

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorat

AUTOMÀTICA, ROBÒTICA I VISIÓ

Tesi Doctoral

MODELADO, SIMULACIÓN Y CONTROL DE UN  
CONVERTIDOR BOOST ACOPLADO MAGNÉTICAMENTE

**Niliana Andreina Carrero Candelas**

Director: Dr. Enric Fossas Colet

Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials

Mayo 2014



*Dedicado a mi familia,  
mi padre Jorge,  
mis hermanas Ninoska y Nixis,  
a mi eterno amor, mi madre Eddy.*



# Agradecimientos

---

En primer lugar a mi director de tesis, el profesor Enric Fossas Colet por su invaluable apoyo, dedicación y buena disposición en todo momento, merece mi infinita gratitud. Pues sin su dirección, no habría sido posible conseguir tales resultados.

Quiero agradecer al personal del laboratorio de control del IOC, en especial a Rafel Cardoner, Enric Mirió y Victor Repecho del Corral por su importantísima colaboración, paciencia ilimitada, pues sin su ayuda el montaje de la parte experimental no habría sido posible. Además del aprendizaje que obtuve al lado de ellos del trabajo en el laboratorio.

Al profesor Robert Griño, por las críticas y sugerencias realizadas durante mi paso por el laboratorio de control del IOC. También quiero agradecer a mi colega Marcos del grupo de Control, por compartir sus conocimientos y por su ayuda durante mi estancia en el laboratorio.

Al profesor Carles Batlle de la Universidad Politécnica de Cataluña por su colaboración en las publicaciones.

Al profesor Mario Spinetti Rivera de la Universidad de los Andes, por sus ratos de orientación y reflexión durante su estancia en el grupo de investigación ACES de la Universidad Politécnica de Cataluña. Además por su interés en mi trabajo, por haber quitado parte de su tiempo para atender mis inquietudes, pues sus conocimientos contribuyeron en parte a los resultados obtenidos.

Deseo, también agradecer al grupo de investigación Advanced Control of Energy Systems (ACES) de la Universidad Politécnica de Cataluña por el apoyo recibido.

Ha sido un enorme placer haber compartido con mis compañeros del IOC las comidas con amenos debates de temáticas realistas y algunas veces surrealistas. Pero sin lugar a duda, me aportaron nuevas y fuertes energías para seguir en este camino. Así que gracias a todos aquellos que tuve la oportunidad de conocer, en especial a Marcos, Carlos A., Isiah, Carlos R., Andres M., Diana, Henry, Leo, Josep, Abiud, Noe,...pido disculpas por los que no he nombrado.

A Yuri por su incondicional apoyo, estímulo y tolerancia en muchas formas.

Y por supuesto, mi mayor agradecimiento para mi familia, por su apoyo incondicional, por estar siempre a mi lado a pesar de la distancia. Son ustedes los que me dan fuerza para no desvanecer y seguir adelante para cumplir mis sueños.

A todos ellos, muchas gracias.  
Niliana

# Resumen

---

La presente tesis abarca el modelado, simulación y diseño de una ley de control para un convertidor Boost de inductancias acopladas. En particular, desde el punto de vista de modelado, nos enfocamos en las teorías de modelos promediados y sistemas lineales complementarios (LCS), para obtener la dinámica del convertidor Boost de inductancias acopladas, el cual trabaja en modo discontinuo de conducción (DCM). El análisis del convertidor se lleva a cabo asumiendo características ideales de tensión-corriente en el interruptor y los diodos. Además, los modelos obtenidos son validados mediante simulación con el modelo del convertidor proporcionado por la herramienta de simulación para circuitos eléctricos Psim. El interés en la topología de este convertidor se debe principalmente a su alta eficiencia y su elevada tasa de conversión sin necesidad de ciclos de trabajos extremos. Por otra parte, desde el punto de vista de control se propone una arquitectura de control en cascada. El lazo interno del control se compone de una estrategia de control no lineal, similar a la teoría de control en modo de deslizamiento, mientras que para el lazo externo se diseña un control de tipo PI. El principal objetivo del control diseñado es regular el voltaje de salida del convertidor a el valor de referencia deseado. La efectividad y desempeño del controlador diseñado es validada tanto en simulación como experimentalmente ante diferentes escenarios que incluyen perturbaciones en la carga y el voltaje de entrada. Adicionalmente a partir del modelo lineal complementario del convertidor, se lleva a cabo un análisis de la dinámica ideal de deslizamiento y un análisis numérico de la estabilidad cuando se tiene modo de deslizamiento.

**Palabras claves:** *Modelo promediado, sistemas híbridos, sistemas lineales complementarios, control en modo de deslizamiento.*



# Abstract

---

This thesis covered the modeling, simulation as well as the design of a control law for a coupled inductor Boost converter. In particular, from the point of view of modeling, we focused on the use of averaged modeling and linear complementarity systems (LCS), in order to obtain the dynamic of a coupled inductor Boost converter, which works in discontinuous conduction mode (DCM). The analysis of the converter was performed assuming ideal voltage-current characteristics in the switch and the diodes. In addition, those models were validated through simulation with the model of the converter obtained from the simulation tool for electrical circuits Psim. The interest in researching this converter topology was mainly due to its high efficiency and high conversion rate without extreme duty cycle values. Moreover, from the point of view of control we have proposed a cascade control architecture. The inner loop is a sliding mode current control loop, while the outer one is a PI controller that tunes the current reference to regulate the output voltage to a reference value. The performance and the effectiveness of the feedback control was validated under the presence of load disturbances and input voltage variations through computer simulations by using the linear complementarity model as well as experimentally. Additionally from the linear complementarity model of the converter, it was performed an analysis of the ideal dynamic that takes place when occurs sliding motions in the converter and numerical stability analysis was also carried out.

**Keywords:** *Average model, hybrid systems, linear complementarity systems, sliding mode control.*



# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	3
1.2. Organización . . . . .	3
Referencias . . . . .	3
<b>2. Convertidor Boost acoplado magnéticamente</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Arquitectura del convertidor Boost acoplado magnéticamente . . . . .	8
2.3. Análisis de las transiciones topológicas . . . . .	11
2.4. Límites entre modos de conducción . . . . .	14
2.5. Análisis de la relación de conversión ideal . . . . .	23
2.6. Conclusiones . . . . .	34
Referencias . . . . .	35
<b>3. Modelado del convertidor Boost acoplado magnéticamente</b>	<b>37</b>
3.1. Introducción . . . . .	37
3.2. Modelo promedio en espacio-estado . . . . .	40

3.2.1. Simulación del modelo promedio en lazo abierto . . . . .	44
3.3. Modelado usando el formalismo complementario . . . . .	47
3.3.1. Simulación del modelo complementario en lazo abierto . . . . .	51
3.4. Conclusiones . . . . .	54
Referencias . . . . .	54
<b>4. Diseño del control</b>	<b>59</b>
4.1. Introducción . . . . .	59
4.2. Control de corriente . . . . .	61
4.2.1. Dinámica promedio . . . . .	63
4.2.2. Análisis de estabilidad de la dinámica promedio . . . . .	74
4.2.3. Simulaciones del control de corriente . . . . .	76
4.3. Control de voltaje . . . . .	77
4.3.1. Simulación del control de voltaje . . . . .	83
4.4. Conclusiones . . . . .	86
Referencias . . . . .	86
<b>5. Implementación y Resultados Experimentales</b>	<b>91</b>
5.1. Implementación experimental . . . . .	91
5.2. Resultados experimentales . . . . .	95
5.3. Conclusiones . . . . .	97
<b>6. Conclusiones</b>	<b>103</b>
6.1. Trabajos futuros . . . . .	104
<b>A. Análisis de la relación de conversión ideal</b>	<b>107</b>
<b>B. Análisis de la dinámica promedio cuando se tiene modo de deslizamiento</b>	<b>111</b>

# Índice de figuras

---

2.1. Estructura del convertidor Boost acoplado magnéticamente . . . . .	9
2.2. Posibles estados del interruptor y los diodos en un periodo de conmutación . . . . .	10
2.3. Topologías del convertidor Boost acoplado magnéticamente . . . . .	12
2.4. Evolución de las trayectorias del Boost Acoplado . . . . .	13
2.5. Formas de onda de las trayectorias en $T_0$ en un periodo de conmutación . . . . .	15
2.6. Formas de onda de las trayectorias de las corrientes en los inductores y diodos en CCM	16
2.7. Comparación de $K_{1_{crit}}$ , $K_{2_{crit}}$ vs. $d$ . . . . .	20
2.8. Límites entre los modos de conducción en el Boost acoplado magnéticamente $R$ vs. $d$ .	21
2.9. Formas de ondas de las corrientes en los inductores en las trayectorias $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4$	22
2.10. Formas de onda de las trayectorias en $T_1$ en un periodo de conmutación . . . . .	24
2.11. Formas de onda de las trayectorias en $T_3$ en un periodo de conmutación . . . . .	28
2.12. Formas de onda de las trayectorias en $T_4$ en un periodo de conmutación . . . . .	32
3.1. Simulación en lazo abierto del modelo promedio en $T_3$ y Psim . . . . .	46
3.2. Error relativo del voltaje de salida entre el modelo promedio en $T_3$ y Psim . . . . .	47
3.3. Simulación en lazo abierto del modelo promedio en $T_4$ y Psim . . . . .	48
3.4. Error relativo del voltaje de salida entre el modelo promedio en $T_4$ y Psim . . . . .	49
3.5. Simulación en lazo abierto del modelo complementario y Psim . . . . .	52
3.6. Zoom de las trayectorias de las corrientes del modelo complementario y Psim . . . . .	53
3.7. Error relativo del voltaje de salida entre el modelo complementario y Psim . . . . .	53
4.1. Esquema de control del convertidor Boost acoplado magnéticamente . . . . .	61
4.2. Trayectoria de la superficie de deslizamiento $s(x)$ . . . . .	63
4.3. Formas de onda de las corrientes en los inductores en $T_3$ y la superficie . . . . .	66
4.4. Formas de onda de las corrientes en los inductores en $T_4$ y la superficie . . . . .	70

4.5.	Diagrama de fase del modelo promedio para la trayectoria $T_3$ . . . . .	75
4.6.	Diagrama de fase del modelo promedio para la trayectoria $T_4$ . . . . .	76
4.7.	Simulación del lazo de corriente en $T_3$ usando el modelo lineal complementario . . . . .	78
4.8.	Simulación del lazo de corriente en $T_3$ usando el modelo LCS y el modelo promedio . . . . .	79
4.9.	Simulación del lazo de corriente en $T_4$ usando el modelo lineal complementario . . . . .	80
4.10.	Simulación del lazo de corriente en $T_4$ usando el modelo LCS y el modelo promedio . . . . .	81
4.11.	Resultados de simulación: Perturbación en la carga $R$ . . . . .	84
4.12.	Resultados de simulación: Perturbación en el voltaje de entrada $V_{in}$ . . . . .	85
4.13.	Resultados de simulación: Cambios en el voltaje de referencia $V_{ref}$ . . . . .	87
5.1.	Diagrama de bloques de la implementación . . . . .	92
5.2.	Configuración del DSP TMS320F28335 usando SimCoder de Psim . . . . .	93
5.3.	Esquema del circuito del control analógico . . . . .	94
5.4.	Implementación del hardware de la ley de control . . . . .	96
5.5.	Trayectorias del voltaje de salida $v_R$ y corriente en el inductor $L_1$ . . . . .	98
5.6.	Componente ac del voltaje de salida $v_R$ . . . . .	98
5.7.	Trayectorias de las corrientes en los inductores, superficie y acción de control . . . . .	99
5.8.	Trayectoria del voltaje de salida frente a perturbaciones en la carga . . . . .	100
5.9.	Trayectoria del voltaje de salida frente a perturbaciones en el voltaje de entrada . . . . .	101
B.1.	Formas de onda de las trayectorias en $T_3$ en un periodo de conmutación . . . . .	112
B.2.	Formas de onda de las trayectorias en $T_4$ en un periodo de conmutación . . . . .	114

# Índice de cuadros

---

2.1. Transiciones topológicas en CCM y DCM . . . . .	19
3.1. Parámetros del convertidor . . . . .	45
4.1. Parámetros de simulación diagrama de fases . . . . .	74



# Acrónimos

---

<b>ADC</b>	Analog Digital Conversion Conversión analógica-digital
<b>BG</b>	Bond Graph
<b>CC</b>	Complementarity Conditions Condiciones de complementariedad
<b>CCM</b>	Continuous Conduction Mode Modo continuo de conducción
<b>CCS</b>	Code Composer Studio
<b>CIECA</b>	Current Injected Equivalent Circuit Approach Circuito equivalente de la corriente inyectada
<b>EMI</b>	ElectroMagnetic Interference Interferencia electromagnética
<b>GPIO</b>	General-Purpose Input/Output Puerto genérico de entrada-salida
<b>HA</b>	Hybrid Automaton Autómata híbrido
<b>H-Infinity</b>	H-Infinity control Control H-Infinito
<b>KBM</b>	Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky averaging method Método general de promediado KBM
<b>LCS</b>	Linear Complementarity Systems Sistemas lineales complementarios
<b>LQR</b>	Linear-Quadratic Regulator Regulador lineal óptimo cuadrático
<b>MDMs</b>	Multi-Discontinuous Modes Modo discontinuos múltiples

<b>MISSCO</b>	MIInimum Separable Switching Configuration Mínima configuración del circuito conmutado
<b>MLD</b>	Mixed Logical Dynamic Sistemas dinámicos lógicos mixtos
<b>MOSFET</b>	Metal-oxide-semiconductor Field-effect transistor Transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor
<b>MPC</b>	Model Predictive Control Control predictivo basado en modelo
<b>PI</b>	Proportional-Integral controller Control con acción proporcional e integral
<b>PID</b>	Proportional-Integral-Derivative controller Control con acción proporcional, integral y derivativa
<b>PWA</b>	PieceWise Affine Systems Sistemas lineales a trozos
<b>PWM</b>	Pulse Width Modulation Modulación por ancho de pulsos
<b>SCS</b>	Switched Complementarity Systems Control en modo de deslizamiento
<b>SSA</b>	State-Space Averaging Modelo promedio en espacio-estado
<b>ZCS</b>	Zero Current Switching Conmutación a cero de corriente
<b>ZVS</b>	Zero Voltage Switching Conmutación a cero de voltaje

# Introducción

---

Las topologías más elementales como el Buck (reductora), Boost (elevadora) y el Buck-Boost (reductora-elevadora) presentan algunos inconvenientes en aplicaciones que requieren una tasa elevada de conversión entre el voltaje de entrada ( $V_{in}$ ) y el voltaje de salida ( $v_R$ ). Puesto que, para obtener elevadas tasas de conversión con estas topologías se requiere que la variación del tiempo de conducción (ciclo de trabajo  $0 < d < 1$ ) de los dispositivos conmutadores (interruptores y diodos) sean muy extremos [1]. Por otra parte, ciclos de trabajo extremos no son recomendables por varias razones, entre ellas: 1) existen limitaciones en los dispositivos conmutadores no ideales, 2) a fin de obtener una salida de tensión elevada con una topología convencional elevadora es necesario que las características de corriente y voltaje del dispositivo conmutador (MOSFET) no sean pequeñas, como consecuencia es indispensable que la resistencia de salida del MOSFET  $R_{DS}$  sea grande. Lo cual se traduce en pérdidas de conducción, incremento del costo y tamaño del convertidor, 3) por otra parte, ciclos de trabajo extremos podrían dar lugar a problemas serios de tiempo de recuperación inversa del diodo [1, 2], y por último 4) el control diseñado debe ser capaz de responder ante las perturbaciones en la carga o variaciones en el voltaje de entrada, por lo que es necesario que los valores del ciclo de trabajo no sean cercanos a cero o a uno, de manera que el controlador sea capaz de compensar las perturbaciones. De ahí que, una topología convencional elevadora no es adecuada para aplicaciones en las que se requiere al menos cuatro veces el voltaje de entrada [3].

Dada la importancia de la eficiencia en convertidores de potencia, ha habido un creciente interés por parte de grupos de investigación de todo el mundo por arquitecturas no convencionales de convertidores que permitan obtener elevadas tasa de conversión con las mínimas pérdidas posibles y apropiados para aplicaciones que requieren alta potencia. Varias topologías han sido propuestas en la literatura como posible solución a este problema, entre ellas se encuentran los convertidores Boost en cascada [4]. No obstante la mayor desventaja de este tipo de arquitectura son la complejidad, el elevado costo por el uso de dos etapas elevadoras interconectadas entre si, en donde las pérdidas se incrementan principalmente por los interruptores activos y el diseño del control y análisis de estabilidad resultan ser también bastante complejos [5, 3].

La familia de convertidor resonantes o de conmutación suave (ZVS-converters) [6, 7, 8] también pueden

proporcionar elevadas tasas de conversión sin necesidad ciclos de trabajo extremos. La formas de ondas de estos convertidores son casi senoidal, en lugar de las formas de ondas triangular de las topologías convencionales, por lo que presentan valores picos de corrientes grandes. Además, valores relevantes de corrientes pueden circular por los elementos resonantes (L-C), aun cuando la carga está desconectada, como consecuencia la eficiencia se degrada para valores de carga ligeros [8]. Por otra parte, el análisis de estas topologías también resulta complejo. Sin embargo, la mayor ventaja es la reducida pérdida de conducción que se logra a través de estrategias de conmutación con cero de tensión (ZVS, por sus siglas en inglés) y/o cero de corriente (ZCS, por sus siglas en inglés) durante las transiciones del interruptor. Además en algunas topologías el rango de las frecuencia de conmutación puede ser muy elevados [8].

Otra solución consiste en el uso de inductores acoplados y/o transformadores [9, 10, 11], sin embargo la mayor desventaja de este tipo de convertidores es que se ven afectados por la interferencia electromagnética (EMI, por sus siglas en inglés) y la eficiencia se degrada debido a las inductancias de fuga del transformador [3]. El uso de circuitos fijadores de nivel o restauradores de componente continua constituyen una solución para reciclar la energía de las inductancias de fugas [12] y para reducir el estrés eléctrico durante las conmutaciones. Ciertamente, la adición de este tipo de circuitos incrementa la complejidad del convertidor e introduce más pérdidas relacionadas al circuito fijador. En [10] se propone un convertidor elevador con inductancias acopladas capaz de proporcionar una tasa elevada de conversión sin necesidad de ciclos de trabajos extremos con una alta eficiencia, puesto que los problemas de tiempo de recuperación inversa del diodo son mitigados. Otras variantes de este convertidor aparecen en [13]. Por otra parte, a pesar de que el número total de componentes de este convertidor es bajo y cuya topología resulta relativamente sencilla, el análisis para obtener modelos matemáticos generalizados no resulta una tarea trivial, ya que los interruptores pasivos (diodos) presentes en el convertidor introducen nuevos modos o topologías en un periodo de conmutación, además de los modos ocasionados por el interruptor activo. Por consiguiente, se requiere un conocimiento exhaustivo de las distintas combinaciones de modos que aparecen en un ciclo de conmutación, para poder utilizar el enfoque predominante para obtener la dinámica de los convertidores convencionales basado en modelos promediados. Algunas de las dificultades para obtener la dinámica de este convertidor aparecen en los trabajos de [14, 15, 16]. Es por ello que, aspectos fundamentales como el análisis de estabilidad y diseño de estrategias de control para estos convertidores, también resultan bastantes complejos. En [17, 18] se aborda el modelado del convertidor propuesto por [10] a partir de un enfoque experimental. El modelo obtenido es utilizado para diseñar una estrategia de control en cascada. Tanto para el lazo interno como para el lazo externo se diseña un control de tipo PID.

De lo anteriormente expuesto, existe una clara motivación para tratar de obtener el modelo dinámico de esta clase de convertidores. En particular, desde el punto de vista de modelado en este trabajo nos enfocamos en el método de promediado y en un enfoque que considera la dinámica híbrida del convertidor basado en sistemas lineales complementarios, para obtener la dinámica del convertidor propuesto por Zhao en [10]. Además, desde el punto de vista de control se diseña una estrategia de control basado en la teoría de control en modo de deslizamiento. Esta estrategia de control será validada

experimentalmente.

## 1.1. Objetivos

Los objetivos primordiales de la presente tesis doctoral se centran en los siguientes aspectos: el primero de ellos es, obtener modelos matemáticos apropiados que logren capturar la dinámica híbrida del convertidor Boost acoplado magnéticamente. Se hará especial énfasis en las técnicas de modelado híbrido. El segundo aspecto es, evaluar mediante simulación los modelos obtenidos del convertidor. Por otra parte, otro de los puntos de especial interés en este trabajo, es el diseño de una estrategia de control capaz de regular el voltaje de salida frente a perturbaciones de la carga y del voltaje de entrada de acuerdo a la siguientes especificaciones del prototipo del convertidor: se desea obtener una tasa de conversión de 10 veces el voltaje de entrada, para los siguientes valores nominales de voltaje de entrada  $V_{in} = 12V$ , voltaje de salida  $v_R = 120V$  y valor de la carga  $R = 113\Omega$ .

## 1.2. Organización

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se aborda el análisis de funcionamiento de convertidor Boost acoplado magnéticamente. Además, se obtiene la relación de conversión ideal del convertidor tanto para CCM como DCC. Adicionalmente, se determina el límite entre ambos modos de funcionamiento del convertidor. En el Capítulo 3 se obtiene la dinámica del convertidor usando dos enfoques diferentes: el método de promediado en espacio-estado y el formalismo de sistemas lineales complementarios. Los modelos obtenidos son evaluados y comparados mediante simulación con el modelo del convertidor proporcionado por la herramienta de simulación de circuitos eléctricos Psim. Un esquema de control en cascada para el convertidor es presentada en el Capítulo 4. El lazo externo del controlador en cascada adopta un algoritmo convencional del tipo PI, mientras que el lazo interno del controlador diseñado, se basa en la teoría de control en modo de deslizamiento. También se incluye, un análisis teórico de la dinámica cuando existe modo de deslizamiento y análisis numérico de la estabilidad bajo régimen de deslizamiento. Además, la ley de control es validada mediante simulaciones. El Capítulo 5 describe la implementación de la ley de control y los resultados experimentales. Finalmente en el Capítulo 6 se extraen algunas de las conclusiones más relevantes de la tesis.

## Referencias

- [1] L.-S. Yang, T.-J. Liang, H.-C. Lee, and J.-F. Chen, "Novel high step-up dc-dc converter with coupled-inductor and voltage-doubler circuits," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 9, pp. 4196–4206, 2011. 1
- [2] S. Dwari and L. Parsa, "An efficient high-step-up interleaved dc-dc converter with a common active clamp," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 26, no. 1, pp. 66–78, 2011. 1

- [3] R.-J. Wai, C.-Y. Lin, R.-Y. Duan, and Y.-R. Chang, “High-efficiency dc-dc converter with high voltage gain and reduced switch stress,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 1, pp. 354–364, 2007. 1, 2
- [4] M. Ortiz-Lopez, J. Leyva-Ramos, L. H. Diaz-Saldierna, and E. E. Carbajal-Gutierrez, “Multiloop controller for n-stage cascade boost converter,” in *Control Applications, 2007. CCA 2007. IEEE International Conference on*, 2007, pp. 587–592. 1
- [5] Q. Zhao, F. Tao, and F. Lee, “A front-end dc/dc converter for network server applications,” in *Power Electronics Specialists Conference, 2001. PESC. 2001 IEEE 32nd Annual*, vol. 3, 2001, pp. 1535–1539 vol. 3. 1
- [6] Y. Jang, , and M. M. Jovanovic, “A new pwm zvs full-bridge converter,” *IEEE Transactions on power electronics*, vol. 22, no. 3, pp. 987–994, May 2007. 1
- [7] X. Wu, J. Zhang, X. Ye, and Z. Qian, “Analysis and derivations for a family zvs converter based on a new active clamp zvs cell,” *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 55, no. 2, pp. 773–781, Feb. 2008. 1
- [8] R. W. Erickson and D. Maksimovic, *Fundamentals of power electronics*, 2nd ed., Springer, Ed. Kluwer academic publishers, Marzo 2001. 1, 2, 8, 13, 14, 23
- [9] D.-W. Cheng, X. Liu, and Y. S. Lee, “A new improved boost converter with ripple free input current using coupled inductors,” in *Power Electronics and Variable Speed Drives, 1998. Seventh International Conference on (Conf. Publ. No. 456)*, 1998, pp. 592–599. 2
- [10] Q. Zhao and F. Lee, “High performance coupled-inductor dc-dc converters,” in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2003. APEC '03. Eighteenth Annual IEEE*, vol. 1, feb. 2003, pp. 109 – 113 vol.1. 2, 8, 11
- [11] K. Radhalakshmi, R. Dhanasekaran, S. Aiswarya, and S. Muthulakshmi, “A new high step-up converter with low voltage stress using coupled inductor,” in *Mobile Communication and Power Engineering*, ser. Communications in Computer and Information Science, V. Das and Y. Chaba, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2013, vol. 296, pp. 305–310. 2
- [12] Y. Zhao, W. Li, Y. Deng, and X. He, “High step-up boost converter with passive lossless clamp circuit for non-isolated high step-up applications,” *Power Electronics, IET*, vol. 4, no. 8, pp. 851–859, 2011. 2
- [13] D. M. Van De Sype, K. De Gussemme, B. Renders, A. P. Van Den Bossche, and J. Melkebeek, “A single switch boost converter with a high conversion ratio,” in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2005. APEC 2005. Twentieth Annual IEEE*, vol. 3, 2005, pp. 1581–1587 Vol. 3. 2
- [14] Lisbeth C. Pérez, E. Fossas-Colet, S. Gonzáles, S. Malo, and P. Puleston, “Modelado y análisis de un convertidor elevador con inductancias acopladas.” In *Actas del XIII Congreso*

- Latinoamericano de Control Automático / VI Congreso Venezolano de Automatización y Control, 2008, pp. 480–485. 2
- [15] Pérez Rivas Lisbeth C., “Modelado de un Convertidor Boost Acoplado,” Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Gener 2009. 2, 11
- [16] J. V. Maldonado, “Eines interactives per l’aprenentatge de la dinàmica i el control dels convertidors de potència,” Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Gener 2009. 2, 39
- [17] Shane Leonardo Malo Barragán, “Output voltage regulation of a high-efficiency high step-up coupled inductor dc-dc power converter,” Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Gener 2008. 2
- [18] —, “Design and Control of an Electric Energy Conditioning System for a PEM Type Fuel Cell,” Ph.D. dissertation, Universitat Politècnica de Catalunya, October 2009. 2, 11



# Convertidor Boost acoplado magnéticamente

---

En este capítulo se presenta la topología del convertidor Boost de inductancias acopladas. Se analiza su principio de funcionamiento distinguiendo cinco transiciones topológicas factibles en un periodo de conmutación del interruptor bajo el funcionamiento normal de convertidor. Para cada una de las transiciones topológicas factibles se obtiene la relación de conversión ideal. Además se establece el límite entre los modos de conducción continua y discontinua del convertidor.

## 2.1. Introducción

La aparición de nuevas fuentes de energía y la mejora de las ya existentes requiere de un esfuerzo constante en el desarrollo de nuevos convertidores de potencia. Con el fin de minimizar las pérdidas energéticas, costos, tamaño y peso de los convertidores y atender a las necesidades de las aplicaciones industriales emergentes que requieren alto rendimiento y una tasa de conversión elevada. A diferencia de las estructuras clásicas de convertidores, tales como el Buck, Boost o el Cuk que requieren ciclos de trabajos extremos para trabajar en el rango de potencia media, lo cual se traduce en pérdidas y disminución de la capacidad para elevar [1, 2].

Actualmente existen convertidores que permiten la transformación de la energía con la máxima eficiencia posible. Estos convertidores pueden operar con eficiencias que van del 92 al 97%. Algunas de estas topologías de gran interés son los convertidores magnéticamente acoplados y los convertidores de conmutación suave (*soft switching*). Los primeros suelen utilizarse en aplicaciones que requieren niveles de voltajes medios y niveles de potencia del orden de los kilowatt, como es el caso de los sistemas de producción de energía alternativa que involucran pilas de combustible [3], con aplicaciones a vehículos híbridos [1] y sistemas de alumbrado [4] entre otros. Los convertidores de conmutación suave (*ZVS-converters*) [5, 6] permiten transformar la energía con niveles de pérdidas muy reducidos debido a su modo de operación.

No obstante, el contar con topologías de convertidores más eficientes y óptimas supone algunos costes desde el punto de vista del análisis de funcionamiento, modelado y control de los mismo, debido a

las no linealidades presentes en los interruptores y diodos. El interruptor pasivo (diodo) opera según las características naturales del circuito, mientras que el interruptor activo conmuta de manera forzada. Estos últimos constituyen los elementos claves en la transferencia de energía hacia la carga. La estrategia básica consiste en conmutar el interruptor a una frecuencia fija ( $f_s$ ) igual al recíproco del periodo de conmutación ( $T$ ), variando solamente la relación de conducción (ciclo de trabajo  $d$ ) del interruptor, estrategia PWM (Pulse Width Modulation). Debido a este comportamiento de activación (On) y desactivación (Off) de los elementos conmutadores no resulta una tarea sencilla identificar la relación de conversión ( $M(d)$ ) o lo que es lo mismo, la relación entre el voltaje de entrada y el voltaje de salida, para estructuras complejas o con un número elevado de interruptores utilizando los principios básicos en análisis de circuitos bajo condiciones de estado estacionario. El principio de conservación de flujo, esto es, el balance volt-s a través de un inductor y el principio de conservación de la carga a través de un capacitor [7]. De igual forma resulta difícil identificar el límite crítico entre los modos de conducción entre los que trabaja el convertidor. Estos son, el modo continuo de conducción (CCM, por sus siglas en inglés) y modo discontinuo de conducción (DCM, por sus siglas en inglés). Este límite suministra información valiosa para asegurar un funcionamiento óptimo del circuito.

En este capítulo se aborda el funcionamiento, análisis de las transiciones topológicas y se establece el límite crítico entre CCM y DCM del convertidor Boost de inductancias acopladas propuesto por Zhao and Lee en [8], utilizando los principios básicos en análisis de circuitos antes mencionados. De modo que se analizarán las propiedades geométricas del comportamiento cíclico de las corrientes en los inductores. No obstante, como se verá a lo largo de este capítulo, aunque este análisis resulte bastante complejo, permitirá obtener una idea aproximada de la relación de conversión para las distintas transiciones topológicas que aparecen en el convertidor.

## 2.2. Arquitectura del convertidor Boost acoplado magnéticamente

En la figura 2.1 se muestra un esquema simplificado del convertidor Boost de inductancias acopladas. Los dos inductores ( $L_1, L_2$ ) están acoplados magnéticamente, y la inductancia mutua es  $M$ . La dinámica del inductor acoplado en términos de los voltajes y las corrientes en el inductor primario  $L_1$  y el inductor secundario  $L_2$  está dada por siguientes relaciones

$$\begin{aligned} v_{L_1} &= L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + M \frac{di_{L_2}}{dt} \\ v_{L_2} &= L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + M \frac{di_{L_1}}{dt} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Resolviendo estas ecuaciones para las derivadas de las corrientes en los inductores ( $L_1, L_2$ ) se tiene

$$\begin{aligned} (L_1 L_2 - M^2) \frac{di_{L_1}}{dt} &= L_2 v_{L_1} - M v_{L_2} \\ (L_1 L_2 - M^2) \frac{di_{L_2}}{dt} &= L_1 v_{L_2} - M v_{L_1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

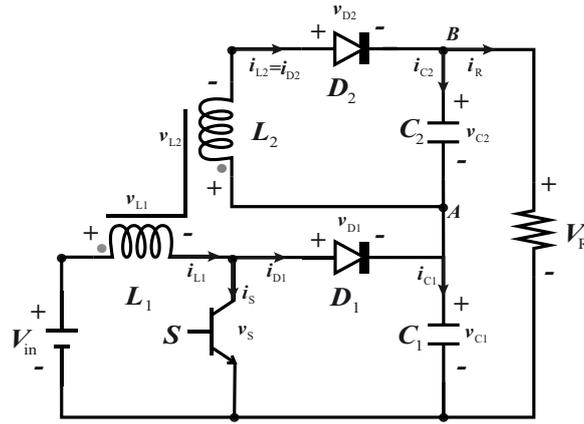


Figura 2.1: Estructura del convertidor Boost acoplado magnéticamente

Por otro lado, se asume que los dispositivos conmutadores  $D_1$ ,  $D_2$  y  $S$  del circuito de la figura 2.1 se comportan como interruptores ideales. Lo que significa que el voltaje y la corriente de conmutación serán igual a cero.

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff sobre el circuito de la figura 2.1 se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 i_{L_1} &= i_{D_1} + i_S \\
 i_{D_1} &= i_{C_1} + i_{L_2} - i_{C_2} \\
 i_{L_2} &= i_{D_2} \\
 i_{D_2} &= i_{C_2} + i_R
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Las relaciones de voltajes del circuito de la figura 2.1 se obtienen a partir de la ley de voltaje de Kirchhoff

$$\begin{aligned}
 V_{in} &= v_{L_1} + v_S \\
 v_S &= v_{D_1} + v_{C_1} \\
 -v_{L_2} &= v_{D_2} + v_{C_2} \\
 v_R &= v_{C_2} + v_{C_1}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Usando las relaciones de corrientes y voltajes anteriores, la dinámica del circuito en términos de las

corrientes en los inductores  $i_{L_1}$  e  $i_{L_2}$  y de los voltajes en los capacitores  $v_{C_1}$  y  $v_{C_2}$  está dada por

$$\begin{aligned}
 (L_1 L_2 - M^2) \frac{di_{L_1}}{dt} &= M(v_{D_2} + v_{C_2}) + L_2(V_{in} - v_S) \\
 (L_1 L_2 - M^2) \frac{di_{L_2}}{dt} &= -L_1(v_{D_2} + v_{C_2}) - M(V_{in} - v_S) \\
 C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= i_{D_1} - \frac{v_{C_1}}{R} - \frac{v_{C_2}}{R} \\
 C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= i_{L_2} - \frac{v_{C_1}}{R} - \frac{v_{C_2}}{R}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Este convertidor presenta solamente un interruptor activo controlado  $S$ , el cual tiene dos estados

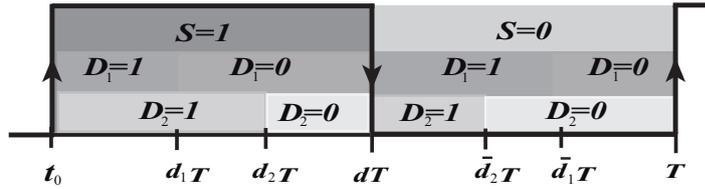


Figura 2.2: Posibles estados del interruptor y los diodos en un periodo de conmutación

abierto (Off) o cerrado (On). La fracción de tiempo en que el interruptor permanece en el estado On se llama ciclo de trabajo del interruptor y se denota como  $d$ . La estrategia básica para controlar este interruptor consiste en aplicar una señal de control que se implementa mediante un modulador de anchura de pulsos (PWM) a frecuencia fija. Por otra parte, el convertidor también consta de dos interruptores pasivos (diodos), los cuales presentan dos estados bien diferenciados, uno de conducción (On) y otro de no conducción (Off). Estos últimos conmutan de un estado a otro de manera espontánea, por lo tanto, operan según la topología del circuito. Como consecuencia el convertidor de la figura 2.1 presenta  $2^3$  topologías o modos. Esta situación hace que sea difícil obtener un modelo para describir la dinámica del convertidor.

Para facilitar el análisis de operación del convertidor en la figura 2.2 se ilustran las diferentes combinaciones binarias posibles en un periodo de conmutación debidas a los dos estados (On,Off) del interruptor y de los diodos respectivamente. En esta figura  $S=1$  indica que el interruptor está cerrado y  $S=0$  indica que el interruptor está abierto. Por otra parte,  $d_1$  y  $d_2$  corresponden a las fracciones de tiempo en que los diodos  $D_1$  y  $D_2$  cambian de estado de conducción a no conducción cuando  $S=1$  respectivamente. Mientras que  $\bar{d}_1$  y  $\bar{d}_2$  corresponden a las fracciones de tiempo en que los diodos cambian de estado de conducción a no conducción cuando  $S=0$ . En la figura 2.3 se muestran las ocho topologías. La columna izquierda corresponde a las topologías cuando el interruptor está abierto ( $S=0$ ), y la columna derecha muestra las diferentes topologías cuando el interruptor está cerrado ( $S=1$ ). Las ramas activas de cada una de las topologías corresponden a la línea negra, mientras que las ramas inactivas a la línea gris. Sin embargo, los modos  $q_5$  y  $q_6$  son físicamente no realizables, puesto que al estar el interruptor  $S$  y el diodo  $D_1$  ambos en conducción, se provocaría un corto circuito en la malla

formada por el interruptor  $S$ , el diodo  $D_1$  y el capacitor  $C_1$ . En otras palabras, en condiciones normales de funcionamiento del convertidor con topología elevadora se requiere  $v_{C_1} > 0$ , en esta situación la condición de conducción en el diodo  $D_1$  no se satisface.

### 2.3. Análisis de las transiciones topológicas

Para abordar este problema se parte de la definición de ciclo. Entendiéndose como *ciclo* cualquier secuencia de modos o topologías en el cual cada topología aparece como máximo una vez durante un periodo de conmutación. Además se asume que el sistema permanece en cada topología durante un intervalo de tiempo finito.

Bajo la hipótesis de que el estado inicial del interruptor es S=On, los estados discretos  $q_7$  y  $q_8$  figuran como los candidatos probables a ser el estado inicial de las secuencias de modos presentes en el convertidor. De acuerdo a los resultados de trabajos previos [8, 9, 10], las transiciones topológicas factibles en un ciclo se resumen en los grafos de la figura 2.4. Los nodos del grafo representan los estados discretos  $q_i$  con  $i = 1, \dots, 4, 7, 8$ . Cabe destacar, que además de los modos topológicos factibles presentados en los trabajos antes mencionados, se ha considerado la topología  $q_3$  también como factible. Esto se justifica en el hecho de que la topología del convertidor bajo estudio, se compone de dos subestructuras convencionales, una topología elevadora cuya salida es  $v_{C_1}$  y una topología del tipo flyback cuya salida es  $v_{C_2}$  [9]. En este contexto, la topología  $q_3$  es equivalente funcionalmente a la configuración del circuito flyback durante el modo en que el interruptor y el diodo de dicha topología no conducen. Con la diferencia de que la corriente en el inductor primario  $L_1$  permanece distinta de cero durante este periodo de tiempo.

Así pues, en condiciones normales de funcionamiento, las transiciones topológicas que pueden aparecer durante el transitorio y el estacionario se resumen en la figura 2.4. La figura 2.4(a) muestra las secuencias de modos partiendo del estado discreto  $q_7$ , mientras que la figura 2.4(b) las transiciones partiendo del estado discreto  $q_8$ . Las transiciones entre dos nodos consecutivos se producen debido al cambio forzado en el interruptor  $S$  producido por la acción de control sobre éste, o por las características físicas de los otros elementos de conmutación ( $D_1, D_2$ ) y de la evolución de los estados del circuito  $x = [i_{L_1}, i_{L_2}, v_{C_1}, v_{C_2}]$ . Así, el conjunto de transiciones topológicas en un ciclo son  $\sum = \{73, 74, 732, 734, 741, 7341, 7412, 73412, 83, 84, 832, 834, 841, 873, 874, 8341, 8412, 8732, 8741, 83412, 87412, 87341\}$ . Las topologías presentes en un ciclo en estado estacionario dependen del ciclo de trabajo  $d$  y del valor de la carga  $R$ . Por otro lado, cabe destacar que del conjunto de transiciones de  $\sum$ , no todas son de interés para el funcionamiento del convertidor bajo estudio. Algunas de ellas presentarán modo de conducción continua, mientras que las demás presentarán modo de conducción discontinua. Estos modos de conducción se refieren al comportamiento de la corriente en el inductor. La forma de onda de la corriente indica el modo de operación del convertidor. Si la corriente en el inductor nunca cae hasta cero durante todo el periodo de conmutación, el convertidor trabaja en CCM. Si la corriente en el inductor llega a ser cero durante una fracción de tiempo del periodo de

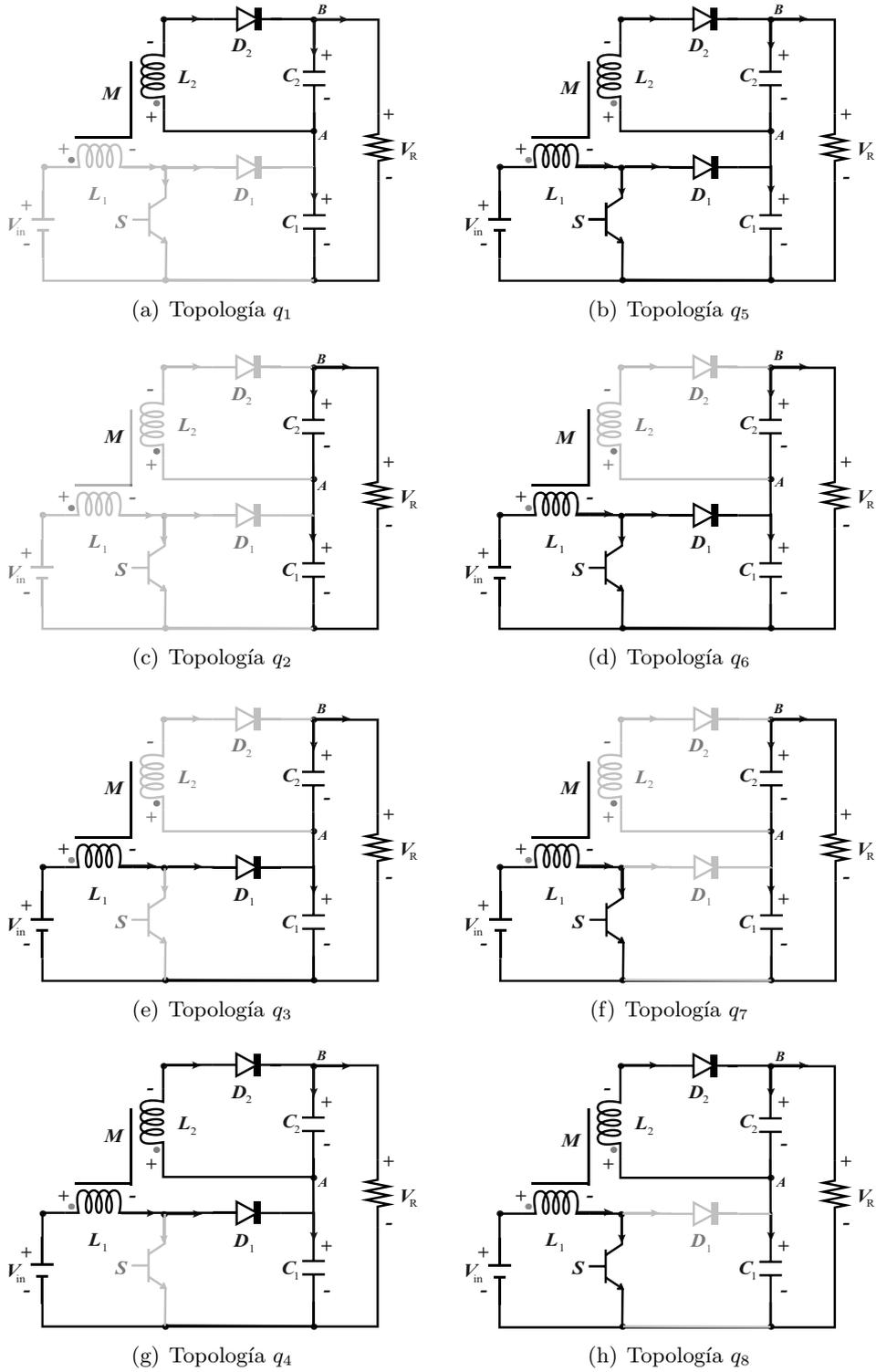


Figura 2.3: Topologías del convertidor Boost acoplado magnéticamente

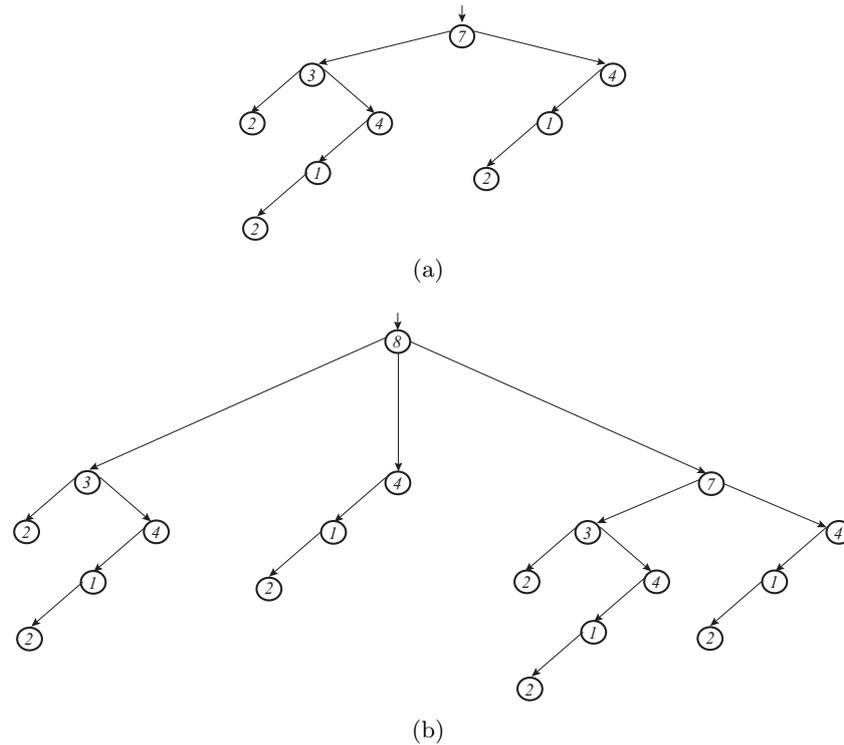


Figura 2.4: Evolución de las trayectorias del Boost Acoplado: (a) partiendo del estado discreto  $q_7$ , (b) partiendo del estado discreto  $q_8$

conmutación, el convertidor trabaja en DCM [7].

En el caso que nos ocupa, se dirá que el convertidor trabaja en DCM si una de las corrientes de los inductores  $L_1$  o  $L_2$ , o a la combinación de ellas cae hasta cero durante una fracción de tiempo finita, entre dos instantes sucesivos de conmutación. La existencia de múltiples DCM en convertidores ha sido identificado en la literatura como MDMs (Multi-Discontinuous Modes) [11, 12]. En particular, MDMs se manifiestan en algunas topologías de convertidores DC-DC de cuarto orden [11].

Así, si el convertidor de la figura 2.1 trabaja en CCM, éste se reduce a la configuración básica del convertidor Boost. Puesto que al estar el inductor  $L_2$  y el capacitor  $C_2$  conectados en paralelo, esta rama activa del circuito funciona como un oscilador LC, como consecuencia el valor medio de la diferencia de potencial en el capacitor  $C_2$  es cero. Por lo tanto, es deseable que el convertidor de la figura 2.1 trabaje en DCM. En la siguiente sección se determina el límite entre los modos de conducción.

## 2.4. Límites entre modos de conducción

En [7] el límite entre los modos de conducción se determina asumiendo que el convertidor trabaja en CCM. Así, del conjunto de transiciones topológicas factibles  $\Sigma$  del convertidor de la figura 2.1, solo la transición topológica entre los estados discretos  $q_8$  y  $q_4$  permiten que éste trabaje en CCM. Esta transición entre los estados discretos  $q_8$  y  $q_4$  será identificada como  $T_0$  en este trabajo. En la figura 2.5 en orden descendente, se muestran las trayectorias de las corrientes en los inductores  $i_{L_1}$  y  $i_{L_2}$ , el voltaje en los condensadores  $v_{C_1}$  y  $v_{C_2}$ , seguido por el voltaje en los inductores  $v_{L_1}$  y  $v_{L_2}$  y las corrientes en los condensadores  $i_{C_1}$  y  $i_{C_2}$  y finalmente las corrientes en los diodos  $i_{D_1}$  y  $i_{D_2}$  y la acción de control  $u$  en  $T_0$ .

En general la corriente en un inductor y el voltaje en un capacitor consisten en una componente de más una componente ac (rizado de conmutación). La magnitud de la componente ac es un factor determinante en el modo de operación del convertidor. El DCM ocurre cuando la magnitud de la componente ac de la corriente en el inductor es mayor al valor medio de la corriente [7].

De la figura 2.6 se observa que la corriente en el diodo  $D_1$  es idéntica a la corriente en el inductor  $i_{L_1}$  durante el segundo subintervalo de tiempo. Mientras que la corriente en el diodo  $D_2$  es igual a la corriente en el inductor  $i_{L_2}$  durante todo el periodo de conmutación. Por consiguiente, para que los diodos  $D_1$  y  $D_2$  se encuentren en conducción (On) se debe satisfacer

$$\begin{aligned} I_{L_1} > \Delta i_{L_1} &\rightarrow CCM \\ I_{L_2} > \Delta i_{L_2} &\rightarrow CCM \end{aligned} \quad (2.6)$$

Siendo  $I_{L_1}$  y  $I_{L_2}$  las componentes dc y  $\Delta i_{L_1}$  y  $\Delta i_{L_2}$  la amplitud de las componentes ac de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente. Para determinar las componentes dc y la amplitud de la componente ac en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  se asume que el convertidor opera en estado estacionario y se recurre al uso de dos principios básicos en el análisis de circuitos y de un tercer artificio, la aproximación de rizado pequeño [7]. El principio del *balance volt-s del inductor*, establece que el valor medio del voltaje o componente dc aplicado sobre un inductor debe ser cero. De manera análoga, el principio del *balance de carga del capacitor* establece que el valor medio de la corriente o componente dc en un capacitor debe ser cero [7].

### Trayectoria $T_0$

Al aplicar la ley de corrientes y voltajes de Kirchhoff para cada una de las topologías que aparecen en  $T_0$  y usando la aproximación de rizado pequeño se tiene

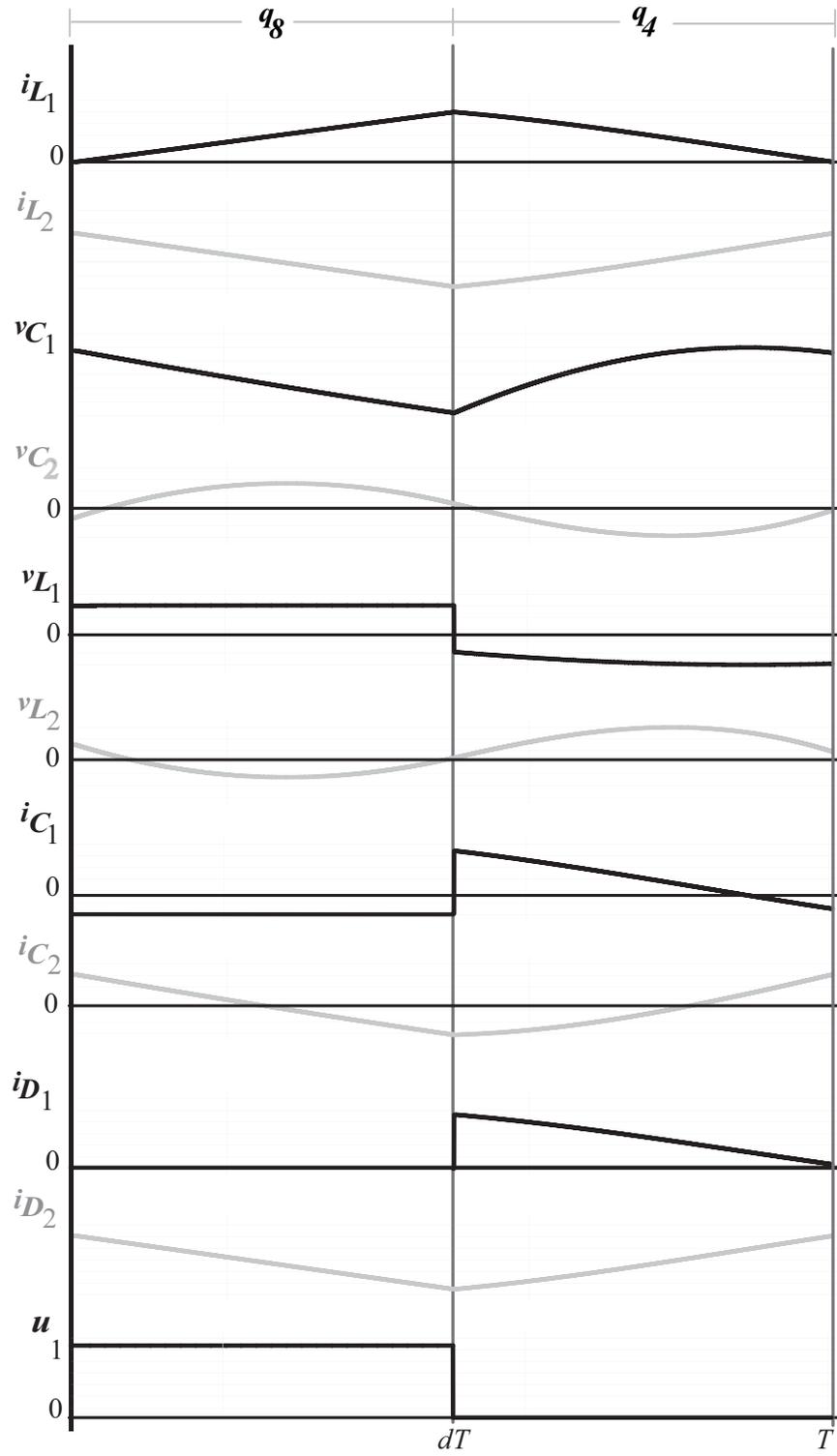


Figura 2.5: Formas de onda de las trayectorias en  $T_0$  en un periodo de conmutación

$$\begin{aligned}
 i_{L_1}(t) &\approx I_{L_1} \\
 i_{L_2}(t) &\approx I_{L_2} \\
 v_{C_1}(t) &\approx V_{C_1} \\
 v_{C_2}(t) &\approx V_{C_2}
 \end{aligned}$$

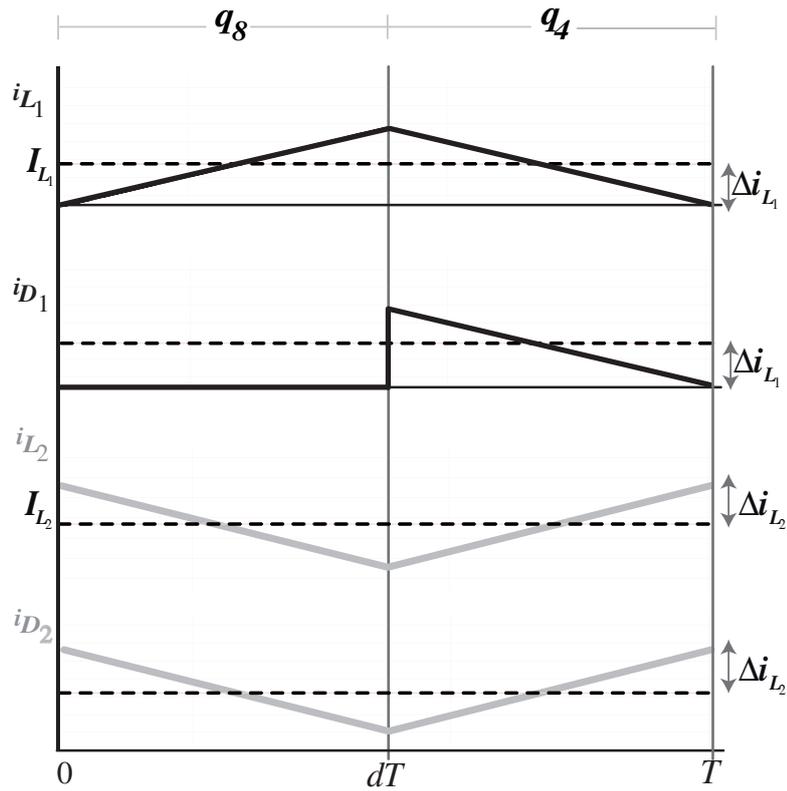


Figura 2.6: Formas de onda de las trayectorias de las corrientes en los inductores  $i_{L_1}$  y  $i_{L_2}$  y los diodos  $i_{D_1}$  y  $i_{D_2}$  en CCM

- $[0 - dT]$

Durante el primer subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_8$ , la cual está dada

por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
v_{L_1}^8 &\approx L_1(a_2V_{C_2} + a_1V_{in}) - M(a_3V_{C_2} + a_2V_{in}) \\
v_{L_2}^8 &\approx -L_2(a_3V_{C_2} + a_2V_{in}) + M(a_2V_{C_2} + a_1V_{in}) \\
i_{C_1}^8 &\approx -\frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R} \\
i_{C_2}^8 &\approx I_{L_2} - \frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde

$$a_1 = \frac{L_2}{(L_1L_2 - M^2)}, \quad a_2 = \frac{M}{(L_1L_2 - M^2)}, \quad a_3 = \frac{L_1}{(L_1L_2 - M^2)}$$

El índice superior en  $v_{L_1}$ ,  $v_{L_2}$ ,  $i_{C_1}$  e  $i_{C_2}$  corresponde a la topología que actúa en cada subintervalo de tiempo.

▪  $[dT - T]$

Durante el segundo subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_4$ , la cual está dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
v_{L_1}^4 &\approx L_1(-a_1V_{C_1} + a_2V_{C_2} + a_1V_{in}) + M(a_2V_{C_1} - a_3V_{C_2} - a_2V_{in}) \\
v_{L_2}^4 &\approx L_2(a_2V_{C_1} - a_3V_{C_2} - a_2V_{in}) + M(-a_1V_{C_1} + a_2V_{C_2} + a_1V_{in}) \\
i_{C_1}^4 &\approx I_{L_1} - \frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R} \\
i_{C_2}^4 &\approx I_{L_2} - \frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Del balance volt-s en el inductor y del balance de carga del capacitor, la componente dc del voltaje en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y de la corriente en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  debe satisfacer

$$\begin{aligned}
\langle v_{L_1} \rangle &= v_{L_1}^8 d + v_{L_1}^4 (1 - d) = 0 \\
\langle v_{L_2} \rangle &= v_{L_2}^8 d + v_{L_2}^4 (1 - d) = 0 \\
\langle i_{C_1} \rangle &= i_{C_1}^8 d + i_{C_1}^4 (1 - d) = 0 \\
\langle i_{C_2} \rangle &= i_{C_2}^8 d + i_{C_2}^4 (1 - d) = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.7) y (2.8) en la ecuación anterior y gracias a la periodicidad de las trayectorias se tiene

$$\begin{aligned} I_{L_1} &= \frac{V_{in}}{R(1-d)^2} \\ I_{L_2} &= \frac{V_{in}}{R(1-d)} \\ V_{C_1} &= \frac{V_{in}}{(1-d)} \\ V_{C_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

De la ecuación (2.10) se puede comprobar que la tercera expresión corresponden al cálculo de la componente dc de la configuración básica del convertidor Boost en CCM y tal como se esperaba la componente dc del voltaje en  $C_2$  es cero.

Por otro lado, las formas de ondas de las corrientes en  $L_1$  y  $L_2$  son simétricas respecto a la componente dc  $I_{L_1}$  e  $I_{L_2}$  respectivamente, ver figura 2.6. Por consiguiente, el incremento de la corriente en  $L_1$  durante el primer subintervalo es  $2\Delta i_{L_1}$ , mientras que el decrecimiento en  $L_2$  es  $-2\Delta i_{L_2}$ . La amplitud del rizado de conmutación es igual a la pendiente de las corrientes en  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente multiplicada por la longitud del primer subintervalo, esto es

$$\begin{aligned} 2\Delta i_{L_1} &= (a_2 V_{C_2} + a_1 V_{in}) dT \\ -2\Delta i_{L_2} &= (-a_3 V_{C_2} - a_2 V_{in}) dT \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.10) en (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta i_{L_1} &= \frac{a_1 V_{in}}{2} dT \\ \Delta i_{L_2} &= \frac{a_2 V_{in}}{2} dT \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nótese que la amplitud del rizado de conmutación en  $L_1$  y  $L_2$  es insensible a las variaciones en la carga  $R$ . Mientras que las componentes dc de  $I_{L_1}$  e  $I_{L_2}$  dependen del valor de  $R$ . Así, al incrementar el valor de  $R$  las componentes dc de  $I_{L_1}$  e  $I_{L_2}$  disminuyen, lo que podría producir  $I_{L_1} = \Delta i_{L_1}$  y/o  $I_{L_2} = \Delta i_{L_2}$ . Esto implicaría que las corrientes en los diodos sean cero y permanezcan en este valor durante el intervalo de tiempo en que los diodos están en polarización inversa. Puesto que el diodo es un elemento unidireccional, por tanto, no puede conducir corriente en sentido inverso. Así, sustituyendo las ecuaciones (2.10) y (2.12) en la ecuación (2.6) los límites entre los modos de conducción están dados por

$$\begin{aligned} \frac{V_{in}}{R(1-d)^2} &> \frac{a_1 V_{in}}{2} dT \rightarrow CCM \\ \frac{V_{in}}{R(1-d)} &> \frac{a_2 V_{in}}{2} dT \rightarrow CCM \end{aligned} \quad (2.13)$$

Reescribiendo la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} K_1 > K_{1_{crit}}(d) &\rightarrow CCM & K_2 > K_{2_{crit}}(d) &\rightarrow CCM \\ K_1 < K_{1_{crit}}(d) &\rightarrow DCM & K_2 < K_{2_{crit}}(d) &\rightarrow DCM \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{2}{a_1 RT}, & K_{1_{crit}}(d) &= d(1-d)^2 \\ K_2 &= \frac{2}{a_2 RT}, & K_{2_{crit}}(d) &= d(1-d) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por otra parte, cabe destacar que de la ecuación (2.14) se pueden presentar cuatro casos diferentes, los cuales se resumen en el cuadro 2.1. La segunda columna del cuadro 2.1 indica las transiciones topológicas de  $\sum$  durante un ciclo en estado estacionario, mientras que la tercera y la cuarta columna indican cual de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  trabaja en CCM o DCM respectivamente. El subíndice en la constante adimensional  $K_i$  con  $i = 1, 2$  se corresponde con el subíndice de los inductores. Puesto que nos interesa que la corriente en el inductor  $L_2$  trabaje en DCM, las trayectorias  $T_0$  y  $T_2$  del cuadro 2.1 no son factibles para el funcionamiento adecuado del convertidor bajo estudio. En la figura 2.7 se han graficado los valores de  $K_{1_{crit}}$  y  $K_{2_{crit}}$  vs. el ciclo de trabajo  $d$ , y además se muestra un valor arbitrario de los parámetros adimensionales  $K_1$  y  $K_2$ . En ésta se distinguen cuatro zonas identificadas como  $\chi_j$  con  $j = 1, \dots, 4$ . Cada una de estas zonas corresponde a una de las condiciones dadas en el cuadro 2.1. De esta gráfica se tiene que el rango de variación del ciclo de trabajo en el que el convertidor trabaja en CCM es pequeño (zona  $\chi_1$ ). Mientras que el rango de variación del ciclo de trabajo cuando el convertidor trabaja en DCM es mucho más amplio (zonas  $\chi_2, \chi_3, \chi_4$ ). Una forma apropiada de expresar el límite entre los modos de conducción del convertidor,

Trayectoria	$\sum_{ss}$	CCM	DCM
$T_0$	84	$K_1 > K_{1_{crit}}(d)$ $K_2 > K_{2_{crit}}(d)$	
$T_1$	874	$K_1 > K_{1_{crit}}(d)$	$K_2 < K_{2_{crit}}(d)$
$T_2$	841	$K_2 > K_{2_{crit}}(d)$	$K_1 < K_{1_{crit}}(d)$
$T_3$	8741		$K_1 < K_{1_{crit}}(d)$
$T_4$	7412		$K_2 < K_{2_{crit}}(d)$

Cuadro 2.1: Transiciones topológicas en estado estacionario en CCM y DCM del convertidor Boost acoplado magnéticamente

es exponer explícitamente la dependencia del límite en función de la carga en lugar de los parámetros adimensionales  $K_{1_{crit}}$  y  $K_{2_{crit}}$ . Así, reescribiendo la ecuación (2.14) en términos de la carga se tiene

$$\begin{aligned} R > R_{1_{crit}}(d) &\rightarrow i_{L_1}(t) \rightarrow CCM & R < R_{1_{crit}}(d) &\rightarrow i_{L_1}(t) \rightarrow DCM \\ R < R_{2_{crit}}(d) &\rightarrow i_{L_2}(t) \rightarrow CCM & R > R_{2_{crit}}(d) &\rightarrow i_{L_2}(t) \rightarrow DCM \end{aligned} \quad (2.16)$$

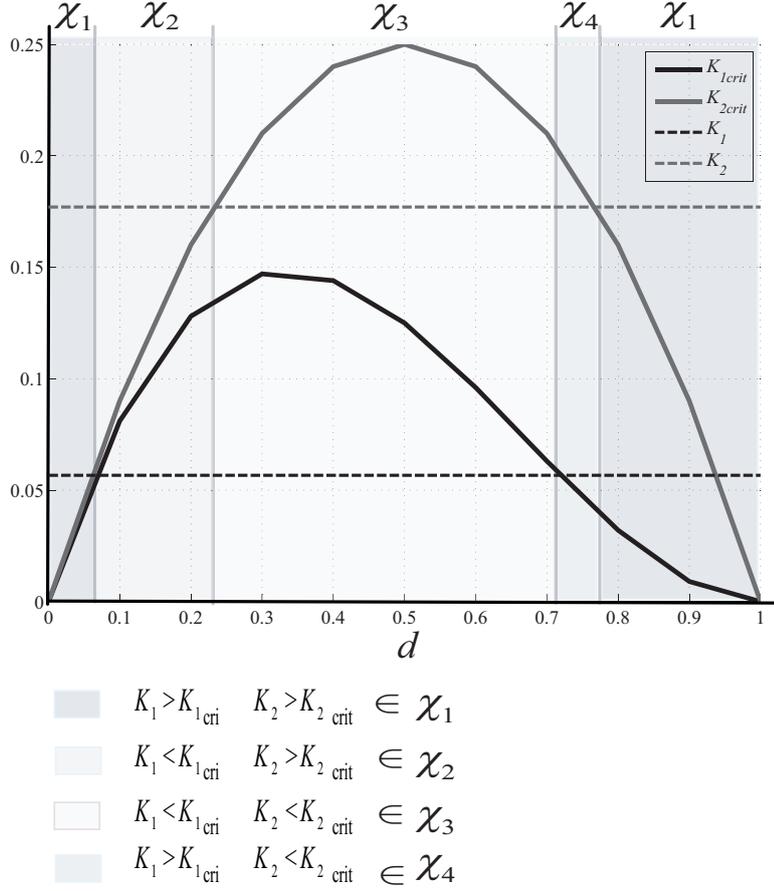


Figura 2.7: Comparación de  $K_{1crit}$ ,  $K_{2crit}$  vs.  $d$

con

$$R_{1crit}(d) = \frac{2}{a_1 T d (1-d)^2}, \quad R_{2crit}(d) = \frac{2}{a_2 T d (1-d)} \quad (2.17)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  están dados en la ecuación (2.8) mientras que,  $R_{1crit}$  y  $R_{2crit}$  corresponden a los límites para los cuales las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  trabajan en modo CCM y/o DCM respectivamente. En la figura 2.8 se ha graficado  $R_{1crit}$  y  $R_{2crit}$  vs. el ciclo de trabajo para valores arbitrarios de  $L_1, L_2, M, T$ . En ésta se distinguen las cuatro zonas identificadas en la figura 2.7 como  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  y  $\chi_4$ , con

$$\begin{aligned}
 R_{crit} &= \frac{2L_2^2(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)TM^2} \\
 d_{crit} &= 1 - \frac{M}{L_2}
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por último, con el propósito de destacar como a partir de la trayectoria en CCM ( $T_0$ ) se da lugar a las

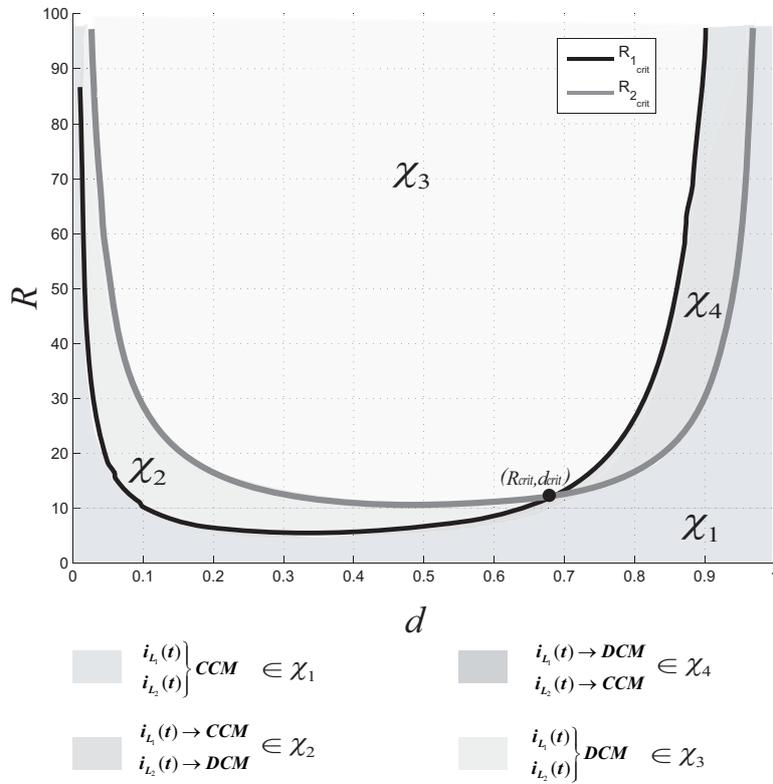


Figura 2.8: Límites entre los modos de conducción en el Boost acoplado magnéticamente  $R$  vs.  $d$

trayectorias en DCM ( $T_1, T_2, T_3, T_4$ ), la figura 2.9 ilustra las formas de ondas de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y la acción de control  $u$  para cada una de las trayectorias del cuadro 2.1, en un ciclo de conmutación en estado estacionario. En  $T_1$  ( $T_2$ ), la cantidad de energía almacenada en el inductor  $L_2$  ( $L_1$ ) es suficientemente pequeña como para ser transferida en un tiempo menor que el tiempo total del ciclo de conmutación. En este caso, la corriente en  $L_2$  ( $L_1$ ) cae hasta cero durante la fracción de tiempo en el cual el interruptor está cerrado (abierto), como consecuencia aparece la topología  $q_7$  ( $q_1$ ). A partir de las trayectorias  $T_1$  y  $T_2$  se pueden deducir como surgen las trayectorias  $T_3$  y  $T_4$ . En  $T_3$  el inductor  $L_2$  se descarga durante la fracción de tiempo en el cual el interruptor está cerrado, mientras que el inductor  $L_1$  se descarga completamente al final del ciclo de conmutación. En cambio, en la trayectoria  $T_4$ , el inductor  $L_2$  se descarga al principio y al final del periodo de conmutación, mientras que el inductor  $L_1$  se descarga solo al final del periodo de conmutación.

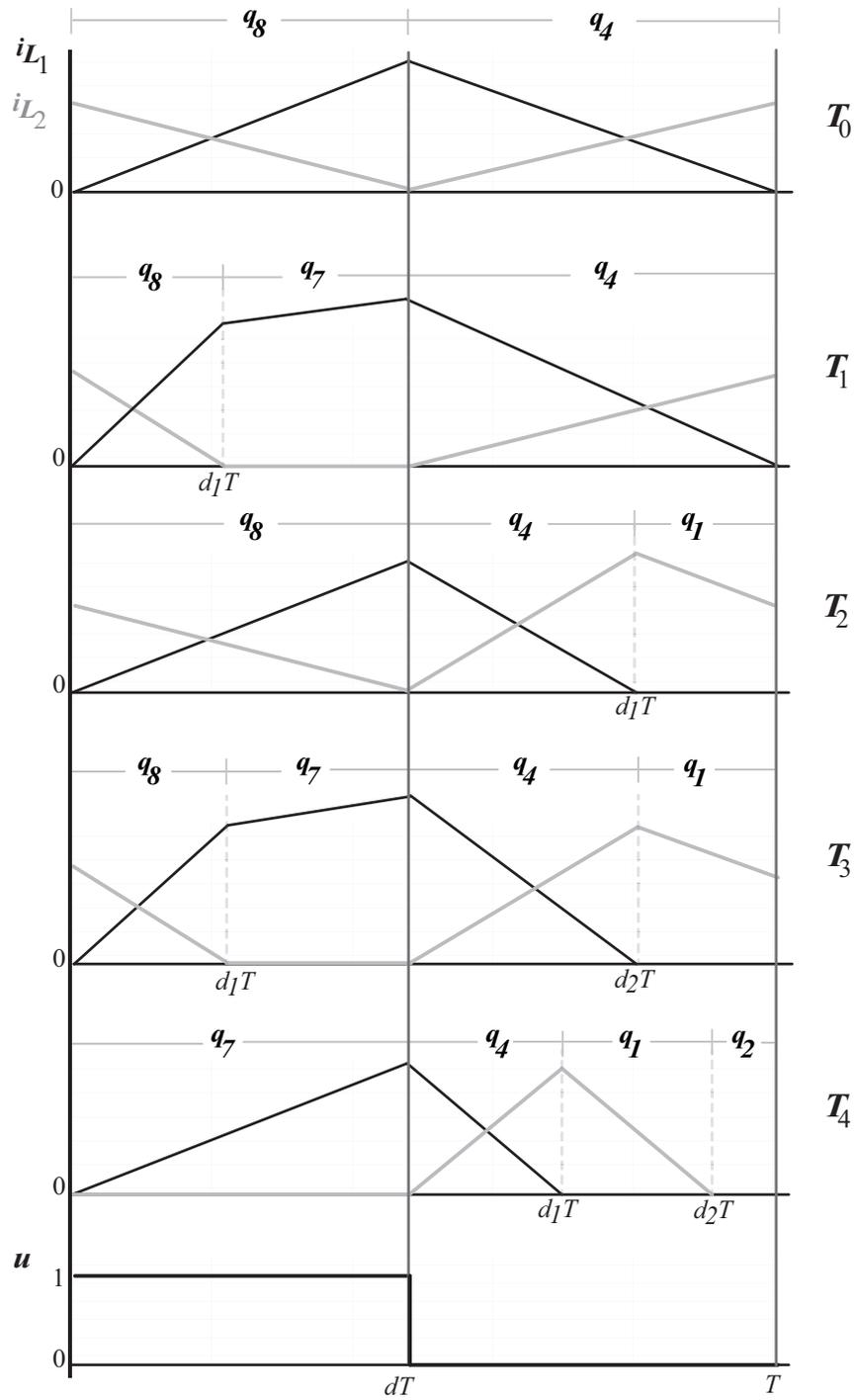


Figura 2.9: Formas de ondas de las corrientes en los inductores en las trayectorias  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$

## 2.5. Análisis de la relación de conversión ideal

La relación de conversión ideal para la trayectoria en CCM se obtiene de la ecuación (2.10), cuya expresión se corresponde con la relación ideal de la estructura clásica del convertidor Boost

$$M(d) = \frac{V_{C_1}}{V_{in}} = \frac{1}{1-d} \quad (2.19)$$

Para determinar la relación de conversión ideal para las trayectorias en DCM del cuadro 2,1, se realiza un análisis similar a la trayectoria en CCM visto en el apartado anterior. Así, siguiendo el mismo procedimiento y aproximaciones hechas en [7] para cada una de las secuencias de modos en estado estacionario en DCM del convertidor bajo estudio se puede determinar la relación del voltaje de salida  $v_R$  respecto al voltaje de entrada  $V_{in}$ .

### Trayectoria $T_1$

Las trayectorias de las corrientes y voltajes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y los capacitores  $C_1$  y  $C_2$ , así como las corrientes en los diodos  $D_1$  y  $D_2$  y la acción de control en estado estacionario en  $T_1$  se muestran en la figura 2.10. Al aplicar la ley de corrientes y voltajes de Kirchhoff para cada una de las topologías que aparecen en  $T_1$  se tiene

- $[0 - d_1T]$

Durante el primer subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_8$  (ver figura 2.3(h)) la cual está dada por la ecuación (2.7). En el instante de tiempo  $d_1T$  cuando la corriente en el inductor  $L_2$  se hace cero ocurre el cambio de topología.

- $[d_1T - dT]$

Durante el segundo subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_7$  (ver figura 2.3(f)). Esta dinámica es válida hasta que se produce un cambio en la posición del interruptor en el instante de tiempo  $dT$ . Las expresiones de los voltajes en los inductores y las corrientes en los capacitores durante este subintervalo de tiempo están dadas por

$$\begin{aligned} v_{L_1}^7 &= V_{in} \\ v_{L_2}^7 &= \frac{M}{L_1} V_{in} \\ i_{C_1}^7 &\approx -\frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R} \\ i_{C_2}^7 &\approx -\frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R} \end{aligned} \quad (2.20)$$

- $[dT - T]$

Durante el último subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_4$  (ver figura 2.3(g)) la cual está dada por la ecuación (2.8).

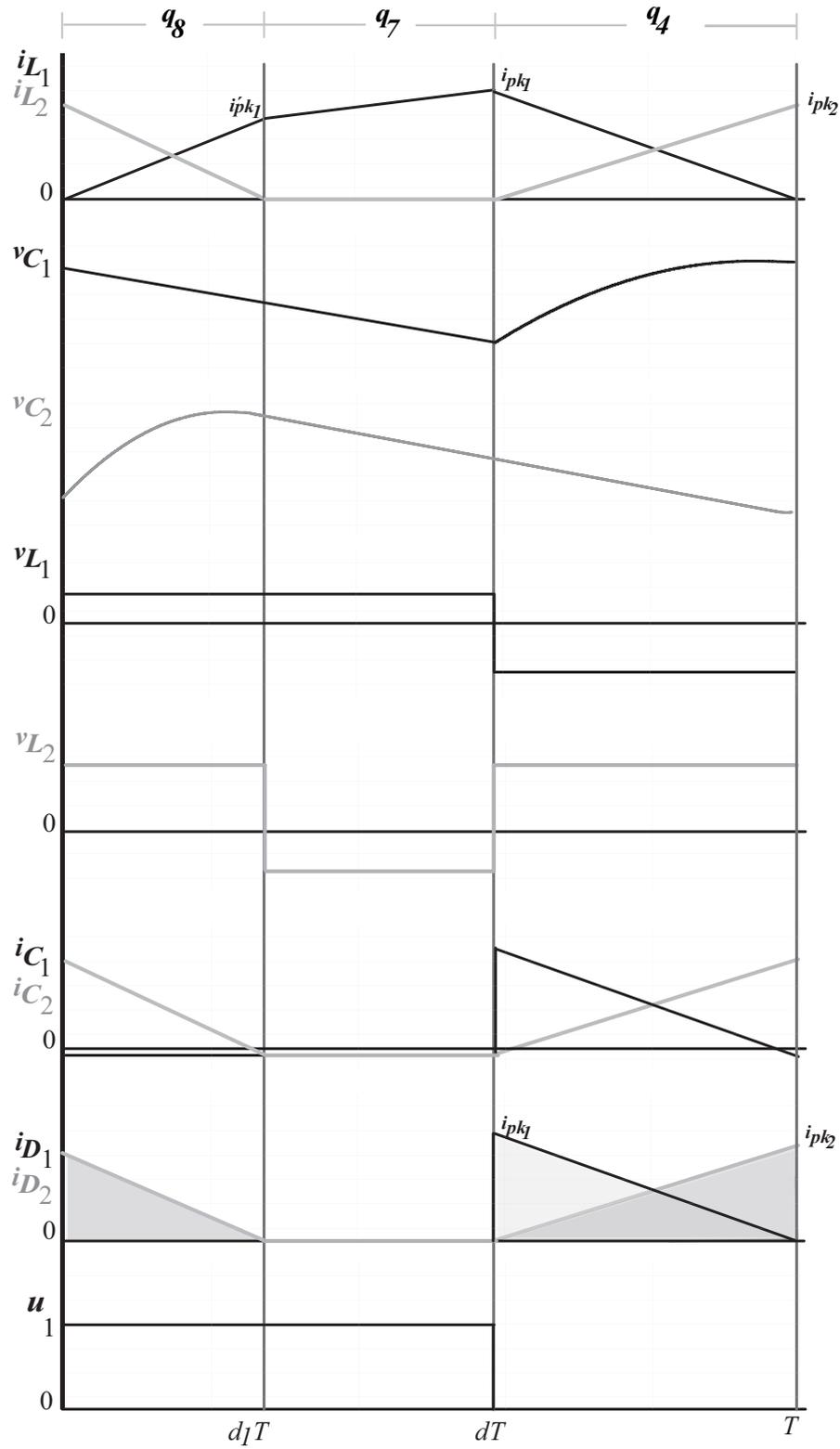


Figura 2.10: Formas de onda de las trayectorias en  $T_1$  en un periodo de conmutación

Del balance volt-s en el inductor y del balance de carga del capacitor, la componente dc del voltaje en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y de la corriente en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  debe satisfacer

$$\begin{aligned}\langle v_{L_1} \rangle &= v_{L_1}^8 d_1 + v_{L_1}^7 (d - d_1) + v_{L_1}^4 (1 - d) = 0 \\ \langle v_{L_2} \rangle &= v_{L_2}^8 d_1 + v_{L_2}^7 (d - d_1) + v_{L_2}^4 (1 - d) = 0 \\ \langle i_{C_1} \rangle &= i_{C_1}^8 d_1 + i_{C_1}^7 (d - d_1) + i_{C_1}^4 (1 - d) = 0 \\ \langle i_{C_2} \rangle &= i_{C_2}^8 d_1 + i_{C_2}^7 (d - d_1) + i_{C_2}^4 (1 - d) = 0\end{aligned}\quad (2.21)$$

en la ecuación anterior el valor de  $d$  representa el ciclo de trabajo del interruptor, y se considera un valor conocido, mientras que la fracción de tiempo de conducción del diodo  $D_2$  denotada como  $d_1$  en  $T_1$  es un valor desconocido, cuyo valor multiplicado por el periodo de conmutación  $T$  corresponde al instante de tiempo en que la corriente en el inductor  $L_2$  es cero. Así, sustituyendo las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.20) en la ecuación anterior se tienen cuatro ecuaciones con cinco incógnitas ( $I_{L_1}$ ,  $I_{L_2}$ ,  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$ ,  $d_1$ ). Para resolver el sistema de ecuaciones se analiza la topología  $q_4$ , esto es en el último intervalo de tiempo. De las ecuaciones de los nodos  $A$  y  $B$  en  $q_4$  (ver figura 2.3(g)) se tiene

$$\begin{aligned}i_{L_1} + i_{C_2} &= i_{C_1} + i_{L_2} \\ i_{L_2} &= i_{C_2} + i_R\end{aligned}\quad (2.22)$$

Haciendo uso del principio del balance de carga del capacitor, la componente dc de la corriente en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  deben ser cero

$$\begin{aligned}\langle i_{C_1} \rangle &= 0 \\ \langle i_{C_2} \rangle &= 0\end{aligned}\quad (2.23)$$

Por lo tanto, la componente dc de la corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  en la ecuación (2.22) debe ser igual a la componente dc de la corriente en la carga

$$\langle i_{L_1} \rangle = \langle i_{L_2} \rangle = \frac{V_{C_1}}{R} + \frac{V_{C_2}}{R}\quad (2.24)$$

Por otra parte, en  $q_4$  también se verifica que la corriente en el diodo  $D_1$  es idéntica a la corriente en el inductor  $L_1$  (ver figura 2.10). Del mismo modo, la corriente en el diodo  $D_2$  es igual a la corriente en el inductor  $L_2$ . Por lo tanto, la componente dc de la corriente en los diodos  $D_1$  y  $D_2$  es

$$\begin{aligned}\langle i_{D_1} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_{D_1}(t) dt = \frac{i_{pk_1}(1-d)}{2} \\ \langle i_{D_2} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_{D_2}(t) dt = \frac{i_{pk_2}d_1}{2} + \frac{i_{pk_2}(1-d)}{2}\end{aligned}\quad (2.25)$$

El valor de cada una de las integrales, es el área sombreada bajo la curva en  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente (ver figura 2.10). Esta área en  $D_1$  es el área del triángulo que tiene altura  $i_{pk_1}$  y base de dimensión

$(1-d)T$ , mientras que en  $D_2$  es el área de los triángulos que tienen altura  $i_{pk_2}$  y bases de dimensión  $d_1T$  y  $(1-d)T$ . Así, igualando las ecuaciones (2.24) y (2.25) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{i_{pk_1}(1-d)}{2} &= \frac{V_{C_1}}{R} + \frac{V_{C_2}}{R} \\ \frac{i_{pk_2}d_1}{2} + \frac{i_{pk_2}(1-d)}{2} &= \frac{V_{C_1}}{R} + \frac{V_{C_2}}{R} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Además, en  $q_4$  también se satisface la siguiente relación

$$v_{L_2} \approx -V_{C_2} \quad (2.27)$$

reescribiendo  $v_{L_2}$  en términos de la ecuación (2.1) y sustituyendo  $di_{L_1}/dt$  y  $di_{L_2}/dt$  por las pendientes de las corrientes en  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente se tiene

$$L_2 \frac{i_{pk_2}}{(1-d)T} - M \frac{i_{pk_1}}{(1-d)T} = -V_{C_2} \quad (2.28)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones (2.21), (2.26) y (2.28) se obtiene la componente dc de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y los voltajes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  y la fracción de tiempo de conducción  $d_1$  del diodo  $D_2$ .

$$\begin{aligned} I_{L_1} &= \frac{V_{in}M(b_3 + \Lambda b_4)}{2L_1L_2R(d-1)^2} \\ I_{L_2} &= \frac{V_{in}(b_5 + \Lambda b_6)}{4L_1L_2^2R(d-1)^2} \\ V_{C_1} &= \frac{V_{in}}{(1-d)} \\ V_{C_2} &= \frac{V_{in}(b_7 + \Lambda b_2)}{2L_1L_2(d-1)} \\ d_1 &= \Lambda(d-1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda &= b_2z^2 + b_1z + b_0 \\ b_0 &= -TRMd^3 + 2TRMd^2 + M(2M - 2L_2 - TR)d + 2(ML_1 - L_1L_2) \\ b_1 &= 2TRMd^3 - 5TRMd^2 + M(2L_2 + 4TR - 4M)d + M(2M - TR - 4L_1 - 2L_2) + 2L_1L_2 \\ b_2 &= M(-TRd^3 + 3TRd^2 + (2M - 3TR)d + TR - 2M + 2L_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= M(-TRd^3 + 2TRd^2 + (2M - TR)d + 2L_1) \\
b_4 &= (TRd^3 - 3TRd^2 + (3TR - 2M)d - TR + 2M) \\
b_5 &= T^2R^2M(d^5 - 4d^4) + TRM(6TR - 4M)d^3 + TR(L_1L_2 + 2M(4M - 2TR - L_1))d^2 \\
&\quad + (T^2R^2M + 4(M^3 + TR(ML_1 - M^2 - L_1L_2)))d + 2(TR(L_1L_2 - ML_1) + 2M^2L_1) \\
b_6 &= -T^2R^2Md^5 + 5T^2R^2Md^4 + 2TRM(2M - 5MTR)d^3 + TRM(10TR + 2L_1 - 12M)d^2 \\
&\quad + M(TR(12M - 4L_1 - 5RT) - 4M^2)d + M(R^2T^2 + 2L_1R^2T + 4M(M - L_1 - RT)) \\
b_7 &= TRMd^3 - 2TRMd^2 + M(TR - 2M)d + 2(L_1L_2 - ML_1)
\end{aligned}$$

donde  $\Lambda$  representa las soluciones de la ecuación polinómica dada en la primera expresión de (2.30). Así, la relación de conversión ideal en  $T_1$  se obtiene de la ecuación (2.29), la cual está dada por la siguiente expresión

$$M(d) = \frac{V_{C_1} + V_{C_2}}{V_{in}} = \frac{(b_7 + \Lambda b_2) - 2L_1L_2}{2L_1L_2(d - 1)} \quad (2.31)$$

### Trayectoria $T_3$

Las trayectorias de las corrientes y voltajes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y los capacitores  $C_1$  y  $C_2$ , así como las corrientes en los diodos  $D_1$  y  $D_2$  y la acción de control en estado estacionario en  $T_3$  se muestran en la figura 2.11. Un análisis similar se lleva a cabo sobre las trayectorias en estado estacionario de  $T_3$ . De esta manera para cada uno de los subintervalos de tiempo se tiene

- $[0 - d_1T]$

Durante el primer subintervalo de tiempo actúa la topología  $q_8$  (ver figura 2.3(h)) la cual está dada por las expresiones en la ecuación (2.7). Esta dinámica es válida hasta que la corriente en el inductor  $L_2$  se hace cero.

- $[d_1T - dT]$

Durante el segundo subintervalo de tiempo actúa la topología  $q_7$  (ver figura 2.3(f)), cuya dinámica está dada por las expresiones de la ecuación (2.20). En el instante de tiempo  $dT$ , cuando ocurre un cambio en la posición del interruptor se produce un cambio de topología.

- $[dT - d_2T]$

Durante el tercer subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_4$  (ver figura 2.3(g)), cuya dinámica está dada por las expresiones de la ecuación (2.8). Esta dinámica es válida hasta el instante de tiempo  $d_2T$  cuando la corriente en el inductor  $L_1$  se hace cero.

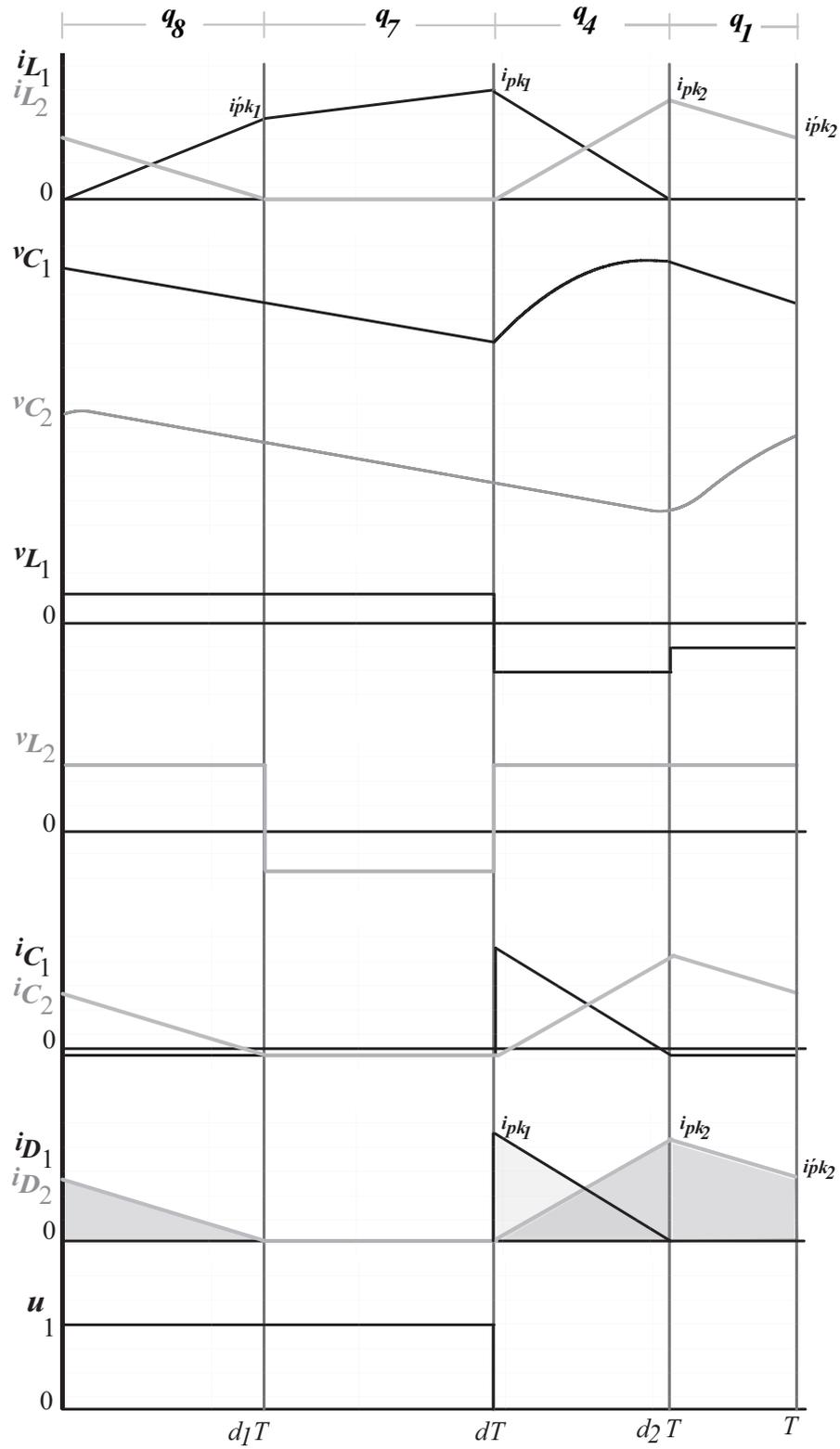


Figura 2.11: Formas de onda de las trayectorias en  $T_3$  en un periodo de conmutación

▪  $[d_2T - T]$

Finalmente, en el último subintervalo de tiempo se tiene la topología  $q_1$ . En éste se debe satisfacer las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 v_{L_1}^1 &\approx -\frac{M}{L_2}V_{C_2} \\
 v_{L_2}^1 &\approx -V_{C_2} \\
 i_{C_1}^1 &\approx -\frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R} \\
 i_{C_2}^1 &\approx I_{L_2} - \frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

De manera similar, haciendo uso del principio del balance volt-s del inductor, se obtiene la componente dc de la forma de onda del voltaje en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  (ver figura 2.11) esto es

$$\begin{aligned}
 \langle v_{L_1} \rangle &= v_{L_1}^8 d_1 + v_{L_1}^7 (d - d_1) + v_{L_1}^4 (d_2 - d) + v_{L_1}^1 (1 - d_2) = 0 \\
 \langle v_{L_2} \rangle &= v_{L_2}^8 d_1 + v_{L_2}^7 (d - d_1) + v_{L_2}^4 (d_2 - d) + v_{L_2}^1 (1 - d_2) = 0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

De manera similar se obtiene la componente dc de la forma de onda de las corrientes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  (ver figura 2.11) esto es

$$\begin{aligned}
 \langle i_{C_1} \rangle &= i_{C_1}^8 d_1 + i_{C_1}^7 (d - d_1) + i_{C_1}^4 (d_2 - d) + i_{C_1}^1 (1 - d_2) = 0 \\
 \langle i_{C_2} \rangle &= i_{C_2}^8 d_1 + i_{C_2}^7 (d - d_1) + i_{C_2}^4 (d_2 - d) + i_{C_2}^1 (1 - d_2) = 0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.20) y (2.32) en las ecuaciones (2.33) y (2.34) se tiene cuatro ecuaciones con seis incógnitas ( $I_{L_1}$ ,  $I_{L_2}$ ,  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ). Para resolver el sistemas de ecuaciones se analizan las topologías  $q_8$  y  $q_4$ , esto es en el primer y tercer subintervalo de tiempo respectivamente.

Durante el primer subintervalo de tiempo se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 v_{L_1}^8 &= V_{in} \\
 v_{L_2}^8 &\approx -V_{C_2}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Reescribiendo los términos del lado izquierdo de la ecuación (2.35) en función de la ecuación (2.1) y sustituyendo  $di_{L_1}/dt$  y  $di_{L_2}/dt$  por las pendientes de las corrientes en  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente se tiene

$$\begin{aligned}
 L_1 \frac{i'_{pk_1}}{d_1 T} - M \frac{i'_{pk_2}}{d_1 T} &= V_{in} \\
 M \frac{i'_{pk_1}}{d_1 T} - L_2 \frac{i'_{pk_2}}{d_1 T} &\approx -V_{C_2}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Durante el tercer subintervalo de tiempo se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} v_{L_1}^4 &\approx V_{in} - V_{C_1} \\ v_{L_2}^4 &\approx -V_{C_2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nuevamente, reescribiendo los términos del lado izquierdo de la ecuación (2.37) en función de la ecuación (2.1) y sustituyendo  $di_{L_1}/dt$  y  $di_{L_2}/dt$  por las pendientes de las corrientes en  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente se tiene

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{i_{pk_1}}{(d_2 - d)T} + M \frac{i_{pk_2}}{(d_2 - d)T} &\approx V_{in} - V_{C_1} \\ -M \frac{i_{pk_1}}{(d_2 - d)T} + L_2 \frac{i_{pk_2}}{(d_2 - d)T} &\approx -V_{C_2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por otra parte, cuando actúa la topología  $q_4$  se satisfacen las relaciones de los nodos  $A$  y  $B$  (ver figura 2.3(g)), las cuales están dadas por la ecuación (2.22). Dado que la componente dc en los capacitores debe satisfacer la relación dada por la ecuación (2.23), esto implica que la componente dc de la corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  debe ser igual a la componente dc de la corriente en la carga. Es decir, se debe satisfacer la relación dada en la ecuación (2.24).

Además, durante este subintervalo de tiempo se verifica que las corrientes en los diodos  $D_1$  y  $D_2$  son iguales a las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente (ver figura 2.11). Por lo tanto, la componente dc de la corriente en los diodos está dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \langle i_{D_1} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_{D_1}(t) dt = \frac{i_{pk_1}(d_2 - d)}{2} \\ \langle i_{D_2} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_{D_2}(t) dt = \frac{i'_{pk_2} d_1}{2} + \frac{i_{pk_2}(d_2 - d)}{2} + \frac{(i'_{pk_2} + i_{pk_2})(1 - d_2)}{2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

La integral es el área sombreada bajo la curva en  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente (ver figura 2.11). Esta área en  $D_1$  es el área del triángulo que tiene altura  $i_{pk_1}$  y base de dimensión  $(d_2 - d)T$ , mientras que en  $D_2$  es la suma de las áreas dadas por dos triángulos más un paralelepípedo. Las áreas de estos triángulos corresponden al primer y segundo término del lado derecho de la segunda ecuación en (2.39), mientras que el último término corresponde al área del paralelepípedo. Así, igualando las ecuaciones (2.24) y (2.39) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{i_{pk_1}(d_2 - d)}{2} &= \frac{V_{C_1} + V_{C_2}}{R} \\ \frac{i'_{pk_2} d_1}{2} + \frac{i_{pk_2}(d_2 - d)}{2} + \frac{(i'_{pk_2} + i_{pk_2})(1 - d_2)}{2} &= \frac{V_{C_1} + V_{C_2}}{R} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Finalmente, para obtener las componentes dc de  $I_{L_1}$ ,  $I_{L_2}$ ,  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$ , las fracciones de tiempo de conducción  $d_1$  y  $d_2$  de los diodos  $D_2$  y  $D_1$  respectivamente en  $T_3$ , y junto a los valores pico  $i'_{pk_1}$  y  $i_{pk_1}$

para la corriente en el inductor  $L_1$  y los valores pico  $i'_{pk_2}$  y  $i_{pk_2}$  para la corriente del inductor  $L_2$  se resuelve el sistemas de ecuaciones compuesto por las ecuaciones (2.33), (2.34), (2.36), (2.38) y (2.40). Debido a la complejidad de las expresiones que se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones se omiten sus resultados.

#### Trayectoria $T_4$

Las trayectorias de las corrientes y voltajes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y los capacitores  $C_1$  y  $C_2$ , así como las corrientes en los diodos  $D_1$  y  $D_2$  y la acción de control en estado estacionario en  $T_4$  se muestran en la figura 2.12. Al aplicar la ley de corrientes y voltajes de Kirchhoff para cada una de las topologías que aparecen en  $T_4$  se tiene

- $[0 - dT]$

Durante el primer subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_7$  (ver figura 2.3(f)) la cual está dada por las expresiones en la ecuación (2.20). Esta dinámica es válida hasta el instante de tiempo  $dT$  cuando se produce un cambio en el estado del interruptor.

- $[dT - d_1T]$

Durante el segundo subintervalo de tiempo actúa la dinámica de la topología  $q_4$  (ver figura 2.3(g)) la cual está dada por las expresiones en la ecuación (2.8). Esta dinámica es válida hasta el instante de tiempo  $d_1T$  cuando la corriente en el inductor  $L_1$  se hace cero.

- $[d_1T - d_2T]$

Durante el tercer subintervalo de tiempo la dinámica que actúa es la de la topología  $q_1$  (ver figura 2.3(a)) la cual está dada por la ecuacion (2.32).

- $[d_2T - T]$

Finalmente la dinámica que actúa en el último subintervalo de tiempo está dada por la topología  $q_2$  (ver figura 2.3(c)) la cual está dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 v_{L_1}^2 &= 0 \\
 v_{L_2}^2 &= 0 \\
 i_{C_1}^2 &\approx -\frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R} \\
 i_{C_2}^2 &\approx -\frac{V_{C_1}}{R} - \frac{V_{C_2}}{R}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Del balance volt-s en el inductor, la componente dc de la forma de onda del voltaje en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  debe ser cero (ver figura 2.12), esto es

$$\begin{aligned}
 \langle v_{L_1} \rangle &= v_{L_1}^7 d + v_{L_1}^4 (d_1 - d) + v_{L_1}^1 (d_2 - d_1) + v_{L_1}^2 (1 - d_2) = 0 \\
 \langle v_{L_2} \rangle &= v_{L_2}^7 d + v_{L_2}^4 (d_1 - d) + v_{L_2}^1 (d_2 - d_1) + v_{L_2}^2 (1 - d_2) = 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

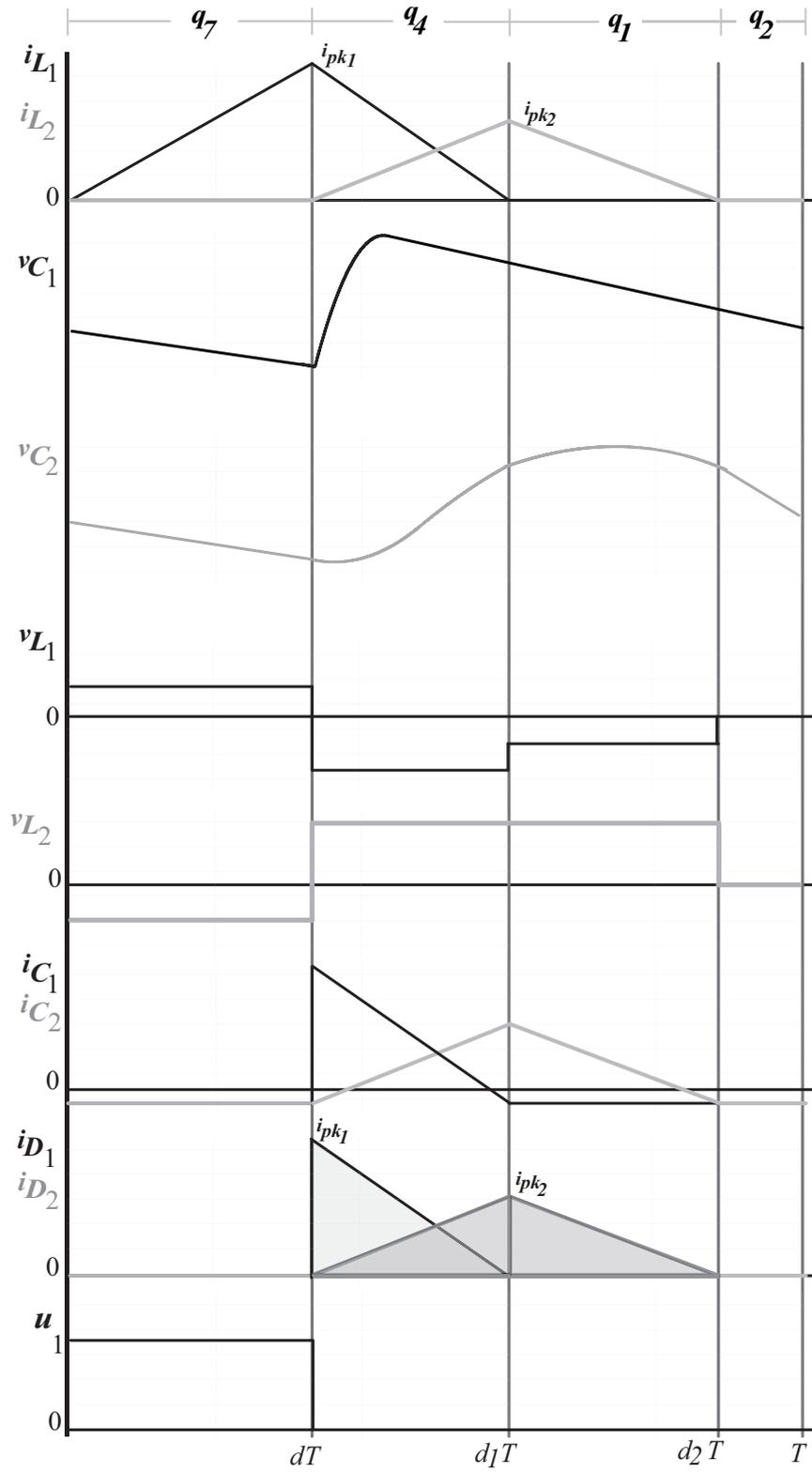


Figura 2.12: Formas de onda de las trayectorias en  $T_4$  en un periodo de conmutación

Un análisis similar se lleva a cabo sobre las formas de ondas de las corrientes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  (ver figura 2.12) a partir del balance de carga del capacitor, se tiene

$$\begin{aligned}\langle i_{C_1} \rangle &= i_{C_1}^7 d + i_{C_1}^4 (d_1 - d) + i_{C_1}^1 (d_2 - d_1) + i_{C_1}^2 (1 - d_2) = 0 \\ \langle i_{C_2} \rangle &= i_{C_2}^7 d + i_{C_2}^4 (d_1 - d) + i_{C_2}^1 (d_2 - d_1) + i_{C_2}^2 (1 - d_2) = 0\end{aligned}\quad (2.43)$$

De nuevo, en las ecuaciones (2.42) y (2.43) el valor de  $d$  representa el ciclo de trabajo del interruptor, y se considera un valor conocido, mientras que  $d_1$  y  $d_2$  son valores desconocidos, los cuales corresponden a las fracciones de tiempo de conducción de los diodos  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente en la trayectoria de  $T_4$  (ver figura 2.12). De este modo, sustituyendo las ecuaciones (2.8), (2.20), (2.32) y (2.41) en (2.42) y (2.43) se tiene cuatro ecuaciones con seis incógnitas ( $I_{L_1}$ ,  $I_{L_2}$ ,  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ). Nuevamente, para resolver el sistema de ecuaciones se analiza la topología  $q_4$ , esto es en el subintervalo de tiempo  $[dT - d_1T]$  (ver figura 2.12). De las ecuaciones de los nodos  $A$  y  $B$  en  $q_4$  se obtienen las relaciones de la ecuación (2.22), y del principio del balance de carga del capacitor, la componente dc de la corriente en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen las relaciones dadas en la ecuación (2.23). Por lo tanto, la componente dc de la corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  en la ecuación (2.22) debe ser igual a la componente dc de la corriente en la carga, es decir, se debe satisfacer las relaciones de la ecuación (2.24).

Por otra parte, en  $q_4$  también se verifica que la corriente en el diodo  $D_1$  es idéntica a la corriente en el inductor  $L_1$  (ver figura 2.12). Del mismo modo, la corriente en el diodo  $D_2$  es igual a la corriente en el inductor  $L_2$ . Por lo tanto, la componente dc de la corriente en los diodos  $D_1$  y  $D_2$  es

$$\begin{aligned}\langle i_{D_1} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_{D_1}(t) dt = \frac{i_{pk_1}(d_1 - d)}{2} \\ \langle i_{D_2} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_{D_2}(t) dt = \frac{i_{pk_2}(d_2 - d)}{2}\end{aligned}\quad (2.44)$$

donde  $i_{pk_1}$  es igual a la pendiente de la corriente en  $L_1$  multiplicada por la longitud del primer subintervalo de tiempo  $0 - dT$ , esto es

$$i_{pk_1} = \frac{V_{in}}{L_1} dT \quad (2.45)$$

La integral es el área sombreada bajo la curva en  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente (ver figura 2.12). Esta área en  $D_1$  es el área del triángulo que tiene altura  $i_{pk_1}$  y base de dimensión  $(d_1 - d)T$ , mientras que en  $D_2$  es el área del triángulo que tiene altura  $i_{pk_2}$  y base de dimensión  $(d_2 - d)T$ . Así, igualando las ecuaciones (2.24) y (2.44) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{i_{pk_1}(d_1 - d)}{2} &= \frac{V_{C_1}}{R} + \frac{V_{C_2}}{R} \\ \frac{i_{pk_2}(d_2 - d)}{2} &= \frac{V_{C_1}}{R} + \frac{V_{C_2}}{R}\end{aligned}\quad (2.46)$$

Además, en  $q_4$  también se satisface la relación dada en la ecuación (2.27). Así, reescribiendo  $v_{L_2}$  en términos de la ecuación (2.1) y sustituyendo  $di_{L_1}/dt$  y  $di_{L_2}/dt$  por las pendientes de las corrientes en  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente se tiene

$$L_2 \frac{i_{pk_2}}{(d_1 - d)T} - M \frac{i_{pk_1}}{(d_1 - d)T} = -V_{C_2} \quad (2.47)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones (2.42), (2.43), (2.46) y (2.47) para las componentes dc de  $I_{L_1}$ ,  $I_{L_2}$ ,  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$  y las fracciones de tiempo de conducción  $d_1$  y  $d_2$  de los diodos  $D_1$  y  $D_2$  en  $T_4$  respectivamente, junto al valor pico  $i_{pk_2}$  en la corriente del inductor  $L_2$  se tiene

$$\begin{aligned} I_{L_1} &= \frac{1}{2} \frac{V_{in}}{L_1} dT \\ I_{L_2} &= \frac{1}{2} \frac{V_{in} M}{L_1(L_2 + M)} dT \\ V_{C_1} &= \frac{-V_{in}((L_1 M + L_2 L_1 - M^2)d^2 TR - 2L_1 M^2)\Lambda_1 - V_{in} T d^2 R M^2}{L_1(L_2 + M)(2L_1 \Lambda_1 - T d^2 R)} \\ V_{C_2} &= \frac{V_{in} M^2}{L_1(L_2 + M)} \Lambda_1 \\ d_1 &= \frac{\Lambda_1 + 1}{\Lambda_1} d \\ d_2 &= \frac{L_2 + M + M \Lambda_1}{M \Lambda_1} d \\ i_{pk_2} &= \frac{V_{in} M}{L_1(L_2 + M)} dT \end{aligned} \quad (2.48)$$

con

$$\Lambda_1 = 2L_1 z^2 + 2L_1 z - TRd^2 \quad (2.49)$$

donde  $\Lambda_1$  representa las soluciones de la ecuación polinómica (2.49). De la ecuación (2.48) se obtiene la relación de conversión ideal, la cual está dada por la siguiente expresión

$$M(d) = \frac{V_{C_1} + V_{C_2}}{V_{in}} = \frac{1}{2} \frac{RT}{L_1 \Lambda_1} d^2 \quad (2.50)$$

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo se han analizado los distintos modos de funcionamiento que el convertidor Boost acoplado magnéticamente presenta tanto en CCM como DCM. Además, mediante un conocimiento a priori de las transiciones topológicas factibles del convertidor en un periodo de conmutación se

determinó la componente dc mediante el promedio de las formas de ondas de las corrientes y voltajes en un periodo de conmutación en estado estacionario. Este análisis teórico implica el uso de los principios convencionales para el análisis de circuitos. El balance de volts-s a través del inductor y el principio de conservación de la carga a través de un capacitor y la aproximación de rizado pequeño. Adicionalmente, se obtuvo la relación de conversión ideal  $M(d)$  para los distintos modos de funcionamiento del convertidor. También se ha determinado el límite entre el CCM y el DCM. Cuando el convertidor Boost acoplado magnéticamente entra en CCM, las características en estado estacionario son idénticas a la topología convencional del convertidor Boost.

## Referencias

- [1] S. Dwari and L. Parsa, “An efficient high-step-up interleaved dc-dc converter with a common active clamp,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 26, no. 1, pp. 66–78, 2011. 7
- [2] J. Reed and G. Venkataramanan, “Bidirectional high conversion ratio dc-dc converter,” in *Power and Energy Conference at Illinois (PECI), 2012 IEEE*, 2012, pp. 1–5. 7
- [3] W. Li, L. Fan, Y. Zhao, X. He, D. Xu, and B. Wu, “High-step-up and high-efficiency fuel-cell power-generation system with active-clamp flyback-forward converter,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 1, pp. 599–610, 2012. 7
- [4] Y.-C. Chuang, Y.-L. Ke, H.-S. Chuang, and C.-C. Hu, “Single-stage power-factor-correction circuit with flyback converter to drive leds for lighting applications,” in *Industry Applications Society Annual Meeting (IAS), 2010 IEEE*, 2010, pp. 1–9. 7
- [5] Y. Jang and M. Jovanovic, “A new pwm zvs full-bridge converter,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 3, pp. 987–994, 2007. 7
- [6] X. Wu, J. Zhang, X. Ye, and Z. Qian, “Analysis and derivations for a family zvs converter based on a new active clamp zvs cell,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 2, pp. 773–781, 2008. 7
- [7] R. W. Erickson and D. Maksimovic, *Fundamentals of power electronics*, 2nd ed., Springer, Ed. Kluwer academic publishers, Marzo 2001. 1, 2, 8, 13, 14, 23
- [8] Q. Zhao and F. Lee, “High performance coupled-inductor dc-dc converters,” in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2003. APEC '03. Eighteenth Annual IEEE*, vol. 1, feb. 2003, pp. 109 – 113 vol.1. 2, 8, 11
- [9] Shane Leonardo Malo Barragán, “Design and Control of an Electric Energy Conditioning System for a PEM Type Fuel Cell,” Ph.D. dissertation, Universitat Politècnica de Catalunya, October 2009. 2, 11
- [10] Pérez Rivas Lisbeth C., “Modelado de un Convertidor Boost Acoplado,” Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Gener 2009. 2, 11

- [11] N. Femia and G. Spagnuolo, “Multi-discontinuous modes: a new class of discontinuous modes in pwm switching converters,” in *Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC '95 Record., 26th Annual IEEE*, vol. 1, 1995, pp. 614–620 vol.1. 13
- [12] K. Schenk and S. Cuk, “Small signal analysis of converters with multiple discontinuous conduction modes,” in *Power Electronics Specialists Conference, 1998. PESC 98 Record. 29th Annual IEEE*, vol. 1, 1998, pp. 623–629 vol.1. 13

# Modelado del convertidor Boost acoplado magnéticamente

---

En este capítulo se aborda el modelado del convertidor Boost acoplado magnéticamente. En particular, se hace uso del método de promediado en espacio-estado y del formalismo de sistemas lineales complementarios. Los modelos obtenidos son evaluados y comparados mediante simulación con el modelo del convertidor proporcionado por la herramienta de simulación de circuitos eléctricos Psim.

## 3.1. Introducción

El enfoque ampliamente desarrollado en la literatura en el modelado de convertidores DC-DC es el modelo promedio en espacio-estado (SSA, por sus siglas en inglés) [1]. Esta técnica introducida en los trabajos de Middlebrook y Cuk en [2] combinan las técnicas de modelado en espacio de estado y el modelo promediado. Los fundamentos teóricos del SSA se encuentra en el método de perturbación [3] y la teoría clásica de promediado [4]. El SSA se compone básicamente de tres etapas: 1) obtener la dinámica en espacio de estado para cada uno de los subcircuitos lineales que aparecen en un periodo de conmutación, 2) luego se combinan todas las dinámicas en una única ecuación parametrizada por la posición del interruptor. Esta última ecuación es interpretada como el modelo promediado, y finalmente 3) se introducen perturbaciones al modelo obtenido, el cual es linealizado alrededor del punto de operación para obtener el modelo de pequeña señal. Este último es luego utilizado para simulación, diseño de controladores, análisis de estabilidad, controlabilidad, observabilidad, etc., puesto que existe una vasta literatura disponible para sistemas lineales. La aplicación de esta técnica abarca desde convertidores de segundo orden como el Buck, Boost y Buck-Boost [5, 6, 7], así como también convertidores de cuarto orden como el Cuk y el Sepic [8, 9]. No obstante, el uso de esta técnica resulta compleja cuando el número de diodos o interruptores es elevado, incluso para topologías convencionales con más de dos dispositivos conmutadores [10]. Además, para cada modo de funcionamiento del convertidor, ya sea CCM o DCM se requiere un modelo promedio diferente [11], aun cuando el convertidor puede trabajar en ambos modos en todo el rango de operación. Otra desventaja de este método para describir la dinámica del convertidor en DCM, es que a alta frecuencia la precisión de los modelos obtenidos resulta inaceptable en algunos casos [12]. Por otro lado, un conocimiento a priori de cada

una de las topologías o modos en un periodo de conmutación son necesarios.

No obstante, el enfoque clásico de la teoría de promedio también se ha aplicado para obtener la dinámica de los convertidores conmutados. Específicamente, el método KBM (Krylov-Bogoliubov-Miltropolsky) [4, 5]. Éste es una generalización de la teoría de promediado. La idea del KBM es obtener mejores aproximaciones que incluyan el rizado. Puesto que la principal premisa del SSA es asumir un rizado pequeño [1]. Así, el método aproxima la solución del sistema mediante una expansión en series de potencia con exactitud arbitraria, la cual se traduce en la existencia de un parámetro pequeño  $\varepsilon$ . Así, bajo ciertas condiciones el sistema promediado aproxima con exactitud durante un cierto tiempo al sistema original si  $\varepsilon$  es lo bastante pequeño. Además, este método proporciona una clara relación entre el circuito original y el modelo promedio obtenido [5].

Existen otros enfoques basados en el modelo promedio conocidos en la literatura. El nombre que caracteriza cada modelo se ha escrito en lengua inglesa para poner de manifiesto la procedencia del correspondiente acrónimo. Algunos de estos son: el enfoque basado en Current Injected Equivalent Circuit Approach (CIECA). El CIECA se desarrolla por primera vez en [13]. Este método divide el circuito en dos partes, una parte corresponde a la parte lineal del circuito, normalmente formada por un capacitor y una resistencia en paralelo, y la otra corresponde a la parte no lineal del circuito, la cual es responsable de “inyectar” corriente a la parte lineal o circuito de salida. Se lleva a cabo un análisis en estado estacionario considerando que el valor inicial de la corriente es igual al valor final en un ciclo de conmutación y un análisis en régimen dinámico en el cual se linealiza entorno a un punto de operación. Para más detalles ver [14, 15].

En [16] aparece la primera aproximación de MInimum Separable Switching Configuration (MISSCO). Éste comienza con una simplificación del circuito del convertidor, cuyo análisis se reduce a la mínima configuración del circuito conmutado. La idea básica de este método consiste en identificar la parte del circuito responsable del comportamiento característico de la acción de conmutación. Luego, mediante el uso del método de la respuesta impulsiva y la técnica de promediado se obtiene un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico a baja frecuencia del MISSCO derivado. Las ecuaciones resultantes luego se combinan con el resto del circuito para obtener el modelo completo a baja frecuencia. Este modelo es usado para obtener las funciones de transferencia. Mas detalles sobre este enfoque se proporcionan en [17, 18, 19].

Un método gráfico para obtener el modelo de los convertidores de potencia se basa en el formalismo de Bond Graph (BG) presentado en [20]. Esta técnica de modelado consiste en descomponer un sistema en subsistemas, y estos a su vez en subsistemas elementales, los cuales representan los procesos físicos básicos. Su planteamiento se fundamenta en el intercambio de energía entre los subsistemas. Para más detalles sobre este método refiérase a [21, 22] y sus referencias.

Los métodos de modelado discreto promediado resultan una forma natural para describir el compor-

tamiento dinámico de los convertidores de potencia, primero por el comportamiento cíclico de los convertidores de potencia y segundo porque resultan adecuados para el diseño de controladores digitales. Algunos de los trabajos donde se emplea este método para obtener la dinámica de convertidores de potencia tanto en pequeña señal como a gran señal se encuentran [19, 23, 24, 25]. Si bien su análisis resulta sistemático, el costo computacional puede llegar a ser prohibitivo en aplicaciones de tiempo real.

Debido a las dificultades asociadas de los métodos previamente citados, la necesidad de obtener modelos más precisos requiere de un análisis exhaustivo del funcionamiento de los interruptores, y de incluir en los modelos otros aspectos externos a los cuales están sujetos los convertidores de potencia como perturbaciones en el voltaje de alimentación, variaciones en la carga, resistencias parásitas y caídas de voltaje en los elementos reactivos del circuito que pueden degradar su comportamiento dinámico. Peor aún, el desestimar estas no linealidades, pueden conducir a un comportamiento inestable en presencia de grandes perturbaciones. En particular, grupos de investigación orientados a la informática y a la ingeniería de control han abordado este tema, en cuyos modelos se pone especial énfasis a la dinámica híbrida inherente de los convertidores, sujetos a las restricciones de las variables de estados (por ejemplo, en una topología Boost en CCM la corriente en el inductor debe satisfacer  $i > 0$ ) y la de los dispositivos conmutadores (por ejemplo, en un diodo ideal se requiere  $i \geq 0$  y  $v \leq 0$ . El diodo conduce ( $v = 0$ ) cuando  $i > 0$ , y no conduce ( $i = 0$ ) cuando  $v < 0$ ).

Dentro de los enfoques que estos grupos de investigación han aplicados a convertidores de potencia, y que han sido reportados en la literatura se encuentran: el modelo basado en Hybrid Automaton (HA) [26, 27, 28], el cual es a menudo utilizado como punto de partida en el modelado y análisis de sistemas híbridos. Este enfoque incorpora variables discretas y continuas con el fin de capturar la dinámica híbrida. La trayectoria solución se construye a partir de la sucesión de las diferentes dinámicas continuas asociadas a cada estado discreto, cuyas transiciones vienen dadas por un conjunto de leyes (eventos instantáneos). Estos eventos pueden ser inducidos externamente (como en el caso de los interruptores) o internamente (como en el caso de los diodos). La mayor desventaja de este enfoque es que permite infinitas conmutaciones en un tiempo finito, dando lugar a los problemas de tipo Zenón [29]. El lector interesado en profundizar en HA refiérase a [29].

Por otra parte, los sistemas basados en PieceWise Affine Systems (PWA) [30, 31, 32] constituyen otro de los formalismos empleados para obtener el modelo de un sistema híbrido. Estos sistemas se obtienen particionando el espacio de estado y entrada habitualmente en regiones poliédricas convexas, y asociando a cada región una ecuación diferencial afín diferente y una función de salida. Algunos de los trabajos que describen la dinámica de convertidores de potencia usando este formalismo son [33, 34, 35, 36]. Bajo ciertas suposiciones, el modelo PWA es equivalente a otros enfoques tales como Mixed Logical Dynamic (MLD) y Switched Complementarity Systems (SCS) [29]. Un sistema MLD es un sistema que combina ecuaciones dinámicas lineales sujetas a restricciones lineales que involucran variables reales y enteras. En general, estos sistemas incorporan sistemas lineales híbridos, autómatas híbridos, sistemas de eventos discretos, sistemas no lineales que pueden aproximarse por funciones lineales a trozos. En [26, 29, 37, 38, 39] los autores han abordado el modelado de convertidores con-

mutados utilizando este enfoque.

Los SCS están estrechamente relacionados con la teoría de optimización matemática. Además permiten una representación compacta de sistemas híbridos, en comparación con el enfoque de HA. Esta clase de sistemas se definen mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales junto a un conjunto de desigualdades, tales como  $0 \leq z \perp \omega \geq 0$ . Siendo  $z$  y  $\omega$  vectores de la misma dimensión, los cuales deben interpretarse componente a componente. Esta desigualdad se le denomina “complementarity conditions” (CC) [40, 41]. El par de variables complementarias  $z$  y  $\omega$  son las que le confieren el carácter híbrido a esta clase de sistemas, pues la violación de la no-negatividad implica un cambio de modo, como consecuencia la evolución del sistema está caracterizado por una serie de dinámicas consecutivas, en las que puede ser necesario actualizar el vector de estados [29]. Algunos de los trabajos en los que se ha obtenido el modelo de convertidores utilizando este formalismo son [42, 43, 44, 45].

Los diferentes métodos antes citados, constituyen una alternativa para obtener la dinámica híbrida de los convertidores sin necesidad de tener modelos diferentes para CCM y DCM, sin aproximaciones, o lo que es lo mismo resultan más exactos. De ahí, que los controladores diseñados usando estos formalismos resultan más eficientes e insensibles ante la incertidumbre de parámetros y perturbaciones externas. Ciertamente, el obtener modelos más complejos dificulta aún más las tareas de diseño de controladores, análisis de estabilidad, etc. comparados con los métodos de modelado tradicionales.

En la siguiente sección se va a determinar el modelo del convertidor Boost acoplado utilizando dos de los enfoques antes mencionados. En particular, se hará uso de uno de los enfoques orientados a ingeniería eléctrica, el modelo promedio en espacio de estado y el otro orientado a ingeniería de control basado en la teoría de sistemas lineales complementarios.

### 3.2. Modelo promedio en espacio-estado

Las variaciones topológicas presentes en los convertidores de potencia hacen que estos circuitos se comporten como un sistema dinámico lineal híbrido. Estos sistemas constan de una familia de subsistemas lineales invariantes en el tiempo y una función de conmutación que selecciona el subsistema activo en cada instante de tiempo [46].

En [46] esta clase de sistemas se representa de la siguiente forma

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m q_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^p$  el vector de entradas,  $A_i, B_i$  son matrices contantes de dimensiones apropiadas,  $m \in \mathbb{Z}^+$  es un entero relacionado al número de modos o topologías y  $q_i(t)$  la

función de conmutación, o selector de modo con periodo  $T$  y definida como

$$\begin{aligned} q_i(t) &: [0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}^m \\ \sum_{i=1}^m q_i(t) &= 1, \quad \forall t \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Luego el modelo promedio de (3.1) se define como

$$\dot{\bar{x}} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \sum_{i=1}^m q_i(s) (A_i \bar{x}(s) + B_i u(s)) ds = \sum_{i=1}^m \delta_i(t) (A_i \bar{x}(t) + B_i u(t)) \quad (3.3)$$

siendo  $\delta_i(t)$  la fracción de tiempo en que un modo  $i$  permanece activo. Esta fracción de tiempo se denomina ciclo de trabajo del modo  $q_i$ , el cual está definido como

$$\delta_i(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t q_i(s) ds \quad (3.4)$$

Note que si  $q_i(t)$  es periódico con periodo  $T$ , luego  $\delta_i(t)$  es contante y es igual a  $\delta_i = \tau_i/T$ . La fracción de tiempo en que un modo  $i$  permanece activo es denotado por  $\tau_i$ .

Con el propósito de obtener el modelo promedio en espacio de estados del convertidor objeto de estudio, se analizan a continuación las trayectorias  $T_3$  y  $T_4$ .

### Trayectoria $T_3$

De manera análoga, las ecuaciones de estado que describen el comportamiento conmutado en  $T_3$  (ver figura 2.11) durante un periodo de conmutación  $T$  están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_8 x + B_8 & si & \quad 0 < t < d_1 T \\ \dot{x} &= A_7 x + B_7 & si & \quad d_1 T < t < dT \\ \dot{x} &= A_4 x + B_4 & si & \quad dT < t < d_2 T \\ \dot{x} &= A_1 x + B_1 & si & \quad d_2 T < t < T \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, B_8 = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, B_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, B_4 = B_8 \\
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

y

$$a_1 = \frac{L_2}{(L_1 L_2 - M^2)}, \quad a_2 = \frac{M}{(L_1 L_2 - M^2)}, \quad a_3 = \frac{L_1}{(L_1 L_2 - M^2)} \tag{3.7}$$

Utilizando la ecuación (3.3) el modelo promedio para  $T_3$  está dado por

$$\dot{\bar{x}} = (A_8 \bar{x} + B_8) \delta_8 + (A_7 \bar{x} + B_7) \delta_7 + (A_4 \bar{x} + B_4) \delta_4 + (A_1 \bar{x} + B_1) \delta_1 \tag{3.8}$$

con

$$\begin{aligned}
 \delta_8 &= d_1 \\
 \delta_7 &= (d - d_1) \\
 \delta_4 &= (d_2 - d) \\
 \delta_1 &= (1 - d_2)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde  $d$  corresponde al ciclo de trabajo,  $d_1$  y  $d_2$  a los instantes de tiempo en que las corrientes en los inductores  $L_2$  y  $L_1$  se hacen cero en  $T_3$  respectivamente. Estos instantes de tiempo se obtienen del sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones (2.33), (2.34), (2.36), (2.38) y (2.39). Igualando a cero la ecuación (3.8) se obtiene el punto de equilibrio del sistema para un valor de ciclo de trabajo  $d$  dado. Debido a la complejidad, las expresiones del punto de equilibrio se expresan en función de  $d_1$  y

$d_2$ .

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \frac{V_{in}(L_2d^2M + (M^2 - d_1L_2M + (k - L_2M)d_2)d + ((L_1L_2 + L_2M + M^2)d_2 - M^2)d_1 - d_2L_1L_2)}{L_1L_2R(d - d_2)(d^2 + (d_1 - d_2 - 1)d - d_1d_2 + d_2)} \\
\bar{x}_2 &= \frac{V_{in}(L_2d^2M + ((k - L_2M)d_2 - d_1L_2M + M^2)d + ((L_1L_2 + L_2M + M^2)d_2 - M^2)d_1 - d_2L_1L_2)}{L_1L_2R(d^3 - (d_2 + 2)d^2 + (2d_2 - d_1^2 + 1)d - d_2 + d_1^2d_2)} \\
\bar{x}_3 &= \frac{-V_{in}((kd_2 + M^2)d + ((L_1L_2 + M^2)d_2 - M^2)d_1 - d_2L_1L_2)}{L_1L_2(d + d_1 - 1)(d - d_2)} \\
\bar{x}_4 &= \frac{V_{in}M(d_1 - d)}{L_1(d + d_1 - 1)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

con  $k = L_1L_2 - M^2$ . La ecuación anterior coincide con las expresiones de las componentes dc obtenidas en el análisis de conversión ideal de la trayectoria  $T_3$ .

### Trayectoria $T_4$

Las ecuaciones de estado que describen el comportamiento conmutado en  $T_4$  (ver figura 2.12) durante un periodo de conmutación  $T$  están dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A_7x + B_7 \quad \text{si} \quad 0 < t < dT \\
\dot{x} &= A_4x + B_4 \quad \text{si} \quad dT < t < d_1T \\
\dot{x} &= A_1x + B_1 \quad \text{si} \quad d_1T < t < d_2T \\
\dot{x} &= A_2x + B_2 \quad \text{si} \quad d_2T < t < T
\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \quad B_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \\
A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_{in} \\
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
A_2 &= A_7, \quad B_2 = B_1
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  están definidas en (3.7). Por lo tanto, utilizando la ecuación (3.3) el modelo promedio para  $T_4$  está dado por

$$\dot{\bar{x}} = (A_7\bar{x} + B_7)\delta_7 + (A_4\bar{x} + B_4)\delta_4 + (A_1\bar{x} + B_1)\delta_1 + (A_2\bar{x} + B_2)\delta_2 \quad (3.13)$$

con

$$\begin{aligned} \delta_7 &= d \\ \delta_4 &= (d_1 - d) \\ \delta_1 &= (d_2 - d_1) \\ \delta_2 &= (1 - d_2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $d$  corresponde al ciclo de trabajo,  $d_1$  y  $d_2$  a los instantes de tiempo en que las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  se hacen cero en  $T_4$  respectivamente. Estos instantes de tiempo se obtuvieron del análisis de la relación de conversión ideal en la ecuación (2.48).

Igualando a cero la ecuación (3.13) se obtiene el punto de equilibrio del sistema para un valor de ciclo de trabajo  $d$  dado.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{2} \frac{V_{in}}{L_1} dT \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{2} \frac{V_{in}M}{L_1(L_2 + M)} dT \\ \bar{x}_3 &= \frac{-V_{in}((L_1M + L_2L_1 - M^2)d^2TR - 2L_1M^2)\Lambda_1 - V_{in}Td^2RM^2}{L_1(L_2 + M)(2L_1\Lambda_1 - Td^2R)} \\ \bar{x}_4 &= \frac{V_{in}M^2}{L_1(L_2 + M)} \Lambda_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Las expresiones obtenidas en la ecuación (3.15) son idénticas a las componentes de obtenidas en el análisis de conversión ideal en la ecuación (2.48).

### 3.2.1. Simulación del modelo promedio en lazo abierto

En esta sección se muestran los resultados del modelo promedio obtenido en la sección anterior para las trayectorias en estado estacionario  $\sum_{ss} = (T_3, T_4)$  del convertidor Boost acoplado magnéticamente. Ambos modelos se han simulado en Matlab mediante el método numérico ode45. Por otra parte, con el fin de verificar los resultados del modelo promedio, se llevaron a cabo simulaciones del convertidor en Psim. Esta es una herramienta de simulación diseñada específicamente para circuitos eléctricos desarrollada por Powersim Inc.

#### Trayectoria $T_3$

Los resultados del modelo promedio para  $T_3$  se muestran en la figura 3.1. Los valores de los parámetros utilizados en la simulación se presentan en la tabla 3.1. Las condiciones iniciales son  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$

Parámetro	Valor
$L_1$	$75\mu\text{H}$
$L_2$	$525\mu\text{H}$
$M$	$168\mu\text{H}$
$C_1$	$2\mu\text{F}$
$C_2$	$22\mu\text{F}$
$R$	$100\Omega$
$V_{in}$	$12\text{V}$
$f$	$20\text{KHz}$

Cuadro 3.1: Parámetros del convertidor

y ciclo de trabajo  $d = 0.2$ . Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.33), (2.34), (2.36), (2.38) y (2.39) e igualando a cero (3.8) se obtiene el valor promedio de las variables de estados  $\bar{x} = [0.97, 0.28, 17.6, 6.15]$ . De la figura 3.1 se observa que las trayectorias del vector de estados  $\bar{x}$  convergen al punto de equilibrio del convertidor. En la gráfica 3.2 se muestra el error relativo del voltaje de salida del convertidor  $v_R = v_{C_1} + v_{C_2}$  entre el modelo promedio obtenido para la trayectoria en estado estacionario  $T_3$  y los datos obtenidos mediante simulación usando Psim. Se observa que el error es despreciable en la medida en que  $R \rightarrow 0$  y el ciclo de trabajo  $d \rightarrow 90\%$  o  $R \rightarrow \infty$  y el ciclo de trabajo  $70\% < d < 90\%$ .

#### Trayectoria $T_4$

Los resultados del modelo promedio para  $T_4$  se muestran en la figura 3.3. Los valores de los parámetros utilizados en la simulación se presentan en la tabla 3.1 a excepción del valor de la carga  $R = 400\Omega$ . Las condiciones iniciales son  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$  y ciclo de trabajo  $d = 0.3$ . Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.48) y (3.15) se obtiene el valor promedio de las variables de estados  $\bar{x} = [1.2, 0.29, 28.45, 19.54]$ . De la figura 3.3 se observa que modelo no logra copiar la dinámica durante el estado transitorio, mientras que en estado estacionario las trayectorias del vector de estados  $\bar{x}$  convergen al punto de equilibrio del convertidor.

Con el propósito de evaluar el ajuste del modelo promedio obtenido para diferentes valores del ciclo de trabajo y de la carga, se llevaron a cabo simulaciones del convertidor utilizando Psim. En la gráfica 3.4 se muestra el error relativo del voltaje de salida del convertidor  $v_R = v_{C_1} + v_{C_2}$  entre el modelo promedio para  $T_4$  y los datos obtenidos mediante simulación usando Psim. Se observa que mientras  $R \rightarrow \infty$  y el ciclo de trabajo  $d < 70\%$  el error es despreciable.

De las gráficas 3.4 y 3.2 se refleja que no existe un único modelo promedio que logre copiar con bastante precisión la dinámica del convertidor para  $d \in [0, 1]$  y cualquier valor de la carga. Dejando en evidencia que las transiciones topológicas en estado estacionario del convertidor dependen del ciclo de trabajo

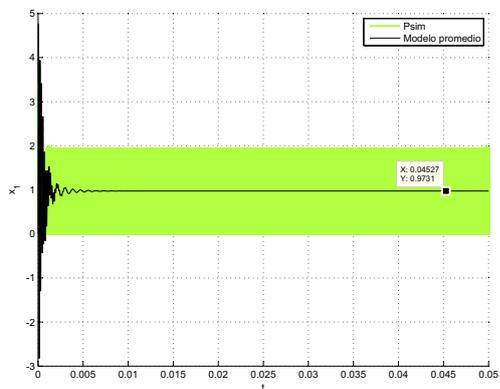
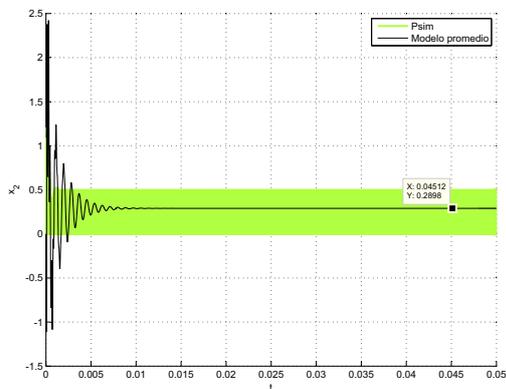
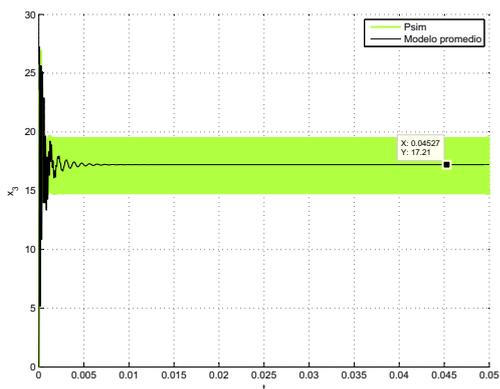
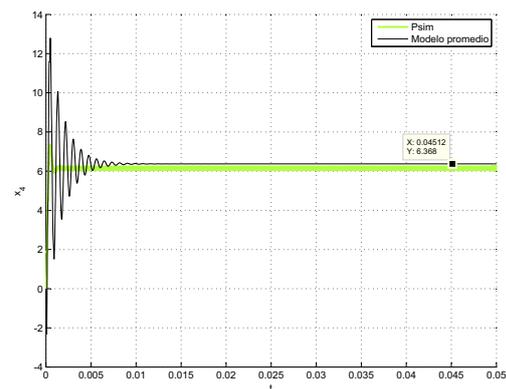
(a) Corriente promedio en el inductor  $L_1$ (b) Corriente promedio en el inductor  $L_2$ (c) Voltaje promedio en el capacitor  $C_1$ (d) Voltaje promedio en el capacitor  $C_2$ 

Figura 3.1: Simulación en lazo abierto del modelo promedio para  $T_3$  y Psim del convertidor Boost acoplado magnéticamente

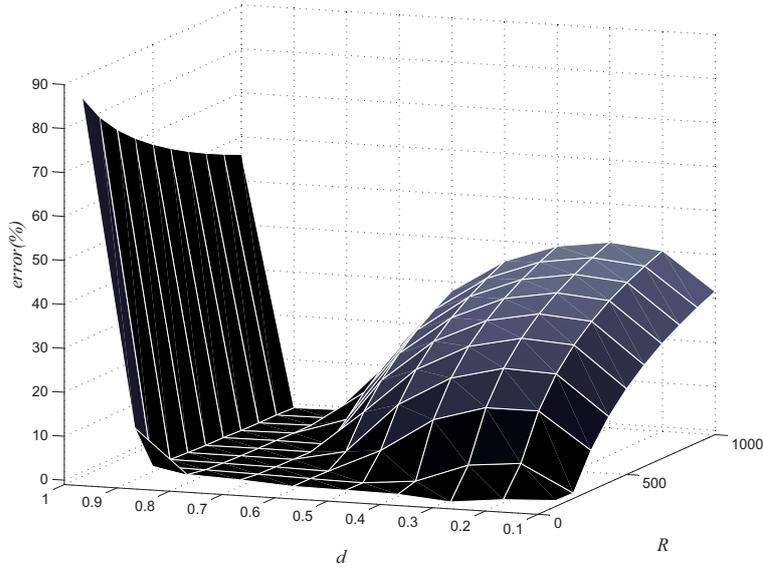


Figura 3.2: Error relativo del voltaje de salida  $v_R$  del convertidor entre el modelo promedio para la trayectoria  $T_3$  y Psim

$d$  y del valor de la carga  $R$ .

### 3.3. Modelado usando el formalismo complementario

En esta sección se presenta el modelo dinámico del convertidor usando el formalismo de sistemas lineales complementarios (LCS). Un sistema lineal o afín complementario forman una clase particular de sistemas híbridos. Se definen mediante un campo vectorial, una función de salida y una condición implícita para las transiciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}w + \mathcal{E}, & x(0) &= x_0 \\ z &= \mathcal{C}x + \mathcal{D}w + \mathcal{F} \\ 0 &\leq z \perp w \geq 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $x(0)$  las condiciones iniciales de estado,  $z \in \mathbb{R}^k$  y  $w \in \mathbb{R}^k$  se denominan variables complementarias y  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  y  $\mathcal{F}$  son matrices constantes de dimensiones apropiadas. La última ecuación de (3.16) se conoce como “condición de complementariedad” (CC) [44]. Estas desigualdades se deben interpretar componente a componente y  $\perp$  denota la ortogonalidad entre los vectores  $z$  y  $w$ . Esta relación indica que para cada par de variables complementarias  $(z_i, w_i)$ , al menos una de las variables debe ser cero, esto es,  $z_i(t) = 0$  o  $w_i(t) = 0$  para  $i = 1, \dots, k$ . Los sistemas complementarios son un caso particular de sistemas cono-complementarios (CCS) [48]. La dinámica del convertidor uti-

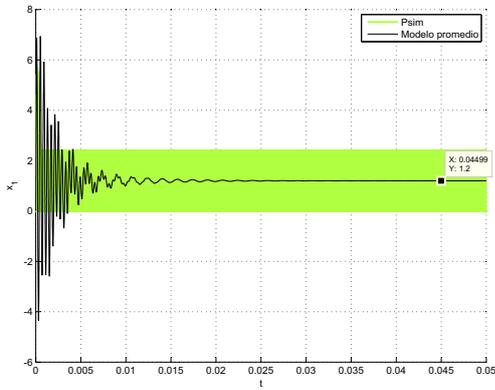
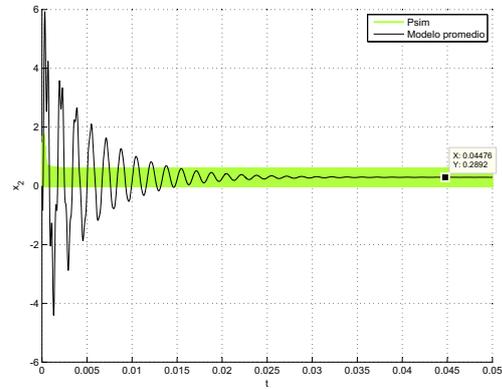
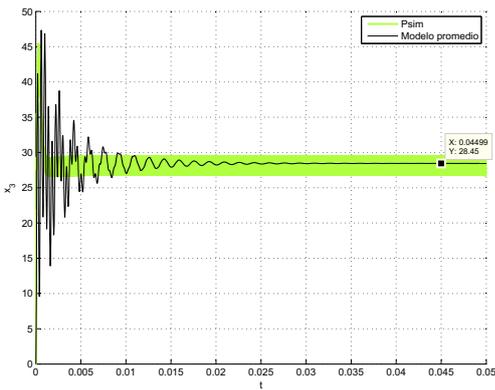
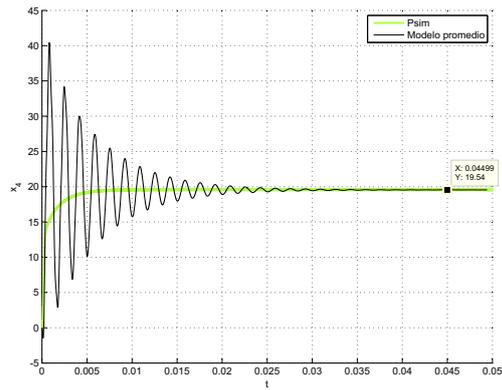
(a) Corriente promedio en el inductor  $L_1$ (b) Corriente promedio en el inductor  $L_2$ (c) Voltaje promedio en el capacitor  $C_1$ (d) Voltaje promedio en el capacitor  $C_2$ 

Figura 3.3: Simulación en lazo abierto del modelo promedio para  $T_4$  y Psim del convertidor Boost acoplado magnéticamente

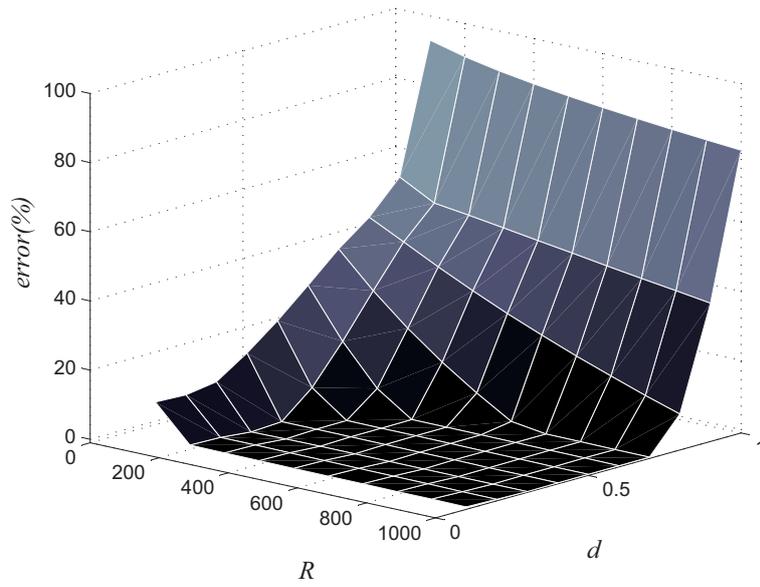


Figura 3.4: Error relativo del voltaje de salida  $v_R$  del convertidor entre el modelo promedio para la trayectoria  $T_4$  y Psim

lizando este formalismo puede escribirse en función de los estados del interruptor (On,Off), del vector de estados  $x = [i_{L_1}, i_{L_2}, v_{C_1}, v_{C_2}]^T$  y de dos pares de variables complementarias. Así, se tiene

- S=On ( $v_s = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \mathcal{A}_1 x + \mathcal{B}_1 \omega + \mathcal{E}_1 V_{in} \\
 z &= \mathcal{C}_1 x + \mathcal{D}_1 \omega + \mathcal{F}_1 V_{in} \\
 0 &\leq z_1 \perp \omega_1 \leq 0 \\
 0 &\leq z_2 \perp \omega_2 \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

el par de variables complementarias está dado por

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= i_{D1} \rightarrow z_1 = -v_{D1} = x_3 \\
 \omega_2 &= -v_{D2} \rightarrow z_2 = i_{D2} = x_2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

con

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{B}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 0 & a_3 \\ \frac{1}{C_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{C}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

- S=Off ( $i_s = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \mathcal{A}_2 x + \mathcal{B}_2 \hat{\omega} + \mathcal{E}_2 V_{in} \\
 \hat{z} &= \mathcal{C}_2 x + \mathcal{D}_2 \hat{\omega} + \mathcal{F}_2 V_{in} \\
 0 &\leq \hat{z}_1 \perp \hat{\omega}_1 \leq 0 \\
 0 &\leq \hat{z}_2 \perp \hat{\omega}_2 \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

el par de variables complementarias está dado por

$$\begin{aligned}
 \hat{\omega}_1 &= -v_{D1} \rightarrow \hat{z}_1 = i_{D1} = x_1 \\
 \hat{\omega}_2 &= -v_{D2} \rightarrow \hat{z}_2 = i_{D2} = x_2
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

con

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & -a_3 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{B}_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_2 & a_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{C}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  están definidas en la ecuación (3.7). Por otro lado, cabe destacar que la primera componente del vector  $\omega$  y  $z$  en ambas posiciones del interruptor son diferentes. De ahí, que para facilitar el análisis en las secciones siguientes, se ha denotado el par de variables complementarias como  $\hat{\omega}$  y  $\hat{z}$  cuando el interruptor esta abierto.

### 3.3.1. Simulación del modelo complementario en lazo abierto

En esta sección se presentan las simulaciones en lazo abierto del modelo obtenido en la sección anterior. Se utilizó el método de integración de backwards Euler de paso fijo, para obtener la solución aproximada de la ecuación (3.16), junto a una solución específica para el problema lineal complementario. Así, la expresión discreta del modelo lineal complementario está dada por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T_m(\mathcal{A}x_{k+1} + \mathcal{B}\omega_{k+1} + \mathcal{E}) \\ z_{k+1} &= \mathcal{C}x_{k+1} + \mathcal{D}\omega_{k+1} + \mathcal{F} \\ 0 &\leq z_{k+1} \perp \omega_{k+1} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

en cada paso de integración  $T_m$  se obtiene la solución del problema lineal complementario LCP( $\mathcal{M}, q$ ). Donde la matriz  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  y el vector  $q \in \mathbb{R}^k$  son datos del problema. De este modo se tiene

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{M}\omega_{k+1} + q = \\ z_{k+1} &= \left( T_m \mathcal{C} (I - T_m \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D} \right) \omega_{k+1} + \mathcal{C} (I - T_m \mathcal{A})^{-1} x_k \\ 0 &\leq z_{k+1} \perp \omega_{k+1} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

se asume  $\mathcal{M} > 0$ , una matriz definida positiva y no singular [47, 48]. Un método para resolver el LCP( $\mathcal{M}, q$ ), es fijar a cero una de las variables de cada par  $(z_i, \omega_i)$  con  $i = 1, \dots, k$ , y resolver el sistema con la variables restantes. Luego la solución del sistema para  $\omega_{k+1}$  y dado  $x_k$  está dado por

$$x_{k+1} = (I - T_m \mathcal{A})^{-1} (x_k + T_m (\mathcal{B}\omega_{k+1} + \mathcal{E})) \quad (3.25)$$

Ambos algoritmos se han implementado en Matlab. Así, con el objetivo de evaluar el ajuste del modelo complementario, se llevaron a cabo simulaciones en Psim. Los parámetros utilizados en las simulaciones son los presentados en la tabla 3.1. El valor de la carga  $R = 100\Omega$  y ciclo de trabajo  $d = 0.2$ , y partiendo con condiciones iniciales  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$ . El modelo complementario no solo logra copiar la dinámica del convertidor en estado estacionario, sino que también en estado transitorio, como se evidencia en los resultados de las simulaciones en las gráficas 3.5.

En la gráfica 3.6 se muestra en detalle las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  en estado estacionario. Las diferencias entre ambos modelos es prácticamente despreciable. Mientras que en el voltaje del capacitor  $C_2$  se aprecia un error respecto al valor en estado estacionario. Estas diferencias pueden atribuirse a los diferentes métodos de integración usados. Psim utiliza integración trapezoidal, mientras que en Matlab se uso el método de backwards Euler de paso fijo con la finalidad de resolver el problema lineal complementario. A continuación se muestra el error relativo del voltaje de salida del convertidor  $v_R$  entre modelo complementario y los datos obtenidos mediante simulación usando Psim, para diferentes valores de la carga  $R$  y del ciclo de trabajo  $d$ . Del gráfico 3.7 se evidencia que el modelo usando el formalismo complementario es capaz de reproducir la dinámica del convertidor para cualquier valor del ciclo de trabajo  $0 < d < 0.9$  y cualquier valor de la carga  $R$ , con un error menor del 7%. Además, con el modelo complementario no se requiere de conocimiento previo de cuales topologías están presente en un ciclo de conmutación.

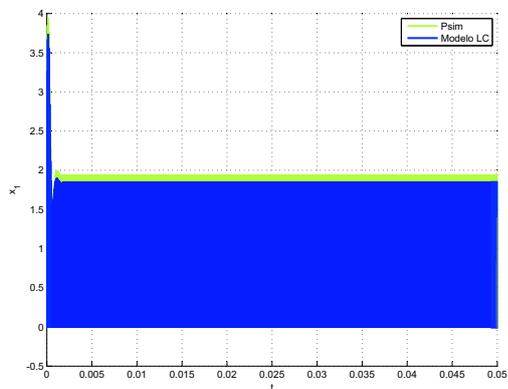
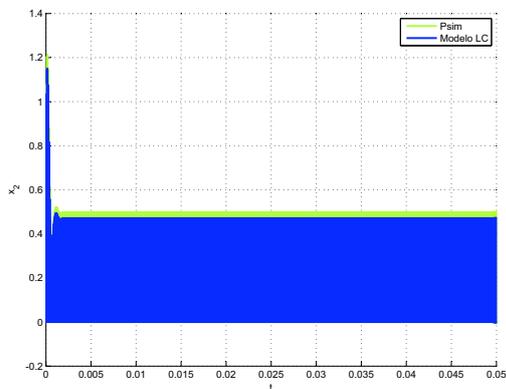
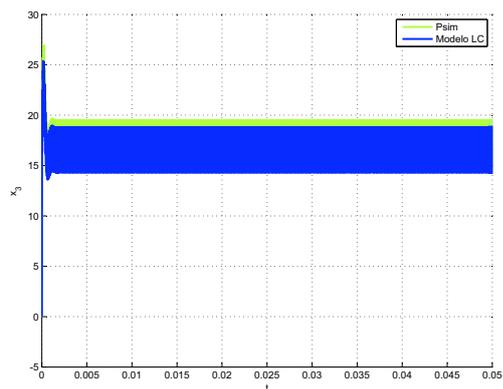
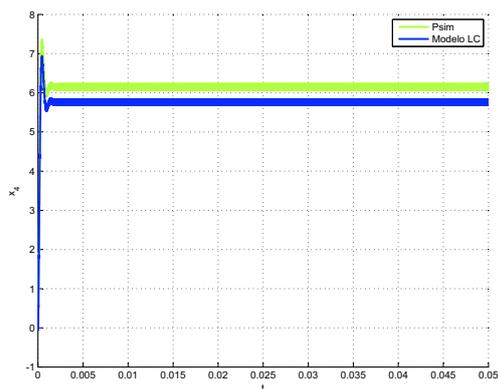
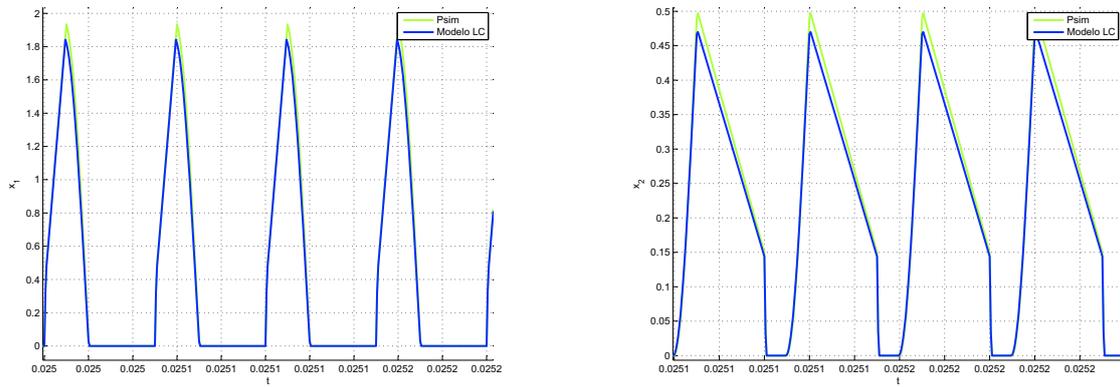
(a) Corriente en el inductor  $L_1$ (b) Corriente en el inductor  $L_2$ (c) Voltaje en el capacitor  $C_1$ (d) Voltaje en el capacitor  $C_2$ 

Figura 3.5: Simulación en lazo abierto del modelo complementario y Psim del convertidor Boost acoplado magnéticamente



(a) Zoom de la trayectoria de la corriente del inductor  $L_1$  (b) Zoom de la trayectoria de la corriente del inductor  $L_2$

Figura 3.6: Zoom de las trayectorias de las corrientes  $i_{L_1}$  y  $i_{L_2}$  del modelo complementario y Psim del convertidor Boost acoplado magnéticamente

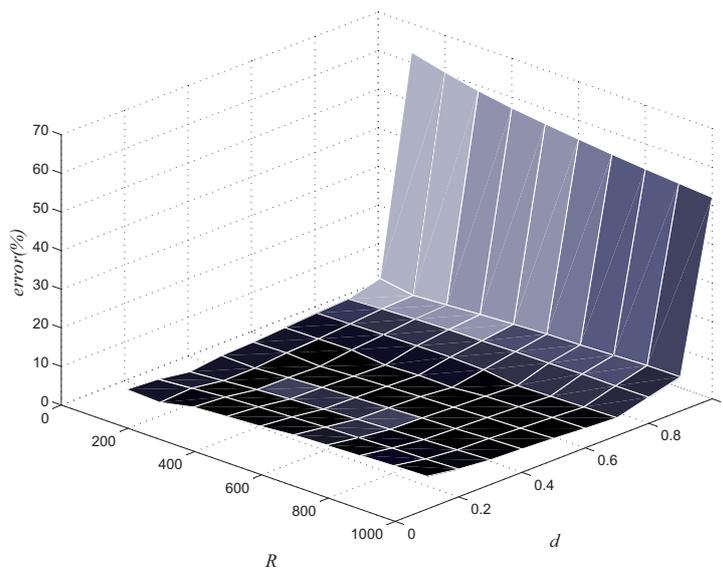


Figura 3.7: Error relativo del voltaje de salida  $v_R$  del convertidor entre el modelo complementario y Psim

### 3.4. Conclusiones

En este capítulo, se han usado dos enfoques diferentes para obtener la dinámica del convertidor Boost acoplado magnéticamente. En particular, el modelo promedio no resulta un buen candidato para describir la dinámica en convertidores de orden superior y con un número elevado de dispositivos conmutadores (diodos e interruptores). Además, otro de los puntos cruciales, es que se requieren modelos promedios diferentes para describir la dinámica en CCM y DCM. Adicionalmente, es necesario un conocimiento a priori de los modos o topologías que aparecen en un ciclo de conmutación. El análisis de cada modo permite al diseñador entender la complejidad real del funcionamiento del convertidor. Por otra parte la exactitud del modelo se ve comprometida cuando el convertidor trabaja en DCM y para frecuencias de conmutación elevadas. Sin embargo, este modelo resulta útil en análisis de estabilidad, controlabilidad, observabilidad y diseño de controladores.

El segundo enfoque, basado en sistemas complementarios toma en cuenta la dinámica híbrida del convertidor. El modelo obtenido con este formalismo es capaz de describir la dinámica de convertidor tanto en CCM como en DCM. Además, no se requiere de un conocimiento a priori de todas las transiciones topológicas factibles en un periodo de conmutación. A diferencia del modelo promedio, el modelo complementario logra copiar la dinámica del convertidor tanto en estado transitorio como en estado estacionario. No obstante, la mayor dificultad tiene que ver con uno de los aspectos fundamentales en la teoría de control, pues el cálculo de los puntos de equilibrio no resulta una tarea trivial. Esta misma observación se puede hacer para el análisis de observabilidad, diseño de controladores, etc.

### Referencias

- [1] S. Sanders, J. Noworolski, X. Liu, and G. C. Verghese, “Generalized averaging method for power conversion circuits,” in *Power Electronics Specialists Conference, 1990. PESC '90 Record., 21st Annual IEEE*, 1990, pp. 333–340. 37, 38
- [2] S. Cuk and R. D. Middlebrook, “A general unified approach to modeling switching converters power stages,” in *IEEE PESC Conference Proceedings*, pp. 18–34, 1976. 37
- [3] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3rd ed. Prentice Hall, 2001. 37
- [4] J. A. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, 2nd ed., ser. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2007, vol. 59. 37, 38
- [5] P. Krein, J. Bentsman, R. M. Bass, and B. Lesieutre, “On the use of averaging for the analysis of power electronic systems,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 5, no. 2, pp. 182–190, 1990. 37, 38

- [6] A. Davoudi, J. Jatskevich, and T. De Rybel, "Numerical state-space average-value modeling of pwm dc-dc converters operating in dcm and ccm," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 21, no. 4, pp. 1003–1012, 2006. 37
- [7] F. Nejabatkhah, S. Danyali, S. Hosseini, M. Sabahi, and S. Niapour, "Modeling and control of a new three-input dc-dc boost converter for hybrid pv/fc/battery power system," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 27, no. 5, pp. 2309–2324, 2012. 37
- [8] N. Femia, G. Spagnuolo, and V. Tucci, "State-space models and order reduction for dc-dc switching converters in discontinuous modes," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 6, pp. 640–650, 1995. 37
- [9] A. Hren and P. Slibar, "Full order dynamic model of sepic converter," in *Industrial Electronics, 2005. ISIE 2005. Proceedings of the IEEE International Symposium on*, vol. 2, 2005, pp. 553–558 vol. 2. 37
- [10] L. Iannelli and F. Vasca, "Cyclic steady state behavior of switched electronic systems," *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, vol. 50, pp. 6549–6554, 2009. 37
- [11] V. Vorperian, "Simplified analysis of pwm converters using model of pwm switch. ii. discontinuous conduction mode," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 26, no. 3, pp. 497–505, 1990. 37
- [12] J. Sun, D. Mitchell, M. Greuel, P. Krein, and R. M. Bass, "Averaged modeling of pwm converters operating in discontinuous conduction mode," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 4, pp. 482–492, 2001. 37
- [13] P. R. K. Chetty, "Current Injected Equivalent Circuit Approach to Modeling Switching DC-DC Converters," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. AES-17, pp. 802–808, 1981. 38
- [14] —, "Current Injected Equivalent Circuit Approach to Modeling of Switching DC-DC Converters in Discontinuous Inductor Conduction Mode," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 230–234, 1982. 38
- [15] —, "Modelling and Analysis of Cuk Converter Using Current Injected Equivalent Circuit Approach," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 30, pp. 56–59, 1983. 38
- [16] Y. S. Lee, "A Systematic and Unified Approach to Modeling Switches in Switch-Mode Power Supplies," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 32, pp. 445–448, 1985. 38
- [17] Y. S. Lee, C. K. Tse, W. C. So, and S. W. Ng, "Modelling the half-bridge series resonant converter using the MISSCO approach," *Power Electronics Specialists Conference. PESC '95 Record*, vol. 1, pp. 629–635, Jun 1995. 38

- [18] C. K. Tse, Y. S. Lee, and W. C. So, “An approach to modelling DC-DC converter circuits using graph theoretic concepts,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 21, pp. 371–384, 1993. 38
- [19] K. T. Chau, Y. S. Lee, and A. Ioinovici, “Computer-aided modeling of quasi-resonant converters in the presence of parasitic losses by using the MISSCO concept,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 38, pp. 454–461, 1991. 38, 39
- [20] A. Umarikar and L. Umanand, “Modelling of switching systems in bond graphs using the concept of switched power junctions,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 342, pp. 131–147, 2005. 38
- [21] A. Bruno, H. Hichem, L. Chung-Cheh, and M. Heme, “Power Converter Average Model Computation using the Bond Graph and Petri Net Techniques,” *Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC '95 Record., 26th Annual IEEE*, vol. 2, pp. 830 – 836, 1995. 38
- [22] M. Delgado and H. Sira-Ramirez, “Modeling and simulation of switch regulated dc-to-dc power converters of the boost type,” *Devices, Circuits and Systems, 1995. Proceedings of the 1995 First IEEE International Caracas Conference on*, pp. 84 – 88, 1995. 38
- [23] G. C. Verghese, C. A. Bruzos, and K. N. Mahabir, “Averaged and sampled-data models for current mode control: a re-examination,” *Power Electronics Specialists Conference, 1989. PESC '89 Record., 20th Annual IEEE*, vol. 1, pp. 484–491, 1989. 39
- [24] J. S. Rajasekaran, V. and B. S. Heck, “Bilinear discrete-time modeling for enhanced stability prediction and digital control design,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 18, pp. 381–389, 2003. 39
- [25] M. Meola, S. Carrato, G. Bernacchia, and E. Bodano, “Discrete time large-signal model of dc-dc converters for system level simulation of digitally controlled SMPS,” *Research in Microelectronics and Electronics, 2009. PRIME 2009. Ph.D.*, pp. 60–63, 2009. 39
- [26] M. Hejri and H. Mokhtari, “Global hybrid modeling and control of a buck converter: A novel concept,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 37, pp. 968–986, 2008. 39
- [27] J. V. Maldonado, “Eines interactives per l’aprenentatge de la dinàmica i el control dels convertidors de potència,” Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Gener 2009. 2, 39
- [28] C. Sreekumar and V. Agarwal, “Hybrid control approach for the output voltage regulation in buck type DC-DC converter,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 1, pp. 897–906, 2007. 39
- [29] J. Lunze and F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Handbook of Hybrid Systems Control*. Dekker, 2009. 39, 40

- [30] E. Sontag, “Nonlinear regulation: The piecewise linear approach,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 26, pp. 346–358, 1981. 39
- [31] M. Bernardo, C. Budd, A. Champneys, and P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth Dynamical Systems*, 1st ed. Springer, 2008. 39
- [32] F. A. Cuzzola and M. Morari, “A generalized approach for analysis and control of discrete-time piecewise affine and hybrid systems,” in *Hybrid Systems: Computation and Control*, ser. Lecture Notes in Computer Science, M. Benedetto and A. Sangiovanni-Vincentelli, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2001, vol. 2034, pp. 189–203. 39
- [33] W. P. M. H. Heemels, M. K. Camlibel, and J. M. Schumacher, “On the dynamic analysis of piecewise-linear networks,” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 49, pp. 315–327, 2002. 39
- [34] C. Vlad, P. Rodriguez-Ayerbe, E. Godoy, and P. Lefranc, “A hybrid model for buck converter operating in continuous and discontinuous conduction modes,” in *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, nov. 2010, pp. 138–143. 39
- [35] S. Almer, H. Fujioka, T. Ulf, Joensson, C. Kao, D. Patino, P. Riedinger, T. Geyer, A. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, A. Wernrud, and A. Rantzer, “Hybrid Control Techniques for Switched-Mode DC-DC Converters Part II: The Step-Up Topology,” July 2007. 39
- [36] G. Papafotiou, T. Geyer, and M. Morari, “Hybrid modelling and optimal control of switch-mode dc-dc converters,” *Computers in Power Electronics, 2004. Proceedings. 2004 IEEE Workshop on*, vol. 35, pp. 148–155, 2004. 39
- [37] N. Asano, T. Zanma, and M. Ishida, “Optimal control of DC-DC converter using mixed logical dynamical system theory,” *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on*, pp. 110–115, 2006. 39
- [38] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari, “Optimal Controllers for Hybrid Systems: Stability and Piecewise Linear Explicit Form,” *In Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, December 2000. 39
- [39] A. G. Beccuti, T. Geyer, and M. Morari, “A Hybrid System Approach to Power Systems Voltage Control,” *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pp. 6774–6779, 2005. 39
- [40] “The complementary-slackness class of hybrid systems,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 9, no. 3, 1996. 40
- [41] M. K. Camlibel, W. P. M. H. Heemels, A. J. van der Schaft, and J. M. Schumacher, “Switched networks and complementarity,” *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 50, pp. 1036–1046, 2003. 40

- [42] W. P. M. H. Heemels, J. M. Schumacher, and S. Weiland, “Dissipative systems and complementarity conditions,” *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, vol. 4, pp. 4127–4132, 1998. 40
- [43] K. Camlibel, L. Iannelli, and F. Vasca, “Modelling switching power converters as complementarity systems,” *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, vol. 3, pp. 2328–2333, 2004. 40
- [44] C. Batlle, E. Fossas, I. Merillas, and A. Miralles, “Generalized Discontinuous Conduction Modes in the Complementarity Formalism,” *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 447–451, 2005. 40, 47
- [45] F. Vasca, L. Iannelli, M. K. Camlibel, and R. Frasca, “A New Perspective for Modeling Power Electronics Converters: Complementarity Framework,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 24, pp. 456–468, 2009. 40
- [46] C. Pedicini, F. Vasca, L. Iannelli, and U. Jonsson, “An overview on averaging for pulse-modulated switched systems,” in *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, dec. 2011, pp. 1860 –1865. 40
- [47] A. Van Der Schaft and J. Schumacher, “Complementarity modeling of hybrid systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 4, pp. 483–490, Apr 1998. 51
- [48] W. Heemels, J. Schumacher, and S. Weiland, “The rational complementarity problem,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 294, no. 1–3, pp. 93 – 135, 1999. 47, 51

# Diseño del control

---

En este capítulo se propone una ley de control en cascada para el convertidor Boost acoplado magnéticamente. La ley de control del lazo interno se basa en la teoría de control en modo de deslizamiento, cuyo objetivo es regular la dinámica rápida del convertidor (corriente de los inductores). Mientras que para el lazo externo se diseña un control PI, el cual regulará la dinámica lenta del convertidor (voltaje en los capacitores). El desempeño y efectividad de la ley de control es validada mediante simulaciones usando el modelo lineal complementario del convertidor ante diferentes escenarios como perturbaciones en la carga, voltaje de entrada y cambios en el valor de referencia.

## 4.1. Introducción

El principal objetivo de control en convertidores CD-CD es regular la componente dc del voltaje de salida  $v_R$  en un valor de referencia  $V_{ref}$  dado. Este control debe llevarse a cabo en presencia de restricciones sobre la variable manipulada (ciclo de trabajo), el cual está limitado por  $d \in [0, 1]$  y además debe mantenerse en presencia de perturbaciones en el voltaje de salida o en la carga.

Diferentes técnicas de control han sido implementadas para conseguir tales objetivos, predominando entre ellas controladores de tipo PI, que son sintonizados utilizando modelos promedios linealizados alrededor de un punto específico de operación sin tener en cuenta todas las restricciones presente en los convertidores como límites de la tensión de alimentación, en modo discontinuo la corriente en el inductor debe ser no negativa, etc. La mayoría de los enfoques utilizados en el diseño de controladores hace uso de modelos simplificados que no capturan la dinámica híbrida de los convertidores DC-DC, y por otra parte ninguna permite incorporar restricciones en el proceso de diseño [1]. Como consecuencia, el controlador diseñado usualmente es válido en una vecindad del punto de operación, por consiguiente el desempeño óptimo del control durante el transitorio resulta ser deplorable [2]. Además el desempeño y estabilidad de tales controladores solo están garantizados para un modo de operación del convertidor, aun cuando el convertidor puede trabajar tanto en modo continuo (CCM) y discontinuo (DCM) en todo el rango de operación del convertidor.

Ante tales limitaciones de las técnicas de control clásicas, aparecen en la literatura algunas técnicas de control no lineal aplicadas a convertidores de potencia. Algunas de estas estrategias se han aplicado

específicamente a convertidores CD-CD. Por ejemplo control predictivo basado en modelo (MPC) [3], control basado en pasividad [4, 5], regulador lineal óptimo cuadrático (LQR) [6], control en modo de deslizamiento (SMC) [7, 8], control  $H_\infty$  [9] entre otras.

El control en modo de deslizamiento resulta particularmente idóneo para el control de convertidores debido a la naturaleza discontinua de los elementos con características no lineales (interruptores) presente en los convertidores [10]. El desarrollo de las bases teóricas de esta estrategia de control aparecen en la antigua Unión Soviética a finales de los años cincuenta. Sin embargo, las principales aportaciones de la teoría de SMC fueron difundidas a mediados de los años ochenta en los trabajos de V. Utkin [11]. El análisis matemático propuesto por V. Utkin para el diseño de SMC se resumen básicamente en dos pasos: el primero consiste en definir la superficie de deslizamiento  $s(x) = 0$  de manera que se satisfaga con los objetivos de control y el segundo paso consiste en encontrar la ley de control discontinua que obligue al sistema a deslizarse sobre la superficie. El lector interesado en profundizar en la teoría de SMC refiérase a [12, 13, 14] y sus referencias.

La aplicación de esta estrategia de control con bastante éxito abarca una gran variedad de problemas en robótica, química, mecánica, sistemas eléctricos, procesos de control entre otros. Existen importantes razones para el uso de esta estrategia de control, entre las que se destacan principalmente, la insensibilidad o robustez inherente frente a la variación de los parámetros, dinámica no modelada y perturbaciones, lo cual reduce la necesidad de tener modelos mucho más exactos. Además se obtiene un modelo de orden reducido, lo cual permite al diseñador simplificar el proceso de diseño. Por último, su implementación resulta ser bastante sencilla. No obstante, existen algunas desventajas como el diseño de la superficie de deslizamiento no es un tarea fácil, y por otro lado, las oscilaciones de frecuencia y amplitud finita debido a la rápida conmutación del control. Este fenómeno se denomina comúnmente como *chattering* en la teoría de control. La aparición del chattering puede llevar a la excitación de la dinámica sin modelar [13]. Es por ello que sin una prevención adecuada del chattering puede resultar el mayor inconveniente en la implementación de esta estrategia de control.

Debido a las propiedades antes mencionadas, se propone un esquema de control basado en la teoría de SMC. En particular, la idea general es usar el principio de un esquema de control en cascada. En el lazo interno se propone una superficie deslizante para regular la dinámica rápida del convertidor, es decir, la dinámica de las corrientes en los inductores. Mientras que para el lazo externo se propone un regulador del tipo PI. Este fijará la referencia del lazo interno y al mismo tiempo regulará la tensión de salida  $v_R$  del convertidor. La figura 4.1 muestra el diagrama de bloques del control aplicado al convertidor. Este esquema de control es aplicado al modelo lineal complementario del convertidor obtenido en el capítulo anterior.

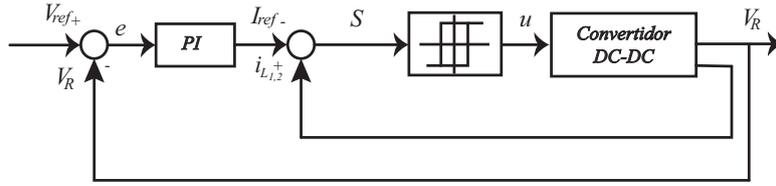


Figura 4.1: Esquema de control del convertidor Boost acoplado magnéticamente

## 4.2. Control de corriente

La ley de control del lazo interno se deriva mediante la aplicación de la teoría de control en modo de deslizamiento [13]. Se asume que en estado estacionario las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  tienen un valor promedio, por lo tanto, el propósito del lazo interno es controlar la suma de los valores promedio de las variables de estados  $x_1$  y  $x_2$  a un valor de referencia  $I_{ref}$  constante. Así, la superficie de deslizamiento está definida por una combinación lineal de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  dada por la siguiente expresión

$$s(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - I_{ref} \quad (4.1)$$

con

$$\alpha_1 = L_1 \alpha_0, \quad \alpha_2 = M \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{1}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1}} \quad (4.2)$$

donde  $I_{ref}$  es definido por el lazo de control externo PI. El principio de control en modo de deslizamiento requiere que todas las trayectorias del vector de estados cerca de la superficie se dirijan hacia ésta. Lo cual se consigue en general, al imponer una ley de control discontinua que obligue al sistema a permanecer sobre la superficie  $s(x) = 0$  en un tiempo finito. Además, lograr que las trayectorias del vector de estados *deslice* sobre  $s(x) = 0$  requiere una frecuencia de conmutación infinita sobre la ley de control discontinua [14]. No obstante, en un sistema práctico la frecuencia de conmutación del interruptor está limitada. Por lo tanto, una función de histéresis se añade a la superficie deslizante con el objetivo de mantener ésta cerca de cero. Como consecuencia, las conmutaciones en el interruptor ocurren en  $s(x) = \pm \Delta$ . Donde  $\Delta$  define el ancho de banda de la función de histéresis. El ajuste de  $\Delta$  permite fijar la frecuencia de conmutación al valor deseado. Así, la ley de control discontinua sobre el interruptor está definida como

$$u = \begin{cases} 0 & \text{si } s(x) > \Delta \\ 1 & \text{si } s(x) < -\Delta \end{cases} \quad (4.3)$$

De modo que cuando la dinámica del convertidor se encuentra por debajo de la región de deslizamiento ( $s(x) < -\Delta$ ) la dinámica está descrita por la ecuación (3,17) y cuando la dinámica del convertidor se encuentra por encima de la superficie de deslizamiento ( $s(x) > \Delta$ ), ésta se encuentra descrita por la ecuación (3,20). Esta condición garantiza la existencia de modo de deslizamiento entre ambas dinámicas

sobre la superficie  $s(x) = 0$ . En la literatura dicha condición es conocida como *ley de alcance*. Si las trayectorias del sistema alcanzan las proximidades de la superficie de deslizamiento en la que existe un modo de deslizamiento, el movimiento ya no se alejará de la región excepto posiblemente en las fronteras de la región. Esta condición se puede expresar matemáticamente como

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s}(x) < 0 \text{ y } \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s}(x) > 0 \quad (4.4)$$

Estas desigualdades equivalen a que, en un entorno de  $s(x)$ , la función  $s(x)$  evaluada sobre las trayectorias solución del sistema definido por los campos vectoriales en (3.17) y (3.20) sea creciente para  $s(x) < 0$  y decreciente para  $s(x) > 0$ . Así, durante el intervalo de tiempo en el que el interruptor está cerrado, esto es en el intervalo  $[0, dT]$ , se tiene

$$\dot{s} = m_1 = \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1}} \quad (4.5)$$

de la ecuación anterior se evidencia que la función  $s(x)$  evaluada sobre las trayectorias solución del sistema es creciente. Mientras que cuando el interruptor está abierto, esto es en el intervalo  $[dT, T]$ , se tiene

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1 V_{in}^2}} (V_{in} + \hat{\omega}_1 - x_3) \quad (4.6)$$

Nótese que la derivada de la superficie cuando el interruptor está abierto, depende de la variable complementaria  $\hat{\omega}_1$ , por lo que la función de la superficie experimentará dos variaciones durante este intervalo de tiempo. De modo que es necesario obtener el valor de la variable complementaria  $\hat{\omega}_1$  para verificar que la función  $s(x)$  evaluada sobre las trayectorias solución del sistema sea decreciente. Así, del par de variables complementarias definidas en la ecuación (3.21) se tiene

$$\dot{s} \equiv m_2 = \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1 V_{in}^2}} (V_{in} - x_3) \quad \text{si } \hat{\omega}_1 = 0 \quad (4.7)$$

Dado que se trata de una estructura elevadora con  $x_3 > V_{in}$ , la variación de la superficie de deslizamiento es decreciente durante el subintervalo de tiempo en el que  $\hat{\omega}_1 = 0$ . Además, durante el intervalo de tiempo en el que  $\hat{\omega}_1 \neq 0$ , la variación de la superficie de deslizamiento también debe ser decreciente para garantizar modo de deslizamiento. De modo que si se satisface tal restricción, la corriente en el inductor  $L_1$  debe ser igual a cero. Por consiguiente, sustituyendo  $\dot{x}_1 = 0$  en la derivada de la superficie  $\dot{s} = \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2$  y  $\dot{x}_2$  por la segunda componente de la ecuación (3.20) e igualando esta última ecuación con la expresión en (4.6), se tiene

$$\hat{\omega}_1 = -\frac{V_{in} L_2 + M x_4 - L_2 x_3}{L_2} \quad (4.8)$$

Debido a la condición de no negatividad sobre  $\hat{\omega}_1 > 0$  y asumiendo  $x_4 > 0$ , de la ecuación anterior se deduce la siguiente condición de diseño sobre uno de los parámetros del convertidor

$$M < \frac{L_2(x_3 - V_{in})}{x_4} \quad (4.9)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión de la variable complementaria  $\hat{\omega}_1$  en la ecuación (4.6) se tiene la variación de la superficie de deslizamiento, la cuál será denotada como  $m_3$ .

$$\dot{s} \equiv m_3 = -\frac{x_4 M}{L_2 V_{in}} \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1}} \quad \text{si } \hat{\omega}_1 \neq 0 \quad (4.10)$$

Ya que la variable de estado  $x_4 > 0$ , se tiene que la función  $s(x)$  evaluada sobre las trayectorias solución del sistema es decreciente. De modo que la ley de alcanzabilidad se satisface. Así pues, la dinámica de la superficie de deslizamiento se muestra en la figura 4.2.

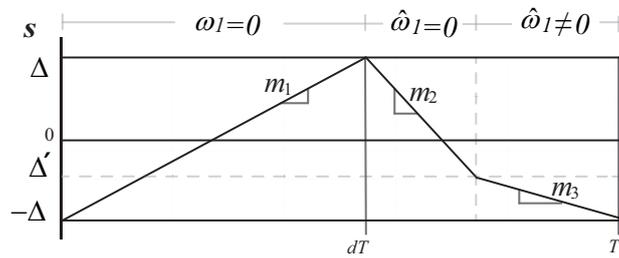


Figura 4.2: Trayectoria de la superficie de deslizamiento  $s(x)$

#### 4.2.1. Dinámica promedio

La dinámica que tiene lugar en  $s(x) = 0$ , en el supuesto de tener deslizamiento, se define como la *dinámica de deslizamiento ideal* o dinámica promediada del sistema. Existen dos enfoques en la literatura, para determinar la dinámica que tiene lugar cuando se tiene modo de deslizamiento. El enfoque general de Filippov [15] y una particularización para sistemas afines en la acción de control introducida por V. Utkin, conocida como el método del control equivalente [11]. En el enfoque de Filippov la dinámica en  $s(x) = 0$  se define mediante la intersección de la envolvente convexa de los campos vectoriales definidos en las dos regiones separadas por la superficie de conmutación. El control equivalente se puede interpretar como la ley de control ideal que provoca que las trayectorias del vector de estados permanezca sobre la superficie  $s(x) = 0$ , el cual es un valor continuo que representa el valor promedio que toma la ley de control discontinua (4.3), y corresponde al valor del ciclo de trabajo  $d$  en un esquema PWM [8]. Es importante resaltar que ambos enfoques se basan en sistemas de Filippov. Lo que significa que el campo vectorial correspondiente a cada subregión disjunta del espacio de estado

está definido por una función suave [16].

En este contexto, el análisis de la dinámica ideal de deslizamiento utilizando el modelo lineal complementario definido por los campos vectoriales en (3.17) y (3.20) y sus respectivas condiciones de complementariedad, no se puede abordar a partir de la teoría clásica de control en modo de deslizamiento [8, 13, 14]. Dicho de otro modo, dichos campos vectoriales son lineales complementarios, es decir, funciones no suaves. Además no están acotados debido a las características ideales de los diodos. Más aún, la primera componente del par de variables complementarias definidas en (3.18) y (3.21) cambia con respecto a la posición del interruptor, esto hace que la dinámica se considere como un *sistema híbrido complementario*. Desafortunadamente, hasta el presente en la literatura no hay una formulación matemática precisa del control equivalente y su correspondiente dinámica ideal de deslizamiento para sistemas lineales complementarios.

Basado en los hechos anteriores, se propone obtener la dinámica promedio equivalente para el convertidor Boost acoplado magnéticamente a partir de la teoría de promediado para sistemas conmutados, cuyos resultados han sido aplicados a una clase de sistemas dinámicos híbridos [17, 18, 19]. En [19] la dinámica de un sistema conmutado está dado por la ecuación (3.1). Sin embargo, con el objetivo de poner de manifiesto la dependencia de la función de conmutación  $q_i(t)$  con respecto al estado  $x(t)$ , y de la entrada  $u(t)$ , la dinámica del sistema lineal conmutado está dada por [19]

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m q_i(x(t), u(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4.11)$$

En particular, se asume que la función de conmutación  $q_i(t)$  es periódica con período  $T$ . Un ejemplo representativo, en el cual la función de conmutación depende de  $x(t)$  lo constituye un sistema de control de tipo PWM [18], pues las transiciones entre modos causada por los diodos, se consideran eventos de estados. De modo que la dinámica promedio de (4.11) está dada por

$$\dot{\bar{x}} = \sum_{i=1}^m d_i(\bar{x}(t), u(t)) (A_i \bar{x}(t) + B_i u(t)) \quad (4.12)$$

donde la duración del modo  $i$  o ciclo de trabajo del modo activo está dada por

$$d_i(x, u) = \frac{1}{T} \int_0^T q_i(s, x, u) ds \quad (4.13)$$

para  $i = 1, \dots, m$  y para cualquier  $x$  y  $u$  [19].

Por otro lado cabe destacar, que se desea obtener la dinámica promedio de la tercera y cuarta componente de los campos vectoriales definidos en (3.17) y (3.20), pues el objetivo de control es regular la componente dc del voltaje de salida  $v_R = x_3 + x_4$ . Así, para facilitar su análisis se repiten a continuación

- S=On ( $v_s = 0$ )

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= \frac{1}{C_1}\omega_1 - \frac{x_3 + x_4}{RC_1} \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{C_2}x_2 - \frac{x_3 + x_4}{RC_2}\end{aligned}\quad (4.14)$$

sujeto a las restricciones de complementariedad

$$\begin{aligned}0 &\leq z_1 \perp \omega_1 \geq 0 \\ 0 &\leq z_2 \perp \omega_2 \geq 0 \\ \omega_1 &= i_{D_1} \rightarrow z_1 = v_{D_1} = x_3 \\ \omega_2 &= -v_{D_2} \rightarrow z_2 = i_{D_2} = x_2\end{aligned}\quad (4.15)$$

- S=Off ( $i_s = 0$ )

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= \frac{1}{C_1}x_1 - \frac{x_3 + x_4}{RC_1} \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{C_2}x_2 - \frac{x_3 + x_4}{RC_2}\end{aligned}\quad (4.16)$$

sujeto a las restricciones de complementariedad

$$\begin{aligned}0 &\leq \hat{z}_1 \perp \hat{\omega}_1 \geq 0 \\ 0 &\leq \hat{z}_2 \perp \hat{\omega}_2 \geq 0 \\ \hat{\omega}_1 &= -v_{D_1} \rightarrow \hat{z}_1 = i_{D_1} = x_1 \\ \hat{\omega}_2 &= -v_{D_2} \rightarrow \hat{z}_2 = i_{D_2} = x_2\end{aligned}\quad (4.17)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que la dinámica de la variable de estado  $x_4$  permanece invariante con respecto a la posición del interruptor. No obstante, la dinámica de la variable  $x_3$  dependerá de la corriente en el diodo  $D_1$  debido a la restricción en la ecuación (4.15). Sin embargo, durante la fracción de tiempo en el que el interruptor está cerrado (On) se satisface  $\omega_1 = i_{D_1} = 0$ , debido a que  $z_1 = -v_{D_1} = x_3 > 0$ , puesto que se trata de una estructura elevadora. Así usando (4.12), el modelo promedio de las variables de estados  $x_3$  y  $x_4$  está dado por

$$\dot{\bar{x}} = f_2 + (f_1 - f_2)d \quad (4.18)$$

Siendo  $f_1$  el campo vectorial definido en la ecuación (4.14) con  $x_2 = \bar{x}_2(x_3, x_4)$ ,  $f_2$  es el campo vectorial definido en la ecuación (4.16) con  $x_1 = \bar{x}_1(x_3, x_4)$  y  $d$  representa la fracción de tiempo en que el interruptor está cerrado o el valor promedio de la ley de control discontinua (4.3). Por tanto, es necesario encontrar los valores promedios de las corrientes en los inductores  $\bar{x}_3$  y  $\bar{x}_4$ . Cabe destacar que el análisis para obtener  $\bar{x}_3$  y  $\bar{x}_4$  se llevará a cabo solo para las trayectorias  $T_3$  y  $T_4$  definidas en el cuadro 2.1.

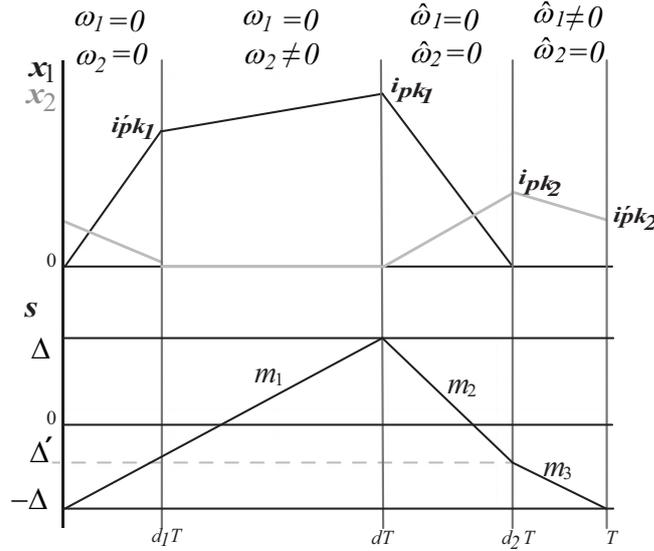


Figura 4.3: Formas de onda de las corrientes en los inductores en  $T_3$  y la superficie de deslizamiento en un periodo de conmutación

### Trayectoria $T_3$

Las trayectorias de las corrientes en los inductores y la superficie de deslizamiento correspondiente a  $T_3$  se muestran en la figura 4.3. Se aprecia que el ciclo de trabajo  $d$  depende de la superficie de deslizamiento  $s(x)$  y de sus derivadas.

- $[0 - d_1T]$

La variación de la superficie de deslizamiento  $s(x)$  durante este intervalo de tiempo está dada en la ecuación (4.5). Por lo tanto, de la gráfica de la superficie en la figura 4.3 se tiene que el valor del ciclo de trabajo  $d$  está dado por

$$d = \frac{2\Delta}{T\sqrt{\frac{L_1L_2-M^2}{C_1}}} \quad (4.19)$$

Además, las variaciones de las corrientes en el inductor  $L_1$  y  $L_2$  están dadas por la primera y la segunda componente de la ecuación (3.17), donde las variables complementarias del vector  $\omega \in \mathbb{R}^2$  son cero.

$$\begin{aligned} m_{11} &= a_2x_4 + a_1V_{in} \\ m_{21} &= -a_3x_4 - a_2V_{in} \end{aligned} \quad (4.20)$$

El valor pico de la corriente en el inductor  $L_1$  al final del intervalo de tiempo, es igual a la

variación de la corriente  $m_{11}$  multiplicada por la longitud del intervalo de tiempo  $d_1T$

$$i'_{pk_1} = m_{11}d_1T \quad (4.21)$$

De manera análoga, el valor pico de la corriente en el inductor  $L_2$  está dado por

$$i'_{pk_2} = -m_{21}d_1T \quad (4.22)$$

▪  $[d_1T - dT]$

Nótese que la variación de la superficie de deslizamiento  $s(x)$  es igual al intervalo anterior. Mientras que las variaciones de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  experimentan un cambio, debido a que la variable complementaria  $\omega_2 \neq 0$ . Además, dado que la corriente en el inductor  $L_2$  es constante, su derivada es nula durante todo el intervalo de tiempo. De ahí, que la variación de la corriente en el inductor  $L_1$  se obtiene al sustituir  $\dot{x}_2 = 0$  en la derivada de la superficie de deslizamiento  $\dot{s} = \alpha_1\dot{x}_1 + \alpha_2\dot{x}_2$ . Igualando esta última ecuación a la expresión obtenida en (4.5) y resolviendo para  $\dot{x}_1 = m_{12}$  se tiene

$$m_{12} = \frac{V_{in}}{L_1} \quad (4.23)$$

Además, el valor pico de la corriente en el inductor  $L_1$  al final del subintervalo de tiempo está dado por

$$i_{pk_1} = m_{12}(d - d_1)T + i'_{pk_1} \quad (4.24)$$

▪  $[dT - d_2T]$

A partir de este subintervalo el interruptor permanece cerrado. Como resultado, se produce un cambio en la variación de la superficie de deslizamiento  $s(x)$ , la cual está definida en la ecuación (4.7). Por otro lado, la variación de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  está dada por la primera y la segunda componente de la ecuación (3.20) respectivamente

$$\begin{aligned} m_{13} &= -a_1x_3 + a_2x_4 + a_1V_{in} \\ m_{22} &= a_2x_3 - a_3x_4 - a_2V_{in} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Los valores pico de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  durante este subintervalo de tiempo están dados por

$$\begin{aligned} i_{pk_1} &= -m_{13}(d_2 - d)T \\ i_{pk_2} &= m_{23}(d_2 - d)T \end{aligned} \quad (4.26)$$

▪  $[d_2T - T]$

Debido al cambio que se produce en la variable complementaria al principio del subintervalo  $\hat{\omega}_1 \neq 0$ , la derivada de la superficie de deslizamiento experimenta un cambio, cuyo valor está dada

por la ecuación (4.10). Cabe añadir, que el valor de la pendiente de la superficie de deslizamiento debe satisfacer también la siguiente expresión

$$m_3 = -\frac{\Delta + \Delta'}{(1 - d_2)T} \quad (4.27)$$

Donde  $\Delta'$  corresponde al valor que toma la superficie de deslizamiento al inicio del subintervalo. Así, haciendo  $x_1 = 0$  y  $x_2 = i_{pk_2}$  en la función de  $s(x)$ , se tiene  $\Delta' = \alpha_2 i_{pk_2} - I_{ref}$ .

Por otra parte, la corriente en el inductor  $L_1$  permanece constante durante todo el intervalo de tiempo, por lo tanto, su derivada es nula. Como consecuencia, la variación de la corriente en el inductor  $L_2$  se obtiene al sustituir  $\dot{x}_1 = 0$  en la derivada de la superficie de deslizamiento  $\dot{s} = \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2$ . Igualando esta última ecuación a la expresión obtenida en (4.10) y resolviendo para  $\dot{x}_2 = m_{23}$  se tiene

$$m_{23} = \frac{V_{in} + \hat{\omega}_1 - x_3}{M} \quad (4.28)$$

El valor que toma la variable complementaria  $\hat{\omega}_1$  durante este intervalo de tiempo, está definido en la ecuación (4.8). Así, el valor mínimo de la corriente en el inductor  $L_2$ , el cuál ocurre al final del periodo de conmutación está dado por

$$i'_{pk_2} = m_{23}(1 - d_2)T + i_{pk_2} \quad (4.29)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones (4.10) (4.21), (4.22), (4.24), (4.26), (4.27) y (4.29) se tiene

$$\begin{aligned} i_{pk_1} &= \frac{\mu_0(I_{ref} + \Delta)a_3}{L_1^2} \\ i'_{pk_1} &= \frac{\mu_0(I_{ref} - \Delta)L_2L_1a_2}{M^2(L_1x_4 + MV_{in})} \\ i_{pk_2} &= \frac{\mu_0(I_{ref} + \Delta)(x_4 + (V_{in} - x_3)M)a_3}{L_1^2(Mx_4 + L_2V_{in} - L_2x_3)} \\ i'_{pk_2} &= \frac{\mu_0(I_{ref} - \Delta)a_2}{M^2} \\ d &= \frac{2\Delta ML_1x_4}{\mu_1} \\ d_1 &= \frac{V_{in}L_1(I_{ref} - \Delta)(L_1L_2 - M^2)x_4}{(L_1x_4 + MV_{in})\mu_1} \\ d_2 &= \frac{(\mu_1 - 2L_2L_1\Delta x_3)Mx_4}{\mu_1(L_2x_3 - Mx_4 - V_{in}L_2)} \\ T &= \frac{\mu_1\mu_0a_2}{M^2L_1V_{in}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

con  $\mu_0 = \sqrt{C_1(L_2L_1 - M^2)}V_{in}$  y  $\mu_1 = (\Delta + I_{ref})M^2 - L_1L_2(I_{ref} - \Delta)V_{in} + 2M\Delta L_1x_4$ . Una vez obtenido los instantes de tiempo en el que las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  se hacen cero y sus valores picos, es posible calcular sus correspondientes valores promedios en estado estacionario. Este promedio, no es más que la integral de las formas de ondas de las corrientes en un periodo de conmutación. El resultado es

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt = \frac{i'_{pk1}d_1}{2} + \frac{(i'_{pk1} + i_{pk1})(d - d_1)}{2} + \frac{i_{pk1}(d_2 - d)}{2} \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt = \frac{i'_{pk2}d_1}{2} + \frac{i_{pk2}(d_2 - d)}{2} + \frac{(i'_{pk2} + i_{pk2})(1 - d_2)}{2}\end{aligned}\quad (4.31)$$

Así, el promedio de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ , es la suma de las áreas dadas por dos triángulos más un paralelepípedo. Por otra parte, del par de variables complementarias definidas en las ecuaciones (4.15) y (4.17) se deduce, que la corriente en el diodo  $D_1$  es idéntica a la corriente en el inductor  $L_1$  cuando el interruptor está abierto (Off), esto es,  $\hat{z}_1 = i_{D_1} = x_1$ , ya que en el periodo de conmutación en el que interruptor está cerrado (On), se satisface la siguiente relación  $\omega_1 = i_{D_1} = 0$ , debido a que  $z_1 = -v_{D_1} = x_3 > 0$ . Como consecuencia, su valor promedio corresponde al área del triángulo que tiene como altura  $i_{pk1}$  y base  $(d_2 - d)T$ .

$$\bar{i}_{D_1} = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt = \frac{i_{pk1}(d_2 - d)}{2}\quad (4.32)$$

No obstante, la corriente en el diodo  $D_2$  es igual a la corriente en el inductor  $L_2$  en todo el intervalo de tiempo. Debido a que  $z_2 = \hat{z}_2 = i_{D_2} = x_2$  es la misma variable complementaria en ambas dinámicas del convertidor, dadas en las ecuaciones (4.15) y (4.17). De modo que el valor promedio de la corriente en el diodo es

$$\bar{i}_{D_2} = \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt = \frac{i'_{pk2}d_1}{2} + \frac{i_{pk2}(d_2 - d)}{2} + \frac{(i_{pk2} + i'_{pk2})(d_2 - d)}{2}\quad (4.33)$$

Una vez obtenidos los valores promedios en las corrientes de los inductores y diodos, se puede obtener el modelo promedio de segundo orden para describir la dinámica de los voltajes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$ . Así sustituyendo  $x_1 = \bar{i}_{D_1}(x_3, x_4)$  y  $x_2 = \bar{x}_2(x_3, x_4)$  en (4.18) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_3 &= \frac{(\Delta + I_{ref})^2(M^2 - L_1L_2)V_{in}^2M\bar{x}_4}{2\mu_0L_1(M\bar{x}_4 + L_2(V_{in} - \bar{x}_3))(2M\Delta L_1\bar{x}_4 + V_{in}((\Delta + I_{ref})M^2 + (\Delta - I_{ref})L_1L_2))} - \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_4}{C_1R} \\ \dot{\bar{x}}_4 &= \frac{(\mu_2\bar{x}_4 + \mu_3)\bar{x}_3 + 2ML_1V_{in}^2(\Delta ML_1I_{ref}\bar{x}_4 + V_{in}\mu_4)\bar{x}_4 + \mu_5}{2C_2(L_1\bar{x}_4 + MV_{in})(M\bar{x}_4 + L_2(V_{in} - \bar{x}_3))(2M\Delta L_1\bar{x}_4 + V_{in}\mu_6)} - \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_4}{C_2R}\end{aligned}\quad (4.34)$$

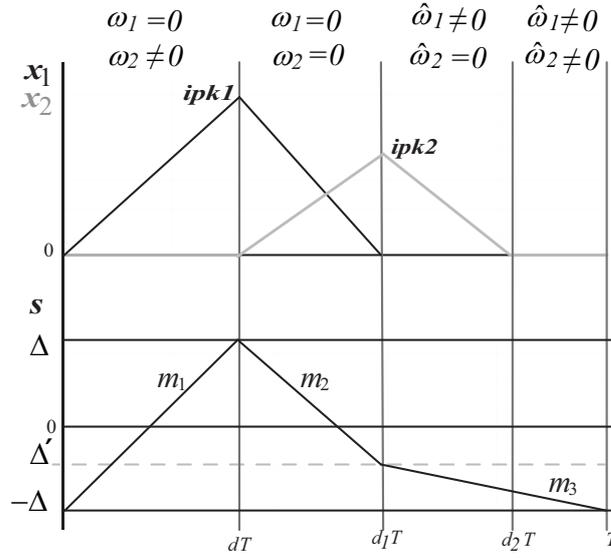


Figura 4.4: Formas de onda de las corrientes en los inductores en  $T_4$  y la superficie de deslizamiento en un periodo de conmutación

con

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= ML_1 V_{in}^2 ((\Delta^2 - I_{ref}^2)(L_2 - M^2) - 2\Delta I_{ref}(M^2 + L_2)) \\
 \mu_3 &= V_{in}^3 ((\Delta^2 + I_{ref}^2)(L_1^2 L_2^2 - M^4) - 2\Delta I_{ref}(L_1^2 L_2^2 + M^4)) \\
 \mu_4 &= (\Delta^2 + I_{ref}^2)(M^2 - L_1 L_2) + 2\Delta I_{ref}(M^2 + L_1 L_2) \\
 \mu_5 &= V_{in}^4 ((\Delta^2 + I_{ref}^2)(M^2 - L_1^2 L_2^2) + 2\Delta I_{ref}(M^4 + L_1^2 L_2^2)) \\
 \mu_6 &= M^2(\Delta + I_{ref}) + L_1 L_2(\Delta - I_{ref})
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Igualando a cero  $\dot{x}_3$  y  $\dot{x}_4$  se obtiene el punto de equilibrio del modelo promedio, pero debido a la complejidad de las expresiones se omiten sus expresiones.

### Trayectoria $T_4$

Un análisis similar al anterior se lleva a cabo para determinar la dinámica en  $T_4$ , en el supuesto de tener deslizamiento en  $s(x) = 0$ . La figura 4.4 muestra las trayectorias de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  y la trayectoria de la superficie de deslizamiento  $s(x)$ .

- $[0 - dT]$

La variación de la superficie de deslizamiento  $s(x)$  durante este intervalo de tiempo corresponde nuevamente a la ecuación (4.5). De ahí, que el valor del ciclo de trabajo está definido por la ecuación (4.19). Por otro lado, debido a que la corriente en el inductor  $L_2$  es constante, su derivada es nula durante todo el subintervalo de tiempo. De ahí, que la variación de la corriente en el inductor  $L_1$  se obtiene al sustituir  $\dot{x}_2 = 0$  en la derivada de la superficie de deslizamiento  $\dot{s} = \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2$ . Igualando esta última ecuación a la expresión obtenida en (4.5) y resolviendo para  $\dot{x}_1 = m_{11}$  se tiene

$$m_{11} = \frac{V_{in}}{L_1} \quad (4.36)$$

Además, el valor pico de la corriente en el inductor  $L_1$  al final del subintervalo de tiempo está dado por

$$i_{pk_1} = \frac{2V_{in}\Delta}{L_1 \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1}}} \quad (4.37)$$

- $[dT - d_1T]$

A partir de este subintervalo el interruptor permanece cerrado. De ahí, que la derivada de la superficie experimente un cambio, cuyo valor está dado por la ecuación (4.7). Mientras que las variaciones de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$  se obtiene de la primera y segunda componente de la ecuación (3.20) respectivamente, y dado que las variables complementarias del vector  $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^2$  son cero, se tiene

$$\begin{aligned} m_{12} &= -a_1 x_3 + a_2 x_4 + a_1 V_{in} \\ m_{21} &= a_2 x_3 - a_3 x_4 - a_2 V_{in} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Los valores máximos de la corriente en el inductores  $L_1$  y  $L_2$  durante este subintervalo son

$$\begin{aligned} i_{pk_1} &= -m_{12}(d_1 - d)T \\ i_{pk_2} &= -m_{21}(d_1 - d)T \end{aligned} \quad (4.39)$$

- $[d_1T - d_2T]$

Debido al cambio que se produce en la variable complementaria al principio del subintervalo  $\hat{\omega}_1 \neq 0$ , la variación de la superficie experimenta un cambio, cuyo valor está definido en la ecuación (4.10). Por otro lado, la corriente en el inductor  $L_1$  permanece igual a cero durante todo el subintervalo de tiempo, en consecuencia su derivada es nula. De ahí, que la variación de la corriente en el inductor  $L_2$  se obtiene al sustituir  $\dot{x}_1 = 0$  en la derivada de la superficie de

deslizamiento  $\dot{s} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  e igualando esta última ecuación a la expresión obtenida en (4.7) y resolviendo para  $\dot{x}_2 = m_{22}$  se tiene

$$m_{22} = \frac{V_{in} + \hat{\omega}_1 - x_3}{M} \quad (4.40)$$

El valor que toma la variable complementaria  $\hat{\omega}_1 \neq 0$  durante este intervalo de tiempo está definido en la ecuación (4.8). De modo, que el valor máximo de la corriente en el inductor  $L_2$  está dado por

$$i_{pk2} = -m_{22}(d_2 - d_1)T \quad (4.41)$$

Además, el valor que toma la superficie de deslizamiento al principio del subintervalo se obtiene al hacer  $x_1 = 0$  y  $x_2 = i_{pk2}$ . Así  $\Delta' = \alpha_2 i_{pk2} - I_{ref}$ .

- $[d_2 T - T]$

Nótese que la variación de la superficie de deslizamiento durante este subintervalo de tiempo es idéntica al intervalo anterior. Por otro lado, el valor mínimo que toma la superficie de deslizamiento ocurre al final del periodo de conmutación, el cual se obtiene de la siguiente expresión

$$T = d_2 - \frac{\Delta + \Delta'}{m_3} \quad (4.42)$$

De modo que resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones (4.39), (4.41) y (4.42) se tiene

$$\begin{aligned} i_{pk1} &= \frac{2V_{in}\Delta}{L_1\sqrt{\frac{L_1L_2-M^2}{C_1}}} \\ i_{pk2} &= \frac{2V_{in}\Delta(MV_{in} + L_1x_4 - Mx_3)}{L_1\sqrt{\frac{L_1L_2-M^2}{C_1}}(L_2V_{in} + Mx_4 - L_2x_3)} \\ d &= \frac{2\Delta ML_1x_4}{(L_1L_2(\Delta - I_{ref}) + 2\Delta M^2)V_{in} + 2\Delta ML_1x_4} \\ d_1 &= \frac{2\Delta Mx_4(V_{in}M^2 + L_1Mx_4 - L_1L_2x_3)}{(L_2V_{in} + Mx_4 - L_2x_3)((L_1L_2(\Delta - I_{ref}) + 2\Delta M^2)V_{in} + 2\Delta ML_1x_4)} \\ d_2 &= \frac{2\Delta M(V_{in}M + L_1x_4)}{(L_1L_2(\Delta - I_{ref}) + 2\Delta M^2)V_{in} + 2\Delta ML_1x_4} \\ T &= \frac{\sqrt{C_1(L_1L_2 - M^2)}((L_1L_2(\Delta - I_{ref}) + 2\Delta M^2)V_{in} + 2\Delta ML_1x_4)}{(L_1L_2 - M^2)ML_1x_4} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Finalmente, utilizando un análisis similar al que se llevo a cabo en la trayectoria  $T_3$ , se obtiene los valores promedios de las corrientes en los inductores y los diodos en estado estacionario. Además, se

obtiene la dinámica promedio de los voltajes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  en función de éstos valores promedios. Así pues, los valores promedios de las corrientes en los inductores está dado por

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt = \frac{i_{pk1} d_1}{2} \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt = \frac{i_{pk2} (d_2 - d)}{2}\end{aligned}\quad (4.44)$$

Nuevamente, del par de variables complementarias definidas en las ecuaciones (4.15) y (4.15) se deduce, que la corriente en el diodo  $D_1$  es idéntica a la corriente en el inductor  $L_1$  cuando el interruptor está abierto (Off). Mientras que la corriente en el diodo  $D_2$  es igual a la corriente en el inductor  $L_2$  durante todo el periodo de conmutación. Como consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned}\bar{i}_{D_1} &= \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt = \frac{i_{pk1} (d_1 - d)}{2} \\ \bar{i}_{D_2} &= \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt = \frac{i_{pk1} (d_1 - d)}{2}\end{aligned}\quad (4.45)$$

En lo que respecta a la dinámica promedio de los voltajes en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_3 &= \frac{2MV_{in}^2 \Delta^2 (M^2 - L_1 L_2)}{L_1 \sqrt{C_1} (L_1 L_2 - M^2) (V_{in} L_2 + M x_4 - L_2 x_3) \mu_7} - \frac{x_3 + x_4}{C_1 R} \\ \dot{\bar{x}}_4 &= \frac{2M^2 V_{in}^2 \Delta^2 (V_{in} M + L_1 x_4 - M x_3)}{C_2 \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1}} (V_{in} L_2 + M x_4 - L_2 x_3) \mu_7} - \frac{x_3 + x_4}{C_2 R}\end{aligned}\quad (4.46)$$

con

$$\mu_7 = (2\Delta M^2 + L_1 L_2 (\Delta - I_{ref})) V_{in} + 2\Delta M L_1 x_4 \quad (4.47)$$

Así pues, el punto de equilibrio asociado a la dinámica promedio (4.46) está dado por

$$\begin{aligned}\bar{x}_3 &= \frac{V_{in} (\lambda_2 (\pm L_1 L_2 \mp M^2 \pm M L_1) + \lambda_1 (M^2 (2M + L_2) - L_2 (M + L_2)))}{2M L_1 \lambda_1 (L_2 + M)} \\ \bar{x}_4 &= -\frac{M V_{in} (\lambda_1 (2M + L_2) \mp \lambda_2)}{2L_1 \lambda_1 (L_2 + M)}\end{aligned}\quad (4.48)$$

con

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= L_1 \sqrt{\frac{L_1 L_2 - M^2}{C_1}} \\ \lambda_2 &= \sqrt{\lambda_1 (\lambda_1 L_2^2 + 4M^2 R \Delta)}\end{aligned}\quad (4.49)$$

Parámetro	Valor
$L_1$	$74.03\mu H$
$L_2$	$523.2\mu H$
$M$	$195\mu H$
$C_1$	$22.5\mu F$
$C_2$	$22.5\mu F$
$R$	$113\Omega$
$V_{in}$	$12V$

Cuadro 4.1: Parámetros de simulación diagrama de fases

Puesto que las variables de estados promedio deben ser positivas, esto es,  $\bar{x}_3 > 0$  y  $\bar{x}_4 > 0$ , el punto de equilibrio es

$$\begin{aligned}\bar{x}_3 &= \frac{V_{in}(\lambda_2(L_1L_2 - M^2 + ML_1) + \lambda_1(M^2(2M + L_2) - L_2(M + L_2)))}{2ML_1\lambda_1(L_2 + M)} \\ \bar{x}_4 &= \frac{MV_{in}(\lambda_1(2M + L_2) - \lambda_2)}{2L_1\lambda_1(L_2 + M)}\end{aligned}\quad (4.50)$$

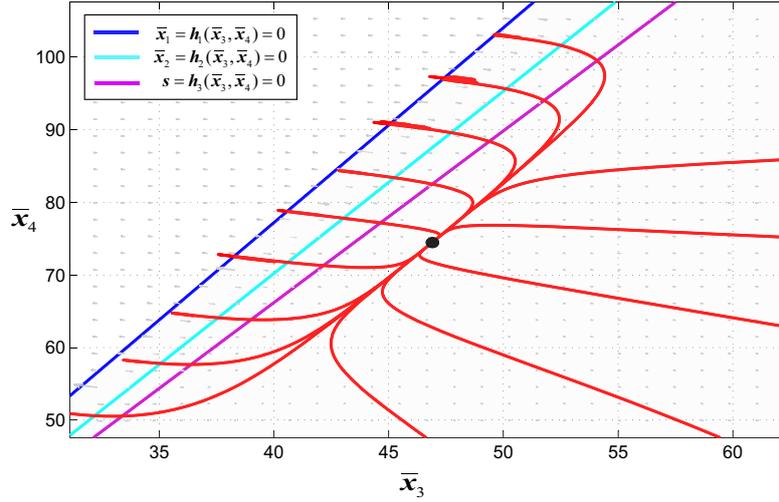
#### 4.2.2. Análisis de estabilidad de la dinámica promedio

En base a un análisis cualitativo de los modelos promedios obtenidos en las ecuaciones (4.34) y (4.46) se obtienen algunas conclusiones relevantes sobre la estabilidad de los mismos. Los valores de los parámetros utilizados en la simulación se presentan en la tabla 4.1.

##### Trayectoria $T_3$

Así, bajo la hipótesis de un valor constante del valor de referencia  $I_{ref} = 4.8e - 7$  y fijando el ancho de banda de la función de histéresis en  $\Delta = 4e - 8$ , un diagrama de fases representativo para el modelo promedio dado por la ecuación (4.34) se presenta en la figura 4.5. Para el cual se muestran algunas de las trayectorias solución (traza roja) para diferentes condiciones iniciales arbitrarias. Adicionalmente, se puede visualizar las trayectorias de los valores promedios de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ . Cuyas dinámicas están dadas en la ecuación (4.31). De ahí, se tiene  $\bar{x}_1 = h_1(\bar{x}_3, \bar{x}_4) = 0$  (traza azul) y  $\bar{x}_2 = h_2(\bar{x}_3, \bar{x}_4) = 0$  (traza azul celeste). También se visualiza la trayectoria de la superficie de deslizamiento (traza violeta)  $s = 0$ , en cuya dinámica han sido sustituidos  $x_1(t) = \bar{x}_1$  y  $x_2(t) = \bar{x}_2$ .

Como se puede observar, en el diagrama se distinguen dos zonas, una que comprende la región estable (zona sombreada) caracterizada por un punto de equilibrio que adopta la forma de un foco estable, y la otra región comprende la zona inestable. La frontera entre ambas regiones está dada por la trayectoria del valor promedio de la corriente en el inductor  $L_1$  (traza azul). Es decir, de la primera expresión en

Figura 4.5: Diagrama de fase del modelo promedio para la trayectoria  $T_3$ 

la ecuación (4.31) se tiene

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{i'_{pk1} d_1}{2} + \frac{(i'_{pk1} + i_{pk1})(d - d_1)}{2} + \frac{i_{pk1}(d_2 - d)}{2} = h_1(\bar{x}_3, \bar{x}_4) = 0 \\ \bar{x}_3 &= \frac{4M^2 \Delta L_1^2 I_{ref} \bar{x}_4^2 + 2L_1 V_{in} M (\eta_1 M^2 - \eta_2 L_2) \bar{x}_4 + V_{in} (\eta_1 M^4 - \eta_2 L_1^2 L_2^2)}{L_1 L_2 (4L_1 \Delta I_{ref} M \bar{x}_4 + V_{in} (\eta_1 M^2 - \eta_2 L_1 L_2))} = g(\bar{x}_4)\end{aligned}\quad (4.51)$$

con  $\eta_1 = \Delta^2 + 2\Delta I_{ref} + I_{ref}^2$  y  $\eta_2 = \Delta^2 - 2\Delta I_{ref} + I_{ref}^2$ . De ahí, que para cualquier condición que satisfaga con la condición  $\bar{x}_3 > g(\bar{x}_4)$  todas las trayectorias de modelo promedio definido en la ecuación (4.34) alcanzarán la superficie de deslizamiento y convergerán al punto de equilibrio estable.

#### Trayectoria $T_4$

Un análisis similar al anterior se lleva a cabo sobre el modelo promedio obtenido en la ecuación (4.46). Los valores de los parámetros corresponden a los de la tabla 4.1. Nuevamente, se asume un valor constante del valor de referencia  $I_{ref} = 4.8e - 7$  y el ancho de banda de la función de histéresis  $\Delta = 45e - 8$ . La figura 4.6 muestra el diagrama de fases, el cual presenta un comportamiento semejante al diagrama de fase anterior. Se visualizan algunas trayectorias solución (traza roja) para condiciones iniciales arbitrarias. Nuevamente, la frontera entre la región de estabilidad e inestabilidad está dada por la trayectoria del valor promedio de la corriente en el inductor  $L_1$ . Es decir, de la primera expresión en la ecuación (4.44) se tiene

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{i_{pk1} d_1}{2} = h_1(\bar{x}_3, \bar{x}_4) = 0 \\ \bar{x}_3 &= \frac{M(V_{in} M + L_1 \bar{x}_4)}{L_1 L_2} = g(\bar{x}_4)\end{aligned}\quad (4.52)$$

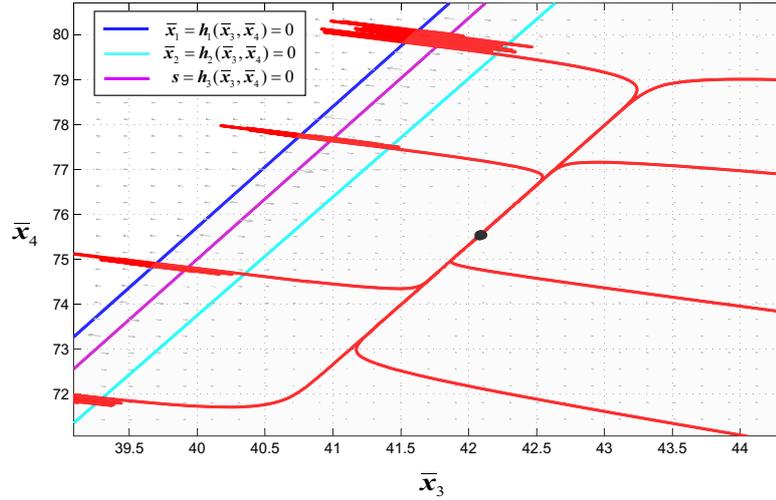


Figura 4.6: Diagrama de fase del modelo promedio para la trayectoria  $T_4$

Una consecuencia directa de la figura anterior es que para cualquier condición inicial que cumpla con la restricción  $\bar{x}_3 > g(\bar{x}_4)$ , todas las trayectorias solución del modelo promedio convergerán al punto de equilibrio estable.

### 4.2.3. Simulaciones del control de corriente

En esta sección se presentan los resultados de simulación del control de corriente utilizando el modelo lineal complementario del convertidor Boost acoplado magnéticamente dado en las ecuaciones (3.17) y (3.20). Nuevamente se utiliza el método numérico de backwards Euler de paso fijo para obtener la solución del modelo lineal complementario, junto a una solución específica para el problema lineal complementario. Ambos algoritmos se han implementado en Matlab. El paso de integración utilizado en las siguientes simulaciones se fija en  $T_m = 5 \cdot 10^{-7}$ .

Por otro lado, se presentan las simulaciones de la dinámica promedio para las trayectorias del convertidor en estado estacionario  $\sum_{ss} = (T_3, T_4)$  analizadas en la sección anterior. Las soluciones de los modelos promedio se obtuvieron mediante el método numérico ode45 de Matlab.

#### Trayectoria $T_3$

Los valores de los parámetros utilizados en la simulación se presentan en la tabla 4.1. Así, bajo la hipótesis de un valor constante del valor de referencia  $I_{ref} = 4.8 \cdot 10^{-7}$  y partiendo de condiciones  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$  la dinámica del convertidor usando el modelo lineal complementario definido por la ecuaciones (3.17) y (3.17) bajo régimen de deslizamiento se muestra en la figura 4.7. De la gráfica de la superficie de deslizamiento 4.7(f) se evidencia que la condición para tener modo de deslizamiento

se satisface.

Por otro lado, la traza roja de la figura 4.8 muestra las trayectorias del modelo promedio (4.34) partiendo de condiciones iniciales  $\bar{x}(0) = [15, 0]$ , mientras que la traza azul corresponde al modelo lineal complementario del convertidor bajo régimen de deslizamiento. A partir de los resultados de simulación se evidencia que la trayectoria de la dinámica promedio converge al punto de equilibrio  $\bar{x} = [46.36, 73.63]$ . Por consiguiente, de las expresiones en (4.30) se obtiene el ciclo de trabajo  $d = 72.13\%$  y la frecuencia de conmutación  $f = 51.13\text{kHz}$ .

#### Trayectoria $T_4$

Los resultados del modelo lineal complementario bajo régimen de deslizamiento para  $T_4$  se muestran en la figura 4.9. De manera similar, se asume un valor constante del valor de referencia  $I_{ref} = 4.8 \cdot 10^{-7}$  y se toman condiciones iniciales en  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$ . Los valores de los parámetros utilizados en la simulación se presentan en la tabla 4.1 a excepción del valor del ancho de banda de la función de histéresis  $\Delta = 45 \cdot 10^{-8}$ . Nuevamente de la trayectoria de la superficie de deslizamiento se evidencia que la condición para tener modo de deslizamiento se satisface.

La figura 4.10 muestra las trayectorias del modelo promedio (4.46) partiendo de condiciones iniciales  $\bar{x}(0) = [15, 0]$ . La traza roja corresponde a la dinámica promedio y la traza azul al modelo lineal complementario del convertidor bajo régimen de deslizamiento. A partir de los resultados de simulación se evidencia que la trayectoria de la dinámica promedio converge al punto de equilibrio  $\bar{x} = [42.72, 75.52]$ . De las expresiones en (4.43) se obtiene el ciclo de trabajo  $d = 71.21\%$  y la frecuencia de conmutación  $f = 4.48\text{kHz}$ .

### 4.3. Control de voltaje

Para el lazo de control externo de la figura 4.1 se diseña un control del tipo PI, cuya dinámica está dada por

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4.53)$$

donde  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $T_i$  es la constante de tiempo integral. El objetivo de este lazo de control es mantener la componente dc del voltaje de salida  $v_R$  cerca del valor de referencia  $V_{ref}$  dado. El diseño del control PI se realiza a partir de métodos de diseño para sistemas lineales. Este diseño se lleva a cabo sobre el modelo de segundo orden obtenido en la sección anterior. En particular, se hace uso del modelo promedio de segundo orden obtenido para la trayectoria  $T_3$  definido en la ecuación (4.34). Reescribiendo esta última expresión de manera simplificada se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}, I_{ref}) \\ y &= h(\bar{x}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

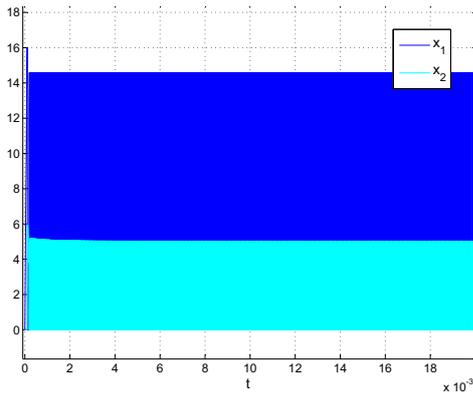
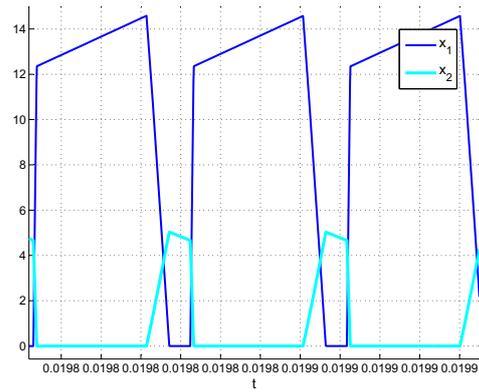
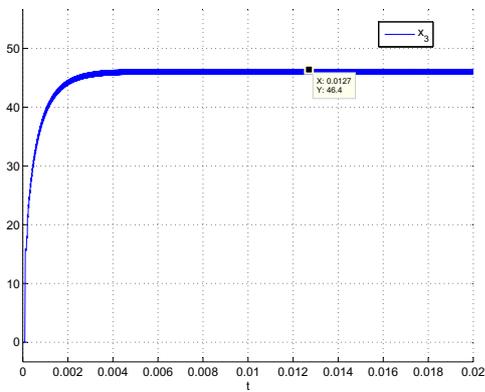
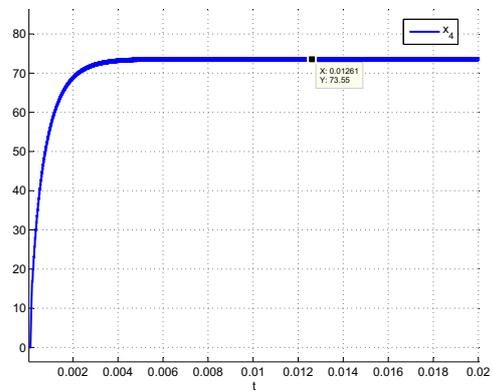
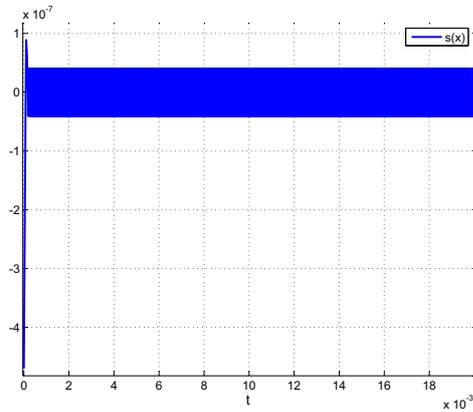
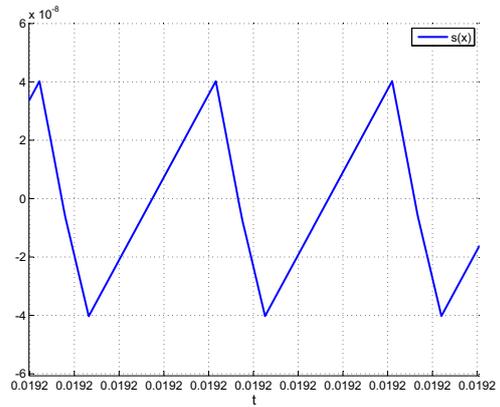
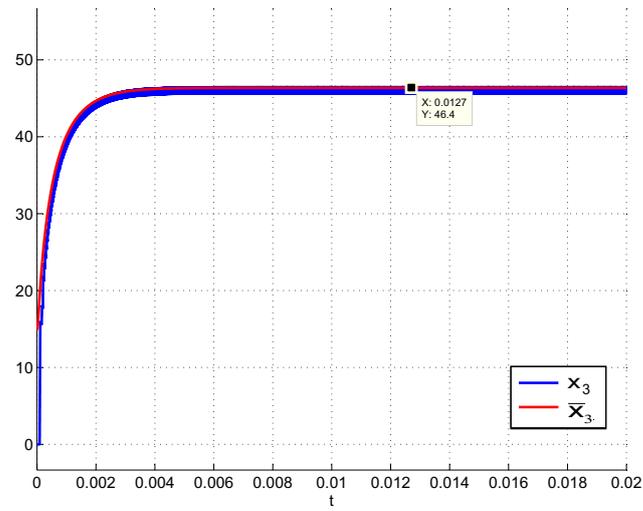
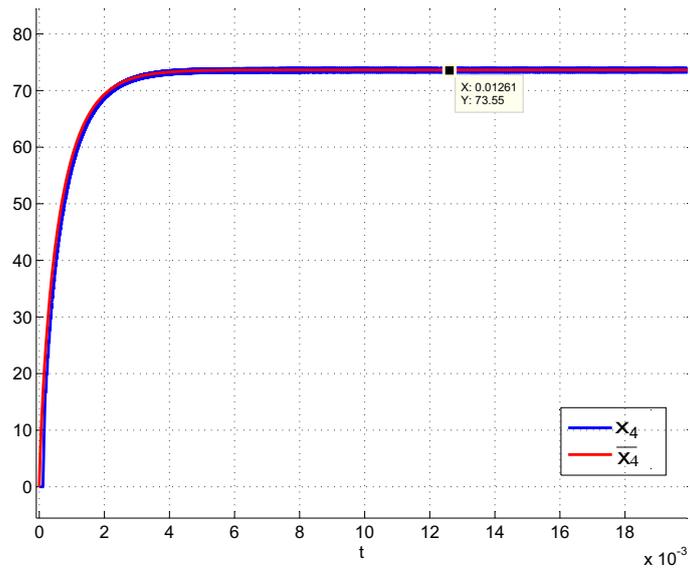
(a) Corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ (b) Zoom de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ (c) Voltaje en el capacitor  $C_1$ (d) Voltaje en el capacitor  $C_2$ (e) Superficie de deslizamiento  $s(x)$ (f) Zoom de la superficie de deslizamiento  $s(x)$ 

Figura 4.7: Simulación del lazo de corriente para la trayectoria  $T_3$  usando el modelo lineal complementario



(a) Voltaje en el condensador  $C_1$



(b) Voltaje en el condensador  $C_2$

Figura 4.8: Simulación del lazo de corriente para la trayectoria  $T_3$  usando el modelo lineal complementario y el modelo promedio de segundo orden

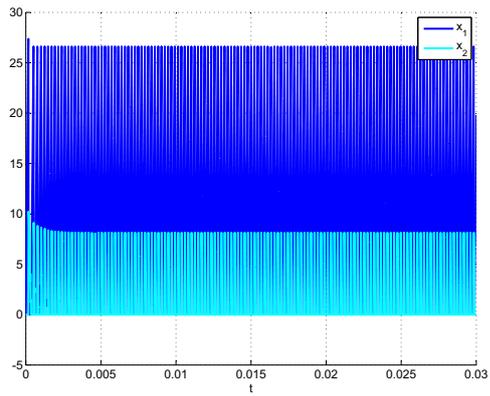
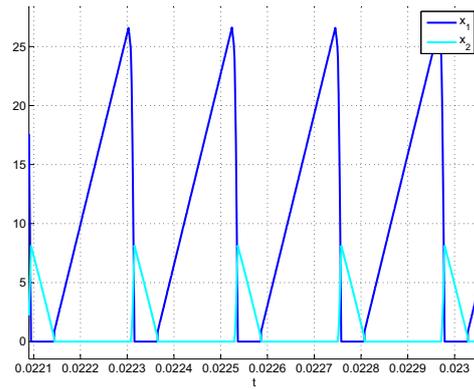
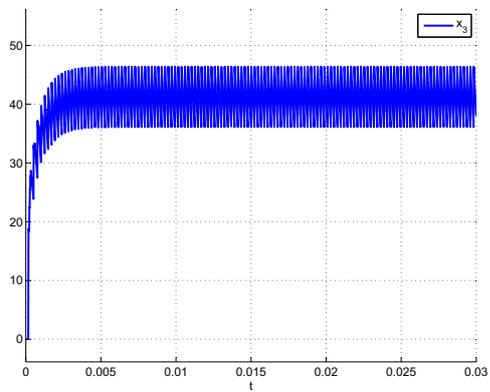
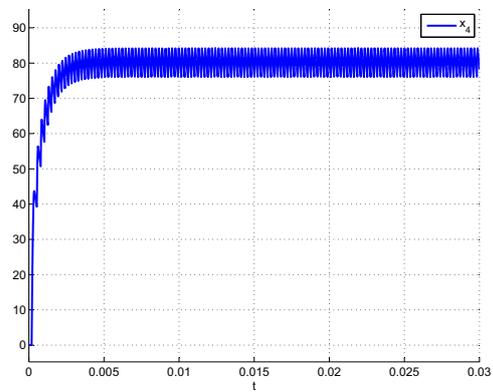
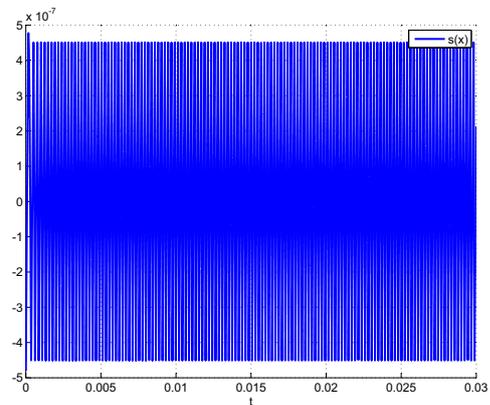
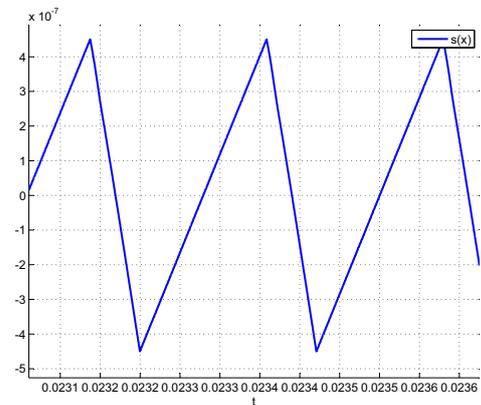
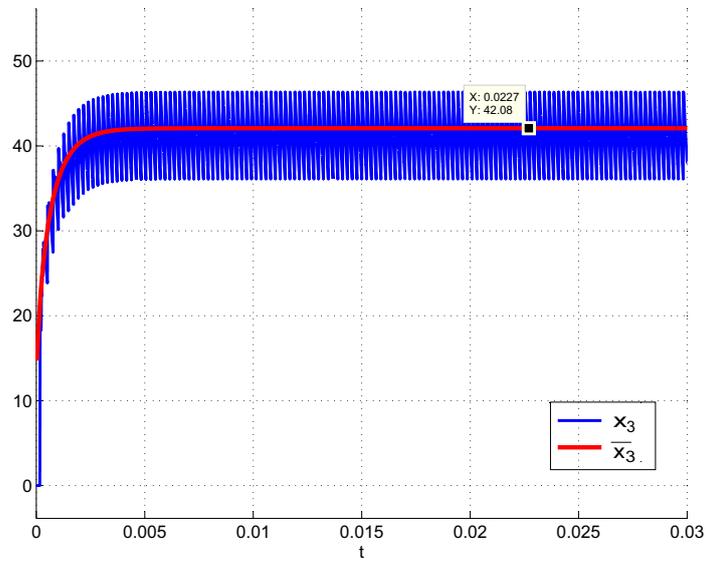
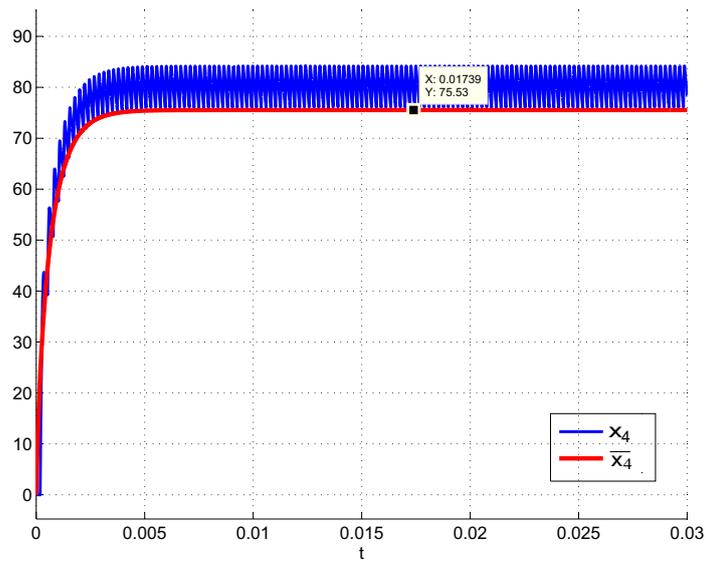
(a) Corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ (b) Zoom de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ (c) Voltaje en el capacitor  $C_1$ (d) Voltaje en el capacitor  $C_2$ (e) Superficie de deslizamiento  $s(x)$ (f) Zoom de la superficie de deslizamiento  $s(x)$ 

Figura 4.9: Simulación del lazo de corriente para la trayectoria  $T_4$  usando el modelo lineal complementario



(a) Voltaje en el condensador  $C_1$



(b) Voltaje en el condensador  $C_2$

Figura 4.10: Simulación del lazo de corriente para la trayectoria  $T_4$  usando el modelo lineal complementario y el modelo promedio de segundo orden

donde  $\bar{x} = [\bar{x}_3, \bar{x}_4]^T$ . Este último es linealizado alrededor del punto de operación  $(I_{ref}^*, \bar{x}_3^*, \bar{x}_4^*)$ , cuya expresión linealizada está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_\delta &= \bar{A}\bar{x}_\delta + \bar{B}I_\delta \\ y_\delta &= \bar{C}\bar{x}_\delta\end{aligned}\quad (4.55)$$

con

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(f(\bar{x}, I_{ref})) \right|_{\bar{x}^*, I_{ref}^*}, & \bar{B} &= \left. \frac{\partial}{\partial I_{ref}}(f(\bar{x}, I_{ref})) \right|_{\bar{x}^*, I_{ref}^*}, & \bar{C} &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(h(\bar{x})) \right|_{\bar{x}^*} \\ \bar{x}_\delta &= \bar{x} - \bar{x}^*, & I_\delta &= I_{ref} - I_{ref}^*, & y_\delta &= y - \bar{y}^*\end{aligned}\quad (4.56)$$

Puesto que las expresiones obtenidas de la linealización jacobiana resultan ser bastante complejas, el análisis consistirá en el modelo numérico lineal del convertidor. Así, para los parámetros de la tabla 4.1 y el punto de operación  $I_{ref}^* = 4.8e - 7$ ,  $\bar{x}_3^* = 46.36$  y  $\bar{x}_4^* = 73.63$  la función de transferencia que relaciona la tensión de salida incremental con el valor incremental de la corriente está dada por

$$G(s) = \frac{2.583 \cdot 10^{11}s + 1.498 \cdot 10^{15}}{s^2 + 9795s + 1.061 \cdot 10^7}\quad (4.57)$$

De la ecuación anterior se tiene que para los valores nominales el modelo lineal presenta dos polos reales diferentes estables ubicados en  $s_1 = -8554.75$  y  $s_2 = -1240.24$  y un cero en  $s = -5799.45$ . Por lo tanto, el punto de equilibrio es un nodo estable.

Así, de las ecuaciones (4.53) y (4.57) se obtiene la función de transferencia del sistema en lazo cerrado dada por

$$G_1(s) = \frac{7 \cdot 10^8 T_i (369 \cdot s + 2.14 \cdot 10^6) s}{s^3 + \delta_1 s^2 + \delta_2 s + \delta_3}\quad (4.58)$$

con

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (2.5830 \cdot 10^{11} K_p + 9795) \\ \delta_2 &= (2.5830 \cdot 10^{11} \frac{K_p}{T_i} + 1.4980 \cdot 10^{15} K_p + 1.0610 \cdot 10^7) \\ \delta_3 &= 1.4980 \cdot 10^{15} \frac{K_p}{T_i}\end{aligned}$$

Para calcular las ganancias del control PI que logre regular la componente dc del voltaje de salida al valor deseado  $V_{ref} = 120$  se recurre al método de la asignación de polos simple. De esta forma se desea que la dinámica en lazo cerrado cumpla con algunos criterios como la máxima rapidez, mínimo de oscilaciones posibles y la máxima exactitud ante perturbaciones. De ahí, que el siguiente polinomio característico está dado por

$$p_d(s) = (s + \tau\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)\quad (4.59)$$

con  $\tau = 12.98$ ,  $\omega_n = 656.87$  y  $\zeta = 0.96$ . Igualando el polinomio característico de la ecuación (4.58) con la ecuación (4.59) se obtiene los valores de los coeficiente del control PI.

$$K_p = 7.27 \cdot 10^{-13} \quad T_i = 2.95 \cdot 10^{-7}\quad (4.60)$$

### 4.3.1. Simulación del control de voltaje

El propósito de esta sección es mostrar a través de simulaciones la efectividad de la ley de control en cascada esbozado en la figura 4.1 usando el modelo lineal complementario del convertidor obtenido en las ecuaciones (3.17) y (3.20). Al igual que las simulaciones del lazo de corriente, el método numérico utilizado para obtener la solución del modelo lineal complementario es el backwards Euler, junto a una solución específica para el problema lineal complementario. Ambos algoritmos se han implementado en Matlab. El paso de integración utilizado en las siguientes simulaciones se fija en  $T_m = 5 \cdot 10^{-7}$ .

Por otra parte, cabe destacar que el controlador PI diseñado, es discretizado utilizando una aproximación rectangular. Así, la expresión en tiempo discreto del control está dada por

$$G_d(z) = K_p + \frac{K_p T_m}{T_i} \frac{1}{z-1} \quad (4.61)$$

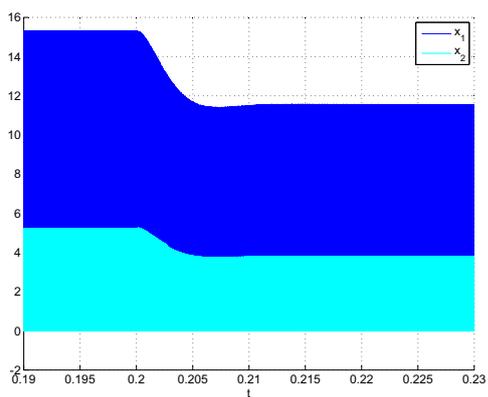
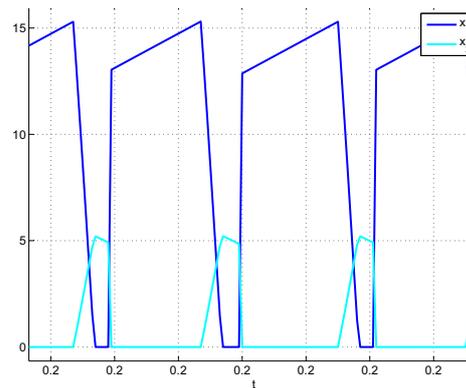
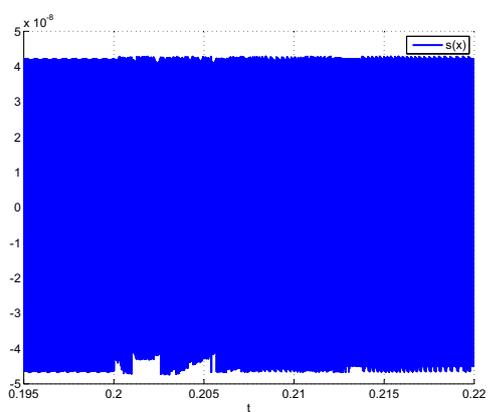
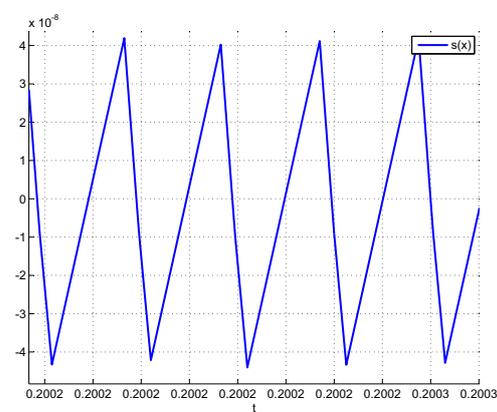
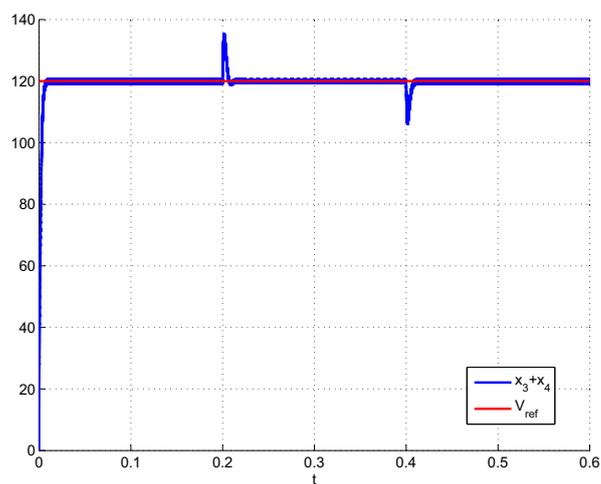
A continuación se presentan tres escenarios diferentes para evaluar la ley de control diseñada. En el primero se introducen perturbaciones en la carga. En el segundo se introducen perturbaciones en el voltaje de entrada  $V_{in}$  y en el último se aplican cambios en el valor de referencia  $V_{ref}$ . Los valores de los parámetros utilizados en el convertidor se muestran en la tabla 4.1. Así, una vez obtenidos los valores de los coeficientes del control PI y fijado el ancho de la función de histéresis en  $\Delta = 4 \cdot 10^{-8}$  se tienen los siguientes resultados

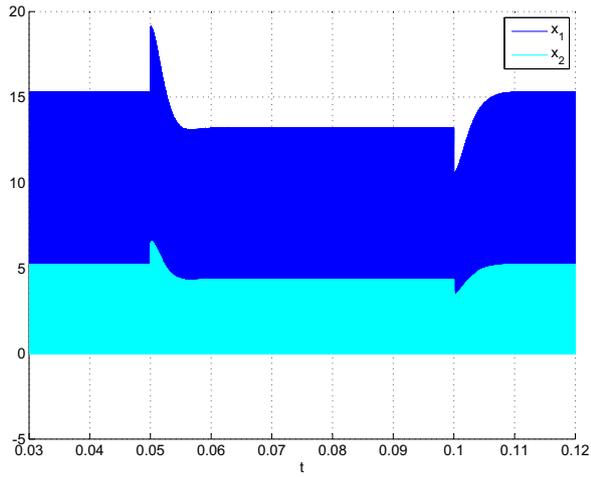
#### 1. Perturbaciones en la carga

El objetivo de control es regular la componente dc del voltaje de salida  $v_R$  al valor de referencia  $V_{ref} = 120V$ . Las condiciones iniciales son  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$ . La figura 4.11 muestra las trayectorias de las corrientes en los inductores, la superficie de deslizamiento y el voltaje de salida cuando se produce un cambio en el valor nominal de la carga  $R = 113\Omega$  al valor  $R = 153\Omega$ . Este cambio es aplicado durante el intervalo de tiempo  $0.2 < t < 0.4$ . Se puede visualizar que la dinámica del voltaje de salida  $v_R$  presenta un sobre pico en los instantes de tiempo en los que se introduce la perturbación en la carga. Sin embargo, la ley de control diseñada logra recompensar rápidamente al valor deseado.

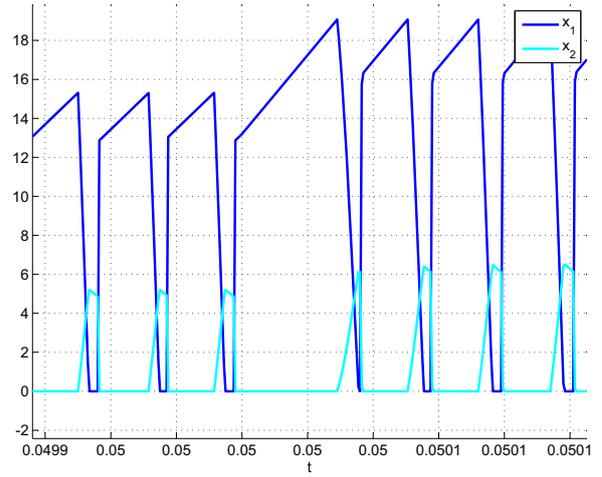
#### 2. Perturbaciones en el voltaje de entrada

Nuevamente, el objetivo de control es regular la componente dc del voltaje de salida  $v_R$  al valor de referencia  $V_{ref} = 120V$ . Las condiciones iniciales son  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$ . La figura 4.12 muestra las trayectorias de las corrientes en los inductores, la superficie de deslizamiento y el voltaje de salida. Durante el intervalo de tiempo  $0.05 < t < 0.1$  se produce el cambio en el valor nominal del voltaje de entrada al valor  $V_{in} = 15V$ . Se puede apreciar que la ley de control diseñada logra estabilizar el voltaje de salida  $v_R$  en el valor deseado. Sin embargo, en los instantes de tiempo donde se producen las perturbaciones, la dinámica del voltaje de salida presenta un sobre pico alrededor del 18% con un tiempo de convergencia alrededor de 0.01s.

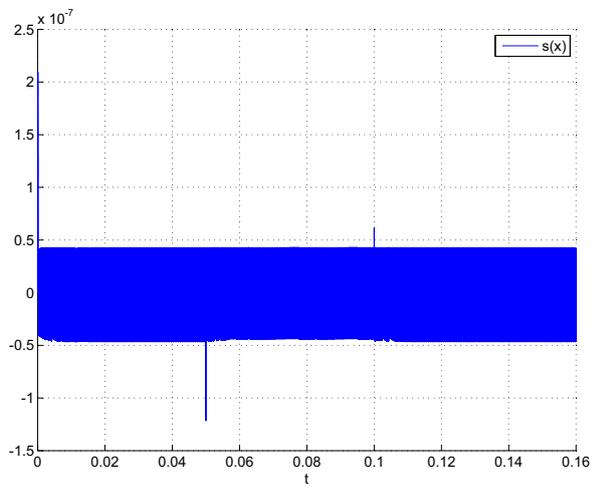
(a) Corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ (b) Zoom de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ (c) Superficie de deslizamiento  $s(x)$ (d) Zoom de la superficie de deslizamiento  $s(x)$ (e) Voltaje de salida  $v_R$ Figura 4.11: Resultados de simulación: Perturbación en la carga  $R$



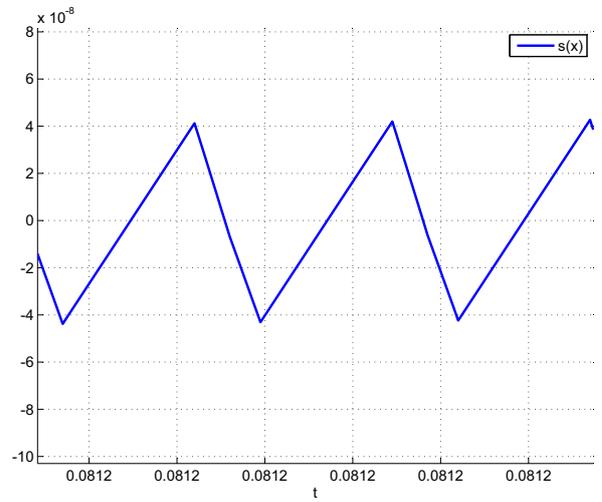
(a) Corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$



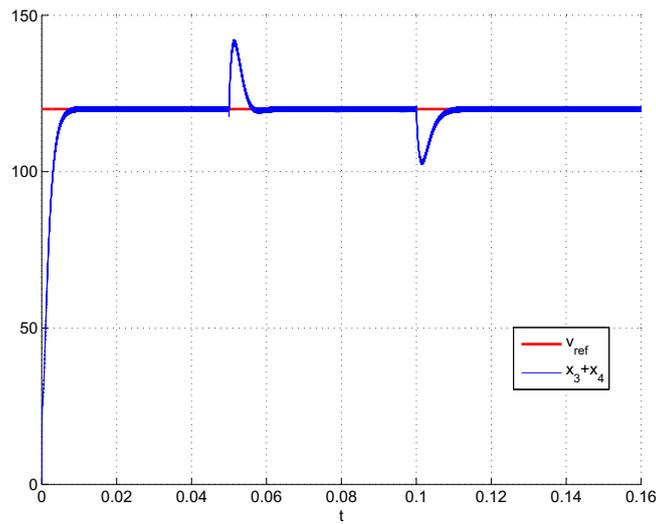
(b) Zoom de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$



(c) Superficie de deslizamiento  $s(x)$



(d) Zoom de la superficie de deslizamiento  $s(x)$



(e) Voltaje de salida  $v_R$

Figura 4.12: Resultados de simulación: Perturbación en el voltaje de entrada  $V_{in}$

### 3. Cambios en el valor de referencia

En este último escenario se evalúa la ley de control diseñada frente a los cambios en el valor de referencia. La figura 4.13 muestra las trayectorias de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$ , la superficie de deslizamiento y el voltaje de salida  $v_R$ . Se toman condiciones iniciales en  $x(0) = [0, 0, 0, 0]$ . De la simulaciones se visualiza un seguimiento estable y robusto del voltaje de salida frente a los diferentes cambios aplicados en el valor de referencia, estos son,  $V_{ref} = 72V$ ,  $V_{ref} = 144V$  y  $V_{ref} = 100V$ . Los diferentes valores de referencia se mantiene durante  $t = 0.2s$ .

## 4.4. Conclusiones

En este capítulo se ha diseñado un esquema de control en cascada para el convertidor Boost de inductancias acopladas. Para el lazo interno del esquema de control se diseño un control basado en SMC. Mientras que el lazo externo adopta un control del tipo PI. Este tipo de arquitecturas de control presenta notables ventajas debido a las propiedades relevantes de la estrategia de control SMC.

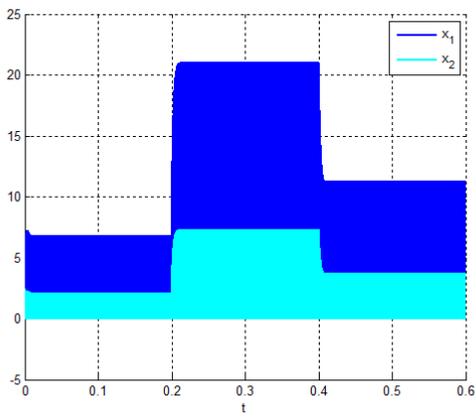
El diseño de la estrategia de control se llevó a cabo utilizando el modelo lineal complementario del convertidor, el cual toma en cuenta la dinámica híbrida inherente en los convertidores de potencia. Por otro lado, condiciones suficientes para garantizar la existencia de modo de deslizamiento son presentadas. También se llevo a cabo un análisis de la dinámica promedio para el convertidor bajo estudio. Seguidamente mediante un análisis cualitativo de la estabilidad del convertidor en régimen de deslizamiento se proporciona información relevante sobre el comportamiento global del convertidor, además que se caracterizó los puntos de equilibrios y se establecieron restricciones sobre las condiciones iniciales para garantizar modo de deslizamiento.

Los resultados de simulación revelan la efectividad y desempeño del control diseñado frente a perturbaciones en la carga, voltaje de alimentación y cambios en el voltaje de referencia.

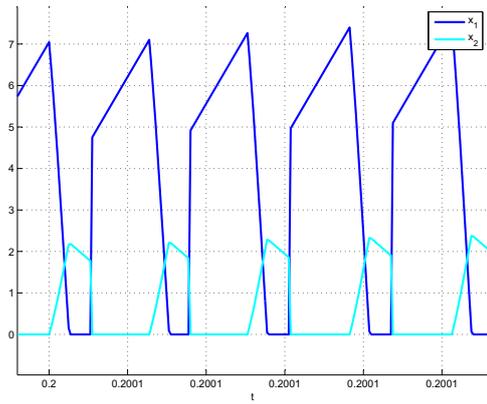
Por último, cabe destacar que la aplicación de SMC en modelos lineales complementarios no ha sido explorada en la literatura hasta el momento. En trabajos futuros se propone un análisis general de la dinámica ideal de deslizamiento para sistemas lineales complementarios.

## Referencias

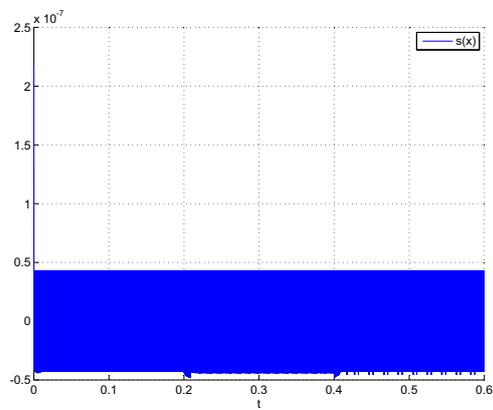
- [1] A. G. Beccuti, G. Papafotiou, and M. Morari, "Optimal Control of the Boost dc-dc Converter," *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pp. 4457–4462, 2005. 59



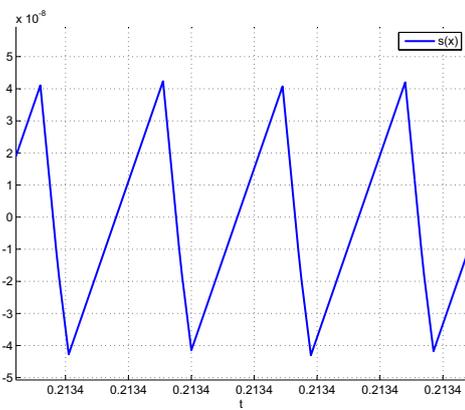
(a) Corriente en los inductores  $L_1$  y  $L_2$



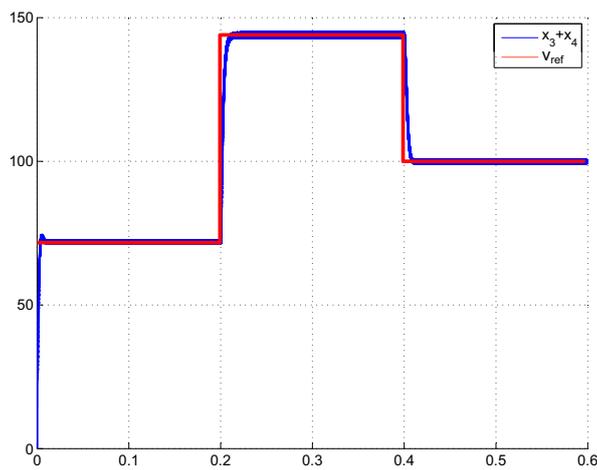
(b) Zoom de las corrientes en los inductores  $L_1$  y  $L_2$



(c) Superficie de deslizamiento  $s(x)$



(d) Zoom de la superficie de deslizamiento  $s(x)$



(e) Voltaje de salida  $v_R$

Figura 4.13: Resultados de simulación: Cambios en el voltaje de referencia  $V_{ref}$

- [2] D. Patino and M. Baja, “Alternative control methods for dc/dc converters: An application to a four-level three-cell dc/dc converter,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 10, pp. 1112–1133, July 2011. 59
- [3] A. Wilson, P. Cortés, S. Kouro, J. Rodríguez, and H. Abu-Rub, “Model predictive control for cascaded h-bridge multilevel inverters with even power distribution,” *Industrial Technology (ICIT), 2010 IEEE International Conference on*, pp. 1271–1276, 2010. 60
- [4] B. Wang and Y. Ma, “Research on the passivity-based control strategy of buck-boost converters with a wide input power supply range,” in *Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG), 2010 2nd IEEE International Symposium on*, june 2010, pp. 304 –308. 60
- [5] M. Perez, R. Ortega, and J. Espinoza, “Passivity-based pi control of switched power converters,” *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 12, no. 6, pp. 881 – 890, nov. 2004. 60
- [6] C. Olalla, R. Leyva, A. El-Aroudi, and I. Queinnec, “Robust lqr control for pwm converters: An lmi approach,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 7, pp. 2548–2558, 2009. 60
- [7] S.-C. Tan, Y. Lai, and C. Tse, “Indirect sliding mode control of power converters via double integral sliding surface,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 23, no. 2, pp. 600 –611, march 2008. 60
- [8] H. J. Sira-Ramirez and R. Silva-Ortigoza, *Control Design Techniques in Power Electronics Devices*, S. L. Ltd, Ed., 2006. 60, 63, 64
- [9] Y. hua Xian and J. chao Feng, “Output feedback h-infinity control for buck converter with uncertainty parameters,” in *Communication Technology (ICCT), 2011 IEEE 13th International Conference on*, 2011, pp. 887–891. 60
- [10] D. Biel and E. Fossas, “Some experiments on chattering suppression in power converters,” in *Control Applications, (CCA) Intelligent Control, (ISIC), 2009 IEEE*, july 2009, pp. 1523 –1528. 60
- [11] V. Utkin, “Variable structure systems with sliding modes,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 2, pp. 212 – 222, apr 1977. 60, 63
- [12] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991. 60
- [13] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-mechanical Systems (Automation and Control Engineering, C. P. I. E. 2nd Revised edition, Ed., 2009*. 60, 61, 64
- [14] L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte, *Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century: State of the Art Fridm*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 2011, vol. 412. 60, 61, 64

- [15] F. A. F., *Differential equations with discontinuous right hand sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988. 63
- [16] P. P. T. and K. Y. A., “An event-driven method to simulate filippov systems with accurate computing of sliding motions,” vol. 34, no. 3, p. 24, 2008. 64
- [17] L. Iannelli, K. Johansson, U. T. Jonsson, and F. Vasca, “On the averaging of a class of hybrid systems,” in *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, vol. 2, Dec 2004, pp. 1400–1405 Vol.2. 64
- [18] A. Teel and D. Nesic, “Pwm hybrid control systems: averaging tools for analysis and design,” in *Control Applications (CCA), 2010 IEEE International Conference on*, Sept 2010, pp. 1128–1133. 64
- [19] C. Pedicini, F. Vasca, L. Iannelli, and U. Jonsson, “An overview on averaging for pulse-modulated switched systems,” in *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, Dec 2011, pp. 1860–1865. 64



# Implementación y Resultados Experimentales

---

En este capítulo se presenta una visión general del diseño, implementación experimental del prototipo del convertidor Boost acoplado magnéticamente y evaluación de la ley de control diseñada en el capítulo anterior. Se presentan las etapas básicas involucradas en el sistema en lazo cerrado y los resultados prácticos obtenidos. Además, la robustez de la ley de control diseñada será validada experimentalmente introduciendo cambios bruscos en el voltaje de entrada y la carga.

## 5.1. Implementación experimental

La figura 5.1 muestra el diagrama de bloques funcional del convertidor junto con la ley de control diseñada. Ésta ilustra todos los componentes básicos que serán necesarios para la implementación. Los principales bloques son:

### 1. Circuito de potencia

El diagrama del circuito eléctrico del convertidor se muestra en la figura 5.1. Se desea que la potencia nominal del convertidor diseñado sea de 127W. Así, los parámetros nominales del circuito eléctrico adoptados para todos los experimentos de validación son los siguientes: voltaje de entrada  $V_{in} = 12V$  dc, los valores del par de bobinas acopladas son  $L_1 = 74.03\mu H$  y  $L_2 = 523.2\mu H$ , y la inductancia mutua  $M = 195\mu H$ , los valores de los capacitores son  $C_1 = C_2 = 22.5\mu F$ . Los diodos  $D_1$  y  $D_2$  son diodos rectificadores del tipo 60EPU02 60A 200 Vrrm. El interruptor se implementó usando un transistor MOSFET IRFPS40N50L N-CH 500V 46A con una resistencia de salida máxima de  $R_{DS} = 0.1\Omega$ . Adicionalmente, este circuito cuenta con un capacitor de  $2.2nF$  conectado en paralelo con el MOSFET con el objetivo de disminuir las oscilaciones en el voltaje entre los terminales del surtidor y drenador del MOSFET y otro capacitor de igual valor conectado en paralelo con el diodo  $D_2$ , también para disminuir las oscilaciones y el pico en el voltaje del diodo cuando éste no conduce. Pues estas oscilaciones pueden generar señales de ruido considerables y pueden causar daños en el diodo si las oscilaciones o el pico de voltaje exceden los límites de tensión del mismo.

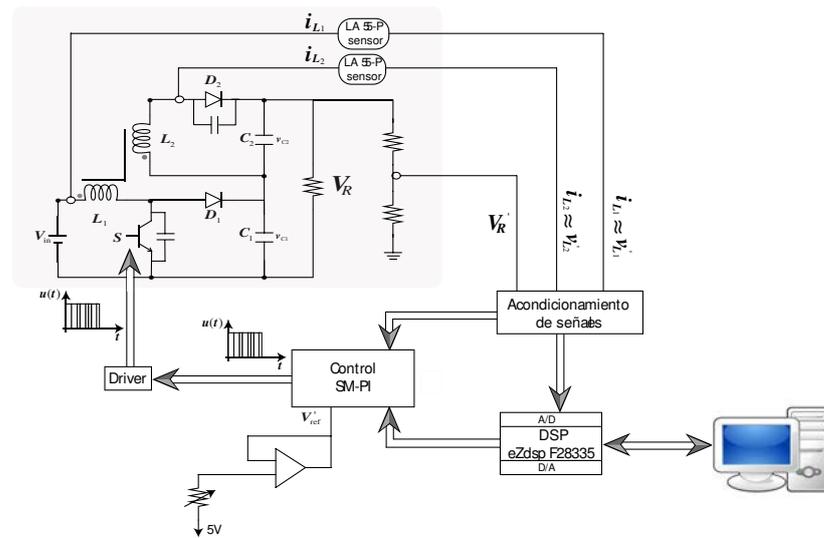


Figura 5.1: Diagrama de bloques de la implementación

## 2. Sensado y acondicionamiento de señales

Para la implementación del control del convertidor se requiere la medida de las corrientes del inductor acoplado y el voltaje de salida del convertidor. En esta tarjeta las señales eléctricas han sido procesadas por circuitos apropiados que permiten el escalado y filtrado de las señales medidas. Las corrientes en los inductores  $i_{L_1}$  y  $i_{L_2}$  se han medido usando transductores de corriente de efecto hall del tipo LEM LA 55-P 50 A. Estas señales se han acondicionado para proporcionar la función de la superficie de deslizamiento de la ecuación (4.2). Las corrientes  $i_{L_1}$  y  $i_{L_2}$  entregadas por los transductores se hacen pasar por las resistencias de medida  $R_{M_1} = 150\Omega$  y  $R_{M_2} = 390\Omega$  respectivamente. De esta manera se generan señales de voltajes proporcionales  $v'_{L_1} = (R_{M_1}/G_1)i_{L_1}$  y  $v'_{L_2} = (R_{M_2}/G_2)i_{L_2}$  a las corrientes que pasan por  $R_{M_1}$  y  $R_{M_2}$  respectivamente, donde  $G_1$  y  $G_2$  son las tasas de conversión de los sensores en  $i_{L_1}$  e  $i_{L_2}$  respectivamente. Luego mediante una circuitería basada en amplificadores operacionales se construye la función de la superficie de deslizamiento a partir de las señales de voltaje acondicionadas. Este último circuito será detallado en el bloque de control.

Cabe destacar, que las amplitudes de las señales acondicionadas deben estar en el rango de operación del convertidor ADC del procesador digital de señales eZdsp F28335 *Starter Kit (DSK)* desarrollada por *Texas Instruments*. El rango de tensión analógica que soporta cada canal del ADC es  $0 - 3.3V$ .

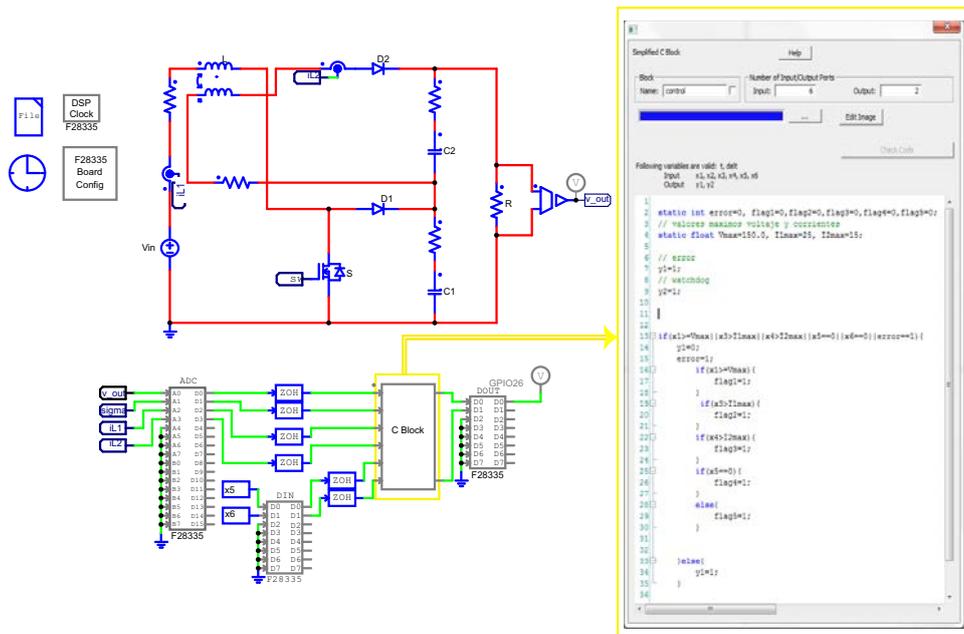


Figura 5.2: Configuración del DSP TMS320F28335 usando SimCoder de Psim

Por otro lado, el voltaje de salida del convertidor  $v_R$  se acondiciona también en el rango de  $0 - 3.3V$  mediante un divisor de tensión, cuya salida será  $v'_R = Gv_R$ . Donde  $G$  representa la tasa de conversión resistiva del divisor de tensión.

### 3. Supervisión

El objetivo de este bloque es proteger los componentes del circuito, supervisando los niveles de las corrientes en los inductores  $i_{L1}$  y  $i_{L2}$  y el nivel de tensión del voltaje de salida del convertidor  $v_R$ . Para ello se ha utilizado el procesador digital de señales eZdsp F28225. Esta tarjeta dispone de un controlador de señales digitales DSC TMS320F28335 con potencia de cálculo de 32 bits en coma flotante con velocidad de operación de 150 MHz. Además posee un convertidor ADC de 12 bits con 16 canales de entrada. Las entradas del ADC son las corrientes de los inductores y el voltaje de salida del convertidor. La frecuencia de muestreo con la que se accede al convertidor ADC es de 250 KHz. El programa que lleva a cabo la rutina de supervisión ha sido desarrollado en código  $C$  a partir del modulo SimCoder de Psim. Este módulo además permite configurar los canales del ADC, los puertos GPIO de propósito general y las interrupciones para el DSP eZdsp F28225. La figura 5.2 muestra una visión general de la configuración del hardware de la tarjeta DSC TMS320F28335 y del código  $C$  utilizado en el bloque de supervisión.

Por otro lado, la compilación de la rutina de supervisión se lleva a cabo mediante la herramienta de programación *Code Composer Studio* (CCS) de *Texas Instruments*. Esta rutina, básicamente

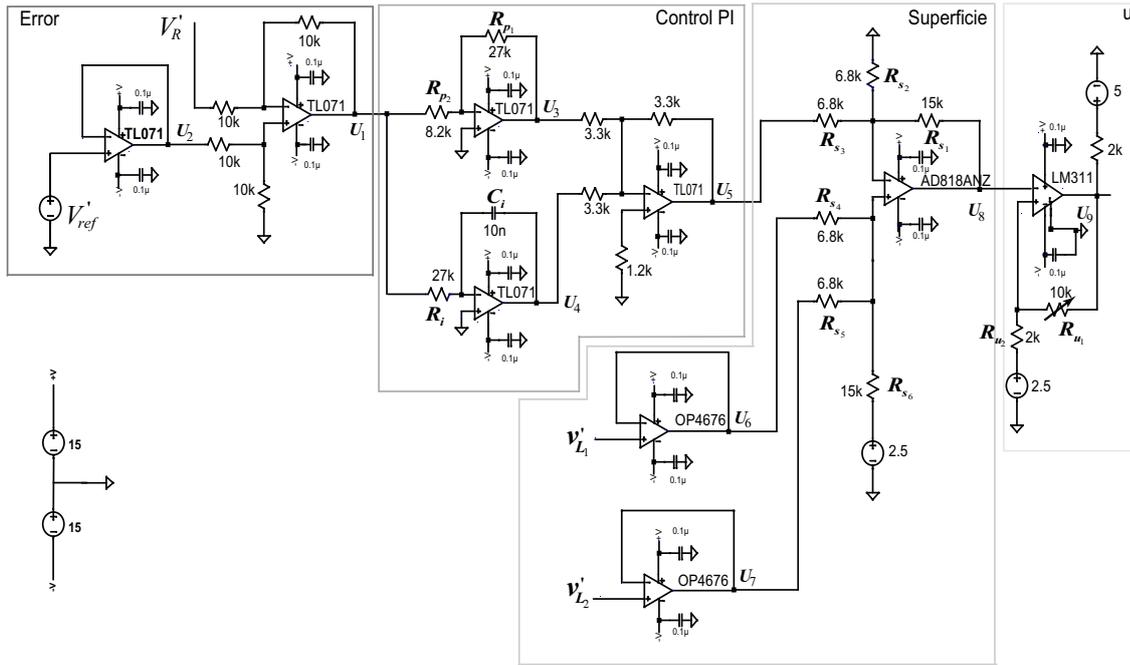


Figura 5.3: Esquema del circuito del control analógico

consiste en mantener un uno lógico a la salida mientras los valores medidos se encuentran por debajo de los niveles máximos permitidos ( $i_{L_1} \leq 25\text{A}$ ,  $i_{L_2} \leq 15\text{A}$ ,  $v_R \leq 150\text{V}$ ). Una vez que los valores medidos sobrepasan los valores máximos se desencadena una interrupción de programa manteniendo un cero lógico a la salida que deshabilita el driver del interruptor.

#### 4. Control

Este bloque se compone de los circuitos de los lazos de control de corriente y voltaje. Estos circuitos se llevan a cabo utilizando configuraciones básicas con amplificadores operacionales. La figura 5.3 muestra el circuito analógico de la ley de control diseñada.

El control PI diseñado para el lazo de control de voltaje se compone de amplificadores operacionales del tipo TL071 de *Texas Instruments*. Este tipo de amplificador es usado para el cálculo de la señal de error ( $e' = V'_{ref} - v'_R$ ), la parte proporcional e integral y la suma de los términos proporcional e integral del control PI, cuyas salidas están identificadas como los nodos  $U_1$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  y  $U_5$  respectivamente en la figura 5.3. Los coeficientes  $K_p$  y el tiempo integral  $T_i$  cumplen con las especificaciones de control definidas en el capítulo anterior, como menor sobredisparo y menor tiempo de asentamiento. Adicionalmente para estos coeficientes se han utilizado valores estándar de los componentes analógicos. Por consiguiente, las expresiones de

las ganancias del control PI están dadas por

$$K_p = \frac{R_{p1}}{R_{p2}}, \quad K_i = \frac{1}{C_i R_i} \quad (5.1)$$

Así, el nodo  $U_5$  en la figura 5.3 proporciona el valor de referencia ( $v^*$ ) del lazo de corriente, o lo que es lo mismo el valor equivalente al término independiente de la ecuación de la superficie en (4.2). Una vez obtenido este valor se procede a la implementación de la superficie de deslizamiento. Para ello se han usado los amplificadores OP4676 y AD818ANZ de *Analog Devices*. Cabe destacar que a la función de la superficie se le añade un voltaje dc de offset  $\bar{v} = 2.5V$  con el fin de evitar que esta señal sea susceptible al ruido. Así pues, la función de la superficie de deslizamiento una vez acondicionadas las señales de corrientes usada en la implementación está dada por la siguiente función

$$s = \left( \frac{v'_{L1}}{R_{s4}} + \frac{v'_{L2}}{R_{s5}} - \frac{v^*}{R_{s3}} + \frac{\bar{v}}{R_{s6}} \right) R_{s1} \quad (5.2)$$

Esta última señal luego es transformada en una señal cuadrada de amplitud  $0 - 5V$  a través de un disparador de Schmitt. Él cual se ha implementado con un amplificador operacional LM311. Así, la señal obtenida en el nodo  $U_9$  es la que actuará sobre el MOSFET. La frecuencia de conmutación se fija mediante el ajuste de la banda de histéresis dado por la relación entre  $R_{u2}/(R_{u1} + R_{u2})$ .

## 5. Tarjeta del driver del interruptor

La función principal de esta tarjeta es permitir la conmutación controlada del MOSFET. La señal proveniente de la ley de control es transformada en una señal lógica. Ésta última representa la señal de entrada del driver, la cual determinará el estado deseado del interruptor y cuya salida es una señal analógica que permite la activación/desactivación del interruptor. Además, otra función importante de esta tarjeta es proteger la etapa del control ante posibles fallos en la etapa de potencia.

## 5.2. Resultados experimentales

La figura 5.4 muestra una visión general del hardware utilizado para validar experimentalmente la ley de control diseñada en el capítulo anterior. En esta figura se distinguen los bloques básicos comentados en el apartado anterior. Los valores de los parámetros del convertidor son los de la tabla 4.1. La figura 5.5 muestra la evolución durante el transitorio y el estado estacionario de las trayectorias del voltaje de salida  $v_R$  (traza azul) y la corriente en el inductor  $L_1$  (traza magenta) partiendo desde condiciones iniciales cero. Se observa que el controlador diseñado logra estabilizar el voltaje de salida en el valor del voltaje de referencia deseado  $V_{ref} = 120V$ . La dinámica del voltaje de salida se corresponde con la de un sistema de primer orden. El tiempo de establecimiento es aproximadamente 35ms. En la figura 5.6 se muestra la componente ac del

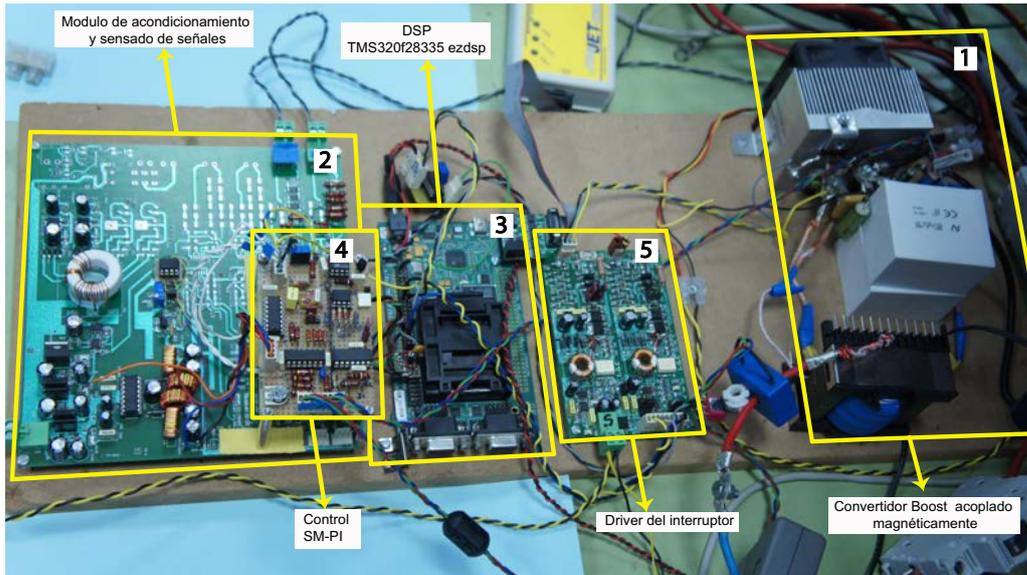


Figura 5.4: Implementación del hardware de la ley de control y del prototipo del convertidor Boost acoplado magnéticamente

voltaje de salida.

En la figura 5.7(a) se muestran las trayectorias en estado estacionario de las corrientes en los inductores  $L_1$  (traza magenta) y  $L_2$  (traza verde), la superficie de deslizamiento (traza roja) y de la señal de activación del driver o acción de control  $u$  (traza azul). De las trayectorias de las corrientes se evidencia que las formas de ondas se corresponden con las transiciones topológicas de la trayectoria  $T_4$  del cuadro 2.1. Por otro lado, de la trayectoria de la superficie de deslizamiento se observa que la condición de alcance y existencia para tener modo de deslizamiento sobre  $s(x) = 0$  se satisfacen. Además se visualiza que al principio del periodo de conmutación aparece una pequeña variación de la pendiente en la superficie. Sin embargo en los resultados teóricos este efecto no se observa. Estas diferencias pueden deberse a la calidad de las señales medidas, los elementos parásitos que no han sido considerados, o la excitación de la dinámica no modelada (sensores de corriente) en el modelo del convertidor. La frecuencia de conmutación es de 41.6KHz y el ciclo de trabajo es  $d = 75.0\%$ .

Nuevamente en la figura 5.7(b) se observa el comportamiento en estado estacionario de las corrientes en los inductores  $L_1$  (traza magenta) y  $L_2$  (traza verde), la superficie de deslizamiento (traza roja) y de la señal de activación del driver o acción de control  $u$  (traza azul) al evaluar el sistema a una frecuencia de conmutación mayor de 74.0KHz, es decir disminuir la banda de histéresis del comparador, nótese que la variación de la pendiente de la superficie de deslizamiento al principio del periodo de conmutación se hace más evidente. De modo que si se aumenta aun

más la frecuencia de conmutación, esto provocaría conmutaciones erróneas en el interruptor. El ciclo de trabajo obtenido en esta última prueba es de  $d = 77.7\%$ . Por otro lado, otras pruebas importantes para validar la ley de control diseñada son la robustez de la ley de control diseñada ante cambios en el voltaje de entrada y la carga. La figura 5.8 muestra las trayectorias del voltaje de salida (traza azul) y la corriente del inductor  $L_1$  (traza magenta) frente a variaciones en la carga  $R$ . En la figura 5.8(a) se cambia del valor nominal  $R = 113\Omega$  al valor de  $R = 213\Omega$ . Se evidencia un sobrepico en la trayectoria del voltaje de salida aproximadamente del  $M_p = 6.66\%$ , aun así el controlador logra rechazar la perturbación en un tiempo menor a 10ms. De manera similar, en la figura 5.8(b) se produce un cambio en la carga del valor  $R = 213\Omega$  al valor nominal  $R = 113\Omega$ . En este caso, se evidencia un subpico en la trayectoria del voltaje de salida cuando se produce la perturbación en la carga de aproximadamente  $M_p = 8\%$ . Nuevamente el controlador logra rechazar la perturbación en un tiempo menor a 15ms.

De manera similar, la figura 5.9 muestra las trayectorias del voltaje de salida (traza azul) y la corriente en el inductor  $L_1$  (traza magenta) cuando se producen perturbaciones en la fuente de entrada. En particular, la figura 5.9(a) corresponde a un incremento en el voltaje de entrada de  $V_{in} = 10V$  a  $V_{in} = 12V$ . Se aprecia un sobre pico en el voltaje de salida menor al  $8.5\%$  cuando se produce la perturbación. Sin embargo el controlador logra estabilizar el voltaje de salida en el valor deseado en un tiempo menor a 15ms. De igual modo, la figura 5.9(b) muestra las trayectorias del voltaje de salida (traza azul) y la corriente en el inductor  $L_1$  (traza magenta) cuando se produce un decremento en el voltaje de entrada de  $V_{in} = 12V$  a  $V_{in} = 10V$ , nuevamente se evidencia que el controlador logra rechazar la perturbación en el voltaje de salida en un tiempo menor a 16ms a pesar del subpico del  $M_p = 6.6\%$  que aparece en el voltaje de salida cuando se produce la perturbación.

### 5.3. Conclusiones

En este capítulo se ha abordado la implementación del sistema propuesto. El cuál se compone de un convertidor Boost acoplado magnéticamente y un lazo de control para el convertidor. El diseño del control involucra dos lazos de control. Un lazo interno con el objetivo de regular la suma de las corrientes promedio de los inductores acoplados magnéticamente, el cual ha sido diseñado en base a la teoría de control en modo de deslizamiento. Y un lazo externo para el cual se implementó un control de tipo PI con el fin de regular la dinámica del voltaje de salida del convertidor. Para la implementación del sistema se utilizaron componentes analógicos comerciales proporcionando así un escenario realista para evaluar la ley de control diseñada. Dicha implementación cumple con las especificaciones de control deseados. La máxima potencia de salida es de  $127W$ , una tasa de conversión de diez veces el voltaje de entrada  $V_{in} = 12V$ , frecuencia de conmutación de  $40KHz$  y ciclo de trabajo alrededor  $d = 74\%$ .

Las pruebas experimentales corroboran la efectividad del control diseñado. El controlador diseñado logra estabilizar rápidamente el voltaje de salida en el valor deseado  $V_{ref} = 120V$  sin presentar sobre

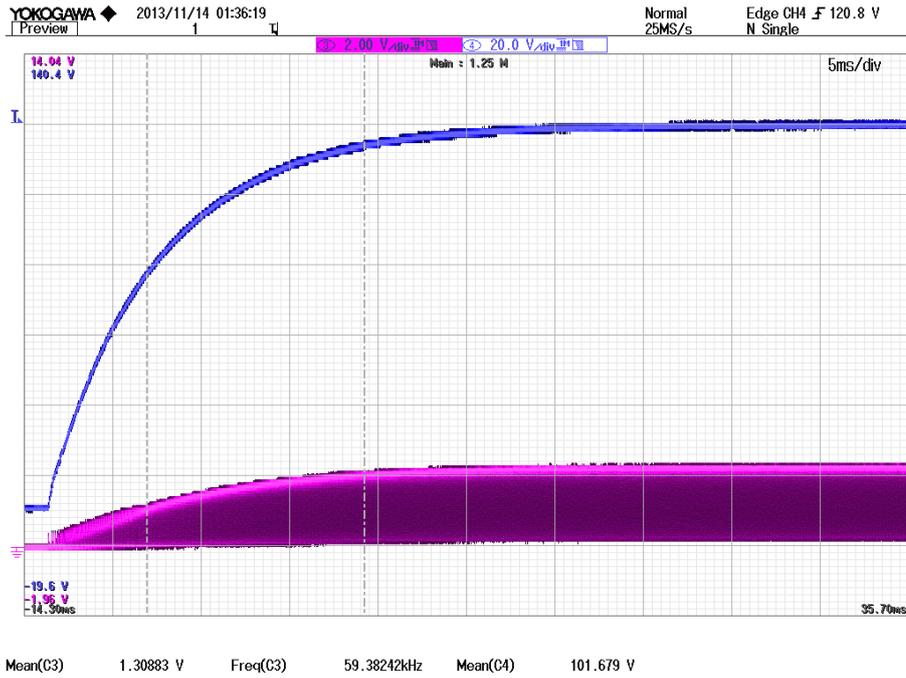


Figura 5.5: Trayectorias del voltaje de salida  $v_R$  y corriente en el inductor  $L_1$

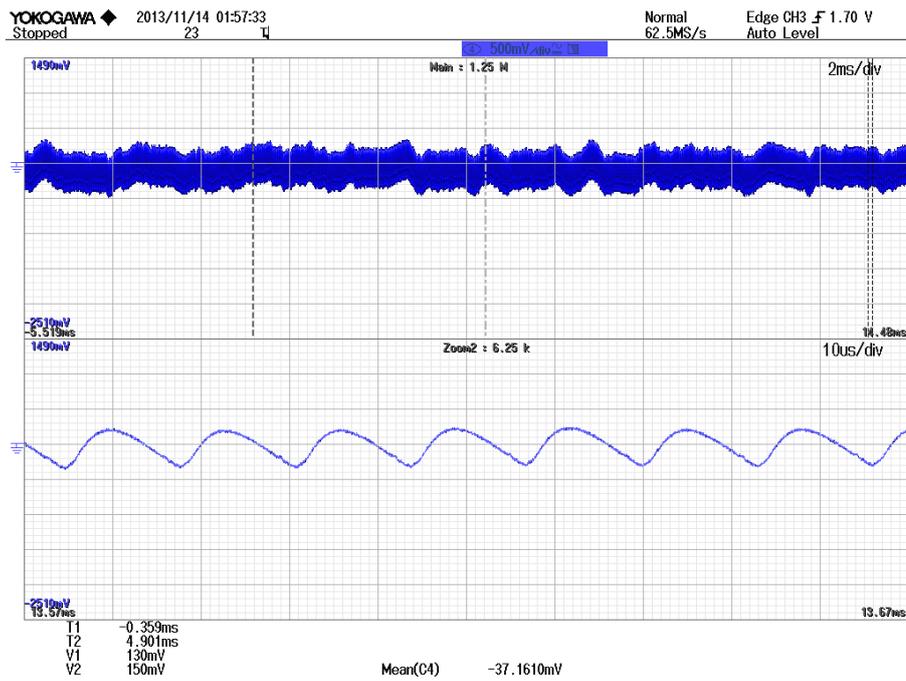
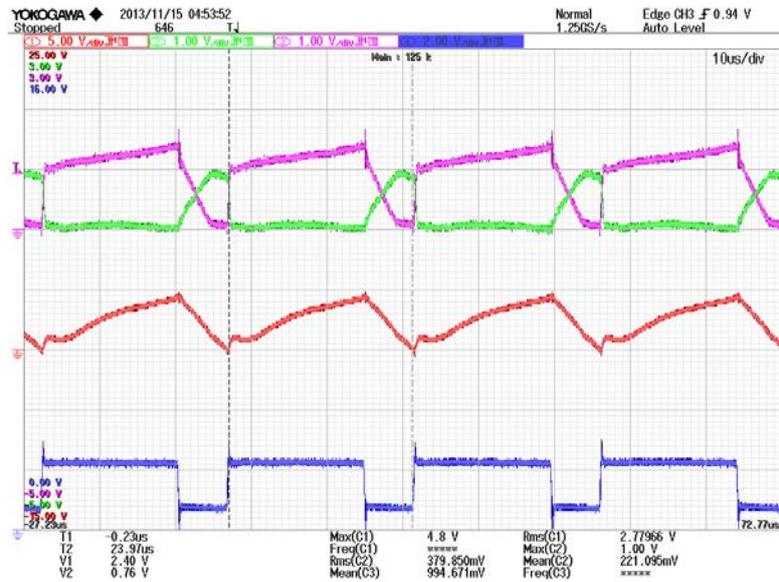
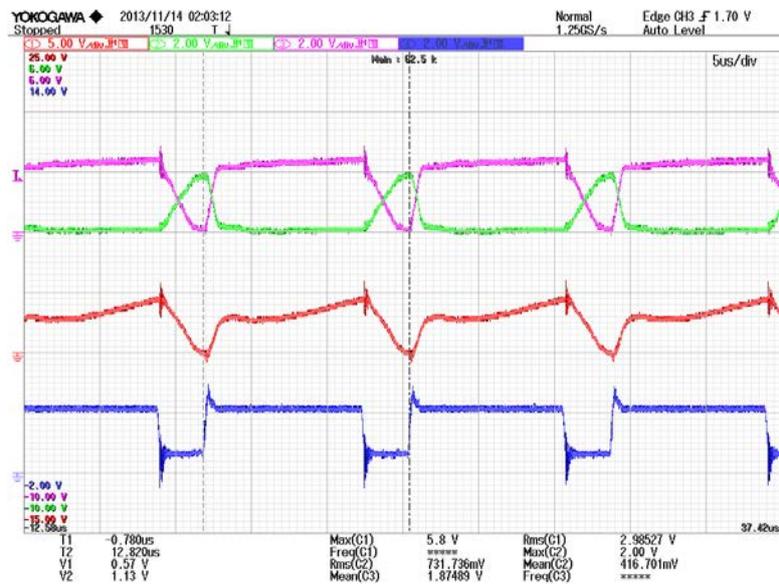


Figura 5.6: Componente ac del voltaje de salida  $v_R$

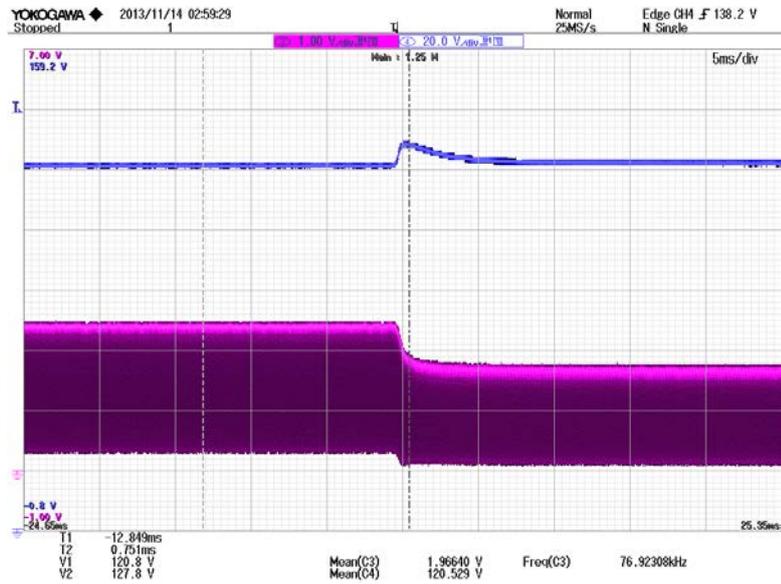


(a) Decremento del valor de la frecuencia de conmutación  $f$

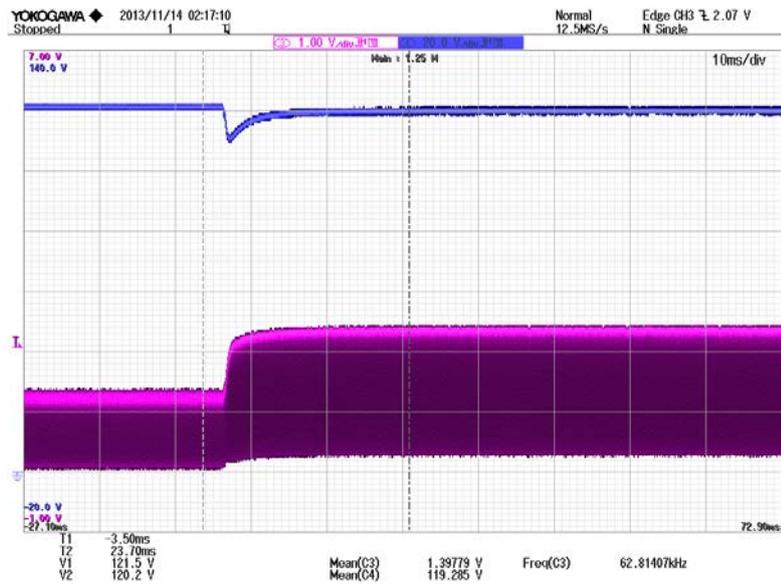


(b) Incremento del valor de la frecuencia de conmutación  $f$

Figura 5.7: Trayectorias en estado estacionario de las corrientes en los inductores  $i_{L1}$ ,  $i_{L2}$ , superficie de conmutación  $s(x)$  y la acción de control  $u$

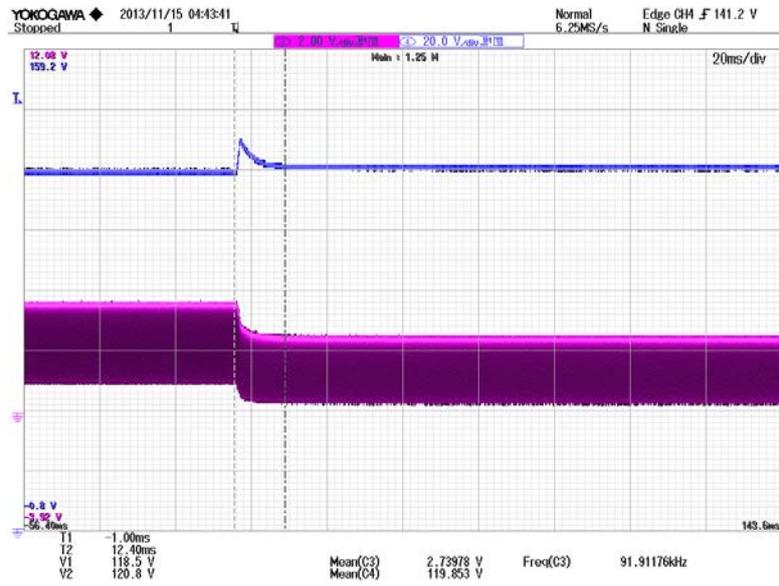


(a) Perturbación en la carga: Incremento del valor de la carga  $R$

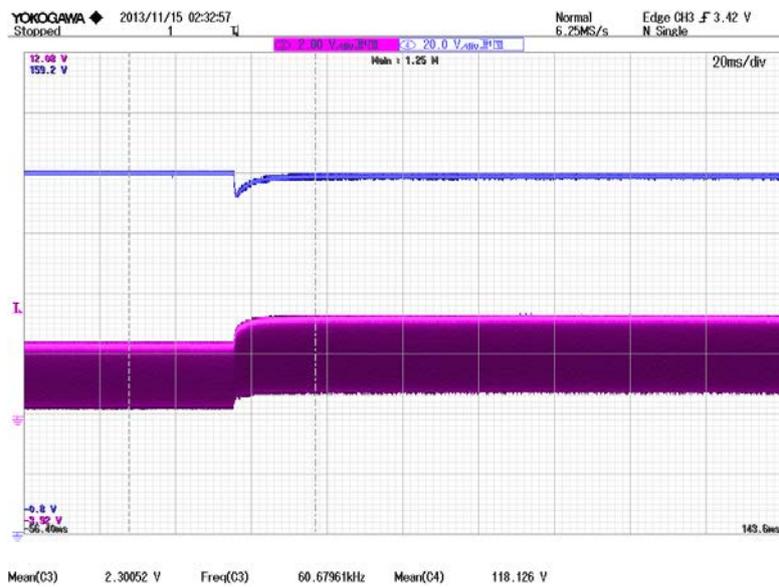


(b) Perturbación en la carga: Decremento del valor de la carga  $R$

Figura 5.8: Trayectorias del voltaje de salida  $v_R$  y la corriente en el inductor  $L_1$  frente a perturbaciones en la carga  $R$



(a) Perturbación en el voltaje de entrada: Incremento del valor de  $V_{in}$



(b) Perturbación en el voltaje de entrada: Decremento del valor de  $V_{in}$

Figura 5.9: Trayectorias del voltaje de salida  $v_R$  y la corriente en el inductor  $L_1$  frente a perturbaciones en el voltaje de entrada  $V_{in}$

pico en la tensión de salida. La dinámica del voltaje de salida se corresponde cualitativamente a los resultados obtenidos mediante simulación en el capítulo anterior. Adicionalmente se llevaron a cabo pruebas de robustez del controlador diseñado frente a perturbaciones en la carga y el voltaje de alimentación. Se han introducido cambios bruscos en el valor de la carga del valor nominal  $R = 113\Omega$  a  $R = 213\Omega$  y viceversa. A pesar de que la tensión de salida del convertidor exhibe un sobre pico (subpico) cuando se aplica el incremento (decremento) en el valor de la carga, el controlador logra estabilizar rápidamente el voltaje de salida en el valor deseado luego de un transitorio muy breve. El mismo comportamiento se obtuvo cuando se han aplicado cambios bruscos en el voltaje de entrada, ya sea aumentando o disminuyendo el valor del voltaje de entrada.

Por otra parte, de los resultados experimentales se evidencia que la trayectoria de la superficie de deslizamiento se degrada a frecuencias elevadas. Por lo tanto, para asegurar que las conmutaciones en el interruptor no sean erróneas, es decir que no se produzcan múltiples conmutaciones durante el tiempo de activación y/o desactivación del interruptor, se debe imponer un límite máximo en la frecuencia de conmutación. En algunas aplicaciones es deseable tener una frecuencia de conmutación fija, puesto que el diseño del convertidor se puede optimizar, además se minimizan las pérdidas debido a la conmutaciones en el interruptor, se reducen las interferencias electromagnéticas, entre otras razones.

# Conclusiones

---

En este capítulo se recopilan las principales conclusiones de esta tesis y además se plantean algunas áreas de futuras líneas de investigación.

En el capítulo 2 se abordó un análisis del funcionamiento del convertidor Boost acoplado magnéticamente. Se determinó las distintas configuraciones topológicas factibles que pueden aparecer en CCM y DCM en estado estacionario. Además mediante el uso de los principios convencionales en el análisis de circuitos, estos son el balance de volts-s a través del inductor y el principio de conservación de la carga a través de un capacitor y la aproximación de rizado pequeño se determinó la relación de conversión ideal  $M(d)$  para cada uno de modos de operación del convertidor Boost acoplado. Adicionalmente se determinó el límite crítico entre CCM y DCM.

La dinámica del convertidor Boost acoplado se obtuvo en el capítulo 3 mediante dos enfoques diferentes. En particular, se utilizó el enfoque predominante en la literatura en el modelado de convertidores de potencia basado en el modelo promedio. La utilización de este enfoque implica tener un conocimiento a priori de los modos o topologías del convertidor que aparecen en un ciclo de conmutación en estado estacionario. Debido a las diferentes configuraciones topológicas que se pueden presentar en el convertidor Boost acoplado tanto en CCM como DCM se hace necesario un modelo promedio único para cada uno de los modos. Aunque la dinámica obtenida del convertidor con este enfoque resulta en algunos casos bastante compleja, dicho modelo permite el cálculo de los puntos de equilibrio, un aspecto fundamental en la teoría de control.

Por otro lado, el modelo del convertidor Boost acoplado obtenido mediante un enfoque híbrido basado en sistemas lineales complementarios permite describir la dinámica del convertidor sin importar cuales configuraciones topológicas aparecen en un ciclo de conmutación en estado estacionario. De ahí, que un único modelo es suficiente para describir la dinámica tanto en CCM como DCM. Ciertamente el uso de modelos más complejos, conllevan a que los análisis de estabilidad, observabilidad, controlabilidad y diseño de controladores no resulten triviales.

Los modelos obtenidos han sido validados mediante simulación con el modelo del convertidor Boost acoplado proporcionado por la herramienta de simulación de circuitos eléctricos Psim. Si bien con el

modelo promedio se alcanza el punto de equilibrio del convertidor durante el estado estacionario, la exactitud del modelo se ve afectada cuando la frecuencia de conmutación es muy elevada. No obstante, el modelo híbrido obtenido basado en la teoría de LCS logra describir la dinámica del convertidor tanto en el estado transitorio como en el estado estacionario.

El capítulo 4 se dedicó al diseño de una ley de control para el convertidor Boost acoplado. El diseño del control se llevo a cabo a partir del modelo promedio de orden reducido obtenido del modelo lineal complementario del convertidor. El controlador propuesto posee una arquitectura de control en cascada, cuyo lazo interno está basado en un control no lineal similar al control en modo de deslizamiento, mientras que para el lazo externo se diseño una estrategia de control del tipo PI. Adicionalmente se han presentados condiciones suficientes que garantizan régimen de deslizamiento. Así como también, un análisis de la dinámica que tiene lugar cuando se tiene modo de deslizamiento y un análisis cualitativo de la estabilidad de dicha dinámica.

La efectividad y desempeño del controlador diseñado es verificada mediante simulación usando el modelo híbrido basado en LCS del convertidor ante perturbaciones en la carga, voltaje de alimentación y cambios en el voltaje de referencia.

Finalmente en el capítulo 5 se contrastó mediante resultados experimentales la efectividad de la ley de control diseñada frente a perturbaciones en la carga y en el voltaje de entrada. Los resultados experimentales obtenidos son suficientes para mostrar la robustez del controlador diseñado. Además, las diferencias de las trayectorias del convertidor obtenidas mediante simulación con respecto a los resultados experimentales son despreciables. El prototipo del convertidor y diseño del lazo de control se construyo usando componentes analógicos comerciales.

## 6.1. Trabajos futuros

Algunos de los puntos claves para ser tratados en trabajos futuros son:

- Un análisis profundo para determinar cuál de la diferentes configuraciones topológicas que aparecen en estado estacionario en DCM minimiza las pérdidas en el convertidor. Lo cual implicaría un diseño óptimo de los todos los componentes del circuito.
- Otro punto de interés, sería determinar de manera analítica la estabilidad del modelo lineal complementario del convertidor.
- Hasta el momento, no existe en la literatura una teoría general para describir la dinámica ideal de deslizamiento para modelos basados en la teoría de LCS.
- Parte del trabajo futuro puede estar orientado al uso de modelos lineales complementarios y control por modo de deslizamiento en otras topologías de convertidores.

- Por otro lado, se puede explotar el modelo lineal complementario del convertidor con otras estrategias de control ya sean lineales o no lineales.



# Análisis de la relación de conversión ideal

Las siguientes ecuaciones corresponden al análisis de conversión ideal para la trayectorias identificadas como  $T_3$  y  $T_4$  en esta tesis.

## Trayectoria $T_3$

```
[>restart;
[Parámetros del convertidor
[>val := C1 = 0.225e-4, C2 = 0.225e-4, L1 = 0.7403e-4, L2 = 0.5232e-3, M = 0.195e-3, R
= 113, T = 1/20000, Vin = 12;
[Dinámica del inductor acoplado
[>eqA := vL1 = L1*(diff(iL1(t), t))+M*(diff(iL2(t), t)), vL2 = L2*(diff(iL2(t),
t))+M*(diff(iL1(t), t));
[Relación corriente-tensión de los condensadores
[>eqB := iC1 = C1*(diff(vC1(t), t)), iC2 = C2*(diff(vC2(t), t));
[Topología q8
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
[>eq8c := diff(iL1(t), t) = M*vC2/(-M*M+L1*L2)+L2*Vin/(-M*M+L1*L2), diff(iL2(t),
t) = -L1*vC2/(-M*M+L1*L2)-M*Vin/(-M*M+L1*L2), diff(vC1(t), t) = -(vC1+vC2)/(R*C1),
diff(vC2(t), t) = (iL2*R-vC1-vC2)/(R*C2);
[ Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
[>eq8dv := subs(eq8c, eqA);
[>eq8di := subs(eq8c, eqB);
```

```

[Topología q7
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
[>eq7c := diff(iL1(t), t) = Vin/L1, diff(iL2(t), t) = 0, diff(vC1(t), t) =
-(vC1+vC2)/(R*C1), diff(vC2(t), t) = -(vC1+vC2)/(R*C2);
[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
[>eq7dv := subs(eq7c, eqA);
[>eq7di := subs(eq7c, eqB);
[Topología q4
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
[>eq4c := diff(iL1(t), t) = -L2*vC1/(-M*M+L1*L2)+M*vC2/(-M*M+L1*L2)
+L2*Vin/(-M*M+L1*L2), diff(iL2(t), t) = M*vC1/(-M*M+L1*L2)
-L1*vC2/(-M*M+L1*L2)-M*Vin/(-M*M+L1*L2), diff(vC1(t), t) = (iL1*R-vC1-vC2)/(R*C1),
diff(vC2(t), t) = (iL2*R-vC1-vC2)/(R*C2);
[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
[>eq4dv := subs(eq4c, eqA);
[>eq4di := subs(eq4c, eqB);
[Topología q1
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
[>eq1c := diff(iL1(t), t) = 0, diff(iL2(t), t) = -vC2/L2, diff(vC1(t), t) =
-(vC1+vC2)/(R*C1), diff(vC2(t), t) = (iL2*R-vC1-vC2)/(R*C2);
[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
[>eq1dv := subs(eq1c, eqA);
[eq1di := subs(eq1c, eqB);];
[Balance de volt-seg voltaje en los inductores
[>eqBvL1 := rhs(eq8dv[1])*d1*T+rhs(eq7dv[1])*(d-d1)*T+rhs(eq4dv[1])*(d2-d)*T
+rhs(eq1dv[1])*(1-d2)*T;
[>eqBvL2 := rhs(eq8dv[2])*d1*T+rhs(eq7dv[2])*(d-d1)*T+rhs(eq4dv[2])*(d2-d)*T
+rhs(eq1dv[2])*(1-d2)*T;
[Balance de volt-seg voltaje en los condensadores
[>eqBiC1 := rhs(eq8di[1])*d1*T+rhs(eq7di[1])*(d-d1)*T+rhs(eq4di[1])*(d2-d)*T
+rhs(eq1di[1])*(1-d2)*T;
[>eqBiC2 := rhs(eq8di[2])*d1*T+rhs(eq7di[2])*(d-d1)*T+rhs(eq4di[2])*(d2-d)*T
+rhs(eq1di[2])*(1-d2)*T;
[>ipk1 := Vin*d1*T/L1;
[>eqvL14 := Vin-vC1 = -L1*ipk12/((d2-d)*T)+M*ipk22/((d2-d)*T);
[>eqvL24 := -vC2 = L2*ipk22/((d2-d)*T)-M*ipk12/((d2-d)*T);

```

```
[>eqvL18 := Vin = L1*ipk11/(d1*T)-M*ipk21/(d1*T);
[>eqvL28 := -vC2 = M*ipk11/(d1*T)-L2*ipk21/(d1*T);
[>eqD1p := (1/2)*ipk12*(d2-d) = (vC1+vC2)/R;
[>eqD2p := (1/2)*ipk21*d1+(1/2)*ipk22*(d2-d)+(1/2)*(ipk22+ipk21)*(1-d2) = (vC1+vC2)/R;
[>eq:= eqBiC1, eqBiC2, eqBvL1, eqBvL2, eqD1p, eqD2p, eqvL14, eqvL18, eqvL24, eqvL28
[Expresiones en estado estacionario ciclo de trabajo de los diodos D1 y D2, valores
picos de la corriente en los inductores y componente dc de los voltajes en los
condensadores y corrientes en los inductores
[>sol := solve(eq, d1, d2, iL1, iL2, vC1, vC2, ipk11, ipk12, ipk21, ipk22);
```

#### Trayectoria $T_4$

```
[>restart;
[Parámetros del convertidor
[>val := C1 = 0.225e-4, C2 = 0.225e-4, L1 = 0.7403e-4, L2 = 0.5232e-3, M = 0.195e-3, R
= 113, T = 1/20000, Vin = 12;
[Dinámica del inductor acoplado
[>eqA := vL1 = L1*(diff(iL1(t), t))+M*(diff(iL2(t), t)), vL2 = L2*(diff(iL2(t),
t))+M*(diff(iL1(t), t));
[Relación corriente-tensión de los condensadores
[>eqB := iC1 = C1*(diff(vC1(t), t)), iC2 = C2*(diff(vC2(t), t));
[Topología q7
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
[>eq7c := diff(iL1(t), t) = Vin/L1, diff(iL2(t), t) = 0, diff(vC1(t), t) =
-(vC1+vC2)/(R*C1), diff(vC2(t), t) = -(vC1+vC2)/(R*C2);
[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
[>eq7dv := subs(eq7c, eqA);
[>eq7di := subs(eq7c, eqB);
[Topología q4
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
[>eq4c := diff(iL1(t), t) = -L2*vC1/(-M*M+L1*L2)+M*vC2/(-M*M+L1*L2)
+L2*Vin/(-M*M+L1*L2), diff(iL2(t), t) = M*vC1/(-M*M+L1*L2)
-L1*vC2/(-M*M+L1*L2)-M*Vin/(-M*M+L1*L2), diff(vC1(t), t) = (iL1*R-vC1-vC2)/(R*C1),
diff(vC2(t), t) = (iL2*R-vC1-vC2)/(R*C2);
```

```

[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
]>eq4dv := subs(eq4c, eqA);
]>eq4di := subs(eq4c, eqB);
[Topología q1
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
]>eq1c := diff(iL1(t), t) = 0, diff(iL2(t), t) = -vC2/L2, diff(vC1(t), t) =
-(vC1+vC2)/(R*C1), diff(vC2(t), t) = (iL2*R-vC1-vC2)/(R*C2);
[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
]>eq1dv := subs(eq1c, eqA);
]>eq1di := subs(eq1c, eqB);
[Topología q2
[Ecuaciones diferenciales de los voltajes en los condensadores (C1,C2) e inductores
(L1,L2)
]>eq2c := diff(iL1(t), t) = 0, diff(iL2(t), t) = 0, diff(vC1(t), t) =
-(vC1+vC2)/(R*C1), diff(vC2(t), t) = -(vC1+vC2)/(R*C2);
[Ecuaciones de los voltajes en los inductores y de las corrientes en los
condensadores;
]>eq2dv := subs(eq2c, eqA);
]>eq2di := subs(eq2c, eqB);
[Balance de volt-seg voltaje en los inductores
]>eqBvL1 := rhs(eq7dv[1])*d+rhs(eq4dv[1])*(d1-d)+rhs(eq1dv[1])*(d2-d1)
+rhs(eq2dv[1])*(d3-d2);
]>eqBvL2 := rhs(eq7dv[2])*d+rhs(eq4dv[2])*(d1-d)+rhs(eq1dv[2])*(d2-d1)
+rhs(eq2dv[2])*(d3-d2);
[Balance de volt-s corriente en los condensadores
]>eqBiC1 := rhs(eq7di[1])*d+rhs(eq4di[1])*(d1-d)+rhs(eq1di[1])*(d2-d1)
+rhs(eq2di[1])*(d3-d2);
]>eqBiC2 := rhs(eq7di[2])*d+rhs(eq4di[2])*(d1-d)+rhs(eq1di[2])*(d2-d1)
+rhs(eq2di[2])*(d3-d2);
]>ipk1 := Vin*d*T/L1;
]>eqD1p := (1/2)*ipk1*(d1-d) = (vC1+vC2)/R;
]>eqD2p := (1/2)*ipk2*(d2-d) = (vC1+vC2)/R;
]>eqD3p := L2*ipk2/((d2-d1)*T) = vC2;
]>eq := eqBiC1, eqBiC2, eqBvL1, eqBvL2, eqD1p, eqD2p, eqD3p;
[Expresiones en estado estacionario ciclo de trabajo de los diodos D1 y D2, valores
picos de la corriente en los inductores y componente dc de los voltajes en los
condensadores y corrientes en los inductores
[sol := 'assuming'([solve(eq, d1, d2, iL1, iL2, vC1, vC2, ipk2)], [L1 >0, L2 >0, M >0,
T >0, d >0, Vin >0, R >0, d3 >0]);

```

# Análisis de la dinámica promedio cuando se tiene modo de deslizamiento

---

Las siguientes ecuaciones corresponden al análisis de la dinámica promedio cuando se tiene modo de deslizamiento para las trayectorias identificadas como  $T_3$  y  $T_4$  en esta tesis.

## Trayectoria $T_3$

```
[>restart; with(LinearAlgebra); with(plots);
[Vector de estados
[>x := Vector(4, (1) = x1, (2) = x2, (3) = x3, (4) = x4);
[Vector de variables complementarias
[>W1 := Vector(2, (1) = w1, (2) = w2); W2 := Vector(2, (1) = w1, (2) = w2);
[Constantes
[>a := a1 = L[2]/(L[1]*L[2]-M*M), a2 = M/(L[1]*L[2]-M*M), a3 = L[1]/(L[1]*L[2]-M*M);
[Dinámica cuando S=ON
[>AA1 := Matrix(4, 4, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = a2, (2, 1) = 0, (2,
2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = -a3, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = -1/(R*C1), (3, 4) =
-1/(R*C1), (4, 1) = 0, (4, 2) = 1/C2, (4, 3) = -1/(R*C2), (4, 4) = -1/(R*C2)); BB1 :=
Matrix(4, 2, (1, 1) = 0, (1, 2) = -a2, (2, 1) = 0, (2, 2) = a3, (3, 1) = 1/C1, (3, 2)
= 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0); EE1 := Vector(4, (1) = a1, (2) = -a2, (3) = 0, (4) = 0);
[>CC1 := Matrix(2, 4, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 1, (1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2,
2) = 1, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0); DD1 := Matrix(2, 2, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (2, 1) =
0, (2, 2) = 0); FF1 := Vector(2, (1) = 0, (2) = 0);
```

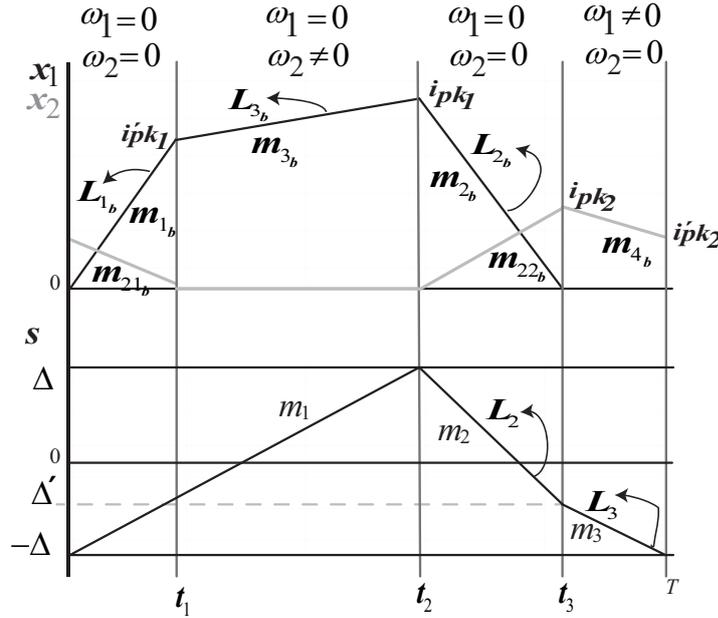


Figura B.1: Formas de onda de las trayectorias en  $T_3$  en un periodo de conmutación

```
[>f1 := MatrixMatrixMultiply(AA1, x)+MatrixMatrixMultiply(BB1, W1)+EE1*Vin;
[Dinámica cuando S=OFF
>AA2 := Matrix(4, 4, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = -a1, (1, 4) = a2, (2, 1)
= 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = a2, (2, 4) = -a3, (3, 1) = 1/C1, (3, 2) = 0, (3, 3) =
-1/(R*C1), (3, 4) = -1/(R*C1), (4, 1) = 0, (4, 2) = 1/C2, (4, 3) = -1/(R*C2), (4, 4) =
-1/(R*C2)); BB2 := Matrix(4, 2, (1, 1) = a1, (1, 2) = -a2, (2, 1) = -a2, (2, 2) = a3,
(3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0); EE2 := EE1;
>CC2 := Matrix(2, 4, (1, 1) = 1, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2,
2) = 1, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0); DD2 := Matrix(2, 2, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (2, 1) =
0, (2, 2) = 0); FF2 := Vector(2, (1) = 0, (2) = 0);
>f2 := MatrixMatrixMultiply(AA2, x)+MatrixMatrixMultiply(BB2, W2)+EE2*Vin;
[Superficie de deslizamiento
>s:=L[1]*sqrt((L[1]*L[2]-M*M)/C1)*x1(t)/Vin+M*sqrt((L[1]*L[2]-M*M)/C1)*x2(t)/Vin-vd;
>m1 := collect(simplify(subs(a, subs(diff(x1(t), t) = f1[1], diff(x2(t), t) = f1[2],
diff(s, t)))), w2, x4);
>m2 := subs(w1 = 0, collect(simplify(subs(a, subs(diff(x1(t), t) = f2[1], diff(x2(t),
t) = f2[2], diff(s, t)))), w2, x4));
>m3 := collect(simplify(subs(a, subs(diff(x1(t), t) = f2[1], diff(x2(t), t) = f2[2],
diff(s, t)))), w2, x4);
>t1 := 2*Delta/m1;
[En el intervalo [0,t1]
>m1b := subs(w2 = 0, subs(a, f1[1]));
>L1b := y = m1b*xx;
```

```

[>m21b := subs(w1 = 0, w2 = 0, subs(a, f1[2]));
[>L21b := y = m21b*(xx-t2);
[>ipk2b := simplify(subs(xx = 0, rhs(L21b)));
[En el intervalo [t1,t2]
[>m3b := solve(subs(diff(x2(t), t) = 0, diff(s, t)) = m1, diff(x1(t), t));
[>L3b := y-ipk1 = m3b*(xx-t1);
[>t2 := simplify(solve(solve(L1b, y) = solve(L3b, y), xx));
[ En el intervalo [t2,t3]
[>m2b := subs(w1 = 0, w2 = 0, subs(a, f2[1]));
[>L2b := y-ipk1 = m2b*(xx-t1);
[>t3 := solve(subs(y = 0, L2b), xx);
[>m22b := subs(w1 = 0, w2 = 0, a, f2[2]);
[>L22b := simplify(y = m22b*(xx-t1));
[En el intervalo [t3,T]
[>m4b := solve(subs(diff(x1(t), t) = 0, diff(s, t)) = m3, diff(x2(t), t));
[>omega1 := solve(subs(w2 = 0, subs(a, f2[2])) = m4b, w1);
[>L2 := y-Delta = m2*(xx-t1);
[>L3 := y+Delta = m3*(xx-T);
[>tt3 := subs(w1 = omega1, simplify(solve(solve(L2, y) = solve(L3, y), xx)));
[>Ipk1 := simplify(solve(t3 = tt3, ipk1));
[>ipk1b := simplify(subs(ipk1 = Ipk1, subs(xx = t2, rhs(L1b))));
[>Ipk2 := simplify(subs(xx = tt3, rhs(L22b)));
[>Ipk2b := simplify(subs(ipk1 = Ipk1, ipk2b));
[ Valor promedio de x1
[>x1p := simplify(subs(ipk1 = Ipk1, ((1/2)*ipk1b*t2+(1/2)*(t1-t2)*(ipk1b+Ipk1)
+(1/2)*(tt3-t1)*Ipk1)/T));
[Valor promedio de la corriente en el diodo D1
[>id1 := simplify((1/2)*Ipk1*(tt3-t1)/T);
[Valor promedio de x2
[>x2p := simplify(subs(ipk1 = Ipk1, ((1/2)*t2*Ipk2b+(1/2)*(tt3-t1)*Ipk2+(1/2)
*(T-tt3)*(Ipk2+Ipk2b))/T));
[Dinámica promedio x3 y x4
[xdot := dx3 = id1/C1-(x3+x4)/(C1*R), dx4 = x2p/C2-(x3+x4)/(C2*R);
[Punto de equilibrio
[pe := 'assuming'([solve(eq2, x3, x4)], [C1 >0, M >0, Vin >0, R >0, L[1] >0, L[2] >0,
Delta >0, vd >0]);

```



```

[Dinámica cuando S=OFF
[>AA2 := Matrix(4, 4, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = -a1, (1, 4) = a2, (2, 1)
= 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = a2, (2, 4) = -a3, (3, 1) = 1/C1, (3, 2) = 0, (3, 3) =
-1/(R*C1), (3, 4) = -1/(R*C1), (4, 1) = 0, (4, 2) = 1/C2, (4, 3) = -1/(R*C2), (4, 4) =
-1/(R*C2)); BB2 := Matrix(4, 2, (1, 1) = a1, (1, 2) = -a2, (2, 1) = -a2, (2, 2) = a3,
(3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0); EE2 := EE1;
[>CC2 := Matrix(2, 4, (1, 1) = 1, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2,
2) = 1, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0); DD2 := Matrix(2, 2, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (2, 1) =
0, (2, 2) = 0); FF2 := Vector(2, (1) = 0, (2) = 0);
[>f2 := MatrixMatrixMultiply(AA2, x)+MatrixMatrixMultiply(BB2, W2)+EE2*Vin;
[Superficie de deslizamiento
[>s:=L[1]*sqrt((L[1]*L[2]-M*M)/C1)*x1(t)/Vin+M*sqrt((L[1]*L[2]-M*M)/C1)*x2(t)/Vin-vd;
[>m1 := collect(simplify(subs(a, subs(diff(x1(t), t) = f1[1], diff(x2(t), t) = f1[2],
diff(s, t)))), w2, x4);
[>m2 := subs(w1 = 0, collect(simplify(subs(a, subs(diff(x1(t), t) = f2[1], diff(x2(t),
t) = f2[2], diff(s, t)))), w2, x4));
[>m3 := collect(simplify(subs(a, subs(diff(x1(t), t) = f2[1], diff(x2(t), t) = f2[2],
diff(s, t)))), w2, x4);
[>t1 := 2*Delta/m1;
[En el intervalo [0,t1]
[>m1b := solve(subs(diff(x2(t), t) = 0, diff(s, t)) = m1, diff(x1(t), t));
[>ipk1 := m1b*t1;
[ En el intervalo [t1,t2]
[>m2b := subs(w1 = 0, w2 = 0, subs(a, f2[1]));
[>L2b := y-ipk1 = m2b*(xx-t1);
[>t2 := simplify(solve(subs(y = 0, L2b), xx));
[>m4b := subs(w1 = 0, w2 = 0, subs(a, f2[2]));
[>L4b := simplify(y = m4b*(xx-t1));
[>ipk2 := simplify(subs(xx = t2, rhs(L4b[1])));
[En el intervalo [t2,t3]
[>m3b := solve(subs(diff(x1(t), t) = 0, diff(s, t)) = m3, diff(x2(t), t));
[>omega1 := solve(subs(w2 = 0, a, f2[2]) = m3b, w1);
[>mm3 := simplify(subs(w1 = omega1, m3));
[>L3b := y-ipk2 = m3b*(xx-t2);
[>t3 := simplify(subs(w1 = omega1, solve(subs(y = 0, L3b), xx)));
[>L2 := simplify(y-Delta = m2*(xx-t1));
[>y2b := M*sqrt((L[1]*L[2]-M*M)/C1)*ipk2/Vin-vd;
[>L3 := y-y2b = mm3*(xx-t2);
[>T := solve(subs(y = -Delta, L3), xx);
[Valor promedio de x1
[>x1p := simplify((1/2)*ipk1*t2/T);
[Valor promedio de la corriente en el diodo D1
[>id1 := simplify((1/2)*ipk1*(t2-t1)/T);

```

```
[Valor promedio de x2  
>x2p := simplify((1/2)*ipk2*(t3-t1)/T);  
[Ciclo de trabajo  
>d := t1/T;  
[Dinámica promedio x3 y x4  
>xdot := dx3 = id1/C1-(x3+x4)/(C1*R), dx4 = x2p/C2-(x3+x4)/(C2*R);  
[Punto de equilibrio x3 y x4  
pe := 'assuming'([solve(xdot, x3, x4)], [C1 >0, M >0, Vin >0, R >0, L[1] >0, L[2]  
>0])
```