UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISION DE CIENCIAS JURIDICAS ECONOMICAS Y SOCIALES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

Y SU APLICACION A LOS SEGUROS COLECTIVOS

Tesis Doctoral presentada por:
Mª Angeles Pons Cardell
Director:
Dr. D. Antonio Alegre Escolano
Catedrático de Universidad.

Barcelona, Noviembre 1991.

5.2.- MODELO JERARQUICO CON MULTIPLES NIVELES.

Con posterioridad a la aparición del Modelo Jerárquico de JEWELL, TAYLOR, G. (1979), BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987) y GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990) extendieron el Modelo Jerárquico de JEWELL para un caso más general, con múltiples niveles.

La idea básica de la credibilidad jerárquica con múltiples niveles es la misma que la del Modelo de Jerárquico de JEWELL, pero en este caso, la cartera se considera estructurada en más de dos niveles. Supongamos, por ejemplo, el caso de una entidad aseguradora que trabaja en todo el ámbito nacional. Su cartera estará formada por una serie de riesgos. Consideremos sólamente un riesgo concreto. La experiencia de reclamaciones para este riesgo puede diferir de una comunidad autónoma a otra. Si difiere, podríamos dividir dicha experiencia por comunidades autónomas, de manera que cada comunidad autónoma esté caracterizada por un parámetro de riesgo que describa como difiere la cartera de una comunidad a otra. A su vez, dentro de cada comunidad podríamos desglosar la información disponible por provincias, definiendo otro parámetro de riesgo que describa como varía la experiencia de reclamaciones de una provincia a otra, a su vez, dentro de cada provincia podemos desglosar la información por ciudades, y dentro de las ciudades, por ejemplo, según la edad de los asegurados. De esta manera hemos dividido la experiencia disponible para un riesgo determinado en diferentes niveles, caracterizados cada uno de ellos por un parámetro de riesgo.

Existen dos caminos distintos para desarrollar el Modelo Jerárquico con Múltiples Niveles:

a) Uno es seguir el mismo procedimiento seguido en el Modelo Jerárquico de JEWELL, es decir, el de los mínimos cuadrados (minimizar el error cuadrado medio cometido).

b) Y otro es utilizar la técnica del espacio Hilberiano defendida inicialmente por TAYLOR, G. (1979) y utilizada posteriormente por BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987).

5.2.1.- Estimadores de credibilidad lineales.

5.2.1.1.- Procedimiento de los mínimos cuadrados.

GOOVAERTS, M.; KAAS, R.; HEERWAARDEN, A. van y BAUWELINCKX, T. (1990), pp. 170-175, tratan el Modelo Jerárquico con Múltiples Niveles utilizando el procedimiento de los mínimos cudrados.

Si tomamos como punto de partida los resultados del Modelo Jerárquico de JEWELL con dos niveles, que se pueden resumir del siguiente modo:

	Estimador individual	Estimador colectivo	Heterogeneidad dentro	Factor de credibilidad
Nivel 3 (Cartera)	X_{zzw}		$\hat{b} = V_2$	
Nivel 2 (Subcart)	X_{pzw}	$E[\mu(\theta_p)] = m$	$\hat{a} = V_1$	Z_p
Nivel 1 (Pólizas)	X_{pjw}	$E[\mu(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p] = = \mu(\theta_p)$	$\hat{S}^2 = V_0$	Z_{pj}

$$V_0 = \sum_{p,j,s} w_{pjs} \cdot (X_{pjs} - X_{pjw})^2 \;/\; \sum_{p,j} (t_{pj} - 1)$$

$$Z_{pj} = V_1 \cdot w_{pj\cdot} \;/\; (V_0 + V_1 \cdot w_{pj\cdot})$$

$$V_1 = \sum_{p,j} Z_{pj} \cdot (X_{pjw} - X_{pzw})^2 \;/\; \sum_{p} (k_p - 1)$$

$$Z_p = V_2 \cdot Z_{p\cdot} \;/\; (V_1 + V_2 \cdot Z_{p\cdot})$$

$$V_2 = \sum_{p} Z_p \cdot (X_{pzw} - X_{zzw})^2 \;/\; (P - 1)$$

se observa que este proceso se puede generalizar a un número cualquiera de niveles, sin demasiadas dificultades. Para ello basta observar lo siguiente:

•) El estimador colectivo del nivel k-1 es el estimador de credibilidad para el nivel k.

•) El numerador de los estimadores V_k, con $k = 0,1,2$, es la suma ponderada de las diferencias al cuadrado de los valores observados menos los estimadores individuales, y el denominador es el número de términos del sumatorio menos el número de medias estimadas.

•) Para poder hallar los valores de V_k, con $k = 1,2$, debemos utilizar un proceso iterativo ya que las ponderaciones que aparecen en sus expresiones contienen el propio parámetro que estamos estimando.

Consideremos el caso de un **Modelo Jerárquico con Tres Niveles**, y supongamos que estamos interesados en analizar un riesgo concreto. La información disponible del mismo en todo el país, por ejemplo, la podríamos dividir por compañías. Cada compañía estará caracterizada por un parámetro de riesgo que describirá las diferencias existentes entre las distintas compañías. A su vez, la cartera de cada compañía la podríamos considerar dividida en varias subcarteras, estando cada una de ellas caracterizada por otro parámetro de riesgo que describirá, en este caso, las diferencias existentes entre las subcarteras. Cada una de estas subcarteras estará formada por un cierto número de pólizas que han sido agrupadas por poseer ciertas características básicas comunes. Sin embargo, las pólizas también poseerán características específicas que las diferencian de las demás pólizas dentro de la subcartera, características que vendrán cuantificadas por otro parámetro de riesgo.

Al añadir un nuevo nivel al Modelo Jerárquico de JEWELL, es necesario que introduzcamos un nuevo subíndice, por ejemplo, c para poder indicar el nivel de las compañías. En este caso tendremos tres parámetros de riesgo:

- θ_c : Es el nuevo parámetro de riesgo que hemos introducido perteneciente al nuevo nivel. Caracteriza a la compañía c, con $c = 1,2,\ldots,l$.

- θ_{cp} : Es el parámetro de riesgo que describe las características de la subcartera p, de la compañía c, con $c = 1,2,..,l$ y $p = 1,2,..,P_c$.

- θ_{cpj}: Es el parámetro de riesgo que describe las características de la póliza j-ésima de la subcartera p de la compañía c, con $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$ y $j = 1,2,\ldots,k_{cp}$.

Las variables aleatorias observables, experiencia de reclamaciones, aparecerán ahora con cuatro subíndices: X_{cpjs}, indicando la experiencia de reclamaciones de la póliza j-ésima de la subcartera p, perteneciente a la compañía c, para el periodo s-ésimo.

Un esquema clarificador del Modelo Jerárquico a Tres Niveles podría ser el siguiente:

Compañía	$c = 1,2,\ldots,l$
Variables de estructura	
Nivel de las compañías	θ_c
Nivel de las subcarteras	θ_{cp}
Nivel de los contratos	θ_{cpj}
Contrato	(c,p,j)
Variables observables con pesos asociados	X_{cpj1} (w_{cpj1}) $\vdots$ X_{cpjt} (w_{cpjt})

Al tratarse de un modelo jerárquico con tres niveles, estimaremos en última instancia tres primas:

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) = E[X_{cpjs}/\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}]$$

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}) = E[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c, \theta_{cp}]$$

$$\mu(\theta_c) = E[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

una para cada nivel que tenemos.

La estimación de estas tres primas se hace del mismo modo que en el Modelo de JEWELL con dos niveles: Seleccionando la mejor prima dentro de la clase restringida de las primas lineales, utilizando para ello el procedimiento de los mínimos cuadrados, es decir, aplicando el Modelo de

BÜHLMANN-STRAUB en cada nivel, dando lugar a la aparición de tres factores de credibilidad Z_{cpj}, Z_{cp} y Z_c.

Para la obtención de las primas de credibilidad lineales, no-homogéneas, se siguen asumiendo las mismas hipótesis que en el modelo jerárquico con dos niveles, pero ahora generalizadas. Esto es, dado un θ en un cierto nivel, se supone que la distribución condicional de las variables que aparecen en el nivel inferior son independientes, y que:

$$E[X_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}] = \mu(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj})$$

$$Cov[X_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}] = \frac{\delta_{ss'}}{w_{cpjs}}\cdot\sigma^2(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj})$$

También cabe indicar que los sumatorios respecto a los diferentes subíndices son ahora calculados de la siguiente manera:

$$X_{zzzw} = \sum_c \frac{Z_c}{Z_\bullet} X_{czzw} =$$

$$= \sum_c \frac{Z_c}{Z_\bullet} \sum_p \frac{Z_{cp}}{Z_\bullet}\cdot X_{cpzw} =$$

$$= \sum_c \frac{Z_c}{Z_\bullet} \sum_p \frac{Z_{cp}}{Z_{c\bullet}} \sum_j \frac{Z_{cpj}}{Z_{cp\bullet}} X_{cpjw} =$$

$$= \sum_c \frac{Z_c}{Z_\bullet} \sum_p \frac{Z_{cp}}{Z_{c\bullet}} \sum_j \frac{Z_{cpj}}{Z_{cp\bullet}} \sum_s \frac{w_{cpjs}}{w_{cpj\bullet}}\cdot X_{cpjs}$$

Ello explica el motivo por el cual para algunas carteras el estimador obtenido por la Teoría de la Credibilidad es diferente al obtenido aplicando el procedimiento de las medias.

Nuestro objetivo es el mismo que en el modelo jerárquico a dos niveles: Hallar los estimador ajustados de credibilidad individuales para las pólizas pertenecientes a la cartera considerada, y para ello nos vamos a centrar en una póliza concreta, por ejemplo, la cpj.

Para obtener el estimador de credibilidad para $\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$, el procedimiento a seguir es el siguiente:

La póliza cpj pertenece, en primera instancia, a la subcartera p, por lo que el primer paso es aplicar el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB pero restringido a la subcartera de la compañía a la cual pertenece la póliza. En este caso, el estimador colectivo que aparecerá es:

$$E[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}] = \mu(\theta_c, \theta_{cp})$$

que es la prima de riesgo para la subcartera p de la compañía c, prima que también deberemos estimar aplicando para ello el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB de nuevo, pero ahora restringido dentro de la compañía c. El estimador colectivo que obtendremos será la prima de riesgo para la compañía c, es decir:

$$E[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c] = \mu(\theta_c).$$

Para hallar dicha prima deberemos volver a aplicar el Modelo de BÜHLMANN-STRAUB, pero ahora restringido a la información que tenemos de todas las compañías, siendo el estimador colectivo, en este caso, la esperanza conjunta para toda la cartera en su totalidad, m, que es uno de los parámetros estructurales del modelo.

Sustituyendo el estimador de $\mu(\theta_c)$ en el estimador de credibilidad para $\mu(\theta_c, \theta_{cp})$, y éste en el estimador de credibilidad para $\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$, obtendremos finalmente el estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo de la póliza cpj, en la cual habremos tenido en cuenta la información relativa a la cartera en su totalidad, siendo:

$$\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})} = Z_{cpj} \cdot X_{cpjw} + [1 - Z_{cpj}] \cdot \widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp})}$$

donde:

$$\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp})} = Z_{cp} \cdot X_{cpzw} + [1 - Z_{cp}] \cdot \widehat{\mu(\theta_p)}$$

$$\widehat{\mu(\theta_p)} = Z_c \cdot X_{czzw} + [1 - Z_c] \cdot E[\mu(\theta_c)] =$$

$$= Z_c \cdot X_{czzw} + [1 - Z_c] \cdot m$$

$m = E[\mu(\theta_c)]$ es uno de los parámetros estructurales del modelo.

A su vez, resulta que $\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})}$ es el mejor estimador de credibilidad lineal, no-homogéneo, para la prima de riesgo individual, de la póliza cpj, como ya vimos que ocurría en el Modelo Jerárquico de JEWELL.

Por último, el siguiente esquema podría resumir el proceso recursivo que hemos seguido:

	Estimador individual	Estimador colectivo	Heterogeneidad dentro	Factor de credib.
Nivel 1	X_{zzzw}		V_3	
Nivel 2 (Compañía)	X_{czzw}	$E[\mu(\theta_c)] = m$	V_2	Z_c
Nivel 3 (Subcarteras)	X_{cpzw}	$\mu(\theta_c)$	V_1	Z_{cp}
Nivel 4 (Contratos)	X_{cpjw}	$\mu(\theta_c, \theta_{cp})$	$V_\emptyset$	Z_{cpj}

siendo:

$$V_\emptyset = \sum_{c,p,j,s} w_{cpjs} \cdot (X_{cpjs} - X_{cpjw})^2 /$$ (Número de términos en el sumatorio menos el número de medias X_{cpjw} estimadas)

$$V_1 = \sum_{c,p,j} Z_{cpj} \cdot (X_{cpjw} - X_{cpzw})^2 /$$ (Número de términos en el sumatorio menos el número de medias X_{cpzw} estimadas)

$$V_2 = \sum_{c,p} Z_{cp} \cdot (X_{cpzw} - X_{czzw})^2 /$$ (Número de términos en el sumatorio menos el número de medias X_{czzw} estimadas)

$$V_3 = \sum_{c} Z_c \cdot (X_{czzw} - X_{zzzw})^2 /$$ (Número de términos en el sumatorio menos el número de medias X_{zzzw} estimadas)

$$Z_{cpj} = \frac{V_1 \cdot w_{cpj\bullet}}{V_\emptyset + V_1 \cdot w_{cpj\bullet}}$$

$$Z_{cp} = \frac{V_2 \cdot Z_{cp\bullet}}{V_1 + V_2 \cdot Z_{cp\bullet}}$$

$$Z_c = \frac{V_3 \cdot Z_{c\bullet}}{V_2 + V_3 \cdot Z_{c\bullet}}$$

El estimador $V_\emptyset$ se puede calcular directamente a través de los datos de la experiencia de reclamaciones y de los pesos o ponderaciones naturales, sin embargo, V_1, V_2, y V_3 al contener, vía los factores de credibilidad, el propio parámetro que estamos estimando deben ser calculados mediante un proceso iterativo. Lo mismo ocurría en el Modelo Jerárquico de JEWELL a la hora de estimar V_1 y V_2.

Este esquema se puede generalizar fácilmente a un número cualquiera de niveles.

5.2.1.2.- La técnica del espacio Hilberiano.

Como ya hemos indicado antes, hay dos maneras de tratar el Modelo Jerárquico con Múltiples Niveles, una es el procedimiento de los mínimos cuadrados, que acabamos de ver, y la otra es utilizar la técnica del espacio Hilberiano.

BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987), presentan unos principios y métodos aplicables a todos los modelos jerárquicos en general, y proponen un procedimiento de cálculo recursivo, basado en la técnica del espacio Hilberiano, para la evaluación de las credibilidades jerárquicas.

Siguiendo su artículo vamos a considerar un modelo jerárquico con tres niveles. En primer lugar, debemos indicar que dichos autores no trabajan con los pesos naturales, ya que parten de la base que el Modelo Jerárquico de JEWELL, con dos niveles, es una extensión del Modelo de BÜHLMANN, y no del de BÜHLMANN-STRAUB, como nosotros hemos asumido. Por otro lado, la nomenclatura es distinta a la utilizada hasta ahora, ya que siguen la propuesta en el artículo original de JEWELL, W. (1975e), nomenclatura que nosotros hemos readaptado.

Consideran un modelo jerárquico con tres niveles, cuya estructura de probabilidad es obtenida diseñando las variables de arriba a abajo:

$\boxed{\text{NIVEL 1}}$: θ_c $(c = 1,2,\ldots,l)$. Son independientes y están idénticamente distribuidas con una función de densidad $r_3(\theta_c)$.

$\boxed{\text{NIVEL 2}}$: θ_{cp} con $c = 1,2,\ldots,l$ y $p = 1,2,\ldots,P_c$. Son condicionalmente independientes y están idénticamente distribuidas con una función de densidad $r_2(\theta_{cp}/\theta_{cp})$

$\boxed{\text{NIVEL 3}}$: θ_{cpj} con $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$ y $j = 1,2,\ldots,k_{cp}$. Son condicionalmente independientes y están idénticamente distribuidas con una función de densidad $r_1(\theta_{cpj}/\theta_{cp})$.

$\boxed{\text{NIVEL 0}}$: X_{cpjs} con $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$; $j = 1,2,\ldots,k_{cp}$ y $s = 1,2,\ldots,t_{cpj}$. Son condicionalmente independientes y están idénticamente distribuidas, con una función de densidad $P(X_{cpjs}/\theta_{cpj})$.

A su vez, las variables aleatorias y las constantes para los diferentes niveles son:

NIVEL 0 : Datos: X_{cpjs} que es el total de reclamaciones producido por la póliza j de la subcartera p de la compañía c en el periodo s.

Como para un cpj fijado, las variables X_{cpjs} son variables aleatorias intercambiables y podemos, sin pérdida de información sumarizar los datos de una póliza en una variable aleatoria para cada póliza: $Y_{cp1}, Y_{cp2}, \ldots, Y_{cpk_p}$ donde:

$$Y_{cpj} = \frac{1}{t_{cpj}} \cdot \sum_{s=1}^{t_{pcj}} X_{cpjs}$$

NIVEL 1 : Para cada póliza las cantidades más relevantes son:

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) = E[X_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}]$$

$$Var[X_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}]] = \sigma^2(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$$

o para las variables sumarizadas:

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) = E[Y_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}]$$

$$Var[Y_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}] = \frac{\sigma^2(\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj})}{t_{cpj}}$$

NIVEL 2 : Para cada subcartera:

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}) = E[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}]$$

$$F(\theta_c, \theta_{cp}) = E[\sigma^2(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}]$$

$$G(\theta_c, \theta_{cp}) = Var[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}]$$

NIVEL 3 : Para cada compañía:

$$\mu(\theta_c) = E[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

$$F(\theta_c) = E[F(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

$$G(\theta_c) = E[G(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

$$H(\theta_c) = Var[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

NIVEL 4 : Para el colectivo:

$m = E[\mu(\theta_c)]$ que es la media de los colectivos.

$V_0 = F = E[\sigma^2(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})]$ que es la variación en el nivel de las pólizas.

$$V_1 = G = E\left[E[Var[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}]/\theta_c]\right]$$

$$V_2 = H = E[Var[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]]$$

$$V_3 = I = \text{Var}[\mu(\theta_c)]$$

que en este caso juegan el papel de constantes.

Nuestro objetivo es hallar los estimadores de credibilidad lineales, no-homgéneos, para $\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$, $\mu(\theta_c, \theta_{cp})$ y $\mu(\theta_c)$, pero al obtener el estimador para $\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$, solucionamos automáticamente el problema de hallar los otros dos.

Un camino para obtener el estimador de credibilidad lineal no-homogéneo para:

$$\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})} = a_\emptyset + \sum_{c,p,j} a_{cpj} \cdot Y_{cpj}$$

es hallar los coeficientes $a_\emptyset$ y a_{cpj} $(c = 1,2,\ldots,l;\ p = 1,2,\ldots,P_c;\ j = 1,2,\ldots,k_{cp})$, tales que:

$$\text{Min } E\left[\left[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) - \widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})}\right]^2\right]$$

esto es, utilizar el procedimiento de los mínimos cuadrados.

BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987), pp, 43, señalan que este camino no es recomendable como solución práctica, y proponen utilizar la técnica del espacio Hilberiano, como ya había hecho anteiormente TAYLOR, C. (1979).

De acuerdo con la terminología del espacio Hilberiano, el estimador de credibilidad lineal no-homogéneo es:

$$\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})} = $$

$$= \mathrm{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/Y_{cp1}, Y_{cp2}, \ldots, Y_{cpk_{cp}}, 1]$$

es decir, es la proyección de $\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$ en el espacio lineal medido por las variables aleatorias Y_{cp1}, $Y_{cp2}, \ldots,$ $Y_{cpk_{cp}}$ y la constante 1.

Para la obtención de los estimadores de credibilidad jerárquicos debemos tener presentes tres principios fundamentales, señalados por BÜHLMANN, H. y JEWELL, W. (1987), pp. 43-45:

•) PRINCIPIO 1: $\mathrm{Pro}[a \cdot X + b \cdot Y / L] = a \cdot P[X/L] + b \cdot P[Y/L]$

•) PRINCIPIO 2: Sea $k \subset L$, entonces:

$$\mathrm{Pro}[X/k] = \mathrm{Pro}\left[\mathrm{Pro}[X/L]/k\right]$$

•) PRINCIPIO 3: La proyección de un elemento perteneciente a este esquema de niveles depende de las variables aleatorias conocidas de dicho esquema[23].

Recordemos que el problema que intentamos solucionar es hallar la proyección del nivel 1, $\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$ condicionada al nivel 0 y 4 (datos y constantes). De forma más resumida podemos escribirlo como:

[23] Para un estudio detallado de este principio ver WITTING, Th. (1987).

$$\boxed{\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})} = \text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\langle D,M\rangle]}$$

donde $\langle D,M\rangle = L_{\emptyset,4}$ e indica el espacio lineal medido por las variables datos del nivel Ø y constantes del nivel 4.

Para hallar $\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})} = \text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\langle D,M\rangle]$ vamos a seguir un proceso iterativo:

Primero proyectaremos en $L_{\emptyset,2,3,4}$, después en $L_{\emptyset,3,4}$ y, por último en $L_{\emptyset,4}$, ya que por el PRINCIPIO 2 sabemos que si $L_{\emptyset,4} \subset L_{\emptyset,3,4} \subset L_{\emptyset,2,3,4}$:

$$\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/L_{\emptyset,4}] =$$

$$\text{Pro}\left[\text{Pro}\left[\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})L_{\emptyset,2,3,4}]/L_{\emptyset,3,4}\right]/L_{\emptyset,4}\right]$$

Este proceso iterativo se lleva a cabo de la siguiente manera:

a) $\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/L_{\emptyset,2,3,4}] =$

$$= \text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/X_{cpj1}, X_{cpj2}, \ldots, X_{cpjt_{cpj}}, \mu(\theta_c, \theta_{cp})] =$$

$$= \frac{t_{cpj}}{t_{cpj} + V_\emptyset/V_1} \cdot Y_{cpj} + \frac{V_\emptyset/V_1}{t_{cpj} + V_\emptyset/V_1} \cdot \mu(\theta_c, \theta_{cp})$$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{\begin{aligned}&Pro[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) \,/\, L_{\emptyset,2,3,4}] = \\ &\qquad = Z_{cpj} \cdot Y_{cpj} + [1 - Z_{cpj}] \cdot \mu(\theta_c, \theta_{cp})\end{aligned}}$$

siendo :

t_{cpj}: el número de periodos observados para la póliza j-ésima de la subcartera p de la compañía c.

Z_{cpj}: el factor de credibilidad para la póliza j-ésima de la subcartera p de la compañía c.

$$Y_{cpj} = \frac{1}{t_{cpj}} \cdot \sum_{s=1}^{t_{cpj}} X_{cpjs}$$

b) $Pro[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/L_{\emptyset,3,4}] =$

$$= Z_{cpj} \cdot Y_{cpj} + [1 - Z_{cpj}] \cdot Pro[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}]$$

Mediante esta proyección lo que obtendremos es el estimador credibilidad para $\mu(\theta_c, \theta_{cp})$, ya que de la expresión anterior es lo único que no conocemos. El medio para obtenerlo es proyectar primero en $L_{\emptyset,1,3,4}$, y usar el resultado para obtener la proyección en $L_{\emptyset,3,4}$, ya que $L_{\emptyset,3,4} \subset L_{\emptyset,1,3,4}$ y:

$$\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}] =$$

$$= \text{Pro}\left[\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/L_{\emptyset,1,3,4}]/L_{\emptyset,3,4}\right]$$

Por un lado tenemos que:

$$\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,1,3,4}] = \text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/\mu(\theta_c)] =$$

$$= \frac{k_{cp}}{k_{cp} + V_1/V_2} \cdot \frac{1}{k_{cp}} \cdot \sum_{j=1}^{k_{cp}} \mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) +$$

$$+ \frac{V_1/V_2}{k_{cp} + V_1/V_2} \cdot \mu(\theta_c)$$

Por los PRINCIPIOS 2 y 1:

$$\text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}] =$$

$$= \frac{1}{k_{cp} + V_1/V_2} \cdot \sum_{j=1}^{k_{cp}} \text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/L_{\emptyset,3,4}] +$$

$$+ \frac{V_1/V_2}{k_{cp} + V_1/V_2} \cdot \mu(\theta_c) = \frac{1}{k_{cp} + V_1/V_2} \cdot \sum_{j=1}^{k_{cp}} \left[Z_{cpj} \cdot Y_{cpj} +\right.$$

$$\left. + [1 - Z_{cpj}] \cdot \text{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}]\right] + \frac{V_1/V_2}{k_{cp} + V_1/V_2} \cdot \mu(\theta_c)$$

Despejando $Pro[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}]$ nos queda:

$$Pro[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}]\cdot\left[1 - \frac{k_{cp} - \sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}}{k_{cp} + V_1 / V_2}\right] =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}\cdot Y_{cpj}}{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}}{k_{cp} + V_1/V_2} + \frac{V_1/V_2}{k_{cp} + V_1/V_2}\cdot\mu(\theta_c)$$

Operando y multiplicando los dos miembros de la igualdad por $(k_{cp} + V_1/V_2)$ obtenemos:

$$Pro[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}]\cdot(V_1/V_2 + \sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}) =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}\cdot Y_{cpj}}{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}}\cdot\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj} + \frac{V_1}{V_2}\cdot\mu(\theta_c)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathrm{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}] =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}}{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj} + V_1/V_2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj} \cdot Y_{cpj}}{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj}} +$$

$$+ \frac{V_1/V_2}{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj} + V_1/V_2} \cdot \mu(\theta_c)$$

Como:

$$Z_{cp} = \frac{Z_{cp\cdot}}{Z_{cp\cdot} + V_1/V_2}$$ Factor de credibilidad de la subcartera p de la compañía c

$$Y_{cpz} = \frac{\sum_{j=1}^{k_{cp}} Z_{cpj} \cdot Y_{cpj}}{Z_{cp\cdot}}$$

obtenemos:

$$\boxed{\mathrm{Pro}[\mu(\theta_c, \theta_{cp})/L_{\emptyset,3,4}] = Z_{cp} \cdot Y_{cpz} + [1 - Z_{cp}] \cdot \mu(\theta_c)}$$

que es la prima de credibilidad para la subcartera p de la compañía c.

c) Siguiendo el mismo proceso que el seguido en el apartado b, obtendremos:

$$\boxed{\mathrm{Pro}[\mu(\theta_c)/L_{0,4}] = Z_c \cdot Y_{czz} + [1 - Z_c] \cdot m}$$

siendo:

$$Z_c = \frac{Z_{c\cdot}}{Z_{c\cdot} + V_2/V_3}$$ Factor de credibilidad de la compañía c

$$Y_{czz} = \frac{\sum_{j=1}^{P_c} Z_{cp} \cdot Y_{cpz}}{Z_{c\cdot}}$$

m es la esperanza conjunta de la cartera en su totalidad.

Resumiendo, una vez que tenemos todos los elementos para el proceso recursivo, lo que haremos será:

1) Calcular $\widehat{\mu(\theta_c)}$ siendo:

$$\widehat{\mu(\theta_c)} = Z_c \cdot Y_{czz} + (1 - Z_c) \cdot m$$

2) Calcular $\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp})}$:

$$\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp})} = Z_{cp} \cdot Y_{cpz} + (1 - Z_{cp}) \cdot \widehat{\mu(\theta_c)}$$

3) Calcular $\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})}$:

$$\widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})} = Z_{zpj} \cdot Y_{cpj} + (1 - Z_{cpj}) \cdot \widehat{\mu(\theta_c, \theta_{cp})}$$

que es el estimador que en realidad deseaamos estimar.

Cabe destacar que los resultados son los mismos que utilizando el procedimiento de los mínimos cudrados, para el caso particular de no trabajar con los pesos naturales.

Para poder aplicar las tres primas de credibilidad anteriores, es preciso estimar los parámetros estructurales m, V_0, V_1, V_2 y V_3. Los estimadores propuestos para dichos parámetros coinciden con los obtenidos en el procedimiento de los mínimos cudrados, con la hipótesis restrictiva de que no trabajamos con ponderaciones naturales.

5.3.- MODELO DE REGRESION JERARQUICO DE SUNDT.

Posteriormente a la aparición del Modelo Jerárquico de JEWELL, SUNDT, B. (1978; 1979a; 1980) expuso su Modelo de Regresión Jerárquico con parámetros aleatorios a dos niveles.

Es una generalización del Modelo Jerárquico de JEWELL, en el sentido que abandona completamente la hipótesis de homogeneidad en el tiempo y la reemplaza por otra de tipo polinómica para las observaciones esperadas, siendo posible trazar tendencias o tener en cuenta los efectos de la inflación, del mismo modo que en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER. En definitiva, se trata de un modelo que es la conjunción del Modelo Jerárquico de JEWELL y del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, pudiéndose obtener ambos como casos particulares de este modelo más general.

En realidad, SUNDT, B. no presentó un único modelo sino más bien tres. En ellos, el objetivo es hallar los estimadores de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales, pero asumió en cada caso hipótesis distintas.

5.3.1.- Variables relevantes.

Las variables que aparecen en este modelo son el resultado de la unión de las variables utilizadas en el Modelo Jerárquico de JEWELL y en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, y son las siguientes:

- θ_p : Es el parámetro de riesgo que caracteriza a la subcartera p, con $p = 1,2,\ldots,P$.

- θ_{pj} : Es el parámetro de riesgo que caracteriza a la póliza j-ésima de la subcartera p, con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$.

- X_{pjs}: Es la variable aleatoria que nos indica la experiencia de reclamaciones con $p = 1,2,\ldots,P$; $j = 1,2,\ldots,k_p$ y $s = 1,2,\ldots,t_{pj}$, siendo w_{pjs} los pesos naturales de las variables observables, que son números dados y positivos.

Además para cada póliza se define:

- Y_{pj} : Es una matriz dada para la póliza j-ésima de la subcartera p, con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$. Son matrices de dimensión (t_{pj},n), donde n es el grado, más una unidad, de la mayor tendencia polinómica prevista para las distintas subcarteras que integran nuestra cartera, debiéndose verificar que $n < t_{pj}$, y además ser de rango pleno, esto es, de rango n.

  Así, por ejemplo, si se prevé que la mayor tendencia polinómica sea un polinomio de segundo grado, $n = 3$ para todas las pólizas, y las matrices Y_{pj} tendrán la siguiente estructura:

$$Y_{pj}(t_{pj},3) = \begin{bmatrix} 1 & t_{pj} & t_{pj}^2 \\ 1 & t_{pj}-1 & (t_{pj}-1)^2 \\ 1 & t_{pj}-2 & (t_{pj}-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo, Y_p^*, con $p = 1,2,\ldots,P$, son matrices dadas particionadas, de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, n)$, formadas por las k_p matrices Y_{pj} puestas en columna, que deben verificar que $n \leq k_p \cdot t_{pj}$ y ser de rango pleno.

- $\phi_{pj} = E\left[Cov[X_{pj}/\theta_p, \theta_{pj}]\right]$. Son matrices definidas positivas y simétricas, de dimensión (t_{pj}, t_{pj}), con $p = 1,2,\ldots,P$; $j = 1,2,\ldots,k_p$ y $X_{pj} = (X_{pj1}, X_{pj2}, \ldots, X_{pjt_{pj}})'$ que es un vector columna de dimensión $(t_{pj}, 1)$

- $\phi_p = E\left[Cov[X_p/\theta_p]\right]$. Son matrices definidas positivas y simétricas, de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, k_p \cdot t_{pj})$, con $p = 1,2,\ldots,P$, siendo $X_p = (X_{p1}, X_{p2}, \ldots, X_{pk_p})'$ que es un vector columna particionado de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, 1)$.

5.3.2.- Hipótesis del modelo.

Nosotros vamos a considerar las siguientes hipótesis, que son las presentadas por SUNDT, B. (1979a), pp. 109-110, aunque adaptadas a nuestra nomenclatura:

S.1) Las subcarteras $p = 1,2,\dots,P$ son independientes.

S.2) Para cada $p = 1,2,\dots,P$ y un θ_p dado, las pólizas $pj = p1, p2,\dots, pk_p$ son condicionalmente independientes.

S.3) Los pares (θ_p, θ_{pj}) están idénticamente distribuidos.

S.4) Para todo p, j y s:

$$E[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p, \theta_{pj}) = \mu(\theta_p, \theta_{pj})$$

donde Y_{pj}, con $p = 1,2,\dots,P$ y $j = 1,2,\dots,k_p$ son matrices dadas, de dimensión (t_{pj},n), y $\beta(\theta_p, \theta_{pj})$ es un vector de regresión desconocido, función de θ_p y θ_{pj}, de dimensión $(n,1)$.

La introducción de las matrices Y_{pj} reemplaza la rígida asunción de homogeneidad en el tiempo asumida en el Modelo Jerárquico de JEWELL, por otra de tipo polinómico. En el caso particular que $n = 2$, se considera que las observaciones esperadas para una póliza perteneciente a una subcartera determinada, siguen una función lineal.

A su vez:

$$\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}) = E[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = Y'_{pjs}\cdot\beta(\theta_p, \theta_{pj})$$

donde Y'_{pjs} es el vector fila s-ésimo de la matriz Y_{pj} anteriormente definida, de dimensión $(1,n)$, siendo $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$ un escalar.

Por otro lado, la prima de riesgo para una subcartera dada, la p-ésima, por ejemplo, es:

$$\mu_p(\theta_p) = E[X_p/\theta_p] = Y_p^*\cdot\beta(\theta_p)$$

que es un vector de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},1)$, donde Y_p^*, con $p = 1,2,\ldots,P$, es una matriz particionada, de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},n)$, formada por las k_p matrices Y_{pj} puestas en columna, esto es:

$$Y_p^* = \begin{bmatrix} Y_{p1} \\ Y_{p2} \\ \vdots \\ Y_{pk_p} \end{bmatrix}$$

El elemento j-ésimo del vector $\mu(\theta_p)$ es:

$$\mu_{pj}(\theta_p) = Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p)$$

que es un vector de dimensión $(t_{pj},1)$.

S.5) También asumimos que:

$$\phi_{pj} = E\left[Cov[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]\right] \quad y \quad \phi_p = E\left[Cov[X_p/\theta_p]\right]$$

con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, son matrices definidas positivas, de dimensión (t_{pj},t_{pj}) y $(k_p\cdot t_{pj},k_p\cdot t_{pj})$ respectivamente, y a la vez simétricas, siendo:

$$\phi_p = E\left[Cov[X_p/\theta_p]\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} E\left[Cov[X_{p1}/\theta_p]\right] & \emptyset & \ldots & \emptyset \\ \emptyset & E\left[Cov[X_{p2}/\theta_p]\right] & \ldots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \ldots & E\left[Cov[X_{pk_p}/\theta_p]\right] \end{bmatrix}$$

debido a la hipótesis de independencia entre los contratos. Además definimos:

$\beta(\theta_p) = E[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]$ vector de dimensión $(n,1)$

$\beta = E[\beta(\theta_p)]$ vector de dimensión $(n,1)$

$\Lambda_p = E[Cov[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]]$ matriz cuadrada y simétrica de de dimensión (n,n).

$\Lambda = Cov[\beta(\theta_p)]$ matriz cuadrada y simétrica de dimensión (n,n).

5.3.3.- Estimadores de credibilidad lineales.

Lo que pretendemos es hallar los estimadores de credibilidad lineales, no-homogéneos, para las primas de riesgo individuales. Si nos centramos en una póliza concreta la pj, por ejemplo, debemos estimar:

$$\mu_{pj}(\theta_p,\ \theta_{pj}) = E[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = Y'_{pjs}\cdot\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})$$

Esta póliza forma parte de la cartera considerada a través de la subcartera p a la cual pertenece, que a su vez es una de las P subcarteras en las que hemos dividido la cartera. Para hallar su estimador de credibilidad deberemos considerar el siguiente problema de minimización:

$$\text{Min } E\left[\left[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}) - \alpha_\emptyset - \sum_{i=1}^{k_p}\sum_{s=1}^{t_{pi}} \alpha_{pis}\cdot X_{pis}\right]^2/\theta_p\right]$$

que expresado de forma matricial es:

$$\text{Min } E[[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}) - \alpha_\emptyset - X'_p\cdot A]^2/\theta_p]$$

siendo X_p el vector columna particionado de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},1)$:

$$X_p = \begin{bmatrix} X_{p1} \\ X_{p2} \\ \vdots \\ X_{pj} \\ \vdots \\ X_{pk_p} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad X_{pj} = \begin{bmatrix} X_{pj1} \\ X_{pj2} \\ \vdots \\ X_{pjs} \\ \vdots \\ X_{pjt_{pj}} \end{bmatrix}$$

y A un vector columna, también particionado, de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, 1)$ definido del siguiente modo:

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{p1} \\ A_{p2} \\ \vdots \\ A_{pj} \\ \vdots \\ A_{pk_p} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad A_{pj} = \begin{bmatrix} A_{pj1} \\ A_{pj2} \\ \vdots \\ A_{pjs} \\ \vdots \\ A_{pjt_{pj}} \end{bmatrix}$$

Hallando los valores $\alpha_{\emptyset}$ y α_{pis} que minimizan la esperanza condicionada anterior, obtendremos el estimador ajustado de credibilidad lineal para $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$.

En realidad, este proceso de minimización tiene fácil solución, ya que se trata de aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER restringido a la subcartera p de la cual forma parte la póliza considerada, siendo su resultado:

$$\mu^{*}_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj} \cdot Z_{pj} + \beta'(\theta_p) \cdot [I - Z_{pj}] \right] \cdot Y_{pjs}$$

donde:

$\hat{\beta}'_{pj}$: Es el vector de los estimadores mínimo-cuadráticos generalizados de los coeficientes de regresión para la póliza pj, pero transpuesto y basado en X_{pj}, es decir, basado en la información de la póliza considerada, siendo su dimensión (1,n), y cuya definición es la siguiente:

$$\hat{\beta}'_{pj} = X'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot (Y'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1}$$

Z_{pj} : Es el factor de credibilidad para la póliza pj, y es una matriz de dimensión (n,n), definida[24] como sigue:

$$Z_{pj} = Y'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot \Lambda_p \cdot [I + Y'_{pj} \cdot \phi^{-1}_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot \Lambda_p]^{-1}$$

$\beta(\theta_p)$: Es un vector de dimensión (n,1), y no es más que el valor esperado de los coeficientes de regresión para la subcartera p, vector que no conocemos y que deberemos estimar, siendo:

$$\beta(\theta_p) = E[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]$$

---

24 Recordemos que una de las expresiones obtenidas para el factor de credibilidad en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER ha sido:

$$Z_j = Y'_j \cdot E\left[Cov[X_j/\theta_j]\right]^{-1} \cdot Y_j \cdot Cov[\beta(\theta_j)] \cdot$$
$$\cdot \left[I + Y'_j \cdot E\left[Cov[X_j/\theta_j]\right]^{-1} \cdot Y_j \cdot Cov[\beta(\theta_j)]\right]^{-1} =$$
$$= Y'_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma \cdot (I + Y'_j \cdot V_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Gamma)^{-1}$$

Para obtener el estimador de credibilidad lineal para $\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj})$ es necesario estimar el vector de coeficientes de regresión $\beta(\theta_p)$, que es lo mismo que decir que debemos estimar la prima de riesgo para la subcartera p, ya que:

$$\mu(\theta_p) = E[X_p/\theta_p] = Y_p^{*}\cdot\beta(\theta_p)$$

donde Y_p^{*} es una matriz particionada, de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},n)$, y $\beta(\theta_p)$ un vector de dimensión $(n,1)$, siendo su elemento j-ésimo:

$$\mu_{pj}(\theta_p) = E[\mu(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p] = E[Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p] =$$

$$= Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p)$$

donde Y_{pj} es una matriz dada de dimensión (t_{pj},n), y $\mu_{pj}(\theta_p)$ un vector de dimensión $(t_{pj},1)$.

El estimador ajustado de credibilidad lineal para $\mu(\theta_p)$ lo obtendremos aplicando de nuevo el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER pero ahora en el nivel de las subcarteras, ya que estamos interesados en hallar el estimador de credibilidad lineal para una subcartera determinada, y utilizaremos para ello toda la información sobre la cartera considerada. En este caso, las hipótesis que asumimos son:

H'.1) Las subcarteras $p = 1,2,\ldots,P$ son independientes y las variables $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p$ están idénticamente distribuidas.

H'.2) Para todo $p = 1,2,\dots,P$ y $j = 1,2,\dots,k_p$ se tiene:

$$E[X_p/\theta_p] = Y_p^{*}\cdot\beta(\theta_p) = \mu(\theta_p)$$

donde $\beta(\theta_p)$ es un vector de regresión desconocido, de dimensión $(n,1)$, e Y_p^{*} es una matriz dada de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},n)$ y de rango pleno.

En este caso, el problema de minimización que debemos resolver es el siguiente:

$$\text{Min } E\left[\left[\mu(\theta_p) - \alpha_{\emptyset} - \sum_{q=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_q}\sum_{s=1}^{t_{qj}} c_{qjs}\cdot X_{qjs}\right]^2\right]$$

siendo su resultado, para la póliza j-ésima de la subcartera p:

$$\widehat{\mu_{pj}}(\theta_p) = \left[\hat{\beta}_p'\cdot Z_p + \beta'\cdot[I - Z_p]\right]\cdot Y_{pj}' = \tilde{\beta}'\cdot Y_{pj}'$$

donde:

$\tilde{\beta}'$: Es el estimador de credibilidad lineal de $\beta'(\theta_p)$ basado en X_p, siendo:

$$\tilde{\beta}' = \tilde{\beta}_p'\cdot Z_p + \beta'\cdot[I - Z_p]$$

$\hat{\beta}_p'$: Es un vector de dimensión $(1,n)$, definido como sigue:

$$\hat{\beta}_p' = X_p'\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot(Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*})^{-1}$$

siendo el vector de los estimadores mínimo-cuadráticos generalizados de los coeficientes de regresión para la subcartera p, basado en X_p, es decir, basado en la información de toda la subcartera, y donde a su vez Y_p^* es una matriz particionada, de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, n)$, formada por las k_p matrices Y_{pj} puestas en columna.

Z_p: Es el factor de credibilidad para la subcartera p, y es una matriz cuadrada de dimensión (n,n), definida como sigue:

$$Z_p = Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot \Lambda \cdot [I + Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot \Lambda]^{-1}$$

$\beta = E[\beta(\theta_p)]$ es uno de los parámetros estructurales que deberemos estimar, siendo un vector de dimensión (n,1).

En realidad, lo que nos indicará la tendencia polinómica considerada dentro de cada subcartera no es la matriz Y_p^*, sino los valores significativos que tenga el estimador del vector de los coeficientes de regresión $\beta(\theta_p)$, ya que aunque la matriz Y_p^* sea de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, 5)$, por ejemplo, si el vector $\tilde{\beta}$, de dimensión (5,1), sólo tiene valores significativos en sus tres primeras componentes, nos estará indicando que la tendencia polinómica considerada en la subcartera p es la de un polinomio de segundo grado. Dentro de cada subcartera la tendencia polinómica considerada puede ser distinta, aunque todas las subcarteras posen la matriz Y_p^* con el mismo número de columnas.

Una vez obtenido el estimador de credibilidad lineal para $\beta(\theta_p)$ lo sustituimos en $\mu^*_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$ y obtenemos el estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo individual para la póliza pj en el periodo s:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \tilde{\beta}'\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs}$$

o de forma análoga:

$$\boxed{\begin{aligned}&\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \\ &\qquad = \left[\hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \left[\hat{\beta}'_p\cdot Z_p + \beta'\cdot[I - Z_p]\right]\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs}\end{aligned}}$$

resultado que coincide con el obtenido por SUNDT, B. (1979a), pp. 110.

5.3.3.1.- El mejor estimador de credibilidad lineal.

Para demostrar que $\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})$ es el mejor estimador de credibilidad lineal para $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$, vamos a utilizar el TEOREMA expuesto por SUNDT, B. (1980), pp. 26-27.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$:

(a) El mejor estimador de credibilidad lineal para $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$ es UNICO[25].

---

25 (a) Fue probado por De VYLDER, F. (1976).

(b) Sea $\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})$ un estimador de credibilidad lineal de $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$. Entonces $\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})$ es el mejor estimador de credibilidad lineal de $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$ sí y sólo sí satisface:

$$E[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})] = E[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})] \tag{1}$$

$$Cov[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p'] = Cov[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p'] \tag{2}$$

Comprobar que se verifica (1) es fácil, basta calcular $E[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})]$:

$$E[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})] = E\left[\hat{\beta}_{pj}'\cdot Z_{pj} + \tilde{\beta}'\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs} =$$

$$= \left[E[\hat{\beta}_{pj}']\cdot Z_{pj} + E[\tilde{\beta}']\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs} \tag{3}$$

•) $$E[\hat{\beta}_{pj}'] = E[X_{pj}']\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y_{pj}'\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1} =$$

$$= E[\mu_{pj}'(\theta_p)]\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y_{pj}'\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1} =$$

$$= E[\beta'(\theta_p)]\cdot Y_{pj}'\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y_{pj}'\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1} = \beta' \tag{4}$$

•) $$E[\tilde{\beta}'] = E\left[\hat{\beta}_{pj}'\cdot Z_{pj} + \beta'\cdot[I - Z_{pj}]\right] =$$

$$= E[\hat{\beta}_p']\cdot Z_p + E[\beta']\cdot[I - Z_p] =$$

$$= \beta' \cdot Z_p + \beta' \cdot [I - Z_p] = \beta' \qquad (5)$$

ya que:

$$E[\hat{\beta}'_p] = E[X'_p] \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot (Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^*)^{-1} =$$

$$= E[\beta'(\theta_p)] \cdot Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot (Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^*)^{-1} = \beta' \qquad (6)$$

y $E[\beta'] = \beta'$, pues β es uno de los parámetros estructurales del modelo.

Sustituyendo (4) y (5) en (3) obtenemos:

$$E[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})] = E\Big[\beta' \cdot Z_{pj} + \beta' \cdot [I - Z_{pj}] \Big] \cdot Y_{pjs} =$$

$$= \beta' \cdot Y_{pjs} = Y'_{pjs} \cdot \beta$$

Por otro lado:

$$E[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})] = E[Y'_{pjs} \cdot \beta(\theta_p, \theta_{pj})] = Y'_{pjs} \cdot E[\beta(\theta_p, \theta_{pj})] =$$

$$= Y'_{pjs} \cdot E[E[\beta(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]] =$$

$$= Y'_{pjs} \cdot E[\beta(\theta_p)] = Y'_{pjs} \cdot \beta$$

quedando demostrado que:

$$E[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})] = E[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})]$$

Comprobar que se verifica (2) es ya una tarea más difícil. Por un lado tenemos:

$$\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_p] = E\big[\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_p/\theta_p]\big] +$$

$$+\ \mathrm{Cov}\big[E[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p],\ E[X'_p/\theta_p]\big] \qquad (7)$$

•) Para un θ_p dado los contratos son condicionalmente independientes y resulta que:

$$\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_{pq}/\theta_p] =$$

$$= \delta_{jq}\cdot\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_{pq}/\theta_p] \qquad (8)$$

$$q = 1,2,\ldots,k_p$$

siendo δ_{jq} el símbolo de Kronecker.

En el caso que $q = j$:

$$\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_{pj}/\theta_p] =$$

$$= E\big[\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p\big] +$$

$$+\ \mathrm{Cov}\big[E[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p,\theta_{pj}],\ E[X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p\big] \qquad (9)$$

Al ser $\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = 0$, ya que para un $(\theta_p,\ \theta_{pj})$ dado, $\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj})$ es una constante, resulta:

$$Cov[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}), X'_{pj}/\theta_p] =$$

$$= Cov[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}), \mu'(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p] =$$

$$= Cov[Y'_{pjs}\cdot\beta(\theta_p, \theta_{pj}), \beta'(\theta_p, \theta_{pj})\cdot Y'_{pj}/\theta_p] =$$

$$= Y'_{pjs}\cdot Cov[\beta(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]\cdot Y'_{pj} \qquad (10)$$

que es un vector de dimensión $(1,t_{pj})$, siendo su esperanza:

$$E\left[Cov[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}), X'_{pj}/\theta_p]\right] =$$

$$= Y'_{pjs}\cdot E\left[Cov[\beta(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]\right]\cdot Y'_{pj} = Y'_{pjs}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj} \quad (11)$$

Por lo tanto:

$$E\left[Cov[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}), X'_p/\theta_p]\right] =$$

$$= [0,\dots,Y'_{pjs}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj},\dots,0] =$$

$$= Y'_{pjs}\cdot[0,\dots,\Lambda_p\cdot Y'_{pj},\dots,0] \qquad (12)$$

que es un vector de dimensión $(1,k_p\cdot t_{pj})$.

•) $Cov[E[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p],\ E[X_p'/\theta_p]] =$

$$= Cov[\mu_{pjs}(\theta_p),\ \mu_p'(\theta_p)] = Cov[Y_{pjs}'\cdot\beta(\theta_p),\ \beta'(\theta_p)\cdot Y_p^{*'}] =$$

$$= Y_{pjs}'\cdot Cov[\beta(\theta_p)]\cdot Y_p^{*'} = Y_{pjs}'\cdot\Lambda\cdot Y_p^{*'} \tag{13}$$

que es un vector de dimensión $(1,k_p\cdot t_{pj})$.

Sustituyendo (12) y (13) en (7) obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} &Cov[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X_p'] = \\ &\qquad = Y_{pjs}'\cdot\left[[\emptyset,\ldots,\Lambda_p\cdot Y_{pj}',\ldots,\emptyset] + \Lambda\cdot Y_p^{*'}\right]\end{aligned}} \tag{14}$$

vector de dimensión $(1,k_p\cdot t_{pj})$, o de forma análoga:

$$Cov[\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X_p'] =$$

$$= \left[Y_{pjs}'\cdot\left[[\emptyset,\ldots,\Lambda_p\cdot Y_{pj}',\ldots,\emptyset] + \Lambda\cdot Y_p^{*'}\right]\right]' =$$

$$= \left[[\emptyset,\ldots,Y_{pj}\cdot\Lambda_p,\ldots,\emptyset] + Y_p^{*}\cdot\Lambda\right]\cdot Y_{pjs}$$

siendo ahora un vector de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},1)$.

Por otro lado tenemos:

$$\mathrm{Cov}[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj}),\ X'_p] =$$

$$= \mathrm{Cov}\left[\left[\ \hat{\beta}_{pj}\cdot Z_{pj} + \tilde{\beta}'\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs},\ X'_p\right] =$$

$$= \left[\mathrm{Cov}[\hat{\beta}_{pj},\ X'_p]\cdot Z_{pj} + \mathrm{Cov}[\tilde{\beta}',\ X'_p]\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs} \quad (15)$$

$$\cdot)\ \mathrm{Cov}[\hat{\beta}_{pj},\ X'_p] = \mathrm{Cov}[X'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1},\ X'_p] =$$

$$= \mathrm{Cov}[X'_{pj},\ X'_p]\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1} \quad (16)$$

siendo:

$$\mathrm{Cov}[X'_{pj},\ X'_p] = E\left[\mathrm{Cov}[X'_{pj},\ X'_p/\theta_p]\right] +$$

$$+ \mathrm{Cov}\left[E[X'_{pj}/\theta_p],\ E[X'_p/\theta_p]\right] \quad (17)$$

Como para un θ_p dado, los contratos son condicionalmente independiente, resulta:

$$\mathrm{Cov}[X'_{pj},\ X'_p/\theta_p] = \delta_{jq}\cdot\mathrm{Cov}[X'_{pj},\ X'_{pq}/\theta_p] =$$

$$= [\emptyset,\ldots,\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p],\ldots,\emptyset]' \quad (18)$$

tratándose de una matriz de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},t_{pj})$.

A su vez:

$$\mathrm{Cov}[X'_{pj}, X'_p/\theta_p] = \mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p] =$$

$$= E\big[\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p\big] + \mathrm{Cov}\big[E[X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p\big] =$$

$$= E\big[\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p\big] + \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p, \theta_{pj})\cdot Y'_{pj}/\theta_p] =$$

$$= E\big[\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p\big] + Y_{pj}\cdot \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]\cdot Y'_{pj}$$

siendo su valor esperado:

$$E\big[\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p]\big] = E[\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]] +$$

$$+ Y_{pj}\cdot E\big[\mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]\big]\cdot Y'_{pj} =$$

$$= \phi_{pj} + Y_{pj}\cdot \Lambda_p\cdot Y'_{pj} \tag{19}$$

Cabe hacer notar que la matriz $E\big[\mathrm{Cov}[X'_{pj}/\theta_p]\big]$, de dimensión (t_{pj},t_{pj}), es una matriz definida positiva, ya que es la suma de una matriz definida positiva, ϕ_{pj}, y de una matriz semidefinida positiva[26], $Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}$. Al ser una matriz definida positiva su determinante es distinto de cero, y por lo tanto es invertible, siendo también simétrica.

---

26 Al ser Λ_p una matriz de covarianzas, será siempre semidefinida positiva o definida positiva si no es singular, como indica KENDALL, M. y STUART, A. (1977), pp. 374, siendo $Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}$ una matriz semidefinida positiva, pues al diagonizarla nos dará valores propios mayores o iguales que cero.

Así pues, el valor esperado de la ecuación (18) es:

$$E[Cov[X'_{pj}, X'_p/\theta_p]] = [\emptyset,\dots,E[Cov[X'_{pj}/\theta_p]],\dots,\emptyset] =$$

$$= [\emptyset,\dots,\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj},\dots,\emptyset] \qquad (20)$$

Por otro lado:

$$Cov\big[E[X'_{pj}/\theta_p],\ E[X'_p/\theta_p]\big] = Cov[\mu'_{pj}(\theta_p),\ \mu'_p(\theta_p)] =$$

$$= Cov[Y'_{pj}\cdot\beta'(\theta_p),\ \beta'(\theta_p)\cdot Y^{*'}_p] =$$

$$= Y^{*}_p\cdot Cov[\beta(\theta_p)]\cdot Y'_{pj} = Y^{*}_p\cdot\Lambda\cdot Y'_{pj} \qquad (21)$$

matriz de dimensión $(k_p\cdot t_{pj}, t_{pj})$.

Sustituyendo (20) y (21) en (17) obtenemos:

$$\boxed{Cov[X'_{pj},\ X'_p] = [\emptyset,\dots,\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj},\dots,\emptyset]' + Y^{*}_p\cdot\Lambda\cdot Y'_{pj}} \qquad (22)$$

y sustituyendo, a su vez, (22) en (16) y postmultiplicando por Z_{pj} resulta:

$$Cov[\hat{\beta}_{pj},\ X'_p]\cdot Z_{pj} = \big[[\emptyset,\dots,\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj},\dots,\emptyset]' +$$

$$+ Y^{*}_p\cdot\Lambda\cdot Y'_{pj}\big]\cdot\phi^{-1}_{pj}\cdot Y_{pj}\cdot(Y'_{pj}\cdot\phi^{-1}_{pj}\cdot Y_{pj})^{-1}\cdot Z_{pj} =$$

$$= [0,\ldots,\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj},\ldots,0]'\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot$$

$$[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1} + Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot$$

$$\cdot(Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1}\cdot Z_{pj} =$$

$$= [0,\ldots,\phi_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1} +$$

$$+ Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1},\ldots,0] +$$

$$+ Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Z_{pj} = [0,\ldots,Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1} +$$

$$+ Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1}],\ldots,0] +$$

$$+ Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Z_{pj} = [0,\ldots,Y_{pj}\cdot\Lambda_p,\ldots,0] + Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Z_{pj}$$

esto es:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\beta_{pj},\ X'_p]\cdot Z_{pj} = [0,\ldots,Y_{pj}\cdot\Lambda_p,\ldots,0]\ +\\ +\ Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Z_{pj}\end{aligned}} \qquad (23)$$

que es una matriz de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},n)$

•) $\mathrm{Cov}[\tilde{\beta}',\ X'_p] = \mathrm{Cov}\left[\hat{\beta}'_p\cdot Z_p + \beta'[I - Z_p],\ X'_p\right] =$

$$= \mathrm{Cov}[\hat{\beta}_p,\ X'_p]\cdot Z_p + 0 =$$

$$= Cov[X_p' \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot (Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^*)^{-1},\ X_p'] \cdot Z_p =$$

$$= Cov[X_p'] \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot (Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^*)^{-1} \cdot Z_p \qquad (24)$$

ya que Z_p y β son matrices constantes.

$$Cov[X_p'] = E\left[Cov[X_p'/\theta_p]\right] + Cov\left[E[X_p'/\theta_p]\right] =$$

$$= \phi_p + Cov[\mu_p'(\theta_p)] = \phi_p + Cov[\beta'(\theta_p) \cdot Y_p^{*'}] =$$

$$= \phi_p + Y_p^* \cdot Cov[\beta'(\theta_p)] \cdot Y_p^{*'} = \phi_p + Y_p^* \cdot \Lambda \cdot Y_p^{*'} \qquad (25)$$

Cabe destacar que la matriz $Cov[X_p']$, de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, k_p \cdot t_{pj})$, es una matriz semidefinida positiva, ya que hemos asumido que ϕ_p es definida positiva, y a su vez $Y_p^* \cdot \Lambda \cdot Y_p^{*'}$ es semidefinida positiva[27], siendo también simétrica.

Sustituyendo (25) en (24) obtenemos:

$$Cov[\tilde{\beta}',\ X_p'] =$$

$$= (\phi_p + Y_p^* \cdot \Lambda \cdot Y_p^{*'}) \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^* \cdot (Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^*)^{-1} \cdot Z_p \qquad (26)$$

---

27 Al ser Λ es una matriz de covarianzas siempre semidefinida positiva o definida positiva si no es singular, como señala KENDALL, M. y STUART, A. (1977), pp. 374, siendo $Y_p^* \cdot \Lambda \cdot Y_p^{*'}$ una matriz semidefinida positiva, pues al diagonalizarla nos dará valores propios mayores o iguales a cero.

y si ahora en (26) sustituimos Z_p por su expresión nos queda:

$$Cov[\tilde{\beta}', X_p'] =$$

$$= (\phi_p + Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Y_p^{*'})\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot(I + Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda)^{-1} \quad (27)$$

que es equivalente a:

$$Cov[\tilde{\beta}', X_p'] = (Y_p^{*}\cdot\Lambda + Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda)\cdot$$

$$\cdot(I + Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda)^{-1} =$$

$$= Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot(I + Y_p^{*'}\cdot\phi^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda)\cdot(I + Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda)^{-1}$$

siendo:

$$\boxed{Cov\left[\tilde{\beta}', X_p'\right] = Y_p^{*}\cdot\Lambda} \quad (28)$$

que es una matriz de dimensión $(k_p\cdot t_{pj},n)$

Si sustituimos en (15), las ecuaciones (23) y (28) obtenemos:

$$Cov[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p'] = [[0,\ldots,Y_{pj}\cdot\Lambda_p,\ldots,0] + Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot Z_{pj} +$$

$$+ Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot[I - Z_{pj}]]\cdot Y_{pjs} =$$

$$= \left[[\emptyset, \ldots, Y_{pj} \cdot \Lambda_p, \ldots, \emptyset] + Y_p^{*} \cdot \Lambda\right] \cdot Y_{pjs} \qquad (29)$$

Comparando las ecuaciones (14) y (29) resulta que se trata de la misma expresión, verificándose por lo tanto:

$$\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p'] = \mathrm{Cov}[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p']$$

tratándose de un vector de dimensión $(k_p \cdot t_{pj}, 1)$.

Como $\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})$ verifica que:

$$E[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})] = E[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})]$$

y

$$\mathrm{Cov}[\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p'] = \mathrm{Cov}[\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}), X_p']$$

$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})$ es, por lo tanto, **el mejor estimador de credibilidad lineal para $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$.**

Sin embargo, no sólo $\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj})$ es el mejor estimador de credibilidad, sino también resulta que $\tilde{\beta}$ **es el mejor estimador de credibilidad lineal para $\beta(\theta_p)$**, ya que verifica las siguientes condiciones:

$$E[\tilde{\beta}' \ ] = E[\beta'(\theta_p)]$$

y

$$\mathrm{Cov}[\tilde{\beta}', X_p'] = \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), X_p']$$

La comprobación de estas dos igualdades es fácil. La primera la hemos obtenido en (5), y en cuanto a la segunda, en (28) hemos hallado:

$$\mathrm{Cov}[\tilde{\beta}', X'_p] = Y^{*}_p \cdot \Lambda_p$$

Por otro lado:

$$\mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), X'_p] = E[\mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), X'_p/\theta_p]] +$$

$$+ \mathrm{Cov}[E[\beta'(\theta_p)/\theta_p], E[X'_p/\theta_p]] \qquad (30)$$

y como para un θ_p dado, $\beta(\theta_p)$ es un vector constante:

$$\mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), X'_p/\theta_p] = \emptyset \qquad y \qquad E[\beta'(\theta_p)/\theta_p] = \beta'(\theta_p)$$

siendo:

$$\mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), X'_p] = \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), E[X'_p/\theta_p]] =$$

$$= \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), \beta'(\theta_p) \cdot Y^{*'}_p] =$$

$$= \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p)] \cdot Y^{*'}_p = \Lambda \cdot Y^{*'}_p \qquad (31)$$

que es un vector de dimensión $(n, k_p \cdot t_{pj})$.

De manera que:

$$\mathrm{Cov}[\tilde{\beta}', X'_p] = \mathrm{Cov}[\beta'(\theta_p), X'_p]$$

5.3.3.2.- Obtención del Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

Hasta ahora hemos estado asumiendo que el parámetro de riesgo θ_p era una variable aleatoria desconocida. Si asumimos que θ_p es constante $\forall p$, y $\beta(\theta_p) = \beta(\theta_p, \theta_{pj})$, es decir, que el vector de los coeficientes de regresión para toda la subcartera coincide con el vector de regresión para una póliza concreta de la subcartera considerada, en este caso resulta que:

$$\phi_{pj} = E[Cov[X_{pj}/\theta_{pj}]]$$

$$\phi_p = E[Cov[\beta(\theta_p, \theta_{pj})/\theta_p]] = Cov[\beta(\theta_p, \theta_{pj})]$$

$$\Lambda = \emptyset \implies Z_p = \emptyset$$

$$\tilde{\beta}' = \beta'$$

siendo el estimador ajustado de credibilidad:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj} \cdot Z_{pj} + \beta' \cdot [I - Z_{pj}] \right] \cdot Y_{pjs} \qquad (32)$$

estimador que coincide con el obtenido en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

Al asumir que θ_p es constante $\forall p$, y que $\beta(\theta_p) = \beta(\theta_p, \theta_{pj})$ hemos eliminado la jerarquización propia de los modelos jerárquicos, y hemos pasado a considerar nuestra cartera como una muestra aleatoria de una población de riesgos. Al haber suprimido la jerarquización, cada póliza está caracterizada por un único parámetro de riesgo, por lo que en realidad deberíamos escribir el estimador ajustado de credibilidad de la siguiente manera:

$$\hat{\mu}_{js}(\theta_j) = \hat{\mu}_{js} = \left[\hat{\beta}'_j \cdot Z_j + \beta' \cdot [I - Z_j] \right] \cdot Y_{js}$$

siendo:

$$\hat{\beta}'_j = X'_j \cdot \phi_j^{-1} \cdot Y_j \cdot (Y'_j \cdot \phi_j^{-1} \cdot Y_j)^{-1}$$

$$Z_j = Y'_j \cdot \phi_j^{-1} \cdot Y_j \cdot \Lambda \cdot [I + Y'_j \cdot \phi_j^{-1} \cdot Y_j]^{-1}$$

$$\beta = E[\beta(\theta_j)]$$

$$\phi_j = E[Cov[X_j/\theta_j]]$$

$$\Lambda = Cov[\beta(\theta_j)]$$

5.3.4.- Análisis de un modelo más restrictivo.

En el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT considerado, hemos asumido como hipótesis del mismo la existencia de independencia entre las subcarteras, que para cada $p = 1,2,\dots,P$ y para un θ_p dado los contratos pj son condicionalmente independientes, así como que los pares (θ_p, θ_{pj}) están idénticamente distribuidos.

Al mismo tiempo, hemos asumido que:

$$E[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})$$

$$\mu_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}) = E[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = Y'_{pjs}\cdot\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})$$

y que $\phi_{pj} = E[Cov[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]$ es una matriz simétrica definida positiva. También hemos considerado que las matrices Y_{pj} son matrices dadas, de dimensión (t_{pj},n), y de rango pleno, debiendo verificar que $n \leq t_{pj}$.

Por otro lado, hemos aceptado que $\phi_p = E[Cov[X_p/\theta_p]]$ es una matriz simétrica, definida positiva, y que:

$$\beta(\theta_p) = E[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]$$

$$\beta = E[\beta(\theta_p)$$

y

$$\Lambda = Cov[\beta(\theta_p)]$$

En este caso, vamos a añadir una hipótesis adicional; vamos a considerar que la matriz $\Lambda_p = E[Cov[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]]$ es, además de simétrica, **definida positiva**. Al tratarse de una matriz definida positiva su determinante nunca será nulo y, por lo tanto, será invertible.

Si Λ_p es una matriz definida positiva, el estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo individual, $\widehat{\mu^{*}_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj})$, viene dado por:

$$\boxed{\begin{aligned}&\widehat{\mu^{*}_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj}) = Y'_{pjs}\cdot\Big[Z'_{pj}\cdot\hat{\beta}_{pj} + \\ &+ [I - Z'_{pj}]\cdot[I + \Lambda\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{\Sigma}]^{-1}\cdot[\Lambda\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{k_p} Z'_{pj}\cdot\hat{\beta}_{pj} + \beta]\Big]\end{aligned}} \quad (33)$$

siendo:

$$\hat{\beta}_{pj} = (Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1}\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot X_{pj} \quad (34)$$

$$Z'_{pj} = [I + \Lambda_p\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}]^{-1}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj} \quad (35)$$

$$Z'_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{k_p} Z'_{pj} \quad (36)$$

Para obtener el estimador de credibilidad $\widehat{\mu^{*}_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj})$ debemos introducir la hipótesis adicional en la fórmula de credibilidad lineal antes obtenida:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj}) =$$

$$= \Big[\hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + [\hat{\beta}'_p\cdot Z_p + \beta'\cdot[I - Z_p]]\cdot[I - Z_{pj}]\Big]\cdot Y_{pjs} \quad (37)$$

donde:

$$\hat{\beta}'_p = X'_p\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot(Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*})^{-1} \quad (38)$$

$$Z_p = Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda\cdot[I + Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot\Lambda]^{-1} \quad (39)$$

y donde Z'_{pj} y $\hat{\beta}_{pj}$ están definidos en (34) y (35) respectivamente.

Al ser:

$$\phi_p = E\left[Cov[X_p/\theta_p]\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} E\left[Cov[X_{p1}/\theta_p]\right] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E\left[Cov[X_{p2}/\theta_p]\right] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E\left[Cov[X_{pk_p}/\theta_p]\right] \end{bmatrix}$$

resulta que:

$$Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^{*} = \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot Y_{pj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj} \cdot [I + \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1} \qquad (40)$$

La igualdad entre:

$$\sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot Y_{pj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj} \cdot [I + \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1}$$

se obtiene aplicando el LEMA expuesto por SUNDT, B. (1979), pp. 108, que dice lo siguiente:

Sea A una matriz de dimensión (k,l) y de rango l, B una matriz semidefinida positiva de dimensión (l,l), C una matriz definida positiva de dimensión (k,k), y:

$$E = C + A \cdot B \cdot A'$$

Entonces $I + B \cdot A' \cdot C^{-1} \cdot A$ es invertible y tenemos:

$$(A' \cdot E^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A' \cdot E^{-1} = (A' \cdot C^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A' \cdot C^{-1}$$

y

$$A' \cdot E^{-1} \cdot A = A' \cdot C^{-1} \cdot A \cdot (I + B \cdot A' \cdot C^{-1} \cdot A)^{-1}$$

En nuestro caso particular, las matrices E, A, C y B son respectivamente $E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]$, Y_p, ϕ_{pj} y Λ_p.

A su vez[28]:

$$Y_p^{*'} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^{*} = \sum_{j=1}^{k_p} \Lambda_p^{-1} \cdot \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj} \cdot [I + \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1} =$$

$$= \Lambda_p^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{k_p} Z'_{pj} = \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \qquad (41)$$

Si sustituimos (41) en (38) resulta:

---

28 $Z'_{pj} = [I + \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1} \cdot \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj} =$

$$= \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj} \cdot [I + \Lambda_p \cdot Y'_{pj} \cdot \phi_{pj}^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1}$$

$$\hat{\beta}'_p = X'_p \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y^*_p \cdot (\Lambda_p^{-1} \cdot Z'_\Sigma)^{-1} = X'_p \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y^*_p \cdot Z'^{-1}_\Sigma \cdot \Lambda_p =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{k_p} X'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot Y_{pj} \right] \cdot Z'^{-1}_\Sigma \cdot \Lambda_p =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{k_p} X'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot Y_{pj} \right.$$

$$\cdot [Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_j]]^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1} \cdot$$

$$\left. \cdot Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_j]]^{-1} \cdot Y_{pj} \right] \cdot Z'^{-1}_\Sigma \cdot \Lambda_p \qquad (42)$$

y aplicando en (42) el LEMA anterior, obtenemos:

$$\hat{\beta}'_p = \left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj} \cdot \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{pj} \right] \cdot Z'^{-1}_\Sigma \cdot \Lambda_p \qquad (43)$$

Por otro lado, si sustituimos (41) en (39) el factor de credibilidad Z_p se puede escribir del siguiente modo:

$$Z_p = \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_\Sigma \cdot \Lambda \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_\Sigma \cdot \Lambda]^{-1} =$$

$$= [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_\Sigma \cdot \Lambda]^{-1} \cdot \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_\Sigma \cdot \Lambda \qquad (44)$$

Una vez obtenidas las expresiones para $\hat{\beta}'_p$ y Z_p, dadas en (43) y (44) respectivamente, si las sustituimos en (37) resulta que el estimador ajustado de credibilidad se puede también expresar como sigue:

$$\widetilde{\mu^*_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj} \cdot Z_{pj} + \left[\left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj} \cdot \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{pj} \right] \cdot \right.\right.$$

$$\cdot Z_{\Sigma}'^{-1} \cdot \Lambda_p \cdot \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} +$$

$$\left.\left. + \beta' \cdot [I - \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} \right] \cdot [I - Z_{pj}] \right] \cdot Y_{pjs}$$

pero como:

$$I - Z_p = I - \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} =$$

$$= [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda - \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda] \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} =$$

$$= [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} \qquad (45)$$

resulta que:

$$\widetilde{\mu^*_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj} \cdot Z_{pj} + \left[\left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj} \cdot \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{pj} \right] \cdot \right.\right.$$

$$\cdot \Lambda \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} +$$

$$\left.\left. + \beta' \cdot [I + \Lambda_p^{-1} \cdot Z'_{\Sigma} \cdot \Lambda]^{-1} \right] \cdot [I - Z_{pj}] \right] \cdot Y_{pjs} =$$

$$= \left[\hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \left[\left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj}\cdot \Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{pj} \right]\cdot \Lambda + \beta' \right]\cdot \right.$$

$$\left. \cdot[I + \Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{\Sigma}\cdot \Lambda]^{-1}\cdot[I - Z_{pj}] \right]\cdot Y_{pjs} \qquad (46)$$

Como $Y_p^{*'}\cdot \phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}$ es una matriz simétrica, resulta que:

$$\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{\Sigma} = Z_{\Sigma}\cdot \Lambda_p^{-1}$$

y como:

$$\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{pj} = \Lambda_p^{-1}\cdot \Lambda_p\cdot Y'_{pj}\cdot \phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot[I + \Lambda_p\cdot Y'_{pj}\cdot \phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}]^{-1} =$$

$$= Y'_{pj}\cdot \phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot[I + \Lambda_p\cdot Y'_{pj}\cdot \phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}]^{-1} = A'\cdot E^{-1}\cdot A$$

por el LEMA de SUNDT, B. (1979), pp. 108, se desprende que $\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{pj} = Z'_{pj}\cdot \Lambda_p^{-1}$ ya que la matriz $A'\cdot E^{-1}\cdot A$ es simétrica, y puesto que $E = E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]$ es, a su vez, una matriz simétrica.

Si $\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{\Sigma} = Z_{\Sigma}\cdot \Lambda_p^{-1}$ y $\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{pj} = Z'_{pj}\cdot \Lambda_p^{-1}$ resulta que:

$$\hat{\beta}'_{pj}\cdot \Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{pj} = \hat{\beta}'_{pj}\cdot Z'_{pj}\cdot \Lambda_p^{-1} \qquad (47)$$

y

$$[I + \Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{\Sigma}\cdot \Lambda]^{-1} = [I + Z_{\Sigma}\cdot \Lambda_p^{-1}\cdot \Lambda]^{-1} \qquad (48)$$

siendo:

$$\widetilde{\mu}^{*}_{pjs}(\theta_p,\ \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \left[\left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj}\cdot Z'_{pj} \right]\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot\Lambda + \beta' \right]\cdot \right.$$

$$\left. \cdot[I + Z_{\Sigma}\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot\Lambda]^{-1}\cdot[I - Z_{pj}] \right]\cdot Y_{pjs} =$$

$$= Y'_{pjs}\cdot\left[Z'_{pj}\cdot\hat{\beta}'_{pj} + [I - Z'_{pj}]\cdot[I + \Lambda\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot Z'_{\Sigma}]^{-1}\cdot \right.$$

$$\left. \cdot[\Lambda\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{k_p} Z'_{pj}\cdot\hat{\beta}_{pj} + \beta] \right]$$

estimador[29] que coincide con el obtenido por SUNDT, B. (1979), pp. 112-113, siendo:

$$Z_p = Z_{\Sigma}\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot\Lambda\cdot[I + Z_{\Sigma}\cdot\Lambda_p^{-1}\cdot\Lambda]^{-1}$$

$$\hat{\beta}'_p = \left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj}\cdot Z'_{pj} \right]\cdot Z'^{-1}_{\Sigma}$$

---

29 La matriz de credibilidad que para nosotros es:

$$Z_{pj} = Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1}$$

para SUNDT, B. es la misma matriz, pero transpuesta.

En el caso que θ_p sea constante $\forall p$ y $\beta(\theta_p) = \beta(\theta_p,\ \beta_{pj})$, resulta que:

$$\phi_{pj} = E[Cov[X_{pj}/\theta_p]] = E[Cov[X_j/\theta_j]]$$

$$\Lambda_p = Cov[\beta(\theta_j)] \quad \text{y} \quad \Lambda = \emptyset$$

Si $\Lambda = \emptyset \implies Z_p = \emptyset$, siendo el estimador ajustado de credibilidad en este caso:

$$\widehat{\mu^{*}_{pjs}}(\theta_p,\ \theta_{pj}) = \hat{\mu}^{*}_{js}(\theta_j) = \left[\ \hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \beta'\cdot[I - Z_{pj}]\ \right]\cdot Y_{pjs} =$$

$$= \left[\ \hat{\beta}'_j\cdot Z_j + \beta'\cdot[I - Z_j]\ \right]\cdot Y_{pjs}$$

que coincide con el obtenido en el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, aunque con distinta nomenclatura.

5.3.5.- Obtención del Modelo Jerárquico de JEWELL.

El Modelo de Regresión de HACHEMEISTER y el Modelo Jerárquico de JEWELL se pueden obtener, como ya hemos indicado, como casos particulares del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Si en dicho modelo, asumimos que θ_p es **constante** $\forall p$ y $\beta(\theta_p) = \beta(\theta_p, \beta_{pj})$, obtenemos, como ya hemos visto, el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER.

Por el contrario, si consideramos el caso particular que $n = 1$ y que el vector de los coeficientes de regresión $\beta(\theta_p, \theta_{pj})$ sea igual a la constante $\mu(\theta_p, \theta_{pj})$, es decir, $\beta(\theta_p, \theta_{pj}) = \mu(\theta_p, \theta_{pj})$, resulta que:

$$E[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \mu(\theta_p, \theta_{pj})$$

siendo $Y_{pj} = [1, 1, \ldots, 1]'$, matriz de dimensión $(t_{pj},1)$, y si también asumimos que **las observaciones condicionadas son independientes** para $p = 1,2,\ldots,P$; $j = 1,2,\ldots,k_p$ y para un (θ_p, θ_{pj}) dado, obtenemos el Modelo Jerárquico de JEWELL a partir del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Al considerar que las observaciones condicionadas son independientes, al igual que las subcarteras, no sólo la matriz ϕ_p es diagonal sino que también lo es la matriz ϕ_{pj}, que en este caso viene definida como sigue:

$$\phi_{pj} = E[Cov[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]] =$$

$$= S^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{w_{pj1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_{pj2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{w_{pjt_{pj}}} \end{bmatrix}$$

ya que vamos a asumir que $Var[X_{pjs}/\theta_p,\theta_{pj}] = \dfrac{\sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})}{w_{pjs}}$ y $S^2 = E[\sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})]$

A su vez:

$$\beta(\theta_p) = E[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p] = E[\mu(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p] = \mu(\theta_p)$$

$$\beta = E[\beta(\theta_p)] = E[\mu(\theta_p)] = m$$

$$\Lambda_p = E[Cov[\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]] = E[Cov[\mu(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p] =$$

$$= E[Var[\mu(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p] = a$$

$$\Lambda = Cov[\beta(\theta_p)] = Cov[\mu(\theta_p)] = b$$

siendo $\beta(\theta_p)$, β, Λ_p y Λ escalares.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, resulta que en este caso particular:

$$\bullet)\ \hat{\beta}'_{pj} = X'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}\cdot X_{pjs}}{w_{pj\cdot}} = X_{pjw}$$

pues:

$$X'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj} = \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}\cdot X_{pjs}}{S^2} \qquad y$$

$$Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj} = \sum_{s=1}^{t_{pj}} \frac{w_{pjs}}{S^2} = \frac{w_{pj\cdot}}{S^2}$$

$$\bullet)\ Z_{pj} = Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p]^{-1} =$$

$$= a\cdot\frac{w_{pj\cdot}}{S^2}\cdot\left[1 + \frac{w_{pj\cdot}}{S^2}\cdot a\right]^{-1} = \frac{\dfrac{a}{S^2}\cdot w_{pj\cdot}}{1 + \dfrac{a\cdot w_{pj\cdot}}{S^2}} =$$

$$= \frac{a\cdot w_{pj\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{pj\cdot}}$$

$$\bullet)\ \hat{\beta}'_p = X'_p\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*}\cdot(Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*})^{-1} = X_{pzw}$$

Al ser ϕ_p una matriz diagonal particionada, de dimensión $(k_p\cdot t_{pj}, k_p\cdot t_{pj})$, cuyos elementos de la diagonal principal son las matrices:

$$E[Cov[X_{pj}/\theta_p]] = \phi_{pj} + Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj}$$

con j= 1,2,...,k_p, de dimensión (t_{pj},t_{pj}), resulta:

$$Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*} = \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj}\cdot(\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj}$$

y si aplicamos el LEMA de SUNDT, B. (1979), pp. 108, obtenemos:

$$Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*} = \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot[I + a\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}]^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_p} \frac{w_{pj\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{pj\cdot}} = \frac{1}{a}\cdot\sum_{j=1}^{k_p} \frac{a\cdot w_{pj\cdot}}{S^2 + a\cdot w_{pj\cdot}} =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} = \frac{Z_{p\cdot}}{a}$$

Por otro lado:

$$X'_p\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^{*} = \sum_{j=1}^{k_p} X'_{pj}\cdot(\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_p} X'_{pj}\cdot(\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot[Y'_{pj}\cdot[(\phi_{pj} +$$

$$+ Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj}]^{-1}\cdot[Y'_{pj}\cdot(\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj}]$$

y aplicando de nuevo el LEMA de SUNDT, obtenemos:

$$X'_p\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^* = \sum_{j=1}^{k_p} X'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot(Y_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot[Y'_{pj}\cdot(\phi_{pj} +$$

$$+ Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj}] = \sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{pj}\cdot[Y'_{pj}\cdot(\phi_{pj} +$$

$$+ Y_{pj}\cdot a\cdot Y'_{pj})^{-1}\cdot Y_{pj}] = \sum_{j=1}^{k_p} X_{pjw}\cdot\frac{Z_{pj}}{a}$$

•) $Z_p = Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^*\cdot\Lambda\cdot[I + Y_p^{*'}\cdot\phi_p^{-1}\cdot Y_p^*\cdot\Lambda]^{-1} =$

$$= \frac{Z_{p\cdot}}{a}\cdot b\cdot\left[1 + \frac{Z_{p\cdot}}{a}\cdot b\right]^{-1} =$$

$$= \frac{b\cdot Z_{p\cdot}}{a}\cdot\left[\frac{a + b\cdot Z_{p\cdot}}{a}\right]^{-1} = \frac{b\cdot Z_{p\cdot}}{a + b\cdot Z_{p\cdot}}$$

•) $\beta' = E[\beta(\theta_p)] = m$

En este caso, el estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo individual, pj, será:

$$\widehat{\mu(\theta_p, \theta_{pj})} = X_{pjw} \cdot Z_{pj} + [X_{pzw} \cdot Z_p + m \cdot [1 - Z_p]] \cdot [1 - Z_{pj}] =$$

$$= Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \left[X_{pzw} \cdot \frac{b \cdot Z_{p\bullet}}{a + b \cdot Z_{p\bullet}} + \right.$$

$$\left. + m \cdot \frac{a}{a + b \cdot Z_{p\bullet}} \right] =$$

$$= Z_{pj} \cdot X_{pjw} + [1 - Z_{pj}] \cdot \left[\frac{a \cdot m + b \cdot \sum_{j=1}^{k_p} Z_{pj} \cdot X_{pjw}}{a + b \cdot Z_{p\bullet}} \right]$$

estimador que coincide con el obtenido en el Modelo Jerárquico de JEWELL.

5.3.6.- Hipótesis alternativas para el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT.

Las hipótesis que nosotros hemos asumido en el apartado 5.3.2. del presente capítulo, para definir el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT no son las únicas hipótesis que dicho autor propuso.

Cuando SUNDT, B. (1978), pp. 40-49, expuso por primera vez su modelo las hipótesis que consideró fueron prácticamente las mismas que nosotros hemos asumido, excepto la hipótesis de independencia entre las subcarteras y la de que la matriz ϕ_{pj} es definida positiva, pero por el contrario asumió que la matriz Λ fuese invertible. Bajo estas hipótesis, el estimador ajustado de credibilidad lineal, no-homogéneo, que obtuvo fue:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \Big[\hat{\beta}'_{pj} \cdot Z_{pj} + \Big[\hat{\beta}'_p \cdot Z_p +$$

$$+ \beta' \cdot [I - Z_p] \Big] \cdot [I - Z_{pj}] \Big] \cdot Y_{pjs}$$

siendo:

$$\hat{\beta}'_{pj} = [[0, \ldots, Y'_{pj}, \ldots, 0] \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^{*\prime}]^{-1} \cdot$$
$$\cdot [0, \ldots, Y'_{pj}, \ldots, 0] \cdot \phi_p^{-1} \cdot X_p$$

$$\hat{\beta}_p = (Y_p^{*\prime} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^{*})^{-1} \cdot Y_p^{*\prime} \cdot \phi_p^{-1} \cdot X_p$$

$$Z_{pj} = Y_p^{*\prime} \cdot \phi_p^{-1} \cdot [0, \ldots, Y_{pj}, \ldots, 0] \cdot \Lambda_p$$

$$Z_p = Y_p^{*\prime} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_{pj} \cdot \Lambda \cdot [I + Y_p^{*\prime} \cdot \phi_p^{-1} \cdot Y_p^{*} \cdot \Lambda]^{-1}$$

Como puede apreciarse, las fórmulas de $\hat{\beta}'_{pj}$ y Z_{pj} difieren de las obtenidas en nuestro caso, pero las definiciones de $\hat{\beta}_p$ y Z_p son las mismas.

Bajo estas hipótesis, SUNDT, B. (1978), consideró como caso particular que las subcarteras fuesen independientes, dado un θ_p, y que la matriz ϕ_p fuese definida positiva. Al haber asumido la existencia de independencia entre las subcarteras, la matriz ϕ_p se convierte en una matriz diagonal, siendo en este caso:

$$\hat{\beta}'_{pj} = [Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot Y_{pj}]^{-1} \cdot Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot X_{pj}$$

$$Z_{pj} = Y'_{pj} \cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]]^{-1} \cdot Y_{pj} \cdot \Lambda_p$$

Si comparamos estos dos últimos resultados con los obtenidos en nuestro modelo, observamos que su definición es la misma en principio, pero con la excepción de que si sustituimos $E[Cov[X_{pj}/\theta_p]$ por lo que vale, esto es por:

$$E[Cov[X_{pj}/\theta_p] = \phi_{pj}^{-1} + Y'_p \cdot \Lambda_p \cdot Y_p$$

resulta que al no haber asumido SUNDT, B. (1978), que la matriz ϕ_{pj}^{-1} fuese definida positiva, no se puede aplicar el LEMA[30] que el citado autor expuso en (1979), y es imposible obtener las fórmulas que nosotros hemos obtenido para $\hat{\beta}'_{pj}$ y Z_{pj}.

Un año más tarde, SUNDT, B. (1979) expuso otras hipótesis para su Modelo de Regresión Jerárquico que son las que nosotros hemos asumido,

---

[30] Véase para más detalles el apartado 5.3.4. del presente capítulo.

por considerarlas más adecuadas. Las únicas diferencias existentes con respecto a las primeras hipótesis que propuso son:

a) Considera ya la independencia entre las subcarteras como una hipótesis del modelo, no como un caso particular del mismo.

b) Asume que la matriz ϕ_{pj} es una matriz definida positiva.

c) Deja de asumir que la matriz ϕ_p sea invertible.

Este no fue, por así decirlo, el último modelo que expuso sino que otro año más tarde SUNDT, B. (1980), pp. 27-30, adopta como hipótesis de su modelo las presentadas en 1978, pero en su caso particular; esto es, cuando asume la existencia de independencia entre las subcarteras y considera que la matriz $\pi = E[Cov[X_{pj}/\theta_p]$ **es definida positiva**, lo que implica, a su vez, que la matriz ϕ_p es también definida positiva. El estimador de credibilidad lineal obtenido para $\mu_{pjs}(\theta_p, \theta_{pj})$ es el mismo que antes, pero en este caso lo expresa del siguiente modo:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = [X'_{pj}\cdot\pi^{-1}\cdot Y_p\cdot\Lambda_p +$$

$$+ \hat{\beta}'(\theta_p)\cdot[I - Y'_p\cdot\pi^{-1}\cdot Y_p\cdot\Lambda_p]]\cdot Y_{pjs}$$

siendo:

$\hat{\beta}'(\theta_p)$ es mejor estimador de credibilidad lineal para $\beta(\theta_p)$

$$Z_{pj} = Y'_{pj}\cdot\pi^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p$$

$$\hat{\beta}_{pj} = (Y'_{pj}\cdot\pi^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1}\cdot Y'_{pj}\cdot\pi^{-1}\cdot X_{pj}$$

En el caso particular que ϕ_{pj} y $Y'_{pj}\cdot\pi^{-1}\cdot Y_{pj}$ sean matrices definidas positivas podemos aplicar el LEMA de SUNDT, B. (1979), resultando en este caso:

$$\widehat{\mu_{pjs}}(\theta_p, \theta_{pj}) = \left[\hat{\beta}'_{pj}\cdot Z_{pj} + \hat{\beta}'(\theta_p)\cdot[I - Z_{pj}]\right]\cdot Y_{pjs}$$

y siendo:

$$Z_{pj} = Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda\cdot[I + Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda]^{-1}$$

$$\hat{\beta}_{pj} = (Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot Y_{pj})^{-1}\cdot Y'_{pj}\cdot\phi_{pj}^{-1}\cdot X_{pj}$$

Resumiendo, se trata de un mismo modelo pero asumiendo en cada caso hipótesis distintas en cuanto a las matrices π, ϕ_p y ϕ_{pj}.

5.3.7.- Estimación de los parámetros estructurales.

Para poder aplicar numéricamente el estimador ajustado de credibilidad que hemos obtenido es imprescindible conocer los valores de los parámetros estructurales que aparecen en el mismo β, ϕ_{pj}, ϕ_p, Λ_p y Λ.

La estimación de estos cinco parámetros presenta grandes dificultades, sobre todo en lo que se refiere a las matrices ϕ_p y Λ.

Como bien indica NORBERG, R. (1986), pp. 218-221, en la mayoría de los casos no se pueden estimar los momentos de segundo orden si no se impone una determinada estructura a las matrices ϕ_{pj} y ϕ_p. Siguiendo a dicho autor, vamos a asumir que existe una función positiva σ^2 y unas matrices conocidas, definidas positivas v_{pj}, con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, tales que:

$$Cov[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = Var[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = \sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})\cdot v_{pj}^{-1}$$

siendo entonces:

$$\phi_{pj} = E[Cov[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}] = E[\sigma^2(\theta_p,\ \theta_{pj})]\cdot v_{pj}^{-1} = S^2\cdot v_{pj}^{-1}$$

A su vez, la matriz $\phi_p = E[Cov[X_p/\theta_p]]$ que está definida del siguiente modo:

$$\phi_p = \begin{bmatrix} \phi_{p1} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj} & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & \phi_{p2} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj} & \cdots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & & \phi_{pk_p} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj} \end{bmatrix}$$

que ahora es igual:

$$\phi_p = \begin{bmatrix} S^2[v_{p1}^{-1} + \frac{1}{S^2}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y_{pj}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S^2[v_{p2}^{-1} + \frac{1}{S^2}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & S^2[v_{pk_p}^{-1} + \frac{1}{S^2}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}] \end{bmatrix} =$$

$$= S^2\cdot v_p^{-1}$$

siendo v_p^{-1} *una matriz definida positiva.*

Al haber impuesto una determinada estructura a las matrices ϕ_{pj} el *número de parámetros que debemos estimar se reduce a cuatro, que son:* β, S^2, Λ_p y Λ.

5.3.7.1.- Estimación del vector $\beta = E[\beta(\theta_p)]$.

Siguiendo a NORBERG, R. (1986) para estimar el vector $\beta = E[\beta(\theta_p)]$, de dimensión (n,1), vamos a tomar como punto de partida la siguiente *expresión:*

$$E_{Total}[X_{pj}] = Y_p\cdot\beta$$

siendo su obtención inmediata, ya que:

$$E_{Total}[X_{pj}] = E[E[E[X_{pj}/\theta_p,\theta_{pj}]/\theta_p]] =$$

$$= E[E[Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p,\ \theta_{pj})/\theta_p]] = E[Y_{pj}\cdot\beta(\theta_p)] = Y_{pj}\cdot\beta$$

donde β es el parámetro estructural que deseamos estimar.

Para construir un estimador insesgado para β, y también para los otros parámetros estructurales, vamos a introducir los siguientes elementos para cada póliza pj:

> Dadas las matrices Y_{pj} para las pólizas de cada subcartera, con $p = 1,2,\ldots,P$ y $j = 1,2,\ldots,k_p$, $L(Y_{pj})$ es el subespacio vectorial lineal de dimensión n expandido por las columnas de Y_{pj}. Sean A_{pj} y B_{pj} dos matrices de orden (t_{pj},n) y $(t_{pj},t_{pj} - n)$ respectivamente, tales que las columnas de la matriz A_{pj} generen $L(Y_{pj})$, y las columnas de B_{pj} formen una base ortocomplementaria de $L(Y_{pj})$.

A partir de la expresión, $E_{Total}[X_{pj}] = Y_{pj}\cdot\beta$ y utilizando las matrices A_{pj} antes definidas, vamos a obtener un estimador para el vector β, que simbolizaremos por $\hat{\beta}$. Para ello, vamos a aplicar el método de los momentos, esto es, vamos a sustituir la esperanza por la media y el parámetro desconocido por su estimador:

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} X_{pj} = \sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} Y_{pj}\cdot\hat{\beta}$$

Como X_{pj} y Y_{pj} no son matrices cuadradas no podemos despejar el vector $\hat{\beta}$, y es ahora cuando vamos a introducir las matrices A_{pj} antes definidas:

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} A'_{pj}\cdot X_{pj} = \sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} A'_{pj}\cdot Y_{pj}\cdot\hat{\beta}$$

de donde $\hat{\beta}$ es igual:

$$\boxed{\hat{\beta} = \left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} A'_{pj}\cdot Y_{pj}\right]^{-1}\cdot\left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p} A'_{pj}\cdot X_{pj}\right]}$$

Como puede apreciarse, para hallar el estimador del vector β se utiliza toda la información de la cartera, que es introducida a través de X_{pj}, pero a su vez, no se ha querido renunciar a la información que representa la jerarquización introducida en este modelo, que es puesta de manifiesto a través de las matrices Y_{pj}.

5.3.7.2.- Estimación del parámetro $S^2 = E[\sigma^2(\theta_p, \theta_{pj})]$.

El siguiente paso es estimar el parámetro estructural S^2. Para ello, siguiendo a NORBERG, R. (1986), vamos a tomar como punto de partida la siguiente expresión:

$$E[X_{pj}\cdot X'_{pj'}] = Y_p\cdot[\beta\cdot\beta' + \delta_{jj'}\cdot(\Lambda_p + \Lambda)]\cdot Y'_p + \delta_{jj'}\cdot S^2\cdot v_{pj}^{-1}$$

siendo $\delta_{jj'}$ el símbolo de Kroneker.

Para obtener esta expresión recordemos que:

$$Cov[X_{pj}, X'_{pj'}] = E[X_{pj}\cdot X'_{pj'}] - E[X_{pj}]\cdot E[X'_{pj'}] =$$

$$= E[X_{pj}\cdot X'_{pj'}] - Y_{pj}\cdot\beta\cdot\beta'\cdot Y'_{pj'}$$

pero a su vez, como:

$$Cov[X_{pj}, X'_{pj'}] = Cov[E[X_{pj}/\theta_p]], E[X'_{pj'}/\theta_p]] +$$

$$+ E[Cov[X_{pj}, X'_{pj'}/\theta_p]] =$$

$$= \delta_{jj'}\cdot Cov[\mu_{pj}(\theta_p)] + \delta_{jj'}\cdot E[Cov[X_{pj}/\theta_p]] =$$

$$= \delta_{jj'}\cdot Y_{pj}\cdot Cov[\beta(\theta_p)]\cdot Y'_{pj} + \delta_{jj'}\cdot[\phi_{pj} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}] =$$

$$= \delta_{jj'}\cdot Y_{pj}\cdot\Lambda\cdot Y'_{pj} + \delta_{jj'}\cdot[S^2\cdot v_{pj}^{-1} + Y_{pj}\cdot\Lambda_p\cdot Y'_{pj}] =$$

$$= Y_{pj}\cdot[\delta_{jj'}\cdot(\Lambda_p + \Lambda)]\cdot Y'_{pj} + \delta_{jj'}\cdot S^2\cdot v_{pj}^{-1}$$

resulta que:

$$E[X_{pj}\cdot X'_{pj'}] = Y_{pj}\cdot[\beta\cdot\beta' + \delta_{jj'}\cdot(\Lambda_p + \Lambda)]\cdot Y'_{pj} + \delta_{jj'}\cdot S^2\cdot v_{pj}^{-1}$$

Además es necesario que introduzcamos un estadístico, que es el siguiente:

$$\alpha_{pj} = X'_{pj}\cdot B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot X_{pj} = \text{traza}(B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot X_{pj}\cdot X'_{pj})$$

siendo su esperanza:

$$E[\alpha_{pj}] = \text{traza}[B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot E[X_{pj}\cdot X'_{pj}]]$$

Sustituyendo en esta expresión $E[X_{pj}\cdot X'_{pj}]$ por su valor, y teniendo en cuenta que las columnas de la matriz Y_{pj} son ortogonales respecto a las de la matriz B_{pj}, resulta:

$$E[\alpha_{pj}] = \text{traza}[B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot[Y_{pj}\cdot[\beta\cdot\beta' + \Lambda_p + \Lambda]\cdot Y'_{pj} +$$

$$+ S^2\cdot v_{pj}^{-1}]] = S^2\cdot\text{traza}[B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot v_{pj}^{-1}]$$

ya que $B'_{pj}\cdot Y_{pj} = \emptyset$.

Aplicando de nuevo el método de los momentos para calcular el estimador para S^2, que simbolizaremos por $\hat{S}^2$, tenemos:

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p}\alpha_{pj} = \hat{S}^2.\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p}\text{traza}[B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot v_{pj}^{-1}]$$

siendo:

$$\boxed{\hat{S}^2 = \left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p}\text{traza}[B_{pj}\cdot B'_{pj}\cdot v_{pj}^{-1}]\right]^{-1}\cdot\left[\sum_{p=1}^{P}\sum_{j=1}^{k_p}\alpha_{pj}\right]}$$

donde:

$$\alpha_{pj} = X'_{pj} \cdot B_{pj} \cdot B'_{pj} \cdot X_{pj}$$

El estimador $\hat{S}^2$ es un escalar, y como señala NORBERG, R. (1986), es un estimador insesgado.

5.3.7.3.- Estimación de las matrices Λ_p y Λ.

En cuanto a los estimadores para las matrices Λ_p y Λ hay que remitirse de nuevo al artículo de NORBERG, R. (1986). Este autor propone como estimadores para Λ_p y Λ las siguientes matrices:

$$\boxed{\Lambda_p = \frac{1}{2} \cdot [G_1 + G'_1 - G_\emptyset - G'_\emptyset]}$$

$$\boxed{\Lambda = \frac{1}{2} \cdot [(G_2 + G'_2 - G_1 - G'_1) - \hat{S}^2 \cdot (H + H')]}$$

que son estimadores insesgados y a la vez simétricos, donde $G_\emptyset$, G_1, G_2 y H son matrices cuadradas de dimensión (n,n), que vienen definidas del siguiente modo:

$$G_{\emptyset} = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \left[\sum_{p'=1}^{P-\{p\}} \sum_{j'=1}^{k_{p'}} A'_{p'j'} \cdot Y_{p'j'} \right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\sum_{p'=1}^{P-\{p\}} \sum_{j'=1}^{k_{p'}} A'_{p'j'} \cdot X_{p'j'} \cdot X'_{pj} \cdot A_{pj} \right] \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1}$$

$$G_{1} = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j'=1}^{k_p-\{j\}} A'_{pj'} \cdot Y_{pj'} \right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j'=1}^{k_p-\{j\}} A'_{pj'} \cdot X_{pj'} \cdot X'_{pj} \cdot A_{pj} \right] \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1}$$

$$G_2 = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} (A'_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1} \cdot A'_{pj} \cdot X_{pj} \cdot X'_{pj} \cdot A_{pj} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1}$$

$$H = \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} (A'_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1} \cdot A'_{pj} \cdot v_{pj}^{-1} \cdot A_{pj} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{k_p} Y'_{pj} \cdot A_{pj} \right]^{-1}$$

En realidad, la definición que hemos dado para las matrices G_r con $r = 0,1,2$, es un caso particular de la definición más general dada por NORBERG, R. (1986), pp. 219, y es la que debe utilizarse en el caso de que la cartera considerada esté dividida en p subcarteras, con $p = 1,2,\ldots,P$, estando formadas cada una de ellas por un cierto número de pólizas, aunque según NORBERG, R. (1986) las matrices G_r están bien definidas si existe al menos una subcartera que posea un cierto número de pólizas en el nivel inferior. En el caso que nosotros hemos considerado, todos los productos $(A'_{p'j'} \cdot Y_{p'j'})$, $(A'_{pj'} \cdot Y_{pj'})$ y $(A'_{pj} \cdot Y_{pj})$ que aparecen en la definición de G_0, G_1 y G_2 respectivamente, están definidos, de manera que la primera inversión que aparece en las fórmulas de G_r con $r = 0,1,2$, es posible para todas las pólizas pj[31].

Una vez obtenidas las expresiones de los estimadores para los parámetros estructurales β, S^2, Λ_p y Λ, el siguiente paso es elegir las matrices A_{pj} y B_{pj} que aparecen en los mismos.

Según el propio NORBERG, R. (1986) una elección natural para las matrices A_{pj} y B_{pj} es:

$$A'_{pj} = Y'_{pj} \cdot v^{-1}_{pj}$$

$$B_{pj} \cdot B'_{pj} = v_{pj} - v_{pj} \cdot Y_{pj} \cdot (Y'_{pj} \cdot v_{pj} \cdot Y_{pj})^{-1} \cdot Y'_{pj} \cdot v_{pj}$$

en las cuales se tiene en cuenta la información de cada una de las pólizas.

Otra posibilidad es tomar todas las matrices A_{pj} y B_{pj} iguales para todas las pólizas, aunque para NORBERG, R. (1986) esta alternativa tiene escaso interés. Así, por ejemplo, en el caso que $n = 2$ podríamos escoger como matrices A_{pj} y B_{pj} las siguientes:

Si t_{pj} es un número impar:

31 Veáse para más detalles de este punto en concreto el propio artículo de NORBERG, R. (1986), pp. 219-220.

$$A_{pj}\ (t_{pj},\ 2) = \begin{bmatrix} 1 & -(t_{pj} - 4) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{pj} - 4 \end{bmatrix}$$

y si t_{pj} es un número par:

$$A_{pj}\ (t_{pj},\ 2) = \begin{bmatrix} 1 & -(t_{pj} - 1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{pj} - 1 \end{bmatrix}$$

siendo a su vez:

$$B_{pj}\ (t_{pj},\ t_{pj} - 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & t_{pj} - 2 \\ -2 & -3 & -4 & -5 & \dots & -(t_{pj} - 1) \\ & & & & & \\ & & I_{(t_{pj} - 2,\ t_{pj} - 2)} & & & \end{bmatrix}$$

donde las matrices A_{pj} están formadas por dos vectores ortogonales que generan el mismo subespacio vectorial que las matrices Y_{pj}, que en este caso tienen dimensión $(t_{pj},2)$, y las matrices B_{pj} por vectores ortogonales que generan el subespacio vectorial complementario de dimensión $t_{pj} - 2$.

5.4.- MODELO DE REGRESION JERARQUICO CON MULTIPLES NIVELES.

Este modelo es una generalización del Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, en el cual se asume que la cartera se puede estructurar en más de dos niveles. Los autores de esta generalización han sido el propio SUNDT, B. (1980) y NORBERG, R. (1986), el cual centra su atención pricipalmente en la obtención de los estimadores de credibilidad lineales, al mismo tiempo que propone estimadores para los parámetros estructurales.

Las hipótesis que se consideran en este modelo son las mismas que en el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT, pero extendidas para los distintos niveles que se consideren. El objetivo de este modelo sigue siendo hallar los estimadores de credibilidad lineales, no-homogéneos, para las primas de riesgo individuales, y para obtenerlos vamos a seguir el mismo procedimiento que en el Modelo de SUNDT, que consistirá en aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER tantas veces como niveles se hayan considerado dentro de la cartera.

Para el planteamiento teórico de este modelo vamos a utilizar un caso particular, el del Modelo de Regresión Jerárquico con Tres Niveles, ya que tres niveles son suficientes para poner de manifiesto la mecánica a seguir para obtener los estimadores ajustados de credibilidad.

Sea un grupo asegurador de ámbito nacional. Su cartera estará formada por una serie de riesgos, pero nosotros sólo vamos a considerar un riesgo concreto. La experiencia de reclamaciones para este riesgo puede diferir de una compañía a otra, y a su vez, dentro de cada compañía cada cartera puede estar dividida en una serie de subcarteras. Para esta situación en concreto vamos a necesitar tres parámetros de riesgo, uno para cada nivel considerado. Sean:

- θ_c : Es el parámetro de riesgo que caracteriza a la compañía c, con $c = 1,2,\ldots,l$.

- θ_{cp} : Es el parámetro de riesgo que caracteriza a la subcartera p de la compañía c, con $c = 1,2,\ldots,l$ y $p = 1,2,\ldots,P_c$.

- θ_{cpj}: Es el parámetro de riesgo que caracteriza a la póliza j-ésima de la subcartera p de la compañía c, con $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$ y $j = 1,2,\ldots,k_{cp}$.

Las variables aleatorias observables que nos indican la experiencia de reclamaciones serán en este caso X_{cpjs}, con $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$; $j = 1,2,\ldots,k_{cp}$ y $s = 1,2,\ldots,t_{cpj}$.

Las **hipótesis** asumidas en este modelo son las mismas que en el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT con dos niveles, pero ahora generalizadas para un nivel más, siendo:

S.1) Los elementos dentro de cada nivel son independientes.

S.2) Para cada $c = 1,2,\ldots,l$ y un θ_c dado, las subcarteras $cp = c1, c2,\ldots, cP_c$ son condicionalmente independientes.
A su vez, para cada $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$ y un

(θ_c, θ_{cp}) dado, las pólizas son condicionalmente independientes.

S.3) Todos los vectores $(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$ y (θ_c, θ_{cp}) están idénticamente distribuidos.

S.4) Para todo c, p, y j:

$$E[X_{cpj}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}] = Y_{cpj}\cdot\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) =$$

$$= \mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$$

donde Y_{cpj}, con $c = 1,2,\ldots,l$; $p = 1,2,\ldots,P_c$ y $j = 1,2,\ldots,k_{cp}$ son matrices dadas, de dimensión (t_{cpj},n), de rango pleno y que verifican que $n < t_{cpj}$, y $\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$ es un vector de regresión desconocido de dimensión $(n,1)$, siendo n el grado, más una unidad, de la mayor tendencia polinómica prevista en la cartera, siendo:

$$\mu_{cpjs}(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) = E[X_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}] =$$

$$= Y'_{cpjs}\cdot\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$$

donde Y'_{cpjs} es el vector fila s-ésimo de la matriz Y_{cpj}, cuya dimensión es $(1,n)$.

A su vez, para todo c y p:

$$E[X_{cp}/\theta_c,\theta_{cp}] = Y^{*}_{cp}\cdot\beta(\theta_c,\ \theta_{cp}) = \mu(\theta_c,\ \theta_{cp})$$

donde Y^{*}_{cp}, con $c = 1,2,\dots,l$ y $p = 1,2,\dots,P_c$, son matrices particionadas de dimensión $(k_{cp}\cdot t_{cpj},n)$, cuyos elementos son las k_{cp} matrices Y_{cpj} puestas en columna, y $\beta(\theta_c,\ \theta_{cp})$ es un vector de regresión desconocido de dimensión $(n,1)$.

Y por último, para todo c:

$$E[X_c/\theta_c] = \hat{Y}^{*}_c\cdot\beta(\theta_c) = \mu(\theta_c)$$

donde $\hat{Y}^{*}_c$, con $c = 1,2,\dots,l$, son matrices particionadas, cuyos elementos son las P_c matrices Y^{*}_{cp} anteriores puestas en columna, siendo su dimensión $(P_c\cdot k_{cp}\cdot t_{cpj},n)$, y $\beta(\theta_c)$ es un vector de regresión desconocido, de dimensión $(n,1)$.

S.5) También asumimos que:

$$\phi_{cpj} = E[Cov[X_{cpjs}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}]]$$

$$\phi_{cp} = E[Cov[X_{cp}/\theta_c,\theta_{cp}]]$$

$$\phi_c = E[Cov[X_c/\theta_c]]$$

con $c = 1,2,\dots,l$; $p = 1,2,\dots,P_c$ y $j = 1,2,\dots,k_{cp}$ son matrices definidas positivas y simétricas, de dimensión cada una de ellas (t_{cpj}, t_{cpj}); $(k_{cp}\cdot t_{cpj}, k_{cp}\cdot t_{cpj})$ y $(P_c\cdot k_{cp}\cdot t_{cpj}, P_c\cdot k_{cp}\cdot t_{cpj})$ respectivamente, siendo las dos últimas matrices diagonales, debido a la hipótesis de independencia asumida dentro de cada nivel.

Además:

$$\beta(\theta_c, \theta_{cp}) = E[\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}]$$

$$\beta(\theta_c) = E[\beta(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

$$\beta = E[\beta(\theta_c)]$$

siendo todos estos elementos vectores de dimensión $(n,1)$, y:

$$\Lambda_{cp} = E[Cov[\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c,\theta_{cp}]$$

$$\Lambda_c = E[Cov[\beta(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

$$\Lambda = Cov[\beta(\theta_c)]$$

que son matrices cuadradas, todas ellas de dimensión (n,n), y simétricas.

Como en los modelos anteriores, el objetivo es hallar los estimadores ajustados de credibilidad lineales para las primas de riesgo individuales. Si nos centramos en una póliza concreta, la cpj, por ejemplo, debemos estimar:

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) = E[X_{cpj}/\theta_c,\theta_{cp},\theta_{cpj}] =$$

$$= Y_{cpj}\cdot\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})$$

Al haber dividido la cartera en tres niveles, esta póliza forma parte de ella a través de la subcartera p de la compañía c a la cual pertenece, de manera que para hallar su estimador de credibilidad debemos considerar el siguiente problema de minimización:

$$\text{Min } E\Bigg[\Bigg[\mu(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) - \alpha_\emptyset -$$

$$- \sum_{i=1}^{k_{cp}} \sum_{s=1}^{t_{cpi}} \alpha_{cpis}\cdot X_{cpis}\Bigg]^2/\theta_c,\theta_{cp}\Bigg]$$

Este problema se resuelve aplicando el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER restringido dentro de la subcartera p de la compañía c, dando como resultado:

$$\mu^*(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj}) = \Bigg[\hat{\beta}'_{cpj}\cdot Z_{cpj} + \beta'(\theta_c,\theta_{cp})\cdot[I -$$

$$- Z_{cpj}]\Bigg]\cdot Y'_{cpj} = \tilde{\beta}'(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})\cdot Y'_{cpj} \qquad (1)$$

siendo:

$$\hat{\beta}'_{cpj} = X'_{cpj}\cdot\phi^{-1}_{cpj}\cdot Y_{cpj}\cdot(Y'_{cpj}\cdot\phi^{-1}_{cpj}\cdot Y_{cpj})^{-1}$$

$$Z_{cpj} = Y'_{cpj}\cdot\phi^{-1}_{cpj}\cdot Y_{cpj}\cdot\Lambda_{cp}\cdot[I + Y'_{cpj}\cdot\phi^{-1}_{cpj}\cdot Y_{cpj}\cdot\Lambda_{cp}]$$

$$\beta(\theta_c, \theta_{cp}) = E[\beta(\theta_c, \theta_{cp}, \theta_{cpj})/\theta_c, \theta_{cp}]$$

El siguiente paso es estimar el vector de los coeficientes de regresión de la subcartera p de la compañia c, $\beta(\theta_c, \theta_{cp})$. Para ello, será necesario aplicar de nuevo el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, en este caso para estimar:

$$\mu(\theta_c, \theta_{cp}) = E[X_{cp}/\theta_c, \theta_{cp}] = Y^*_{cp} \cdot \beta(\theta_c, \theta_{cp})$$

Se trata de hallar el estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo de la subcartera p perteneciente a la compañia c, que consiste en solucionar el siguiente problema de minimización:

$$\text{Min } E\left[\left[\mu(\theta_c, \theta_{cp}) - \alpha_0 - \sum_{q=1}^{P_c} \sum_{i=1}^{k_{cq}} \sum_{s=1}^{t_{cqi}} \alpha_{cqis} \cdot X_{cqis}\right]^2 / \theta_c\right]$$

Aplicando de nuevo el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER restringido en este caso dentro de la compañia c, obtenemos:

$$\mu^*(\theta_c, \theta_{cp}) = \left[\hat{\beta}'_{cp} \cdot Z_{cp} + \beta'(\theta_c) \cdot [I - Z_{cp}]\right] \cdot Y^{*'}_{cp} =$$

$$= \tilde{\beta}'(\theta_c, \theta_{cp}) \cdot Y^{*'}_{cp} \qquad (2)$$

donde $\tilde{\beta}'(\theta_c, \theta_{cp})$ es el estimador de credibilidad lineal para $\beta(\theta_c, \theta_{cp})$, que a su vez depende de $\beta(\theta_c)$, vector quue deberemos estimar, siendo:

$$\hat{\beta}'_{cp} = X'_{cp}\cdot\phi^{-1}_{cp}\cdot Y^{*}_{cp}\cdot(Y^{*'}_{cp}\cdot\phi^{-1}_{cp}\cdot Y^{*}_{cp})^{-1}$$

$$Z_{cp} = Y^{*'}_{cp}\cdot\phi^{-1}_{cp}\cdot Y^{*}_{cp}\cdot\Lambda_{c}\cdot[I + Y^{*'}_{cp}\cdot\phi^{-1}_{cp}\cdot Y^{*}_{cp}\cdot\Lambda_{c}]$$

$$\beta(\theta_c) = E[\beta(\theta_c, \theta_{cp})/\theta_c]$$

Para hallar el estimador ajustado de credibilidad para $\beta(\theta_c)$ deberemos aplicar otra vez el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER, en este caso para estimar la prima de riesgo para la compañía c:

$$\mu(\theta_c) = E[X_c/\theta_c] = \hat{Y}^{*}_{c}\cdot\beta(\theta_c)$$

Para estimar dicha prima utilizaremos toda la información disponible en la cartera, siendo la solución del problema de minimización, en este caso, el siguiente:

$$\mu^{*}(\theta_c) = \left[\,\hat{\beta}'_{c}\cdot Z_c + \beta'\cdot[I - Z_c]\,\right]\cdot\hat{Y}^{*'}_{c} = \tilde{\beta}'(\theta_c)\cdot\hat{Y}^{*'}_{c} \qquad (3)$$

donde:

$$\hat{\beta}'_{c} = X'_{c}\cdot\phi^{-1}_{c}\cdot\hat{Y}^{*}_{c}\cdot(\hat{Y}^{*'}_{c}\cdot\phi^{-1}_{c}\cdot\hat{Y}^{*}_{c})^{-1}$$

$$Z_c = \hat{Y}^{*'}_{c}\cdot\phi^{-1}_{c}\cdot\hat{Y}^{*}_{c}\cdot\Lambda\cdot[I + \hat{Y}^{*'}_{c}\cdot\phi^{-1}_{c}\cdot\hat{Y}^{*}_{c}\cdot\Lambda]$$

$$\beta = E[\beta(\theta_c)]$$

siendo β uno de los parámetros estructurales del modelo.

Una vez que hemos obtenido el estimador de credibilidad para $\beta(\theta_c)$ lo sustituimos en $\tilde{\beta}'(\theta_c, \theta_{cp})$, siendo:

$$\tilde{\beta}'(\theta_c,\ \theta_{cp}) = \hat{\beta}'_{cp}\cdot Z_{cp} + \tilde{\beta}'(\theta_c)\cdot[I - Z_{cp}] \qquad (4)$$

resultado que a su vez lo sustituimos en (1) para obtener $\tilde{\beta}'(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj})$:

$$\tilde{\beta}'(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj}) = \hat{\beta}'_{cpj}\cdot Z_{cpj} + \tilde{\beta}'(\theta_c,\ \theta_{cp})\cdot[I - Z_{cpj}] \quad (5)$$

siendo el estimador ajustado de credibilidad para la prima de riesgo individual de la póliza cpj:

$$\widehat{\mu(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj})} = \tilde{\beta}'(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj})\cdot Y' \qquad (6)$$

siendo $\tilde{\beta}'(\theta_c,\ \theta_{cp},\ \theta_{cpj})$ el estimador de credibilidad dado en (5).

Como puede apreciarse, obtener el estimador de credibilidad lineal para una póliza concreta perteneciente a una cartera que ha sido estructurada en diferentes niveles, y en la cual se ha abandonado la hipótesis de homogeneidad en el tiempo por otra de tipo polinómica para las observaciones esperadas, no es una tarea demasiado difícil; para ello basta aplicar el Modelo de Regresión de HACHEMEISTER tantas veces como niveles estemos considerando, siendo a su vez el estimador que obtenemos, el mejor estimador de credibilidad lineal no-homogéneo.

Para poder aplicar el estimador ajustado de credibilidad una tarea previa, como ya sabemos, es estimar los parámetros estructurales que aparecen en su fórmula. Cuantos más niveles consideremos mayor número de estos parámetros aparecerán, lo que dificulta en gran medida su aplicación práctica, ya que los estimadores propuestos son bastantes complicados y de difícil cálculo, como ya vimos en el Modelo de Regresión Jerárquico de SUNDT[32].

En el caso particular que las matrices Λ_{cp} y Λ_c **sean matrices definidas positivas**, resulta que las matrices de credibilidad Z_c y Z_{cp} vienen definidas del siguiente modo:

$$Z_c = \sum_{p=1}^{P} Z_{cp}\cdot\Lambda_c^{-1}\cdot\Lambda\cdot\left[I + \sum_{p=1}^{P} Z_{cp}\cdot\Lambda_c^{-1}\cdot\Lambda \right]^{-1}$$

$$Z_{cp} = \sum_{j=1}^{k_p} Z_{cpj}\cdot\Lambda_{cp}^{-1}\cdot\Lambda_c\cdot\left[I + \sum_{j=1}^{k_p} Z_{cpj}\cdot\Lambda_{cp}^{-1}\cdot\Lambda_c \right]^{-1}$$

siendo a su vez:

$$\hat{\beta}'_c = \left[\sum_{p=1}^{P} \hat{\beta}'_{cp}\cdot Z_{cp} \right]\cdot\left[\sum_{p=1}^{P} Z'_{cp} \right]^{-1}$$

$$\hat{\beta}'_{cp} = \left[\sum_{j=1}^{k_p} \hat{\beta}'_{cpj}\cdot Z_{cpj} \right]\cdot Z'^{-1}_{\Sigma}$$

expresiones que se obtienen generalizando los resultados obtenidos para el caso particular del Modelo de Regresión Jerárquico a dos niveles[33] cuando la matriz Λ_p es definida positiva.

[32] Para un análisis detallado de los estimadores propuestos para los parámetros estructurales ver a NORBERG, R. (1986), pp. 218-221.

[33] Véase para más detalles el apartado 5.3.4. del presente trabajo.