_4 = 1,4696$ ,  $\theta_5 = 1,4732$  y  $\theta_6 = 0,46998$ .
- Para la serie de incrementos a 1 mes, el modelo estimado es un  $ARMA(0, 3)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\theta_1 = -0,2768$ ,  $\theta_2 = -0,05314$  y  $\theta_3 = -0,07914$ .
- Para la serie de incrementos a 2 meses, el modelo estimado es un  $ARMA(2, 0)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,18229$  y  $\phi_2 = -0,092$ .
- Para la serie de incrementos a 3 meses, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 0)$ , cuyo parámetros tiene el siguiente valor  $\phi_1 = 0,27077$ .

- Para la serie de incrementos a 6 meses, el modelo estimado es un *ARMA*(1, 1), cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,77077$  y  $\theta_2 = 0,712$ .
- Para la serie de incrementos a 1 año, el modelo estimado es un *ARMA*(2, 1), cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,7689$ ,  $\phi_2 = 0,064$  y  $\theta_1 = 0,7848$ .

### 3.3. Comentarios sobre los resultados obtenidos

Una vez estimados los modelo *ARMA*, nos queda, únicamente, comprobar que dichos modelos reflejan el comportamiento de la serie sobre la cual han sido ajustados. Para ello, consideraremos el hecho de que si son buenos modelos, los residuos que vamos a obtener, deben de ser *iid*. Para comprobar si cumplen este requisito utilizaremos de nuevo el test de Ljung y Box.

Destacar que como primer paso, antes de aplicar el test, deberemos obtener los residuos de cada uno de los modelos estimados.

Para obtener los residuos extraeremos en primer lugar el efecto autorregresivo de la serie y posteriormente el efecto media móvil.

En ese sentido obtendremos unos primeros residuos resultado de aplicar la parte correspondiente al modelo *AR* sobre la variable,

$$r_t = \hat{E}(L) u_t$$

una vez obtenidos estos residuos, para hallar los residuos de un proceso *MA*, deberemos proceder utilizando el método propuesto en Box y Jenkins (1976) y Valdero (1999) denominado back forecasting o de predicción hacia atrás. Método fundamentado en la consideración de que las representaciones de un proceso de medias móviles que contiene el operador avance, *F*, tienen la misma estructura probabilística que las que contienen el operador de retardos, *L*. De donde se extrae que  $F = L^{-1}$ .

En ese sentido podemos escribir el modelo *MA*(*q*), en función del operador de retardos *L*, de la siguiente forma,

$$Y_i = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i u_{t-i} = \theta_q(L) u_t \quad (3.10)$$

con  $u_t \gg iid(0, \sigma_u^2)$ ,  $\theta_0 = 1$  y  $\theta_q(L) = \sum_{i=0}^q \theta_i L^i$ . O también en función del operador avance, *F*,

$$Y_i = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i a_{t+i} = \theta_q(F) a_t \quad (3.11)$$

donde  $F^i a_t = a_{t+i}$ ,  $f a_n g \gg iid^i 0, \sigma_a^2$  y  $\sigma_u^2 = \sigma_a^2$ .

Para obtener los valores muestrales: En primer lugar debemos obtener la serie de errores muestrales  $a_t$ ,  $t = 1, \dots, n$  considerando los errores post-muestrales igual a su valor esperado, es decir, realizando  $a_t = 0$  para  $t = n + 1, \dots, n + q$  y sustituyendo los valores del proceso estocástico  $f Y_t g$  por los de la serie temporal observada  $f y_t g$  en (3.11),

$$a_t = y_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t+i} \quad t = 1, \dots, n$$

El proceso de cálculo se va realizando hacia atrás. Se empieza por el periodo  $t = n$  y se va retrocediendo hasta obtener el error muestral del periodo  $t = 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= y_n \\ a_{n-1} &= y_{n-1} - \theta_1 a_n \\ a_{n-2} &= y_{n-2} - \theta_1 a_{n-1} - \theta_2 a_n \\ &\vdots \\ a_{n-q+1} &= y_{n-q+1} - \theta_1 a_{n-q+2} - \theta_2 a_{n-q+3} - \dots - \theta_q a_n \\ a_{n-q} &= y_{n-q} - \theta_1 a_{n-q+1} - \theta_2 a_{n-q+2} - \dots - \theta_q a_n \\ &\vdots \\ a_2 &= y_2 - \theta_1 a_3 - \theta_2 a_4 - \dots - \theta_q a_{q+2} \\ a_1 &= y_1 - \theta_1 a_2 - \theta_2 a_3 - \dots - \theta_q a_{q+1} \end{aligned}$$

En segundo lugar, se obtienen los  $q$  valores muestrales de la serie temporal  $y_t$ ,  $t = 1 - q, \dots, 1, 0$ . Considerando los errores muestrales del modelo (3.11) iguales a su valor esperado, es decir, haciendo  $a_t = 0$  para  $t = 1 - q, \dots, 1, 0$ , podemos escribir

$$y_t = \sum_{i=0}^q \theta_i a_{t+i} \quad t = 1 - q, \dots, 1, 0$$

El proceso de cálculo empezará en el periodo  $t = 1 - q$  y se seguirá recursivamente hasta obtener el valor de la serie temporal en el periodo  $t = 0$ , es

decir,

$$\begin{aligned} y_{1-q} &= \theta_q a_1 \\ y_{2-q} &= \theta_{q-1} a_1 + \theta_q a_2 \\ &\vdots \\ y_{i-1} &= \theta_2 a_1 + \dots + \theta_q a_{q-i+1} \\ y_0 &= \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \dots + \theta_q a_q \end{aligned}$$

Llegados a este punto, notemos que para el cálculo de los  $q$  valores muestrales de la serie temporal  $\{y_t\}$ , solamente es necesario conocer el valor de los  $q$  primeros errores muestrales  $a_t$ ,  $t = 1, \dots, q$ .

El último paso consiste en que, una vez conocidos los  $q$  valores muestrales de la serie temporal  $\{y_t\}$ ,  $t = 1, \dots, q$ , y teniendo presente que  $u_t = 0$  para  $t < 1-q$ , podemos obtener los estimadores de todos los errores, tanto los muestrales como los premuestrales, a partir del modelo (3.10),

$$u_t = Y_t - \sum_{i=1}^q \theta_i u_{t-i} \quad t = 1-q, \dots, 1, 0, 1, \dots, n$$

Los residuos se obtienen recursivamente a partir de,

$$\begin{aligned} u_{1-q} &= y_{1-q} \\ u_{2-q} &= y_{2-q} - \theta_1 u_{1-q} \\ &\vdots \\ u_{i-1} &= y_{i-1} - \theta_1 u_{i-2} - \dots - \theta_{q-i+2} u_{1-q} \\ u_0 &= y_0 - \theta_1 u_{-1} - \theta_2 u_{-2} - \dots - \theta_{q-1} u_{1-q} \\ u_1 &= y_1 - \theta_1 u_0 - \theta_2 u_{-1} - \dots - \theta_q u_{1-q} \\ u_2 &= y_2 - \theta_1 u_1 - \theta_2 u_0 - \dots - \theta_q u_{2-q} \\ &\vdots \\ u_n &= y_n - \theta_1 u_{n-1} - \theta_2 u_{n-2} - \dots - \theta_q u_{n-q} \end{aligned}$$

Mediante este proceso hemos obtenido los residuos sobre los cuales vamos a pasar el test de Ljung y Box. Hemos realizado el test considerando en primer lugar hasta 30 retardos para cada serie, obteniendo los siguientes resultados,

### 3.3 Comentarios sobre los resultados obtenidos

81

TimeSeries: 1 día  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelatic Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
	1	-0.013	-0.013	0.2949	0.587
	2	-0.016	-0.016	0.7333	0.693
	3	0.036	0.035	3.0137	0.39
	4	0.016	0.016	3.459	0.484
	5	-0.003	-0.002	3.4787	0.627
	6	0.019	0.018	4.1515	0.656
	7	0.015	0.014	4.5596	0.714
	8	-0.016	-0.016	5.0489	0.752
	9	-0.024	-0.025	6.0789	0.732
	10	-0.021	-0.024	6.8965	0.735
	11	-0.016	-0.017	7.3725	0.768
	12	-0.027	-0.027	8.7278	0.726
	13	0.028	0.029	10.143	0.682
	14	-0.012	-0.01	10.394	0.733
	15	-0.004	0	10.424	0.792
	16	-0.013	-0.013	10.731	0.826
	17	-0.013	-0.013	11.029	0.855
	18	-0.009	-0.009	11.174	0.887
	19	0.013	0.011	11.468	0.907
	20	-0.006	-0.007	11.536	0.931
	21	0.005	0.006	11.584	0.95
	22	-0.027	-0.027	12.89	0.936
	23	-0.03	-0.03	14.519	0.911
	24	-0.021	-0.023	15.29	0.912
	25	-0.016	-0.016	15.734	0.923
	26	0.004	0.002	15.757	0.942
	27	-0.004	-0.002	15.782	0.957
	28	0.003	0.005	15.801	0.969
	29	-0.006	-0.004	15.863	0.977
	30	-0.009	-0.008	16.004	0.983

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 día.

3. Primera corrección: Los modelos *ARMA*

Time Series: 1semana  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelati	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob			
				1	0.014	0.014	0.3485	0.555
				2	-0.024	-0.024	1.3531	0.508
				3	0.009	0.009	1.4867	0.685
				4	0.003	0.002	1.5037	0.826
				5	0.015	0.015	1.8901	0.864
				6	0.017	0.017	2.4377	0.875
				7	-0.023	-0.023	3.3942	0.846
				8	0.015	0.016	3.8035	0.874
				9	-0.03	-0.032	5.3989	0.798
				10	-0.007	-0.005	5.4831	0.857
				11	0.021	0.019	6.3048	0.852
				12	0.027	0.027	7.5912	0.816
				13	0.018	0.019	8.186	0.831
				14	0.009	0.009	8.32	0.872
				15	-0.08	-0.079	20.06	0.17
				16	-0.024	-0.024	21.083	0.175
				17	-0.014	-0.018	21.421	0.208
				18	-0.011	-0.012	21.655	0.248
				19	-0.004	-0.004	21.691	0.3
				20	-0.013	-0.01	21.999	0.341
				21	0.029	0.035	23.576	0.314
				22	-0.059	-0.063	29.887	0.121
				23	-0.012	-0.007	30.167	0.145
				24	-0.019	-0.029	30.835	0.159
				25	-0.007	-0.009	30.921	0.192
				26	-0.006	-0.005	30.991	0.229
				27	-0.016	-0.012	31.479	0.252
				28	0.015	0.025	31.901	0.279
				29	-0.029	-0.03	33.392	0.262
				30	0.005	0.007	33.432	0.304

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 semana.



### 3.3 Comentarios sobre los resultados obtenidos

Time Series: 15 días  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelatic Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
	1	0.003	0.003	0.021	0.885
	2	0.007	0.007	0.1093	0.947
	3	0.002	0.002	0.1166	0.99
	4	-0.006	-0.006	0.1861	0.996
	5	0.005	0.005	0.2337	0.999
	6	-0.017	-0.017	0.7524	0.993
	7	-0.02	-0.02	1.4922	0.983
	8	0.018	0.019	2.099	0.978
	9	0.01	0.01	2.2705	0.986
	10	0.002	0.001	2.2755	0.994
	11	0.026	0.026	3.4955	0.982
	12	0.002	0.002	3.5021	0.991
	13	-0.044	-0.045	7.0052	0.902
	14	-0.015	-0.014	7.397	0.918
	15	-0.036	-0.034	9.7799	0.833
	16	-0.02	-0.02	10.541	0.837
	17	0.025	0.025	11.637	0.822
	18	-0.015	-0.014	12.053	0.844
	19	-0.025	-0.028	13.155	0.831
	20	0.012	0.009	13.408	0.859
	21	-0.03	-0.029	15.011	0.822
	22	-0.045	-0.047	18.656	0.666
	23	-0.007	-0.005	18.738	0.716
	24	-0.009	-0.004	18.899	0.757
	25	-0.028	-0.03	20.329	0.729
	26	0.002	0.002	20.34	0.775
	27	-0.004	-0.003	20.366	0.815
	28	-0.048	-0.056	24.602	0.649
	29	0.002	-0.001	24.609	0.698
	30	0.001	0.005	24.609	0.744

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 15 días.

3. Primera corrección: Los modelos *ARMA*

Time Series: 1 mes  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelati	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob			
				1	0.008	0.008	0.1159	0.734
				2	-0.003	-0.003	0.1288	0.938
				3	-0.01	-0.01	0.3106	0.958
				4	-0.021	-0.021	1.1135	0.892
				5	0.001	0.001	1.1161	0.953
				6	-0.006	-0.006	1.1839	0.978
				7	-0.052	-0.053	6.1605	0.521
				8	0.002	0.003	6.1705	0.628
				9	-0.046	-0.046	9.9306	0.356
				10	-0.015	-0.016	10.365	0.409
				11	0.037	0.035	12.798	0.307
				12	0.021	0.019	13.563	0.329
				13	0.003	0	13.582	0.404
				14	-0.043	-0.046	16.991	0.257
				15	-0.027	-0.025	18.272	0.249
				16	-0.078	-0.083	29.401	0.021
				17	0.012	0.011	29.68	0.029
				18	-0.002	-0.003	29.685	0.041
				19	-0.014	-0.016	30.051	0.051
				20	-0.014	-0.014	30.394	0.064
				21	0.008	0.007	30.521	0.082
				22	-0.03	-0.035	32.138	0.075
				23	-0.081	-0.097	44.015	0.005
				24	-0.022	-0.026	44.902	0.006
				25	-0.028	-0.036	46.324	0.006
				26	-0.023	-0.028	47.316	0.006
				27	-0.038	-0.038	49.907	0.005
				28	-0.003	-0.006	49.92	0.007
				29	-0.012	-0.026	50.189	0.009
				30	0.007	-0.014	50.283	0.012

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 mes.

### 3.3 Comentarios sobre los resultados obtenidos

Time Series: 2 meses  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelatic Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
	1	0.01	0.01	0.1904	0.663
	2	-0.001	-0.001	0.1926	0.908
	3	-0.011	-0.011	0.4257	0.935
	4	0.008	0.008	0.5284	0.971
	5	0.031	0.03	2.2128	0.819
	6	-0.04	-0.041	5.1687	0.522
	7	0.001	0.002	5.1708	0.639
	8	-0.036	-0.036	7.5446	0.479
	9	0.024	0.023	8.5481	0.48
	10	-0.041	-0.042	11.644	0.31
*      *	11	0.07	0.074	20.597	0.038
	12	0.031	0.028	22.31	0.034
	13	-0.039	-0.038	25.032	0.023
*        *	14	-0.068	-0.07	33.343	0.003
	15	-0.032	-0.027	35.26	0.002
	16	-0.051	-0.063	40.073	0.001
	17	-0.023	-0.017	41.037	0.001
	18	-0.011	-0.009	41.249	0.001
	19	-0.01	-0.002	41.445	0.002
	20	0.017	0.011	41.969	0.003
	21	-0.021	-0.018	42.77	0.003
	22	-0.056	-0.067	48.583	0.001
	23	-0.026	-0.033	49.787	0.001
	24	-0.042	-0.048	52.944	0.001
	25	-0.028	-0.02	54.414	0.001
	26	-0.038	-0.034	57.024	0
	27	0.025	0.031	58.156	0
	28	-0.022	-0.027	59.028	0.001
	29	0.044	0.037	62.519	0
	30	0.064	0.051	69.949	0

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 2 meses.

Time Series: 3 meses  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelati	Partial	Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
			1	0.024	0.024	1.0264	0.311
			2	0.011	0.011	1.2498	0.535
			3	0.004	0.004	1.2827	0.733
			4	-0.013	-0.013	1.5795	0.812
			5	0.02	0.02	2.2764	0.81
			6	0.055	0.055	7.7856	0.254
			7	-0.05	-0.053	12.245	0.093
			8	-0.001	0	12.246	0.141
			9	-0.004	-0.002	12.272	0.198
			10	0.003	0.005	12.29	0.266
			11	0	-0.004	12.29	0.342
			12	0.025	0.025	13.466	0.336
			13	-0.011	-0.007	13.705	0.395
			14	-0.018	-0.02	14.265	0.43
			15	-0.038	-0.037	16.893	0.325
			16	-0.076	-0.075	27.51	0.036
			17	0.012	0.017	27.789	0.047
			18	-0.011	-0.013	28.007	0.062
			19	0.024	0.028	29.035	0.065
			20	-0.003	-0.004	29.052	0.087
			21	0.021	0.027	29.826	0.096
			22	-0.079	-0.078	41.072	0.008
			23	-0.054	-0.06	46.392	0.003
			24	-0.055	-0.052	51.981	0.001
			25	0.002	0.003	51.988	0.001
			26	-0.004	0	52.016	0.002
			27	0.01	0.011	52.201	0.003
			28	-0.014	0.001	52.583	0.003
			29	-0.013	-0.017	52.87	0.004
			30	0.025	0.022	54.044	0.005

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 3 meses.

### 3.3 Comentarios sobre los resultados obtenidos

87

Time Series: 6 meses  
 Sample: 1 1800  
 Included observations: 1800

Autocorrelatic Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
	1	0.001	0.001	0.0011	0.973
	2	0.017	0.017	0.4991	0.779
	3	0	0	0.4995	0.919
	4	-0.038	-0.038	3.0423	0.551
	5	0.006	0.007	3.1183	0.682
	6	0.013	0.014	3.4286	0.753
	7	-0.034	-0.034	5.5422	0.594
	8	0.044	0.042	8.9999	0.342
	9	-0.017	-0.016	9.5442	0.389
	10	-0.011	-0.011	9.7614	0.462
	11	0.004	0.002	9.7956	0.549
	12	0.013	0.016	10.081	0.609
	13	0.012	0.011	10.34	0.666
	14	0	-0.003	10.34	0.737
	15	-0.01	-0.006	10.511	0.786
	16	-0.052	-0.054	15.391	0.496
	17	0.034	0.036	17.436	0.425
	18	0.002	0.004	17.441	0.493
	19	0.004	0.002	17.467	0.558
	20	-0.022	-0.027	18.37	0.563
	21	-0.011	-0.008	18.594	0.611
	22	-0.004	-0.002	18.621	0.669
	23	-0.041	-0.045	21.748	0.536
	24	0.013	0.018	22.04	0.577
	25	-0.011	-0.015	22.241	0.622
	26	-0.002	-0.002	22.246	0.675
	27	-0.004	-0.007	22.28	0.723
	28	-0.047	-0.043	26.33	0.555
	29	0.036	0.038	28.735	0.479
	30	-0.006	-0.01	28.795	0.528

Test de *Ljung* i *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 6 meses.

Time Series: 1 año  
Sample: 1 1800  
Included observations: 1800

Autocorrelatic Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
	1	0.008	0.008	0.123	0.726
	2	0.011	0.011	0.3561	0.837
	3	0.004	0.004	0.386	0.943
	4	-0.04	-0.04	3.2461	0.518
	5	0.004	0.005	3.2814	0.657
	6	0.006	0.007	3.3477	0.764
	7	0.002	0.002	3.3548	0.85
	8	-0.04	-0.042	6.2975	0.614
	9	-0.038	-0.038	8.9674	0.44
	10	0.052	0.054	13.784	0.183
	11	0.03	0.03	15.379	0.166
	12	0.039	0.034	18.135	0.112
	13	0.015	0.01	18.522	0.139
	14	-0.056	-0.053	24.218	0.043
	15	-0.033	-0.03	26.15	0.036
	16	-0.01	-0.007	26.317	0.05
	17	-0.022	-0.023	27.178	0.056
	18	0.015	0.014	27.587	0.069
	19	-0.014	-0.009	27.941	0.085
	20	0.009	0.012	28.079	0.108
	21	-0.048	-0.049	32.245	0.055
	22	-0.022	-0.028	33.091	0.061
	23	0.001	-0.009	33.092	0.079
	24	0.004	0.007	33.118	0.102
	25	0.029	0.029	34.636	0.095
	26	-0.008	-0.004	34.764	0.117
	27	0.005	0.011	34.808	0.144
	28	0.012	0.011	35.074	0.168
	29	-0.009	-0.012	35.231	0.197
	30	0.023	0.014	36.233	0.201

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 año.

Destacar que en una primera conclusión del test de Ljung-Box sobre los datos analizados, se aceptará la hipótesis de que los residuos resultantes de estimar un proceso *ARMA* pueden ser independientes. Pero, esta conclusión es errónea, puesto que si ampliamos el rango de retardos considerados, la conclusión variará. Veamos los resultados obtenidos para el test de Ljung-Box, teniendo en cuenta unos retardos que van desde 70 hasta 100,

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	70	0.152	0.157	107.73	0.003
*	*	71	-0.081	-0.075	120.05	0.000
		72	-0.036	-0.036	122.44	0.000
		73	-0.008	-0.021	122.56	0.000
		74	-0.018	-0.011	123.20	0.000
		75	-0.022	-0.011	124.14	0.000
		76	-0.013	-0.009	124.48	0.000
		77	-0.010	-0.016	124.68	0.000
		78	0.012	0.026	124.95	0.001
		79	-0.014	-0.005	125.31	0.001
		80	-0.003	0.007	125.33	0.001
		81	0.007	0.012	125.42	0.001
		82	0.009	0.013	125.56	0.001
		83	-0.006	-0.024	125.62	0.002
		84	-0.005	-0.010	125.68	0.002
		85	0.015	0.000	126.13	0.003
		86	0.014	0.013	126.48	0.003
		87	0.011	0.009	126.72	0.004
		88	0.014	0.009	127.11	0.004
		89	0.018	0.008	127.76	0.004
		90	0.002	0.002	127.77	0.005
		91	-0.005	-0.011	127.81	0.007
		92	-0.002	0.003	127.82	0.008
		93	-0.004	-0.005	127.85	0.010
		94	0.004	-0.001	127.88	0.012
		95	0.011	0.000	128.12	0.013
		96	0.025	0.014	129.34	0.013
		97	0.013	0.003	129.67	0.015
		98	0.021	0.012	130.52	0.016
		99	0.019	0.014	131.24	0.017
		100	0.023	0.026	132.21	0.017

Detalle del test *Ljung* y *Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 día.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		70	0.019	0.022	267.70	0.000
*	*	71	-0.072	-0.072	277.54	0.000
		72	0.016	-0.019	278.03	0.000
*	*	73	0.076	0.095	288.96	0.000
		74	-0.040	-0.028	292.04	0.000
		75	-0.019	-0.023	292.74	0.000
		76	0.027	0.025	294.10	0.000
		77	0.000	0.001	294.10	0.000
		78	-0.038	-0.039	296.81	0.000
		79	0.027	0.018	298.24	0.000
		80	-0.046	-0.041	302.16	0.000
		81	0.011	0.030	302.38	0.000
		82	-0.034	-0.022	304.56	0.000
		83	0.001	0.004	304.57	0.000
		84	-0.007	-0.042	304.67	0.000
*	*	85	0.074	0.059	315.11	0.000
		86	-0.049	-0.061	319.58	0.000
		87	0.037	0.050	322.24	0.000
		88	-0.007	0.019	322.34	0.000
		89	0.008	-0.001	322.48	0.000
		90	0.012	-0.014	322.77	0.000
		91	-0.007	-0.024	322.86	0.000
		92	0.005	0.005	322.91	0.000
		93	0.020	-0.005	323.67	0.000
		94	-0.020	-0.003	324.47	0.000
		95	0.048	0.032	328.77	0.000
		96	0.024	0.004	329.85	0.000
		97	0.011	0.002	330.10	0.000
		98	0.018	-0.019	330.75	0.000
		99	0.016	0.019	331.21	0.000
		100	-0.014	0.012	331.58	0.000

Detalle del test *Ljung* y *Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 semana.

3. Primera corrección: Los modelos *ARMA*

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		70	-0.006	0.008	212.82	0.000
		71	-0.040	-0.049	215.78	0.000
		72	-0.008	-0.005	215.90	0.000
		73	0.018	0.024	216.51	0.000
		74	0.024	0.034	217.59	0.000
		75	-0.004	0.002	217.62	0.000
		76	-0.003	-0.008	217.64	0.000
		77	0.029	0.033	219.19	0.000
		78	0.008	0.006	219.32	0.000
		79	-0.019	-0.012	219.99	0.000
		80	-0.025	-0.034	221.15	0.000
		81	-0.005	0.008	221.21	0.000
		82	0.007	0.016	221.29	0.000
		83	-0.017	-0.010	221.86	0.000
		84	0.000	0.000	221.86	0.000
		85	0.015	-0.012	222.28	0.000
		86	0.015	-0.010	222.71	0.000
		87	0.016	0.010	223.19	0.000
		88	-0.028	-0.046	224.71	0.000
		89	0.005	0.007	224.75	0.000
		90	0.010	-0.007	224.93	0.000
		91	-0.001	0.017	224.93	0.000
		92	-0.007	-0.011	225.03	0.000
		93	-0.007	-0.017	225.13	0.000
		94	-0.024	-0.050	226.23	0.000
		95	0.036	0.029	228.72	0.000
		96	0.029	0.028	230.34	0.000
		97	0.034	0.006	232.59	0.000
		98	0.026	-0.005	233.88	0.000
		99	0.012	0.017	234.16	0.000
		100	0.030	0.018	235.82	0.000

Detalle del test *Ljung-Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 15 días.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		70	-0.046	-0.025	271.45	0.000
		71	-0.034	-0.041	273.65	0.000
		72	0.008	0.023	273.78	0.000
		73	0.032	0.023	275.70	0.000
		74	0.003	-0.003	275.71	0.000
		75	-0.021	0.014	276.52	0.000
		76	-0.011	0.006	276.74	0.000
		77	0.029	0.043	278.28	0.000
		78	0.018	0.031	278.86	0.000
		79	-0.015	0.003	279.29	0.000
		80	-0.044	-0.061	282.88	0.000
		81	-0.014	-0.025	283.23	0.000
		82	0.005	0.034	283.28	0.000
		83	-0.036	-0.019	285.73	0.000
		84	-0.014	-0.013	286.10	0.000
		85	0.013	-0.025	286.42	0.000
		86	0.041	0.010	289.65	0.000
		87	-0.018	-0.019	290.23	0.000
		88	-0.042	-0.031	293.63	0.000
		89	-0.007	0.023	293.72	0.000
		90	0.003	-0.006	293.74	0.000
		91	-0.011	0.001	293.99	0.000
		92	-0.002	-0.025	293.99	0.000
		93	0.018	-0.007	294.58	0.000
		94	0.008	0.018	294.69	0.000
		95	0.004	0.006	294.72	0.000
		96	0.024	-0.010	295.84	0.000
		97	0.021	-0.004	296.67	0.000
		98	0.015	-0.017	297.10	0.000
		99	0.026	0.036	298.43	0.000
		100	-0.022	0.004	299.36	0.000

Detalle del test *Ljung-Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 mes.



### 3.3 Comentarios sobre los resultados obtenidos

91

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		70	-0.011	-0.001	207.68 0.000
		71	0.021	0.031	208.50 0.000
		72	-0.022	0.003	209.38 0.000
		73	-0.033	-0.028	211.41 0.000
		74	-0.027	-0.034	212.78 0.000
		75	-0.007	-0.034	212.87 0.000
		76	0.011	0.009	213.10 0.000
		77	-0.044	-0.063	216.74 0.000
		78	0.040	0.029	219.68 0.000
		79	-0.011	-0.038	219.90 0.000
		80	0.011	0.010	220.15 0.000
		81	-0.033	-0.016	222.25 0.000
		82	0.004	-0.027	222.28 0.000
		83	0.019	0.012	222.95 0.000
		84	0.008	-0.007	223.06 0.000
		85	-0.002	0.010	223.07 0.000
		86	0.028	0.054	224.60 0.000
		87	0.044	0.022	228.22 0.000
		88	-0.027	-0.011	229.58 0.000
		89	0.044	0.032	233.23 0.000
		90	0.041	0.032	236.44 0.000
		91	0.014	-0.020	236.79 0.000
		92	-0.019	-0.016	237.51 0.000
		93	0.044	0.037	241.19 0.000
		94	0.062	0.051	248.38 0.000
*		95	0.081	0.044	260.81 0.000
		96	0.023	-0.005	261.82 0.000
		97	-0.046	-0.024	265.78 0.000
*	*	98	0.121	0.085	293.60 0.000
		99	0.008	0.003	293.71 0.000
		100	-0.017	-0.019	294.29 0.000

Detalle del test *Ljung*  $\hat{}$  *Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 2 meses.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		70	-0.027	-0.014	196.23 0.000
		71	0.023	0.021	197.18 0.000
		72	-0.014	-0.024	197.55 0.000
		73	0.011	0.023	197.79 0.000
		74	-0.002	-0.005	197.80 0.000
		75	-0.011	0.018	198.01 0.000
		76	0.039	0.049	200.83 0.000
		77	0.017	0.031	201.35 0.000
		78	0.023	0.004	202.33 0.000
		79	-0.043	-0.032	205.76 0.000
		80	0.023	0.008	206.77 0.000
		81	-0.022	-0.018	207.72 0.000
		82	-0.021	-0.015	208.58 0.000
		83	0.017	0.035	209.13 0.000
		84	-0.004	-0.007	209.16 0.000
		85	-0.013	-0.018	209.48 0.000
		86	0.034	-0.001	211.61 0.000
		87	-0.010	-0.008	211.79 0.000
		88	-0.056	-0.038	217.76 0.000
		89	0.024	0.019	218.88 0.000
		90	-0.019	-0.006	219.57 0.000
		91	-0.063	-0.040	227.04 0.000
*		92	0.028	0.029	228.50 0.000
		93	0.053	0.053	233.87 0.000
		94	-0.010	0.005	234.05 0.000
		95	0.030	-0.007	235.80 0.000
		96	0.019	0.018	236.50 0.000
		97	-0.004	-0.012	236.53 0.000
		98	0.013	-0.006	236.83 0.000
		99	-0.001	0.005	236.83 0.000
		100	-0.034	-0.001	239.06 0.000

Detalle del test *Ljung*  $\hat{}$  *Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 3 meses.

3. Primera corrección: Los modelos *ARMA*

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
				70	-0.013 -0.012 92.081 0.040
				71	-0.027 -0.013 93.464 0.038
				72	0.014 0.015 93.847 0.043
				73	-0.001 0.006 93.850 0.051
				74	0.016 0.020 94.337 0.056
				75	0.040 0.038 97.342 0.042
				76	0.046 0.036 101.27 0.028
				77	-0.021 -0.007 102.07 0.030
				78	-0.046 -0.049 106.07 0.019
				79	0.022 0.045 106.95 0.020
				80	-0.041 -0.046 110.14 0.014
				81	0.025 0.020 111.35 0.014
				82	0.001 0.002 111.36 0.017
				83	-0.020 -0.018 112.09 0.018
				84	0.055 0.046 117.73 0.009
				85	-0.028 -0.032 119.25 0.008
				86	-0.017 -0.022 119.77 0.009
				87	0.030 0.022 121.44 0.009
				88	0.004 0.017 121.47 0.010
				89	0.045 0.034 125.26 0.007
				90	0.019 0.022 125.93 0.007
				91	-0.036 -0.031 128.40 0.006
				92	0.000 0.006 128.41 0.007
				93	0.022 0.026 129.35 0.008
				94	0.021 0.026 130.23 0.008
				95	0.006 0.005 130.29 0.010
				96	-0.007 -0.014 130.38 0.011
				97	-0.033 -0.042 132.40 0.010
				98	0.023 0.023 133.45 0.010
				99	0.009 0.013 133.61 0.012
				100	-0.038 -0.035 136.40 0.009

Detalle del test *Ljung* *Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 6 meses.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
				70	0.038 0.021 89.026 0.062
				71	0.045 0.036 92.857 0.042
				72	-0.005 -0.005 92.901 0.049
				73	-0.026 -0.017 94.149 0.049
				74	-0.019 -0.008 94.856 0.052
				75	0.073 0.080 104.81 0.013
				76	-0.009 -0.015 104.97 0.016
				77	0.007 -0.002 105.05 0.019
				78	0.013 0.009 105.39 0.021
				79	-0.019 -0.003 106.04 0.023
				80	0.027 0.019 107.46 0.022
				81	0.017 0.009 107.97 0.024
				82	0.019 0.010 108.67 0.026
				83	-0.012 -0.014 108.95 0.030
				84	-0.013 -0.009 109.27 0.033
				85	-0.012 -0.022 109.52 0.038
				86	-0.039 -0.034 112.43 0.029
				87	-0.008 -0.024 112.57 0.034
				88	0.030 0.031 114.30 0.031
				89	0.037 0.043 116.87 0.025
				90	0.028 0.022 118.33 0.024
				91	-0.015 -0.017 118.77 0.027
				92	0.024 0.023 119.83 0.027
				93	-0.009 -0.011 119.98 0.031
				94	0.030 0.024 121.66 0.029
				95	-0.001 -0.010 121.66 0.034
				96	-0.057 -0.056 127.89 0.016
				97	0.009 0.026 128.05 0.019
				98	-0.062 -0.060 135.33 0.007
				99	0.028 0.022 136.85 0.007
				100	0.012 -0.020 137.12 0.008

Detalle del test *Ljung* *Box* desde el retardo 70 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 año.

Por tanto la conclusión de...nitiva sería que los residuos obtenidos no parecen

ser *iid*.

La idea que debemos extraer de este análisis se puede resumir de la siguiente forma: tal y como señala Beran (1994), al trabajar con los residuos obtenidos del ajuste modelos *ARMA*, estamos tratando con series a las que se les ha extraído el efecto de la memoria a corto plazo. Idea que efectivamente podemos demostrar con el análisis del test para los primeros 30 retardos.

Pero, eliminar la memoria a corto plazo no implica eliminar toda la memoria de la serie. Puesto que, posiblemente, la series con las que estamos tratando se caracterizan por tener un comportamiento de memoria a largo. Sospecha que cobra fuerza si tenemos en cuenta que para retardos altos no se acepta la independencia de los residuos.

En conclusión, podemos considerar que nuestro análisis no ...naliza con la estimación de modelos *ARMA* sobre las series de interés interbancario. Debemos ir más allá y considerar una extensión de modelos *ARMA* (o *ARIMA*, ya que no olvidemos que, para evitar la no estacionariedad de la serie, hemos tomado diferencias) que incluyan el efecto de la memoria a largo plazo. En concreto, nos estamos re...riendo a los modelos autorregresivos de medias móviles integrados fractales, *ARFIMA*.

Pero, este nuevo paso, requiere entrar en otro paradigma científ...co. El paradigma de la matemática de los Fractales. Es por ello, que nos vemos en la obligación, antes de profundizar en la estimación de estos modelos, de sugerir la visita del Apéndice 1 a aquellos que no estén familiarizados con el tema, puesto que allí intentamos dar una pincelada y sentar las bases sobre lo que plantea y supone la matemática de los Fractales.



## Capítulo 4

# Autosimilitud y memoria a largo plazo: modelos *ARFMA*

No existen verdaderos fractales en la naturaleza (tampoco existen verdaderas líneas rectas ni círculos).

K. Falconer

### 4.1. Introducción

En este capítulo, a la vista de los resultados obtenidos, vamos a considerar una generalización de la metodología tradicional de series temporales.

En el capítulo anterior exploramos la posibilidad de que los modelos *ARMA* y por consiguiente los *ARIMA* de las series originales, explicarán el comportamiento de las series. Después de aplicar el test de Ljung-Box las conclusiones no son claras. En principio detectamos un aparente comportamiento de memoria a largo plazo, característico del comportamiento fractal en series temporales. Por ello, en este capítulo introduciremos en primer lugar una herramienta de detección de la memoria a largo plazo, el análisis *R/S*. Una vez detectada la memoria y el grado de la misma, procederemos a estimar un modelo que incluya la memoria en los datos. Presentaremos, así, los modelos *ARFIMA*, introducidos por Hosking (1981). Para ello introduciremos primero el concepto de autosimilitud,

concepto clave en la generalización de la metodología clásica.

## 4.2. Autosimilitud de procesos estacionarios

El primer concepto que vamos a introducir es el de proceso autosimilar. Fue introducido por Kolmogorov (1941) en un contexto teórico y adaptado a la estadística por Mandelbrot y sus colaboradores (véase por ejemplo, Mandelbrot y Van Ness (1968) y Mandelbrot y Wallis (1969 a,b y c)). En el contexto de procesos estocásticos, la autosimilitud se define en términos de la distribución del proceso,

**Definición 4.1** Proceso autosimilar.

Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un proceso estocástico de segundo orden, nulo en el origen, centrado y con incrementos estacionarios. Diremos que es autosimilar, con parámetro de autosimilitud  $H$ , si para cualquier factor positivo  $c$ , el proceso reescalado con una escala temporal  $ct$ ,  $c^H X_{ct}$ , es igual en distribución al proceso original  $X_t$ .

En particular, esto significa que, para cualquier secuencia temporal  $t_1, \dots, t_k$  y cualquier constante positiva  $c$ , el vector  $c^H (X_{ct_1}, X_{ct_2}, \dots, X_{ct_k})$  tiene la misma distribución que el vector  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ . Observemos también que si tomamos  $t = 1$  y  $c = t$  en la definición de autosimilitud se obtiene la equivalencia en distribución de  $X_1$  y  $t^H X_t$ . Algunas referencias interesantes para profundizar en el concepto de la autosimilitud estocástica son: Lamperti (1962) y Vervaat (1987).

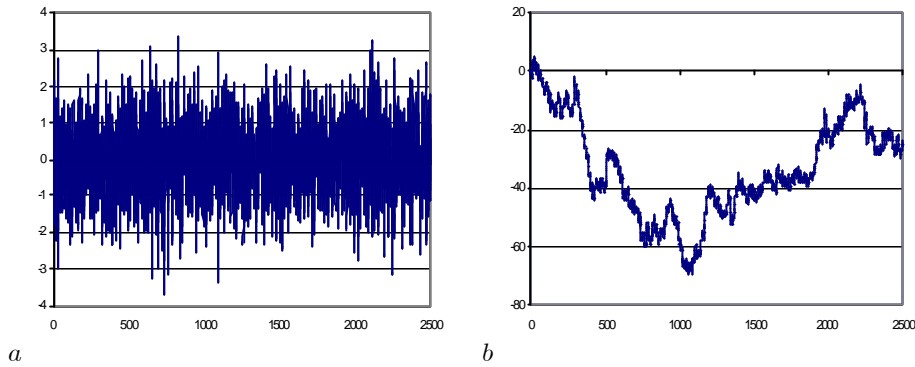
En este capítulo vamos a considerar que nuestro proceso de precios logarítmicos, denotado por  $X$ , es un proceso de segundo orden, con trayectorias continuas, incrementos estacionarios y autosimilar. Notemos que respecto a las hipótesis iniciales de la *HME* estamos sustituyendo la independencia de los incrementos por la exigencia de segundo orden y autosimilitud, sustitución que representa una generalización de las hipótesis ya que el movimiento browniano clásico es, en particular, un ejemplo de proceso de este tipo.

En efecto, por un lado la distribución de  $B_1$  es normal, centrada, y con varianza unitaria. Por otro lado, también es la distribución de  $t^{\frac{1}{2}} B_t$  lo que prueba el carácter autosimilar con parámetro  $H = \frac{1}{2}$  del movimiento browniano.

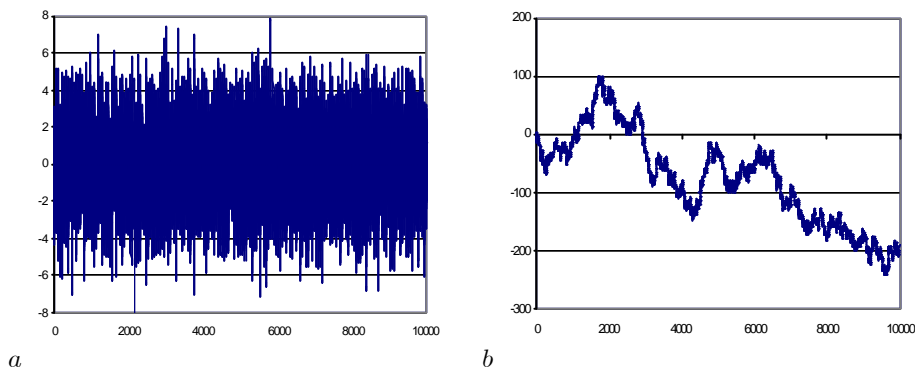
A nivel gráfico la idea de autosimilitud queda clara en el siguiente ejemplo:

Hemos generado una serie de 2500 simulaciones de una variable aleatoria normal con media cero y varianza unitaria. En el gráfico *a* representamos esta

serie, que modeliza los incrementos unitarios de un movimiento browniano. En el *b* observamos la trayectoria browniana correspondiente.



En las siguientes figuras representamos la simulación de 40.000 datos normales standard. En este caso, cada incremento es la suma de cuatro simulaciones. Por lo tanto estamos simulando un proceso con 10.000 incrementos.



Observemos que, a parte de que estadísticamente los recorridos de la partícula son similares, en el segundo caso hemos multiplicado por cuatro la unidad de tiempo y se ha multiplicado por dos el recorrido de los incrementos. Poniéndose de mani...esto el carácter autosimilar con parámetro  $\frac{1}{2}$ , del movimiento browniano.

Observemos que la varianza de  $X_t$  y  $X_s$  es  $\sigma^2 (t \vee s)^{2H}$  donde  $\sigma^2$  es la varianza de  $X_1$ . A partir de este resultado, se deduce que la covarianza entre  $X_t$  y  $X_s$  es  $\frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + s^{2H} - (t \vee s)^{2H}$ .

Sea ahora  $Y_i = X_i - X_{i-1}$ . La serie temporal  $Y = [Y_i, i \geq 1]$  es la serie de incrementos objeto de nuestro análisis. Si  $\gamma$  denota la función de autocovarianza, podemos deducir sin dificultad que

$$\gamma(k) = \frac{1}{2} \sigma^2 \left[ (k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right] \quad (4.1)$$

Con

$$\gamma(k) \approx H(2H-1)k^{2H-2} \quad \text{si } k \neq 1 \quad (4.2)$$

Por lo tanto, la función de autocorrelación viene dada por la expresión,

$$\rho(k) = \frac{1}{2} \left[ (k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right]$$

para  $k \geq 0$  y  $\rho(k) = \rho(-k)$  para  $k < 0$ . Expresión que para  $k > 0$  también podemos reescribir de la siguiente forma,

$$\rho(k) = \frac{k^{2H}}{2} \left[ 1 + \frac{1}{k} \right]^{2H} - 1 + \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{1}{k} \right]^{2H} \quad (4.3)$$

o como  $\rho(k) = \frac{1}{2} k^{2H} g\left(\frac{1}{k}\right)$  donde  $g(x) = (1+x)^{2H} - 2 + (1-x)^{2H}$ .

El hecho de que  $\rho(k)$  debe estar entre -1 y 1 exige

$$0 < H < 1$$

Los detalles de las deducciones de estas expresiones se pueden consultar en Beran (1994). En particular, la última se demuestra desarrollando la función  $g$  en serie de Taylor.

De ahora en adelante únicamente consideraremos el caso  $0 < H < 1$ .

Si  $H \neq \frac{1}{2}$ , el primer término no nulo del desarrollo de Taylor de  $g(x)$ , en el origen, es igual a  $2H(2H-1)x^2$ . Por consiguiente, cuando  $k$  tiende a infinito,  $\rho(k)$  es equivalente a  $H(2H-1)k^{2H-2}$ . Observemos que para  $\frac{1}{2} < H < 1$ , las correlaciones decrecen hacia cero lentamente, en el sentido que se cumple

$$\sum_{k=i}^{\infty} \rho(k) = 1$$

mientras que para  $0 < H < \frac{1}{2}$ , las correlaciones son sumables. Para  $H = \frac{1}{2}$ , todas las correlaciones de retardos no nulos son igual a cero, lo que significa que las observaciones están incorrelacionadas.



Estudiemos finalmente el comportamiento de la varianza de la media muestral de las variables  $Y_i$  en función de  $H$ . Tenemos

$$\bar{Y}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i = n^{-1} (X_n - X_0) = n^{-1} n^H (X_1 - X_0)$$

y por lo tanto

$$\text{Var} \bar{Y}_n = \sigma^2 n^{2H-2}$$

Para  $H = \frac{1}{2}$ , nos encontramos con el clásico resultado  $\text{Var} \bar{Y}_n = \sigma^2 n^{-1}$ .

### 4.3. Memoria a largo plazo de procesos estacionarios

Como hemos apuntado en la sección anterior para algunos parámetros de autosimilitud  $H$  la función de autocorrelación tenía un decrecimiento lento hacia infinito en el sentido que la serie de retardos no era sumable. Esta es la motivación de la siguiente definición.

**Definición 4.2** Proceso de memoria a largo plazo.

Sea  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  una serie de segundo orden, estacionaria y centrada. Sea  $\rho(k)$  su función de autocorrelación. Se dice que esta serie presenta memoria a largo plazo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho(j) = \infty \quad (4.4)$$

en contraposición a memoria a corto plazo si la serie es convergente.

Como hemos visto en la sección anterior, los incrementos de nuestro proceso  $X$  para el caso  $\frac{1}{2} < H < 1$  presentaban memoria a largo plazo.

#### 4.3.1. Movimiento browniano fraccionario

Pasamos ahora a presentar el ejemplo paradigmático de proceso de segundo orden, con trayectorias continuas, incrementos estacionarios, centrado y autosimilar: el denominado movimiento browniano fraccionario.

**Definición 4.3** El movimiento browniano fraccionario de parámetro  $H$  es un proceso estocástico que denotaremos como  $\{B_H(t), t \geq 0\}$ , con  $0 < H < 1$ , y que cumple las propiedades siguientes:

- ²  $B_H(0) = 0$  con probabilidad 1.
- ² Tiene trayectorias continuas.
- ² Es gaussiano, centrado con  $var(B_H(1)) = \sigma^2$ .
- ² Tiene incremento estacionarios
- ² Es Autosimilar

Para simular las trayectorias de este proceso son útiles los siguientes conceptos y resultados.

**Definición 4.4** (Mandelbrot y Wallis, 1969c)

El proceso discreto,  $X = \{X_n, n \geq 0\}$ , construido por los incrementos de un Movimiento Browniano Fraccionario

$$X_n = B_H(n+1) - B_H(n) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

se denomina **Ruido Browniano Fraccionario (R.B.F.)**

El punto clave para simular trayectorias del movimiento browniano fraccionario es la posibilidad de representar este proceso como un proceso de integral estocástica independiente respecto del movimiento browniano clásico. En concreto, siguiendo a Mandelbrot y Van Ness (1968) la expresión de esta integral es:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t K(t, s) dB(s) \quad (4.6)$$

donde

$$K(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} & 0 \leq s < t \\ (s-t)^{H-\frac{1}{2}} & s < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

de forma que ahora el núcleo introducido va perdiendo efecto a medida que  $s \rightarrow -\infty$  devolviéndose de forma correcta la expresión de  $B_H(t)$ .

Por último, para obtener una expresión discreta de  $B_H(t)$  dividimos cada paso entero de tiempo en  $n$  intervalos para así conseguir aproximar la integral. Hemos utilizado la aproximación sugerida en Mandelbrot y Wallis (1969b-d),

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \sum_{i=n(t_i - M)}^t K(t, \frac{i}{n}) n^{H-\frac{1}{2}} \xi_i \quad (4.8)$$

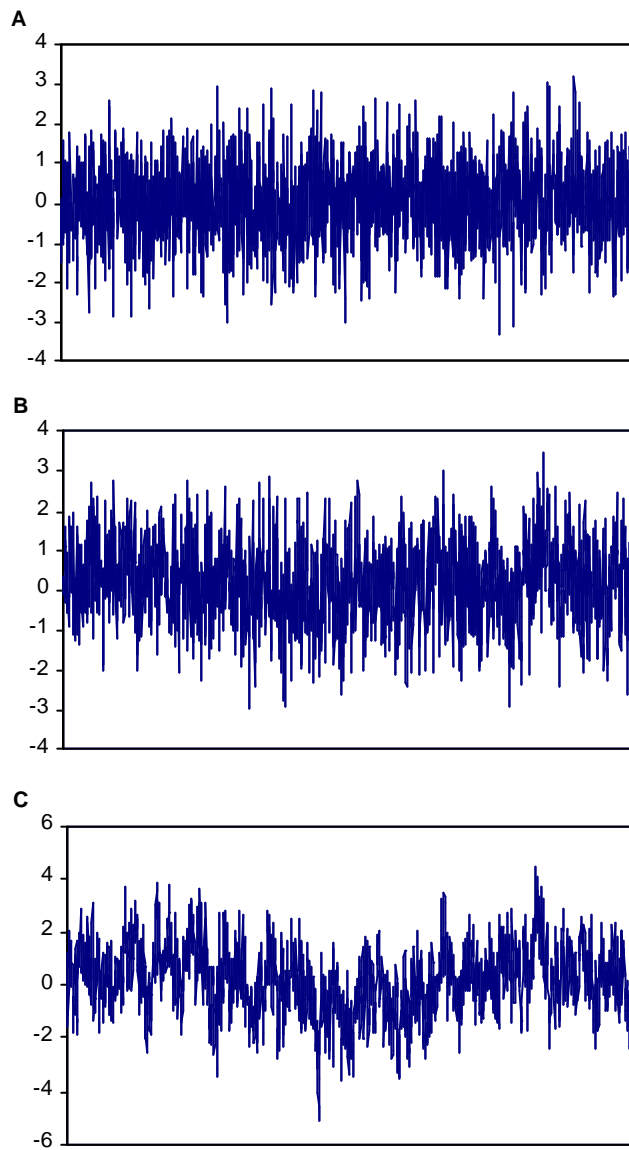
para un cierto  $M$  fijado previamente.

Siguiendo a Feder (1989), con un cambio de la variable del sumatorio y reorganizando los términos resultantes llegamos a la expresión que nos permite calcular, de forma discreta, los incrementos brownianos fraccionarios,

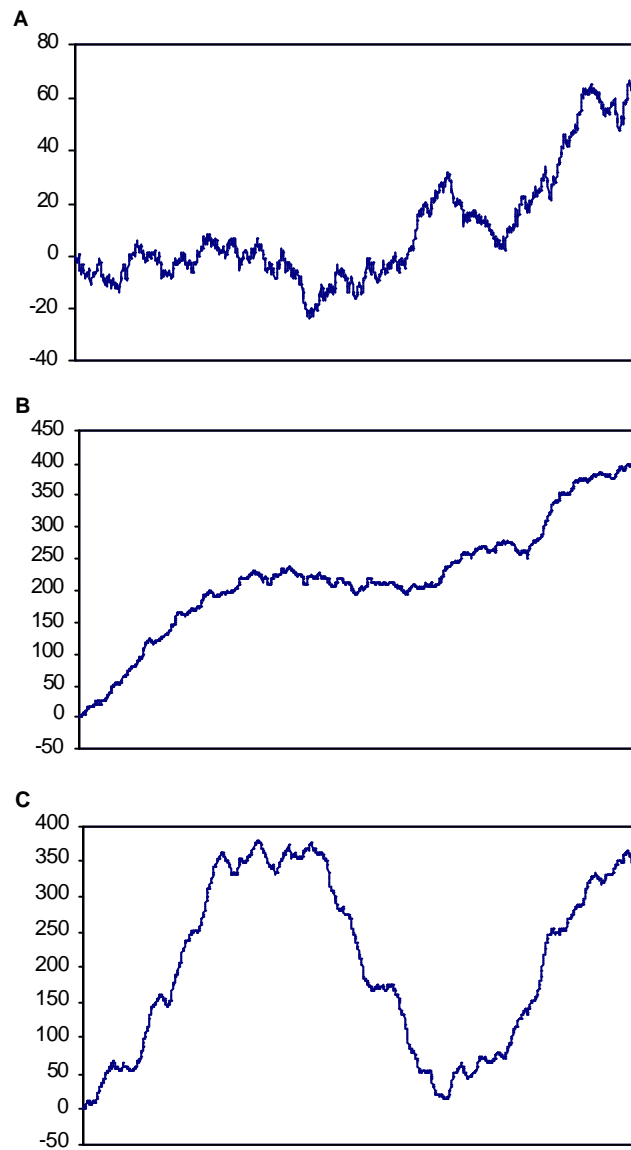
$$\begin{aligned}
 B_H(t) - B_H(t-1) &= \frac{n^i}{i^{H+\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^n (i)^{H-\frac{1}{2}} \xi_{(1+n(M+t)-i)} \\
 &+ \sum_{i=1}^{n(M-1)} (n+i)^{H-\frac{1}{2}} (i)^{H-\frac{1}{2}} \xi_{(1+n(M-1+t)-i)}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Esta es la expresión que vamos a utilizar para generar una secuencia de  $\Phi B_H$  a partir de una secuencia de variables gaussianas estándar independientes. De ese modo podremos destacar visualmente las diferencias existentes entre un movimiento browniano clásico, donde recordemos que  $H = 0,5$ , con cualquier proceso de memoria a largo plazo. Particularmente tomaremos como referencia  $H = 0,7$  y  $H = 0,9$ , como representantes del movimiento browniano fraccionario.

Cabe destacar que, como señala Feder, cuanto mayor sean los valores de  $n$  y de  $M$  mejor será la serie simulada, ya que  $n$  representa el número de particiones que realizamos para aproximar la integral mediante un sumatorio y  $M$  el rango de afectación de la memoria a largo. En nuestro caso tomaremos los valores de  $n = 10$  y  $M = 300$ .



Ruido fraccionario  $\Phi B_H$  generado a partir de la expresión 4.9 evaluado para  $M=3000$  y  $n=10$ . Con parámetros de ruido browniano fraccionario de  $H=0.5$  (A),  $H=0.7$  (B) y  $H=0.9$  (C).



Movimiento Browniano fraccionario  $B_H$  generado a partir de la expresión 4.9 evaluado para  $M=3000$  y  $n=10$ . Con parámetros de ruido browniano fraccionario de  $H=0.5$  (A),  $H=0.7$  (B) y  $H=0.9$  (C).

### 4.3.2. La ley empírica de Hurst y el análisis $R/S$

Hasta ahora hemos hablado del parámetro  $H$ , como parámetro que sirve para generalizar el movimiento browniano clásico. A continuación pretendemos abordar el problema de estimar el parámetro  $H$  en una serie temporal dada. Para ello utilizaremos el llamado análisis de rangos reescalados (método  $R/S$ ) introducido por H. Hurst. Este es el método clásico para resolver este problema. Existen en la literatura métodos alternativos como por ejemplo los presentados en Geweke y Porter-Hudak (1983), Lo (1991), Bardet (1997) o en Lardic y Mignon (1999).

Harold Edwin Hurst (1880-1978) tras un viaje a Egipto, que debería haber sido por una corta temporada, se encontró con un problema que le apasionó hasta el punto de dedicar los 62 años siguientes al estudio del Nilo y los problemas derivados de la determinación del nivel reserva de agua en la presa de Asuán. Como resultado de su trabajo ideó un nuevo método estadístico - el análisis  $R/S$  - descrito en Hurst (1951) y Hurst et al. (1965).

Como introducción a esta metodología consideremos la problemática a la que se enfrentó Hurst. A Hurst le interesaba determinar el diseño de una reserva ideal en la presa del Nilo de Asuán, basándose en el cuantioso volumen de datos, observados durante años, de que disponía. La idea era determinar el volumen de reserva ideal, considerando una reserva ideal como aquel nivel de agua tal que la presa nunca rebosa, ni nunca se queda vacía.

Así, si para un año dado,  $t$ , denotamos el nivel de lluvias anuales como  $\xi(t)$ , y el volumen de descarga regulada anual de la presa como  $D_t$ , el problema básico es calcular el volumen anual de descarga adecuado. Lo lógico, y en un primer estadio, sería considerar como  $D_t$  el valor esperado de  $\xi(t)$ , que podemos estimar como

$$D_t = \bar{\xi}_t = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \xi(j) \quad (4.10)$$

Pero Hurst fue un poco más allá de considerar únicamente la media como el estimador indirecto de la capacidad óptima de la presa. y desarrollo el procedimiento que presentamos a continuación.

Sea

$$X(t, \tau) = \sum_{j=1}^t \xi(j) - \frac{t}{\tau} \bar{\xi}_\tau \quad (4.11)$$

donde  $t$  es un valor entero discreto del tiempo y  $\tau$  es la amplitud de tiempo

considerada. Se define ahora la diferencia entre el valor máximo y el mínimo acumulado del flujo  $X$  como el rango  $R$ . El rango, representa la capacidad de almacenaje necesaria para mantener la descarga media durante el periodo, de forma que nunca se desborde ni se seque la presa. Su expresión explícita es

$$R_\tau = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (4.12)$$

Hurst investigó muchos fenómenos naturales distintos. Para poder comparar entre diferentes fenómenos tenemos que extraer la dimensionalidad al rango  $R_\tau$ . Para ello definió la ratio  $(R/S)_\tau$  que no es otra cosa que dividir  $R_\tau$  por la desviación estándar  $S_\tau$ . Recordemos que en este caso la varianza  $S_\tau^2$  es

$$S_\tau^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi^2(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi^2(t) \quad (4.13)$$

Hurst realizó numerosos experimentos para estimar el valor de  $H$ , usando este método, para diferentes fenómenos, llegando a la conclusión de que para la mayoría de fenómenos naturales  $H > \frac{1}{2}$ . La observación de Hurst es destacable puesto que demuestra que los fenómenos naturales difícilmente pueden modelizarse mediante procesos de incrementos independientes. Además, Hurst encontró que el rango reescalado  $(R/S)_\tau$ , queda descrito por la siguiente relación empírica,

$$(R/S)_\tau = c \tau^H \quad (4.14)$$

donde  $H$  es el denominado exponente de Hurst. Como anécdota, destacar que en un primer momento Hurst lo denotó como  $K$ , pero posteriormente, Mandelbrot lo rebautizó exponente  $H$ , en honor a su descubridor. Recordemos que, en ausencia de dependencia estadística a largo plazo,  $(R/S)_\tau$  será asintóticamente proporcional a  $\tau^{\frac{1}{2}}$ .

Finalmente notemos que el parámetro  $H$  es la pendiente de la recta

$$\log (R/S)_\tau = \log c + H \log \tau$$

y por lo tanto podemos estimarlo mediante la pendiente de la recta que ajusta los puntos  $(\log \tau, \log (R/S)_\tau)$

#### 4.4. Los modelos $ARFIMA(p, d, q)$

Una vez detectada la existencia de un parámetro de autosimilitud  $H \notin [0, 0.5]$ , el paso lógico sería ajustar los datos a un modelo que representase ese

comportamiento. Concretamente, para el caso  $H > \frac{1}{2}$ , estamos hablando de modelos que reflejen comportamientos de memoria a largo plazo.

Los modelos *ARFIMA*, son una generalización natural de los clásicos modelos *ARIMA* de la metodología Box-Jenkins e incluyen comportamientos de memoria a largo plazo.

Como destacamos en el capítulo 3, los modelos *ARIMA* se definen por la siguiente expresión,

$$\phi(L) \nabla^d y_t = \epsilon(L) \varepsilon_t$$

donde  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\nabla$  el operador diferencia y  $d$  el grado de diferenciación. En los modelos *ARIMA* el grado de diferenciación es siempre un número entero. Además, para la mayoría de series temporales económicas este grado de diferenciación suele ser igual a 1. Como nota, recordemos que, para determinar el grado de diferenciación se suele recurrir, como ya vimos en el capítulo 3, a la utilización de test de raíces unitarias.

La idea que hay detrás de los modelos *ARIMA*, se basa en considerar que los incrementos de orden  $d$  de la serie tienen un comportamiento de dependencia lineal, de forma que si quitamos esta dependencia lineal lo que nos queda es ruido blanco.

Una generalización natural de los modelos *ARIMA*, es considerar grados de diferenciación no entera, es decir, que el parámetro de diferenciación  $d$  sea un número no entero. En este caso se habla de parámetro fraccionario o fraccional. Pero el paso de un parámetro  $d$  entero a uno fraccionario no es inmediato. En realidad este paso es análogo al paso de dimensiones enteras a dimensiones eventualmente fraccionarias dado por la geometría fractal.

En 1982, J.R.M. Hosking presentó lo que denominó operador de diferencia fraccionada. Este operador se define de manera natural mediante una serie binómica,

$$\begin{aligned} \nabla^d &= (1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k = \\ &= 1 - dB + \frac{1}{2}d(d-1)B^2 - \frac{1}{3!}d(d-1)(d-2)B^3 + \dots \quad (4.15) \end{aligned}$$

Lo que Hosking nos proporcionó es la llave que nos permite calcular diferencias de números no enteros. Pero no solo eso. Además Hosking presentó un método para la estimación de un modelo acorde con un parámetro fraccional. Él siguió denominando *ARIMA*, a estos modelos, pero posteriormente se han pasado a denominar *ARFIMA* (*AR Fractionally IMA*).



El modelo  $ARFIMA$  más simple es el proceso  $ARFIMA(0, d, 0)$ , ampliamente estudiado en Hosking (1981) por lo que aquí únicamente destacaremos las propiedades más importantes. Si  $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$  es un proceso  $ARFIMA(0, d, 0)$ , bajo la condición  $\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ :

1. El proceso  $Y$  es estacionario e invertible.
2. La función de autocovarianza es,

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)}$$

donde

$$\gamma_k \approx \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} k^{2d-1} \quad \text{si } k \rightarrow \infty \quad (4.16)$$

3. La varianza y la función de autocorrelación son por lo tanto:

$$\gamma_0 = \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)\Gamma(1-d)}$$

$$\rho(k) = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$$

Obviamente, el modelo  $ARFIMA(0, d, 0)$  es un caso particular de los modelos  $ARFIMA(p, d, q)$ . Es por eso, que las conclusiones extraídas sobre los modelos  $ARFIMA(0, d, 0)$  pueden extenderse para toda la familia de modelos.

En general la conclusión más importante que se extrae de los modelos  $ARFIMA$  es que, cuando  $d > 0$ , la autocorrelación decrece siguiendo una tasa hiperbólica, y por consiguiente más lentamente que la autocorrelación de los modelos  $ARIMA$ , que decrecen siguiendo una tasa geométrica.

El problema es poder estimar el valor del parámetro  $d$ . Hosking propuso relacionar  $d$  con  $H$  y la utilización del análisis  $R/S$ .

#### 4.4.1. Relación entre el exponente de Hurst y el parámetro de integración fraccional

A partir de las expresiones (4.6), (4.5) y (4.1) junto con las expresiones del modelo  $ARFIMA$  es posible establecer una relación entre los parámetros  $H$  y  $d$ . En efecto, comparando las expresiones asintóticas (4.16) y (4.2), respectivamente de la función de autocorrelación de un  $ARFIMA$  y la función de autocorrelación de un proceso autosimilar, se obtiene la siguiente equivalencia,

$$2H - 2 = 2d - 1$$

O también,

$$d = H - \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, es posible establecer una clasificación entre series temporales dependiendo de su parámetro  $d$ ,

- Si  $0 < d < \frac{1}{2}$  el proceso *ARFIMA* es un proceso estacionario de memoria a largo plazo. En este caso las autocorrelaciones son positivas y decrecen hiperbólicamente hacia 0 en función del retardo.
- Si  $d = 0$  el proceso *ARFIMA* se reduce a un proceso *ARMA*, y no presenta ninguna estructura de memoria a largo plazo.
- Si  $-\frac{1}{2} < d < 0$  el proceso *ARFIMA* es un proceso antipersistente. En este caso las autocorrelaciones van alternando el signo.

#### 4.5. Análisis de la memoria a largo en las series

En este apartado seguiremos la línea metodológica descrita en los capítulos previos, para así intentar descubrir si el rechazo de la hipótesis nula de observaciones idénticamente distribuidas e independientes se debe a la existencia de memoria a largo plazo.

Ante el discutible ajuste de modelos *ARMA* a las series de incrementos diarios, nos planteamos el ajuste de modelos *ARFIMA*. Para ello, en primer lugar, debemos detectar la presencia de memoria a largo plazo en las series presentadas, estimando el exponente de Hurst. Pasamos a efectuar el análisis *R/S*, indicando detalladamente el proceso que seguimos.

1. Tomamos la serie de tipos de interés  $x_t$ , de amplitud  $M$  y la convertimos en una serie de amplitud  $N = M - 1$ , de primeras diferencias  $y_t$ ,

$$y_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, (M - 1)$$

La motivación de este primer paso ya quedó clara en el capítulo 2 y baste decir que con ello conseguimos que la serie sea estacionaria.

2. Dividimos la amplitud de la serie resultante en  $A$  subperiodos continuos de amplitud  $n$ , de forma que se cumpla que  $A \cdot n = N$ . Llamamos a cada subperiodo  $I_a$ , donde  $a = 1, 2, 3, \dots, A$ . Cada elemento de  $I_a$  lo denotaremos

por  $y_{k,a}$  donde  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Para cada  $I_a$  de amplitud  $n$ , calculamos la media según la siguiente expresión,

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{k,a}$$

3. Calculamos después la serie  $z_{k,a}$  para cada subintervalo  $I_a$ , definida como la serie acumulada de diferencias entre las observaciones y la media del subintervalo,

$$z_{k,a} = \sum_{i=1}^k (y_{i,a} - e_a) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

4. Definimos el rango  $R$  como la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de  $z_{k,a}$  para cada subperíodo  $I_a$

$$R_{I_a} = \max(z_{k,a}) - \min(z_{k,a}) \quad \text{donde } 1 \leq k \leq n$$

5. Calculamos a continuación la desviación estándar para cada subperíodo teniendo en cuenta la siguiente expresión,

$$S_{I_a} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (z_{k,a})^2}$$

6. Se toma ahora cada rango  $R_{I_a}$  y se normaliza dividiéndolo por la  $S_{I_a}$  correspondiente. De esa forma estaremos obteniendo el rango reescalado  $R_{I_a}/S_{I_a}$  para cada subperíodo  $I_a$ . Como tenemos definidos  $A$  subperíodos contiguos de amplitud  $n$ , calculamos finalmente la media de todos ellos,

$$(R/S)_n = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A (R_{I_a}/S_{I_a})$$

7. La amplitud  $n$  se incrementa para el siguiente valor entero. Utilizaremos valores de  $n$  tal que  $10 \leq n \leq \frac{N}{2}$  y repetiremos los pasos del 1 al 6 teniendo en cuenta este rango.

Consideremos como paso final la ecuación (4.14), que de forma más general se escribe como

$$(R/S)_n = c_H n^H \quad (4.17)$$

Tomando logaritmos,

$$\log (R/S)_n = \log (c_H) + H \log (n) \quad (4.18)$$

Está claro que podemos estimar  $H$  a partir de estimar la pendiente en una regresión donde tomaremos  $\log (n)$  como variable independiente y  $\log (R/S)_n$  como dependiente.

Aplicando la metodología anterior los resultados obtenidos se podrían resumir en la siguiente tabla,

Serie Temporal	$H$
1 día	0.464525974
1 semana	0.537312372
15 días	0.555255153
1 mes	0.585591089
2 meses	0.564173836
3 meses	0.61616526
6 meses	0.603238006
1 año	0.60267626

Resultado del análisis  $R/S$  sobre las series de incrementos.

Pero, tal y como señala Peters (1994), la estimación de  $H$  mediante el análisis  $R/S$  puede estar sesgada a causa de la influencia de la posible existencia de dependencia lineal entre los datos. Para evitar esto, Peters ...ltra la serie mediante la utilización de un proceso  $AR(1)$ , pero en nuestro caso, vamos a ...ltrar la serie utilizando el modelo  $ARMA$  correspondiente en cada caso. En otras palabras, estaremos el mejor  $ARMA$  sobre la serie correspondiente, siguiendo la metodología Box-Jenkins, y aplicaremos el análisis  $R/S$  sobre los residuos de los modelos estimados. Así, ...ltrando la serie con un modelo  $ARMA$  eliminamos toda la dependencia lineal a corto plazo, tal y como se indica en Beran (1994). Particularmente, este proceder supone la inclusión de un nuevo paso en la metodología propuesta con anterioridad. Concretamente situaríamos este nuevo planteamiento entre el paso 1 y el 2. Este paso no requiere la inclusión de ningún nuevo cálculo ya que, si recordamos, es justamente lo que realizamos en el capítulo 3. Por lo tanto, únicamente debemos aplicar el análisis  $R/S$  sobre los residuos de los modelos ya ajustados.

En consecuencia, obtenemos los siguientes resultados, siendo estos los resultados sobre el exponente  $H$ , que consideramos válidos:

Serie Temporal	$H$
1 día	0.636529937
1 semana	0.605977171
15 días	0.63089716
1 mes	0.558274968
2 meses	0.547394869
3 meses	0.574151935
6 meses	0.564920855
1 año	0.553938972

Resultado del análisis  $R/S$  sobre las series de residuos obtenidos de la aplicación de un modelo  $ARMA$  sobre la serie de incrementos.

Destacar dos cosas. En primer lugar los resultados obtenidos sobre las series a 1 día, 1 semana y 15 días sí nos permitirían evidenciar un comportamiento de memoria a largo plazo. En cambio, para las restantes serie podemos ver como el exponente de Hurst está muy cercano a 0,5 y podríamos aceptar la hipótesis de que es 0,5.

Por último y referente a la validación de las estimaciones de los exponentes obtenidos, Peters plantea la realización de un contraste de hipótesis para valorar si el exponente  $H$ , obtenido, es igual o diferente a  $\frac{1}{2}$ .

Básicamente, Peters mediante la realización de experimentos de simulación Monte Carlo, mejoró la fórmula de la esperanza de  $(R/S)_n$  propuesta por Anis y Lloyd (1976), obteniendo la siguiente expresión,

$$E[(R/S)_n] = \frac{\mu}{n} \left[ \frac{n}{2} \right] \left[ \frac{n\pi}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma(r)}{r}$$

que nos sirve para contrastar la hipótesis nula de que  $H = 0,5$ . Para ello deberemos obtener el valor esperado de  $H$ .  $E[H]$  será la pendiente que resulta de la realización de una regresión entre  $\log(E[(R/S)_n])$  sobre  $\log(n)$ . Por otro lado, la varianza del exponente de Hurst viene dada por la expresión

$$Var(H)_n = \frac{1}{N}$$

donde  $N$  es el número total de observaciones en la serie. Podemos observar que esta varianza no depende de  $n$ . Considerando que, según Peters (1994), los valores de  $R/S$  se distribuyen según una ley normal, podemos construir el estadístico del contraste de la siguiente forma,

$$\frac{\hat{H} - E[H]}{(Var(H))^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicando este contraste sobre nuestros datos podemos afirmar que aceptaríamos la hipótesis de que  $H = 0,5$  para las series de 1 mes, 2 meses, 3 meses, 6 meses y 1 año. No aceptamos que  $H = 0,5$  para las restantes, es decir 1 día, 1 semana y 15 días.

Pasaremos a continuación a estimar un modelo *ARFMA* sobre los datos.

### 4.6. Estimación del modelo *ARFMA*

En primer lugar, y antes de pasar a lo que se consideraría la estimación de modelos *ARFMA*, intentaremos ver si los incrementos son un ruido fraccional. Es decir, al igual que hicimos en el capítulo 2, antes de suponer que existe dependencia lineal entre las observaciones, vamos a ver si aplicando el operador diferencia fraccionaria sobre los incrementos, conseguimos una serie que pasa el test de Ljung-Box. Es decir en el fondo estamos considerando como modelo un *ARFMA*(0,  $d$ , 0).

Los resultados obtenidos sobre las series son los siguientes:

Sample: 1 2800  
Included observations: 2724

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
***	***	1	-0.448	-0.448	547.27	0.000
	**	2	-0.051	-0.314	554.24	0.000
	**	3	0.027	-0.200	556.17	0.000
	*	4	0.025	-0.101	557.81	0.000
	*	5	-0.041	-0.103	562.39	0.000
	*	6	0.010	-0.076	562.67	0.000
		7	0.012	-0.046	563.04	0.000
		8	-0.011	-0.041	563.37	0.000
		9	-0.013	-0.051	563.82	0.000
		10	0.000	-0.055	563.82	0.000
		11	0.006	-0.046	563.90	0.000
	*	12	-0.028	-0.078	566.05	0.000
		13	0.039	-0.028	570.32	0.000
		14	-0.018	-0.033	571.19	0.000
		15	0.004	-0.022	571.22	0.000
		16	0.000	-0.018	571.22	0.000
		17	-0.006	-0.027	571.31	0.000
		18	-0.007	-0.036	571.43	0.000
		19	0.015	-0.019	572.05	0.000
		20	-0.007	-0.021	572.19	0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 día.

Sample: 1 2800  
Included observations: 2697

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.024	-0.024	1.5933	0.207
*		2	-0.064	-0.065	12.830	0.002
*	*	3	-0.121	-0.124	52.081	0.000
		4	-0.036	-0.049	55.601	0.000
		5	0.065	0.046	66.968	0.000
		6	-0.033	-0.050	69.836	0.000
*	*	7	-0.059	-0.067	79.344	0.000
		8	-0.025	-0.024	81.056	0.000
	*	9	-0.044	-0.061	86.194	0.000
	*	10	-0.031	-0.063	88.766	0.000
		11	0.019	0.000	89.710	0.000
		12	0.031	0.015	92.364	0.000
		13	0.022	0.006	93.723	0.000
		14	0.006	0.008	93.823	0.000
*	*	15	-0.076	-0.072	109.37	0.000
		16	-0.015	-0.029	110.01	0.000
		17	-0.014	-0.034	110.55	0.000
		18	0.008	-0.019	110.71	0.000
		19	0.001	-0.016	110.72	0.000
		20	-0.017	-0.017	111.48	0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 semana.

Sample: 1 2800  
Included observations: 2694

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
**		1	-0.218	-0.218	128.38	0.000
		2	-0.028	-0.080	130.55	0.000
	*	3	-0.022	-0.048	131.83	0.000
*		4	-0.077	-0.101	147.69	0.000
*		5	0.083	0.041	166.34	0.000
*	*	6	-0.152	-0.145	229.15	0.000
		7	0.047	-0.021	235.23	0.000
		8	-0.001	-0.018	235.23	0.000
		9	-0.031	-0.040	237.81	0.000
		10	0.013	-0.031	238.29	0.000
		11	-0.002	0.005	238.30	0.000
		12	0.062	0.039	248.75	0.000
*	*	13	-0.118	-0.105	286.31	0.000
		14	0.063	0.023	296.91	0.000
		15	-0.047	-0.053	302.95	0.000
		16	-0.015	-0.039	303.52	0.000
		17	0.020	-0.016	304.64	0.000
		18	0.006	0.028	304.75	0.000
		19	-0.014	-0.057	305.32	0.000
		20	-0.001	0.000	305.32	0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 15 días.

114 4. Autosimilitud y memoria a largo plazo: modelos *ARFMA*

Sample: 1 2800  
Included observations: 2723

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
**	**	1	0.214	0.214	124.81 0.000
		2	-0.013	-0.062	125.27 0.000
*	*	3	-0.115	-0.104	161.37 0.000
		4	-0.033	0.015	164.35 0.000
		5	-0.017	-0.020	165.17 0.000
		6	-0.018	-0.025	166.07 0.000
		7	-0.057	-0.053	174.98 0.000
		8	-0.028	-0.009	177.11 0.000
		9	-0.054	-0.056	185.06 0.000
		10	-0.011	-0.001	185.38 0.000
		11	0.043	0.041	190.39 0.000
		12	0.038	0.006	194.27 0.000
		13	0.009	-0.004	194.50 0.000
		14	-0.045	-0.044	200.07 0.000
		15	-0.048	-0.028	206.35 0.000
*	*	16	-0.076	-0.071	222.12 0.000
		17	0.002	0.023	222.14 0.000
		18	0.001	-0.014	222.14 0.000
		19	-0.003	-0.018	222.17 0.000
		20	-0.003	0.005	222.20 0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 mes.

Sample: 1 2800  
Included observations: 2295

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
*	*	1	0.124	0.124	35.212 0.000
*	*	2	-0.092	-0.109	54.591 0.000
		3	-0.053	-0.028	61.086 0.000
		4	0.003	0.004	61.113 0.000
		5	0.020	0.011	62.016 0.000
		6	-0.039	-0.045	65.483 0.000
		7	-0.016	-0.002	66.092 0.000
		8	-0.035	-0.041	68.995 0.000
		9	0.002	0.007	69.004 0.000
		10	-0.027	-0.037	70.646 0.000
*	*	11	0.073	0.083	82.921 0.000
		12	0.044	0.017	87.423 0.000
		13	-0.040	-0.036	91.055 0.000
*	*	14	-0.073	-0.057	103.39 0.000
		15	-0.039	-0.026	106.90 0.000
	*	16	-0.047	-0.063	111.99 0.000
		17	-0.023	-0.014	113.17 0.000
		18	-0.009	-0.015	113.35 0.000
		19	0.003	0.005	113.37 0.000
		20	0.021	0.012	114.41 0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 2 meses.



#### 4.6 Estimación del modelo *ARFMA*

115

Sample: 1 2800  
Included observations: 2716

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	0.194	0.194	102.74	0.000
		2	0.031	-0.007	105.37	0.000
		3	-0.015	-0.021	106.02	0.000
		4	-0.027	-0.020	107.96	0.000
		5	0.000	0.010	107.96	0.000
		6	0.032	0.032	110.73	0.000
	*	7	-0.047	-0.062	116.66	0.000
		8	-0.016	0.004	117.34	0.000
		9	-0.017	-0.011	118.09	0.000
		10	0.000	0.005	118.09	0.000
		11	0.008	0.004	118.24	0.000
		12	0.021	0.018	119.46	0.000
		13	-0.014	-0.019	119.97	0.000
		14	-0.023	-0.020	121.37	0.000
		15	-0.050	-0.042	128.29	0.000
*		16	-0.071	-0.057	142.19	0.000
		17	0.000	0.025	142.19	0.000
		18	0.002	-0.005	142.20	0.000
		19	0.022	0.023	143.57	0.000
		20	0.008	-0.003	143.75	0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 3 meses.

Sample: 1 2800  
Included observations: 2579

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.013	-0.013	0.4219	0.516
		2	0.029	0.029	2.5645	0.277
		3	0.014	0.015	3.0677	0.381
		4	-0.025	-0.025	4.6524	0.325
		5	0.005	0.004	4.7182	0.451
		6	0.026	0.027	6.4771	0.372
		7	-0.031	-0.030	9.0048	0.252
		8	0.036	0.033	12.331	0.137
		9	-0.011	-0.009	12.671	0.178
		10	-0.007	-0.008	12.814	0.234
		11	0.002	-0.001	12.819	0.305
		12	0.019	0.021	13.711	0.320
		13	0.010	0.012	13.984	0.375
		14	-0.001	-0.005	13.988	0.451
		15	-0.006	-0.005	14.089	0.519
		16	-0.044	-0.045	19.039	0.267
		17	0.031	0.031	21.571	0.202
		18	-0.001	0.002	21.572	0.252
		19	0.005	0.004	21.631	0.303
		20	-0.022	-0.026	22.913	0.293

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 6 meses. Consideramos los 20 primeros retardos.

116 4. Autosimilitud y memoria a largo plazo: modelos *ARFMA*

Sample: 1 2800  
Included observations: 2579

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		80	-0.038	-0.040	138.26	0.000
		81	0.024	0.017	139.73	0.000
		82	0.003	0.006	139.75	0.000
		83	-0.016	-0.016	140.46	0.000
		84	0.049	0.043	146.81	0.000
		85	-0.025	-0.029	148.43	0.000
		86	-0.012	-0.018	148.83	0.000
		87	0.030	0.023	151.31	0.000
		88	0.009	0.019	151.50	0.000
		89	0.044	0.036	156.76	0.000
		90	0.016	0.018	157.47	0.000
		91	-0.036	-0.035	160.85	0.000
		92	0.002	0.007	160.85	0.000
		93	0.018	0.020	161.70	0.000
		94	0.023	0.028	163.09	0.000
		95	0.007	0.007	163.23	0.000
		96	0.002	-0.007	163.24	0.000
		97	-0.037	-0.047	166.91	0.000
		98	0.029	0.027	169.22	0.000
		99	0.011	0.015	169.55	0.000
		100	-0.034	-0.032	172.73	0.000

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 6 meses. Consideramos los 20 últimos retardos.

Sample: 1 2800  
Included observations: 2210

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	-0.069	-0.069	10.549	0.001
		2	0.041	0.037	14.330	0.001
		3	0.024	0.029	15.601	0.001
		4	-0.020	-0.018	16.459	0.002
		5	0.018	0.014	17.187	0.004
		6	0.018	0.021	17.931	0.006
		7	0.025	0.027	19.300	0.007
		8	-0.025	-0.024	20.645	0.008
		9	-0.034	-0.040	23.148	0.006
		10	0.056	0.053	30.085	0.001
		11	0.029	0.042	31.969	0.001
		12	0.036	0.036	34.835	0.000
		13	0.021	0.018	35.786	0.001
		14	-0.050	-0.050	41.461	0.000
		15	-0.016	-0.024	42.007	0.000
		16	0.001	0.001	42.012	0.000
		17	-0.018	-0.020	42.750	0.001
		18	0.029	0.024	44.622	0.000
		19	-0.010	-0.001	44.844	0.001
		20	0.016	0.018	45.405	0.001

Test de Ljung-Box para la serie de residuos obtenidos de la aplicación del operador diferencia fraccionada sobre la serie de incrementos del tipo de interés a 1 año.

Como hemos podido constatar, aplicando el operador diferencia fraccional sobre la serie de los incrementos, no conseguimos residuos incorrelacionados, por lo que ahora encontramos más justifi...cable el estimar un modelo que suponga

una dependencia lineal entre los incrementos que resultan de la aplicación del operador fraccionario. En otras palabras, al eliminar la dependencia a largo plazo, detectamos que todavía existe dependencia a corto plazo, por lo que vamos a estimar un modelo que corrija tanto la dependencia a largo plazo como la dependencia a corto plazo.

Mención especial requiere el caso de la serie a 6 meses. Si nos fijamos, presentamos dos gráficos del análisis Ljung-Box par este caso. El primero considera los primeros 20 retardos. La conclusión que se puede extraer de este primer gráfico es que los residuos pueden ser independientes. Pero, para retardos mayores observamos que la posibilidad de independencia se pierde. Destacar dos cosas: la primera, que aunque al aplicar el operador estamos extrayendo en teoría la memoria a largo plazo, vemos como en este caso particular ocurre lo contrario, conseguimos que los incrementos, para retardos cortos puedan ser independientes pero para retardos grandes exista todavía dependencia. La segunda es que pese a que el parámetro  $H$  estimado es 0,553938972..., muy cercano a 0,5, y que aceptemos mediante el contraste de hipótesis de Peters que este exponente sea igual a 0,5, vemos que esta diferencia tan pequeña, 0.053938972..., nos produce un resultado espectacular. Por lo que queda justificado el hecho de que, aunque aceptemos que los exponentes  $H$  estimados sean igual a 0,5, estimemos modelos *ARFMA*.

Para la estimación de un modelo *ARFMA* utilizamos la metodología propuesta por Hosking (1981). Para ello consideraremos el modelo *ARIMA*( $p, d, q$ ) cuya ecuación es  $\phi(L) r^d y_t = \epsilon(L) \varepsilon_t$  donde  $\varepsilon$  denota un ruido blanco. Definimos  $u_t = r^d y_t$ . En este caso consideramos que  $u_t$  es un proceso *ARMA*( $p, q$ ) y que  $x_t = \phi(L) g^{i-1} \phi(L) y_t$ , será un proceso *ARIMA*(0,  $d$ , 0). Básicamente, la metodología propuesta consiste en los siguientes pasos,

1. Estimamos  $d$  en el modelo *ARIMA*(0,  $d$ , 0):  $r^d y_t = \varepsilon_t$
2. Definimos una nueva variable  $u_t$  tal que  $u_t = r^d y_t$
3. Utilizando la metodología Box-Jenkins, identificamos y estimamos los parámetros de los operadores  $\phi(L)$  y  $\epsilon(L)$  del modelo *ARIMA*( $p, q$ ):  $\phi(L) u_t = \epsilon(L) \varepsilon_t$
4. Definimos una nueva variable  $x_t$  tal que  $x_t = \phi(L) g^{i-1} \phi(L) y_t$ , utilizando los parámetros anteriormente estimados.
5. Estimamos ahora  $d$  en el *ARIMA*(0,  $d$ , 0):  $r^{d^0} x_t = \varepsilon_t$

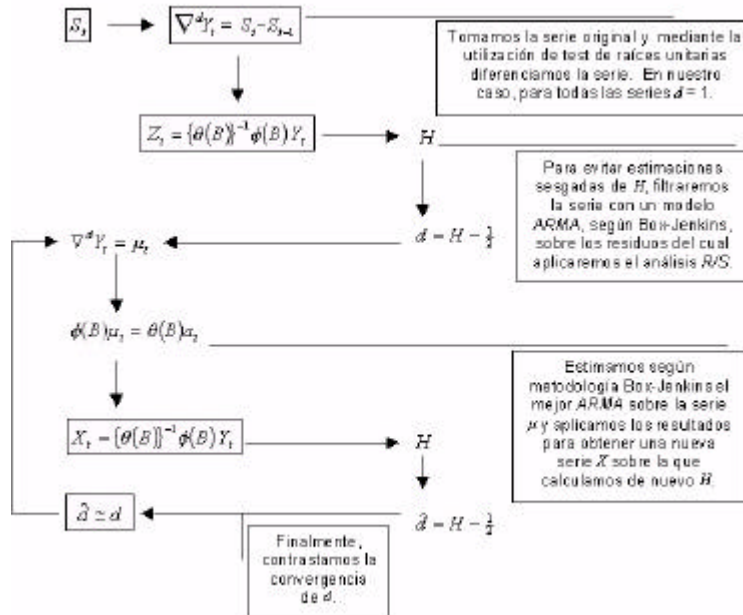
6. Contrastamos la convergencia de los parámetros  $d$ ,  $\phi$  y  $\epsilon$ . Si no convergen volvemos al paso 2.

Además Hosking propone la utilización del análisis *R/S* en los pasos 1 y 5.

La idea que hay detrás de esta metodología es la de ir separando la memoria a corto plazo de la memoria a largo plazo de la serie. Así, cuando de...nimos  $u_t$  se supone que, si la estimación de  $d$  es buena, estaremos extrayendo de la serie la memoria a largo plazo, de forma que trabajaremos con una serie que solamente tiene memoria a corto plazo. Paralelamente, si la serie  $u_t$  solo tiene memoria a corto plazo, parece lógico ajustar, sobre esta, un modelo clásico de series temporales, cuyos parámetros no estarán sesgados ni tendrán la influencia de la memoria a largo plazo. Por otro lado, si los parámetros  $\phi$  y  $\epsilon$  están bien estimados, el trabajar con los residuos,  $x_t$ , obtenidos de aplicar ese modelo clásico sobre la serie original, que suponemos tiene tanto memoria a corto plazo como a largo plazo, nos dejará únicamente la memoria a largo plazo, por lo que, si estimamos ahora, mediante el análisis *R/S*, el exponente de Hurst este será una estimación mejor que la realizada con anterioridad puesto que no estará sesgado por la memoria a corto plazo.

#### 4.6.1. Estimación de modelos *ARFMA* según la metodología Hosking sobre la serie de tipos de interés

Para hacernos una idea más clara del proceder, hemos resumido los pasos anteriormente descritos en un gráfico que nos permitirá obtener una idea aún más clara de lo que vamos a realizar,

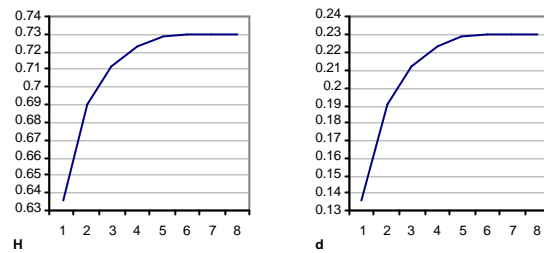


Los resultados obtenidos mediante esta metodología son los siguientes,

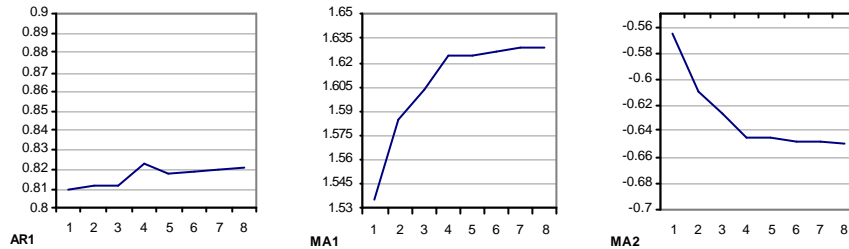
Serie de tipos de interés a 1 día

Para la serie de incrementos a 1 día el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* converge en el octavo paso, llegando a la conclusión de que el modelo adecuado es un *ARFMA*(1,0,23005957, 2). Los parámetros del modelo resultan ser:  $H = 0,73005957$ , que lógicamente implica que  $d = 0,23005957$ ,  $\phi_1 = 0,821449$ ,  $\theta_1 = 1,6298663$  y  $\theta_2 = 0,6501858$ .

- Convergencia de los parámetros: con respecto a la convergencia de los parámetros creemos que los gráficos que a continuación detallamos nos dan una idea aproximada de su comportamiento.



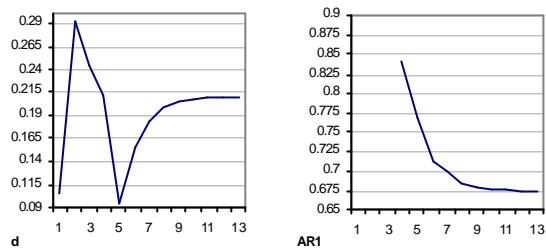
Vemos como sin ningún problema convergen los parámetros  $H$  y  $d$ . Destacar que los gráficos son muy similares ya que prácticamente hablamos del mismo comportamiento ( $d = \frac{1}{2}$ ), por lo que tenemos la misma estructura para unas coordenadas diferentes. En adelante únicamente representaremos el gráfico de  $d$ . Con respecto al caso de los parámetros de la parte *ARMA*, destacar que también convergen sin ningún problema,



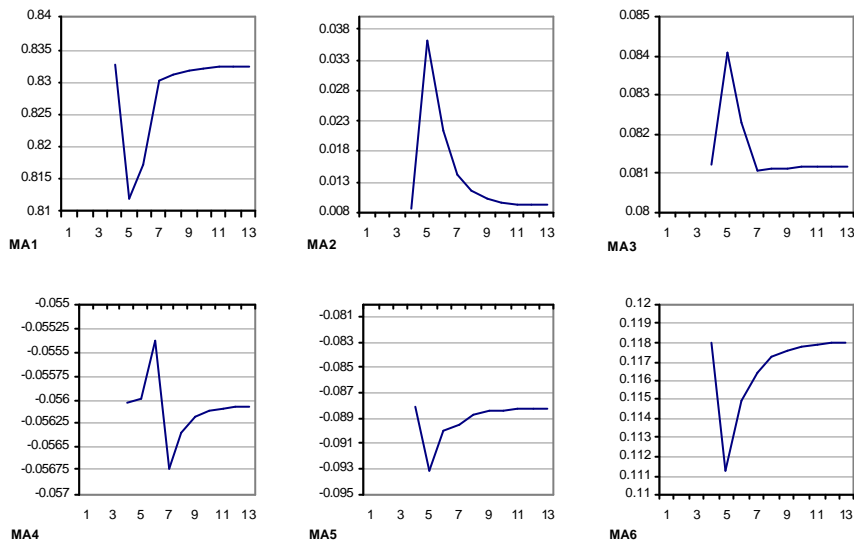
### Serie de tipos de interés a 1 semana

Para la serie de incrementos a 1 semana el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* es más lento. En este caso converge en el décimo tercer paso, obteniendo los siguientes resultados finales, llegando a la conclusión de que el modelo ajustado es un *ARFMA*(1, 0,21005869, 6), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,71005869$ ,  $d = 0,21005869$ ,  $\phi_1 = 0,67467957$ ,  $\theta_1 = 0,83228398$ ,  $\theta_2 = 0,00908933$ ,  $\theta_3 = 0,08118258$ ,  $\theta_4 = 0,05607287$ ,  $\theta_5 = 0,08818821$  y  $\theta_6 = 0,11795628$ .

- Convergencia de los parámetros: Con respecto a la convergencia de los parámetros creemos que los gráficos que a continuación detallamos nos dan una idea aproximada de su comportamiento. En un primer lugar vemos como parece que no se alcance la convergencia en la estimación del parámetro  $d$ , ya que hay unas fluctuaciones muy grandes, pero llegados a un punto se puede observar como a partir de ahí la convergencia es clara,



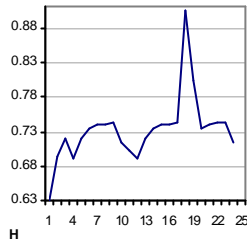
En cuanto a los parámetros de la parte de memoria a corto, puede observarse como no se representan los paso previos al paso 4. La razón es que como en cada paso realizábamos la selección del modelo *ARMA* adecuado en base al criterio de selección *CS*, hasta que dicho criterio no nos daba como mejor modelo el mismo *ARMA* no consideramos los parámetros que se incluían. Así podemos observar cual ha sido la evolución de los parámetros a partir de que el criterio *CS* nos determinase como mejor modelo un proceso *ARMA*(1, 6),



Serie de tipos de interés a 15 días

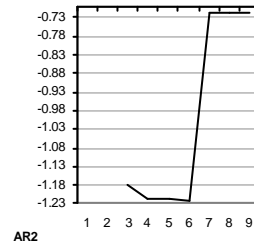
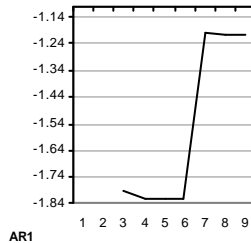
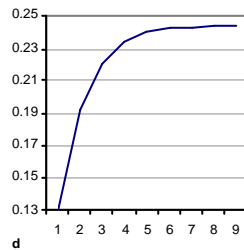
Para la serie de incrementos a 15 días, la estimación del modelo *ARFMA* no es tan sencilla como en los casos anteriores. En este caso parece que el proceso converge para una  $H \gg 0,74$  y con un *ARMA* (5, 6), pero realmente no lo hace. Cuando alcanzamos este resultado, el criterio de selección *CS*, da como mejor

*ARMA* otro totalmente distinto, para acabar volviendo al valor anterior. El resultado del proceso de convergencia puede verse en el siguiente gráfico:

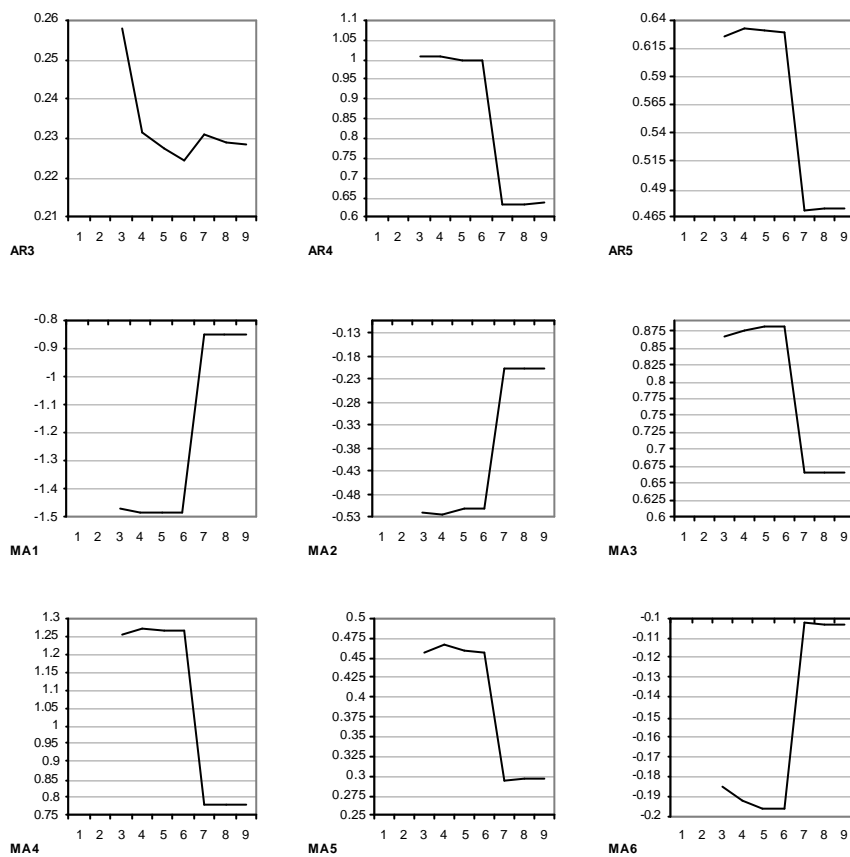


Como siempre acabábamos en el mismo valor de  $H$ , decidimos, para poder estimar un modelo *ARFMA* sobre la serie, dejar de lado el criterio de selección una vez alcanzado el modelo *ARMA* de convergencia, y seguir con ese proceso *ARMA* hasta la convergencia de los parámetros. En este caso se converge en el noveno paso, obteniendo que el modelo es un *ARFMA*(5, 0,24443668, 6), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,74443668$ ,  $d = 0,24443668$ ,  $\phi_1 = 1,2029723$ ,  $\phi_2 = 0,7162868$ ,  $\phi_3 = 0,228302$ ,  $\phi_4 = 0,6350394$ ,  $\phi_5 = 0,4725105$ ,  $\theta_1 = 0,8497194$ ,  $\theta_2 = 0,2023167$ ,  $\theta_3 = 0,6658354$ ,  $\theta_4 = 0,7807754$ ,  $\theta_5 = 0,2969186$  y  $\theta_6 = 0,1035519$ .

- Convergencia de los parámetros: Con respecto a la convergencia de los parámetros, una vez introducida la modificación, puede observarse como no hay ningún problema y todos convergen para el valor dado,



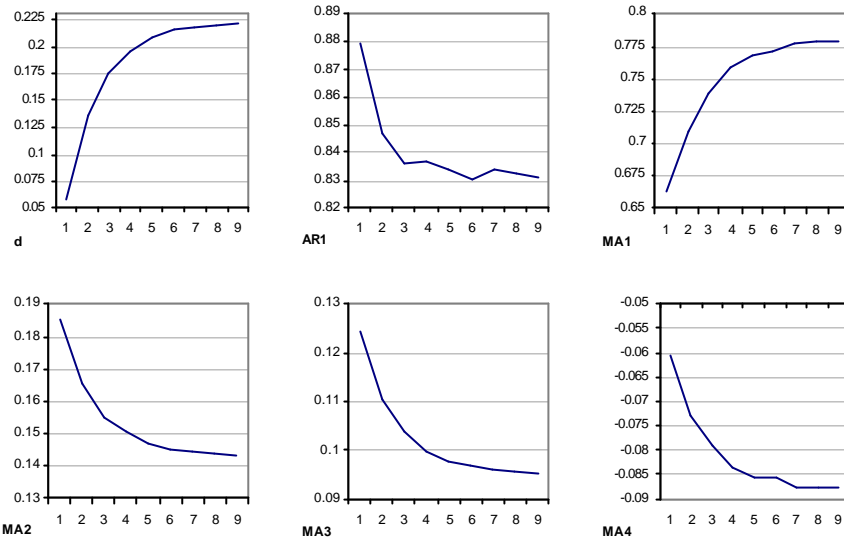




#### Serie de tipos de interés a 1 mes

Para la serie de incrementos a 1 mes el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* converge en el noveno paso, obteniendo que el modelo adecuado es un  $ARFMA(1, 0, 22155719, 4)$ , resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,72155719$ ,  $d = 0,22155719$ ,  $\phi_1 = 0,83125053$ ,  $\theta_1 = 0,77959483$ ,  $\theta_2 = 0,143161$ ,  $\theta_3 = 0,09525378$  y  $\theta_4 = 0,08775784$ .

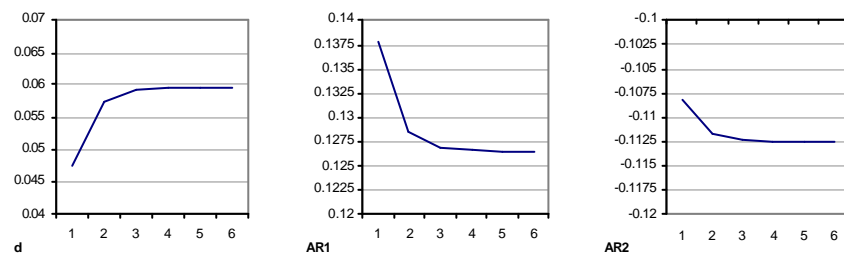
- Convergencia de los parámetros: Vemos como los parámetros convergen sin ningún problema, alcanzando el valor dado,



Serie de tipos de interés a 2 meses

Para la serie de incrementos a 2 meses el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* converge muy deprisa. Concretamente en el sexto paso. Obteniendo que el modelo adecuado es un *ARFMA*(2,0,0,0596497,0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,5596497$ ,  $d = 0,0596497$ ,  $\phi_1 = 0,12650287$  y  $\phi_2 = i 0,11246128$ .

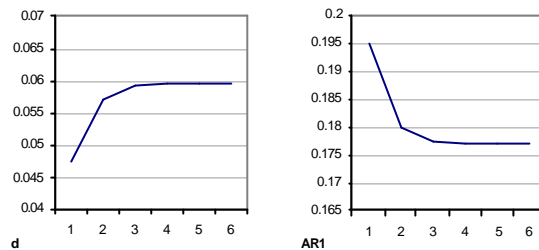
- **Convergencia de los parámetros:** Vemos como los parámetros convergen sin ningún problema, alcanzando el valor dado. En este caso podemos decir que la convergencia es tan rápida porque el modelo ...nal no es tan complejo como los anteriores.



## Serie de tipos de interés a 3 meses

Para la serie de incrementos a 3 meses, al igual que el caso anterior, el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* converge muy deprisa, concretamente en el sexto paso, obteniendo que el modelo a estimar sea un *ARFMA*(1, 0,09199286, 0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,59199286$ ,  $d = 0,09199286$  y  $\phi_1 = 0,17687785$ .

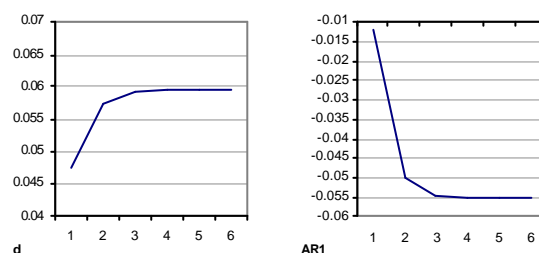
- Convergencia de los parámetros: Vemos como los parámetros convergen sin ningún problema, alcanzando el valor dado. En este caso podemos decir, igual que en el anterior, que la convergencia es tan rápida debido a que el modelo ...nal es muy sencillo.



## Serie de tipos de interés a 6 meses

Para la serie de incrementos a 3 meses, al igual que los dos casos anteriores, el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* converge muy deprisa, en el sexto paso, obteniendo que el modelo adecuado es un *ARFMA*(1, 0,09199286, 0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,60830698$ ,  $d = 0,10830698$  y  $\phi_1 = 0,05525273$ .

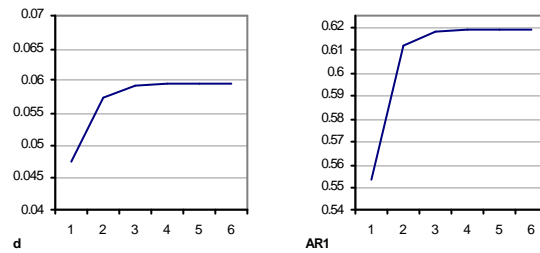
- Convergencia de los parámetros: Vemos como los parámetros convergen sin ningún problema, alcanzando el valor dado. En este caso podemos tomar la misma explicación del caso anterior,



## Serie de tipos de interés a 1 año

Para la serie de incrementos a un año, al igual que los casos anteriores, el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* converge muy deprisa, en el sexto paso, obteniendo que el modelo adecuado es un  $ARFMA(1, 0, 11912437, 0)$ , resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,61912437$   $d = 0,11912437$  y  $\phi_1 = 0,13162658$ .

- Convergencia de los parámetros: Vemos como los parámetros convergen sin ningún problema, alcanzando el valor dado. En este caso podemos tomar la misma explicación de los dos casos anteriores, ya que también acabamos estimando un proceso  $AR(1)$ ,



## 4.7. Validación de los modelos estimados

Para validar si los modelos estimados son correctos, aplicaremos, de nuevo, el test Ljung-Box sobre los residuos obtenidos. En consecuencia los resultados obtenidos para los modelos obtenidos es el siguiente,

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.010	-0.010	0.2571	0.612
		2	-0.023	-0.023	1.6842	0.431
		3	0.037	0.036	5.3924	0.145
		4	0.034	0.034	8.5900	0.072
		5	-0.022	-0.019	9.8754	0.079
		6	0.004	0.003	9.9104	0.128
		7	0.003	0.000	9.9400	0.192
		8	-0.024	-0.023	11.472	0.176
		9	-0.032	-0.032	14.340	0.111
		10	-0.019	-0.021	15.282	0.122
		11	-0.010	-0.010	15.571	0.158
		12	-0.019	-0.016	16.553	0.167
		13	0.029	0.031	18.880	0.127
		14	-0.005	-0.004	18.944	0.167
		15	0.000	0.003	18.944	0.216
		16	-0.005	-0.007	19.006	0.268
		17	-0.010	-0.014	19.274	0.313
		18	-0.005	-0.006	19.342	0.371
		19	0.013	0.011	19.828	0.405
		20	0.001	0.001	19.832	0.468
		21	0.007	0.008	19.959	0.524
		22	-0.023	-0.023	21.431	0.494
		23	-0.028	-0.028	23.513	0.431
		24	-0.019	-0.021	24.500	0.433
		25	-0.016	-0.017	25.243	0.449
		26	0.001	0.001	25.245	0.505
		27	-0.007	-0.005	25.364	0.554
		28	0.002	0.004	25.375	0.607
		29	-0.003	-0.002	25.396	0.658
		30	-0.005	-0.005	25.472	0.702

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 día.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.000	0.000	9.E-06	0.998
		2	-0.005	-0.005	0.0586	0.971
		3	-0.003	-0.003	0.0894	0.993
		4	-0.004	-0.004	0.1244	0.998
		5	-0.003	-0.003	0.1515	1.000
		6	0.018	0.018	1.0044	0.985
		7	-0.022	-0.022	2.2967	0.942
		8	0.003	0.003	2.3255	0.969
		9	-0.022	-0.022	3.6568	0.933
		10	-0.007	-0.007	3.7901	0.956
		11	0.031	0.031	6.3439	0.849
		12	0.034	0.033	9.4602	0.663
		13	0.022	0.023	10.765	0.630
		14	0.013	0.012	11.200	0.670
*		15	-0.068	-0.066	23.642	0.071
		16	-0.020	-0.020	24.694	0.075
		17	-0.014	-0.015	25.210	0.090
		18	0.001	0.001	25.215	0.119
		19	-0.006	-0.006	25.302	0.151
		20	-0.014	-0.013	25.848	0.171
		21	0.024	0.029	27.401	0.158
	*	22	-0.056	-0.058	35.908	0.031
		23	-0.010	-0.012	36.201	0.039
		24	-0.014	-0.021	36.734	0.047
		25	-0.008	-0.012	36.921	0.059
		26	-0.004	-0.002	36.973	0.075
		27	-0.014	-0.012	37.534	0.086
		28	0.016	0.024	38.238	0.094
		29	-0.019	-0.019	39.178	0.098
		30	0.010	0.008	39.425	0.116

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 semana.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.004	-0.004	0.0399	0.842
		2	0.004	0.004	0.0800	0.961
		3	0.009	0.009	0.3211	0.956
		4	-0.015	-0.015	0.9262	0.921
		5	-0.018	-0.018	1.8086	0.875
		6	-0.002	-0.002	1.8189	0.936
		7	-0.015	-0.015	2.4309	0.932
		8	0.004	0.004	2.4708	0.963
		9	0.011	0.011	2.8151	0.971
		10	0.008	0.008	2.9959	0.982
		11	0.024	0.023	4.4913	0.953
		12	0.030	0.029	6.8972	0.864
*	*	13	-0.067	-0.066	18.915	0.126
		14	0.031	0.031	21.574	0.088
*	*	15	-0.058	-0.057	30.614	0.010
		16	0.005	0.008	30.686	0.015
		17	0.005	0.004	30.751	0.021
		18	0.013	0.013	31.185	0.027
		19	-0.028	-0.029	33.305	0.022
		20	0.014	0.009	33.799	0.028
		21	-0.007	-0.007	33.942	0.037
		22	-0.047	-0.048	39.936	0.011
		23	-0.001	-0.002	39.938	0.016
		24	-0.015	-0.013	40.557	0.019
		25	-0.010	-0.005	40.803	0.024
		26	-0.007	-0.014	40.951	0.031
		27	-0.006	0.000	41.042	0.041
		28	-0.031	-0.041	43.607	0.030
		29	-0.001	0.001	43.610	0.040
		30	-0.005	-0.008	43.675	0.051

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 15 días.

Destacar que desde el retardo 16 no aceptaríamos la hipótesis de independencia.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.001	-0.001	0.0051	0.943
		2	-0.003	-0.003	0.0339	0.983
		3	-0.005	-0.005	0.0919	0.993
		4	-0.004	-0.004	0.1339	0.998
		5	0.012	0.012	0.5279	0.991
		6	0.011	0.011	0.8737	0.990
		7	-0.039	-0.039	4.9724	0.663
		8	0.014	0.014	5.4940	0.704
		9	-0.037	-0.037	9.2377	0.416
		10	0.002	0.002	9.2541	0.508
		11	0.051	0.051	16.436	0.126
		12	0.035	0.035	19.709	0.073
		13	0.016	0.017	20.433	0.085
		14	-0.025	-0.025	22.124	0.076
		15	-0.010	-0.008	22.413	0.097
*	*	16	-0.065	-0.069	33.861	0.006
		17	0.023	0.022	35.341	0.006
		18	0.006	0.007	35.444	0.008
		19	-0.006	-0.004	35.536	0.012
		20	-0.005	0.000	35.608	0.017
		21	0.018	0.020	36.456	0.019
		22	-0.019	-0.021	37.496	0.021
*	*	23	-0.072	-0.084	51.613	0.001
		24	-0.014	-0.014	52.134	0.001
		25	-0.020	-0.025	53.269	0.001
		26	-0.016	-0.013	53.980	0.001
		27	-0.032	-0.024	56.840	0.001
		28	0.005	0.011	56.911	0.001
		29	-0.005	-0.006	56.968	0.001
		30	0.008	0.000	57.140	0.002

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 mes.

Destacar que desde el retardo 15 no aceptaríamos la hipótesis de independencia.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.004	-0.004	0.0381	0.845
		2	0.003	0.003	0.0593	0.971
		3	-0.031	-0.031	2.2323	0.526
		4	-0.009	-0.009	2.4227	0.659
		5	0.017	0.017	3.0577	0.691
		6	-0.047	-0.048	8.1233	0.229
		7	-0.005	-0.006	8.1700	0.318
		8	-0.044	-0.043	12.670	0.124
		9	0.017	0.015	13.374	0.146
		10	-0.039	-0.040	16.824	0.078
*		11	0.071	0.070	28.463	0.003
		12	0.031	0.030	30.672	0.002
		13	-0.033	-0.034	33.170	0.002
*		14	-0.065	-0.067	42.966	0.000
		15	-0.029	-0.024	44.945	0.000
		16	-0.049	-0.059	50.439	0.000
		17	-0.019	-0.017	51.234	0.000
		18	-0.008	-0.010	51.391	0.000
		19	-0.003	0.001	51.407	0.000
		20	0.018	0.010	52.199	0.000
		21	-0.018	-0.019	52.946	0.000
		22	-0.052	-0.066	59.181	0.000
		23	-0.023	-0.034	60.419	0.000
		24	-0.040	-0.049	64.055	0.000
		25	-0.026	-0.023	65.567	0.000
		26	-0.039	-0.040	69.131	0.000
		27	0.020	0.021	70.096	0.000
		28	-0.018	-0.027	70.889	0.000
		29	0.046	0.034	75.722	0.000
		30	0.062	0.048	84.798	0.000

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 2 meses.

Destacar que desde el retardo 11 no aceptaríamos la hipótesis de independencia.



Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.002	0.002	0.0087	0.926
		2	-0.008	-0.008	0.1751	0.916
		3	-0.023	-0.023	1.5609	0.668
		4	-0.030	-0.030	4.0390	0.401
		5	-0.005	-0.005	4.1032	0.535
		6	0.042	0.041	8.8260	0.184
		7	-0.056	-0.057	17.259	0.016
		8	-0.006	-0.006	17.362	0.027
		9	-0.016	-0.016	18.076	0.034
		10	0.001	0.001	18.079	0.054
		11	0.004	0.001	18.132	0.079
		12	0.024	0.021	19.748	0.072
		13	-0.014	-0.011	20.292	0.088
		14	-0.012	-0.014	20.672	0.110
		15	-0.035	-0.033	23.960	0.066
		16	-0.066	-0.068	35.898	0.003
		17	0.014	0.013	36.465	0.004
		18	-0.002	-0.007	36.472	0.006
		19	0.024	0.023	38.036	0.006
		20	0.004	0.000	38.072	0.009
		21	0.020	0.023	39.221	0.009
		22	-0.066	-0.066	51.284	0.000
		23	-0.049	-0.057	57.806	0.000
		24	-0.049	-0.050	64.365	0.000
		25	0.000	-0.006	64.365	0.000
		26	0.001	-0.002	64.368	0.000
		27	0.002	-0.004	64.378	0.000
		28	-0.004	0.003	64.415	0.000
		29	-0.010	-0.018	64.676	0.000
		30	0.015	0.009	65.287	0.000

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 3 meses.

Destacar que desde el retardo 16 no aceptaríamos la hipótesis de independencia.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.000	0.000	0.0006	0.981
		2	0.006	0.006	0.0984	0.952
		3	-0.001	-0.001	0.0996	0.992
		4	-0.036	-0.036	3.4274	0.489
		5	-0.004	-0.004	3.4594	0.630
		6	0.018	0.019	4.3248	0.633
		7	-0.036	-0.036	7.7066	0.359
		8	0.030	0.028	9.9789	0.267
		9	-0.016	-0.015	10.609	0.303
		10	-0.010	-0.009	10.875	0.367
		11	0.001	-0.002	10.876	0.454
		12	0.019	0.020	11.775	0.464
		13	0.011	0.011	12.073	0.522
		14	-0.001	-0.004	12.075	0.600
		15	-0.008	-0.005	12.238	0.661
		16	-0.043	-0.044	17.149	0.376
		17	0.031	0.033	19.647	0.293
		18	0.002	0.002	19.655	0.353
		19	0.005	0.005	19.721	0.412
		20	-0.022	-0.025	20.962	0.399
		21	-0.011	-0.009	21.256	0.443
		22	-0.002	0.001	21.266	0.504
		23	-0.036	-0.039	24.564	0.373
		24	0.012	0.015	24.940	0.409
		25	-0.005	-0.009	25.001	0.462
		26	-0.006	-0.005	25.104	0.513
		27	-0.003	-0.006	25.120	0.568
		28	-0.040	-0.037	29.271	0.399
		29	0.029	0.030	31.466	0.344
		30	-0.003	-0.008	31.491	0.392

Test de *Ljung* y *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 6 meses.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
				1	-0.001 -0.001 0.0007 0.980
				2	-0.001 -0.001 0.0017 0.999
				3	0.003 0.003 0.0208 0.999
				4	-0.036 -0.036 2.8248 0.588
				5	0.004 0.004 2.8530 0.723
				6	0.011 0.011 3.1375 0.791
				7	0.015 0.015 3.6075 0.824
				8	-0.038 -0.039 6.7404 0.565
				9	-0.042 -0.042 10.625 0.302
				10	0.053 0.054 16.864 0.077
				11	0.036 0.038 19.743 0.049
				12	0.040 0.038 23.334 0.025
				13	0.018 0.015 24.071 0.030
				14	-0.054 -0.050 30.558 0.006
				15	-0.022 -0.018 31.601 0.007
				16	-0.002 0.000 31.606 0.011
				17	-0.016 -0.020 32.142 0.014
				18	0.027 0.024 33.795 0.013
				19	-0.005 0.000 33.848 0.019
				20	0.011 0.015 34.131 0.025
				21	-0.048 -0.048 39.288 0.009
				22	-0.011 -0.017 39.557 0.012
				23	0.003 -0.007 39.580 0.017
				24	-0.003 0.000 39.596 0.024
				25	0.035 0.036 42.409 0.016
				26	0.000 0.005 42.409 0.022
				27	0.010 0.018 42.628 0.029
				28	0.013 0.012 43.030 0.035
				29	-0.008 -0.010 43.159 0.044
				30	0.025 0.017 44.580 0.042

Test de *Ljung* | *Box* para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 año.

Destacar que desde el retardo 11 no aceptaríamos la hipótesis de independencia.

A grandes rasgos, observando los primeros treinta retardos del test de Ljung-Box, no está claro que los datos analizados pasen el test y que por lo tanto los residuos sean variables independientes. En unos casos podríamos decir que sí, pero hay otros en los que vemos que claramente no pasan el test. Si ampliamos el rango de los retardos, hasta 100, las dudas se despejan y observaremos que para retardos su...cientemente grandes, los residuos no son independientes,

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	-0.006	-0.001	159.42	0.000
				81	0.004	0.004	159.46	0.000
				82	0.008	0.005	159.64	0.000
				83	-0.005	-0.022	159.71	0.000
				84	-0.006	-0.013	159.81	0.000
				85	0.014	-0.001	160.37	0.000
				86	0.013	0.011	160.87	0.000
				87	0.010	0.012	161.13	0.000
				88	0.013	0.010	161.62	0.000
				89	0.019	0.011	162.58	0.000
				90	0.003	0.000	162.60	0.000
				91	-0.003	-0.008	162.62	0.000
				92	-0.002	0.000	162.63	0.000
				93	-0.004	-0.006	162.67	0.000
				94	0.002	-0.003	162.68	0.000
				95	0.008	0.001	162.88	0.000
				96	0.020	0.010	164.06	0.000
				97	0.011	0.003	164.38	0.000
				98	0.020	0.012	165.56	0.000
				99	0.017	0.010	166.34	0.000
				100	0.025	0.025	168.06	0.000

Detalle del test *Ljung* *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 día.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	-0.038	-0.035	360.42	0.000
				81	0.010	0.024	360.73	0.000
				82	-0.032	-0.025	363.60	0.000
				83	0.004	0.004	363.64	0.000
				84	-0.006	-0.033	363.73	0.000
				85	0.064	0.047	375.27	0.000
				86	-0.043	-0.046	380.35	0.000
				87	0.037	0.046	384.25	0.000
				88	-0.004	0.018	384.29	0.000
				89	0.009	0.000	384.51	0.000
				90	0.015	-0.002	385.10	0.000
				91	-0.009	-0.029	385.33	0.000
				92	0.003	-0.001	385.35	0.000
				93	0.015	0.001	386.01	0.000
				94	-0.017	-0.008	386.85	0.000
				95	0.042	0.029	391.82	0.000
				96	0.024	0.012	393.48	0.000
				97	0.006	-0.003	393.59	0.000
				98	0.022	-0.009	394.90	0.000
				99	0.020	0.018	395.99	0.000
				100	-0.011	0.011	396.32	0.000

Detalle del test *Ljung* *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 semana.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	-0.018	-0.042	317.86	0.000
				81	-0.016	0.004	318.57	0.000
				82	0.013	0.017	319.06	0.000
				83	-0.017	-0.004	319.88	0.000
				84	0.006	-0.010	320.00	0.000
				85	0.003	-0.007	320.02	0.000
				86	0.032	0.004	322.78	0.000
				87	0.011	0.002	323.13	0.000
				88	-0.028	-0.047	325.38	0.000
				89	0.010	0.013	325.66	0.000
				90	0.011	-0.004	325.97	0.000
				91	0.004	0.013	326.01	0.000
				92	-0.020	-0.013	327.07	0.000
				93	0.011	-0.008	327.38	0.000
				94	-0.035	-0.059	330.73	0.000
				95	0.038	0.033	334.84	0.000
				96	0.026	0.023	336.69	0.000
				97	0.041	0.012	341.35	0.000
				98	0.023	-0.007	342.88	0.000
				99	0.007	0.016	343.02	0.000
				100	0.035	0.025	346.38	0.000

Detalle del test *Ljung* y *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 15 días.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	-0.039	-0.063	393.94	0.000
				81	-0.011	-0.029	394.27	0.000
				82	0.009	0.028	394.49	0.000
				83	-0.031	-0.021	397.23	0.000
				84	-0.009	-0.011	397.47	0.000
				85	0.018	-0.022	398.37	0.000
				86	0.043	0.009	403.49	0.000
				87	-0.013	-0.015	403.96	0.000
				88	-0.038	-0.033	408.03	0.000
				89	-0.001	0.023	408.03	0.000
				90	0.010	0.003	408.28	0.000
				91	-0.005	0.001	408.35	0.000
				92	0.001	-0.023	408.35	0.000
				93	0.022	0.003	409.72	0.000
				94	0.012	0.021	410.12	0.000
				95	0.007	0.009	410.24	0.000
				96	0.029	-0.001	412.59	0.000
				97	0.025	-0.002	414.36	0.000
				98	0.016	-0.012	415.11	0.000
				99	0.029	0.040	417.42	0.000
				100	-0.018	0.008	418.32	0.000

Detalle del test *Ljung* y *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 mes.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		80	0.004	-0.001	261.27	0.000
		81	-0.029	-0.014	263.30	0.000
		82	-0.003	-0.034	263.32	0.000
		83	0.020	0.012	264.27	0.000
		84	0.006	-0.011	264.37	0.000
		85	-0.004	0.005	264.40	0.000
		86	0.023	0.047	265.67	0.000
		87	0.041	0.024	269.67	0.000
		88	-0.029	-0.014	271.65	0.000
		89	0.040	0.030	275.39	0.000
		90	0.035	0.028	278.28	0.000
		91	0.012	-0.014	278.62	0.000
		92	-0.025	-0.020	280.15	0.000
		93	0.042	0.042	284.45	0.000
		94	0.057	0.049	292.09	0.000
*		95	0.078	0.047	306.48	0.000
		96	0.019	-0.005	307.35	0.000
		97	-0.042	-0.018	311.58	0.000
*		98	0.118	0.090	345.11	0.000
		99	0.001	0.002	345.11	0.000
		100	-0.013	-0.015	345.53	0.000

Detalle del test *Ljung* *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 2 meses.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		80	0.021	0.013	263.32	0.000
		81	-0.029	-0.022	265.72	0.000
		82	-0.018	-0.010	266.68	0.000
		83	0.017	0.037	267.53	0.000
		84	-0.004	-0.007	267.57	0.000
		85	-0.002	-0.010	267.58	0.000
		86	0.027	-0.008	269.67	0.000
		87	-0.003	0.003	269.69	0.000
		88	-0.054	-0.039	277.81	0.000
		89	0.016	0.012	278.54	0.000
		90	-0.012	-0.003	278.97	0.000
*		91	-0.062	-0.044	289.94	0.000
		92	0.030	0.026	292.46	0.000
		93	0.041	0.041	297.23	0.000
		94	0.001	0.014	297.24	0.000
		95	0.025	-0.003	299.05	0.000
		96	0.011	0.010	299.38	0.000
		97	0.004	-0.005	299.41	0.000
		98	0.002	-0.011	299.42	0.000
		99	-0.006	0.002	299.52	0.000
		100	-0.036	-0.007	303.09	0.000

Detalle del test *Ljung* *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 3 meses.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	-0.037	-0.041	136.41	0.000
				81	0.022	0.018	137.71	0.000
				82	0.002	0.004	137.72	0.000
				83	-0.016	-0.015	138.40	0.000
				84	0.047	0.042	144.40	0.000
				85	-0.025	-0.031	146.11	0.000
				86	-0.014	-0.017	146.62	0.000
				87	0.029	0.022	148.94	0.000
				88	0.010	0.018	149.18	0.000
				89	0.045	0.036	154.48	0.000
				90	0.015	0.017	155.09	0.000
				91	-0.038	-0.034	158.88	0.000
				92	-0.001	0.008	158.88	0.000
				93	0.018	0.020	159.71	0.000
				94	0.023	0.028	161.08	0.000
				95	0.007	0.007	161.20	0.000
				96	-0.001	-0.008	161.20	0.000
				97	-0.038	-0.046	165.16	0.000
				98	0.028	0.028	167.21	0.000
				99	0.009	0.012	167.44	0.000
				100	-0.036	-0.033	170.85	0.000

Detalle del test *Ljung* | *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 6 meses.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	0.025	0.016	126.79	0.001
				81	0.012	0.006	127.12	0.001
				82	0.019	0.010	127.95	0.001
				83	-0.006	-0.007	128.02	0.001
				84	-0.013	-0.008	128.43	0.001
				85	-0.008	-0.020	128.57	0.002
				86	-0.034	-0.032	131.17	0.001
				87	-0.009	-0.027	131.35	0.002
				88	0.028	0.028	133.16	0.001
				89	0.035	0.044	136.05	0.001
				90	0.026	0.020	137.62	0.001
				91	-0.015	-0.013	138.12	0.001
				92	0.018	0.018	138.89	0.001
				93	-0.008	-0.013	139.03	0.001
				94	0.037	0.031	142.24	0.001
				95	-0.003	-0.012	142.26	0.001
				96	-0.053	-0.054	148.69	0.000
				97	0.009	0.021	148.86	0.001
				98	-0.058	-0.057	156.73	0.000
				99	0.030	0.026	158.85	0.000
				100	0.011	-0.020	159.16	0.000

Detalle del test *Ljung* | *Box* desde el retardo 80 hasta 100 para la serie de residuos obtenidos del ajuste de un modelo *ARFIMA* sobre la serie de diferencias del tipo de interés a 1 año.

### 4.8. Comentarios sobre los resultados obtenidos

Aunque habíamos introducido la modelización mediante procesos *ARFIMA* para intentar que los residuos fuesen totalmente incorrelacionados, vemos que

hemos fracasado en ese objetivo. En ese sentido podemos decir que los modelos *ARFIMA* no son adecuados. De todas maneras, es una conclusión discutible. Para hacernos una idea de lo ocurrido observemos la siguiente tabla donde hemos representado el antes y el después de la modelización *ARFIMA*:

Serie Temporal	Modelización <i>ARIMA</i>	Modelización <i>ARFIMA</i>
Diferencias 1 día	<i>ARMA</i> (3, 1)	<i>ARFIMA</i> (1 : 0.23 : 2)
Diferencias 1 semana	<i>ARMA</i> (1, 6)	<i>ARFIMA</i> (1 : 0.21 : 6)
Diferencias 15 días	<i>ARMA</i> (6, 6)	<i>ARFIMA</i> (5 : 0.24 : 6)
Diferencias 1 mes	<i>ARMA</i> (0, 3)	<i>ARFIMA</i> (1 : 0.22 : 4)
Diferencias 2 meses	<i>ARMA</i> (2, 0)	<i>ARFIMA</i> (2 : 0.059 : 0)
Diferencias 3 meses	<i>ARMA</i> (1, 0)	<i>ARFIMA</i> (1 : 0.091 : 0)
Diferencias 6 meses	<i>ARMA</i> (1, 1)	<i>ARFIMA</i> (1 : 0.108 : 0)
Diferencias 1 año	<i>ARMA</i> (2, 1)	<i>ARFIMA</i> (1 : 0.191 : 0)

Esta tabla indica los resultados obtenidos para las series analizadas. Recordemos que todo este análisis se realizaba sobre las series de incrementos, y por consiguiente, las series originales se comportarán según los modelos propuestos en la tabla siguiente:

Serie Temporal	Modelización <i>ARIMA</i>	Modelización <i>ARFIMA</i>
1 día	<i>ARIMA</i> (3, 1, 1)	<i>ARFIMA</i> (1 : 1.23 : 2)
1 semana	<i>ARIMA</i> (1, 1, 6)	<i>ARFIMA</i> (1 : 1.21 : 6)
15 días	<i>ARIMA</i> (6, 1, 6)	<i>ARFIMA</i> (5 : 1.24 : 6)
1 mes	<i>ARIMA</i> (0, 1, 3)	<i>ARFIMA</i> (1 : 1.22 : 4)
2 meses	<i>ARIMA</i> (2, 1, 0)	<i>ARFIMA</i> (2 : 1.059 : 0)
3 meses	<i>ARIMA</i> (1, 1, 0)	<i>ARFIMA</i> (1 : 1.091 : 0)
6 meses	<i>ARIMA</i> (1, 1, 1)	<i>ARFIMA</i> (1 : 1.108 : 0)
1 año	<i>ARIMA</i> (2, 1, 1)	<i>ARFIMA</i> (1 : 1.191 : 0)

En resumen, notamos una mejora al introducir la modelización *ARFIMA*, que básicamente consiste en la reducción del número de parámetros a estimar en los modelos *ARMA*. Concretamente, observamos esa mejoría para las series a 1 día, 15 días, 6 meses y 1 año, lo que implica que los modelos son mejores ya que el riesgo de cometer errores de estimación disminuye al tratar con un menor número de parámetros. En los casos de 1 semana, 2 meses y 3 meses la inclusión de la modelización *ARFIMA* no aporta ninguna mejora en cuanto al número de parámetros a estimar. Por último, solamente en el caso de la serie a 1 mes el número de parámetros a estimar se incrementa.

Por lo expuesto, podemos considerar que nuestro análisis no acaba aquí.

Aunque hemos extraído toda la memoria, tanto a corto como largo plazo, no hemos eliminado todas las posibles patologías, ya que como podemos contrastar



mediante el test de Ljung-Box, los residuos todavía presentan correlaciones. Es por ello que debemos seguir nuestro camino y contrastar otros modelos.

Hasta ahora hemos trabajado cuestionando la hipótesis de independencia de los incrementos, llegando a los resultados obtenidos, que no son lo suficientemente satisfactorios.

Nos proponemos en lo que sigue poner en cuestión la hipótesis de que los incrementos sean idénticamente distribuidos.

Notemos para empezar que si observamos tanto las series originales como las series de sus incrementos, detectamos instantes en los que las gráficas se disparan, alcanzando valores anormales. Esto se debe a la sensibilidad del tipo de interés con respecto a otras variables macroeconómicas, como puede ser por ejemplo respecto a la cotización bursátil o en particular al caso que nos ocupa, con respecto al tipo de cambio. Concretamente estas puntas se corresponden con el período de continuas devaluaciones de la peseta, que se produjeron durante los años 1992 y 1993 para hacer más competitiva la economía española. Estas perturbaciones podrían causar que la varianza no se mantuviese constante para toda la serie. Estamos por tanto cuestionando la estacionariedad en varianza de la serie.

El siguiente paso lógico será por tanto proponer un modelo que contemple esta no estacionariedad, como por ejemplo los modelos no lineales estocásticos *GARCH*. Pero previamente, como lo que proponemos es pasar de modelos lineales a modelos no lineales, vamos a estudiar la posibilidad que la serie se pueda modelizar mediante un modelo no lineal determinista. Ello nos obliga a realizar un cierto alto en el camino y dar un paseo por la llamada matemática del caos.



## Capítulo 5

# Un paseo por el caos determinista

Usted cree en un Dios que juega a los dados, y yo en la ley y el orden absolutos.

Albert Einstein, carta a Max Born

### 5.1. Introducción a la matemática del caos

Desde siempre la naturaleza humana, debido a ciertos impulsos innatos, ha intentado explicar todo aquello que la rodea, comprender las regularidades de la realidad o encontrar las leyes ocultas tras la complejidad del universo mediante la creación de modelos que intentaban explicar el mundo real como si se tratara del mecanismo de un reloj. Todo mediante leyes exactas, que funcionaban como engranajes perfectamente ajustados para llegar a determinar una verdad con mayúsculas.

Así, leyes inmutables determinaban el movimiento de cada partícula del universo de forma exacta y para siempre. Todo era, o podía llegar a ser de alguna forma, determinista.

Pero en las últimas dos décadas, ha surgido un nuevo planteamiento científico que pretende el nacimiento de un nuevo paradigma, dejando al margen todo aquel punto de vista desenvuelto durante los últimos tres siglos y que nos permite la definición de la moderna ciencia de la complejidad y del caos. Nos hemos dado cuenta de que sistemas que obedecen a leyes deterministas pueden

producir comportamientos que supuestamente parecen aleatorios. Es decir, el orden puede dar lugar a la creación de cierto tipo de irregularidades (caos), pudiendo comprobarse que de sistemas dinámicos lineales, con comportamientos observados simples y previsible, se ha pasado a sistemas dinámicos complejos, cuya complejidad se debe a la no linealidad de la dinámica subyacente. Recibiendo este tipo de comportamiento el nombre de caótico. En otras palabras, parte de lo que antes se creía a ciencia cierta determinista, ahora, por el contrario, pasa a considerarse bajo un trasfondo determinista caótico.

En definitiva, conceptos que hasta ahora estaban claros y además se consideraban de simplicidad extrema, se convierten en complicados esquemas de la realidad. Pero por otro lado y como contrapartida, aquello que creíamos complicado puede volverse sencillo y fenómenos que parecen aleatorios o faltos de estructura pueden obedecer leyes simples, o sea, podemos obtener explicaciones sobre cosas que anteriormente eran intratables.

Este cambio de planteamiento era previsible. Sistemas dinámicos que hasta el momento de...nían comportamientos claros, a la hora de aplicarlos en la práctica, o mejor dicho, a la hora de contrastar su efectividad con datos reales, fracasaban estrepitosamente. Era de esperar una salida coherente al problema y por lo tanto el nacimiento de una nueva visión científ...ca de la realidad.

Este es el caso, por otro lado evidente, de los fenómenos económicos. Es obvia la insu...ciencia de las herramientas utilizadas a la hora de modelizar tales fenómenos que protegidas bajo la cláusula de *ceteris paribus*, se permitían el lujo de ignorar la complejidad del problema objeto de estudio.

El caos, es un descubrimiento cuyas implicaciones han provocado la rede...nición del pensamiento científ...co, dando pie al nuevo concepto de matemática del caos.

### 5.1.1. Una visión histórica

Se dice que la dinámica caótica comenzó a caballo entre el siglo *XIX* y el *XX* por el que es considerado por muchos como el último universalista, el matemático francés Henri Poincaré.

Poincaré, entre sus innumerables descubrimientos e invenciones, fundó la moderna teoría cualitativa de los sistemas dinámicos.

Promovido por el problema de la órbita de tres cuerpos idealizado, denominado también modelo reducido de Hill, el cual se aplica cuando tenemos un sistema con tres cuerpos y donde uno de los tres tiene una masa tan pequeña

que no afecta, en términos de atracción, a los otros dos, pero paradójicamente estos sí que le afectan a él, llegó a resultados interesantes.

La idea es la siguiente, imaginemos un universo que contenga únicamente a los planetas Neptuno, Plutón y una partícula de polvo interestelar, de forma que la partícula de polvo para Neptuno o Plutón es como si no existiera, y ambos dan vueltas alrededor de su centro de gravedad mutuo (moviéndose en una especie de elipse tal y como describieron Kepler y Newton), pero la partícula de polvo por el contrario se ve afectada tanto por el empuje gravitatorio de Neptuno como el de Plutón. Es decir, la partícula se siente atraída por los planetas de forma que su movimiento está situado entre el campo gravitatorio de los mismos.

El problema que se nos plantea podría resumirse en la siguiente pregunta:

Dado un sistema con las características anteriormente descritas, el movimiento que realiza la partícula de polvo describe una elipse perfecta, tal y como sugieren las leyes de Kepler, o por el contrario, pasa algo totalmente diferente.

Para modelizar el planteamiento expuesto, Poincaré decidió aplicar su método de la sección transversal, o también denominado sección de Poincaré, al modelo reducido de Hill.

Cabe abrir un paréntesis en la explicación y centrarnos en lo que acabamos de considerar como sección de Poincaré, siendo de obligada referencia su explicación.

Supongamos un sistema, en el cual tenemos un punto que evoluciona con el tiempo y cuyo movimiento consiste en un círculo que regresa siempre al mismo punto de donde partió. En otras palabras genera un bucle.

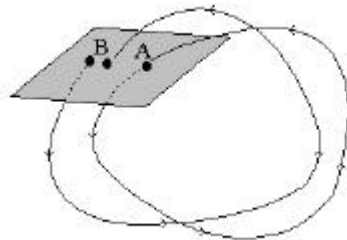


Al hecho de que el punto realice todo este proceso, regresando al punto de partida lo denominaremos periodo.

Ahora bien, Poincaré considera un sistema similar, pero con la particularidad de que una vez transcurrido el periodo no sabemos si el punto vuelve al

lugar de partida. El problema es determinar dónde se encuentra el punto una vez pasa el periodo.

Para poder determinar la situación del punto una vez transcurrido el periodo, se planteó la idea de considerar un plano, o sección, situado en la trayectoria del punto, de forma que si el movimiento es de carácter periódico acabará alcanzando el plano en el mismo punto (caso A). Por el contrario, si no es periódico, lo cruzará en otro diferente (caso B). En otras palabras, en lugar de observar todos los estados del sistema, basta con mirar unos pocos, simplemente aquellos representados en la sección.



Como hemos dicho, retomando el hilo que nos exigía detenernos para dar una pincelada en lo referente al método de la sección super...cial, Poincaré aplica su sección al modelo reducido de Hill, tal y como hemos señalado, para hallar movimientos periódicos de la partícula de polvo. Pero al hacerlo, se encontró con algo muy diferente a lo que esperaba. Se topó con un comportamiento demasiado complicado y poco intuitivo, tan extraño que no se atrevió ni a dibujarlo (según señala en su tercer volumen de su "Nuevos métodos de mecánica celeste"). Algo tan complicado que no supo muy bien cómo cali...carlo pero que hoy catalogaríamos como caótico.

La idea que deberíamos extraer es la siguiente: pueden tener lugar dinámicas realmente complicadas en modelos tan simples como el modelo de Hill, como Poincaré fue capaz de demostrar.

Con posterioridad, podemos destacar notorios e importantes estudios científicos sobre dinámica caótica de G. Birkhoff, M. L. Cartwright y L.E. Littlewood y matemáticos soviéticos como A. N. Kolmogorov y sus ayudantes. Sobretudo destacar a S. Smale con su idea de explicar la aparición del caos como un proceso donde se conjugan dos acciones estirar y doblar.

A pesar de todos estos apoyos en su favor, la posibilidad de incluir caos

en sistemas reales físicos no era un tema ampliamente aceptado, hasta hace bien poco. Las razones argumentadas eran, en primer lugar, que los trabajos matemáticos eran difíciles de leer por aquellos que trabajaban en otras áreas de conocimiento y, en segundo lugar, se planteaba el hecho de que los teoremas no eran lo suficientemente consistentes, como para que los investigadores en esos otros campos pudieran incluir en sus sistemas, o modelos, ese tipo de comportamiento.

Actualmente esta situación está cambiando drásticamente, gracias al extenso número de soluciones, cada vez mayor, que se plantean a partir de sistemas dinámicos en ordenadores.

### 5.1.2. Una definición de caos

Antes de profundizar más en el estudio de la ciencia del caos, nos gustaría dar una definición del concepto que tratamos. Así, como primera idea, en sentido básicamente anecdótico, sería interesante destacar el hecho de que la palabra gas fue inventada por el químico holandés J. B. Van Helmont en 1632, con una similitud deliberada y muy suspicaz hacia la palabra griega caos.

El término caos fue introducido con su presente connotación por J. Yorke y T. Y. Li en 1976. No es un concepto plenamente definido, ello se debe a que es un tema que hoy en día está, en pleno desarrollo. Podríamos decir que el caos todavía está en su etapa de formación. Por ejemplo, Boltzmann lo utiliza en el sentido de resultado eventual en teorías ergódicas de sistemas dinámicos, y Poincaré, del cual ya hemos hablado con anterioridad, tiene una clara imagen del comportamiento caótico de sistemas dinámicos que suceden cuando interactúan sistemas dinámicos estables e inestables.

Pero normalmente en muchos manuales matemáticos, caos es utilizado para indicar el comportamiento de soluciones de sistemas dinámicos que son altamente irregulares y frecuentemente inesperados, como por ejemplo Wegner y Tyler (1995), que realizan la siguiente afirmación :

**Definición 5.1** Un sistema dinámico es una colección de partes que interactúan entre sí y se modifican unas a otras a través del tiempo. Un sistema dinámico es caótico si los pequeños cambios efectuados en las condiciones iniciales del sistema provocan, más tarde, importantes cambios en el sistema.

Son definiciones en esa línea, es decir, nos dan una explicación de cuándo aparece caos, pero no nos dan una definición clara y concisa de lo que es.

Destacar que sobretodo en esta última definición, toma forma la idea de implicaciones a posteriori, idea que se volverá a tener en cuenta más tarde.

Cabe destacar, llegado a este punto, que podemos hallar una concreción del significado de caos en Medio (1992), pero no la da el propio Medio, sino que éste acude a una definición realizada en una conferencia de la Royal Society de Londres de 1986, y en la cual se define caos como "comportamiento estocástico ocurrido en un sistema". No consideramos que sea una definición clara y contundente, al menos no es lo que se merece. Si deseamos una definición más rigurosa debemos acudir a la facilitada por Brock y Sayers (1988),

**Definición 5.2** La serie temporal  $\{a_t\}$  tiene una explicación caótica determinista  $C^2$  si existe un sistema  $(h, F, x_0)$  tal que:

$a_t = h(x_t)$ ,  $x_{t+1} = F(x_t)$ ,  $x(0) = x_0$ , donde  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos veces continuamente diferenciables. Además  $F$  tiene una medida natural  $\mu$  que es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue ( $\mu$  es no degenerada), lo que implica que el proceso es ergódico. Todas las trayectorias  $\{x_t\}$  se hallan en un atractor  $A$ ,  $x(0)$  es la condición inicial,  $h$  es una función agregadora del vector de estado desconocido  $x_t$  y  $F$ , que es determinista. Es la dinámica desconocida que determina la evolución del estado.

Pero vemos cómo en ninguna de las definiciones se plantea una explicación y unas características concretas y básicas en la detección del caos. Lo que intentaremos hacer, por analogía con los entendidos del tema, es explicar cuándo aparece el caos en un sistema dinámico. Pero previamente al análisis del caos es de necesaria referencia acudir a los sistemas dinámicos, para así tener una idea más clara sobre lo que vamos a tratar.

### 5.1.3. Sistemas dinámicos. Una introducción

Hemos visto que en las reglas de juego de la teoría del caos participan los denominados sistemas dinámicos. Sin entrar en definiciones exhaustivas, ni estudiar el equilibrio, estabilidad o inestabilidad de tales sistemas, sólo pretendemos presentar una serie de conceptos de utilidad en el desarrollo de este capítulo.

#### Justificación y antecedentes

Como ya hemos considerado anteriormente, para poder modelizar la realidad con todas sus connotaciones resulta imprescindible su contextualización en un ámbito dinámico y sobretodo cuando de fenómenos económicos se trata. De



ahí que en la Ciencia Económica al hablar de estática estamos reduciendo, o mejor dicho, estamos simpli...cando de manera exagerada la, tal y como indica el doctor Fernández Díaz et al. (1994), naturaleza esencialmente dinámica del fenómeno económico. Cabría, así pues, destacar la importancia decisiva del enfoque dinámico y, una vez aquí, deberíamos centrar nuestra atención en los sistemas dinámicos.

Se podría considerar a Newton como el padre de la teoría matemática de los sistemas dinámicos, gracias al diseño de una teoría de los movimientos de distintos astros, basándose en los conceptos físicos de Galileo y Kepler. Pero así como reconocemos a Newton como padre de la criatura, deberemos reconocer que gran parte del mérito del impulso del análisis de los sistemas dinámicos fue debido a Leibniz, quien aportó las anotaciones y formalizaciones necesarias en sus obras *calculus differentialis* y *calculus summatorius*.

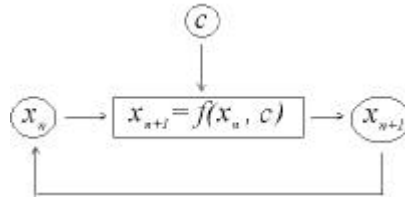
Posteriormente, a caballo del siglo *XVIII* y del *XIX*, con la entrada en el juego de los discípulos de Leibniz, entre ellos Bernouilli, se va ampliando el conocimiento del cálculo diferencial e integral, aunque en ese punto debemos considerar el importante aporte de la obra de Euler, que aplicó el cálculo diferencial al estudio de los procesos in...nitos. En este particular, no sería lícito olvidarnos de la contribución de D'Alembert, con su concepto de límite y su teoría de ecuaciones en derivadas parciales; de Legendre, con sus integrales elípticas y ecuaciones diferenciales; a Lagrange, con el cálculo de variaciones y sus multiplicadores; a Laplace, con su mecánica celeste y su teoría de probabilidades y a Fourier con su teoría de series.

Por último, en los últimos años del siglo *XIX* y principios del *XX* debemos hacer una mención especial al matemático francés Henri Poincaré, cuya aportación y trabajo lo convierte en uno de los matemáticos más importantes de la historia. Su aporte primordial lo encontramos en 1895 con la publicación de su *Analysis Situs* o topología combinatoria, que sirve como base, como hemos visto con anterioridad, a la teoría del caos. También en ese periodo debemos destacar a otro gran personaje Alexandre Lyapunov, con su análisis del problema general de la estabilidad del movimiento.

### De...nición y generalidades

Los sistemas dinámicos representan una parte muy importante dentro de la matemática, siendo su objetivo la modelización de procesos en movimiento; es decir, que matemáticamente cabría la posibilidad de simular cualquier tipo de

proceso dinámico mediante el cálculo sucesivo de una función, proceso denominado iteración. Por consiguiente, mediante la iteración podemos plantearnos a partir de un valor  $x_n$  en un determinado momento  $t$ , la obtención del valor  $x_{n+1}$  en el momento  $t + \Delta t$  mediante reglas donde el tiempo no interviene de forma explícita,



Un ejemplo de sistema dinámico podría llevarse a cabo mediante la utilización de una calculadora científica cualquiera, probando, por ejemplo, reiteradas veces la tecla de una misma función. De esa forma establecemos un sistema dinámico para dicha función.

Así, por ejemplo, realizamos esta operación con la función raíz cuadrada  $S(x_0) = \sqrt{x_0}$ , tomando un valor inicial cualquiera, siempre y cuando éste pertenezca al conjunto de los números reales positivos. Observamos cómo el proceso tiende a alcanzar el valor 1,

$$\begin{aligned} S(x_0) &= x_1 \\ S(x_1) &= S^2(x_0) = x_2 \\ S(x_2) &= S^3(x_0) = x_3 \\ &\dots \\ S(x_{n-1}) &= S^n(x_0) = x_n \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Cabe destacar que al conjunto de valores que vamos obteniendo se denomina órbita de la función para el valor inicial dado.

Si estudiamos ahora el sistema dinámico constituido por la función  $C(x) = \cos(x)$ , realizando iteraciones de la función coseno de una calculadora en el modo de radianes, podremos observar que independientemente del valor inicial que tomemos el sistema se comporta de forma semejante.

Iteración	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$
0	3.141592	0.500000	1.257000
1	-1.000000	0.877583	0.308672
2	0.540302	0.639013	0.952738
3	0.857553	0.802685	0.579454
4	0.654290	0.694778	0.836762
5	0.793480	0.768196	0.669871
6	0.701369	0.719165	0.783902
7	0.763960	0.752356	0.708164
8	0.722102	0.730081	0.759557
9	0.750418	0.745120	0.725141
10	0.731404	0.735006	0.748406
11	0.744237	0.741827	0.732774
12	0.735605	0.737236	0.743321
13	0.741425	0.740330	0.736225
14	0.737507	0.738246	0.741009
15	0.740147	0.739650	0.737788
16	0.738369	0.738705	0.739958
17	0.739567	0.739341	0.738497
18	0.738760	0.738912	0.739481
19	0.739304	0.739201	0.738818
20	0.738938	0.739007	0.739265
21	0.739184	0.739138	0.738964
22	0.739018	0.739050	0.739167
23	0.739130	0.739109	0.739030
24	0.739055	0.739069	0.739122
25	0.739106	0.739096	0.739060
26	0.739071	0.739078	0.739102
27	0.739094	0.739090	0.739074
28	0.739079	0.739082	0.739093
29	0.739089	0.739087	0.739080
30	0.739082	0.739084	0.739089
31	0.739087	0.739086	0.739083
32	0.739084	0.739084	0.739087
33	0.739086	0.739086	0.739084
34	0.739085	0.739085	0.739086
35	0.739086	0.739085	0.739085
36	0.739085	0.739085	0.739085
37	0.739085	0.739085	0.739085

Podríamos así demostrar que para cualquier valor que tomemos inicialmente la iteración de la función  $C(x) = \cos(x)$  tiende a alcanzar el valor 0.739085..., es decir :

$$C^n(x) \approx 0,739085... \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Cuando estudiemos una operación de este tipo diremos que la órbita de  $C(x)$  es una serie de números que siempre tienden al punto 0.739085... (véase tabla anterior), en otras palabras el sistema converge hacia un estado estacionario. Esta idea es muy importante ya que describiendo un sistema dinámico de esa forma podemos afirmar que dicho sistema tiende al equilibrio.

De igual forma, sistemas donde al iterar la función en determinados puntos concretos esta función no varíe denominaremos al punto como punto fijo de la función. Un ejemplo de este comportamiento sería el sistema dinámico resultante de iterar la función  $D(x) = x^2$  en los puntos  $x_0 = 0$  y  $x_0 = 1$ . Aunque iteremos la función en esos puntos  $n$ -veces, el resultado siempre será el mismo: 0 para el primer caso y 1 para el segundo. También podemos hallar el caso en que aparezca un punto fijo tras un número finito de iteraciones como es el caso que hemos considerado antes con la función coseno, denominando al 0.739085... punto eventualmente fijo. Otro ejemplo de punto eventualmente fijo lo podemos extraer al iterar la función  $D(x)$  para el valor  $x_0 = \frac{1}{2}$ , de forma que al iterarla la primer vez, el resultado es igual a 1 y, a partir de entonces, aunque la iteremos sucesivamente no nos moveremos del 1.

Hemos visto por tanto órbitas con puntos fijos y eventualmente fijos u órbitas que tienden a ellos. Pero todo el asunto no acaba aquí, sino que podemos encontrarnos con otros tipos de puntos.

Así, podemos encontrarnos órbitas que toman el valor inicial con el que comenzaron la iteración, denominándolas órbitas periódicas o cíclicas. Es decir, un punto  $x_0$  será periódico cuando para una función, que llamaremos  $F(x)$ , existe un entero finito y mayor que 1 tal que cumpla  $F^n(x_0) = x_0$ , siendo el mayor entero  $n$  que cumple esta condición el periodo de la órbita.

Un ejemplo sería la función  $I(x) = \frac{1}{x}$ . Si la iteramos varias veces, comprobaremos que tendrá dos puntos fijos para  $x_0 = \pm 1$  y para el resto de los valores veremos que la función tiene un ciclo de periodo 2, para cualquier valor real diferente de 0, 1 y -1. Para verlo más claro observemos la siguiente tabla donde analizamos la situación, es decir, iteramos la función dada para los puntos 1, -1, 2.5, -2.5, 0.05 :

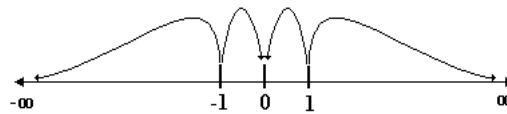
Iteración	Valores de la función que iteramos en los diferentes puntos iniciales				
0	1.000000	-1.000000	2.500000	-2.500000	.050000
1	1.000000	-1.000000	.400000	-.400000	20.000000
2	1.000000	-1.000000	2.500000	-2.500000	.050000
3	1.000000	-1.000000	.400000	-.400000	20.000000
4	1.000000	-1.000000	2.500000	-2.500000	.050000
5	1.000000	-1.000000	.400000	-.400000	20.000000
6	1.000000	-1.000000	2.500000	-2.500000	.050000
7	1.000000	-1.000000	.400000	-.400000	20.000000
8	1.000000	-1.000000	2.500000	-2.500000	.050000
9	1.000000	-1.000000	.400000	-.400000	20.000000
10	1.000000	-1.000000	2.500000	-2.500000	.050000

Paralelamente otro aspecto importante que debemos destacar en el estudio de sistemas dinámicos es su estabilidad.

Diremos que una órbita es estable si tiene la propiedad de que al cambiar ligeramente su valor, es decir, estudiando los puntos alrededor del punto inicial, se comporta de forma similar. Por ejemplo, todos los valores  $< +$  de la función  $S(x) = \frac{1}{x}$  son estables, ya que todos tienden al punto ...jo 1.

<u>Iteración</u>	<u>Valores de la función iterada en los diferentes puntos iniciales</u>				
0	1.000000	2.000000	3.000000	4.000000	5.000000
1	1.000000	1.414214	1.732051	2.000000	2.236068
2	1.000000	1.189207	1.316074	1.414214	1.495349
3	1.000000	1.090508	1.147203	1.189207	1.222845
4	1.000000	1.044274	1.071076	1.090508	1.105823
5	1.000000	1.021897	1.034928	1.044274	1.051581
6	1.000000	1.010889	1.017314	1.021897	1.025466
7	1.000000	1.005430	1.008620	1.010889	1.012653
8	1.000000	1.002711	1.004301	1.005430	1.006307
9	1.000000	1.001355	1.002148	1.002711	1.003148
10	1.000000	1.000677	1.001073	1.001355	1.001573
11	1.000000	1.000339	1.000537	1.000677	1.000786
12	1.000000	1.000169	1.000268	1.000339	1.000393
13	1.000000	1.000085	1.000134	1.000169	1.000196
14	1.000000	1.000042	1.000067	1.000085	1.000098
15	1.000000	1.000021	1.000033	1.000042	1.000049
16	1.000000	1.000010	1.000017	1.000021	1.000025
17	1.000000	1.000005	1.000008	1.000010	1.000012
18	1.000000	1.000003	1.000004	1.000005	1.000006
19	1.000000	1.000001	1.000002	1.000003	1.000003
20	1.000000	1.000001	1.000001	1.000001	1.000001
21	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000001
22	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
23	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
24	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
25	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

De la misma manera, la función  $D(x) = x^2$ , si  $|x| > 1$ , tiende a  $\infty$ . La órbita es estable si  $|x| < 1$ , tendiendo a 0. Pero las dos órbitas restantes  $x = \pm 1$  (siendo un punto fijo y eventualmente fijo) son inestables ya que las órbitas inmediatamente próximas tienden a 0 o a  $\infty$ , según sean mayores o menores a 1 en valor absoluto.



Lo importante a destacar es que una pequeña modificación con respecto a 1 (en valor absoluto), por ínfima que sea, puede modificar substancialmente un sistema dinámico inestable, como hemos visto. Implica que el análisis sea mucho más complejo de lo que podría parecer en principio. Para verlo más claramente pasaremos a estudiar la denominada ecuación logística.

#### 5.1.4. La ecuación logística

La ecuación logística fue definida en 1845 por P. F. Verhulst con la finalidad de describir el crecimiento de una población, actual o no, perteneciente a la misma especie que se reproduce en un entorno totalmente cerrado. Pero también podría referirse a la evolución de precios de un cierto activo en el mercado bursátil o a la evolución del tipo de cambio de una cierta divisa o incluso a la evolución, en términos de crecimiento o decrecimiento, de la economía de un país. Siendo este último el ejemplo que vamos a tener en cuenta en la explicación.

La ecuación logística tiene la expresión siguiente:

$$X_{n+1} = C X_n (1 - X_n)$$

Pese a su sencillez nos va a servir de gran ayuda para describir la complejidad de algunos sistemas dinámicos. Pasemos a analizarla, pero antes definamos cada uno de los parámetros que componen la ecuación:

$C$  ! Indicará la tasa de crecimiento de la economía (normalmente entre 0 y 4).

$X$  ! Porcentaje del PIB óptimo que se desea alcanzar (alcanzado cuando  $X = 1$ , mientras que  $X > 1$  simbolizará crecimiento y  $X < 1$  un decrecimiento, el valor  $X = 0$  representará la ruina total del país)

A continuación lo que haremos será simular el comportamiento calculando 30 periodos anuales con el mismo porcentaje del PIB pero para diferentes tasas de crecimiento, en particular utilizaremos las tasas  $C = 1,7$ ,  $C = 3,25$ ,  $C = 3,5$  y  $C = 4,0$ :

Año	$C = 1.70$	$C = 3.25$	$C = 3.50$	$C = 4$
0	.750000	.750000	.750000	.750000
1	.318750	.609375	.656250	.965443
2	.369152	.773621	.789551	.245464
3	.395894	.569178	.581561	.865465
4	.406575	.796947	.851717	.556465
5	.410162	.525924	.442033	.946547
6	.411280	.810316	.863239	.446554
7	.411619	.499538	.413200	.654606
8	.411721	.812499	.848630	.788868
9	.411752	.495119	.449599	.897895
10	.411761	.812423	.866109	.098798
11	.411764	.495274	.405875	.987897
12	.411764	.812427	.843991	.254591
13	.411765	.495265	.460845	.746464
14	.411765	.812427	.869634	.798882
15	.411765	.495265	.396797	.532326
16	.411765	.812427	.837722	.985546
17	.411765	.495265	.475803	.084878
18	.411765	.812427	.872951	.445996
19	.411765	.495265	.388177	.789215
20	.411765	.812427	.831235	.995917
21	.411765	.495265	.490992	.032689
22	.411765	.812427	.874716	.879292
23	.411765	.495265	.383558	.979054
24	.411765	.812427	.827544	.297112
25	.411765	.495265	.499502	.266654
26	.411765	.812427	.874999	.276988
27	.411765	.495265	.382815	.898457
28	.411765	.812427	.826937	.269545
29	.411765	.495265	.500893	.947211
30	.411765	.812427	.874997	.018985

Si analizamos la tabla con detenimiento podemos observar que para cada uno de los parámetros  $C$  obtenemos un comportamiento distinto, y lo que debemos destacar es que hemos mantenido el mismo punto. Es decir, iterando la función en un punto y modificando los valores del parámetro  $C$  obtenemos resultados diferentes. Así, en el primero de ellos,  $C = 1.70$ , vemos cómo su órbita es atraída por un punto fijo de valor 0.411765..., lo que significaría, a efectos prácticos sobre la economía estudiada, significaría que decrecerá hasta estabilizarse en ese porcentaje del PIB óptimo. Por otro lado para el valor de  $C = 3.25$  la órbita es atraída por un ciclo de periodo 2, es decir, cada año cambiaría alternativamente el porcentaje sobre PIB óptimo. Paralelamente, para el valor  $C = 3.5$  la órbita también se comporta cíclicamente, pero esta vez tiende a estabilizarse con un ciclo de periodo 4, aunque el ciclo no converge en esos 30 primeros periodos

analizados, sino que lo hace más tarde. Por último, para el caso  $C = 4$  la órbita no parece estabilizarse ni mostrar ningún tipo de comportamiento previsible. Parece como si el comportamiento fuese aleatorio.

Conclusión: una pequeña modificación del parámetro  $C$  puede dar lugar a comportamientos completamente diferentes e imprevisibles.

Analicemos ahora la misma función pero introduciendo un coeficiente  $C = 4$ , que mantendremos constante, y variaremos los valores iniciales. En otras palabras, contemplemos qué ocurre considerando tres valores iniciales diferentes  $X_0 = 0,2$ ,  $X_0 = 0,5$  y  $X_0 = 0,6$ . Hemos visto que ocurre cuando manteniendo el punto constante variábamos el valor del parámetro. Hagamos ahora el paso inverso: analicemos la situación manteniendo constante el parámetro y modificando los puntos sobre los que iteramos la función.

Año	$C = 4$	$C = 4$	$C = 4$
0	.200000	.500000	.600000
1	.640000	1.000000	.960000
2	.921600	.000000	.153600
3	.289014	.000000	.520028
4	.821939	.000000	.998395
5	.585421	.000000	.006408
6	.970813	.000000	.025467
7	.113341	.000000	.099276
8	.401979	.000000	.357680
9	.961567	.000000	.918980
10	.147823	.000000	.297824
11	.503885	.000000	.836500
12	.999940	.000000	.547071
13	.000242	.000000	.991137
14	.000966	.000000	.035136
15	.003859	.000000	.135606
16	.015378	.000000	.468868
17	.060566	.000000	.996123
18	.227591	.000000	.015447
19	.703174	.000000	.060834
20	.834882	.000000	.228533
21	.551416	.000000	.705222
22	.989426	.000000	.831536
23	.041850	.000000	.560337
24	.160396	.000000	.985438
25	.538675	.000000	.057400
26	.994017	.000000	.216422
27	.023789	.000000	.678334
28	.092892	.000000	.872788
29	.337054	.000000	.444117
30	.893794	.000000	.987508



Como podemos observar, para este caso obtenemos resultados bastante interesantes. En primer lugar para una  $X_0 = 0,5$  la órbita es eventualmente ...ja, mientras que para  $X_0 = 0,2$  y  $X_0 = 0,6$  la órbita no parece estabilizarse ni mostrar ningún tipo de comportamiento previsible, aunque incrementemos notoriamente el número de iteraciones.

Conclusión: en este caso, también pequeñas modi...caciones sobre el punto que iteramos puede dar lugar a comportamientos completamente diferentes e imprevisibles.

Una vez desarrollado todo lo anterior, podríamos llegar a pensar que la lectura que debemos extraer de este análisis es la siguiente: dado un sistema dinámico dependiente de un parámetro y dado también un punto sobre el que iteramos el sistema, podemos encontrarnos ante un comportamiento caótico por dos vías.

En primer lugar manteniendo el punto y modi...cando el parámetro acabaremos con un sistema caótico, tal y como hemos destacado anteriormente.

Paralelamente, siendo ésta la segunda vía, podemos encontrarnos con el caos cuando manteniendo el parámetro modi...camos el valor del punto levemente (el caso más claro es el caso de pasar de 0,5 a 0,6 considerando  $C = 4$ ). En ese supuesto se dice que el modelo es sensible a las condiciones iniciales.

Pero esta interpretación planteada no sería una lectura del todo correcta. Parece ser que cuando el sistema es sensible a las condiciones iniciales, ya es premisa su...ciente para concluir que existe un comportamiento caótico, cosa que no es del todo cierta, ya que la gracia es que tendremos un sistema sensible a las condiciones iniciales cuando trabajemos con valores del parámetro  $C$  críticos, por llamarlos de alguna forma. Es decir, para ciertos valores del parámetro  $C$  aunque variemos ostensiblemente los puntos sobre los que iteramos, no llegaremos a encontrarnos con un comportamiento caótico, mientras que para aquellos valores del parámetro que hemos llamado críticos, sí.

Para ver esta idea más clara procederemos a representar del comportamiento del sistema dinámico ante variaciones tanto de  $X$  como de  $C$ .

Hemos observado cómo un sistema dinámico tan simple como el expuesto (recordemos que únicamente se trataba de una función cuadrática) puede suponer una variedad importante de comportamientos diferentes en función de las modi...caciones a que sometamos sus valores, tanto del parámetro como los puntos sobre los que iteramos. Sería lógico, plantearse la importancia de estudiar el comportamiento de un sistema dinámico según se modi...can sus parámetros, siendo éste el objeto de la teoría de bifurcación.

La mejor forma de analizar el comportamiento de una función o ecuación es por medio de un análisis gráfico. Por ejemplo, es interesante verificar el complicado comportamiento de la ecuación logística mediante un gráfico, para cuya construcción calcularemos para cada valor de  $C$  una órbita de 250 valores, de los cuales no representaremos los 50 primeros, ya que en ellos la función todavía no se ha estabilizado. De esa forma representaremos un gráfico donde horizontalmente tendremos todos los valores de  $C$  pertenecientes al intervalo  $[2, 4]$  y verticalmente tendremos el valor entre 0 y 1 de la variable  $X$ .

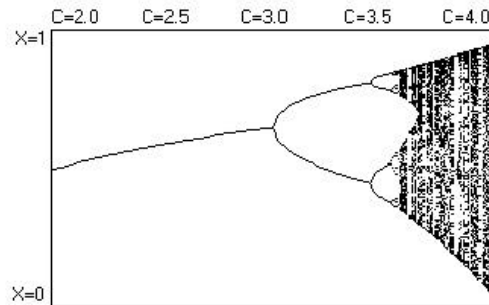
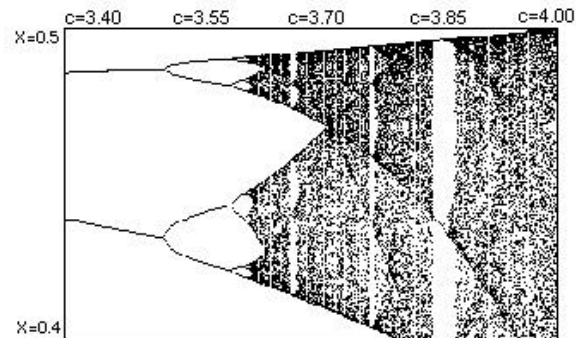


Diagrama de bifurcación de la función logística

Analicemos ahora la función logística según su representación gráfica. Si nos fijamos, para valores de  $C$  inferiores a 3, la función siempre converge hacia un punto fijo, pero, podemos comprobar cómo a partir de aquí la función empieza a producir órbitas de diversa periodicidad, perfectamente reconocibles por el número de ramas mostradas. Posteriormente, la situación se va volviendo cada vez más compleja hasta que las ramificaciones se hacen infinitas. Es decir, las ramificaciones llegan a un nivel de detalle que nunca desaparece por muchas ampliaciones que hagamos. Veámoslo mediante una ampliación de la zona comprendida entre los puntos  $C = 3,40$  y  $C = 4,0$ .



Ampliación del diagrama anterior

Este tipo de gráfico se denomina diagrama de bifurcación. Debemos destacar, llegados a este nivel, que el análisis gráfico constituye una herramienta fundamental para poder analizar y llegar a comprender los sistemas dinámicos.

Retomando el hilo de lo planteado con anterioridad, la lectura correcta del análisis desarrollado vendría de la consideración de que lo que realmente está causando caos es la modificación del parámetro. Al modificar el parámetro vemos que, para cualquier punto que cojamos, si éste toma valores mayores a 3.75, según el diagrama de bifurcación, se alcanzan resultados que a primera vista pueden ser aleatorios, sin ningún orden.

### 5.1.5. Nociones sobre atractores: Una visión introductoria

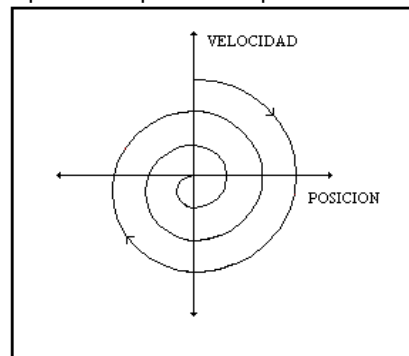
En el apartado anterior hemos podido constatar que los sistemas dinámicos pueden mostrar un gran número de comportamientos diferentes. Así, como también hemos comprobado que, tras un número suficientemente grande de iteraciones el sistema puede presentar una órbita que tiende a un punto fijo o a varios. Bajo ese supuesto el sistema dinámico es estable, ya que tiende a estabilizarse en uno o más valores.

En definitiva, diremos que al conjunto formado por aquellos valores para los cuales el número de iteraciones de la función tiende a infinito haciendo que la función se estabilice reciben el nombre de atractores.

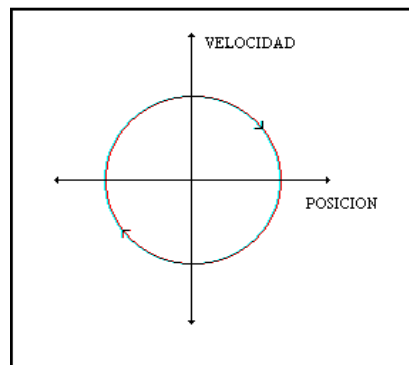
Podríamos decir que un atractor sería aquello a lo que tiende el comportamiento del sistema dinámico. Como su propio nombre indica, hacia aquello a lo que es atraído.

El ejemplo utilizado en gran parte de los manuales que pretenden abordar este tema, es el péndulo, que constituye un sistema físico muy sencillo, permitiéndonos así ilustrar, de una manera muy clara el concepto de atractor.

Cuando hacemos oscilar un péndulo ordinario, éste se ve sometido a una serie de fuerzas de rozamiento que frenan su movimiento hasta detenerlo. Esta idea puede ser representada gráficamente mediante el denominado diagrama de fases, representando en un diagrama cartesiano el ángulo formado entre el péndulo y la vertical en función del ritmo de variación del ángulo. En definitiva, la representación gráfica que obtendremos será una especie de espiral que girará en torno al valor cero hasta alcanzarlo. La idea es clara: a medida que vaya perdiendo fuerza (o energía) trazará una espiral hasta converger en el cero, donde se mantendrá en reposo. Por tanto, diremos que el punto cero será un atractor ya que desde cualquier punto de partida el péndulo tenderá a él.



Paralelamente, otro tipo de atractor lo constituiría el péndulo de un reloj de pared, donde una serie de mecanismos y engranajes ayudados de contrapesos distribuyen su fuerza de oscilación para que esta sea constante y no disminuya, para que siempre se mueva igual. Si pretendemos representar este nuevo caso mediante un diagrama de fases, nos encontraremos que el atractor será un bucle circular.

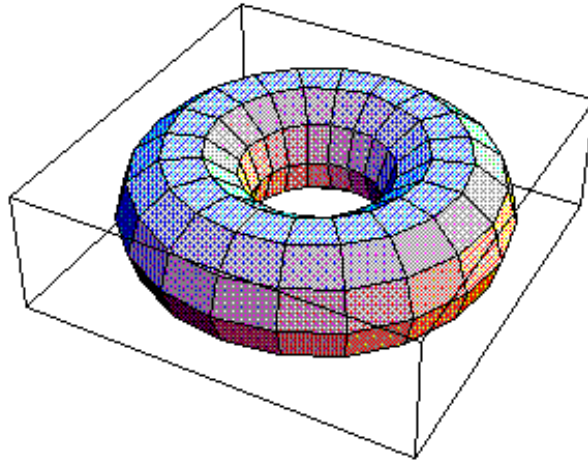


De forma más concreta, el diagrama de fases en este caso será una espiral que tiende hacia un comportamiento circular, una órbita circular. Si ponemos en marcha el péndulo del reloj mediante un impulso inicial, éste tenderá a oscilar en proporción a la fuerza que hemos realizado, pero los contrapesos se dirigirán a estabilizarla. Es decir, si le hemos transmitido mucha fuerza los contrapesos irán frenando el péndulo hasta alcanzar un movimiento constante, si por el contrario le damos poca fuerza, los contrapesos acelerarán la oscilación hasta situarla en el punto de equilibrio, por ello el atractor vendrá determinado mediante un círculo o bucle circular.

Hasta hace muy poco los únicos atractores que se conocían eran los puntos...jos, los bucles circulares y los denominados toros, que representan aquellos movimientos denotados como cuasiperiódicos.

La idea es la siguiente, supongamos que queremos representar el movimiento de un objeto que gira alrededor de otro, que a su vez gira alrededor de su punto de atracción.

Aunque parece complicado intentemos verlo mediante un ejemplo: imaginemos que queremos representar el movimiento realizado por la Luna. Sabemos que la Luna es el satélite que gira alrededor de la Tierra, que a su vez gira alrededor del Sol; pues bien, el resultado de la representación gráfica del movimiento de la Luna sería un toro.



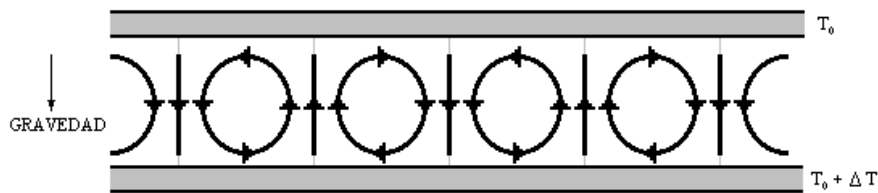
Como habíamos dicho anteriormente los puntos ..., los bucles circulares y los toros eran los únicos atractores conocidos, hasta que en el año 1963 Edward N. Lorenz, del conocido Instituto de Tecnología de Massachusetts, intentó explicar o intentó hallar solución al problema de la impredecibilidad del tiempo en el ámbito de la meteorología. Lorenz descubrió que el clima seguía unas ciertas pautas de periodicidad en su comportamiento, pero sin embargo, nunca dos fenómenos se repetían exactamente. Así que Lorenz se planteó realizar un experimento, mediante el cual pretendía modelizar el comportamiento del clima. Dicho experimento consistía en simular en un ordenador un sistema dinámico simple compuesto por tres ecuaciones diferenciales dependientes de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x - y) - xz \\ \frac{dz}{dt} &= x(y - z)\end{aligned}$$

Este sistema intentaba reproducir un fenómeno que se da tanto en la atmósfera como en las corrientes marinas y en general en todo fluido, fenómeno que se denomina convección. Abramos un pequeño paréntesis para explicar el fenómeno de la convección y así poder proseguir con nuestra andadura en el campo de la teoría del caos de una forma clara y concisa.

El fenómeno de la convección en cualquier fluido está causado por la ten-

dencia ascendente de capas inferiores, cuando se calientan, en contraposición de la tendencia descendente de las capas superiores al enfriarse, llegando ambas tendencias a producir turbulencias durante su oscilación. Dicho fenómeno fue demostrado por los físicos Rayleigh y Bernard, los cuales plantearon un experimento considerando un fluido contenido entre dos planchas, una encima de la otra, tal y como se muestra en la siguiente figura:



La plancha inferior está sometida a una temperatura mayor,  $T_0 + \Delta T$ , que la plancha superior, con temperatura  $T_0$ . Como resultado, el fluido cerca de la plancha inferior, más caliente, se dilata viéndose sometido a una tendencia a ascender. De forma similar, la plancha superior, más fría, hace que el fluido se contraiga, se haga más denso, y adopte la tendencia inversa, es decir, hace que el fluido descienda, produciéndose lo que conocemos por convección, cuyo resultado es la generación de turbulencias.

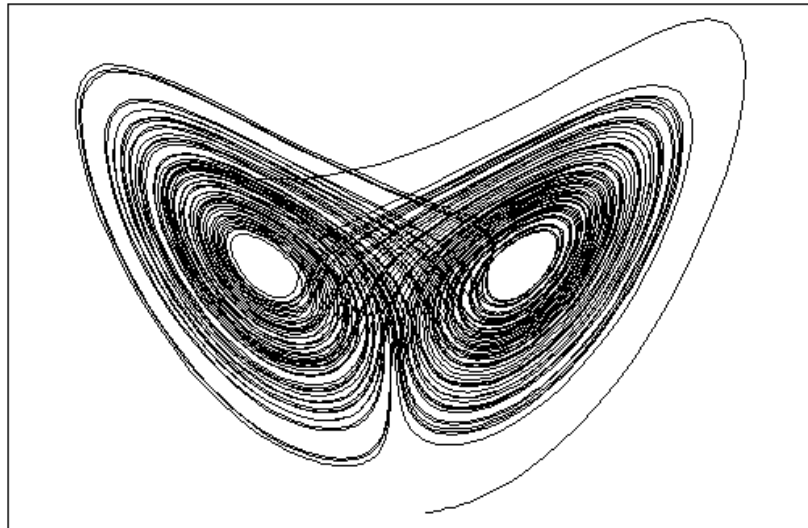
Después de este inciso explicativo y retomando el hilo de la exposición, decíamos que este fenómeno fue estudiado desde un punto de vista teórico y computerizado en el trabajo seminal de Lorenz, mediante un sistema constituido por el sistema de ecuaciones diferenciales que antes habíamos descrito.

Pues bien, Lorenz desarrolló su experimento y obtuvo como resultado un sistema aparentemente aleatorio, es decir, aquellos resultados que obtenía nunca llegaban a repetirse; siendo una de las características principales de dicho sistema su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. En otras palabras, una pequeña modificación en los valores iniciales produce cambios imprevisibles.

Contrariamente a lo que pudiera parecer, pese a que los valores generados nunca se repiten y, aunque el hecho de variar las condiciones iniciales supone hacer variar los valores generados, si representamos gráficamente todos los puntos obtenidos, el gráfico es siempre el mismo, siempre y cuando el número de iteraciones sea suficientemente grande. Es decir, se obtiene la misma figura para

cualquier valor inicial, pese a que los valores que hemos ido logrando sean totalmente diferentes.

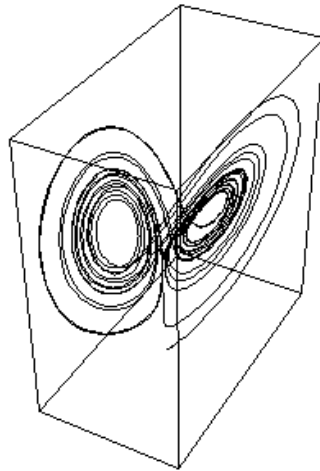
Podemos entonces pensar que si tras un número suficientemente grande de iteraciones obtenemos la misma gráfica, dicha gráfica sería o podría ser denominada como un atractor. En otras palabras, la idea que subyace detrás es muy similar a la que habíamos considerado cuando habíamos definido a los atractores. Pero ahora, al considerar el hecho de que pequeñas modificaciones en los valores iniciales hagan variar notablemente los resultados, denota que este tipo de atractores son un tipo de atractores diferentes a los que habíamos visto antes, recibiendo por tanto estos nuevos la denominación de atractores extraños o atractores caóticos.



Atractor de Lorenz

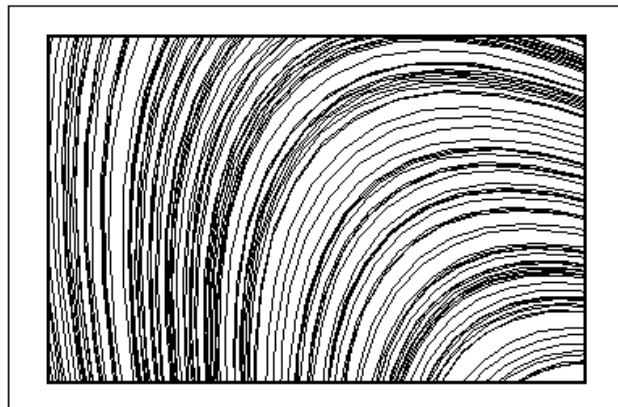
La idea importante que hay detrás de los atractores extraños es el hecho de que pese al caos producido o detectado en los resultados analíticos del sistema dinámico es posible comprobar que éstos se comportan mediante cierto orden al estudiarlo gráficamente.





Detalle del atractor de Lorenz en 3 dimensiones

Cabe destacar además que en el atractor existen infinitas trayectorias diferentes, pero estas nunca llegan a cortarse o entrecruzarse, ya que si lo hiciesen entraríamos en un ciclo periódico, lo cual implicaría que ya no trataríamos con un atractor extraño. Se trataría entonces de un toro, por ejemplo, siendo ésta la principal diferencia entre un toro y un atractor extraño. Mientras que en el atractor extraño, si salimos de un punto nunca volveremos a pasar sobre él, en el toro, sí.



Detalle del atractor de Lorenz ampliado. Compruébese que ninguna de las trayectorias se corta.

Llegados a este punto podríamos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Los sistemas dinámicos pueden llegar a producir comportamientos pseudoaleatorios: aunque parezcan aleatorios, en el fondo no lo son.
2. Hemos de tener clara la siguiente idea: de alguna forma un punto ...jo sería el equilibrio en 1 dimensión, un bucle en 2 dimensiones y un atractor extraño en 3 dimensiones.
3. Los sistemas caóticos dependen de las condiciones iniciales.

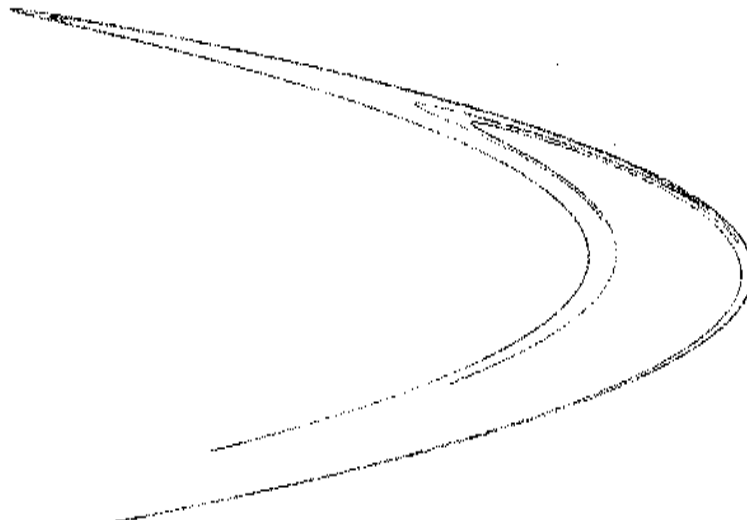
El atractor de Lorenz no es el único. Cinco años más tarde, Michel Hénon, del Instituto de Astrofísica de París, atraído por el problema de las órbitas de los planetas, diseñó un sistema dinámico capaz de modelizar esas órbitas, que, al contrario de lo que siempre se ha creído, no son elipses perfectas. Cabe hacer referencia a Poincaré, que recordemos, intentó ver qué ocurría cuando considerábamos un sistema con tres cuerpos. La solución a la que llegó fue totalmente inesperada, el resultado al que llegó fue tan complicado que, como ya dijimos, ni se atrevió a dibujarlo. Poincaré llegó a un resultado que podríamos considerar como complicadísimo y con sólo tres cuerpos. Imaginemos ahora, cuál sería el resultado considerando la infinitud de cuerpos celestes existentes en el universo... el resultado sería increíble.

Pues bien volvamos a Michel Hénon. Como decíamos, se planteó realizar un sistema dinámico para simular, o mejor dicho, para modelizar las órbitas de los planetas. Planteó el siguiente experimento: aplicó lo que conocemos como sección de Poincaré e imaginó una de tamaño gigantesco situada en el espacio, de forma que toda órbita planetaria la atravesaba en algún momento. En principio, a medida que la órbita de los planetas va cortando la sección, van apareciendo puntos que parecerían a simple vista aleatorios, pero al incrementar el número de puntos se puede comprobar cómo se va formando una estructura compacta y única que Hénon logró simular mediante el sistema dinámico que lleva su nombre, siendo destacable su extrema sencillez, ya que únicamente contiene dos variables:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + y_n - A x_n^2 \\y_{n+1} &= B x_n\end{aligned}$$

Siendo  $A$  y  $B$  parámetros que Hénon estimó como  $A = 1,4$  y  $B = 0,3$ .

Cabe destacar que es sorprendente cómo un sistema tan sencillo puede simular un comportamiento tan complicado, pero así sucede.

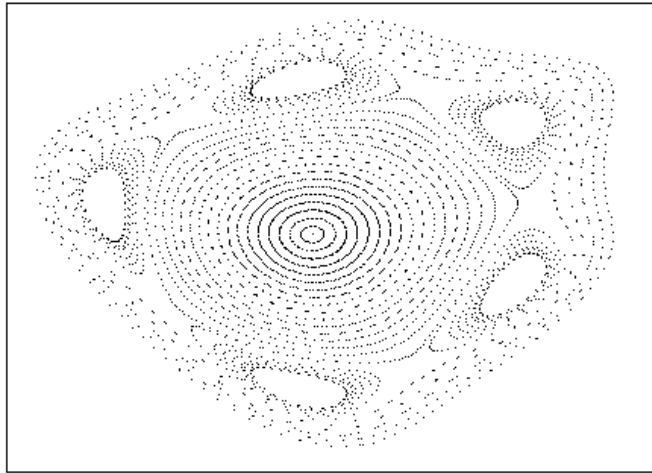


Atracción de Hénon

La idea que se extrae después de estudiar estos dos atractores, es el hecho de que parecen revelar un orden que, hasta la fecha, era totalmente desconocido para la ciencia. Este es uno de los motivos por el cual la ciencia del caos tiene cada vez más aplicaciones, pudiendo llegar a explicar fenómenos que hasta ahora estaban fuera de nuestro alcance.

Otro atractor que podíamos destacar, fruto del hecho que cada vez son más las ramas de la ciencia que se interesan por la disciplina del caos, es el que se extrae del teorema KAM. Dicho teorema debe su nombre a los matemáticos Kolmogorov, Arnold y Moser, y en el cual se estudia el comportamiento de un sistema dinámico estable, como por ejemplo podría ser un satélite girando alrededor de su planeta cuando pequeñas fuerzas actúan sobre él.

El teorema KAM considera que dichas fuerzas, aunque pequeñas, pueden llevar a la inestabilidad del satélite e incluso sacarlo de su órbita.



Atractor KAM

En la figura anterior podemos observar las diferentes órbitas del satélite desde las más internas, siendo éstas las más estables, a las más externas, siendo las más inestables. Si nos fijamos en esta región podemos encontrar 5 islas con trayectorias cerradas. Debemos destacar que será en ellas donde pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden producir efectos completamente divergentes (denótese el hecho de que en esas islas se rompe la órbita normal del satélite). En astronomía dichas islas reciben el nombre de resonancia del sistema.

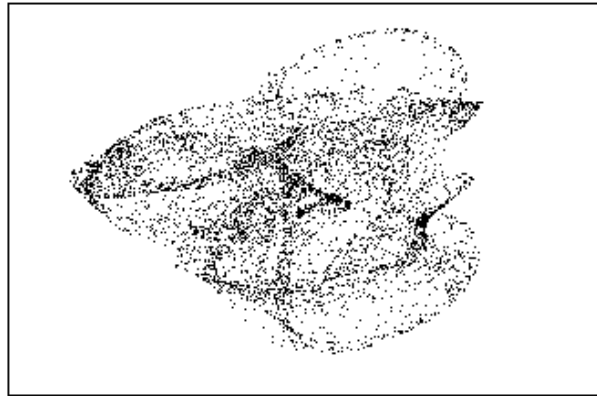


Detalle del atractor KAM en 3 dimensiones

Para terminar cabría decir que existen muchos tipos de atractores dentro de

las diversas ramas de la ciencia, pero no todos los atractores están concebidos con un enfoque científico, sino que también encontramos aquellos que destacan por su carácter puramente didáctico o estético. En esa línea podemos destacar los generados por Clifford A. Pickover del Centro de Investigación de IBM Thomas J. Watson, siendo uno de estos atractores el generado por el sistema:

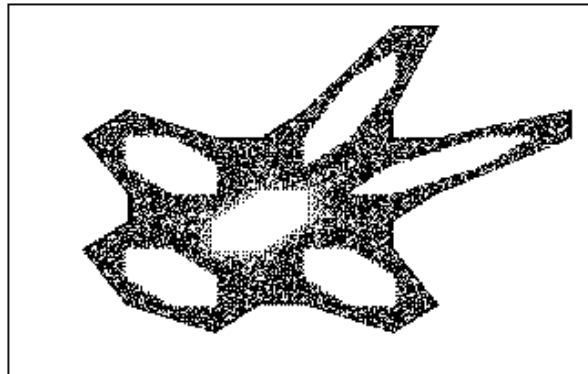
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h \cos(y_n + \tan(3t y_n)) \\y_{n+1} &= y_n + h \cos(x_n + \tan(3t x_n))\end{aligned}$$



Atractor de Pickover

Otro atractor del mismo tipo es el ejemplo de un conjunto caótico en el plano generado por el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + y_n + jx_n \\y_{n+1} &= x_n\end{aligned}$$



## 5.2. Detección del caos determinista en series temporales

Antes de adentrarnos en la detección del comportamiento caótico en una serie temporal, debemos dejar claro que no existe ningún contraste estadístico que mantenga como hipótesis nula la existencia de caos determinista. Pero si existe una herramienta de bastante utilidad, que es el test residual de Brock, en el que básicamente Brock (1986) mantiene que si la dimensión de correlación y el mayor exponente de Lyapunov de una serie concreta, coinciden con los valores de esos parámetros calculados sobre la serie de residuos obtenidos a partir del ajuste de un modelo lineal estocástico sobre la serie original, podemos asegurar que la serie se rige según un comportamiento caótico. Como hemos podido notar esta afirmación requiere una explicación más amplia. Por ejemplo como se calcula la dimensión de correlación o el máximo exponente de Lyapunov de una serie. Explicación que vamos a intentar dar en este capítulo. Además introduciremos otras herramientas que se utilizan con mucha frecuencia dentro de la teoría del caos y que para nosotros serán de vital importancia, como el Test *BDS*. Para analizar aplicaremos todas estas nuevas herramientas sobre nuestras series temporales.

### 5.2.1. Reconstrucción del espacio de fases

Si tenemos la expresión matemática de un sistema, el reconocer la existencia de un comportamiento caótico es sencillo. Conociendo el número de variables que conforman el sistema dinámico, podríamos generar fácilmente el espacio

de fases y su atractor y determinar su carácter caótico. Sin embargo, cuando trabajamos con datos reales, la formulación matemática y el número de variables no pueden conocerse de forma exacta y todo se complica más.

El análisis clásico, de forma aislada, no puede ser utilizado para demostrar la existencia de caos ya que las variables podrían ser variables aleatorias. De ahí que debemos buscar nuevas herramientas para detectar dichos comportamientos caóticos. Con ese objeto, se crea el cálculo de diversos tipos de dimensión, los exponentes de Lyapunov y las trayectorias en el espacio de fases.

El primer paso en el análisis caótico consiste en reconstruir el espacio de fases del sistema dinámico subyacente a partir de los datos observados.

Para ello debemos destacar que el espacio de fases puede aproximarse a partir de los datos de una variable observable  $x(t)$  siguiendo el procedimiento señalado en Packard et al. (1980), Ruelle (1981) y Takens (1981). Este procedimiento requiere la generación del vector de estado  $X(t)$  mediante el uso de  $x(t)$ , como la primera coordenada,  $x(t + \tau)$  como segunda, ... y  $x(t + (m - 1)\tau)$  como la última, donde  $\tau$  es un parámetro adecuado de retardo y  $m$  es la dimensión de inmersión.

Como sabemos, cuando un atractor existe, su dimensión es más pequeña que la dimensión del espacio de fases. Podemos sacar ventaja de esta propiedad intentando desarrollar un sistema dinámico de baja dimensionalidad que describa solamente el movimiento del atractor. Esto puede llegar a conseguirse mediante la inmersión del atractor en un variedad lineal suavizada y restringiendo el atractor a ella. Destacar que una variedad lineal es un modelo geométrico usado para describir completamente un fenómeno. La menor dimensión posible de esta variedad lineal es lo que se conoce con el nombre de dimensión de inmersión. Los atractores que son estructuras topológicas (puntos, ciclos límites, toros) son subvariedades lineales de la variedad lineal en las que están inmersas. Los atractores que son conjuntos fractales no son subvariedades lineales (los fractales no son variedades lineales). Cuando intentamos reconstruir el atractor a partir de los datos observados, la dimensionalidad de la variedad lineal que contiene no se conoce a priori. Lo que se hace es variar la dimensión de inmersión hasta que conseguimos una estructura que permanece invariante. Debemos destacar que existen otros métodos de estimación de la dimensión de inmersión, pero son mucho más complejos y no creemos necesaria su exposición ni desarrollo en la presente.

La elección de  $\tau$ 

Antes de realizar cualquier análisis estadístico debemos comprobar que los datos analizados son independientes, ya que si no nuestras estimaciones estarán sesgadas. La misma filosofía se aplica cuando trabajamos en la reconstrucción del atractor mediante la reproducción de una nube de puntos en una dimensión de inmersión determinada. Si los puntos que no son independientes de los que previamente hemos generado se vuelven a incluir, la estimación de la correlación o otra dimensión, estará sesgada (normalmente subestimada). En ese caso  $\tau$  debe ser elegida como resultado de puntos que no están correlacionados a los puntos previamente generados. En ese caso, una primera elección de  $\tau$  sería en términos de descorrelación temporal de la serie temporal que estamos estudiando.

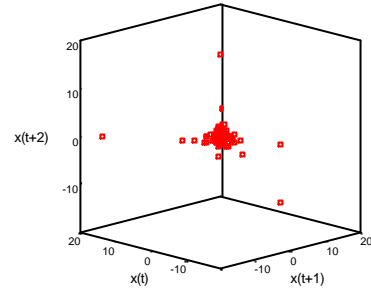
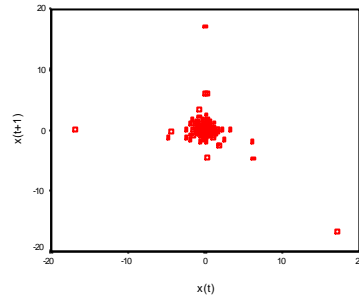
Podríamos considerar como ese tiempo de correlación igual al periodo en el que la función de autocorrelación alcanza el valor cero. Otros planteamientos consideran el periodo en el que la función de autocorrelación se acerca a cierto valor, por ejemplo  $\frac{1}{e}$  o 0,5 como señala Schuster (1988) o también como apuntan Tsonis y Elsner (1987) 0,1. Otra sugerencia sería la propuesta por Wolf et al. (1985) que consiste en considerar  $\tau = \frac{T}{n}$ , donde  $T$  es la periodicidad dominante revelada por el análisis de Fourier y  $n$  es la dimensión de inmersión. Pero el mejor método es el propuesto recientemente por Liebert y Schuster (1989) de acuerdo con el cual se considera una buena elección del parámetro  $\tau$  el primer mínimo de la integral de correlación generalizada  $C(\tau, r, n)$ . Para un radio  $r$  y una dimensión de inmersión  $n$ , podemos calcular la función de correlación como función de  $\tau$ . El resultado nos proporciona la integral de correlación generalizada. El logaritmo neperiano de  $C(\tau, r, n)$  es una medida de la media de información contenida en los vectores reconstruidos y su mínimo proporciona una forma fácil de determinar un adecuado valor de  $\tau$ . Pero cabe destacar que todo este planteamiento tiene sentido cuando hablamos de extraer observaciones procedentes de un proceso generador de datos continuo, como puede ser por ejemplo el estudio de un electrocardiograma humano en Kantz y Schreiber (1997) y también en Hegger, Kantz y Schreiber (1998), donde se representa el espacio de fases para una  $\tau = 10$  milisegundos y para  $\tau = 40$  milisegundos, obteniéndose una mejor representación para esta última selección de  $\tau$ . Y tendría sentido plantearnos la selección de  $\tau$  si en nuestro caso pudiésemos disponer de información instantánea del mercado interbancario, pero como no es nuestro caso, optaremos por considerar nuestra  $\tau = 1$ .



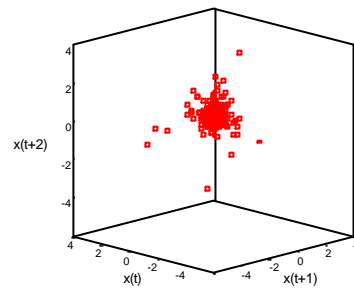
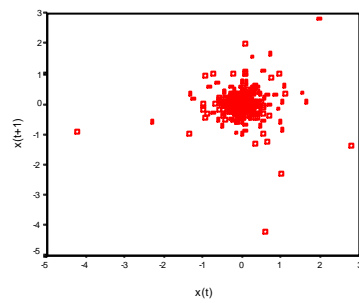
Reconstrucción del espacio de fases de la series temporales del tipo de interés interbancario

Procederemos según lo expuesto y representaremos en primer lugar vectores de  $\mathbb{R}^2$  del tipo  $[x_t, x_{t+\tau}]$ , donde  $\tau = 1$ . Pasaremos después a representar vectores de  $\mathbb{R}^3$  del tipo  $[x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}]$ . Si la estructura representada permanece invariante diremos que la dimensión de inmersión es igual a 2, pero si no es así no podremos determinar la expresión de la dimensión de inmersión ya que no podremos seguir representando y diremos, llegado el caso que su dimensión de inmersión es mayor que 2. Los grá...cos que se obtienen son los siguientes:

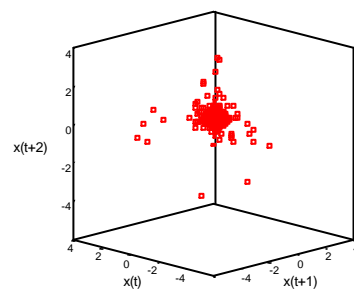
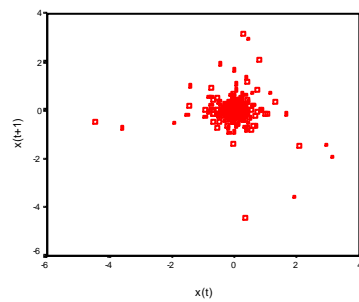
## ■ Serie de interés interbancario a 1 día



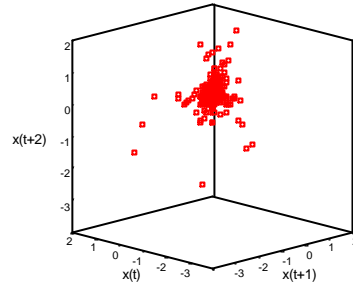
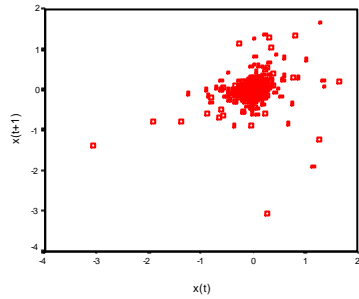
## ■ Serie de interés a 1 semana



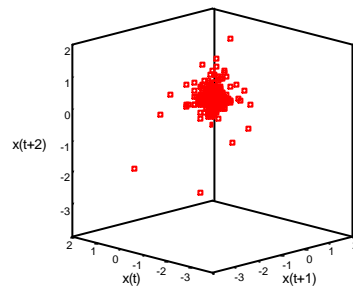
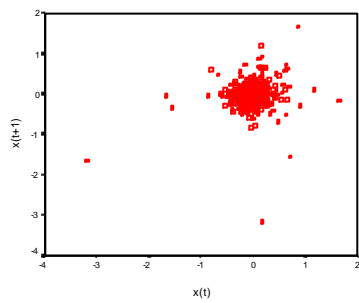
## ■ Serie de interés a 15 días



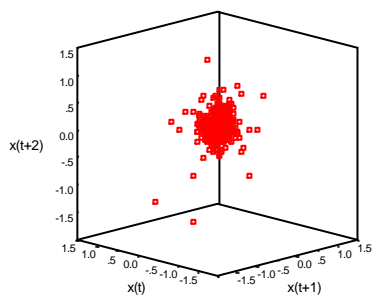
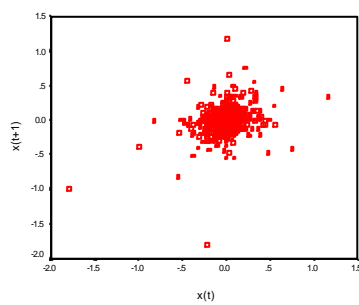
## ■ Serie de interés a 1 mes



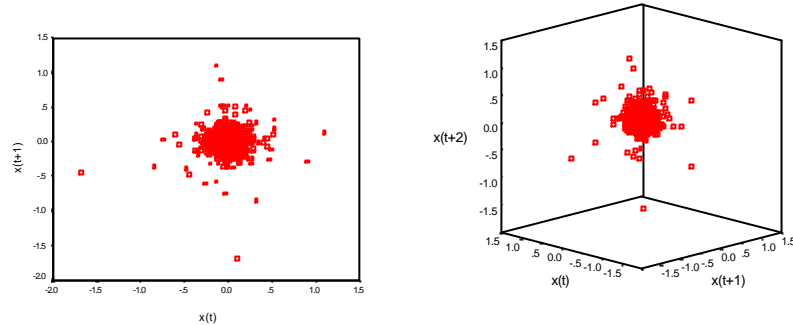
## ■ Serie de interés a 2 meses



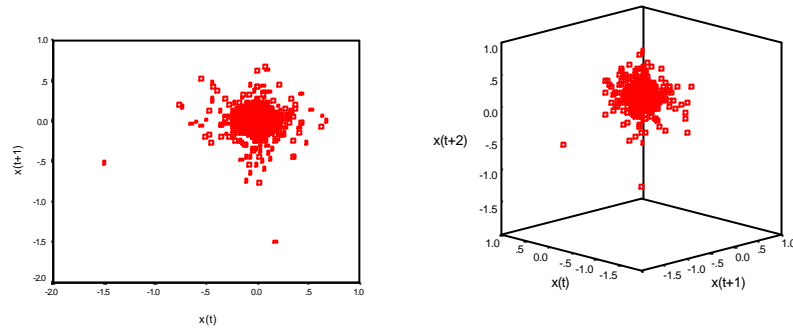
## ■ Serie de interés a 3 meses



■ Serie de interés a 6 meses



■ Serie de interés a 1 año



Destacar de forma general, que el resultado ...nal es el mismo para todas las series. Podemos decir que la dimensión de inmersión es 2. En efecto, hemos observado como al representar gráficamente los datos tales que  $[x_t, x_{t+1}]$  y  $[x_t, x_{t+1}, x_{t+2}]$  la estructura permanecía invariante.

### 5.2.2. Dimensión de correlación

La dimensión de correlación surge como respuesta al problema de la estimación de las dimensiones para caracterizar un fenómeno caótico y constituye un concepto de gran interés a los efectos del análisis que estamos realizando, situándose en el campo de las dimensiones fractales. Como hemos visto, a la hora de realizar la reconstrucción de un fenómeno, es necesario saber el número de dimensiones,  $d$ , en el que se inscribe, tanto para hacer su representación en el diagrama de fases como para estimar un modelo simple del fenómeno.

El método que describiremos fue desarrollado por Grassberger y Procaccia

(1983) y es aplicable a cualquier sistema dinámico  $d$ -dimensional. Esta medida representa una cota inferior de la dimensión fractal, previamente definida, y es muy fácil de calcular a partir de un conjunto de puntos. El método consiste en centrar una hiperesfera en un punto del espacio de fase, y hacer crecer el radio,  $r$ , de la esfera hasta que todos los puntos queden dentro de ella.

Dado el conjunto de puntos  $k$ -dimensional

$$X_i \in \mathbb{R}^k, i = 1, 2, \dots, N$$

podemos construir vectores de dimensión  $m$ , la dimensión de inmersión, con entradas solapadas,

$$X_t^m = (X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+m-1}) \tag{5.1}$$

que denominamos  $m$ -historias.

De forma más genérica podríamos definir la ecuación (5.1) de la siguiente forma

$$X_t^m = (X_t, X_{t+\tau}, \dots, X_{t+m-1-\tau})$$

que estaría en función del parámetro  $\tau$ , que como sabemos es el retardo a estimar, pero que aquí ya hemos simplificado considerando  $\tau = 1$ , por los motivos expuestos en el apartado anterior.

A continuación, definiremos la correlación entera (integral correlation) de la siguiente forma

$$C_{m,N}(r) = \frac{\#\{(i,j), 1 \leq i,j \leq N, i \neq j : \|X_i^m - X_j^m\| < r\}}{(N(N-1))^{1/2}} \tag{5.2}$$

donde  $r$  es el radio elegido,  $N(N-1)$  es el número total de parejas posibles y  $m$  es la dimensión de inmersión elegida. Esta correlación es una medida de la correlación espacial de puntos en el espacio de inmersión. Si calculamos el límite siguiente

$$C_m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_{m,N}(r)$$

estaremos evaluando la probabilidad de que dos  $m$ -historias estén a una distancia menor que  $r$ . Por lo tanto

$$C_m(r) = \Pr \left\{ \sum_{k=1}^m \|X_i^k - X_j^k\| < r \quad k = 1, \dots, m \right\}$$

que podría reescribirse, suponiendo independencia, como

$$C_m(r) = \prod_{k=1}^m \Pr \left\{ \|X_i^k - X_j^k\| < r \right\}$$

y suponiendo distribución idéntica como

$$C_m(r) = C_1(r)^m$$

La utilidad de este concepto es que permite el cálculo de la dimensión de correlación. Recordemos que la dimensión de un sistema (o número de grados de libertad) es una medida de la complejidad de dicho sistema. Lo más sorprendente de los sistemas caóticos es que no precisan de una gran complejidad para generar una dinámica semejante al ruido blanco. En un espacio de dimensión  $d$ , los puntos más próximos se incrementan en función de la tasa  $r^d$ . Si la serie llena todo el espacio de dimensión  $d$ , la dimensión del sistema es  $d$ , como mínimo.

Ahora, la dimensión de inmersión viene dada por la expresión,

$$d_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log [C_{m,N}(r)]}{\log(r)} \quad (5.3)$$

y la dimensión de correlación propiamente dicha es

$$d = \lim_{m \rightarrow 1} d_m \quad (5.4)$$

Además  $d_m$  esta acotada por arriba por la dimensión de Hausdorff y por la dimensión de información. Para aplicaciones prácticas, Grassberger y Procaccia (1983) demuestran que

$$C_m(r) \sim r^{d_m} \quad (5.5)$$

### Cálculo de la dimensión de correlación

Grassberger y Procaccia nos facilitan un algoritmo de cálculo de la dimensión entera. Así tenemos que

$$C_m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(r | X_i^m - X_j^m) \gg b r^{d_m} \quad (5.6)$$

donde  $H(z)$  es la función de Heaviside

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X_i^m - X_j^m| < r \\ 0 & \text{si } |X_i^m - X_j^m| \geq r \end{cases}$$

La idea que hay detrás de esa expresión es muy simple. Únicamente estamos contando, aquellos pares de puntos  $(X_i, X_j)$  tales que su distancia euclídea es inferior a  $r$ . Condición que vendrá dada por

$$\|X_i - X_j\| = \left( \sum_{k=1}^m (X_i^k - X_j^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r \quad \text{si } i < j$$

donde  $r$  es el radio elegido y  $m$  es la dimensión de inmersión elegida. La correlación entera, por tanto, es una medida de la correlación espacial de puntos en el espacio de inmersión.

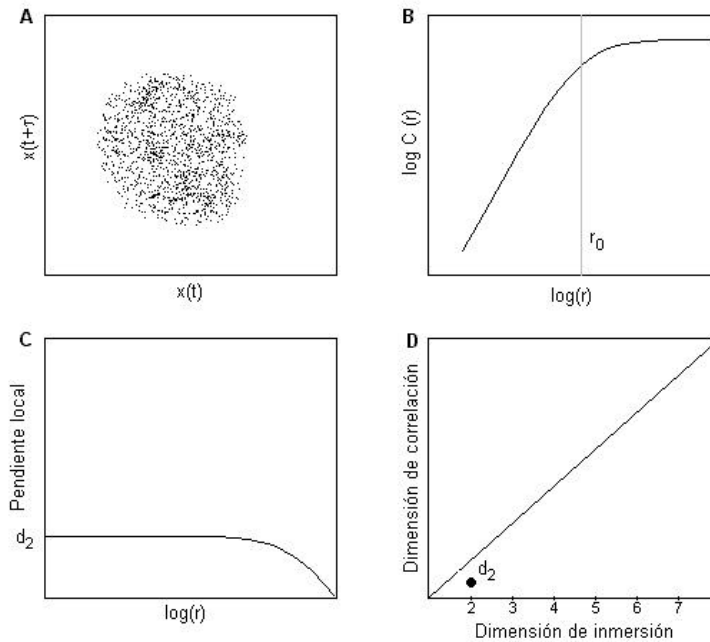
Pero en la práctica no existe un número infinito de observaciones, por lo que los límites  $N \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow 0$  no pueden realizarse. En su lugar, lo que se plantea es, calcular la dimensión utilizando un rango para  $r$ ,  $r_1 < r < r_2$ , donde  $r_1$  es proporcional a la mínima diferencia existente entre los datos y  $r_2$  está relacionado con el tamaño del objeto y la localización de los puntos de referencia.

De esa forma calcularemos la dimensión entera de la serie para una dimensión  $m$  y calcularemos su dimensión asociada tomando logaritmos en la expresión (5.5), obteniendo

$$\ln C_m(r) = a + d_m \ln r \tag{5.7}$$

donde  $a$  es una constante de proporcionalidad. A grandes rasgos, la idea es la siguiente, partiendo de un valor de  $m$ , se calcula la correlación entera para distintos valores de  $d$  y ajustando por MCO una función cuya pendiente será la estimación de  $d_m$  vamos repitiendo el proceso para distintos valores de  $m$ . Si  $d_m$  se estabiliza a partir de algún  $m$  diremos que la serie es determinista. Por el contrario si crece el proceso será estocástico. Este análisis de la dimensión de correlación es lo que se conoce como test  $G_j P$ .

El proceso que seguiremos a la hora de estimar la dimensión de correlación tendrá como base el test  $G_j P$ , pero haremos un paso intermedio. Gráficamente el proceso será la siguiente:



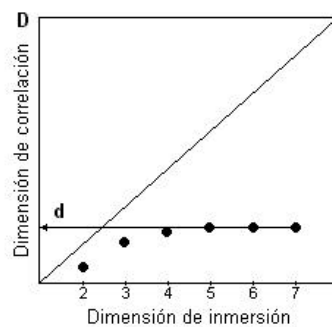
Partimos de una serie sobre la que reconstruimos su espacio de fases, gráfico A, a continuación calcularemos la dimensión entera siguiendo la expresión (5.6), y representaremos el gráfico B. Si siguiéramos estrictamente la metodología del test  $G_j P$ , deberíamos considerar la parte lineal de esta gráfica, cuyo valor máximo a tener en cuenta se ha denotado por  $r_0$ , y podríamos mediante MCO estimar el valor de la dimensión de correlación. Pero llegados a este punto nos parece más conveniente un paso intermedio propuesto por diversos autores, como por ejemplo Tsonis (1992) o Kim y Stringer (1992) entre otros, en el que en lugar de calcular la dimensión de inmersión directamente de la regresión entre  $C_m(r)$  y  $\ln r$ , la calcularemos teniendo en cuenta un nuevo gráfico en el que recogeremos las pendientes locales entre  $C_m(r)$  y  $\ln r$ , considerando las pendientes locales como

$$\text{Pendientes Locales} = \frac{4 C_m(r)}{4 \ln r}$$

Representaremos un nuevo gráfico donde en el eje de ordenadas tendremos estas pendientes y en el eje de abscisas tendremos el  $\ln r$ , gráfico C. Si el valor de la dimensión de inmersión existe este gráfico presentará en algún lugar una parte estable, una meseta, y justamente en el valor que la función se estabiliza tenemos el valor estimado de la dimensión de inmersión. Pasemos ahora a un

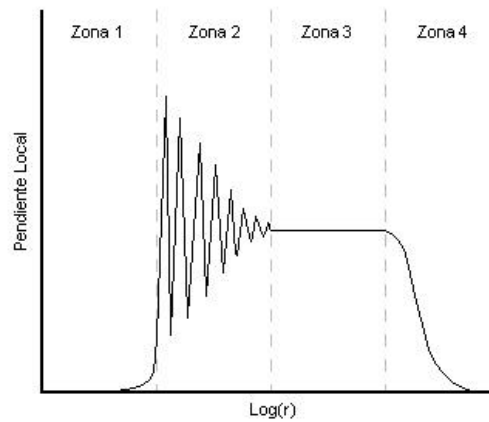


nuevo gráfico, gráfico  $D$ , donde en el eje de abscisas tendremos la dimensión de inmersión  $m_i$  y en el de ordenadas recogeremos el valor de la dimensión de correlación. En el gráfico hemos representado la operación partiendo de una dimensión de inmersión  $m = 2$ . Repetiremos el proceso para otros valores  $m$ . Normalmente en los estudios realizados sobre el tema el rango considerado es  $2 \cdot m \cdot 10$ . Así que procedemos a calcular las siguientes dimensiones de inmersión,  $d_{m_i}$  y si estas se estabilizan en algún valor, diremos que este es el valor estimado de la dimensión de correlación,  $d$ .



### Interpretación de los resultados en la estimación de la dimensión de correlación

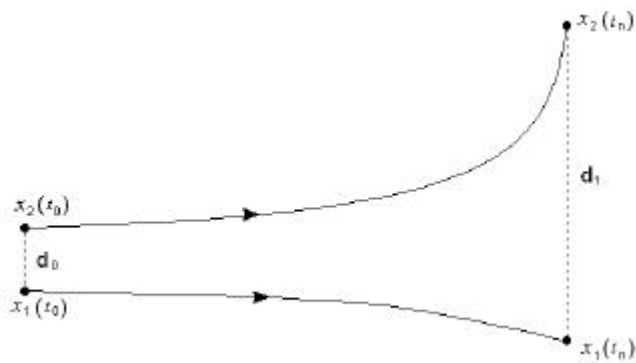
El introducir el paso intermedio en la estimación de la dimensión de correlación es una baza importante, ya que podremos indentificar gráficamente, antes de ponernos a estimar la dimensión de correlación, si existe. Para ello tengamos en cuenta el siguiente gráfico, que vendría a representar un ejemplo del gráfico anteriormente descrito,



Como podemos notar, hemos dividido el gráfico en cuatro zonas que vamos a interpretar a continuación. En primer lugar respecto a la zona 1 decir que en este caso el radio de referencia elegido para determinar las esferas es más pequeño que las distancias entre las observaciones, es por ello que no existe información referente a la dimensión del objeto y la dimensión en este caso sería cero. En la zona 2, por el contrario, vemos como ahora, al ser el radio mayor, se incluye información, pero es una información no válida, ya que la pendiente local es errática, hecho que podría ser causado por la existencia de ruido en los datos. En la zona 3 vemos que aparece una meseta, o zona estable, justamente en el valor de la dimensión del sistema. Por último en la zona 4, las esferas de referencia son mucho más grandes que el objeto de referencia, y lo que vemos como la zona estable desaparece y la gráfica tiende a cero.

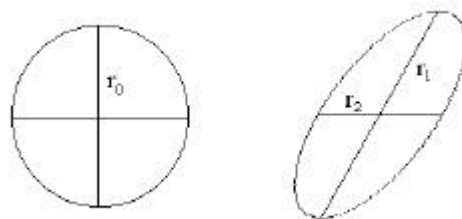
### 5.2.3. Exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov desempeñan un papel clave en la tarea de detectar la existencia de un comportamiento caótico y sobretodo la caracterización de atractores. Su cálculo permite valorar la sensibilidad a las condiciones iniciales, siendo esta, como sabemos, una de las características principales de los fenómenos caóticos. Por tanto dan una idea del como de predecible puede ser un sistema. Una idea de lo que pretendemos exponer vendría representada por el siguiente gráfico:



Los exponentes de Lyapunov, tal y como señala Olmeda (1995), generalizan el concepto de tasa instantánea de cambio respecto al estado inicial, en el sentido de que indican la tasa media de divergencia (expansión) o convergencia (contracción) de trayectorias inicialmente próximas en el espacio de fases. Para un sistema  $n$ -dimensional existirán  $n$  exponentes de Lyapunov  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde un  $\lambda_i < 0$  indicará que existe una tasa media de contracción y un  $\lambda_i > 0$  indicará que existe una tasa media de expansión en esa dimensión. Así, por norma general, todo sistema disipativo de dimensión mayor que uno debe tener al menos un exponente de Lyapunov negativo, indicando una contracción general y, paralelamente, un sistema caótico debe tener al menos un exponente de Lyapunov positivo.

La idea intuitiva que debemos tener de los exponentes de Lyapunov podría plantearse de la siguiente forma: consideremos un espacio de dimensión 2 y el conjunto de puntos situados en el interior de un círculo de radio  $r_0$ . Después de un período, el círculo se transformará en una elipse de parámetros  $r_1$  y  $r_2$  donde el radio se estirará en una dirección y se contraerá en la otra.



Si intentamos medir de alguna forma la tasa de variación podríamos tomar como medida la siguiente:  $\mu_i = \frac{r_i}{r_0}$   $i = 1, 2$ . Si analizamos la situación transcurridos  $n$

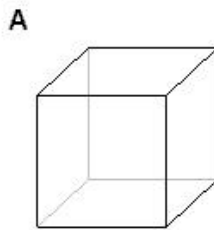
periodos, tendremos  $r_i = \mu_i^n r_0$ . Tomando logaritmos neperianos podemos decir que

$$\lambda_i = \ln \mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{r_i}{r_0} \quad i = 1, 2$$

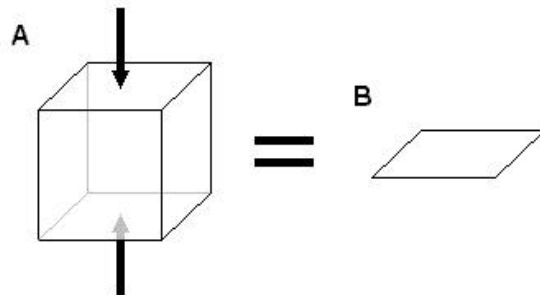
donde los valores  $\lambda_i$  son los exponentes de Lyapunov.

En el caso de que uno de los exponentes sea positivo, la elipse se estira indefinidamente en un mismo sentido y dos puntos, inicialmente cercanos, divergen siguiendo una tasa exponencial dentro del atractor, lo que vendría a ilustrar el efecto mariposa, o sensibilidad a las condiciones iniciales, que se manifiestan en los sistemas dinámicos caóticos.

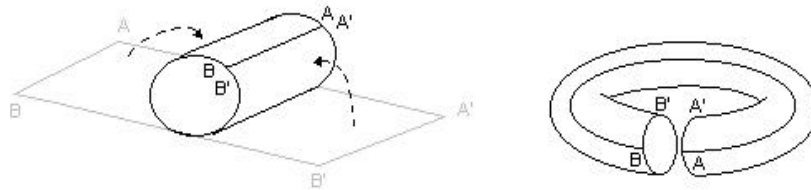
En otras palabras, los exponentes de Lyapunov están relacionados con los ratios medios de convergencia y/o divergencia de trayectorias cercanas en el espacio de fases, y, por consiguiente, miden el como de predecible o impredecible es un sistema. Hemos introducido la idea del círculo para ver como se calculan los exponentes de Lyapunov, pero ahora vamos a plantearlo de otra manera. Para ello observemos la siguiente figura:



La figura asume que el espacio es tridimensional. Aunque podríamos haber generalizado con dimensiones mayores, nos es más fácil de ilustrar partiendo de la tercera dimensión. Tomemos una figura en 3D que no es más que un cubo. Si hacemos evolucionar esta figura contrayéndola en una dirección, acabaríamos obteniendo un plano de 2D, obteniendo la figura B,

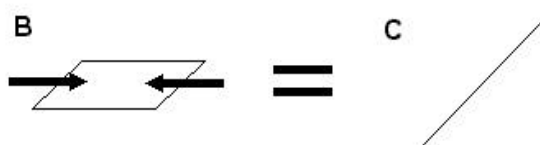


En conclusión, diremos que el ratio de divergencia de trayectorias cercanas es cero a lo largo de dos direcciones y negativo en la tercera, Si calculásemos el espectro de los exponentes de Lyapunov en ese caso obtendríamos  $(0, 0, \lambda)$ . Si seguimos estudiando el plano, podemos construir a partir de él, lo que se conoce como toro,



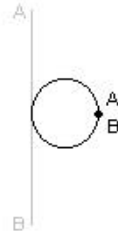
De ahí que digamos que el plano y el toro sean equivalentes, ya que tanto el plano como el toro tienen el mismo espectro de exponentes de Lyapunov.

Si ahora contaremos el plano en una única dirección, el resultado es una línea de 1 dimensión,



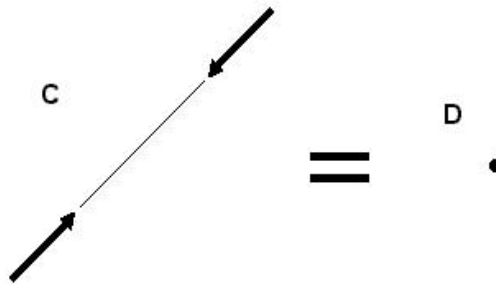
En otras palabras, cuando partimos de un cubo de 3D y acabamos en una línea de 1D, el ratio de divergencia de trayectorias cercanas es cero únicamente

en una dirección, mientras que en las otras dos es negativo. Si consideramos la recta, podemos, de forma fácil, obtener un círculo.



Por tanto, el círculo y la recta son equivalentes, es por eso que sistemas que exhiben comportamientos de ciclo límite como atractor tienen un espectro de exponentes de Lyapunov  $(0, i, i)$ .

Si ahora contraemos la recta obtendremos como resultado el punto. En conclusión, partiendo de un proceso donde las condiciones iniciales son un cubo que se contrae hasta llegar a un punto, tenemos como resultado divergencia negativa a lo largo de todas las direcciones, es por eso que procesos que poseen un atractor que es un solo punto exhiben un espectro de exponentes de Lyapunov  $(i, i, i)$ .



Por último, cuando consideramos dinámicas caóticas, el atractor que está detrás de este comportamiento no es una variedad lineal topológica. En ese caso, el espectro de exponentes de Lyapunov es  $(+, 0, i)$ .

En lenguaje matemático podemos resumir todo lo que acabamos de exponer

de la siguiente forma: Consideremos un cubo, como condiciones iniciales en el espacio de fases. Este cubo define un espacio compacto  $M$ . Si el sistema dinámico en cuestión tiene un atractor que es un punto  $Q$ , entonces diremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t X = Q$ , donde  $f^t$  se mantiene durante la evolución del tiempo de cualquier sistema y  $X$  es un conjunto de condiciones iniciales. De ese modo, las condiciones iniciales tridimensionales se contraen hacia un punto, cero-dimensional. Para que esto ocurra el volumen debe contraerse a lo largo de las tres direcciones. En este caso existen 3 exponentes de Lyapunov que son negativos.

Si el sistema en cuestión posee un ciclo límite como atractor, entonces diremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t X = \gamma$ , donde  $\gamma$  es una trayectoria cercana que tiene una dimensión topológica igual a 1. El volumen inicial se contrae en dos direcciones, pero no se contraerá en la dirección de la órbita, lo que implica que, en este caso, dos exponentes son negativos y uno igual a cero.

Si el sistema tiene un toro como atractor, entonces diremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t X = \mathbb{T}^2$ , donde  $\mathbb{T}^2$  es una superficie que tiene dimensión topológica 2. En este caso, como ya sabemos, el volumen se contrae solamente en una dirección, cada órbita, se corresponde con dos condiciones iniciales diferentes que alcanzarán esta superficie en puntos distintos, pero una vez en el atractor su separación permanece constante (el flujo  $f^t$  es el mismo para todas las condiciones iniciales). Esto significa que trayectorias cercanas ni divergen ni convergen. Como sabemos los exponentes de Lyapunov serán dos igual a cero y uno negativo.

Si el sistema posee un atractor caótico, no topológico,  $S$ , entonces diremos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t X = S$ . En este caso particular diremos que el volumen inicial se contrae a lo largo de alguna dirección, en el sentido de que el objeto se contrae de un volumen de tres dimensiones a una variedad lineal de menor dimensión, lo que implica que uno de los exponentes de Lyapunov es negativo. Pero, a lo largo de la dirección de la trayectoria que no se contraerá, el segundo exponente será cero. Además, el atractor caótico tiene la propiedad de que trayectorias cercanas se separan a medida que  $t \rightarrow \infty$ , de ahí que el último exponente sea positivo.

Siguiendo lo expuesto, una definición más formal de los exponentes de Lyapunov vendría dada de la siguiente forma. Partiremos de un atractor (inmerso en un espacio euclídeo  $n$ -dimensional) que está contenido en una esfera  $n$ -dimensional. Posteriormente, empezaremos a estudiar la evolución de esa esfera a lo largo del tiempo. Ordenaremos los ejes mayores de esta esfera desde los que crecen más rápidos hasta los menos rápidos y calcularemos el ratio medio de crecimiento  $\lambda_i$  de cualquier eje principal  $p_i$ . Podemos definir esos ratios de

crecimiento de la siguiente forma,

$$\lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \frac{p_i(T)}{p_i(0)}$$

Aquí  $p_i(0)$  es el radio del eje mayor  $p_i$  en  $t = 0$  (por ejemplo en la hipersfera inicial), y  $p_i(T)$  es su radio tras un tiempo  $T$ . Normalmente al conjunto de todos los  $\lambda_i$  se le denomina espectro de los exponentes de Lyapunov. Por lo que podemos deducir, existen tantos exponentes como dimensiones en el espacio de fases.

Cuando al menos uno de los exponentes es positivo, el sistema que estudiamos es caótico y la esfera inicial evolucionará hacia una estructura elipsoidal compleja, retejando la divergencia exponencial de condiciones iniciales cercanas a lo largo de una dirección del atractor. Esta sensibilidad a las condiciones iniciales implica que no podemos realizar predicciones de la evolución de la trayectoria más allá de un intervalo de tiempo, aproximadamente equivalente a la inversa del ratio de divergencia. Por el contrario, cuando no aparece ningún exponente positivo no existe divergencia exponencial y por lo tanto la predictibilidad del sistema, a largo plazo, queda garantizada.

En ese sentido, podríamos considerar a los exponentes de Lyapunov, como una medida del ratio en que el sistema destruye información.

**Cálculo de los exponentes de Lyapunov: El método de Wolf y el algoritmo de Kantz**

Supongamos que nuestro sistema dinámico posee dimensión  $d$ , que ya sabemos como estimar. Si el sistema es caótico, al menos uno de los  $d$  exponentes de Lyapunov será positivo. Si los ordenamos de mayor a menor, un exponente máximo de Lyapunov positivo nos dará evidencia adicional de caos.

Existen diferentes algoritmos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov como, por ejemplo, el algoritmo de Brown et al. (1991) o el algoritmo de Gencay y Dechert (1992). Pero, básicamente, todos ellos están basados en uno de los primeros métodos de estimación planteados por Wolf et al. (1985). Básicamente dicho método consiste en lo siguiente: supongamos que tenemos un atractor  $\Sigma$ , reconstruido en un espacio de dimensión  $d$  a partir de una serie temporal  $X(t)$ . Tomaremos uno de las observaciones de la serie temporal  $X_1(0)$  y buscaremos el punto más cercano  $X_2(0)$  tal que su distancia sea

$$L(0) = \|X_1(0) - X_2(0)\| > \varepsilon$$



En otras palabras, se trata del punto más cercano siempre que exista una separación mínima  $\varepsilon$  que corresponderá a la amplitud del posible ruido asociado a la medida. Para determinar el valor de  $\varepsilon$  se requieren ciertas pruebas empíricas tal y como se indica en Wolf et al. (1985).

El siguiente paso consiste en calcular la distancia entre las imágenes obtenidas al cabo de cierto tiempo,  $T$ ,

$$L(T) = \|X_1(T) - X_2(T)\|$$

distancia que nos dará la divergencia

$$\lambda_L = \frac{1}{T} \log_2 \frac{L(T)}{L(0)}$$

que será positiva si las trayectorias divergen. El proceso se repite a continuación utilizando  $X_1(T)$  y buscando otra vez el punto más cercano. Realizando este proceso sucesivamente y, finalmente, calculando el promedio sobre  $r$  parejas de puntos que cumplan las desigualdades indicadas obtendremos la estimación del exponente de Lyapunov

$$\hat{\lambda}_L = \frac{1}{rT} \sum_{t=1}^r \log_2 \frac{\|X_1(t+T) - X_2(t+T)\|}{\|X_1(t) - X_2(t)\|}$$

Cabe destacar que el método de Wolf posee algunos inconvenientes, entre ellos que depende de la estimación previa de los parámetros  $\varepsilon$  y  $d$ , o bien, como la mayoría de metodología caótica, que requiere un volumen de datos sucesivamente grande; como señalan Brock y Sayers (1988) demostrando que puede llegar a dar una aproximación incorrecta en series con número limitado de observaciones, que es lo que ocurre normalmente. Además como señalan Kantz y Schreiber (1997), este algoritmo no permite testear la presencia de divergencia exponencial, asume la existencia de esta divergencia y en consecuencia da como resultado un exponente finito para datos estocásticos, cuando este tendría que ser infinito. Es por ello que, en nuestro caso particular, utilizaremos el algoritmo propuesto por Kantz (1994) por su simplicidad y eficiencia.

El algoritmo de Kantz, se basa en la elección de un punto  $s_{n_0}$  de la serie temporal en el espacio de fases y a continuación seleccionamos todos los puntos cercanos a una distancia menor a  $\varepsilon$ , que llamaremos vecinos.

Consideremos la representación de la serie temporal como un trayectoria en el espacio de inmersión y asumamos que observamos un rendimiento muy cercano  $s_n$  al que habíamos considerado inicialmente  $s_{n_0}$ . Ahora, podemos considerar la distancia existente entre ambos  $\Phi_0 = s_{n_0} - s_n$  como una perturbación

pequeña, que puede crecer en el tiempo de forma exponencial. Su evolución puede deducirse de la serie considerando  $\Phi_n = s_{n_0 + \Phi_n} - s_{n + \Phi_n}$ . Si encontramos que  $\|\Phi_n\| \approx \|\Phi_0\| e^{\lambda n}$  entonces  $\lambda$  es (con probabilidad 1) el máximo exponente de Lyapunov. Para hallarlo trabajaremos con la expresión,

$$S(\Phi_n) = \frac{1}{N} \sum_{n_0=1}^N \ln \left| \frac{1}{\|J_U(s_{n_0})\|} \right|_{s_{n_0} \in U(s_{n_0})} \quad \text{O} \quad \text{1}$$

donde los puntos de referencia  $s_{n_0}$  son vectores de inversión y  $U(s_{n_0})$  es la vecindad de  $s_{n_0}$  de diámetro  $\varepsilon$ . A partir de aquí, podemos, a priori, no conocer la mínima dimensión de inmersión  $m$ , que no es nuestro caso ya que nosotros hemos calculado ese valor obteniendo  $m = 2$ , ni la distancia óptima  $\varepsilon$ . Podemos calcular  $S(\Phi_n)$  para varios valores de los mismos. El tamaño de la vecindad deberá ser lo más pequeño posible, pero suficientemente grande para que en la media cada punto de referencia tenga al menos unos pocos vecinos. Por lo tanto a la hora de calcular los exponentes de Lyapunov de nuestras series, procesaremos para cada serie diferentes valores de  $\varepsilon$ . De forma que, si para un rango de valores, la función  $S(\Phi_n)$  exhibe un crecimiento lineal, estimaremos la pendiente de este crecimiento y esta será una estimación del máximo exponente de Lyapunov  $\lambda$  para la serie temporal dada.

#### 5.2.4. El test de residuos de Brock

Este test fue propuesto por W. A. Brock, siendo un arma bastante potente y útil en la detección de un comportamiento caótico. Como hemos comentado con anterioridad, no existe ningún contraste de hipótesis que mantenga como hipótesis nula la existencia de caos, pero lo que se plantea en este apartado es tan útil como la aplicación de un contraste estadístico. Destacar que las siguientes hipótesis y teoremas están extraídos del artículo Brock (1986).

**Definición 5.3** Un atractor es un conjunto cerrado e invariante  $\mathfrak{A}$  con la propiedad de que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un conjunto  $U$  de medida de Lebesgue positiva en el  $\varepsilon$ -vecindario de  $\mathfrak{A}$  tal que  $x \in U$  implica que el conjunto  $w$ -límite de  $x$  está contenido en  $\mathfrak{A}$ , y la siguiente órbita de  $x$  está contenida en  $U$ . Además, el atractor es caótico si el mayor exponente de Lyapunov es positivo.

**Definición 5.4** Un conjunto invariante y cerrado  $\mathfrak{A}$  es topológicamente transitivo si un sistema dinámico  $F$  tiene una órbita que es densa en  $\mathfrak{A}$ .

**Conjetura 5.1** La serie temporal  $\{x_t\}_{t=1}^T$  tiene una  $C^2$  explicación determinista  $(h, F, x_0)$  donde el sistema dinámico  $F$  tiene un atractor compacto único que es topológicamente transitivo y está dotado con una medida ergódica continua invariante  $\rho$  que tiene una densidad continua  $\rho(dx) = j(x) dx$ . Además, la órbita siguiente  $\{x_t\}_{t=0}^1$  determinada por  $x_0$  descansa sobre la órbita que es densa en  $\mathbb{R}$  y el mayor exponente de Lyapunov es positivo.

#### Teorema 5.1 Test de residuos de Brock

Consideremos que la serie temporal  $\{x_t\}_{t=1}^T$  tiene una explicación determinista que satisface la conjetura anterior. Si ajustamos un modelo de serie temporal con un número finito de retardos sobre  $\{x_t\}_{t=1}^T$ , por ejemplo,

$$x_t + \gamma_1 x_{t-1} + \dots + \gamma_L x_{t-L} = \varepsilon_t \quad t = L+1, \dots$$

donde  $\varepsilon_t$  es el residuo en el periodo  $t$  y  $\gamma_1, \dots, \gamma_L$  son la secuencia de coeficientes estimados, entonces, y de forma general, la dimensión y el mayor exponente de Lyapunov, estimado mediante el algoritmo de Wolf, de  $\{x_t\}$  y de  $\{\varepsilon_t\}$  son iguales.

#### 5.2.5. El test BDS

El test *BDS*, propuesto por Brock et al. (1987), es un potente test para distinguir entre sistemas aleatorios de caos determinista o sistemas no-lineales estocásticos. Básicamente, el test *BDS* detecta la dependencia no-lineal y permite detectar cuando la hipótesis de *iid* no es cierta debido a lo no estacionariedad, no linealidad o existencias de comportamiento caótico, tal y como se señala en Olmeda (1995) y en Opong et al. (1999) entre otros. El estadístico *BDS* mide la significancia estadística de los cálculos de la dimensión de correlación. Como hemos visto la integral de correlación calcula la probabilidad de que un número determinado de puntos se encuentren a una distancia o radio,  $r$ , separados en el espacio de fases. Incrementando  $r$ , la probabilidad varía en función de la dimensión fractal del espacio de fases. Tomando el concepto de la integral de correlación, Brock et al. demostraron que,

$$j C_m(e, T) \sim C_1(e, T)^N j \frac{\rho}{T} \quad (5.8)$$

se distribuye según una ley normal de media 0. El estadístico *BDS*,  $W$ , se distribuye también de forma normal y viene dado por:

$$W_N(e, T) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_m(r, T) C_1(r, T)^{|i-j|}}{S_N(r, T) \sqrt{T}} \quad (5.9)$$

donde  $S_N(e, T)$  es la desviación estándar de las integrales de correlación. Brock et al. demostraron que el estadístico  $BDS, W$ , tiene en el límite una distribución normal bajo la hipótesis nula de *iid*. La aproximación se considera válida si la serie está formada por más de 500 observaciones. Hsieh (1991) señala que, cambios estructurales en la serie pueden causar un rechazo de la hipótesis nula de *iid* basándonos en el test  $BDS$ . Pandley et al. (1997) sugieren una partición de la serie en subperiodos para un análisis separado. El periodo de estudio para cada índice de la serie se parte en subperiodos para un análisis separado del  $BDS$ . Un problema en el análisis de  $BDS$  es la elección de  $r$  que representa la máxima distancia para el par  $(x_i, x_j)$ . Un valor demasiado grande hará que se incluyan todos los pares, y el valor de la integral de correlación será la unidad, mientras que un valor demasiado pequeño implicará que no hallaremos ningún par de puntos, y por lo tanto el valor de la integral de correlación será nulo. Siguiendo Brock et al. (1991) y Sewell et al. (1993), el valor de  $e$  usado en este estudio es igual a  $0,5\sigma, \sigma, 1,5\sigma$  y  $2\sigma$ , siendo  $\sigma$  el valor de la desviación estándar de la serie analizada, en este caso la serie ...litrada.

Como hemos comentado la hipótesis nula testada en este estudio consiste en que los datos de la serie son *iid*. Esta hipótesis nula puede rechazarse con un 95 % de confianza cuando  $W$  supera 2,0. También, la hipótesis puede rechazarse con un 99 % de confianza si  $W$  excede 3,0.

Este test es similar al planteado en el capítulo 2 denominado  $Q$ -test de Ljung-Box, pero debemos destacar que aunque ambos testean que los residuos sean *iid*, el que aquí se plantea es mucho más genérico que el anterior. En el caso del test Ljung-Box se testaba la existencia de una relación entre las observaciones, y particularmente se estudiaba el hecho de que esta relación fuese lineal. Por el contrario, en el test  $BDS$ , puesto que esta basado en la integral de correlación, se testea todo tipo de relación existente entre las variables, ya sea lineal o no lineal. En otras palabras, si generamos una serie caótica, a partir de una relación no lineal determinista entre las variables, y pasamos el test de Ljung-Box sobre estos datos, el test nos dirá que son variables *iid*, mientras que si pasamos el test  $BDS$  detectará el comportamiento caótico o de dependencia no lineal y el resultado será que existe una relación entre los datos, como ya sabemos. Para ilustrar este apartado hemos generado una serie a partir de la ecuación logística con un parámetro  $C = 4$  y tomando como punto inicial  $X_0 = 0,41$ . Por lo

tanto determinista, pero con comportamiento pseudoaleatorio, que volveremos a utilizar más adelante, y sobre la que hemos aplicado el test de Ljung Box:

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.023	0.023	1.3767	0.241
				2	-0.006	-0.007	1.4786	0.477
				3	0.004	0.004	1.5175	0.678
				4	0.019	0.019	2.4416	0.655
				5	0.016	0.015	3.0956	0.685
				6	0.015	0.014	3.6356	0.726
				7	-0.023	-0.024	5.0082	0.659
				8	-0.005	-0.004	5.0679	0.750
				9	-0.027	-0.027	6.8417	0.654
				10	-0.034	-0.034	9.7907	0.459
				11	-0.035	-0.034	12.909	0.299
				12	0.000	0.001	12.909	0.376
				13	0.022	0.024	14.175	0.362
				14	0.004	0.005	14.212	0.434
				15	0.019	0.022	15.108	0.444
				16	0.051	0.051	21.683	0.154
				17	0.007	0.004	21.820	0.192
				18	-0.010	-0.013	22.053	0.230
				19	-0.036	-0.040	25.261	0.152
				20	0.007	0.004	25.390	0.187
				21	0.029	0.024	27.575	0.153
				22	0.004	0.002	27.607	0.189
				23	-0.006	0.001	27.683	0.228
				24	-0.009	-0.003	27.871	0.266
				25	-0.016	-0.012	28.529	0.284
				26	-0.002	0.000	28.544	0.332
				27	0.012	0.014	28.878	0.367
				28	-0.008	-0.010	29.030	0.411
				29	0.003	-0.001	29.049	0.463
				30	0.010	0.009	29.327	0.500

Test de Ljung-Box sobre la serie caótica generada a partir de la ecuación logística para los primeros 30 retardos.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				80	-0.020	-0.021	64.311	0.899
				81	-0.006	-0.003	64.407	0.912
				82	0.001	0.004	64.413	0.924
				83	-0.015	-0.009	65.017	0.928
				84	0.008	0.015	65.198	0.936
				85	0.019	0.023	66.115	0.936
				86	0.008	0.009	66.262	0.944
				87	0.025	0.024	67.944	0.935
				88	0.023	0.022	69.327	0.929
				89	-0.005	-0.008	69.399	0.939
				90	0.008	0.001	69.575	0.946
				91	-0.006	-0.012	69.657	0.953
				92	-0.015	-0.022	70.263	0.955
				93	-0.002	0.002	70.277	0.962
				94	-0.029	-0.027	72.499	0.951
				95	0.025	0.035	74.138	0.944
				96	-0.003	0.003	74.168	0.952
				97	-0.041	-0.033	78.626	0.914
				98	0.020	0.028	79.669	0.912
				99	-0.024	-0.023	81.163	0.904
				100	-0.013	-0.015	81.578	0.911

Test de Ljung-Box sobre la serie caótica generada a partir de la ecuación logística para los últimos 20 retardos.

Podemos ver que el test de Ljung-Box no recoge la dependencia de las variables, puesto que tal dependencia es no lineal y dicho test únicamente detecta la dependencia lineal. Para comprobar que dicha dependencia sí quedará detectada mediante el test *BDS*, representaremos a continuación una tabla que recoge, por una lado los resultados obtenidos del test *BDS* para una serie generada a partir de una variable aleatoria, que sigue una ley  $N(0, 1)$ , frente a la serie caótica que acabamos de utilizar,

$\varepsilon$	$m$	Variable aleatoria	Serie determinista
0.5 $\sigma$	2	-0.02048	3.65400
0.5 $\sigma$	3	-0.01665	3.24320
0.5 $\sigma$	4	-0.00545	2.13420
0.5 $\sigma$	5	-0.00128	1.27380
0.5 $\sigma$	6	0.00023	0.72727
0.5 $\sigma$	7	0.00074	0.41074
0.5 $\sigma$	8	0.00043	0.23150
0.5 $\sigma$	9	0.00023	0.12959
0.5 $\sigma$	10	0.00009	0.07254
$\sigma$	2	-0.05608	2.80100
$\sigma$	3	-0.08285	2.90130
$\sigma$	4	-0.07206	2.31270
$\sigma$	5	-0.05020	1.63220
$\sigma$	6	-0.04067	1.08000
$\sigma$	7	-0.03184	0.69960
$\sigma$	8	-0.02250	0.44438
$\sigma$	9	-0.01204	0.27499
$\sigma$	10	-0.00597	0.16800
1.5 $\sigma$	2	-0.06073	0.21529
1.5 $\sigma$	3	-0.12166	-0.38689
1.5 $\sigma$	4	-0.14668	-0.47208
1.5 $\sigma$	5	-0.12642	-0.47449
1.5 $\sigma$	6	-0.13147	-0.42049
1.5 $\sigma$	7	-0.13338	-0.35145
1.5 $\sigma$	8	-0.12116	-0.27829
1.5 $\sigma$	9	-0.09538	-0.21317
1.5 $\sigma$	10	-0.07313	-0.15932
2 $\sigma$	2	-0.04194	-1.70220
2 $\sigma$	3	-0.09022	-2.48690
2 $\sigma$	4	-0.13777	-2.65850
2 $\sigma$	5	-0.12963	-2.45850
2 $\sigma$	6	-0.14949	-2.18190
2 $\sigma$	7	-0.17753	-1.89410
2 $\sigma$	8	-0.18472	-1.65370
2 $\sigma$	9	-0.16981	-1.44710
2 $\sigma$	10	-0.15420	-1.26460

Test BDS para una serie aleatoria generada a partir de una distribución  $N(0, 1)$  y otra caótica.

Vemos como para el caso de la variable aleatoria aceptaríamos la hipótesis nula de independencia, mientras que para la variable caótica no.

Cabe decir por tanto, que en cuanto a la evaluación de la hipótesis *iid*, consideramos el test *BDS*, como un test más completo y mejor que el de Ljung-Box. A efectos del análisis realizado hasta este punto, debemos destacar que nuestras conclusiones no se ven modificadas. Puesto que si hubiésemos utilizado

el test *BDS*, en lugar del test de Ljung-Box, las conclusiones serían exactamente las mismas. Pero el punto en que nos hallamos ahora, que es el del análisis de las no linealidades, necesita de la definición de una herramienta más potente. Para resumir diremos que un rechazo de la hipótesis nula de *iid*, desde el punto de vista del análisis *BDS*, puede apuntar hacia un proceso caótico (no lineal determinista), un proceso no lineal estocástico o, bien, hacia la dependencia lineal estocástica en el comportamiento de una serie tanto a largo como a corto plazo.

### El test *BDS* sobre las series temporales del tipo de interés

Para demostrar de que las conclusiones no varían, a continuación, presentamos los resultados del test *BDS* para la serie de incrementos de los datos originales,

$\epsilon$	$m$	1 día	1 semana	15 días	1 mes	2 meses	3 meses	6 meses	1 año
0.5 $\sigma$	2	2.42300	3.23430	3.16780	3.24540	2.53030	2.59530	1.42060	1.06450
0.5 $\sigma$	3	4.45070	5.58370	5.78850	5.75300	3.81190	3.81410	1.89670	1.35260
0.5 $\sigma$	4	5.85290	6.84480	7.46890	7.12170	4.18840	4.03790	1.73910	1.15790
0.5 $\sigma$	5	6.92560	7.22480	8.36050	7.70660	4.09750	3.75370	1.41980	0.86230
0.5 $\sigma$	6	7.75910	7.21440	8.74910	7.81090	3.77780	3.30190	1.09560	0.61603
0.5 $\sigma$	7	8.36200	6.92600	8.81400	7.59320	3.36380	2.82020	0.81709	0.42647
0.5 $\sigma$	8	8.71520	6.48650	8.61530	7.21610	2.93230	2.36920	0.60470	0.29572
0.5 $\sigma$	9	8.82390	5.95620	8.25070	6.76620	2.50490	1.97470	0.44931	0.20530
0.5 $\sigma$	10	8.81630	5.44340	7.84660	6.31130	2.11280	1.64450	0.33683	0.14244
$\sigma$	2	1.15700	2.34620	2.01540	2.29180	2.18760	2.38690	1.85060	1.40950
$\sigma$	3	2.41590	4.72390	4.20290	4.65710	4.23790	4.63650	3.54020	2.60810
$\sigma$	4	3.56620	6.60000	6.18120	6.68100	5.89210	6.33260	4.67100	3.35560
$\sigma$	5	4.60820	7.99940	7.88620	8.39860	7.14470	7.56120	5.45480	3.76490
$\sigma$	6	5.58370	9.12010	9.33820	9.91330	8.08020	8.37040	5.83750	3.91060
$\sigma$	7	6.49700	9.93180	10.54800	11.19300	8.74060	8.86610	5.94970	3.88920
$\sigma$	8	7.34980	10.47900	11.48800	12.17800	9.16590	9.05880	5.85460	3.74950
$\sigma$	9	8.10300	10.82200	12.18900	12.97600	9.37720	9.02500	5.63500	3.50340
$\sigma$	10	8.73650	11.02700	12.71300	13.55900	9.43020	8.85050	5.34690	3.22080
1.5 $\sigma$	2	0.74605	1.69860	1.36020	1.51990	1.32040	1.58780	1.24810	1.06510
1.5 $\sigma$	3	1.67370	3.55190	2.78280	3.17370	2.85340	3.44040	2.75470	2.31840
1.5 $\sigma$	4	2.56780	5.20590	4.23960	4.73470	4.42560	5.17160	4.10160	3.41050
1.5 $\sigma$	5	3.40090	6.65030	5.68170	6.19370	5.81010	6.66490	5.34650	4.41890
1.5 $\sigma$	6	4.17290	7.95500	7.06300	7.53730	7.08830	8.01310	6.43150	5.31870
1.5 $\sigma$	7	4.89300	9.11040	8.36950	8.88260	8.22060	9.15690	7.36950	6.09110
1.5 $\sigma$	8	5.56220	10.08300	9.52300	10.11100	9.22620	10.12700	8.09520	6.69340
1.5 $\sigma$	9	6.17650	10.88500	10.53500	11.23100	10.05500	10.88900	8.61970	7.11290
1.5 $\sigma$	10	6.73920	11.53800	11.43400	12.20200	10.80800	11.48400	8.99390	7.39810
2 $\sigma$	2	0.03808	1.11300	0.94342	1.02220	0.72837	1.08610	0.74338	0.70107
2 $\sigma$	3	0.07603	2.38490	1.96940	2.15160	1.71400	2.37850	1.71720	1.65990
2 $\sigma$	4	0.11383	3.59980	3.02810	3.25450	2.81570	3.68200	2.70050	2.60800
2 $\sigma$	5	0.15149	4.79380	4.11350	4.34180	3.85530	4.87790	3.70290	3.60530
2 $\sigma$	6	0.18902	5.93230	5.19620	5.40110	4.86260	6.03250	4.69690	4.60700
2 $\sigma$	7	0.22640	6.97260	6.31550	6.42350	5.78510	7.10810	5.63690	5.55570
2 $\sigma$	8	0.26365	7.94330	7.36910	7.43730	6.70400	8.15120	6.51160	6.43420
2 $\sigma$	9	0.30076	8.81370	8.34050	8.38020	7.55100	9.08410	7.30670	7.20770
2 $\sigma$	10	0.33773	9.58200	9.25970	9.29510	8.36920	9.95840	8.00500	7.90850
		$N = 2733$	$N = 2706$	$N = 2703$	$N = 2732$	$N = 2304$	$N = 2725$	$N = 2588$	$N = 2219$

Resultados del test BDS sobre los incrementos de las series del tipo de interés interbancario.

Seguidamente, presentamos los resultados del test de *BDS* sobre la serie de residuos obtenidos de la estimación de los modelos *ARMA*.



$\varepsilon$	$m$	1 día	1 semana	15 días	1 mes	2 meses	3 meses	6 meses	1 año
$0.5\sigma$	2	4.60290	3.03730	3.28660	3.40500	2.58310	2.63930	1.39330	1.09180
$0.5\sigma$	3	7.68320	5.29440	5.90350	5.73420	3.77180	3.66450	1.87320	1.30770
$0.5\sigma$	4	9.40170	6.44250	7.39990	6.88150	4.06000	3.68230	1.72250	1.12280
$0.5\sigma$	5	10.14900	6.75560	8.10140	7.30330	3.86870	3.28680	1.40790	0.83155
$0.5\sigma$	6	10.36500	6.68730	8.27340	7.18840	3.48750	2.79960	1.08850	0.59020
$0.5\sigma$	7	10.25900	6.40580	8.17460	6.81920	3.02970	2.31480	0.81421	0.40549
$0.5\sigma$	8	9.97810	5.98060	7.83740	6.37570	2.59450	1.88100	0.60451	0.27908
$0.5\sigma$	9	9.51110	5.48530	7.39030	5.85090	2.17810	1.52250	0.45079	0.19161
$0.5\sigma$	10	8.93910	4.99280	6.91820	5.34430	1.81630	1.23250	0.33628	0.13222
$\sigma$	2	2.38100	2.40580	2.11070	2.26040	2.03810	2.50340	1.84680	1.52350
$\sigma$	3	4.57750	4.77990	4.29660	4.60860	4.01660	4.81350	3.51100	2.66560
$\sigma$	4	6.41790	6.67410	6.31420	6.64060	5.62090	6.50900	4.62170	3.36810
$\sigma$	5	7.97690	8.11110	8.00790	8.38340	6.81210	7.64630	5.36800	3.75770
$\sigma$	6	9.25310	9.27870	9.44750	9.83600	7.68660	8.33130	5.73230	3.89040
$\sigma$	7	10.37100	10.10100	10.66900	11.06400	8.27450	8.67400	5.83600	3.84650
$\sigma$	8	11.30700	10.66800	11.61500	12.04900	8.63440	8.73300	5.73350	3.68450
$\sigma$	9	12.03400	11.00800	12.33000	12.83100	8.79350	8.56790	5.51630	3.43010
$\sigma$	10	12.58700	11.19600	12.85600	13.42800	8.79560	8.28950	5.23030	3.14210
$1.5\sigma$	2	1.35440	1.71100	1.27710	1.42660	1.26430	1.68900	1.25990	1.12480
$1.5\sigma$	3	2.71650	3.55910	2.68960	3.14340	2.78570	3.61310	2.74670	2.32320
$1.5\sigma$	4	3.98400	5.17440	4.18540	4.75000	4.30900	5.32010	4.08840	3.37890
$1.5\sigma$	5	5.16340	6.63500	5.62650	6.25910	5.64740	6.82530	5.33740	4.37660
$1.5\sigma$	6	6.22850	7.92190	7.01490	7.63970	6.83330	8.09660	6.42590	5.27080
$1.5\sigma$	7	7.24750	9.07100	8.31350	8.97220	7.89640	9.13020	7.35290	6.02820
$1.5\sigma$	8	8.17580	10.02000	9.46350	10.19300	8.85300	9.99580	8.06480	6.61400
$1.5\sigma$	9	9.00790	10.80500	10.46500	11.29000	9.64410	10.62500	8.58430	7.02320
$1.5\sigma$	10	9.74770	11.43600	11.36900	12.24900	10.35100	11.11600	8.94650	7.30030
$2\sigma$	2	0.93587	1.09660	0.88838	0.84477	0.80139	1.09190	0.73861	0.70145
$2\sigma$	3	1.92220	2.40900	1.89420	1.97890	1.88460	2.35400	1.70990	1.60300
$2\sigma$	4	2.87010	3.62540	2.94430	3.05940	3.03980	3.60100	2.69180	2.50380
$2\sigma$	5	3.76990	4.83090	4.04710	4.10600	4.10980	4.82460	3.69600	3.47580
$2\sigma$	6	4.63850	5.98340	5.15960	5.15940	5.12070	5.97320	4.70800	4.46590
$2\sigma$	7	5.45990	7.07200	6.26850	6.20300	6.05340	7.03580	5.65580	5.40110
$2\sigma$	8	6.23560	8.06910	7.29170	7.22690	6.96120	8.05510	6.53530	6.29550
$2\sigma$	9	6.96300	8.95630	8.22910	8.17360	7.78800	8.95300	7.33170	7.08490
$2\sigma$	10	7.64310	9.73110	9.11260	9.07280	8.58610	9.76770	8.03300	7.78790
		$N = 2732$	$N = 2705$	$N = 2697$	$N = 2732$	$N = 2302$	$N = 2724$	$N = 2587$	$N = 2217$

Resultados del test BDS sobre los residuos obtenidos del ajuste de un modelo ARMA sobre las series del tipo de interés interbancario.

Por último, presentamos los resultados para las series de los residuos obtenidos en la modelización *ARFIMA*,

$\epsilon$	$m$	1 día	1 semana	15 días	1 mes	2 meses	3 meses	6 meses	1 año
0.5 $\sigma$	2	4.58720	3.06050	3.29420	3.37000	2.60710	2.63180	1.40170	1.08800
0.5 $\sigma$	3	7.67690	5.31550	5.93240	5.65200	3.79900	3.63850	1.88900	1.31170
0.5 $\sigma$	4	9.40730	6.45470	7.42120	6.79280	4.10370	3.64240	1.73340	1.12210
0.5 $\sigma$	5	10.16300	6.75840	8.15410	7.17360	3.91120	3.24920	1.41540	0.82848
0.5 $\sigma$	6	10.39500	6.68300	8.37190	7.03810	3.51990	2.77270	1.09580	0.58496
0.5 $\sigma$	7	10.30700	6.39720	8.31740	6.65930	3.05530	2.29230	0.82134	0.40102
0.5 $\sigma$	8	10.04100	5.96640	8.01490	6.19740	2.61550	1.86350	0.61112	0.27478
0.5 $\sigma$	9	9.58120	5.46790	7.58050	5.66860	2.19470	1.51030	0.45673	0.18811
0.5 $\sigma$	10	9.01420	4.97600	7.11640	5.16380	1.82760	1.22450	0.34086	0.12936
$\sigma$	2	2.37130	2.41200	2.21860	2.31660	2.03210	2.47910	1.84940	1.51810
$\sigma$	3	4.56600	4.79670	4.47350	4.74670	3.99890	4.73950	3.53090	2.66860
$\sigma$	4	6.41080	6.69490	6.56260	6.82750	5.63540	6.39920	4.65340	3.36500
$\sigma$	5	7.97280	8.15740	8.33120	8.62280	6.86070	7.53780	5.39360	3.74360
$\sigma$	6	9.26150	9.34390	9.81730	10.12500	7.76830	8.24910	5.75640	3.86900
$\sigma$	7	10.39500	10.18200	11.01200	11.36300	8.36830	8.60460	5.86270	3.82500
$\sigma$	8	11.35100	10.76200	11.91400	12.34800	8.73730	8.67070	5.76190	3.66550
$\sigma$	9	12.09700	11.11500	12.58200	13.09100	8.90270	8.51530	5.54830	3.41380
$\sigma$	10	12.67200	11.31500	13.06700	13.65700	8.90040	8.25070	5.26460	3.12810
1.5 $\sigma$	2	1.33430	1.69730	1.44140	1.42900	1.26100	1.65920	1.26140	1.14160
1.5 $\sigma$	3	2.68350	3.53720	2.96090	3.15020	2.78790	3.55840	2.78030	2.34540
1.5 $\sigma$	4	3.94120	5.14600	4.55920	4.74660	4.32340	5.24580	4.15210	3.39670
1.5 $\sigma$	5	5.11400	6.63250	6.06380	6.28630	5.67320	6.76890	5.40930	4.38240
1.5 $\sigma$	6	6.17700	7.94390	7.53450	7.70380	6.86760	8.06710	6.50150	5.26560
1.5 $\sigma$	7	7.19280	9.11540	8.90200	9.08130	7.94200	9.09770	7.42410	6.01300
1.5 $\sigma$	8	8.12020	10.08600	10.09200	10.33600	8.91150	9.95470	8.13070	6.59280
1.5 $\sigma$	9	8.95500	10.89200	11.13100	11.47100	9.71710	10.58500	8.64810	6.99690
1.5 $\sigma$	10	9.69920	11.54400	12.03500	12.47300	10.42200	11.07900	9.00710	7.27080
2 $\sigma$	2	0.94550	1.08290	0.95690	0.81885	0.78294	1.09360	0.74146	0.72898
2 $\sigma$	3	1.93640	2.38980	2.04240	1.94080	1.85520	2.36170	1.75080	1.62600
2 $\sigma$	4	2.88330	3.59950	3.16040	3.01690	3.02010	3.62410	2.76740	2.51830
2 $\sigma$	5	3.78070	4.82350	4.28810	4.09610	4.09690	4.87880	3.79580	3.48120
2 $\sigma$	6	4.65310	5.99920	5.45480	5.17050	5.11970	6.07230	4.82460	4.46900
2 $\sigma$	7	5.47810	7.11080	6.60700	6.22350	6.06390	7.14440	5.78170	5.40390
2 $\sigma$	8	6.25720	8.13050	7.66910	7.25120	6.98670	8.15060	6.66700	6.28120
2 $\sigma$	9	6.98780	9.04010	8.64100	8.20290	7.83090	9.03440	7.46760	7.05700
2 $\sigma$	10	7.67110	9.83740	9.52930	9.12010	8.64500	9.83990	8.17170	7.74750
		$N = 2723$	$N = 2696$	$N = 2698$	$N = 2722$	$N = 2293$	$N = 2715$	$N = 2578$	$N = 2209$

Resultados del test BDS sobre los residuos obtenidos del ajuste de un modelo ARFIMA sobre las series del tipo de interés interbancario.

Vemos como en todos los casos el test detecta algún tipo de dependencia entre los datos, pese a que tanto en los modelos *ARMA* como en los *ARFIMA* hayamos eliminado la dependencia lineal pertinente.

### 5.3. Análisis de la no linealidad del tipo de interés

#### 5.3.1. Estrategias de contraste

Después de ver por separado las herramientas más importantes dentro de la teoría del caos, es aquí donde les vamos a dar un sentido conjunto.

Destacar que en este apartado vamos a describir paso por paso la estrategia elegida para la detección tanto de un comportamiento caótico dentro de la serie analizada como la obtención de un modelo no lineal. Para ello nos basaremos en la metodología propuesta por Belaire y Contreras (1996), proceso que destaca por su lógica y por su sencillez en el proceso deductivo, y realizamos una serie de mejoras, describiendo los siguientes pasos:

1. En primer lugar debemos comprobar que la serie sea estacionaria. Podemos aplicar test de raíces unitarias. Si aceptamos la  $H_0$ , transformamos la serie tomando  $d$  diferencias ( $d =$  número de raíces unitarias). Este apartado para nuestro caso no requiere mayor importancia, ya que como vimos en el capítulo 2, consideramos que nuestras series de primeras diferencias son estacionarias.
2. Calculamos la dimensión de correlación,  $d_m$ , de la serie estacionaria. Si  $d_m$  no se estabiliza a partir de algún  $m$ , la serie no es caótica y entonces ya hemos acabado. Si  $d_m$  se estabiliza, calculamos los exponentes de Lyapunov. Si el mayor exponente es positivo, diremos que existe la posibilidad de que la serie sea caótica, pero no lo podemos asegurar con certeza. Tales resultados deberán ser confirmados por el siguiente paso.
3. Ajustamos un modelo lineal  $AR(p)$  siguiendo la metodología Box-Jenkins, obteniendo una serie de residuos resultante de extraer la serie inicial con el modelo  $AR(p)$ .
4. Calculamos la  $d_m$  y los exponentes de Lyapunov de la serie de los residuos. Si no coinciden con los valores obtenidos en el punto 2 tenemos evidencia en contra de la existencia de un comportamiento Caótico.
5. Si hemos detectado un comportamiento caótico intentamos estimar un modelo no lineal determinista que ajuste este comportamiento, haciendo uso de las diversas herramientas de que dispone la teoría del caos. Si el resultado no coincide con la evidencia a favor de un comportamiento caótico

deberemos ajustar los datos a distintos modelos no lineales estocásticos hasta obtener la aceptación de la  $H_0$  mediante la utilización del *BDS* sobre los residuos resultantes de ...ltrar la serie inicial con el modelo utilizado.

Hasta aquí, sería una forma no solo de detectar un comportamiento caótico, o comportamiento no lineal determinista, de los datos analizados, sino que también sería un buen mecanismo en la detección de comportamientos no lineales estocásticos. Aprovechando que hemos de...nido una estrategia de contraste bastante útil, lo que vamos a hacer a continuación es generalizar un poco más esta línea de investigación, para así extender el carácter únicamente no lineal de la estrategia propuesta a un ámbito más general, que podría ser el seguido en la exposición de esta Tesis.

Para ello introducir un paso más, que situaríamos entre el primero y el segundo. Se trata del siguiente:

1bis) Ajustamos un modelo *ARMA* ( $p, q$ ) sobre la serie inicial. Aplicamos el test *BDS* (recordemos que también podríamos aplicar el test de Ljung-Box pero nos parece un test mejor el propuesto) sobre los residuos obtenidos resultante de ...ltrar la serie inicial con el modelo ajustado. Si el modelo se ajusta perfectamente a la estructura de la serie estos residuos deberán ser *iid* con lo que ya habríamos acabado. Si rechazamos la  $H_0$ , podemos a...rmar que, al no ser los residuos *iid*, el modelo *ARMA* no ajusta el comportamiento de la serie y por tanto podemos decir que existe una estructura oculta, bien sea de memoria a largo o de dependencia no lineal, estocástica o determinista, en los residuos.

1bisbis) Llegados a este punto se nos plantea una disyuntiva. Podemos afrontar el problema de la memoria a largo estimando modelos *ARFIMA*, o bien, podemos dar paso al análisis de la no linealidad. Nos parece más lógico, ya que venimos de estimar modelos *ARMA*, agotar esa vía y generalizar el concepto, extendiéndonos hacia la estimación de modelos *ARFIMA*, para posteriormente, y si los resultados lo con...rman, afrontar la vía no lineal.

### 5.3.2. Análisis de la no linealidad en las series de tipos de interés interbancario del mercado español

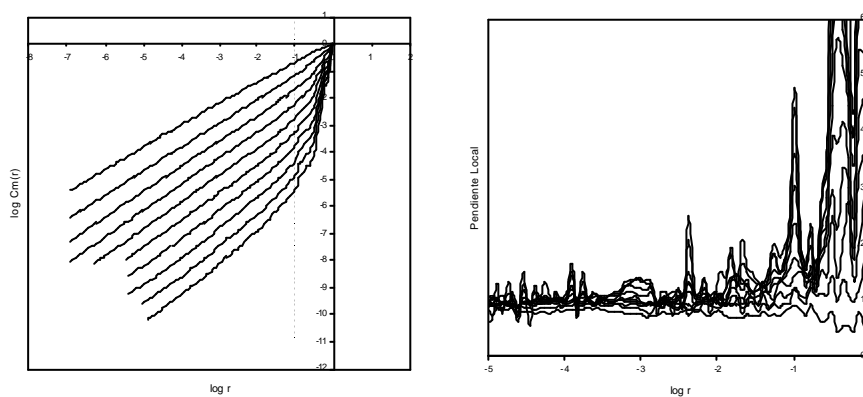
Realizaremos el análisis de la detección de un comportamiento no lineal determinista sobre nuestras series temporales del tipo de interés interbancario, pero además para contrastar los resultados obtenidos y validar las conclusiones extraídas, introduciremos dos nuevas series, que serán los dos casos extremos

que nos ocupan. En primer lugar consideraremos una serie aleatoria generada por una distribución  $N(0, 1)$  y por otro lado consideraremos la serie caótica generada mediante la ecuación logística, utilizada con anterioridad.

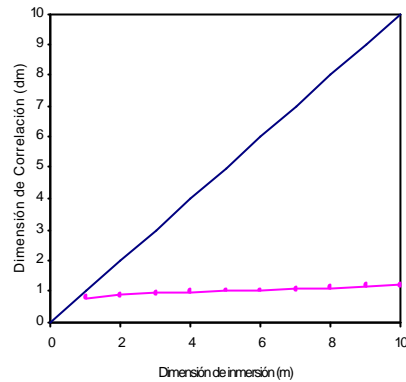
En primer lugar, lo que haremos, siguiendo el esquema de trabajo propuesto, es estimar la dimensión de correlación de las series de forma que si no existe no será necesario ir más allá, ya que las series no se basarán en un comportamiento caótico. Para ello seguiremos la metodología propuesta por Kantz y Schreiber (1999). Debemos realizar un análisis gráfico, previo a la estimación de la dimensión, que nos permitirá, determinar si existe o no dimensión de correlación. Se trata de calcular las integrales de correlación de las series para cada dimensión de inmersión y para cada radio, y una vez obtenidas estas magnitudes calcular las pendientes entre el logaritmo del radio y el logaritmo de la integral de correlación. Posteriormente, se representa gráficamente el resultado de forma que en eje de las  $X$  tengamos la pendiente en escala logarítmica y en el eje  $Y$  la integral de correlación.

#### ▪ Ecuación logística

Hemos elegido esta primera serie para denotar los factores determinantes en la detección de un comportamiento caótico. En primer lugar destacar que en el gráfico correspondiente a la representación de los valores de la pendiente local respecto al  $\log r$  podemos observar como las diferentes representaciones se unen para un valor en torno a 0.9. En otras palabras, existe una convergencia de las diferentes representaciones en torno al valor mencionado. Es por ello que podemos deducir que existirá un valor concreto para la dimensión de correlación,



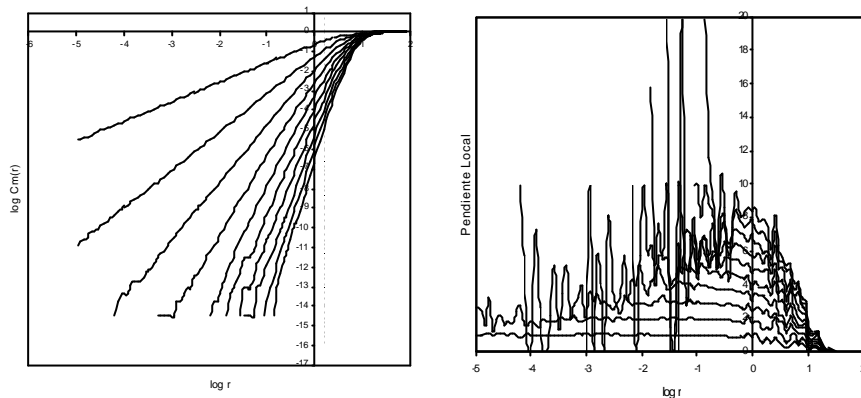
Para ver más clara esta convergencia y también para calcular el valor concreto de la dimensión de correlación es fundamental la representación del siguiente gráfico, donde podemos observar una fuerte convergencia hacia el valor 0.9.



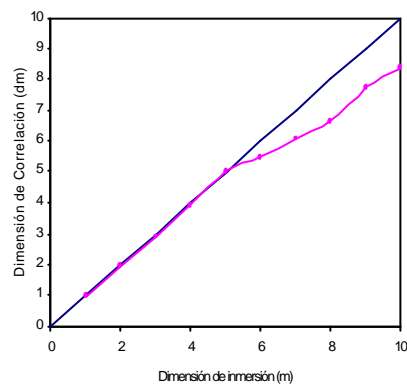
En este caso, aunque hayamos detectado un valor concreto en la dimensión de correlación, no podemos concluir que existe un comportamiento caótico, ya que deberemos corroborarlo calculando el máximo exponente de Lyapunov y ver, si existe, si es positivo y posteriormente seguir los pasos propuestos.

- Variable Aleatoria  $N(0, 1)$

Destacar que para la serie aleatoria, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$ , no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan. Este comportamiento es típico en una serie aleatoria. Destacar que es lógico, ya que hemos elegido el caso contrario al anterior. En consecuencia en este caso diremos que al no converger hacia un valor concreto no podemos calcular la dimensión de correlación y por tanto diremos que no existe.



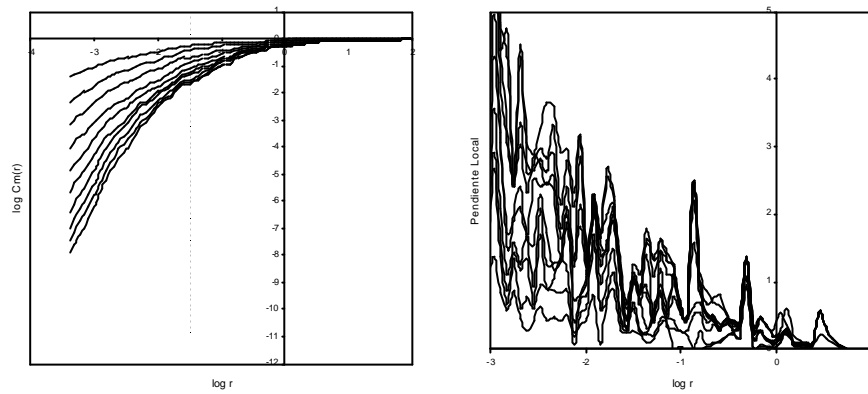
Para ver más clara esta conclusión observaremos el comportamiento del gráfico de la dimensión de correlación respecto de la dimensión de inmersión. Vemos claramente como, al contrario de lo que sucedía en el caso anterior, no hay convergencia hacia ningún valor de la dimensión de correlación por lo que diremos que no existe dimensión de correlación.



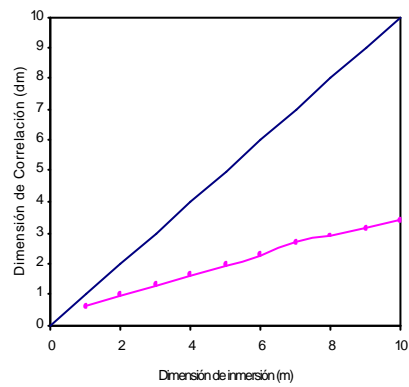
Con estos dos casos hemos observado los dos comportamientos extremos que se pueden producir. Destacar que respecto al análisis de series con toda seguridad nos encontraremos con un comportamiento intermedio, por lo que deberemos combinar el uso tanto del análisis de la dimensión de correlación como el del máximo exponente de Lyapunov.

- 1 día

Destacar que para la serie de incrementos a 1 día, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$ , no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan,



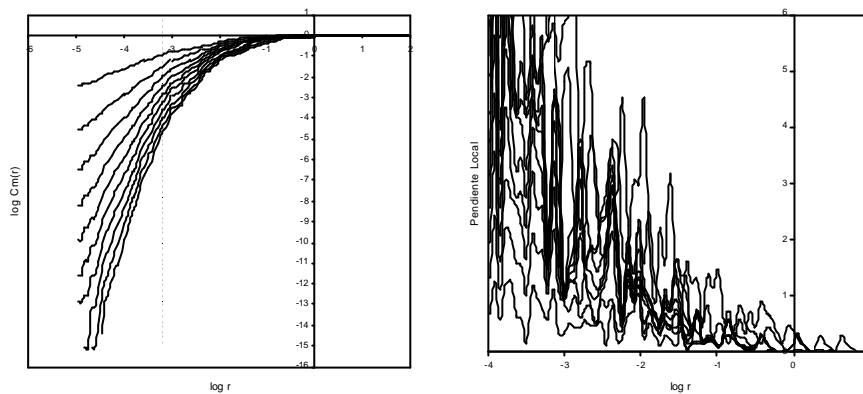
Corroboramos lo expuesto anteriormente al observar el siguiente gráfico donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto de la dimensión de correlación.



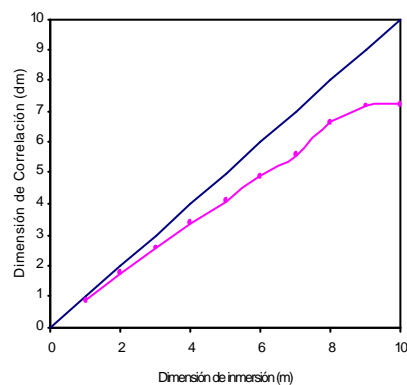
- 1 semana



De forma similar a la anterior para la serie de incrementos a 1 semana, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$ , no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan,

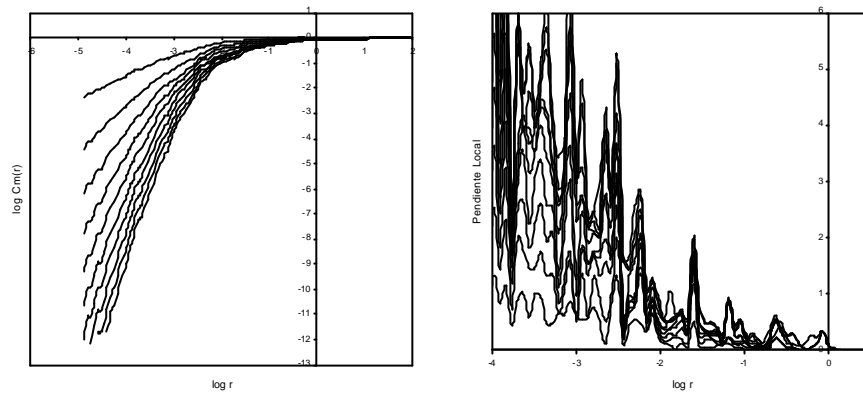


Podemos corroborarlo si observamos el gráfico de la dimensión de correlación respecto de la dimensión de inmersión, donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto. Aunque parece que converja en una dimensión de correlación de valor 7, destacar que si realizamos una ampliación del análisis y tomamos valores de la dimensión de inmersión mayores no converge.

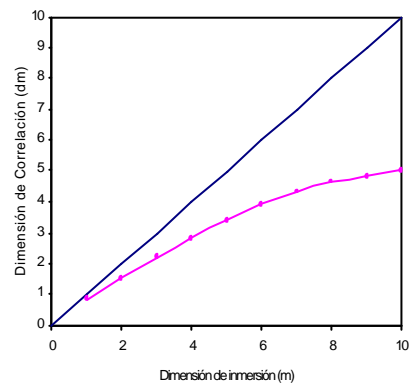


- 15 días

De forma similar a las anteriores para la serie de incrementos a 15 días, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$ , no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan,

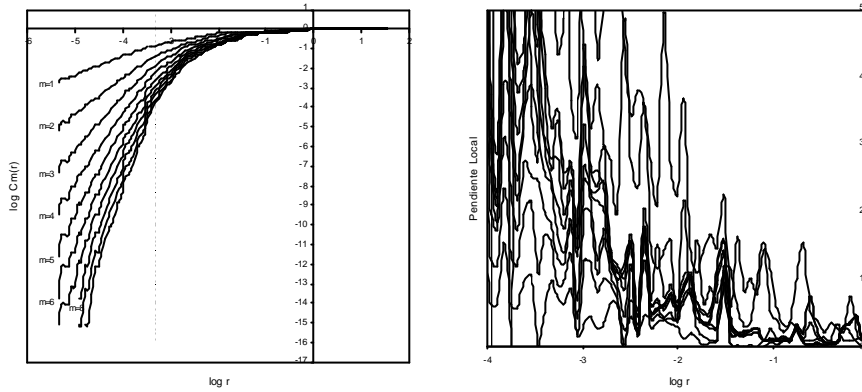


Corroboramos lo expuesto anteriormente al observar el siguiente gráfico donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto. Aunque parece que tienda hacia el valor de la dimensión de correlación de 5, cabe destacar que si tomamos valores de la dimensión de inmersión mayores, no converge para ese valor.

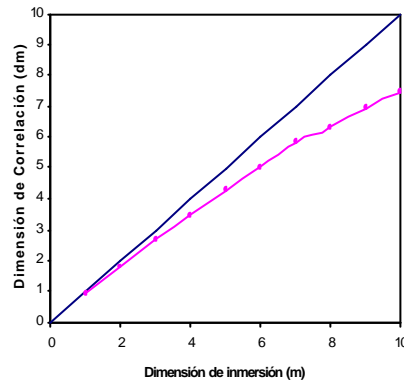


■ 1 mes

De igual forma que los casos anteriores, para la serie de incrementos a 1 mes, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$ , las representaciones no convergen para ningún valor,

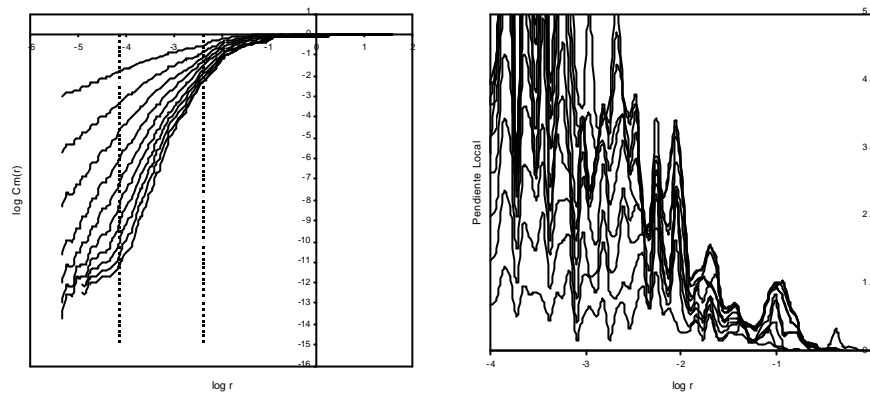


Corroboramos lo expuesto anteriormente al observar el siguiente gráfico donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto de la dimensión de correlación.

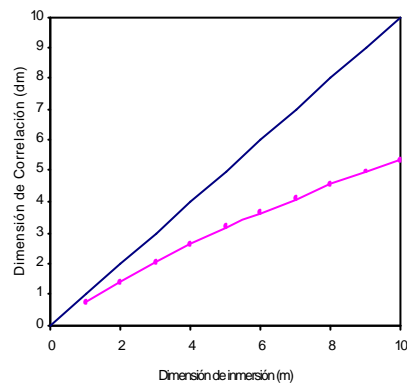


■ 2 meses

Como estamos observando en las series analizadas, para la serie de incrementos a 2 meses, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$ , las representaciones no convergen para ningún valor,

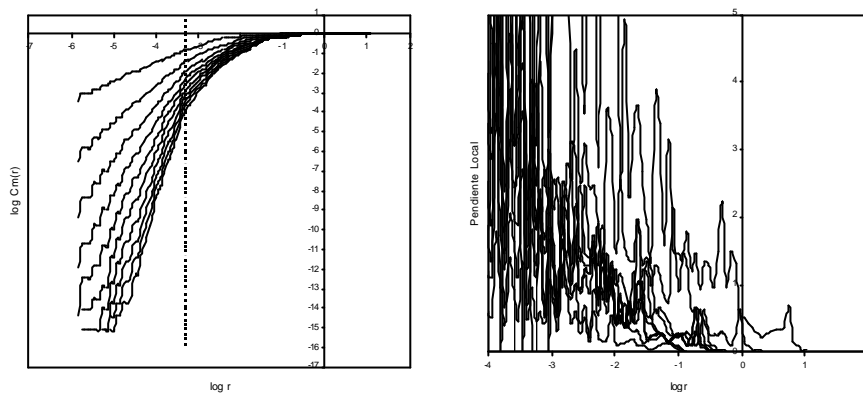


Corroboramos lo expuesto anteriormente al observar el siguiente gráfico donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto de la dimensión de correlación.

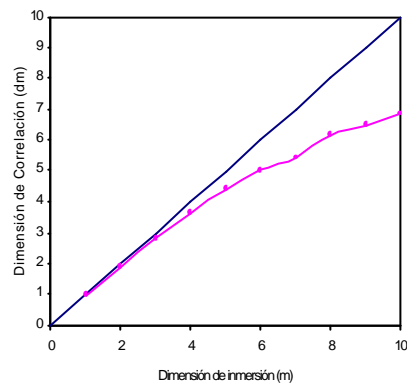


#### ■ 3 meses

De forma similar a las anteriores para la serie de incrementos a 3 meses, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$  no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan,

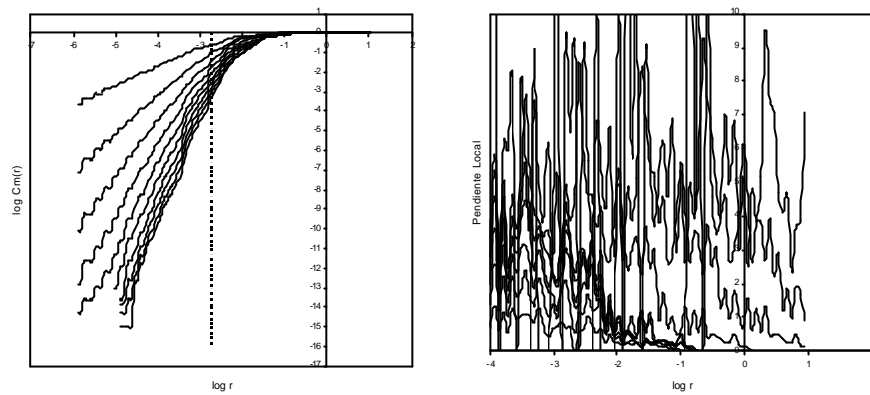


Idénticamente a los casos anteriores, corroboramos lo expuesto al observar el siguiente gráfico donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto de la dimensión de correlación.

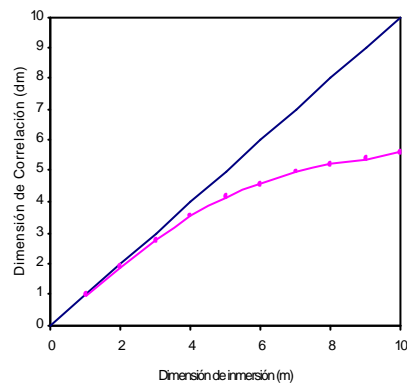


#### ■ 6 meses

De forma similar a las anteriores, para la serie de incrementos a 6 meses, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$  no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan. Además, en este caso, podemos destacar que si bien en los casos anteriores las gráficas no convergían para ningún valor de la dimensión de correlación, si parecía existir un comportamiento homogéneo, mientras que en este caso no detectamos este patrón.

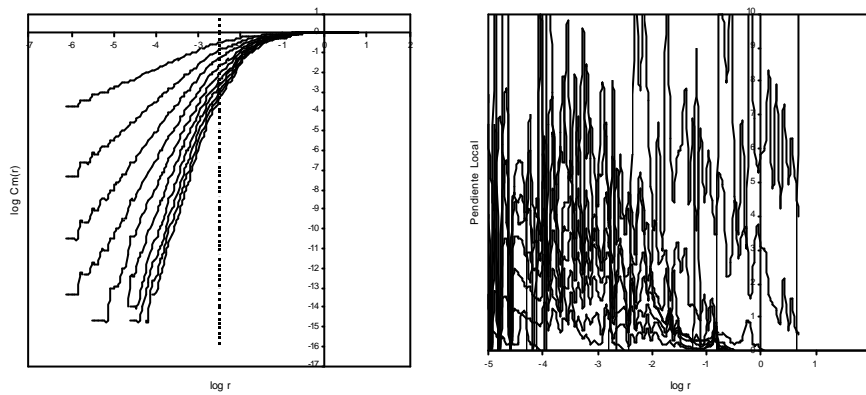


Corroboramos lo expuesto anteriormente al observar el siguiente gráfico, donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto de la dimensión de correlación. Destacar que, aunque parece que tienda hacia el valor de la dimensión de correlación de 5, cabe destacar que si tomamos valores de la dimensión de inmersión mayores, vuelve a crecer.

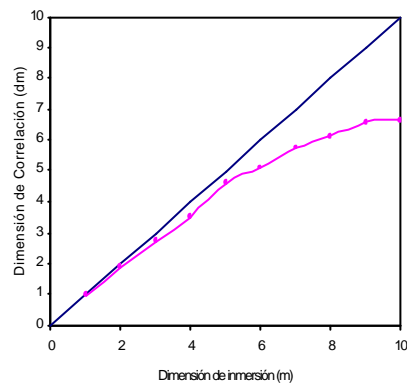


#### ■ 1 año

De forma similar a las anteriores para la serie de incrementos a 1 año, el gráfico de la pendiente local respecto  $\log r$  no muestra ningún patrón donde todas las representaciones converjan. Además en este caso, igual que el de 6 meses, el que no se converja es evidente.



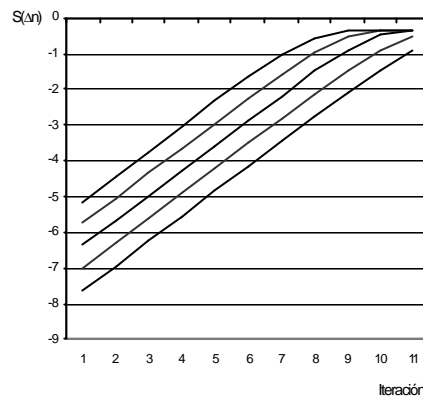
Corroboramos lo expuesto anteriormente al observar el siguiente gráfico, donde vemos que no se converge hacia ningún valor concreto de la dimensión de correlación. Destacar que, aunque parece que tienda hacia el valor de la dimensión de correlación de 6.4, cabe destacar que si tomamos valores de la dimensión de inmersión mayores, vuelve a crecer.



A continuación, para corroborar los resultados obtenidos, vamos a calcular el máximo exponente de Lyapunov. Ya que así tendremos más evidencia a favor de que las series no se comportan según un patrón caótico.

Para la serie caótica obtenemos la siguiente representación en el análisis propuesto. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de in-

mersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.001, 0.00177828, 0.00316228, 0.00562341, 0.01)$ .

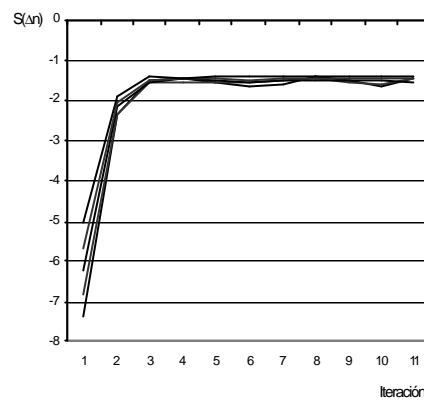


Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie caótica, generada a partir de la ecuación logística.

Nótese que existe una pendiente entre las distintas representaciones. Por lo tanto una pendiente positiva, que si la calculamos nos dará igual a 0,652, que será el máximo exponente de Lyapunov, positivo y por tanto teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este no podríamos afirmar nada sobre el comportamiento de la serie, ya que deberíamos continuar con los pasos propuestos en el esquema inicial. Pero, como sabemos de donde proceden los datos, sabemos que, en el fondo, la serie analizada es caótica. Por tanto no sería necesario continuar en el análisis de este caso particular.

Para la serie formada por la variable aleatoria, obtendremos el caso contrario. Destacar que para su obtención se ha considerado la, ya conocida, dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.00693, 0.01232, 0.02191, 0.03897, 0.0693)$ .



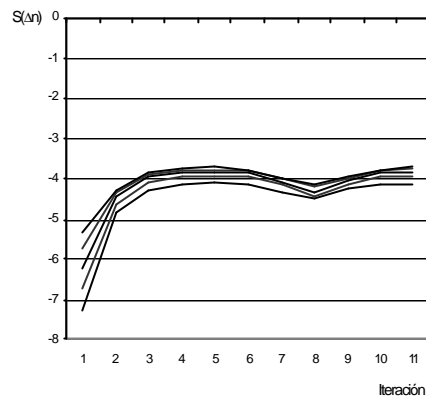


Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie formada por una variable aleatoria.

Nótese que en este caso no existe pendiente entre las distintas representaciones. Al principio parece que la función crezca, y así lo hace pero el crecimiento es tan rápido que en ese paso solo intervienen 2 puntos, destacar la diferencia entre el caso previo y lo que ahora hemos obtenido. Podríamos concluir, en vista de los resultados obtenidos, lo que ya sabemos, que esta serie es no se rige según un comportamiento caótico.

Vistos los dos casos extremos, pasaremos ahora al análisis de los datos del tipo de interés.

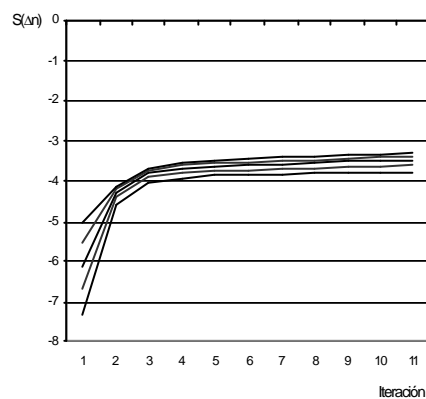
Para la serie de incrementos a 1 día obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.0340, 0.0604, 0.1075, 0.1911, 0.34)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 día.

Destacar que el resultado obtenido es el similar al de la serie formada por una variable aleatoria y por tanto teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

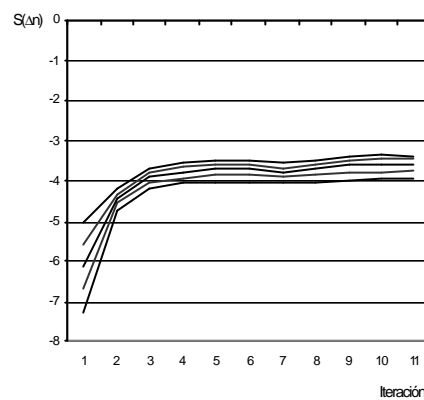
Para la serie de incrementos a 1 semana obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.007, 0.0125, 0.0221, 0.0394, 0.07)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 semana.

Destacar que el resultado obtenido es el similar al anterior y, por tanto, teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

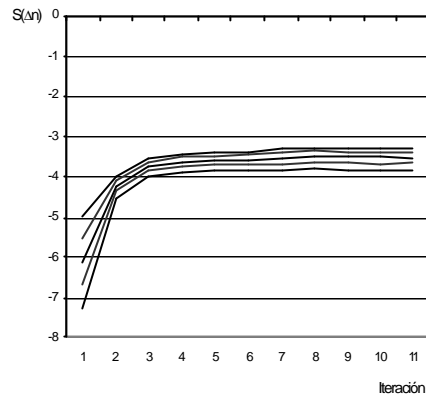
Para la serie de incrementos a 15 días obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.007587, 0.01349181, 0.0239922, 0.04266484, 0.07587)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 15 días.

Destacar que el resultado obtenido es el similar a los dos anteriores y, por tanto, teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este, podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

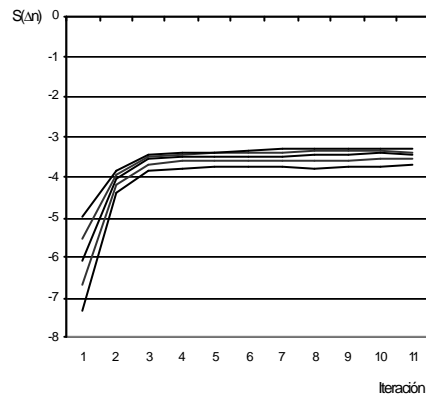
Para la serie de incrementos a 1 mes obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.004718, 0.0083899, 0.0149196, 0.0265313, 0.04718)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 mes.

El resultado obtenido es el similar a los anteriores y, por tanto, teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este, podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

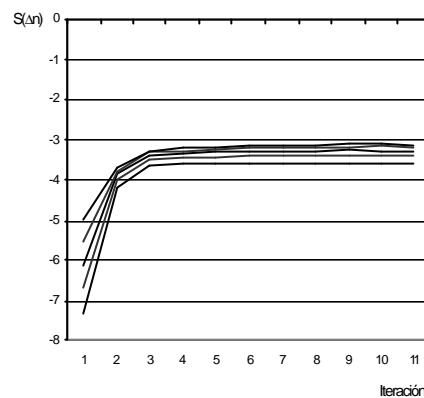
Para la serie de incrementos a 2 meses obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.004843, 0.0086122, 0.0153149, 0.0272342, 0.04843)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 2 meses.

El resultado obtenido es el similar a los anteriores y, por tanto, teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este, podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

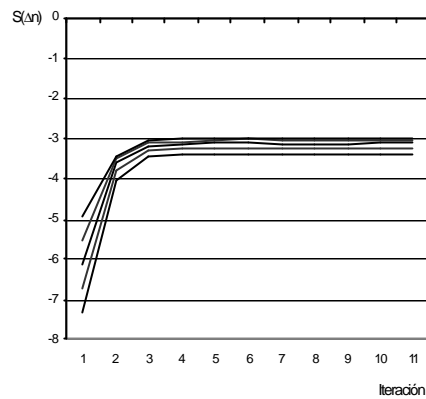
Para la serie de incrementos a 3 meses obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.002968, 0.00527793, 0.00938564, 0.01669029, 0.02968)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 3 meses.

El resultado obtenido es el similar a los anteriores y por tanto teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

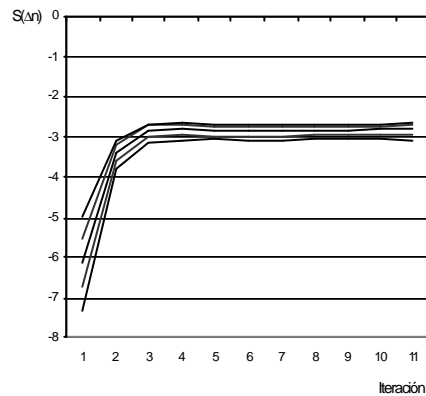
Para la serie de incrementos a 6 meses obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.002781, 0.004945395, 0.008794294, 0.01563871, 0.02781)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 6 meses.

El resultado obtenido es el similar a los anteriores y, por tanto, teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este, podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

Para analizar, en la serie de incrementos a 1 año obtenemos la siguiente representación en el análisis del máximo exponente de Lyapunov. Destacar que para su obtención se ha considerado la dimensión de inmersión  $m = 2$  y los valores de  $\varepsilon = (0.002179, 0.003874871, 0.006890603, 0.012253420, 0.02179)$ .



Cálculo de los exponentes de Lyapunov para la serie de incrementos del tipo de interés a 1 año.

El resultado obtenido es el similar a los anteriores y, por tanto, teniendo en cuenta el análisis de la dimensión de correlación junto con este, podríamos afirmar que la serie analizada no se rige según un comportamiento caótico.

En conclusión, podríamos decir que en las series del tipo de interés analizadas no detectamos un comportamiento caótico. Teniendo en cuenta que todas las otras salidas han sido analizadas, es decir, hemos analizado el caso de existencia de relación lineal, mediante la estimación de los modelos *ARMA* y la memoria a largo, mediante la estimación de los modelos *ARFMA*; nuestra conclusión se podría plantear como: si bien no existe un comportamiento lineal estocástico, ni un comportamiento no lineal determinista, necesariamente el comportamiento de nuestras series temporales viene determinado por la existencia de un comportamiento no lineal estocástico.

## 5.4. Estimación de funciones no lineales

Aunque en el particular que nos ocupa no es necesario la inclusión de este apartado. Debemos destacar que, puesto que la presente no es solo una tesis que recoge los resultados obtenidos de la aplicación de una metodología no estándar; si no que pretendemos el motivar a aquellos que puedan estar interesados en la aplicación de estas herramientas, nos gustaría presentar el que se hubiera hecho si, en contra de los resultados obtenidos, hubiéramos detectado presencia de un comportamiento caótico. Para ello, intentaremos trabajar sobre la serie caótica que ya hemos presentado. Somos conscientes de que hablar de forma tan genérica de estos mecanismos, por ejemplo de redes neuronales o de wavelets, es un poco osado por nuestra parte, pero nuestra intención es remarcar aquellos puntos de interés que consideramos importantes para futuras investigaciones y al menos sugerir una vía continuista del análisis caótico.

Básicamente, existen dos metodologías a la hora de estimar una función no lineal determinista: la representación global y la representación local. Metodología que dependerá, en cada caso, del tipo de observaciones utilizadas para la estimación de las funciones.

### 5.4.1. Representación global de funciones no lineales

#### Polinomios no lineales

En primer lugar, podemos tratar con polinomios no lineales que consideran el total de los puntos de la serie tratada.

Para ver un ejemplo de este proceder vamos a continuar trabajando sobre la serie caótica presentada anteriormente, que vamos a denominar, para simplificar  $s(t)$ .

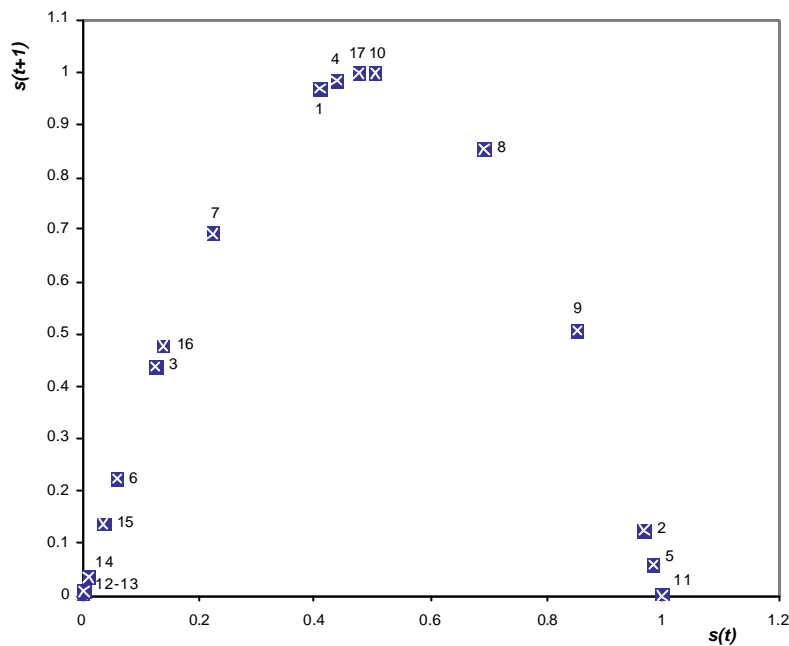
La idea es la siguiente. Hemos dicho que si las series hubiesen sido generadas por un comportamiento caótico, podríamos haber llegado a obtener la expresión que generaba estos datos. Cabe destacar que no siempre es tan sencillo como lo que vamos a exponer a continuación, pero que una vez detectado un comportamiento determinista, la mayoría de veces se pueden aplicar metodologías que permiten estimar valores futuros de la serie, mediante la utilización de diversos mecanismos que proporciona la teoría del caos. Pero como no es el caso, aquí únicamente vamos a tener en cuenta el más sencillo de ellos, pero destacar que no es el único.

Para deducir la expresión que determina el comportamiento de la serie  $s(t)$ , trabajaremos con los 18 primeros datos. No es necesario utilizar la serie entera. Nos plantearemos la siguiente pregunta ¿Cuál sería la predicción para  $s(19)$ ? Para responder a esta pregunta obviamente deberemos deducir la expresión determinista que determina el comportamiento de la serie y para demostrar que esta expresión es la correcta verificaremos que nuestra predicción para  $s(19)$  coincide perfectamente con su valor  $s(19) = 0,00808$ .

Así,  $s(t)$ , con  $t = 1, \dots, 18$  es la serie 0.41, 0.9676, 0.1254, 0.4387, 0.9849, 0.05921, 0.2228, 0.69271, 0.85143, 0.5059, 0.9998, 0.0005682, 0.002271, 0.009066, 0.03593, 0.1385, 0.4775 y 0,9979.

El método utilizado para nuestro propósito es el denominado método de los retardos. Utilizaremos un parámetro de retardo  $\tau = 1$ , construiremos un espacio de fases de dimensión 2 siendo  $x(t) = (s(t), s(t + \tau))$ . Cuando conocemos la dimensión  $D$  del atractor la apropiada dimensión de inmersión  $d$  es consistente con el teorema de Takens ( $d \gg 2D + 1$ ). Si reconstruimos el espacio de fases de esa forma obtendremos la siguiente secuencia de puntos:





Reconstrucción del espacio de fases de 2 dimensiones utilizando el método de los retardos, con  $\tau = 1$ .

Así el punto  $x(1)$  es el formado por las coordenadas  $(0,41, 0,9676)$ , el punto  $x(2)$  el formado por  $(0,9676, 0,1254)$ , etc... En este ejemplo, por la forma del gráfico obtenido, es muy fácil deducir que la función que tiene que explicar este comportamiento,  $f$ , es cuadrática. Por lo tanto esperaremos hallar una solución de la forma  $s(t + 1) = a + b s(t) + c s(t)^2$ . Simplificándose el problema en determinar las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Pero en nuestro caso esta estimación no es tan sencilla, ya que tenemos 3 incógnitas y 17 puntos, que nos permiten obtener 17 ecuaciones, para obtener la solución. Es un caso de sobredeterminación, y normalmente en este caso la solución puede llegar a no existir. De hecho, preferimos que el problema este sobredeterminado ya que así podremos capturar mejor la dinámica.

Para  $m$  puntos tenemos

$$\begin{aligned} s(2) &= a + bs(1) + c(s(1))^2 \\ s(3) &= a + bs(2) + c(s(2))^2 \\ &\vdots \\ s(m) &= a + bs(m-1) + c(s(m-1))^2 \end{aligned}$$

pudiendo expresar el sistema en forma matricial

$$A = BC$$

donde

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} s(2) \\ s(3) \\ \vdots \\ s(m) \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & s(1) \\ 1 & s(2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & s(m-1) \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} (s(1))^2 \\ (s(2))^2 \\ \vdots \\ (s(m-1))^2 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{matrix}$$

Lo que nos interesa es  $C$ , pero debido a que tenemos sobreestimación no podemos resolverlo aislando  $C$ ,  $C = AB^{-1}$ , ya que  $B$  no es invertible. En este caso intentaremos hallar un vector  $C$  que minimice el error  $e = \|BC - A\|^2$ . En otras palabras, estamos hablando de utilizar una regresión lineal mínimo cuadrática,  $y = a + bx$ , donde por tener demasiados puntos no caemos justamente sobre la línea. En ese caso buscamos minimizar el error total  $\sum (y_i - (a + bx_i))^2$ . Como puede observarse en Strang (1986), la solución mínimo cuadrática de  $A = BC$  es el vector  $C = (B^T B)^{-1} B^T A$ .

Para nuestro caso tendremos

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0,9676 \\ 0,1254 \text{ } \text{ } \text{ } \\ 0,4387 \text{ } \text{ } \text{ } \\ \vdots \\ 0,9979 \text{ } \text{ } \text{ } \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0,41 \\ 1 & 0,9676 \\ 1 & 0,1254 \text{ } \text{ } \text{ } \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0,4775 \text{ } \text{ } \text{ } \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} (0,41)^2 \\ (0,9676)^2 \\ (0,1254 \text{ } \text{ } \text{ } )^2 \\ \vdots \\ (0,4775 \text{ } \text{ } \text{ } )^2 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{matrix}$$

$$C = \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{7}{c}$$

y aplicando la solución de Strang obtendremos

$$a = 0,000190460 \gg 0$$

$$b = 3,99451 \gg 4$$

$$c = 3,99457 \gg 4$$

En definitiva, podemos decir que nuestro comportamiento en la serie  $s(t)$  se explica mediante la expresión

$$s(t+1) = 4s(t) - 4(s(t))^2$$

o

$$s(t+1) = 4s(t)(1 - s(t))$$

que no es otra que la ecuación logística, que vimos en el apartado 5.1.4, con parámetro  $C = 4$  y con una  $s_0 = 0,41$ .

Por lo tanto, para verificar que nuestro sistema estimado es correcto comprobaremos que el valor para  $s(19) = 4s(18)(1 - s(18)) = 0,00808$ .

Para acabar, destacaremos que existe una variedad de esta modelización mediante la utilización de polinomios que se basa en la utilización de polinomios racionales, que aportan una mejora con respecto a los anteriores, ya que  $p(s)$  se hace constante cuando  $s \rightarrow 1$ .

#### La estimación mediante Wavelets

Debemos hacer un punto y aparte llegado este momento. Hasta ahora, todo el análisis planteado lo hemos realizado en el ámbito temporal, pero debemos tener en cuenta que también tiene su contrapartida en el dominio de las frecuencias. Debido a que esto es un nuevo enfoque, un nuevo planteamiento, lo hemos dejado como una posible vía de investigación futura. Pretendemos destacar un área de investigación que está teniendo mucha aceptación. Concretamente nos referimos a la estimación mediante la utilización de Wavelets. Que se han traducido en lenguaje castellano como onditas.

Destacaremos, a nivel únicamente de referencia, que las wavelets son una generalización localizada de las series de Fourier. Su uso más inmediato es como

media de la descomposición de la señal y, por consiguiente, una representación del espacio de fases. Generalización que permite trabajar con expresiones más simples y maleables que con las originales obtenidas a partir del análisis de Fourier.

Para más detalle sobre el tema propuesto véase Strang (1989), Farge, Hunt y Vassilicos (Eds.) (1993), Hernández y Weiss (1996) y Mallat (1998)

### Redes Neuronales arti...ciales

Las redes neuronales se han convertido en una herramienta muy popular. Existen una variedad importante de las redes neuronales y es de un gran interés centrarse en un análisis más exhaustivo de las mismas, pero esta incursión sería demasiado extensa y como no es el objeto de esta tesis lo dejaremos como una puerta abierta a futuras investigaciones.

La gracia de este tipo de modelos reside en el hecho de que están basados en la arquitectura de las redes de neuronas humanas. Así, planteando una arquitectura similar a la humana, con componentes simples unidos en paralelo, conseguimos un proceso de tal complejidad que nos permite llegar a asimilar la estructura de funcionamiento del fenómeno objeto de nuestro estudio.

Dentro de este apartado aquellas que nos interesan son las econométricas. Es decir, desde este punto de vista debemos entender que nos referimos a aquellas redes neuronales, constituidas por unidades independientes, neuronas, unidas entre sí mediante factores de ponderación, o parámetros, que a base de iterar sobre ellas, son capaces de aprender el comportamiento del proceso sobre el que iteramos, entendiendo aprender como la estimación de los parámetros que unen las neuronas, y hacen que dados unos inputs obtengamos como solución el comportamiento deseado.

En su contra debemos decir que, cuando comparamos con otros métodos de aproximación de funciones la estimación de los parámetros es demasiado lenta. Si embargo, en algunos problemas pasan la prueba con bastante buena nota. Debemos destacar que, solamente este apartado se trata de realizar un apunte sobre el tema, para ubicar al lector y que para aquellos que deseen un desarrollo más técnico y pragmático les invitamos a realizar las siguientes consultas: Rumelhart y McClelland (1986), Lapedes y Faber (1987), Cowan y Sharp (1988), Weighend, Rumelhart y Huberman (1990), Farmer (1990), Olmeda (1996) y Ramírez y Sorrosal (2000).

### Estimación de funciones de base radial

Otra modelización a tener en cuenta, fue la introducida por Broomhead y Lowe (1988) y se denomina funciones de base radial (radial basis functions). Definimos una función escalar  $\phi(r)$ , donde  $r$  serán solamente argumentos positivos. Adicionalmente, seleccionamos  $k$  centros  $s_i$  en el atractor. Incluyendo una constante, hablamos de funciones de la forma,

$$p(s) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k a_i \phi(k_s - s_i)$$

donde  $\phi$  es una función arbitraria,  $s_i$  es el valor de la observación  $i$ -ésima, y  $k_s - s_i$  es la distancia de  $s$  al punto  $i$ -ésimo. Esta forma funcional tiene la ventaja de que la solución por mínimos cuadrados de  $a_i$  es un problema lineal. Cuando la utilizamos en ese sentido, el número de parámetros es igual al número de datos. Se trata de una interpolación más que de una aproximación, ya que  $f(s_i) = p(s_i)$ . Sin embargo, es posible, también, generalizar esta aproximación, mediante la elección de un  $s_i$  que no este necesariamente centrado en los datos. Para más detalle véase Broomhead y Lowe (1988) y Casdagli (1989).

#### 5.4.2. Aproximación local de funciones

Esta aproximación se basa en extender lo planteado en apartado anterior imponiendo una métrica y explicitando la importancia de los puntos próximos a  $s$ . Así la selección de parámetros se hará teniendo en cuenta los puntos próximos al que tomemos como referente.

#### Estimación de la densidad del Kernel

Es un método para la estimación de la función de densidad probabilística de datos continuos. La idea básica que subyace tras esta metodología consiste en asignar a cada punto una función de influencia o Kernel que decrece en función de la distancia, dando un estimador de la forma  $p(s) = \sum_i \phi(k_s - s_i)$ . El Kernel  $\phi$  puede estar localizado, por ejemplo, una función de saltos, o puede ser una función monótona decreciente como la exponencial. Existen otras muchas variantes. Para más detalle véase Silverman (1986). La técnica en la estimación de la densidad del Kernel puede también usarse para la aproximación de funciones, mediante el análisis del valor esperado de  $s(t + T)$  teniendo en cuenta

que

$$E[s(t+T)] = \int s(t+T) \Pr(s(t+T)|s(t)) ds(s+T)$$

donde utilizaremos la técnica de la densidad del Kernel en la estimación de esa probabilidad. Esta claro que existe un relación entre este método y el de las radial basis functions. La diferencia estriba en el hecho de que para las radial basis functions la contribución al Kernel de cada punto depende de  $s$  y se trabaja para cada  $s$  basándose en mínimos cuadrados, mientras que para la kernel density estimation los Kernels están usualmente pre...jados o se cambian de forma uniforme.

### Estimación local

La estimación local se realiza mediante el ajuste de los parámetros de cualquier representación global, pero considerando únicamente los puntos situados en una región determinada.

Teniendo en cuenta el ejemplo de estimación de la función que hicimos en el apartado de estimación de polinomios no lineales de la metodología global, ¿qué hubiese ocurrido si no hubiésemos detectado un comportamiento cuadrático tan fácilmente, o ni tan siquiera ningún otro patrón en los datos? Para ello la matemática del caos dispone de otras herramientas sofisticadas, como podría ser la utilización de redes neuronal para ajustar la dinámica de la serie y no tan sofisticadas como puede ser la predicción utilizando el método del nearest-neighbor.

Llegados a este punto cabría hacer un matiz. Cuando consideramos el tema de las redes neuronales lo hacemos única y exclusivamente teniendo en cuenta el aspecto de herramientas y el sentido de regresión no lineal que se desprende de estos mecanismos, sin entrar así en la filosofía que las atañe. Debido a lo extenso que sería dedicarse al análisis de las redes neuronales, aquí únicamente haremos mención de ellas y de su aplicabilidad dejando una puerta abierta para posteriores investigaciones o para motivar el estudio de las mismas a posibles investigadores interesados.

Si que veremos en que consiste el método del nearest-neighbor, de acuerdo con el que una aproximación a  $s(19)$  podría ser aquella que tenga en cuenta la evolución en el punto anterior, concretamente la evolución producida en  $x(17)$ . En nuestro caso particular, el punto más cercano al  $x(17)$  es el  $x(10)$ , tal y como puede denotarse en la figura anteriormente presentada, y con coordenadas  $(0,505944, 0,999844)$ , el cual evoluciona hacia  $x(11)$ , cuyas coordenadas son

(0,9998, 0,0005682). De ahí que una predicción para  $s(19)$  sería simplemente considerar  $s(19) \approx 0,0005682$ . Si consideramos que el valor real para  $s(19) = 0,00808$ , la predicción que hemos realizado con este método tan sencillo es bastante buena, teniendo en cuenta que el error de predicción es bastante pequeño. Ahora, una vez obtenida la predicción de  $s(19)$  podríamos obtener otra para  $s(20)$  y continuar. Destacaremos especialmente que este método fue utilizado por Lorenz (1969) para realizar predicciones del tiempo. Para predecir el tiempo siguiendo esta metodología se debe mirar al pasado intentando identificar el patrón temporal más similar al de hoy y, una vez detectado, asumir que la predicción para mañana será la misma que el día que siguió al que tiene un patrón similar. Cabe decir que los resultados de Lorenz no fueron muy alentadores, pero no por la simplicidad del método, hemos demostrado que realiza buenas aproximaciones, sino por que disponía de muy pocos patrones de tiempo.

Por último, complicaremos un poco más el método, mejorando aún más, si cabe, las estimaciones.

La idea es la siguiente: en lugar de considerar únicamente un punto como el más cercano, vamos a introducir la idea de vecindad. Consideraremos los puntos más próximos, en nuestro ejemplo los puntos más cercanos al punto  $x(17)$ , que serán los puntos  $x(1)$ ,  $x(4)$  y  $x(10)$  y solamente estos, ya que si observamos la figura los demás están ya muy alejados. Ajustaremos un polinomio lineal entre  $x(1)$  y  $x(2)$ , el punto al que evoluciona  $x(1)$ ,  $x(4)$  y  $x(5)$  y entre  $x(10)$  y  $x(11)$ . Teniendo

$$\begin{aligned}x(2) &= a + bx(1) \\x(5) &= a + bx(4) \\x(11) &= a + bx(10)\end{aligned}$$

donde

$$x(2) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(1) \\ x(1) \end{pmatrix} \quad x(11) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(10) \\ x(10) \end{pmatrix} \quad etc$$

pudiendo expresarlo todo ello de forma matricial

$$A = BC$$





## Capítulo 6

# No estacionariedad en varianza: Modelos *GARCH*

Afortunadamente, la mayoría de los procesos más importantes en la naturaleza son inherentemente no lineales.

Robert L. Devaney

### 6.1. Introducción

Realizando un breve resumen de lo expuesto hasta ahora, podemos decir que en un primer estadio de nuestro análisis, concretamente en la parte referente a la estimación de procesos lineales estocásticos, no llegamos a obtener resultados que nos convenciesen de que los modelos ajustados, tanto modelos *ARIMA* como *ARFIMA*, fuesen los mejores; razón por la que nos decantamos por la modelización no lineal. En primer lugar y antes de entrar en el campo estocástico nos adentramos en el campo determinista y, así, pudimos abordar el análisis caótico y ver si las series analizadas se comportaban según un patrón determinista. Pero el resultado fue negativo. Por lo que llegados a este punto, debemos adentrarnos en el tema de la modelización no lineal estocástica.

El problema que se nos plantea ahora es, dentro del maremagnum que suponen la variedad de modelos no lineales, decidir por que proceso nos decantamos. Por ejemplo, podríamos elegir entre modelos de volatilidad estocástica, la familia de modelos *GARCH* (*EGARCH*, *IGARCH*, *FIGARCH*,  $M_i$  *ARCH*, ...), o modelos que suponen cambios estructurales en el proceso subyacente como los

Regime switching models, o también modelos como los threshold models: threshold Autorregresive models, *TAR*, o los threshold moving average models y sus modificaciones como los self-exciting threshold models (*SETAR*, *SETARMA*), o los Smooth threshold autoregresive models (*STAR*), o la fusión de éstos con los modelos *GARCH*, los *TGARCH*,... y la lista seguiría. Destacar que, para una pincelada sobre cada uno de estos modelos, se puede consultar el artículo Aydemir (1998).

En nuestro caso, siguiendo la filosofía deductiva de partir de lo más sencillo e ir aumentando la complejidad hasta obtener resultados que nos satisfagan, tomaremos como punto de partida los modelos *GARCH*. Los tomamos como inicio, a parte de que poseen unas propiedades que los hacen atractivos para nuestro análisis como la modelización de colas anchas y apuntamiento, porque son modelos que más o menos la mayoría de economistas conocen, siendo casi tan populares como los modelos *ARMA*. Así, si llegado el momento debemos elegir otro modelo o complicar el que planteemos, lo haremos con conocimiento de causa.

Pero, cabe hacerse una pregunta ¿porqué los modelos lineales estocásticos no nos han funcionado?

A pesar de su popularidad, los modelos *ARMA* tienen una limitación significativa. Concretamente, suponen una volatilidad constante. En finanzas, donde la correcta especificación de la volatilidad es de una consideración extrema, esta limitación puede llegar a ser importante.

Normalmente, los modelos *ARMA* se usan para modelizar la esperanza condicional de las observaciones de un proceso,  $Y_t$ , dadas las observaciones pasadas. Estos modelos consideran  $Y_t$  como una función lineal del pasado más un término de ruido blanco. También nos permiten predecir observaciones futuras dado el pasado y presente. El pronóstico de  $Y_{t+1}$  dado  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$  es simplemente la esperanza condicional de  $Y_{t+1}$  dada  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$ .

Sin embargo, los modelos *ARMA* suponen varianzas condicionales constantes. ¿Qué significa esto, por ejemplo, a la hora de modelizar el tipo de interés para una operación concreta? Supongamos que hemos observado que las cotizaciones diarias más recientes han sido extraordinariamente volátiles. Podríamos suponer que la cotización de mañana también será más variable que la usual. Pero, si modelizamos las cotizaciones mediante un modelo *ARMA*, no podremos capturar este tipo de comportamiento porque la varianza condicional es constante. Necesitamos, por tanto, mejores modelos de serie temporales que puedan modelizar, si nosotros queremos, la volatilidad no constante, que tan frecuentemente

puede observarse en series temporales financieras.

En este capítulo, como hemos destacado anteriormente, vamos a estudiar modelos de volatilidad no constante. Concretamente los modelos *ARCH*, que significan Heterocedasticidad Autorregresiva Condicional. En el modelo *ARCH* la varianza condicional tiene una estructura muy parecida a la estructura de la esperanza condicional en un modelo *AR*. Estudiaremos en primer lugar el modelo *ARCH*(1), que será parecido a un modelo *AR*(1). A partir de ahí generalizaremos para obtener los modelos *ARCH*(*p*), que son análogos a los modelos *AR*(*p*). Finalmente, analizaremos los modelos *GARCH* (*ARCH* Generalizado) que ajustan varianzas condicionales, en el mismo sentido que lo hacen los modelos *ARMA* con la esperanza condicional.

Destacar que, los modelos *GARCH* fueron desarrollados por economistas que trabajaban en el ámbito de las finanzas, por lo que han sido bastantes sus aplicaciones en ese campo.

La importancia de los modelos que aplicaremos se fundamenta en el hecho de que los modelos en Finanzas como el *CAPM* y el modelo de *Black-Scholes* para la valoración de precios de opciones, asumen una varianza condicional constante. Cuando esta hipótesis es falsa, el usar esos modelos puede conducirnos a errores serios. Por consiguiente, la generalización de los modelos de finanzas para incluir errores *GARCH* se ha convertido en un tópico. Véase Bollerslev, Engle y Woolridge (1988) y Duan (1996a, 1996b) para algunos ejemplos de modelos financieros con heterocedasticidad condicional.

## 6.2. Modelizando medias condicionales y varianzas

Antes de adentrarnos en el análisis de los modelos *GARCH*, estudiaremos algunos principios generales sobre cómo podemos modelizar la varianza no constante.

La forma general para la regresión de  $Y_t$  sobre  $X_{1,t}, \dots, X_{p,t}$  es:

$$Y_t = f(X_{1,t}, \dots, X_{p,t}) + \varepsilon_t \quad (6.1)$$

donde  $\varepsilon_t$  tiene esperanza igual a 0 y varianza constante  $\sigma^2$ . La función  $f$  es la esperanza condicional de  $Y_t$  dado  $X_{1,t}, \dots, X_{p,t}$ . Para apreciar este hecho, nótese que si nosotros tomamos la esperanza condicional (dados los valores de  $X_{i,t}$ ) de (6.1),  $f(X_{1,t}, \dots, X_{p,t})$  se trata como una constante y la esperanza condicional

de  $\varepsilon_t$  es 0. Además, la varianza condicional es simplemente la varianza de  $\varepsilon_t$ , que es  $\sigma^2$ . Frecuentemente,  $f$  es lineal por lo que

$$f(X_{1,t}, \dots, X_{p,t}) = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \dots + \beta_p X_{p,t}$$

La ecuación (6.1) puede modificarse para permitir una varianza condicional no constante. Consideremos que  $\sigma^2(X_{1,t}, \dots, X_{p,t})$  es la varianza condicional de  $Y_t$  dado  $X_{1,t}, \dots, X_{p,t}$ . Entonces el modelo

$$Y_t = f(X_{1,t}, \dots, X_{p,t}) + \sigma(X_{1,t}, \dots, X_{p,t}) \varepsilon_t \quad (6.2)$$

nos proporciona la correcta media condicional y varianza.

Por consiguiente, para permitir una varianza condicional no constante en el modelo, multiplicaremos el término de ruido blanco por la desviación estándar condicional.

La función  $\sigma(X_{1,t}, \dots, X_{p,t})$  debe ser no negativa ya que es una desviación estándar. Si la función  $\sigma(t)$  es lineal, entonces sus coeficientes deben limitarse para asegurar la no negatividad.

### 6.2.1. Procesos *ARCH(1)*

Consideremos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  ruido blanco gaussiano con varianza 1. En otras palabras, consideramos este proceso como una distribución  $N(0, 1)$  independiente. Entonces,

$$E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots] = 0$$

y

$$Var[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots] = 1 \quad (6.3)$$

La propiedad (6.3) se denomina homocedasticidad condicional.

El proceso  $a_t$  es un proceso *ARCH(1)* si

$$a_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2} \quad (6.4)$$

Requerimos que  $\alpha_0 \geq 0$  y  $\alpha_1 \geq 0$  ya que una desviación estándar no puede ser nunca negativa. También requeriremos que  $\alpha_1 < 1$  para que  $a_t$  sea estacionario con varianza finita. Si  $\alpha_1 = 1$  entonces  $a_t$  es estacionario pero su varianza es infinita. La ecuación (6.4) es una expresión similar a un proceso *AR(1)* pero para  $a_t^2$ , no para  $a_t$ , y el modelo *ARCH(1)* produce una función de autocorrelación para  $a_t^2$  que es como la función de autocorrelación de un *AR(1)*.

Definimos

$$\sigma_t^2 = \text{Var} [a_t | a_{t-1}, \dots]$$

como la varianza condicional de  $a_t$  dados valores anteriores. A partir de que  $\varepsilon_t$  es independiente de  $a_{t-1}$  y  $\text{Var}(\varepsilon_t) = 1$

$$E[a_t | a_{t-1}, \dots] = 0 \quad (6.5)$$

y

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 \quad (6.6)$$

Esta última expresión muestra que si  $a_{t-1}$  tiene una desviación inusualmente grande respecto de su valor esperado 0, por lo que  $a_{t-1}^2$  es grande, entonces la varianza condicional de  $a_t$  será mayor que la usual. Por lo tanto, también es de esperar que  $a_t$  tenga una desviación inusualmente grande respecto de su media. Esta volatilidad se propagará ya que  $a_t$  tendrá una desviación grande que hará que  $\sigma_{t+1}^2$  sea también grande, lo que hará que  $a_{t+1}$  sea grande. De forma similar, si  $a_{t-1}$  es inusualmente pequeño, entonces será pequeño y se esperará que  $a_t$  también sea pequeño, etc... Debido a este comportamiento, la volatilidad no usual en  $a_t$  tiende a persistir, aunque no para siempre. La varianza condicional tiende a revertir hacia la varianza incondicional si  $\alpha_1 < 1$ , por lo que el proceso es estacionario con varianza finita.

La varianza marginal no condicional de  $a_t$  denotada por  $\gamma_a(0)$  se obtiene a partir de tomar esperanzas en (6.5) facilitando la siguiente expresión,

$$\gamma_a(0) = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma_a(0),$$

expresión que tiene solución positiva si  $\alpha_1 < 1$ :

$$\gamma_a(0) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Si  $\alpha_1 \geq 1$ , entonces  $\gamma_a(0)$  es infinita, aunque  $a_t$  continúe siendo estacionario. Notemos, llegados a este punto, que si  $\alpha_1 = 1$  tenemos el modelo *GARCH Integrado (IGARCH)* que será el equivalente al caso *ARIMA* respecto del *ARMA*.

Si seguimos realizando operaciones a partir de la expresión (6.6) podemos ver cómo la función de autocorrelación de  $a_t$  es

$$\rho_a(h) = 0 \quad \text{si } h \neq 0$$

Un proceso, como los procesos *GARCH*, donde la media condicional es constante pero la varianza condicional no es constante, es un buen ejemplo de

proceso que está incorrelacionado pero no independiente. La dependencia de la varianza condicional sobre el pasado es la razón de que el proceso no sea independiente. La independencia de la media condicional sobre el pasado es la razón por la que el proceso es incorrelacionado.

Aunque  $a_t$  sea incorrelacionado como el proceso ruido blanco  $\varepsilon_t$ , el proceso  $a_t^2$  tiene una función de autocorrelación más interesante; si  $\alpha_1 < 1$  entonces

$$\rho_{a^2}(h) = \alpha_1^{|h|} \quad 8h$$

Si  $\alpha_1 > 1$ , entonces  $a_t^2$  no es estacionario, por consiguiente no tendrá asociada una función de autocorrelación.

### 6.2.2. Los modelos *AR(1)/ARCH(1)*

Como hemos podido observar, un proceso *AR(1)* tiene una media condicional no constante pero una varianza condicional constante; mientras que un proceso *ARCH(1)* es justamente lo contrario. Podríamos pensar en fusionarlos, para así poder aprovecharnos de las características que poseen.

Consideremos  $a_t$  como un proceso *ARCH(1)* y supongamos que,

$$u_t | \mu = \phi(u_{t-1} | \mu) + a_t$$

El proceso  $u_t$  parece un proceso *AR(1)*, excepto por el término del ruido, ya que éste no es ruido blanco independiente sino un proceso *ARCH(1)*.

Aunque  $a_t$  no es ruido blanco independiente, vimos en el apartado anterior que es un proceso incorrelacionado;  $a_t$  tiene la misma función de autocorrelación que el ruido blanco. Por tanto,  $u_t$  tiene la misma función de autocorrelación que un proceso *AR(1)*:

$$\rho_u(h) = \phi^{|h|} \quad 8h$$

Además,  $a_t^2$  tiene la función de autocorrelación de *ARCH(1)*:

$$\rho_{a^2}(h) = \alpha_1^{|h|} \quad 8h$$

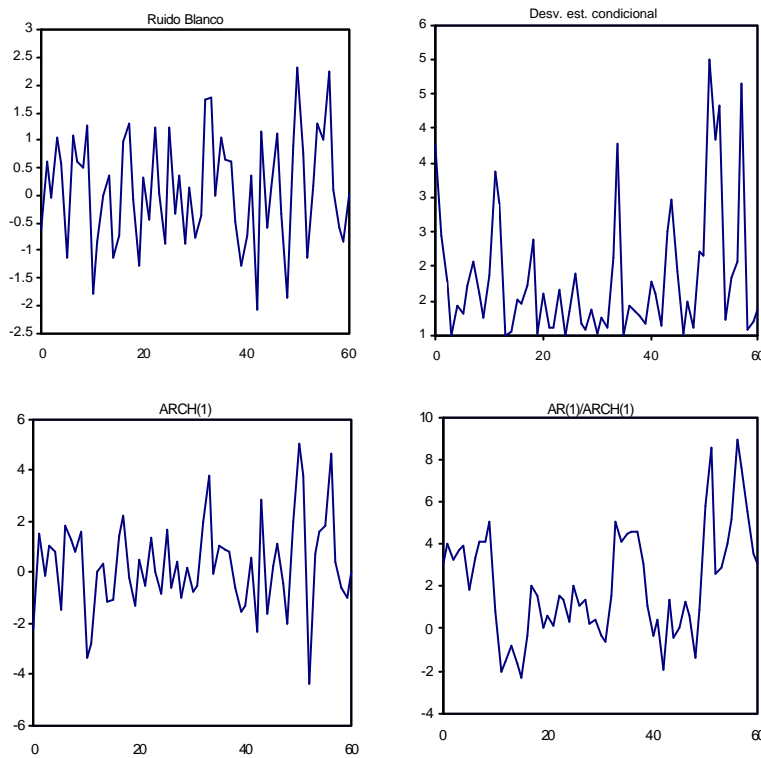
Debemos suponer que  $|\phi| < 1$  y  $\alpha_1 < 1$  para que  $u$  sea estacionario con varianza finita. Además,  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_1 > 0$ .

El proceso  $u_t$  es tal que su media y varianza condicionales, conocido el pasado, son ambas no constantes.

## Ejemplo

En la figura tenemos la simulación de un proceso  $ARCH(1)$ . La gráfica de la parte superior izquierda nos muestra el ruido blanco,  $\varepsilon_t$ . La gráfica de la parte superior derecha muestra un proceso de desviación estándar condicional  $\sigma_t = \sqrt{1 + 0,95a_{t-1}^2}$ . En la parte inferior, la gráfica de la izquierda muestra un proceso  $ARCH(1)$ ,  $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$ . Como discutiremos en el siguiente apartado, un proceso  $ARCH(1)$  puede usarse como el término de perturbación de un proceso  $AR(1)$ . Particularidad que se muestra en la imagen inferior derecha. Los parámetros del modelo  $AR(1)$  son  $\mu = 0,1$  y  $\phi = 0,8$ .

La varianza de  $a_t$  es  $\gamma_a(0) = \frac{1}{1 - 0,95} = 20$  por lo que la desviación estándar es  $\sqrt{20} = 4,47$ .

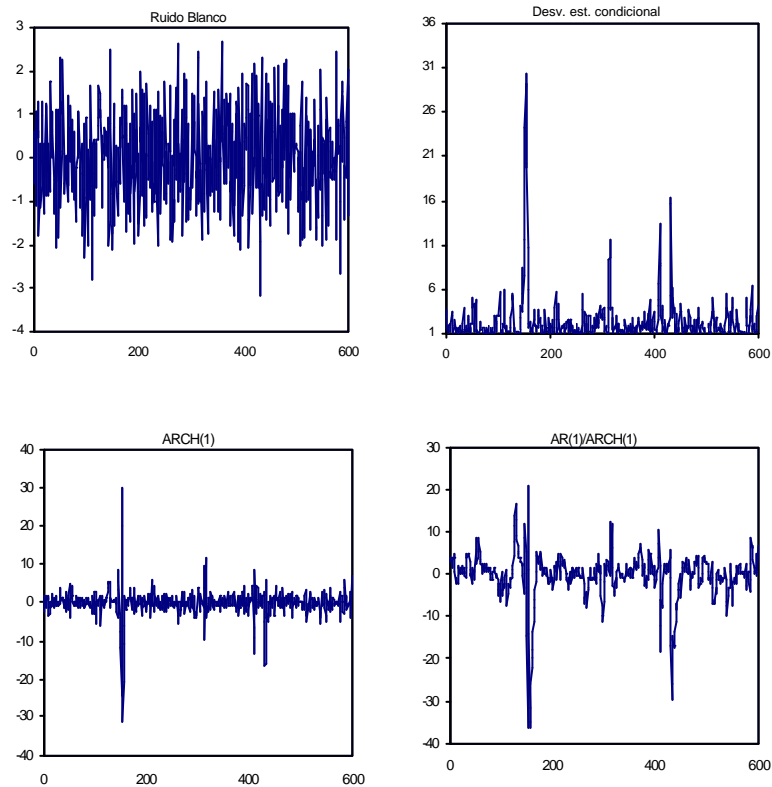


Simulación de 60 observaciones de un proceso  $ARCH(1)$  y un proceso  $AR(1)/ARCH(1)$ . Los parámetros son  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0,95$ ,  $\mu = 0,1$  y  $\phi = 0,8$ .

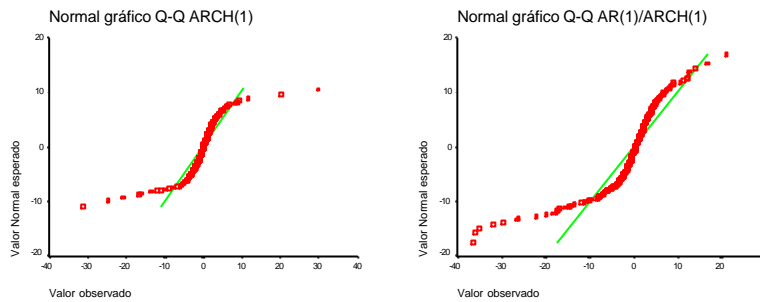
Los procesos se iniciaron de igual forma empezando en 0 y simulados para 70 observaciones. Las 10 primeras observaciones se descartaron ya que se consideran como el periodo donde el proceso converge hacia su distribución estacionaria. En

la ...gura, únicamente hemos representado las 60 observaciones que consideramos válidas.

El proceso de ruido blanco, en la parte superior izquierda, está normalmente distribuido y tiene una desviación estándar igual a 1, por lo que será, en valor absoluto, menor de 2 el 95% de las veces. Destacar que, justamente antes de  $t = 10$ , el proceso es un poco menor de  $\sqrt{2}$  lo que implicaría una desviación grande respecto de la media 0. Esta desviación causa que la desviación estándar condicional ( $\sigma_t$ ), que podemos observar en el panel superior derecho, se incremente y, que ese incremento persista durante 10 observaciones, aunque luego decrezca lentamente. El resultado es que el proceso *ARCH*(1) exhibe una mayor volatilidad que la normal cuando  $t$  está entre 10 y 15.







Simulación de 600 observaciones de un proceso  $ARCH(1)$  y un proceso  $AR(1)/ARCH(1)$ . Los parámetros son  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0,95$ ,  $\varphi_0 = 0,1$  y  $\varphi_1 = 0,8$ .

La figura anterior muestra una simulación de 600 observaciones para los mismos procesos realizados anteriormente. Pero esta vez, además, incluimos un gráfico Q-Q donde se analiza la normalidad de  $a_t$ . Destacar que, el  $ARCH(1)$  exhibe una no normalidad extrema, siendo esta una característica típica de los procesos  $ARCH$ .

### 6.2.3. Los modelos $ARCH(q)$

Como consideramos anteriormente, supongamos  $\varepsilon_t$  un ruido blanco con varianza 1. Entonces  $a_t$  es un proceso  $ARCH(q)$  si

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2$$

es la desviación estándar condicional de  $a_t$  dados los valores pasados del proceso. Como en el caso de los procesos  $ARCH(1)$ , está incorrelacionado y tiene una media constante (tanto la condicional como la no condicional) y una varianza no condicional constante, pero, por otro lado, su varianza condicional no es constante. De hecho, la función de autocorrelación de  $a_t^2$  es la misma que la de un proceso  $AR(p)$ .

### 6.2.4. Los modelos $GARCH(p, q)$

El modelo  $GARCH(p, q)$  es

$$a_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

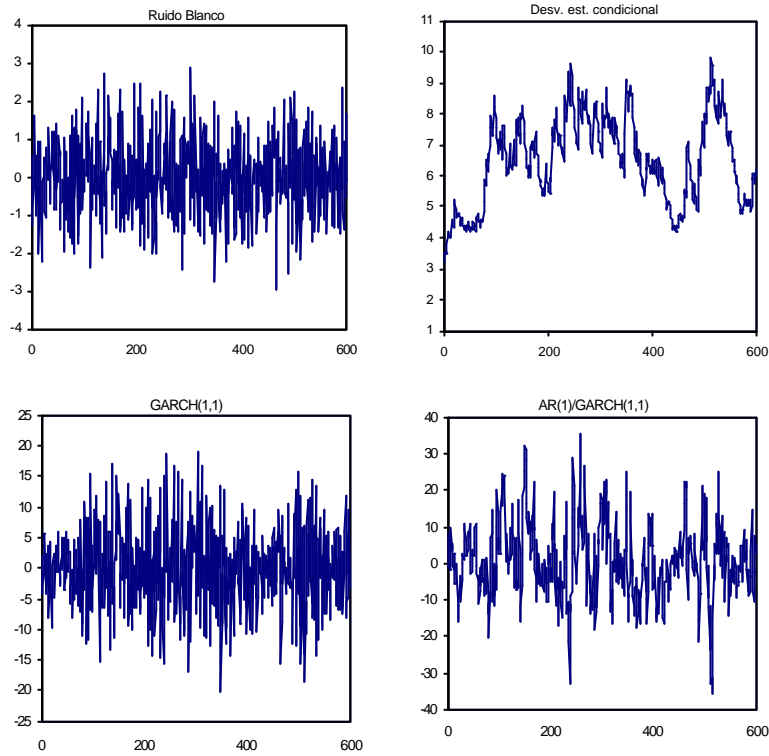
donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

El proceso  $a_t$  es incorrelacionado, con una media y varianza estacionaria, y  $a_t^2$  tiene una función de autocorrelación equivalente a la de un proceso *ARMA*.

Un modelo de serie temporal general considera  $a_t$  como un *GARCH*( $p_G, q_G$ ) y utiliza  $a_t$  como el término de ruido en un modelo *ARIMA*( $p_A, d, q_A$ ). Hemos denotado a los parámetros del *GARCH* con el subíndice *G* y los del modelo *ARIMA* con *A*, para no confundirlos.

Los modelos *GARCH* incluyen a los modelos *ARCH* como caso particular, por lo que usaremos el término *GARCH* para referirnos tanto a unos como a los otros.



Simulación de un proceso *GARCH*(1,1) y un proceso *AR*(1)/*GARCH*(1,1).  
 De parámetros  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0,8, \beta_1 = 0,9$  y  $\phi = 0,8$ .

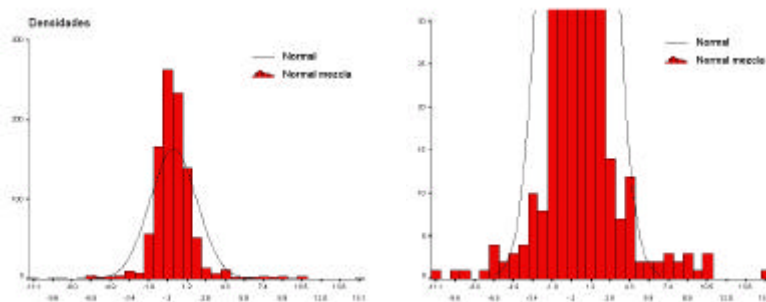
La ...gura anterior es una simulación de un proceso *GARCH*(1,1) y de un proceso *AR*(1)/*GARCH*(1,1). Siendo los parámetros del *GARCH*  $\alpha_0 = 1,$

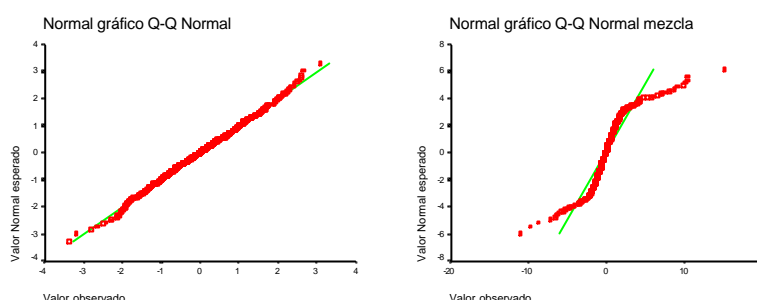
$\alpha_1 = 0,8$ ,  $\beta_1 = 0,9$  y  $\phi = 0,8$ .

### 6.3. Distribuciones con colas pesadas

Como destacamos y pudimos comprobar, a la hora de representar los diagramas de frecuencias de nuestras series, concretamente en el Capítulo 2, la característica básica era que se comportaban siguiendo distribuciones con apuntamiento y colas pesadas. Este comportamiento podríamos decir que se repite con mucha frecuencia cuando estudiamos fenómenos del ámbito ...nanciero. Siendo indicativo de que tenemos mayor número de observaciones outliers de lo que se podría esperar de una distribución normal. En otras palabras, los sucesos que tiene una probabilidad muy baja de ocurrencia, si tenemos en cuenta una distribución normal, se reproducen con demasiada frecuencia. La razón para la aparición de estos valores extremos podría ser que la varianza condicional no es constante. De hecho, los procesos *GARCH* exhiben comportamientos de colas pesadas. Por tanto, cuando usamos los modelos *GARCH* en ...nanzas podemos modelizar tanto la heterocedasticidad condicional como las distribuciones de colas pesadas.

Para entender cómo una varianza no constante induce un comportamiento de colas pesadas, vamos a desarrollar un experimento muy simple. Consideremos una distribución formada por un 90 % de una distribución  $N(0, 1)$  y el 10 % de una distribución  $N(0, 25)$ . A la distribución resultante la denominaremos como distribución normal mezcla. La varianza de esta nueva distribución es  $(0,9)(1) + (0,1)(25) = 3,4$  de forma que su desviación estándar será 1,844. La distribución que estamos considerando es muy diferente de la distribución  $N(0, 3,4)$ . Incluso aunque ambas distribuciones tengan la misma media (0) y varianza (3,4). Para apreciar este fenómeno veamos la siguiente ...gura:





Comparación entre una distribución normal y una distribución con colas pesadas.

Podemos observar, en el gráfico superior izquierdo, que las dos densidades son distintas. La densidad normal parece mucho más dispersa que la normal mezcla, pero sabemos que, de hecho, tienen la misma varianza. Si nos fijamos en el panel superior derecho, podemos destacar que la densidad de la normal mezcla es mucho mayor que la de la normal cuando  $x$  (la variable del eje horizontal) es mayor de 6. Podríamos calificar esta zona como región outlier (también para  $x < -6$ ). La normal mezcla tiene más casos outliers, o valores extremos, y provienen del 10% de la población con una varianza de 25. Las observaciones outliers tienen un efecto importante sobre la varianza y esta pequeña fracción de outliers incrementa la varianza desde 1,0 (la varianza del 90% de la población) hasta 3,4.

Vamos a ver cuánta más probabilidad tiene la distribución normal mezcla en el rango outlier  $|x| > 6$  comparada con la que obtendríamos en el caso de la distribución normal. Para una variable aleatoria  $X$  que se comporta según una distribución  $N(0, \sigma^2)$ ,

$$P(|X| > x) = 2 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Por tanto, para la distribución normal con varianza 3,4,

$$P(|X| > 6) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3,4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{6^2}{2 \cdot 3,4}} = 0,0011$$

Para la población de la distribución normal mezcla de varianza 1 con probabilidad 0,9 y varianza 25 con probabilidad 0,1 tenemos que,

$$\begin{aligned} P(|X| > 6) &= 2 \cdot 0,9 \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{6^2}{2 \cdot 1}} + 0,1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{6^2}{2 \cdot 25}} \\ &= (0,9) \cdot (0) + (0,1) \cdot (0,23) = 0,023 \end{aligned}$$

Debido a que  $\frac{0.023}{0.001} \approx 21$ , la distribución normal mezcla es 21 veces más probable de encontrarse en el rango outlier que la distribución normal.

Los gráficos Q-Q de análisis de la normalidad sobre muestras de tamaño 200 de la distribución normal y de la distribución normal mezcla, muestran que en el segundo caso la aparición de outliers proporciona a la segunda de las distribuciones analizadas un patrón de comportamiento no lineal. La desviación de la muestra normal es pequeña debido a su completa aleatoriedad.

En este ejemplo, la varianza es condicional respecto al componente de la mezcla del que provenga la observación. La varianza condicional es 1 con probabilidad 0.9 y 25 con probabilidad 0.1. Debido a que la varianza condicional es discreta, de hecho, con sólo 2 valores posibles, el ejemplo es fácil de analizar. La distribución marginal de un proceso *GARCH* es siempre una mezcla de distribuciones Normales. Aunque los procesos *GARCH* pueden llegar a ser más complejos que el expuesto en este ejemplo, debemos considerar que las conclusiones serán las mismas. En otras palabras, la heterocedasticidad condicional induce distribuciones marginales de colas pesadas, incluso para el caso de que las distribuciones condicionales tengan colas similares a las de la distribución normal.

## 6.4. Comparación entre procesos *ARMA* y procesos *GARCH*

La siguiente tabla compara un proceso de ruido blanco, un proceso *ARMA*, un proceso *GARCH* y un proceso *ARMA/GARCH* en función de varias propiedades: medias condicionales, varianzas condicionales, distribuciones condicionales, medias marginales, varianzas marginales y distribuciones marginales.

Propiedad	Ruido Blanco	ARMA	GARCH	ARMA/GARCH
Media Condicional	constante	No constante		No constante
Varianza Condicional	constante	constante	No constante	No constante
Distribución Condicional	Normal	Normal	Normal	Normal
Media y Varianza Marginal	constante	constante	constante	constante
Distribución Marginal	Normal	Normal	Colas pesadas	Colas pesadas

## 6.5. Estimación de modelos *GARCH* sobre las series temporales

Para las series analizadas, los resultados obtenidos en la estimación de modelos *GARCH* se presentan a continuación. Destacar que, para la obtención de la combinación de modelos *ARMA* y *GARCH*, no hemos elegido ningún criterio como el de Akaike o el de Schwarz, si no que en este caso particular, hemos optado por elegir aquella combinación de modelos *ARMA/GARCH* a partir de la cual obtenemos una serie de residuos independientes. Para determinar dicha independencia hemos utilizado el test de Ljung-Box.

Los resultados obtenidos son los siguientes (para más detalle sobre la estimación consultar el Apéndice 2):

- Para la serie de diferencias a 1 día, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 1)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,750715$ ,  $\theta_1 = -0,8708$  para el modelo *ARMA* y  $\alpha_1 = 0,114731$ ,  $\beta_1 = 0,959975$  para el *GARCH*.
- Para la serie de diferencias a 1 semana, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 0)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,097249$ ,  $\alpha_1 = 1,427278$  y  $\beta_1 = 0,222314$ .

## 6.5 Estimación de modelos *GARCH* sobre las series temporales 241

- Para la serie de diferencias a 15 días, el modelo estimado ha sido un modelo  $ARMA(1, 0)/GARCH(1, 1)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,135121$ ,  $\alpha_1 = 1,416413$  y  $\beta_1 = 0,406829$ .
  
- Para la serie de diferencias a 1 mes, el modelo estimado ha sido un modelo  $ARMA(6, 1)/GARCH(1, 1)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 1,087746$ ,  $\phi_2 = 0,101660$ ,  $\phi_3 = 0,080416$ ,  $\phi_4 = 0,114962$ ,  $\phi_5 = 0,049152$ ,  $\phi_6 = 0,010455$ ,  $\theta_1 = 0,971691$ ,  $\alpha_1 = 0,208653$  y  $\beta_1 = 0,862857$ .
  
- Para la serie de diferencias a 2 meses, el modelo estimado ha sido un modelo  $ARMA(1, 1)/GARCH(1, 1)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,981616$ ,  $\theta_1 = 0,972325$ ,  $\alpha_1 = 0,466039$  y  $\beta_1 = 0,684235$ .
  
- Para la serie de diferencias a 3 meses, el modelo estimado ha sido un modelo  $ARMA(3, 0)/GARCH(1, 1)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,056268$ ,  $\phi_2 = 0,069542$ ,  $\phi_3 = 0,029903$ ,  $\alpha_1 = 0,269512$  y  $\beta_1 = 0,786554$ .
  
- Para la serie de diferencias a 6 meses, el modelo estimado ha sido un modelo  $ARMA(1, 5)/GARCH(1, 1)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,896705$ ,  $\theta_1 = 0,939039$ ,  $\theta_2 = 0,103028$ ,  $\theta_3 = 0,013309$ ,  $\theta_4 = 0,034894$ ,  $\theta_5 = 0,001283$ ,  $\alpha_1 = 0,180379$  y  $\beta_1 = 0,863320$ .
  
- Para la serie de diferencias a 1 año, el modelo estimado ha sido un modelo  $ARMA(8, 1)/GARCH(1, 1)$  cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,709070$ ,  $\phi_2 = 0,119689$ ,  $\phi_3 = 0,011666$ ,  $\phi_4 = 0,00977$ ,  $\phi_5 = 0,008138$ ,  $\phi_6 = 0,023021$ ,  $\phi_7 = 0,009379$ ,  $\phi_8 = 0,028179$ ,  $\theta_1 = 0,793010$ ,  $\alpha_1 = 0,082995$  y  $\beta_1 = 0,919992$ .

### 6.6. Comentarios sobre los resultados obtenidos

En este apartado vamos a presentar los resultados obtenidos de la aplicación del test de Ljung-Box sobre los residuos de los modelos ajustados. Cabe decir que, puesto que el criterio de selección seguido en la determinación de mejor modelo *GARCH* se ha realizado teniendo en cuenta los resultados de este test, en casi todos los casos expuestos se aceptará la hipótesis de no correlación de los datos.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob			
*				1	-0.064	-0.064	11.227	
				2	-0.024	-0.029	12.847	
				3	-0.016	-0.019	13.518	0.000
				4	0.008	0.005	13.678	0.001
				5	-0.013	-0.013	14.134	0.003
				6	0.002	0.000	14.143	0.007
				7	-0.005	-0.005	14.211	0.014
				8	0.002	0.001	14.224	0.027
				9	-0.008	-0.008	14.406	0.044
				10	-0.013	-0.014	14.840	0.062
				11	-0.004	-0.006	14.893	0.094
				12	-0.009	-0.011	15.136	0.127
				13	0.000	-0.002	15.136	0.176
				14	0.008	0.007	15.297	0.226
				15	-0.016	-0.016	15.997	0.249
				16	0.012	0.011	16.426	0.288
				17	-0.008	-0.007	16.586	0.344
				18	0.009	0.008	16.792	0.399
				19	0.015	0.016	17.389	0.428
				20	0.012	0.014	17.804	0.469
				21	0.012	0.015	18.217	0.508
				22	0.002	0.005	18.231	0.572
				23	-0.005	-0.004	18.313	0.629
				24	-0.003	-0.003	18.341	0.686
				25	0.006	0.005	18.432	0.734
				26	-0.006	-0.005	18.547	0.776
				27	-0.010	-0.010	18.813	0.806
				28	0.009	0.008	19.041	0.835
				29	-0.005	-0.004	19.117	0.866
				30	-0.003	-0.003	19.147	0.894
				31	-0.004	-0.003	19.196	0.916
				32	0.009	0.008	19.433	0.930
				33	0.004	0.006	19.483	0.946
				34	0.003	0.004	19.512	0.959
				35	-0.008	-0.007	19.668	0.968
				36	0.021	0.020	20.864	0.962
				37	-0.012	-0.010	21.277	0.967
				38	0.002	0.001	21.288	0.975
				39	0.002	0.002	21.306	0.982
				40	0.011	0.010	21.650	0.985
				41	0.012	0.013	22.035	0.987
				42	-0.009	-0.008	22.277	0.989
				43	0.008	0.009	22.461	0.992
				44	-0.003	-0.002	22.483	0.994
				45	0.001	0.002	22.489	0.996
				46	-0.007	-0.006	22.628	0.997
				47	-0.008	-0.009	22.795	0.998
				48	0.003	0.003	22.823	0.998
				49	-0.013	-0.013	23.268	0.999
				50	-0.015	-0.017	23.900	0.999

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo *GARCH*(1, 1) sobre la serie de incrementos a 1 día.







Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
	*	51	0.064	0.068	52.632	0.373
		52	0.013	0.008	53.095	0.393
		53	-0.019	-0.021	54.138	0.393
		54	0.001	0.005	54.139	0.431
		55	0.005	0.013	54.217	0.466
		56	0.013	0.014	54.720	0.485
		57	-0.017	-0.014	55.474	0.495
		58	-0.016	-0.011	56.142	0.507
		59	0.001	0.002	56.145	0.545
		60	-0.008	-0.005	56.302	0.576
		61	0.020	0.023	57.440	0.570
		62	0.016	0.015	58.182	0.579
		63	-0.013	-0.014	58.631	0.598
		64	0.033	0.039	61.645	0.525
		65	0.033	0.038	64.697	0.452
		66	0.025	0.024	66.423	0.428
		67	-0.012	-0.007	66.814	0.449
		68	0.013	0.017	67.302	0.467
		69	0.001	0.004	67.304	0.501
		70	0.051	0.053	74.468	0.305
		71	-0.003	-0.001	74.500	0.334
		72	0.026	0.024	76.322	0.312
		73	0.026	0.027	78.240	0.287
		74	0.007	0.010	78.378	0.312
		75	-0.019	-0.014	79.388	0.313
		76	0.000	-0.002	79.388	0.342
		77	0.023	0.028	80.813	0.331
		78	-0.024	-0.025	82.468	0.314
		79	-0.014	-0.019	82.999	0.328
		80	-0.015	-0.016	83.633	0.339
		81	-0.009	-0.007	83.866	0.362
		82	-0.019	-0.025	84.837	0.364
		83	-0.016	-0.022	85.528	0.373
		84	-0.026	-0.030	87.370	0.350
		85	0.010	0.001	87.653	0.371
		86	-0.015	-0.026	88.268	0.383
		87	-0.018	-0.024	89.154	0.387
		88	0.012	0.010	89.587	0.403
		89	-0.015	-0.021	90.197	0.415
		90	0.025	0.017	91.956	0.394
		91	-0.002	-0.003	91.972	0.422
		92	-0.008	-0.013	92.167	0.446
		93	0.001	-0.006	92.172	0.475
		94	-0.020	-0.021	93.316	0.471
		95	0.020	0.018	94.404	0.469
		96	-0.001	-0.004	94.409	0.498
		97	0.008	0.005	94.609	0.521
		98	0.019	0.017	95.658	0.519
		99	0.015	0.008	96.264	0.531
		100	0.009	0.012	96.487	0.553

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo  $GARCH(1,1)$  sobre la serie de incrementos a 1 semana.

Para el caso de la serie a 15 días, únicamente destacar que, para los retardos del 2 al 11 no aceptaríamos que los residuos son independientes, pero sí para el resto, por lo que no tenemos en cuenta los retardos para los que no se acepta la hipótesis nula y consideraremos que los residuos obtenidos son independientes.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	0.066	0.066	11.668	
		2	0.022	0.018	12.981	0.000
		3	0.000	-0.003	12.981	0.002
		4	-0.003	-0.003	13.007	0.005
		5	-0.001	-0.001	13.010	0.011
		6	0.012	0.012	13.408	0.020
		7	0.022	0.020	14.675	0.023
		8	-0.034	-0.037	17.771	0.013
		9	0.001	0.005	17.772	0.023
		10	-0.005	-0.003	17.829	0.037
		11	0.025	0.026	19.585	0.033
		12	0.003	0.000	19.614	0.051
		13	-0.007	-0.009	19.743	0.072
		14	-0.017	-0.016	20.507	0.083
		15	-0.001	0.003	20.512	0.115
		16	-0.001	-0.001	20.513	0.153
		17	0.010	0.010	20.801	0.186
		18	-0.003	-0.006	20.818	0.235
		19	0.000	0.002	20.818	0.289
		20	0.011	0.012	21.143	0.329
		21	-0.005	-0.006	21.199	0.386
		22	0.013	0.011	21.650	0.420
		23	0.008	0.006	21.823	0.470
		24	-0.008	-0.010	22.008	0.520
		25	0.002	0.005	22.018	0.578
		26	-0.010	-0.011	22.304	0.618
		27	-0.013	-0.013	22.793	0.645
		28	-0.008	-0.006	22.986	0.686
		29	0.010	0.010	23.246	0.721
		30	-0.015	-0.015	23.849	0.736
		31	0.042	0.044	28.703	0.533
		32	0.007	0.001	28.833	0.578
		33	-0.012	-0.014	29.225	0.608
		34	0.029	0.030	31.454	0.544
		35	0.029	0.026	33.741	0.480
		36	0.015	0.010	34.338	0.500
		37	0.021	0.019	35.508	0.492
		38	0.026	0.021	37.342	0.453
		39	0.037	0.038	41.156	0.334
		40	0.003	-0.004	41.175	0.376
		41	-0.003	-0.006	41.194	0.418
		42	0.012	0.011	41.561	0.446
		43	0.005	0.005	41.638	0.487
		44	0.026	0.026	43.433	0.453
		45	-0.001	-0.005	43.434	0.496
		46	0.034	0.032	46.608	0.406
		47	-0.005	-0.006	46.684	0.444
		48	0.019	0.018	47.663	0.446
		49	0.012	0.010	48.073	0.470
		50	-0.005	-0.007	48.136	0.508

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo *GARCH*(1, 1)  
sobre la serie de incrementos a 15 días.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		51	0.022	0.021	49.462	0.495
		52	-0.021	-0.021	50.689	0.486
		53	0.002	0.003	50.706	0.525
		54	-0.003	-0.003	50.732	0.563
		55	0.021	0.019	51.915	0.555
		56	0.007	0.005	52.035	0.589
		57	-0.003	-0.006	52.056	0.625
		58	0.004	0.005	52.094	0.659
		59	0.010	0.012	52.361	0.684
		60	0.012	0.008	52.727	0.704
*		61	0.072	0.074	67.238	0.243
		62	-0.013	-0.026	67.724	0.259
		63	0.022	0.025	69.026	0.252
		64	0.029	0.031	71.364	0.220
		65	0.005	0.001	71.441	0.244
		66	0.007	0.002	71.588	0.268
		67	-0.018	-0.020	72.524	0.272
		68	0.003	0.002	72.549	0.300
		69	-0.018	-0.013	73.413	0.305
		70	0.006	0.002	73.528	0.332
		71	0.006	0.005	73.627	0.360
		72	0.019	0.018	74.642	0.361
		73	0.036	0.032	78.331	0.285
		74	0.014	0.009	78.863	0.299
		75	0.005	-0.001	78.933	0.326
		76	0.020	0.020	80.012	0.325
		77	-0.009	-0.017	80.251	0.347
		78	-0.006	-0.007	80.351	0.375
		79	-0.011	-0.011	80.687	0.395
		80	-0.010	-0.014	80.969	0.417
		81	-0.034	-0.035	84.184	0.353
		82	0.007	0.009	84.340	0.378
		83	-0.041	-0.048	88.941	0.281
		84	-0.007	-0.004	89.076	0.304
		85	-0.011	-0.012	89.401	0.323
		86	0.019	0.018	90.362	0.325
		87	-0.001	-0.002	90.364	0.353
		88	-0.023	-0.022	91.794	0.342
		89	0.000	0.003	91.795	0.370
		90	-0.002	-0.003	91.804	0.398
		91	0.005	0.006	91.862	0.426
		92	0.000	-0.010	91.862	0.455
		93	0.011	0.006	92.177	0.475
		94	-0.022	-0.023	93.529	0.465
		95	0.002	-0.008	93.540	0.494
		96	-0.022	-0.025	94.867	0.485
		97	0.006	0.002	94.976	0.510
		98	-0.009	-0.012	95.192	0.533
		99	-0.003	-0.008	95.225	0.561
		100	0.052	0.053	102.86	0.375

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo  $GARCH(1,1)$  sobre la serie de incrementos a 15 días.

Por el contrario a lo que hemos ido viendo, para la serie a 1 mes los resultados son peores que con la modelización lineal estocástica. No aceptamos que los residuos sean independientes, ya que para los retardos del 8 al 69 no aceptamos la independencia, pero sí para los retardos del 70 al 100.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	0.081	0.081	17.856	
		2	0.007	0.001	18.005	
		3	0.028	0.028	20.205	
		4	0.006	0.002	20.319	
		5	-0.004	-0.005	20.367	
		6	0.029	0.029	22.597	
		7	-0.008	-0.013	22.787	
		8	0.020	0.022	23.895	0.000
		9	-0.026	-0.031	25.777	0.000
		10	0.004	0.009	25.820	0.000
		11	0.025	0.023	27.499	0.000
		12	-0.013	-0.017	27.989	0.000
		13	0.000	0.003	27.989	0.000
		14	0.003	0.000	28.021	0.000
		15	0.012	0.015	28.446	0.000
		16	-0.013	-0.017	28.923	0.001
		17	-0.002	0.000	28.938	0.001
		18	-0.010	-0.010	29.198	0.002
		19	-0.024	-0.023	30.811	0.002
		20	-0.007	-0.001	30.951	0.003
		21	0.015	0.014	31.596	0.005
		22	0.015	0.015	32.232	0.006
		23	-0.031	-0.034	34.941	0.004
		24	-0.015	-0.009	35.553	0.005
		25	-0.006	-0.005	35.654	0.008
		26	-0.016	-0.014	36.385	0.009
		27	-0.045	-0.041	41.894	0.003
		28	0.010	0.015	42.165	0.004
		29	-0.004	-0.003	42.219	0.006
		30	-0.009	-0.006	42.465	0.008
		31	0.009	0.012	42.685	0.011
		32	0.005	0.001	42.750	0.015
		33	0.013	0.016	43.238	0.018
		34	0.013	0.011	43.688	0.022
		35	-0.002	-0.004	43.705	0.030
		36	0.012	0.009	44.115	0.036
		37	-0.017	-0.020	44.960	0.039
		38	0.014	0.020	45.474	0.045
		39	0.038	0.032	49.487	0.025
		40	0.011	0.008	49.827	0.030
		41	0.011	0.010	50.182	0.036
		42	0.007	0.001	50.320	0.045
		43	0.006	0.005	50.435	0.056
		44	0.048	0.045	56.799	0.020
		45	0.043	0.035	61.848	0.009
		46	0.004	-0.007	61.896	0.011
		47	0.035	0.032	65.348	0.007
		48	-0.013	-0.018	65.835	0.008
		49	0.008	0.010	66.022	0.010
		50	0.006	-0.002	66.137	0.013

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo *GARCH*(1, 1)  
sobre la serie de incrementos a 1 mes.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		51	0.030	0.030	68.620	0.010
		52	0.023	0.019	70.124	0.010
		53	0.020	0.013	71.232	0.010
		54	-0.010	-0.012	71.496	0.012
		55	0.014	0.011	72.026	0.014
		56	0.023	0.023	73.456	0.013
		57	0.002	-0.001	73.468	0.017
		58	-0.014	-0.013	74.021	0.019
		59	0.004	0.005	74.060	0.024
		60	0.010	0.009	74.313	0.028
		61	0.002	0.002	74.323	0.035
		62	0.040	0.041	78.738	0.020
		63	-0.010	-0.013	79.043	0.023
		64	-0.005	-0.002	79.104	0.028
		65	0.010	0.012	79.368	0.033
		66	0.000	-0.002	79.368	0.040
		67	-0.021	-0.021	80.596	0.039
		68	-0.005	0.001	80.655	0.047
		69	-0.011	-0.005	80.973	0.053
		70	-0.017	-0.013	81.813	0.056
		71	-0.015	-0.005	82.404	0.061
		72	0.027	0.030	84.408	0.053
		73	0.016	0.009	85.139	0.057
		74	0.012	0.016	85.539	0.063
		75	-0.013	-0.017	86.042	0.069
		76	-0.009	-0.006	86.254	0.078
		77	0.002	-0.001	86.261	0.091
		78	-0.007	-0.006	86.381	0.103
		79	-0.008	-0.004	86.554	0.116
		80	-0.011	-0.012	86.883	0.128
		81	-0.013	-0.008	87.327	0.138
		82	-0.006	-0.002	87.425	0.155
		83	-0.035	-0.040	90.795	0.118
		84	0.004	0.007	90.846	0.134
		85	0.007	0.004	90.981	0.149
		86	0.007	0.007	91.138	0.165
		87	0.007	0.003	91.282	0.183
		88	-0.024	-0.028	92.867	0.173
		89	-0.002	0.002	92.884	0.193
		90	0.052	0.046	100.55	0.092
		91	0.017	0.009	101.41	0.095
		92	-0.010	-0.015	101.67	0.105
		93	0.012	0.009	102.09	0.114
		94	-0.003	-0.012	102.12	0.128
		95	0.008	0.005	102.29	0.142
		96	0.026	0.018	104.21	0.129
		97	0.011	0.005	104.53	0.140
		98	-0.019	-0.025	105.53	0.142
		99	-0.001	0.005	105.53	0.158
		100	-0.023	-0.028	107.00	0.152

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo  $GARCH(1,1)$  sobre la serie de incrementos a 1 mes.

Para la serie de residuos obtenida para el caso a 2 meses, destacar que aceptamos la hipótesis nula de independencia de los datos analizados, aunque halla 3 retardos para los que no se aceptaría. Concretamente, los retardos 94, 95 y 96 proporcionan un valor de probabilidad prácticamente igual a 0.5, con lo que podemos considerar que no inciden en nuestra conclusión.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.004	0.004	0.0344	
		2	0.002	0.002	0.0440	
		3	0.013	0.013	0.4632	0.496
		4	0.015	0.015	1.0066	0.605
		5	0.016	0.016	1.6170	0.656
		6	0.020	0.019	2.5249	0.640
		7	0.022	0.021	3.6397	0.602
		8	0.000	-0.001	3.6398	0.725
		9	0.023	0.022	4.9054	0.672
		10	-0.007	-0.009	5.0219	0.755
		11	0.013	0.012	5.4405	0.794
		12	-0.020	-0.021	6.3300	0.787
		13	-0.010	-0.011	6.5394	0.835
		14	-0.036	-0.037	9.4885	0.661
		15	0.019	0.019	10.351	0.665
		16	-0.019	-0.020	11.207	0.670
		17	0.004	0.006	11.244	0.735
		18	-0.039	-0.039	14.756	0.543
		19	-0.017	-0.014	15.442	0.564
		20	0.012	0.013	15.797	0.607
		21	-0.031	-0.027	17.964	0.525
		22	-0.011	-0.010	18.268	0.570
		23	0.012	0.016	18.579	0.612
		24	-0.035	-0.035	21.465	0.492
		25	-0.034	-0.029	24.176	0.394
		26	0.013	0.012	24.584	0.429
		27	0.001	0.004	24.584	0.486
		28	-0.005	-0.004	24.640	0.539
		29	0.023	0.027	25.927	0.523
		30	0.021	0.021	26.926	0.522
		31	0.021	0.023	27.918	0.522
		32	0.026	0.024	29.519	0.490
		33	-0.016	-0.016	30.130	0.511
		34	-0.028	-0.030	31.922	0.471
		35	0.001	-0.004	31.925	0.520
		36	0.022	0.019	33.064	0.513
		37	0.001	-0.004	33.066	0.562
		38	0.009	0.005	33.248	0.600
		39	0.038	0.036	36.634	0.486
		40	0.005	0.003	36.685	0.530
		41	-0.015	-0.015	37.214	0.552
		42	0.009	0.007	37.414	0.587
		43	0.014	0.011	37.874	0.610
		44	0.022	0.025	39.049	0.601
		45	0.051	0.051	45.215	0.380
		46	0.007	0.002	45.339	0.416
		47	-0.046	-0.048	50.234	0.274
		48	0.013	0.013	50.642	0.295
		49	0.014	0.011	51.098	0.316
		50	-0.013	-0.012	51.473	0.339

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo *GARCH*(1, 1)  
sobre la serie de incrementos a 2 meses.



Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		51	0.005	0.006	51.540	0.375
		52	0.051	0.051	57.753	0.211
		53	-0.018	-0.015	58.494	0.220
		54	0.032	0.035	60.925	0.186
		55	0.039	0.039	64.564	0.133
		56	-0.023	-0.021	65.838	0.130
		57	0.019	0.024	66.721	0.134
		58	-0.006	-0.007	66.794	0.153
		59	-0.023	-0.031	68.017	0.151
		60	0.015	0.015	68.564	0.162
		61	-0.039	-0.043	72.138	0.117
		62	-0.026	-0.025	73.709	0.110
		63	0.009	0.014	73.917	0.124
		64	-0.001	0.008	73.920	0.143
		65	0.006	0.007	74.019	0.162
		66	-0.009	-0.003	74.205	0.180
		67	0.037	0.044	77.533	0.137
		68	-0.020	-0.020	78.521	0.139
		69	-0.012	-0.010	78.836	0.153
		70	-0.024	-0.015	80.179	0.148
		71	0.041	0.036	84.096	0.104
		72	0.007	0.001	84.206	0.118
		73	-0.038	-0.028	87.721	0.087
		74	-0.003	-0.011	87.742	0.100
		75	-0.022	-0.034	88.877	0.100
		76	-0.012	-0.005	89.247	0.109
		77	-0.036	-0.036	92.394	0.084
		78	0.031	0.032	94.636	0.073
		79	0.026	0.043	96.256	0.068
		80	-0.018	-0.024	96.997	0.071
		81	0.002	0.000	97.008	0.083
		82	-0.031	-0.035	99.293	0.071
		83	0.017	0.012	99.977	0.075
		84	0.008	-0.002	100.14	0.085
		85	-0.019	-0.016	100.99	0.087
		86	-0.022	-0.025	102.19	0.086
		87	0.033	0.026	104.82	0.071
		88	-0.009	-0.008	105.03	0.080
		89	0.009	0.011	105.22	0.089
		90	0.031	0.031	107.49	0.078
		91	0.014	0.015	107.94	0.084
		92	-0.042	-0.033	112.22	0.056
		93	0.020	0.017	113.18	0.058
		94	0.038	0.022	116.63	0.042
		95	0.021	0.022	117.68	0.043
		96	-0.007	-0.017	117.80	0.049
		97	0.006	0.003	117.89	0.056
		98	0.027	0.019	119.63	0.052
		99	0.022	0.020	120.83	0.051
		100	0.016	0.010	121.42	0.055

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 2 meses.

Para la serie a 3 meses aceptaríamos también la independencia, pese a que los retardos del 4 al 19 y el 24 nos den un valor de probabilidad por debajo del 0.5





Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.030	0.030	2.2827	
		2	0.009	0.009	2.5151	
		3	-0.008	-0.008	2.6742	
		4	0.010	0.010	2.9127	
		5	0.012	0.011	3.2660	
		6	-0.010	-0.011	3.5223	
		7	-0.003	-0.002	3.5398	0.060
		8	0.010	0.010	3.7756	0.151
		9	0.028	0.027	5.8426	0.120
		10	-0.012	-0.014	6.2359	0.182
		11	0.004	0.004	6.2689	0.281
		12	0.022	0.022	7.5113	0.276
		13	-0.024	-0.027	9.0548	0.249
		14	-0.020	-0.019	10.101	0.258
		15	-0.001	0.002	10.104	0.342
		16	0.016	0.015	10.739	0.378
		17	0.025	0.023	12.331	0.339
		18	0.009	0.008	12.524	0.405
		19	0.007	0.007	12.664	0.474
		20	-0.017	-0.018	13.377	0.497
		21	-0.028	-0.029	15.395	0.423
		22	-0.014	-0.010	15.937	0.457
		23	-0.014	-0.013	16.456	0.492
		24	-0.010	-0.010	16.720	0.542
		25	0.005	0.007	16.795	0.604
		26	0.015	0.014	17.364	0.629
		27	-0.020	-0.023	18.427	0.622
		28	0.025	0.026	20.122	0.575
		29	0.001	0.002	20.128	0.634
		30	-0.011	-0.010	20.458	0.670
		31	-0.012	-0.010	20.855	0.701
		32	0.034	0.038	23.899	0.582
		33	0.015	0.012	24.466	0.604
		34	0.002	-0.002	24.479	0.656
		35	-0.008	-0.009	24.637	0.697
		36	-0.028	-0.027	26.676	0.640
		37	-0.009	-0.011	26.893	0.678
		38	-0.022	-0.019	28.222	0.658
		39	0.005	0.011	28.296	0.701
		40	0.023	0.024	29.729	0.677
		41	-0.001	-0.004	29.731	0.720
		42	-0.018	-0.018	30.625	0.722
		43	0.027	0.028	32.525	0.679
		44	0.017	0.011	33.284	0.687
		45	-0.009	-0.011	33.480	0.719
		46	-0.004	0.001	33.513	0.756
		47	0.018	0.021	34.385	0.758
		48	0.001	-0.002	34.389	0.792
		49	-0.005	-0.008	34.461	0.820
		50	0.020	0.021	35.478	0.817

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo *GARCH*(1, 1)  
sobre la serie de incrementos a 6 meses.





Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		51	-0.011	-0.017	52.950	0.120
		52	0.016	0.010	53.532	0.130
		53	-0.004	-0.006	53.566	0.153
		54	0.012	0.017	53.907	0.170
		55	0.014	0.014	54.381	0.186
		56	-0.010	-0.017	54.609	0.208
		57	-0.003	-0.002	54.634	0.237
		58	0.010	0.009	54.872	0.262
		59	0.010	0.011	55.099	0.288
		60	0.033	0.031	57.536	0.246
		61	0.012	0.008	57.855	0.268
		62	-0.047	-0.052	62.988	0.164
		63	-0.001	0.006	62.993	0.188
		64	0.008	0.008	63.152	0.210
		65	0.035	0.028	65.889	0.172
		66	0.007	0.000	66.002	0.194
		67	0.024	0.028	67.281	0.189
		68	0.042	0.046	71.353	0.130
		69	0.011	0.008	71.627	0.145
		70	0.018	0.018	72.401	0.151
		71	0.033	0.021	74.940	0.125
		72	0.005	-0.006	74.995	0.143
		73	-0.038	-0.039	78.227	0.109
		74	0.012	0.010	78.544	0.121
		75	0.052	0.050	84.757	0.060
		76	-0.002	-0.010	84.766	0.070
		77	0.019	0.016	85.617	0.073
		78	-0.014	-0.015	86.085	0.080
		79	0.011	0.011	86.340	0.090
		80	0.006	0.001	86.418	0.103
		81	0.018	0.012	87.134	0.108
		82	0.017	0.013	87.796	0.114
		83	0.016	0.014	88.362	0.122
		84	-0.014	-0.014	88.809	0.132
		85	-0.014	-0.022	89.231	0.142
		86	-0.001	-0.001	89.234	0.161
		87	-0.028	-0.034	91.033	0.148
		88	0.001	0.008	91.034	0.167
		89	0.003	0.017	91.061	0.187
		90	0.001	-0.001	91.062	0.208
		91	0.014	0.004	91.519	0.221
		92	0.021	0.016	92.494	0.223
		93	0.024	0.020	93.810	0.218
		94	0.016	0.002	94.408	0.227
		95	0.002	-0.005	94.414	0.251
		96	-0.028	-0.025	96.167	0.235
		97	0.014	0.018	96.612	0.249
		98	-0.046	-0.041	101.51	0.172
		99	0.025	0.021	103.01	0.165
		100	0.015	0.009	103.53	0.174

Test de Ljung-Box sobre la serie de residuos de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 1 año.

Una vez analizados los resultados, resaltemos que excepto en el caso de la serie a 1 mes, obtenemos una mejora con respecto a la modelización lineal estocástica. Por lo tanto podemos decir, que los modelos ajustados son bastante buenos.

Todo lo expuesto hasta ahora se ha realizado teniendo en cuenta herramientas clásicas en el análisis de series temporales. Si recordamos, presentamos, en el capítulo dedicado a la teoría del caos, una herramienta que nos permitía detectar cualquier tipo de relaciones entre las variables, tanto lineales como no lineales: el test  $BDS$ . La pregunta es obvia: ¿Obtendremos la misma conclusión

utilizando el test *BDS* sobre los residuos que con el test de Ljung-Box? Pregunta que obtiene respuesta en la siguiente tabla, donde hemos realizado el test de *BDS* sobre los residuos de los modelos ajustados,

$\epsilon$	$m$	1 día	1 semana	15 días	1 mes	2 meses	3 meses	6 meses	1 año
$0.5\sigma$	2	2.7518	3.2308	3.2697	3.2423	2.5624	2.5822	1.4433	1.1815
$0.5\sigma$	3	4.9545	5.5861	6.0185	5.6589	3.8419	3.7224	1.9043	1.3842
$0.5\sigma$	4	6.4496	6.8297	7.7356	6.9371	4.2367	3.8640	1.7602	1.1846
$0.5\sigma$	5	7.4618	7.2197	8.6412	7.4881	4.1393	3.5550	1.4481	0.8761
$0.5\sigma$	6	8.1825	7.2144	8.9805	7.5050	3.8055	3.0984	1.1271	0.6196
$0.5\sigma$	7	8.6654	6.9185	8.9670	7.2302	3.3753	2.6194	0.8467	0.4259
$0.5\sigma$	8	8.9143	6.4799	8.7123	6.8400	2.9377	2.1786	0.6311	0.2915
$0.5\sigma$	9	8.9250	5.9531	8.3061	6.3645	2.5074	1.8008	0.4716	0.1988
$0.5\sigma$	10	8.8079	5.4388	7.8640	5.8824	2.1096	1.4882	0.3541	0.1371
$\sigma$	2	1.2324	2.3714	2.1755	2.1408	2.1668	2.3209	1.8711	1.5681
$\sigma$	3	2.5490	4.7512	4.4430	4.5075	4.2175	4.6124	3.5783	2.7507
$\sigma$	4	3.7437	6.6186	6.4721	6.5133	5.8870	6.2872	4.7387	3.4861
$\sigma$	5	4.8541	8.0045	8.2459	8.2599	7.1966	7.4842	5.5265	3.8811
$\sigma$	6	5.8630	9.1286	9.7468	9.7458	8.1425	8.2681	5.9091	4.0198
$\sigma$	7	6.8514	9.9206	10.9970	10.9890	8.7923	8.7377	6.0201	3.9753
$\sigma$	8	7.7659	10.4610	11.9610	11.9890	9.2086	8.8914	5.9170	3.8004
$\sigma$	9	8.5695	10.7940	12.6710	12.7820	9.4067	8.8220	5.6887	3.5349
$\sigma$	10	9.2443	10.9840	13.2020	13.3880	9.4492	8.6273	5.3987	3.2415
$1.5\sigma$	2	0.7799	1.5744	1.4982	1.2821	1.3066	1.5389	1.2958	1.1734
$1.5\sigma$	3	1.6475	3.3587	3.0272	2.8496	2.8346	3.3826	2.8345	2.4102
$1.5\sigma$	4	2.4651	4.9655	4.5578	4.3581	4.4119	5.0944	4.2547	3.5132
$1.5\sigma$	5	3.2452	6.3668	6.0580	5.7643	5.8152	6.5892	5.5684	4.5298
$1.5\sigma$	6	3.9681	7.6282	7.4683	7.0772	7.0870	7.9170	6.7094	5.4418
$1.5\sigma$	7	4.6502	8.7656	8.8077	8.3843	8.2058	9.0170	7.6749	6.2018
$1.5\sigma$	8	5.3007	9.7271	9.9919	9.5794	9.1997	9.9333	8.4172	6.7741
$1.5\sigma$	9	5.8981	10.5220	11.0340	10.6840	10.0210	10.6560	8.9464	7.1902
$1.5\sigma$	10	6.4454	11.1700	11.9480	11.6550	10.7590	11.2300	9.3136	7.4674
$2\sigma$	2	0.4330	1.0350	1.0540	0.8699	0.7412	1.0004	0.7682	0.7240
$2\sigma$	3	1.0067	2.2609	2.1437	1.9603	1.7431	2.2301	1.7603	1.6118
$2\sigma$	4	1.5625	3.4533	3.2656	3.0216	2.8620	3.5089	2.7900	2.5398
$2\sigma$	5	2.1212	4.6233	4.4051	4.0576	3.9152	4.7531	3.8268	3.5385
$2\sigma$	6	2.6593	5.7239	5.5371	5.0973	4.9227	5.9393	4.8680	4.5570
$2\sigma$	7	3.1763	6.7534	6.6785	6.1290	5.8452	7.0123	5.8438	5.5205
$2\sigma$	8	3.6719	7.7172	7.7574	7.1366	6.7588	8.0198	6.7382	6.4228
$2\sigma$	9	4.1437	8.5765	8.7487	8.0971	7.6026	8.9152	7.5411	7.2274
$2\sigma$	10	4.5925	9.3329	9.6832	9.0353	8.4077	9.7703	8.2417	7.9444
		$N = 2731$	$N = 2704$	$N = 2701$	$N = 2725$	$N = 2302$	$N = 2721$	$N = 2586$	$N = 2210$

Resultados del test *BDS* sobre la serie de residuos obtenida a partir del ajuste de un modelo *GARCH*(1, 1) sobre las series de incrementos.

El resultado es claro: no podemos decir que los residuos sean independientes. Todavía existe algún tipo de dependencia no lineal entre los datos analizados. Dependencia no lineal, puesto que si fuese dependencia lineal se hubiese detectado mediante el test de Ljung-Box. Por tanto, los modelos *GARCH* ajustados no son necesariamente los mejores. Nuestro análisis por tanto seguiría en esa línea, intentando detectar un modelo no lineal estocástico que mejorase los re-



sultados del test *BDS*. Existen muchos modelos no lineales estocásticos, como destacábamos en la introducción de este apartado, tanto dentro de la familia de modelos *GARCH* (*IGARCH*, *EGARCH*, *FIGARCH*,...) o fuera de ella, como por ejemplo, los modelos de volatilidad estocástica. Por tanto, queda en este apartado una puerta abierta a futuras investigaciones.



## Capítulo 7

# Retorno al paseo aleatorio: modelos con saltos

Cualquier tecnología su...cientemente avanzada no se puede distinguir de la magia.

Arthur C. Clarke

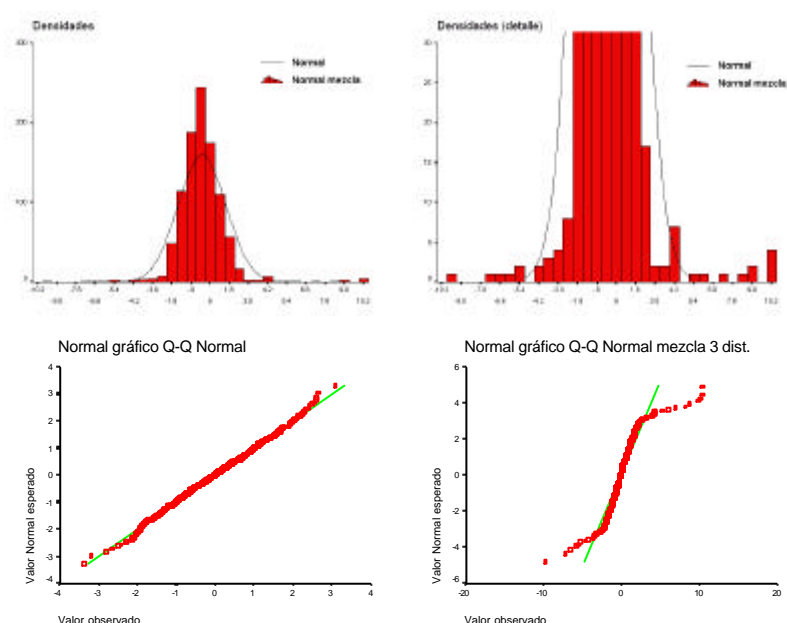
### 7.1. Introducción

En este capítulo antes de pasar a de...nir el concepto de proceso con saltos, vamos a empezar analizando una idea, planteada en capítulo anterior, que creemos que es bastante importante, ya que nos dará pistas sobre la línea investigadora que seguiremos en este capítulo.

Vamos a retomar el hecho de que las colas pesadas pueden ser consecuencia de la mezcla de dos distribuciones normales con distinta varianza. Vimos como al combinar un 90 % de datos de una distribución  $N(0, 1)$  con un 10% de datos de una distribución  $N(0, 25)$ , obteníamos una distribución que tenía colas pesadas y apuntamiento, y que en ningún caso podíamos suponer normal. Por lo tanto, esta podría ser la explicación del fenómeno de colas pesadas que observamos en nuestras series ya en el capítulo 2. Esta explicación de mezcla de normales para el fenómeno de las colas pesadas es la válida, como veremos, en el caso de nuestro modelo de Lévy-Merton generalizado. Sobre el tema de las colas pesadas es interesante también consultar Castillo et al. (2001).

Nuestra pregunta ahora surge de la consideración siguiente: si en lugar de

mezclar 2 distribuciones mezclásemos 3, de forma que hubiese por ejemplo una  $N(0, 1)$  que rige el comportamiento del proceso la mayoría del tiempo, pongamos en un 90%, una normal  $N(0, 25)$  en un 5% y además una distribución normal que compensase el efecto de esta como podría ser una distribución  $N(0, \frac{1}{25})$ , también al 5%, ¿podríamos llegar a pensar que la introducción de la tercera distribución compensaría a la segunda llegando a tener una distribución normal sin colas anchas ni apuntamiento? Para responder a esta pregunta hemos simulado una distribución mezcla formada por 1000 observaciones donde 900 de las mismas pertenecen a una  $N(0, 1)$ , 50 a una  $N(0, 25)$  y 50 a una  $N(0, \frac{1}{25})$ , obteniendo el siguiente resultado,



Podemos ver claramente como no se compensan las distribuciones. Por lo tanto, esto nos lleva a pensar que incluso, nuestras series podrían llegar a estar formadas no por una mezcla de 2 distribuciones, sino por 3, 4 o más. De hecho el factor que nos determinará el paso de una distribución a otro serán los saltos y por lo tanto nuestros datos de incrementos van a ser al ...nal una mezcla de muchas distribuciones normales centradas con varianzas distintas.

Pasamos ahora a desarrollar el concepto de proceso con saltos y la modelización con este tipo de procesos. La idea de modelo con saltos en el campo de las Finanzas nace con Merton en 1976. En efecto, Merton, ante el reto de las colas pesadas y el excesivo apuntamiento planteó su famoso modelo que presentaremos

más adelante. Básicamente la idea que reside tras su modelo es la siguiente: si bien existe un comportamiento de fluctuaciones en los datos que podríamos considerar corriente, resultado de un flujo continuo de información convencional, existen afectaciones de ese comportamiento producido por la entrada en juego de nueva información no convencional, que acaba produciendo perturbaciones bruscas, saltos, en el comportamiento de las series.

En general, en un cierto instante y un contexto de estabilidad, se tiene un proceso que rige el comportamiento de la serie, bajo la hipótesis de la *HME*. Por lo tanto los incrementos son observaciones de una cierta distribución  $N(0, \sigma_1^2)$ . La aparición de información crítica en un cierto instante modifica bruscamente el nivel de precios. En nuestro caso, que generaliza el modelo de Merton, suponemos también que eventualmente se modifica la volatilidad y por lo tanto a partir de ese instante los incrementos de precios pasan a ser una muestra de una nueva distribución normal, distinta de la anterior:  $N(0, \sigma_2^2)$ .

La interpretación económica es clara. El funcionamiento de los mercados sigue un pauta, pero se pueden producir perturbaciones que hacen tambalear las expectativas normales produciendo una situación de incertidumbre que hace que pasemos a una nueva pauta. Sobre el tema de la incertidumbre en los mercados financieros es interesante consultar Ramírez (1994).

El modelo de Merton es un caso particular de proceso de Lévy. Estos procesos, inicialmente planteados por el probabilista P. Lévy en la década de los 30, son esencialmente procesos con incrementos independientes y estacionarios. Su estudio teórico está hoy muy desarrollado (ver por ejemplo Sato (1999)). El modelo que planteamos en este capítulo, que es en particular una generalización del modelo de Merton, no es en realidad un proceso de Lévy, ya que no supone incrementos estacionarios, pero sí un proceso aditivo (ver Sato (1999)) ya que sí supone incrementos independientes y el resto de condiciones de la definición de proceso de Lévy.

## 7.2. Modelización de saltos

Sea  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  el proceso que representa el tipo de interés, que recordemos que se trata de un proceso de precios logarítmicos. Sea  $P = \{P_t, t \geq 0\}$  el proceso de precios asociado, es decir,  $P_t = e^{X_t}, t \geq 0$ . La interpretación del modelo teórico que en este capítulo ajustaremos a nuestros datos se hará por etapas.

1. El proceso de Poisson como modelo de una sucesión de instantes de salto.
2. El modelo de Merton (1976).
3. La teoría de procesos de Lévy y procesos aditivos.
4. El modelo de Lévy-Merton generalizado.

### 7.2.1. El proceso de Poisson como modelo de una sucesión de instantes de salto

En toda evolución de precios se observan instantes en los que la variación es muy pronunciada. Parece razonable permitir la hipótesis de que en algunos instantes el precio salta. Es decir, se espera que un modelo que permite saltos va a poder describir mejor los datos que un modelo que exige trayectorias continuas.

Vamos a denotar por  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  los instantes de salto. La pregunta inmediata es: ¿Con qué ley de probabilidad se eligen estos instantes? En términos más financieros: ¿Cual es la ley de probabilidad que determine la llegada de noticias inesperadas que producen saltos en los precios?

Si las noticias llegan de manera independiente los tiempos entre saltos van a ser variables aleatorias *iid*,  $\Phi_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ ,  $j \geq 1$ . Vamos a denotar por  $\Phi$  una copia cualquiera de estas variables. La independencia de la llegada de noticias críticas hace razonable la hipótesis de no existencia de memoria, en el sentido que

$$P(\Phi > t + h \mid \Phi > t) = P(\Phi > h)$$

Como consecuencia de esta hipótesis la ley de cualquier  $\Phi_j = \tau_j - \tau_{j-1}$  es exponencial de parámetro  $\lambda$ , donde  $\lambda > 0$  y

$$\frac{1}{\lambda} = E[\Phi]$$

En esas condiciones, el proceso  $N_t$  que cuenta el número de saltos ocurridos hasta el instante  $t$  es un proceso de Poisson, es decir

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \geq 0$$

y

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \lambda t \\ \text{Var}[N_t] &= \lambda t \end{aligned}$$

Una presentación alternativa del proceso de Poisson es la siguiente: un proceso nulo en el origen, de incrementos independientes y estacionarios y con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda (cadlag) escalonadas con saltos unitarios.

Observemos por un lado que es la simple hipótesis de que el paso del tiempo mantiene constante la probabilidad de aparición de un salto lo que determina que el tiempo entre saltos tiene ley exponencial y por lo tanto el proceso de conjunto de los saltos es un proceso de Poisson.

Observemos por otro lado que el proceso de Poisson cumple las hipótesis del teorema 1 con la diferencia que se cambia la hipótesis de continuidad de las trayectorias por la de trayectorias escalonadas, cadlag y con saltos unitarios.

La hipótesis más general de suponer que las trayectorias son solo cadlag nos va a llevar a la familia de los procesos de Lévy que desarrollaremos en la sección 3 de esta introducción teórica a los modelos con saltos. Para un desarrollo más completo de estos resultados véase Chung (1983) y Bouleau (1988). Para una aplicación sobre el tema en el ámbito ...nanciero, véase Alegre y Mayoral (1997).

### 7.2.2. El modelo de Merton (1976)

Merton planteó el primer modelo con saltos para describir la evolución de un precio ...nanciero  $P = fP_t, t \geq 0$ . Su modelo se basa en los siguientes supuestos:

- Los precios saltan en instantes  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots$  siguiendo un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda > 0$ , es decir los tiempos entre saltos son variables *iid* con ley exponencial.
- En cada instante  $\tau_j$  se tiene  $P_{\tau_j} = P_{\tau_{j-1}} (1 + U_j)$  donde  $U_j \geq -1$  es el incremento relativo en  $P$  provocado por el salto en  $\tau_j$ . Las variables  $U_1, \dots, U_n, \dots$  son *iid* con una cierta ley de probabilidad  $\nu$ .
- En los intervalos  $[\tau_j, \tau_{j+1}[$  los precios evolucionan según un movimiento browniano geométrico, es decir:

$$dP_t = P_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

donde  $W$  es un movimiento browniano estándar.

Notemos que las  $U_1, \dots, U_n, \dots, N$  y  $W$  son independientes y podemos considerar  $F_t$  como la ...litración asociada al proceso  $P$ , tal que,

$$F_t := \sigma fW_s, N_s, s \leq t, \theta(U_j), j \leq 1, t \geq 0$$

donde  $\theta(x)$  es la función de Heaviside tal que

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \cdot N_t \\ 0 & \text{si } j > N_t \end{cases}$$

Bajo estas hipótesis el proceso  $P$  puede escribirse como

$$P_t = P_0 \exp \left( \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} (1 + U_j) \right) \quad t \geq 0$$

Si ahora  $X_t = \log P_t$  se tiene

$$X_t = x_0 + \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$$

donde las  $Z_j$  son variables aleatorias con una cierta ley de...nida sobre  $\mathbb{R}$ .

Finalmente, si  $Y_n = X_{n_i} - X_{n_i-1}$ , se tiene

$$Y_n = \mu + \sigma W_1 + \sum_{j > N_{n_i-1}} Z_j$$

En nuestro caso, observando los datos, podemos suponer  $\mu - \frac{\sigma^2}{2} = 0$  y por tanto

$$Y_n = \sigma W_1 + \sum_{j > N_{n_i-1}} Z_j$$

Dado que nuestra muestra de observaciones de  $Y$  es de datos diarios, podemos suponer la hipótesis que como mucho se produce un salto diario. Por lo tanto, nuestras  $Y_n$  son variables del tipo  $\sigma W_1 + Z\theta(\text{salto})$ , es decir,  $Y_n$  es una variable normal centrada con desviación típica  $\sigma$  si no hay salto en el día  $n$  o la suma de una normal centrada con desviación típica  $\sigma$  y una variable con ley  $\nu$  en el caso de haberse producido un salto en el día  $n$ . Notemos que la variación de precio esperada en el día  $n$  o bien es cero, si no ocurre ningún salto, o bien la esperanza de la ley  $\nu$ , en el caso que si ocurra.

En la sección 4, generalizaremos este resultado y supondremos que  $\sigma$  depende del intervalo  $[\tau_j, \tau_{j+1}[$ , para cada  $j$ .

### 7.2.3. La teoría de los procesos de Lévy y procesos aditivos

Tanto el modelo de Merton como el modelo que de...nitivamente vamos a plantear se inscriben en la teoría de los procesos de Lévy o de forma más genérica en la teoría de los procesos aditivos. La referencia que recomendamos para este tema es Sato (1999).



**Definición 7.1** Un proceso estocástico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  es un proceso de Lévy si satisface las siguientes condiciones.

- (1) Los incrementos son independientes.
- (2)  $X_0 = 0$  c.s.
- (3) Los incrementos son estacionarios.
- (4) El proceso es continuo en probabilidad, es decir, la probabilidad de que se produzca un salto en un instante determinado de antemano es nula.
- (5) Las trayectorias son cadlag.

Se dice que el proceso es aditivo si cumple las mismas hipótesis exceptuando la tercera, es decir si los incrementos no son estacionarios.

Como podemos observar los procesos de Lévy, que esencialmente son procesos con incrementos independientes y estacionarios, incluyen el movimiento browniano, el proceso de Poisson estándar, el proceso de Poisson compuesto, etc...

Un resultado clave en la teoría de los procesos de Lévy, es la fórmula de Lévy-Kinchine, que calcula la función característica de las variables  $X_t$  como

$$E e^{zX_t} = e^{t\psi(z)}$$

donde la función  $\psi$  recibe el nombre de exponente característico, y viene dada por la expresión

$$\psi(z) = \mu z + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zy\theta(y)) \nu(dy)$$

donde  $\theta(y)$  es la función de Heaviside tal que

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < 1 \\ 0 & \text{si } |y| \geq 1 \end{cases}$$

Además  $\mu$  y  $\sigma \geq 0$  son constantes reales, y  $\nu$  una medida positiva en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2} \nu(dy) < \infty$ , que recibe el nombre de medida de Lévy. Llegados a este punto, es importante destacar, que la función  $\psi$ , que siempre está definida para valores de  $z$  imaginarios puros, determina completamente la distribución de probabilidades del proceso. Tomando la notación de la teoría de las semimartingalas, identificaremos también cada distribución de un proceso Lévy con una tripleta  $(\mu, \sigma, \nu)$ . Notemos que esencialmente  $\mu$  determina la tendencia,  $\sigma$  la volatilidad de la parte continua y  $\nu$  la frecuencia y amplitud de los saltos. Podemos considerar también a los procesos de Lévy como la clase

menor de procesos, cerrada frente a la suma de procesos independientes, y los límites débiles, que contienen el movimiento browniano, y los procesos de Poisson compuestos. En el caso de suponer trayectorias continuas se obtiene como ya sabemos, el movimiento browniano que es exactamente el proceso de Lévy con tripleta  $(\mu, \sigma, 0)$ . El proceso de Poisson estándar de parámetro  $\lambda$ , se corresponde con la tripleta  $(0, 0, \lambda\delta_1)$ , donde  $\delta_1$  es la medida de Dirac concentrada en el 1.

### 7.2.4. El modelo de Lévy-Merton generalizado

Sea ahora  $X = fX_{t, t_0}$  nuestro proceso de precios logarítmicos y  $Y = fY_{n, n_0}$  la serie temporal de incrementos diarios. Nuestro modelo va a ser un caso particular de proceso aditivo. En efecto se trata del modelo de Merton, con  $\mu = 0$ , y permitiendo que entre salto y salto los precios logarítmicos evolucionen como  $\sigma W_t$ , con  $\sigma$  dependiendo del intervalo. Es decir en cada intervalo  $[\tau_j, \tau_{j+1}[$  se tiene un movimiento browniano  $\sigma_j W_t$ . En general podemos escribir nuestros precios  $P_j$  como

$$P_t = P_{\tau_{N_t}} \prod_{i=1}^{N_t} e^{\sigma_{N_t} \epsilon(W_{t_i} - W_{N_t})}$$

Donde

$$P_{\tau_{N_t}} = \prod_{j=0}^{N_t} e^{\sigma_j \epsilon(W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j})} \prod_{j=0}^{N_t} (1 + U_j)$$

con  $U_0 = 0$  y  $\tau_0 = 0$ .

Este modelo teórico, que se inscribe como hemos comentado en el esquema de los procesos aditivos, merecería un análisis teórico en profundidad. Estamos por lo tanto ante otra puerta abierta a futuras investigaciones.

## 7.3. Estimación de distribuciones de salto

### 7.3.1. Detección de los saltos en las series temporales

Como hemos destacado, con anterioridad, es muy importante detectar los saltos y en que momento se producen, ya que de esa forma encontraremos los puntos de cambio en las distribuciones. La metodología que seguiremos para este particular, se basa, fundamentalmente en la propuesta por Zam...rescu y Pontier (2001). Notemos que el problema no tiene una solución evidente o trivial. Una variación del 1% en los precios relativos es un salto en un contexto de baja volatilidad pero no lo es en un contexto de alta volatilidad. Por lo tanto, una

variación de los precios es o no un salto dependiendo del entorno en que se produce. En términos matemáticos, no se trata de buscar las variaciones de precios superiores a una cierta cantidad. El problema es más complejo. En términos cualitativos vamos a distinguir entre la magnitud del salto y su impacto.

El algoritmo que proponen se basa en el uso de la variación cuadrática del proceso de precios logarítmicos que puede expresarse como:

$$V_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^2 + \sum_{\tau_j < n} \phi_j^2 \tag{7.1}$$

sobre un periodo  $[n, n + h]$ , donde  $n$  evoluciona con el tiempo. Llamaremos variaciones deslizantes a las diferencias de variaciones cuadráticas siguientes:

$$V_n^h = V_{n+h} - V_n = \sum_{j=n}^{n+h-1} \sigma_j^2 + \sum_{n < \tau_j < n+h} \phi_j^2 \tag{7.2}$$

donde las  $\phi_j$  son las amplitudes de los saltos ocurridos en los instantes  $\tau_j$  con  $j \in [n, n + h]$ .

Para una visión detallada del concepto de variación cuadrática de un proceso estocástico así como para la deducción de la fórmula (7.1) se puede consultar Protter (1990).

Estimaremos las  $V_n^h$  mediante la utilización de los estadísticos

$$p_n^h = \sum_{i=n}^{n+h-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \tag{7.3}$$

Se sabe que estos estadísticos convergen en probabilidad uniformemente en el tiempo hacia la variación cuadrática. En nuestro caso ya que no podemos aumentar la frecuencia de las observaciones debemos tomar  $h$  grande de manera que 1 sea despreciable frente a  $h$ .

Cuando la variación deslizante  $p_n^h$  alcanza un salto con un impacto importante aumenta bruscamente de valor en relación a la anterior. Y este aumento se mantiene hasta que el salto desaparece de la ventana  $[n, n + h]$ .

Introducimos ahora la diferencia de dos varianzas deslizantes consecutivas observadas en el tiempo,

$$D_n^h = V_{n+1}^h - V_n^h \quad n = 1, \dots, N - (n + 1 + h)$$

Se tiene

$$D_n^h = \sum_{j=n+1}^{n+h} \sigma_j^2 - \sum_{j=n}^{n+h-1} \sigma_j^2 + \sum_{n+1 < \tau_j < n+h+1} \phi_{\tau_j}^2 - \sum_{n < \tau_j < n+h} \phi_{\tau_j}^2 \tag{7.4}$$

Observemos que si el primer salto  $\tau_1$ , aparece en el instante  $n + h$ . La probabilidad de que el segundo salto  $\tau_2$  se produzca antes de  $n + h + 1$  viene determinada por  $P[\tau_2 \leq \tau_1 + 1] = 1 - e^{-\lambda}$ . Por lo tanto, la probabilidad de observar dos saltos el mismo día es de orden  $\lambda$  que suponemos pequeño.

Observemos que el método es coherente con el planteamiento inicial de este apartado. En concreto este método de detección de saltos tiene en cuenta el entorno en que se producen. La cantidad  $D_n^h$  nos da la diferencia entre la variación de precios del día  $n + h$  y la del día  $n$ . Si se ha producido un salto importante en el día  $n + h$ , el valor que alcanza  $D_n^h$  es alto. A este valor lo llamaremos impacto del salto producido en  $n + h$ .

Por otro lado, como la volatilidad  $\sigma$ , es de un orden de amplitud bastante más pequeño que la altura de los saltos,  $\phi$ , la primera diferencia en la expresión (7.4) es completamente despreciable y se tiene,

$$D_n^h = O(\phi_\tau^2)$$

donde  $\tau$  representa aquí el instante de salto que acabamos de detectar. Como la probabilidad que aparezca un salto en el período  $[n + 2h, n + 2h + 1]$ , también es despreciable (es del orden de  $2\lambda$ ), se obtiene:

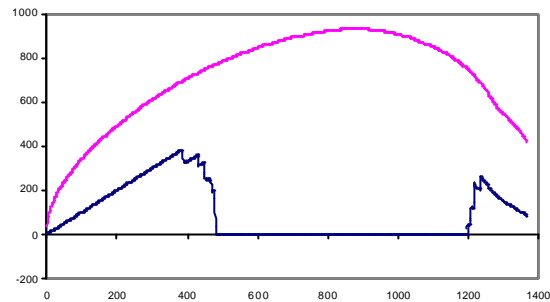
$$D_{n+2h}^h = O(\phi_\tau^2)$$

El algoritmo de detección es por lo tanto muy simple. La gráfica de las estimaciones de estas diferencias deslizantes  $D_n^h$  hace efectivamente aparecer una sucesión de picos de signo opuesto y que distan entre sí la duración  $h$ , indicando, así, el instante y la altura entre los saltos.

### 7.3.2. Aplicación práctica

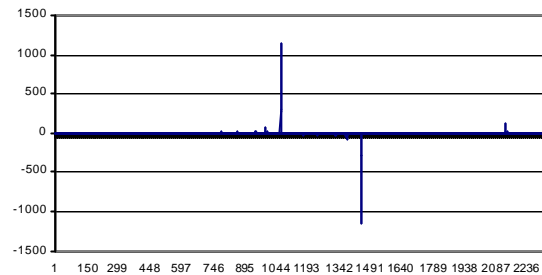
A continuación vamos a aplicar a nuestras series temporales lo expuesto.

En el caso particular de Zambrano y Pontier (2001) consideran  $h = 60$ , sin determinar de que forma particular debe obtenerse. Hecho que nos conduce a considerar el siguiente planteamiento con objeto de la elección del parámetro  $h$ : calcularemos  $D_n^h$  para todas las  $h$  comprendidas entre 2 y  $\frac{N}{2}$ , donde  $N$  es el número total de observaciones de que disponemos. El paso siguiente es calcular para cada  $h$  la media,  $\bar{D}_h$ , y la desviación estándar,  $s_{D_h}$  de  $D_n^h$ . A continuación, estableceremos una banda de selección de datos que vendrá determinada por  $\bar{D}_h \pm 2s_{D_h}$ , y contaremos aquellas  $D_n^h$  que salgan de esta banda. Como resultado, para el caso de la serie de incrementos a 1 día obtenemos la siguiente representación,



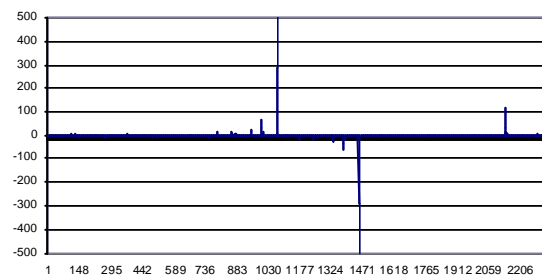
La curva superior del gráfico representa la desviación estándar de  $\hat{p}_n^h$  y la inferior representa el número de casos que salen de la banda de fluctuación considerada. Cabe destacar que tomaremos como valor de  $h$  el máximo de la curva que representa el número de casos que salen de la banda. En concreto, para el caso de la serie a 1 día este valor es  $h = 384$ . El porqué de la elección este valor para el parámetro puede hacerse evidente si nos fijamos en la función que representa el número de casos que salen de la banda, va creciendo, al igual que va creciendo la desviación estándar, ya que cada vez vamos cogiendo un mayor número de observaciones. Es decir, en el primer caso,  $h = 2$ , trabajamos con un intervalo de 2 elementos, con el segundo,  $h = 3$ , con 3 valores, y así sucesivamente. De hecho, al ir incluyendo más observaciones, hacemos que la desviación estándar también vaya creciendo, pero aunque esta crezca siguen apareciendo casos de observaciones que salen de la banda hasta llegar al valor  $h = 384$ . Parece ser que ese punto se correspondería con la situación donde la desviación estándar se ha ido creciendo cada vez más, hasta que ha alcanzado un nivel donde a partir de entonces no aparecen nuevos casos fuera de la banda. Por lo tanto creemos que es el punto donde se equilibran el máximo de puntos que pueden salir fuera de la banda con la desviación máxima que nos interesa considerar. En el gráfico hemos incluido también, la representación de la desviación, para hacer evidente el hecho de que cuando es muy alta, la banda de selección es tan alta que ninguna de las observaciones sale fuera. Por lo tanto el número de variables  $\hat{p}_n^h$  que se encuentren fuera del intervalo  $\bar{x}_h \pm 2\sigma_{V_h}$  es nulo.

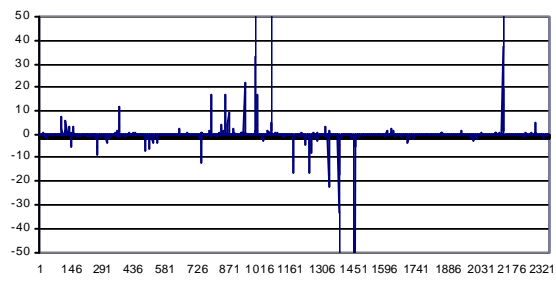
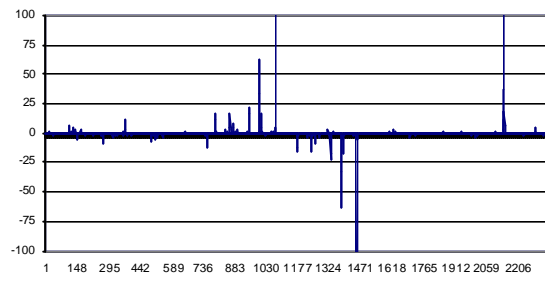
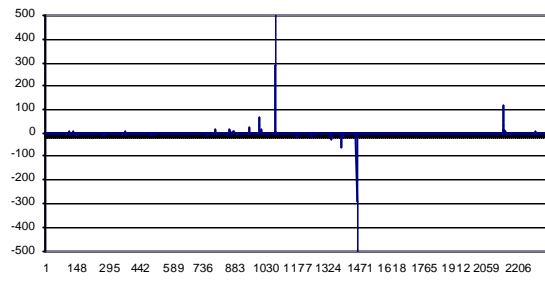
Tomando  $h = 384$  pasamos a calcular  $\hat{D}_n^h$ . Su representación gráfica es la siguiente:

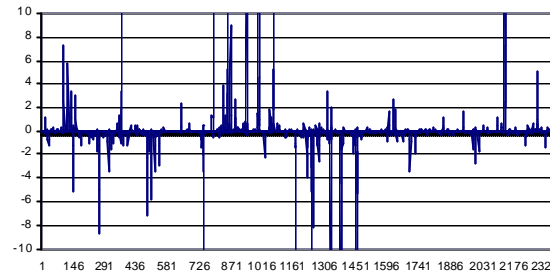


Podemos observar como aparecen una serie de saltos representados por esas columnas que destacan. Observemos que solo son signi...cativas de salto aquellas columnas situadas en la parte positiva, puesto que las producidas en la parte negativa son la consecuencia de las anteriores. Es decir, si nos ...jamos en la de...nición de  $D_n^h$  podemos observar como en la obtención de sus valores inter-vienen diversos puntos, en particular 384 observaciones, de forma que cuando avanzamos tomando  $n$  mayores vamos desplazando el intervalo de puntos que agregamos. En ese sentido cuando la sucesión de diferencias deslizantes alcanza un punto donde existe un salto, lo va a detectar representando una columna positiva, y cuando deja de considerarlo se traduce en el mismo efecto pero de signo contrario.

Destacar que el grá...co obtenido es un grá...co extremadamente complejo, puesto que si vamos ampliando la escala del eje de ordenadas podemos ver como van apareciendo más saltos,







La problemática que surge es evidente. Si queremos detectar saltos, ¿qué escala deberíamos considerar? En otras palabras, ¿qué valor de  $D_n^h$ , que llamaremos valor de impacto, vamos a tener en cuenta, para decir que observaciones son saltos y cuales no? Podríamos tomar, por ejemplo, aquellos valores de  $D_n^h$  mayores de 1000, o aquellos mayores de 100 o los mayores de 10. De hecho, vamos a tener en cuenta los 3 supuestos, para así tener más argumentos sobre los que poder realizar conclusiones.

Si analizamos el caso  $D_n^h > 1000$  detectamos 1 único salto en la serie. Destacar que no debemos confundir la serie  $D_n^h$  con la serie objeto de estudio.  $D_n^h$  nos sirve para detectar donde se encuentra un salto y cual es su amplitud. Para saber con que observación se corresponde debemos volver a la serie inicial y hallarla.

En el caso que nos ocupa detectamos como salto la observación 1452. Si tenemos en cuenta que el salto lo forman, en este caso concreto, las observaciones 1452 y 1453, extraemos ambas observaciones de la serie y pasamos a considerar dos series, una desde el día 385 hasta el día 1451 y otra desde el día 1454 hasta el 2733.

La comparación de sus características estadísticas viene dada por la tabla siguiente:

	Desviación estándar	Asimetría	Error típico	Curtosis	Error típico
Serie al completo	0.561515616	0.98124832	0.0468293	627.683886	0.09362443
Parte 1 [385-1451]	0.380353824	2.6504174	0.07491817	87.2999166	0.1496969
Parte 2 [1454-2733]	0.288237692	3.78206755	0.06835863	226.23296	0.13661125

Observemos que sorprendentemente pasamos de una curtosis de la serie original de 627.683886 a valores más moderados 87.2999166 y 226.23296. Por lo tanto la idea de considerar la serie original, tal y como apuntábamos en la introducción de este capítulo, no como un todo sino como un conglomerado de pequeñas



particiones normales, empieza a ser esperanzadora.

Si analizamos la normalidad en los intervalos obtenidos, usando el test de Kolmogorov-Smirnov, obtenemos los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
Serie al completo	16.07795906	0.000000
Parte 1 [385-1451]	8.756206512	0.000000
Parte 2 [1454-2733]	8.851005554	0.000000

Antes de extraer conclusiones, observemos que ocurre para el caso en el que consideremos  $D_n^h > 100$ . Obtendremos como resultado la detección de 4 saltos. Concretamente para las observaciones 1450, 1451, 1452 y 2520, pero realmente vamos a realizar 3 particiones, puesto que 1450, 1451 y 1452 son observaciones consecutivas y en lugar de considerar tres saltos consecutivos, consideraremos que se produce un solo salto pero de una magnitud que será el resultado de agregar esas 3 observaciones.

	Desviación estándar	Asimetría	Error típico	Curtosis	Error típico
Serie al completo	0.561515616	0.98124832	0.0468293	627.683886	0.09362443
Parte 1 [385-1449]	0.380532514	2.64919317	0.07495324	87.2156501	0.14976683
Parte 2 [1454-2519]	0.154947296	0.37705109	0.07488315	17.5883765	0.14962706
Parte 3 [2522-2733]	0.310162561	-1.5139906	0.16705755	29.9033284	0.33260144

Con respecto a la normalidad en los intervalos, hemos obtenido los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
Serie al completo	16.07795906	0.000000
Parte 1 [385-1449]	8.749938011	0.000000
Parte 2 [1454-2519]	5.824853897	0.000000
Parte 3 [2522-2733]	3.539364338	0.000000

Por último veamos que ocurre cuando identificamos como saltos aquellos valores de  $D_n^h > 10$ . Detectamos 16 saltos, concretamente para las observaciones 750, 1174, 1175; 1242, 1331, 1332, 1380, 1381, 1387, 1450, 1451, 1452, 2519, 2520, 2521 y 2524; sobre las que estableceremos una agrupación de saltos entre 1174 y 1175; 1331 y 1332; 1380, 1381 y 1387, incluiremos esta última al salto junto con las observaciones que separan la 1381 y 1387 ya que no tiene sentido establecer una partición que incluya únicamente 5 observaciones; 1450, 1451 y 1452; 2519, 2520, 2521 y 2524.

En resumen, estableceremos 8 particiones de la serie y 7 puntos de corte,

	Desviación estándar	Asimetría	Error típico	Curtosis	Error típico
Serie al completo	0.561515616	0.98124832	0.0468293	627.683886	0.09362443
Parte 1 [385-749]	0.212437546	0.70695074	0.12768944	19.7228992	0.25469538
Parte 2 [752-1173]	0.121080484	-0.30520981	0.11895841	14.5214552	0.23736303
Parte 3 [1177-1241]	0.319748853	1.73490538	0.29495267	11.0893408	0.58207234
Parte 4 [1244-1330]	0.457950501	0.25770706	0.25968092	5.16592123	0.51390091
Parte 5 [1334-1379]	0.151418879	-0.92095979	0.34314931	3.47799354	0.67439742
Parte 6 [1389-1449]	0.233327141	-2.41535909	0.30390218	10.0632658	0.59928801
Parte 7 [1454-2518]	0.154947296	0.37705109	0.07488315	17.5883765	0.14962706
Parte 8 [2526-2733]	0.208607597	1.29469533	0.16863374	18.3968815	0.33571138

Con respecto a la normalidad obtenemos,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
Serie al completo	16.07795906	0
Parte 1 [385-749]	3.873553276	0.00000000
Parte 2 [752-1173]	3.996753454	0.00000000
Parte 3 [1177-1241]	1.12683773	0.15773000
Parte 4 [1244-1330]	1.706160069	0.00592357
Parte 5 [1334-1379]	1.015751958	0.25349587
Parte 6 [1389-1449]	2.196522474	0.00000000
Parte 7 [1454-2518]	5.824853897	0.00000000
Parte 8 [2526-2733]	2.727284431	0.00000000

Como podemos comprobar, el hecho de ir realizando particiones sobre la serie hace que obtengamos particiones que siguen un ley normal. Como podemos destacar para los casos de la tercera partición (que empieza en la observación 1176 y termina en la 1241) y para la quinta (que empieza en la observación 1334 y termina en la 1379).

Con objeto de tener toda la serie particionada en intervalos normales, seguiremos con las demás particiones no normales, intentando detectar puntos de salto y para ello iremos reduciendo los valores de  $D_n^h$  que iremos considerando. En concreto el siguiente valor que vamos a tener en cuenta es  $D_n^h > 2$ . En particular:

- En la partición 1 [385-749] detectamos los saltos 489, 490, 508, 523, 543 que nos permitirán establecer las particiones 1.1 [385-488], 1.2 [492-507], 1.3 [510-522], 1.4 [525-542] y 1.5 [545-749]
- En la partición 2 [752-1173] detectamos los saltos 751 y 1028, que nos permiten definir 2.1 [753-1027] y 2.2 [1030-1173].
- En la partición 4 [1244-1330] detectamos los saltos 1243, 1253, 1254 y 1277. Destacar que los 3 primeros valores mencionados garantizarían un intervalo de 8 observaciones, puesto que vamos a considerar un mínimo de 10 observaciones para realizar el test de normalidad vamos a no tenerlos en cuenta

como generadores de un intervalo y pasaremos a considerarlos como componentes del salto. En definitiva, obtenemos los intervalos 4.1 [1256-1276] y 4.2 [1279-1330].

- En la partición 6 [1389-1449] no hemos hallado ningún punto de salto para  $D_n^h > 2$ . por lo que la dejamos para el siguiente paso.
- Para la partición 7 [1454-2518] detectamos los saltos 1454, 1700 y 2006 que nos permitirá obtener los intervalos 7.1 [1456-1699], 7.2 [1702-2005] y 7.3 [2008-2518].
- Para la partición 8 [2526-2733] obtenemos los saltos 2525 y 2672 que nos dividirán la partición en 8.1 [2527-2671] y 8.2 [2674-2733].

Una vez definidos los intervalos, si estudiamos la normalidad en cada uno de ellos obtenemos los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.1 [385-488]	1.03913033	0.230392
1.2 [492-507]	1.054177642	0.216383
1.3 [510-522]	0.522330225	0.947843
1.4 [525-542]	0.495215356	0.966923
1.5 [ 545-749]	2.589528084	0.000003
2.1 [753-1027]	3.100068569	0.000000
2.2 [1030-1173]	3.225171089	0.000000
4.1 [1256-1276]	1.700934052	0.006138
4.2 [1279-1330]	1.294140577	0.070194
7.1 [1456-1699]	2.85985589	0.000000
7.2 [1702-2005]	3.244105577	0.000000
7.3 [2008-2518]	3.755079269	0.000000
8.1 [2527-2671]	1.745516777	0.004514
8.2 [2674-2733]	1.597320557	0.012159

En conclusión, podemos aceptar la hipótesis de que las observaciones se distribuyen siguiendo una ley normal en los intervalos definidos como 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 4.2. Por tanto, no aceptaremos la normalidad para las particiones restantes. Será con estas últimas con las que seguiremos trabajando.

A continuación, trabajaremos únicamente sobre los intervalos que no pasan el test de normalidad y estudiaremos que ocurre si tomamos  $D_n^h > 1$  como valor de referencia a la hora de detectar saltos. En particular hayamos que,

- Para el intervalo 1.5 [545-749] detectamos los puntos 737, 742 y 743. Estos dos últimos puntos pasaremos a considerarlos, junto con las observaciones que los acompañan, como componentes del salto; ya que los intervalos

que conforman están compuestos por un número muy pequeño de observaciones, concretamente 6 y 5, y no tiene sentido pasar un test de normalidad. En definitiva, tendremos establecido el nuevo intervalo 1.5.1 [545-736].

- Para el intervalo 2.1 [753-1027] detectamos saltos en las observaciones 817 y 823, lo que nos permite definir los intervalos 2.1.1 [753-816] y 2.1.2 [825-1027].
- Para el 2.2 [1030-1173] detectamos los saltos 1067,1171,1172 y 1173 que nos permiten pasar a definir los subintervalos 2.2.1 [1030-1066] y 2.2.2 [1075-1170].
- Para el intervalo 4.1 [1256-1276] hallamos los puntos 1255 y 1273, que nos configuran un nuevo subintervalo 4.1.1 [1257-1272].
- Para el intervalo 6 [1389-1449], que habíamos reservado para el siguiente paso, detectamos como saltos las observaciones 1438 y 1444 que nos acortan superiormente el intervalo. No tendremos en cuenta los intervalos 1440-1443 ni 1446-1449, ya que están formados por un número muy pequeño de observaciones. considerándolos como componentes del salto. En definitiva, pasamos a definir el intervalo 6.1 [1389-1437].
- Para el 7.1 [1456-1699] detectamos los saltos 1472,1596 y 1665. Pasamos a definir los intervalos 7.1.1 [1456-1471], 7.1.2 [1474-1595], 7.1.3 [1598-1664] y 7.1.4 [1667-1699].
- 1724,1725 y 1986 para el 7.2 [1702-2005] pasamos al 7.2.1 [1702-1723], al 7.2.2 [1727-1985] y al 7.2.3 [1988-2005]
- En el intervalo 7.3 [2008-2518] encontramos los saltos 2017, 2236, 2237, 2325, 2484 y 2504. Pasaremos a definir los intervalos 7.3.1 [2019-2235], 7.3.2 [2239-2324], 7.3.3 [2327-2483], 7.3.4 [2486-2503] y 7.3.5 [2506-2518].
- Para el intervalo 8.1 [2527-2671] detectamos, únicamente, el salto 2649, que nos configura los intervalos 8.1.1 [2527-2648] y 8.1.2 [2651-2671].
- Para el intervalo 8.2 [2674-2733] detectamos saltos en los puntos 2675 y 2732. Pasamos a definir el intervalo 8.2.1 [2677-2731], en este caso lo único que realizamos es hacer el intervalo un poco más pequeño, ya que detectamos como saltos las observaciones 2675 y 2732 que nos acortan por ambos lados el intervalo.

Pasamos el test de normalidad sobre los intervalos de...nidos y obtenemos los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.5.1 [545-736]	1.836565256	0.002351
2.1.1 [753-816]	1.522307396	0.019415
2.1.2 [825-1027]	2.482854128	0.000009
2.2.1 [1030-1066]	1.067550182	0.204487
2.2.2 [1075-1170]	1.808230758	0.002891
4.1.1 [1257-1272]	0.765173554	0.601693
6.1 [1389-1437]	1.912142038	0.001334
7.1.1 [1456-1471]	1.510955811	0.020799
7.1.2 [1474-1595]	1.378439188	0.044733
7.1.3 [1598-1664]	1.89893055	0.001476
7.1.4 [1667-1699]	1.513490558	0.020483
7.2.1 [1702-1723]	1.064643025	0.207029
7.2.2 [1727-1985]	2.909709692	0.000000
7.2.3 [1988-2005]	0.654995859	0.784235
7.3.1 [2019-2235]	2.015031576	0.000595
7.3.2 [2239-2324]	1.230154514	0.096953
7.3.3 [2327-2483]	2.145628452	0.000201
7.3.4 [2486-2503]	0.73942709	0.644986
7.3.5 [2506-2518]	0.96408391	0.3105039
8.1.1 [2527-2648]	1.677379489	0.007197
8.1.2 [2651-2671]	1.056533456	0.214250
8.2.1 [2677-2731]	1.132069349	0.154051

Podemos destacar que los intervalos 2.2.1, 4.1.1, 7.2.1, 7.2.3, 7.3.2, 7.3.4, 7.3.5, 8.1.2 y 8.2.1 pasan el test de normalidad, por tanto con estos ya hemos acabado. Con el resto seguiremos, considerando ahora como saltos aquellas  $D_n^h > 0,2$ , en consecuencia,

- En el intervalo 1.5.1 [545-736] no detectamos ningún salto por lo que lo reservamos para la siguiente etapa.
- El intervalo 2.1.1 [753-816] detectamos un salto en el punto 794, por lo que deberemos considerar el intervalo 2.1.1.1 [753-793] y el intervalo 2.1.1.2 [796-816].
- Con respecto al 2.1.2 [825-1027], hemos detectado los saltos 895 y 951, con lo que pasaremos a de...nir el 2.1.2.1 [825-894], el 2.1.2.2 [897-950] y el 2.1.2.3 [953-1027].
- El intervalo 2.2.2 [1075-1170] detectamos los saltos 1130 y 1131, por lo tanto de...nimos 2.2.2.1 [1075-1129] y 2.2.2.2 [1133-1170].
- En el intervalo 6.1 [1389-1437] detectamos el salto 1432, que nos permite de...nir un intervalo 6.1.1 [1389-1431].

- En el intervalo 7.1.1 [1456-1471] no detectamos ningún salto por lo que, también, lo reservamos para la siguiente etapa.
- En el intervalo 7.1.2 [1474-1595] hallamos los saltos 1476 y 1477, que nos hacen acortar el intervalo por el extremo inferior, obteniendo un nuevo intervalo de...nido por 7.1.2.1 [1479-1595].
- En el intervalo 7.1.3 [1598-1664] 1618, 1636 y 1651 que nos con...guran los siguientes intervalos 7.1.3.1 [1598-1617], 7.1.3.2 [1620-1635], el 7.1.3.3 [1638-1650] y el 7.1.3.4 [1653-1664].
- En el intervalo 7.1.4 [1667-1699] hallamos el salto 1673 obteniendo un intervalo más pequeño 7.1.4.1 [1675-1699]
- En el intervalo 7.2.2 [1727-1985] hallamos los saltos 1740, 1782, 1841, 1882, 1897, 1953, 1983 y 1984, que nos con...guran los siguientes intervalos 7.2.2.1 [1727-1739], 7.2.2.2 [1742-1781], 7.2.2.3 [1784-1840], 7.2.2.4 [1843-1881], 7.2.2.5 [1884-1896], 7.2.2.6 [1899-1952] y 7.2.2.7 [1955-1982].
- En el intervalo 7.3.1 [2019-2235] hallamos los saltos 2152, 2194 y 2234, obteniendo 7.3.1.1 [2019-2151], 7.3.1.2 [2154-2193] y 7.3.1.3 [2196-2233]
- En el intervalo 7.3.3 [2327-2483] detectamos los saltos 2381, 2388, 2420, 2421, 2422 y 2442. Obteniendo 7.3.3.1 [2327-2380], 7.3.3.2 [2390-2419], 7.3.3.3 [2424-2441] y 7.3.3.4 [2444-2483].
- En el intervalo 8.1.1 [2527-2648] detectamos los saltos 2566 y 2630, obteniendo 8.1.1.1 [2527-2565], 8.1.1.2 [2568-2629] y 8.1.1.3 [2632-2648].

Realizando estas particiones y analizando la normalidad de los intervalos obtenemos los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
2.1.1.1 [753-793]	1.411506057	0.037196
2.1.1.2 [796-816]	0.992981791	0.277599
2.1.2.1 [825-894]	1.432886243	0.032936
2.1.2.2 [897-950]	1.942550182	0.001055
2.1.2.3 [953-1027]	1.597066283	0.012178
2.2.2.1 [1075-1129]	0.87122184	0.433666
2.2.2.2 [1133-1170]	1.192927837	0.116112
6.1.1 [1389-1431]	1.834413052	0.00238872
7.1.2.1 [1479-1595]	1.262869716	0.082364
7.1.3.1 [1598-1617]	1.391114473	0.041700
7.1.3.2 [1620-1635]	1.045018315	0.224831
7.1.3.3 [1638-1650]	1.105284095	0.173632
7.1.3.4 [1653-1664]	1.179649115	0.123658

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
7.1.4.1 [1675-1699]	1.219407201	0.102193
7.2.2.1 [1727-1739]	0.576864541	0.893355
7.2.2.2 [1742-1781]	1.566138625	0.014810
7.2.2.3 [1784-1840]	0.970634758	0.302816
7.2.2.4 [1843-1881]	1.009760737	0.259683
7.2.2.5 [1884-1896]	0.533501863	0.938410
7.2.2.6 [1899-1952]	1.315492868	0.062792
7.2.2.7 [1955-1982]	0.765998781	0.600313
7.3.1.1 [2019-2151]	1.685777664	0.006802
7.3.1.2 [2154-2193]	1.2739712	0.077854
7.3.1.3 [2196-2233]	0.654037595	0.785733
7.3.3.1 [2327-2380]	0.996712804	0.273540
7.3.3.2 [2390-2419]	1.260084629	0.083530
7.3.3.3 [2424-2441]	1.110132813	0.169949
7.3.3.4 [2444-2483]	1.103039384	0.175359
8.1.1.1 [2527-2565]	0.750124037	0.626959
8.1.1.2 [2568-2629]	1.670296311	0.007547
8.1.1.3 [2632-2648]	0.535808027	0.936349

Observando los resultados del test de normalidad de Kolmogorov-Smirnov, podemos destacar que la mayoría de los intervalos analizados son normales excepto los intervalos 2.1.1.1, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.1.2.3, 6.1.1, 7.1.3.1, 7.2.2.2, 7.3.1.1 y 8.1.1.2; con los que vamos a trabajar ahora, teniendo en cuenta un valor  $D_n^h > 0,1$ . Los resultados obtenidos son,

- En el intervalo 1.5.1 [545-736] hallamos los saltos 551, 642, 696 y 730. Obtenemos los intervalos 1.5.1.1 [553-641], 1.5.1.2 [644-695] y 1.5.1.3 [698-729].
- En el intervalo 2.1.1.1 [753-793] no hemos detectado ningún salto por lo que lo reservamos para el siguiente paso.
- En el intervalo 2.1.2.1 [825-894] Detectamos los saltos 834, 837 y 855. Obtenemos los intervalos 2.1.2.1.1 [839-854] y 2.1.2.1.2 [857-894].
- En el intervalo 2.1.2.2 [897-950] hallamos el salto 938 que me con...gurará los siguientes intervalos 2.1.2.2.1 [897-937] y 2.1.2.2.2 [940-950].
- En el intervalo 2.1.2.3 [953-1027] no hemos detectado ningún salto por lo que lo reservamos para el siguiente paso.
- En el intervalo 6.1.1 [1389-1431] no hemos detectado ningún salto por lo que lo reservamos para el siguiente paso.
- En el intervalo 7.1.1 [1456-1471] tampoco hemos detectado ningún salto por lo que lo reservamos para el siguiente paso.

- En el intervalo 7.1.3.1 [1598-1617] tampoco hemos detectado ningún salto por lo que lo reservamos para el siguiente paso.
- En el intervalo 7.2.2.2 [1742-1781] tampoco hemos detectado ningún salto por lo que lo reservamos para el siguiente paso.
- En el intervalo 7.3.1.1 [2019-2151] hemos detectado los saltos 2061, 2069, 2129, 2130 y 2138. Obtenemos los siguientes intervalos 7.3.1.1.1 [2019-2060], 7.3.1.1.2 [2071-2128] y 7.3.1.1.3 [2140-2151].
- En el intervalo 8.1.1.2 [2568-2629] hemos detectado el salto 2626 y configuramos el siguiente intervalo 8.1.1.2.1 [2568-2625].

Una vez determinados los nuevos intervalos, trabajamos sobre ellos obteniendo los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.5.1.1 [553-641]	1.361297011	0.049138
1.5.1.2 [644-695]	0.879710913	0.421345
1.5.1.3 [698-729]	1.125329137	0.158804
2.1.2.1.1 [839-854]	0.972017646	0.301211
2.1.2.1.2 [857-894]	0.796838522	0.549295
2.1.2.2.1 [897-937]	1.933771253	0.001130
2.1.2.2.2 [940-950]	0.670773268	0.759174
7.3.1.1.1 [2019-2060]	1.335879445	0.0563585
7.3.1.1.2 [2071-2128]	0.944477022	0.334314
7.3.1.1.3 [2140-2151]	0.688852966	0.729703
8.1.1.2.1 [2568-2625]	1.107965827	0.171587

La mayoría de los intervalos analizados pasan el test de normalidad. Trabajaremos por tanto, con el 1.5.1.1 [553-641] y el 2.1.2.2.1 [897-937] a los que les agregaremos aquellos que habíamos postpuesto para el siguiente paso, concretamente los intervalos 2.1.1.1 [753-793], 2.1.2.3 [953-1027], 6.1.1 [1389-1431], 7.1.1 [1456-1471], 7.1.3.1 [1598-1617] y 7.2.2.2 [1742-1781], con objeto de detectar como saltos aquellos valores que cumplan  $D_n^h > 0,05$ .

- En el intervalo 1.5.1.1 [553-641] no detectamos nada pasa al siguiente paso.
- En el intervalo 2.1.1.1 [753-793] detectamos los saltos 756 y 765. Determinamos el intervalo 2.1.1.1.1 [767-793].
- En el intervalo 2.1.2.2.1 [897-937] no detectamos nada pasa al siguiente paso.



- En el intervalo 2.1.2.3 [953-1027] detectamos los saltos 959 y 1013, como consecuencia de...nimos los intervalos 2.1.2.3.1 [961-1012] y 2.1.2.3.2 [1015-1027].
- En el intervalo 6.1.1 [1389-1431] 1390, 1392, 1410 y 1431, que nos permite de...nir 6.1.1.1 [1394-1409] y 6.1.1.2 [1412-1430].
- En el intervalo 7.1.1 [1456-1471] detectamos el salto 1464, con lo que pasaríamos a de...nir los intervalos 7.1.1.1 [1456-1463] y 7.1.1.1 [1466-1471]. Pero como ambos están constituidos por un número de observaciones inferior a 10 los vamos a desestimar y pasaremos a tomar el intervalo 7.1.1 como componente de salto.
- En el intervalo 7.1.3.1 [1598-1617] detectamos los saltos 1603, 1615 y con...gurando el siguiente intervalo 7.1.3.1.1 [1605-1614].
- En el intervalo 7.2.2.2 [1742-1781] hallamos el salto 1775 y con...gurando el siguiente intervalo 7.2.2.2.1 [1742-1774].

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
2.1.1.1.1 [767-793]	0.749712348	0.627652
2.1.2.3.1 [961-1012]	1.478313088	0.025282
2.1.2.3.2 [1015-1027]	1.301364779	0.067611
6.1.1.1 [1394-1409]	0.759205341	0.611694
6.1.1.2 [1412-1430]	0.628724277	0.824123
7.1.3.1.1 [1605-1614]	0.537017465	0.935253
7.2.2.2.1 [1742-1774]	1.566849947	0.0147444

De todas las anteriores, no pasan el test de normalidad el intervalo 2.1.2.3.1 [961-1012] y el intervalo 7.2.2.2.1 [1742-1774]. A los que añadimos el intervalo 1.5.1.1 [553-641] y el intervalo 2.1.2.2.1 [896-937] con objeto de detectar nuevos saltos. A diferencia de lo considerado hasta ahora, vamos a trabajar con los restantes por separado, ya que son pocos y la intención es no prolongar más este análisis.

- Para el intervalo 1.5.1.1 [553-641] consideramos saltos aquellos valores que cumplan  $D_n^h > 0,03$ . Detectando un salto en la observación 576, con lo que podemos de...nir los intervalos 1.5.1.1.1 [553-575] y 1.5.1.1.2 [578-641].
- Para el intervalo 2.1.2.2.1 [897-937] consideramos saltos aquellos valores que cumplan  $D_n^h > 0,0025$ . Detectando un salto en la observación 917, con lo que podemos de...nir los intervalos 2.1.2.2.1.1 [896-916] y 2.1.2.2.1.2 [919-937].

- Para el intervalo 2.1.2.3.1 [961-1012] consideramos saltos aquellos valores que cumplan  $D_n^h > 0,03$  detectando saltos en las observaciones 973 y 985, con lo que podemos definir los intervalos 2.1.2.3.1.1 [961-972], 2.1.2.3.1.2 [975-984] y 2.1.2.3.1.3 [987-1012].
- Para el intervalo 7.2.2.2.1 [1742-1774] consideramos saltos aquellos valores que cumplan  $D_n^h > 0,01$  detectando un salto en la observación 1753, con lo que podemos definir los intervalos 7.2.2.2.1.1 [1742-1752] y 7.2.2.2.1.2 [1755-1774].

Los resultados obtenidos de aplicar el test de normalidad a los intervalos definidos es el siguiente,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.5.1.1.1 [553-575]	0.678804159	0.746169
1.5.1.1.2 [578-641]	1.260723114	0.083261
2.1.2.2.1.1 [896-916]	1.043464184	0.226289
2.1.2.2.1.2 [919-937]	1.183492064	0.121434
2.1.2.3.1.1 [961-972]	0.900660694	0.391819
2.1.2.3.1.2 [975-984]	0.462518007	0.983042
2.1.2.3.1.3 [987-1012]	0.667189002	0.764928
7.2.2.2.1.1 [1742-1752]	1.351719737	0.051759
7.2.2.2.1.2 [1755-1774]	0.81768477	0.5156561

Donde normalmente todos los subintervalos pasan el test de normalidad.

En resumidas cuentas podemos decir que la serie temporal de incrementos del tipo de interés a 1 día está formada por un conglomerado de distribuciones Normales tal y como hemos visto. Para analizar recogemos en las siguientes representaciones un esquema gráfico que resumiría el proceso seguido anteriormente.

	D>10	D>2	D>1	D>0.2	D>0.1	D>0.05	D>0.03	D>0.01	D>0.0025
1	[385-749]								
1.1		[385-488]							
1.2		[492-507]							
1.3		[510-522]							
1.4		[525-542]							
1.5		[545-749]							
1.5.1			[545-736]	----->					
1.5.1.1					[553-641]	----->			
1.5.1.1.1							[553-575]		
1.5.1.1.2							[578-641]		
1.5.1.2					[644-695]				
1.5.1.3					[698-729]				

	D>10	D>2	D>1	D>0.2	D>0.1	D>0.05	D>0.03	D>0.01	D>0.0025
2	[762-1173]								
2.1		[753-1027]							
2.1.1			[753-816]						
2.1.1.1				[753-793]	----->				
2.1.1.1.1						[767-793]			
2.1.1.2				[796-816]					
2.1.2			[825-1027]						
2.1.2.1				[825-894]					
2.1.2.1.1						[839-854]			
2.1.2.1.2						[857-894]			
2.1.2.2				[897-950]					
2.1.2.2.1					[897-937]	----->	----->	----->	
2.1.2.2.1.1									[897-916]
2.1.2.2.1.2									[919-937]
2.1.2.2.2					[940-950]				
2.1.2.3				[953-1027]	----->				
2.1.2.3.1						[961-1012]			
2.1.2.3.1.1							[961-972]		
2.1.2.3.1.2							[975-984]		
2.1.2.3.1.3							[987-1012]		
2.1.2.3.2						[1015-1027]			
2.2		[1030-1173]							
2.2.1			[1030-1066]						
2.2.2			[1075-1170]						
2.2.2.1				[1075-1129]					
2.2.2.2				[113-1170]					
3	[1177-1241]								
4	[1244-1330]								
4.1		[1256-1276]							
4.1.1			[1257-1272]						
4.2		[1279-1330]							
5	[1334-1379]								
6	[1389-1449]	----->							
6.1			[1389-1437]						
6.1.1				[1389-1431]	----->				
6.1.1.1						[1394-1409]			
6.1.1.2						[1412-1430]			
7	[1454-2518]								
7.1		[1456-1699]							
7.1.1			[1456-1471]	----->	----->	X			
7.1.2			[1474-1595]						
7.1.2.1				[1479-1595]					
7.1.3			[1598-1664]						
7.1.3.1				[1598-1617]	----->				
7.1.3.1.1						[1605-1614]			
7.1.3.2				[1620-1635]					
7.1.3.3				[1638-1650]					
7.1.3.4				[1653-1664]					
7.1.4			[1667-1699]						
7.1.4.1				[1675-1699]					
7.2		[1702-2005]							
7.2.1			[1702-1723]						
7.2.2			[1727-1985]						
7.2.2.1				[1727-1739]					
7.2.2.2				[1742-1781]	----->				
7.2.2.2.1						[1742-1774]	----->		
7.2.2.2.1.1								[1742-1752]	
7.2.2.2.1.2								[1755-1774]	
7.2.2.3				[1784-1840]					
7.2.2.4				[1843-1881]					
7.2.2.5				[1884-1896]					
7.2.2.6				[1899-1952]					
7.2.2.7				[1955-1982]					
7.2.3			[1988-2005]						

	D>10	D>2	D>1	D>0.2	D>0.1	D>0.05	D>0.03	D>0.01	D>0.0025
7.3		[2008-2518]							
7.3.1			[2019-2235]						
7.3.1.1				[2019-2151]					
7.3.1.1.1					[2019-2060]				
7.3.1.1.2					[2071-2128]				
7.3.1.1.3					[2140-2151]				
7.3.1.2				[2154-2193]					
7.3.1.3				[2196-2233]					
7.3.2			[2239-2324]						
7.3.3			[2327-2483]						
7.3.3.1				[2327-2380]					
7.3.3.2				[2390-2419]					
7.3.3.3				[2424-2441]					
7.3.3.4				[2444-2483]					
7.3.4			[2486-2503]						
7.3.5			[2506-2518]						
8	[2526-2733]								
8.1		[2527-2671]							
8.1.1			[2527-2648]						
8.1.1.1				[2527-2565]					
8.1.1.2				[2568-2629]					
8.1.1.2.1					[2568-2625]				
8.1.1.3				[2632-2648]					
8.1.2			[2651-2671]						
8.2		[2674-2733]							
8.2.1			[677-2731]						

Por último, en la siguiente gráfica recogemos los intervalos en los que quedaría seccionada la serie. Destacar que recogemos el impacto y la amplitud de los saltos. Respecto a la amplitud nos hemos limitado a considerar que venía determinada, por la diferencia entre el punto donde detectamos el salto y el siguiente. Para aquellos casos en los que interviene más de un punto hemos considerado la magnitud del salto como la suma de todos ellos. Esto es razonable ya que el valor esperado de las vibraciones normales es nulo y por lo tanto ante la presencia de un salto podemos estimar su amplitud como exactamente la variación observada.

Parece lógico considerar que la volatilidad del intervalo dependerá de la magnitud del impacto. En ese sentido, presentamos la volatilidad estimada para cada uno de los intervalos. La intención es comprobar si realmente podemos establecer tal tipo de relación.

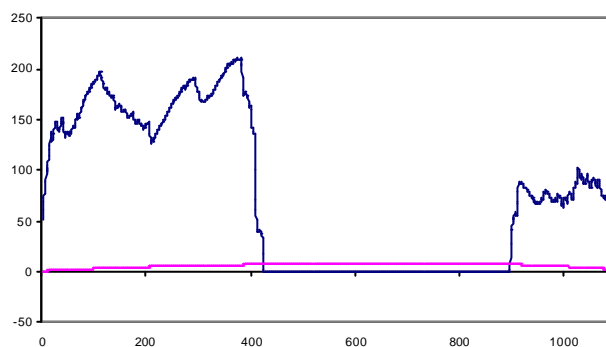
	Intervalo	Salto	Impacto	$\sigma$ del intervalo
1	385-488	-----	2	0.157971451
2	492-507	0.619	2	0.279921775
3	510-522	-0.286	2	0.13990363
4	525-542	0.133	2	0.18777152
5	553-575	-0.134	0.03	0.062633762
6	578-641	0.122	0.03	0.049783021
7	644-695	-0.009	0.1	0.048515003
8	698-729	0.014	0.1	0.030315545
9	767-793	-0.255	0.05	0.024537488
10	796-816	-0.635	0.2	0.110278954
11	839-854	-0.646	0.1	0.076191617
12	857-894	-0.151	0.1	0.074220884
13	897-916	-0.007	0.0025	0.028979848
14	919-937	-0.003	0.0025	0.016359985
15	940-950	-0.014	0.1	0.050116047
16	961-972	0.23	0.03	0.024170324
17	975-984	0.018	0.03	0.019453934
18	987-1012	0.093	0.03	0.026787282
19	1015-1027	0.055	0.05	0.060199881
20	1030-1066	-0.043	1	0.097118593
21	1075-1129	0.21	0.2	0.060030015
22	1133-1170	0.551	0.2	0.03878695
23	1177-1241	0.259	10	0.322120267
24	1257-1272	-1.111	1	0.117002261
25	1279-1330	1.494	2	0.375945005
26	1334-1379	-4.476	10	0.143602881
27	1394-1409	-0.408	0.05	0.070706789
28	1412-1430	-0.332	0.05	0.048643349
29	1479-1595	-1.038	0.2	0.088189218
30	1605-1614	0.008	0.05	0.018480019
31	1620-1635	0.09	0.2	0.095102401
32	1638-1650	0.608	0.2	0.208100691
33	1653-1664	-0.005	0.2	0.084198719
34	1675-1699	-0.026	0.2	0.088281331
35	1702-1723	0.029	1	0.101303197
36	1727-1739	0.126	0.2	0.048054723
37	1742-1752	0.437	0.01	0.094689253
38	1755-1774	0.004	0.01	0.038071228
39	1784-1840	0.392	0.2	0.074171126
40	1843-1881	0.645	0.2	0.06360983
41	1884-1896	0.316	0.2	0.087428506
42	1899-1952	0.048	0.2	0.061906415
43	1955-1982	0.049	0.2	0.071911201
44	1988-2005	0.166	1	0.087643142
45	2019-2060	0.172	0.1	0.115342997
46	2071-2128	-0.04	0.1	0.062797315
47	2140-2151	0.106	0.1	0.073249832
48	2154-2193	-0.008	0.2	0.101578958
49	2196-2233	0.008	0.2	0.099680599
50	2239-2324	-0.032	1	0.08442194
51	2327-2380	-0.175	0.2	0.059006449
52	2390-2419	0.165	0.2	0.115595887
53	2424-2441	-0.161	0.2	0.0934858
54	2444-2483	-0.075	0.2	0.109895976
55	2486-2503	-0.059	1	0.103587306
56	2506-2518	-0.134	1	0.057672373
57	2527-2565	-0.22	0.2	0.078719801
58	2568-2625	-0.147	0.1	0.043872998
59	2632-2648	0.474	0.2	0.186695312
60	2651-2671	-0.306	1	0.135596952
61	2677-2731	-0.261	1	0.166423166

Podemos observar ciertos patrones, aunque no del todo evidentes. Por ejemplo se puede observar de forma intuitiva que saltos de gran impacto se asocian a volatilidades altas en los periodos inmediatamente posteriores.

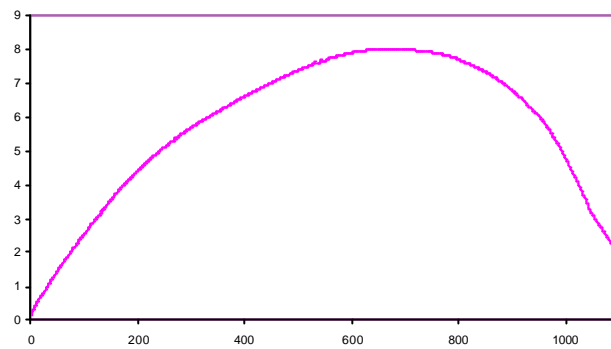
En definitiva este análisis reafirma nuestra hipótesis de que el proceso subyacente tras la serie de incrementos del tipo de interés a 1 día, viene determinado por la coexistencia de diversas leyes normales. De forma que, si estudiamos la serie de forma global obtendremos como resultado que la serie no se comporta siguiendo una ley normal, como puede observarse en los histogramas de frecuencias de la serie de incrementos. Pero por el contrario, si detectamos los momentos de cambio, o saltos, y realizamos un análisis local, vemos como entonces sí que podemos decir que el proceso podría modelizarse utilizando leyes normales locales y, de forma global, mediante el proceso de Lévy-Merton generalizado propuesto.

Para contrastar los resultados obtenidos con otra serie temporal, nos hemos propuesto a aplicar el mismo análisis al caso extremo de la serie de incrementos a 1 año.

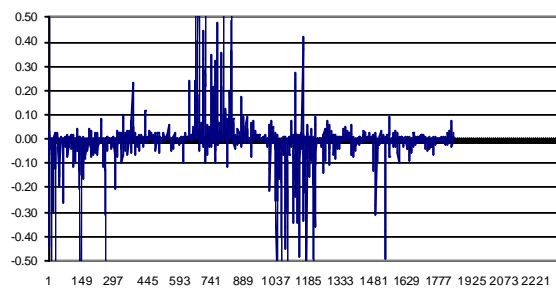
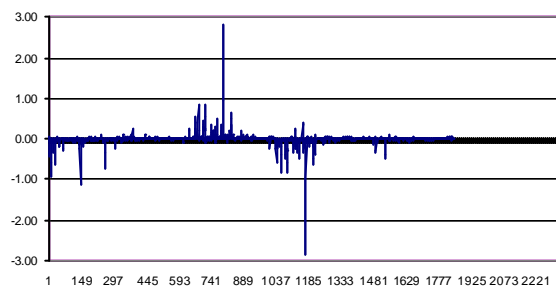
Por lo tanto, en primer lugar representaremos y calcularemos las  $\hat{\sigma}_n^h$  para todas las  $h$  comprendidas entre 2 y  $\frac{\Delta x}{2}$ . A continuación, estableceremos la banda de selección de  $\hat{\sigma}_n^h$  y contaremos aquellos datos de  $\hat{\sigma}_n^h$  que salgan de esta banda. Como resultado, obtenemos la siguiente representación,



Destacar que a diferencia del caso a 1 día la varianza de  $\hat{\sigma}_n^h$  es mucho más pequeña, por lo que nos vemos obligados a representarla con mayor detalle en un nuevo gráfico,



Cabe destacar que tomaremos como valor de  $h$  el máximo de la curva que representa el número de casos que salen de la banda. Concretamente, hallamos el punto máximo en el punto 211 que se corresponde con un valor de  $h = 375$ . Tomando ese valor de  $h$  pasamos a calcular  $D_n^h$  y la representaremos gráficamente, obteniendo el siguiente resultado,



Si recordamos para la serie 1 día nuestro análisis real empezó considerando

$D_n^h > 10$ , en este caso y debido a que las gráficas de  $D_n^h$  no alcanzan valores tan altos (destacar que el primer gráfico de la serie a 1 día tenían un rango de ordenadas [-1500, 1500] mientras que en el caso de la serie a 1 año vemos que es de [-3, 3]) vamos a empezar considerando  $D_n^h > 0,3$ .

Como resultado detectamos 22 puntos de salto: 1039, 1054, 1055, 1075, 1076, 1085, 1086, 1114, 1132, 1143, 1159, 1171, 1172, 1206, 1207, 1210, 1529 y 1530, que nos estructuran los intervalos: 1 [376-1038], 2 [1041-1053], 3 [1057-1074], 4 [1088-1113], 5 [1116-1131], 6 [1145-1158], 7 [1174-1205], 8 [1212-1528] y 9 [1532-2219].

Destacar, como hicimos para la serie a 1 día, que no consideramos aquellos intervalos compuestos por menos de 10 datos, ya que consideramos que el número mínimo para realizar el contraste ha de ser 10 observaciones.

Si analizamos la normalidad en los intervalos presentados, obtenemos el siguiente resultado,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1 [376-1038]	2.335787535	0.000036
2 [1041-1053]	0.510644615	0.956726
3 [1057-1074]	0.355054826	0.999603
4 [1088-1113]	0.596597254	0.868756
5 [1116-1131]	0.448061943	0.988007
6 [1145-1158]	0.873819709	0.429874
7 [1174-1205]	0.558967829	0.913528085
8 [1212-1528]	1.701489329	0.006115
9 [1532-2219]	1.357923031	0.050048

Como contra punto a lo que hemos observado en el caso de 1 día, podemos observar como prácticamente aceptamos, después de las primeras particiones, que las series son normales.

Por consiguiente, únicamente nos quedará trabajar con los intervalos 1 [376-1038] y 8 [1212-1528].

Para los que intentaremos hallar los saltos que cumplan  $D_n^h > 0,1$ . Así,

- Para el intervalo 1 [376-1038] detectamos los saltos 756, 813, 814, 1010 y 1011, permitiendo definir los subintervalos 1.1 [376-755], 1.2 [758-812], 1.3 [816-1009] y 1.4 [1013-1037].
- Para el intervalo 8 [1212-1528], hallamos los saltos 1253, 1493 y 1494, definiendo los siguientes subintervalos 8.1 [1212-1252], 8.2 [1255-1492] y 8.3 [1496-1528].

Analizando respecto a la normalidad estos subintervalos obtenemos,



	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.1 [376-755]	1.736066699	0.004821
1.2 [758-812]	0.60037756	0.863783
1.3 [816-1009]	1.38739121	0.042571
1.4 [1013-1037]	0.875939012	0.426795
8.1 [1212-1252]	0.456955433	0.985096931
8.2 [1255-1492]	1.427951336	0.033879399
8.3 [1496-1528]	0.786281228	0.566616178

En consecuencia podemos continuar trabajando sobre los subintervalos 1.1, 1.3 y 8.2. Con los que intentaremos hallar los saltos teniendo en cuenta  $D_n^h > 0,075$ ,

- 1.1 [376-755] 612, 713, 714 y 750, configurando las particiones 1.1.1 [376-611], 1.1.2 [614-712] y 1.1.3 [716-749].
- 1.3 [816-1009] no detectamos nada, por lo que lo dejamos para el siguiente paso.
- 8.2 [1255-1492] 1261, 1276 y 1309, configurando las particiones 8.2.1 [1263-1275], 8.2.2 [1278-1308] y 8.2.3 [1311-1492].

Si analizamos la normalidad obtenemos los siguientes resultados,

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.1.1 [376-611]	0.964945078	0.309486
1.1.2 [614-712]	1.244324207	0.090389
1.1.3 [716-749]	0.513233304	0.954844
8.2.1 [1263-1275]	0.500141919	0.963854
8.2.2 [1278-1308]	0.781303465	0.574840
8.2.3 [1311-1492]	1.266545534	0.080847

Con lo que tenemos perfectamente definidos con distribuciones Normales todos los intervalos, excepto para el que hemos dejado pendiente el 2.5. Para trabajar con él deberemos considerar  $D_n^h > 0,05$ .

- 1.3 [816-1009] detectamos el punto 922 con los que configuramos las particiones 1.3.1 [816-921] y 1.3.2 [924-1009].

	Z de Kolmogorov-Smirnoff	P-value
1.3.1 [816-921]	1.05580318	0.214909
1.3.2 [924-1009]	0.964858532	0.309588

Finalmente, tenemos la de incrementos del tipo de interés a 1 año particionada en distribuciones normales la serie . Nótese la facilidad con la que hemos alcanzado la meta en comparación con el caso a 1 día.

De forma esquemática el proceso seguido se puede observar en la siguiente gráfica,

	D>0.3	D>0.1	D>0.075	D>0.05
<b>1</b>	[376-1038]			
<b>1.1</b>		[376-755]		
<b>1.1.1</b>			[376-611]	
<b>1.1.2</b>			[614-712]	
<b>1.1.3</b>			[716-749]	
<b>1.2</b>		[758-812]		
<b>1.3</b>		[816-1009]		
<b>1.3.1</b>				[816-921]
<b>1.3.2</b>				[924-1009]
<b>1.4</b>		[1013-1037]		
<b>2</b>	[1041-1053]			
<b>3</b>	[1057-1074]			
<b>4</b>	[1088-1113]			
<b>5</b>	[1116-1131]			
<b>6</b>	[1145-1158]			
<b>7</b>	[1174-1205]			
<b>8</b>	[1212-1528]			
<b>8.1</b>		[1212-1252]		
<b>8.2</b>		[1255-1492]		
<b>8.2.1</b>			[1263-1275]	
<b>8.2.2</b>			[1278-1308]	
<b>8.2.3</b>			[1311-1492]	
<b>8.3</b>		[1496-1528]		
<b>9</b>	[1532-2219]			

En la siguiente gráfica recogemos los 19 intervalos en los que quedaría seccionada la serie. Destacar que al igual que en el caso de 1 día, podemos ver como en general, impactos grandes se acompañan de intervalos posteriores con volatilidad alta y pequeños impactos con intervalos posteriores con volatilidad pequeña.

	Intervalo	Salto	Impacto	$\sigma$ del intervalo
1	[376-611]	-----	0.075	0.058329392
2	[614-712]	-0.367	0.075	0.052129602
3	[716-749]	-0.394	0.075	0.093376378
4	[758-812]	-0.566	0.1	0.057542594
5	[816-921]	-0.227	0.05	0.056487412
6	[924-1009]	-0.055	0.05	0.043544069
7	[1013-1037]	0.32	0.1	0.07178087
8	[1041-1053]	0.087	0.3	0.217871669
9	[1057-1074]	-0.673	0.3	0.127274137
10	[1088-1113]	0.524	0.3	0.132786515
11	[1116-1131]	-0.349	0.3	0.183387931
12	[1145-1158]	-0.304	0.3	0.109990634
13	[1174-1205]	-1.39	0.3	0.132807996
14	[1212-1252]	-0.337	0.1	0.077997045
15	[1263-1275]	0.048	0.075	0.05370038
16	[1278-1308]	-0.124	0.075	0.054992179
17	[1311-1492]	-0.05	0.075	0.068605308
18	[1496-1528]	0.807	0.1	0.095454267
19	[1532-2219]	0.544	0.3	0.055669006

Para analizar con la parte analítica nos quedaría pendiente el cálculo del tiempo medio entre saltos. Con este objeto, para cada valor de impacto procederemos a agregar las diferentes distancias producidas entre salto y salto y dividiremos por el número de casos sumados. En consecuencia para la serie a 1 día obtenemos,

Valor de impacto	Tiempo medio entre saltos
2	158.1666667
1	152.8
0.2	61.94594595
0.1	49.82608696
0.05	44.94117647
0.03	40.92857143
0.01	39.51724138
0.0025	38.2

Para la serie a 1 año obtenemos,

Valor de impacto	Tiempo medio entre saltos
0.3	81.83333333
0.1	77.4
0.075	61.2
0.05	54

Por último, destacar que hemos pasado el test de Ljung-Box sobre las particiones anuales de ambas series, aceptando sin lugar a dudas la incorrelación de los incrementos.

## 7.4. Comentarios sobre los resultados obtenidos

La base de este capítulo es el llamado modelo con saltos de Merton. En este modelo se supone que las variaciones de precios son de dos tipos: vibraciones normales y vibraciones extraordinarias. Las vibraciones normales vienen determinadas por un proceso de Wiener, con media y volatilidad constantes. Las extraordinarias vienen dadas por un proceso de Poisson compuesto de intensidad  $\lambda$  y con la amplitud de los saltos determinada por una cierta medida de probabilidad. Este modelo es un caso particular de proceso de Lévy, familia de procesos hoy ya bastante tratada en la literatura matemática.

En el capítulo nos planteamos una generalización del modelo de Lévy, considerando una varianza variable, pero constante entre salto y salto.

Así el problema de ajuste de un modelo de Lévy-Merton generalizado a nuestros datos se reduce a los siguientes problemas:

1. Detección de los saltos y la intensidad con que aparecen.
2. Detección de la amplitud de los saltos.
3. Detección de la volatilidad de la vibración normal entre salto y salto.

En cuanto a la detección de los instantes de salto notemos que en el fondo el hecho de estimar solo un número finito de saltos nos permite suponer que las posibles amplitudes de los saltos pertenecen a un rango finito, y siguiendo a León et al. (2002), entonces podemos suponer que en realidad tenemos una colección finita de procesos de Poisson estándar, uno para cada amplitud.

Como se observa en el estudio realizado en este capítulo tenemos toda una estructura de procesos de Poisson subyacente: un proceso de Poisson para cada amplitud de salto y también, como consecuencia un proceso de Poisson para cada rango de amplitudes de salto. En este contexto el problema de estimar la ley que rige la amplitud de los saltos del proceso de Poisson compuesto original, pierde importancia. Aunque evidentemente puede plantearse. En nuestro caso no hemos entrado en él.

Por lo que respecta a la volatilidad sencillamente aislamos los periodos entre salto y salto y ajustamos en cada caso una distribución normal centrada, estimando su volatilidad. El proceso de ajuste de una ley normal se realiza de forma iterativa. Empezamos dividiendo la serie en subintervalos determinados por saltos de gran amplitud y contrastamos la normalidad de los datos de cada subintervalo. En caso de fracasar en el intento, seguimos fraccionando el intervalo con saltos de menor amplitud hasta conseguir el ajuste de leyes normales centradas.

Observemos que en algunos casos el proceso iterativo se detiene rápidamente mientras que en otros nos encontramos con la necesidad de considerar saltos de amplitud pequeña. Esto es debido a que el hecho de que estemos o no en presencia de un salto depende de la volatilidad del entorno.

Desde el punto de vista económico el fenómeno está claro. En momentos de estabilidad, una variación de precios de un 1 % puede ser un salto, mientras que en épocas de crisis, una variación del 1 % puede ser despreciable.

En cuanto a la *HME*, podemos destacar que aunque en el principio de esta memoria hemos cuestionado su validez, ...nalmente hemos vuelto a considerarla en su aspecto más esencial: la independencia de los incrementos.

En efecto, respecto al teorema 1 en este capítulo mantenemos la hipótesis de independencia de los incrementos, pero debilitamos las dos otras hipótesis. Por lo que respecta a la estacionariedad de los incrementos mantenemos la estacionariedad en media pero permitimos variaciones a trozos de la varianza, lo que nos proporciona no un proceso *iid* sino una sucesión de ellos. Por lo que respecta a la continuidad de las trayectorias permitimos una libertad parecida, es decir, las trayectorias son continuas a trozos y los saltos que determinan estos trozos son saltos producidos por un número ...nito de procesos de Poisson.

Este modelo en lo esencial se adapta a la *HME*. Por un lado, en periodos estables la validez de la *HME* no se pone en duda y la normalidad sigue siendo el comportamiento de fondo de las vibraciones ordinarias de los precios. La diferencia es que esta normalidad no es constante. Los precios de vez en cuando se ven afectados por la llegada de nueva información extraordinaria o crítica que produce en ellos vibraciones anormales. En esos instantes críticos no solo se producen cambios bruscos en los precios sino que también se producen cambios en las expectativas del entorno económico con lo que queda afectada también la volatilidad. En general se pueden observar todo tipo de relaciones entre el cambio en los precios y el cambio en la volatilidad, tanto a nivel de signos como de intensidades.

Otra idea que debemos extraer de este análisis, y destacar que va en la línea sugerida por Merton, es que si bien a nivel global los mercados no se comportan siguiendo una ley gaussiana, debemos tener en cuenta que siguen siendo gaussianos en un cierto sentido, puesto los incrementos de precios siguen siendo independientes y por lo tanto una serie de incrementos resulta ser un muestra de una distribución generada por una mezcla de leyes gaussianas centradas con varianzas diferentes. Es esta mezcla, como hemos visto en algunos ejemplos en este capítulo la que causa la aparición de apuntamiento y colas pesadas en los

histogramas.

En nuestro caso particular podemos destacar que en términos genéricos el mercado de tipos de interés en el caso de plazos cortos resulta estar mucho más sujeto a perturbaciones que en el caso de plazos largos. De ahí las diferencias observadas en cuanto a la frecuencia de saltos entre los casos de 1 día y 1 año analizados. Esto es debido a que hay información que produce saltos en tipos de interés a corto plazo y resulta irrelevante para tipos de interés a más largo plazo, ya que el mercado supone que a ese plazo largo los efectos de la información habrán desaparecido. Por ejemplo, la noticia del ataque a las torres gemelas influyó tanto al corto plazo como al largo, pero noticias más frecuentes como la variación mensual del *IPC* afectan al corto plazo, pudiendo producir saltos, pero no al largo plazo.

## Capítulo 8

# Consideraciones ...nales

El objeto de estudio de esta tesis es una colección de series temporales ...nancieras del tipo de interés cotizado en el mercado interbancario español durante el periodo comprendido entre el 4 de Enero de 1988 y el 31 de Diciembre de 1998. En concreto, las series de observaciones diarias del tipo de interés nominal para operaciones a 1 día, 1 semana, 15 días, 1 mes, 2 meses, 3 meses, 6 meses y 1 año. Estas series han sido utilizadas a título de ejemplo, pero estamos convencidos de que las técnicas y los resultados obtenidos son perfectamente extensibles a muchas otras series temporales ...nancieras, como podrían ser las series de precios de activos, series tipos de cambio, etc....

La pregunta clave de la memoria, en su formulación más general, es: ¿Cuál es el modelo estocástico más adecuado para describir una serie temporal ...nanciera?

Esta pregunta se ha abordado partiendo de la utilización de modelos sencillos y aumentando progresivamente su complejidad sólo en caso de ser necesario. Hemos huido, por lo tanto, de modas o uso de modelos complejos con el único objetivo de impresionar a la audiencia. También hemos querido establecer, en cierto sentido, un protocolo de análisis que permita determinar el modelo que mejor ajusta los datos. Con este objeto hemos iniciado nuestra andadura con las referencias más clásicas: Bachelier (1900) y Osborne (1959), recopilados en Cootner (1964). Y hemos seguido con otras actualmente del todo reconocidas, entre ellas: Box y Jenkins (1970), Hosking (1981), Engle y Bollerslev (1986), Feder (1989), Peters (1991b y 1994) y Mandelbrot (1997).

Siguiendo esta idea, en el Capítulo 2, nos planteamos las hipótesis probabilísticas más fuertes de entre las usadas habitualmente dentro del contexto de la *HME*: la independencia y estacionariedad de los incrementos de precios lo-

garítmicos, así como la continuidad de sus trayectorias. Bajo estas hipótesis la serie temporal de los incrementos diarios resulta ser una serie estacionaria gaussiana, o dicho de otra forma, los incrementos diarios son una muestra estadística de una ley normal.

En este contexto dimos paso al estudio de las características estadísticas de nuestras series. Del resultado que obtuvimos podemos destacar lo siguiente:

- La media, para todas las series, resultó ser prácticamente nula. Se veía reforzada por lo tanto la hipótesis de que las series analizadas eran estacionarias en media.
- La suposición de estacionariedad en varianza es discutible, ya que observando los gráficos de las series, parecen evidenciarse periodos de distinta volatilidad y por lo tanto la serie muestra una aparente heterocedasticidad. Por otro lado es interesante notar que la apariencia de volatilidad no constante disminuye al aumentar el plazo del tipo de interés considerado.
- La curtosis, en todas las series sin excepción, tenía un valor muy elevado. Debido a esto se veía ya como imposible pensar en un comportamiento normal de la muestra.

Pasamos después analizar la gaussianidad con herramientas más específicas: histogramas de frecuencias, gráficos  $Q_i$   $Q$  Normal, gráficos  $Q_i$   $Q$  Normal sin tendencias, test de Kolmogorov-Smirnov y test de Jarque-Bera. Se concluyó que el comportamiento de las series analizadas no era compatible con la normalidad.

A la vista de los resultados obtenidos, concluimos que las series de incrementos del tipo de interés no se comportaban según una distribución normal y por lo tanto, fallaba alguna de las hipótesis del esquema planteado por Bachelier, Osborne y Samuelson.

Finalmente para reforzar nuestra conclusión, aplicamos el test de Ljung-Box y detectamos una significativa estructura de correlación entre los datos.

El paso siguiente fue el estudio de esta dependencia detectada, mediante el ajuste de un modelo lineal tipo *ARMA* siguiendo la metodología tradicional Box-Jenkins, estudio que realizamos en el Capítulo 3.

Con objeto de estimar los parámetros de los modelos *ARMA* para las series de nuestro interés, utilizamos el criterio de Schwarz, ya que nos pareció que proporcionaba mejores resultados que el criterio de Akaike, que ofrecía modelos excesivamente sobreparametrizados.



Finalmente obtuvimos los siguientes resultados (para mayor detalle véase el Apéndice 2):

- Para la serie de incrementos a 1 día, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 3)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,8788$ ,  $\theta_1 = 1,46$ ,  $\theta_2 = i 0,4582$  y  $\theta_3 = i 0,0311$ .
- Para la serie de incrementos a 1 semana, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 6)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,8267$ ,  $\theta_1 = 0,774$ ,  $\theta_2 = i 0,06389$ ,  $\theta_3 = 0,0919$ ,  $\theta_4 = i 0,0501$ ,  $\theta_5 = i 0,0956$  y  $\theta_6 = 0,1078$ .
- Para la serie de incrementos a 15 días, el modelo estimado es un  $ARMA(6, 6)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = i 2,1086$ ,  $\phi_2 = i 1,72$ ,  $\phi_3 = i 0,21064$ ,  $\phi_4 = 1,2674$ ,  $\phi_5 = 1,4769$ ,  $\phi_6 = 0,5548$ ,  $\theta_1 = i 2,0054$ ,  $\theta_2 = i 1,474$ ,  $\theta_3 = 0,0612$ ,  $\theta_4 = 1,4696$ ,  $\theta_5 = 1,4732$  y  $\theta_6 = 0,46998$ .
- Para la serie de incrementos a 1 mes, el modelo estimado es un  $ARMA(0, 3)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\theta_1 = i 0,2768$ ,  $\theta_2 = i 0,05314$  y  $\theta_3 = i 0,07914$ .
- Para la serie de incrementos a 2 meses, el modelo estimado es un  $ARMA(2, 0)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,18229$  y  $\phi_2 = i 0,092$ .
- Para la serie de incrementos a 3 meses, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 0)$ , cuyo parámetro tiene el siguiente valor  $\phi_1 = 0,27077$ .
- Para la serie de incrementos a 6 meses, el modelo estimado es un  $ARMA(1, 1)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,77077$  y  $\theta_2 = 0,712$ .
- Para la serie de incrementos a 1 año, el modelo estimado es un  $ARMA(2, 1)$ , cuyos parámetros tienen los siguientes valores  $\phi_1 = 0,7689$ ,  $\phi_2 = 0,064$  y  $\theta_1 = 0,7848$ .

Una vez estimados los modelos  $ARMA$ , pasamos a la validación de los mismos. Para ello utilizamos de nuevo el test de Ljung y Box. El resultado obtenido, aunque interesante, no fue del todo satisfactorio. En efecto, para retardos cortos, los residuos exhibieron el comportamiento incorrelacionado esperado, pero para retardos mayores aparecieron correlaciones no menospreciables y persistentes. Este hecho nos motivó a plantearnos el ajuste de modelos más generales. En concreto, nos estamos re...riendo a los modelos autorregresivos de medias móviles integrados fractales,  $ARFIMA$ .

Siguiendo esta idea, en el capítulo 4 ajustamos modelos *ARFMA*, que son una generalización de los *ARMA* en la que se introduce un nuevo parámetro, el operador diferencia fraccionada  $d$ , que permite la modelización de comportamientos de decrecimiento lento de la función de autocorrelación, también llamados comportamientos de memoria a largo plazo. Para ello, previamente, tuvimos que introducir un mecanismo de detección de comportamientos de memoria a largo plazo: el análisis *R/S*, que permite la obtención del parámetro de memoria  $H$ .

Una vez detectada la memoria a largo establecimos una relación entre el parámetro de memoria,  $H$ , y el parámetro de diferencia fraccionada  $d$ , que nos permitió dar paso a la estimación de los modelos *ARFMA* sobre nuestras series utilizando el procedimiento propuesto por Hosking. Como resultado obtuvimos los siguientes modelos:

- Para la serie de incrementos a 1 día el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el octavo paso, llegando a la conclusión de que el modelo adecuado era un *ARFMA*(1, 0,23005957, 2). Los parámetros del modelo resultaban ser:  $d = 0,23005957$ ,  $\phi_1 = 0,821449$ ,  $\theta_1 = 1,6298663$  y  $\theta_2 = 0,6501858$ .
- Para la serie de incrementos a 1 semana el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el décimo tercer paso, llegando a la conclusión de que el modelo a ajustar era un *ARFMA*(1, 0,21005869, 6), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $d = 0,21005869$ ,  $\phi_1 = 0,67467957$ ,  $\theta_1 = 0,83228398$ ,  $\theta_2 = 0,00908933$ ,  $\theta_3 = 0,08118258$ ,  $\theta_4 = 0,05607287$ ,  $\theta_5 = 0,08818821$  y  $\theta_6 = 0,11795628$ .
- Para la serie de incrementos a 15 días la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el noveno paso, obteniendo que el modelo a estimar era un *ARFMA*(5, 0,24443668, 6), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $d = 0,24443668$ ,  $\phi_1 = 1,2029723$ ,  $\phi_2 = 0,7162868$ ,  $\phi_3 = 0,228302$ ,  $\phi_4 = 0,6350394$ ,  $\phi_5 = 0,4725105$ ,  $\theta_1 = 0,8497194$ ,  $\theta_2 = 0,2023167$ ,  $\theta_3 = 0,6658354$ ,  $\theta_4 = 0,7807754$ ,  $\theta_5 = 0,2969186$  y  $\theta_6 = 0,1035519$ .
- Para la serie de incrementos a 1 mes el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el noveno paso, obteniendo que el modelo adecuado era un *ARFMA*(1, 0,22155719, 4), resultando los siguientes valores para

los parámetros:  $d = 0,22155719$ ,  $\phi_1 = 0,83125053$ ,  $\theta_1 = 0,77959483$ ,  $\theta_2 = 0,143161$ ,  $\theta_3 = 0,09525378$  y  $\theta_4 = 0,08775784$ .

- Para la serie de incrementos a 2 meses el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el sexto paso. Obteniendo que el modelo adecuado era un *ARFMA*(2, 0,0596497, 0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $d = 0,0596497$ ,  $\phi_1 = 0,12650287$  y  $\phi_2 = 0,11246128$ .
- Para la serie de incrementos a 3 meses el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el sexto paso, obteniendo que el modelo a estimar era un *ARFMA*(1, 0,09199286, 0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $d = 0,09199286$  y  $\phi_1 = 0,17687785$ .
- Para la serie de incrementos a 3 meses el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el sexto paso, obteniendo que el modelo adecuado era un *ARFMA*(1, 0,09199286, 0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $d = 0,10830698$  y  $\phi_1 = 0,05525273$ .
- Para la serie de incrementos a un año el proceso en la estimación del modelo *ARFMA* convergía en el sexto paso, obteniendo que el modelo adecuado era un *ARFMA*(1, 0,11912437, 0), resultando los siguientes valores para los parámetros:  $H = 0,61912437$   $d = 0,11912437$  y  $\phi_1 = 0,13162658$ .

Para validar los modelos estimados usamos de nuevo el test Ljung-Box sobre los residuos obtenidos. Los resultados indicaron que estos estaban correlacionados. Por lo tanto los modelos *ARFMA* no parecían ser los modelos adecuados.

Este capítulo representó para nosotros un cierto fracaso ya que esperábamos encontrar residuos incorrelacionados tras el ajuste de modelos *ARFMA*. Por otro lado, para la mayoría de las series, en concreto para las series a partir del plazo de 1 mes, la estimación del parámetro fraccionario  $H$  es en realidad compatible con la hipótesis de que su valor es 0.5 y por lo tanto en esos casos no parece justificada esta extensión de los modelos *ARMA*. Sí obtuvimos, sin embargo, algún resultado de interés, como la reducción en algunos casos de el número total de parámetros a estimar, con la consecuente disminución del riesgo de errores. Concretamente, observamos esa mejoría para las series a 1 día, 15 días, 6 meses y 1 año. En los casos de 1 semana, 2 meses y 3 meses la inclusión de la modelización *ARFMA* no aporta ninguna mejora en cuanto al número de parámetros a estimar. Por último, solamente en el caso de la serie a 1 mes el número de parámetros a estimar se incrementa.

Por lo expuesto, está claro que nuestro análisis sobre las series propuestas no podía analizar aquí. Aunque habíamos extraído toda la memoria, tanto de corto como de largo plazo, existente, no habíamos reflejado toda la estructura de las series ya que los residuos se mostraban aun correlacionados.

Es por ese motivo por el nos propusimos volver al punto de partida. Por ejemplo, podíamos explorar la posibilidad de suponer solo la independencia de los incrementos pero no su carácter estacionario. En realidad observando las gráficas de las series de incrementos estudiadas, o incluso las de las series originales, podíamos constatar la existencia de instantes en los que los precios se disparan y alcanzan valores anormales. Sin duda ello se debe a la sensibilidad del tipo de interés con respecto a otras variables macroeconómicas o incluso políticas. Concretamente algunas de esas puntas, se corresponden con el período de continuas devaluaciones de la peseta, para hacer más competitiva la economía española, que se produjeron durante los años 1992 y 1993.

Estas perturbaciones, anormales, podían ser causa de heterocedasticidad en las series. Por lo tanto, podía ser de interés estudiar modelos que no contemplasen la estacionariedad de las series.

Dentro del abanico de posibilidades que se nos abría en la elección de un modelo no lineal estocástico, decidimos trabajar con los modelos *GARCH*. Pero antes de tomar esa senda, como que lo que proponíamos era la utilización de modelos no lineales, intentamos analizar si la serie se podía llegar a modelizar mediante un modelo no lineal determinista. Eso desembocó en la línea abierta en el capítulo 5 hacia la matemática del caos.

En ese particular procedimos según lo expuesto y calculamos la dimensión de inmersión para las series, que resultó ser 2, a la vez que reconstruimos el espacio de fases.

Seguidamente, propusimos el análisis de la detección de un comportamiento caótico determinista, a partir de unas modificaciones sobre el esquema planteado en Belaire y Contreras (1996):

1. En primer lugar se debe comprobar que la serie sea estacionaria. Podemos aplicar, por ejemplo, un test de raíces unitarias. En caso de aceptar la hipótesis nula se transforma la serie tomando  $d$  diferencias ( $d$  = número de raíces unitarias). Este apartado, en nuestro caso, no tiene mayor importancia, ya que como vimos en el capítulo 2, podemos considerar que nuestras series de primeras diferencias son estacionarias.
2. Se calcula después la dimensión de correlación,  $d_m$ , de la serie estacionaria.

Si  $d_m$  no se estabiliza a partir de algún  $m$ , la serie no es caótica. Entonces ya hemos acabado. Si  $d_m$  se estabiliza, calculamos los exponentes de Lyapunov. Si el mayor exponente es positivo, diremos que existe la posibilidad de que la serie sea caótica, pero no lo podemos asegurar con certeza. Tales resultados deberán ser confirmados por el siguiente paso.

3. Se ajusta un modelo lineal  $AR(p)$  siguiendo la metodología Box-Jenkins y se obtiene una serie de residuos resultante.
4. Se calcula la  $d_m$  y los exponentes de Lyapunov de la serie de los residuos. Si no coinciden con los valores obtenidos en el punto 2 tenemos evidencia en contra de la existencia de un comportamiento caótico.
5. En caso de detectar un comportamiento caótico intentamos estimar un modelo no lineal determinista que ajuste este comportamiento, haciendo uso de las diversas herramientas de que dispone la teoría del caos. En caso de falta de evidencia a favor de un comportamiento caótico deberemos ajustar los datos a distintos modelos no-lineales estocásticos hasta obtener la aceptación de la independencia de los residuos mediante la utilización del test *BDS*.

En primer lugar, lo que hicimos, siguiendo el esquema de trabajo propuesto, fue estimar la dimensión de correlación de las series. Destacar que los resultados obtenidos fueron similares para todas. En particular, pudimos comprobar como la dimensión de correlación no convergía hacia ningún valor concreto, con lo que concluíamos que no era evidente un comportamiento caótico que explicase nuestras series. Nuestro análisis continuó, con objeto de confirmar nuestra conclusión, con el cálculo del mayor exponente de Lyapunov, que corroboró nuestra hipótesis. No pudimos obtener un valor positivo del máximo exponente de Lyapunov para nuestras series con lo que nos reafirmamos en la no existencia de un comportamiento caótico de las series analizadas.

En este aspecto decir que al igual que en los capítulos precedentes el resultado que obtuvimos no fue satisfactorio y el camino emprendido parecía estéril, aunque se habían introducido herramientas de gran interés como el test *BDS*.

En el Capítulo 6, retomamos la senda estocástica y nos propusimos estimar modelos no lineales estocásticos, concretamente modelos *ARMA/GARCH*, sobre las series de incrementos del tipo de interés. Destacar que, para la obtención de los modelos, no optamos por elegir algún criterio como el de Akaike o el de Schwarz, si no que en este particular, optamos por elegir aquella combinación

de modelos *ARMA/GARCH* a partir de la cual obteníamos una serie de residuos independientes. Para determinar dicha independencia utilizamos el test de Ljung-Box.

Los resultados que obtuvimos son los siguientes (para más detalle sobre la estimación consultar el Apéndice 2):

- Para la serie de diferencias a 1 día, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 1)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,750715$ ,  $\theta_1 = 0,8708$  para el modelo *ARMA* y  $\alpha_1 = 0,114731$ ,  $\beta_1 = 0,959975$  para el *GARCH*.
- Para la serie de diferencias a 1 semana, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 0)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,097249$ ,  $\alpha_1 = 1,427278$  y  $\beta_1 = 0,222314$ .
- Para la serie de diferencias a 15 días, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 0)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,135121$ ,  $\alpha_1 = 1,416413$  y  $\beta_1 = 0,406829$ .
- Para la serie de diferencias a 1 mes, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(6, 1)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 1,087746$ ,  $\phi_2 = 0,101660$ ,  $\phi_3 = 0,080416$ ,  $\phi_4 = 0,114962$ ,  $\phi_5 = 0,049152$ ,  $\phi_6 = 0,010455$ ,  $\theta_1 = 0,971691$ ,  $\alpha_1 = 0,208653$  y  $\beta_1 = 0,862857$ .
- Para la serie de diferencias a 2 meses, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 1)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,981616$ ,  $\theta_1 = 0,972325$ ,  $\alpha_1 = 0,466039$  y  $\beta_1 = 0,684235$ .
- Para la serie de diferencias a 3 meses, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(3, 0)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,056268$ ,  $\phi_2 = 0,069542$ ,  $\phi_3 = 0,029903$ ,  $\alpha_1 = 0,269512$  y  $\beta_1 = 0,786554$ .
- Para la serie de diferencias a 6 meses, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(1, 5)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes valores:  $\phi_1 = 0,896705$ ,  $\theta_1 = 0,939039$ ,  $\theta_2 = 0,103028$ ,  $\theta_3 = 0,013309$ ,  $\theta_4 = 0,034894$ ,  $\theta_5 = 0,001283$ ,  $\alpha_1 = 0,180379$  y  $\beta_1 = 0,863320$ .
- Para la serie de diferencias a 1 mes, el modelo estimado ha sido un modelo *ARMA(8, 1)/GARCH(1, 1)* cuyos parámetros tienen los siguientes

valores:  $\phi_1 = 0,709070$ ,  $\phi_2 = 0,119689$ ,  $\phi_3 = 0,011666$ ,  $\phi_4 = 0,00977$ ,  
 $\phi_5 = i 0,008138$ ,  $\phi_6 = i 0,023021$ ,  $\phi_7 = 0,009379$ ,  $\phi_8 = 0,028179$ ,  $\theta_1 =$   
 $i 0,793010$ ,  $\alpha_1 = 0,082995$  y  $\beta_1 = 0,919992$ .

Bajo el criterio de obtener residuos incorrelacionados, estos modelos pueden ser considerados como de...nitivos. Pero si recordamos, presentamos, en el capítulo dedicado a la teoría del caos, una herramienta que nos permitía detectar cualquier tipo de relaciones entre las variables, tanto lineales como no lineales: el test *BDS*. La pregunta es obvia: ¿Obtendremos la misma conclusión utilizando el test *BDS* sobre los residuos que con el test de Ljung-Box? Para nuestra sorpresa y desilusión el resultado que obtuvimos fue contrario al anterior: no aceptábamos que los residuos eran independientes. El test *BDS* detectaba la existencia de algún tipo de dependencia no lineal entre los datos analizados. Dependencia no lineal, puesto que si fuese dependencia lineal ya no hubiese pasado el test de Ljung-Box. Por tanto, En conclusión los modelos *GARCH* ajustados no son quizá los mejores modelos. Nuestro análisis por tanto podría seguir en esa línea, intentando detectar un modelo no lineal estocástico que mejorase los resultados del test *BDS*. Existen muchos modelos no lineales estocásticos, como destacábamos en la introducción de ese capítulo, tanto dentro de la familia de modelos *GARCH* (*IGARCH*, *EGARCH*, *FIGARCH*,...) o fuera de ella, como por ejemplo, los modelos de volatilidad estocástica. Por tanto, queda en este apartado una puerta abierta a futuras investigaciones.

Por último, en el Capítulo 7, intentamos volver de nuevo a los orígenes. Aunque en el principio de esta memoria nos cuestionamos la validez de la *HME*, ...nalmente hemos vuelto a considerarla en su aspecto más esencial: la independencia de los incrementos. Así, nos planteamos el ajuste de modelos con saltos. En particular una generalización del modelo de Lévy, considerando la varianza variable a nivel global, pero constante entre salto y salto.

Respecto al teorema 1, mantuvimos la hipótesis de independencia de los incrementos, pero debilitamos las dos otras hipótesis. Por lo que respecta a la estacionariedad de los incrementos mantuvimos la estacionariedad en media pero permitimos variaciones (por intervalos) de la varianza, lo que nos proporciona no un proceso *iid* sino una sucesión de ellos. Por lo que respecta a la continuidad de las trayectorias, permitimos una libertad parecida. Es decir, las trayectorias son continuas a trozos y los saltos que determinan estos trozos, son saltos producidos por un número ...nito de procesos de Poisson.

Este modelo en lo esencial es coherente con la *HME*, o más concretamente

con la hipótesis de paseo aleatorio. Por un lado, en periodos estables la validez de la *HME* no se pone en duda y la normalidad sigue considerándose como el comportamiento de fondo de las vibraciones ordinarias de los precios. La diferencia está en que la normalidad no se considera constante. En efecto, el modelo que proponemos es como sigue. Los precios evolucionan en general mostrando lo que Merton llamó vibraciones normales como consecuencia de la reacción de los agentes al flujo continuo de noticias corrientes o incluso a fluctuaciones totalmente aleatorias desde el punto de vista económico. De vez en cuando, aunque para según que tipo de precios, bastante a menudo, aparecen noticias de índole extraordinaria y de más impacto, tanto económicas como políticas. La llegada de esta información provoca reacciones bruscas de los agentes que se traducen en fuertes variaciones en los precios. En algunos casos estas reacciones llegan a ser de pánico o euforia colectiva. Por lo tanto además del proceso que subyace en las vibraciones normales de precios hay otro proceso, o mejor dicho, otros procesos, que gobiernan la aparición de saltos de distintas magnitudes. Estos procesos es natural modelizarlos mediante procesos de Poisson como consecuencia de la aparición independiente de noticias de impacto. Así, en nuestro modelo suponemos que subyace una familia de procesos de Poisson de distintos parámetros que rigen la aparición de saltos de distintas magnitudes, con una relación inversa entre magnitud del salto y frecuencia de aparición. Es decir, variaciones bruscas de precios superiores a un cierto porcentaje alto son menos frecuentes que las variaciones bruscas superiores a otro porcentaje más bajo.

Por otro lado, tras un salto no es razonable pensar que necesariamente la ley que rige el nuevo proceso de vibraciones normales sea la misma que antes del salto. Por lo tanto incluimos en el modelo la posibilidad que los saltos impliquen no solo un cambio brusco de los precios sino también un cambio en la volatilidad.

Este modelo implica como consecuencia que entre salto y salto se cumplen las hipótesis del teorema 1, o si se quiere, de la *HME*, y por lo tanto los incrementos siguen una ley normal centrada. Pero esta ley es distinta para cada intervalo entre salto y salto. Es decir, su varianza es distinta. Por otro lado, como ya hemos comentado los saltos aparecen regidos por un sistema anidado de procesos de Poisson o un proceso de Poisson compuesto.

Los resultados ...nales de este capítulo sí fueron a nuestro entender satisfactorios, puesto que conseguimos plantear y ajustar un modelo sobre el comportamiento de las series ...nancieras analizadas. Sin duda la tarea no está terminada y haría falta proseguir dentro de esta línea. En ese sentido queda abierto el problema, por otro lado bastante tratado en literatura reciente, de estimar la función



de densidad asociada a los incrementos del proceso, en el marco de familias de densidades como las estables, de Pareto o otras.



# Apéndice 1. Introducción a la matemática fractal

Tienen extraños límites y uno debe aprender a observarlos. Es esa simplicidad de sus superficies lo que los convierte en una trampa para el extraño. La primera impresión de uno es que son completamente suaves. Y, de repente, uno se encuentra con algo duro y se da cuenta de que ha alcanzado el límite y debe adaptarse a los hechos.

Sir Arthur Conan Doyle, El último saludo de Sherlock Holmes.

## 1. Introducción

En el capítulo dedicado a la introducción a la teoría del caos, aclaramos fenómenos que desconocíamos y creíamos inexplicables vía interpretación matemática.

La teoría del caos está basada en la teoría de los sistemas dinámicos. Todo tiende a referirse, o traducirse, en términos de sistemas dinámicos, bien sea por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones en diferencia.

El problema reside en que aunque llegemos a identificar el sistema dinámico que produce el comportamiento caótico que estudiamos, no tendremos la solución, ya que en muchas ocasiones, por no decir en la mayoría de ellas, los sistemas dinámicos no tienen solución. Es por ello que, como posible nuevo enfoque del estudio de los fenómenos caóticos, nace la matemática fractal de manos de B. Mandelbrot. Nace quizás como respuesta, no tan matemática sino más del campo de la estadística, a un nuevo planteamiento que analiza los mismos fenómenos. En este apéndice lo que haremos será presentar y estudiar la matemática fractal y sus herramientas, de entre las que destaca el análisis  $R/S$

o de Hurst sobre series temporales.

## .2. Una breve introducción sobre fractales

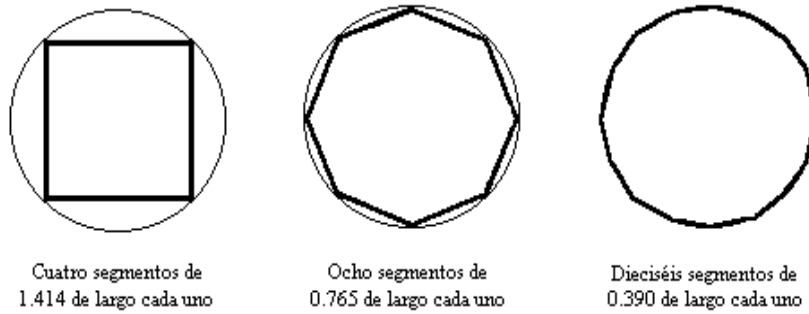
Los fractales fueron introducidos, como hemos comentado, por el matemático francés Benoît B. Mandelbrot, del Centro de Investigación Thomas J. Watson de IBM. Tiene lugar a finales de la década de los 70, como resultado de un novedoso estudio, acuñando, así, la palabra fractal; palabra que proviene del latín fractus que significa roto, irregular.

De ese modo, Mandelbrot, en su libro "The fractal geometry of nature" (1977), introduce el análisis sobre los fractales. Para dar una idea de lo que representan, Mandelbrot se plantea una pregunta: ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?, cuya respuesta lleva implícita la definición de fractal. Así que, siguiendo los pasos del que es reconocido como el padre de los fractales, hagámonos la misma pregunta y, de esa forma, intentemos comprender qué es un fractal. Pero, lo haremos, a nuestro entender, con algo que nos toca aún más de cerca. Nos preguntaremos: ¿Cuánto mide la costa de Cataluña?

### .2.1. ¿Cuánto mide la costa de Cataluña?

Antes de pasar directamente a responder esta cuestión, planteémonos primero lo siguiente:

Intentemos pensar cómo podemos hallar la longitud aproximada de un círculo. Un primer planteamiento consiste en recordar que es posible calcularla utilizando la fórmula  $2\pi r$ , siendo  $\pi = 3,14\dots$  y  $r$  el radio que queramos, que en principio supondremos igual a 1. De esa forma obtendremos que el círculo tiene una longitud aproximada de 6,28. Pero podríamos llegar a un resultado más o menos parecido, o mejor dicho, aproximado, inscribiendo un cuadrado en el círculo, estimando así, que el círculo se puede obtener como la suma de los lados del cuadrado.

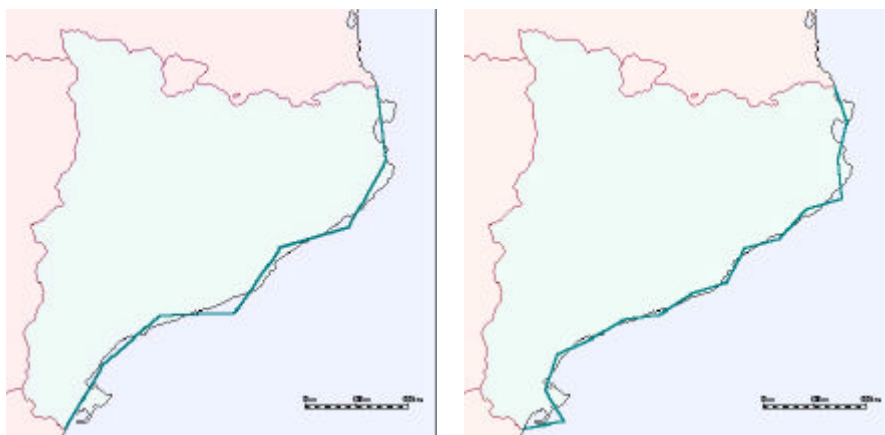


Aproximación del círculo con polígonos

Si los resultados no se ajustan su...cientemente lo que deberíamos hacer es crear un polígono de más caras. Así, incrementando el número de caras lo que conseguiremos es ir aproximando cada vez más el valor del círculo hasta ...nalmente hallarlo, tal y como muestra la siguiente tabla.

Caras	Longitud de una cara	Círculo
3	1,732	5,20
4	1,414	5,66
8	0,765	6,12
16	0,390	6,24
32	0,196	6,27
64	0,098	6,28

Podríamos por tanto aplicar, ahora, la misma lógica en el cálculo de la distancia del litoral catalán. Si observamos la siguiente ...gura podemos destacar que, a medida que cojamos segmentos más pequeños, iremos aproximando cada vez más su verdadero tamaño.



¿Cuánto mide la costa de Cataluña? Para responder a esta pregunta se utilizan en el primer gráfico 7 segmentos de 70 km y en el segundo 15 segmentos de 35 km.

Sería importante destacar el hecho de que si partimos de un instrumento de medida, segmento, de una longitud de 70 km, la estimación de la costa será de 490 km. Es decir, cogemos un instrumento de medida bastante grande, en consecuencia, la estimación de la costa distará bastante del valor real, debido al hecho de que lo que estamos midiendo no son líneas rectas sino que son, por ejemplo, bahías que a su vez tienen pequeñas bahías, que a su vez tienen bahías aún más pequeñas, etc... Si cogemos un instrumento de medida más pequeño, como por ejemplo sería el utilizar un segmento de longitud 35 km, la aproximación sobre el valor de la costa sería mejor y, a su vez, sería un valor mucho mayor que el anterior, ya que antes al utilizar un segmento tan grande despreciábamos gran parte de la costa.

En otras palabras, en el primer caso, al utilizar una herramienta tan grande, no podemos medir tantos recodos y curvas como tiene la costa y lo que hace es cortar a través de ellos, mientras que ahora, aunque despreciamos también algo, podemos medir mejor, siendo ahora la aproximación a la medida de la costa de 525 km.

En consecuencia podemos decir que debido a la complejidad del objeto que estamos analizando, a medida que cojamos un segmento menor, el valor de aproximación será mayor a causa de la irregularidad de la costa.

Podríamos realizar un matiz en relación a la aproximación que con anterioridad hemos planteado con el círculo. Mientras que antes, lo que intentábamos aproximar era una ...gura, en concreto un círculo, a medida que disminuíamos

el segmento utilizado aproximábamos mejor el valor del círculo, hasta llegar al valor exacto. Ahora, por el contrario, y debido al hecho de que lo que queremos calcular es algo irregular, al hacer más pequeño el segmento nos estaremos acercando cada vez más al valor de la costa pero nunca lo alcanzaremos. Es decir, al ser la costa de Cataluña algo complejo, podemos decir que el valor de la costa será un número no ...nito. Conclusión: no podremos llegar a saber cuánto mide realmente la costa de Cataluña.

Existe por tanto una diferencia claramente destacable entre la costa de Cataluña y el círculo. Esta diferencia nos plantea una distinción entre lo que conocemos como geometría clásica, o también cali...cada como geometría euclidiana, y lo que de...niremos como geometría fractal.

Según todo lo desarrollado la costa de Cataluña es un fractal (ya que su di...cultad para poder medirla nos lo sugiere).

Ahora que ya tenemos una idea de lo que puede ser un fractal, podemos acudir a la de...nición que nos da Mandelbrot (1987):

De...nición .1 FRACTAL. adj. Sentido intuitivo. Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Que contiene elementos distintivos cuyas escalas son muy variadas y cubren una gama muy amplia. Razones de su necesidad: Desde hará unos cien años, los matemáticos se habían ocupado de algunos de esos conjuntos, pero no habían edi...cado ninguna teoría acerca de ellos, ni habían tenido, por lo tanto, la necesidad de un término especí...co para designarlos. Una vez que el autor ha demostrado que en la naturaleza abundan objetos cuyas mejores representaciones son conjuntos fractales, es necesario disponer de una palabra apropiada que no sea compartida con ningún otro signi...cado.

Añadiendo más adelante,

De...nición .2 FRACTAL. n.f. Con...guración fractal; conjunto u objeto fractal. Advertencia: La palabra fractal no distingue, adrede, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y objetos naturales (la realidad): se emplea en los casos en que su generalidad, y la ambigüedad deliberada que resulta de ello sean bien deseadas, bien aclaradas por el contexto, o no lleven inconvenientes asociados.

De...niciones bastante claras una vez hemos visto el ejemplo de la costa de Cataluña. Es decir, la a...rmación anteriormente realizada de que la costa de

Cataluña era un fractal, podemos ahora corroborarla de una manera más formal, ya que si tenemos en cuenta la definición que nos proporciona su creador, la costa se ajusta perfectamente a lo que entendemos por fractal.

En definitiva, la idea que ha de prevalecer, una vez examinada la definición, es la siguiente: un fractal está formado a partir de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variables, pero de aspecto similar; en otras palabras si cogemos un fractal y lo ampliamos nos irá mostrando siempre la misma estructura para todas las escalas en las cuales se desee estudiar dicho objeto. Si observamos un fractal bajo una escala de metros nos ofrecerá el mismo aspecto que si lo observamos en milímetros.

Por consiguiente, todos los fractales poseen la propiedad de parecerse a sí mismos que recibe el nombre de bisejejanza o autosimilitud, idea que destacaremos más adelante tomando en cuenta un fractal.

Pero cabría preguntarse si todos los fractales son iguales, es decir, si de alguna forma todos los fractales presentan la misma irregularidad, o si todos los fractales presentan el mismo grado de irregularidad. Para responder a esa idea deberemos introducir un nuevo concepto, el de dimensión fractal.

## .2.2. La dimensión fractal versus la dimensión euclídea

Hemos intentado medir algo que hemos caracterizado de muy complejo o irregular, como es la costa de Cataluña, mediante herramientas pertenecientes a la dimensión euclídea, utilizando rectas, llegando a la conclusión de que nunca podríamos llegar a obtener un valor concreto, ya que presentaba el mismo grado de irregularidad para todas las escalas posibles. En definitiva, tomando rectas cada vez más pequeñas nos acercaremos más al valor de la costa pero no lo hallaremos nunca, ya que aunque cojamos una recta de un metro y midamos, habrá en ese metro irregularidades que no podremos medir. Aunque cogiéramos una recta de un centímetro nos pasaría lo mismo, habría irregularidades que no podríamos medir, aunque cojamos una recta de un milímetro nos pasaría exactamente lo mismo, etc...

En conclusión, no podremos nunca calcular mediante una recta algo tan complicado. El porqué, tendrá relación con la dimensión de los objetos con que estamos trabajando.

La idea es que nunca podremos alcanzar el valor real ya que pretendemos mediante un objeto típico de la geometría euclídea, medir un objeto demasiado complejo desde ese marco.



A este nuevo concepto de dimensión lo llamaremos dimensión fractal y tendrá un valor algo mayor que la dimensión euclídea, siendo dicho valor un número fraccionario. De igual forma a lo que hemos hecho para dar una definición de fractal, acudiremos a la definición que nos da Mandelbrot para, de esa forma, ver lo que debemos entender por dimensión fractal y, posteriormente, extraer conclusiones.

**Definición 3 Dimensión fractal.** Sentido genérico: Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera. Sentido específico: Se aplica a veces a la dimensión de Hausdorff y Besicovitch, pero ya no se recomienda tal uso.

**Definición 4 Conjunto fractal.** Definición provisional: Conjunto cuya dimensión fractal es mayor o igual que su dimensión ordinaria (topológica).

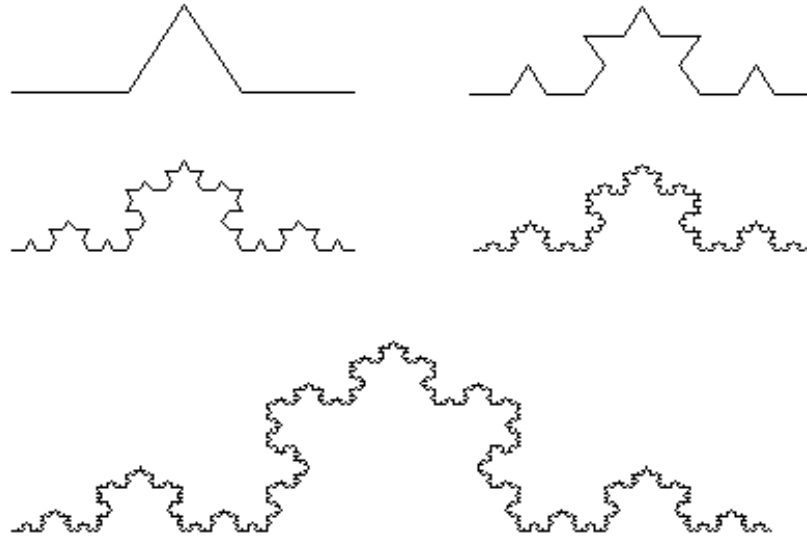
En definitiva, sabemos lo que son, o lo que pueden ser los fractales, pero ahora al introducir el nuevo concepto de dimensión fractal, destacamos el hecho de que no existe un único tipo de fractales, sino que estos pueden ser diferentes en función de su dimensión.

Lo que vamos a hacer a continuación será ver de forma más detallada este nuevo concepto, pero antes podemos redefinir el concepto de fractales diciendo que un fractal será todo aquel objeto que tenga dimensión fractal.

De alguna forma, la dimensión fractal vendría a ser la medida del grado de irregularidad o grado de complejidad, considerado a todas las escalas, ya que como hemos destacado con anterioridad los fractales presentan estructura similar a cualquier nivel. Para tener una idea más clara de lo que estamos comentando, veamos ejemplos de figuras fractales e intentemos comprenderlas, ya que así, la asimilación de lo que representa la dimensión fractal, nos será más fácil.

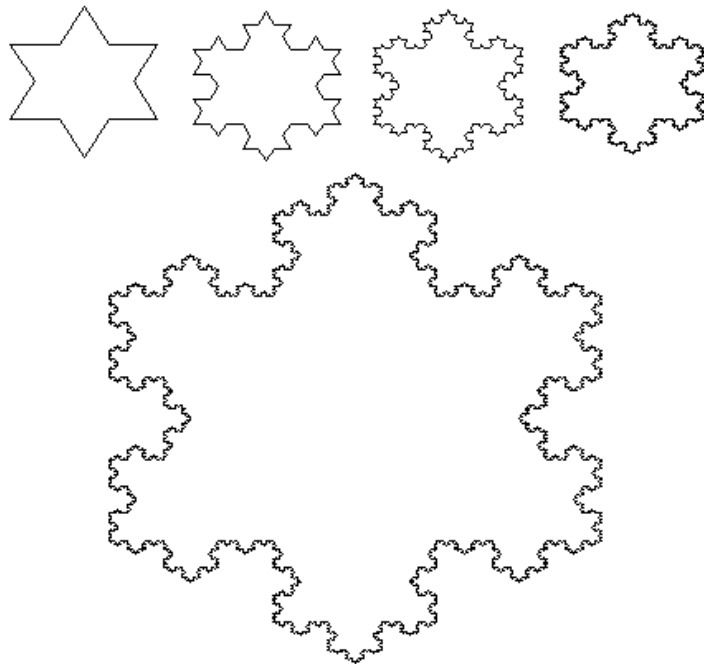
Veamos, en primer lugar, una serie de figuras que son previas a la concepción de los fractales por Mandelbrot. Es decir, como ya destaca Mandelbrot en su definición de fractal, los fractales fueron estudiados por diversos matemáticos a finales del siglo *XIX* e inicios del *XX*, pero al no desarrollarse una teoría entorno a ellos, estos objetos fueron considerados de interés puramente académico.

El primer fractal que veremos será la curva de Koch. Descubierta por von Koch en 1904.



Partiendo de una curva generada por 4 segmentos, donde los dos centrales forman un triángulo, generamos el fractal sustituyendo los segmentos por la curva inicial, logrando así un grado de complejidad cada vez mayor. Denotar que debemos prever un grado determinado donde nos pararemos, ya que sino esta operación podría repetirse hasta el infinito.

Cabe destacar que también se podría generar la curva conocida como la isla de Koch o copo de nieve de Koch, disponiendo, para ello, tres curvas de Koch a partir de un triángulo equilátero.



La idea que hay detrás de todo ello, es el hecho de que al ir complicando cada vez más la ...gura, es decir, cada vez que iteremos un paso más allá en la génesis de la ...gura, aumentaremos en un tercio su longitud, ya que estamos añadiendo más segmentos a la ...gura anterior. Por consiguiente, la longitud crecerá hasta el in...nito. Hasta aquí no hay problemas. Pero se nos plantea una paradoja que surge del hecho de analizar con planteamientos clásicos un problema que esta mucho más allá de la geométrica que hasta ahora conocíamos. Tenemos una ...gura que tiene, al parecer, una longitud in...nita en una región acotada del plano y, además, ocupa parte del plano sin llegarse a considerar un objeto bidimensional. Parece ser, por tanto, que la dimensión del objeto no es la de la recta, ni la del plano, sino algo intermedio.

Deberemos, para saber con que tratamos, calcular la dimensión del objeto en cuestión. En un primer estadio, debemos considerar una de...nición de dimensión planteada por Félix Hausdor $\alpha$  en 1919, completada posteriormente por Besicovich y que ...nalmente fue adaptada por Mandelbrot para de...nir a los objetos fractales, denominándola dimensión fractal.

Veamos previamente la idea de dimensión planteada por Hausdor $\alpha$  y Besicovich, denominada dimensión de Hausdor $\alpha$ -Besicovich. Destacar que el propio

Mandelbrot, aunque se basa en ella, desaconseja su uso para el cálculo de la dimensión fractal. Daremos paso seguidamente al análisis de la dimensión fractal propiamente dicha.

La idea que prevalece en el concepto de dimensión Hausdorff-Besicovich es la siguiente: volvamos al planteamiento de que al intentar medir la longitud de todo objeto fractal mediante una línea recta, algunos detalles del mismo serán siempre más ...nos que los que la recta pueda medir. De forma que, si hacemos más pequeña la recta para poderlos medir, continuarán habiendo detalles que no serán recogidos por la nueva recta y, si vamos disminuyendo la escala del instrumento de medida para medir esos nuevos detalles que van apareciendo, lo que conseguiremos es que cada vez el tamaño del objeto fractal crezca.

Este enfoque nos lleva a considerar el tamaño del fractal en función del tamaño de nuestro instrumento de medida. Por tanto, cómo la longitud en el ámbito de los fractales carece de sentido, ya que depende del parámetro tamaño de nuestro instrumento de medida, se pasa a uno alternativo, que es el de dimensión de Hausdorff-Besicovich. Dado un conjunto cualquiera  $X$ , la dimensión de Hausdorff  $H(X)$  mide el número de conjuntos de diámetro  $L$  necesarios para cubrir el dicho conjunto  $X$  cuando  $L$  tiende a 0. La idea que hay detrás de esta metodología es la siguiente: si por ejemplo, nuestro análisis se centra en el estudio de un objeto unidimensional de longitud 1, al medirlo con un segmento  $L$  (o lo que sería lo mismo con un instrumento de resolución  $L$ ), el número de segmentos que cojamos de  $L$ , que denotaremos por  $N(L)$ , multiplicado por  $L$  nos ha de dar la distancia del objeto, es decir,

$$N(L) \cdot L = 1$$

Paralelamente si lo que queremos es medir un objeto de dimensión 2, sabiendo que su área es 1, y lo medimos con cuadrados de lado  $L$  considerando  $N(L)$  cuadrados, por analogía deberá cumplirse,

$$N(L) \cdot L^2 = 1$$

Si ahora cogemos un objeto tridimensional y tomamos para medirlo cubos de volumen 1, también deberá cumplirse,

$$N(L) \cdot L^3 = 1$$

Por tanto si generalizamos para  $D$  casos obtendremos la siguiente expresión,

$$N(L) \propto L^D = 1$$

De donde  $D$  es la dimensión fractal y por tanto:

$$D = \frac{\log N(L)}{\log (1/L)}$$

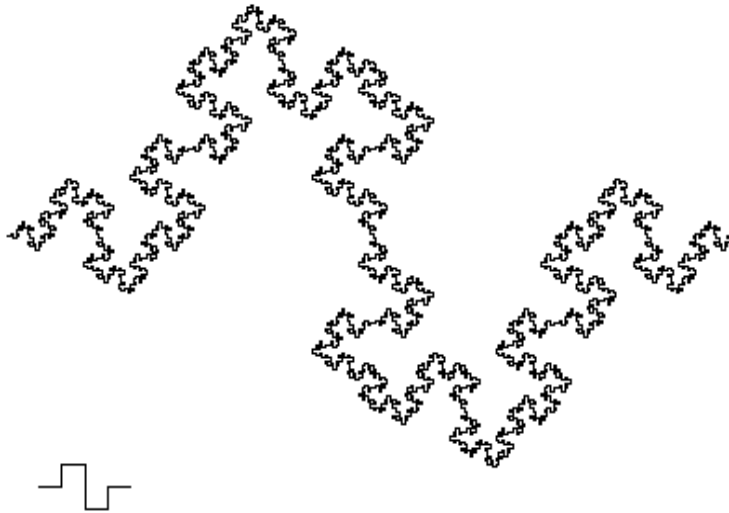
Apliquemos, ahora que ya sabemos como se calcula la dimensión fractal, la fórmula a la curva de Koch para así saber su dimensión. Si nos centramos en el gráfico de la curva, podemos denotar que cada segmento de la misma se compone de 4 segmentos ( $N(L) = 4$ ). Es decir, lo que hacemos para generar la curva de Koch es sustituir, en cada iteración, las líneas rectas o segmentos por la figura inicial. En otras palabras, será sustituir las líneas rectas por la figura inicial, si estamos en la primera iteración, o la figura anterior, si estamos en cualquier iteración, reducida 3 veces, por tanto  $\frac{1}{3}$  más pequeña ( $L = \frac{1}{3}$ ), si pretendemos calcular su dimensión fractal aplicaremos la fórmula anteriormente definida de la siguiente forma,

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,2618\dots$$

Como conclusión hemos de destacar que, la curva de Koch se encuentra ocupando parte del plano pero sin llegarse a considerar un objeto del plano bidimensional ya que es un número fraccionario, pero un número fraccionario muy cercano al 1, es decir, más cercano al uno que al dos, lo cual implica en el hecho de que si bien no es de dimensión 1 esta más cercana a ella que a la dimensión 2, aunque no sea ni lo uno ni lo otro.

Trasladando esto al ejemplo inicialmente planteado al principio de este capítulo el matemático Lewis Fry Richardson estimó la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña en 1,2 aproximadamente.

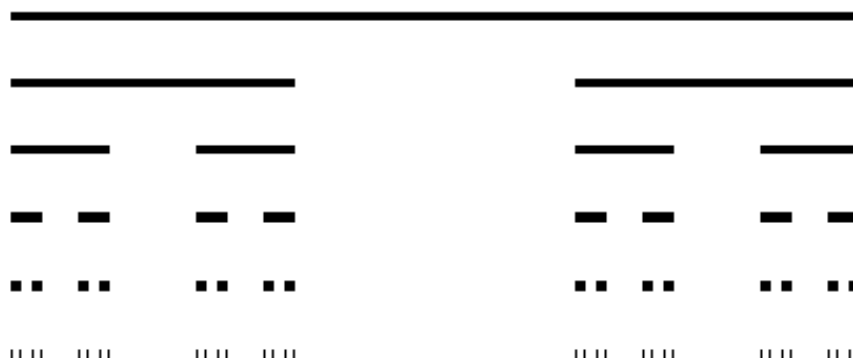
Una variante de la curva de Koch es el denominado conjunto de Koch de 8 segmentos,



Si nos ...jamos cada segmento de la curva queda sustituido por otros 8 ( $N(L) = 8$ ), siendo cada uno de los cuales  $1/4$  más pequeño que su antecesor ( $L = 1/4$ ), siendo su dimensión fractal,

$$D = \frac{\log(8)}{\log(4)} = 1,5$$

Otro fractal a destacar es el conjunto de Cantor, que se forma mediante la sucesiva sustitución de un segmento por otros dos, siendo estos de medida un tercio del anterior.



Como podemos observar en la figura los dos nuevos segmentos se sitúan a cada extremo dejando libre la parte interior.

Una vez realizado el proceso de generación del conjunto de Cantor podríamos plantearnos lo siguiente: como vemos el segmento tiende a ser cada vez más pequeño, por tanto cabría pensar que, si este proceso se repitiese hasta el infinito, el segmento desaparecería. Pero esto no es del todo cierto, irá disminuyendo hasta longitudes infinitesimales, pero nunca llegará a desaparecer.

En definitiva, el conjunto de Cantor es un fractal. Ocurre algo parecido a lo que nos habíamos encontrado con la curva de Koch, salvo por una pequeña diferencia, mientras que en la curva de Koch la figura tendía hacia una complejidad infinita, a cada iteración, ahora por el contrario, nos encontramos que tiende a cero.

Además, se nos plantea la siguiente cuestión: debemos considerar al conjunto de Cantor como puntos que forman segmentos y van desapareciendo o bien como simples líneas rectas que van disminuyendo su longitud.

Como hemos visto el conjunto de Cantor es un fractal. Calculemos, por tanto, su dimensión fractal. Cada segmento del conjunto de Cantor se divide a su vez de otros dos ( $N(L) = 2$ ), cada uno de los cuales es  $\frac{1}{3}$  más pequeño que el antecesor ( $L = 1/3$ ). Su dimensión fractal será por tanto, aplicando la fórmula dada:

$$D = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,6309\dots$$

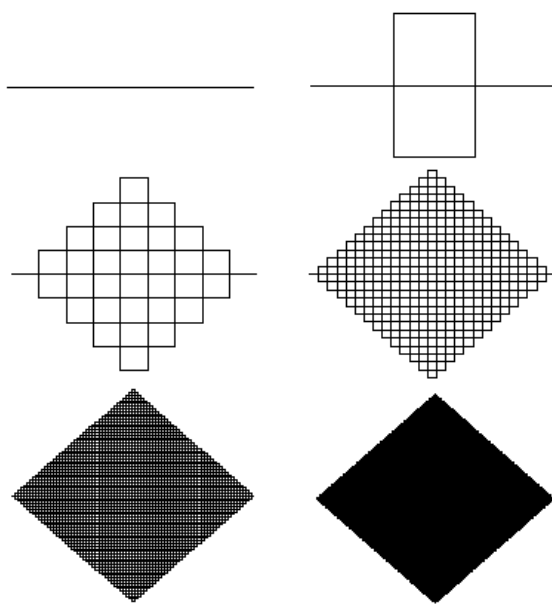
Demostrándose, de forma numérica, que se trata de un fractal. Pero analice-

mos el resultado obtenido. Si nos ...jamos, se trata de una ...gura que está entre lo que consideraríamos, mediante planteamientos clásicos, un punto y una recta. Por tanto, no deberíamos ni considerar dicho conjunto ni como puntos ni como rectas, sino cómo algo entre ambos.

Para ...nalizar, deberíamos destacar que podremos saber si una ...gura es un fractal si al calcular su dimensión fractal obtenemos una dimensión mayor que su dimensión euclídea. Además, podemos destacar el hecho de que la dimensión fractal de un curva siempre estará situada entre los valores 1 y 2,

$$1 < D < 2$$

produciéndose, cuando la dimensión fractal es igual a 2, un tipo muy especial de fractales: los conocidos como curvas de Peano. Reciben esta denominación debido al hecho de que la primera, de toda esta familia de curvas, fue descubierta en 1900 por Giuseppe Peano,



Como hemos dicho la curva de Peano tiene una dimensión fractal igual a 2. Analicemos ahora las implicaciones que esto tiene, o mejor dicho estudiemos este tipo de propiedad y extraigamos conclusiones.

El hecho de que estemos ante una ...gura de dimensión 2 signi...ca que las curvas han de llenar el plano completamente. Esta sería una primera consi-

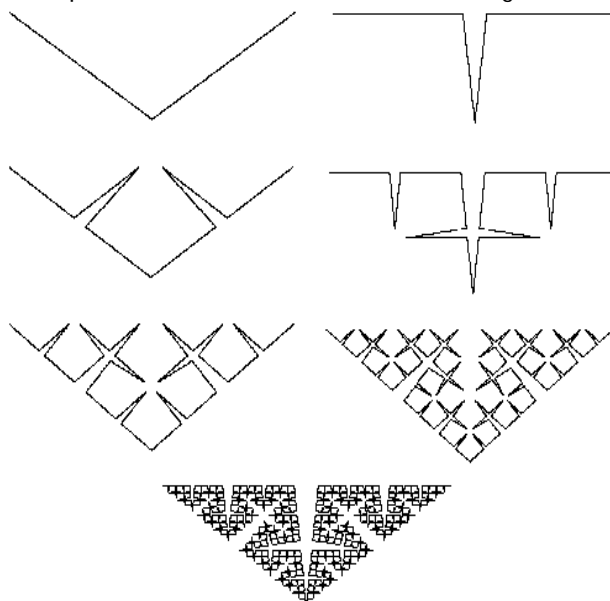


deración. Como segunda consideración, destacar que las curvas han de tener intersecciones consigo mismas. Es decir, estamos diciendo que han de llenar el plano, por consiguiente deben haber infinitos puntos en los que la curva se corte así misma de lo contrario no lo llenaría.

Si calculamos su dimensión fractal comprobaremos que esta es igual a 2: ...jándonos podemos destacar que la curva de la que se parte (el segundo nivel en la generación de la curva de Peano, ya que el primero es una línea recta) esta formada por 9 ( $N(L) = 9$ ) segmentos cada uno de los cuales tiene una longitud de un tercio de la línea original ( $L = \frac{1}{3}$ ), por tanto,

$$D = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2 \tag{1}$$

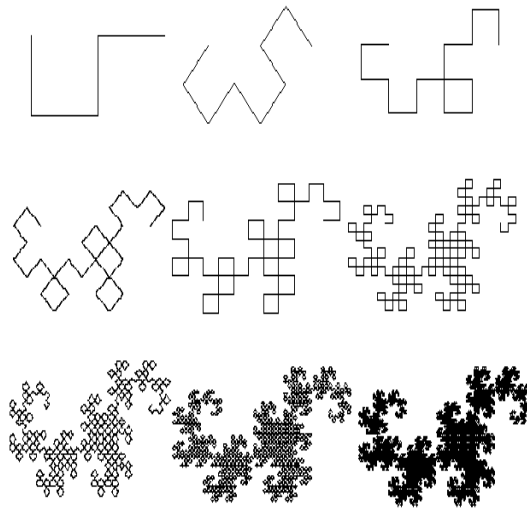
Otra curva perteneciente a esta familia es la Curva de Cesàro, descubierta en 1905 por Ernest Cesàro. Figura que se genera tomando dos rectas que forman un ángulo de  $90^\circ$ , a partir de las cuales, iremos sustituyendo cada recta por otras dos formando siempre un ángulo de  $90^\circ$  y así sucesivamente. Como consecuencia de repetir esa sustitución de rectas iremos generando un triángulo.



Curva de Cesàro

Una variante a la curva de Cesàro es la planteada por Harter-Heightway conocida como Dragón. Es una variante a la anterior en el hecho de que partiendo de la misma base, es decir, considerando rectas que forman un ángulo

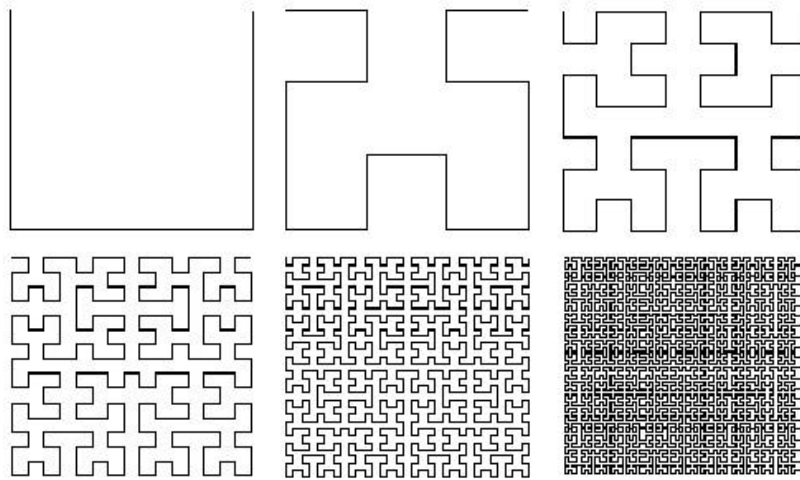
de  $90^\circ$ , iremos sustituyendo cada recta por otras dos que forman entre ellas  $90^\circ$ . Pero con una salvedad, que será el hecho de que estas se irán sustituyendo alternativamente sobre la izquierda y la derecha del generador. Consiguiéndose así, una ...gura un tanto particular.



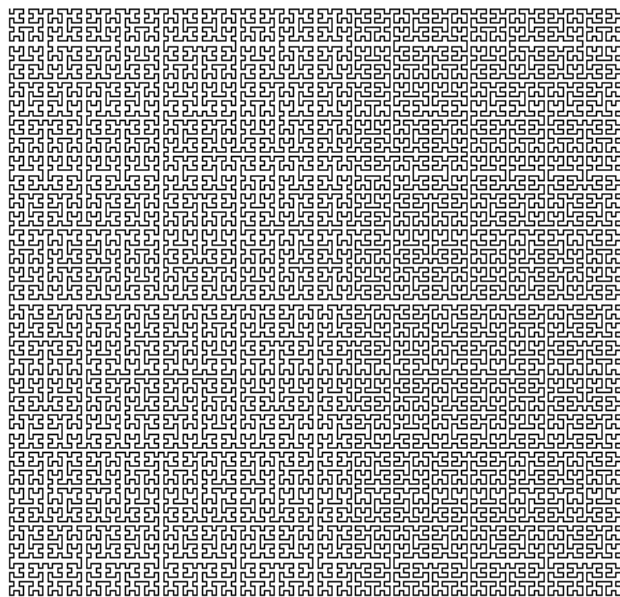
Dragón

Destacar que, una vez generado el fractal, este recibe el nombre de dragón por su similitud con los dragones de la tradición china

Siguiendo en la familia de curvas de Peano, que como hemos dicho son aquellas cuya dimensión fractal es igual a 2, encontramos por último la Curva de Hilbert. En la generación de este fractal sustituiremos cada segmento por otros cuatro, pero con la mitad de longitud del predecesor. Nótese que se trata de una sola línea quebrada y que además si tras un número su...cientemente grande de iteraciones la curva pasará por todos los puntos del plano, lo que hace que dicho fractal tenga una dimensión fractal igual a dos.



Detalle de la generación de la Curva de Hilbert

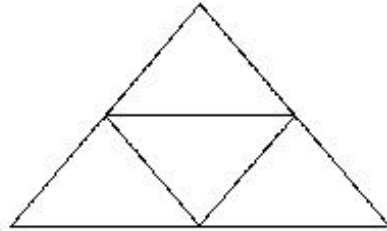


Curva de Hilbert. Nótese que se trata de una sola recta

Destacar por último, el conocido Triángulo de Sierpinski, creado en 1974 y que recibe dicho nombre en honor a su descubridor, W. Sierpinski.

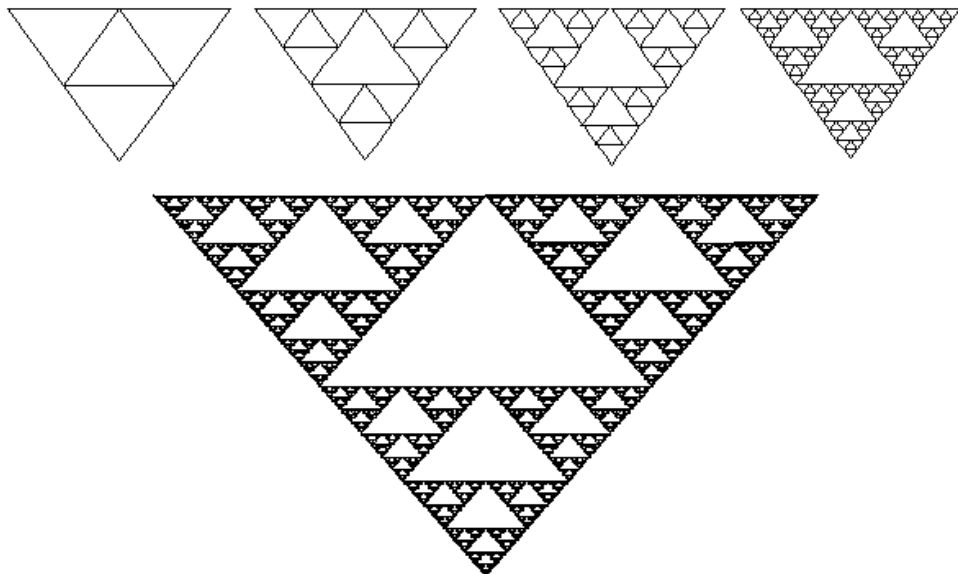
La generación del triángulo de Sierpinski es de una gran sencillez, pero pese

a esta característica logramos una figura de complejidad extrema. Dicho fractal se genera partiendo de la idea de que un triángulo equilátero cualquiera, puede formarse a partir de otros cuatro triángulos también equiláteros, pero de lado la mitad del original. Veámoslo gráficamente,



Detalle de creación de un triángulo equilátero a partir de cuatro dos veces más pequeños

Tomando esta idea vamos a construir un fractal de la siguiente forma: partiremos de un triángulo equilátero e intentaremos reproducirlo mediante cuatro que sean la mitad. El siguiente paso consiste en realizar la misma operación con los cuatro triángulos que tenemos y así sucesivamente.



Triángulo de Sierpinski

### 2.3. Generación de fractales de variable compleja

Si recordamos, hemos visto que al iterar un sistema dinámico, de variable real, podía tender hacia un punto fijo o hacia un comportamiento cíclico, o bucle, o por defecto hacia un comportamiento caótico. Ahora, podríamos plantearnos lo mismo cogiendo una función de variable compleja. En consecuencia, lo que obtendremos serán resultados bastante interesantes, generándose figuras de gran complejidad y belleza. Una de estas figuras será El conjunto de Mandelbrot. Veamos los diferentes métodos para la generación de fractales de variable compleja.

Para crear cualquier tipo de fractal el primer paso consiste en definir algún tipo de algoritmo, gráfico como vimos con los ejemplos anteriores o numérico como veremos ahora. Siendo los dos más destacados para el caso de variable compleja:

- Algoritmo de tiempo de escape.
- Método de Newton.

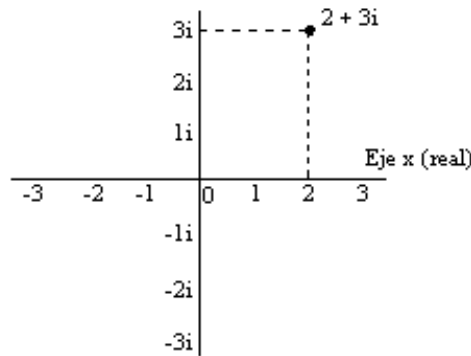
#### Algoritmo de tiempo de escape

Como hemos dicho la variable que tenemos es compleja. Hagamos una consideración previa sobre los números complejos, que nos servirá posteriormente para explicar en que consiste el algoritmo de tiempo de escape.

Los números complejos, como sabemos, están formados por dos partes: una parte real y otra imaginaria. Si llamamos  $\alpha$  a la parte real y  $\beta$  a la imaginaria, tienen la siguiente forma,

$$\alpha + \beta i \quad \text{donde } i = \sqrt{-1}$$

Los números complejos pueden ser representados gráficamente, utilizando un eje real y uno imaginario, recibiendo este plano el nombre de Plano complejo. El lugar donde se centran los ejes, denominado como origen, se corresponde con el número complejo  $0 + 0i$ . Si representamos como ejemplo el número complejo  $2 + 3i$  obtenemos lo siguiente,



Plano complejo

Otro concepto a destacar, a parte de la representación, sobre los números complejos es la distancia entre números complejos. Nos interesará, concretamente, la distancia entre el origen y cualquier otro punto, siendo esta la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria:

$$d = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, podemos iniciar la explicación del algoritmo de tiempo de escape. El proceso es el siguiente: Se considera un entorno de origen cero y radio  $r$ . Tomemos por ejemplo un entorno centrado en el origen y de radio 2. El algoritmo de tiempo de escape consistirá en coger cualquier punto del plano complejo, iterar sobre él el sistema dinámico de...nido (sistema dinámico que, recordemos, ha de ser de variable compleja) y estudiar su órbita. De forma que, si al iterar sobre dicho punto, obtenemos algún valor de la órbita cuya distancia entre él y el origen es mayor a la de...nida en el radio, en nuestro ejemplo habíamos considerado 2, pintaremos el punto de un color determinado. Color que irá en función del número de iteración en el cual ha salido del entorno. Por ejemplo, podríamos pintar de amarillo todos aquellos puntos que salgan en la primera iteración, de verde todos aquellos que lo hagan en la segunda, de rojo los de la tercera, etc... Pero aquí no acaba el proceso, ya que habrá puntos que aunque los iteremos in...nitas veces no saldrán nunca y estos los pintaremos, también de un color concreto, por ejemplo el azul. Destacar, llegados a este punto, una idea interesante. Mientras que en los casos anteriores, al iterar la función de alguna forma nos íbamos al in...nito (salíamos del entorno), ahora, podemos toparnos con puntos que no salgan, la órbita no escapa, no sale fuera del radio 2 (véase la similitud existente entre lo que habíamos de...nido como sistema estable, si

tendía a un punto ...jo, o inestable, caos).

Pues bien, si realizamos lo expuesto hasta ahora y utilizamos la siguiente fórmula o sistema dinámico,

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

donde  $Z$  y  $C$  son números complejos y el proceso de iteración se genera partiendo siempre del  $0 + 0i$ , se tiene

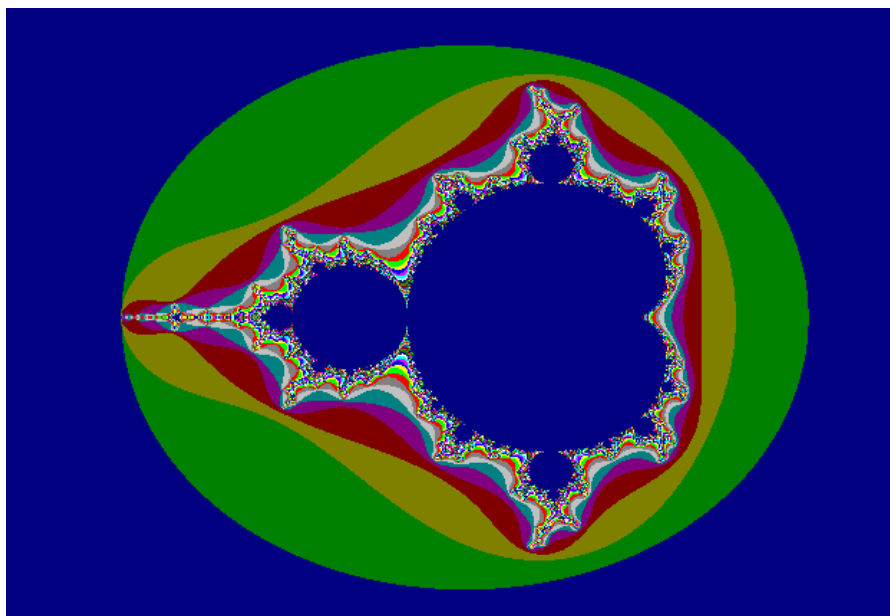
$$\begin{aligned} Z_0 &= 0 + 0i \\ Z_1 &= Z_0^2 + C \\ Z_2 &= Z_1^2 + C \\ &\dots \\ Z_{n+1} &= Z_n^2 + C, \end{aligned}$$

tomando como  $C$  el punto sobre el que se quiera iterar. Por ejemplo, calculemos la órbita del punto  $0,37 + 0,4i$ . Es decir, iteremos la función en dicho punto, tendremos  $Z_0 = 0 + 0i$ , pasando a calcular  $Z_1$ ,  $Z_1 = (Z_0)^2 + C$  (cómo  $0 \in 0 = 0$ ),  $Z_1 = 0 + C$ , donde  $C = 0,37 + 0,4i$  por consiguiente  $Z_1 = 0,37 + 0,4i$ ; para  $Z_2$  seguiremos el mismo procedimiento y en definitiva crearemos la siguiente tabla:

		<b>Real</b>		<b>Imaginario</b>		<b>Distancia</b>	
$Z_0$	=	0	+	0·i	$ Z_0 $	=	0.000
$Z_1$	=	0.370	+	0.4·i	$ Z_1 $	=	0.545
$Z_2$	=	0.347	+	0.696·i	$ Z_2 $	=	0.778
$Z_3$	=	0.006	+	0.883·i	$ Z_3 $	=	0.883
...	...	...	...	...	...	...	...
$Z_{11}$	=	1.415	+	1.219·i	$ Z_{11} $	=	1.868
$Z_{12}$	=	0.885	+	3.850·i	$ Z_{12} $	=	3.95

Si nos ...jamos en la 12ª iteración la distancia es mayor que 2, por tanto pintaríamos el punto del color prede...nido para aquellos puntos cuya órbita se escapa en la iteración 12.

Si realizamos esta operación para todos los puntos del plano complejo, lo que estaremos haciendo es generar el fractal conocido como conjunto de Mandelbrot, cuya representación o forma es la siguiente:



Conjunto de Mandelbrot

Destacar, una vez visto el conjunto de Mandelbrot, su belleza y complejidad. Pero algo aún más importante a subrayar sería el hecho de que, el fractal denominado como conjunto de Mandelbrot, podría denominarse como una familia de fractales: los denominados conjuntos de Julia.

Los conjuntos de Julia fueron descubiertos a principios de siglo por el matemático francés Gastón Julia y para denominarlos acudiremos a la definición que nos proporciona Barallo (1993).

“...Podemos definir el conjunto de Julia como la frontera del conjunto de puntos que escapan al infinito tras un número suficientemente grande de iteraciones. Esto significa que la órbita de un punto del conjunto de Julia no escapa al infinito, pero arbitrariamente cerca de éste existen puntos cuyas órbitas sí lo hacen.”

En definitiva la generación de los conjuntos de Julia es muy similar a la del conjunto de Mandelbrot. Para ello, partiremos de la iteración de la misma función que utilizamos para generar el anterior fractal:



$$F_c(Z) = Z^2 + C$$

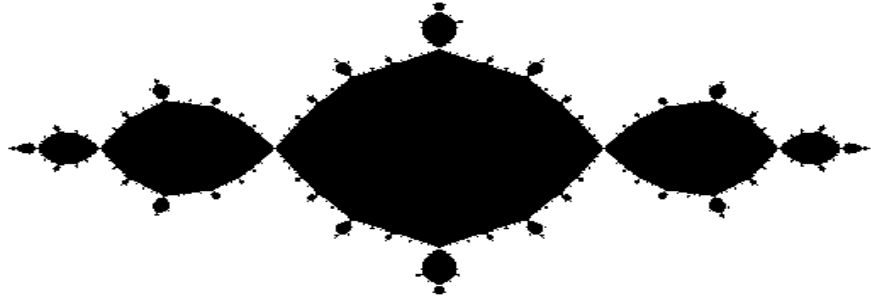
Seguiremos el mismo proceso que el seguido con anterioridad. Es decir, utilizaremos un proceso de generación de fractales por tiempo de escape, pero con una salvedad. Ahora  $C$  será un parámetro complejo, es decir, cogeremos un número complejo cuyo valor será  $C$  y generaremos una figura en función de ese número, por consiguiente, para cada valor de  $C$  tendremos un fractal diferente.

De ahí, la afirmación realizada con anterioridad de que el fractal conjunto de Mandelbrot era una generalización de los fractales conjuntos de Julia, ya que lo que hacemos al generar el de Mandelbrot es ir variando  $C$ , mientras que los de Julia lo mantienen fijo.

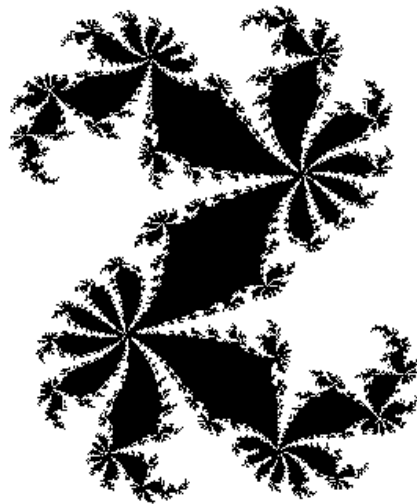


Conjunto de Julia relleno para  $C = -0,36 - 0,1i$

Nótese que el fractal, tal y como indica la definición, se correspondería con la frontera de la figura representada. Hemos pintado el interior de negro para diferenciarlo de la parte exterior, de ahí que lo denominemos conjunto de Julia relleno.



Conjunto de Julia relleno para  $C = i + 1 + 0i$



Conjunto de Julia relleno para  $C = 0,36 + 0,1i$

### Método de Newton

En el método anterior hemos, de alguna forma, hallado aquellos puntos cuyas órbitas se sentían atraídas hacia el infinito. Es decir, calculábamos las órbitas

de puntos y veíamos cuales salían de un radio de...nido. No costaría observar que si cogemos un punto, que una vez iterado su órbita sale fuera del radio de...nido, y continuamos iterando sobre él, la órbita irá describiendo una espiral cada vez mayor hacia el in...nito. Por tanto, podemos decir que dichos puntos se sienten atraídos por el in...nito. En de...nitiva el in...nito es un atractor para estos puntos.

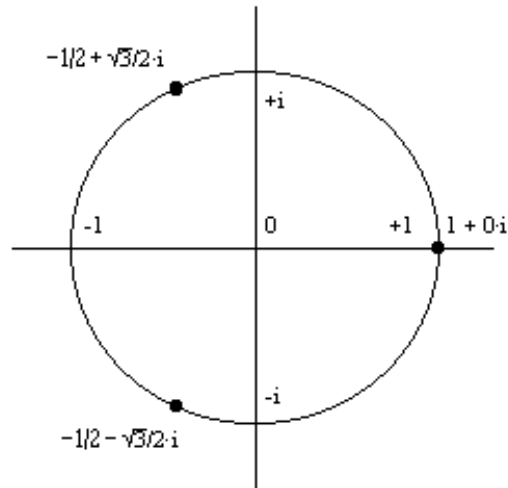
El planteamiento en el Método de Newton sigue esa idea. Es decir, intentando ver que puntos son los atractores del sistema. La idea es similar a la utilizada en el procedimiento de tiempo de escape, pero en lugar de que sea el in...nito el atractor, ahora este atractor será un número.

La fórmula sobre la que iteraremos ahora, será un poco más compleja:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}$$

Pasemos a ver de forma práctica lo que acabamos de explicar.

Planteémonos el siguiente ejemplo: hallar las raíces que cumplen  $Z^3 - 1 = 0$ . Planteamos una  $f(Z_n) = Z^3 - 1$ . Si  $Z$  es un número real no tiene mayor complicación. La solución serían aquellos puntos tales que multiplicados por si mismos son iguales a uno. Solo existe un número: el 1. Pero si  $Z$  es un número complejo la cosa se complica, ya que en ese supuesto existen tres soluciones. Tres soluciones que son tres puntos espaciados por igual del origen, en un círculo de radio 1, siendo estos los números complejos  $1 + 0i$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Veámoslo representando gráficamente en el plano complejo dichos puntos,

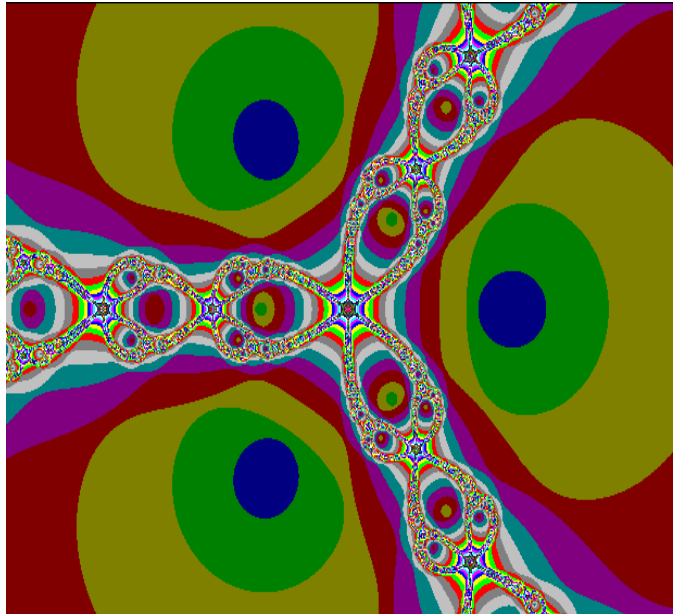


Raíces cúbicas complejas de 1

Para generar el fractal el procedimiento que seguiremos será el mismo que utilizamos con anterioridad. Pero, se generará mediante la fórmula que detallamos a continuación,

$$Z_{n+1} = \frac{(2 \zeta Z^3 + 1)}{3 \zeta Z^2}$$

Como hemos comentado, la principal diferencia radica en que ahora entendemos por escape algo distinto. Las órbitas escapan, o mejor dicho morirán, cuando sean atraídas por alguno de los tres puntos de...nidos. Pintando cada punto de un color distinto en función de la iteración en que queda capturada su órbita se obtiene la ...gura que se observa a continuación. Pero, si la observamos con detalle, los puntos que se encuentran en la frontera, puntos que separarían el radio de acción de los atractores, los colores se entremezclan de forma desordenada. Hay puntos atraídos por una raíz y otros por otra, en distintas iteraciones, lo que produce que moviéndonos en un espacio muy pequeño podamos ser atraídos por un punto o por otro en diferentes iteraciones. Esta claro que se trata de zonas de alta inestabilidad y podríamos considerar, que este fenómeno, se debe a la existencia de caos en esas zonas.



Fractal generado según método de Newton para la raíz cúbica de 1

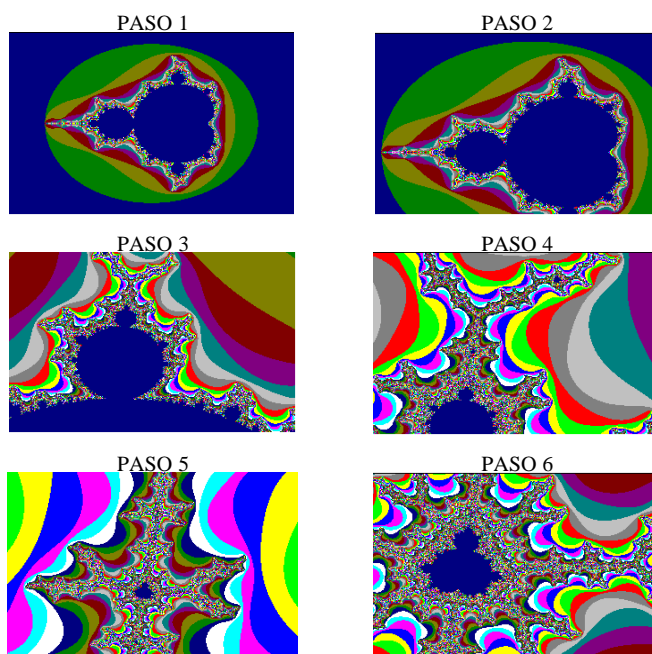
### .3. Propiedades de los fractales

Finalmente deberíamos destacar las propiedades básicas que debemos tener en cuenta, una vez visto lo que son los fractales y cómo se generan. Propiedades que ya han sido destacadas con anterioridad, pero que no han sido declaradas como tales.

Los fractales cumplen las propiedades que se detallan a continuación:

1. **Dimensión fraccionaria.** Tal y como destacamos, cuando introducimos el concepto de dimensión fractal, toda figura denominada fractal debe tener una dimensión fraccionaria.
2. **Autosimilitud y compleja estructura a todas las escalas.** Fijémonos, por ejemplo, en el fractal de Mandelbrot y veamos como, a medida que vamos ampliando ciertas partes, siempre mantiene la misma estructura; se parece a él mismo. En otras palabras, es autosemejante a todas las escalas. Pero no sólo eso, sino que además podemos denotar que dicho fractal es sumamente complejo, tal es así que fue considerado por la revista *Scientific American* como el objeto matemático más complejo que existe.

Por analogía, como dicho fractal es autosemejante en todas las escalas, también será complejo a todas las escalas.

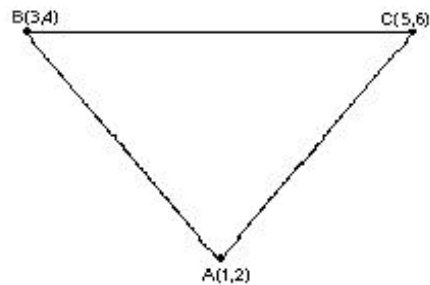


#### .4. El juego del caos

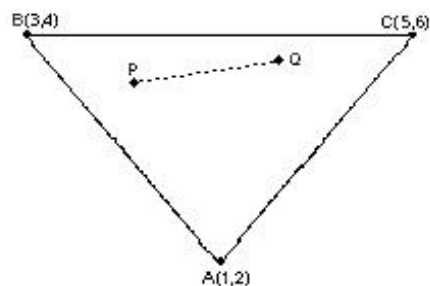
Todo lo anteriormente descrito es muy divertido y sobretodo es muy vistoso. Ver ...guras que se van generando siguiendo una lógica es algo muy atractivo. Pero, llegados a este punto, podríamos considerarlas como simples entretenimientos matemáticos, simples casos anecdóticos, ya que realmente solo hemos visto que tienen lógica dentro del mundo abstracto de la matemática. No hemos llegado a ver la relación que esto tiene con la realidad. Para ver el vínculo entre fractales y realidad seguiremos el siguiente ejemplo, que es un experimento matemático que por su simplicidad aparente y su complejidad interna es siempre citado en la mayoría de manuales que tratan el tema y además nos servirá para destacar y puntualizar la idea de que un fenómeno puede ser aparentemente aleatorio o aparentemente determinista dependiendo del punto de vista

que tomemos.

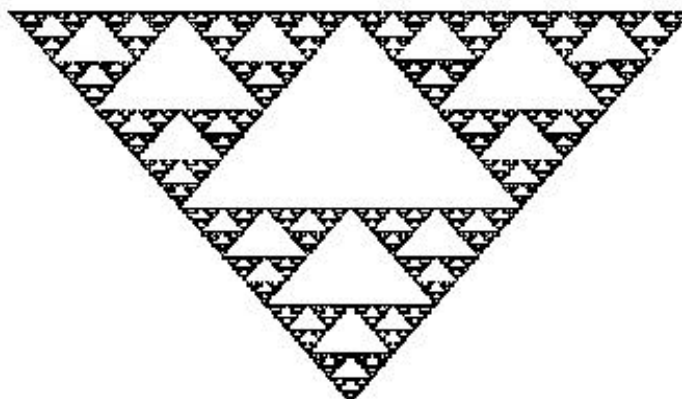
Para jugar a este juego consideremos tres puntos situados de tal de forma que sean los vértices de un triángulo. Los llamaremos respectivamente  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  y  $C(5, 6)$ . Este será el tablero de nuestro juego, que puede observarse en la ...gura siguiente:



Ahora cogemos un punto cualquiera  $P$  del interior del hipotético triángulo o bien de su frontera. A continuación lanzamos un dado y nos dirigiremos, en línea recta, desde ese punto al punto (o vértice del triángulo) que contenga el resultado de nuestra tirada. Nos pararemos justo en la parte intermedia de la distancia que une el punto  $P$  y el vértice, obteniendo un nuevo punto  $Q$ . Por ejemplo si tiramos el dado y nos sale un 6, nos moveremos en línea recta hasta el punto medio que exista entre  $P$  y  $C$ , obteniendo y marcando el nuevo punto  $Q$ .



Una vez en  $Q$  repetimos la operación tantas veces como queramos. Si realizamos la operación con un ordenador y repetimos la operación un número su...ciente de veces (por ejemplo 10.000) y despreciamos los 50 primeros puntos, obtendremos la siguiente ...gura ...nal:



El triángulo resultante es un número infinito de triángulos contenidos en uno mayor. Como ya sabemos, si además incrementamos la resolución podremos ir viendo como a su vez estos pequeños triángulo se componen a su vez de triángulos más pequeños. Recordemos que esta autosimilitud es una característica básica, aunque no exclusiva, de los fractales.

Paradójicamente la forma a la que llegamos no depende de la elección del punto inicial. Para cualquier punto obtendríamos la misma figura. Lo importante que debemos destacar es que llegamos a obtener la misma solución a pesar de que introducimos dos elementos aleatorios en el juego, el primero es la elección del punto y el segundo el lanzamiento del dado. En definitiva, la idea es que, a nivel local, los puntos van apareciendo de forma aleatoria, incluso los puntos van apareciendo en orden diferente cada vez que realizamos el proceso. Pero al obtener siempre el triángulo de Sierpinski podemos afirmar que el sistema reacciona de forma determinista ante los sucesos aleatorios. En otras palabras, existe una aleatoriedad local pero un determinismo global que tiene como resultado una estructura estable. Este ejemplo es muy importante ya que nos sirve para demostrar que aleatoriedad local y determinismo global pueden coexistir creando una estructura estable, una estructura autosimilar, que llamamos fractal.

Finalizamos aquí lo que creemos es una introducción a los fractales, todo y con eso, debe quedarnos claro que no está todo dicho. Podrían llenarse páginas y más páginas, pero no consideramos oportuno tal planteamiento. Lo que pretendíamos era dar unas pinceladas y motivar la curiosidad sobre el estudio en este campo. Creemos que eso se ha conseguido.



## Apéndice 2. Programas empleados y resultados obtenidos

En este apéndice vamos a intentar dar una idea de los mecanismos, a nivel informáticos, utilizados para la realización de esta Tesis.

La primera referencia la podemos encontrar en el apartado 2.1.1 (Series temporales del tipo de interés interbancario español), donde exponemos una grá...cas que exhiben el comportamiento de las series que vamos a analizar. Dichas grá...cas están realizadas con datos obtenidos a partir del Banco de España y representadas utilizando una hoja de cálculo del programa Microsoft Excel 97.

En el apartado 2.3 (Modelización del tipo de interés) hemos seguido el mismo proceder en la representación de la serie, tomando diferencias desde la hoja de cálculo anterior.

A posteriori hemos importado los datos diferenciados al programa SPSS para Windows versión 8.0., sobre los que hemos calculado las principales características estadísticas. Dentro del mismo programa hemos realizado los histogramas de frecuencias, los grá...cos Q-Q Normal y Q-Q Normal sin tendencia y el test de Kolmogorov-Smirnov. Para el cálculo del estadístico Jarke-Bera y para el test de Ljung-Box (tanto para los datos propuestos en este apartado como para los apartados 3.2, 4.6, 4.7, 5.2.5 y 6.6) hemos recurrido a la utilización del programa Econometrics Views versión 2.0.

En el apartado 3.2 (Estimación de modelos  $ARIMA(p, d, q)$ ) hemos realizado la representación de las grá...cas de la FA y la FAP utilizando el programa SPSS. También lo hemos utilizado en la selección de los modelos utilizando los criterios CIA y CS. Mediante el SPSS hemos estimado 120 modelos  $ARMA$

para cada serie y hemos tomado los valores de dichos criterios, estimando en total 960 modelos y pudiendo, así, crear las tablas que se incluyen el capítulo 3. Posteriormente, una vez detectado el mejor *ARMA* para cada caso hemos ajustado el modelo, obteniendo los siguientes resultados,

```
ARMA (3,1) ESTIMATION
SERIES: 1 día

FINAL PARAMETERS

Number of residuals      2733
Standard erro error     0.48417315
Log likelihood           -1893.9793
AIC                     3795.9587
SBC                     3819.6113

Variables of the model

      B      SEB      T-RATIO  APP. PROB.
AR1    0.8788421  0.05463587  16.085442      0
MA1    1.4614092  0.0583378  25.050809      0
MA2   -0.4582292  0.04301753 -10.652151      0
MA3   -0.0311692  0.02288312  -1.362104  0.17327762
```

Resultados de la estimación de un modelo *ARMA*(1, 3) sobre la serie de interés a 1 día.

```
ARMA (1,6) ESTIMATION
SERIES: 1 semana

FINAL PARAMETERS

Number of residuals      2706
Standard erro error     0.18508487
Log likelihood           728.62826
AIC                     -1443.2565
SBC                     -1401.9339

Variables of the model

      B      SEB      T-RATIO  APP. PROB.
AR1    0.82666916  0.05711174  14.474592      0
MA1    0.77415291  0.05919098  13.078901      0
MA2    0.06389159  0.02441264  2.617151  0.00891619
MA3    0.09191084  0.02424229  3.791343  0.00015312
MA4   -0.0501877  0.02519501  -1.991969  0.04647501
MA5   -0.09560303  0.02449847  -3.902408  0.00009757
MA6    0.10784868  0.02010879  5.363261  0.00000009
```

Resultados de la estimación de un modelo *ARMA*(1, 6) sobre la serie de interés a 1 semana.

## ARMA (6,6) ESTIMATION

SERIES: 15 días

## FINAL PARAMETERS

Number of residuals 2703  
 Standard error error 0.19954265  
 Log likelihood 526.83658  
 AIC -1029.6732  
 SBC -958.84774

## Variables of the model

	B	SEB	T-RATIO	APP. PROB.
AR1	-2.1086008	0.10323675	-20.424904	0
AR2	-1.7215201	0.19651827	-8.760102	0
AR3	-0.2106382	0.19372626	-1.087298	0.27700237
AR4	1.2673938	0.15109903	8.387835	0
AR5	1.4769569	0.11976566	12.332057	0
AR6	0.5548176	0.06751979	8.217111	0
MA1	-2.0053795	0.10780556	-18.60182	0
MA2	-1.4743222	0.19018389	-7.752088	0
MA3	0.0612117	0.15627618	0.391689	0.69531904
MA4	1.4696553	0.111907	13.132827	0
MA5	1.4732652	0.12874354	11.44341	0
MA6	0.4699857	0.08105268	5.798522	0

Resultados de la estimación de un modelo  $ARMA(6,6)$  sobre la serie de interés a 15 días.

## ARMA (0,3) ESTIMATION

SERIES: 1 mes

## FINAL PARAMETERS

Number of residuals 2732  
 Standard error error 0.13657933  
 Log likelihood 1563.9104  
 AIC -3121.8208  
 SBC -3104.0824

## Variables of the model

	B	SEB	T-RATIO	APP. PROB.
MA1	-0.2768244	0.01908222	-14.506928	0
MA2	-0.05314549	0.01977801	-2.6871	0.00725127
MA3	0.07914134	0.01908602	4.146562	0.00003478

Resultados de la estimación de un modelo  $ARMA(0,3)$  sobre la serie de interés a 1 mes.

ARMA (2,0) ESTIMATION  
SERIES: 2 meses

## FINAL PARAMETERS

Number of residuals 2304  
Standard erro error 0.14261635  
Log likelihood 1219.0068  
AIC -2434.0136  
SBC -2422.5288

## Variables of the model

	B	SEB	T-RATIO	APP. PROB.
AR1	0.18229832	0.02075482	8.78342	0
AR2	-0.09200441	0.02075989	-4.4318344	0.00000978

Resultados de la estimación de un modelo  $ARMA(2, 0)$  sobre la serie de interés a 2 meses.

ARMA (1,0) ESTIMATION  
SERIES: 3 meses

## FINAL PARAMETERS

Number of residuals 2725  
Standard erro error 0.09267024  
Log likelihood 2615.8334  
AIC -5229.6668  
SBC -5223.7566

## Variables of the model

	B	SEB	T-RATIO	APP. PROB.
AR1	0.27077606	0.01844362	14.681288	0

Resultados de la estimación de un modelo  $ARMA(1, 0)$  sobre la serie de interés a 3 meses.

ARMA (1,1) ESTIMATION  
SERIES: 6 meses

## FINAL PARAMETERS

Number of residuals 2588  
Standard erro error 0.09701502  
Log likelihood 2366.2966  
AIC -4728.5933  
SBC -4716.876

## Variables of the model

	B	SEB	T-RATIO	APP. PROB.
AR1	0.77077365	0.09603623	8.0258632	0
MA1	0.71200464	0.10586142	6.7258179	0

Resultados de la estimación de un modelo  $ARMA(1, 1)$  sobre la serie de interés a 6 meses.

```

ARMA (2,1) ESTIMATION
SERIES:      1 año

FINAL PARAMETERS

Number of residuals      2219
Standard error          0.10387728
Log likelihood          1877.8864
AIC                    -3749.7727
SBC                    -3732.6583

Variables of the model

              B          SEB      T-RATIO  APP. PROB.
AR1          0.76891049  0.09274803  8.2903165      0
AR2          0.06408399  0.0231772  2.7649578  0.00574017
MA1          0.78486855  0.09114458  8.611248      0

```

Resultados de la estimación de un modelo  $ARMA(2, 1)$  sobre la serie de interés a 1 año.

Con objeto de obtener los residuos de los modelos planteados, se volvió a la utilización de hojas de cálculo.

En el apartado 4.2 (Autosimilitud de procesos estacionarios) diseñamos un programa en lenguaje FORTRAN 90, utilizando el compilador de Salford Compilers, que nos permite generar una serie aleatoria (concretamente generamos  $N=10000$  datos aleatorios) que se distribuye según una distribución normal de media  $C=0$  y varianza  $D=1$ . Retocando estos valores se podría generar cualquier serie regida por una ley normal con media  $C$  y varianza  $D$ . Más adelante volveremos sobre este tema. El programa es el siguiente,

```

! *****
! PROGRAMA BASE PARA SIMULACION DE VARIABLES
! ALEATORIAS N(0,1) EN FORTRAN 90
! *****
DOUBLE PRECISION C,D,X(10000)
CHARACTER (LEN=12) RES
INTEGER I,N
C=0
D=1
N=10000
WRITE(*,*) 'Introduce el nombre del ...chero de resultados...'
READ(*,*) RES

OPEN(1,FILE=RES,STATUS='NEW')
CALL G05CCF

```

```

CALL G05FDF(C,D,N,X)
DO 10 I=1,N
  WRITE(1,*) X(I)
10 CONTINUE
CLOSE(1)
END

```

El apartado 4.1.4. (Movimiento browniano fraccional) nos permite el desarrollo de un programa también en FORTRAN 90 con objeto de simulación de un movimiento browniano fraccional,

```

! *****
! PROGRAMA BASE PARA SIMULACION
! DEL UN MOVIMIENTO BROWNIANO
! FRACCIONAL EN FORTRAN 90
! *****

DOUBLE PRECISION S14AAF,C,D,X(100000)&
,B(10000),G,A,E0,E1,E2,E3,H,H1,Z1,Z2
CHARACTER (LEN=12) RES
INTEGER I,K,L,T,M,N,NO,IFAIL,NVA,Z3
EXTERNAL S14AAF
WRITE(*,*) 'EL SIGUIENTE PROGRAMA SIMULA UN RUIDO BROW-
NIANO FRACCIONAL '&
,'DE PARAMETRO H.'
C=0
D=1
WRITE(*,*) 'Introduce valor de H...'
READ (*,*) H
N=10
M=3000
WRITE(*,*) 'Introduce en número de variables a simular en la serie...'
READ(*,*) NO
NVA=(N*(M+NO))+1
WRITE(*,*) 'Introduce el nombre del ...chero de resultados...'
READ(*,*) RES
OPEN(1,FILE=RES,STATUS='NEW')
WRITE(1,*) 'SIMULACION DE UNA TRAYECTORIA BROWNIANA FRAC-
CIONARIA'
WRITE(1,*) 'H= ',H

```

```

WRITE(1,*) 'NUMERO DE OBSERVACIONES= ',NO
WRITE(1,*) 'N= ',N
WRITE(1,*) 'M= ',M
H1=H+0.5
G=S14AAF(H1,IFAIL)
CALL G05CCF
WRITE(*,*) 'Simulando variables aleatorias...'
CALL G05FDF(C,D,NVA,X)
WRITE(*,*) 'Simulación de variables aleatorias realizada'
DO 2 T=1,NO
  WRITE(*,*) 'T= ',T
  A=(N**(-H))/G
  E1=0
  E3=0
  DO 20 K=1,N
    Z1=K**(H-(0.5))
    Z3=1+N*(M+T)-K
    E0=(Z1)*X(Z3)
    E1=E1+E0
  20 CONTINUE
  DO 21 L=1,N*(M-1)
    Z1=(N+L)**(H-0.5)
    Z2=L**(H-0.5)
    Z3=1-L+N*(M-1+T)
    E2=((Z1)-(Z2))*X(Z3)
    E3=E3+E2
  21 CONTINUE
  B(T)=A*(E1+E3)
2 CONTINUE
DO 60 I=1,NO
  WRITE(1,*) B(I)
60 CONTINUE
CLOSE(1)
END

```

En el apartado 4.5 (Análisis de la memoria a largo en las series), en primer lugar hemos diseñado un programa en lenguaje FORTRAN 90 con el objeto

de estimar el parámetro  $H$  teniendo en cuenta la metodología propuesta por el análisis  $R/S$ .

```

! *****
! PROGRAMA BASE PARA CALCULO
! DEL EXPONENTE DE HURST EN FORTRAN 90
! *****
! ***** DECLARACION DE VARIABLES *****
DOUBLE PRECISION MED, DS&
, DAT(3100), D(3100), SUBMED, SUBDS, VMA(0:3100)&
, ERS1(3100), ERS2(3100), LERS1(3100), LERS2(3100)&
, ERS1SUMXY, ERS1SUMY, ERS1SUMX, ERS1SUMX2&
, ERS1Y(3100), ERS1X(3100), ERS2SUMXY, ERS2SUMY&
, ERS2SUMX, ERS2SUMX2, ERS2Y(3100), ERS2X(3100)&
, X(3100), WT(3100), XBAR, S2, S3, S4, XMIN, XMAX&
, WTSUM, RSG(3100), RM,RMED(3100),HY(3100),K1R(3100)&
,HX(3100),HSUMXY,HSUMX,HSUMX2,HSUMY,HURST,V(3100)&
,SUME,EH1,EH2,C1,C2,CUP,CDOWN
INTEGER NV,VC10,VC01,NH,VC18,MH,VC02,S,K&
,RESTO,VC03,VC04,VC05,INTINF,INTSUP,VC21,VC22,IWT,I,N&
,IFAIL,VC23,VC24,VC06,K1(3100),VC25,VC26,VC27,VC28&
,VC29,VC30,VC31,VC32,VC33
CHARACTER (LEN=12) DATOS,RES
EXTERNAL G01AAF
! ***** TRATAMIENTO DE LOS DATOS *****
WRITE(*,*) 'INTRODUCE EL NOMBRE Y EXTENSION DEL FICHERO
DE DATOS'
READ(*,*) DATOS
WRITE(*,*) 'INTRODUCE EL NUMERO DE DATOS DEL FICHERO A
ANALIZAR'
READ(*,*) NV
WRITE(*,*) 'INTRODUCE EL NOMBRE Y EXTENSION DEL FICHERO&
& DONDE QUIERAS QUE SE GUARDEN LOS RESULTADOS'
READ(*,*) RES
MED=0
DS=0
OPEN(1,FILE=DATOS,STATUS='OLD')
DO 10 VC10=1,NV

```



```
READ(1,*) DAT(VC10)
10 CONTINUE
CLOSE(1)
NH=NV
DO 18 VC18=1,NH
D(VC18)=DAT(VC18)
18 CONTINUE
VC01=VC01+1
! ***** CALCULO DEL EXPONENTE DE HURST *****
MH=NH/10
VC02=1
DO 200 S=2,MH
K=NH/S
RESTO=NH-S*K
IF(RESTO/=0) GOTO 200
VC03=1
VC04=1
INTINF=1
5 INTSUP=VC03*K
SUBMED=0
SUBDS=0
VMA(0)=0
VC05=0
DO 21 VC21=INTINF,INTSUP
VC05=VC05+1
SUBMED=D(VC21)+SUBMED
SUBDS=D(VC21)**2+SUBDS
21 CONTINUE
SUBMED=SUBMED/VC05
SUBDS=SQRT((SUBDS/VC05)-SUBMED**2)
OPEN(2,FILE='VMA.DAT',STATUS='UNKNOWN')
DO 22 VC22=INTINF,INTSUP
VMA(VC22)=VMA(VC22-1)+(D(VC22)-SUBMED)
WRITE(2,*) VMA(VC22)
22 CONTINUE
CLOSE(2)
OPEN(2,FILE='VMA.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```

IWT=0
READ(2,*) (X(I),I=INTINF,INTSUP)
N=I
CALL G01AAF(N, X, IWT, WT, XBAR, S2, S3, S4, XMIN, XMAX,
WTSUM, IFAIL)
RSG(VC04)=(XMAX-XMIN)/SUBDS
DO 23 VC23=INTINF,INTSUP
X(VC23)=0
23 CONTINUE
CLOSE(2,STATUS='DELETE')
VC04=VC04+1
INTINF=VC21
VC03=VC03+1
IF(VC03>S) GOTO 7
GOTO 5
7 RM=0
VC06=0
DO 24 VC24=1,S
VC06=VC06+1
RM=RSG(VC24)+RM
24 CONTINUE
RMED(VC02)=RM/VC06
K1(VC02)=K
K1R(VC02)=REAL(K1(VC02))
V(VC02)=RMED(VC02)*((K1R(VC02))**(-.5))
SUME=0
DO 27 VC27=1,K-1
SUME=(SUME+((K1R(VC02)-VC27)/VC27))
27 CONTINUE
ERS1(VC02)=((K1R(VC02)-0.5)/K1R(VC02))&
*((K1R(VC02)*(3.141519/2))**(-0.5))*SUME
ERS2(VC02)=(((K1R(VC02)-0.5)/K1R(VC02))&
*(K1R(VC02)*(3.141519/2))**(-0.5))*SUME
LERS1(VC02)=DLOG(ERS1(VC02))
LERS2(VC02)=DLOG(ERS2(VC02))
VC02=VC02+1
200 CONTINUE

```

```

DO 25 VC25=1,VC02-1
HY(VC25)=DLOG(RMED(VC25))
HX(VC25)=DLOG(K1R(VC25))
25 CONTINUE
OPEN(3,FILE=RES,STATUS='UNKNOWN')
WRITE(3,9999)
WRITE(3,9998) NV
WRITE(3,9995) DAT
WRITE(3,9993)
WRITE(*,*) 'Se ha hecho una regresión con',vc02,'valores'
DO 28 VC28=1,VC02-1
WRITE(3,9990) HX(VC28), HY(VC28), V(VC28), LERS1(VC28),
LERS2(VC28)
28 CONTINUE
WRITE(3,9981) VC02
HSUMXY=0
HSUMY=0
HSUMX=0
HSUMX2=0
DO 26 VC26=1,VC02-1
HSUMXY=HY(VC26)*HX(VC26)+HSUMXY
HSUMY=HY(VC26)+HSUMY
HSUMX=HX(VC26)+HSUMX
HSUMX2=HX(VC26)**2+HSUMX2
26 CONTINUE
HURST=((VC26)*HSUMXY) - (HSUMX*HSUMY) /
((VC26)*HSUMX2 - HSUMX**2)
WRITE(3,9991) HURST
WRITE(*,*) HURST
DO 29 VC29=1,VC02-1
ERS1Y(VC29)=LERS1(VC29)
ERS1X(VC29)=DLOG(K1R(VC29))
29 CONTINUE
ERS1SUMXY=0
ERS1SUMY=0
ERS1SUMX=0
ERS1SUMX2=0

```

```

DO 30 VC30=1,VC02-1
ERS1SUMXY=ERS1Y(VC26)*ERS1X(VC26)+ERS1SUMXY
ERS1SUMY=ERS1Y(VC26)+ERS1SUMY
ERS1SUMX=ERS1X(VC26)+ERS1SUMX
ERS1SUMX2=ERS1X(VC26)**2+ERS1SUMX2
30 CONTINUE
EH1=(((VC30)*ERS1SUMXY) - (ERS1SUMX*ERS1SUMY)) /
((VC30)*ERS1SUMX2 - ERS1SUMX**2)
WRITE(3,9983) EH1
DO 31 VC31=1,VC02-1
ERS2Y(VC31)=LERS2(VC31)
ERS2X(VC31)=DLOG(K1R(VC31))
31 CONTINUE
ERS2SUMXY=0
ERS2SUMY=0
ERS2SUMX=0
ERS2SUMX2=0
DO 32 VC32=1,VC02-1
ERS2SUMXY=ERS2Y(VC32)*ERS2X(VC32)+ERS2SUMXY
ERS2SUMY=ERS2Y(VC32)+ERS2SUMY
ERS2SUMX=ERS2X(VC32)+ERS2SUMX
ERS2SUMX2=ERS2X(VC32)**2+ERS2SUMX2
32 CONTINUE
EH2= ((VC32)*ERS2SUMXY) - (ERS2SUMX*ERS2SUMY)) /
((VC32)*ERS2SUMX2 - ERS2SUMX**2)
WRITE(3,9982) EH2
C1=(HURST-EH1)*(NV**(0.5))
WRITE(3,9985) C1
C2=(HURST-EH2)*(NV**(0.5))
WRITE(3,9984) C2
CUP=1.96
CDOWN=-1.96
IF (C1.LT.CUP.AND.GT.CDOWN)
WRITE(3,9989)
ELSEIF
WRITE(3,9988)
ENDIF

```

```

IF (C2.LT.CUP.AND.GT.CDOWN)
WRITE(3,9987)
ELSEIF
WRITE(3,9986)
ENDIF
! *****IMPRESION DE RESULTADOS *****
9999 FORMAT(1X,'FICHERO DE RESULTADOS ANALISIS R/S')
9998 FORMAT(1X,'Número de datos:',I12)
9995 FORMAT(2X,'Serie analizada:',CH12)
9993 FORMAT(15X,'LOG(N)',25X,'LOG(R/S)n',25X,'V-SATISTIC',21X&
,'LOG(E[(R/S)n])(Peters)',21X,'LOG(E[(R/S)n])(Artículo)')
9991 FORMAT(2X,'Valor del exponente de Hurst:',F25.17)
9990 FORMAT(3X,F25.17,8X,F25.17,8X,F25.17,8X,F25.17,8X,F25.17)
9989 FORMAT(3X,'Según fórmula de Peters se acepta Ho')
9988 FORMAT(3X,'Según fórmula de Peters NO se acepta Ho')
9987 FORMAT(3X,'Según fórmula de Opong se acepta Ho')
9986 FORMAT(3X,'Según fórmula de Opong NO se acepta Ho')
9985 FORMAT(3X,'P-VALUE (Peters):',F25.17)
9984 FORMAT(3X,'P-VALUE (Opong):',F25.17)
9983 FORMAT(3X,'E(H) (Peters):',F25.17)
9982 FORMAT(3X,'E(H) (Opong):',F25.17)
9981 FORMAT(3X,'Se ha hecho una regresión con',I12,'valores')
CLOSE(3)
END

```

Con objeto de la estimación de modelos *ARFIMA* hemos utilizado una combinación de programas. El programa anterior, para estimar el valor de  $H$ , el programa Microsoft EXCEL a la hora de determinar la variable  $\mu_t$ , el programa SPSS para estimar el mejor *ARMA* sobre la serie  $\mu_t$  y de vuelta al programa EXCEL para construir la variable  $x_t$  sobre los parámetros estimados en el programa SPSS, para por último estimar con el programa en FORTRAN la nueva  $H$  sobre la serie construida. Cabe destacar que hemos explicado lo que sería un paso en el proceso de estimación de los modelos *ARFIMA*. Recordemos que el proceso se va repitiendo hasta que los valores de los parámetros convergen. De hecho, si consideramos que en cada paso, con objeto de la estimación del mejor *ARMA* realizamos la selección mediante el criterio de Schwarz, estamos estimando con el programa SPSS 120 modelos *ARMA* diferentes. Si tenemos en cuenta que para el caso particular de la serie a 1 día hemos conseguido que

la estimación converja en el octavo paso, implica que para la ...nalización del proceso hemos necesitado estimar 960 modelos. Esto para la serie a 1 día pero también debemos hacer lo mismo para todas las demás.

Para la realización de los algoritmos iterativos, que tratamos en el capítulo 5, hemos recurrido al diseño de programas en lenguaje FORTRAN. Así para la función coseno tenemos,

```
! *****
! PROGRAMA ITERACION FUNCION COS F90
! *****

REAL X,Y(10000)
INTEGER N
CHARACTER (LEN=12) RES
PRINT(*,*) 'El siguiente programa realiza iteraciones sobre la función coseno'
PRINT(*,*) 'Introduce el número sobre el que quieras iniciar las itera-
ciones...'
READ(*,*) X
PRINT(*,*) 'Introduce el número de iteraciones (máximo 10000)...'
READ(*,*) N
PRINT(*,*) 'Introduce el nombre del ...chero de resultados...'
READ(*,*) RES
Y(0)=X
DO 10 I=1,N
  Y(I)=COS(Y(I-1))
10 CONTINUE
OPEN(1,FILE=RES,STATUS='NEW')

WRITE(1,*) Y(0)
DO 20 I=1,N
  WRITE(1,*) Y(I)
20 CONTINUE
CLOSE(1)
END
```

Programa que es el mismo, pero cambiando la función que se itera, para los demás casos. Por lo que no vamos a representarlos.

Por último, para lo que respecta a la iteración de sistemas dinámicos del capítulo 5, destacar que para la generación de una serie obtenida a partir de la ecuación logística, hemos diseñado otro programa en FORTRAN 90. Destacar

que este programa ha sido utilizado de nuevo, en este mismo capítulo, cuando trabajamos con los datos suministrados por un sistema dinámico caótico. Concretamente el programa en FORTRAN es el siguiente,

```

! *****
! PROGRAMA ITERACION FUNCION LOGISTICA F90
! *****
DOUBLE PRECISION X(30000),C
INTEGER N
CHARACTER (LEN=12) RES
WRITE(*,*) 'INTRODUCE EL VALOR DEL PARAMETRO C ...'
READ(*,*) C
WRITE(*,*) 'INTRODUCE EL PUNTO QUE SE QUIERE ITERAR...'
READ(*,*) X(1)
WRITE(*,*) 'INTRODUCE EL NÚMERO DE DATOS QUE QUIERES
SIMULAR...'
READ(*,*) N
WRITE(*,*) 'NOMBRE FICHERO RESULTADOS...'
READ(*,*) RES
OPEN(1,FILE= RES,STATUS= 'NEW')
WRITE(1,*) X(1)
DO 10 I=2,N
X(I)=C*X(I-1)*(1-X(I-1))
WRITE(1,*) X(I)
10 CONTINUE
CLOSE(1)
END

```

La ...guras de atractores representadas en el capítulo 5 han sido obtenidas mediante la utilización de un package.

Concretamente el que hace referencia a la teoría del caos, del programa MATHEMATICA 3.0 de Wolfram Research. Particularmente, estamos hablando de las ...guras correspondientes al árbol de Feigenbaum de la ecuación logística, el atractor de Lorenz, el atractor de Hénon, el atractor KAM y el atractor de Pickover, así como la ...gura que representa al toro.

Siguiendo en el capítulo 5, concretamente en el apartado 5.2.1. hemos utilizado el programa SPSS en la determinación gráfica de la dimensión de inmersión de las series analizadas.

A la hora de estimar tanto la dimensión de correlación como el máximo exponente de Lyapunov, hemos recurrido a unos programas suministrados por la Universidad de Dresden, realizados por el grupo de investigación TISEAN (<http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/index.html>). Los resultados de dichos programas han sido tratados posteriormente con una hoja de cálculo EXCEL para su interpretación y posterior presentación.

En el mismo capítulo, realizamos el análisis *BDS*. Debemos destacar que hemos utilizado un programa realizado por el profesor W. Davis Dechert ([econ7i@uhvax1.uh.edu](mailto:econ7i@uhvax1.uh.edu)), de la Universidad de Houston, que permite realizar dicho análisis.

Aprovechamos este momento, para agradecer tanto al grupo de investigación TISEAN de la Universidad de Dresden como al profesor W. Davis Dechert el haber realizado dichos programas de libre distribución, que nos han permitido el obtener, de forma sencilla, tan importantes resultados.

En cuanto a la simulación tanto de la serie formada por una variable aleatoria como de la serie caótica, hemos utilizado los programas presentados anteriormente.

En el apartado 6.2.2., para la simulación de un ruido browniano, utilizamos el programa de simulación de la variable aleatoria descrito anteriormente. Tanto para la obtención de la serie de desviación estándar condicional, como el proceso *ARCH*(1) y como el proceso *AR*(1)/*ARCH*(1) se ha utilizado, tomando como base la serie generada de ruido browniano, una hoja de cálculo del programa EXCEL. Para la realización de las gráficas  $Q_j$   $Q$  Normal de los modelos *ARCH*(1) hemos acudido al programa SPSS.

En el apartado 6.2.4. destacar que los pasos seguidos han sido los mismos que los seguidos en el apartado 6.2.2. pero teniendo en cuenta ahora un proceso *GARCH*( $p, q$ ).

En el apartado 6.3., la simulación de un proceso  $N(0, 1)$  se he realizado teniendo en cuenta el programa expuesto con anterioridad, simulando un total de 1000 observaciones y a continuación hemos modificado dicho programa con el objeto de simular una serie que se distribuyese siguiendo una distribución  $N(0, 25)$ . Utilizando una hoja de cálculo, hemos tomado 900 observaciones de la primera simulación (90%) y le hemos añadido 100 (10%) de la segunda, obteniendo así una nueva distribución formada por un 90% de una distribución  $N(0, 1)$  y un 10% de una distribución  $N(0, 25)$ . Posteriormente, estos datos se han traspasado al programa SPSS, donde se han realizado los histogramas y gráficas  $Q_j$   $Q$  pertinentes.



En el apartado 6.5., con respecto a la estimación de modelos *GARCH* sobre las series de incrementos del tipo de interés, hemos recurrido al programa Econometric Views, donde se han estimado un gran número de modelos para cada serie, con objeto de conseguir así modelos que obtuviesen mejores resultados frente al test de Ljung-Box. En concreto, hemos estimado modelos  $ARMA(p_a, q_a)/GARCH(p_g, q_g)$ , haciendo fluctuar los parámetros  $p_a$  y  $q_a$  de 0 a 10 para los casos  $p_g = 1$  y  $q_g = 0$ ;  $p_g = 0$  y  $q_g = 1$ ;  $p_g = 1$  y  $q_g = 1$ . En total 360 modelos para cada serie, obteniendo como mejores modelos los siguientes:

```

ARCH// Dependent Variable is D_S1D
Sample(adjusted): 3 2734
Included observations: 2732 after adjusting endpoints
Convergence not achieved after 100 iterations
Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance

```

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.750715	0.143856	5.218516	0.0000
MA(1)	-0.870800	0.049863	-17.46395	0.0000

Variance Equation

C	8.27E-05	0.000369	0.224026	0.8228
ARCH(1)	0.114731	0.046023	2.492911	0.0127
GARCH(1)	0.959975	0.010398	92.32725	0.0000

R-squared	0.095579	Mean dependent var	-0.003385
Adjusted R-squared	0.094253	S.D. dependent var	0.561618
S.E. of regression	0.534496	Akaike info criterion	-1.251032
Sum squared resid	779.0670	Schwarz criterion	-1.240210
Log likelihood	-792.8044	F-statistic	72.04747
Durbin-Watson stat	2.729497	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots	.75
Inverted MA Roots	.87

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 1 día.

ARCH // Dependent Variable is D\_S1S  
Sample(adjusted): 3 2707  
Included observations: 2705 after adjusting endpoints  
Convergence achieved after 42 iterations  
Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.097249	0.130262	0.746559	0.4554

Variance Equation

C	0.003281	0.001008	3.256867	0.0011
ARCH(1)	1.427278	0.473751	3.012717	0.0026
GARCH(1)	0.222314	0.053132	4.184191	0.0000

R-squared	0.002559	Mean dependent var	-0.003370
Adjusted R-squared	0.001451	S.D. dependent var	0.187683
S.E. of regression	0.187547	Akaike info criterion	-3.345976
Sum squared resid	95.00449	Schwarz criterion	-3.337247
Log likelihood	2213.719	F-statistic	2.309597
Durbin-Watson stat	2.060345	Prob(F-statistic)	0.074452

Inverted AR Roots .10

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 1 semana.

ARCH // Dependent Variable is D\_S15D  
Included observations: 2702 after adjusting endpoints  
Convergence achieved after 48 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.135121	0.017852	-7.569064	0.0000

Variance Equation

C	0.001134	2.21E-05	51.41653	0.0000
ARCH(1)	1.416413	0.025582	55.36839	0.0000
GARCH(1)	0.406829	0.005154	78.92958	0.0000

R-squared	0.013528	Mean dependent var	-0.003776
Adjusted R-squared	0.012431	S.D. dependent var	0.205222
S.E. of regression	0.203942	Akaike info criterion	-3.178357
Sum squared resid	112.2164	Schwarz criterion	-3.169621
Log likelihood	2506.609	F-statistic	12.33292
Durbin-Watson stat	1.972484	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots -.14

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 15 días.

ARCH // Dependent Variable is D\_S1M  
 Sample(adjusted): 8 2733  
 Included observations: 2726 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 90 iterations  
 Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1.087746	0.055815	19.48846	0.0000
AR(2)	-0.101660	0.045940	-2.212897	0.0270
AR(3)	-0.080416	0.050124	-1.604320	0.1088
AR(4)	0.114962	0.048879	2.351999	0.0187
AR(5)	-0.049152	0.054132	-0.907997	0.3640
AR(6)	0.010455	0.035168	0.297292	0.7663
MA(1)	-0.971691	0.043942	-22.11315	0.0000

## Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.83E-05	1.22E-05	1.494704	0.1351
ARCH(1)	0.208653	0.062969	3.313561	0.0009
GARCH(1)	0.862857	0.029494	29.25569	0.0000

R-squared	0.051297	Mean dependent var	-0.003549
Adjusted R-squared	0.048154	S.D. dependent var	0.142458
S.E. of regression	0.138986	Akaike info criterion	-3.943104
Sum squared resid	52.46519	Schwarz criterion	-3.921422
Log likelihood	3492.794	F-statistic	16.31741
Durbin-Watson stat	1.671939	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots	.98	.27 -.19i	.27+.19i	.05+.42i
	.05 -.42i	-.54		
Inverted MA Roots	.97			

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 1 mes.

ARCH // Dependent Variable is D\_S2M  
 Sample(adjusted): 3 2305  
 Included observations: 2303 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 26 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.981616	0.004697	208.9766	0.0000
MA(1)	-0.972325	0.006548	-148.4907	0.0000

## Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000258	2.18E-05	11.84415	0.0000
ARCH(1)	0.466039	0.013581	34.31472	0.0000
GARCH(1)	0.684235	0.006680	102.4333	0.0000

R-squared	-0.000541	Mean dependent var	-0.004316
Adjusted R-squared	-0.002283	S.D. dependent var	0.145172
S.E. of regression	0.145338	Akaike info criterion	-3.855221
Sum squared resid	48.54081	Schwarz criterion	-3.842755
Log likelihood	2439.309	Durbin-Watson stat	1.681548

Inverted AR Roots	.98
Inverted MA Roots	.97

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 2 meses.

ARCH // Dependent Variable is D\_S3M  
 Sample(adjusted): 5 2726  
 Included observations: 2722 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 36 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.056268	0.019498	2.885806	0.0039
AR(2)	0.069542	0.020957	3.318291	0.0009
AR(3)	0.029903	0.018677	1.601034	0.1095

Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	8.48E-05	5.22E-06	16.24025	0.0000
ARCH(1)	0.269512	0.009604	28.06143	0.0000
GARCH(1)	0.786554	0.005362	146.6817	0.0000

R-squared	0.031302	Mean dependent var	-0.003528
Adjusted R-squared	0.029519	S.D. dependent var	0.096216
S.E. of regression	0.094785	Akaike info criterion	-4.710079
Sum squared resid	24.40126	Schwarz criterion	-4.697054
Log likelihood	3742.539	F-statistic	17.55275
Durbin-Watson stat	1.595622	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots      .41   -18+.21i      -18 -.21i

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1,1)$  sobre la serie de incrementos a 3 meses.

ARCH // Dependent Variable is D\_S6M  
 Sample(adjusted): 3 2589  
 Included observations: 2587 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 26 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.896705	0.051520	17.40485	0.0000
MA(1)	-0.939039	0.054247	-17.31059	0.0000
MA(2)	0.103028	0.027047	3.809280	0.0001
MA(3)	0.013309	0.028600	0.465343	0.6417
MA(4)	-0.034894	0.029808	-1.170643	0.2419
MA(5)	0.001283	0.022306	0.057518	0.9541

Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.14E-05	4.31E-06	2.638786	0.0084
ARCH(1)	0.180379	0.006667	27.05495	0.0000
GARCH(1)	0.863320	0.004130	209.0483	0.0000

R-squared	-0.004056	Mean dependent var	-0.003686
Adjusted R-squared	-0.007172	S.D. dependent var	0.097357
S.E. of regression	0.097706	Akaike info criterion	-4.648112
Sum squared resid	24.61076	Schwarz criterion	-4.627732
Log likelihood	3160.437	Durbin-Watson stat	1.809638

Inverted AR Roots      .90  
 Inverted MA Roots      .85   .17 -.32i      .17+.32i      .04  
 -.30

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1,1)$  sobre la serie de incrementos a 6 meses.

ARCH//Dependent Variable is D\_S1A  
 Date: 08/14/01 Time: 13:13  
 Sample(adjusted): 10 2220  
 Included observations: 2211 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 49 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.709070	0.116386	6.092385	0.0000
AR(2)	0.119689	0.032630	3.668092	0.0003
AR(3)	0.011666	0.032125	0.363142	0.7165
AR(4)	0.009770	0.032840	0.297489	0.7661
AR(5)	-0.008138	0.030086	-0.270488	0.7868
AR(6)	-0.023021	0.028487	-0.808148	0.4191
AR(7)	0.009379	0.029857	0.314136	0.7534
AR(8)	0.028179	0.026771	1.052571	0.2927
MA(1)	-0.793010	0.115282	-6.878856	0.0000

## Variance Equation

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.56E-05	7.42E-06	6.147546	0.0000
ARCH(1)	0.082995	0.004812	17.24619	0.0000
GARCH(1)	0.919992	0.003569	257.7978	0.0000

R-squared	-0.001040	Mean dependent var	-0.004279
Adjusted R-squared	-0.006048	S.D. dependent var	0.103410
S.E. of regression	0.103722	Akaike info criterion	-4.526669
Sum squared resid	23.65741	Schwarz criterion	-4.495726
Log likelihood	2436.468	Durbin-Watson stat	1.857882

Inverted AR Roots	.90	.56	-.34i	.56+	.34i	.05+	.63i
	.05	-.63i	-.42	-.40i	-.42+	.40i	-.56
Inverted MA Roots	.79						

Resultados de los parámetros del ajuste de un modelo  $GARCH(1, 1)$  sobre la serie de incrementos a 1 año.

En el capítulo 7, referente al tema de procesos de salto o modelos de Lévy-Merton, hemos procedido de igual forma que en el apartado 6.3. En concreto, hemos tomado el mismo el programa que utilizamos anteriormente para generar 3 simulaciones de una distribución  $N(0, \sigma^2)$ , con valores de  $\sigma^2 = 1$ ,  $\sigma^2 = 25$  y  $\sigma^2 = \frac{1}{25}$  y hemos procedido a representar mediante el programa SPSS el histograma de la mezcla de distribuciones al 90%, 5% y 5% respectivamente.

Posteriormente, a la hora de estimar los saltos en las series (apartado 7.3.), hemos iniciado el proceso de...niendo una metodología para detectar una  $h$  que nos pareciera razonable. Para ello calculamos  $\mathbf{p}_n^h$  para todas las  $h$  comprendidas entre 2 y  $\frac{N}{2}$ , donde  $N$  era el número total de observaciones que disponíamos. El paso siguiente era calcular para cada  $h$  la media,  $\bar{V}_h$ , y la desviación estándar,  $s_{V_h}$  de  $\mathbf{p}_n^h$ . A continuación, establecíamos una banda de selección de datos que venía determinada por  $\bar{x}_h \pm 2s_{V_h}$ , y contábamos aquellas  $\mathbf{p}_n^h$  que salían de esta banda. En concreto, este proceso lo llevamos acabo mediante el siguiente programa en lenguaje FORTRAN 90.

```
! *****
!   PROGRAMA PARA CALCULO DEL PARAMETRO H
!       EN UN MODELO DE SALTOS F90
```

```

! *****
DOUBLE PRECISION X(3000),V(2000,3000),SUMV&
,MEDV,DSV,MMEDV,MDSV,ZUP,ZDOWN
INTEGER H,I,J,N,M,MN,NOUT
CHARACTER (LEN=12) RES1,RES2,DAT

WRITE(*,*) 'Introduce el nombre del ...chero de datos...'
READ(*,*) DAT
WRITE(*,*) 'Introduce el número de datos existentes...'
READ(*,*) N
WRITE(*,*) 'Introduce los nombres de los ...cheros de resultados...'
READ(*,*) RES1
READ(*,*) RES2

OPEN(1,FILE=DAT,STATUS='OLD')
DO 10 I=1,N
  READ(1,*) X(I)
10 CONTINUE
CLOSE(1)
M=INT(N/2)
DO 20 H=2,M
  WRITE(*,*) H
  MN=N-H
  DO 200 I=1,MN
    SUMV=0
    DO 2000 J=I,I+H-1
      SUMV=SUMV+(X(J+1)-X(J))**2
    2000 CONTINUE
    V(H,I)=SUMV
  200 CONTINUE
20 CONTINUE
WRITE(*,*) 'SEGUNDA FASE...'
OPEN(2,FILE=RES1,STATUS='NEW')
OPEN(3,FILE=RES2,STATUS='NEW')
DO 30 H=2,M
  WRITE(*,*) H
  MN=N-H

```

```

MEDV=0
DSV=0
MMEDV=0
MDSV=0
ZUP=0
ZDOWN=0
DO 300 I=1,MN
  MEDV=MEDV+V(H,I)
  DSV=DSV+V(H,I)**2
300 CONTINUE
MMEDV=MEDV/MN
MDSV=SQRT((DSV/MN)-MMEDV**2)
WRITE(*,*) 'MEDIA=',MMEDV
WRITE(*,*) 'DS=',MDSV
WRITE(3,*) MDSV
ZUP=MMEDV+(2*MDSV)
ZDOWN=MMEDV-(2*MDSV)
WRITE(*,*) 'ZUP=',ZUP,' ', 'ZDOWN=',ZDOWN
NOUT=0
DO 310 I=1,MN
  IF(V(H,I).GE.ZDOWN.AND.V(H,I).LE.ZUP) THEN
    NOUT=NOUT+0
  ELSE
    NOUT=NOUT+1
  ENDIF
310 CONTINUE
WRITE(2,*) NOUT
30 CONTINUE
CLOSE(2)
CLOSE(3)
END

```

Una vez detectada la  $h_i$ , procedíamos a utilizarla par calcular la serie  $p_n^h$  y una vez obtenida esta calculábamos la serie  $D_n^h$ . Con este objeto diseñamos el siguiente programa en FORTRAN 90.

```

! *****
!   PROGRAMA PARA CALCULO DE LA SERIE D
!   EN UN MODELO DE SALTOS F90

```

```

! *****
DOUBLE PRECISION SUMV,X(3000),V(3000),D(3000)
INTEGER H,I,N,MN
CHARACTER (LEN=12) RES,DAT
WRITE(*,*) 'Introduce el nombre del ...chero de datos...'
READ(*,*) DAT
WRITE(*,*) 'Introduce el número de datos existentes...'
READ(*,*) N
WRITE(*,*) 'Introduce el nombre del ...chero de resultados...'
READ(*,*) RES

OPEN(1,FILE=DAT,STATUS='OLD')
DO 10 I=1,N
READ(1,*) X(I)
10 CONTINUE
CLOSE(1)
WRITE(*,*) 'Introduce el valor del parámetro H...'
READ(*,*) H
MN=N-H
DO 200 I=1,MN
SUMV=0
DO 2000 J=I,I+H-1
SUMV=SUMV+(X(J+1)-X(J))**2
2000 CONTINUE
V(I)=SUMV
200 CONTINUE
WRITE(*,*) 'SEGUNDA FASE...'
OPEN(2,FILE=RES,STATUS='NEW')
DO 300 I=1,MN-1
D(I)=V(I+1)-V(I)
WRITE(2,*) D(I)
300 CONTINUE
CLOSE(2)
END

```

Una vez detectados los saltos y las observaciones con las que se correspondían hemos procedido a realizar particiones sobre la serie con objeto de de...nir los



intervalos sobre los que íbamos a trabajar. Para gestionar las series hemos utilizado el programa MICROSOFT EXCEL. Posteriormente, tanto para realizar estimaciones sobre las características estadísticas de las particiones como para contrastar su normalidad hemos utilizado el programa SPSS.

Por último, en cuanto al apéndice 1, destacar que las ...guras mostradas: la curva de Koch, el copo de nieve de Koch, el conjunto de Koch, las curvas de Peano, la curva de Cesáro, el Dragón, la curva de Hilbert, el triángulo de Sierpinski, los conjuntos de Julia y los fractales de Mandelbrot y de Newton, hemos utilizado el programa FRACTINT 1.0.



# Bibliografía

- [1] Acar, E. y Satchell, S. (1998): Advanced trading rules. Butterworth Heinemann.
- [2] Akaike, H. (1974): A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control, 19, pp. 716-723.
- [3] Alegre, A.; Biayna, A. y Rodríguez, A. (Eds.) (1997): Matemática de las operaciones financieras '97. Publicacions de la Universitat de Barcelona.
- [4] Alegre, A. y Mayoral, M. R. (1997): Préstamos con interés variable, análisis estocástico. Anales-Tercera Época. Núm 3. Instituto de Actuarios Españoles. pp. 11-54.
- [5] Anis, A. y Lloyd, E. (1976): The expected values of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands, Biometrika, 63, pp. 111-116.
- [6] Aydemir (1998): Volatility modelling in finance. En Knight, J. y Satchell, S. (Eds.) (1998): Forecasting volatility in the Financial Markets. Butterworth Heinemann.
- [7] Bachelier, L. (1900): Theory of Speculation. En P. Cootner (Ed.) (1964): The random Character of Stock Market Price. MIT Press.
- [8] Baillie, R.T. (1996): Long memory processes and fractional integration in econometrics. Journal of Econometrics, 73, pp. 5-59
- [9] Baillie, R.T. y Bollerslev, T. (1989): The Message in Daily Exchange Rates: A Conditional Variance Tale. Journal of Business and Economic Statistics, 7, pp. 297-305.

- [10] Bajo, O. et al. (1992): Volatilidad y predecibilidad en las series del tipo de cambio Peseta-Dólar: un enfoque basado en el caos determinista. *Revista Española de Economía*. pp. 91-109.
- [11] Bardet, J.M. (1997): Test d'autosimilarité des processus gaussiens. Dimension fractale et dimension de corrélation. Tesis Doctoral. Université de Paris-Sud.
- [12] Barnett, W.A.; Geweke, J. y Shell, K. (Eds.) (1990): Economic Complexity: Chaos, sunspots, bubbles, and nonlinearity. *Proceedings of the fourth International Symposium in Economic Theory and Econometrics*. Cambridge University Press.
- [13] Barrallo Calonge, J. (1992): Geometría fractal: algorítmica y representada. Anaya Multimedia.
- [14] Barrallo Calonge, J. (1992): Geometría fractal: algorítmica y representación. Tesis doctoral. Universidad de Deusto. Facultad de Informática.
- [15] Bascompte, J. et al. (1995): *Ordre i Caos en ecologia*. Universitat de Barcelona.
- [16] Belaire Franch, J. y Contreras Bayarri, D. (1996): ¿Es caótico el tipo de cambio o...cial pt/dólar?. XXI Simposio de Análisis Económico. Universidad Autónoma de Barcelona.
- [17] Belaire Franch, J. y Contreras Bayarri, D. (1998): La Rosa de los Vientos. III Jornadas de Economía Financiera. Bilbao. pp. 428-466.
- [18] Beran, J. (1994): *The statistics of Long-Memory Processes*. Chapman and Hall
- [19] Black, F. y Scholes, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, May/June.
- [20] Blasco de las Heras, N. y Santamaria, R. (1994): Memoria a largo plazo en el mercado de valores español: Una aproximación mediante el análisis R/S. *Investigaciones Económicas*, XVIII, pp. 571-583.
- [21] Bollerslev, T. (1986): Generalized autorregresive conditional heterocedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

- [22] Bollerslev, T.; Chou, R.Y. y Kroner, K.F. (1992): ARCH modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence. *Journal of Econometrics*, 52, pp. 5-59.
- [23] Bollerslev, T.; Engle, R.F. y Woolridge, J.M. (1988): A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96, pp. 116-131.
- [24] Bouleau, N. (1988): *Processus stochastiques et applications*. Hermann.
- [25] Box, G.E.P y Jenkins, G. M. (1976): *Time series analysis: forecasting and control*. Holden-Day.
- [26] Brock, W. (1986): Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version. *Journal of Monetary Theory*, 40, pp. 168-195.
- [27] Brock, W. (1987): Notes on nuisance parameter problems in BDS type test for *iid*. Working Paper. University of Wisconsin.
- [28] Brock, W. (1993): Pathways to randomness in the economy: emergent nonlinearity and chaos in economics and ...nance. *Estudios Económicos*, 8, pp.3-55
- [29] Brock, W. y Baek, E. (1991): Some Theory of Statistical Inference for Nonlinear Science. *Review of Economic studies*, 58, pp. 697-716.
- [30] Brock, W. y Malliaris, A. (1989): *Differential Equations, Satability and Chaos in Dynamic Economics*. North-Holland.
- [31] Brock, W. y Sayers, C. (1988): Is the Business Cycle Characterized by deterministic Chaos?. *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 71-90.
- [32] Brock, W.; Dechert, W. y Scheinkman, J. (1987): A test for independence based on the correlation dimension. Working Paper, University of Chicago.
- [33] Brock, W.; Hsieh, D. y LeBaron, B. (1991): *Nonlienaar Dynamics, Chaos and Instability*. The MIT Press. Cambridge, MA.
- [34] Brock, W.A.; Hsieh, D.A. y LeBaron, B. (1992): *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press.

- [35] Brockwell, P. J. y Davis, R. A. (1996): Introduction to time series and forecasting. Springer.
- [36] Broomhead, D.S. y D. Lowe (1988): Multivariable funcional interpolation and adaptative network. *Complex systems* 2, pp. 321-355.
- [37] Brown, R.; Bryant, P. y Abarbanel, H.D.I. (1991): Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from observed time series. *Phys. Rev.*, 43, pp. 27-87.
- [38] Campbell, J.; Lo, A.W. y McKinley, A.C. (1997): *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- [39] Casdagli, M. (1989): Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D* 35, pp. 335-356.
- [40] Castillo, Joan del; Daoudi, Jalila y López, Anna (2001): Contraste de colas pesadas en datos ...nancieros. XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Úbeda (Jaén) Noviembre 2001.
- [41] Cheung, Y. (1993): Test for fractional integration: a Monte Carlo Investigation. *Journal of Time Series Analysis*, 14, pp. 331-345.
- [42] Chorafas, D.N. (1994): *Chaos Theory in the ...nancial Markets Applying Fractals, Fuzzy Logic, Genetic Algorithms, Swarm Simulation & The Monte Carlo Method to Manage Market Chaos & Volatility*. Irwin Professional Publishing.
- [43] Chung, K. L. (1983): *Teoría elemental dela probabilidad y de los procesos estocásticos*. Ed. Reverté.
- [44] Cootner. P. (Ed.) (1964): *The random Character of Stock Market Price*. MIT Press. Cambridge, MA.
- [45] Cowan, J.D. y Sharp, D. H. (1988): Neural nets. *Quart. Rev. Biophys.* 21.
- [46] Crack, T.F. y Ledoit, O. (1996): Robust Structure without Predictability: The "Compass Rose" Pattern of the Stock Market. *The Journal of Finance*, LI, pp. 751-762.
- [47] Craighead, S. (1992): Chaotic Analysis on U.S. Treasury Interest Rates. 4th AFIR International Colloquium. pp. 500-522.

- [48] Crato, N. (1994): Some international evidence regarding the stochastic memory of stock returns. *Applied Financial Economics*, 4, 33-39.
- [49] Creedy, J. y Martin, V.L. (Eds.) (1994): *Chaos and Non-Linear Models in Economics*. Edward Elgar Publisher.
- [50] Deboek, G.J. (1994): *Trading on the Edge: Neural, Genetic and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets*. John Wiley & Sons, Inc.
- [51] Dechert, W.D. (Eds.) (1996): *Chaos Theory in Economics: Methods, Models and Evidence*. Edgar Publishing Limited.
- [52] Devaney, R.L. (1989): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [53] Devaney, R.L. (1992): *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [54] Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1979): Distribution of the estimators for autorregresive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427-431.
- [55] Duan, J-C. (1996a): A unified theory of option pricing under stochastic volatility - from GARCH to diffusion. (puede consultarse en <http://www.bm.ust.hk/~na/sta/jcduan.html>)
- [56] Duan, J-C. (1996b): Term structure and bond option pricing under GARCH. (puede consultarse en <http://www.bm.ust.hk/~na/sta/jcduan.html>)
- [57] Eckmann, J. y Ruelle, D. (1985): Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Review of Modern Physics*, 57, pp. 617-656.
- [58] Engle, R.F. (1982): Autorregresive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- [59] Engle, R.F. and Bollerslev, T. (1986): Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5, pp. 1-50.
- [60] Espinosa, F.; Fontanals, H. y Ortuño, B. (1997): Análisis caótico aplicado a los tipos de interés a corto en el mercado español. En Alegre, A.; Biayna, A.

- y Rodríguez, A. (Eds.) (1997): *Matemática de las operaciones ...nancieras '97*. Publicacions de la Universitat de Barcelona.
- [61] Espinosa, F. y Bemúdez, L. (2001): Detecting and estimating long-memory processes on Spanish interest rates. Ponencia en el V International Congress on Insurance: Mathematics & Economics. Pennsylvania Julio 2001.
- [62] Espinosa, F. y Vives, J. (2000): ARFIMA models for interest rates in the Spanish market. Ponencia en el IV International Congress on Insurance: Mathematics & Economics. Barcelona Julio 2000.
- [63] Fama, E.F. (1964): Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. En P. Cootner (Ed.) (1964): *The random Character of Stock Market Price*. MIT Press.
- [64] Farge, M.; Hunt, J.C.R. y Vassilicos, J.C.(Eds.) (1993): *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*. Clarendon Press.
- [65] Farmer, J.D. (1990): A rosetta stone for connectionism. *Physica D*42, pp. 153-187.
- [66] Feder, J. (1989): *Fractals*. Plenum Press. New York.
- [67] Feller, W. (1951): The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Annals of Mathematical Statistics*, 22, pp. 427-432.
- [68] Fernández Díaz, A. (1994): *La Economía de la complejidad: Economía dinámica caótica*. McGraw-Hill.
- [69] Fernández Díaz, A.; Alonso González, A. y Grau Carles, P. (1994): *Caos y Mercado de Capitales: Una Introducción*. Cuadernos de Economía Aplicada. CEURA.
- [70] Fernández Rodríguez, F. (1995): *El problema de la predicción en Series Temporales: Aplicaciones del Caos Determinista*. Tesis Doctoral. Universidad de la Palmas.
- [71] Fischer, P. y Smith, W.R. (Eds.) (1985): *Chaos, Fractals, and Dynamics*. Marcel Dekker Inc.



- [72] Fontanals, H. y Galisteo, M. (1999): Dynamics of the term structure of interest rates: a tree factor model. Proceedings of the second Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics. Napoli.
- [73] Fontanals, H.; Lacayo, R. y Vives, J. (2000): A special function approach to some affine models. Actas del 1er Congreso de Métodos Numéricos en Ciencias Sociales. Barcelona. pp. 108-130.
- [74] Frank, H. y Althoen, S. C. (1994): Statistics. Concepts and applications. Cambridge university press.
- [75] Frank, M. y Stengos, T. (1988): Chaotic Dynamics in Economic Time-Series. Journal of Economic Surveys, 2, pp. 103-133.
- [76] Frank, M. y Stengos, T. (1989): Measuring the strangeness of Gold and Silver Rates of Return. Review of Economic Studies, 56, pp. 553-567.
- [77] Friedlander, S. K. y Tropper, L. (1961): Turbulence: classic papers on statistical theory. Interscience.
- [78] Garcia Tejedor, C. (1999): Estimación del exponente de un ruido Browniano fraccional a tiempo discreto. Trabajo de Investigación. Universidad Autónoma de Barcelona.
- [79] Gencay, R. y Dechert, W.D. (1992): An algorithm for the n-Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system. Physica D, Oct., 59 (1-3). pp. 142-157.
- [80] Geweke, J. y Porter-Hudak, S. (1983): The estimation and application of long memory time series model. Journal of Time Series Analysis, 1, pp. 221-238.
- [81] Gikhman, I. I. y Skorohod, A. V. (1974): The theory of stochastic processes I, II. Springer.
- [82] Gilmore, C.G. (1993a): A new test for Chaos. Journal of Economic Behaviour and Organization, 22, pp. 209-237.
- [83] Gilmore, C.G. (1993b): A new approach to testing for Chaos with applications in Finance and Economics. International Journal of Bifurcation and Chaos, 3, pp. 583-587.
- [84] Gleick, J. (1994): Caos: La creación de una ciencia. Seix Barral.

- [85] Goodwin, R.M. (1996): *Caos y dinámica económica*. Prensas Universitarias de Zaragoza.
- [86] Gouriéroux, C. (1997): *ARCH Models and Financial Applications*. Springer.
- [87] Granger, C. (1980): Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14, pp. 227-238.
- [88] Granger, C. y Joyeux, R. (1980): An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, pp. 15-29.
- [89] Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983): Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, 9D, pp. 189-208.
- [90] Guzmán, M.; Martín, M.A.; Morán, M. y Reyes, M. (1993): *Estructuras Fractales y sus aplicaciones*. Editorial Labor.
- [91] Hamilton, J.D. y Susmel, R. (1994): Autorregresive conditional heterokedasticity and changes in regime. *The Journal of Econometrics*, 64, pp. 307-333.
- [92] Hamilton, James D. (1989): A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the Business Cycle. *Econometrica*, 57, pp. 357-384.
- [93] Hamilton, James D. (1994): *Time series Analysis*. Princeton University Press.
- [94] Hauser, M.A. (1998): *Maximum Likelihood Estimators for ARMA and ARFIMA Models: A Monte Carlo Study*. Working Paper. University of Economics and Business Administration, Vienna.
- [95] Hauser, M.A.; Kunst, R.M. y Reschenhofer, E. (1994): Modelling exchange rates: long-run dependence versus conditional heterokedasticity. *Applied Financial Economics*, 4, pp. 233-239.
- [96] Hegger, R.; Kantz, H. y Schreiber, T. (1998): *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*. Working Paper. Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme.

- [97] Hénon, M. (1976): A two Dimensional Mapping with a strange Attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50.
- [98] Hernández, J. y Weiss, G. (1996): *A ...rst course on Wavelets*. CRC.
- [99] Hodges, M. (1995): *Arbitrage in a Fractal Brownian Motion Market*. Financial Options Research Centre. University of Warwick. March.
- [100] Hoppensteadt, F.C. (1993): *Analysis and simulation of chaotic systems*. Springer-Verlag.
- [101] Hosking, J.R.M. (1981): Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 1, pp. 165-76
- [102] Hsieh, D. (1988): The Statistical properties of daily foreign exchange rates: 1974-1983. *Journal of International Economics*, 24, pp. 129-145.
- [103] Hsieh, D. (1989): Testing for nonlinearity in daily foreign exchange rate changes. *Journal of Business*, 62, pp. 339-368.
- [104] Hsieh, D. (1991): Chaos and nonlinear dynamics: application to ...nancial markets. *Journal of Finance*, 46, pp. 1839-1877.
- [105] Hurst, H. E.; Black, R. P. y Simaika, Y. M. (1965): Long term storage, and experimental study. Constable.
- [106] Hurst, H.E. (1951): Long-term Storage of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, pp. 770-799.
- [107] Jaeger, L. y Kantz, H. (1995): Unbiased reconstruction of the dynamics underlying a noisy chaotic time series. Working Paper. Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme.
- [108] Jarque, C.M. y Bera, A.K. (1990): Efficient Test for Normality, Homokedasticity and Serial Dependence of Regression Residuals. *Economic Letters*, 6, pp. 255-259.
- [109] Kantz, H. (1994): A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Phys. Lett. A* 185, 77.
- [110] Kantz, H. et al (2001a): Identification and characterization of systems with delayed feedback: (I) Theory and tools. Working Paper. Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme.

- [111] Kantz, H. et al (2001b): Reconstruction of systems with delayed feedback: (II) Application. Working Paper. Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme.
- [112] Kantz, H. y Schreiber, T. (1999): Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge Nonlinear Science Series 7. Cambridge University Press.
- [113] Kendall, M. (1973): Time-Series. Charles Griffin and Company Ltd.
- [114] Kendall, M.G. (1964): The Analysis of Economic Time Series. In P. Cootner (Ed.) (1964): The random Character of Stock Market Price. MIT Press.
- [115] Kim, J. H. y Stringer, J. (Eds.) (1992): Applied Chaos. John Wiley & sons, Inc.
- [116] Knight, J. y Satchell, S. (Eds.) (1998): Forecasting volatility in the Financial Markets. Butterworth Heinemann.
- [117] Kolmogorov, A. N. (1941): Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. Comptes Rendus (Doklady) Academie des sciences de l'URSS (N.S.) 30, pp. 299-303. Reimpreso en Friedlander, S. K. y Tropper, L. (1961): Turbulence: classic papers on statistical theory. Interscience.
- [118] Koop, G. et al (1997): Bayesian analysis of long memory and persistence using ARFIMA models. Journal of Econometrics, 76, pp. 149-169.
- [119] Lambertson, D. y Lapeyre, B. (1996): Introduction to stochastic calculus applied to Finance. Chapman-Hall.
- [120] Lamperti, J. (1962): Semi-stable stochastic processes. J. Of the american mathematical society 104, pp. 62-78.
- [121] Lapedes, A.S. y R. Faber (1987): Nonlinear signal processing using neural networks: Prediction and system modeling. Technical Report LA-UR-87-2662. Los Alamos National Laboratory.
- [122] Lardic, S. y Mignon, V. (1999): a mémoire longue en économie: une revue de la littérature. Journal de la Société Française de Statistique, tome 140, n°2.

- [123] LeBaron, B. (1992): Some Relations between volatility and Serial Correlations in Stock Market Returns, *Journal of Business*, 65, pp. 199-219.
- [124] León, J. A.; Solé, J. L.; Utzet, F. y Vives, J. (2002): On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps. Trabajo acetado y pendiente de publicación en *Finance and stochastics*.
- [125] Li, T. y Yorke, J. (1975): Period three implies Chaos. *American Mathematics Monthly*, 82.
- [126] Ljung, G.M. y Box, G.E.P. (1978): On a measure of lack of ...t in Time-Series models. *Biometrika*, 65, pp. 297-303.
- [127] Lo, A.W. (1991): Long term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59, pp. 1279-1313.
- [128] Lorenz, E. N. (1969): Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues. *J. Atmos. Sci.* 26, pp. 636-646.
- [129] Lorenz, E.N. (1963): Deterministic non-periodic flows. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, pp. 130-141.
- [130] Lorenz, E.N. (1995): *La esencia del Caos*. Colección Pensamiento. Ed. Debate.
- [131] Lorenz, H.-W. (1989): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag.
- [132] Lorenz, H.-W. (1989): *Nonlinear Dynamics and Chaotic Motion*. LNME 334. Springer-Verlag.
- [133] Mallat, S. A (1998): *Wavelet tour of signal processing*. Academic Press.
- [134] Mandelbrot, B. (1964): The Variation of Certain Speculative Prices. En P. Cootner (Ed.) (1964): *The random Character of Stock Market Price*. MIT Press.
- [135] Mandelbrot, B. (1971): A fast Fractional Gaussian Noise Generator. *Water Resources Research*, 7, pp. 543-553.
- [136] Mandelbrot, B. (1971): When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *Review of Economics and Statistics*, 53, pp. 543-553.

- [137] Mandelbrot, B. (1972): A statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, pp. 259-290.
- [138] Mandelbrot, B. (1975): Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, pp. 271-285.
- [139] Mandelbrot, B. (1977): *Fractals, Form, Chance and Dimension*. Freeman, San Francisco, CA.
- [140] Mandelbrot, B. (1977): *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company.
- [141] Mandelbrot, B. (1983): *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, CA.
- [142] Mandelbrot, B. (1987): *Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión*. Serie Metatemas 13. Ed. Tusquets.
- [143] Mandelbrot, B. (1997): *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Metatemas 49. Ed. Tusquets.
- [144] Mandelbrot, B. y Van Ness, J. (1968): Fractional Brownian Motion, fractional noises and applications, *SIAM Review*, 10, pp. 422-437.
- [145] Mandelbrot, B. y Wallis, J.R. (1968): Noah, Joseph, and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4, pp. 909-918.
- [146] Mandelbrot, B. y Wallis, J.R. (1969a): Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 1, Average and Variances. *Water Resources Research*, 5, pp. 228-241.
- [147] Mandelbrot, B. y Wallis, J.R. (1969b): Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 2, Rescaled Ranges and Spectra. *Water Resources Research*, 5, pp. 242-259.
- [148] Mandelbrot, B. y Wallis, J.R. (1969c): Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 3, Mathematical Appendix. *Water Resources Research*, 5, pp. 260-267.
- [149] Mandelbrot, B. y Wallis, J.R. (1969d): Some long-Run Properties of Geophysical Records. *Water Resources Research*, 5, pp. 321-340.

- [150] Mandelbrot, B. y Wallis, J.R. (1969e): Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5, pp. 967-988.
- [151] Martín, M.A.; Morán, M. y Reyes, M. (1995): *Iniciación al Caos*. Ed. Síntesis.
- [152] Martin, V.L. y Wilkins, N.P. (1999): Indirect estimation of ARFIMA and VARFIMA models. *Journal of Econometrics*, 93, pp. 149-175.
- [153] Medio, A. y Gallo, G. (1992): *Chaotic Dynamics*. Cambridge University Press.
- [154] Merton, R. C. (1976): Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Bell J. Of Financial Economics*, 3, pp. 125-144.
- [155] Mills, T.C. (1993): Is there long-term memory in UK stock returns?. *Applied Financial Economics*, 3, pp. 303-306.
- [156] Mills, T.C. (1999): *The Econometrics Modelling of Financial Time Series*. Cambridge University Press.
- [157] Moore, A.B. (1964): Some Characteristics of Changes in Common Stock Prices. En P. Cootner (Ed.) (1964): *The random Character of Stock Market Price*. MIT Press.
- [158] Olmeda Martos, J.I. (1995): *Modelos no lineales en finanzas*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá.
- [159] Olmeda Martos, J.I y Barba-Romero, S. (Eds). (1996): *Redes neuronales artificiales fundamentos y aplicaciones*. Actas de un curso de la Universidad de Alcalá, 28-30 Junio 1993. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alcalá de Henares.
- [160] Opong, K.K.; Mulholland, G.; Fox, A.F. y Farahmand, K. (1999): The behaviour of some UK equity indices: An application of Hurst and BDS tests. *Journal of Empirical Finance*, 6, pp. 267-282.
- [161] Osborne, M.F.M. (1959): Brownian Motion in the Stock Market. En P. Cootner (Ed.) (1964): *The random Character of Stock Market Price*. MIT Press.
- [162] Ott, E. (1993): *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press.

- [163] Pacault, A. y Vidal, C. (Eds.) (1981): Nonlinear phenomena in chemical dynamics. Springer-Verlag.
- [164] Packard, N. H.; Crutchfield, J. P.; Farmer, J. D. y Shaw, R. S. (1980): Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.* 45, pp. 712-716.
- [165] Pandley, V.; Kohers, T. y Kohers, G. (1997): Nonlinear determinism in the equity markets of major Pacific Rim countries and the United States. Southwestern Finance Association Conference. New Orleans, LA.
- [166] Panjer, H. (Ed.) (1998): Financial economics. With applications to investment, insurance and pensions. The Actuarial Foundation.
- [167] Peters, E.E. (1991a): A chaotic attractor for the S&P 500. *Financial Analysts Journal*, March-April, pp. 55-63.
- [168] Peters, E.E. (1991b): Chaos and Order in the Capital Markets: A new view of cycles, prices, and market volatility. John Wiley & Sons Inc.
- [169] Peters, E.E. (1994): Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. John Wiley & Sons Inc.
- [170] Petgen, H.-O.; Jürgens, H. y Saupe, D. (1992): Fractals for the Classroom: Part One. Introduction to Fractals and Chaos. Springer-Verlag.
- [171] Phillips, P.C.B. y Perron, P. (1988): Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75, pp. 335-346.
- [172] Porter-Hudak, S. (1990): An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates. *Journal of the American Statistical Association*, 85, pp. 338-344.
- [173] Poterba, J.M. y Summers, L.H. (1988): Mean reversion in stock prices: evidence and implications. *Journal of Financial Economics*, 22, pp. 27-60.
- [174] Protter, P. (1990): Stochastic integration and differential equations. Springer-Verlag.
- [175] Ramírez, D. (1994): Sistemas de decisión en condiciones de incertidumbre con evaluación ponderada aplicados al análisis financiero. Actas del congreso SIGEF. Universitat Rovira i Virgili. Reus.



- [176] Ramírez, D. y Sorrosal, M. T. (2000): Una aproximación conexionista al estudio de la identidad de los mercados ...nancieros. Actas del 1er Congreso de Métodos Numéricos en Ciencias Sociales. Barcelona. pp. 297-309.
- [177] Ray, B.K. (1999): Modeling ARFIMA Processes with Added Noise. 19th International Symposium on Forecasting. Lisboa.
- [178] Rebonato, R. (1996): Interest-rate option models. Understanding, analysing and using models for exotic interest-rate options. Wiley.
- [179] Roberts, H.V. (1959): Stock Market 'Patterns' and Financial Analysis: Methodological Suggestions. En P. Cootner (Ed.) (1964): The random Character of Stock Market Price. MIT Press.
- [180] Rosser Jr., J.B. (1991): From Catstrophe to chaos: A general Theory of Economic Discontnuities. Kluwer Academic Publishers.
- [181] Ruelle, D. (1981): Chemical kinetics and differentiable dynamical systems. En Pacault, A. y Vidal, C. (Eds.) (1981): Nonlinear phenomena in chemical dynamics. Springer-Verlag.
- [182] Ruelle, D. (1991): Chance and Chaos. Penguin Books.
- [183] Rummelhart, D. y J. McClelland (1986): Parallel distributed processing, vol. 1. MIT Press. Cambridge.
- [184] Samuelson, P. A. (1965): Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review* 6, pp. 41-49.
- [185] Sato, K. (1999): Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge university press.
- [186] Scheinkman, J.A. y LeBaron, B. (1989): Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business*, 62, pp. 311-337.
- [187] Schuster, H.G. (1988): Deterministic Chaos: An Introduction. VCH Verlagsgesellschaft.
- [188] Schwarz, G. (1978): Estimating the dimension of a model. *Ann. stat.* 6, pp. 461-464.
- [189] Sewell, S. P.; Stansell, S. R.; Lee, I. y Pan, M.-S. (1993): Nonlinearities in emerging foreign capital markets. *Journal of Business Finance and Accounting* 20 (2), pp. 237-248.

- [190] Shimko, David C. (1992): Finance in continuous Time. Kolb Publishing Company.
- [191] Shiryaev, A. N. (1999): Essentials of stochastic Finance: Facts, Models, Theory. Advanced series on statistical science and applied Vol. 3. World Scienti...c.
- [192] Silverman, B. W. (1986): Density estimation for statistics and data analysis. Chapman and Hall. NY.
- [193] Sinai, Y.G. (1976): Introduction to Ergodic Theory. Princeton University Press.
- [194] Solé, R.V. y Manrubia, S.C. (1996): Orden y Caos en sistemas complejos. Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya.
- [195] Sowell, F. (1992): Modelling long-run behaviour with the fractional ARI-MA model. Journal of Monetary Economics, 29, pp. 277-302.
- [196] Stewart, I. (1991): ¿Juega Dios a los Dados? La nueva matemática del Caos. Ed. Grijalbo mondadori.
- [197] Strang, G. (1986): Introduction to applied mathematics. Wellesley-Cambridge Press.
- [198] Strang, G. (1989): Wavelets and dilation equations: A brief introduction. SIAM Rev. 31 pp. 614-627
- [199] Takens, F. (1981): Dynamical systems and turbulence. Lecture notes in mathematics, vol. 898. Springer.
- [200] Thompson, J.M.T. y Steward, H.B. (1986): Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists. John Wiley & Sons.
- [201] Tsonis, A. (1992): Chaos: From Theory to Applications. Plenum Press.
- [202] Tsonis, A. A. y Elsner, J. B. (1987): Fractal characterization and simulation of lightning. Beitr. Phys. Atmos. 60, pp. 187-192.
- [203] Utzet, F. (1992): Les sèries temporals. Notas de un curso sobre series temporales impartido en el Institut d'Estudis Catalans en Mayo de 1992.

- [204] Valdero, E. (1999): Estimació, contrastació d'hipòtesis i detecció d'arrels unitàries en processos MA aplicats a sèries temporals econòmiques. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.
- [205] Vervaat, W. (1987): Properties of general self-similar processes. Bull. Int. Statist. Inst., 52, n°4, pp.199-216.
- [206] Wallis, J. y Matalas, N. (1970): Small sample properties of H and K estimators of the Hurst coefficient h. Water Resources Research, 6.
- [207] Wegner, T. y Tyler, R. (1995): El mundo de los Fractales. Ed. Anaya Multimedia.
- [208] Weighend, A.; D. Rumelhart y B. Huberman (1990): Predicting the future: A connectionist approach. Int. J. Neural Systems 1, pp. 193-209.
- [209] Wolf, A.; Swift, J.B.; Swinney, H.L. y Vastano, J.A. (1985): Determining Lyapunov Exponents from a time series. Physica, D9, pp. 285-317.
- [210] Wu, P. (1992): Testing Fractionally integrated time series. Victoria University of Wellington.
- [211] Yeh, J. (1973): Stochastic processes and the Wiener integral. Marcel Dekker.
- [212] Zam...rescu, N. y Pontier, M. (2001): Pourquoi des queues épaisses dans les distributions d'actifs boursiers? ou: Mouvement brownien fractionnaire pour modéliser le prix d'actions: estimations et tests. Documento de trabajo de la Universidad de Toulouse.