

**ANÀLISI DE SÈRIES TEMPORALS MITJANÇANT LA PREDICCIÓ AMB
XARXES NEURONALS ARTIFICIALS**

Doctorand: Esteve Xavier Rifa Ros

Director: Dr. Manel Viader i Junyent

Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament

Universitat de Barcelona

Programa de Doctorat: Models i Anàlisi de la Intervenció Psicològica, Bienni 1994-1995

El doctorand

Where Chaos begins, classical science stops

James Gleick

AGRAÏMENTS

M'agradaria aprofitar aquesta primera plana per tal de recordar a les moltes persones que han contribuït a que tingueu aquest treball a les vostres mans. És obvi que si no fos pels meus pares jo no seria en aquest món i, per tant, vull aprofitar aquest moment per donar-los les gràcies per portar-m'hi i per ensenyar-me les coses més importants d'aquesta vida: riure, caminar, parlar i estimar (no sempre me n'he sortit del tot, perdoneu-me els que heu patit les meves ensopegades). A aquestes tasques també van contribuir molt els meus germans, per tant, vull que sàpiguen que els hi agraeixo. També tenen molta culpa que s'hagi acabat aquest treball els meus amics per empènyer tant fort en els moments difícils; els companys del Departament i de la Facultat, especialment el Dr. Manel Viader perquè va confiar amb mi i això reconec que no sempre ha estat fàcil; els companys del NECOM; els companys dels bombers també han contribuït sense saber-ho, encara té més mèrit, fent-me passar estones inoblidables en que es comparteixen emocions com l'alegria, la confiança, la por, la impotència o la tristesa però on sempre hi ha una classe magistral de les que es donen a la "*Universidad de la Vida*", com diuen ells. Finalment, també vull agrair la contribució de la Sònia a aquest treball que tant de temps d'estar junts ens ha robat i que ella es va trobar en el guió.

AGRAÏMENT PÒSTUM

Finalment voldria recordar expressament la figura del matemàtic i meteoròleg Edward Lorenz, que va morir aquest abril passat, donat que les seves troballes van ser definitives per al desenvolupament de la Teoria de Sistemes Dinàmics.

LLISTAT D'ABREVIATURES

AVAR - Anàlisi de la Variància

D - Dimensió

DI - Dimensió d'Immersió

DF - Dimensió Fractal

EEG - Electroencefalogrames

MEQN - Mitjana d'errors al quadrat normalitzada

NCAR - Nombre de Components de l'Atractor Reconstruït

NI - Nombre d'Iteracions

SCI - Sensibilitat a les Condicions Inicials

ST - Sèries Temporals

SD - Sistema Dinàmic

SCTPLS - Society for Chaos Theory in Psychology and the Life Sciences

TSD - Teoria de Sistemes Dinàmics

XNA - Xarxes Neuronals Artificials Propagades cap Endavant

ÍNDEX

1 Continguts generals i introducció.....	9
1.1 L'anàlisi de la dinàmica temporal en l'àmbit de la psicologia.....	10
1.1.1 Aportacions pioneres a l'estudi de sèries temporals en psicologia.....	12
1.1.1.1 Tècniques basades en la inspecció gràfica.....	13
1.1.1.2 Tècniques estadístiques aplicades a l'anàlisi de sèries temporals.....	17
1.1.1.3 El model ARIMA d'anàlisi de sèries temporals.....	21
1.1.2 Anàlisi de sèries temporals des del punt de vista de la Teoria de Sistemes Dinàmics. Breu història de la seva aplicació en psicologia.....	25
1.2 Introducció a la Teoria de Sistemes Dinàmics.....	29
1.2.1 Dimensió d'immersió d'un sistema dinàmic.....	31
1.2.2 Sensibilitat a les condicions inicials.....	33
1.2.3 Atractor d'un sistema dinàmic.....	35
1.2.3.1 Dimensió de l'atractor.....	42
1.2.4 Principals eines d'anàlisi de la Teoria de Sistemes Dinàmics.....	50
1.2.4.1 Dimensionalitat d'una sèrie temporal.....	50
1.2.4.2 Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials.....	59
1.2.5 Aportacions i limitacions de les eines de la Teoria de Sistemes Dinàmics....	63
1.2.6 Objectius específics d'aquest treball d'investigació.....	71

2 Introducció a les xarxes neuronals artificials.....	75
2.1 Xarxes neuronals artificials propagades cap endavant.....	76
2.1.1 Problemes resolubles per una xarxa neuronal artificial propagada cap endavant.....	77
2.1.2 De la regla delta a la regla delta generalitzada.....	82
2.1.2.1 La regla delta.....	82
2.1.2.2 La regla delta generalitzada.....	85
2.1.3 L'algorisme de retropropagació de l'error.....	89
2.1.4 Arquitectures i paràmetres per a l'entrenament de xarxes neuronals artificials propagades cap endavant.....	91
2.2 El mètode per a la predicció de sèries temporals mitjançant xarxes neuronals artificials.....	94
3 Anàlisi de sèries temporals simulades mitjançant la predicció amb xarxes neuronals artificials.....	101
3.1 Consideracions prèvies generals a tots els experiments de simulació.....	101
3.2 Transformacions aplicades als diferents conjunts de dades elaborats a partir de les sèries temporals x del mapa de Hénon i l'atractor de Rössler.....	111
3.3 Anàlisi de la dimensionalitat de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler.....	114
3.3.1 Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x del mapa de Hénon.....	114

3.3.1.1 Resultats de l'experiment de simulació 1: Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0$	116
3.3.1.2 Resultats de l'experiment de simulació 2: Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0,5$	118
3.3.1.3 Resultats de l'experiment de simulació 3: Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 1$	120
3.3.1.4 Resultats globals respecte de l'estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x del mapa de Hénon.....	122
3.3.2 Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler.....	123
3.3.2.1 Resultats de l'experiment de simulació 4: Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0$	125
3.3.2.2 Resultats de l'experiment de simulació 5: Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0,5$	127
3.3.2.3 Resultats de l'experiment de simulació 6: Estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 1$	129
3.3.2.4 Resultats globals respecte de l'estimació de la dimensió d'immersió de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler.....	131
3.4 Anàlisi de la dependència a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler.....	132
3.4.1 Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon.....	132

3.4.1.1 Resultats de l'experiment de simulació 7: Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0$	134
3.4.1.2 Resultats de l'experiment de simulació 8: Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0,5$	137
3.4.1.3 Resultats de l'experiment de simulació 9: Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 1$	140
3.4.1.4 Resultats globals respecte de l'avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon	143
3.4.2 Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler.....	145
3.4.2.1 Resultats de l'experiment de simulació 10: Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0$	147
3.4.2.2 Resultats de l'experiment de simulació 11: Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0,5$	150
3.4.2.3 Resultats de l'experiment de simulació 12: Avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 1$	153
3.4.2.4 Resultats globals respecte de l'avaluació de la presència o no de sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler.....	156

4 Discussió i conclusions.....	159
4.1 Discussió.....	160
4.1.1 Estimació de la dimensió d'immersió de les sèries temporals originals per a la variable x del mapa de Hénon i de l'atractor de Rössler	160
4.1.1.1 Dimensió d'immersió de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0$	160
4.1.1.2 Dimensió d'immersió de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0$	160
4.1.2 Estimació de la dimensió d'immersió i anàlisi de l'efecte del soroll afegit en les dades originals per a les sèries temporals de la variable x del mapa de Hénon i de l'atractor de Rössler.....	161
4.1.2.1 Estimació de la dimensió d'immersió i anàlisi de l'efecte del soroll afegit en les dades originals per a les sèries temporals de la variable x del mapa de Hénon.....	161
4.1.2.2 Estimació de la dimensió d'immersió i anàlisi de l'efecte del soroll afegit en les dades originals per a les sèries temporals de la variable x de l'atractor de Rössler.....	162
4.1.3 Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials de les sèries temporals originals per a la variable x del mapa de Hénon i de l'atractor de Rössler.....	163
4.1.3.1 Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0$	163

4.1.3.2	Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials de la sèrie temporal x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0$	164
4.1.4	Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials i anàlisi de l'efecte del soroll afegit en les dades originals per a les sèries temporals de la variable x del mapa de Hénon i de l'atractor de Rössler.....	164
4.1.4.1	Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials i anàlisi de l'efecte del soroll afegit en les dades originals per a les sèries temporals de la variable x del mapa de Hénon.....	165
4.1.4.2	Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials i anàlisi de l'efecte del soroll afegit en les dades originals per a les sèries temporals de la variable x de l'atractor de Rössler.....	166
4.2	Conclusions.....	167
4.2.1	Diferències en els resultats en l'estimació de la dimensió d'immersió per al mapa de Hénon i l'atractor de Rössler.....	168
4.2.2	Diferències en els resultats respecte de l'avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials per al mapa de Hénon i l'atractor de Rössler.....	171
4.2.3	Incompliment de la condició d'homogeneïtat de la variància en els experiments de simulació.....	175
4.2.3.1	Falta d'homogeneïtat de variàncies en els experiments de simulació per a l'estimació de la dimensió d'immersió.....	175
4.2.3.2	Falta d'homogeneïtat de variàncies en els experiments de simulació per a l'avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials.....	178
4.2.4	Existència d'un possible biaix negatiu en la precisió de les prediccions.....	180

4.2.5 Selecció de la variable dependent dels experiments de simulació.....	181
4.2.6 Anàlisi de la sensibilitat a les condicions inicials mitjançant el càlcul de la grandària de l'efecte.....	183
4.3 Assoliment d'objectius i línies de futur	187
Referències Bibliogràfiques.....	193

1 CONTINGUTS GENERALS I INTRODUCCIÓ

A les vostres mans teniu el resultat del treball d'investigació que he desenvolupat al llarg dels darrers anys, malauradament més dels que m'hauria agradat dedicar. Aquestes primeres ratlles pretenen en primer lloc avisar als lectors i lectores de la meua intenció d'emprar un estil el més planer possible però, alhora, el més rigorós que permeten els meus coneixements. A més m'agradaria destacar el fet d'emprar el català en la redacció de la tesi. Tinc la impressió que no hi ha molts treballs d'aquest tipus que fomentin la utilització la nostra llengua i que, quan n'hi ha, s'ha deixat en un segon pla una traducció el més rigorosa possible emprant anglicismes que podrien ser adaptats. Malauradament la traducció no és, ni de bon tros, la meua especialitat. He intentat adaptar les paraules i les expressions d'altre llengües de la millor manera possible, de totes formes estic convençut que algun dels lectors o lectores de la present es trobaran arrufant el nas en determinats moments per alguna de les expressions que he escollit.

En segon lloc m'agradaria fer-vos cinc cèntims del tema de la Tesi i de l'objectiu general que he pretès assolir. Per aquest motiu primer definiré les Sèries Temporals (ST), elements centrals d'aquesta Tesi, com els registres al llarg del temps d'una determinada variable. A partir d'aquí ja puc enunciar que el treball està enfocat al disseny i posterior avaluació, mitjançant experiments de simulació, d'un mètode propi que permeti l'Anàlisi de ST, emprant la predicció no lineal d'aquestes, realitzada amb Xarxes Neuronals Artificials. Des de la Teoria de Sistemes Dinàmics (TSD), marc teòric que guia aquesta investigació, s'ha pres en consideració l'anàlisi de ST definint que aquestes es poden caracteritzar per la seva dimensionalitat o per la sensibilitat a les condicions inicials (SCI), conceptes que definiré posteriorment, i amb el disseny d'un seguit de tècniques que han de permetre copsar aquestes característiques. Les aportacions d'aquesta teoria són les que han permès el mètode d'anàlisi de ST que jo plantejo. Un cop més centrats en el tema sobre el que versa el present treball ja puc plantejar que *l'Objectiu General d'aquesta Tesi és el d'avaluar si aquest mètode que he dissenyat permet l'anàlisi d'un seguit de ST simulades respecte de la Dimensionalitat i la SCI, característiques*

definides en el marc de la Teoria ja esmentada. Un cop finalitzada la segona part d'aquest primer capítol, on hi ha una introducció a aquesta Teoria, ja concretaré millor aquest objectiu general mitjançant la definició d'un seguit d'Objectius Específics.

Finalment vull donar-vos un guió per tal que tingueu una visió general del que trobareu si decidiu continuar amb la lectura. En aquest capítol pretenc fer una breu introducció d'alguns dels models per a l'anàlisi de les ST més emprats en l'àmbit de la Psicologia. Posteriorment trobareu una introducció a la Teoria de Sistemes Dinàmics (TSD), marc conceptual d'aquesta investigació, que finalitza amb la concreció dels objectius que han guiat i orientat la part empírica d'aquest treball de recerca. En el capítol dos hi ha una introducció a les Xarxes Neuronals Artificials explicant què són i quin és el seu funcionament. Al respecte d'aquest capítol m'he hagut de prendre la llibertat de trencar l'esquema que trobem habitualment en treballs d'aquesta mena (marc teòric, mètode i resultats, discussió i conclusions) incloent-lo per tal de facilitar la comprensió dels experiments de simulació descrits posteriorment. En el capítol tres mostro el mètode que he seguit, el qual es concreta amb la realització de dotze experiments de simulació, i la descripció dels resultats assolits. Finalment en el darrer capítol hi ha la discussió i les conclusions on, en definitiva, intento mostrar fins a quin punt s'assoleixen els objectius que m'havia plantejat, en funció dels resultats dels experiments de simulació esmentats.

1.1 L'ANÀLISI DE LA DINÀMICA TEMPORAL EN L'ÀMBIT DE LA PSICOLOGIA

És evident que molts dels fenòmens que estudien un gran nombre de disciplines científiques succeeixen en una dimensió temporal i, per tant, requereixen un seguit de tècniques que ens permetin l'estudi de la seva dinàmica. En el context de la psicologia hi ha un molt ampli ventall de variables a estudiar que poden ser abordades en una perspectiva al llarg del temps. Registres de variables referents al comportament col·lectiu, d'escala psicomètriques, d'indicadors de l'evolució de determinades

capacitats cognitives a diferents edats, de senyals elèctrics de l'organisme com l'electroencefalograma, o de la conducta mesurada en individus són alguns dels exemples en què es poden trobar variables al llarg del temps analitzades quan hom realitza una investigació, tant en un context de recerca bàsica com en el marc de la recerca aplicada.

En general la utilització de l'anàlisi de ST pot obeir a tres motivacions diferents. En primer lloc podem trobar investigacions en que l'objectiu perseguit és la descripció de l'evolució d'un determinat fenomen al llarg del temps. En un segon ordre de coses ens podem trobar amb la necessitat de detectar diferències en l'evolució d'una determinada variable en diferents etapes, normalment caracteritzades perquè hi ha la incorporació o la retirada d'un tractament, habitualment quan l'investigador treballa en un context clínic, o per la introducció d'una determinada intervenció, quan la recerca és en l'àmbit de la psicologia social. També dins d'aquest enfocament podem trobar la necessitat de fer comparacions entre situacions diferents, fases dins d'un determinat fenomen, o entre subjectes diferents. Finalment trobem que l'anàlisi de ST s'ha emprat quan es segmenta el registre al llarg del temps d'una variable, normalment psicofisiològica (electroencefalograma, electrocardiograma, etc.), en múltiples finestres temporals. Per exemple els diferents assaigs d'un experiment, la durada de les quals és ínfima comparada amb el registre complet d'aquest experiment. En aquest cas, pel tipus de variable que estem analitzant, aquesta estratègia és vàlida per treure determinades conclusions que amb el seu estudi estàtic serien impossibles.

Com ja he esmentat podem trobar exemples de les tres aplicacions de l'anàlisi de ST en el nostre àmbit. He escollit un seguit d'aplicacions per mostrar les possibilitats de cadascun dels punts de vista sense cap pretensió de ser exhaustiu. Més aviat intentant il·lustrar les possibilitats que ofereix l'exploració de l'eix temporal en psicologia.

Pel que fa a exemples de caire descriptiu destaquen treballs en camps tan diferents com la psicologia social en general (Hagerty, 1999; Hepworth i West, 1988), aplicacions en psicologia de l'esport (Fortes, Delignières i Grégory Ninot, 2004), en psicologia clínica (Docherty, Sandelowski i Preisser, 2006), en psicologia animal

(Ferriere, Cazelles, Cezilly i Desportes, 1996; Ferriere, Cazelles, Cezilly i Desportes, 1999; Ruxton i Roberts, 1999), en psicologia cognitiva (Iskra-Golec, 2006), etc.

Com exemples on l'objectiu és avaluar si hi ha diferències o no entre fases, situacions o subjectes diferents, tenim els que fan referència a l'efecte d'intervencions clíniques (Angelino, Miglioretti i Zotti, 2001; Peer, Kupper, Long, Brekke, Spaulding, 2007), exemples en els que s'avalua l'impacte d'una intervenció de l'administració en l'àmbit de la psicologia social (Whittam, Dwyer, Simpson i Leeming, 2006), efectes per l'aplicació de nous programes d'aprenentatge en humans (Schmitz i Wiese, 2006), estudis sobre diferències de senyal en diferents fases d'un determinat fenomen com les etapes del son (Acharya, Faust, Kannathal, Chua i Laxminarayan, 2005), estudis on es compara l'execució d'una tasca cognitiva entre subjectes esquizofrènics i un grup control (Hornero, Alonso, Jimeno, Jimeno i López, 1999), estudis on s'avaluen els patrons de respiració de dofins en captivitat en dos situacions amb diferent nivell d'estrès (Rifa, López, Viader i Riba, 1998), etc.

Finalment pel que fa a l'estudi de registres segmentats en finestres temporals, podem trobar exemples on s'analitzen ST de registres de l'electroencefalograma en la comparació de la realització de diferents tasques entre pacients esquizofrènics i un grup control (Kirsch, Besthorn, Klein, Rindfleisch i Olbrich, 2000), en l'anàlisi de diferències durant la realització de tres tasques cognitives en subjectes sans (Meyer-Lindenberg et al., 1998), d'altres on s'ha emprat el registre de l'electrocardiograma en l'estudi de diferències entre subjectes amb por a volar i un grup control (Bornas, Llabrés, Noguera i López, 2006), etc.

1.1.1 APORTACIONS PIONERES A L'ESTUDI DE SÈRIES TEMPORALS EN PSICOLOGIA

Fins aquí he fet una sistematització dels objectius que motiven la utilització d'alguna de les moltes tècniques dedicades a l'anàlisi de ST en l'àmbit de la Psicologia. Per tant ja he mostrat un ampli ventall de situacions en que ens és necessari l'estudi de la dimensió

temporal en psicologia. A continuació voldria mostrar-vos les tècniques més emprades per tal d'estudiar empíricament l'evolució en el temps d'un determinat fenomen. En podem trobar de molt diverses (Arnau, 2001) sorgides amb la finalitat de perfeccionar les anàlisis emprades pels autors, en funció dels objectius de les investigacions que desenvolupen, el tipus de disseny idoni per a realitzar-les, aspectes més tècnics com la llargada dels registres, etc. Donat que hi ha gran quantitat de tècniques, amb el present apartat pretenc fer una breu revisió d'aquestes intentant no ometre cap de les aportacions que s'han emprat quan en la nostra disciplina adoptem una òptica longitudinal. La meva intenció és fer una visió generalista de totes aquelles tècniques que queden fora de la TSD, totes elles ben fructíferes en els camps on són d'aplicació, amb la intenció de fer una pinzellada de les més predominants en el nostre àmbit. He dividit l'exposició en tres parts dedicades a les anomenades tècniques basades en la inspecció gràfica, les tècniques estadístiques i finalment el model ARIMA d'anàlisi de ST.

1.1.1.1 TÈCNiques BASADES EN LA INSPECCIÓ GRÀFICA

Una de les estratègies d'anàlisi emprades per a l'anàlisi és la inspecció de gràfics on es representa la ST. Un gran nombre d'aquestes tècniques podrien ser considerades mixtes en el sentit que empren l'ús de gràfics acompanyats de determinats càlculs, fins al punt que en alguns casos permeten prendre decisions basades en inferències estadístiques.

Normalment han estat utilitzades en dissenys de cas únic aplicats a l'anàlisi de conducta (Ato i Vallejo, 2007; Malapeira, Honrubia i Viader, 1990). Aquests gràfics tenen en l'abscissa l'ordre de la puntuació en la ST i en l'ordenada el valor de la variable registrada. Cal determinar clarament les diferents fases de registre que normalment corresponen a la línia base i a la o a les diferents intervencions realitzades. L'objectiu és extreure determinades característiques de les dades representades en gràfics. Les característiques que es cerquen mitjançant la inspecció gràfica fan referència a la magnitud dels canvis entre fases i a la grandària d'aquest canvi (Kazdin, 1982). En el primer cas ens fixarem en la mitjana o altres índexs de tendència central (Morley i Adams, 1991) i en el canvi de nivell entre fases, en el segon cas en la tendència dins de cada fase i en la latència

en produir-se el canvi. D'altra banda Morley i Adams (1991) afegixen a aquestes característiques l'estudi de la variabilitat de les dades en les diferents fases.

Per a l'anàlisi de dades a partir de la inspecció gràfica en sentit estricte s'empra l'anomenada inferència visual. Aquesta es basa en la identificació o no de canvis en les característiques esmentades. Hi ha un gran nombre d'objeccions a aquest procés que es podrien concretar en dos aspectes: la discrepància que es dona entre els judicis emesos per experts respecte d'un mateix conjunt de dades i la constatació de diferències entre les conclusions extretes a partir de la inferència visual i les que aportarien tècniques basades en la inferència estadística (Sierra, 1997). M'agradaria esmentar en aquest punt una contribució sorgida en el nostre Departament i dedicada a l'estudi dels factors que poden afectar a l'avaluació del canvi de conducta mitjançant inferència visual (Morais, 1999). En aquesta investigació s'avaluen aspectes com la presència de dependència serial, la variabilitat, la magnitud del canvi, etc.

A continuació he inclòs una breu descripció d'algunes de les estratègies per mesurar les característiques esmentades.

- *Mesures de tendència central:* Hi ha diverses formes de mesurar la tendència central en cada fase. Normalment es calcula un índex de tendència central per a cada fase i es representa amb una línia horitzontal que passa per aquest valor. Una de les possibles mesures és el càlcul de la mitjana dels valors de cada fase (Kazdin, 1982). De totes formes hi ha la possibilitat d'emprar altres índexs més resistents a la presència de valors extrems com la mediana o la mediana ampliada, que és la mediana calculada en els valors centrals de distribució dels valors de la ST (Morley i Adams, 1991).
- *Canvis de nivell:* És una altra de les característiques que es poden descriure mitjançant la inspecció visual. Consisteix en valorar la grandària de les discontinuïtats en les dades quan hi ha un canvi de fase. Quan comença el registre en una nova condició experimental s'observa si hi ha canvis en la variable registrada més enllà de les

fluctuacions esperades en funció de l'evolució en la fase immediatament anterior. Per tal de poder avaluar que el canvi de nivell a simple vista realment és conseqüència de la condició experimental caldria emprar tècniques estadístiques útils per a mesurar la magnitud del canvi de nivell (Kazdin, 1982).

- *Mesura de la tendència dins de cada fase:* Per al seu càlcul tenim a la nostra disposició varies tècniques però la més destacada en la literatura és la tècnica de divisió en dues meitats. És una de les més utilitzades i va ser proposada per White (Kazdin, 1982). L'objectiu és identificar una línia de tendència de les dades per tal de poder fer una correcta descripció de l'evolució de la ST en cada fase. També permet realitzar prediccions més o menys fiables. Pot ser utilitzada per establir diferències a nivell estadístic emprant una estratègia fonamentada en la Llei Binomial. (Kazdin, 1982; Malapeira et al., 1990; Morley i Adams, 1991). La tècnica consisteix en dividir cada fase en dos meitats mitjançant una línia vertical. Dins de cada fase es cerca el valor de la mediana i aleshores es dibuixa una línia horitzontal que passi per aquest valor. Posteriorment es subdivideix cadascuna de les meitats amb una línia vertical que ha de creuar-se amb les dues horitzontals esmentades. Si unim els punts d'aquests encreuaments tenim la línia de tendència de la fase que estem estudiant. Aquesta ha de tenir per sobre i per sota el 50% superior i el 50% inferior dels valors de la sèrie. Morley i Adams (1991) proposen dues alternatives a aquesta tècnica per tal d'estimar línies de tendència. La primera és el *Mètode de la línia de tendència resistent* que consisteix en trobar el pendent i la constant de la recta que defineix la tendència dels valors d'una ST tenint en compte l'eix temporal. És una tècnica força robusta que inclou l'avaluació de l'adequació de l'ajust de la recta a les dades. La segona és el *Mètode de les medianes mòbils* que és una tècnica de suavitzat quan no hi ha una clara tendència lineal de les dades o hi ha una gran variabilitat en els valors del registre.
- *Latència en el canvi:* És l'interval de temps que hi ha entre el canvi en les condicions experimentals i l'aparició d'un canvi en l'evolució del registre. Per tal de copsar

aquesta magnitud cal especificar què entenem per canvi, donat que aquest pot implicar diferències respecte del nivell entre fases i també respecte de la tendència d'aquest. D'altra banda, és una característica difícil de valorar per simple inspecció visual perquè no sabem quina és la mínima diferència en la variable mesurada que ens permet concloure que ha esdevingut un canvi, per tant definir on ha aparegut aquest pot portar a subjectivitat. De l'anterior es desprèn que si no sabem on hi ha el punt d'inflexió, no podem calcular aquest valor de latència (Kazdin, 1982).

- *Estudi de la variabilitat entre fases:* Una forma senzilla de representar la variabilitat en les dades d'una fase de registre és mitjançant els gràfic de barres o de línies amb el rang entre el valor més gran i el valor més baix de la fase. Aquests mètodes poden portar problemes perquè són sensibles a la presència de puntuacions extremes, perquè poden mostrar una major variabilitat de la real quan hi ha un tendència clara en les dades o perquè poden no permetre mostrar canvis en la variabilitat dins de la pròpia fase (Morley i Adams, 1991). Aquests mateixos autors mostren alternatives amb conjunts de dades relativament grans ($N > 15$) emprant un o diversos gràfics de caixa o gràfics de quartils; quan major és la grandària de la fase, és quan s'empraria més d'un gràfic amb subconjunts de valors de la ST en una determinada condició experimental. D'altra banda proposen també alternatives quan la grandària de la fase és menor ($N < 15$). Una d'elles és el *rang retallat* que consisteix en representar el rang que agafa entre un 80% o 90% del rang total de les puntuacions de la fase i es separen la o les puntuacions majors i la o les puntuacions menors, en funció dels valors de que disposem a la mostra, eliminant així la influència de les puntuacions extremes. Una altra alternativa que proposen és emprar el *rang amb tendències* que intenta mostrar canvis en la variació en la fase o la influència de possibles tendències. Cal dividir la fase en dues meitats i en els respectius punts del mig en l'escala del temps es representen el valor màxim i el valor mínim de cada meitat. Després cal dibuixar una línia que connecti els dos valors màxims i els dos valors mínims. Aquesta tècnica també es pot aplicar emprant el rang retallat.

1.1.1.2 TÈCNiques ESTADÍSTIQUES APLICADES A L'ANÀLISI DE SÈRIES TEMPORALS

Un altre grup d'estratègies d'anàlisi per a les ST són les tècniques estadístiques aplicades als dissenys per a l'anàlisi de la conducta. L'exposició s'estructura tenint en compte la distinció que fan alguns autors entre tècniques paramètriques i no paramètriques (Ato i Vallejo, 2007). A continuació faré una breu descripció de les més reconegudes entre les paramètriques:

- *Tècniques clàssiques de comparacions de nivell: Estadístics t i F :* Consisteix en la utilització de tècniques estadístiques paramètriques en la contrastació dels canvis estadísticament significatius entre fases. Per tal de ser aplicades es calcula la mitjana de les puntuacions de cada fase i es realitza la prova t de Student per a mesures repetides, en el cas de contrastar dues úniques fases, o la F de Snedecor, quan s'han de fer comparacions entre un nombre de fases o condicions experimentals més gran de dos. Aquesta utilització pot resultar inadequada quan no s'acompleixen les pressuposicions inherents a aquestes proves d'inferència, especialment la possible dependència serial entre puntuacions (Kazdin, 1982). Amb l'objectiu de superar aquest escull han sorgit diverses alternatives per a l'anàlisi. El fet d'aplicar tècniques paramètriques, de vegades amb lleugeres correccions, en els dissenys de cas únic es basa en que s'assumeix que el subjecte és un generador de respostes a un determinat estímul estadísticament independents i distribuïdes normalment al voltant de la mitjana. En aquests casos el factor subjectes dels dissenys de mesures repetides seria substituït pel factor assaigs en els dissenys de cas únic (Shine i Bower, 1971). Destaca la proposta d'aquests autors que afirmen que aquest disseny té els tractaments i assaigs com a fonts de variació amb una observació per casella. D'altra banda aporten una Anàlisi de la Variància (AVAR) amb petites variacions en el càlcul de l'estimació de la variància intra casella i en el terme de contrast de l'efecte assaigs, el quadrat mig de les diferències successives. D'altra banda les

aportacions de Gentile, Roden i Klein (1972) intenten evitar la dependència serial comparant els diferents tractaments ($A_1 + A_2$) i ($B_1 + B_2$) en el cas dels dissenys reversibles (A_1, B_1, A_2, B_2). Finalment cal destacar una altra estratègia d'anàlisi basada en garantir la no presència de dependència serial prèvia a la utilització de l'AVAR (Hartmann, 1974). En aquest sentit l'autor afirma que cal l'acompliment de tres premisses: es requereix una estabilització en la tendència de les dades que s'aconseguiria sempre que hi hagi un nombre mínim de puntuacions per fase, en segon terme és necessària la no existència d'autocorrelació en el primer retard en les dades de cada condició i la no existència de correlació creuada entre assaigs en les diferents condicions i, finalment, seguint amb la comparació entre fases en dissenys reversibles, proposa la inclusió en l'AVAR del factor ordre que compararà $A_1 + B_1$ i $A_2 + B_2$. De totes formes el que es destaca és que totes aquestes propostes requereixen tenir molta cura pel que fa a l'acompliment de les condicions d'aplicació.

- *Tècniques basades en el modelatge mitjançant rectes de regressió*: És una estratègia que pretén inferir si hi ha un efecte d'una determinada intervenció (Ato i Vallejo, 2007). En primer lloc s'especifica un model de regressió que permeti incorporar les tendències de la línia base i de la fase de tractament. En la fase d'especificació del model s'incorporen un o més regressors, en funció dels diferents possibles resultats respecte de les transicions entre ambdues etapes de registre, que han de permetre modelar un canvi de nivell sense tendència, canvis de nivell amb una mateixa tendència, canvis de tendència o canvis de nivell i de tendència. Un cop especificat el model es realitza la seva diagnosi mitjançant la significació dels coeficients del model, sempre que els termes d'error es distribueixin normalment i independentment amb mitjana zero i variància constant. Un cop tenim l'equació que permet explicar les diferents fases avaluades, cal veure si els residuals del model presenten o no dependència serial. En cas que aquesta existís es podria arribar a sobrevalorar o infravalorar l'existència d'un efecte de la intervenció. Donada la possible presència de dependència, l'estratègia descrita per Ato i Vallejo (2007)

proposa avaluar aquesta dependència serial. Si no s'hi troba es consideren vàlids els coeficients de regressió estimats. En cas que aquesta autocorrelació dels residuals existeixi, cal transformar les variables i fer una nova avaluació del model. Finalment cal confirmar que els residuals del model transformat no tenen dependència serial. Finalment esmentar que l'estratègia descrita per al disseny intra-serie es pot generalitzar als diferents dissenys entre-sèries.

- *Tècniques per a l'avaluació de l'aleatorietat de la línia base*: Permeten controlar que els valors de la ST no presenten canvis sistemàtics ni en la mitjana ni en la desviació típica, ni es dona presència de dependència serial. Ja he esmentat en el punt anterior que aquesta característica que hem de trobar esdevé imprescindible per tal de poder contrastar l'efecte produït per la introducció d'un tractament. Hi ha diverses tècniques que tenen aquest objectiu previ entre les que vull destacar l'estadístic C (Bono, 1994) o l'estadístic β_n (Solanas, Salafranca, Guàrdia, 1992; Sierra, 1997) donat que aquests exemples han estat desenvolupats per companys o companyes del meu propi Departament.

D'altra banda d'entre les tècniques no paramètriques m'agradaria destacar les següents:

- *Tècniques basades en proves d'aleatorització*: Un altre grup de tècniques que han estat emprades en l'anàlisi de ST són les que es basen en proves d'aleatorització. Es caracteritzen pel fet que hi ha una assignació aleatòria del moment en que s'instaurarà el tractament i que la significació estadística es realitza a partir de les dades experimentals permutant les possibles assignacions a l'atzar. El primer pas per tant és assignar de forma aleatòria el o els tractaments al subjecte o subjectes, en funció del disseny emprat per a cada investigació particular. Posteriorment es calcula un estadístic de contrast que pot ser escollit entre els convencionals (la t de Student o la F de Snedecor) o ser creat ad hoc per a l'avaluació concreta realitzada. Seguidament es calcula aquest estadístic de

contrast per a les diferents possibles permutacions de les dades de cadascuna de les possibles assignacions aleatòries. Un cop coneixem aquesta distribució i tenim el valor de l'estadístic obtingut, la seva significació es calcularà estimant la probabilitat que es doni aquest valor respecte dels diferents valors possibles en base a les permutacions realitzades (Edgington, 1995). Aquesta tècnica basada en proves d'aleatorització es pot aplicar a diversos dissenys conductuals (Ato i Vallejo, 2007).

- *Prova de Rangs de Revusky*: Es pot considerar un cas particular de tècnica basada en l'aleatorització i s'aplica quan disposem de com a mínim quatre registres de línia base en diferents objectes experimentals (aplicable a múltiples subjectes, conductes o situacions) i quan emprem dissenys amb tractaments irreversibles (Revusky, 1967). En primer lloc cal esmentar que una determinada intervenció s'aplicarà a aquests diferents objectes experimentals de forma aleatòria, és en aquest sentit que la tècnica pot ser considerada un cas particular de les tècniques d'aleatorització. A l'inici d'un experiment els k objectes experimentals formen part d'una línia base múltiple. En iniciar el que s'anomena un primer subexperiment, s'escull a l'atzar un objecte al que s'aplicarà la intervenció, quedant la resta d'objectes com un control. En cada subexperiment es determina el rang de l'objecte al que s'aplica la intervenció. Aquesta operació es realitza successivament fins que acaben els possibles k subexperiments. Val a dir que en cada nou subexperiment el subjecte al que se li ha assignat la intervenció en el subexperiment anterior és descartat. Un cop fets els k subexperiments podem obtenir l'estadístic R_n que és el sumatori dels rangs obtinguts per cada objecte experimental al que si li aplicava la intervenció. A partir de la funció distribució de l'estadístic R_n podem obtenir la probabilitat associada a qualsevol valor trobat empíricament. A més quan disposem de més de 12 objectes experimentals es pot aproximar a una distribució normal estàndard a partir d'una expressió proposada per l'autor (Cronholm i Revusky, 1965).

1.1.1.3 EL MODEL ARIMA D'ANÀLISI DE SÈRIES TEMPORALS

Hi ha una branca de l'estadística que ha dedicat els seus esforços a l'anàlisi d'aquest tipus de registres. Ens hem de remuntar a l'any 1927 per trobar un treball pioner en l'anàlisi de ST, especialment pel que fa a la seva predicció (Gershenfeld i Weigend, 1994; Tong, 1990). Aquest va ser elaborat per Yule i en ell es proposava una tècnica autorregressiva per tal de predir el nombre de taques solars anuals. De fet aquesta tècnica va influir directament en Box i Jenkins (Box, Jenkins i Reinsel, 1994), autors que també hem de considerar pioners en aquesta matèria i que van elaborar un mètode per a l'anàlisi al llarg del temps que es basa en l'estudi de l'estructura d'autocorrelacions que s'estableix entre les puntuacions presents en la sèrie. És a dir, es té la premissa que cadascuna de les puntuacions de la sèrie estarà més o menys relacionada amb d'altres valors d'aquesta, en alguns casos ho estarà amb les més properes i en d'altres casos ho estarà amb puntuacions més llunyanes, denotant aleshores algun tipus de presència d'estacionalitat en la sèrie. En funció de com és aquesta covariància, de cada puntuació respecte d'altres puntuacions de la ST, enunciem un determinat model per descriure-la.

El model ha esdevingut un dels més emprats, especialment per a modelatge, predicció, avaluació d'intervencions i control de processos. Una de les virtuts que cal fer notar és la capacitat de modelar qualsevol tipus de ST tot i que la seva utilització, en alguns casos, implica fer transformacions quan la Sèrie no és estacionària, el que provoca pèrdua d'informació crucial de la sèrie original (Chatfield, 1989). D'altra banda cal fer notar que es tracta de models lineals, és a dir, que cada puntuació estimada és combinació lineal d'altres puntuacions més o menys llunyanes de la sèrie. Aquest fet s'ha de tenir en compte en els casos en els que la ST objecte d'estudi pugui tenir un mecanisme subjacent que no s'ajusti a un sistema lineal.

L'esquema general d'actuació que proposen els autors consta d'un seguit d'estadis iteratius per tal de seleccionar el model idoni (Box et al., 1994). D'entre la classe de models que postulen els autors cal identificar-ne un que sigui adequat per a la sèrie observada en

funció de l'estructura d'autocorrelació de la sèrie, en segon lloc cal estimar els paràmetres, i finalment cal diagnosticar el model amb els paràmetres estimats, essent el model més adequat aquell més parsimoniós i que millor s'ajusti a les dades. En cas que el model no sigui el més adequat cal tornar un altre cop al primer pas i provar un nou model. En cas que sí que ho sigui ja hem aconseguit modelar la Sèrie.

Ja hem esmentat que la tècnica de Box i Jenkins requereix l'estacionarietat de la ST. Direm que la sèrie és *estrictament estacionària* quan la seva mitjana i variància esdevenen constants, és a dir, que si agafem dos subconjunts qualsevol de la sèrie ambdós tindran la mateixa mitjana i variància. A més a més, l'assumpció d'estacionarietat també implica que els coeficients d'autocovariació i autocorrelació per a un nombre determinat de retards k siguin estables per a qualsevol instant t .

Les sèries no estacionaries poden presentar diferents patrons (Box et al., 1994):

- *Tendència*: Aquest és el cas en el que els valors de la sèrie varien la seva mitjana en una direcció creixent o decreixent i que pot adoptar tot un ventall de formes.
- *Cicles*: Aquí la sèrie en qüestió presenta oscil·lacions d'amplitud i freqüència variables.
- *Estacional*: De fet és un cas particular de l'anterior on els cicles són constants i s'ajusten, segons els casos, al cicle anyal, trimestral, mensual, setmanal, diari o menor.

El model general que postulen els autors ve donat per la següent expressió (Box et al., 1994),

$$\tilde{x}_t = \sum_{p=1}^p f_p x_{t-p} + \sum_{q=0}^q q_q e_{t-q} \quad \text{on } \tilde{x}_t = x_{t-m} \text{ i } q_0 = 1$$

on tenim que cada puntuació de la sèrie ve donada per dues sumes ponderades. Mitjançant la primera estem especificant el nombre p de coeficients autorregressius que, multiplicats per un nombre donat de p puntuacions anteriors a l'actual, exerceixen un pes important sobre el valor x_t . Seria la part del model on queda palesa l'estructura d'interrelacions interna de la sèrie. D'altra banda, amb el segon especificuem el nombre q de coeficients també autorregressius, però que en el model prenen el nom de mitjanes mòbils, afectant al valor e_t , que juga el paper de terme d'error i que es distribueix de forma aleatòria. Aquesta suma ponderada de termes d'error apareix pel fet que s'assumeix que hi ha dependència entre puntuacions i, per tant, aquesta també pot ser que afecti al terme d'error. En aquest segon cas tenim que el model també especifica la possible influència que exerceixen variables desconegudes externes al sistema sobre la ST (Gershenfeld i Weigend, 1994; Tong, 1990). El valor x_t en el model pot coincidir amb les puntuacions de la sèrie original, quan la sèrie és estacionària, o pot ser que sigui el resultat d'haver aplicat una o varies diferenciacions entre puntuacions consecutives, seria el cas en el que la sèrie té una tendència de creixement o decreixement, o entre puntuacions separades en el temps, quan la sèrie té o bé ciclicitat o bé estacionalitat, tal com hem vist anteriorment. Els models que postulen Box et al. (1994) són els anomenats models ARIMA, sigles que denoten el que hem mostrat anteriorment. "AR" designa el fet que el model pot tenir una estructura autorregressiva, la "I" designa el fet que de vegades s'hagi de diferenciar la sèrie per tal de desfer la no estacionarietat (la I ve de l'anglès *integrative*) i, finalment, "MA" designa el terme mitjanes mòbils (en anglès *moving average*). En principi, mitjançant aquesta tècnica, podrem descriure qualsevol ST, encara que aquesta no sigui estacionària (creixent, decreixent, cíclica o estacional).

A partir d'aquest model general podem especificar l'estructura de la sèrie sigui quina sigui la seva naturalesa. Ja hem esmentat les potencialitats que té aquest mètode d'anàlisi en quant a la possibilitat de modelar un gran nombre de ST, entre els que destaquen els models per a sèries estacionàries, els de sèries no estacionàries sense ciclicitat on caldria fer alguna diferenciació, i els de sèries no estacionàries amb ciclicitat on caldria fer alguna diferenciació estacional.

Els models ARIMA també poden ser emprats com una eina d'avaluació d'intervencions. En general pot ser important poder modelar una ST, però ja sabem que en molts àmbits de la psicologia cal avaluar si una intervenció ha tingut efecte. Ja he esmentat que hi ha moltes investigacions en que s'ha fet un registre d'una variable al llarg del temps i en un punt t determinat es vol començar a aplicar una intervenció.

En aquest context es considera que el punt en que es produeix la intervenció és un fet o circumstància que afecta el desenvolupament de la sèrie, el qual és intencional i, per tant, conegut a priori (Box et al., 1994). Per tal de modelar aquesta Anàlisi de les Intervencions es fan servir les anomenades funcions de transferència entre la part de pre-intervenció i la part de post-intervenció de la ST. Les funcions de transferència permeten modelar els canvis entre la fase pre-intervenció i la fase post-intervenció del tipus Impuls i del tipus Desviació. En el primer cas la intervenció produeix efectes transitoris més o menys suavitzats, mentre que en el segon permeten modelar un efecte que ha de resultar permanent de forma més o menys gradual. Per tal d'avaluar l'existència o no d'efectes deguts a la intervenció caldrà especificar la funció de transferència en base a les hipòtesis de l'investigador, quan aquestes poden ser plantejades a priori, o bé caldrà plantejar un seguit de proves per tal de definir el model d'intervenció més adequat. El pas següent es estimar els paràmetres d'un model de funció de transferència i avaluar la seva adequació i la dels residuals del model resultant (Vallejo, 1996).

D'altra banda hi ha una alternativa proposada per Glass, Wilson i Gottman (Ato i Vallejo, 2007) per a l'anàlisi de l'efecte de la intervenció. Consisteix en transformar les dades, un cop realitzada la construcció del model, en sèries independents on s'ha aconseguit filtrar la dependència serial. Posteriorment es pot emprar el model lineal general per tal de comprovar la significació dels paràmetres estimats donat que les dades ja no tenen dependència serial (Vallejo, 1996).

1.1.2 ANÀLISI DE SÈRIES TEMPORALS DES DEL PUNT DE VISTA DE LA TEORIA DE SISTEMES DINÀMICS. BREU HISTÒRIA DE LA SEVA APLICACIÓ EN PSICOLOGIA

Hi ha tot un altre corrent teòric, la ja esmentada TSD, que ha derivat d'aportacions de la física i les matemàtiques. Aquest corrent postula que una ST que hem registrat està immersa en un Sistema Dinàmic, és a dir, pot evolucionar conjuntament amb una o més variables. Al nombre de variables que conformen aquest sistema l'anomenem Dimensió d'Immersió (DI). La segona de les característiques es refereix a que les relacions que s'estableixen entre aquestes variables són no lineals i que, si es donen relacions lineals, aquestes són una excepció. Finalment, ens podem trobar que en una sèrie temporal es pot donar el fenomen de la SCI. Aquest consisteix en que tal vegada podem realitzar bones prediccions un pas endavant, si iterem més vegades aquesta predicció, disminueix la precisió conforme augmenta el nombre de passos. D'altra banda, la TSD ha desenvolupat un seguit d'algoritmes per avaluar les característiques esmentades. L'objectiu de l'anàlisi de les ST, des d'aquesta perspectiva, és poder recollir informació de l'esmentat sistema dinàmic, a partir de la nostra sèrie observada, per tal de conèixer millor el fenomen que estem avaluant. No hi ha massa consens en com designar aquest corrent ni ben bé on són els límits dels objectius que es persegueixen. Una gran quantitat de publicacions sota el paraigua d'aquesta perspectiva prenen el terme Teoria del Caos, d'altres parlen de Modelatge no Lineal i d'altres parlen de Teoria de Sistemes Dinàmics no Lineals. Jo no m'he quedat amb cap dels tres perquè crec que fan referència a característiques concretes que no sempre tenen perquè donar-se simultàniament en una ST. La primera fa referència a sèries caracteritzades per una baixa Dimensionalitat, no Linealitat i presència de SCI, característiques presents en una ST caòtica, concepte que ja ampliaré posteriorment. La segona i tercera denominació, en canvi, fan més referència a la no Linealitat, de fet el matemàtic polonès Stanislaw Ulam va ironitzar respecte d'aquesta mena de denominacions amb l'afirmació que dir que *“to call the study of chaos “nonlinear science” was*

like calling zoology “the study of nonelephant animals”” (Gleick, 1987, p. 68). Pel que fa a la denominació de TSD que jo he emprat, com fan molts investigadors, ha estat escollida perquè permet avaluar en una ST els tres eixos de dimensionalitat, presència de sensibilitat o linealitat-nolinealitat.

Es pot afirmar que durant les darreres dues dècades ha sorgit i s’ha consolidat la utilització de tècniques, sorgides sota el paraigua d'aquesta teoria, aplicades a la psicologia. He escollit tres referents per als autors que han iniciat l'aplicació d'aquestes tècniques per tal d'il·lustrar aquest sorgiment. Ens podem fixar en l'article de Skarda i Freeman (1987), aparegut a la revista *Behavioral and Brain Sciences*, en el llibre *Chaos theory in psychology* d'Abraham i Gilgen (1995) i en el llibre *Nonlinear Dynamics: Techniques and Applications in Psychology* de Heath (2000). El primer perquè és un article clàssic en quant a les seves conclusions referents a l'evidència de caos en l'activitat neural mitjançant l'anàlisi d'electroencefalogrames (EEG), registrats en el bulb olfatori en l'àmbit de l'aprenentatge animal. D'altra banda, la segona referència es tracta d'una primera compilació de treballs des de l'enfocament de la TSD en el camp de la psicologia, encara que els autors han optat per la denominació Teoria del Caos. Finalment la tercera publicació permet copsar un seguit de mètodes, coneixements teòrics i aplicacions de la TSD en psicologia d'una forma força sistemàtica i global.

En consonància amb l'esmentat anteriorment hi ha un altre fet que ha contribuït a la difusió, a la promoció de la recerca i a la creació d'un marc de trobada comú dels interessats en l'aplicació de la TSD a la psicologia, inclòs el que subscriu. Aquest és la fundació l'any 1991 de la *Society for Chaos Theory in Psychology and the Life Sciences (SCTPLS)*. Durant els més de quinze anys d'existència d'aquesta societat científica s'han realitzat congressos anuals on es desenvolupen activitats de caràcter formatiu, sessions científiques agrupades en diferents àrees temàtiques (Metodologia, Psicologia de les Organitzacions, Psicologia Clínica, Psicofisiologia, Ciència Cognitiva, Filosofia, etc.), i l'assemblea anual de la Societat on s'escullen els seus representants. D'altra banda, gairebé des dels primers anys d'existència de la societat es va crear una llista de distribució anomenada *CHAOPSYC* i la revista *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life*

Sciences que està indexada a la base de dades *PSYCINFO* de l'*American Psychological Association*. Voldria afegir que la SCTPLS agrupa científics que empen les eines de la TSD i d'altres que utilitzen tècniques sorgides de la Teoria de Sistemes Complexes, la Teoria de les Catàstrofes, la Teoria de la Informació o moltes altres que, com la TSD, estarien sota el paraigua del que seria un cos de coneixements dedicat a la Dinàmica Temporal, a la no linealitat o a la SCI.

Pel que fa a la utilització de les eines per a l'anàlisi de ST en psicologia des d'aquesta perspectiva, destaca la utilització que se n'ha fet en l'anàlisi del senyal de l'EEG (Stam, 2005). Hi ha un gran nombre d'investigacions on s'analitza aquest registre en situacions diferents com poden ser en estats de repòs (Theiler i Rapp, 1996), durant l'estudi del son (Shen, Olbrich, Achermann i Meier, 2003), en estats de coma o sota anestèsia (Kim, Kriebel, Kim, Reed i Rae-Grant, 1996), en investigació en epilèpsia (Elger, Widman, Adrzejak, David i Lehnertz, 2000), en l'estudi de l'afectació de determinades substàncies (Ehlers, Havstad, Prichard i Theiler, 1998), en l'estudi de situacions emotives (Aftanas et al., 1997), en diferents patologies psicològiques (Kim et al., 2000), en l'estudi del còrtex durant processament cognitiu (Meyer-Lindenberg et al., 1998) i en l'estudi del processament cognitiu en neuropsicologia (Jeong, 2004).

En l'actualitat es pot afirmar que la utilització de les eines de la TSD s'ha generalitzat a tots els àmbits de la Psicologia Bàsica i de la Psicologia Aplicada. A més s'ha generalitzat a un ampli ventall de variables a analitzar, si bé les aportacions pioneres es centaven de forma majoritària en l'estudi de l'EEG, com hem pogut veure en els exemples triats esmentats en el paràgraf anterior. Actualment la seva utilització s'ha diversificat a moltes altres variables emprades en el nostre àmbit.

Destaca la utilització d'aquestes eines com a estratègia d'anàlisi d'altres variables fisiològiques orientades a la investigació psicològica, trobem exemples d'anàlisis de registres magnetoencefalogràfics en pacients amb Alzheimer (van Cappellen van Walsum et al., 2003), de registres de ressonància magnètica, de tomografia per emissió de positrons i electroencefalogràfics en pacients amb epilèpsia (Jing, Takigawa i Benasich, 2002), de registres electromiogràfics del bíceps en postures estàtiques en el lloc de

treball (Rodrick i Karwowski, 2006), de registres d'activitat electrodermal en conversa entre dues persones (Guastello, Pincus i Gunderson, 2006), de registres electrocardiogràfics en subjectes amb por a volar (Bornas et al., 2006), de registre de la Taxa del Batec Cardíac en pacients amb depressió (Iverson et al., 2005; Nahshoni et al., 2004), de registre de l'Interval entre Batecs Cardíacs R-R en el procés de psicoteràpia (Amunátegui i Dowd, 2006), de registre del Ritme Respiratori i el Volum de Ventilació en pacients amb el trastorn per pànic (Yeragani, Rao, Tancer i Uhde, 2004), de registre de la Pressió Sanguínia en pacients amb el trastorn per pànic (Yeragani, Mallavarapu, Radhakrishna, Tancer i Uhde, 2004), i del registre de l'Estimació del Cost Metabòlic en diferents activitats de Ratolins (Guillot i Meyer, 2000).

Altres registres on s'han aplicat les anàlisis provenint de la TSD són en qüestionaris autoadministrats per a l'avaluació de la tristesa en pacients amb depressió (Heiby, Pagano, Blaine, Nelson i Heath, 2003) o en estudis motivacionals mitjançant qüestionaris autoadministrats d'activitats diàries respecte de l'habilitat i la dificultat que requereixen (Guastello, Johnson i Rieke, 1999). En altres investigacions relacionades amb el control postural o en aspectes manipulatius s'analitza la posició al llarg del temps de diferents parts del cos, inclòs el centre de masses, d'una situació en equilibri inestable en humans (Mégrot, Bardy i Dietrich, 2002), la posició del centre de pressió en una situació de control postural en infants (Harbourne i Stergiou, 2003) o els moviments de la ma en una tasca d'escriptura en pacients amb esclerosi múltiple (Longstaff i Heath, 2003). Altres aplicacions s'han emprat en investigacions de temps de reacció on la ST s'ha elaborat amb els diferents registres al llarg dels assaigs d'un experiment (Cooney i Troyer, 1994; Frey, 2006) o en l'anàlisi dels valors de proximitat a objectes dels sensors de robots (Islam i Murase, 2005).

També m'agradaria esmentar una petita mostra del que s'ha fet a la nostra facultat. En primer lloc destaquen les aportacions de Munné (1993, 2004), pioneres en el nostre àmbit, proposant la possible existència de caos i de complexitat en els fenòmens estudiats des de les ciències del comportament. D'altra banda és molt interessant el treball realitzat per Navarro i Diaz de Quijano (2003) dedicat a l'estudi de

la Motivació en el Treball, proposant un model en el que s'ha pres en consideració l'existència de dinàmiques no lineals. Finalment, en l'àmbit de la psicofisiologia, hi ha una altra aportació dedicada a l'anàlisi de l'entropia en la senyal EEG en diverses fases del son. Aquest treball ha estat realitzat per Roijals, Marco, Ruffini i Grau (2004).

Òbviament no puc deixar d'esmentar en aquest punt els precedents en que he participat jo mateix. El primer és un estudi dedicat a l'anàlisi dels patrons de respiració de dofins en captivitat, en dues situacions caracteritzades per la inducció o no d'estrès, realitzat entre membres del Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament i del Zoo de Barcelona (Rifà et al., 1998). També m'agradaria esmentar un altre treball, que podríem considerar embrió de la present Tesi, dedicat a una primera aproximació a la utilització de la predicció mitjançant Xarxes Neuronals Artificials com a eina d'anàlisi de ST (Rifà i Viader, 2000). Finalment, l'estudi més recent està dedicat a l'estimació de la dimensionalitat de l'EEG en diferents fases del son (Rifà, Fuentemilla, Viader i Grau, en premsa) realitzat entre membres del Departament de Metodologia de les Ciències del Comportament i del Grup de Recerca Consolidat Neurodinàmica Cognitiva i dels Trastorns Mentals (NECOM), del que actualment formo part.

1.2 INTRODUCCIÓ A LA TEORIA DE SISTEMES DINÀMICS

Amb aquesta segona part del capítol tinc la intenció de sistematitzar un seguit de conceptes bàsics que ens serà útil fixar per al desenvolupament d'altres parts de la Tesi que puguin sorgir més endavant. En primer lloc definiré el que és un Sistema Dinàmic (SD). Es pot afirmar que aquest el conformen un seguit de variables que evolucionen de forma interrelacionada al llarg del temps (Solé i Manrubia, 1996). Aquests sistemes, de fet, evolucionen de forma contínua, però el registre d'una d'aquestes variables, és a dir una ST, es realitza de forma discreta escollint, en funció del tipus de variable que estem estudiant, un determinat interval de temps entre registres òptim per a cada cas. Val a dir que en la literatura referida a la TSD s'han introduït un seguit d'exemples de

SD que són artificials i que es generen a partir de sistemes d'equacions de diferència, en aquest cas els intervals entre puntuacions de les sèries que generen són constants; o a partir de sistemes d'equacions diferencials, en els que l'interval entre puntuacions per a la generació de ST és constant però pot ser escollida la seva amplada per l'investigador. Aquests exemples em permetran descriure les característiques que cal avaluar, des del punt de vista de la TSD, i posteriorment serviran com a banc de proves per tal d'avaluar si el mètode que presentaré en aquest treball permet identificar algunes d'aquestes característiques.

La primera d'aquestes és la no linealitat, en el sentit que es pensa que en la majoria dels casos les relacions que s'estableixen entre variables, sota aquesta perspectiva, no són lineals. Des d'aquest punt de vista s'afirma que, de fet, les relacions de tipus lineal són excepcionals (Gleick, 1987). Ja hem vist també en molts camps de la nostra disciplina que la forma d'apropar-nos a la realitat ha de tenir en compte la necessitat de trencar una mica amb el context lineal o, si més no, qüestionar-lo quan calgui.

Al llarg d'aquest capítol definiré el concepte de DI, fonamental per a la distinció entre determinisme i soroll, i el concepte de SCI. Aquestes són dues característiques, a afegir a la de no linealitat, estudiades en el context d'aquesta teoria. En segon lloc definiré el concepte d'atractor d'un SD, donat que és fonamental per al desenvolupament del mètode que mostraré al llarg d'aquest treball d'investigació. Posteriorment, hi ha una selecció de les principals eines d'anàlisi que s'utilitzen en el context de la TSD. Les he escollit perquè són il·lustratives de la forma de procedir quan fem modelatge dinàmic. Per a cadascuna de les característiques que vull analitzar, la dimensionalitat i la SCI, he escollit com a formes d'estimació un algorisme i un mètode basat en predicció no lineal donat que, al cap i a la fi, és el que empraré per a les meves anàlisis, encara que modificant la forma d'estimació de la predicció de ST. Finalment presentaré una visió més crítica d'aquest marc teòric en la que intentaré exposar els avantatges i inconvenients. Els intents de superació de cadascun d'aquests darrers esdevindran, com mostraré en el moment oportú, els objectius específics del treball que teniu a les vostres mans.

1.2.1 DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ D'UN SISTEMA DINÀMIC

La DI d'un SD correspon al nombre de variables que, de forma interactiva entre elles, evolucionen al llarg del temps seguint una regla de iteració (Clayton, 1996). Aquestes variables evolucionen conjuntament de forma que cada iteració del sistema és un dels possibles estats d'aquest. A tall d'exemple tenim el següent sistema simulat, que tornarà a aparèixer més endavant per tal d'il·lustrar o d'introduir un seguit de conceptes que ens seran molt útils per desenvolupar, més tard, una estratègia per poder analitzar una ST des del punt de vista de la TSD.

Aquest és l'anomenat mapa de Hénon (1976), que rep el nom del científic que el va proposar. Per tal d'iterar les variables del sistema tenim el següent sistema d'equacions de diferència,

$$\begin{aligned}x(t+1) &= y(t) + 1 - ax(t)^2 \\ y(t+1) &= bx(t)\end{aligned}$$

on $a=1.4$ i $b=0.3$ i on $x(0)=0$ i $y(0)=0$. L'esmentat exemple és un SD de *dues dimensions* donat que està generat per un sistema de dues equacions de diferència amb dues variables interrelacionades que evolucionen al llarg del temps. Les variables que sorgeixen a partir de la iteració, per $t= 0 .. 100$ es representen en les figures 1.1 i 1.2.

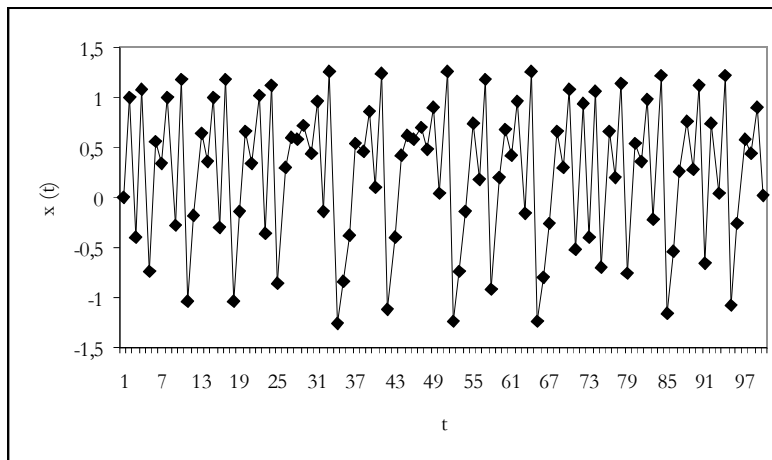


Figura 1.1: Valors de la *Serie x* mitjançant iteració de l'equació de diferència de Hénon.

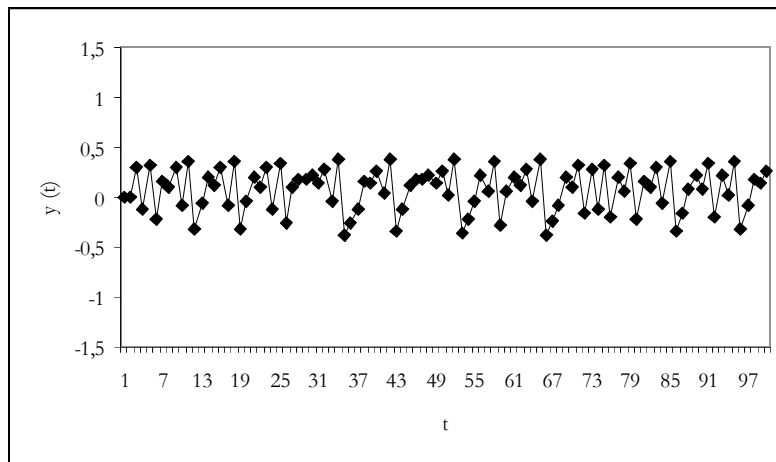


Figura 1.2: Valors de la *Serie y* mitjançant iteració de l'equació de diferència de Hénon.

La dimensionalitat del sistema és una característica molt rellevant quan s'analitza una ST des del punt de vista de la TSD, donat que es considera que aquesta és determinista quan el SD en la que està immersa té una baixa dimensionalitat i, d'altra banda, es considera que aquesta té aparença aleatòria o sorollosa quan té una alta dimensionalitat (Casdagli, 1991). Hem de considerar que quan la dimensionalitat és alta hi ha un nombre elevat de graus de llibertat, és a dir, hi ha un nombre elevat de variables que poden influir en la sèrie que estem analitzant i, per tant, aquesta no és altra cosa que soroll. En el cas contrari, és a dir quan hi ha una baixa dimensionalitat, hem de considerar que hi ha poques variables que estan interrelacionades amb la ST objecte d'anàlisi i, per tant, hi ha un nombre de graus de llibertat limitat considerant que aquesta és determinista. De fet, hi ha exemples en els que mitjançant eines estadístiques tradicionals, per exemple la funció d'autocorrelació, un registre té aparença de soroll i, en canvi, aquest és del tot determinista (Sugihara i May, 1990). Per aquest motiu es mostraran molt útils les eines que presentaré en aquest apartat donat que podem trobar determinisme on, mitjançant altres tècniques, solament tenim aparença de soroll.

1.2.2 SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS

Molts dels fenòmens que estudiem al llarg del temps mitjançant l'anàlisi de ST mostren una característica que, quan hom intenta fer prediccions, dificulta molt la possibilitat que aquestes es puguin realitzar a llarg termini, encara que la dinàmica subjacent del sistema en que està immersa una determinada sèrie estigui correctament especificat. Per tal de veure'n un exemple utilitzaré un sistema dinàmic unidimensional, l'equació logística (May, 1976) definida per la següent expressió,

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t))$$

on $r=3,99$ i $x(0)=0,5$ en el nostre exemple. L'esmentada sèrie la podeu veure representada en la figura 1.3 per a $t = 0 .. 100$.

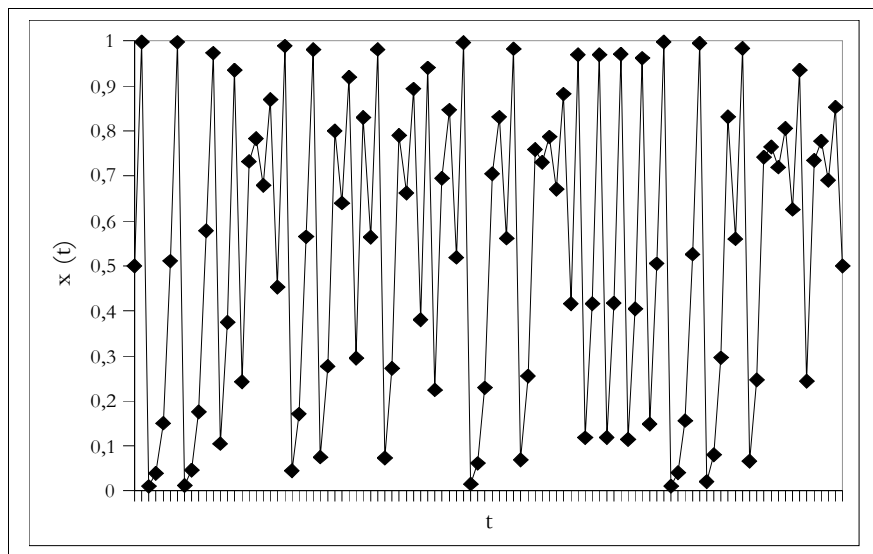


Figura 1.3: Valors de la Serie x mitjançant iteració de l'equació logística.

Si enlloc d'agafar el punt $x(0)=0,5$ agafem un punt molt proper, com pot ser $x'(0)=0,50001$, les primeres iteracions que es produeixen mitjançant l'equació seran molt similars però, conforme ens anem allunyant del punt inicial aniran augmentant les diferències de les dues sèries, tal com podem veure en la figura 1.4.

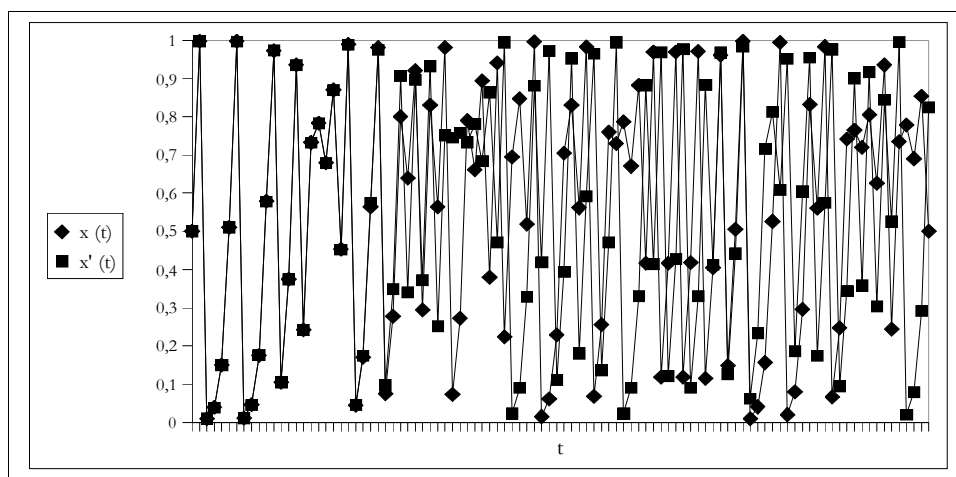


Figura 1.4: Valors de la Sèrie x (diamants) i de la Sèrie x' (quadrats) mitjançant iteració de l'equació logística.

Aquestes diferències que creixen conforme ens anem allunyant del punt original es poden observar millor mitjançant la figura 1.5. He utilitzat un exemple en el que teníem una ST simulada mitjançant iteracions de l'equació logística i hem observat que aquesta era sensible a les condicions inicials tot i que coneixíem exactament el mecanisme subjacent que la generava. En el cas d'haver emprat un mètode per tal de poder fer prediccions d'una sèrie observada aquesta dependència, si és que es dona, també es manifestaria en el moment d'aplicar la regla d'iteració estimada un determinat nombre de vegades des d'un punt inicial donat.

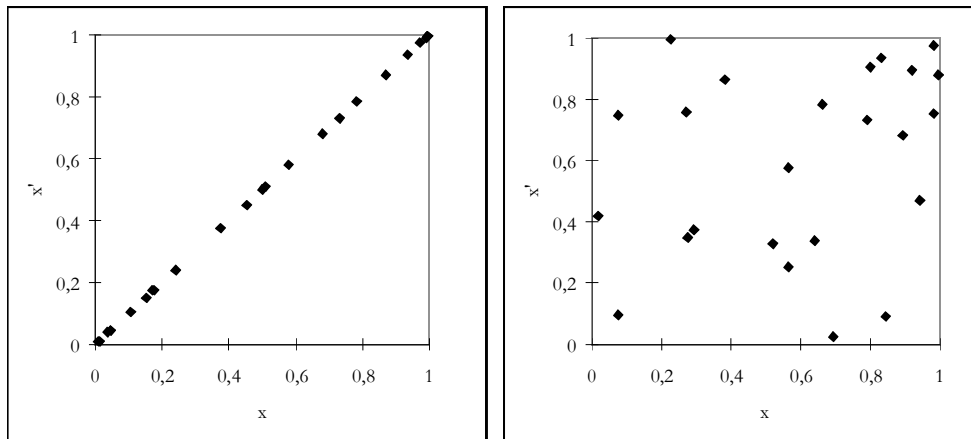


Figura 1.5: Diagrames de dispersió de les sèries x (abscisa) i x' (ordenada) per $t=1..24$ (esquerra) i $t=25..48$ (dreta).

1.2.3 ATRACTOR D'UN SISTEMA DINÀMIC

L'atractor d'un SD està format per un seguit de punts representats en l'espai de k dimensions, on k és la DI de l'esmentat sistema, que sorgeixen de projectar en aquest espai els valors de les diferents ST que hi estan immerses (Bascompte, 1995). Parlarem de trajectòria quan estem enfront d'un SD observat o quan estem davant d'un de generat a partir d'un sistema d'equacions diferencials i, en canvi, quan el SD es genera mitjançant una equació de diferència discreta parlarem de punts de l'atractor. De fet, aquest atractor no és més que un seguit de llocs "privilegiats" en l'espai de k dimensions. Aquest atractor conté molta informació referent a les característiques del sistema que, per extensió, tenen una marcada influència en l'evolució al llarg del temps de les diferents variables interrelacionades.

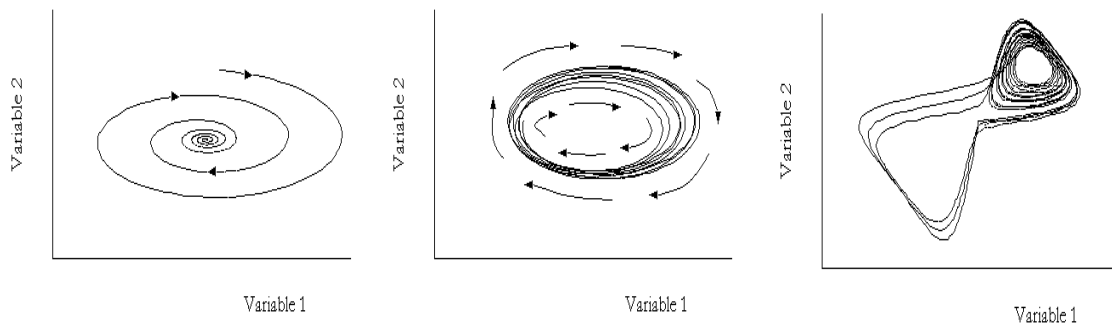


Figura 1.6: Representació dels tres tipus d'atractors que podem trobar. A l'esquerra de la figura tenim un *atractor puntual*, al mig un atractor de *cicle-limitat* i a la dreta l'*atractor estrany* de Lorenz, del que donaré més informació més endavant.

Podem trobar diferents tipus d'atractors en funció de la dinàmica del sistema, donat que aquesta està relacionada amb les seves característiques geomètriques. En mostraré tres exemples entre els que hi ha el més senzill, l'*atractor puntual*, aquell en que la dinàmica del sistema evoluciona des d'un punt inicial i tendeix a un punt d'equilibri, a partir del qual el sistema evoluciona de forma estable. En segon lloc tenim els atractors periòdics, anomenats de *cicle-limitat*, on cada una de les variables evoluciona de forma periòdica. En l'atractor aquesta dinàmica es caracteritza per una corba tancada. Finalment tenim els *atractors estranys* que es caracteritzen per formes geomètriques amb una estructura i un ordre determinat on les trajectòries que descriu l'atractor s'expandeixen i contrauen al llarg de l'evolució del sistema. Aquesta estructura està confinada, és a dir, queda reclosa en determinades posicions de l'espai, per tant aquestes expansions i contraccions es van produint de forma repetitiva, amb la mateixa estructura, però amb diferents escales. Aquests atractors són els que dibuixen SD caòtics, en el sentit que es mostra la SCI, la baixa dimensionalitat i la no linealitat, característiques que defineixen aquestes dinàmiques. En l'anterior figura es mostren exemples de cada un dels tipus d'atractors que he definit.

Quan s'analitza una sèrie simulada (el mapa Logístic o el mapa de Hénon) es pot conèixer a priori la DI, el grau de SCI o la no linealitat del SD en el que està immersa, mentre que en les ST observades això no és possible i, per tant, cal una estratègia per tal de

poder avaluar les característiques esmentades. Aquesta existeix pel fet que hi ha un seguit d'autors que han derivat algorismes o metodologies d'anàlisi que ens permeten conèixer aquesta informació que en principi no tenim, basant-nos en l'estudi dels atractors. De fet sorgeix un altre problema donat que, en tractar-se de ST observades, no sabem quina estructura té aquest atractor. En el proper paràgraf mostraré una troballa que permet superar aquest escull encara que no tinguem cap informació del SD.

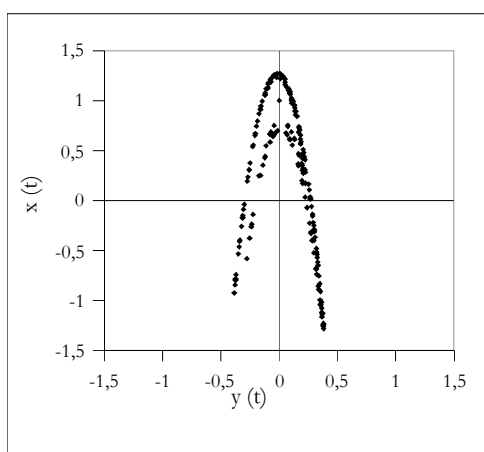


Figura 1.7: Representació de l'atractor del mapa de Hénon elaborat amb els 200 primers punts iterats. En l'abscissa tenim els valors de la *sèrie* y i en l'ordenada tenim els valors de la *sèrie* x .

En la figura 1.7 tenim l'atractor de dues dimensions que podem formar mitjançant el mapa de Hénon. Aquest s'ha elaborat representant punts en un espai de dues dimensions amb les coordenades corresponents a cada una de les dues variables. Representar l'atractor no implica cap dificultat donat que tenim els valors de cada una de les variables al llarg de les iteracions. Ens cal una estratègia per tal de reconstruir l'atractor sense disposar de les ST que formen el SD, o el que és el mateix quan únicament disposem de la ST observada.

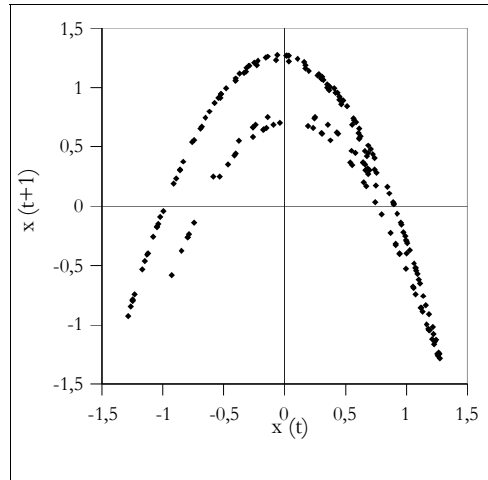


Figura 1.8: Reconstrucció de l'atractor del mapa de Hénon realitzada formant parells ordenats on l'abscissa és la puntuació $x(t)$ i l'ordenada és la puntuació $x(t+1)$.

Aquest mètode es basa en el teorema de Withney, desenvolupat per Takens (Abarbanel, 1996), i ens permet reconstruir un determinat atractor a partir d'una ST observada. Podem veure un exemple d'aquesta possibilitat intentant reconstruir l'atractor del mapa de Hénon a partir del component x . Els diferents punts de l'atractor reconstruït es formen a partir dels parells ordenats on el valor de l'abscissa és qualsevol puntuació $x(t)$ i el de l'ordenada és la puntuació següent $x(t+1)$ (això en el cas d'aquest SD, en d'altres amb més dimensions s'hauria de fer la reconstrucció amb tantes coordenades com variables té). En la figura 1.8 es mostra el resultat de fer aquesta operació. Es pot veure clarament que l'atractor té la mateixa estructura que el que hem construït a partir de les dues ST iterades, encara que hi un canvi d'escala respecte de l'eix horitzontal. En la figura 1.9 podem observar el resultat de fer la mateixa operació, però aquest cop amb el component y del mapa de Hénon. També hem canviat d'escala però l'estructura de l'atractor és la mateixa.

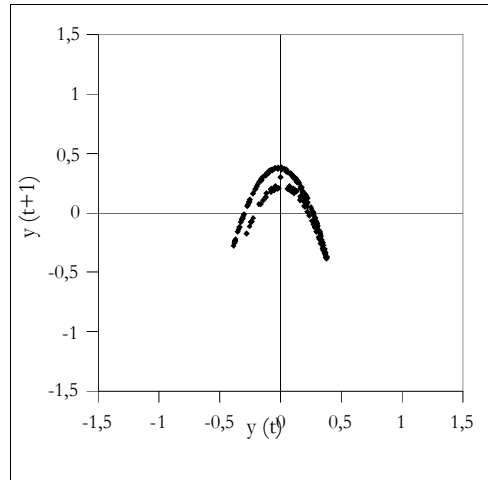


Figura 1.9: Reconstrucció de l'atractor del mapa de Hénon realitzada formant parells ordenats on l'abscisa és la puntuació $y(t)$ i l'ordenada és la puntuació $y(t+1)$.

Tal com podem veure en les anteriors figures, trobem que realment coneixent una única variable del sistema, en el nostre cas la variable de la que volem fer l'anàlisi, podem reconstruir l'atractor. Cal precisar que la reconstrucció permet conèixer únicament les característiques geomètriques de l'atractor. Ja he esmentat que el fet de disposar de l'atractor, el real o el reconstruït, implica poder conèixer característiques de la ST objecte d'estudi com pot ser la Dimensionalitat o la SCI i de les que en veurem exemples al llarg d'aquest capítol.

En aquest cas hem exemplificat aquest procés amb el mapa d'Hénon del que coneixem prèviament que la $DI=2$, per tant amb una reconstrucció de dos components ja tenim un atractor prou semblant a l'original. Malauradament, com ja he esmentat, quan tenim una ST de la que volem conèixer alguna de les característiques que defineix la TSD hem de fer la reconstrucció de l'atractor sense saber prèviament la DI del SD en el que està immers. En aquest cas haurem de construir k atractors, amb nombre de components des de 1 fins a k , i calcular aquesta característica amb un algorisme adient en cadascun d'aquests atractors reconstruïts fins trobar un invariant. De moment ens quedarem aquí perquè aquest concepte quedarà més clar en els propers apartats en

definir alguns dels algorismes derivats per tal de trobar les característiques que defineix aquesta teoria.

D'altra banda l'exemple que he emprat fins ara, el mapa de Hénon, és un SD que utilitza una regla d'iteració discreta, per tant la seva reconstrucció és senzilla en el sentit que per a un determinat punt de l'atractor $X(t)$ les seves coordenades $(x(t), x(t+1))$ són punts consecutius de la ST. Quan el nostre interès és l'anàlisi d'un registre observat amb un determinat interval entre puntuacions, hem d'escollir prèviament la separació òptima entre valors per disposar de les coordenades idònies que conformen l'atractor reconstruït, donat que així aquest serà equivalent al real. Si aquesta separació és massa petita no hi haurà suficient independència entre puntuacions, mentre que si és massa gran la independència serà tanta que no hi haurà la connexió requerida perquè el punt de l'atractor reculli les característiques de l'atractor real (Abarbanel, 1996).

Per tal d'esbrinar l'interval idoni per a la reconstrucció de l'atractor, amb la finalitat que aquest contingui la informació necessària del SD, s'ha proposat emprar una mesura de la Teoria de la Informació de Shanon, la mitjana d'informació mútua $I(s)$ (Fraser i Swinney, 1986). Si tenim dues mesures, $x(t)$ i $x(t+s)$, d'una ST determinada, on s és la separació entre ambdós registres, hem de considerar, des del punt de vista de la teoria de la informació, que hi ha certa connexió entre ambdues mesures. Per tal de conèixer la grandària d'aquesta connexió, en funció de la informació que aporten els valors $x(t)$ i $x(t+s)$, tenim la següent expressió,

$$I(s) = \sum_{x(t), x(t+s)} P(x(t), x(t+s)) \log_2 \left[\frac{P(x(t), x(t+s))}{P(x(t))P(x(t+s))} \right],$$

de fet aquesta expressió el que ens està dient és que quan $I(s)$ augmenta, la informació que $x(t+s)$ aporta al sistema, coneguda la informació de $x(t)$, és redundant. Per aquest motiu es considera que l'interval idoni per a la reconstrucció de l'atractor és el valor més petit de s que podem trobar en que la mitjana d'informació mútua és mínima, punt en el que es considera que les puntuacions són prou independents, és a dir no redundants, i prou properes per poder reconstruir l'atractor. Segons Fraser i

Swinney (1986) aquesta mesura per a diferents valors de s vindria a ser la funció d'autocorrelació no lineal de la ST. En la figura 1.10 podem veure el valor de la mitjana d'informació mútua en funció de l'interval de separació s per al component x de l'atractor de Lorenz. Aquest atractor va ser proposat per Edward Lorenz, investigador de l'Institut Tecnològic de Massachusetts. Lorenz va proposar el següent sistema d'equacions diferencials per modelar de forma simplificada la convecció atmosfèrica (Lorenz, 1963),

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sigma x + \sigma y \\ dy/dt &= -xz + rx - y \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned}$$

on r , b i σ són paràmetres que canvien el comportament del sistema. En aquest treball de recerca hem emprat el conjunt de dades aportat pel paquet informàtic *Visual Recurrence Analysis* elaborat per Kononov (2004).

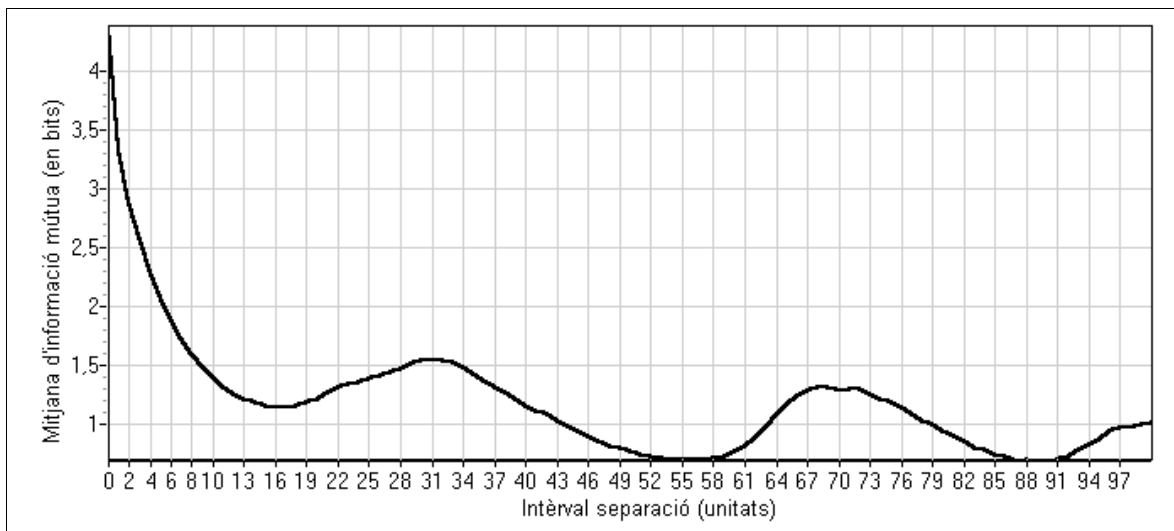


Figura 1.10: Mitjana d'informació mútua en funció de la separació entre puntuacions s .

Aquest gràfic el que ens permet conèixer és que l'interval òptim per a la reconstrucció de l'atractor és de 17 retards. Per tal de veure l'efecte de la grandària de

l'interval entre puntuacions en la reconstrucció de l'atractor he realitzat el gràfic de la figura 1.11 on hi ha l'atractor reconstruït per diferents valors de s . L'atractor reconstruït mitjançant el valor òptim de s , en aquest cas 17, és el que he identificat com a c . Tant les anteriors, $a - b$, com les posteriors, $d - h$, són males reconstruccions de l'atractor donat que en el primer cas la separació és tant petita que cada punt de l'atractor aporta poca informació al sistema i, en canvi, en el segon cas hi ha massa separació i es desdibuixa respecte de l'atractor original de Lorenz, si el construïssim amb dos dels seus tres components originals.

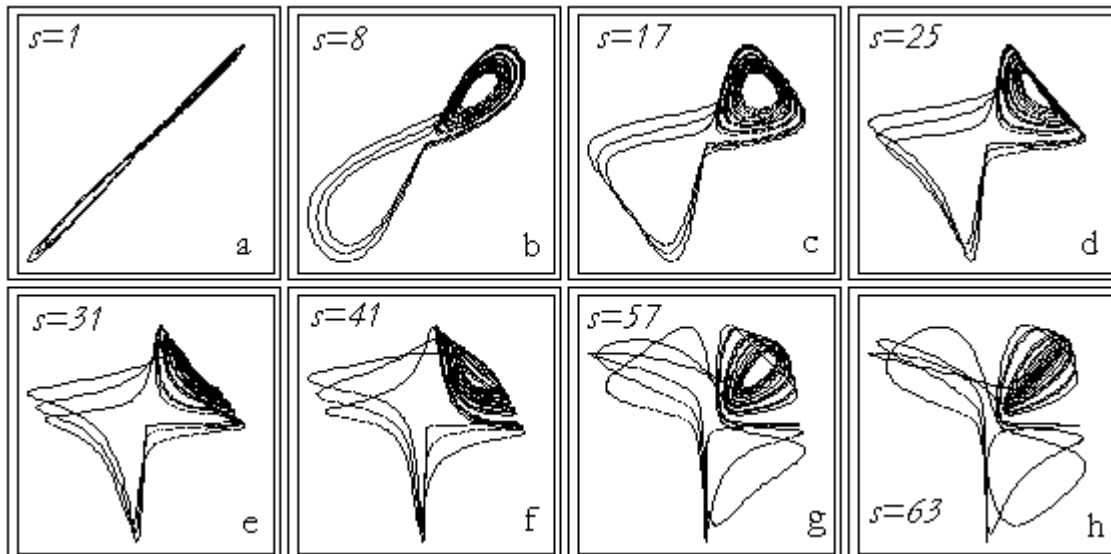


Figura 1.11: Diferents reconstruccions de l'atractor en dues dimensions per a diferents valors de s .

1.2.3.1 DIMENSIÓ DE L'ATRACTOR

La Dimensió (D) és una mesura de l'estranyesa d'un atractor (Grassberger i Procaccia, 1983). A l'apartat anterior he esmentat que existeixen els atractors puntuals,

que es caracteritzen per tenir una dimensió de zero, de cicle limitat, que tenen una dimensió de u , i teníem l'exemple de l'atractor estrany que té una dimensió igual a un nombre real no sencer. En aquest darrer cas aquest valor ens està dient que l'atractor és un fractal.

Els fractals són formes que tenen una pauta de repetició en la seva estructura, és a dir, que una part de l'objecte observat és similar al tot. Aquesta característica s'anomena autosimilaritat i per fer-nos-en una idea intuïtiva correspon a que aquest objecte es doblega en ell mateix amb infinits plegaments i infinita estructura (Solé i Manrubia, 1996). De fet aquest objectes fins a finals del segle XIX eren considerats tan estranys i curiosos que eren dignes d'estar a la "Galérie des Monstres" de les matemàtiques, tal com diu Mandelbrot (1975/1996), autor que n'ha fet una gran difusió i que, precisament, els hi ha donat el nom de fractals, nom que va agafar del llatí ("fractus"), és a dir, irregular o amb interrupcions. Podem trobar un gran nombre d'objectes fractals en la naturalesa com poden ser les línies de costa, un floc de neu, l'estructura de determinades fulles d'arbres, els líquens, l'estructura del nostre aparell circulatori, l'estructura de les dendrites d'una neurona, el relleu d'alguns territoris, les xarxes que componen la internet o molts d'altres exemples que podem trobar en la realitat.

Per il·lustrar de què estem parlant farem un cop d'ull a l'estructura interna dels pulmons. En ells tenim que la tràquea, els bronquis, els bronquíols i, finalment, els conductes alveolars es van separant successivament en dues branques fins a més de 20 generacions per tal d'aconseguir la màxima superfície de contacte aire-sang i poder realitzar l'intercanvi entre O_2 i CO_2 necessari per al manteniment de la vida. A més de la característica que defineix els fractals, és a dir, la regularitat o invariancia en el patró de repetició, aquesta també es dona en quant a l'escala, és a dir, donada una fase de separació del total de l'estructura, per exemple en un bronquíol, trobarem que la raó de proporcionalitat de la mesura entre aquesta i una porció del seu disseny serà igual en una altre fase de separació de l'estructura, per exemple en un conducte alveolar. Val a dir però que en els exemples de la naturalesa que he esmentat la pauta de repetició dels

objectes fractals reals s'arriba a parar en un determinat nivell, en canvi els fractals ideals o iterats tenen un detall infinit.

La raó per la qual es considera que un atractor estrany és un fractal està en la seva pròpia definició, en la que hem apuntat que hi havia una repetició a diferents escales d'una mateixa estructura, donat que les trajectòries estan confinades. Aquesta repetició de l'estructura independent de l'escala de mesura es pot observar en la figura 1.12 prenent com exemple el mapa de Hénon.

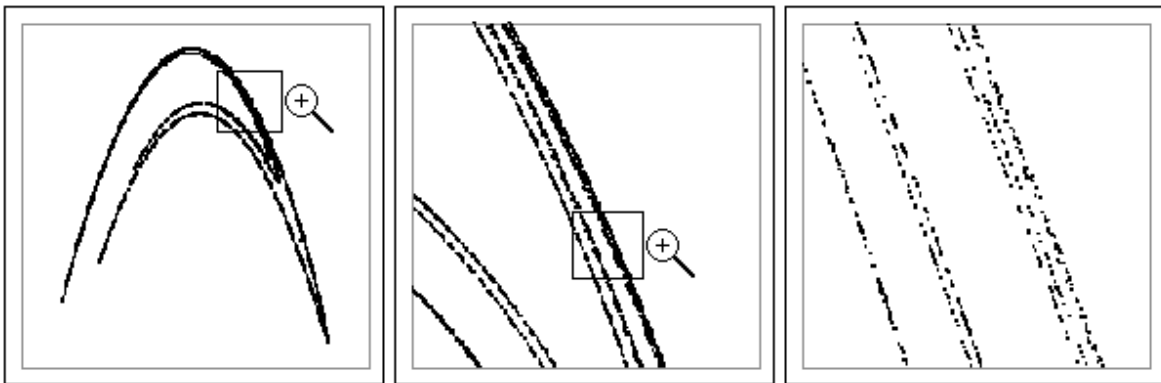


Figura 1.12: Estructura repetida del mapa de Hénon, a mesura que ampliem parts concretes de l'atractor (en la figura del mig hi ha l'ampliació de la de l'esquerra, i en la figura de la dreta la del mig) es va repetint l'estructura d'aquest.

A continuació presentaré dos mètodes que es basen en estimar la Dimensió de l'atractor que hem reconstruït, per a diferent nombre de components des de 1 fins a k . Ja he esmentat que, en desconèixer la DI del sistema en que està immersa una ST observada, cal construir k atractors i cercar un invariant en una magnitud determinada.

Estimació de la Dimensió d'un atractor mitjançant el mètode de comptar caixes

Aquest mètode permet trobar una aproximació de la Dimensió Fractal (DF) de qualsevol objecte (Abarbanel, 1996) i es pot calcular mitjançant la següent expressió,

$$D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}$$

on $N(r)$ és el nombre d'elements de longitud r que calen per fer mesures en l'objecte fractal en qüestió, en el nostre cas l'atractor reconstruït.

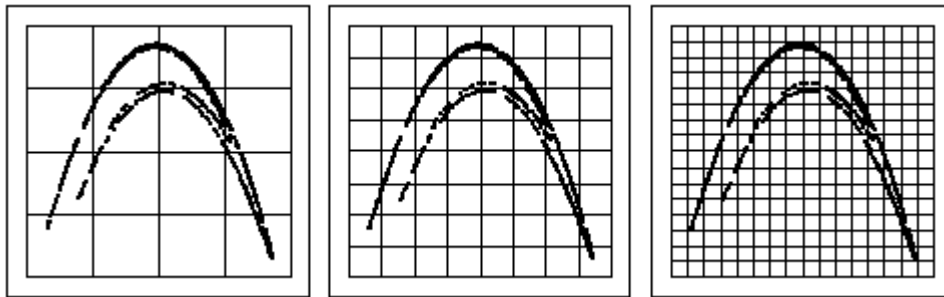


Figura 1.13: L'atractor de Hénon inserit en quadrats de costat r , $r/2$ i $r/4$ per tal de poder calcular el nombre d'aquests que contenen algun fragment de l'atractor. (Aquesta figura és de caire il·lustratiu i no porta als resultats que es presenten en la figura següent)

Primer hem d'inserir els punts de l'atractor en una línia, un quadrat, un cub o un hipercub, per a l'atractor reconstruït amb 1, 2, 3 i més de 3 components (k serà el nombre de components), respectivament, per diferents distàncies de r ; i comptar quantes línies, quadrats, cubs o hipercubs contenen punts d'aquest atractor ($N(r)$). Posteriorment representarem els diferents punts

ordenats $(\log (1/r), \log N(r))$ i estimarem el pendent de la recta formada per aquests punts per a diferent nombre de components (normalment fins a $k=10$). La D serà el valor en el que el pendent roman constant encara que augmenti el nombre de components de l'atractor que hem reconstruït. En cas que no arribi a ser constant, com ja hem esmentat anteriorment, serà un indicador que la ST observada es caracteritza per ser sorollosa. En la figura 1.13 podem observar l'atractor de Hénon inserit en tres graelles formades per quadres, per tant per a $k=2$, de costat $r, r/2$ i $r/4$.

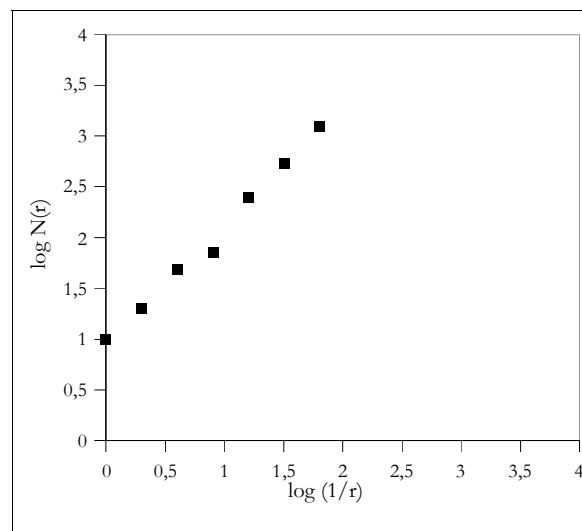


Figura 1.14: Punts de coordenades $(\log (1/r), \log N(r))$ per a la $k=2$ de l'atractor de Hénon per $r, r/2, r/4$ fins a $r/64$. Estimant el pendent d'aquests punts tenim un primer valor per a l'estimació que, si no creix en augmentar la k , coincidirà amb la DF que estem buscant.

Mitjançant aquestes graelles s'ha de procedir a calcular el nombre de quadres $N(r)$ que contenen l'atractor per cada costat $r, r/2, r/4$ i així successivament fins a tenir un nombre de punts suficients per tal de poder estimar el pendent de la recta que aquests defineixen. En la figura 1.14 podem observar els punts $(\log (1/r), \log N(r))$ per a $r, r/2, r/4$, fins a $r/64$

corresponents al comptatge realitzat en l'atractor de Hénon reconstruït amb dos components i que té un pendent de 1,1681. Per tal de conèixer la D , com ja hem esmentat, haurem de repetir l'operació successivament per a 3, 4, 5, o més components de l'atractor reconstruït fins a trobar que el pendent estimat roman constant, punt en el que el valor del pendent és una aproximació de la DF . En cas que la ST es caracteritzés pel soroll aquest pendent sempre creixeria cada cop que afegíssim un nou component a l'atractor.

Aquest mètode té l'inconvenient, com heu pogut veure, que és molt difícil però permet veure de forma gràfica la característica que hem esmentat al respecte que les dimensions es mantenen encara que canviem d'escala i que, a més, ens definia la D . Per aquest motiu presento a continuació un altre mètode, proposat per Grassberger i Procaccia (1983), i que permet una major automatització del seu càlcul.

Estimació de la Dimensió d'un atractor mitjançant la integral de correlació

Tal com hem vist en l'apartat anterior el mètode de comptar caixes esdevé feixuc en la seva aplicació, no solament per la dificultat que comporta treballar amb r cada cop més petit, sinó perquè fer l'operació que hem il·lustrat per dos components és senzill, però fer-ho amb cubs o amb hipercubs resulta poc pràctic. Per aquest motiu Grassberger i Procaccia (1983) van introduir una mesura de la D de l'atractor a partir d'una ST observada mitjançant un algorisme fàcilment implementable en un programa d'ordinador. Aquesta mesura també és una aproximació de la DF .

Donat un atractor reconstruït mitjançant el mètode de Takens, on $(x(t), x(t+1), x(t+2), \dots, x(t+k-1))$ és qualsevol punt d'aquest atractor i es representa per $X(t)$, tenim que la integral de correlació es defineix

mitjançant la següent expressió per $k=DI$, sempre que aquest valor sigui conegut prèviament,

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{t,s}^N \theta(r - |X(t) - X(s)|)$$

on $\theta(x)$ és la *funció esglaó unitari*, anomenada també *funció de Heaviside*, que es caracteritza per la següent expressió,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{i} \\ \theta(x) &= 1 \quad \text{si } x > 0 \end{aligned}$$

on $X(t)$ i $X(s)$ són dos punts qualsevol de l'atractor, i on r és una distància arbitràriament petita donat que en aquest darrer cas tenim que,

$$C(r) \propto r^v$$

Donat que existeix aquesta proporcionalitat i que v és un valor aproximat de D , si apliquem logaritmes a ambdós costats de l'expressió podrem fer l'estimació calculant el pendent de la recta que descriuen $\log(C(r))$ i $\log(r)$ per a diferents valors prou petits de r .

Sempre que emprem ST de les que no coneixem la DI haurem de realitzar el càlcul de la Integral de Correlació per a cadascun dels atractors reconstruïts amb diferent nombre de components, normalment des de un fins a deu. D'altra banda, donat que els nostres conjunts de dades són finits, emprarem la següent expressió modificada de la Integral de Correlació per al seu càlcul,

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{t,s}^N \theta(r - |X(t) - X(s)|) .$$

Finalment, un cop calculat el pendent de la recta que descriuen $\log(C(r))$ i $\log(r)$ per cada atractor reconstruït, amb nombre de components de u a deu, representarem en un gràfic el pendent o D estimada en l'eix d'ordenades i el nombre de components en les abscisses. Una aproximació del valor de la DF serà el primer valor del pendent a partir del qual aquest romangui constant encara que afegim nous components de l'atractor reconstruït. Com en el cas del mètode de comptar caixes, en cas d'estimar la D d'una sèrie sorollosa, trobarem que el pendent sempre creix cada cop que afegim un nou component de l'atractor reconstruït.

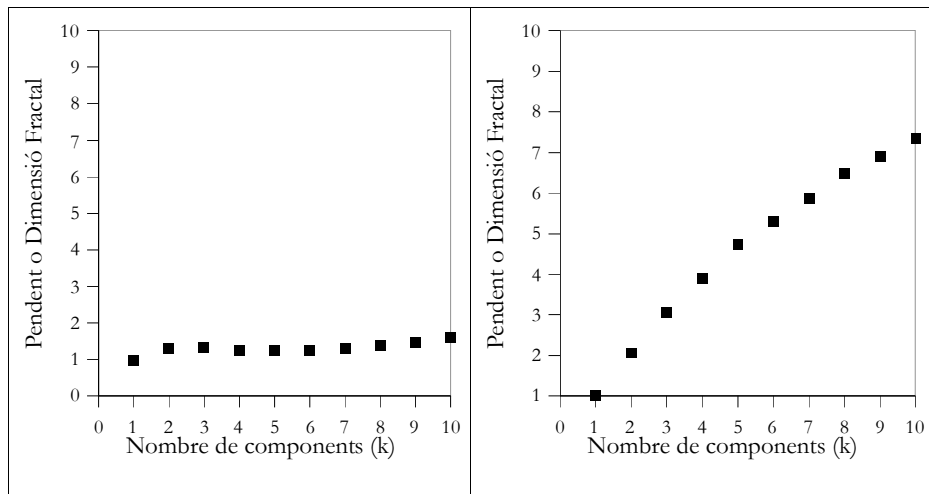


Figura 1.15: Representació de la D o el pendent de la recta $\log(C(r))$ i $\log(r)$, en funció del nombre de components del patró reconstruït, per al component x del mapa de Hénon (gràfic esquerra) i per una serie temporal de soroll blanc (gràfic dret) per tal de mostrar dos patrons totalment diferents en el continuum soroll-determinisme. En el primer cas tenim que $DF \approx 1,296$, en el segon cas no es pot fer l'estimació de la D perquè no hi ha saturació.

En la figura 1.15 es mostren els resultats esperats mitjançant la utilització d'aquest mètode per al mapa de Hénon (de molt baixa dimensionalitat i, per tant, considerat del tot determinista) i per a una sèrie temporal de soroll blanc (de molt alta dimensionalitat i, per tant, del tot sorollosa). Per tal de realitzar els càlculs necessaris per aconseguir els resultats s'ha emprat el paquet informàtic "Chaos Data Analyzer" (Spratt i Rowland, 1992). De fet, si empréssim el mètode de comptar caixes, que he mostrat en l'apartat anterior, per a ambdues sèries temporals fins a $k=10$ podríem fer l'estimació de la DF emprant aquest mateix tipus de gràfics i trobaríem resultats força similars.

1.2.4 PRINCIPALS EINES D'ANÀLISI DE LA TEORIA DE SISTEMES DINÀMICS

Amb el que portem fins el moment hem vist que aquesta teoria aporta una visió diferent de l'anàlisi de ST basada en l'estudi de l'atractor d'un sistema dinàmic, del que de moment coneixem què és i he avançat que aporta molta informació del SD respecte de la dimensionalitat, la SCI i la no linealitat de la sèrie que volem estudiar. En aquest apartat mostraré un seguit d'eines d'anàlisi que s'han desenvolupat en els darrers vint anys aproximadament. Les inferències que ens permeten es basen en l'estudi de les característiques d'aquest atractor que podem reconstruir a partir de la ST observada.

1.2.4.1 DIMENSIONALITAT D'UNA SÈRIE TEMPORAL

Hi ha un seguit d'algorismes o mètodes que ens permeten calcular la dimensionalitat del registre d'una variable al llarg del temps, i que per tant ens diran si aquest es caracteritza per soroll o bé és determinista. En l'apartat anterior ja hem vist dos dels que ens permeten l'estimació de la dimensió de l'atractor. A continuació

mostraré dos mètodes que ens permeten l'estimació de la DI, que ja hem definit anteriorment.

Estimació de la dimensió d'immersió

Ja he esmentat que mitjançant el mètode de comptar caixes i la integral de correlació podem aproximar la DF de l'atractor reconstruït. De fet, aquesta quantitat ens permet conèixer la dimensió de l'atractor del SD en el que està immers el nostre registre, però no ens dóna exactament la DI d'aquest, per tant no sabem el nombre de variables del sistema. Necessitarem, per tant, altres eines d'anàlisi que aportin aquesta informació i que mostro a continuació. El primer es basa en l'anàlisi de distàncies entre els punts de l'atractor i l'altre és un mètode basat en la predicció no lineal al llarg del temps.

D'altra banda, de la mateixa manera que mitjançant la primera mesura tenim informació sobre si la ST té aparença de soroll o no, mitjançant la DI també podrem obtenir aquesta informació.

Estimació de la Dimensió d'Immersió mitjançant el mètode de “tant per cent de falsos veïns”

Suposem que tenim un punt $X(t)=(x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1))$ d'un atractor reconstruït amb un determinat nombre k de components i trobem un punt proper a aquest que designarem mitjançant l'expressió $X^V(t)=(x^V(t), x^V(t+1), \dots, x^V(t+k-1))$. Si afegim un nou component a cada un dels punts $X(t)$ i $X^V(t)$ poden passar dues coses, o bé ambdós punts continuen estant propers, i aleshores direm que són “veritables veïns” per k i $k+1$, o bé ambdós punts es separen per $k+1$ i aleshores direm que són “falsos veïns”. En la figura 1.16 tenim un exemple amb el mapa de Hénon que pot il·lustrar aquest fenomen (Kennel, Brown i Abarbanel, 1992). Al quadre inferior es

representa el mapa de Hénon projectat en una sola dimensió i al quadre superior el mateix però en dues dimensions. En el primer cas tenim tres punts que es poden considerar que comparteixen el mateix veïnatge (A, B i C), en canvi si mirem el quadre superior trobem que B i C continuen compartint veïnatge però en canvi el punt A queda lluny dels altres dos, és a dir, era un “fals veí” dels punts B i C.

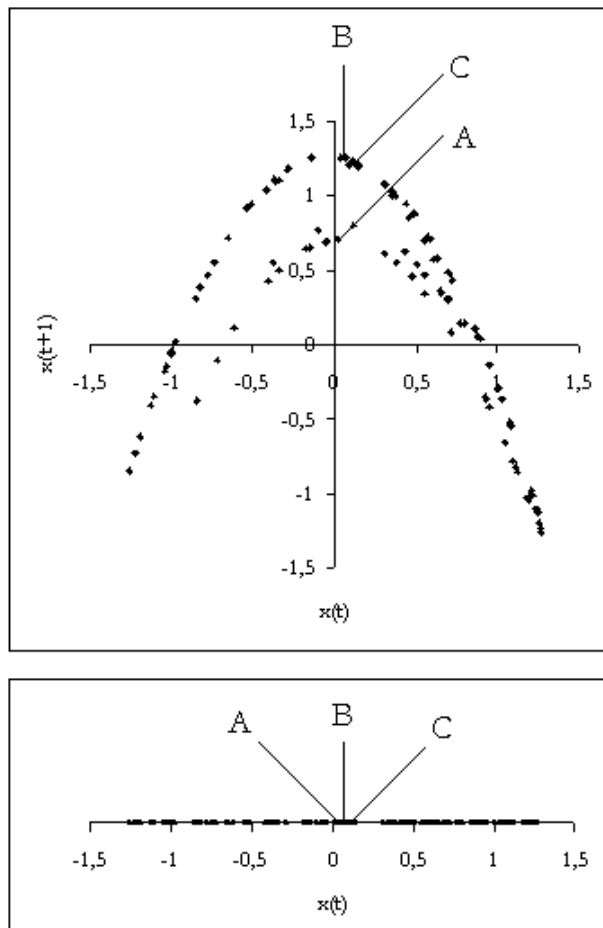


Figura 1.16: El mapa de Hénon representat en una (a baix) i dues (a dalt) dimensions. Els punts B i C són “veritables veïns” mentre que els punts A i C o els punts A i B són “falsos veïns”.

Aquest procediment per estimar la DI (Kennel et al., 1992) es basa en el fet que coneixerem la DI de la sèrie quan ja no es trobin més “falsos

veïns” en afegir un nou component. Segons aquests autors, si en el quadre superior de l'exemple de la figura 1.16 busquéssim dos “veïns” i repetíssim l'operació representant un nou component, aquests continuarien essent “veïns” donat que el mapa de Hénon té $DI=2$. El fenomen del “falsos veïns” ve donat perquè quan el nombre de components k de l'atractor reconstruït que estem representant és més petit que el valor real de la DI, alguns punts que estan lluny en l'atractor en que s'insereix el SD apareixen propers pel fet que es projecten en un espai de dimensió menor que el del valor real.

El mètode per estimar la DI d'una ST consisteix en buscar les distàncies entre tots els punts dels atractors reconstruïts des de $k=1$ fins a un determinat k (normalment $k=10$). Un cop fet això s'ha de calcular el tant per cent de “falsos veïns” que identifiquem cada cop que afegim un nou component a l'atractor. Podrem fer l'estimació en observar un gràfic on es representi el “tant per cent del falsos veïns” en funció del nombre de components de l'atractor reconstruït. La DI serà igual al nombre de components k on el “tant per cent de falsos veïns” és igual a zero.

Val a dir que per desenvolupar aquest mètode caldrà tenir un criteri que ens permeti dir quina és la distància entre dos punts que fa que els considerem com que són “veïns” o com que no són “veïns” (Kennel et al., 1992). Concretament els autors donen un criteri llindar per tal de discriminar si un determinat punt $X^V(t)=(x^v(t), x^v(t+1), \dots, x^v(t+k-1))$ considerat “veï” del punt $X(t)=(x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1))$ per a un determinat nombre de components k ho continuarà essent per a un nombre de components $k+1$. Aquest criteri es pot explicitar mitjançant la següent expressió,

$$\left(\frac{D_{k+1}^2(t) - D_k^2(t)}{D_k^2(t)} \right)^{1/2} > D_{criteri} ,$$

on tenim que,

$$D_k^2(t) = \sum_{i=0}^{k-1} (x(t+i) - x^v(t+i))^2 \quad \text{i} \quad D_{k+1}^2(t) = \sum_{i=1}^k (x(t+i) - x^v(t+i))^2$$

són totes les distàncies entre dos punts determinats susceptibles de ser “veïns” o no per a nombre de components k i $k+1$ respectivament i on, segons els autors, els resultats són molt constants i exactes per a dades amb baixa dimensionalitat quan $10 \leq D_{criteri} \leq 50$ (Abarbanel, Brown, Sidorovich i Tsimring, 1993). Quan es supera aquest llindar hem de considerar que dos punts són “falsos veïns” donat que quan passem de k a $k+1$ la distància entre aquests augmenta.

D'altra banda, els autors han comprovat que aquest criteri porta a resultats esbiaixats quan s'analitzen SD dels considerats d'alta dimensionalitat (Kennel et al., 1992), especialment quan es treballa amb conjunts de dades limitats. En aquest cas on es treballa amb dades sorolloses a mesura que s'incrementa k els punts es van separant successivament i aleshores cal tenir en compte la grandària de l'atractor. Per aquest motiu proposen un segon criteri que ho tingui en compte i que s'explicita mitjançant la següent expressió,

$$\frac{D_{k+1}(t)}{D_A} > A_{criteri} ,$$

on tenim que $A_{criteri}$ és un valor que ha de ser més gran de 2 i

$$D_A^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x(t) - \bar{x})^2$$

on prèviament hem de calcular

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x(t)) ,$$

i on T és el nombre de puntuacions de la sèrie temporal. Quan es compleix aquesta expressió també hem de considerar que dos punts són “falsos veïns”.

Per tant, amb aquests dos criteris ja estem en condicions de calcular el “tant per cent de falsos veïns” per diferents valors de k . Un cop fet això el que hem de fer és representar com varia el “tant per cent de falsos veïns” en funció d’anar augmentat k , normalment fins a $k=10$, i observar si hi ha un punt a partir del qual aquest tant per cent és igual a zero, cas en el que estaríem davant d’un SD de baixa dimensionalitat on la DI seria igual al valor de k d’aquest punt, o bé si aquest tant per cent es manté més o menys constant sense arribar a zero, cas en el que estaríem davant d’un sistema d’alta dimensionalitat.

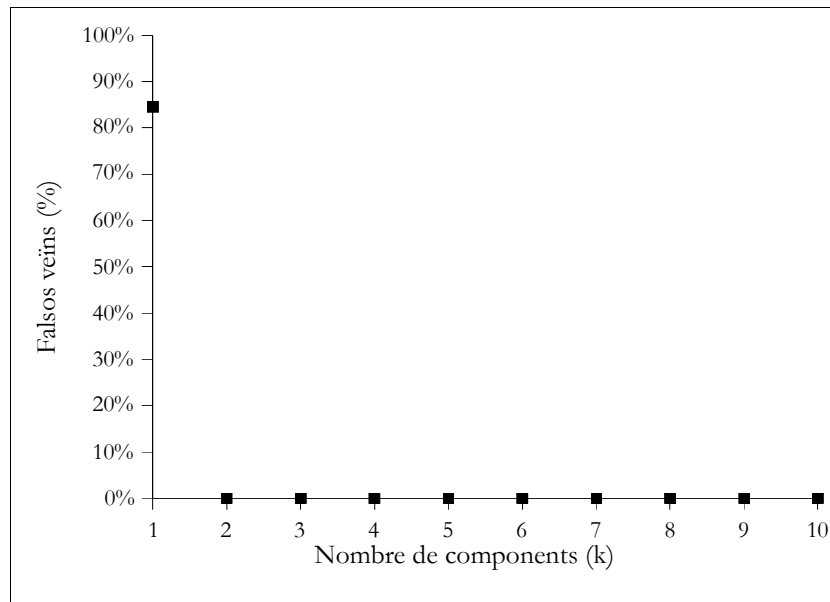


Figura 1.17: “Tant per cent de falsos veïns” en funció del nombre de components per al mapa de Hénon.

En la figura 1.17 mostrem un exemple en el que s’ha calculat el “tant per cent de falsos veïns” per $k=1 \dots 10$ per al component x del mapa de Hénon. Com es pot veure el “tant per cent de falsos veïns” arriba a 0 per a $k=2$, mostrant clarament la DI.

Estimació de la Dimensió d’Immersió mitjançant predicció no lineal

Sugihara i May (1990) van mostrar l’aplicabilitat de la predicció no lineal d’una ST per tal d’esbrinar si aquesta és determinista o és sorollosa. En primer lloc faré una petita introducció al mètode de predicció que proposen i després veurem com aquest ens pot informar de la DI.

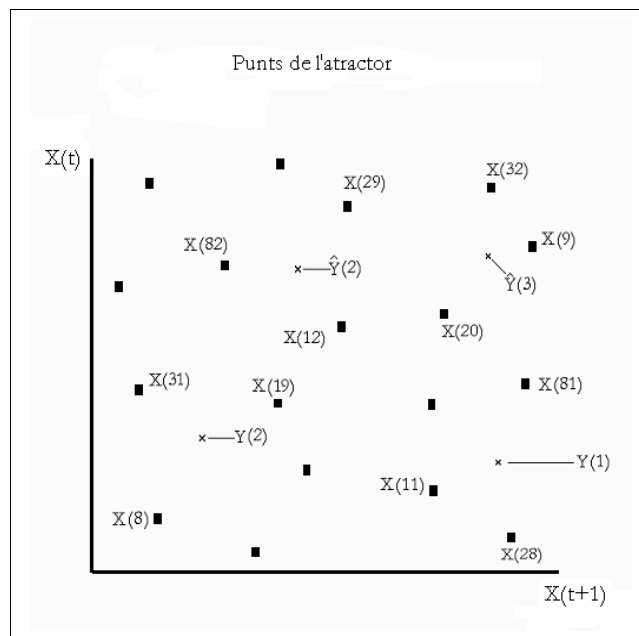


Figura 1.18: Exemple de la predicció dels punts $Y(2)$ i $Y(3)$ a partir dels punts $Y(1)$ i $Y(2)$ reals, respectivament, mitjançant l’aplicació del mètode de Sugihara i May (1990).

Respecte del mètode de predicció, el primer que proposen els autors és dividir la ST en dues meitats, la primera serà com el passat conegut de l'evolució d'aquesta i la segona el seu futur desconegut. En segon lloc es reconstrueix l'atractor per a un determinat nombre de components k , per tal d'il·lustrar millor el mètode hem reconstruït l'atractor per $k=2$ (veure la figura 1.18 on es mostra un exemple del mètode que explico a continuació), i els punts de l'atractor de la part "coneguda" de la ST es representen en dos eixos de coordenades on es representa $x(t+1)$ i $x(t)$. S'agafa el primer punt $Y(t)$ de coordenades $(y(t+1), y(t))$ de la part "desconeguda", que ens servirà per començar a fer les prediccions, i es situa en el gràfic on hi ha els punts de l'atractor reconstruït de la part "coneguda". Aleshores hem d'identificar aquells punts que estan al voltant d' $Y(t)$ que fan el triangle més petit possible que el contenen (en cas d'emprar tres components s'utilitzaria un tetraèdre i per més de tres components un políedre de cares triangulars). Per tal de fer prediccions un pas cap endavant es busca on estarà el triangle un interval de temps després i es situa aquest en el gràfic de la part "desconeguda" de la sèrie. La predicció un pas cap endavant $Y(t+1)$ serà el baricentre d'aquest nou triangle. Es realitza aquesta operació amb tots els valors de la segona meitat del conjunt de dades i es comparen les prediccions amb els valors reals esperats, donat que els coneixem, mitjançant la correlació estadística entre aquests dos conjunts per quantificar la precisió de les prediccions.

Mitjançant aquest mètode es poden fer prediccions a diferents passos endavant i per diferents valors de k . De fet, el control d'aquests paràmetres és el que ens permetrà treure conclusions respecte de determinades característiques de la sèrie temporal objecte d'estudi. Per tal d'estimar la DI haurem de crear un gràfic en el que es mostri la qualitat de la predicció en funció del nombre de components escollits per reconstruir l'atractor. Sugihara i May (1990) il·lustren el seu mètode aplicant-lo a sèries temporals

observades d'estudis epidemiològics i ecològics. Com exemple mostrarem els resultats d'una de les sèries temporals utilitzades per ells en la que hi ha el registre mensual del nombre de casos de xarampió a la ciutat de Nova York entre 1928 i 1963. A la figura 1.19 tenim representats la correlació entre la predicció i els valors reals en funció del nombre de components emprats per realitzar aquesta predicció. Segons els autors la DI de la sèrie temporal coincideix amb el nombre de components de l'atractor reconstruït a partir del qual ja no hi ha una millora de la predicció encara que afegim més components.

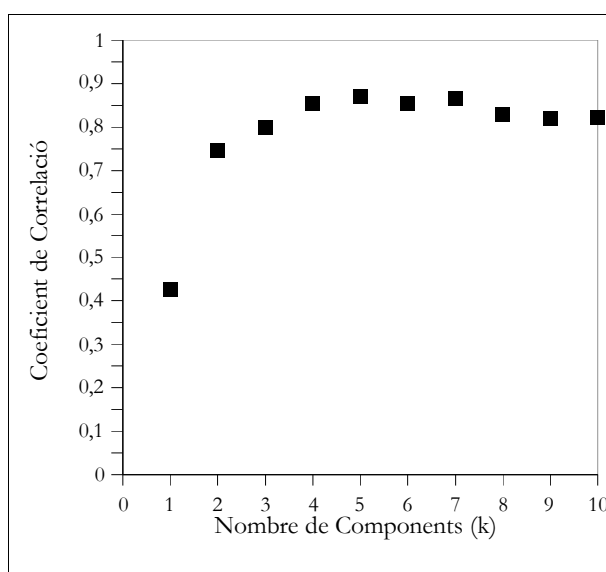


Figura 1.19: Representació de la variació en la capacitat de predicció del mètode, expressada mitjançant la correlació entre les dades reals i les estimades, en funció del nombre de components. Podem observar que aquesta ja no creix més a partir de 5 components i, per tant, la DI serà aproximadament de 5.

1.2.4.2 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS

Quan he descrit els atractors estranys he esmentat que les trajectòries d'aquests es contrauen i expandeixen repetidament. Per tant, en determinats sectors de l'atractor tindrem que dues trajectòries seran properes i, en canvi, en un altre sector la continuació d'aquestes trajectòries s'allunyan. Aquest fenomen és el que he esmentat com la SCI i es pot avaluar mitjançant dues estratègies, o bé escollint dos punts propers de l'atractor reconstruït i estudiant la seva evolució al llarg del temps, o bé mitjançant predicció no lineal d'una ST a llarg termini. A continuació presento, respectivament seguint aquest ordre, dos mètodes que ens permetran l'estudi de la SCI de registres de variables al llarg del temps.

El mètode de Wolf per avaluar la Sensibilitat a les Condicions Inicials

Per tal d'avaluar fins a quin punt una ST és sensible o no a les condicions inicials tenim un indicador que anomenem exponents de Lyapunov. Aquests permeten avaluar aquest fenomen sempre i quan es tracti de ST immerses en SD dels quals coneixem l'equació diferencial o l'equació de diferència que els genera. D'altra banda Wolf, Swift, Swinney i Vastano (1985) han desenvolupat un algorisme que permet avaluar la SCI de ST observades mitjançant el càlcul d'aquests exponents.

Els exponents de Lyapunov ens permeten quantificar la divergència o convergència d'òrbites properes en l'atractor (Wolf et al., 1985). Quan treballem amb sistemes completament especificats, mitjançant les equacions diferencials o les equacions de diferència que els expliciten, podem calcular un exponent de Lyapunov per a cada component. Un cop disposem de l'espectre d'exponents sabrem que un SD té un comportament caòtic, és a dir SCI, si existeix com a mínim un exponent de Lyapunov positiu. Els signes de l'exponent de

Lyapunov són una forma qualitativa de descriure l'atractor d'un SD en termes de SCI. Per exemple quan el sistema és de tres dimensions tindrem que els exponents són $(+, 0, -)$ quan l'atractor és *estranys*, són $(0, 0, -)$ i $(0, -, -)$ quan l'atractor és de *cicle-limitat* i $(-, -, -)$ quan tenim un *atractor puntual*. L'algorisme que han desenvolupat els autors abans esmentats permet calcular, a partir d'una ST observada finita i mitjançant la reconstrucció de l'atractor, l'exponent de Lyapunov dominant que, si és positiu, ens estarà indicant que la ST té un comportament caòtic. Malauradament, la possibilitat d'obtenir una bona estimació d'aquest exponent dependrà molt de disposar de dades sense soroll i, a més, sempre que estigui correctament estimada la seva DI. Per aquest motiu hi ha molta controvèrsia respecte l'adequació d'aquesta eina d'anàlisi. De totes maneres crec que és important exposar-la en aquest treball donat que permet veure clarament el fenomen de la SCI en l'estudi de ST.

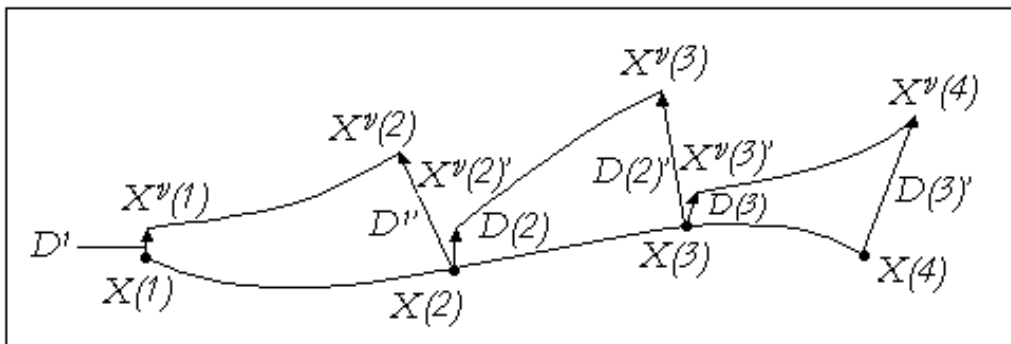


Figura 1.20: Representació gràfica del procediment per calcular el màxim exponent de Lyapunov mitjançant el mètode de Wolf et al.(1985)

A continuació exposo la forma de calcular el màxim exponent de Lyapunov. En primer lloc hem de fer la reconstrucció dels punts de l'atractor a partir dels valors de la ST observada. A partir del primer punt de l'atractor $X(1)=(x(1), x(2), \dots, x(k))$ on $k=DI$, busquem el veí més proper a aquest

$X'(1)=(x'(1), x'(2), \dots, x'(k))$ i calculem la distància entre ells, que denotarem per D_1 a partir de la següent expressió

$$D_1=|X(1)-X^v(1)|.$$

Posteriorment escollirem un punt de l'atractor $X(2)=(x(1+s), x(2+s), \dots, x(k+s))$ separat s puntuacions de $X(1)$ i calculem la distància D_1' que el separa de $X'(2)=(x'(1+s), x'(2+s), \dots, x'(k+s))$. D'aquesta manera podem calcular com canvia la distància entre els dos punts veïns de l'atractor al llarg de la trajectòria. Aquest càlcul s'ha de fer successivament tantes vegades com punts té l'atractor (veure la figura 1.20 on es representa gràficament aquest procediment per a tres punts). En escollir s s'ha de tenir en compte que aquest sigui suficientment gran perquè hi hagi suficient separació de les trajectòries, però no excessivament perquè es podria donar el cas que l'estimació de l'exponent de Lyapunov fos esbiaixada cap a una menor grandària de la real. El motiu és que, com hem comentat, els atractors estranys es pleguen i repleguen contínuament dins d'una estructura confinada.

Un cop realitzat el procediment anterior per a tots els punts de l'atractor, estem en disposició de calcular el màxim exponent de Lyapunov a partir de la següent expressió,

$$\lambda_L = \frac{1}{T_s} \sum_{i=1}^T \log_2 \frac{|X(k+s) - X^v(k+s)|}{|X(k) - X^v(k)|}$$

on T_s és el nombre de parells on es valoren les desviacions abans esmentades, k fa referència a la puntuació amb el veí proper i $k+s$ fa referència a la puntuació a una distància s en la trajectòria.

Identificació de Sèries Temporals sensibles a les condicions inicials mitjançant predicció no lineal

En un apartat anterior he mostrat el mètode proposat per Sugihara i May (1990) per realitzar prediccions de ST un pas endavant que ens permet estimar la DI si observem la relació entre el nombre de components emprats per a la reconstrucció de l'atractor k i la capacitat de predicció del mètode donada una determinada sèrie observada.

D'altra banda, aquests autors proposen estudiar la relació entre la capacitat de predicció d'aquest mètode i el nombre de passos endavant i que es realitzen, mitjançant la iteració de la regla de predicció que ja hem descrit anteriorment. El mètode proposat es basa en el plantejament dels autors respecte que la predicció d'una ST que presenti SCI serà cada cop menys acurada conforme anem augmentant el nombre d'iteracions que realitzem. Per contra, quan un registre no presenti aquesta sensibilitat la capacitat de predicció romandrà constant encara que augmentem el nombre d'iteracions que realitzem. Per tant, tenim un mètode que ens pot servir per identificar l'existència o no de SCI en una ST observada. Aquest mètode té l'avantatge que no cal emprar més paràmetres que el nombre d'iteracions i la capacitat de predicció, sigui quin sigui el mètode que emprem per realitzar aquestes. Malauradament solament indica si hi ha o no sensibilitat, però no la grandària d'aquesta. Al respecte d'aquesta tècnica val a dir que els autors la presenten com una forma de discriminar entre determinisme i soroll en la ST que s'està analitzant. En aquest sentit es postula que la presència de SCI s'ha d'interpretar com que la sèrie té un mecanisme subjacent determinista i, en canvi, quan no hi aquesta característica la conclusió que extreuen els autors és que el nostre registre és sorollós.

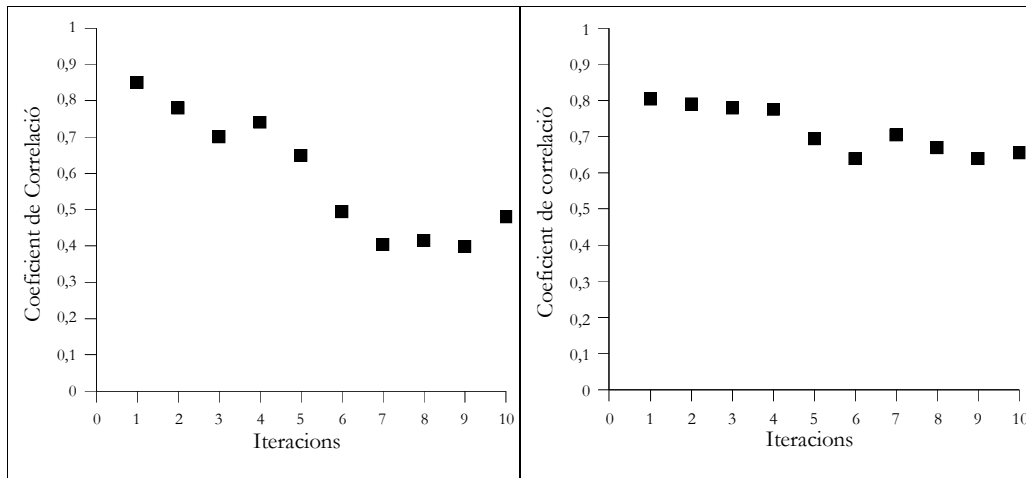


Figura 1.21: Comparació de resultats entre una ST caracteritzada per presència de SCI (esquerra) i una que no té aquesta característica (dreta). La primera correspon al nombre de casos mensuals de xarampió a la ciutat de Nova York entre 1928 i 1972, la segona al nombre de casos mensuals de varicel·la a la ciutat de Nova York en el mateix període (Sugihara i May, 1990).

En la figura 1.21 es mostren dos exemples emprats per Sugihara i May (1990) per il·lustrar l'aplicació d'aquest mètode. Podem identificar les diferències respecte de la SCI comparant el canvi en la predicció en funció del nombre d'iteracions. Quan aquesta disminueix, conforme augmenta el nombre d'iteracions, la ST observada mostra SCI, quan aquesta roman constant no hi ha aquesta dependència.

1.2.5 APORTACIONS I LIMITACIONS DE LES EINES DE LA TEORIA DE SISTEMES DINÀMICS

Des de l'òptica d'aquesta teoria es defineixen tres característiques que podem trobar en el registre d'una variable al llarg del temps: dimensionalitat, dependència a les condicions inicials i no linealitat. A més, tenim a la nostra disposició un seguit d'eines

d'anàlisi que permeten avaluar si aquestes característiques són presents o no en una determinada ST observada. Aquesta afirmació és un resum molt curt del que he intentat mostrar en aquest capítol. El que interessa ara és veure quins avantatges aporta la TSD i, d'altra banda, quines limitacions sorgeixen quan fem les eines de que disposem.

Un dels avantatges a destacar és que ens permet discriminar si una sèrie és determinista o bé aleatòria. Això té una implicació de caire pràctic donat que moltes ST, quan s'estudien mitjançant eines de l'estadística tradicional, tenen una aparença de soroll i, en canvi, la seva evolució respon a un model determinista, no lineal i moltes vegades amb SCI. La possibilitat de discriminar les característiques esmentades ens ha obert una nova finestra en l'observació de la realitat. El que havíem posat al calaix del desconegut, del que semblava soroll, és possible que ens amagui un ordre ocult (Bascompte, 1995).

Ja és important haver pogut obrir una via a aquest conjunt de variables oblidades pel fet d'haver estat classificades com a sorolloses, moltes de les que han estat esmentades al principi del capítol, donat que apareix la possibilitat de trobar diferències respecte de les característiques estudiades en el marc de la TSD en condicions diferents o en grups de subjectes diferents. D'altra banda també poden aportar molta informació en tota aquella recerca que està enfocada a l'estudi de les relacions entre variables, per elles mateixes però també en situacions diferents o per diferències de caire individual entre subjectes o grups. Tot l'anterior no fa més que afegir més possibilitats per a un major desenvolupament de la nostra disciplina, en el sentit que afegim a la riquesa de constructes i variables que han estat objecte d'estudi un seguit de noves possibilitats.

M'agradaria incidir en el que jo considero l'avantatge més important, conseqüència de l'esmentat anteriorment. Les aportacions d'aquesta teoria a la psicologia esdevenen una forma diferent d'exploració de la realitat. Aquesta afirmació es basa en el fet que amplien el ventall de formes de relació entre les variables implicades en un determinat fenomen, donat que trenquen amb la premissa de linealitat. Òbviament hi ha altres aportacions en el nostre àmbit que eviten aquesta premissa. Exemples d'aquest enfocament són la mateixa utilització de les Xarxes

Neuronals Artificials en altres aplicacions de l'anàlisi de dades, com l'anàlisi discriminant o la regressió múltiple, les tècniques de regressió no lineal, l'anàlisi de ST amb models no lineals, aportacions des de la Teoria de les Catàstrofes, des de la Teoria de la Informació o des de la Teoria de la Complexitat, en definitiva, un bon nombre d'exemples que podríem situar sota el paraigua del que genèricament entenem per modelatge no lineal.

D'altra banda, la possibilitat d'estimar la DI, la DF o la SCI implícita en una determinada ST implica conèixer una informació privilegiada oculta en la seva pròpia estructura. Per tant analitzant únicament la variable objecte d'estudi, tenim un seguit d'indicadors que ens permeten saber el nombre de possibles variables implicades en la seva dinàmica i les característiques en quant a l'estructura de l'atractor reconstruït del SD, tant pel que fa a l'existència o no d'autosimilaritat en quant a l'estructura d'aquest com pel que fa a l'existència de dependència a les condicions inicials.

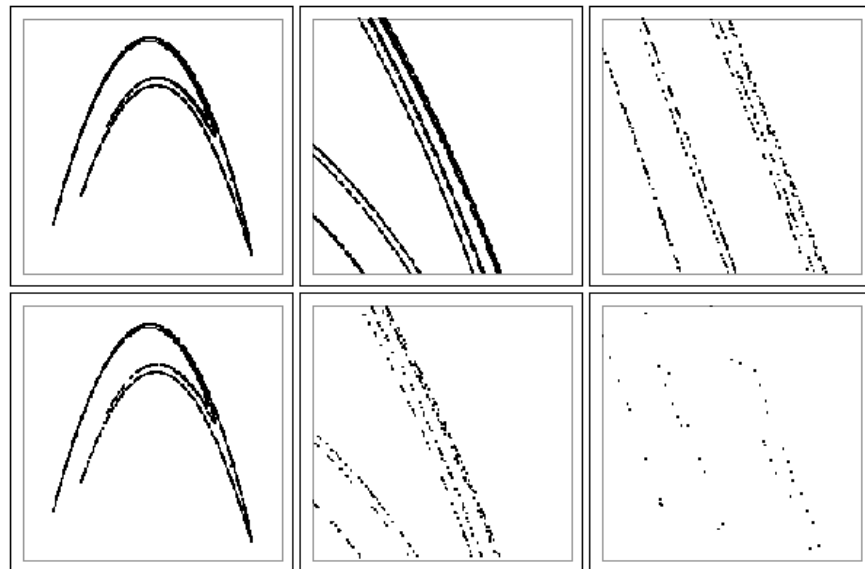


Figura 1.22: En els tres quadres superiors tenim el mapa de Hénon amb diferents nivells de detall (de més a menys) realitzat amb 30.000 punts de l'atractor. Per a l'elaboració dels tres quadres inferiors s'han fet servir 3.000 punts.

Pel que fa a les limitacions d'aquest cos de coneixements començaré per esmentar que els algorismes o les tècniques d'anàlisi que he mostrat al llarg d'aquest capítol tenen l'inconvenient que són molt sensibles a la grandària de la ST, en el sentit que si el conjunt de dades és molt petit les estimacions són esbiaixades (Abarbanel et al., 1993). A la figura 1.22 tenim sis gràfics corresponents al mapa de Hénon que il·lustren el motiu pel qual es dona aquest biaix. Per construir els tres de dalt s'han fet servir 30.000 punts de l'atractor. En canvi per als tres de baix s'han emprat 3.000 punts. A l'esquerra tenim l'atractor sencer, al mig i a la dreta tenim diferents detalls del mapa de Hénon, tal com ja hem vist a la figura 1.12 d'aquest mateix capítol.

Com es pot veure quan es representa l'atractor sencer no es detecten diferències aparents, sigui quin sigui el nombre de punts de l'atractor. En la primera ampliació d'una part de l'atractor ja es comencen a veure algunes diferències. Tal com podem veure al quadre del mig i al del costat dret de la segona fila, aquestes són molt clares quan representem un major grau de detall. Ja he comentat la importància que té l'atractor al llarg de la descripció de les eines per al modelatge dinàmic. Aquest gràfic permet veure que en disminuir el nombre de punts es desdibuixa l'estructura d'aquest, per tant l'element imprescindible per cercar les característiques d'una ST no queda definit tal com seria necessari. Observant com es desdibuixa l'atractor hem de concloure que la pèrdua d'estructura portarà a un biaix positiu pel que fa a l'estimació de la dimensionalitat i a un biaix negatiu pel que fa a l'avaluació de la presència de SCI. Ja he mostrat en els apartats anteriors que des del punt de vista de la TSD la presència de soroll és sinònim d'alta dimensionalitat i d'absència de dependència a les condicions inicials.

Aquest fet normalment no és un problema en determinades disciplines com la física, per la grandària que tenen els senyals que analitzen, però en canvi sí que ho és en psicologia donat que en molts casos no disposem d'un volum de dades que garanteixi bones estimacions. Aquest fet és obvi en determinades variables com en l'anàlisi de la concatenació de valors de temps de reacció en un experiment (Frey, 2006; Cooney i Troyer, 1994) o en registres de qüestionaris auto administrats (Heiby et al., 2003;

Guastello et al., 1999) donat que el nombre de valors acostuma a allunyar-se de la grandària òptima de la ST. Malauradament també trobem aquest desavantatge si les ST a analitzar provenen de registres de variables fisiològiques. En aquest cas podríem pensar que pel nombre de registres que es produeixen en aquesta mena de dades no hi hauria d'haver problemes. Això pot ser cert en d'altres ciències però no succeeix sempre en psicologia, donat que sovint en la nostra disciplina els experiments segmenten el senyal per assaigs o per condicions (Meyer-Lindenberg et al., 1998; Bornas et al., 2006), per tant continuem tenint aquesta limitació.

D'altra banda, hem vist que la TSD ens permet classificar una ST en funció de la dimensionalitat, diferenciant entre sèries deterministes o sorolloses, o en funció de la SCI. És veritat que això és possible en molts casos, especialment si fem alguna de les dades simulades (Hénon, 1976; Lorenz, 1963; Rössler, 1976) que han servit com a banc de proves per validar els resultats que trobem mitjançant els diferents algorismes o mètodes d'estimació. Aquesta premissa s'ha de matisar donat que és vàlida quan les dades reals que estem analitzant estan lliures d'error de mesura. Malauradament en fer un registre d'una ST és molt probable que aquesta en porti d'afegit. Cada cop que realitzen un mesurament sabem que tota puntuació empírica que obtenim conté els dos components que podem veure en la següent expressió,

$$x_t = v_t + e_t$$

on x_t és el registre obtingut, v_t seria el valor de la magnitud que realment estem registrant i e_t és l'error de mesura (Muñiz, 1998). Aquest fet s'ha de tenir molt en compte en el nostre àmbit, on la majoria de registres susceptibles d'esdevenir una ST normalment tenen una important càrrega de soroll (concatenació de valors de temps de reacció, mesures de posició o moviment, etc.). Fins i tot en moltes de les variables fisiològiques que s'han emprat en la nostra disciplina (EEG, magnetoencefalograma, ressonància magnètica, etc.) ens trobem amb aquesta circumstància.

Si en fer el registre d'una ST aquest component e_t és tan gran que té més pes que el component v_t , aleshores les característiques que mesurem quedaran emmascarades per les del component d'error. Quan succeeix això ens podem trobar que les eines d'anàlisi ens estan assenyalant soroll quan, de fet, la variable realment està immersa en un SD de baixa dimensionalitat i amb presència de SCI.

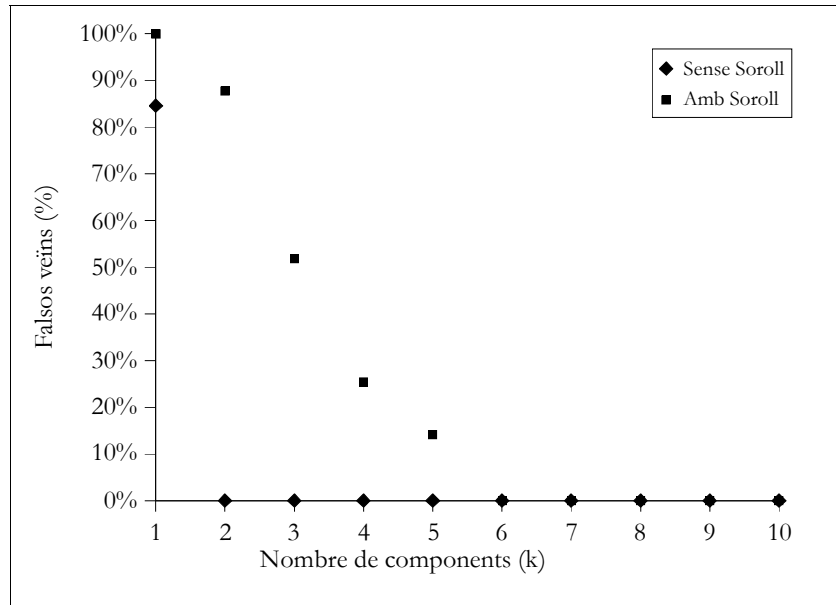


Figura 1.23: Percentatge de Falsos Veïns per a la ST original Hénon i la ST Hénon amb soroll afegit. Es pot veure que el fet d'afegir soroll implica una sobreestimació de la DI. En el primer cas tenim que $DI=2$, com caldria esperar, en canvi en el segon tenim que $DI=6$.

Per aquest motiu hi ha tot un ventall de sèries, quan s'empren dades reals, on és difícil decidir com classificar-les. Són tot un seguit de casos en els que no sabem ben bé si la ST és sorollosa o bé si aquesta és determinística però hi ha una quantitat de soroll afegit degut a deficiències en el registre de les dades (Abarbanel et al., 1993). El mateix pot succeir amb la dependència a les condicions inicials, pot ser que el soroll provoqui que l'avaluació d'un registre on trobaríem SCI mostri que hi ha absència d'aquesta característica. Per posar un exemple, a la figura 1.23 es pot veure l'estimació de la DI

mitjançant el mètode del tant per cent de falsos veïns per a la sèrie x del mapa de Hénon, l'original i la ST amb soroll afegit, posant-se de manifest que quan hi ha soroll afegit l'estimació té un biaix positiu. Tenim que la $DI=2$ per a la ST original, com caldria esperar, en canvi la $DI=6$ quan hi afegim soroll¹. Pel que fa a la SCI, un estudi recent mostra que en afegir soroll a la ST l'exponent de Lyapunov disminueix, produint un biaix en l'avaluació d'aquesta característica de la ST original (Serletis, Shahmoradi i Serletis, 2007).

Un altre problema que trobem en fer servir aquestes eines és que els paràmetres que es requereixen tenen un component subjectiu. Dos exemples d'això els hem vist al llarg d'aquest capítol. Quan he descrit el mètode d'estimació de la DI mitjançant el mètode del tant per cent de falsos veïns necessitàvem un criteri per tal de saber quan una distància entre punts de l'atractor implica veïnatge i quan no. Hem vist que es defineixen dos paràmetres però tampoc no es dona un criteri clar per a la seva utilització. D'altra banda, pel que fa al mètode de Wolf per a l'estimació de la SCI, també hem vist que hi ha un paràmetre subjectiu, la distància entre el punt on s'escull un veí proper a la trajectòria observada i el punt on es valora quina quantitat s'ha separat aquesta, que si queda fixat malament pot portar a un estimació esbiaixada de l'exponent de Lyapunov.

Finalment hi ha un darrer inconvenient, lligat a totes les eines d'estimació que he mostrat en aquest capítol, que és la poca objectivitat del criteri que tenim per decidir-nos per cada un dels costats dels eixos que defineix la TSD. En cadascun d'ells, moltes vegades es pren la decisió en funció de la forma d'un determinat gràfic, sense disposar d'un criteri de significació. El millor exemple per il·lustrar aquesta mancança és a la figura 1.19 d'aquest mateix capítol. S'hi mostrava la variació de la correlació entre estimat i real en funció del nombre de components de l'atractor reconstruït. La diferència entre la correlació per a k igual quatre i per a k igual cinc és mínima. Per tant, el criteri per decidir quin és el valor de la DI requeriria una eina estadística que ens

¹ He afegit a la sèrie original soroll blanc distribuït uniformement en l'interval $[-L, L]$. Aquests valors extrems representen la grandària relativa del soroll respecte del senyal original (Kennel et al., 1992) i venen determinats per l'expressió $L/D_A = 0,5$ on ja sabem que D_A és la grandària nominal de l'atractor reconstruït.

permetés prendre decisions més acurades. La mateixa objecció es pot fer quan intentem esbrinar si hi ha SCI en funció del que veiem en els gràfics de la figura 1.21. Ja sabem que el criteri per decidir si aquesta dependència existeix o no és que disminueixi la capacitat de predicció en funció del nombre d'iteracions. No queda clar com en el gràfic de l'esquerra s'afirma que hi ha diferències en les correlacions per a cada iteració, mentre que en l'altre gràfic es diu que aquestes no existeixen.

Un cop vistos els avantatges i inconvenients de les tècniques d'anàlisi de la TSD voldria fer una reflexió al voltant de la seva aplicabilitat a la psicologia. A la vista de l'esmentat fins ara al voltant dels inconvenients, m'atreviria a afirmar que la utilització d'aquestes tècniques en el nostre àmbit, tot i ser molt prometedora, implicarà no poques dificultats. Aquesta afirmació es justifica per tres motius. En les nostres investigacions normalment les ST acostumen a ser relativament curtes, si ho comparem amb les que trobem en altres contextes com poden ser la física, l'enginyeria, la medicina o la biologia, per posar alguns exemples. En segon lloc ens trobem amb que, com ja he comentat, els registres de moltes variables del nostre àmbit tenen una càrrega important d'aquest component de soroll present en tota mesura (Muñiz, 1998). D'altra banda no hem d'oblidar la naturalesa "multifactorial" de tota realitat psicològica, tant si ens fixem en el fenomen més micro com si investiguem el fenomen més macro de tots els que estudia la nostra disciplina. En aquest sentit hem d'esperar, si més no pel que fa a l'estimació de la dimensionalitat d'una ST, que l'estudi d'una determinada variable al llarg del temps sempre implicarà trobar resultats majors, respecte d'aquesta característica, que els que trobaríem en molts dels registres d'altres disciplines.

M'agradaria afegir que aquest punt de vista en l'anàlisi de ST no aportarà res per si sol. S'ha de produir una revisió acurada de les implicacions teòriques que té el fet que es trobin o no presents la o les característiques que he exposat al llarg d'aquest capítol. En aquest sentit, a partir de l'aparició de l'interès per les tècniques de la TSD en psicologia, correm el risc d'abusar de les eines d'anàlisi sense que hi hagi una revisió prèvia de les implicacions teòriques i/o metodològiques dels resultats sorgits amb la seva utilització.

Finalment, voldria fer esment que una bona forma per determinar si una ST del nostre àmbit pot ser emprada dins d'aquest enfocament seria fixar-nos en el tipus d'escala de mesura. He mostrat que l'element clau en el que es basen les eines d'anàlisi de la TSD és l'atractor reconstruït a partir d'una ST observada. En concret interessa valorar determinades característiques geomètriques dels diferents atractors reconstruïts, ja sigui mitjançant algorismes analítics o a partir d'estratègies basades en la predicció no lineal. Donada la importància que té l'anàlisi de les distàncies entre els diferents punts de l'atractor, de forma explícita quan s'empren molts dels algorismes de la TSD o de forma implícita quan es realitza la predicció de la ST mitjançant l'entrenament de Xarxes Neuronals Artificials o altres tècniques de predicció no lineal, es restringeix l'escala de mesura a la d'interval o a la de raó. De fet hi ha alguns estudis, entre els ja esmentats en aquesta tesi, on s'utilitzen tècniques d'anàlisi de la TSD sense una desitjable reflexió prèvia al respecte d'aquesta qüestió (Guastello et al., 1999; Heiby et al., 2003).

1.2.6 OBJECTIUS ESPECÍFICS D'AQUEST TREBALL D'INVESTIGACIÓ

A resultes d'haver conegut les mancances que he esmentat vaig decidir engegar aquest treball d'investigació. El mètode que he desenvolupat pretén superar aquests inconvenients i assolir els mateixos resultats que trobem emprant altres eines en ST simulades, donat que així podem conèixer els resultats esperats prèviament. Aquest es basa en la utilització de predicció no lineal per a l'estimació de la DI i de la dependència a les condicions inicials, seguint l'esquema general del mètode que van proposar Sugihara i May (1990). Pel que fa a l'eina de predicció, però, hi ha una modificació substancial respecte de la que proposen aquests autors; per tal de realitzar les prediccions utilitzaré Xarxes Neuronals Artificials. Ja s'ha demostrat en treballs anteriors que la seva utilització pot ser igualment útil per a la distinció entre soroll i caos (Elsner, 1992) o per a la determinació de la DI (Rifà i Viader, 2000). Per tant el fet d'emprar-les com a estratègia per a l'anàlisi de ST mitjançant predicció no lineal pot

donar resultats força prometedors. Hi ha dos motius pels quals la utilització de Xarxes Neuronals Artificials és pertinent. En primer lloc, com veureu més endavant, perquè hi ha un gran nombre d'aplicacions on la seva utilització en predicció de ST ha donat molt bons resultats. La segona motivació l'exposaré més endavant en explicitar el primer objectiu específic però té relació amb el fet que la seva utilització permetrà adoptar un criteri de significació estadístic.

Aquesta eina de predicció de ST ha estat emprada en un gran nombre d'àmbits, tant aplicats com de recerca bàsica. Per posar uns exemples podem trobar que les xarxes s'han utilitzat per a la predicció de demanda d'energia elèctrica, en la predicció de cabals de rius, en finances, en medicina, en predicció dels índexs de pol·lució i en predicció de dades caòtiques, per posar alguns exemples (Zhang, Patuwo i Hu, 1998). En totes aquestes aplicacions, s'ha arribat a resultats que minimitzen molt l'error respecte d'altres formes de predicció. Hi ha un seguit de motius que explicarien aquesta millora (Zhang et al., 1998):

- Són models auto-adaptatius que no necessiten haver prefixat paràmetres sempre que es disposi d'un nombre suficient de valors d'una ST.
- Permeten fer generalitzacions a nous exemples després d'una fase d'aprenentatge de dades prèvies.
- Alguns autors les consideren aproximadors universals de funcions.
- Són no lineals o, més ben dit, de l'anterior característica ja es desprèn que no tenen cap limitació sigui quina sigui la naturalesa de les dades a estudiar.

En el proper capítol hi ha una explicació més detallada de l'estructura i funcionament de les Xarxes Neuronals Artificials, de la derivació del mètode d'aprenentatge i d'algunes consideracions respecte de com s'han d'utilitzar.

Com ja he esmentat al principi d'aquest capítol, *l'Objectiu General d'aquesta Tesi és el d'avaluar si la predicció de ST mitjançant Xarxes Neuronals Artificials permet l'anàlisi d'un seguit de Sèries Temporals simulades respecte de la Dimensionalitat i la Sensibilitat a les Condicions*

Inicials, definides anteriorment. Per aconseguir-ho he definit un seguit d'*objectius específics*, els quals concreto a continuació.

En mostrar el mètode de Sugihara i May (1990) ja hem pogut observar que en aquest cas no ens trobem amb la necessitat de prefixar uns paràmetres com es requeria amb altres eines d'anàlisi. Per tant ja sabem que aquests autors han assolit una millora, al meu entendre, respecte d'altres tècniques. De totes formes continuo apreciament una mancança que cal superar. Ja he esmentat que no es defineix una estratègia per tal de trobar diferències significatives en la precisió de la predicció entre diferent nombre de components de l'atractor reconstruït, per tal que es pugui estimar la DI de la ST que estem estudiant, o bé diferències significatives en la precisió de la predicció entre diferent nombre d'iteracions, per tal de concloure o no que hi ha SCI. Les Xarxes Neuronals Artificials ens permeten fer tantes simulacions com faci falta amb un mateix conjunt de patrons d'aprenentatge, arribant a resultats igualment vàlids però amb lleugeres diferències. Ho veurem més endavant de forma més detallada però, de moment, ja avanço que la regla d'aprenentatge que utilitzaré es basa en la minimització successiva de l'error en funció de determinades modificacions en les connexions entre unitats de la xarxa. Cada cop que comença un entrenament s'inicialitza el valor dels pesos d'aquestes connexions de forma aleatòria. Quines implicacions té això? Per a cadascuna de les característiques que ens interessa valorar tenim una quantitat de variabilitat que ens permet prendre decisions amb un criteri de significació estadística. *És en aquest sentit que m'he proposat, com a primer objectiu específic, fer estimacions de la Dimensió de Immersió i avaluar la presència o absència de Sensibilitat a les Condicions Inicials en Sèries Temporals simulades derivades de la Teoria de Sistemes Dinàmics, utilitzant una estratègia de presa de decisions contrastada de forma estadística.* Les dades emprades són la ST x del mapa d'Hénon, que ja coneixem, i la ST x de l'atractor de Rössler (1976), del que parlaré més extensament en el capítol 3.

Ja he esmentat el problema que se'ns pot plantejar quan fem les nostres anàlisis i els resultats queden emmascarats perquè una ST es caracteritza per baixa dimensionalitat i/o SCI però el seu registre és poc precís i, per tant, té un component

de soroll. Per tal d'avaluar el mètode que proposo utilitzaré dades sense soroll i amb dos nivells de soroll diferents. Conseqüentment, *pel que fa al segon dels objectius que m'he plantejat, vull avaluar si el mètode que proposo es veu igualment afectat per la presència de soroll en el registre. Per aquest motiu vull buscar les característiques de dimensionalitat i Sensibilitat a les Condicions Inicials en les mateixes dades esmentades sense soroll i afegint-hi dos nivells de soroll diferents.* A l'inici del capítol 3, que estarà dedicat al mètode i resultats, exposaré les hipòtesis que he plantejat en aquest treball d'investigació. La seva contrastació m'ha de permetre assolir els objectius específics esmentats en aquest apartat.

2 INTRODUCCIÓ A LES XARXES NEURONALS ARTIFICIALS

En aquest capítol es descriu el funcionament de les Xarxes Neuronals Artificials Propagades cap Endavant (XNA) i la derivació de la regla d'aprenentatge que empraré en la part experimental d'aquesta Tesi. Aquestes explicacions seran de caire genèric per a qualsevol aplicació en que s'utilitzi l'aprenentatge supervisat. Posteriorment mostraré els paràmetres que cal tenir en compte quan s'empren aquesta mena de xarxes. Al final del capítol hi haurà un apartat dedicat a la utilització de les XNA per al cas concret de la predicció de ST.

Una bona definició del que entenem per una XNA apareix en el llibre introductori de Haykin (1994). Aquest esmenta la següent definició d'Aleksander i Morton (1990),

A neural network is a massively parallel distributed processor that has a natural propensity for storing experiential knowledge and making it available for use. It resembles the brain in two respects:

. Knowledge is acquired by the network through a learning process.

. Interneuron connection strength known as synaptic weights are used to store the knowledge. (p. 2)

Podem trobar tot un seguit d'arquitectures diferents, és a dir formes d'organització i connexió entre les esmentades unitats, i un seguit d'algorismes d'aprenentatge diferents entre els quals podem escollir el que més ens interressi en funció de la tasca que volem modelar. En el nostre cas ens interessarà fer associacions entre patrons i, per tant, utilitzarem les esmentades xarxes. D'altra banda, utilitzarem un algorisme d'aprenentatge que permet minimitzar l'error d'execució de la xarxa a mesura que anem realitzant l'entrenament fins que la tasca és realitzada correctament. D'aquesta manera podem “mostrar” a la XNA un seguit de parells relacionats, en aquest treball d'investigació seran

punts consecutius de diferents atractors reconstruïts, i mitjançant la regla d'aprenentatge emprada aconseguir associar correctament els diferents punts de l'atractor agafats dos a dos.

2.1 XARXES NEURONALS ARTIFICIALS PROPAGADES CAP ENDAVANT

Aquesta mena de xarxes estan formades per dos o més capes amb un seguit d'interconnexions entre les unitats de les diferents capes. Totes aquestes xarxes tenen una capa d'unitats d'entrada, una capa d'unitats de sortida, i una o més capes d'unitats amagades entre la capa d'entrada i la capa de sortida per tal que la tasca d'associar patrons es realitzi correctament.

De forma molt simplificada, el seu funcionament és el següent. Les unitats de la capa d'entrada recullen cada un dels valors del patró que coneixem i propaguen aquestes activacions cap a les unitats de la capa amagada o capes amagades. Seguidament, cada una d'aquestes unitats propaga l'activació rebuda a les unitats d'una altra capa amagada o de la capa de sortida. Fent el supòsit que la xarxa neuronal artificial ja realitza correctament la tasca d'associar patrons, hem d'esperar que el patró d'activació de les unitats de la capa de sortida és el que està associat amb el que les unitats d'entrada han recollit al principi del procés.

Òbviament, l'anterior descripció no permet comprendre ni el funcionament d'aquesta mena de xarxes ni el procés d'aprenentatge que s'ha de seguir per tal d'arribar a realitzar la tasca que ens interessa. Per tal que això sigui possible primer mostraré d'una forma el més il·lustrativa possible que una XNA es considera que gairebé és un aproximador universal de funcions. Per fer-ho empraré l'exemple d'un perceptró simple, és a dir una xarxa amb capa d'unitats d'entrada i capa d'unitats de sortida. Podrem veure que té una mancança que fa que el ventall de problemes als que pot donar solució sigui limitat. En principi la superació d'aquestes mancances, sumada a la possibilitat de trobar una regla d'aprenentatge, fa que es consideri que una XNA gairebé pot resoldre qualsevol problema amb solució (Rumelhart, Hinton i Williams, 1986).

2.1.1 PROBLEMES RESOLUBLES PER UNA XARXA NEURONAL ARTIFICIAL PROPAGADA CAP ENDAVANT

Per esbrinar quina mena de problemes pot resoldre una XNA agafarem un exemple en el que es pretén resoldre una funció lògica. He escollit la funció I que queda especificada en la següent taula de veritat,

Enunciat 1	Enunciat 2	Conclusió
CERT	CERT	CERT
CERT	FALS	FALS
FALS	CERT	FALS
FALS	FALS	FALS.

L'arquitectura que emprarem perquè la xarxa pugui processar aquesta taula de veritat és un perceptró simple o de capa única (Haykin, 1994; Hertz, Krogh i Palmer, 1991) amb dues unitats d'entrada i una unitat de sortida. Podeu veure l'esmentada xarxa a la figura 2.1.

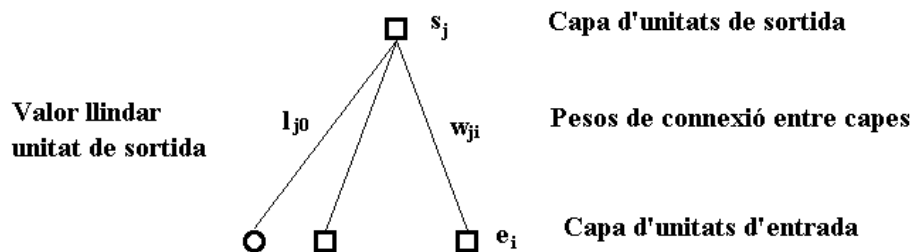


Figura 2.1: Representació gràfica d'un perceptró simple. s_j representa l'activació de la unitat j de la capa de sortida, e_i representa l'activació de les i unitats de la capa d'entrada, w_{ji} (de l'anglès *weight*) representa el valor dels pesos de connexió entre les i unitats de la capa d'entrada i la unitat j de la capa de sortida, i I_{j0} representa el valor llindar que s'ha d'entendre com un pes més de connexió entre una unitat fictícia que sempre té activació igual a -1 i una unitat j de la capa de sortida.

Per tal que la xarxa aprengui la funció I, l'anterior taula de veritat s'ha de codificar de la següent manera,

e_1	e_2	s_1
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1.

La informació es propaga al llarg de la xarxa seguint la regla següent,

$$s_j = f \sum_1^i w_{ji} e_i - l_{j0} = f \sum_0^i w_{ji} e_i \text{ per a } e_0 = -1$$

on f és l'anomenada *funció d'activació* que pot ser lineal o no lineal, s_j és l'activació de la unitat j de la capa de sortida, e_i és l'activació de la unitat i de la capa d'entrada, w_{ji} (de l'anglès *weight*) és el pes de connexió entre la unitat d'entrada i i la unitat de sortida j , i l_{j0} el valor llindar de la unitat de sortida j que es pot entendre com un pes de connexió entre una unitat e_0 fictícia de la capa d'entrada amb activació -1 i la unitat de sortida j , d'aquí l'equivalència d'ambdues expressions de l'anterior igualtat.

Direm que la xarxa ha arribat a la solució correcta quan trobem els pesos adequats per tal que l'activació de les unitats de sortida sigui igual al valor esperat, és a dir, quan

$$s_{pj} = t_{pj}$$

on s és l'activació de la unitat de sortida j per al patró p i t (de l'anglès *target*) equival al valor esperat per la unitat j de la capa de sortida i el patró p . En l'exemple que tenim entre mans, la xarxa arriba a la solució del problema quan associa correctament, per cada un dels patrons que tenim, els enunciats 1 i 2 amb la conclusió adequada.

No tots els problemes es poden resoldre mitjançant un perceptró simple. La condició perquè això sigui possible és que el problema sigui linealment separable. Un problema és linealment separable quan podem trobar un pla que separi els patrons amb valor $+1$ dels patrons amb valor -1 (Hertz et al., 1991). A la següent figura es pot veure gràficament aquest concepte. Com que es poden separar els patrons que tenen com a valor $+1$ dels que tenen com a valor -1 podem afirmar que el problema de la regla I es pot resoldre mitjançant un perceptró simple, dit d'una altra forma aquest problema és linealment separable.

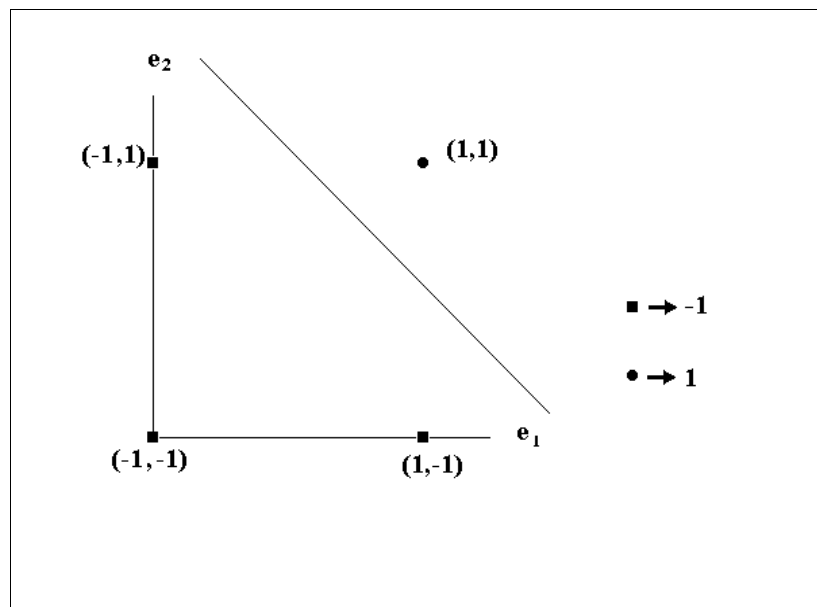


Figura 2.2: Representació de la regla I en l'espai de dues dimensions, que és el necessari per representar les activacions de dues unitats d'entrada d'un perceptró simple.

Hem agafat un exemple en que un perceptró simple pot trobar la solució al problema proposat. Ara utilitzarem una altra funció lògica en la que, com demostrarem més endavant, el perceptró simple no pot trobar una solució al problema. L'esmentada regla és la O-EXCLUSIVA que s'expressa segons la següent taula de veritat

Enunciat 1	Enunciat 2	Conclusió
CERT	CERT	FALS
CERT	FALS	CERT
FALS	CERT	CERT
FALS	FALS	FALS,

que podem codificar de la mateixa forma que he fet amb la regla I

e_1	e_2	s_1
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1.

A la figura 2.3 es representa gràficament la funció O-EXCLUSIVA. A diferència del que passava amb la regla I en aquest cas no podem trobar una única recta que separi els patrons amb valor $+1$ dels que tenen valor -1 . Per tant hem de concloure que mitjançant un perceptró simple no es pot resoldre la funció O-EXCLUSIVA (Hertz et al., 1991).

Ambdues figures són un exemple gràfic del que mostren Minsky i Papert (Hertz et al., 1991), el fet que un perceptró simple solament pot aprendre una funció sempre que es puguin separar, mitjançant una recta en aquest cas de dues dimensions, els punts esperats amb valor $+1$ i els punts esperats amb valor -1 .

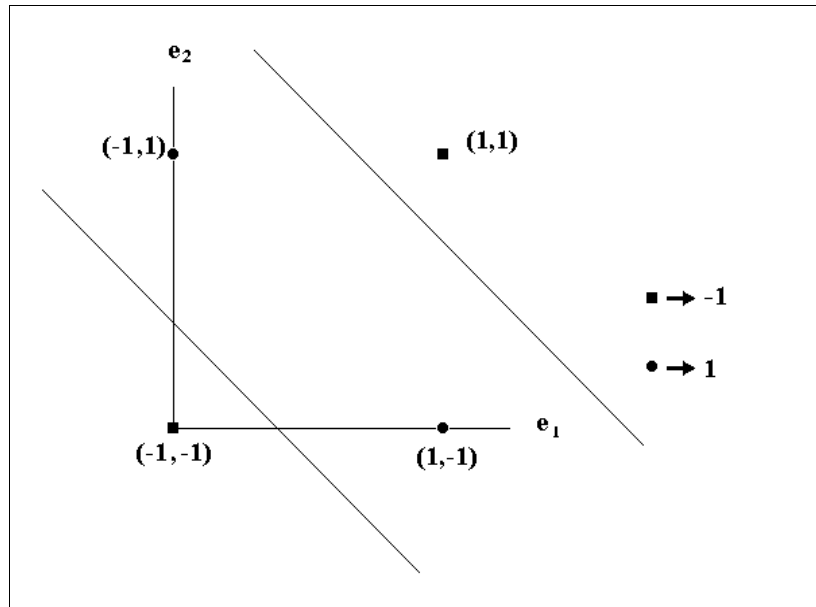


Figura 2.3: Representació de la regla O-EXCLUSIVA en l'espai de dues dimensions, que és el necessari per representar les activacions de dues unitats d'entrada d'un perceptró simple.

Aquestes dues funcions lògiques són dos exemples que mostren la premissa que un perceptró simple podrà trobar la solució a un problema sempre i quan aquest sigui linealment separable. Per tal que un problema no linealment separable pugui ser solucionat per un perceptró, aquest haurà de tenir com a mínim una capa d'unitats amagada entre la capa d'entrades i la de sortides. Aquesta nova capa tindrà la funció de representar la informació sempre i quan es trobi la configuració de pesos que ho permeti (Rumelhart et al., 1986).

Mitjançant els exemples anteriors hem vist que hi ha determinades arquitectures que no poden resoldre problemes no linealment separables. Concretament hem vist que es pot arribar a la solució en el cas de la regla I o bé a identificar que no es pot solucionar el problema en el cas de la regla O-EXCLUSIVA. En el següent apartat mostraré l'algorisme d'aprenentatge per tal que una XNA pugui arribar, mitjançant un mètode iteratiu, a la

solució correcta quan es planteja un problema, és a dir, a la configuració de pesos entre les diferents capes que permeti aquest objectiu.

2.1.2 DE LA REGLA DELTA A LA REGLA DELTA GENERALITZADA

2.1.2.1 LA REGLA DELTA

La *regla delta* (Rumelhart et al., 1986) permet trobar, de forma iterativa, el conjunt de pesos tal que minimitza el quadrat de les diferències entre els valors inicials i els valors esperats per a totes les unitats de sortida i per a tots els patrons que ens interessa associar. Per tal de derivar-la utilitzarem un perceptró simple amb unitats lineals.

El primer que hem de tenir en compte és el fet que

$$\Delta_p w_{ji} \propto -\frac{\delta E_p}{\delta w_{ji}}$$

és a dir que la modificació en els pesos de la XNA és proporcional a la derivada de l'error respecte als pesos canviada de signe. En aquesta expressió l'error es computa de la següent manera

$$E_p = \frac{1}{2} (t_{pj} - \sum_0^i w_{ji} e_{pi})^2 = \frac{1}{2} (t_{pj} - s_{pj})^2$$

per cada un dels patrons p i una unitat de sortida j .

D'altra banda cal trobar la derivada que permetrà fer el canvi en els pesos per tal que aquest error disminueixi. Si desenvolupem la següent expressió

$$\Delta_p w_{ji} = -\eta \frac{\delta E_p}{\delta w_{ji}},$$

on η és una constant, donada la relació esmentada anteriorment entre el canvi a realitzar en els pesos i la derivada de l'error respecte als pesos, que ens servirà per controlar l'aprenentatge, arribem a

$$\Delta_p w_{ji} = -\eta \frac{\delta}{\delta w_{ji}} \frac{1}{2} (t_{pj} - \sum_0^i w_{ji} e_{pi})^2.$$

Aplicant la regla de la cadena podem trobar la solució a l'anterior derivada que s'expressa de la següent manera,

$$\Delta_p w_{ji} = \eta (t_{pj} - \sum_0^i w_{ji} e_{pi}) e_{pi}$$

Podem expressar l'anterior expressió com

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \delta_{pj} e_{pi} \text{ on } \delta_{pj} = (t_{pj} - \sum_0^i w_{ji} e_{pi}) = (t_{pj} - s_{pj}).$$

Aquesta forma d'expressar el canvi que hem d'aplicar als pesos w_{ji} per tal d'arribar a minimitzar l'error és el que dona nom a la *regla delta* donat que, tal com podem veure a partir de l'expressió, la quantitat d'aprenentatge que permet és proporcional a la diferència $\delta_{pj} = (t_{pj} - s_{pj})$ entre el valor d'activació actual de la unitat s_j i el valor esperat t_j per al patró p (Rumelhart et al., 1986; Hertz et al., 1991; Haykin, 1994).

D'altra banda, abans de mostrar la regla delta generalitzada a xarxes amb una o més d'una capes amagades mostraré la derivació de l'anterior regla afegint una funció d'activació no lineal. El fet d'emprar aquesta mena de funcions afegeix més potencialitats a les XNA, donat que d'aquesta manera es pot implementar qualsevol problema siguin

quines siguin les relacions implicades. Mostraré aquest desenvolupament amb la funció *logística* que és la que empraré més endavant en les simulacions. L'esmentada funció es defineix mitjançant la següent expressió,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Si fem unitats amb funció no lineal haurem de computar l'error mitjançant,

$$E_p = \frac{1}{2} (t_{pj} - f(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}))^2 = \frac{1}{2} (t_{pj} - s_{pj})^2$$

on f és qualsevol funció no lineal diferenciable en tot el seu domini. Per tant tindrem que

$$\Delta_p w_{ji} = -\eta \frac{\delta E_p}{\delta w_{ji}}$$

$$\Delta_p w_{ji} = -\eta \frac{\delta}{\delta w_{ji}} \frac{1}{2} (t_{pj} - f(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}))^2$$

$$\Delta_p w_{ji} = \eta (t_{pj} - f(\sum_0^i w_{ji} e_{pi})) f'(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}) e_{pi}$$

que també podem expressar de la següent manera

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \delta_{pj} e_{pi} \text{ on } \delta_{pj} = (t_{pj} - f(\sum_0^i w_{ji} e_{pi})) f'(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}) = (t_{pj} - s_{pj}) f'(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}).$$

2.1.2.2 LA REGLA DELTA GENERALITZADA

Aquesta regla permet, com el seu nom indica, generalitzar la que hem especificat anteriorment a arquitectures de xarxa amb una o més capes d'unitats amagades. Per tal de desenvolupar aquesta regla prendrem com exemple una xarxa amb capa d'entrada, una capa amagada, capa de sortida i funció d'activació no lineal. En la figura 2.4 podem veure un exemple de l'esmentada xarxa.

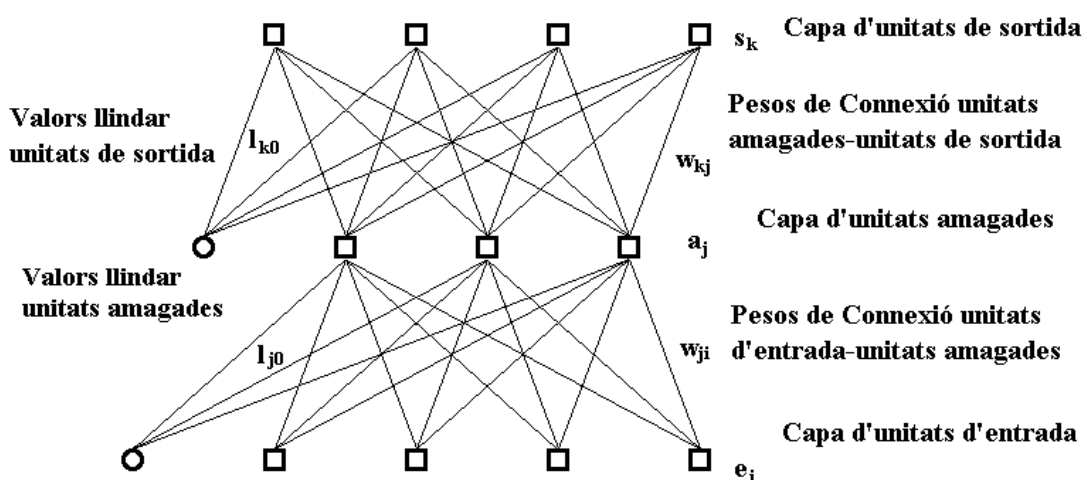


Figura 2.4: Representació gràfica d'una xarxa neuronal artificial amb una capa amagada. s_k representa l'activació de les k unitats de la capa de sortida, a_j representa l'activació de les j unitats de la capa amagada i e_i representa l'activació de les i unitats de la capa d'entrada, w_{ji} i w_{kj} representen els valors dels pesos de connexió entre les unitats de la capa d'entrada i les unitats de la capa amagada i els valors dels pesos de connexió entre les unitats de la capa amagada i les unitats de la capa de sortida, respectivament. l_{j0} i l_{k0} representen els valors líndars de les unitats amagades i les unitats de sortida, respectivament.

La generalització de la regla delta dóna el grau de canvi que han de tenir els pesos per a una XNA.

La unitat amagada rebrà la propagació $prop_{pj}$ expressada a continuació

$$prop_{pj} = \sum_0^i w_{ji} e_{pi}$$

i tindrà una activació de

$$a_{pj} = f\left(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}\right)$$

D'altra banda, la unitat de sortida rebrà la propagació $prop_{pk}$ expressada a continuació

$$prop_{pk} = \sum_0^j w_{kj} a_{pj} = \sum_0^j \left(w_{kj} f\left(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}\right) \right)$$

i, per tant, la sortida resultant serà

$$s_{pk} = f\left(\sum_0^j w_{kj} f\left(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}\right)\right)$$

La mesura de l'error vindrà donada per la següent expressió

$$E_p = \frac{1}{2}(t_{pk} - s_{pk})^2 = \frac{1}{2}\left(t_{pk} - f\left(\sum_0^j w_{kj} f\left(\sum_0^i w_{ji} e_{pi}\right)\right)\right)^2$$

Aquesta expressió relaciona la quantitat d'error que hi ha en les unitats de sortida respecte als pesos. Seguint amb el nostre exemple, per als pesos de connexió entre la capa de sortida i la capa amagada, la disminució del gradient vindrà definida per

$$\Delta_p w_{kj} = -\eta \frac{\delta E_p}{\delta w_{kj}} = -\eta \frac{\delta \frac{1}{2} (t_{pk} - f(\sum_0^j w_{kj} a_{pj}))^2}{\delta w_{kj}}$$

$$\Delta_p w_{kj} = \eta (t_{pk} - f(\sum_0^j w_{kj} a_{pj})) f'(\sum_0^j w_{kj} a_{pj}) a_{pj}$$

$$\Delta_p w_{kj} = \eta (t_{pk} - s_{pk}) f'(prop_{pk}) a_{pj}$$

$$\Delta_p w_{kj} = \eta \delta_{pk} a_{pj}$$

on

$$\delta_{pk} = (t_{pk} - s_{pk}) f'(prop_{pk})$$

Per calcular el canvi que s'ha de produir en els pesos de connexió entre la capa d'entrada i la capa amagada, s'ha de calcular la derivada de l'error respecte a w_{ji} , els quals estan més profundament incrustats en l'expressió E_p . Per tal de fer la derivada haurem d'aplicar la regla de la cadena i, aleshores, el seu resultat surt directament.

$$\Delta_p w_{ji} = -\eta \frac{\delta E_p}{\delta w_{ji}} = -\eta \frac{\delta \left(\frac{1}{2} (t_{pk} - f(\sum_0^j w_{kj} f(\sum_0^i w_{ji} e_{pi})))^2 \right)}{\delta w_{ji}}$$

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \sum_0^k (t_{pk} - s_{pk}) f'(prop_{pk}) w_{kj} f'(prop_{pj}) e_{pi}$$

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \sum_0^k \delta_{pk} w_{kj} f'(prop_{pj}) e_{pi}$$

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \delta_{pj} e_{pi}$$

on

$$\delta_{pj} = f'(prop_{pj}) \sum_0^k \delta_{pk} w_{kj}$$

El resultat que hem trobat mitjançant aquest exemple és per a una xarxa amb una sola capa amagada. Es pot generalitzar als casos en que tinguem més capes amagades si anem aplicant la regla de la cadena tantes vegades com faci falta. Hem pogut trobar una forma de corregir els pesos en qualsevol capa d'una xarxa neuronal artificial, sigui quin sigui el nombre de capes amagades que tingui.

Un cop ja coneixem com minimitzar l'error en funció de la modificació de pesos, a continuació us faig la descripció de l'algorisme que guia el procés d'aprenentatge.

2.1.3 L'ALGORISME DE RETROPROPAGACIÓ DE L'ERROR

Aquest algorisme permet aplicar la regla delta per tal d'entrenar una xarxa que ha d'implementar una determinada funció. En general podem considerar que té dues fases. La primera implica la propagació d'un patró d'entrada donant com a resultat un seguit de valors a la capa de sortida. S'ha de computar l'error respecte del valor correcte esperat i propagar-lo per tal de corregir els patrons de pesos entre les diferents capes de la XNA. Aquesta segona fase és la que li dóna al nom a l'algorisme. El fet que sigui un algorisme que implementa una regla d'aprenentatge supervisat el fa idoni per a la tasca d'associar patrons. Aquest és el motiu d'haver-lo escollit per tal d'assolir associacions entre parells de punts d'un atractor. L'algorisme segueix els següents passos:

- 1) Inicialització de tots els pesos de la xarxa aleatòriament dins d'un rang proper a zero.
- 2) Presentació d'un patró d'entrada d'un conjunt de correspondències entre entrades i sortides.
- 3) Propagació de les activacions endavant fins a poder calcular l'activació en les unitats amagades, tantes vegades com faci falta.

$$a_j = f \sum_1^i w_{ji} e_i - l_{j0} = f \sum_0^i w_{ji} e_i$$

- 4) Es propaga l'activació endavant fins a poder calcular l'activació en les unitats de sortida.

$$s_k = f \sum_1^j w_{kj} a_j - l_{k0} = f \sum_0^j w_{kj} a_j$$

5) Es calculen els valors δ per a la capa de sortida comparant l'activació de les unitats de sortida que dóna la xarxa amb els esperats segons el conjunt de patrons.

$$\delta_{pk} = (t_{pk} - s_{pk}) f' \left(\sum_0^j w_{kj} a_{pj} \right)$$

6) Es calculen els valors δ per a la capa amagada per retropropagació de l'error.

$$\delta_{pj} = f' (prop_{pj}) \sum_0^k \delta_{pk} w_{kj}$$

7) El pas anterior es fa tantes vegades com capes amagades tinguem.

8) Càlcul de l'increment que hem d'aplicar a cada un dels pesos de la xarxa mitjançant la següent expressió,

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \delta_{pj} e_{pi}$$

en els pesos entre la capa d'entrada i la capa amagada, i

$$\Delta_p w_{kj} = \eta \delta_{pk} a_{pj}$$

en els pesos entre la capa amagada i la capa de sortida.

9) Realitzar el canvi en cadascun dels pesos mitjançant la següent expressió

$$w_{ji} (nous) = w_{ji} (vells) + \Delta w_{ji}$$

$$w_{kj} (nous) = w_{kj} (vells) + \Delta w_{kj}$$

10) Tornar al pas número 2 i repetir el mateix per a cada patró fins que han passat tots els patrons. El conjunt sencer de patrons es propagarà successivament fins que la tasca queda apresada, sempre i quan sigui possible.

En principi hem d'esperar que un cop seguits els passos anteriors la tasca ja queda apresada. De vegades, però, pot passar que la tasca no resulta apresada per un mal disseny de la xarxa, per determinats paràmetres d'entrenament que no s'han manipulat correctament, o perquè la tasca no es pot resoldre per falta d'informació.

2.1.4 ARQUITECTURES I PARÀMETRES PER A L'ENTRENAMENT DE XARXES NEURONALS ARTIFICIALS PROPAGADES CAP ENDAVANT

Quan es fan simulacions amb l'objectiu d'aconseguir entrenar les XNA hi ha dos aspectes molt importants que cal tenir en consideració. El primer és l'arquitectura de la XNA i el segon fa referència als diferents paràmetres que cal definir i que descriuré més endavant.

Pel que fa a l'arquitectura que haurà de tenir una xarxa caldrà prendre en consideració el següent. En primer lloc s'haurà de definir el nombre d'unitats d'entrada i d'unitats de sortida que tindrà. En aquest cas la solució és senzilla, dependrà del nombre de valors que conformen els patrons d'entrada i els patrons de sortida que volem que la XNA sigui capaç d'associar, objectiu últim de l'entrenament. Un segon aspecte a considerar és el nombre de capes amagades i el nombre d'unitats de cadascuna d'aquestes. No hi ha un criteri immediat per definir aquest escull, per tant moltes vegades caldrà fer valoracions empíriques mitjançant proves amb diferents arquitectures. De totes formes, pot ser d'utilitat tenir en compte la complexitat de la tasca per prendre una decisió al respecte. Pel que fa al nombre de capes, i també al nombre d'unitats de cadascuna d'aquestes, si les associacions a realitzar són molt complexes ens plantejarem emprar més d'una capa amagada i un major nombre d'unitats, si ho són poc n'hi haurà prou amb una sola capa i un

menor nombre d'unitats. D'altra banda, l'anterior criteri està condicionat per un segon aspecte. Quan l'objectiu és fer generalitzacions a associacions mai presentades a la xarxa ajudarà una arquitectura el més reduïda possible, en quant a nombre d'unitats amagades totals, però que sigui capaç d'arribar a realitzar associacions correctes entre els patrons que no s'han presentat mai. L'explicació d'aquest matís ve donada perquè ens podem trobar amb el fenomen del *sobreajustament*² de les associacions. Posteriorment el retrobarem en l'apartat dedicat a l'aplicació de les xarxes per a la predicció de ST, però ja avanço que aquest apareix quan en fer un entrenament l'error disminueix amb el conjunt de patrons de l'entrenament però, en computar l'error de les associacions amb nous patrons que no han estat presentats a la XNA, aquest augmenta en relació al nombre d'etapes que continuem presentant.

Els diferents paràmetres que cal tenir en compte quan pretenem que una xarxa sigui capaç de fer associacions entre patrons es descriuen a continuació:

- *Etapes*: Una etapa s'assoleix quan s'han fet tots les passos per a l'entrenament de la xarxa (del pas 2 al pas 10, descrits en l'apartat anterior) per a tots els patrons del conjunt que la xarxa ha d'aprendre a associar. En principi a més complexitat de la tasca major nombre d'etapes necessitarem.
- *Rang de pesos*: Tal com hem esmentat anteriorment, per tal de començar l'entrenament, hem d'inicialitzar els valors dels pesos de connexió de forma aleatòria. Aquest paràmetre estableix l'interval que marcarà entre quins valors, màxim i mínim, s'inicialitzaran els pesos de la xarxa.
- *Taxa d'aprenentatge*: Quan he mostrat la derivació de la regla delta he esmentat que es partia de la base que la modificació de l'error era proporcional a la dels pesos. Per tant cal un paràmetre, normalment es pren entre 0 i 1, que especifiqui la grandària de la modificació dels pesos que creiem idònia per arribar a executar la tasca correctament. Val a dir que quan es selecciona aquest paràmetre cal tenir en compte que valors relativament grans tenen l'avantatge que ens porten a la solució del

² He introduït aquest nou concepte de *sobreajustament* basant-me en el terme utilitzat en llengua anglesa, que és el d'*overfitting*.

problema ràpidament però sense afinar molt, donat que oscil·len contínuament al voltant de l'error mínim a assolir per tal d'arribar a una solució idònia del problema. D'altra banda, valors relativament petits poden portar al que anomenem mínims locals, és a dir, una falsa solució al problema. De l'anterior es desprèn que una bona forma de procedir és seleccionar un valor relativament alt per baixar l'error fins a valors raonablement acceptables evitant, per tant, la caiguda en un mínim local, i posteriorment baixar la taxa d'aprenentatge a valors relativament més baixos per acabar d'afinar fins a una solució idònia.

- *Momentum*: És un paràmetre d'inèrcia. Permet escollir taxes d'aprenentatge grans evitant l'oscil·lació de l'error. Aquest paràmetre permet, en cada actualització dels pesos de la xarxa, tenir en compte el canvi de pes que s'ha donat en el pas anterior. Per tant tindrem que, per a qualsevol pes entre dues de les diferents capes,

$$\Delta w_{ij}(t) = -\eta \frac{\delta E}{\delta w_{ij}} + \alpha \Delta w_{ij}(t-1)$$

on α és el paràmetre momentum que escollirem entre 0 i 1. És un paràmetre no imprescindible i que de vegades afegeix més dificultats a l'hora de programar les simulacions, sobretot quan la tasca o funció a implementar és molt complexa.

- *Entrenament permutat en contraposició a entrenament seqüencial*: En el primer cas tenim que al llarg de cada etapa de l'entrenament el primer patró s'escull a l'atzar d'entre els p patrons del conjunt sencer, el segon s'escull a l'atzar d'entre els $p-1$ patrons que queden, el tercer d'entre els $p-2$ patrons que queden i així successivament fins al darrer que serà el que ens queda forçosament. En el segon cas la presentació dels patrons es fa de forma seqüencial des del primer al darrer patró del conjunt.
- *Alternativa respecte de l'algorisme que he presentat anteriorment*: En l'algorisme de retropropagació de l'error que he presentat la correcció en els pesos es realitza després de cada presentació de patrons. Hi ha una alternativa a aquesta forma de procedir que consisteix en fer la modificació dels pesos després de la presentació de tot el conjunt d'entrenament.

Val a dir que quan es realitza l'entrenament d'una XNA per tal de resoldre un problema no hi ha cap regla exacta que ens permeti triar l'arquitectura i els paràmetres. La forma d'optimitzar el seu funcionament es basa molt en els resultats empírics que anem assolint després d'una determinada configuració. En intentar resoldre determinats problemes s'arriba a l'extrem de procedir per assaig i error. De totes formes afortunadament l'experiència ajuda encara que sempre hi ha alguna tasca que es resisteix.

Fins aquest punt he mostrat, de forma molt general, alguns dels aspectes referents a l'arquitectura i als paràmetres que cal tenir en compte en utilitzar les xarxes neuronals. En el següent punt del capítol ens centrem més en la seva aplicació concreta en predicció de sèries temporals.

2.2 EL MÈTODE PER A LA PREDICCIÓ DE SÈRIES TEMPORALS MITJANÇANT XARXES NEURONALS ARTIFICIALS

Tal com ja he esmentat, un gran nombre d'autors han emprat les XNA com a eina per a realització de prediccions de sèries temporals. El pioner en la seva utilització per a la predicció de ST, concretament predicció meteorològica, va ser Hu a la seva tesi de l'any 1964 (Zhang et al.,1998). Degut a la falta d'un algorisme per a l'entrenament de xarxes de més d'una capa, la recerca en aquest camp va quedar aturada. Després del desenvolupament de la idea per entrenar arquitectures amb vèries capes proposada per Werbos l'any 1974, que va ser batejada amb el terme retropropagació de l'error per Rumerlhart et al. (1986) (Azoff, 1994; Haykin, 1994; Zhang et al.,1998), l'aplicació de XNA per a la predicció de ST es va reprendre amb el treball de Lapedes i Farber (1987), els quals van concloure, després de realitzar un estudi de simulació, que les aquestes poden ser emprades per modelar i realitzar prediccions de ST (Zhang et al.,1998).

A partir d'aquest punt la utilització de les XNA per a la predicció de ST va créixer enormement donat que la seva utilització ha aportat molt bons resultats en moltes àrees de recerca on calen prediccions molt acurades. Aquestes aplicacions en la

predicció de ST s'han donat principalment en l'àmbit de l'economia (taxa de canvi entre divises, preus en el mercat de valors, índexs macroeconòmics, índexs de producció industrial), de la gestió empresarial (fallides en empreses, evolució del consum elèctric, gestió d'estocs en empreses, evolució de necessitats de recursos humans), de la física (predicció de dades simulades amb o sense soroll afegit, nombre de taques solars), de la fisiologia (taxa del batec cardíac, capacitat pulmonar, nivell d'oxigen en sang), o en l'estudi del medi ambient (presència de polen a l'aire, temperatura ambiental, nivell d'ozó, demanda d'aigua, cabal d'aigua en rius) (Zhang et al.,1998).

En una gran majoria de tots aquests treballs l'objectiu principal és aconseguir prediccions el més acurades possible de la ST. Per tal d'aconseguir els seus objectius les XNA han estat emprades com a aproximadors de funcions, en el sentit que el que cal és establir la relació entre un patró d'entrada, que consisteixen en una finestra temporal de puntuacions, anteriors a la puntuació que es vol predir, i un patró de sortida que consisteix en aquesta mateixa puntuació.

En la figura 2.5 podem veure la que es considera l'arquitectura bàsica emprada per tal de realitzar prediccions per una gran majoria d'autors (Zhang et al.,1998). Com ja he esmentat ens permet ajustar una funció, donada la capacitat que mostren les XNA com a aproximadores universals de funcions (Haykin, 1994; Hertz et al., 1991, Zhang et al.,1998). En la majoria de treballs que van en aquesta direcció, els autors que els proposen utilitzen la mateixa estratègia per tal de definir els parells de patrons entrada-sortida. En l'entrada es posa una finestra temporal de valors $(x(t-k), \dots, x(t-3), x(t-2), x(t-1))$ prèvia a la puntuació a predir, de k components, i en la sortida es posa la puntuació a predir $(x(t))$ (Azoff, 1994; Zhang et al.,1998). Durant l'entrenament de la xarxa les diferències entre el valor esperat i la sortida es van minimitzant successivament fins arribar a l'aproximació de la funció. Val a dir que els resultats amb dades observades són molt acurats però mai arriben a nivells d'exactitud tan grans com quan utilitzem ST generades a partir de sistemes de funcions diferencials o sistemes de funcions de diferència, com les que s'utilitzen per al modelatge dinàmic.

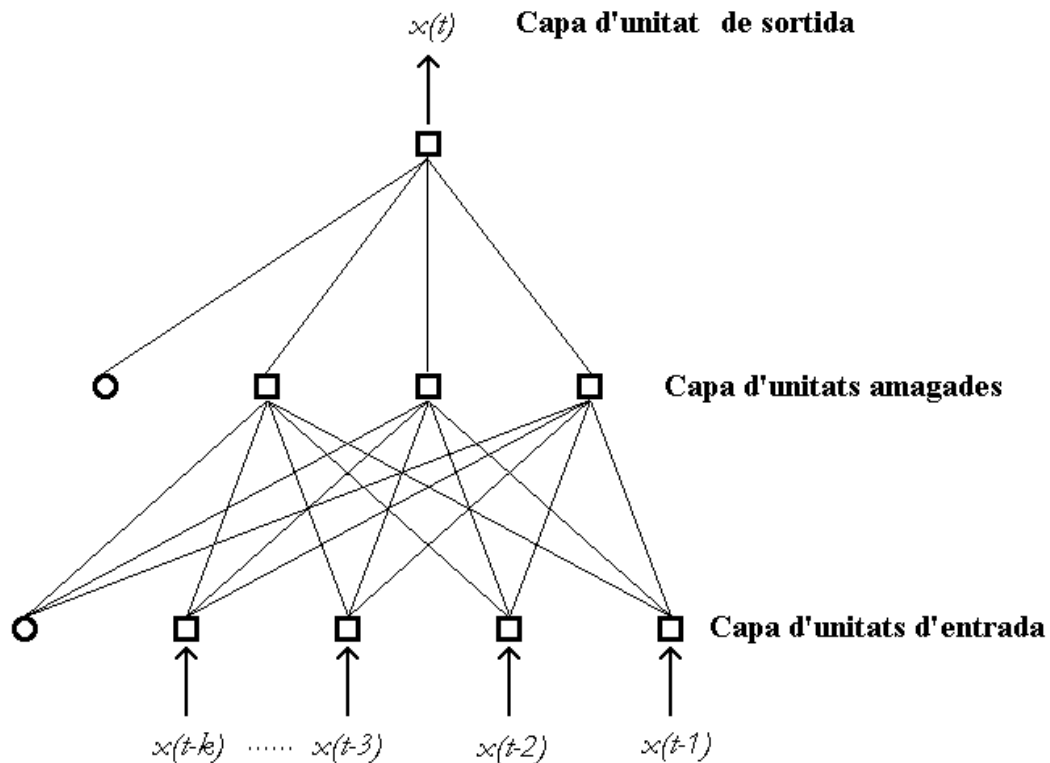


Figura 2.5: Representació gràfica de l'esquema bàsic de les arquitectures d'una XNA emprades per a la realització de prediccions de ST. Els diferents k valors de la finestra temporal, $(x(t-k), \dots, x(t-3), x(t-2), x(t-1))$, conformen el patró d'activacions que s'introdueix en les unitats de la capa d'entrada. Aquestes activacions es propaguen cap endavant, passant per la capa o les capes d'unitats amagades, fins arribar a donar l'activació de la unitat de la capa de sortida que serà el valor de la puntuació $x(t)$ a predir, un cop s'ha realitzat l'entrenament de la xarxa.

En la literatura dedicada a les aplicacions de les XNA a la predicció de ST es poden utilitzar moltes altres arquitectures i/o regles d'aprenentatge alternatives, encara que totes elles utilitzen poc o molt el mateix esquema de formació de patrons que he mostrat en la figura 2.5, per tal de realitzar prediccions el més acurades possible, donat que aquest és l'objectiu últim des d'aquesta perspectiva.

Per tal d'avaluar la capacitat de predicció de ST, s'ha de procedir seguint les següents etapes:

- *Preparació del conjunt de dades:* Cal dividir el conjunt de dades en dos subconjunts, un que ens servirà per entrenar la xarxa i que anomenem conjunt d'entrenament. L'altre subconjunt, que anomenem conjunt de prova, ens servirà per conèixer la capacitat de generalització del mètode de predicció emprat. Cal comprovar que el fet d'haver minimitzat l'error amb el conjunt d'entrenament comporta igualment uns bons resultats amb el conjunt de prova, donat que els valors d'aquests no han estat mai presentats a la XNA. Hi ha una altra forma de procedir que consisteix en tenir tres conjunts de dades, el *conjunt d'entrenament*, el *conjunt de validació* i el *conjunt de prova*. El primer serveix per a l'entrenament, el segon per veure en línia si generalitza bé i anar modificant paràmetres mentre es realitza l'aprenentatge, i el tercer per realitzar les prediccions objectiu de la investigació. Aquesta variant és més habitual en camps aplicats on el que interessa és una bona predicció des d'un punt de vista més pragmàtic.
- *Normalització de les dades:* Cal fer transformacions a les dades per tal de poder construir els patrons d'entrenament i de prova. El fet d'emprar una determinada funció d'activació implica que els valors dels patrons hagin d'estar dins d'un rang determinat. Aquest com a mínim haurà de coincidir amb el domini de la funció triada o ser inferior, però mai podrà ser superior. Els valors màxim i mínim, entre els quals hauran d'estar totes les puntuacions, dependran de la funció d'activació que utilitzarem. En el cas d'emprar la funció logística els valors màxim i mínim seran 0 i 1.
- *Entrenament:* Cal escollir una determinada arquitectura i fixar els seus paràmetres per tal que aquesta pugui realitzar associacions entre els patrons d'entrada i els patrons de sortida. Normalment aquestes etapes són les més complicades donat que, com ja he esmentat anteriorment, les decisions a prendre es sustentaran en una barreja de criteris objectius, experiència prèvia en la simulació mitjançant XNA i algunes proves prèvies successives fins a arribar a una bona solució.

- *Avaluació de la capacitat de predicció:* En aquesta fase el que fem és conèixer la relació o comparar l'estimació que fa la XNA amb els valors del conjunt de prova. En alguns casos s'utilitza la correlació entre l'estimació i les dades reals, o en d'altres, indicadors que avaluen la diferència entre l'estimació i les dades reals.

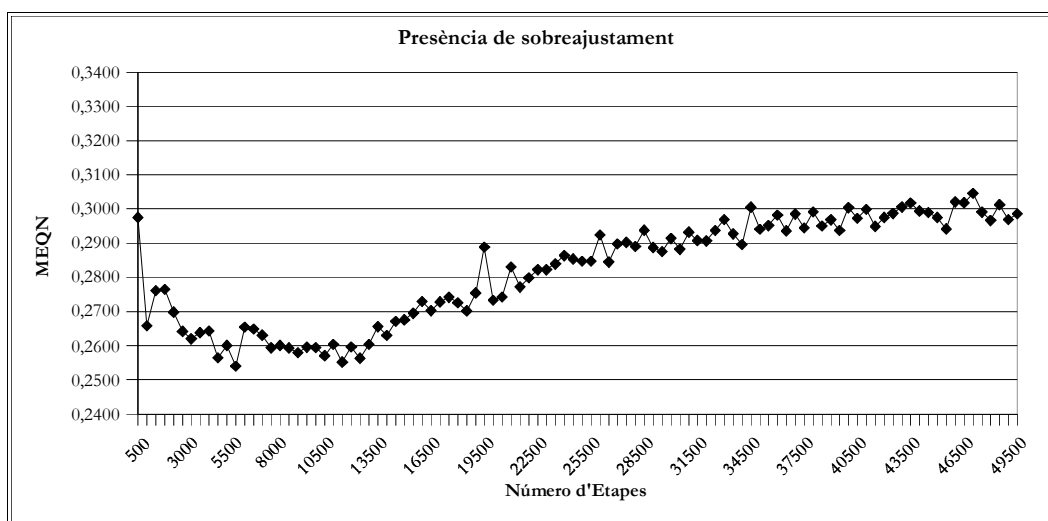


Figura 2.6: Mitjana d'errors al quadrat normalitzada (MEQN) en funció del nombre d'etapes d'entrenament per al mapa de Hénon amb una quantitat d'error afegit i dues components de l'atractor reconstruït ($k=2$). En aquesta figura es pot veure com disminueix la capacitat de generalització a mesura que es van completant més etapes d'aprenentatge del conjunt d'aprenentatge.

Finalment vull definir i mostrar els efectes del sobreajustament en la predicció de ST donat que és una de les aplicacions més sensibles a aquest fenomen. Aquest apareix quan l'objectiu de l'aplicació de xarxes és el de la generalització a patrons mai presentats. Es caracteritza pel fet que, en realitzar l'entrenament, per molt que l'error minvi progressivament, si avaluem la capacitat de generalització a patrons mai processats, la precisió disminueix enlloc d'augmentar. El fenomen es dona quan el conjunt de dades del que es volen fer prediccions té soroll associat. La seva presència

en el registre dificulta l'aproximació de la funció subjacent, de fet la XNA en l'etapa d'entrenament processa relacions entrada-sortida massa específiques i les “memoritzza” repercutint en aquest augment de l'error (Haykin, 1994). A la figura 2.6 podem veure un exemple on tenim l'evolució de l'error amb el conjunt de prova en funció del nombre d'etapes en l'aprenentatge del conjunt d'aprenentatge de la sèrie x del mapa de Hénon amb soroll afegit.

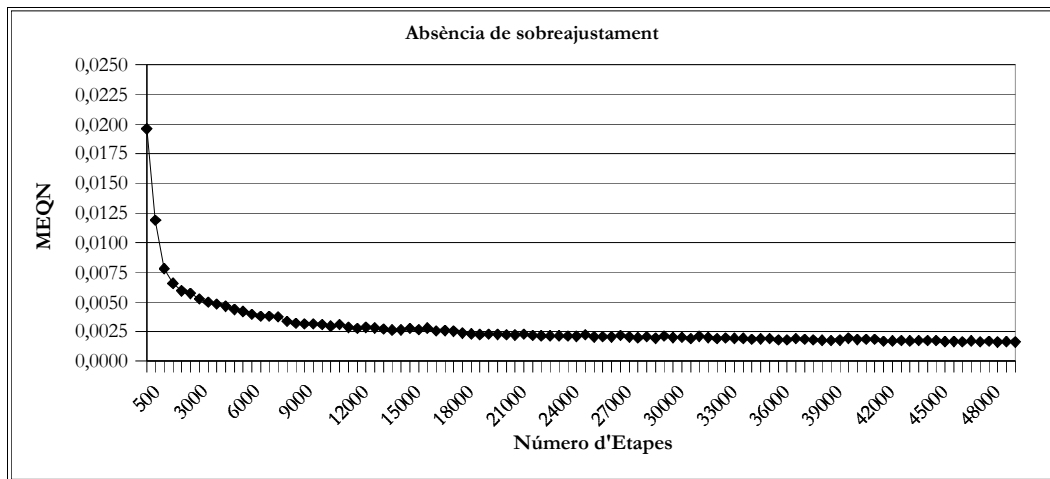


Figura 2.7: MEQN en funció del nombre d'etapes d'entrenament per al mapa de Hénon original (sense soroll afegit) i dues components de l'atractor reconstruït ($k=2$). En aquesta figura es pot veure com va augmentant la capacitat de generalització a mesura que es van completant més etapes d'aprenentatge.

D'altra banda, per tal d'il·lustrar l'efecte de la presència de soroll en el sobreajustament, he afegit la figura 2.7 on tenim l'evolució de l'error amb el conjunt de prova en funció del nombre d'etapes en l'aprenentatge del conjunt d'aprenentatge de la sèrie x del mapa de Hénon original, és a dir, sense soroll afegit. Es pot veure clarament que no hi ha presència de sobreajustament. La mesura de l'error emprada és la Mitjana d'Errors al Quadrat Normalitzada (MEQN) que es defineix per la següent expressió,

$$MEQN = \frac{1}{S^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2,$$

on N és la grandària i S^2 és la variància del conjunt de test (Weigend i Gershenfeld, 1994).

Ja he comentat en un apartat anterior d'aquest capítol que el factor que més incideixen en l'aparició del sobreajustament és el nombre de pesos que té la XNA. Si aquesta té un mínim nombre de nodes de connexió entre unitats és menys probable que aprengui la component de soroll. Aquest nombre, però, ha de ser el suficient i necessari per ajustar correctament la funció subjacent a la ST. Ja he esmentat anteriorment com cal procedir en l'elecció d'una determinada arquitectura de forma empírica.

Alguns autors han desenvolupat modificacions en l'algorisme d'aprenentatge per tal d'evitar aquest sobreajustament (Haykin, 1994). En alguns casos es comença l'entrenament amb una arquitectura mínima incapaç de realitzar la tasca i es van afegint unitats, és el cas de l'Arquitectura d'Aprenentatge afegint Correlacions en Cascada ³ (Fahlman i Lebiere, 1990), i en d'altres casos es comença amb una XNA màxima que pot realitzar la tasca i es va reduint el nombre d'unitats, bé retirant la càrrega que aporten determinats pesos o bé eliminant-los, per tal de millorar la seva realització. En el primer cas tenim el Procediment de Caiguda de Pesos ⁴(Hinton, 1989) i en el segon cas el Procediment d'Eliminació de Pesos ⁵(Weigend, Rumelhart i Huberman, 1990).

³ De l'anglès *cascade correlations learning architecture*

⁴ De l'anglès *weight decay procedure*

⁵ De l'anglès *weight elimination procedure*

3 ANÀLISI DE SÈRIES TEMPORALS SIMULADES MITJANÇANT LA PREDICCIÓ AMB XARXES NEURONALS ARTIFICIALS

3.1 CONSIDERACIONS PRÈVIES GENERALS A TOTS ELS EXPERIMENTS DE SIMULACIÓ

Al llarg d'aquest capítol mostraré les hipòtesis que es plantegen en aquest treball i els resultats de dotze experiments de simulació per a l'anàlisi de ST mitjançant XNA. Ja he esmentat al capítol 1 quins eren els objectius específics d'aquest treball. Aquests em porten a enunciar quatre hipòtesis principals amb un seguit de derivacions agrupades al voltant d'aquestes. Les teniu explicitades a continuació,

Hipòtesi 1 : El fet d'emprar una estratègia de presa de decisions contrastada estadísticament, en l'anàlisi de la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon i la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler, permetrà l'estimació de la Dimensió d'Immersió. En aquest sentit tindrem que:

- 1. Trobaré que $DI=2$ per a la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon, donat que és un Sistema Dinàmic de dues equacions de diferència i dues variables (Hénon, 1976; Sugihara i May, 1990).*
- 2. Trobaré que $DI=3$ per a la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler, donat que és un Sistema Dinàmic de tres equacions diferencials i tres variables (Rössler, 1976; Sugihara i May, 1990).*

Hipòtesi 2 : En emprar una estratègia de presa de decisions contrastada estadísticament, l'estimació correcta de la Dimensió d'Immersió de la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon i la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler es veurà afectada per la presència de soroll en la Sèrie Temporal original. Aquesta afectació és conseqüència del fet que des de la Teoria de Sistemes Dinàmics s'afirma que hi ha una relació directe entre la presència de soroll i la dimensionalitat. Per tant si a la Sèrie Temporal original se li afegeix soroll queda justificat

pensar que en estimar la Dimensió d'Immersió hi haurà un biaix positiu. Per tal de contrastar-ho tindrem que:

- 1. En estimar la Dimensió d'Immersió per a la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon, la Dimensió d'Immersió per a ambdues Sèrie Temporal amb soroll afegit serà major que la Dimensió d'Immersió estimada per a la Sèrie Temporal original donat que el mètode també es veu afectat per la presència de soroll, tal com passa amb altres tècniques d'anàlisi (Abarbanel, 1996; Hénon, 1976; Sugihara i May, 1990). D'altra banda, hauríem de trobar que s'estableix una relació directe entre el nivell de soroll i el biaix.*
- 2. En estimar la Dimensió d'Immersió per a la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler, la Dimensió d'Immersió per a ambdues Sèrie Temporal amb soroll afegit serà major que la Dimensió d'Immersió estimada per a la Sèrie Temporal original donat que el mètode també es veu afectat per la presència de soroll, tal com passa amb altres tècniques d'anàlisi (Abarbanel, 1996; Rössler, 1976; Sugihara i May, 1990). D'altra banda, hauríem de trobar que s'estableix una relació directe entre el nivell de soroll i el biaix.*

Hipòtesi 3 : El fet d'emprar una estratègia de presa de decisions contrastada estadísticament, en l'anàlisi de la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon i la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler, permetrà l'avaluació de la presència o absència de Sensibilitat a les Condicions Inicials. En aquest sentit tindrem que:

- 1. Trobaré presència de Sensibilitat a les Condicions Inicials en la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon (Hénon, 1976; Sugihara i May, 1990; Wolf et al., 1985).*
- 2. Trobaré presència de Sensibilitat a les Condicions Inicials en la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler (Rössler, 1976; Sugihara i May, 1990; Wolf et al., 1985).*

Hipòtesi 4 : El fet d'emprar una estratègia de presa de decisions contrastada estadísticament, per a l'avaluació de Sensibilitat a les Condicions Inicials de la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon i la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler, es veurà afectada per la presència de

soroll en la Sèrie Temporal original. Des de la Teoria de Sistemes Dinàmics es postula que una forma de detectar soroll en una Sèrie Temporal és mirant la Sensibilitat a les Condicions Inicials basant-se en que hi ha una relació directe entre la presència de soroll i l'absència de Sensibilitat a les Condicions Inicials. Per tant si a la Sèrie Temporal original se li afegeix soroll queda justificat pensar que en avaluar la Sensibilitat a les Condicions Inicials aquesta hauria de tendir a desaparèixer. Per tal de contrastar-ho tindrem que:

- 1. En avaluar la presència de Sensibilitat a les Condicions Inicials per a la Sèrie Temporal \times del mapa de Hénon, la Sensibilitat a les Condicions Inicials per a ambdues Sèrie Temporal amb soroll afegit serà menor que la presència de Sensibilitat a les Condicions Inicials detectada per a la Sèrie Temporal original donat que el mètode també es veu afectat per la presència de soroll, tal com passa amb altres tècniques d'anàlisi (Hénon, 1976 ; Sugihara i May, 1990; Wolf et al., 1985). D'altra banda, hauríem de trobar que s'estableix una relació directe entre el nivell de soroll i el biaix.*
- 2. En avaluar la presència de Sensibilitat a les Condicions Inicials per a la Sèrie Temporal \times de l'atractor de Rössler, la Sensibilitat a les Condicions Inicials per a ambdues Sèrie Temporal amb soroll afegit serà menor que la presència de Sensibilitat a les Condicions Inicials detectada per a la Sèrie Temporal original donat que el mètode també es veu afectat per la presència de soroll, tal com passa amb altres tècniques d'anàlisi (Rössler, 1976; Sugihara i May, 1990; Wolf et al., 1985). D'altra banda, hauríem de trobar que s'estableix una relació directe entre el nivell de soroll i el biaix.*

En el moment de descriure cadascun dels experiments de simulació s'exposaran de forma més concreta els resultats esperats que han de servir per confirmar o refutar les hipòtesis plantejades i, per tant, veure si s'acompleixen o no els objectius de la investigació. Empraré el mapa de Hénon i l'atractor de Rössler, d'aquest darrer en el seu moment ja mostraré les seves característiques, donat que d'aquests SD simulats coneixem per avançat quines característiques tenen respecte de la dimensionalitat i la SCI, per tant, podem avaluar si aquestes poden ser copsades mitjançant la predicció de

cadascuna de les ST. Per a ambdues sèries desenvoluparé el mètode amb les dades originals i amb les dades afegint-hi dos nivells de soroll per tal d'avaluar la contaminació que exerceix aquest en l'anàlisi per a detectar les característiques esmentades.

En aquest treball d'investigació he emprat XNA amb una arquitectura diferent a la utilitzada de forma majoritària per tal de realitzar les prediccions de puntuacions al llarg del temps, mostrada al final del capítol precedent. El motiu és el fet de decidir-me a fer l'anàlisi de ST des de la perspectiva de la TSD. Des d'aquesta perspectiva entenc que, mitjançant la predicció de sèries amb XNA, s'extreuen determinades característiques de l'atractor reconstruït d'una ST presentant els patrons conformats pels valors de les diferents k components de cadascun dels punts de l'atractor. Això és possible donada la capacitat d'aquestes les xarxes d'aproximar funcions, un cop s'ha realitzat un entrenament d'aquesta amb la presentació d'exemples. En aquest sentit, donat que els diferents punts de l'atractor ocupen un seguit de llocs privilegiats en l'espai definit per les k components, hem d'esperar que les XNA podran indicar, a partir de la posició en l'espai de k components d'un determinat punt, on hem de trobar el següent punt de l'atractor. En certa manera és una forma de predicció bastant semblant a la que han proposat Sugihara i May (1990), que ja hem esmentat en el capítol 1, però en aquest cas es pot aconseguir una major precisió en les prediccions donat que hi ha un procés d'aprenentatge que successivament va minimitzant les diferències entre les activacions que dona la XNA i els valors esperats.

Pels motius exposats en el paràgraf anterior, l'arquitectura emprada té el mateix nombre d'unitats en la capa d'entrada i en la capa de sortida. En la figura 3.1 podem veure l'arquitectura de les XNA que he emprat per realitzar la predicció de les ST utilitzades per a realitzar aquest treball d'investigació. Podem veure que les components que conformen un determinat punt de l'atractor $X(t)=(x(t-k), \dots, x(t-3), x(t-2), x(t-1))$, per a qualsevol valor de k , es presenten a la capa d'entrada de la XNA. Els valors de la capa de sortida són els del següent punt de l'atractor $X(t+1)=(x(t-k+1), \dots, x(t-2), x(t-1), x(t))$. Per tant, la tasca de la XNA consisteix en aprendre a fer associacions entre el patró d'entrada i el patró de sortida minimitzant l'error fins a on sigui possible. De fet, en assolir aquest objectiu, s'està

aconseguint fer una aproximació de les funcions que generen el SD en que estaria immersa la ST objecte d'anàlisi.

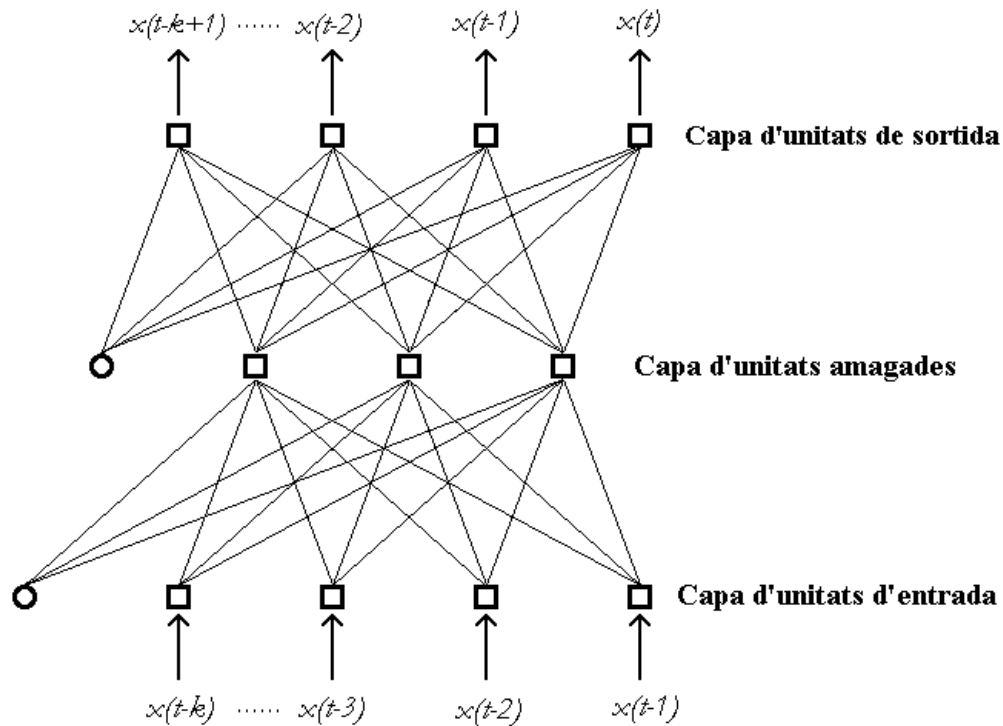


Figura 3.1: Esquema de l'arquitectura emprada per tal de realitzar prediccions d'una ST en aquest treball. Els parells entrada-sortida són punts de l'atractor reconstruït on el patró d'entrada correspon al punt de l'atractor $X(t)$ i el patró de sortida és el punt de l'atractor $X(t + 1)$. Es representa una única capa amagada però n'hi pot haver més.

Per a cadascuna de les sèries (Hénon i Rössler) es crearan tres conjunts diferents de dades: el primer correspon a la sèrie original, i els altres dos a cadascuna d'elles amb dos nivells de contaminació de soroll. Per tal d'elaborar els diferents conjunts caracteritzats per senyal més soroll he afegit a la sèrie original una ST, caracteritzada per soroll blanc distribuït uniformement en l'interval $[-L, L]$. La raó L/D_A és l'expressió que caracteritza la grandària relativa del soroll respecte del senyal original (Kennel et al., 1992). En el capítol 1 ja hem vist com calcular el valor D_A , que és la mesura de la grandària nominal de l'atractor.

Per a cadascuna de les ST originals tenim que $L/D_A=0$ i per les sèries contaminades hem emprat $L/D_A=0,5$ i $L/D_A=1$. En la figura 3.2 presento un gràfic per il·lustrar els efectes dels diferents nivells de soroll en l'atractor que forma la component x del mapa de Hénon, reconstruït amb dues components, segons el mètode de Takens (Abarbanel, 1996). Podem veure que quan més gran és el valor L/D_A més gran és la distorsió en l'atractor original.

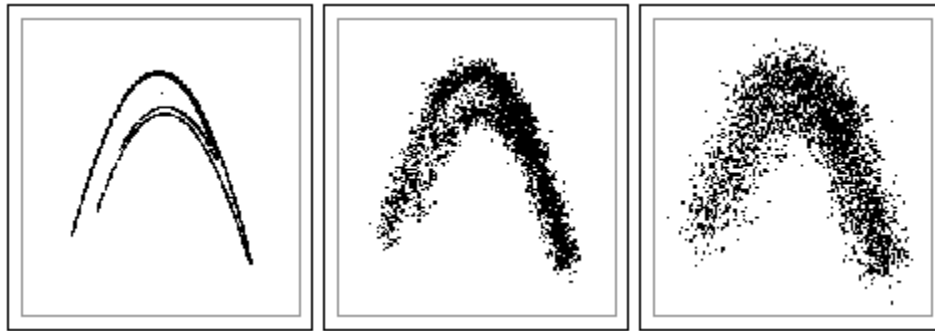


Figura 3.2: Deformació de l'atractor de Hénon original (a l'esquerra) en funció dels diferents nivells de soroll afegits a la senyal original. Al mig $L/D_A=0,5$ i a la dreta $L/D_A=1$.

Per tant, per a l'anàlisi complet de cadascuna de les ST, hem desenvolupat les següents etapes:

- *Elaboració dels conjunts de dades:* Com ja he esmentat, tindrem per a cadascuna de les sèries simulades escollides tres conjunts de dades com objecte d'anàlisi.
- *Transformació de les dades:* Hem aplicat una transformació en les dades de tal manera que els valors de la ST quedin compresos en l'interval $]0,1[$, que correspon a la imatge de la funció logística, que és la funció d'activació emprada en les nostres simulacions.
- *Reconstrucció de l'atractor:* S'han reconstruït 10 atractors per a cadascuna de les sis sèries analitzades. L'elaboració s'ha realitzat des de $k=1$ fins a $k=10$ mitjançant la

tècnica desenvolupada per Takens a partir de la ST. Per un determinat valor de k cada punt de l'atractor serà, $X(t)=(x(t-k), \dots, x(t-3), x(t-2), x(t-1))$. Per a cada valor de k i per a cada conjunt de dades objecte d'anàlisi s'han construït 200 punts consecutius per a l'entrenament de la XNA i 200 punts consecutius per a l'avaluació de la predicció. Ja he esmentat en el capítol 1 que la grandària de la sèrie era un dels motius pels quals es produeix un biaix quan hom fa les seves anàlisis. En les investigacions que es realitzen en l'àmbit de la psicologia, les ST acostumen a ser excessivament curtes per a la utilització d'aquestes tècniques amb garanties de resultats fiables. És aquest el motiu, l'intent de mimetisme amb el que trobaríem en una investigació en el nostre àmbit, que m'ha fet decidir-me a emprar solament 200 punts per a desenvolupar les meves anàlisis.

- **Construcció dels conjunts de parells de patrons d'aprenentatge i de prova:** Cada conjunt de parells de patrons en el conjunt d'entrenament i de prova pren els valors de cadascun dels punts de l'atractor reconstruït, aplicada prèviament la transformació abans esmentada, de tal manera que per a una XNA amb k unitats d'entrada i k unitats de sortida tindrem per als conjunts d'entrenament i test,

	e_1	e_2	\dots	e_{k-1}	e_k
<i>Valors que pren</i>	↑	↑		↑	↑
<i>cada unitat d'entrada:</i>	$x(t-k)$	$x(t-k+1)$	\dots	$x(t-2)$	$x(t-1)$
	t_1	t_2	\dots	t_{k-1}	t_k
<i>Valors que ha</i>	↑	↑		↑	↑
<i>d'estimar cada unitat</i>					
<i>de sortida:</i>	$x(t-k+1)$	$x(t-k+2)$	\dots	$x(t-1)$	$x(t)$

- **Selecció de l'arquitectura:** Per tal de ser seleccionades es van realitzar diferents proves amb tots sis conjunts de dades i per als diferents valors de k . Durant tot el procés de selecció es van emprar diferents arquitectures per tal d'aconseguir que les XNA

arribessin a resultats satisfactoris d'aprenentatge i generalització. En una primera etapa d'aquest procés em vaig centrar en provar una arquitectura de xarxa amb una capa d'unitats d'entrada, una capa d'unitats amagades i una capa d'unitats de sortida, on el nombre d'unitats d'entrada i d'unitats de sortida era igual a k , donat que aquest és el nombre de components de cadascun dels atractors reconstruïts. La selecció del nombre d'unitats de la capa amagada es va fer seguint el criteri de Haykin (1994) de començar els entrenaments amb una arquitectura infradimensionada i anar afegint unitats amagades. Enlloc d'afegir les unitats una a una vaig creure convenient un criteri d'introducció per paquets per simplificar el procés de selecció. Es van provar XNA amb $k/2$ unitats amagades (amb un arrodoniment cap al primer nombre sencer superior quan k era imparell), k unitats amagades, $3k/2$ unitats amagades (amb un arrodoniment cap al primer nombre sencer superior quan k era imparell) i $2k$ unitats amagades donat que en l'àmbit de la predicció de ST amb XNA trobem que el nombre de unitats amagades es troba entre aquests extrems, des de $k/2$ fins a $2k$ (Zhang et al., 1998). La millor solució per a tots els conjunts de dades i per als diferents valors de k era afegir el doble d'unitats amagades que d'unitats d'entrada i de sortida. Tot i amb això vaig procedir a manipular la taxa d'aprenentatge i el momentum, aconseguint resultats molt irregulars en totes les combinacions possibles. Entre els problemes més destacats hi ha el fet que les xarxes arribaven sobint a un mínim local en moltes de les simulacions realitzades, per als diferents conjunts de dades i diferents valors de k , i també el problema de la gran variabilitat en l'error en avaluar el conjunt test. A més quan s'entrenaven els conjunts sense soroll en alguns casos es necessitaven més de 200.000 etapes d'entrenament per arribar a un resultat estable. Aquest fet em va fer sospitar que aconseguir bones prediccions amb els diferents conjunts de dades era una tasca prou complexa i que seria una bona solució afegir una capa més a la xarxa (Zhang et al., 1998). D'aquesta manera les xarxes emprades tenien dues capes amagades amb $2k$ unitats cadascuna. Els resultats aconseguits van ser els previstos, és a dir, es va evitar la caiguda de l'entrenament a mínims locals i, a més, els resultats per a tots els conjunts de dades i

per a tots els valors de k van ser millors que amb una sola capa amagada. Aquesta arquitectura em va permetre, a més, emprar una taxa d'aprenentatge relativament gran sense necessitat de donar un valor al paràmetre momentum donat que si aquest era diferent de zero empitjorava el procés d'aprenentatge, tal com comentaré en el punt següent. D'altra banda, es va aconseguir arribar a millors resultats amb menor nombre d'èpoques d'entrenament. Vull esmentar en aquest punt que també es van fer proves amb l'arquitectura de xarxa més habitual en predicció de ST, mostrada a la figura 2.5 del capítol anterior, per tal de contrastar si realment l'arquitectura que he escollit amb el mateix número d'unitats d'entrada i d'unitats de sortida permetia assolir millors resultats. Aquestes proves van portar a confirmar les meves sospites. Per tant, l'elecció d'igualar el nombre d'unitats d'entrada i d'unitats de sortida queda justificada pel fet d'emmarcar aquest treball en la TSD, tal com he esmentat anteriorment, i també per motius pragmàtics, donat que amb els diferents conjunts de dades triats s'assoleixen millors resultats.

- *Selecció dels paràmetres definitius:* El rang d'inicialització de pesos es va triar seguint el criteri que fos suficientment petit, per tal de minimitzar la variabilitat en els resultats dels diferents entrenaments, i que permetés evitar la caiguda en mínims locals. Es van fer proves amb diferents valors del rang d'inicialització de pesos fins arribar a bons resultats amb el valor de $0,1$ (els pesos en ser inicialitzats a l'atzar oscil·laven entre els valors $-0,05$ i $0,05$). Pel que fa a la taxa d'aprenentatge es van fer diferents proves amb l'objectiu que el procés d'aprenentatge fos suficientment ràpid però en la direcció d'arribar a resultats òptims. En aquest sentit per a la majoria de valors de k (des de 2 fins a 10) el rang d'aprenentatge idoni va ser de $0,5$. En els entrenaments realitzats amb l'atractor reconstruït amb una component ($k=1$) es va emprar una taxa d'aprenentatge de $0,1$ per tal d'evitar excessives oscil·lacions en l'error que en un gran nombre d'entrenaments portaven a mínims locals. El paràmetre momentum es va fixar a 0 donat que en totes les proves realitzades portava a grans oscil·lacions en l'entrenament.

- *Entrenament de la XNA per tal de realitzar prediccions:* Al llarg del procés d'aprenentatge la correcció de pesos es realitzava després de cada patró i la seva presentació en cada etapa va ser permutada per tal de millorar la generalització. Per a cadascun dels sis conjunts de dades elaborats es feien tres simulacions de prova amb 200.000 etapes per tal de seleccionar el punt d'aturada dels entrenaments, donat que cal conèixer aquest paràmetre a priori per tal de poder automatitzar el procés en fer experiments de simulació. En observar els resultats s'escollia un nombre d'etapes en funció del punt en que s'assolia un error mínim, quan es donava el fenomen d'ajustament excessiu, o bé, quan no es donava aquest, el punt d'aturada coincidia amb el final d'un segon segment consecutiu de 20.000 etapes en que la disminució de l'error en l'interval era menor que el 10% del valor mínim del segment anterior. El primer criteri va resultar emprat en el casos on les dades tenen soroll afegit i el segon en els dos conjunts de dades en que $L/D_A = 0$.
- *Estimació de la dimensió d'immersió:* A partir de la capacitat de generalització, valorada mitjançant la Correlació entre el valor esperat i la seva predicció (*CORRELACIÓ*). Caldrà veure en quin valor de k la precisió s'estabilitza o disminueix significativament. Aquest punt coincideix amb la DI del sistema dinàmic subjacent a la ST analitzada. De fet aquest mètode és una replicació del mètode de Sugihara i May (1990) que ja hem descrit en el capítol 1, però canviant la tècnica de predicció.
- *Avaluació de la sensibilitat a les condicions inicials:* Un cop esbrinada la DI, aquesta informació ens servirà per escollir quina arquitectura de XNA emprarem per a realitzar prediccions de la ST i, posteriorment, veure com evoluciona aquesta a mesura que augmenten les iteracions per avaluar si hi ha SCI, replicant també el mètode de Sugihara i May (1990).

Finalment esmentar que per a la realització d'aquesta tesi he emprat el següent software:

- Per a les simulacions de les XNA he emprat el mòdul BP del programa PDP versió 1.0 (McClelland i Rumelhart, 1988). Aquest programa es pot emprar en línia o

programant una seqüència d'operacions. En aquesta investigació, donat el nombre d'experiments de simulació que impliquen realitzar seqüències repetitives similars però amb diferents conjunts de dades, ha estat necessari emprar aquesta segona opció. En aquest entorn cal definir els conjunts de dades, l'arquitectura de xarxa, els paràmetres d'entrenament, i la seqüència d'entrenament-validació per a la realització de prediccions de ST. Val a dir que solament per a la realització dels experiments de simulació s'han fet 660 entrenaments. Això implica un gran nombre de simulacions prèvies per tal de seleccionar l'arquitectura de XNA adient i els paràmetres per al seu entrenament.

- Per al preprocessament i postprocessament de dades s'ha emprat el TURBO PASCAL i el MATLAB.
- Per a l'estimació de la Mitjana d'Informació Mútua he emprat el paquet informàtic VRA versió 4.6 (Kononov, 2004).
- Per a l'estimació del Tant per Cent de Falsos Veïns he emprat el mòdul *false_nearest* del paquet TISEAN per a anàlisi de ST (Hegger, Kantz, i Schreiber, 1999).
- Per a l'estimació de la DF he emprat el paquet informàtic "Chaos Data Analyzer" (Sprott i Rowland, 1992).
- Per a l'anàlisi de dades dels experiments de simulació he emprat el paquet estadístic SPSS per a Windows versió 14.

3.2 TRANSFORMACIONS APLICADES ALS DIFERENTS CONJUNTS DE DADES ELABORATS A PARTIR DE LES SÈRIES TEMPORALS X DEL MAPA DE HÉNON I L'ATRACTOR DE RÖSLER

En l'apartat anterior es descriu la metodologia que he emprat per a l'anàlisi de ST mitjançant la predicció amb XNA, de forma general per a qualsevol conjunt de dades. En aquest moment solament cal mostrar les transformacions esmentades en el

punt 2 de l'apartat anterior per tal que els valors de la sèrie quedin compresos en l'interval $]0,1[$, imatge de la funció logística que he emprat en les meves simulacions aplicades a cadascun dels conjunts de dades. A continuació teniu les transformacions aplicades a la ST_x de l'atractor de Hénon.

Taula 3.1 Expressió de la transformació aplicada a cadascun dels conjunts de dades de la ST_x del mapa de Hénon.

Nivell de Soroll	Transformació aplicada
$L/D_A=0$	$valor_{patró} = x_{hénon} / 2,6 + 0,5$
$L/D_A=0,5$	$valor_{patró} = x_{hénon} / 3 + 0,5$
$L/D_A=1$	$valor_{patró} = x_{hénon} / 3,8 + 0,5$

Pel que fa a l'atractor de Rössler (1976), esmentat anteriorment, té la característica que és un atractor estrany més senzill que el de Lorenz, que hem vist en el capítol 2. Queda especificat pel següent sistema d'equacions diferencials

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y - z \\ dy/dt &= x + ay \\ dz/dt &= b + z(x - c) \end{aligned}$$

on a , b i c són paràmetres que canvien el comportament del sistema. En aquest treball de recerca hem emprat el conjunt de dades de la ST_x aportat pel paquet informàtic Visual Recurrence Analysis elaborat per Eugene Kononov (2004). Les característiques de l'esmentat conjunt de dades són que la seva DI és de 3 i que el seu comportament és caòtic, per tant, no lineal i mostrant SCI.

A diferència del cas anterior, en que la sèrie temporal és de caire discret i no calia veure l'interval òptim entre puntuacions, en aquest cas cal cercar quin és el mínim interval entre puntuacions per tal que la informació que aporta cada nou valor de la ST no sigui redundant. Per aquest motiu cal utilitzar la gràfica que mostra la mitjana d'informació mútua en funció de la separació entre puntuacions s . A partir de les puntuacions originals cal cercar el valor del primer retard en que la mitjana

d'informació mútua és mínima. En la figura 3.3 tenim l'esmentada gràfica que ens ha de permetre escollir l'interval òptim entre puntuacions. Com podem veure el valor escollit és de $s=10$.

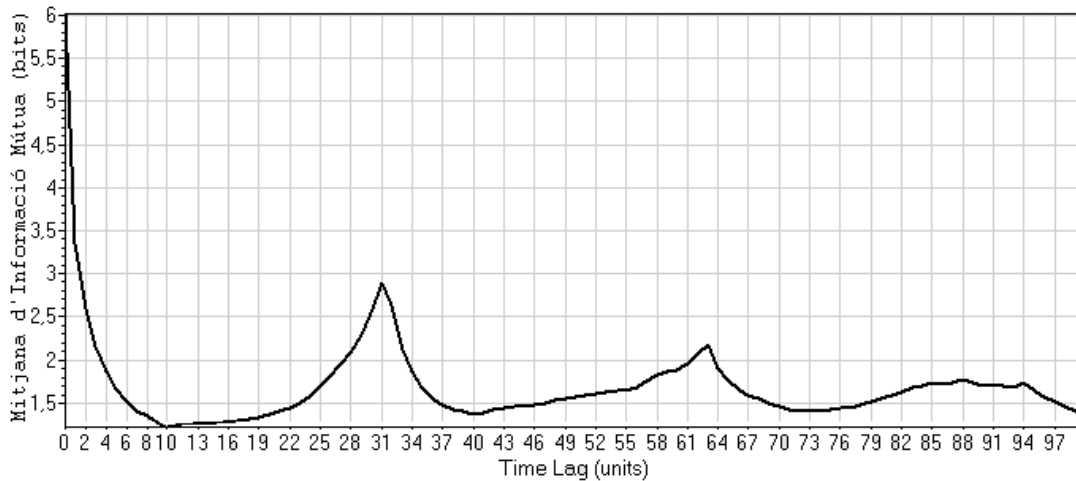


Figura 3.3: Mitjana d'informació mútua en funció de la separació entre puntuacions s per a la ST x de l'atractor de Rössler.

Un cop trobat l'interval òptim per tal que la ST aportí la màxima quantitat d'informació possible, sense que aquesta sigui redundant, s'han de fer les transformacions a cadascun dels conjunts de dades elaborats a partir de la ST x de l'atractor de Rössler per tal que els valors dels patrons estiguin dins l'interval $]0,1[$, que és la imatge de la funció logística emprada en les simulacions, tal com he comentat en l'inici del capítol en explicar la metodologia a seguir. Les que he aplicat en els diferents conjunts de dades per a la ST x de l'atractor de Rössler es mostren a la taula 3.2.

Taula 3.2: Expressió de la transformació aplicada a cadascun dels conjunts de dades per a la ST x de l'atractor de Rössler.

Nivell de Soroll	Transformació aplicada
$L/D_A=0$	$valor_{patró} = x_{rössler} / 23 + 0,5$
$L/D_A=0,5$	$valor_{patró} = x_{rössler} / 26 + 0,5$
$L/D_A=1$	$valor_{patró} = x_{rössler} / 46 + 0,5$

3.3 ANÀLISI DE LA DIMENSIONALITAT DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

3.3.1 ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON

Per tal d'estimar la DI de la ST x del Mapa d'Hénon, de la sèries original sense soroll i de les dues amb dos nivells diferents de soroll afegit, es plantejaran tres experiments de simulació (números 1, 2 i 3) amb “Variable Independent” *Nombre de Components de l'Atractor Reconstruït* (NCAR) que té 10 valors i on la “Variable Dependent” serà la *Correlació* entre el valor esperat i la seva predicció (CORRELACIÓ), definida en el punt 8 de l'apartat 3.1. Per a cadascun dels valors de NCAR s'han realitzat 10 simulacions, amb els pesos d'inicialització dels entrenaments escollits a l'atzar. L'experiment de simulació 1 permetrà confirmar o no la *Hipòtesi 1.1*, mentre que per a l'avaluació de la *Hipòtesi 2.1* ens fixarem en els resultats globals dels experiments de simulació 1, 2 i 3.

Taula 3.3: Coeficients dels contrastos a priori tipus Helmert emprats per a l'avaluació de l'eina d'estimació.

Nombre de Components de l'Atractor Reconstruït										
Contrast	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	-8	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	-7	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	-6	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	-5	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	-4	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	-3	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Tal com hem vist en el mètode plantejat per Sugihara i May (1990), la DI coincideix amb el nombre de components de punts reconstruïts de l'atractor en que la predicció ja no millora o empitjora. Quan això succeeix de fet hem arribat a un invariant que indica que la dimensió de la ST que estem estudiant coincideix amb el nombre de components de l'atractor reconstruït (k). Per a l'anàlisi de resultats, he plantejat nou contrastos a priori tipus Helmert per tal d'avaluar diferències entre la mitjana d'un tractament de $NCAR$ i les mitjanes de la resta de tractaments amb valors de $NCAR$ majors. Els esmentats contrastos queden explicitats en la taula 3.3 i representen els nou possibles invariants que podem trobar per als 10 possibles atractors reconstruïts. El primer contrast permetria afirmar que $DI=2$ donat que s'ha d'interpretar com que a partir de dues components la predicció ja no millora, el segon que $DI=3$ pel fet que la predicció queda estancada a partir de tres components, i així successivament fins al darrer contrast d'aquesta taula.

De l'anterior es desprèn que hem de trobar el primer contrast en que es doni la següent condició,

$$CORRELACIÓ_{NCAR=k} \geq CORRELACIÓ_{NCAR=k+1} \cdots CORRELACIÓ_{NCAR=10}$$

que per als conjunts de dades de la ST x del mapa de Hénon haurà de ser el contrast número 2, per tant $k=2$, quan estimem la DI de la ST sense soroll, i un valor superior en les dues ST amb diferents nivells de soroll afegit. Finalment esmentar que en tots els experiments de simulació, donat que els contrastos impliquen 9 comparacions, s'aplicarà la Correcció de Bonferroni (Field, 2005). Per tant, tenint en compte que un punt de tall per a la significació de 0,05 en realitzar 9 comparacions el punt criteri per pendre una decisió quedarà en 0,0056.

3.3.1.1 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 1: ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 0$

Taula 3.4: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll ($L/D_A=0$).

NCAR	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,960770	0,000068
2	10	0,999615	0,000101
3	10	0,999774	0,000063
4	10	0,999874	0,000042
5	10	0,999824	0,000062
6	10	0,999803	0,000042
7	10	0,999517	0,000526
8	10	0,999312	0,000485
9	10	0,999389	0,000379
10	10	0,998233	0,000851
Total	100	0,995611	0,011687

Un cop fetes les deu simulacions per a cadascun dels valors de *NCAR*, els resultats assolits, pel que fa la mitjana i desviació típica de la variable dependent, són els de la taula 3.4. És important destacar que hi ha diferències en la desviació típica tal com es confirma mitjançant la prova de Levene ($F(9,90)= 10.19, p<0.001$) conseqüentment no es pot assumir la igualtat de variàncies i hem de mirar si hi ha diferències en la variable *CORRELACIÓ* respecte dels diferents valors de la variable independent amb la prova de Brown-Forsythe (Brown i Forsythe, 1974a; Brown i Forsythe, 1974b; Field, 2005). Aquests autors varen proposar un estadístic com a una alternativa a l'Anàlisi de

la Variància, que consisteix en una lleugera variació per al càlcul dels graus de llibertat de l'efecte intra grups. Aquest permet avaluar si hi ha diferències entre mitjanes globalment i per a contrastos parcials quan hi ha heterogeneïtat de variàncies. Els resultats d'aquest experiment són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 26.26) = 10675.95, p < 0.001$).

Taula 3.5: Resultats dels contrastos a priori per avaluar les diferents mitjanes *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll ($L/D_A = 0$).

Contrast	Valor del Contrast	t	Graus de llibertat	Significació (bilateral).
1	0,348408	827,277	34,701	0,000
2	-0,001190	-2,634	34,083	0,013
3	-0,002469	-6,207	31,510	0,000
4	-0,003166	-8,316	27,752	0,000
5	-0,002868	-7,464	28,605	0,000
6	-0,002761	-7,358	26,321	0,000
7	-0,001618	-2,699	17,087	0,015
8	-0,001001	-2,355	20,595	0,029
9	-0,001156	-3,924	12,439	0,002

Pel que fa a l'avaluació de contrastos, s'ha de fer tenint en compte el supòsit de no acompliment de la igualtat de variàncies. A la taula 3.5 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos Helmert plantejats. Donat que en el contrast número 2 no hi ha diferències significatives, la conclusió és que la $DI=2$. Els resultats es poden veure en la figura 3.4 on queda clar que el que mostren els contrastos concorda amb l'esperat.

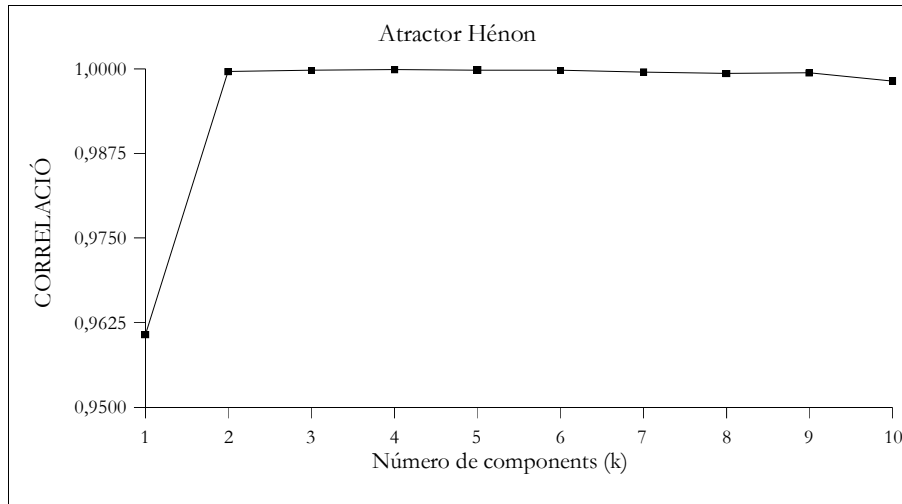


Figura 3.4: *CORRELACIÓ* per als diferents valors de *NCAR* per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll ($L/D_A=0$).

3.3.1.2 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 2: ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL x DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 0,5$

A la taula 3.6 tenim la mitjana i desviació típica de la variable dependent. Mitjançant la prova de Levene es detecta que hi ha diferències significatives en la desviació típica ($F(9,90)= 5.90, p<0.001$), conseqüentment no es pot assumir la igualtat de variàncies requerint la utilització de la prova de Brown-Forsythe per tal de detectar si hi ha diferències significatives en les mitjanes per als diferents tractaments. Els resultats són igualment significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 55.41)= 820.88, p<0.001$).

Taula 3.6: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

NCAR	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,915023	0,001243
2	10	0,961278	0,000701
3	10	0,967067	0,000748
4	10	0,964592	0,001274
5	10	0,965093	0,001498
6	10	0,965779	0,001909
7	10	0,961732	0,001287
8	10	0,959738	0,002728
9	10	0,957360	0,001713
10	10	0,953739	0,002566
Total	100	0,957140	0,014731

Taula 3.7: Resultats dels contrastos a priori per avaluar les diferents mitjanes *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

Contrast	Valor del Contrast	t	Graus de llibertat	Significació (bilateral).
1	0,421172	107,922	13,224	0,000
2	0,004875	2,021	27,146	0,053
3	-0,041434	-17,909	29,251	0,000
4	-0,024109	-8,370	17,473	0,000
5	-0,027116	-9,686	16,898	0,000
6	-0,030546	-11,014	15,177	0,000
7	-0,014360	-8,043	27,733	0,000
8	-0,008377	-4,226	14,808	0,001
9	-0,003622	-3,712	15,691	0,002

L'anàlisi dels diferents contrastos és a la taula 3.7. Igualment hem de tenir en compte en la interpretació que hi ha heterogeneïtat de les variàncies. Donat que en el contrast número 2 no trobem diferències significatives la conclusió és que la $DI=2$. Els resultats als que s'ha arribat amb l'experiment de simulació descrit els podem veure en la següent figura.

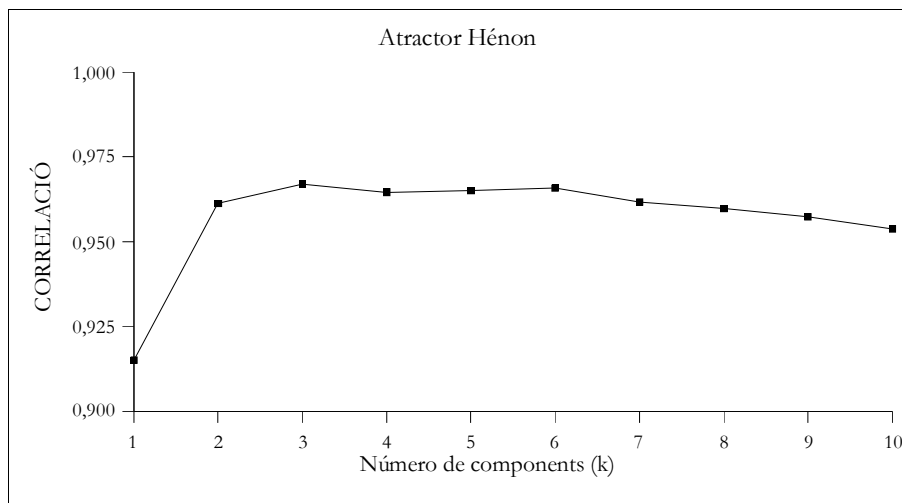


Figura 3.5: *CORRELACIÓ* per als diferents valors de *NCAR* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

3.3.1.3 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 3: ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL x DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 1$

Els resultats després de fer totes les simulacions es mostren en la taula 3.8. La realització de la prova de Levene mostra que no hi ha igualtat entre variàncies ($F(9,90)=4.04, p<0.001$). Per tal de comprovar si hi ha diferències significatives entre les mitjanes cal emprar la prova de Brown-Forsythe. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 58.95)=485.12, p<0.001$).

Taula 3.8: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

NCAR	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,819840	0,000421
2	10	0,869831	0,000711
3	10	0,896184	0,001070
4	10	0,895606	0,002880
5	10	0,892454	0,003074
6	10	0,887658	0,003475
7	10	0,886760	0,004249
8	10	0,873710	0,004239
9	10	0,871228	0,004564
10	10	0,859950	0,004598
Total	100	0,875322	0,022215

Taula 3.9: Resultats dels contrastos a priori per avaluar les diferents mitjanes *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

Contrast	Valor del Contrast	t	Graus de llibertat	Significació (bilateral).
1	0,554819	157,668	67,596	0,000
2	0,104903	27,905	62,364	0,000
3	-0,105924	-26,166	48,568	0,000
4	-0,101879	-16,146	15,688	0,000
5	-0,082965	-14,525	16,673	0,000
6	-0,058983	-11,326	17,034	0,000
7	-0,055391	-11,744	16,128	0,000
8	-0,016243	-4,814	19,292	0,000
9	-0,011277	-5,504	17,999	0,000

Tornem a observar que es dona heterogeneïtat en les variàncies. A la taula 3.9 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos Helmert plantejats. Trobem que hi ha diferència de signe negatiu que és significativa en el contrast número 3, per tant la conclusió és que la $DI=3$. Aquests resultats es mostren en la figura 3.6. Contràriament al que ha succeït en els dos experiments de simulació anteriors, l'augment en la mitjana de la variable *CORRELACIÓ* es dona fins a $NCAR=3$, mentre que en els casos anteriors l'aturada en el creixement de la variable *CORRELACIÓ* es donava abans, per a $NCAR=2$.

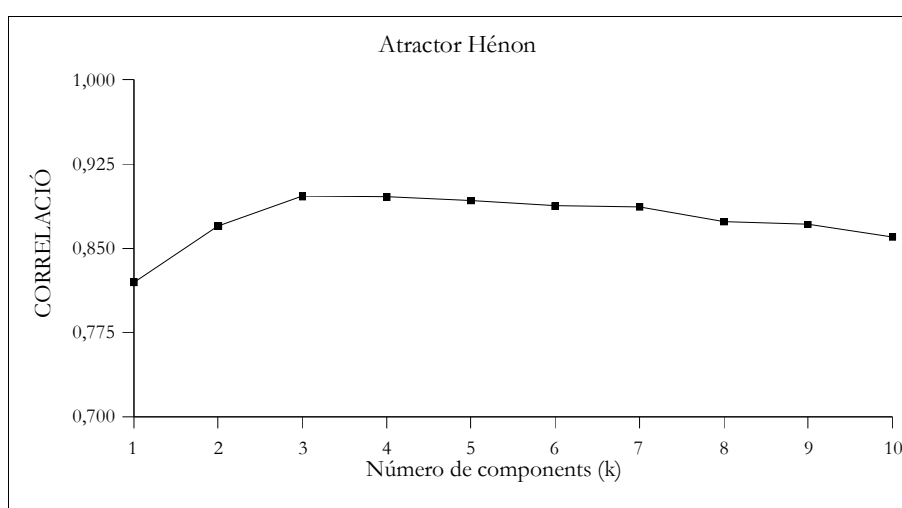


Figura 3.6: *CORRELACIÓ* per als diferents valors de *NCAR* per a la *ST x* del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

3.3.1.4 RESULTATS GLOBALS RESPECTE DE L'ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON

Mitjançant els tres experiments de simulació anteriors, dissenyats amb l'objectiu d'estimar la *DI* per a la *ST x* del mapa de Hénon, veiem que en el cas de la *ST x* del mapa

de Hénon original i en la ST amb soroll afegit amb un nivell de $L/D_A=0,5$ la DI és igual a 2, mentre que per a la ST amb soroll afegit amb un nivell de $L/D_A=1$ la DI és igual a 3. En la figura 3.7 es mostra un gràfic resum on es pot veure com canvia la precisió en la predicció en funció del nombre de components emprats per a la reconstrucció de l'atractor i en funció dels diferents nivells de soroll afegit a la ST original. Aquests resultats seran comentats en el següent capítol.

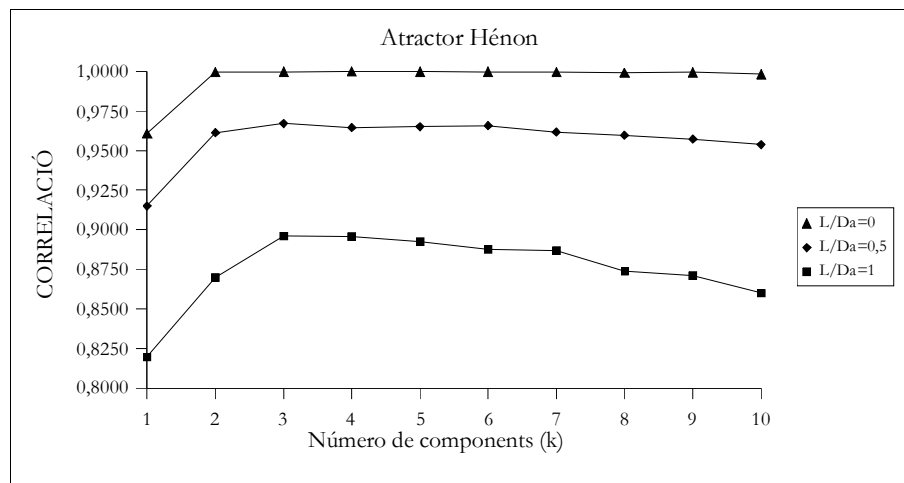


Figura 3.7: Evolució de la *CORRELACIÓ* en funció del nombre de components de l'atractor i per als diferents nivells de soroll.

3.3.2 ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Per tal d'estimar la DI de la ST x de l'atractor de Rössler, de la ST original sense soroll i de les dues ST originals amb dos nivells diferents de soroll afegit, es plantejaran tres experiments de simulació (números 4, 5 i 6) amb la “Variable Independent” *Nombre de Components de l'Atractor Reconstruït (NCAR)* que té 10 valors i on la “Variable

Dependent” serà la *Correlació* entre el valor esperat i la seva predicció (*CORRELACIÓ*). Per a cadascun dels valors de *NCAR* s’han realitzat 10 simulacions, amb els pesos d’inicialització dels entrenaments escollits a l’atzar. L’Experiment 4 permetrà confirmar o no la *Hipòtesi 1.2*, mentre que per a l’avaluació de la *Hipòtesi 2.2* ens fixarem en els resultats globals dels experiments de simulació 4, 5 i 6.

Taula 3.10: Coeficients dels contrastos a priori tipus Helmert emprats per a l’avaluació de l’eina d’estimació.

Nombre de Components de l’Atractor Reconstruït										
Contrast	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	-8	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	-7	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	-6	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	-5	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	-4	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	-3	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Tal com he fet per determinar la DI dels conjunts de dades de la ST Hénon, he plantejat nou contrastos a priori tipus Helmert per tal d’avaluar diferències entre la mitjana d’un tractament de *NCAR* i les mitjanes de la resta de tractaments amb valors de *NCAR* majors. Els esmentats contrastos queden explicitats en la taula 3.10. De l’anterior es desprèn que hem de trobar el primer contrast en que es doni la següent condició,

$$CORRELACIÓ_{NCAR=k} \geq CORRELACIÓ_{NCAR=k+1} \cdots CORRELACIÓ_{NCAR=10}$$

que per als conjunts de dades de la ST x de l’atractor de Rössler, haurà de ser el contrast número 3, per tant $k=3$, quan estimem la DI de la ST sense soroll, i un valor superior en les dues ST amb diferents nivells de soroll afegit. Finalment esmentar que en tots els

experiments de simulació, donat que els contrastos impliquen 9 comparacions, s'aplicarà la Correcció de Bonferroni (Field, 2005). Per tant, tenint en compte que un punt de tall per a la significació de 0,05 en realitzar 9 comparacions el punt criteri per prendre una decisió quedarà en 0,0056.

3.3.2.1 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 4: ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 0$

Taula 3.11: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll ($L/D_A=0$).

NCAR	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,484403	0,001290
2	10	0,993512	0,000690
3	10	0,998370	0,000437
4	10	0,999758	0,000079
5	10	0,999747	0,000039
6	10	0,999846	0,000038
7	10	0,999811	0,000065
8	10	0,999815	0,000046
9	10	0,999810	0,000062
10	10	0,999810	0,000040
Total	100	0,947488	0,155152

En primer lloc és important destacar que hi ha diferències entre les variàncies dels diferents grups, tal com mostra la prova de Levene ($F(9,90)= 34.81, p<0.001$), conseqüentment hem d'avaluar si hi ha diferències en la variable *CORRELACIÓ* respecte dels diferents valors de la variable independent amb la prova de Brown-Forsythe. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 16.42)= 1125925.57, p<0.001$).

Taula 3.12: Resultats dels contrastos a priori per avaluar les diferents mitjanes *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll ($L/D_A=0$).

Contrast	Valor del Contrast	t	Graus de llibertat	Significació (bilateral).
1	4,630855	1258,374	9,092	0,000
2	0,048868	27,889	9,125	0,000
3	0,010006	10,332	9,040	0,000
4	0,000288	1,870	10,226	0,090
5	0,000357	5,030	16,088	0,000
6	-0,000138	-2,331	19,084	0,031
7	0,000003	0,037	12,802	0,971
8	-0,000009	-0,237	19,490	0,815
9	0,000000	0,004	15,395	0,997

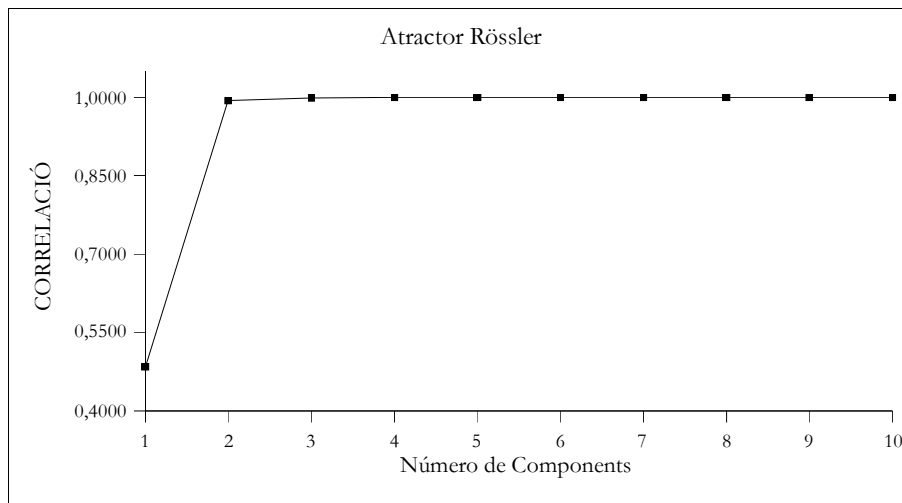


Figura 3.8: *CORRELACIÓ* per als diferents valors de *NCAR* per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll ($L/D_A=0$).

En avaluar les diferències entre els contrastos plantejats caldrà tenir en compte que no s'acompleix el supòsit d'igualtat de variàncies. A la taula 3.12 podem veure el

resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos Helmert plantejats. Donat que trobem que el primer contrast no significatiu és el número 4, la conclusió és que la $DI=4$. Els resultats es poden veure en la figura 3.8.

3.3.2.2 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 5: ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 0,5$

Taula 3.13: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

NCAR	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,473303	0,001276
2	10	0,969906	0,000556
3	10	0,978340	0,000692
4	10	0,982482	0,000603
5	10	0,983017	0,000364
6	10	0,984535	0,000810
7	10	0,984330	0,000443
8	10	0,985087	0,000508
9	10	0,984535	0,000700
10	10	0,984282	0,000424
Total	100	0,930982	0,153393

A la taula 3.13 mostro la mitjana i desviació típica de la variable dependent per a cadascun dels valors de *NCAR*, un cop fetes les deu simulacions. Donat que trobem diferències en les variàncies dels diferents grups, fet que constato mitjançant la prova de Levene ($F(9,90)= 3.88, p<0.001$), he emprat la prova de Brown-Forsythe que ens mostra que hi ha diferències entre les mitjanes de la variable *CORRELACIÓ* respecte dels diferents valors de la variable independent ($F(9, 50.36)= 551499.41, p<0.001$).

Taula 3.14: Resultats dels contrastos a priori per avaluar les diferents mitjanes *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

Contrast	Valor del Contrast	t	Graus de llibertat	Significació (bilateral).
1	4,576784	1245,653	9,422	0,000
2	0,107356	71,554	11,650	0,000
3	0,039891	24,879	10,816	0,000
4	0,010895	8,900	11,772	0,000
5	0,007682	10,756	19,800	0,000
6	0,000095	0,088	10,993	0,931
7	0,000914	1,760	18,879	0,095
8	-0,001357	-3,287	19,484	0,004
9	-0,000252	-0,975	14,828	0,345

A la taula 3.14 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos Helmert. Donat que el primer contrast no significatiu és el número 6, la conclusió és que la $DI=6$. A la figura 3.9 podeu veure els resultats assolits amb un gràfic .

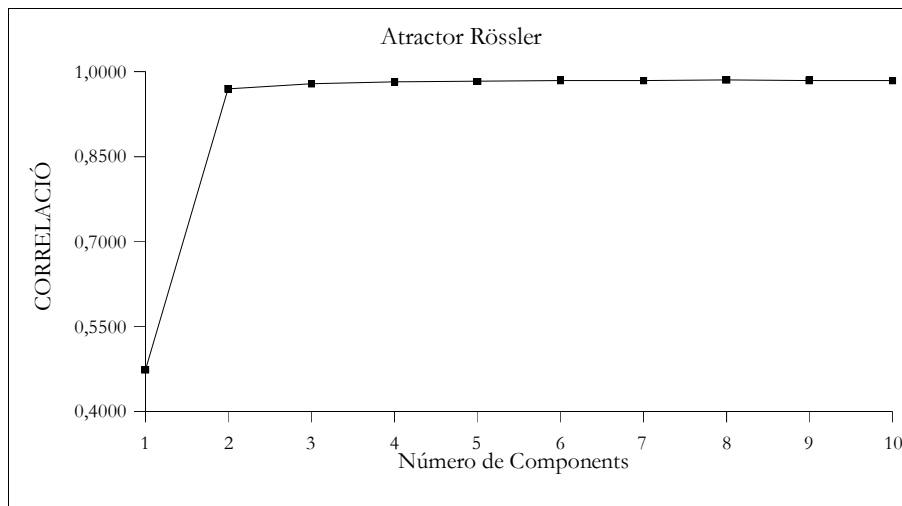


Figura 3.9: *CORRELACIÓ* per als diferents valors de *NCAR* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

3.3.2.3 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 6: ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 1$

Taula 3.15: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

NCAR	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,445400	0,000777
2	10	0,907760	0,001095
3	10	0,935116	0,000552
4	10	0,939112	0,001875
5	10	0,942715	0,001087
6	10	0,946834	0,001285
7	10	0,946640	0,000939
8	10	0,947583	0,001952
9	10	0,946561	0,001656
10	10	0,939200	0,001064
Total	100	0,889692	0,149274

Un cop fetes les deu simulacions per cadascun dels valors de *NCAR*, els resultats assolits, pel que fa la mitjana i desviació típica de la variable dependent, són els de la taula 3.15. En primer lloc és important destacar que hi ha diferències en quant a la desviació típica confirmades mitjançant la prova de Levene ($F(9,90)= 3.63, p=0.001$), conseqüentment no es pot assumir el supòsit d'igualtat de variàncies. Per tal d'avaluar si hi ha diferències en la variable *CORRELACIÓ* entre els diferents valors de la variable *NCAR* he emprat la prova de Brown-Forsythe. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 61.38)= 143957.47, p<0.001$).

Taula 3.16: Resultats dels contrastos a priori per avaluar les diferents mitjanes *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

Contrast	Valor del Contrast	t	Graus de llibertat	Significació (bilateral).
1	4,442917	1738,295	15,781	0,000
2	0,281679	92,905	12,838	0,000
3	0,062836	36,384	30,463	0,000
4	0,034858	9,384	10,676	0,000
5	0,013240	6,640	15,819	0,000
6	-0,007353	-3,931	15,260	0,001
7	-0,006576	-5,260	25,454	0,000
8	-0,009404	-6,800	13,642	0,000
9	-0,007360	-11,821	15,350	0,000

A la taula 3.16 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos Helmert plantejats. Donat que el contrast número 6 és significatiu amb diferència negativa, la conclusió és que la $DI=6$. Els resultats es poden veure en la figura 3.10.

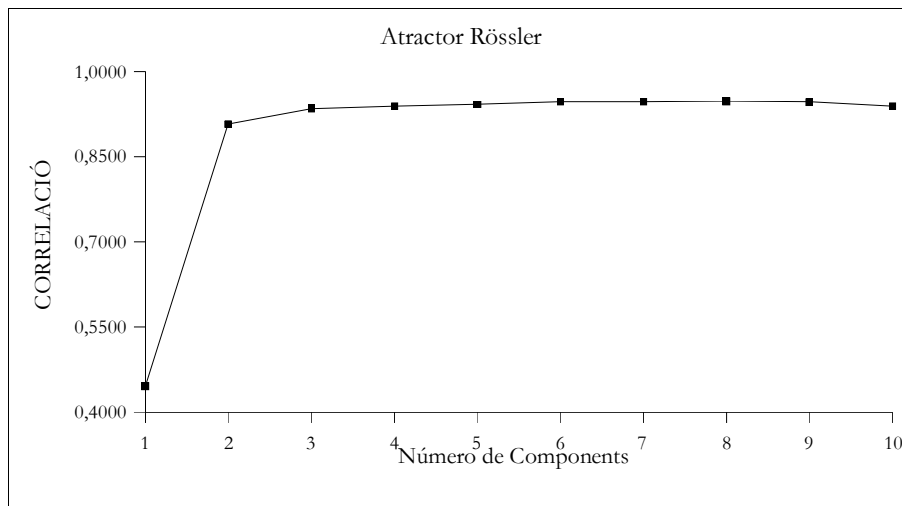


Figura 3.10: *CORRELACIÓ* per als diferents valors de *NCAR* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

3.3.2.4 RESULTATS GLOBAIS RESPECTE DE L'ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Mitjançant els tres experiments de simulació anteriors, dissenyats amb l'objectiu d'estimar la DI per a la ST x de l'atractor de Rössler, veiem que en el cas de la ST x de l'atractor de Rössler original la DI és igual a 4, mentre que per a la ST amb soroll afegit amb un nivell de $L/D_A=0,5$ i la ST amb soroll afegit amb un nivell de $L/D_A=1$ la DI és igual a 6.

A la figura 3.11 es mostra un gràfic resum on es pot veure com canvia la precisió en la predicció en funció del nombre de components emprats per a la reconstrucció de l'atractor i en funció dels diferents nivells de soroll afegit a la ST original. Aquests resultats seran comentats en el següent capítol dedicat a les conclusions.

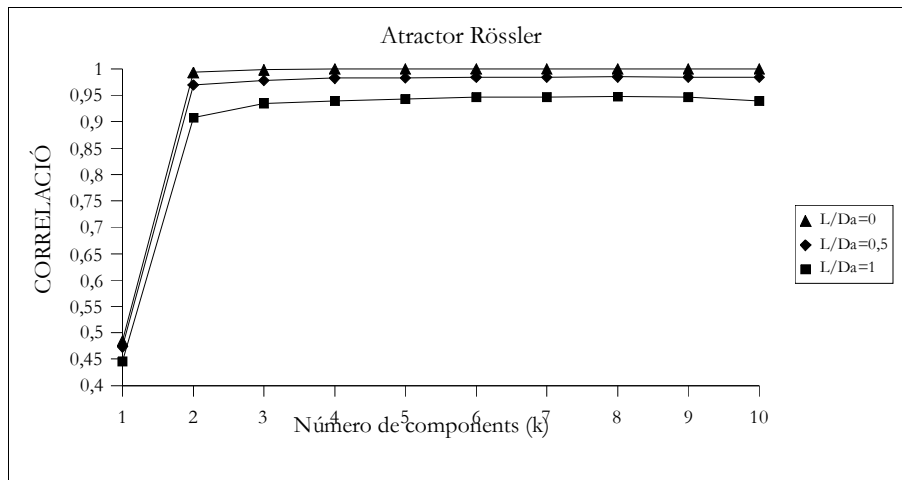


Figura 3.11: Evolució de la *CORRELACIÓ* en funció del nombre de components de l'atractor i per als diferents nivells de soroll.

3.4 ANÀLISI DE LA DEPENDÈNCIA A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

3.4.1 AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON

Donat que la ST x del mapa de Hénon es caracteritza per tenir el primer exponent de Lyapunov positiu i el segon negatiu (Wolf et al., 1985), fet que es dona en una ST amb presència de SCI quan originàriament té $DI=2$, aquest mètode ha de permetre que aquesta sigui identificada per a les diferents ST del mapa de Hénon. Per tal de ser constatat es plantejaran tres experiments de simulació (números 7, 8 i 9) amb la “Variable Independent” *Nombre d'Iteracions (NI)* que té 10 valors i on la “Variable Dependent” serà la *Correlació* entre el valor esperat i la seva predicció (*CORRELACIÓ*). L'Experiment 7 permetrà confirmar o no la *Hipòtesi 3.1*, mentre que per a l'avaluació de la *Hipòtesi 4.1* ens fixarem en els resultats globals dels experiments de simulació 7, 8 i 9.

S'han realitzat 10 simulacions, amb els pesos d'inicialització dels entrenaments escollits a l'atzar. En aquest cas, donat que ja hem estimat prèviament la DI , tenim que per als conjunts sense nivell de soroll ($L/D_A=0$) i amb nivell de soroll $L/D_A=0,5$ la XNA emprada per fer les prediccions té dues unitats d'entrada, dues capes amagades amb quatre unitats cadascuna i dues unitats de sortida. En canvi, donat que per a la ST amb nivell de soroll $L/D_A=1$ el resultat ha estat que la $DI=3$, la XNA emprada per fer les prediccions té tres unitats d'entrada, dues capes amagades amb sis unitats cadascuna i tres unitats de sortida. Un cop fetes aquestes simulacions i assolit el nivell idoni de predicció de la ST s'ha fet, per a cadascuna de les simulacions, la iteració de la predicció des de $NI=1$ fins a $NI=10$, registrant el valor de *CORRELACIÓ*. Per tal d'avaluar si

s'assoleixen els resultats esperats de presència de SCI cal veure si la *CORRELACIÓ* disminueix conforme augmenta el valor de *NI*. D'altra banda es completarà aquesta informació identificant aquelles comparacions que resulten significatives entre totes les possibles comparacions múltiples de mitjanes dos a dos que corresponen a valors consecutius,

$$CORRELACIÓ_{NI=1,NI=2} > CORRELACIÓ_{NI=2,NI=3} > \dots > CORRELACIÓ_{NI=9,NI=10}$$

Un cop detectat el decreixement esperat, és important constatar la seva forma, si és que aquest es produeix. En el capítol dos, en el moment de definir els *atractors estranys*, he esmentat que aquests es caracteritzen per formes geomètriques amb una estructura i un ordre determinat on les trajectòries que descriu l'atractor s'expandeixen i contrauen al llarg de l'evolució del Sistema Dinàmic. Per tant, si agaféssim dos punts molt propers d'aquest atractor i miréssim la seva evolució veuríem com aquests s'anirien separant al llarg de la seva evolució. Aquesta separació va augmentat cada cop més a mesura que ens allunyem del punt inicial. Això, si ho traslladem al nostre experiment, s'hauria de traduir en una disminució de la correlació, entre la puntuació estimada i la puntuació observada, que es va fent més gran a mesura que augmenten les iteracions fins arribar a una estabilització quan la correlació s'apropa a zero. De tot l'anterior hem d'esperar que aquest decreixement serà no lineal i, a més, tindrà la forma de la funció logística. Per aquest motiu, donat que la Variable Independent i la Variable Dependent són quantitatives avaluaré si realment es dóna aquest ajustament a la funció logística mitjançant el mòdul de regressió curvilínia del programa SPSS.

Tenint en compte les hipòtesis enunciades, per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll trobarem una disminució significativa de la variable *CORRELACIÓ* a mesura que augmenta la variable *NI*. La forma del decreixement, a més, s'hauria d'ajustar a la funció logística. El decreixement i l'ajust a la funció logística hauran de ser

menors en les dues ST amb diferents nivells de soroll afegit. Finalment esmentar que en tots els experiments de simulació, donat que els contrastos impliquen 9 comparacions, s'aplicarà la Correcció de Bonferroni (Field, 2005). Per tant, tenint en compte que un punt de tall per a la significació de 0,05 en realitzar 9 comparacions el punt criteri per pendre una decisió quedarà en 0,0056.

3.4.1.1 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 7: AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 0$

Un cop fetes les deu simulacions i desenvolupades les iteracions de $NI=1$ fins a $NI=10$, els resultats assolits, pel que fa la mitjana i desviació típica de la variable dependent, són els de la taula 3.17.

Taula 3.17: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll ($L/D_A=0$).

NI	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,9995	0,0001
2	10	0,9967	0,0007
3	10	0,9785	0,0058
4	10	0,9507	0,0056
5	10	0,9265	0,0118
6	10	0,8648	0,0209
7	10	0,6955	0,0412
8	10	0,4934	0,0561
9	10	0,2208	0,0332
10	10	0,1095	0,0584
Total	100	0,7236	0,3211

Es poden veure diferències en la desviació típica que queden confirmades mitjançant la prova de Levene ($F(9,90)= 9.95, p<0.001$), conseqüentment no es pot assumir la igualtat de variàncies i hem de mirar si hi ha diferències entre els valors de la variable independent amb la prova de Brown-Forsythe. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 34.82)= 1124.44, p<0.001$).

Taula 3.18: Contrastos a posteriori de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* amb la prova T3 de Dunnet per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll ($L/D_A=0$).

NI_{Previ}	NI_{Posterior}	Diferència	Significació
1	2	-0,0029	0,000
2	3	-0,0182	0,000
3	4	-0,0278	0,000
4	5	-0,0242	0,002
5	6	-0,0617	0,000
6	7	-0,1693	0,000
7	8	-0,2020	0,000
8	9	-0,2726	0,000
9	10	-0,1113	0,004

Es manté el supòsit de no acompliment de la igualtat de variàncies. A la taula 3.18 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos a posteriori, mitjançant la prova T3 de Dunnet. Aquesta és una de les alternatives per les que podem optar quan es pretén realitzar comparacions múltiples i no s'acompleix la condició d'homogeneïtat de variàncies, especialment quan tenim una mostra petita (Dunnet, 1980; Hochberg i Tamhane, 1987; Field, 2005). Com es pot veure, totes les diferències són significatives mostrant clarament que hi ha SCI. Aquest resultat es poden veure a la figura 3.12.

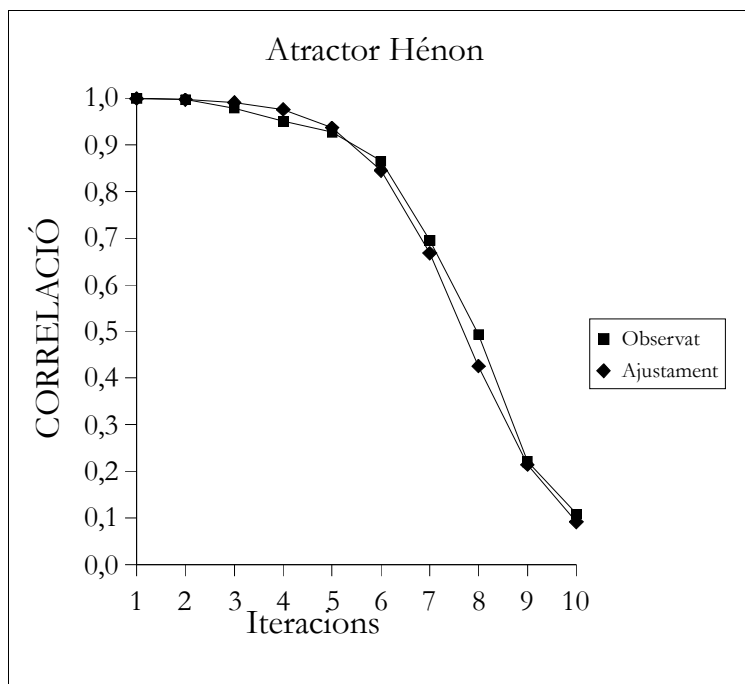


Figura 3.12: Canvi en la variable *CORRELACIÓ* en funció dels diferents valors de la variable *NI* per a la ST x del mapa de Hénon sense soroll ($L/D_A=0$). He afegit el gràfic de la funció logística per veure com ajusta a les dades observades.

D'altra banda, pel que fa a la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ*, he realitzat l'anàlisi de la regressió curvilínia prenent la funció logística per tal d'avaluar si aquesta s'hi ajusta o no. Els resultats mostren que la relació entre ambdues variables s'ajusta a la funció logística ($R^2 = 0.9641$; $F(1,98) = 2633.86$; $p < 0.001$). L'equació té els següents paràmetres que resulten igualment significatius (Constant amb $T = 8.29$ i $p < 0.001$, i el Coeficient amb $T = 51.46$ i $p < 0.001$).

$$CORRELACIÓ = \frac{1}{1 + 0,000463 \cdot 2,710781^{NI}}$$

3.4.1.2 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 8: AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 0,5$

A la taula següent es mostren les mitjanes i desviacions típiques per als diferents valors de NI , després de fer totes les simulacions i desenvolupar les iteracions de $NI=1$ fins a $NI=10$. Mitjançant la prova de Levene confirmem les aparents diferències en les desviacions típiques ($F(9,90) = 6.16, p < 0.001$), per tant, no es pot assumir la condició d'igualtat de variàncies.

Taula 3.19: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A = 0,5$).

NI	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,9590	0,0006
2	10	0,9086	0,0033
3	10	0,8114	0,0077
4	10	0,6283	0,0120
5	10	0,2839	0,0221
6	10	0,2560	0,0342
7	10	0,0418	0,0439
8	10	-0,0537	0,0445
9	10	-0,0612	0,0427
10	10	-0,0590	0,0624
Total	100	0,3715	0,4003

Per tal d'avaluar si hi ha diferències en les mitjanes en funció dels diferents valors de *NI* he emprat la prova de Brown-Forsythe la qual ens permet concloure que els resultats són significatius ($F(9, 42.89) = 1523.47$, $p < 0.001$). Es manté el supòsit de no acompliment de la igualtat de variàncies.

Taula 3.20: Contrastos a posteriori de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* amb la prova T3 de Dunnett per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A = 0,5$).

NI_{Previ}	NI_{Posterior}	Diferència	Significació
1	2	-0,0504	0,000
2	3	-0,0972	0,000
3	4	-0,1831	0,000
4	5	-0,3444	0,000
5	6	-0,0279	0,718
6	7	-0,2142	0,000
7	8	-0,0956	0,005
8	9	-0,0075	1,000
9	10	0,0022	1,000

A la taula 3.20 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos a posteriori. Com es pot veure totes les diferències són significatives, tret de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* entre $NI=5-NI=6$, $NI=8-NI=9$ i $NI=9-NI=10$, mostrant igualment que hi ha SCI encara que no de forma tant definitiva perquè la primera diferència no significativa trenca la tendència en el decreixement. Els resultats es poden veure més clarament a la figura 3.13.

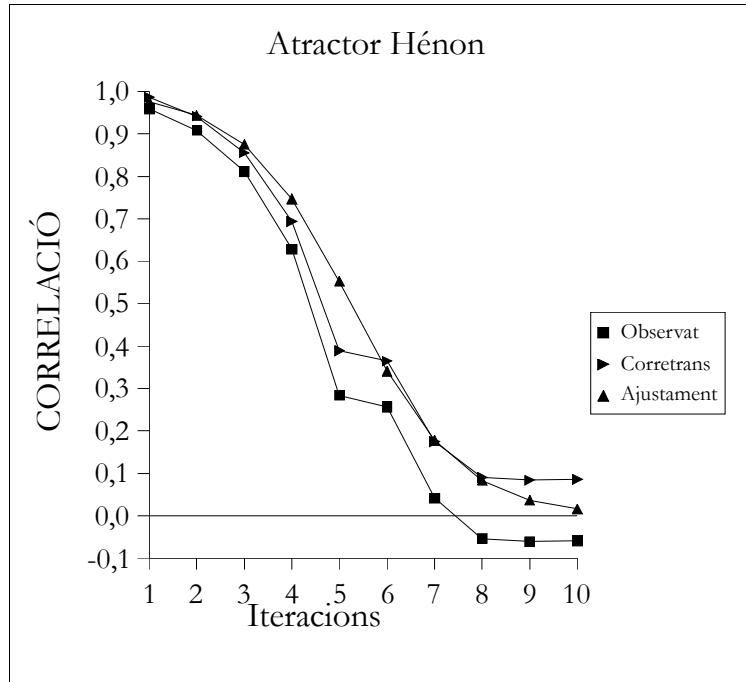


Figura 3.13: Canvi en la variable *CORRELACIÓ* en funció dels diferents valors de la variable *NI* per a la *ST x* del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

He afegit el gràfic de la funció logística per veure com ajusta a les dades transformades.

Per estudiar la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ*, he realitzat l'anàlisi de la regressió curvilínia prenent la funció logística per tal d'avaluar si aquesta s'hi ajusta o no. Donat que hi ha correlacions negatives he hagut d'aplicar una transformació a les dades per tal que entressin dins l'interval $]0,1[$ corresponent a la imatge de la funció logística, creant la variable *CORRETRANS* per a aquest cas concret. A continuació teniu la transformació aplicada,

$$CORRETRANS = CORRELACIÓ \times 0,88495575 + 0,1377185 .$$

Els resultats mostren que la relació entre ambdues variables s'hi ajusta ($R^2 = 0.6173$; $F(1,98) = 158.07$; $p < 0.001$). L'equació té els següents paràmetres que resulten igualment significatius (Constant amb $T = 2.33$ i $p < 0.03$, i el Coeficient amb $T = 14.46$ i $p < 0.001$).

$$CORRETRANS = \frac{1}{1 + 0,010483 \cdot 2,386240^{NI}}$$

3.4.1.3 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 9: AVALUACIÓ DE LA PRESENÇA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 1$

Després de realitzar les deu simulacions i desenvolupar les iteracions de $NI=1$ fins a $NI=10$, els resultats de mitjana i desviació típica de la variable dependent són els que es mostren a la taula 3.21.

Taula 3.21: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

NI	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,8895	0,0050
2	10	0,7929	0,0106
3	10	0,5871	0,0174
4	10	0,3381	0,0183
5	10	0,1588	0,0449
6	10	0,2091	0,0360
7	10	0,1691	0,0350
8	10	0,1177	0,0260
9	10	0,1135	0,0597
10	10	0,1201	0,0452
Total	100	0,3496	0,2853

Amb la prova de Levene ($F(9,90)= 8.30, p<0.001$) observem que hi ha diferències significatives entre les desviacions típiques de cada grup. En no poder assumir la igualtat de variàncies cal emprar la prova de Brown-Forsythe per tal de constatar si hi ha diferències entre els valors de la variable independent. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 48.76)= 761.79, p<0.001$).

A la taula 3.22 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos a posteriori, tenint en compte que no hi ha igualtat de variàncies. Com es pot veure solament les cinc primeres comparacions són significatives, en canvi es pot veure

clarament que no hi ha diferències significatives entre les comparacions $NI=5-NI=6$, $NI=6-NI=7$, $NI=7-NI=8$, $NI=8-NI=9$ i $NI=9-NI=10$.

Taula 3.22: Contrastos a posteriori de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* amb la prova T3 de Dunnet per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

NI_{Previ}	NI_{Posterior}	Diferència	Significació
1	2	-0,0967	0,000
2	3	-0,2058	0,000
3	4	-0,2489	0,000
4	5	-0,1793	0,000
5	6	0,0503	0,450
6	7	-0,0400	0,622
7	8	-0,0514	0,076
8	9	-0,0041	1,000
9	10	0,0066	1,000

En realitzar l'anàlisi de la regressió curvilínia els resultats mostren que la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ* s'ajusta a la funció logística ($R^2 = 0.7998$; $F(1,98) = 391.62$; $p < 0.001$). En la següent equació es mostren els paràmetres que resulten significatius (Constant amb $T = 6.84$ i $p < 0.001$, i el Coeficient amb $T = 42.42$ i $p < 0.001$).

$$CORRELACIÓ = \frac{1}{1 + 0,169514 \cdot 1,594395^{NI}}$$

A la figura 3.14 es poden veure més clarament aquests resultats.

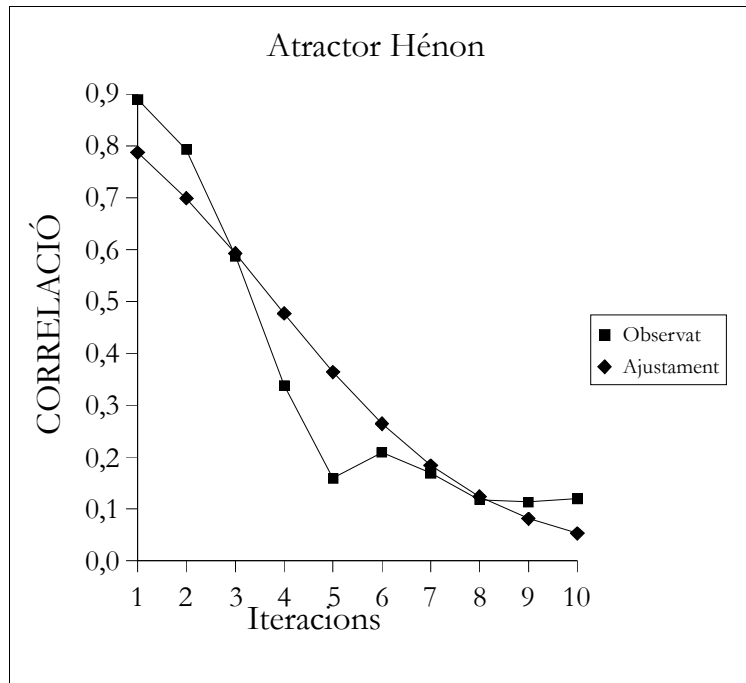


Figura 3.14: Canvi en la variable *CORRELACIÓ* en funció dels diferents valors de la variable *NI* per a la ST *x* del mapa de Hénon amb nivell de soroll ($L/D_A=1$). He afegit el gràfic de la funció logística per veure com ajusta a les dades observades.

3.4.1.4 RESULTATS GLOBALS RESPECTE DE L'AVALUACIÓ DE LA PRESÈNCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL *x* DEL MAPA DE HÉNON

Aquest punt de vista global ens ha de permetre veure com afecta el fet d'afegir soroll a la ST original *x* del mapa de Hénon en la identificació de la SCI. En la figura 3.15 es mostra un gràfic resum on es pot veure com canvia la precisió en la predicció en funció del nombre d'iteracions realitzades i en funció dels diferents nivells de soroll afegit a la ST original. Hi ha un aspecte comú a tots els conjunts de dades que és el fet que hi ha una disminució significativa de la precisió en funció del nombre de les iteracions.

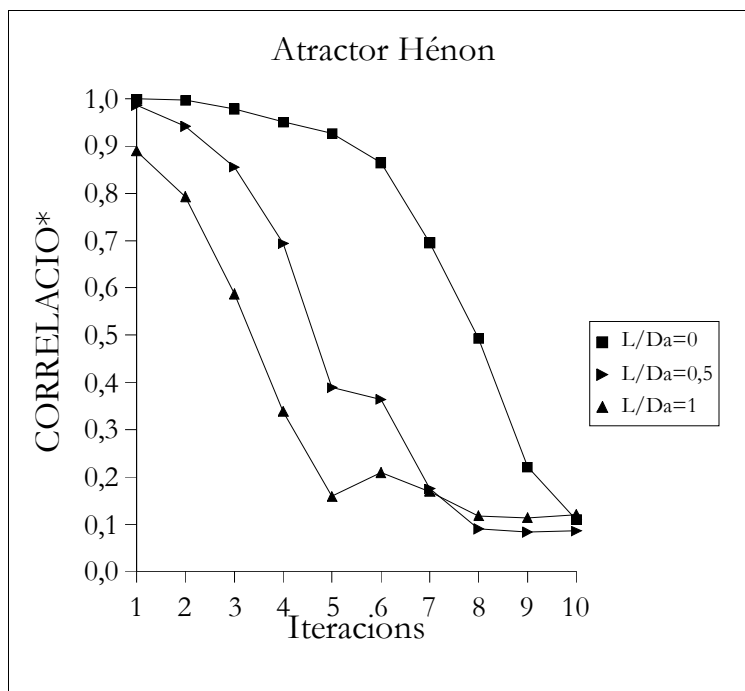


Figura 3.15: Resultats per a diferents iteracions i per a diferents nivells de soroll en la predicció amb la XNA (* *CORRETRANS* per a $L/D_A=0,5$).

Aquesta disminució té patrons diferents en el sentit que quan més gran és el nivell de soroll, la davallada de la variable *CORRELACIÓ* es dona abans. La presència de soroll fa que canviï l'ajust a la funció logística en la direcció que disminueix R^2 . Aquest canvi no es produeix linealment, contràriament trobem que per al nivell de soroll $L/D_A=0,5$ el valor de R^2 és inferior al trobat per a $L/D_A=1$.

Taula 3.23: Mitjana i Desviació típica per a la variable *RANG* comparant entre els tres conjunts de dades per a la ST x del mapa de Hénon.

Variable RANG	Nivell de Soroll		
	$L/D_A=0$	$L/D_A=0,5$	$L/D_A=1$
Mitjana	0,890041	1,018003	0,769418
Desviació Típica	0,058474	0,062355	0,048471

Afegiré un darrer element de judici per tal de valorar com afecta l'addició dels dos nivells de soroll a la detecció de SCI. Es defineix una nova variable que anomenaré *RANG* i que sorgeix d'aplicar la diferència entre $CORRELACIÓ_{NI=1}$ i $CORRELACIÓ_{NI=10}$ als resultats de cadascun dels experiments de simulació fets amb les ST x del mapa de Hénon. A la taula 3.23 es poden veure els resultats de la variable *RANG* per a cadascun dels conjunts de dades. Un cop feta la prova de Levene ($F(2,27) = 0.24, p > 0.05$) veiem que hi ha igualtat en les desviacions típiques. En fer l'Anàlisi de la Variància trobem diferències significatives entre les diferents mitjanes ($F(2,27) = 48.01, p < 0.001$). Aquests resultats seran comentats en el capítol següent.

3.4.2 AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Donat que la ST x de l'atractor de Rössler es caracteritza per tenir el primer exponent de Lyapunov positiu, el segon 0 i el tercer negatiu (Wolf et al., 1985), qualitat característica d'una ST amb presència de SCI quan originàriament té $DI=3$, aquest mètode ha de permetre que aquesta sigui identificada per a les diferents ST de l'atractor de Rössler. Per tal de ser constatat es plantejaran tres experiments de simulació (números 10, 11 i 12) amb “Variable Independent” *Nombre d'Iteracions (NI)* que té 10 valors i on la “Variable Dependent” serà la Correlació entre el valor esperat i la seva predicció (*CORRELACIÓ*). L'Experiment 10 permetrà confirmar o no la *Hipòtesi 3.2*, mentre que per a l'avaluació de la *Hipòtesi 4.2* ens fixarem en els resultats globals dels experiments de simulació 10, 11 i 12.

S'han realitzat 10 simulacions, amb els pesos d'inicialització dels entrenaments escollits a l'atzar. En aquest cas, donat que ja hem estimat prèviament la DI, tenim que per al conjunts amb sense nivell de soroll ($L/D_A=0$) la XNA emprada per fer les prediccions té quatre unitats d'entrada, dues capes amagades amb vuit unitats cadascuna i quatre unitats de sortida. En canvi, donat que per a la ST amb nivell de

soroll $L/D_A=0,5$ i amb nivell de soroll $L/D_A=1$ el resultat ha estat que la DI=6, la XNA emprada per fer les prediccions té sis unitats d'entrada, dues capes amagades amb dotze unitats cadascuna i sis unitats de sortida. Un cop fetes aquestes simulacions i assolit el nivell idoni de predicció de la ST s'han fet, per a cadascuna de les simulacions, la iteració de la predicció des de $NI=1$ fins a $NI=10$, registrant el valor de *CORRELACIÓ*. Per tal d'avaluar si s'assoleixen els resultats esperats cal veure si la *CORRELACIÓ* disminueix conforme augmenta el valor de *NI*. D'altra banda es completarà aquesta informació identificant aquelles comparacions que resulten significatives entre totes les possibles comparacions múltiples de mitjanes dos a dos que corresponen a valors consecutius,

$$CORRELACIÓ_{NI=1,NI=2} > CORRELACIÓ_{NI=2,NI=3} > \dots > CORRELACIÓ_{NI=9,NI=10}$$

Un cop detectat el decreixement esperat, és important constatar la forma d'aquest, si és que aquest es produeix, tal com hem fet en els experiments de simulació 4, 5 i 6. En aquest cas, tenint en compte les hipòtesis enunciades, per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll trobarem una disminució significativa de la variable *CORRELACIÓ* a mesura que augmenta la variable *NI*. Aquest decreixement, a més, s'ajustaria a la funció logística. El decreixement i l'ajust a la funció logística hauran de ser menors en les dues ST amb diferents nivells de soroll afegit. Finalment esmentar que en tots els experiments de simulació, donat que els contrastos impliquen 9 comparacions s'aplicarà la Correcció de Bonferroni (Field, 2005). Per tant, tenint en compte que un punt de tall per a la significació de 0,05 en realitzar 9 comparacions el punt criteri per pendre una decisió quedarà en 0,0056.

3.4.2.1 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 10: AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 0$

Un cop fetes les deu simulacions i desenvolupades les iteracions de $NI=1$ fins a $NI=10$, els resultats assolits, pel que fa la mitjana i desviació típica de la variable dependent, són els de la següent taula.

Taula 3.24: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll ($L/D_A=0$).

NI	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,9997	0,0001
2	10	0,9990	0,0003
3	10	0,9985	0,0005
4	10	0,9977	0,0008
5	10	0,9963	0,0015
6	10	0,9952	0,0020
7	10	0,9940	0,0027
8	10	0,9918	0,0035
9	10	0,9903	0,0039
10	10	0,9887	0,0052
Total	100	0,9951	0,0044

Les aparents diferències en quant a la desviació típica de la taula 3.24 queden confirmades mitjançant la prova de Levene ($F(9,90)= 7.72, p<0.001$) conseqüentment no es pot assumir la igualtat de variàncies i hem de mirar si hi ha diferències entre els

valors de la variable independent amb la prova de Brown-Forsythe. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 36.07) = 21.22, p < 0.001$).

Taula 3.25: Contrastos a posteriori de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* amb la prova T3 de Dunnet per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll ($L/D_A = 0$).

NI_{Previ}	NI_{Posterior}	Diferència	Significació
1	2	-0,0007	0,002
2	3	-0,0005	0,488
3	4	-0,0008	0,428
4	5	-0,0014	0,441
5	6	-0,0011	0,992
6	7	-0,0012	1,000
7	8	-0,0022	0,971
8	9	-0,0015	1,000
9	10	-0,0016	1,000

A la taula 3.25 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos a posteriori per tal d'avaluar si hi ha o no decreixement en la precisió de la predicció. Si bé s'han constatat diferències significatives a nivell global, pel que fa a la comparació dos a dos entre puntuacions consecutives, solament hi ha diferència significativa entre la primera i la segona iteració. Aquest resultat es poden veure més clarament a la figura 3.16.

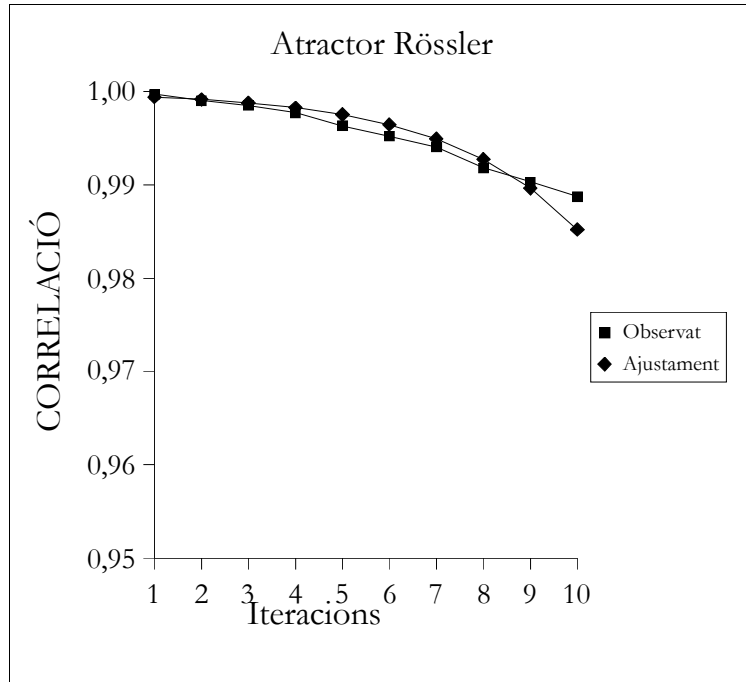


Figura 3.16: Canvi en la variable *CORRELACIÓ* en funció dels diferents valors de la variable *NI* per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll ($L/D_A=0$). He afegit el gràfic de la funció logística per veure com ajusta a les dades observades.

D'altra banda, pel que fa a la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ*, he realitzat l'anàlisi de la regressió curvilínia prenent la funció logística per tal d'avaluar si aquesta s'hi ajusta o no. Els resultats mostren que la relació entre ambdues variables s'ajusta a la funció logística ($R^2 = 0.833$; $F(1,98) = 488.74$; $p < 0.001$). L'equació té els següents paràmetres que resulten igualment significatius (Constant amb $T = 9.899$ i $p < 0.001$, i el Coeficient amb $T = 61.42$ i $p < 0.001$).

$$CORRELACIÓ = \frac{1}{1 + 0,000411 \cdot 1,433243^{NI}}$$

3.4.2.2 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 11: AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 0,5$

Després de realitzar les deu simulacions i desenvolupar les iteracions de $NI=1$ fins a $NI=10$, els resultats de mitjana i desviació típica de la variable dependent es mostren a la taula 3.26.

Taula 3.26: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

NI	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,9839	0,0007
2	10	0,9813	0,0009
3	10	0,9778	0,0016
4	10	0,9747	0,0019
5	10	0,9721	0,0017
6	10	0,9705	0,0019
7	10	0,9634	0,0034
8	10	0,9599	0,0049
9	10	0,9547	0,0057
10	10	0,9452	0,0063
Total	100	0,9683	0,0122

Amb la prova de Levene ($F(9,90)= 5.19, p<0.001$) observem que hi ha diferències significatives entre les desviacions típiques de cada grup. En no poder

assumir la igualtat de variàncies cal emprar la prova de Brown-Forsythe per tal de constatar si hi ha diferències entre els valors de la variable independent. Els resultats són significatius pel que fa a la diferència de mitjanes ($F(9, 39.63)= 125.61$, $p<0.001$).

Taula 3.27: Contrastos a posteriori de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* amb la prova T3 de Dunnet per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$).

NI_{Previ}	NI_{Posterior}	Diferència	Significació
1	2	-0,0026	0,000
2	3	-0,0035	0,001
3	4	-0,0031	0,035
4	5	-0,0026	0,157
5	6	-0,0016	0,855
6	7	-0,0071	0,002
7	8	-0,0034	0,902
8	9	-0,0052	0,701
9	10	-0,0096	0,078

Per tal d'avaluar si hi ha o no decreixement en la precisió de la predicció, a la taula 3.27 tenim el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos a posteriori. S'han constatat diferències significatives a nivell global, però entre puntuacions consecutives dos a dos hi ha diferència significativa entre els tres primeres valors ($NI=1-NI=2$ i $NI=2-NI=3$) i també a la sisena comparació ($NI=6-NI=7$). A la figura 3.17 podeu veure aquests resultats.

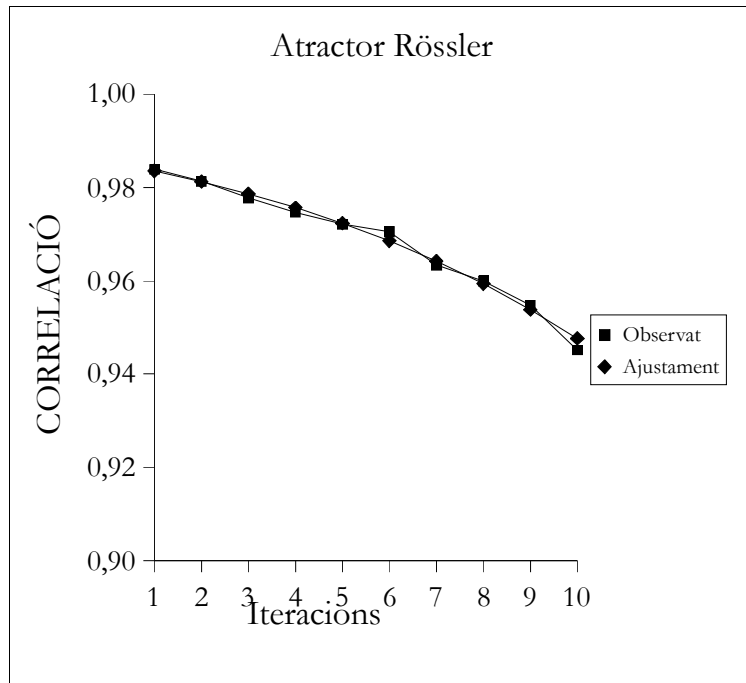


Figura 3.17: Canvi en la variable *CORRELACIÓ* en funció dels diferents valors de la variable *NI* per a la *ST* x de l'Atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=0,5$). He afegit el gràfic de la funció logística per veure com ajusta a les dades observades.

Per tal d'avaluar si la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ* s'ajusta o no a la funció logística he realitzat l'anàlisi de la regressió curvilínia. Els resultats mostren que la relació entre ambdues variables s'ajusta a la funció logística ($R^2=0.9469$; $F(1,98)=1746.57$; $p<0.001$). L'equació té els següents paràmetres que resulten igualment significatius (Constant amb $T=50.75$ i $p<0.001$, i el Coeficient amb $T=314.9$ i $p<0.001$).

$$CORRELACIÓ = \frac{1}{1 + 0,014660 \cdot 1,141925^{NI}}$$

3.4.2.3 RESULTATS DE L'EXPERIMENT DE SIMULACIÓ 12: AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 1$

A la següent taula es mostren les mitjanes i desviacions típiques per als diferents valors de NI , després de fer totes les simulacions i desenvolupar les iteracions de $NI=1$ fins a $NI=10$.

Taula 3.28: Mitjanes i desviacions típiques de la variable *CORRELACIÓ* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=1$).

NI	N	Mitjana	Desviació Típica
1	10	0,9463	0,0010
2	10	0,9429	0,0012
3	10	0,9353	0,0020
4	10	0,9269	0,0036
5	10	0,9170	0,0041
6	10	0,9130	0,0051
7	10	0,9023	0,0072
8	10	0,8952	0,0075
9	10	0,8918	0,0083
10	10	0,8894	0,0106
Total	10	0,9160	0,0210

Mitjançant la prova de Levene confirmem les aparents diferències en les desviacions típiques ($F(9,90) = 9.14, p < 0.001$), per tant, no es pot assumir la condició d'igualtat de variàncies. Per tal d'avaluar si hi ha diferències en les mitjanes en funció

dels diferents valors de *NI* he emprat la prova de Brown-Forsythe la qual ens permet concloure que els resultats són significatius ($F(9, 45.56) = 127.86, p < 0.001$).

Taula 3.29: Contrastos a posteriori de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* amb la prova T3 de Dunnet per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A = 1$).

NI_{Previ}	NI_{Posterior}	Diferència	Significació
1	2	-0,0035	0,000
2	3	-0,0076	0,000
3	4	-0,0084	0,001
4	5	-0,0099	0,001
5	6	-0,0040	0,851
6	7	-0,0107	0,051
7	8	-0,0071	0,718
8	9	-0,0034	1,000
9	10	-0,0023	1,000

A la taula 3.29 podem veure el resultat de l'anàlisi dels diferents contrastos a posteriori per tal d'avaluar si hi ha o no decreixement en la precisió de la predicció. Tot i que tenim diferències significatives a nivell global, si comparem dos a dos entre puntuacions consecutives solament hi ha diferència significativa entre les quatre primeres diferències. Aquest resultat es poden veure més clarament a la figura 3.18.

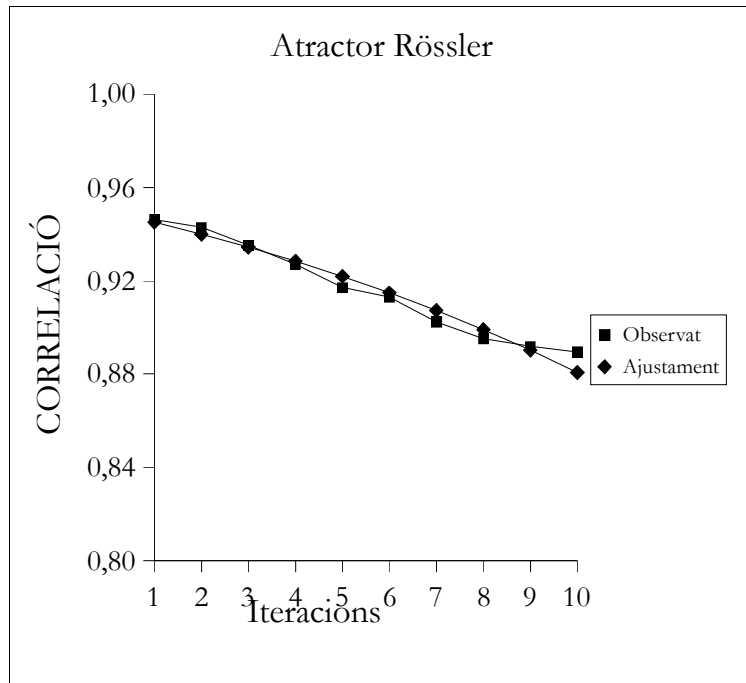


Figura 3.18: Canvi en la variable *CORRELACIÓ* en funció dels diferents valors de la variable *NI* per a la ST x de l'atractor de Rössler amb nivell de soroll ($L/D_A=1$). He afegit el gràfic de la funció logística per veure com ajusta a les dades observades.

D'altra banda, pel que fa a la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ*, he realitzat l'anàlisi de la regressió curvilínia prenent la funció logística per tal d'avaluar si aquesta s'hi ajusta o no. Els resultats mostren que la relació entre ambdues variables s'ajusta a la funció logística ($R^2 = 0.9231$; $F(1,98) = 1175.58$; $p < 0.001$). L'equació té els següents paràmetres que resulten igualment significatius (Constant amb $T = 58.83$ i $p < 0.001$, i el Coeficient amb $T = 365.03$ i $p < 0.001$).

$$CORRELACIÓ = \frac{1}{1 + 0,052959 \cdot 1,098483^{NI}}$$

3.4.2.4 RESULTATS GLOBALS RESPECTE DE L'AVALUACIÓ DE LA PRESENCIA O NO DE SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

A la figura 3.19 es mostra un gràfic resum on es pot veure com canvia la precisió en la predicció en funció del nombre d'iteracions realitzades i en funció dels diferents nivells de soroll afegit a la ST original. Hi ha un aspecte comú a tots els conjunts de dades que és el fet que hi ha una disminució significativa de la precisió en funció del nombre de les iteracions. D'altra banda es pot veure que hi ha diferències en la forma com es dona l'augment de l'error en funció del nombre d'iteracions. La presència de soroll fa que canviï l'ajust a la funció logística en el sentit que augmenta R^2 . Aquest canvi no es produeix linealment, ans al contrari, trobem que per al nivell de soroll $L/D_A=0,5$ el valor de R^2 és superior al trobat per a $L/D_A=1$.

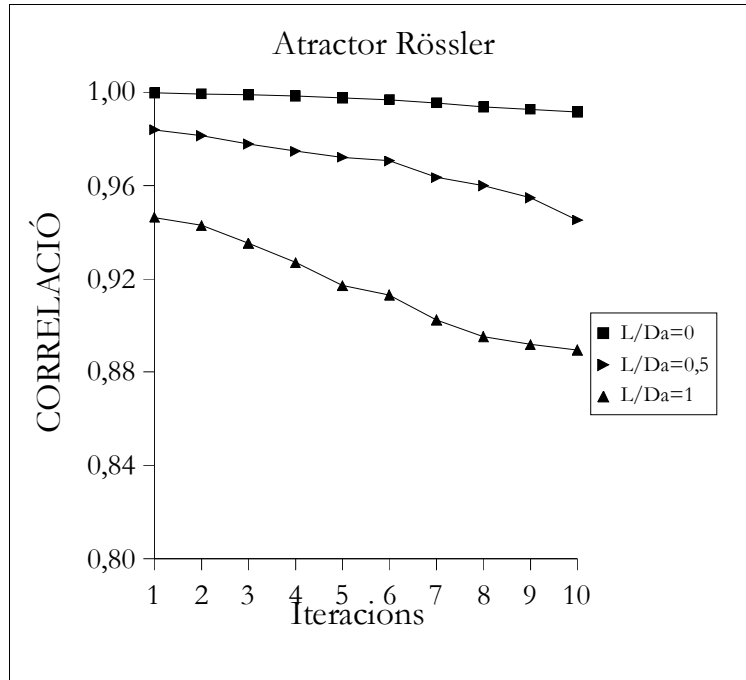


Figura 3.19: Resultats per a diferents iteracions i per a diferents nivells de soroll en la predicció amb la XNA.

A la taula 3.30 es mostren la Mitjana i Desviació Típica de la variable *RANG* per als tres conjunts de dades, elaborats a partir de la ST *x* de l'atractor de Rössler. Un cop aplicada la prova de Levene ($F(2,27)=3.74, p<0.05$) veiem que no hi ha igualtat en les desviacions típiques. Després de la realització de l'Anàlisi de la Variància trobem diferències significatives entre les diferents mitjanes ($F(2,19.21)=92.63, p<0.001$). Aquests resultats seran comentats en el capítol següent.

Taula 3.30: Mitjana i Desviació típica per a la variable *RANG* comparant entre els tres conjunts de dades per a la ST *x* de l'atractor de Rössler.

Variable <i>RANG</i>	Nivell de Soroll		
	<i>L/D_A</i> =0	<i>L/D_A</i> =0,5	<i>L/D_A</i> =1
Mitjana	0,010964	0,038723	0,056915
Desviació Típica	0,005258	0,006012	0,01047

4 DISCUSSIÓ I CONCLUSIONS

Al llarg dels capítols d'aquest treball de recerca, incloent el que comenceu a llegir ara, heu pogut veure les bases de la TSD aplicada a l'Anàlisi de ST. Aquesta exposició acabava plantejant un objectiu que es concretava en un seguit d'objectius específics, en base a unes mancances que penso que existeixen, que per ser assolit ha requerit el plantejament d'unes hipòtesis contrastades mitjançant un seguit d'experiments de simulació. Aquests experiments de simulació tenen la peculiaritat que requereixen un procés d'aprenentatge, potser en aquest entorn podríem parlar d'estimació d'un model, mitjançant XNA. Per aquest motiu he inclòs un segon capítol en que explicava què són, quina és la base del seu funcionament i com és que ens permeten fer predicció de ST en base a un procés iteratiu de minimització de l'error. Amb el capítol precedent he pogut descriure el procediment emprat i els resultats de cadascun dels experiments de simulació per tal d'encarar l'etapa final d'aquest treball.

El present capítol és el que em permet relacionar el treball empíric realitzat amb el marc teòric mostrat anteriorment, en el nostre cas l'anàlisi de ST des del punt de vista de la TSD. Ara toca descriure si s'han concretat els resultats esperats enunciats mitjançant les hipòtesis del tercer capítol. Això ho podeu veure en el següent bloc que he estructurat seguint el guió que marquen aquestes. Posteriorment he elaborat un segon bloc dedicat a cercar i explicar les possibles mancances dels experiments de simulació realitzats en aquest treball d'investigació. Finalment em fixaré en el grau d'acompliment dels objectius proposats en la introducció i proposaré línies futures a seguir per tal de superar els aspectes millorables trobats en el present treball d'investigació.

4.1 DISCUSSIÓ

Aquest bloc està estructurat seguint l'ordre emprat en el moment d'enumerar les diferents hipòtesis d'aquest treball. Això implica no poder seguir la numeració dels diferents experiments de simulació al peu de la lletra. Aquest havia estat efectuat de manera que simplifiqués l'explicació, evitant repeticions innecessàries, del procediment de cadascun dels experiments de simulació i les prediccions empíriques especificades per tal d'avaluar cadascuna d'aquestes hipòtesis.

4.1.1 ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LES SÈRIES TEMPORALS ORIGINALS PER A LA VARIABLE X DEL MAPA DE HÉNON I DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

4.1.1.1 DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 0$

Mitjançant les simulacions de l'*experiment de simulació 1* s'ha pogut estimar la DI de la ST x del mapa de Hénon i $L/D_A = 0$, és a dir, les dades originals sense soroll. El resultat trobat respecte que $DI=2$ concorda amb el que hauríem d'esperar. Ja hem vist anteriorment que aquest SD està caracteritzat per un sistema de dues equacions de diferència amb dues variables (Hénon, 1976), per tant els resultats donen suport a la *Hipòtesi 1.1* en la que s'afirmava que la DI havia de ser dos.

4.1.1.2 DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 0$

Per tal d'estimar la DI, per a aquest conjunt de dades sense soroll, s'han analitzat els resultats de l'*experiment de simulació 4*. Donat que el SD que origina la ST x de l'atractor de Rössler està caracteritzat per tres equacions diferencials i tres variables

(Rössler, 1976), el resultat trobat de $DI=4$ no dona suport a la *Hipòtesi 1.2* en la que s'afirmava que la dimensió havia de ser tres. Més endavant es discutiran aquest resultat i s'exposaran les raons que podrien explicar aquest augment en la DI.

4.1.2 ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ I ANÀLISI DE L'EFECTE DEL SOROLL AFEGIT EN LES DADES ORIGINALS PER A LES SÈRIES TEMPORALS DE LA VARIABLE X DEL MAPA DE HÉNON I DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Amb l'objectiu de veure com afecta l'addició de soroll en l'estimació de la DI, per a la ST original del mapa de Hénon i de l'atractor de Rössler, he estructurat l'apartat en dos blocs. En el primer hi trobem l'estimació de la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll $L/D_A = 0,5$ i l'estimació de la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll $L/D_A = 1$. Al final del bloc hi ha l'anàlisi de l'afectació d'addició dels dos nivells de soroll a la sèrie original. El segon bloc d'aquest apartat té la mateixa estructura que el ja esmentat però pel que fa referència als resultats trobats respecte de les dades per a l'atractor de Rössler.

4.1.2.1 ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ I ANÀLISI DE L'EFECTE DEL SOROLL AFEGIT EN LES DADES ORIGINALS PER A LES SÈRIES TEMPORALS DE LA VARIABLE X DEL MAPA DE HÉNON

Mitjançant l'*experiment de simulació 2* s'arriba al resultat que $DI=2$ per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell de soroll de $L/D_A = 0,5$, és a dir, que no hi ha variació respecte del resultat trobat mitjançant l'*experiment de simulació 1* quan s'afegeix aquest nivell de soroll. Pel que fa a l'*experiment de simulació 3* hi ha un augment de la dimensionalitat arribant al valor de $DI=3$ per a la ST x del mapa de Hénon amb nivell

de soroll de $L/DA = 1$. En aquest cas si que hi ha variació respecte de la DI trobada en les sèries original i amb soroll afegit de grandària $L/DA = 0,5$ per a la ST x del mapa de Hénon. Per tant, al respecte de la *Hipòtesi 2.1* es pot afirmar que el mètode que proposo també es veu afectat per la presència de soroll, tal com passa amb altres tècniques d'anàlisi.

Aquests resultats són consistents amb el que trobem a la bibliografia en el sentit que, el fet d'afegir soroll a una ST, fa augmentar l'estimació de la dimensió d'immersió (Hénon, 1976; Sugihara i May, 1990). D'altra banda és un resultat plausible donat que l'augment en la DI de dos a tres tant podia donar-se al comparar la sèrie original amb la que se li ha afegit un nivell de soroll de $L/DA = 0,5$, com en el cas de comparar aquesta darrera ST amb la que té un nivell de soroll afegit de $L/DA = 1$. Per a les dades de la ST x del mapa de Hénon els resultats mostren aquest segon extrem.

4.1.2.2 ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ I ANÀLISI DE L'EFECTE DEL SOROLL AFEGIT EN LES DADES ORIGINALS PER A LES SÈRIES TEMPORALS DE LA VARIABLE X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Per poder avaluar l'efecte provocat pel fet d'afegir soroll a la ST original, ens hem de fixar en l'*experiment de simulació 5* i l'*experiment de simulació 6*. Pel que fa al primer, el que he fet per a l'estimació amb un nivell de soroll de $L/D_A = 0,5$, el resultat és de $DI=6$, per tant, podem veure que hi ha un biaix respecte del resultat trobat per a la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll. D'altra banda, pel que fa al resultat trobat mitjançant la realització de l'*experiment de simulació 6*, tornem a trobar que la $DI=6$. Veient els resultats globals sobre les estimacions realitzades per als tres conjunts de dades elaborats a partir de la ST x de l'atractor de Rössler, es pot afirmar que també trobem afectació del soroll en l'estimació de la DI en la mateixa direcció del que es troba emprant altres eines d'anàlisi per tant, al respecte de la *Hipòtesi 2.2*, es pot afirmar que les dades són concordants amb el que aquesta enuncïava.

Tot i que els resultats són igualment coincidents amb els que hi ha en la literatura (Rössler, 1976; Sugihara i May, 1990), aquesta afectació és diferent del que podríem esperar tenint en compte que dos nivells de soroll diferents produeixen un mateix resultat. En aquest sentit, donat que s'ha constatat el biaix esmentat, cabria esperar un augment més gradual, en funció de la grandària del soroll afegit, del que ha resultat de l'estimació de la DI en les diferents ST per a l'atractor de Rössler. Igual que pel que fa als resultats de l'*experiment de simulació 4* aquests resultats seran comentats en l'apartat de Conclusions.

4.1.3 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LES SÈRIES TEMPORALS ORIGINALS PER A LA VARIABLE X DEL MAPA DE HÉNON I DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

4.1.3.1 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DEL MAPA DE HÉNON I $L/D_A = 0$

Aquesta avaluació s'ha portat a terme mitjançant l'execució de l'*experiment de simulació 7*. Els resultats d'aquest han permès confirmar la *Hipòtesi 3.1* en el sentit que hi ha presència de SCI. Aquest extrem queda confirmat perquè hi ha diferències significatives amb decreixement observades globalment i també fent comparacions dos a dos entre els diferents nivells de la variable *NI*, definida en el capítol tres. D'altra banda, pel que fa a la relació que s'estableix entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ* podem veure que s'ajusta perfectament a una Funció Logística. Per tant, mitjançant el mètode que he plantejat per a aquesta avaluació, s'aconsegueix mostrar clarament de forma empírica el que s'espera en funció del que trobem en la literatura (Hénon, 1976; Sugihara i May, 1990; Wolf et al., 1985).

4.1.3.2 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS DE LA SÈRIE TEMPORAL X DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER I $L/D_A = 0$

Pel que fa a l'anàlisi de la SCI per a la ST x original de l'atractor de Rössler, contrastada mitjançant l'*experiment de simulació 10*, els resultats no mostren tanta claredat com en el cas anterior. Sí que hi ha diferències significatives amb decreixement a nivell global. Pel que fa a les comparacions dos a dos, solament hi ha diferències significatives entre els valors de la variable $NI=1$ i $NI=2$. Finalment, pel que fa a l'ajust a la Funció Logística, aquest apareix però s'ha d'interpretar en el context dels resultats trobats respecte de la disminució. Donat que tenim una disminució tant poc clara, a partir dels resultats obtinguts, podem concloure que aquest mimetisme ho és de la part de la Funció Logística més propera a l'asíptota dels valors de la variable *CORRELACIÓ* propers a 1. Vist tot l'anterior, he de concloure que les dades recollides mitjançant aquest experiment de simulació no permeten confirmar la *Hipòtesi 3.2*.

4.1.4 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS I ANÀLISI DE L'EFECTE DEL SOROLL AFEGIT EN LES DADES ORIGINALS PER A LES SÈRIES TEMPORALS DE LA VARIABLE X DEL MAPA DE HÉNON I DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Tal com he fet en l'apartat dedicat a l'anàlisi de l'efecte del soroll en l'estimació de la DI, aquest apartat consta de dos blocs, el primer dedicat a l'anàlisi d'aquest efecte en les ST x del mapa de Hénon i el segon dedicat a les ST x de l'atractor de Rössler.

4.1.4.1 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS I ANÀLISI DE L'EFECTE DEL SOROLL AFEGIT EN LES DADES ORIGINALS PER A LES SÈRIES TEMPORALS DE LA VARIABLE X DEL MAPA DE HÉNON

Mitjançant els *experiments de simulació 8 i 9* hem pogut saber fins a quin punt es dona SCI en les ST x del mapa de Hénon quan hi afegim soroll. En el primer experiment, on s'avaluava respecte de la ST x del mapa de Hénon amb soroll afegit de $L/D_A = 0,5$, trobem que hi ha diferències significatives amb decreixement a nivell global. D'altra banda, pel que fa a les comparacions a posteriori dos a dos trobem que totes són significatives, tret de les diferències en la variable *CORRELACIÓ* entre $NI=5-NI=6$, $NI=8-NI=9$ i $NI=9-NI=10$. Pel que fa a la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ*, aquesta s'ajusta perfectament a la Funció Logística. Finalment vull fer esment que aquest és l'únic experiment de simulació de la sèrie de sis dedicats a l'avaluació de la SCI en que hi ha tres valors de la variable *CORRELACIÓ*, per a $NI=8$, $NI=9$ i $NI=10$, que estan per sota de zero.

Pel que fa a l'*experiment de simulació 9* també trobem que hi ha diferències significatives decreixents a nivell global. Respecte de les comparacions a posteriori dos a dos entre els diferents valors de la variable *NI*, en resulten cinc de significatives essent les no significatives les comparacions $NI=5-NI=6$, $NI=6-NI=7$, $NI=7-NI=8$, $NI=8-NI=9$ i $NI=9-NI=10$. Finalment, pel que fa a l'ajust a la Funció Logística trobem igualment que aquest és clar per a la ST amb una major grandària del soroll afegit.

Per tal de treure conclusions al respecte de la *Hipòtesi 4.1* cal analitzar l'efecte dels dos nivells de soroll afegit a la ST x original del mapa de Hénon. Per aconseguir-ho disposem de dos indicadors, ja esmentats en el capítol dedicat a resultats. En primer lloc tenim la possibilitat de determinar quant disminueix la SCI, en funció de l'addició de soroll, mitjançant la variable *RANG*. En principi, per tal que quedi contrastada la hipòtesi, hauríem d'esperar una disminució del seu valor quan afegim soroll, primer amb un valor de $L/D_A = 0,5$ i després amb un valor de $L/D_A = 1$. Si recuperem els

resultats del Capítol 3 veurem que aquest patró no s'acompleix, sí que hi ha disminució entre els valors de $L/D_A = 0$ i $L/D_A = 1$, però aquesta tendència queda truncada donat que el valor de la variable *RANG* és màxim per a $L/D_A = 0,5$. D'altra banda, tenim la possibilitat de valorar l'ajust a la Funció Logística de la relació entre la variable *NI* i la variable *CORRELACIÓ*. Un altre cop els resultats són contraris al que esperàvem, sí que trobem que el millor ajust és per a la ST sense soroll afegit, com he suposat, però pel que fa a la ST amb nivell de soroll de $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$ el resultat respecte de l'ajust és millor en el segon cas que en el primer. Per tant, en la valoració respecte de l'efecte de l'addició de soroll, els resultats d'ambdós indicadors escollits són poc clars.

De tot l'anterior destaca que queda clar que les tres ST x del mapa de Hénon, després d'avaluar la SCI mitjançant els experiments de simulació, mostren aquesta característica, tal com cabria esperar pel que trobem en la literatura. Malauradament els indicadors escollits, en entrar en contradicció entre ells, no em permeten afirmar que queda contrastada la *Hipòtesi 4.1* donat que sí que hi ha una afectació diferencial del soroll, però no es pot afirmar amb rotunditat que hi hagi una relació directe entre el nivell de soroll afegit i la SCI.

4.1.4.2 AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS I ANÀLISI DE L'EFECTE DEL SOROLL AFEGIT EN LES DADES ORIGINALS PER A LES SÈRIES TEMPORALS DE LA VARIABLE x DE L'ATRACTOR DE RÖSSLER

Els resultats de l'*experiment de simulació 11* ens han permès realitzar l'avaluació de la SCI en la ST x de l'atractor de Rössler amb un nivell de soroll afegit de $L/D_A = 0,5$. Pel que fa a les diferències en la variable *CORRELACIÓ* trobem que hi ha un decreixement significatiu d'aquesta a nivell global. Si ens fixem en els contrastos a posteriori dos a dos, trobem que en aquest cas es donen diferències significatives en la primera i segona comparacions, entre $NI=1-NI=2$ i $NI=2-NI=3$ respectivament, i en la

sisena comparació entre $NI=6-NI=7$. D'altra banda, pel que fa a la relació entre les variables NI i $CORRELACIÓ$ no hi ha dubte que hi un clar ajust a la Funció Logística.

En l'*experiment de simulació 12* també trobem que hi ha diferències significatives a nivell global, pel que fa a la variable $CORRELACIÓ$, amb la mateixa tendència de disminució que en els experiments de simulació anteriors. D'altra banda, respecte dels contrastos a posteriori, podem veure que les comparacions significatives són entre $NI=1-NI=2$, $NI=2-NI=3$, $NI=3-NI=4$, i $NI=4-NI=5$. Finalment, pel que fa a la relació entre la variable NI i la variable $CORRELACIÓ$, la corba observada s'ajusta gairebé perfectament a l'estimada pel model.

Si mirem els resultats globals tenim que, pel que fa a al variable $RANG$, les diferències són majors conforme augmenta el nivell de soroll, contràriament al que podríem esperar segons el que s'afirma en la literatura. D'altra banda, en mirar l'ajust a la Funció Logística de la relació entre NI i $CORRELACIÓ$ per als tres nivells de soroll diferents, passa quelcom similar, donat que augmenta l'ajust a la funció logística en relació a l'augment del nivell de soroll, encara que trobem que per al nivell de soroll $L/D_A=0,5$ l'ajust és major que per al valor de $L/D_A=1$.

Pel que fa al contrast de la *Hipòtesi 4.2*, per tal de donar-hi resposta podem afirmar que els resultats no la confirmen donat que és qüestionable la presència de SCI pels diferents conjunts de dades de l'atractor de Rössler. Sí que hi ha una disminució significativa per a les tres ST, però aquesta disminució no mostra la forma característica que hauria esperat. D'altra banda els indicadors que he emprat, per tal d'analitzar l'efecte dels tres nivells de soroll aplicats, tampoc no mostren que la relació entre NI i la $CORRELACIÓ$ sigui en la direcció especificada en aquesta hipòtesi.

4.2 CONCLUSIONS

Com ja he esmentat al principi del present capítol ara és el moment de mirar globalment tot el treball desenvolupat i descrit al llarg d'aquest document per tal d'exposar-vos les conclusions que crec que cal destacar. Aquest exercici crític requereix

buscar les explicacions de les desviacions trobades, respecte de l'esperat en les hipòtesis enunciades al tercer capítol, basant-me en el bagatge de coneixements previs que aporta la TSD. També caldrà fer un cop d'ull al procediment emprat en els experiments de simulació, donat que el caràcter relativament exploratori de la investigació aquí descrita pot haver portat a resultats no esperats.

4.2.1 DIFERÈNCIES EN ELS RESULTATS EN L'ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ PER AL MAPA DE HÉNON I L'ATRACTOR DE RÖSSLER

El primer que cal destacar és que, havent aplicat un mateix mètode d'estimació a la ST x sense soroll del mapa de Hénon i a la ST x sense soroll de l'atractor de Rössler, hi ha una diferència substancial en quant als resultats en el sentit que en el primer cas el resultat de l'estimació de la DI a la que s'ha arribat coincideix a l'esperat i, en canvi, en el segon cas aquesta estimació és superior a l'esperada.

D'altra banda hi ha una altra diferència remarcable, entre les dades del mapa de Hénon i les dades de l'atractor de Rössler, al respecte de com afecta l'addició de soroll a la ST original. Queda clar que en ambdós casos aquest fet produeix el biaix esperat en l'estimació de la DI en la direcció d'un augment d'aquesta i , encara que no s'ha explicitat cap supòsit al respecte de com seria la incidència d'aquesta desviació, quedaria justificat afirmar que l'augment hauria de ser gradual. Això és el que acaba succeint en afegir soroll a la ST x del mapa de Hénon, l'augment en l'estimació de la DI certament és gradual; en el primer nivell de soroll amb $L/D_A = 0,5$ no hi ha variació mentre que per al nivell de soroll de $L/D_A = 1$ la DI = 3. D'altra banda el canvi en l'estimació en el cas dels conjunts de dades per a l'atractor de Rössler no és gradual, donat que trobem diferències en l'estimació de la DI per a la ST sense soroll afegit i la ST amb un nivell de soroll de $L/D_A = 0,5$, passant de quatre a sis, i en canvi no trobem que augmenti la DI quan comparem els resultats entre aquest nivell de soroll i el de $L/D_A = 1$.

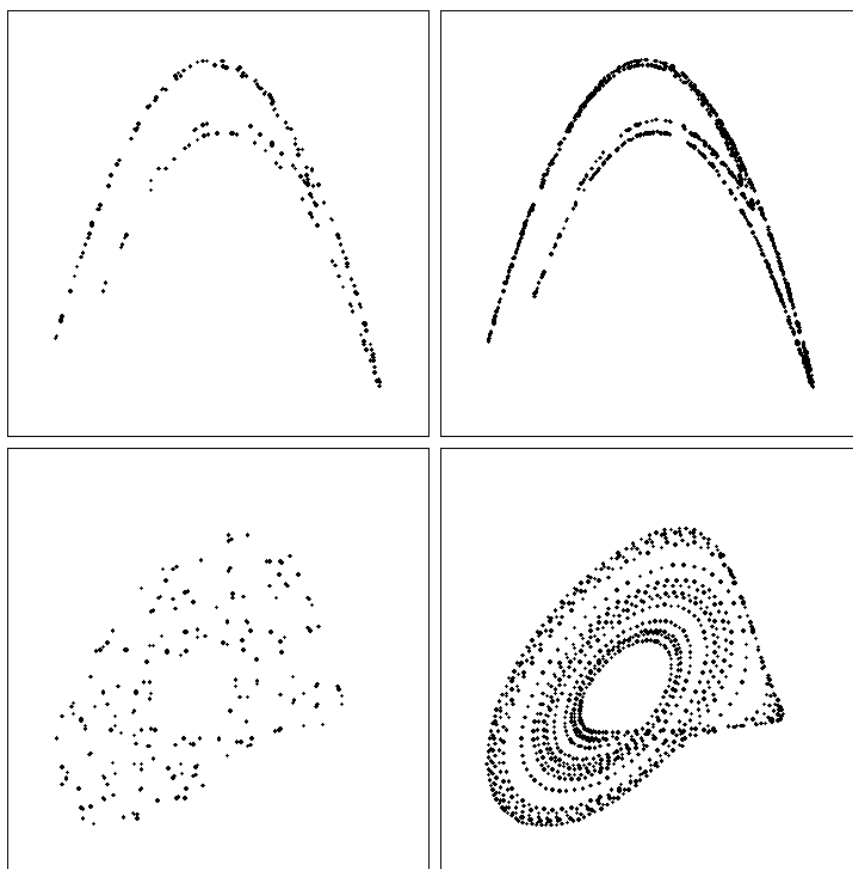


Figura 4.1: Atractors reconstruïts de Hénon i de Rössler amb dues components (a dalt i a baix) amb 200 punts (esquerra) i 1000 punts (dreta).

La primera conclusió que podem extreure de les troballes comentades més amunt, és que el fet d'emprar un nombre limitat a 200 puntuacions per a la realització de les estimacions afecta més als conjunts de dades elaborats a partir de la ST_x de l'atractor de Rössler que als elaborats a partir de la ST_x del mapa de Hénon. En el capítol tres he esmentat la raó que ens ha portat a emprar una ST amb 200 puntuacions per a l'entrenament de les diferents XNA emprades, la necessitat que aquest mètode sigui útil en el nostre àmbit. Cal cercar una explicació d'aquest fet en les fonts que han guiat aquesta investigació. De fet, a partir del que sabem gràcies a la TSD, era previsible trobar una estimació esbiaixada motivada per la grandària dels nostres conjunts de

dades. Aquest fenomen es dona perquè un menor nombre de puntuacions de la ST objecte d'estudi impedeix una definició correcta de l'atractor reconstruït. Per tant el fet d'haver trobat aquestes diferències, entre el mapa de Hénon i l'atractor de Rössler, solament es pot explicar perquè en el primer cas els punts dels que disposem per a la reconstrucció de l'atractor permeten definir l'estructura de l'atractor teòric i, en canvi, en el segon els punts de l'atractor reconstruït no són suficients perquè aquesta quedi concretada. Aquesta explicació és més fàcil de veure-la en la representació de la figura 4.1, on hi ha l'atractor reconstruït amb dos components per a les ST originals d'ambdós conjunts de dades. Al gràfic de l'esquerra, a dalt i a baix, es representen 200 punts i al de la dreta se'n representen 1000. Com es pot veure en ambdós casos, quan s'empren un nombre suficientment gran de punts de l'atractor, queda dibuixada clarament l'estructura d'aquest. Quan solament s'empren 200 punts es continua veient clarament l'estructura en el cas del mapa de Hénon però, en canvi, en l'atractor de Rössler aquesta no queda tan clarament definida.

Si a aquesta explicació li afegim el fet que la DI real de l'atractor de Rössler és igual a tres, per tant hi ha més graus de llibertat, la mancança en el nombre de punts encara és més rellevant. Aquest fet també pot ser una explicació de les diferències en els resultats entre els conjunts de dades del mapa de Hénon i els de l'atractor de Rössler.

Amb aquesta figura el que he intentat mostrar gràficament és un fet que ja he explicat en el primer capítol, la necessitat de volums de dades suficientment grans per tal que les eines d'anàlisi de la TSD arribin als resultats esperats. Ja he esmentat que aquest resultat era previsible però la precisió en la predicció que permeten les XNA, comentada en el capítol introductori, em feia esperar una millora que superés aquest escull.

Finalment vull esmentar que els resultats assolits són molt bons si tenim en compte la grandària dels nostres conjunts de dades. Altres tècniques com el mètode del tant per cent de falsos veïns es caracteritzen per ser molt més sensibles a la grandària de la ST i a la necessitat de controlar paràmetres subjectius. Cao (1997) proposa un algorisme que és una alternativa a l'anterior mètode fent referència a la seva utilitat en

ST curtes, a partir de 1000 punts, i a la possibilitat d'emprar-lo sense haver de controlar cap paràmetre. He fet el càlcul de la DI mitjançant aquesta tècnica emprant dos dels conjunts de dades d'aquesta tesi, la ST x del mapa d'Hénon i $L/D_A = 0$ i la ST x de l'atractor de Rössler i $L/D_A = 0$. Els resultats queden totalment esbiaixats donat que, fent la interpretació de les gràfiques, seguint al peu de la lletra el criteri de l'autor, tenim un valor de $DI=6$ per al primer conjunt i un valor de $DI=5$ per al segon conjunt. A més el mètode té l'inconvenient que requereix una interpretació dels resultats a partir de la inspecció de gràfics on es cerca un invariant per tant, a més de portar a estimacions esbiaixades de la DI continuem tenint el problema de falta d'objectivitat a l'hora de prendre decisions, donat que no disposem d'un criteri de significació que permeti identificar quan hem arribat a aquest invariant. L'afirmació al respecte de les bondats del mètode descrit en aquesta tesi es fonamenta en que aquest permet l'anàlisi de ST sense necessitat d'emprar paràmetres subjectius, disposant d'una estratègia de presa de decisions fonamentada en la significació estadística i possibilitant la seva utilització amb conjunts de dades menys voluminosos. Aquesta darrera afirmació no tindria molta importància en altres àmbits com l'enginyeria, la física, la biologia, la geologia, o moltes altres disciplines, però en el nostre àmbit és cabdal.

4.2.2 DIFERÈNCIES EN ELS RESULTATS RESPECTE DE L'AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS PER AL MAPA DE HÉNON I L'ATRACTOR DE RÖSSLER

El mètode emprat per a l'avaluació de la SCI també ha donat resultats diferents entre els conjunts de dades del mapa de Hénon i els de l'atractor de Rössler. Pel que fa a les dades originals sense soroll, en el primer cas trobem que realment el mètode emprat és capaç de detectar que hi ha SCI. En canvi, si ens fixem en els resultats respecte de l'atractor de Rössler es pot afirmar que el mètode no permet recollir les característiques esperades al respecte d'una disminució de la precisió en la predicció, en augmentar el nombre d'iteracions.

Si ens fixem en els resultats trobats quan afegim els dos nivells de soroll també podem arribar a conclusions similars; el mètode d'avaluació de la presència de SCI permet arribar als resultats esperats per al cas de les ST elaborades a partir del mapa de Hénon però no per a les dades de l'atractor de Rössler. En el primer cas, però, els resultats no són del tot clars donat que, com ja he esmentat en l'apartat de discussió, hi ha contradiccions entre els resultats trobats en analitzar la variable *RANG* i les conclusions respecte de l'ajust a la Funció Logística de la relació entre les variables *NI* i *CORRELACIÓ*. D'altra banda, pel que fa als resultats trobats respecte de les dades de l'atractor de Rössler, aquests són totalment contradictoris pel que fa a les anàlisis de la variable *RANG* i també trobem un element de contradicció pel que fa a la valoració de l'ajust a la Funció Logística.

Un altre cop ens trobem amb un comportament totalment diferent entre els conjunts de dades del mapa de Hénon i els de l'atractor de Rössler, tant a nivell de l'avaluació en les ST sense soroll com en l'anàlisi dels efectes de la seva addició en la SCI.

Per tal de cercar una explicació a aquests resultats prèviament caldrà fixar-nos en les diferències entre les expressions generadores d'ambdós ST artificials. Ja he esmentat que des de la TSD s'han desenvolupat un seguit de SD simulats per tal de poder provar els enuncisats d'aquest cos de coneixements. Normalment aquests es desenvolupen per equacions de diferència, seria el cas del mapa de Hénon, o mitjançant sistemes d'equacions diferencials, seria el cas de l'atractor de Rössler. Els primers són més simples però en tot cas les sèries que generen tenen les mateixes característiques que podem trobar en els segons (Elbert et al., 1994; Hénon, 1976) donat que igualment generen un atractor estrany on podem trobar les característiques de no linealitat, baixa dimensionalitat i SCI, és a dir, permeten generar sèries caòtiques. Malgrat tot, tenen la limitació que no permeten generar ST contínues com les que generen els SD que trobem en la realitat. D'altra banda tenim els generats mitjançant sistemes d'equacions diferencials, més complexes, que també permeten reproduir les característiques

esmentades, i que sí generen ST contínues com les que sovint trobem a la realitat (Elbert et al., 1994; Rössler, 1976).

Podem veure aquest fet més clarament en la Figura 4.2 on es representa el mapa de Hénon i l'atractor de Rössler, reconstruïts amb dues components a partir dels 200 punts emprats per tal de fer les anàlisis desenvolupades mitjançant els 12 experiments de simulació. La diferència respecte dels gràfics que hem vist fins aquest moment és que hi són representades les línies que uneixen els diferents punts consecutius emprats. En la figura de l'esquerra, corresponent al mapa de Hénon, es pot veure que entre els punts de l'atractor no hi ha una trajectòria sinó que els punts fan salts de distàncies relativament grans. En canvi, en l'atractor reconstruït a partir de la ST x de Rössler i representat a la figura de la dreta, sí que es pot veure clarament la trajectòria que defineix un SD generat a partir d'un sistema d'equacions diferencials. Aquest fet fa que la distància entre els diferents punts de la trajectòria sigui relativament petita.

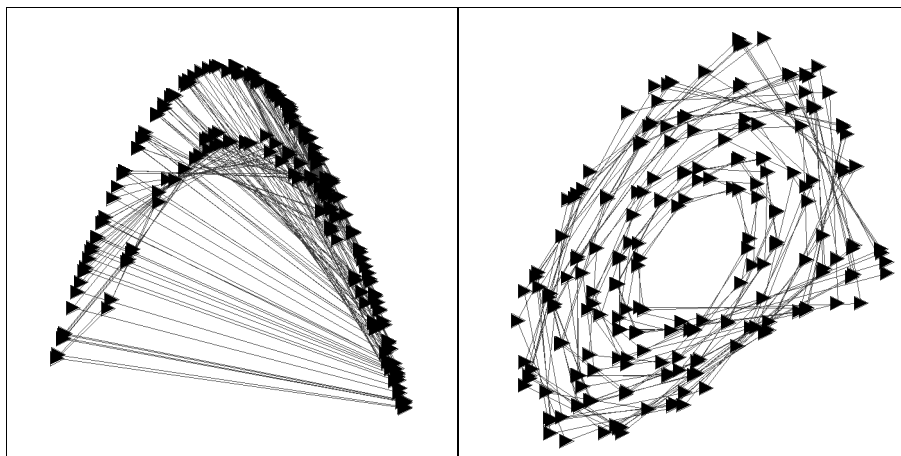


Figura 4.2: Atractors reconstruïts de Hénon i de Rössler amb dues components i 200 punts (esquerra i dreta).

De tot l'anterior es important destacar que, un cop hem aconseguit un bon model per tal de fer prediccions en una determinada ST, si intentem reproduir les característiques esperades respecte de la SCI fent iteracions des d'un fins a deu passos

endavant, serà més fàcil que les desviacions es constatin si la distància entre els diferents punts de l'atractor reconstruït és relativament gran que si aquesta és relativament petita. Si a aquest fet li afegim les mancances ja esmentades a l'apartat anterior, respecte de l'atractor de Rössler relacionades amb la grandària del conjunt emprat per fer l'entrenament de les XNA, ja tenim una explicació de les diferències trobades.

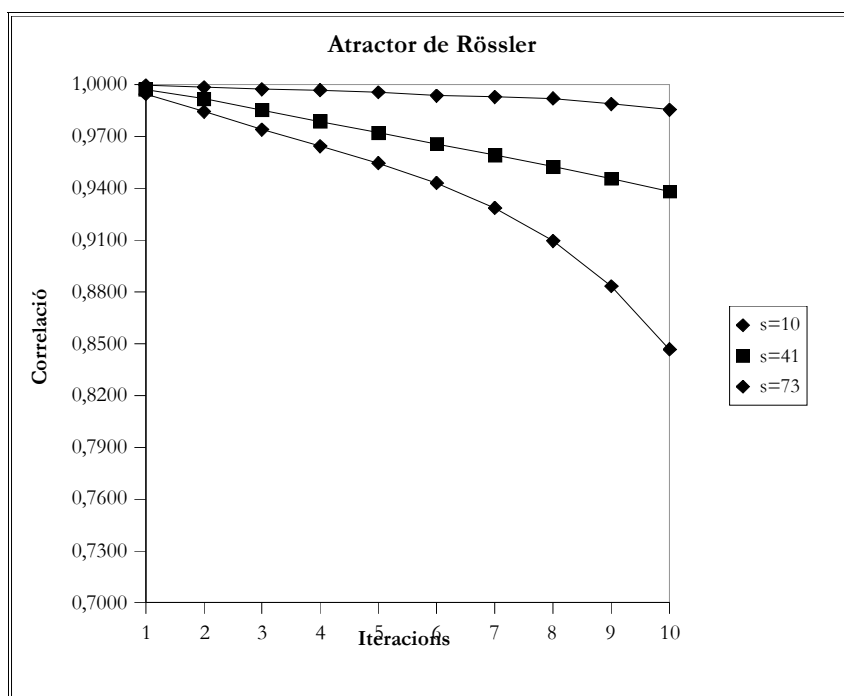


Figura 4.3: Davallada de la precisió en funció del nombre d'iteracions i per a diferents valor de s en la predicció amb la XNA

Per tal d'il·lustrar millor aquesta explicació he volgut afegir una comprovació de la importància que té la separació entre els punts de l'atractor reconstruït. A tal efecte he emprat la ST x de l'atractor de Rössler sense soroll i he construït dos conjunts d'aprenentatge diferents, el primer amb un retard de $s=41$ i l'altre amb un retard $s=73$ punts. L'elecció d'aquests retards ve motivada perquè són, juntament amb el retard de $s=10$, aquells en que la Mitjana d'Informació Mútua és mínima, tal com hem pogut veure al Capítol 3. Aquests conjunts han servit per fer l'entrenament i, posteriorment,

fer les diferents iteracions des d'un fins a deu passos endavant per tal de comprovar si la grandària del retard influeix en la davallada de la precisió. A la figura 4.3 es pot veure que quan més gran és el retard (δ) més ràpidament disminueix la precisió en la predicció. De totes formes els valors en la Variable *CORRELACIÓ* són més grans que els trobats amb les ST x del mapa de Hénon.

4.2.3 INCOMPLIMENT DE LA CONDICIÓ D'HOMOGENEÏTAT DE LA VARIÀNCIA EN ELS EXPERIMENTS DE SIMULACIÓ

Un aspecte que vull ressaltar, que afecta als resultats dels 12 experiments de simulació, és la falta d'homogeneïtat de variància en tots ells. Al respecte d'això i amb l'objectiu d'anul·lar aquest inconvenient, he realitzat les anàlisis dels diferents experiments aplicant una transformació logarítmica prèvia a la variable *CORRELACIÓ*. Malauradament, com que continua present l'heterogeneïtat de variàncies, he optat per conservar les anàlisis de les dades originals. Cal matisar que en les dades originals dels diferents experiments hi ha dos patrons diferents, en quant a aquesta mancança d'homogeneïtat, corresponents respectivament als sis experiments de simulació dedicats a l'estimació de la DI i als sis experiments de simulació dedicats a l'avaluació de la SCI.

4.2.3.1 FALTA D'HOMOGENEÏTAT DE VARIÀNCIES EN ELS EXPERIMENTS DE SIMULACIÓ PER A L'ESTIMACIÓ DE LA DIMENSIÓ D'IMMERSIÓ

Pel que fa als experiments de simulació dedicats a l'estimació de la DI, en general trobem que les desviacions típiques augmenten en funció del nivell de soroll. De totes formes hi ha clares diferències entre ambdós conjunts de dades. En el cas de les ST generades a partir del mapa de Hénon aquest augment és més accentuat que en

les ST de l'atractor de Rössler. D'altra banda també es dona que en el primer cas l'augment de les desviacions típiques és proporcional als valors de $NCAR$.

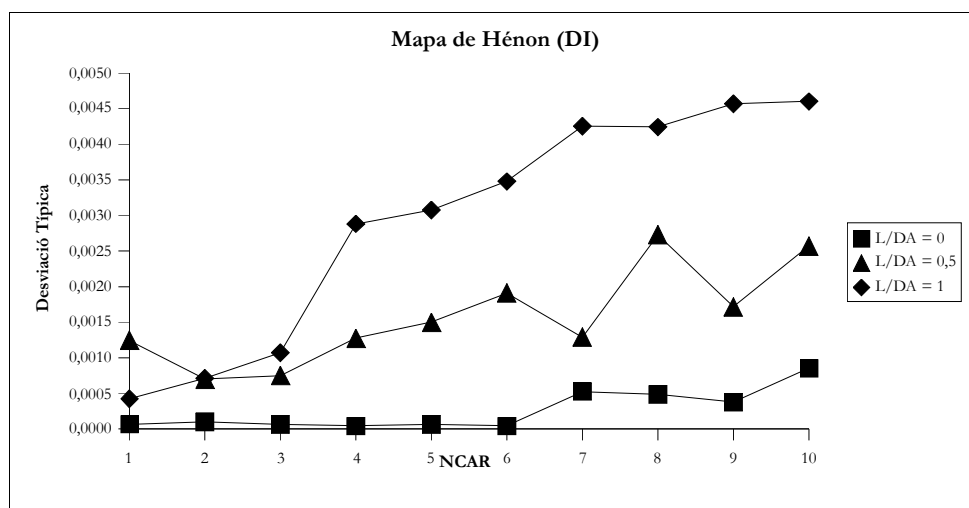


Figura 4.4: Gràfic amb les Desviacions Típiques dels experiments de simulació dedicats a l'estimació de la DI per al Mapa d'Hénon i per als diferents nivells de soroll ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$)

Les diferències en aquests patrons, que es veuen clarament a partir de la inspecció visual de les gràfiques 4.4 i 4.5 i que únicament impliquen als conjunts de dades amb soroll, es poden explicar a partir de l'observació que la capacitat de predicció de la XNA és major per als conjunts de dades elaborats a partir de l'atractor de Rössler que per a les ST del mapa d'Hénon. Aquesta constatació sorgeix de fer una ullada als resultats dels diferents experiments de simulació del capítol 3 on veiem que, per a les diferents ST amb soroll afegit d'ambdós conjunts de dades, els valors de la variable *CORRELACIÓ* són majors per a l'atractor de Rössler que per al mapa de Hénon.

Donat que les condicions d'entrenament i que les arquitectures emprades són iguals per a tots els conjunts de dades, el fet de trobar aquests resultats diferents em porta a concloure que la realització de les prediccions amb soroll afegit és més difícil en les ST del mapa de Hénon que en les de l'atractor de Rössler. A aquesta afectació se li suma el fet d'afegir components de l'atractor reconstruït.

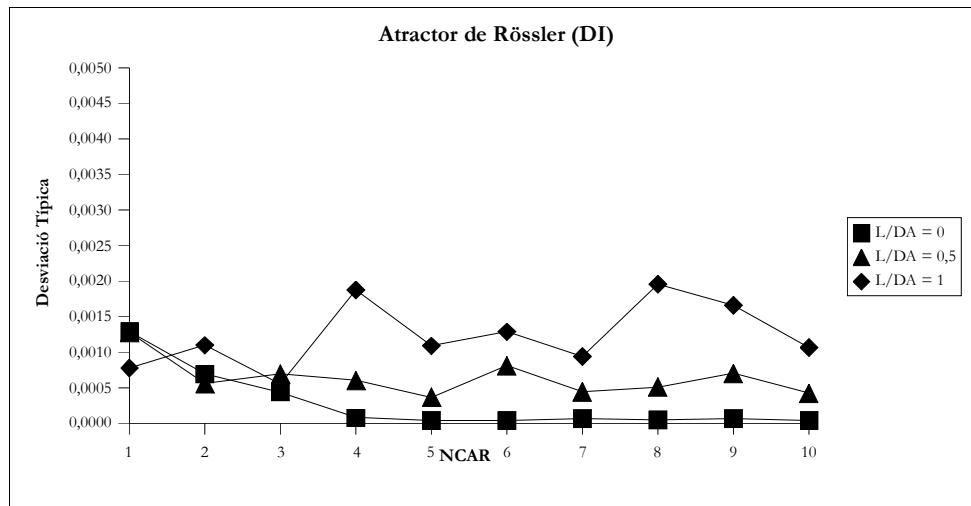


Figura 4.5: Gràfic amb les Desviacions Típiques dels experiments de simulació dedicats a l'estimació de la DI per a l'atractor de Rössler i per als diferents nivells de soroll ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$)

La relació directa entre complexitat de la tasca i grandària de la variabilitat en presència de soroll és un fenomen habitual que es troba en fer experiments de simulació mitjançant XNA. Donat que la taxa d'aprenentatge ha estat mantinguda constant per tal d'homogeneïtzar les condicions dels experiments de simulació, una major complexitat de la tasca en presència de soroll fa que l'error es mogui per diferents punts de l'espai de pesos propers a la solució correcta. Quan major és la dificultat de la funció a implementar més amplia és la distància al valor d'error mínim. Aquestes divergències al voltant del valor mínim es reflecteixen en la grandària de la desviació típica que hem trobat en els diferents experiments de simulació.

4.2.3.2 FALTA D'HOMOGENEÏTAT DE VARIÀNCIES EN ELS EXPERIMENTS DE SIMULACIÓ PER A L'AVALUACIÓ DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS

Pel que fa a l'heterogeneïtat de variàncies respecte dels experiments de simulació realitzats per tal d'avaluar la SCI, aquesta és una conseqüència lògica de la dinàmica esperada en les ST avaluades. Un cop realitzat un entrenament, per a una ST determinada, s'avalua com canvia la precisió en funció del nombre d'iteracions. Ja sabem que un cop estimat un model, una petita diferència entre dos valors de la ST, s'amplifica cada cop més per a cada nova iteració practicada. Aquest fet fa que les divergències augmentin, respecte del valor esperat per a cada nou pas cap endavant, implicant un augment en les desviacions típiques. Aquest patró el veiem en els tres conjunts de dades elaborats a partir de la ST x del mapa de Hénon i de la ST x de l'atractor de Rössler.

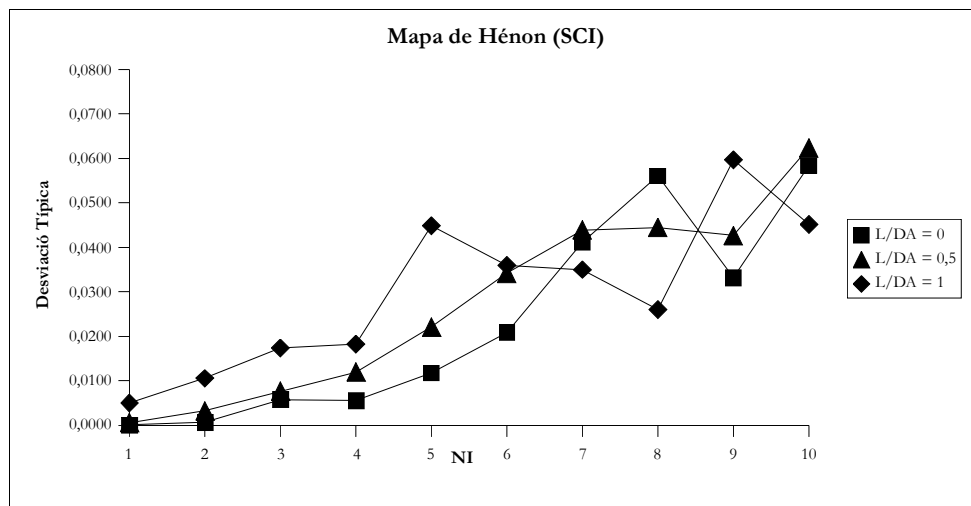


Figura 4.6: Gràfic amb les Desviacions Típiques dels experiments de simulació dedicats a l'avaluació de la SCI per al Mapa d'Hénon i per als diferents nivells de soroll ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$)

Pel que fa a les diferències trobades entre els resultats per ambdós conjunts de dades respecte de la SCI, cal remarcar l'existència de dos patrons de creixement de les desviacions típiques entre les dades del mapa de Hénon (figura 4.6) i les de l'atractor de Rössler (figura 4.7). Com es pot veure aquest augment és menys uniforme per al primer conjunt de dades que per al segon. D'altra banda l'augment de les desviacions típiques és més acusat per al primer conjunt de ST que per al segon. Aquestes diferències en la variabilitat entre els dos conjunts de dades estan motivades pel fet que en els conjunts de dades de Hénon hem trobat una major SCI que en els conjunts de dades Rössler. En el primer cas cada nova iteració s'allunya més del valor esperat que en el segon, augmentant així les desviacions respecte de la mitjana del valor de la variable *CORRELACIÓ*.

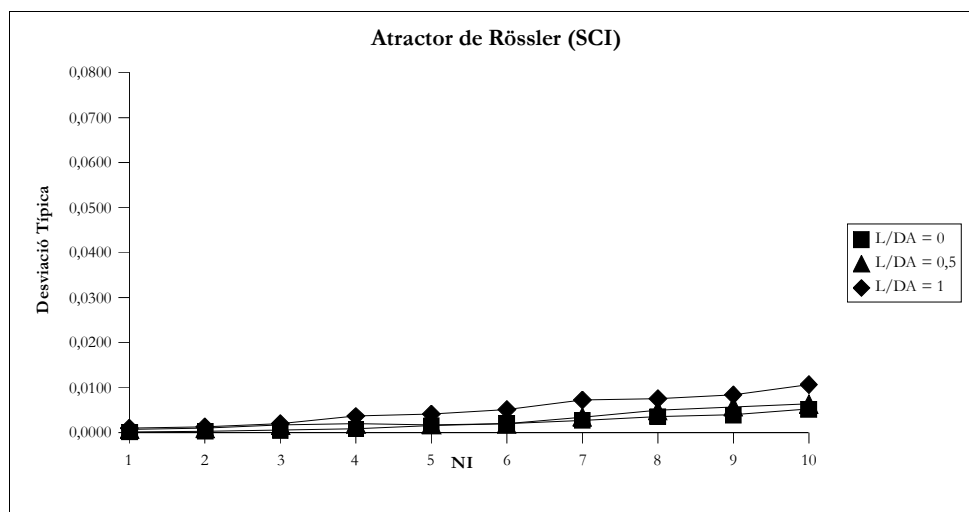


Figura 4.7: Gràfic amb les Desviacions Típiques dels experiments de simulació dedicats a l'avaluació de la SCI per a l'atractor de Rössler i per als diferents nivells de soroll ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$)

4.2.4 EXISTÈNCIA D'UN POSSIBLE BIAIX NEGATIU EN LA PRECISIÓ DE LES PREDICCIONS

Ja he esmentat, en un apartat anterior, les mancances en la realització dels entrenaments motivades per la necessitat d'automatitzar aquests processos. En haver de realitzar les diferents simulacions en un marc experimental augmenta ràpidament el seu nombre i, per tant, implica la necessitat d'una major uniformitat d'aquestes amb la impossibilitat de controlar els paràmetres d'aprenentatge. Aquest biaix esmentat, en cas de poder-se evitar amb un nou procediment automatitzat més curós, afectaria únicament als resultats dels experiments de simulació dedicats a l'estimació de la DI. En principi aquesta modificació portaria a un augment en la precisió de la predicció que, si tingués una afectació diferenciada entre totes les condicions de cada experiment, podria implicar canvis en les nostres estimacions. En canvi, si aquesta millora fos uniforme per als diferents valors de la variable *NCAR* no hauria de portar a canvis en els resultats reportats.

Ja he esmentat en el Capítol 2 que en general, en fer un entrenament, la taxa d'aprenentatge es fixa a un valor relativament alt per tal de fer disminuir ràpidament l'error fins que aquest comença a oscil·lar. En aquest punt cal fer un retoc a la baixa en la taxa d'aprenentatge i continuar amb l'entrenament. Si aquest disminueix de forma clara cal continuar l'aprenentatge fins que torna a aparèixer aquesta oscil·lació. Aquesta operació s'ha de repetir fins que s'arriba a un punt en que una modificació en la taxa d'aprenentatge ja no aporta cap millora i es dona una estabilització de la precisió de la predicció amb el conjunt test, és a dir, fins al punt en que la generalització ja no pot millorar. Com ja he esmentat al capítol 3 en tots els experiments de simulació s'ha fixat una taxa constant al llarg de tot l'entrenament de la XNA. Aquest fet té dos efectes, el d'una menor optimització de l'aprenentatge, en el sentit queestic reportant ara, i el d'una major heterogeneïtat en els resultats donat que, en automatitzar el procés i fixar l'aprenentatge a un determinat nombre d'èpoques, dos processos d'entrenament amb les mateixes dades poden arribar a valors de l'error molt distants, tal com hem vist en

esmentar la falta d'homogeneïtat en els experiments de simulació dedicats a l'estimació de la DI.

4.2.5 SELECCIÓ DE LA VARIABLE DEPENDENT DELS EXPERIMENTS DE SIMULACIÓ

Al llarg dels diferents experiments de simulació s'ha registrat la variable *CORRELACIÓ* per tal de verificar les diferents hipòtesis formulades en el capítol introductori. La seva elecció va venir motivada perquè és la que s'ha emprat en el precedent més rellevant, dedicat a l'anàlisi de ST mitjançant predicció no lineal, desenvolupat en les investigacions de Sugihara i May (1990).

Un cop vistos els resultats dels experiments de simulació he cregut oportú fer la següent reflexió. El marc teòric que ha guiat aquesta investigació es caracteritza per no fixar cap a priori al respecte de l'existència de relacions lineals. A mode de recordatori la variable *CORRELACIÓ* ha estat emprada en els experiments de simulació com una mesura de la precisió de les prediccions realitzades per les XNA. Cal tenir en compte, per tant, que solament ha permès fer una estimació de la relació lineal establerta entre el valor assolit en la predicció i el valor real esperat, és a dir, qualsevol possible relació no lineal, que podria existir, queda exclosa si únicament fem servir aquest coeficient.

A més de la consideració anterior, el fet que la relació que es mostra amb aquesta variable és de caire lineal implica que, si aquesta existeix, el valor de la correlació sigui positiu quan la relació és directa o negatiu quan és inversa. De fet en l'*experiment de simulació 8* s'ha donat aquest cas en que trobàvem correlacions negatives. De totes formes aquestes correlacions es poden interpretar de la mateixa manera que si el seu valor hagués estat per sobre de zero, donat que de fet el que denoten és que quan més gran és el nombre d'iteracions la relació, sigui aquesta directa o inversa, tendeix a disminuir. Aquesta particularitat ha pogut ser la que ha propiciat la disminució irregular de la variable *RANG* i de l'ajust a la Funció Logística de la relació entre la variable *NI* i

la variable *CORRELACIÓ*, reportada en analitzar la incidència dels diferents nivells de soroll en la SCI dels conjunts de dades del mapa de Hénon.

Com alternativa a aquesta Variable Dependent proposo una mesura ja esmentada extreta de la Teoria de la Informació de Shanon, la Mitjana d'Informació Mútua. En el capítol 1 ja hem vist que permetia trobar la connexió existent entre dues mesures sense cap a priori al respecte de la seva relació. Per tant, és un indicador de la relació establerta entre dues variables sigui aquesta lineal o no lineal. Donades dues variables x i y , la Mitjana d'Informació Mútua entre elles la podem trobar a partir de la següent expressió,

$$I(x, y) = \sum P(x, y) \log_2 \left[\frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \right].$$

La Mitjana d'Informació Mútua ha estat emprada en múltiples aplicacions en l'àmbit de la neurociència (Pereda, Quiroga i Bhattacharya, 2005). La seva aplicació en el context d'aquesta línia de recerca engegada amb aquesta tesi es justificaria per tal de millorar la quantificació de la relació entre les variables, en el sentit que mitjançant la correlació emprada ens quedàvem curts donat que solament es podia cercar la que feia referència a relacions lineals. D'altra banda, aquesta mesura és en valor absolut, quan més gran és el seu valor més gran és la relació entre les variables. En aquest sentit podria permetre una millor avaluació de l'afectació de l'addició de soroll a les ST analitzades.

De tota manera aquesta mesura no és apropiada en aquesta investigació per la limitada grandària de les mostres emprades. El fet de disposar de 200 puntuacions en cadascun dels conjunts de prova fa impossible el càlcul de la Mitjana d'Informació Mútua. L'explicació està en que el seu càlcul implica la segmentació en intervals dels valors de les variables x i y per tal de fer el càlcul de les probabilitats d'aparició d'aquestes puntuacions, per separat o conjuntament, implicades en el càlcul d'aquesta magnitud.

4.2.6 ANÀLISI DE LA SENSIBILITAT A LES CONDICIONS INICIALS MITJANÇANT EL CÀLCUL DE LA GRANDÀRIA DE L'EFECTE

Finalment vull afegir un darrer comentari sobre la possible utilització de la mesura de la grandària de l'efecte (d), proposada per Cohen (1988), aplicable a l'anàlisi de l'efecte dels diferents nivells de soroll en la SCI de les diferents ST. Hem vist que l'estratègia emprada en aquesta tesi es basava en, un cop trobades diferències significatives en les mitjanes de la variable *CORRELACIÓ* per als diferents valors de la variable *NI*, veure la mesura en que la relació entre ambdues variables s'ajustava a la Funció Logística i mesurar la variable *RANG* intentant trobar una determinada tendència en funció del nivell de soroll afegit a cadascuna de les ST x originals per a ambdós conjunts de dades.

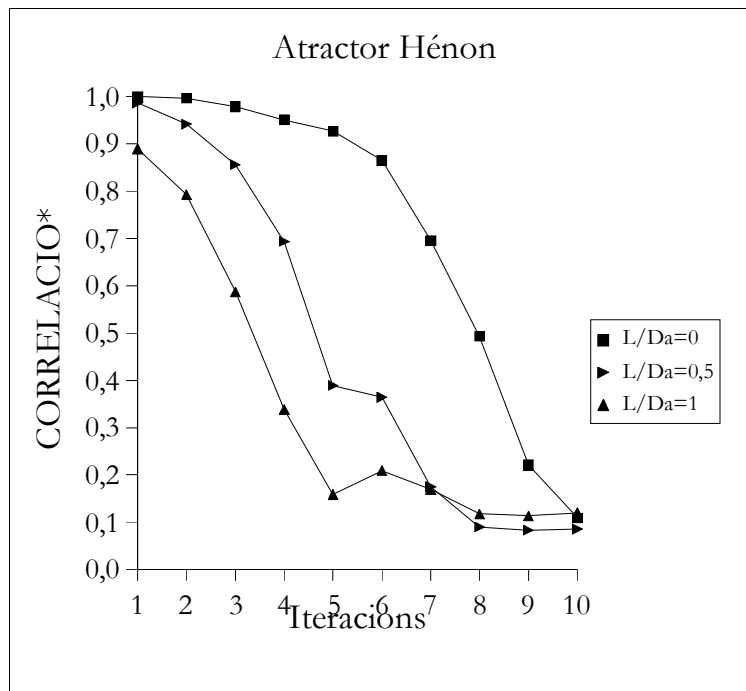


Figura 4.8: Resultats per a diferents iteracions i per a diferents nivells de soroll en la predicció amb la XNA per als conjunts de dades de la ST x del mapa de Hénon (* *CORRETRANS* per a $L/D_A=0,5$).

Fent un cop d'ull a les dades globals dels experiments de simulació 7, 8 i 9, dedicats a l'avaluació de la SCI en la ST x del mapa de Hénon i representats de nou en la Figura 4.8, podem veure-hi el patró de l'efecte de l'addició de soroll. En la ST original trobem que la davallada de la precisió és més suau que en les dues ST amb soroll afegit. Alhora entre aquestes dues, la caiguda en la variable *CORRELACIÓ* és anterior per a la ST amb un nivell de soroll de $L/D_A=1$.

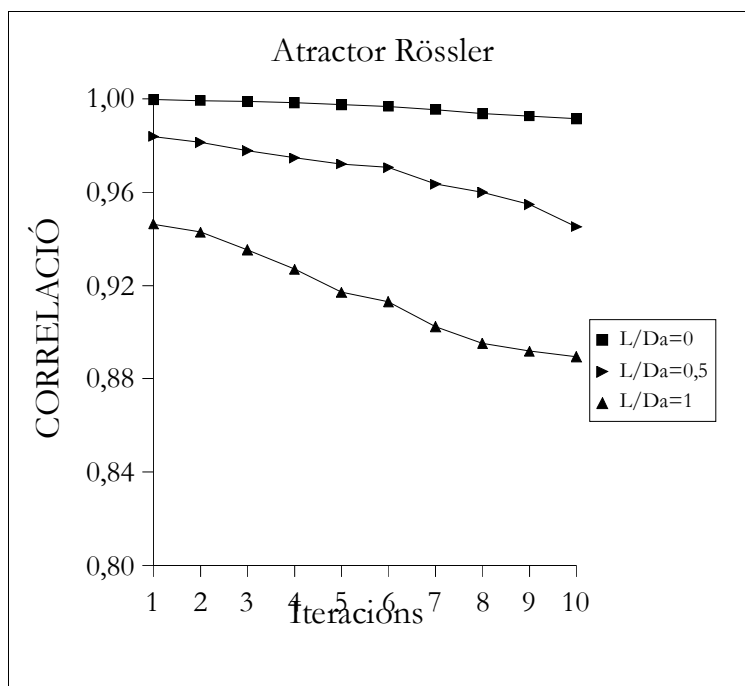


Figura 4.9: Resultats per a diferents iteracions i per a diferents nivells de soroll en la predicció amb la XNA per als conjunts de dades de la ST x de l'atractor de Rössler.

D'altra banda aquest patró el podem veure a una escala molt més gran a les dades de la ST x de l'atractor de Rössler. A la figura 4.9 hi tenim les dades globals dels experiments de simulació 10, 11 i 12. Comparant ambdues figures podem observar que la davallada que es dona en les deu iteracions de les dades de l'atractor de Rössler és

similar a la que hi ha entre la primera i la segona iteració de les dades per al mapa de Hénon. Per tant tindriem igualment que per a les dades sense soroll la precisió cau de forma més suau i que, per a les dues ST temporals amb soroll afegit la baixada és major per a $L/D_A=1$ que per a $L/D_A=0,5$.

Ja he mostrat les anàlisis d'aquests patrons emprant els contrastos a posteriori dos a dos, mitjançant la prova T3 de Dunnett (1980). Amb aquests solament podem afirmar que existeixen o no diferències significatives dos a dos, però no podem conèixer exactament la grandària d'aquest efecte. Aquest és el motiu pel qual la utilització de la *d de Cohen* pot ser una bona alternativa a l'avaluació de l'efecte del soroll afegit a la presència de SCI.

El càlcul de la *d de Cohen* (Cohen, 1988) es realitza mitjançant la següent expressió

$$d = \frac{\bar{X}_{NI_{Posterior}} - \bar{X}_{NI_{Previ}}}{\sigma_{estimada}}$$

on la desviació típica estimada del denominador de l'expressió es pot conèixer a partir de (Cohen, 1988)

$$\sigma_{estimada} = \sqrt{\frac{\sigma_{NI_{Previ}}^2 + \sigma_{NI_{Posterior}}^2}{2}} .$$

Donat que mitjançant aquesta mesura es pot avaluar la grandària de la davallada en la predicció, en funció del nivell de soroll afegit ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$),

he realitzat el càlcul de la grandària de l'efecte per a tots els conjunts de dades de la ST x del mapa de Hénon i de la ST x de l'atractor de Rössler.

Taula 4.1: Càlcul de la grandària de l'efecte de les diferències respecte la variable CORRELACIÓ, entre puntuacions consecutives de la variable NI, per als diferents conjunts de dades de la ST x del mapa de Hénon ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$).

Grandària de l'efecte (d de Cohen)				
NI _{Previ}	NI _{Posterior}	L/D _A = 0	L/D _A = 0,5	L/D _A = 1
1	2	-5,3951	-21,1613	-11,6521
2	3	-4,3705	-16,3392	-14,2672
3	4	-4,8529	-18,1059	-13,9499
4	5	-2,6145	-19,3749	-5,2296
5	6	-3,6353	-0,9689	1,2356
6	7	-5,1841	-5,4440	-1,1273
7	8	-4,1050	-2,1618	-1,6661
8	9	-5,9139	-0,1712	-0,0901
9	10	-2,3436	0,0412	0,1238

A la taula 4.1 podem veure el valor de la *d de Cohen* per a les diferents comparacions dos a dos de valors consecutius de NI per a les dades del mapa de Hénon. Els resultats són contradictoris respecte del que mostren les dades en els gràfics. Si mirem la primera comparació no trobem l'esperat augment de la grandària de l'efecte en funció del nivell de soroll. Sí que augmenta per a $L/D_A = 0,5$ però això no succeeix, com hauríem d'esperar, per a $L/D_A = 1$. podem veure el mateix patró si ens fixem amb les següents tres comparacions. Malauradament ens trobem amb el problema ja esmentat de la falta d'homogeneïtat de variàncies. Donat que quan més gran és el nivell de soroll més augmenta la desviació típica, això també té una efecte en el càlcul de la *d de Cohen*. Aquest efecte reiterat de les diferències en les desviacions també el trobem en les dades de la ST x de l'atractor de Rössler, encara que de forma més reduïda donat que

solament es dona en la primera i sisena comparacions. Els valors de la *d de Cohen* per a la ST x de l'atractor de Rössler es mostren a la taula 4.2.

Taula 4.2: Càlcul de la grandària de l'efecte de les diferències respecte la variable CORRELACIÓ, entre puntuacions consecutives de la variable NI, per als diferents conjunts de dades de la ST x de l'atractor de Rössler ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$).

Grandària de l'efecte (<i>d de Cohen</i>)				
NI_{Previ}	NI_{Posterior}	L/D_A = 0	L/D_A = 0,5	L/D_A = 1
1	2	-2,1154	-3,1992	-3,0589
2	3	-0,8410	-2,6492	-4,4944
3	4	-0,7405	-1,7711	-2,8928
4	5	-0,7013	-1,4308	-2,5912
5	6	-0,4535	-0,8675	-0,8700
6	7	-0,5453	-2,5563	-1,7083
7	8	-0,5640	-0,8186	-0,9705
8	9	-0,2609	-0,9815	-0,4310
9	10	-0,2604	-1,5938	-0,2450

4.3 ASSOLIMENT D'OBJECTIUS I LÍNIES DE FUTUR

Finalment ha arribat l'hora en que cal mirar enrere i recuperar els objectius que m'havia plantejat per tal de contrastar el grau d'assoliment d'aquests. Es pot afirmar que mitjançant el mètode que he dissenyat s'ha aconseguit estimar la DI, i també s'ha aconseguit avaluar la SCI, d'un seguit de ST simulades que provenen de la TSD. De totes formes aquesta afirmació cal prendre-la amb reserves pels resultats clarament esbiaixats en les anàlisis realitzades en els conjunts de dades de l'atractor de Rössler.

Pel que fa als objectius específics que he enunciat al primer capítol d'aquesta Tesi, queda clar que el mètode dissenyat ha permès identificar la Dimensionalitat i la

SCI utilitzant una estratègia de presa de decisions contrastada estadísticament, per tant, el primer dels objectius específics ha estat assolit. Malauradament, com ja he comentat, els resultats no sempre han estat exactament els esperats. D'altra banda, ha quedat clar que el fet d'afegir soroll a les ST originals fa que aquest afecti de la mateixa manera que ho fa amb altres tècniques, esbiaixant els resultats en la mateixa direcció quan fa referència a la Dimensionalitat. Pel que fa a l'avaluació de la SCI, no queda clar com contrastar l'afectació diferencial del soroll per a un conjunt de dades determinat. Respecte d'aquest punt més endavant proposo una possible solució que sorgeix d'haver observat aquesta presència diferencial d'heterogeneïtat de variàncies.

Hi ha un seguit d'aportacions d'aquest treball que no poden passar per alt, si més no sota el meu punt de vista. El fet d'emprar una estratègia de simulació experimental implica una especificació del procediment que permet una revisió de cadascuna de les etapes seguides. D'aquesta manera es poden detectar els aspectes que cal millorar quan això sigui necessari, un cop analitzats els resultats i vistes les implicacions que aquests tenen en funció del marc teòric adoptat. En aquest sentit crec que optar per aquesta forma de procedir en aquest treball, pel fet que entra en terrenys innovadors dins l'àmbit de la psicologia, li dóna unes garanties d'haver fet la feina ben feta encara que això no porti sempre als resultats esperats. Més endavant podreu veure un seguit de propostes de futur que seria difícil identificar sense haver seguit un procediment experimental. Per tant en aquest sentit sí que crec que s'acompleixen les expectatives que hom diposita en un treball d'investigació.

D'altra banda també m'agradaria destacar un altre aspecte que crec que és cabdal. En aquest treball de recerca es donen la mà dos àmbits de la ciència que es poden considerar separats tot i que tenen coses en comú. Per un costat tenim un cos teòric dedicat a l'estudi dels SD. Aquest proposa un seguit de conceptes que trobem en les ST. També ens aporta una col·lecció d'eines per a la seva avaluació que tenen en les característiques de l'atractor reconstruït la base del seu funcionament. Finalment es posa èmfasi en un seguit de consideracions a tenir en compte a partir de les conclusions que s'extreuen després de ser aplicades aquestes. D'altra banda tenim una eina que

permet modelar aquestes ST amb l'objectiu de poder realitzar prediccions. El punt de contacte entre ambdues aportacions està en el fet que les XNA, com ho fa el Sistema Nerviós de qualsevol animal, poden emmagatzemar coneixement per l'experiència, en el nostre context crec que en fer prediccions d'una ST, en base a un procés d'aprenentatge mitjançant XNA, el que acaba succeint és que les característiques de l'atractor reconstruït queden modelades.

Al llarg d'aquest darrer capítol he intentat mostrar què ha aportat el treball d'investigació que he desenvolupat en els darrers anys. Això implica esmentar les aspiracions que s'han assolit però també les mancances que he anat trobant en mirar enrere. Crec que això m'ha d'encoratjar a mirar endavant tenint en compte el que ha estat constatat, com fa tothom que ha passat per una experiència similar en la que estic ara. En aquest sentit m'agradaria proposar possibles modificacions de cara a un futur més o menys immediat:

- *Respecte de les dades a utilitzar caldria tenir en compte el següent:*

1. Hem pogut veure l'efecte que produeix la grandària del conjunt de dades. Ja he comentat que la motivació per escollir un volum de dades reduït és la necessitat de desenvolupar eines que siguin útils en el nostre àmbit. En aquest sentit estaria bé replicar el mètode proposat amb conjunts de dades més amplis per tal de veure si les explicacions que aporta la TSD, al respecte dels resultats assolits en aquesta investigació, queden confirmats o no. Hi ha indicis que ens fan pensar en aquesta possibilitat de millora que queden clarament dibuixats a la figura 4.1. Seria interessant treballar en la línia de trobar a partir de quina grandària del conjunt de dades la tècnica millora la seva eficàcia, plantejant també la possibilitat que aquest punt d'inflexió estigui influenciat per les característiques de l'atractor quan se li afegeixen diferents nivells de soroll a les dades originals.
2. Un altre aspecte a tenir en compte en un futur, molt lligat amb el punt anterior, és la possibilitat d'afegir més nivells de soroll donat que, com ja he

esmentat en els apartats de discussió i conclusions, no queda del tot clar el seu efecte en els resultats en avaluar les característiques que estem estudiant. Crec que seria una millora substancial tenir en compte l'efecte de valors intermedis per tal d'intentar descriure la relació que s'estableix entre cada nivell de soroll i el biaix que aquest afegeix en l'estimació de la DI o en l'avaluació de la SCI.

3. Una altra línia de treball podria dirigir-se a l'aplicació del mètode proposat en dades reals, extretes de l'àmbit de la psicologia, i confrontar els resultats trobats amb els que sorgissin d'altres eines d'anàlisi. En aquest sentit caldria plantejar-se quines dades poden ser susceptibles de ser analitzades des dels postulats de la TSD.

- *Respecte del Procediment:*

1. Pel que fa al procediment seguit en la realització dels entrenaments de les XNA ja he esmentat que he intentat la sistematització d'aquest amb l'objectiu d'igualar les condicions dels diferents experiments de simulació. En treballs futurs seria convenient valorar possibles modificacions en la realització dels entrenaments de les xarxes. Es poden incorporar rutines que permetin millorar la generalització. En aquest sentit aquestes haurien de permetre identificar les oscil·lacions en l'error produïdes per una taxa d'aprenentatge massa gran, fet que permetria la correcció d'aquest paràmetre per tal d'optimitzar la disminució de les diferències entre l'estimació i el resultat esperat. Podria semblar que això és poc rigorós si tenim en compte la premissa que l'experimentació ha de ser sistemàtica pel que fa al procediment. De totes formes el fet de realitzar els experiments de simulació adaptant els paràmetres de l'entrenament, si es fa seguint un procediment estandarditzat, no ha d'entrar en contradicció amb la premissa esmentada.
2. Pel que fa a la selecció de les arquitectures es podria afegir un nou factor a tenir en compte que seria el nombre d'unitats en les capes amagades.

Haykin (1994) proposa un mètode experimental per tal de cercar el nombre idoni per millorar la tasca que ha d'implementar una XNA. Aquest consisteix en realitzar els entrenaments amb xarxes amb diferent nombre d'unitats en la capa amagada i escollir aquella arquitectura que millor implementa la tasca a realitzar.

3. En treballs futurs es podria incloure la utilització de la Mitjana d'Informació Mútua com a Variable Dependent per avaluar la capacitat de predicció de les diferents XNA, sempre que es puguin analitzar conjunts de dades més voluminosos, fet que a priori sembla difícil en el nostre àmbit.

- *Respecte de les eines d'anàlisi:*

1. En les conclusions hem pogut observar un problema de les dades que he esmentat reiteradament. Em refereixo a l'absència d'homogeneïtat de variàncies en els diferents experiments de simulació d'aquesta investigació. Com heu pogut constatar aquesta circumstància ha dificultat la interpretació d'alguns resultats. Especialment ha esdevingut un problema en l'anàlisi de l'afectació diferencial del nivell de soroll en la SCI. Vist així sembla que el vas estigui més aviat buit que ple. De totes formes aquesta constatació crec que no ha de ser vista com un problema, ha de ser vista com una troballa donat que és conseqüència de les característiques de les pròpies dades. El que ha quedat clar és que sí que trobem un patró en la davallada de la predicció diferenciat per a cada ST dins de cada conjunt de dades (Hénon i Rössler), encara que sigui en inspeccionar les gràfiques dels diferents resultats. D'altra banda una altra cosa està clara, en general el fet d'afegir soroll fa que augmentin les desviacions típiques en els resultats. Per tant, el que hauré de fer en un futur és plantejar-me de prendre aquest augment en la dispersió com un possible indicador. Crec que quedaria del tot justificat donat que es pot considerar que existeix una relació directa entre el nivell de soroll i la

desviació típica dels resultats de la predicció, si més no a partir dels resultats que es mostren en la figura 4.10.

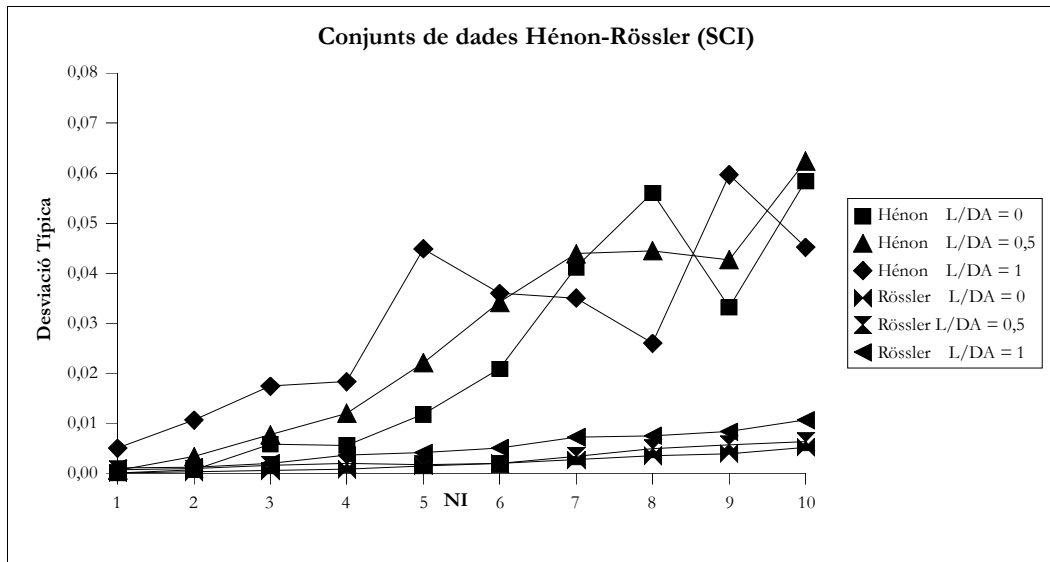


Figura 4.10: Gràfic amb les Desviacions Típiques dels experiments de simulació dedicats a l'avaluació de la SCI per al mapa de Hénon i per a l'atractor de Rössler amb els diferents nivells de soroll ($L/D_A = 0$, $L/D_A = 0,5$ i $L/D_A = 1$)

Finalment he aconseguit explicar el desenvolupament d'aquesta llarga investigació. El meu desig és que tot aquest treball es consolidi en un futur i disposem d'una eina més per a l'anàlisi de Sèries Temporals. Vull aprofitar aquestes darreres línies per agrair l'atenció de tots els lectors i lectores d'aquesta Tesi.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- Abarbanel, H. D. I. (1996). *Analysis of Observed Chaotic Data*. New York: Springer-Verlag.
- Abarbanel, H. D. I., Brown, R., Sidorowich, J. J. i Tsimring, L. S. (1993). The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of Modern Physics*, 65 (4), 1331-1392.
- Abraham, F. D. i Gilgen, A. R. (1995). *Chaos theory in psychology*. Westport: Praeger.
- Acharya, U. R., Faust, O., Kannathal, N., Chua, T. i Laxminarayan, S. (2005). Non-linear analysis of EEG signals at various sleep stages. *Computer methods and programs in biomedicine*, 80(1), 37-45.
- Aftanas, L. I., Lotova, N. V., Koshkarov, V. I., Pokrovskaja, V. L., Popov, S. A. i Makhnev, V. P. (1997). Non-linear analysis of emotion EEG: Calculation of kolmogorov entropy and the principal lyapunov exponent. *Neuroscience letters*, 226(1), 13-16.
- Aleksander, I., i Morton, H. (1990). *An Introduction to Neural Computing*. London: Chapman & Hall.
- Amunátegui, L. F. i Dowd, E. T. (2006). Autopoiesis and nonlinear modeling methods: An empirical approach to psychotherapy process research. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 10(2), 275-300.
- Angelino, E., Miglioretti, M. i Zotti, A. M. (2002). Agitation assessment in severe traumatic brain injury: Methodological and clinical issues. *Brain injury*, 16(3), 269-275.
- Arnau, J. (2001). *Diseños de series temporales: técnicas de análisis*. Barcelona: Edicions Universitat de Barcelona.
- Ato, M. i Vallejo, G. (2007). *Diseños Experimentales en Psicología*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Azoff, E. M. (1994). *Neural Network Time Series Forecasting of Financial Markets*. Chichester: John Wiley and Sons.
- Bascompte, J. (1995). Buscant l'ordre ocult dels sistemes biològics. A J. Bascompte i J. Flos (Eds.), *Ordre i caos en ecologia* (pp. 313-170). Barcelona: Publicacions Universitat de Barcelona.

- Bono, R. (1994). *Diseños de series temporales interrumpidas: técnicas alternativas de análisis*. Tesis Doctoral per a l'obtenció del títol de Doctora en Psicologia, Facultat de Psicologia, Universitat de Barcelona, Barcelona, Espanya.
- Bornas, X., Llabrés, J., Noguera, M. i López, A. (2006). Sample entropy of ECG time series of fearful flyers: Preliminary results. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 10(3), 301-318.
- Box, G. E. P. i Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco (CA): Holden-Day
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. i Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (3a Ed.). Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall
- Brown, M. B. I Forsythe, A. B. (1974a). The Small Sample Behavior of Some Statistics Wich Test the Equality of Several Means. *Technometrics*, 16 (1), 129-132.
- Brown, M. B. I Forsythe, A. B. (1974b). The ANOVA and multiple comparisons for data with heterogeneous variances. *Biometrics*, 30, 719-724.
- Cao, L. (1997). Practical Method for Determining the Minimum Embedding Dimension of a Scalar Time Series. *Physica D*, 110, 43-50.
- Casdagli, M. (1991). Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-linear Modelling. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 54 (2), 303-328.
- Chatfield, C. (1989). *The analysis of Time Series: An Introduction*. London: Chapman & Hall.
- Clayton, K. (1996). *Basic Concepts in Nonlinear Dynamics and Chaos*. Comunicació presentada a la Sisena Reunió Anual de la Societat per al Caos en Psicologia i Ciències de la Vida. Berkeley, Califòrnia.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2^a Ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Cooney, J.B. i Troyer, B. (1994). A Dynamic Model of Reaction Time in a Short-Term Memory Task. *Journal of Experimental Child Psychology*, 58, 200-226.
- Cronholm, J. N. i Revusky, S. H. (1965). A sensitive rank test for comparing the effects of two treatments on a single group. *Psychometrika*, 30 (4), 459-467.

- Docherty, S. L., Sandelowski, M. i Preisser, J. S. (2006). Three months in the symptom life of a teenage girl undergoing treatment for cancer. *Research in nursing & health*, 29, 294-310.
- Dunnet, C. W. (1980). Pairwise Multiple Comparisons in the Unequal Variance Case. *Journal of the American Statistical Association*, 75 (372), 796-800.
- Edgington, E. S. (1995). *Randomization Tests* (3a Ed.). New York: Marcel Dekker.
- Ehlers, C. L., Havstad, J., Prichard, D. i Theiler, J. (1998). Low doses of ethanol reduce evidence for nonlinear structure in brain activity. *The Journal of neuroscience : the official journal of the Society for Neuroscience*, 18(18), 7474-7486.
- Elbert, T., Ray, W. J., Kowalik, Z. J, Skinner, J. E., Graf, K. E. i Birbaumer, N. (1994). Chaos and physiology: deterministic chaos in excitable cell assemblies. *Physiological Reviews*, 74 (1), 1-47.
- Elger, C. E., Widman, G., Andrzejak, R., Arnhold, J., David, P. i Lehnertz, K. (2000). Nonlinear EEG analysis and its potential role in epileptology. *Epilepsia*, 41 Suppl 3, S34-8.
- Elsner, J. B. (1992). Predicting time series using a neural network as a method of distinguishing chaos from noise. *Journal of physics A. Mathematical and general*, 25(4), 843-850.
- Fahlman, S.E. i Lebiere, C. (1990). The cascade correlation learning architecture. D.S. Touretzky (Ed.), *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2 (pp. 524-532). San Mateo, Ca: Morgan Kauffman.
- Ferrière, R., Cazelles, B., Cézilly, F. i Desportes, J. P. (1996). Predictability and chaos in bird vigilant behaviour. *Animal Behaviour*, 52, 457-472.
- Ferrière, R., Cazelles, B., Cézilly, F. i Desportes, J. P. (1999). Predictability, chaos and coordination in bird vigilant behaviour. *Animal Behaviour*, 57, 497-500.
- Field, A. (2005). *Discovering Statistics using SPSS*. London: SAGE Publications Ltd.
- Fortes, M., Delignières, D. i Ninot, G. (2004). The dynamics of self-esteem and physical self: Between preservation and adaptation. *Quality and Quantity*, 38(6), 735-751.

- Fraser, A. M. i Swinney, H. L. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33 (2), 1134-1140.
- Frey, B. B. (2006). Adjusting behavioral methods when applying nonlinear dynamical measures to stimulus rate. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 10(2), 241-273.
- Gentile, J. R., Roden, A. H. i Klein, R. D. (1972). An analysis-of-variance model for the intrasubject replication design. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 5 (2), 193-198.
- Gershenfeld, N. A. i Weigend, A. S. (1994). The Future of Time Series: Learning and Understanding. A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld (Eds.), *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. (pp. 1-70) Reading: Addison-Wesley Publishing Company.
- Gleick, J. (1987). *Chaos*. London: Abacus.
- Grassberger, P. i Procaccia, I. (1983). Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, 50 (5), 346-349.
- Guastello, S. J., Johnson, E. A. i Rieke, M. L. (1999). Nonlinear dynamics of motivational flow. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 3(3), 259-273.
- Guastello, S. J., Pincus, D. i Gunderson, P. R. (2006). Electrodermal arousal between participants in a conversation: Nonlinear dynamics and linkage effects. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 10(3), 365-399.
- Guillot, A. i Meyer, J. (2000). Chaotic dynamics underlying action selection in mice. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 4(4), 297-309.
- Hagerty, M.R. (1999). Unifying livability and comparison theory: Cross-national time-series nalysis of life-satisfaction. *Social Indicators Research*, 47 (3), 343-356.
- Harbourne, R. T. i Stergiou, N. (2003). Nonlinear analysis of the development of sitting postural control. *Developmental psychobiology*, 42(4), 368-377.
- Hartmann, D. P. (1974). Forcing square pegs into round holes Some comments on “an analysis-of-variance model for the intrasubject replication design”. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 7, 635-638.

- Haykin, S. (1994). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. New York: Macmillan College Publishing Company, Inc.
- Heath, R. H. (2000). *Nonlinear dynamics: Techniques and applications in psychology*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Hegger, R., Kantz, H. i Schreiber, T. (1999). Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package, *CHAOS* 9 (2), 413-435.
- Heiby, E. M., Pagano, I. S., Blaine, D. D., Nelson, K. i Heath, R. A. (2003). Modeling unipolar depression as a chaotic process. *Psychological assessment*, 15(3), 426-434.
- Hénon, M. (1976). A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50, 69-77.
- Hertz, J., Krogh, A. i Palmer, R.G. (1991). *Introduction to the theory of neural computation*. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company
- Hinton. D.E. (1989). Connectionist Learning Procedures. *Artificial Intelligence*, 40 (1-3), 185-234.
- Hochberg, Y. i Tamhane, A. C. (1987). *Multiple Comparison Procedures*. New York: John Wiley & Sons.
- Hornero, R., Alonso, A., Jimeno, N., Jimeno, A. i López, M. (1999). Estimation of correlation dimension to evaluate cognitive performance in schizophrenic patients using a new computer technique. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 3(1), 49-63.
- Iskra-Golec, I. (2006). Ultradian and asymmetric rhythms of hemispheric processing speed. *Chronobiology international*, 23(6), 1229-1239.
- Islam, M. M. i Murase, K. (2005). Chaotic dynamics of a behavior-based miniature mobile robot: Effects of environment and control structure. *Neural Networks*, 18(2), 123-144.
- Iverson, G. L., Gaetz, M. B., Rzempoluck, E. J., McLean, P., Linden, W. i Remick, R. (2005). A new potential marker for abnormal cardiac physiology in depression. *Journal of Behavioral Medicine*, 28(6), 507-511.

- Jeong, J. (2004). EEG dynamics in patients with alzheimer's disease. *Clinical neurophysiology : official journal of the International Federation of Clinical Neurophysiology*, 115(7), 1490-1505.
- Jing, H., Takigawa, M. i Benasich, A. A. (2002). Relationship of nonlinear analysis, MRI and SPECT in the lateralization of temporal lobe epilepsy. *European neurology*, 48(1), 11-19.
- Kazdin, A. E. (1982). *Single Case Research Designs: Methods for Clinical and Applied Settings*. New York: Oxford University Press.
- Kennel, M. B., Brown, R. i Abarbanel, H. D. I. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45 (6), 3403-3411.
- Kim, D. J., Jeong, J., Chae, J. H., Park, S., Yong Kim, S., Jin Go, H., Paik I. H., Kim K. S. i Choi B.. (2000). An estimation of the first positive lyapunov exponent of the EEG in patients with schizophrenia. *Psychiatry research*, 98(3), 177-189.
- Kim, Y. W., Kriebel, K. K., Kim, C. B., Reed, J. i Rae-Grant, A. D. (1996). Differentiation of alpha coma from awake alpha by nonlinear dynamics of electroencephalography. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*, 98(1), 35-41.
- Kirsch, P., Besthorn, C., Klein, S., Rindfleisch, J. i Olbrich, R. (2000). The dimensional complexity of the EEG during cognitive tasks reflects the impaired information processing in schizophrenic patients. *International Journal of Psychophysiology*, 36, 237-246.
- Kononov, E. (2004). *Visual Recurrence Analysis v4.6*. Windsor: Securities Software and Consulting Technologies. Recuperat el 31 d'agost de 2004 del World Wide Web: <http://home.netcom.com/~eugenek/>
- Lapedes, A. i Farber, R. (1987). *Nonlinear Signal Processing Using Neural Networks: Prediction and System Modelling*. Los Alamos National Laboratory, Los Alamos. Technical Report LA-UR-87-2662. Recuperat el 25 de maig de 2001 del World Wide Web: <http://lib-www.lanl.gov/la-pubs/00205393.pdf>

- Longstaff, M. G. i Heath, R. A. (2003). The influence of motor system degradation on the control of handwriting movements: A dynamical systems analysis. *Human Movement Science*, 22(1), 91-110.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), 130-141.
- Malapeira, J. M, Honrubia, M. L. i Viader, M. (1990). *Psicología Experimental: Conceptos Básicos* (2ª Ed.). Esplugas de Llobregat (Barcelona): Editorial-Gràficas Signo, S. A.
- Mandelbrot, B. (1996). *Los objetos fractales*. (4ª Ed.)Barcelona: Tusquets Editores, S. A. (Trabajo original publicado en 1975).
- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261, 459-467.
- McClelland, J. L. i Rumelhart, D. E. (1988). *Explorations in Parallel Distributed Processing: A Handbook of Models, Programs, and Exercises*. Cambridge: MIT Press.
- Mégrot, F, Bardy, B. G. i Dietrich, G. (2002). Dimensionality and the dynamics of human unstable equilibrium. *Journal of motor behavior*, 34(4), 323-328.
- Meyer-Lindenberg, A., Bauer, U., Krieger, S., Lis, S., Vehmeyer, K., Schüler, G. i Gallhofer, B. (1998). The topography of non-linear cortical dynamics at rest, in mental calculation and moving shape perception. *Brain topography*, 10(4), 291-299.
- Morais, V. (1999). *Factores determinantes de la evaluación del cambio conductual mediante inferencia visual*. Tesi Doctoral per a l'obtenció del títol de Doctora en Psicologia, Facultat de Psicologia, Universitat de Barcelona, Barcelona, Espanya.
- Morley, S. i Adams, M. (1991). Graphical analysis of single-case time series data. *British Journal of Clinical Psychology*, 30, 97-115.
- Munné, F. (1993). La teoría del caos y la Psicología social. A I. Fernández Jiménez y M.F. Martínez (Eds.), *Epistemología y procesos psicosociales básicos*. Sevilla: EUDEMA.
- Munné, F. (2004). El retorno de la complejidad y la nueva imagen del ser humano: Hacia una psicología compleja. *Revista Interamericana de Psicología*, 38 (1), 21-29.
- Muñiz, J. (1998). La medición de lo psicológico. *Psicothema*, 10 (1), 1-21.

- Nahshoni, E., Aizenberg, D., Sigler, M., Strasberg, B., Zalsman, G., Imbar, S., Adler, E. i Weizman, A. (2004). Heart rate variability increases in elderly depressed patients who respond to electroconvulsive therapy. *Journal of psychosomatic research*, 56(1), 89-94.
- Navarro, J. i D. de Quijano, S. (2003). Dinámica no lineal en la motivación en el trabajo: propuesta de un modelo y resultados preliminares. *Psicothema*, 15 (4). 643-649.
- Peer, J. E., Kupper, Z., Long, J. D., Brekke, J. S. i Spaulding, W. D. (2007). Identifying mechanisms of treatment effects and recovery in rehabilitation of schizophrenia: Longitudinal analytic methods. *Clinical psychology review*, 27(6), 696-714.
- Pereda, E., Quiroga R. Q. i Bhattacharya, J. (2005). Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Progress in Neurobiology*, 77, 1-37.
- Revusky, S. H. (1967). Some statistical treatments compatible with individual organism methodology. *Journal of the experimental analysis of behavior*, 10, 319-330.
- Rifà, X., López, A., Viader, M. i Riba, C. (1998). *Using fractal dimension to assess changes in breathing patterns of cetaceans, caused by environmental situation*. Comunicació presentada a la Vuitena Reunió Anual de la Societat per al Caos en Psicologia i Ciències de la Vida a Boston, Massachusetts.
- Rifà, X. i Viader, M. (2000). *Estimation of Embedding Dimension Performing Forecasting with Artificial Neural Networks*. Comunicació presentada a la Desena Reunió Anual de la Societat per al Caos en Psicologia i Ciències de la Vida a Philadelphia, Pennsylvania.
- Rifà, X., Fuentemilla, Ll., Viader, M. i Grau, C. (en premsa). Estudio piloto de las diferencias en la dimensionalidad del electroencefalograma entre vigilia y sueño profundo. *Psicothema*
- Rodrick, D. i Karwowski, W. (2006). Nonlinear dynamical behavior of surface electromyographical signals of biceps muscle under two simulated static work postures. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 10(1), 21-35.

- Roijals, I. J., Marco, J., Ruffini, G. i Grau C. (2004). *Aplicación de Multiscale Entropy al estudio del EEG*. Póster presentat al Quart Congrés de la Societat Espanyola de Psicofisiologia a Sevilla, Andalusia.
- Rössler, O. E. (1976). An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters A*, 57 (5), 397-398.
- Rumelhart, D.E., Hinton, G.E i Williams, R.J. (1986). Learning internal representations by error propagation. A D.E. Rumelhart i J.L. McClelland (Eds.), *Parallel Distributed Processing: Explorations in the microstructure of cognition Volume 1: Foundations*. (pp. 318-362). Cambridge: MIT Press.
- Ruxton, G. D. i Roberts, G. (1999). Are vigilance sequences a consequence of intrinsic chaos or external changes? *Animal Behaviour*, 57, 493-495.
- Schmitz, B. i Wiese, B. S. (2006). New perspectives for the evaluation of training sessions in self-regulated learning: Time-series analyses of diary data. *Contemporary educational psychology*, 31, 64-96.
- Serletis, A., Shahmoradi, A. i Serletis, D. (2007). Effect of noise on estimation of Lyapunov exponents from a time series. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32 (2), 883-887.
- Shen, Y., Olbrich, P., Achermann, P. i Meier, P. F. (2003). Dimensional complexity and spectral properties of the human sleep EEG. *Clinical neurophysiology*, 114(2), 199-209.
- Shine, L. C. i Bower, S. M. (1971). A one way analysis of variance for single-subject designs. *Educational and Psychological Measurement*, 31, 105-113.
- Sierra, V. (1997). *Estadísticos robustos en diseños conductuales : análisis y simulación Monte Carlo*. Tesis Doctoral per a l'obtenció del títol de Doctora en Psicologia, Facultat de Psicologia, Universitat de Barcelona, Barcelona, Espanya.
- Skarda, C. A. i Freeman, W. J. (1987). How brains make chaos in order to make sense of the world. *Behavioral and Brain Sciences*, 10 (2), 161-195.
- Solanas, A., Salafranca, L. i Guàrdia, J. (1992). Análisis estadístico de diseños conductuales: Estadístico β_n . *Psicothema*, 4(1), 253-259
- Solé, R.V. i Manrubia, S.C. (1996). *Orden y caos en sistemas complejos*. Barcelona: Edicions UPC.

- Sprott, J. C. i Rowlands, G. (1992). *Chaos Data Analyzer: Users Manual*. New York: American Institute of Physics.
- Stam, C. J. (2005). Nonlinear dynamical analysis of EEG and MEG: Review of an emerging field. *Clinical neurophysiology*, 116(10), 2266-2301.
- Sugihara, G. i May, R.M. (1990). Nonlinear Forecasting as a Way of Distinguishing Chaos from Measurement Error in Time Series. *Nature*, 344, 734-741.
- Theiler, J. i Rapp, P. E. (1996). Re-examination of the evidence for low-dimensional, nonlinear structure in the human electroencephalogram. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 98(3), 213-222.
- Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*. New York: Oxford University Press.
- Vallejo, G. (1996). *Diseño de series temporales interrumpidas*. Barcelona: Editorial Ariel, S.A.
- van Cappellen van Walsum, A. M., Pijnenburg, Y. A. L., Berendse, H. W., van Dijk, B. W., Knol, D. L., Scheltens, P., i Stam, C. J. (2003). A neural complexity measure applied to MEG data in alzheimer's disease. *Clinical Neurophysiology*, 114(6), 1034-1040.
- Weigend, A. S. i Gershenfeld, N. A. (1994). *Time series prediction: forecasting the future and understanding the past*. Reading: Addison-Wesley Publishing Company.
- Weigend, A. S., Rumelhart, D. E. i Huberman, B. A. (1990). Back-propagation, Weight-Elimination and Time Series Prediction. D. S. Touretzky, J. L. Elman, T. J. Sejnowski, i G. E. Hinton (Eds.), *Proceedings of the 1990 Connectionist Models Summer School* (pp. 105-116). San Mateo, CA: Morgan Kaufmann.
- Whittam, K. P., Dwyer, W. O., Simpson, P. W. i Leeming, F. C. (2006). Effectiveness of a media campaign to reduce traffic crashes involving young drivers. *Journal of Applied Social Psychology*, 36(3), 614-628.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. i Vastano, J. A. (1985) Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16, 285-317.
- Yeragani, V. K., Mallavarapu, M., Radhakrishna, R. K. A., Tancer, M. i Uhde, T. (2004). Linear and nonlinear measures of blood pressure variability: Increased chaos of

blood pressure time series in patients with panic disorder. *Depression and anxiety*, 19(2), 85-95.

Yeragani, V. K., Rao, R., Tancer, M. i Uhde, T. (2004). Paroxetine decreases respiratory irregularity of linear and nonlinear measures of respiration in patients with panic disorder. *Neuropsychobiology*, 49(2), 53-57.

Zhang, G., Patuwo, B. E., i Hu, M. Y. (1998). Forecasting with artificial neural networks: The state of the art. *International journal of forecasting*, 14(1), 35-62.