Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas

Autora:

Judit Chico

Directora:

Núria Planas

Dpt. Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Facultat de Ciències de l'Educació
Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis presentada para obtener el título de Doctora con Mención Internacional
por la Universitat Autònoma de Barcelona
Mayo 2014

Diseño de la portada:
Miriam Rey

Los puntos de luz están unidos por destellos de mayor o menor intensidad de la misma forma que la interacción está conformada por acciones interdependientes, más o menos productivas desde el punto de vista de las matemáticas. En esos caminos de luz se crean y se comparten los contenidos matemáticos que en su conjunto constituyen la argumentación colectiva.

A Manuel,
por escuchar en mis silencios
y esperar en mis huídas.

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que durante estos cuatro años han aportado su granito de arena a este trabajo de investigación y me han ayudado a crecer en lo profesional y en lo personal. Es imposible nombrarlos a todos aquí, para todos ellos mi más sincera gratitud.

Primeramente quiero agradecer a Núria Planas, mi tutora de tesis por confiar en mí y darme la oportunidad de conocer este "mundillo" de la investigación. Núria, me quito el sombrero ante tu gran capacidad de trabajo. Quiero darte las gracias por tus directrices y el tiempo y esfuerzo dedicado a este trabajo de investigación y por esas correcciones maratonianas, en festivos y días de guardar, en estos últimos meses de trabajo intenso. He aprendido mucho a tu lado.

En segundo lugar, quiero agradecer a la gran familia que forma el Col·legi Sant Miquel, por su buena y calurosa acogida en mis inicios como docente así como por su colaboración en esta investigación. A Cristina Piris, por compartir su clase y por su paciencia y cariño. A Raimon Sucarrats, por facilitar todo el proceso. Y en especial, a los estudiantes que participaron en este estudio, por su buena predisposición y entusiasmo.

También quiero agradecer al Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona, por su acogida y apoyo durante todo este tiempo. Especialmente a Josep Maria Fortuny, por guardar estratégicamente mi currículum en un cajón y confiar en mí en la organización de los *Divendres de Recerca*. A Edelmira Badillo, por su sonrisa, su humanidad y su gran ayuda con la docencia. A mis compañeros más cercanos de doctorado: Laura, que me dio la bienvenida y a quien le debo el diseño de las ya internacionalmente conocidas baldosas y jardineras; Manuel, que me ayudó con el inglés en las primeras presentaciones en congresos; y Miquel, por sus ánimos y su buena predisposición a realizar cualquier favor. A Benja y Àngels por su amabilidad y sus

rápidas gestiones administrativas. En general, quiero agradecer a todos los miembros del Departament que me han dado sugerencias y ánimos en esas conversaciones informales tan importantes para sobrellevar el día a día.

También quiero agradecer a Núria Rosich que me animó a empezar este trabajo de tesis, su apoyo en mis inicios en el Máster de Investigación en Didácticas Específicas en la Universidad de Barcelona. Asimismo mi gratitud para Vicenç Font, Joaquim Giménez y todo el profesorado del Máster que me brindaron su conocimiento y ayuda en los principios de este viaje.

A lo largo de estos años, mi participación en diferentes congresos nacionales e internacionales y seminarios organizados en la universidad, me ha llevado a conocer a personas que me han brindado su ayuda desinteresadamente. Entre ellas, mi más sincera gratitud y cariño a Arne Jacobsen y Janne Fauskanger que me invitaron a participar en un seminario de investigación en la Universidad de Stavanger y me trataron con todo el cariño del mundo. Gracias Janne por abrirme las puertas de tu casa. Gracias Arne por tu apoyo desde la distancia, tus ánimos y por compartir tu experiencia conmigo en los momentos “dark”.

Tuve el privilegio de realizar una tutoría con el Profesor Götz Krummheuer que conllevó mejoras importantes en este trabajo. Además de sus sugerencias, quiero agradecerle su inmensa generosidad, su tiempo y su buen humor.

Llega el turno para mi querida comitiva berlinensa. No tengo palabras suficientes para agradecer el trato recibido en la Freie Universität Berlin de manos del Profesor Uwe Gellert y todo su equipo. Uwe, gracias por proporcionarme el “retiro espiritual” necesario para finalizar esta tesis doctoral. Gracias por tus valiosas sugerencias, tu buena predisposición, tus ánimos y por esa libertad que desprendes. Hauke, he disfrutado mucho de tu humor, tus siempre interesantes conversaciones y tu espíritu crítico. Nina, gracias por tu amabilidad, tu generosidad y tu cariño para conmigo. Johannes, gracias por compartir tus juegos matemáticos y tu sonrisa diaria. A todo el equipo, gracias por acogerme tan bien, por tratarme siempre como a una más y por vuestras sugerencias y ayuda en diferentes seminarios.

Como parte de la comitiva berlinensa, quiero agradecer a Sainza su amistad, su apoyo moral, sus “hay que cerrar”… A Riki por sus sugerencias en las pruebas de impresión. Las dos habéis sido mi hogar en Berlín, el tangible y el intangible. Todo hubiese sido más duro y aburrido sin vosotras.

A Haider, que se convirtió en un amigo inesperado, por su ayuda desinteresada en la revisión del inglés, sus clases de alemán y árabe, su cariño y sus conversaciones.

Toca el turno para esas personas que acompañan mis aventuras desde hace tiempo. Esos pilares sin los que quizás no hubiera sido tan atrevida.

Manuel, gracias, gracias y gracias. Tendría que escribir otra tesis para poner palabras a mi gratitud. Núria y Sergi gracias por vuestra honestidad, el apoyo incondicional, el cariño, la identificación y por conocer el precio.

A las membrillas, por su amistad, por compartir los días soleados y ayudarme a mantener el barco a flote en las tempestades. A todos mis amigos, gracias por aguantar mi monotema, mis ausencias y darme tanto.

A mis padres, gracias por los esfuerzos hechos en los tiempos en lo que no era tan fácil. Por creer siempre en mi educación y por vuestro apoyo y respeto. Sin vosotros, no sería la persona que soy. A mi hermano, por entender. A mis sobrinos que me recuerdan la importancia de la curiosidad en el aprendizaje. A ellos y al resto de mi familia, gracias por comprender mis ausencias.

Para finalizar, quiero agradecer a todos los ciudadanos de este país que con su granito de sueldo, gestionado por el Ministerio de Economía y Competitividad, han hecho posible mi dedicación a este trabajo durante estos años. Espero haber estado a la altura de tanta generosidad. Para ellos mi compromiso por una educación matemática de calidad para todos.

Berlín, Mayo 2014

Tabla de contenidos

Lista de Figuras

Lista de Tablas

…one is always an open question with a shifting answer depending upon the positions made available within one's own and others' discursive practices and within those practices, the stories through which we make sense of our own and others' lives. (Davis & Harré, 1999)

1. Introducción

En este capítulo se introduce brevemente el presente trabajo de tesis doctoral. En primer lugar, se da cuenta del marco institucional en el que se ha desarrollado la investigación y la motivación personal relacionada con la temática concreta del estudio. En segundo lugar, se expone la problemática sobre aspectos de interacción social y argumentación colectiva, cuya conexión justifican tanto la pertinencia social como la científica. Seguidamente se indica la pregunta de investigación que ha guiado el proceso, así como los objetivos planteados para la concreción de la pregunta mediante la creación e implementación de un diseño empírico. Por último, se resume la estructura de la memoria.

Tabla de contenidos

1.1 Contexto y motivación

La tesis doctoral, 'Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas', se sitúa en el área de investigación de Educación Matemática. Se enmarca dentro del Programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática de la Universitat Autònoma de Barcelona. La involucración de la autora en este Programa resulta en su origen de la experiencia docente en aulas de matemáticas de secundaria. Durante la práctica educativa, surgieron inquietudes acerca de la actividad matemática en entornos colaborativos. Más especialmente, se observaron dificultades en los estudiantes sobre aspectos relativos a la formulación y comunicación de argumentaciones matemáticas. En un intento por posibilitar escenarios en el aula de matemáticas donde se potenciara la mejora de estas habilidades argumentativas, se experimentó con distintas dinámicas de interacción entre alumnos de secundaria. Esta experimentación sugirió que algunas de las dificultades podrían estar derivadas de un escaso aprovechamiento del "otro" como recurso en el aula y, más en general, del poco uso y la poca optimización de entornos colaborativos en clase. Con esta motivación, se planteó el inicio de un trabajo de investigación que habría de examinar relaciones entre interacción entre participantes y argumentación colectiva en el aula de matemáticas.

Este trabajo forma parte del conjunto de investigaciones que se iniciaron en el marco más amplio del Proyecto 'Estudio sobre el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas', con referencia EDU2009-07113, del cual la autora es Becaria FPI, con credencial BES-2010-030877. Estas investigaciones están teniendo continuidad en el Proyecto, 'Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático', con referencia EDU2012-31464 y financiado como el anterior por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Es además uno de los varios trabajos que se están realizando en el seno del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM), con referencia 2014 SGR 972 otorgada por el reconocimiento como Grupo de Investigación Consolidado por la Generalitat de Catalunya. La conjunción de todos estos escenarios ha hecho posible el trabajo y ha constituido un respaldo crucial en el crecimiento profesional de la autora.

1.2 Problemática y justificación

Durante las últimas dos décadas en varias partes del mundo, entre ellas Cataluña, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han vivido cambios sustanciales en su conceptualización y práctica. Al respecto, se ha puesto una mayor atención en los procesos de comunicación de razonamientos, que incluyen el desarrollo y presentación de argumentaciones matemáticas. Desde la política educativa catalana se recomienda “crear situaciones didácticas adecuadas para el conocimiento pueda ser contrastado y discutido por el alumnado entre sí” (Orientacions per al Desplegament del Currículum de Matemàtiques a l’ESO, 2010, p. 17). En consonancia, desde la política educativa estadounidense se hace hincapié en la necesidad de crear ambientes de aula donde los estudiantes aprendan a “construir argumentos matemáticos y responder a los argumentos de los demás” (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 18). Esta visión de la matemática escolar implica objetivos ambiciosos y desafiantes en la enseñanza y aprendizaje de la materia. También plantea retos en la investigación en el área ya que se requiere elaborar resultados sólidos relativos a la creación de escenarios en el aula donde se promueva la comunicación entre estudiantes y la argumentación colectiva.

De un modo similar a lo que plantea Krummheuer (2007), en este trabajo de tesis se considera la relevancia de la argumentación colectiva en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al asumir que este tipo de práctica da valor a los procesos de colaboración, negociación y construcción de conocimiento compartido. Así, se contempla la argumentación desde el punto de vista del uso y efecto en la actividad colectiva destinada al aprendizaje de las matemáticas (Rasmussen & Stephan, 2008). Focalizar la atención en la actividad matemática colectiva contribuye a la comprensión del aprendizaje y de la argumentación como productos en construcción, no finalizados y con diferentes niveles de elaboración.

Por otro lado, la investigación sobre el impacto del aprendizaje en interacción se ha focalizado mayormente en la interacción en pareja (e.g., Cobo & Fortuny, 2000; Sfard & Kieran, 2001), y en menor cantidad, en gran grupo (e.g., Morera, 2013; Smith & Stein, 2011). Son pocas, sin embargo, las investigaciones que examinan la interacción en grupo reducido (más de dos o tres alumnos pero no toda la clase) siendo esta una disposición habitual en muchas aulas (Krummheuer, 2011). En la investigación que se presenta, se desarrolla un análisis sistemático de los procesos en grupo a fin de entender la complejidad del aprendizaje de las matemáticas en la interacción con los otros. Se entienden los procesos sociales como parte integral de la actividad matemática en clase, tal como ya señalara Voigt (1995). Son muchas las investigaciones que apuntan a los efectos positivos de la interacción social en el aprendizaje matemático (e.g., Arnal, 2013; Planas, 2014). Otros resultados, sin embargo, han señalado que la interacción entre estudiantes puede devenir en ocasiones un obstáculo al aprendizaje matemático (e.g., Saxe y otros, 2009; Sfard & Kieran, 2001). Estas últimas investigaciones plantean la necesidad de examinar la relación entre la interacción y la construcción de conocimiento escolar. En este sentido, el objetivo de este estudio es examinar el potencial de la interacción en grupo desde la perspectiva de la construcción de la argumentación colectiva.

1.3 Pregunta y objetivos de investigación

En esta sección se delimita la pregunta de investigación que emerge de la problemática presentada. Asimismo se concretan los objetivos de investigación que habrán de determinar el modo de aproximar respuestas a la pregunta planteada. La pregunta de investigación que ha guiado este estudio es la siguiente:

¿Cómo se construye la argumentación colectiva durante la interacción en grupo en una clase de matemáticas de secundaria?

Los términos clave en la formulación de la pregunta son ‘argumentación colectiva’ e ‘interacción en grupo’. Por un lado, la argumentación colectiva hace referencia a la actividad matemática en la que se ven involucrados los estudiantes. Por el otro, la argumentación colectiva es vista como el producto resultante de la interacción en grupo, que se construye mediante contribuciones específicas. En este sentido, la cuestión anterior alude a los avances que caracterizan la argumentación colectiva en base a las interacciones involucradas. En lo referente a la interacción en grupo, este término indica la dinámica de aula planteada en el diseño experimental, que es la de discusión en grupo. Mediante este término se concreta la interpretación del contexto en el cual se examinar la argumentación colectiva. Desde este punto de vista, la cuestión de investigación busca explorar tipos de interacción o interacciones con impacto potencial en la construcción de argumentación colectiva orientada a la resolución de tareas matemáticas. Así, la cuestión implica una relación recíproca entre argumentación colectiva e interacción en grupo.

Fijando la mirada en cómo los estudiantes construyen y revisan sus ideas matemáticas en un ambiente colaborativo de resolución de problemas de una clase de secundaria, se plantean los siguientes tres objetivos:

Objetivo 1. Identificar tipos de interacción en discusiones en grupo de un aula de matemáticas.

Objetivo 2. Relacionar los tipos de interacción desde la perspectiva de la argumentación colectiva.

Objetivo 3. Explorar la complejidad de la interacción en la construcción de argumentación colectiva.

Los tres objetivos siguen un orden cronológico y encadenado en tanto que el logro de uno de ellos ha de posibilitar la consecución del siguiente. Para el primer objetivo se requiere examinar las discusiones en grupo de acuerdo con las interacciones identificables en el transcurso de la actividad matemática. El segundo objetivo conlleva la búsqueda de regularidades entre los tipos de interacción identificados según su contribución a la argumentación colectiva. Por último, el tercer objetivo implica examinar globalmente las interacciones en el grupo y las contribuciones a la argumentación colectiva respecto a la evolución de dicha argumentación con efectos en la resolución de las tareas matemáticas.

1.4 Estructura de la memoria

El presente manuscrito se ha estructurado en seis capítulos. En la introducción de cada uno se incluye una breve presentación de las secciones en las que se divide y una tabla de contenidos. A continuación se realiza un compendio de cada capítulo a fin de facilitar la gestión de la lectura.

En esta introducción que corresponde al Capítulo 1 se expone el marco institucional que ha posibilitado la investigación y la motivación que llevó a la autora a iniciar un trabajo de tesis doctoral con una determinada orientación. Seguidamente se presenta la problemática de investigación así como la pregunta y objetivos que han guiado este estudio.

Sigue el Capítulo 2, con la síntesis de los principales contenidos de marco teórico. Se detalla el posicionamiento adoptado dentro de las teorías sociales en educación matemática así como aspectos esenciales relativos al pensamiento algebraico.

En el Capítulo 3 se expone el enfoque metodológico adoptado para este estudio. Primeramente se introduce el contexto de investigación y se describe el diseño experimental. Después se exponen los métodos aplicados y las herramientas metodológicas desarrolladas para la consecución de los objetivos.

En el Capítulo 4 se presenta el análisis detallado de los datos primarios recopilados y seleccionados. Se toman los episodios y subepisodios de tres sesiones de clase y, mediante la aplicación de las herramientas metodológicas, se obtienen datos reducidos que surgen de un proceso sistemático de análisis cualitativo.

Seguidamente, en el Capítulo 5, se exponen los resultados que emergen del análisis de datos reducidos y que dan respuesta a los tres objetivos sobre tipos de interacción, contribuciones a la argumentación colectiva y relaciones entre ambos.

Por último, en el Capítulo 7, se discute la pregunta de investigación a la luz de los resultados y del marco teórico. Asimismo, se hace una revisión de las herramientas metodológicas y del diseño experimental. Se finaliza con implicaciones didácticas y posibles líneas de investigación que habrán de dar continuidad a este estudio.

2. Marco teórico

El propósito de este capítulo es describir el enfoque teórico adoptado para el desarrollo de la investigación. Está dividido en dos secciones principales sobre pensamiento algebraico e interacción social en clase de matemáticas.

Respecto al pensamiento algebraico, se fundamenta la introducción en el aula del pensamiento algebraico mediante la generalización a través de patrones en un ambiente de resolución de problemas. Por otro lado, se consideran las recomendaciones de la literatura acerca del papel de la visualización en los procesos de generalización y sobre las dificultades iniciales de acceso al pensamiento algebraico.

Respecto a la interacción social en clase de matemáticas, primero se exponen a grandes rasgos aspectos del interaccionismo simbólico como marco general del estudio. Luego se relatan aspectos teóricos sobre las normas sociales y sociomatemáticas, la comunicación, el discurso matemático, los entornos colaborativos y la argumentación colectiva.

Tabla de contenidos

2.1 Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico no sólo implica la generalización que lleva a los conceptos de variable y función, entre otros, sino también el razonamiento analítico propio de la resolución de problemas. El razonamiento analítico en álgebra requiere el uso de incógnitas como objetos abstractos manipulables, en contraste con los métodos aritméticos cuyo razonamiento es concreto y experimental. Ellis (2007a), Jurow (2004), Moss y Betty (2006), Schliemann y otros (2003) y Zazquis, Liljedahl y Chernoff (2008) señalan la importancia de que los estudiantes avancen gradualmente del razonamiento aritmético al algebraico, a través de generalizar patrones geométricos, construir y conectar formas de representación, desarrollar expresiones algebraicas para resolver problemas y elaborar representaciones gráficas que ejemplifiquen el cambio de valores de una variable.

La aproximación anterior supone una alternativa al método tradicionalmente establecido en muchas aulas, consistente en introducir el álgebra como un juego basado en reglas de transformación de expresiones formales mediante el dominio de un cierto lenguaje (Planas, 2013). Tales ajustes en el contenido y en el enfoque didáctico pretenden dar respuesta a cómo aprenden los estudiantes. Estos adquieren y enriquecen su comprensión de las matemáticas mediante la reflexión sobre situaciones que involucran cantidades físicas como los números (Carraher, Martínez & Schliemann, 2008). Esto no significa que el conocimiento matemático sea solo de carácter empírico, del mismo modo que la generalización matemática no es una tarea solo deductiva. Aunque se coincide con Radford (2006) en afirmar que el lenguaje algebraico, análogamente al lenguaje natural, permite interacciones fructíferas hacia la elaboración de nuevos significados matemáticos, se considera que las generalizaciones deben surgir de actividades relacionadas con situaciones experimentales. Los objetos matemáticos no se pueden visualizar directamente, sino que necesitan ser incluidos en alguna forma de representación y, aquí, la notación algebraica no es inicialmente una opción sencilla para los estudiantes.

El pensamiento algebraico no es en sí mismo objeto de estudio en esta investigación. Sin embargo, las contribuciones, desde el punto de vista de las matemáticas, en la discusión en grupo, y, más en general, las oportunidades de aprendizaje que surgen de la construcción de la argumentación colectiva, dependen de la eficacia del diseño de la instrucción y de la secuencia de problemas. Con este propósito, se planificaron y pusieron en práctica lecciones que a priori facilitan el pensamiento algebraico en el contexto de la etapa de enseñanza secundaria obligatoria. Para ello, se incorporaron recomendaciones generales de la literatura sobre pensamiento algebraico en el diseño experimental. A continuación se exponen consideraciones teóricas en torno a estas recomendaciones así como en torno a dificultades iniciales de los estudiantes, relativas al pensamiento algebraico.

Resolución de problemas y pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico es una parte fundamental del pensamiento matemático, que implica el reconocimiento de patrones y relaciones matemáticas generales entre números, objetos y formas geométricas (Mason, 2002). El beneficio del desarrollo del pensamiento algebraico es que, más allá de los procedimientos asociados a menudo con el álgebra, puede ofrecer a los estudiantes una más compleja y significativa conceptualización del álgebra (Radford, 2006). Schoenfeld (1992) señala que los estudiantes desarrollan una comprensión profunda mediante la resolución de problemas ya que así se potencia la conceptualización de las matemáticas que aprenden. Al respecto, se considera que proporcionar una perspectiva algebraica de las matemáticas mediante un enfoque de resolución de problemas puede mejorar la trayectoria de aprendizaje del alumno (Mason, 2002).

La introducción del pensamiento algebraico usando un enfoque de resolución de problemas es bastante común en el aula de matemáticas. Este enfoque se basa en la capacidad del estudiante para considerar, conectar y pensar acerca de los conceptos matemáticos involucrados en un problema. Uno de los factores que puede facilitar el desarrollo de estas estrategias en los estudiantes es el uso de los denominados contextos extra-matemáticos en los problemas. La aplicación de las matemáticas en diferentes contextos de la vida real es un indicador de la adquisición de la competencia matemática deseada en los estudiantes (Departament d’Ensenyament, 2012; NCTM, 2000). Así, la introducción de contextos en problemas conlleva un aprendizaje de las matemáticas situado y más fácilmente extrapolable a situaciones de la vida real, a pesar de que esto no se produzca de un modo inmediato.

Aunque los problemas contextualizados facilitan la iniciación al álgebra, puede ir en detrimento de usar notación formal si los estudiantes no ven la necesidad de transferir el significado construido en contextos cotidianos. Al respecto, Carraher y otros (2008) afirman que los estudiantes no extraen conclusiones solo a través de la lógica y las reglas sintácticas; utilizan intuiciones y supuestos junto con razonamientos basados en principios y argumentos matemáticos. Sin embargo, mientras que los problemas contextualizados se centran en cantidades concretas que ayudan a dotar de significado las relaciones y estructuras matemáticas, el conocimiento algebraico no se basa únicamente en el pensamiento sobre cantidades. Así se debe introducir de forma gradual el uso de representaciones múltiples y notación algebraica en la resolución de problemas contextualizados.

Carraher y Schliemann (2007) y Stacey (1989) concretan una progresión de lo particular a lo general en la representación de problemas de generalización. Se contemplan varias etapas de pensamiento algebraico para que los estudiantes ajusten su razonamiento desde casos numéricos significativos al simbolismo algebraico y la abstracción matemática. En la representación de un problema se recomiendan tres niveles de razonamiento: a) concreto o generalización cercana, con manipulación de cantidades pequeñas, b) semi-concreto o generalización lejana, con manipulación de cantidades mayores, y c) abstracto, con manipulación simbólica. Este enfoque gradual hacia habilidades de generalización sirve para mejorar la comprensión y el aprendizaje. Esta visión es consistente con otros trabajos que apuntan a la necesidad de analizar cantidades cada vez más grandes para llegar a relacionar el número de posición y el patrón en términos generales (Warren, 2005; Warren, Cooper & Lamb, 2006; Zazquis y otros, 2008). Así, el paso de lo concreto a lo semi-concreto contribuye a la evolución de estrategias recursivas de repetición a una visión completa del patrón y sus relaciones.

Según lo expuesto, el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la resolución de problemas surge de la generalización de situaciones concretas. Varios estudios señalan que el proceso de generalización a través de la resolución de problemas como una aproximación al álgebra está íntimamente relacionado con el proceso de justificación (Carraher y otros, 2007; Ellis, 2007b; Jurow, 2004; Moss & Betty, 2006). Se documenta la eficacia de trabajar colaborativamente en un ambiente de resolución de problemas y el valor de estimular múltiples perspectivas para una misma generalización. De ahí la importancia de la interacción como mediador de un discurso significativo entre participantes con el fin de promover y agilizar el razonamiento matemático. El camino hacia el pensamiento abstracto se facilita cuando los estudiantes son animados a usar una variedad de estrategias y reciben apoyo para comunicar sus ideas, reflexionar sobre las soluciones y tener la oportunidad de especular acerca de conceptos e ideas construidos.

Las recomendaciones y reflexiones de la literatura expuesta brevemente en esta sección se tomaron en consideración en el diseño experimental. Por un lado, se escoge un enfoque de resolución de problemas para trabajar aspectos del pensamiento algebraico. Por el otro, en lo que respecta a los problemas de la secuencia didáctica, se introducen cuestiones que se aproximan a la generalización algebraica de forma gradual. Asimismo, se consideran problemas que permiten usar diversas estrategias de resolución.

Generalización a través de patrones

La actividad matemática puede ser vista como el razonamiento acerca de los objetos y sus relaciones, mientras que su dominio radica en examinar e investigar la validez de las afirmaciones sobre esos objetos y relaciones (Carpenter, Franke & Levi, 2003). El poder de las matemáticas reside en las relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones. Las actividades que involucran patrones juegan un papel importante en la formación de las bases y la superación de dificultades propias del álgebra formal (Zazkis & Liljedahl, 2002). Así, los patrones y las relaciones entre patrones son un requisito previo para el desarrollo del pensamiento algebraico. En este sentido, disponer de experiencias previas con patrones fomenta el desarrollo de habilidades necesarias para generalizar y, expresar y justificar dichas generalizaciones (Kaput & Blanton, 2001).

A pesar de esto se debe tener en cuenta que no toda actividad con patrones conduce a un pensamiento algebraico. Radford (2006) argumenta que los estudiantes, sobre todo en edades tempranas, utilizan razonamientos inductivos basados en el ensayo y error u otras estrategias de adivinanza (*inducciones naïf*) que aunque puedan ser expresadas simbólicamente no involucran el desarrollo de pensamiento algebraico. El álgebra requiere el uso y la manipulación simbólica como vía para pensar de manera distintiva. La generalización mediante patrones se basa en la observación de una similitud de forma local y su aplicabilidad a todos los términos de la secuencia (*generalización aritmética*), para una posterior cristalización en un esquema que permita el cálculo de elementos de la secuencia fuera del campo de percepción (*generalización algebraica*).

Otra conceptualización, inspirada en Kaput (1999), es la de Ellis (2007a). Esta autora define generalización como participación en la identificación de semejanzas a través de casos particulares; la extensión de un razonamiento más allá del rango en el que se originó; o la inferencia de resultados amplios desde casos particulares. Ellis desarrolla una taxonomía para clasificar generalizaciones de los estudiantes. Distingue entre acciones de generalización, actividades matemáticas y mentales inferibles a partir de lo que los estudiantes hacen o dicen; y reflexiones de generalización, declaraciones últimas conformadas según acciones generalizadoras. Así, distingue entre acciones que llevan a generalizar (relacionar, buscar y ampliar) y reflexiones posteriores que o bien aparecen en la comunicación, verbal o escrita, de un patrón general o de regularidades, o bien en el uso de generalizaciones previas en una situación matemática nueva. Aunque esta investigación de tesis no tiene por objeto de estudio los procesos de generalización, se adopta una aproximación cercana al concepto de reflexiones de generalización. Se considera la comunicación verbal de relaciones, regularidades y patrones generales a cargo de los estudiantes que discuten en grupo.

Existe una línea creciente de investigación que aboga por el uso de patrones para introducir el concepto de variable y función (Betty & Moss, 2006; Carraher y otros, 2008; Moss & Betty, 2006; Warren, 2005; Warren y otros, 2006). Las variables se han introducido tradicionalmente en clase como incógnitas en ecuaciones, en las que no poseen la naturaleza de variable. Una perspectiva funcional amplía el significado de las expresiones algebraicas al tratar x como variable, es decir, como objeto cuyo valor varía (Warren y otros, 2006). Los estudiantes son alentados a pensar en las relaciones entre variables y no sólo en operaciones con números. Además, trabajar el álgebra mediante el uso de patrones da la oportunidad de observar y reflexionar sobre sus generalizaciones así como verbalizarlas y expresarlas simbólicamente (Carraher y otros, 2008). Si bien la secuencia de problemas en nuestro diseño no se centra en el concepto de función, sí demanda un pensamiento covariacional, lo cual requiere ver y describir patrones en términos de la posición que ocupan los objetos dentro de la secuencia, determinando así la relación entre dos variables. Becker y Rivera (2005), Cañadas (2007), Moss y Betty (2006) y Schliemann y otros (2003) apuntan al uso de representaciones geométricas como un elemento clave en el desarrollo de este razonamiento abstracto.

Procesos de visualización

La evolución de las matemáticas a lo largo de la historia muestra que hacer álgebra no es sólo usar y manipular letras, también se practica mediante otros sistemas semióticos (Radford, 2001). La visualización entendida como "la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre dibujos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas previamente desconocidas y promoviendo entendimientos" (Arcavi, 2003, p. 217) ha jugado un papel esencial en el desarrollo simbólico.

Los aspectos visuales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han ganado relevancia en las últimas décadas, no sólo en el área de geometría (Presmeg, 2006). La visualización es una habilidad matemática en la que no siempre se ha hecho suficiente hincapié. En muchas aulas de matemáticas se siguen privilegiando y fomentando razonamientos y actividades lógico-numéricas sobre las visual-geométricas. Varios investigadores subrayan el papel de la visualización en la resolución de problemas y en el desarrollo del pensamiento algebraico, remarcando la necesidad de establecer vínculos entre pensamiento analítico y visual (Presmeg, 2006; Radford, 2006). Así pues, uno de los retos de la enseñanza de las matemáticas es lograr la flexibilidad entre representaciones analíticas y visuales de una misma situación con el objetivo de aprender y ser competente en el manejo de múltiples representaciones (Arcavi, 2003; Betty & Moss, 2006).

En esta línea, se asume la relevancia de trabajar estrategias de visualización en todas las áreas de matemáticas aunque esta no sea una tarea fácil. Duval (2006) señala la existencia de diferentes formas de ver un mismo objeto, destacando las exigencias cognitivas complejas de representaciones semióticas perceptuales y discursivas. El cambio de la perceptual (ver el objeto como un todo) a la discursiva (ver el objeto por las partes) es indicativo de un cambio dimensional en la percepción de la figura. En el caso del álgebra, hay muchas maneras de expresar una generalización para un mismo patrón. Se trata de reconocer la viabilidad y la equivalencia de diversas generalizaciones resultantes de varias representaciones semióticas que se producen dentro de diferentes sistemas de representación. Diferentes formas de visualizar un patrón conllevan diferentes conceptualizaciones que se prestan a diferentes expresiones algebraicas (Carraher y otros, 2008).

La posibilidad de tener múltiples expresiones de carácter general para el mismo patrón puede llevar a la discusión de varios conceptos matemáticos, en particular del concepto de expresión equivalente. De ahí que la visualización en álgebra sea una forma alternativa de entender y trabajar en clase las relaciones entre variables. En este contexto, los estudiantes deberán familiarizarse con varias representaciones y utilizarlas de un modo flexible (Presmeg & Nenduradu, 2005). La visualización no sólo organiza los datos de un problema en estructuras significativas, sino que también guía el desarrollo de una solución analítica.

Las actividades con patrones admiten una variedad de contextos (numéricos, geométricos, pictóricos) y de enfoques. Algunos alumnos reconocen más fácilmente regularidades de forma visual, mientras que otros las identifican lógica o analíticamente. Es común que realizando actividades matemáticas, distintos estudiantes procesen la información de distintas maneras: unos prefieren métodos analíticos, mientras que otros prefieren métodos visuales. Krutetskii (1976) observó estudiantes talentosos en matemáticas que usaban distintos tipos de razonamiento: analítico (no visual), geométrico (visual) y armónico (ambos tipos, analítico y geométrico). A pesar de esta diversidad de enfoques, muchos estudiantes prefieren usar relaciones numéricas en sus razonamientos, quizás reflejando el trabajo promovido en el aula donde las representaciones analíticas prevalecen (Cañadas, 2007). Becker y Rivera (2005) y Stacey (1989) indican que la mayoría de los estudiantes tienen más éxito cuando utilizan un enfoque armónico.

Los contextos pictóricos en problemas de búsqueda de patrones añaden al razonamiento una componente visual con un papel crucial en el desarrollo de un enfoque armónico. El sistema de representación gráfico es una opción potente cuando se trata de identificar estrategias de los estudiantes en tareas de generalización. Radford (2000) observó que las imágenes de casos particulares son empleadas por los estudiantes para la identificación de patrones. Por otro lado, Cañadas (2007) concluye que el sistema de representación gráfico puede ayudar a los estudiantes en la observación de un patrón y adquiere relevancia en los procesos de justificación, en consonancia con resultados de Becker y Rivera (2005). Luego el proceso de generalizar a partir de indicios visuales con frecuencia contribuye a una interpretación de la estructura del modelo y simultáneamente a la propuesta de varias expresiones del mismo patrón. Esta situación no es probable que suceda si sólo se aplican aproximaciones numéricas. Por consiguiente, cabe proporcionar tareas que estimulan el uso y la comprensión estrategias visuales en relación con contextos numéricos para construir sentido numérico (Betty & Moss, 2006).

Al respecto, en los enunciados de los problemas de este estudio se incluyeron representaciones gráficas, a fin de facilitar la comprensión de la estructura de la secuencia y la generación de diversas estrategias de visualización y, en consecuencia, distintas expresiones algebraicas para representar un mismo patrón.

Dificultades iniciales del pensamiento algebraico

Los estudiantes tienen dificultades y errores sistemáticamente en el aula de matemáticas, en tareas que requieren del álgebra y su formalización. Rico (1995) remarca la importancia de considerar el error como una oportunidad de aprendizaje. Cuando un alumno expresa una dificultad muestra el carácter incompleto de su conocimiento, permitiendo así, a sus compañeros y al profesor, ayudarle a completarlo. La previsión de dichas dificultades y su inclusión en la instrucción enriquecen el proceso de aprendizaje. Este autor indica que los errores no aparecen por azar sino que pueden surgir de un marco conceptual consistente, basado en conocimientos adquiridos, o del mismo proceso de instrucción.

Según Kaput (2008), el pensamiento algebraico es la actividad de hacer, pensar y hablar sobre las matemáticas desde una perspectiva generalizada y relacional. En la transición de la aritmética al álgebra temprana, una de las dificultades iniciales de los estudiantes está relacionada con el aprendizaje de las convenciones lingüísticas que subyacen a este dominio matemático. Símbolos algebraicos como n son algo sofisticado para los estudiantes y tienden a ser mal interpretados y utilizados en la resolución de un problema. El carácter interpretativo de asignar significado a los símbolos algebraicos y a la sintaxis requieren de experiencias significativas previas en torno a letras, palabras y estructuras sintácticas en el lenguaje ordinario para representar y analizar el problema a resolver (Planas, 2013). En otras palabras, no sólo se debe ver el símbolo sino también ver a "través" del símbolo (Sfard, 2000).

Lins y Kaput (2004) sostienen que un comienzo temprano favorece el aprendizaje del álgebra mediante el uso de un enfoque de resolución de problemas con aritmética generalizada. El razonamiento necesario para resolver ciertos problemas se puede ampliar de situaciones aritméticas concretas a situaciones más complejas que requieren cierto grado de abstracción. La formalización simbólica es un rasgo del proceso de aprendizaje de las matemáticas pero los estudiantes necesitan apropiarse gradualmente de las herramientas precisas para su representación. Una introducción a la generalización algebraica a través de expresiones formales no es coherente con la forma en que los estudiantes aprenden (Carraher y otros, 2008). Primero deben aprender a hacer generalizaciones acerca de problemas matemáticos que permitan la exploración y búsqueda de patrones, relaciones y estructuras para, poco a poco, formular estas generalizaciones utilizando notación algebraica.

Stacey (1989) analiza el proceso de generalización mediante la resolución de problemas de patrones lineales y cuadráticos, presentados gráficamente. Concluye sobre formas de expresar la generalización, estrategias y dificultades de los estudiantes. En su trabajo con estudiantes de nueve a trece años observó a varios de ellos utilizando de forma errónea la proporcionalidad directa, determinando el elemento enésimo como el múltiplo de orden n de la diferencia. Resultados similares han sido reportados por Cañadas (2007) y Zazkis y Liljedahl (2002) con estudiantes de secundaria y estudiantes para maestros de primaria, respectivamente. En sendos estudios se pone de manifiesto el error de aplicar sin factor de corrección la regla de tres como método para resolver problemas que demandan generalizar a través de patrones lineales o cuadráticos. La tendencia a la proporcionalidad lineal puede ser motivada por su carácter intuitivo, simplicidad y presencia en la vida diaria y por experiencias escolares previas.

Un enfoque utilizado para introducir el álgebra es la exploración de patrones visuales y la expresión de dichos patrones como funciones y expresiones algebraicas. Warren (por ejemplo en 2005) señala posibles acciones en la enseñanza que ayudan a superar dificultades con este enfoque en edades tempranas, sobre todo en la resolución de problemas de generalización a través de patrones. A modo de resumen, se han agrupado según si hacían referencia a la transición del lenguaje verbal, al escrito o a la visión completa de un patrón. Aunque estas dificultades corresponden a estudiantes de primaria, nos orientan pues "muchas de las dificultades que experimentan estos niños reflejan las encontrados en estudios previos con jóvenes adolescentes" (Warren, 2005, pp. 311-312).

En cuanto a la transición del lenguaje verbal al escrito, Warren (2005) observó que en las discusiones en grupo los estudiantes presentaban una mayor facilidad para verbalizar la generalización que para dar una respuesta formal por escrito, aunque esas descripciones orales a menudo carecían de precisión. Esta falta de precisión estaba a menudo relacionada con un desconocimiento de vocabulario específico. En lo referente al lenguaje escrito se observó la tendencia de los alumnos a dar respuestas que se centraban sólo en la variación de una posición respecto de la siguiente y no en un patrón general.

Respecto a la visión completa de patrones, Warren (2005) observó una propensión a usar estrategias aditivas. Muchos estudiantes comparaban el primer paso con el segundo y seguían sumando la diferencia para responder a cuestiones sobre generalización cercana. Esto dificultaba su respuesta a cuestiones que requerían la conexión entre posición y patrón, y la expresión verbal o escrita del patrón general. Este resultado es consistente con Carraher y otros (2008), donde se concluye la tendencia de los estudiantes a usar estrategias recursivas o iterativas, donde la variable independiente no siempre es reconocida como variable. A medida que los estudiantes avanzan hacia la generalización y expresiones algebraicas cerradas necesitan representar explícitamente las variables independientes y dependientes y, en funciones lineales, reemplazar adiciones sucesivas con una multiplicación. Este paso es un reto para muchos estudiantes pues la multiplicación no es solo una suma repetida, sino que implica transformar una relación de intercambio entre variables donde las unidades de entrada se convierten en unidades de salida.

Establecer puentes entre representaciones numéricas, visuales y algebraicas es otra dificultad en la generalización de patrones. Betty y Moss (2006) muestran cómo los estudiantes que hacen conexiones entre representaciones son más competentes para identificar, comunicar y justificar las reglas funcionales de los patrones así como para comprender la relación entre las variables dadas en el problema y su papel en la función. Varias investigaciones abogan por la presentación de problemas de generalización a través de patrones en una variedad de contextos con la idea de obtener una mejor comprensión covariacional (Betty & Moss, 2006; Moss & Betty, 2006; Schliemann y otros, 2003; Warren, 2005; Warren y otros, 2006). Sin embargo, a la práctica, muchas prácticas de enseñanza priorizan el aspecto numérico de los patrones. El contexto y el significado de las variables quedan así ocultos, lo que limita seriamente la conceptualización de la relación funcional entre variables y el uso de reglas. Cuando se priorizan representaciones visuales y los estudiantes establecen relaciones entre patrones visuales y numéricos, las acciones direccionadas a encontrar, expresar y justificar normas funcionales aumentan. En su estudio de la capacidad para resolver problemas de generalización, Steele y Johanning (2004) encontraron que los estudiantes que basan su razonamiento en la estructura (mediante diagramas) y no sólo en los patrones numéricos son más capaces de interpretar la relación entre las cantidades del problema dado y representar sus ideas con generalizaciones simbólicas algebraicas.

2.2 Interacción social en el aula de matemáticas

En el marco de las teorías sociales del aprendizaje, este estudio se posiciona dentro de la tradición del interaccionismo simbólico en la investigación en educación (Goffmann, 1979, 1981a, 1981b; Krummheuer, 1995). Aquí la interacción social es vista como un proceso en el que las acciones individuales dependen de la interpretación de un sistema de acciones situado. De esta manera, las acciones encaminadas a aprender matemáticas en un aula son símbolos que denotan acciones colectivas, es decir, acciones interdependientes de un sistema. La perspectiva interaccionista conduce al micro-análisis de procesos de aula en términos de la participación y el aprendizaje matemático de los estudiantes (Gellert, 2008). En particular, se considera que el aprendizaje está socialmente constituido de tal manera que la interacción social es un componente fundamental para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas. Desde este enfoque, la argumentación es un proceso social que tiene lugar cuando los participantes tratan de ajustar sus significados a matemáticas institucionalizadas en el aula mediante la presentación verbal de justificaciones que sustenten sus acciones (Krummheuer, 1995).

La perspectiva interaccionista en educación matemática acepta el carácter discursivo del conocimiento (Godino & Llinares, 2000). Las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso y el aprendizaje matemático emerge en formas discursivas específicas (Sfard, 2008). Así, la participación de un estudiante en actividades de comunicación donde se practique un discurso específico es una condición necesaria para el aprendizaje. Esto implica el aprendizaje de reglas y rutinas asociadas a un discurso, además del conocimiento de las normas que regulan la actividad de comunicación en el aula de matemáticas. La regulación del aula mediante la gestión de determinadas normas sociales y sociomatemáticas refuerza el establecimiento de una particular cultura de aula (Cobb, 1995).

La cultura de aula refleja las posibilidades de desarrollo de entornos colaborativos que promuevan condiciones para la argumentación y el aprendizaje. La creación de una situación didáctica adecuada, que lleve a los alumnos al conocimiento no se puede reducir a la elección de problemas matemáticos “buenos”, la interacción social debe ser considerada e incluida (Radford, 2006). En consecuencia, se asume que algunas culturas en el aula son más productivas que otras desde el punto de vista de generar oportunidades de argumentar, y por consiguiente de contribuir a la construcción de argumentación colectiva. Así dinámicas de aula donde los estudiantes puedan entrelazar su conocimiento con el de los demás se consideran experiencias significativas para el desarrollo de su aprendizaje matemático.

En lo que sigue, se introduce el posicionamiento dentro de las teorías sociales en educación matemática adoptado así como la fundamentación teórica en torno a conceptos importantes para el desarrollo de esta investigación. Para ello nos centramos en el interaccionismo simbólico, las normas en el aula de matemáticas, el discurso matemático, los entornos colaborativos y la argumentación colectiva.

Interaccionismo simbólico

En la tradición del interaccionismo simbólico hay una trama conceptual coherente de gran riqueza analítica para comprender el orden de la interacción. Goffman (1979, 1981a, 1981b) se centra en la comunicación, verbal y no verbal, del individuo diferenciando entre lo que se dice, es decir, símbolos verbales para transmitir información, y lo que se desprende, es decir, conjunto de acciones interpretables por los otros. Desde este enfoque, la comunicación es un escenario teatral donde las interacciones son generadas y generadoras de la vida social y están altamente influenciadas por la posición social de las personas. Este autor destaca la concepción dinámica de la interacción en la formación e interpretación de la vida social. Este dinamismo está influenciado por las *caras sociales*, la máscara expresiva que ha sido prestada y atribuida por la sociedad a una persona y que muestra su posición en la escala de prestigio y poder. La persona puede ser despojada de su *cara social* sino cumple con las exigencias del papel que se le ha otorgado, de ahí la importancia de conocer los *rituales* que regulan y organizan la vida social diaria y que se sustentan en la capacidad para interpretar y comunicar normas, pensamientos y emociones. El ajuste de la conducta a la normativa social adquiere una importancia crucial en el desarrollo de la persona (Goffman, 1979). El sujeto tiene la obligación social de comportase de modo comprensible y pertinente en cualquier situación social. En palabras de Goffman (1981b),

> *La gente que conozco no inventa el ajedrez cuando se sienta a jugar […] ni el sistema de tráfico peatonal cuando maniobran en las calles. Cualquiera que sean sus idiosincrasias, motivaciones e interpretaciones, deben ajustar su participación en la situación mediante procedimientos y razones estandarizadas para proceder con esos procedimientos. […] Desde luego los individuos llevan algo de lo que son y saben a cada uno*

> *de sus encuentros sociales, pero hay normas de etiqueta y referencia que guían esa importación* (pp. 63 y 68).

La interacción implica el establecimiento de reglas o normas en dinámicas compartidas donde las intervenciones de cada interlocutor están influenciadas por los comportamientos y las expectativas del otro. Luego las interacciones son situaciones sociales completas no meros actos lineales de transmisión de información. Algunas investigaciones del área, nutridas por ideas de Goffman, afirman que en la actividad de la comunicación, las personas no actúan de forma accidental y por lo tanto los discursos resultantes no son arbitrarios (Sfard, 2001; Wagner & Herbel-Eisenmann, 2009). En la comunicación las personas actúan y expresan sus pensamientos acorde a sus propias intenciones y las ajenas bajo ciertas reglas establecidas. Acorde con lo expuesto, la perspectiva interaccionista razona en términos de acciones que se determinan las unas a las otras en la secuencia de su aparición situada. Así, el estudio de la interacción se centra en las relaciones que unen los actos de diferentes personas en presencia mutua. La primacía que este enfoque otorga a la situación de interacción, donde prevalece el vínculo a los vinculados, implica el reconocimiento de la importancia del otro en la formación del sujeto. El sujeto es visto como un ente dinámico supeditado a las múltiples interacciones de las que forma parte y a través de las cuales se forma.

Desde este punto de vista el habla describe una práctica social donde se construyen significados compartidos mediante el contraste de experiencias de los participantes. El lenguaje no es un mero instrumento para transportar significados sino que es un elemento activo en la formación del individuo (Godino & Llinares, 2000). El interaccionismo no considera el lenguaje como medio desvinculado que podría ser reemplazado por otra forma de comunicación. El lenguaje no es una representación del mundo, sino que existe una relación reflexiva entre lo que somos capaces de percibir y lo que somos capaces de decir (Sfard, 2008). Respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, este enfoque conlleva la necesidad de la negociación continua de los significados en el aula a fin de adaptar significados institucionales del contenido y clarificar significados compartidos de símbolos y palabras en uso (Bauersfeld, 1994; consultado en Godino & Llinares, 2000). Las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso, que se distingue por su uso de palabras, mediadores visuales, rutinas y narraciones (Sfard, 2008). El lenguaje desempeña un papel fundamental en la comprensión de cómo los estudiantes aprenden, por ejemplo, a argumentar en matemáticas mediante la negociación de significados en situaciones de interacción.

El enfoque interaccionista en Educación Matemática considera que la interacción social es una componente fundamental para el aprendizaje de las matemáticas en el aula. Muchas investigaciones enmarcadas en este enfoque teórico se centran en el estudio de interacciones observables en el aula de matemáticas, entre estudiantes involucrados en una actividad matemática (Cobb, 1995; Cobb, Yackel & Wood, 1995; Krummheuer, 2007 y 2011). El foco de interés en esta aproximación al estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es la negociación, argumentación e interacción en el aula de matemáticas considerando al grupo clase de estudiantes y el profesor o subgrupos más pequeños. Siguiendo a Gellert (2008), esta es una perspectiva interaccionista que supone mirar el aula a través de un ‘microscopio sociológico’. Esta investigación de tesis se enmarca a grandes rasgos dentro del interaccionismo simbólico y adopta una perspectiva interaccionista para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas.

Con inspiración en ideas de Goffman y en la etnometodología, Sacks, Schegloff y Jeffersson (1974) desarrollaron un enfoque para el estudio de la interacción social en situaciones de la vida cotidiana llamado análisis de la conversación. El análisis de la conversación se propone examinar cómo aspectos técnicos de intercambios verbales resultan recursos estructurados y organizados socialmente mediantes los cuales las personas participan en la comunicación oral. El lenguaje se considera un fenómeno de interacción mediante el que se construye y mantiene la organización social. En este contexto, se estudian los turnos de palabra como base organizativa de la conversación espontánea. Se observa que el sistema de turnos regula muchas actividades humanas como el tráfico o los juegos y también la comunicación verbal entre dos o más personas. Años más tarde Sacks (1998) concluye que una de las estructuras básicas de los turnos de habla es lo que recibe el nombre de *par adyacente*, que consiste en dos turnos consecutivos que presentan la particularidad de que, dado el primero, se espera que se produzca el segundo. Casos típicos de pares adyacentes son por ejemplo “pregunta-respuesta” o saludo-saludo”. Este autor, a partir de datos empíricos, observa que las partes de pares adyacentes no siempre se producen de forma consecutiva en la comunicación. Por ejemplo, entre la primera y la segunda parte de un par adyacente se puede encontrar otro par. La idea de par adyacente sirvió de inspiración en la investigación de tesis en la búsqueda de relaciones entre tipos de interacción así como en el examen de la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación colectiva.

Normas sociales y sociomatemáticas

El interaccionismo simbólico considera la actividad social regulada por normas de comportamiento que definen los comportamientos aceptables o esperables de quienes interactúan. Así, vivir en sociedad implica tener una constante experiencia de las normas que regulan la actividad humana. A menudo estas reglas son implícitas y su conocimiento reside en la trasmisión cultural entre generaciones o en la observación de prácticas. En otras ocasiones, las normas son explícitas y se pactan, consultan o leen. La escuela como institución dentro de una sociedad, y particularmente el aula, también está regulada por normas explícitas e implícitas. Así, las normas definen la estructura interna que regula el aula y el comportamiento de sus participantes. Es fundamental que los alumnos conozcan y usen las normas específicas del aula para su desarrollo dentro de este contexto (Planas, 2004).

Acorde con las teorías del interaccionismo simbólico, Yackel y Cobb (1996) introdujeron dos constructos teóricos que surgen del análisis de regularidades en el aula de matemáticas: las normas sociales y las sociomatemáticas. El desarrollo de estas nociones tiene por objetivo explicar los procesos sociales mediante los cuales alumnos y profesores construyen el orden del aula de matemáticas. Las normas sociales del aula son convenciones que definen el comportamiento esperable o adecuado en el aula; regulan reacciones de los estudiantes ante una directriz del profesor o formas de colaboración entre estudiantes. En general, controlan el funcionamiento de la actividad y caracterizan las microculturas del aula en términos de cómo comunicarse y reaccionar ante las intervenciones de otros (Godino & Llinares, 2000). Por ejemplo, se supone que los alumnos tienen que argumentar sus afirmaciones o deben adoptar una actitud crítica frente a las aseveraciones de sus compañeros. Estos planteamientos son normativos porque las intervenciones de los estudiantes se valoran en base al grado de argumentación y la coherencia de sus explicaciones. Estas normas podrían regular cualquier caso independientemente de si es una clase de matemáticas, ciencias o historia.

Sin embargo, hay aspectos normativos vinculados a la actividad matemática de los estudiantes que son específicos del aula de matemáticas. Yackel y Cobb (1996) hablan de normas sociomatemáticas. Voigt (1995) identificó obligaciones relativas a cómo valorar la solución a un problema o cómo decidir si una explicación o argumentación es matemáticamente correcta, entre otras. Estos ejemplos de obligaciones son también ejemplos de normas sociomatemáticas que se usan en el aula para evaluar la práctica matemática de alumnos y profesor. Las normas sociomatemáticas son diferentes de las normas sociales generales que rigen el comportamiento en las aulas en el sentido de que son específicas de los aspectos matemáticos de la actividad de los estudiantes. Existen unas normas sociales que regulan una discusión matemática independientemente de lo que se está hablando (por ejemplo, explicar soluciones), junto con unas normas sociomatemáticas que tienen en cuenta aquello de lo que se está hablando (por ejemplo, considerar cuándo y por qué una explicación es matemáticamente aceptable).

Lo que llega a ser matemáticamente normativo en un aula viene condicionado por los objetivos, creencias, suposiciones e hipótesis de los participantes, al mismo tiempo que estos objetivos y la comprensión están influenciados por lo que es legitimado como actividad matemática aceptable (Yackel & Cobb, 1996). De esta forma las normas son constituidas en las interacciones en clase y se consideran compartidas por todos los miembros. Las normas sociales y las sociomatemáticas no son obligaciones explícitas que los estudiantes tengan que cumplir, sino que facilitan que los procesos de interacción estén orientados hacia ciertos aprendizajes (Planas, 2004). Sin embargo, si un alumno no comprende bien las directrices de funcionamiento legitimado en el aula, puede tener dificultades para comunicarse y esto puede acabar obstaculizando la comprensión conceptual. El aprendizaje matemático de un alumno está influenciado por su comprensión del contexto normativo del aula. El conocimiento de las normas es fundamental para la comprensión de la dinámica del aula y para la participación en ella.

Es un hecho aceptado por la comunidad científica que la manera en que los miembros de una clase elaboran reglas que guían su comportamiento social determina la evolución de su discurso matemático. En el estudio de Pijls, Dekker y Van Hout-Wolters (2007) sobre la interacción de una pareja de alumnos, se sugiere que tanto el posicionamiento de un estudiante respecto a las matemáticas y al otro, como las normas sociales y sociomatemáticas del aula, juegan un papel importante en la consecución de una interacción matemáticamente productiva. Las normas determinan cómo estudiantes y profesor participan y se comunican en la discusión a fin de explicar y justificar sus razonamientos matemáticos.

En el estudio de Presmeg, Barret y McCrone (2007), centrado en la argumentación y la generalización de estudiantes para futuros maestros mientras hacían construcciones geométricas con software y con lápiz y papel, se observó que la construcción de las normas sociales en una discusión colaborativa fue un factor importante en el fomento de las generalizaciones de los estudiantes. Asimismo, en el reciente trabajo de Wagner y Herbel-Eisenmann (2013) se sugiere que meta conversaciones sobre cuestiones de autoridad pueden facilitar el posicionamiento social y matemático de los estudiantes y, por lo tanto, su acceso al aprendizaje matemático. En McCrone (2005) se observa como meta conversaciones sobre la importancia de la reflexión y la participación activa ayudan al desarrollo de discusiones matemáticas productivas donde los estudiantes son participantes activos y el profesor es un facilitador del diálogo matemático. Así, el establecimiento de normas sociales y sociomatemáticas relacionadas con la escucha activa, el cuestionamiento, la participación en los acuerdos, la explicación y justificación de las afirmaciones matemáticas, etc. son elementos clave para el desarrollo de un ambiente de interacción colaborativa y un discurso matemático productivo (Jurow, 2004; McCrone, 2005; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008).

En lo referente a normas sociales y sociomatemáticas, en esta investigación se siguieron las recomendaciones de Cobb, Yackel y Wood (1995), quienes realizaron un diseño experimental en una clase de primaria a fin de mejorar la comprensión de algunas operaciones. El diseño incluyó el desarrollo de normas sociales con el objetivo de fomentar la autonomía y motivación de los estudiantes así como su disposición frente a las matemáticas. Las normas fueron temas explícitos de conversación en el aula y hacían referencia a dos tipos de dinámicas, trabajo en pareja y puesta en común con todo el grupo clase. Aunque ni las normas sociales ni las sociomatemáticas son objeto directo de estudio de la presente investigación, sí que era preciso un diseño experimental que facilitara la creación de oportunidades en la comunicación matemática donde los alumnos tuvieran que explicitar argumentos inicialmente ocultos y confrontar y valorar diferentes aproximaciones al problema. A tal efecto se incluyeron normas para la gestión del trabajo en pareja y de la discusión en grupo, basadas en estas recomendaciones con el objetivo de potenciar la autonomía y motivación de los estudiantes así como un ambiente de indagación que guiara la calidad del discurso.

Comunicación y discurso matemático

La palabra comunicación deriva del latín *communicare*, que significa "compartir algo, poner en común". Se podría decir que es un fenómeno inherente a la relación que las personas mantienen cuando se encuentran en grupo, en otras palabras, un proceso social articulado en torno al fenómeno de compartir, de poner en común, de vincular… Generalmente el término interacción se asocia al de comunicación interpersonal, relaciones donde los individuos ejercen una influencia recíproca sobre sus respectivos comportamientos en una situación particular. En la comunicación, las acciones humanas están en mayor o menor medida guiadas por las fuerzas de cohesión social y las dinámicas establecidas en los contextos donde se desarrollan. Es decir, "al igual que los diferentes órganos de nuestro cuerpo, el individuo no existe sino como parte de un todo más grande" (Sfard, 2001, p. 27). La comunicación es vista como el motor de todas las actividades humanas, considerándolas así de naturaleza social ya sean individuales o colectivas.

La conceptualización del pensamiento como un caso particular de la comunicación en la teoría de la comognición de Sfard (2008) deja atrás las barreras históricas entre lo individual y lo social. El pensamiento es visto como la comunicación con uno mismo, que surge como una versión privada y modificada de la comunicación interpersonal. El conocimiento visto como un aspecto de la actividad comunicativa es una construcción humana que sólo tiene sentido en el contexto de la interacción social y que excluye la posibilidad de ver el aprendizaje como un esfuerzo puramente individual. Así, el aprendizaje puede ser visto como una forma de participación en un práctica social concreta (Krummheuer, 2011; Sfard, 2008) en contraposición con lo asumido por las teorías cognitivas o adquisicionistas donde sólo se contempla la adquisición individual del conocimiento.

Desde el enfoque participacionista del aprendizaje, Sfard (2008) afirma que las matemáticas y su aprendizaje emergen en formas específicas del discurso, visto como la concreción de las diferentes formas de comunicación. El aprendizaje se produce cuando el alumno entra en contacto con un discurso específico mediante la participación en actividades de comunicación de un colectivo que práctica ese discurso. Convertirse en un miembro de un discurso implica el conocimiento de sus reglas y rutinas. Acorde a las ideas expuestas, en esta investigación de tesis se considera el aprendizaje como un producto resultante de la participación en entornos colaborativos mediante el acceso a diferentes discursos. En este sentido, la capacidad para optimizar la interacción con otros y mejorar la participación en estos entornos influye en la construcción y asimilación de conocimiento.

Las matemáticas, vistas como un tipo de discurso, se caracterizan por el uso de palabras, mediadores visuales, rutinas y narraciones (Sfard, 2008). Dada la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, el uso de palabras es un elemento crítico de un discurso matemático porque las posibles diferencias en el uso pueden obstaculizar la comunicación matemática (Sfard & Kieran, 2001). En la teoría comognitiva se introduce el constructo de conflicto comognitivo en relación con el conflicto entre dos narrativas que se produce a raíz del uso de diferentes discursos que difieren en el uso de palabras o reglas de fundamentación. Estas narrativas no son matemáticamente excluyentes por lo que el conflicto no se resuelve con evidencias empíricas. Más bien se resuelve mediante la elección de uno de los dos discursos en conflicto, es decir, dando sentido al pensamiento del otro.

Sfard (2008) define narrativa como “cualquier secuencia de expresiones enmarcadas como una descripción de objetos, de relaciones entre objetos o procesos con o por objetos, y que está sujeta a la aprobación o rechazo con la ayuda de procedimientos de justificación discursiva específica” (p. 134). En este estudio de tesis se usa este constructo para referirse al conjunto de intervenciones en torno a la descripción, explicitación o reformulación de procedimientos, razonamientos o expresiones algebraicas así como a la comparación entre ellos y al énfasis en partes concretas. Los criterios de aprobación de una narrativa pueden variar de modo considerable de un discurso a otro según el contexto social en el que se produzcan. Lo que es considerado matemáticamente correcto en la sustentación de una narrativa no es de interés en esta investigación. Nos centramos en la sustentación de narrativas desde la perspectiva de la interacción en grupo y no desde un punto de vista epistemológico de los procesos de validación de fundamentaciones.

Se coincide con Krummheuer (2011) en la necesidad de hallar evidencias a nivel empírico que aporten una mayor comprensión del enfoque teórico desarrollado por Sfard. Este autor señala la importancia de analizar situaciones regulares de aula para ampliar el conocimiento acerca de las formas de participación de los estudiantes en actividades colaborativas. Al respecto, este estudio de tesis aporta evidencias empíricas que informan de la participación de los estudiantes en una discusión matemática en términos de tipos de interacción y su influencia en la construcción de argumentación colectiva. El estudio del impacto de ciertas formas de interacción en la explicitación y fundamentación de narrativas es fundamental para obtener una mayor comprensión de los procesos sociales mediante los cuales los alumnos acceden a ciertos discursos y, de ahí, al aprendizaje matemático.

Entornos colaborativos de aprendizaje

El desarrollo de entornos colaborativos donde los estudiantes tengan la oportunidad de involucrarse en un discurso matemático productivo es un reto. Las políticas educativas actuales aconsejan fomentar la discusión matemática mediante conversaciones que proporcionen retroalimentación, apoyo mutuo y desafíos matemáticos para un aprendizaje significativo. Se acepta el vínculo entre la interacción en pareja y en grupo con la construcción de conocimiento matemático. Se apunta a los beneficios cognitivos de compartir ideas y razonamientos matemáticos sobre todo cuando hay distintos puntos de vista. Así las diferencias entre estudiantes, en concreto las diferencias en el pensamiento matemático, son un requisito previo para una discusión matemática productiva en la que se aprenda (Sfard, 2008; Webb, 1991). Ciertas acciones direccionadas a la reflexión matemática, tales como mostrar, explicar, justificar y reconstruir el trabajo propio así como explicar, valorar y reconstruir el trabajo de otros, conducen al aumento del nivel conceptual en una discusión (Morera, 2013). Sin embargo, el cumplimiento de estos requisitos no garantiza una interacción productiva. Sfard y Kieran (2001) analizaron las interacciones discursivas de parejas de estudiantes desde la perspectiva del contenido matemático inmediato y del metadiscuso en la interacción. Centrándose en una pareja de estudiantes, observaron como la falta de efectividad en su comunicación derivó en una discusión poco productiva con las consecuentes dificultades en su aprendizaje matemático.

Entre los múltiples trabajos que destacan la relación entre experiencia social de la interacción en pareja y desarrollo cognitivo que lleva al aprendizaje matemático, señalamos el de Cobo (1998), quien analiza en profundidad el discurso en parejas de estudiantes de 16 y 17 años resolviendo problemas de comparación de áreas de superficies planas. En Cobo y Fortuny (2000) se resume parte del análisis del discurso en parejas de estudiantes durante su avance en el aprendizaje matemático. La identificación de intercambios del tipo repetición, validación, cooperación, pregunta-respuesta… lleva a caracterizar modelos de interacción en pareja vinculados a beneficios cognitivos en términos de oportunidades de aprendizaje.

En la fase exploratoria de este estudio de tesis, el trabajo de Cobo (1998) sirvió de marco referencial para la construcción de códigos primarios de interacción relacionados con el trabajo en pareja. Esta fase inicial se centró en la delimitación de secuencias breves de intercambios con contenido matemático y en la caracterización de algunos de estos intercambios por medio de códigos discursivos. Los códigos discursivos informan sobre cómo al menos una de las partes se posiciona respecto a contenidos matemáticos expresados en un intercambio (Chico & Planas, 2011a; Chico & Planas, 2011b; Chico, Planas, Morera & Fortuny, 2012). Los códigos primarios creados en torno a la interacción en pareja sirvieron de base para la creación de un sistema de códigos primarios relativos a contenidos de interacción en grupo. Considerar intercambios basados en acciones discursivas individuales como unidad de análisis, dificulta el análisis del sistema de acciones interconectadas en la interacción en grupo. Por lo tanto, se requirió la creación de códigos analíticos que tuvieran una mayor carga conceptual de interacción.

En la consecución de este propósito, el trabajo reciente de Ellis (2011) sirvió de inspiración para la definición de los códigos finales de interacción. Dicha autora identifica acciones colectivas que representan formas en que profesores, estudiantes, problemas y artefactos pueden actuar en interacción con otros agentes para favorecer el desarrollo y perfeccionamiento de generalizaciones. Ellis (2011) identificó ciclos de interacción basados en ciertas secuencias de acciones, que hacen hincapié en las formas en que una generalización inicial puede evolucionar en el transcurso de un período prolongado de interacción y reflexión. En consecuencia, la versión final de la generalización no es un producto de la suma de acciones individuales sino más bien un proceso interdependiente donde los alumnos unen sus habilidades para la consecución de un objetivo común.

Al igual que Ellis (2007b), Jurow (2004) considera los procesos de argumentación primordiales en la construcción colectiva de generalizaciones. Esta autora estudia cómo estudiantes de secundaria participan en la producción y desarrollo de generalizaciones a partir de la modelización de una situación matemática. La trayectoria de una discusión matemática se ve determinada por la interacción entre estudiantes. Así, la generalización se entiende como el resultado de actividades colectivas y no estrictamente como un producto del pensamiento individual del alumno. Se concluye que, dentro de estas actividades colectivas, la justificación es crucial para el desarrollo y comprensión de los procesos de generalización.

Esta investigación de tesis se centra en la construcción de la argumentación colectiva en torno a la generalización de patrones. La argumentación, como parte del proceso de generalización, es vista como el producto de las acciones interconectadas de los estudiantes en una discusión en grupo. En este sentido, el entorno colaborativo donde los estudiantes desarrollan una actividad matemática tiene influencia en la evolución y conceptualización de la propia actividad.

Argumentación colectiva

Un número creciente de estudios ilustran que lo aprendido no se puede separar de la forma en que se aprende (Ellis 2007b; Krummheuer, 2007; Sfard & Kieran, 2001). Conocer un dominio incluye ser capaz de averiguar cuáles son los recursos disponibles y cómo utilizarlos de manera productiva. Concretamente, asumir responsabilidad sobre la comprensión de los otros y tener que convencer requieren mayores niveles de argumentación matemática que rendir cuentas a un profesor que decide la validez o no de un razonamiento. En esta línea, varias investigaciones afirman la influencia positiva de la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesor desde la perspectiva del número y la calidad de justificaciones matemáticas hechas por alumnos (Ellis, 2007b; Jurow, 2004; Weber y otros, 2008).

Desde la investigación se han propuesto varias formas que dan respuesta parcial a cómo las discusiones pueden contribuir al aprendizaje de las matemáticas. En Weber y otros (2008) se afirma que la discusión de grupo puede facilitar el aprendizaje al invitar a los estudiantes a ser explícitos en las argumentaciones y justificaciones de sus razonamientos así como en los estándares que utilizan para decidir si un argumento es aceptable. Diferentes formas de cuestionamiento pueden animar a los estudiantes a debatir si un determinado método de argumentación es apropiado, creando la oportunidad de defender matemáticamente un razonamiento sólido o abandonar otro por ser erróneo o poco efectivo. En McCrone (2005) se afirma que animar a los estudiantes a tomar una postura más reflexiva en su razonamiento matemático facilita la construcción y comprensión de conceptos matemáticos. En este sentido, poner a prueba, escuchar e incorporar las ideas de los demás ayuda a consolidar razonamientos mediante la verbalización.

En Weber y otros (2008) se sugiere que delegar la responsabilidad de decidir si una solución es correcta a los estudiantes los conduce a asistir con atención, evaluar, cuestionar, y refinar los argumentos de los demás. La disposición de los alumnos para atender y cuestionar los argumentos de los otros facilita la creación de oportunidades de aprendizaje (Krummheuer, 2011). En las aulas donde los profesores suelen ser los árbitros, será poco probable que un alumno desafíe, cuestione o evalúe con atención los argumentos de otro, creyendo que es responsabilidad del profesor hacerlo.

Investigaciones recientes sobre el discurso en el aula de matemáticas han hecho hincapié en la importancia de las discusiones matemáticas para potenciar procesos de generalización, justificación y argumentación por parte de los estudiantes, así como para la consolidación y construcción de conceptos o razonamientos matemáticos (Jurow, 2004; McCrone, 2005; Morera, 2013; Weber y otros, 2008). Para que una discusión matemática sea efectiva se requiere que todos los miembros de la comunidad de clase sean participantes activos y constructivos de manera crítica. Para muchos estudiantes esto significa un cambio desde el tradicional papel de receptores pasivos de la instrucción. Un diálogo matemático rico se produce cuando los participantes están dispuestos a considerar la posibilidad de diferentes interpretaciones y significados, cuando analizan cómo sus ideas difieren de las de sus compañeros, y cuando están abiertos a abandonar razonamientos o acuerdos previos por otros nuevos o en construcción. Por lo tanto, un importante producto del discurso es la transformación de los participantes.

Por otro lado, acorde con Krummheuer (2007) la argumentación no es sólo un objetivo de la enseñanza de las matemáticas que requiere el diseño de prácticas orientadas a que los estudiantes argumenten en un nivel matemático sofisticado. Esto sería aprender a argumentar. La argumentación es una característica en sí misma del aula de matemáticas. La participación de los estudiantes en la construcción de argumentaciones es una condición previa que posibilita el aprendizaje. La construcción de la argumentación mediante consenso colectivo fomenta la refutación, crítica, elaboración y justificación de conceptos y hechos matemáticos. Andriessen (2006) sostiene que “cuando los estudiantes colaboran en la argumentación en el aula, se está discutiendo para aprender” (p. 443).

A diferencia de la argumentación como proceso individual, en Krummheuer (1995) se extiende el concepto de argumentación a una noción colectiva. Este autor utiliza el término argumentación colectiva para referirse al producto que surge de la interacción de dos o más individuos cuando establecen o intentan establecer una conclusión en el sentido de Toulmin (1969). Desde este enfoque la argumentación colectiva es un proceso social que ocurre cuando los participantes tratan de modificar interpretaciones según las matemáticas institucionalizadas en clase mediante justificaciones verbales que sustentan sus acciones. Así, la argumentación colectiva es un logro que proviene de la interacción y, como tal, no puede ser analizada considerando únicamente una secuencia de afirmaciones (Yackel, 2002). Las acciones, desde el punto de vista de la interacción, son fundamentales para dar sentido a la argumentación que se desarrolla colectivamente.

Krummheuer (1995) adapta el modelo de Toulmin para caracterizar la argumentación colectiva en clase de matemáticas. Analíticamente, distingue entre: 1) conclusión, cuya validez está en duda, 2) datos, en los que se basa la conclusión y 3) garantías y respaldos, que aportan razones para legitimar la inferencia aplicada de los datos a la conclusión. De esta manera se reconstruye la racionalidad emergente en el desarrollo colectivo de un argumento. Numerosas investigaciones han utilizado este enfoque para analizar la argumentación colectiva. Weber y otros (2008) reconstruyen la argumentación elaborada por estudiantes mediante una discusión en grupo utilizando el esquema de Toulmin (1969). Concluyen que cuestionar argumentos presentados en el grupo influye en la explicitación de razones (garantías) de sustentación. Esto genera oportunidades de aprendizaje en el grupo mediante la refutación, validación o ampliación de las razones explicitadas. Krummheuer (2007) utiliza su adaptación del modelo de Toulmin para analizar la argumentación colectiva en una clase de primaria. Esta visión estructural de la argumentación es complementada con un análisis de la participación para estudiar los procesos sociales inherentes a la construcción de la argumentación colectiva.

En el presente estudio, los procesos sociales que tienen lugar en la negociación de significados se piensan relevantes en la construcción de argumentación colectiva. Al hacer hincapié en estos procesos, se cambia el centro de atención de la naturaleza y los elementos estructurales de la argumentación a su papel, uso y efecto en una actividad colectiva destinada al aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, en esta investigación se considera la construcción de la argumentación colectiva mediante discusiones en grupo en torno a resoluciones de un problema. La comunicación entre más de dos personas entraña una complejidad desde el punto de vista analítico (Krummheuer, 2011). Aunque la conversación tiene un orden establecido mediante turnos de habla (Sack, 1998), puede ser desordenada atendiendo al contenido matemático de las intervenciones. Es decir, aunque un turno de habla sea posterior a otro, el contenido matemático al que se alude en una intervención puede no estar asociado con el turno inmediatamente anterior. Por tanto, si se fija la mirada en los procesos sociales en la argumentación acerca de un objeto, analizar secuencias de argumentación de forma aislada puede conllevar una visión sesgada de las contribuciones involucradas en su construcción.

En este estudio de tesis se adopta una visión global y dinámica de la evolución de la argumentación colectiva así como de los procesos sociales inherentes a la interacción. Esto lleva a representar la argumentación colectiva mediante lo que denominamos ‘avances en la argumentación colectiva’. Un ‘avance’ se produce mediante el paso de una narrativa a otra de forma continua y coherente, dando cohesión al discurso matemático. Las narrativas están conectadas, es decir, existe un vínculo entre los objetos centrales a los que hacen referencia. La concatenación temporal de los avances permite representar la evolución de la argumentación colectiva sin segmentar las discusiones en secuencias aisladas.

3. Metodología

En este capítulo se describen los métodos utilizados en la investigación, algunos de ellos originales creados para este estudio en particular. En general el enfoque seguido es de tipo cualitativo e interpretativo. Para el análisis de datos se aplican métodos de comparación constante con una orientación inductiva.

En primer lugar, se explican el contexto empírico y las acciones realizadas para el diseño e implementación de la intervención didáctica. Luego se exponen los métodos utilizados para la obtención de datos así como para su reducción inicial. Finalmente se presenta la reducción avanzada de datos que incluye la elaboración de dos codificaciones, la preliminar y la final, junto con las herramientas metodológicas creadas.

Tabla de contenidos

3.1 Escenario y participantes

Los datos principales del estudio se recogieron en un aula de matemáticas con alumnos de secundaria de un colegio con fondos privados de la ciudad de Barcelona. Los alumnos pertenecen a una clase del crédito optativo 'Taller de problemas', donde se trabajan problemas de ediciones anteriores de las llamadas *Pruebas Cangur* durante todo el curso. Dada la optatividad el grupo es menor de lo habitual, habiendo 14 alumnos. Se seleccionaron cinco mujeres y tres varones. El acceso al escenario vino facilitado por la vinculación profesional de la autora con el centro hasta setiembre de 2010. Para realizar la experimentación se volvió al centro al curso siguiente como profesora-investigadora.

Los alumnos pertenecían a un mismo grupo clase de cuarto de educación secundaria obligatoria con edades comprendidas entre los 15 y 16 años. En la selección de ocho alumnos y en la organización de parejas, se siguieron criterios de participación en clase según lo que explicó la profesora regular del aula. No se pretendió que la población fuera representativa ni aleatoria, ya que el proceso de selección fue particular e intencional. Se obtuvieron una pareja mixta, otra constituida por dos chicos y las dos restantes formadas por dos chicas cada una. No se trabajó con todo el grupo clase ya que hay más de ocho alumnos matriculados en el crédito optativo. A pesar de ello, se reprodujo igualmente una dinámica de trabajo habitual en muchas aulas: trabajo en pareja y trabajo en grupo.

La dinámica de trabajo en clase constó de dos partes, trabajo en pareja y posterior puesta en común, durante una hora lectiva (unos 50 minutos) para cada una de las sesiones que conformaron la implementación de una secuencia didáctica. Esto llevó a cinco sesiones de clase consecutivas con una periodicidad quincenal que vino impuesta por la periodicidad del crédito optativo en el que se enmarcó la experimentación. Cada sesión se inició con una introducción al problema y una breve explicación de la dinámica y las normas sociales de actuación en clase a cargo de la profesora. A continuación los alumnos trabajaron en pareja durante unos 20 minutos aproximadamente. Cada pareja pensó el problema de forma conjunta y produjo un informe escrito con una resolución común consensuada. Durante esta primera parte las parejas trabajaron de forma aislada, es decir, sin poder comunicarse unas parejas con las otras y sin la intervención de la profesora. La segunda parte consistió en la puesta en común en grupo y duró unos 25 minutos. Se pidió a los estudiantes que confrontaran públicamente las formas de resolución y dificultades surgidas durante el trabajo en pareja. Al finalizar la puesta en común los alumnos dispusieron de un tiempo para reflexionar sobre el contenido matemático que se había discutido e introdujeran eventuales modificaciones en el informe escrito. La profesora gestionó, de forma poca interventora desde la perspectiva del contenido matemático, la puesta en común.

3.2 Diseño de la intervención didáctica

Para el diseño de la intervención se tomaron decisiones sobre la secuencia didáctica y la actuación pedagógica. Se necesitó clarificar no sólo el tipo de problemas y sus enunciados, sino también y sobre todo el escenario didáctico de gestión de la actividad antes de la realización del experimento. El diseño de la intervención fue revisado y valorado en el seno del equipo de investigación al que pertenece la autora, Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, así como en un foro internacional en los inicios del trabajo (Chico & Planas, 2011c).

Preparación de la secuencia didáctica

Para preparar el diseño experimental, se elaboró una secuencia matemáticamente coherente de cinco problemas que trabajan la generalización a través de patrones con el objetivo de contribuir al pensamiento algebraico de los alumnos. La coherencia de los problemas se basa en el control de la dificultad progresiva, desde la perspectiva del contenido algebraico, de las cuestiones dentro del problema y de los problemas dentro de la secuencia.

Todos los problemas plantean contextos imaginables fuera de las matemáticas para facilitar conjeturas y generalizaciones desde la formulación de casos particulares. Los enunciados incluyen texto escrito, con referencias simbólicas y/o numéricas, y representaciones gráficas que ejemplifican los primeros términos de una sucesión para facilitar el desarrollo de diferentes estrategias de resolución visuales y numéricas. Esta condición facilita que en la discusión matemática en grupo se presenten, se valoren y se comparen resoluciones basadas en distintos sistemas de representación, susceptibles de generar distintas expresiones algebraicas. Cabe esperar que en la discusión en grupo se produzcan interacciones ricas, desde el punto de vista de las matemáticas, ya que los alumnos se ven abocados a justificar verbalmente sus razonamientos y a conectar diferentes estrategias de resolución.

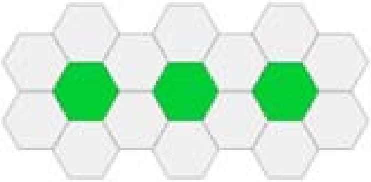
Para controlar la dificultad progresiva de cada problema, basamos las cuestiones del enunciado en tres criterios siguiendo el trabajo de Stacey (1989): 1) generalización próxima, cuando se pide un elemento de la serie que se pueda calcular mediante un procedimiento de recuento directo; 2) generalización lejana, cuando se pide un elemento de la serie cuyo cálculo resulte difícil mediante recuento directo; 3) generalización matemática, cuando se pide el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico para expresar el caso general. Estos tres niveles de razonamiento son también recomendados por Carraher y Schliemann (2007) para facilitar la transición de la aritmética al álgebra. Usando su terminología, se corresponden con los niveles de pensamiento: 1) concreto, cuando se manipulan pequeñas cantidades; 2) semi-concreto, cuando se manipulan grandes cantidades; y 3) abstracto, cuando ya se usan símbolos.

Para controlar la dificultad progresiva de los problemas de la secuencia se incluyeron cuestiones donde se requería la manipulación y comprensión de las expresiones algebraicas del caso general y/o se suprimía la cuestión relativa a la generalización lejana. En el sentido de Sfard (1991), se incrementó la dificultad al introducir cuestiones que requerían entender la expresión algebraica como un objeto, a saber: una estructura real y estática manipulable como un todo y no sólo como un proceso, i. e., un elemento que proviene de una sucesión de acciones.

Antes de la experimentación, hubo una prueba piloto con el primer y el segundo problemas de la secuencia que confirmó su idoneidad didáctica dada la riqueza de estrategias generadas por los estudiantes en su resolución (Morera, Chico, Badillo & Planas, 2012). Asimismo se tuvo en cuenta la experimentación en clase de un problema para refinar o modificar el siguiente en la secuencia. De los cinco problemas llevados a cabo, finalmente se escogieron tres para la experimentación del presente estudio. A continuación se presentan los tres problemas seleccionados que corresponden a la primera, segunda y cuarta sesiones respectivamente.

Problema 1: Baldosas y jardineras

El ayuntamiento quiere adornar el suelo de una plaza colocando jardineras hexagonales (verdes en la figura) rodeadas de baldosas también hexagonales.



1. ¿Cuántas baldosas harán falta para 5 jardineras?
2. ¿Cuántas baldosas harán falta para 100 jardineras?
3. ¿Cuántas harán falta para un número cualquiera *n* de jardineras?

   En cada caso, explica cómo lo has hecho

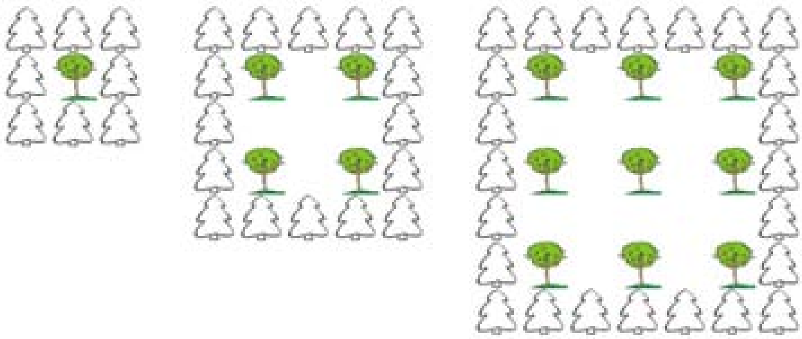
Figura 1. Enunciado del primer problema de la secuencia didáctica

La primera tarea está basada en un problema clásico extraído del libro *Problems with patterns and numbers* (Shell Center for Mathematics Education, 1984). Se adaptó el enunciado según las recomendaciones de la literatura especializada para conseguir una estructura que contemplara la generalización cercana, la lejana y la matemática o algebraica. Durante la experimentación, se acordó con los estudiantes que si finalizaban el problema antes de agotar el tiempo de trabajo en pareja, debían pensar y buscar otra forma de resolución distinta a la que hubieran hallado.

El objetivo del primer problema es trabajar el pensamiento algebraico a través de un patrón lineal que, desde una perspectiva covariacional, corresponde a una función afín, por lo que la aplicación directa de una proporcionalidad lineal no es adecuada para su resolución. El uso de la regla de tres para modelar este tipo de situación es uno de los errores más comunes como ya se expuso en el capítulo anterior. Por otro lado, como se vio en la prueba piloto (Morera y otros, 2012), es un problema que se puede resolver mediante diversas estrategias visuales basadas en unidades de conteo diferentes y que generan, en primera instancia, distintas expresiones algebraicas. Estos dos hechos facilitan la posible confrontación de diversas aproximaciones durante la puesta en común, lo que interesa especialmente para el propósito de este estudio. Por otro lado, la identificación de la variable independiente es facilitada por el enunciado y puede ayudar al alumno en la escritura simbólica de la expresión algebraica.

Problema 2: Naranjos y pinos

Un agricultor quiere plantar naranjos siguiendo una forma cuadrada y alrededor quiere plantar pinos. Se imagina el esquema para 1, 2 y 3 filas de naranjos:



1. ¿Cuántos naranjos y pinos se necesitarán para cinco filas de naranjos?

2. Para el caso general de *n* filas, ¿cuántos naranjos se necesitarán? ¿Y pinos?

3. El principal ingreso del agricultor proviene de la venta de naranjas. Por tanto le interesa tener más naranjos que pinos. Manteniendo la forma del huerto, ¿es esto posible?

En cada caso, explica cómo lo has hecho.

Figura 2. Enunciado del segundo problema de la secuencia didáctica

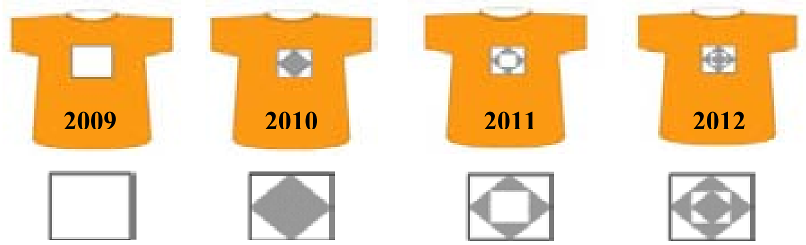
La tarea de la Figura 2 está basada en el problema de los manzanos extraído de las pruebas PISA 2000 (OCDE, 2002). Se modificaron las preguntas del enunciado original para adaptarlas a una estructura donde se requiere un doble pensamiento de generalización cercana y de generalización matemática, además de la manipulación de expresiones algebraicas. Se suprime la pregunta de generalización lejana y se incluye una donde se requiere ver las expresiones algebraicas como objetos. De esta forma se aumenta la dificultad matemática respecto al problema anterior.

El propósito del problema es trabajar el pensamiento algebraico a través de la generalización matemática de un patrón lineal y otro cuadrático, así como la manipulación y comparación de las respectivas expresiones algebraicas. Al igual que en el problema anterior, se puede llegar al patrón lineal mediante diversas estrategias visuales basadas en unidades de conteo distintas y que generan, en primera instancia, distintas expresiones algebraicas (Morera y otros, 2012). Cabe esperar que mediante la confrontación de aproximaciones se aumente la riqueza de la comunicación matemática en la puesta en común. Por otro lado, a pesar de que la variable independiente es facilitada por el enunciado, no se corresponde con el número de naranjos sino con las filas de naranjos. El problema demanda dos patrones con distinta variable dependiente, número de pinos y número de naranjos, pero igual variable independiente, número de filas de naranjos.

Problema 4: Camisetas

Esta tarea está basada en un problema extraído de las Olimpiadas Matemáticas Españolas (2004). Se modificó el contexto del problema que originalmente era matemático y se adaptaron las cuestiones a una estructura donde hubiera una cuestión sobre generalización cercana y tres sobre generalización matemática.

Desde 2009, una diseñadora hace una camiseta cada año como insignia de su marca. Estos son los modelos correspondientes al primer, segundo, tercer y cuarto años.



La figura estampada en cada camiseta sigue una serie que se realiza así: se toma un cuadrado en blanco, se marcan los puntos medios de los lados, se unen y se pinta de gris el cuadrado resultante. Después se unen los puntos medios del cuadrado gris y se pinta de blanco, y así sucesivamente.

1. ¿Cuántos cuadrados blancos y cuántos grises tendrá la figura de la camiseta 2015?
2. ¿Cuántos de cada tipo tendrá una camiseta de cualquier año, la enésima camiseta?
3. ¿Hay más superficie blanca o gris en la figura de la enésima camiseta?
4. ¿Cuántos triángulos blancos y cuántos grises tendrá la figura de la enésima camiseta?

Figura 3. Enunciado del cuarto problema de la secuencia didáctica

El objetivo del problema es trabajar el pensamiento algebraico a través de distintos patrones lineales relativos a la generación de una misma figura geométrica. Este problema presenta una complejidad mayor a los anteriores ya que su resolución requiere discriminar entre camisetas pares e impares. La modelización de los patrones relativos a la segunda y cuarta cuestión puede subyacer en diversas estrategias visuales que generan, en primera instancia, diferentes expresiones algebraicas. Estos dos hechos facilitan la aparición de diversas aproximaciones en la discusión en grupo, lo que resulta de interés para este estudio. Por otro lado, la identificación de la variable independiente no es facilitada por el enunciado y es necesario relacionar el año de la camiseta con la posición que ocupa en la serie. Durante la experimentación, se aclaró la definición del término enésimo.

La tercera cuestión del problema no requiere del lenguaje simbólico para ser solucionada diferenciándose así de las cuestiones dos y cuatro. Requiere un mayor razonamiento visual que se apoye en la propia construcción geométrica y sus propiedades y en la continuidad de la serie. Si el alumno sólo observa los casos particulares facilitados por el enunciado discriminando entre pares e impares, su respuesta será errónea. Necesita así generar más casos particulares para validar o justificar su hipótesis inicial. Se promueve de esta manera el razonamiento global y abstracto más allá del simple trabajo con algunos casos particulares.

Preparación del diseño pedagógico

Para la preparación del diseño pedagógico de la puesta en común nos inspiramos, por un lado, en el trabajo de Smith y Stein (2011) donde se recomiendan cinco prácticas para el desarrollo de una puesta en común con contenido matemático y, por el otro, en trabajos de Cobb y sus colegas (Cobb, Yackel & Wood, 1995; Yackel & Cobb, 1996) donde se enfatiza la influencia de las normas sociales y sociomatemáticas en la evolución de la actividad matemática en clase. Cabe señalar la adaptación del trabajo de Smith y Stein (2011) en el que las acciones del profesor tienen una clara intencionalidad de enseñanza. En este estudio la acción docente fue mayormente de gestión de la participación, dejando deliberadamente una gran autonomía a los estudiantes. A pesar de esto, consideramos crucial la preparación de la puesta en común por parte de la profesora para asegurar tanto la riqueza matemática de las actividades planteadas como una gestión social adecuada que asegurara confrontación matemática en la discusión en grupo.

A continuación se detallan las cinco prácticas recomendadas por Smith y Stein (2011) y las acciones concretas llevadas a cabo en este estudio para su fomento:

1) Anticipación: se trata de prever soluciones y estrategias, correctas o incorrectas, de los estudiantes para resolver el problema. Con inspiración en Morera (2013) se elaboró para cada actividad el "árbol del problema", una representación en forma de árbol a fin de determinar la riqueza matemática dada por la diversidad de aproximaciones y resoluciones y anticipar lo que matemáticamente puede ocurrir en clase. El árbol ofrece posibilidades del problema para una comunicación matemática rica en la puesta en común. La Figura 4 ilustra el árbol del problema de la primera sesión. Las tres cuestiones del problema están representadas por las casillas rosas y las casillas azules corresponden a ayudas que un experto imaginario podría dar. El árbol del problema no es un producto acabado sino una herramienta a ser refinada y enriquecida tras cada sesión.

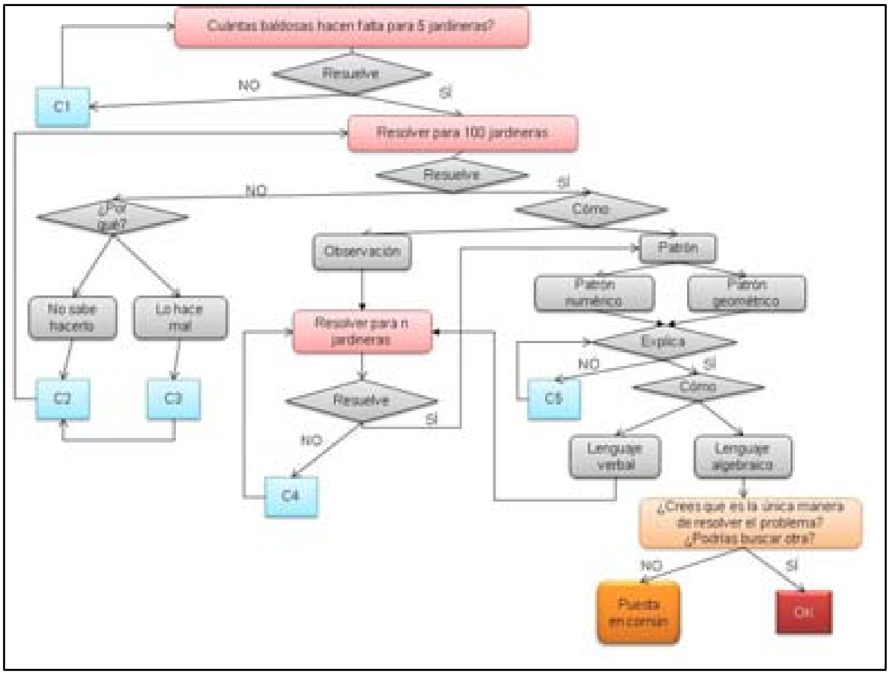


Figura 4. Árbol del primer problema de la secuencia didáctica

2) Monitorización: se trata del seguimiento de las respuestas de los estudiantes durante la fase exploratoria con el objetivo de identificar el potencial aprendizaje matemático vinculado a las estrategias y a las representaciones utilizadas por los estudiantes. En la presente investigación consideramos el trabajo en pareja como la fase exploratoria. La profesora circuló por la clase prestando especial atención y tomando notas de las dificultades de los estudiantes y las diferentes estrategias generadas a fin de provocar su aparición en la puesta en común si alguna no surgía de forma espontánea.

3) Selección: se trata de escoger a estudiantes para que expliquen su resolución durante la puesta en común. El criterio de selección, que se sustenta en las fases de monitorización y anticipación, ha de ser el contenido matemático vinculado a la aproximación del estudiante que ha sido objeto de la selección. En nuestra investigación la profesora sigue básicamente dos criterios de selección con la intención de crear cierta confrontación en la discusión: escoger a un alumno que haya tenido dificultades en la resolución del problema o bien a uno que lo haya utilizando razonamiento original en el sentido de poco esperado.

4) Secuenciación: se trata de tomar decisiones sobre cómo secuenciar las diferentes formas de resolución y representaciones del problema. En nuestro trabajo, la profesora realiza esta secuenciación con dos objetivos, animar a los estudiantes a resolver las dificultades derivadas de una solución incorrecta y provocar la comparación entre diferentes aproximaciones al problema.

5) Conexión: se trata de ayudar a los estudiantes a conectar ideas y razonamientos matemáticos clave que surgen del desarrollo de sus estrategias y representaciones. En nuestro caso, se pide a los estudiantes que reflexionen sobre lo que se ha discutido y que introduzcan modificaciones y/o amplíen el informe escrito durante el tiempo de trabajo en pareja.

A modo de resumen, la Tabla 1 ilustra la denominación de las cinco prácticas secuenciadas junto con las acciones llevadas a cabo en la experimentación para el desarrollo de cada una de ellas.

Práctica	Acciones
Anticipación	La profesora elabora el árbol del problema.
Monitorización	La profesora circula por clase durante el trabajo en pareja.
Selección	La profesora selecciona a un alumno que ha resuelto el problema con dificultades o mediante un razonamiento poco común.
Secuenciación	La profesora anima a los estudiantes expresar y resolver dificultades y provoca la comparación entre soluciones.
Conexión	La profesora pide a los estudiantes que reflexionen sobre lo discutido e introduzcan cambios en sus resoluciones.

Tabla 1. Prácticas de la puesta en común

Respecto a las normas, en esta investigación el establecimiento de normas se convirtió en un tema explícito de conversación durante el inicio de cada sesión, siendo reforzado durante el transcurso de las mismas con una doble intención: 1) por un lado, crear un ambiente de indagación adecuado que guiara la calidad matemática del discurso y 2) por el otro, fomentar el desarrollo de la autonomía de los estudiantes, sobre todo en el plano social, para asegurar su participación activa en las discusiones en grupo. Siguiendo a Cobb, Yackel y Wood (1995), las normas relativas a la actividad en pareja incluyeron persistir en la resolución de problemas difíciles, explicar razonamientos e ideas a la pareja, escuchando y tratando de dar sentido a la explicación, e intentar lograr consenso sobre la respuesta. En la puesta en común, las normas incluyeron explicar y justificar las soluciones obtenidas durante el trabajo en pareja, escuchar y dar sentido a explicaciones de los otros preguntando dudas al respecto, manifestar dificultades en la comprensión de un razonamiento expuesto, indicar acuerdo o desacuerdo con lo explicado, atender las demandas sobre aproximaciones presentadas y solucionar situaciones con conflicto entre interpretaciones o soluciones, cuestionando y valorando alternativas.

Conforme a lo expuesto, las acciones de la profesora durante la puesta en común tuvieron una triple intencionalidad:

1) Gestionar los turnos de la puesta en común, permitiendo en todo momento la espontaneidad de los alumnos, mediante acciones similares a la de la Figura 5.

Profesora:	Pues va, Sara, tú misma, ¿nos cuentas el primero?
Sara:	A ver, hemos añadido dos jardineras a cada lado y las hemos rodeado con cuatro baldosas más. Entonces eh…

Figura 5. Fragmento del Subepisodio 1.1.1

2) Invitar a los alumnos a mostrar desacuerdo o falta de comprensión de un razonamiento expuesto, a modo del ejemplo en la Figura 6.

Profesora:	Maria, ¿lo has entendido?
Maria:	Sí.
Profesora:	¿Nos lo puedes explicar?
Maria:	Bueno, es que no me he enterado muy bien.

Figura 6. Fragmento del Subepisodio 1.1.3

3) Provocar reflexión abierta sobre razonamientos expuestos, a modo del ejemplo en la Figura 7.

Profesora:	¿Creéis que todas las formas de resolución que habéis explicado están bien?
Jose:	Sí.
Gabriel:	Sí.
Jose:	Pero no todas pueden estar igual de bien porque dan resultados distintos

Figura 7. Fragmento del Subepisodio 1.2.1

El principal objetivo de estas acciones fue crear un ambiente de trabajo donde los alumnos sintieran la necesidad de reformular sus aproximaciones. Siguiendo a Wood, Cobb y Yackel (1991), se perseguía crear oportunidades en la comunicación matemática donde los alumnos tuvieran que explicitar argumentos inicialmente ocultos, junto con confrontar y valorar las diferentes aproximaciones al problema.

3.3 Métodos de obtención de datos

La recogida de datos durante la experimentación se centró en registrar las interacciones entre estudiantes y entre estudiantes y profesora. Los registros de audio y vídeo de las sesiones, junto con sus transcripciones constituyeron la materia prima del análisis. Sin embargo, también se recolectaron otros materiales que nos sirvieron como información complementaria. Estos fueron: notas de campo de las observaciones de clase, notas de las reuniones con la profesora regular del aula de matemáticas y protocolos escritos por los estudiantes en cada sesión.

Antes de la experimentación en clase, hubo tres reuniones con la profesora regular del aula, que no fue la que condujo las sesiones puesto que se decidió que la investigadora actuara como profesora. En la primera reunión se le explicó a rasgos generales la investigación y la intervención didáctica que se pretendía, sobre la cual se pidió su colaboración respecto al comentario de los problemas en su redactado inicial. En la segunda reunión se pidió información sobre las habilidades comunicativas de los alumnos a fin de hacer una posterior elección de las parejas siguiendo criterios que garantizaran una cierta participación. Por último, en la tercera reunión se consensuaron los problemas de la secuencia didáctica.

Se realizó una primera visita al centro para solicitar la colaboración de los alumnos. Se les explicó de forma resumida la investigación e intervención didáctica y se les pidió permiso, a ellos y a sus familias, para ser grabados en audio y vídeo durante las sesiones programadas. Asimismo, se les informó que la investigación no tenía ningún tipo de influencia sobre la evaluación académica de la asignatura. Los alumnos se mostraron entusiasmados con la idea de participar. Esto nos aportó información relevante sobre su buena predisposición durante la experimentación.

Para captar la realidad del aula durante la situación didáctica planteada, registramos en video y audio las sesiones. Hubo una cámara de video y una grabadora para registrar lo hablado y realizado en el contexto de cada pareja. De esta manera aseguramos captar fragmentos que la cámara de vídeo no recogió con claridad a causa de inevitables interferencias ambientales. La profesora-investigadora elaboró notas de campo durante el trabajo en pareja, que en ocasiones completó tras la sesión. Estas notas aportaron información relevante sobre las estrategias de los estudiantes en este periodo de la dinámica de clase y guiaron la puesta en común.

Durante la discusión en grupo se contó con tres cámaras de vídeo que registraron desde tres ópticas distintas, captando de esta forma la información verbal y la no verbal de todos los participantes. Para tener los registros verbales con mayor calidad se contó con cuatro registradoras que permitieron captar tanto las intervenciones públicas de los participantes en la discusión matemática como los comentarios hechos en un segundo plano entre estudiantes.

Al finalizar cada sesión se recogieron los protocolos de resolución escritos que, inicialmente, se elaboraron de forma consensuada por cada pareja y, después de la puesta en común, pudieron ser modificados con un bolígrafo de un color distinto. Los protocolos aportaron información complementaria relativa al lenguaje simbólico utilizado por los alumnos en sus resoluciones escritas y a la influencia de la puesta en común en las mismas.

3.4 Reducción primera de datos

La reducción primera de los datos recogidos consistió en la elaboración de transcripciones relativas a las discusiones en grupo para su posterior segmentación en episodios y subepisodios. También se realizaron tablas donde se resumen las aproximaciones desarrolladas durante el trabajo en pareja de cada sesión.

Elaboración de transcripciones

La obtención del primer conjunto de datos comenzó con la transcripción de los registros de audio y video, tanto de la pareja como de la puesta en común, de las cinco sesiones de clase. Como las sesiones fueron quincenales, tanto las transcripciones como un primer visionado de los vídeos se realizaron mientras el experimento didáctico se desarrollaba. Somos conscientes de la base interpretativa de las transcripciones, que no reflejan por tanto con fidelidad absoluta los procesos que se desarrollan en el aula. A pesar de ello, el hecho de contar con registros de vídeo y audio de cada pareja y con grabaciones de la puesta en común desde tres ángulos diferentes, permitió elaborar transcripciones precisas y confiables.

La lengua mayormente usada por estudiantes y profesora fue el catalán. Dada la proximidad lingüística entre catalán y castellano, y puesto que no adoptamos la lengua como unidad de análisis, fijamos una lengua, el castellano, en las transcripciones. Con el fin de ser fieles a la realidad del aula, se han conservado las expresiones coloquiales y los errores sintácticos de los alumnos, y se ha completado cada transcripción con la información no verbal que proporcionan los registros de vídeo. Así pues, se han incluido gestos o acciones que eran relevantes para comprender la realidad del aula, cuidando en lo posible la no incorporación de acciones que no se pueden inferir directamente del registro de datos.

Las transcripciones de los registros de audio y video se hicieron elaborando tablas de dos columnas; en la primera se puso el nombre de quién hizo la intervención y en la segunda aquello que se dijo o hizo. Se utilizan corchetes, [ ], para escribir lo que se hace (gestos o acciones) y diferenciarlo de lo que se dice textualmente; paréntesis con puntos suspensivos en su interior, (…), para omitir intervenciones que no vienen al caso (no relativas a la discusión matemática); pseudónimos para los estudiantes con el fin de garantizar la confidencialidad de sus datos personales, y nos referimos abreviadamente a la profesora para las intervenciones de la profesora-investigadora en la puesta en común.

Se enumeran las intervenciones de cada episodio para facilitar la comprensión y escritura del análisis narrativo. Por otra parte, no se elabora la transcripción de toda la puesta en común y solo se reproducen los fragmentos que de antemano resultan de interés para este estudio. Así pues, aunque la numeración sea consecutiva puede no estar representando turnos consecutivos.

Construcción de episodios de clase

Para la delimitación y construcción de los episodios nos inspiramos en el trabajo de Schoenfeld (2011) donde se propone y se ejemplifica una segmentación de sesiones de clase en episodios y subepisodios de diferentes niveles preestablecidos. La regla para segmentar episodios es descomponer cualquier episodio en subepisodios que cohesionan fenomenológicamente y que están en el mismo nivel en términos de análisis. En este estudio las discusiones en grupo de cada sesión se segmentaron en episodios y éstos, a su vez en subepisodios, que se numeraron de forma ordenada y jerárquica. Por ejemplo, el Subepisodio 1.2.3 corresponde al tercer subepisodio del segundo episodio (Episodio 1.2) de la primera sesión.

Los fragmentos de transcripción asociados a las discusiones de cada sesión se segmentaron en episodios de acuerdo con el momento de la generalización al que se referían: generalización cercana, lejana, matemática o manipulación algebraica. Así cada episodio se corresponde con la discusión de una cuestión particular del enunciado del problema; este es pues uno de los niveles de análisis. Más tarde, estos episodios se segmentaron en subepisodios según el objeto central sujeto a debate matemático. En ocasiones, se podría considerar que la temática central de la discusión de ciertos subepisodios correlativos es la misma; sin embargo, con fines de simplificación se decidió su segmentación fragmentando esta temática en objetos matemáticos menores en torno a los cuales existía discusión. En este sentido, se priorizó por un lado la intención de hacer un microanálisis y por el otro una longitud adecuada que facilitara su comprensión. Cuando la determinación del inicio y fin de un episodio no fue clara, se consensuó con tres investigadores del equipo del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática.

En resumen, la creación de subepisodios responde más a una estrategia de análisis que a una conceptualización fragmentada de la interacción social. Así, no nos preocupa la posible pérdida de información al realizar esta fragmentación ya que, por un lado, en esta investigación se contempla el análisis de los episodios que supone una visión conjunta de los subepisodios y la conexión entre ellos; mientras que, por otro lado, a lo largo del análisis la interpretación de los datos estuvo influenciada por los vídeos, que no se fragmentaron, y a los que se acudía en busca de confirmación de ciertas interpretaciones preliminares.

Síntesis del trabajo en pareja

A fin de obtener una mayor comprensión, desde la perspectiva de las matemáticas, de las discusiones que surgieron en las puestas en común de cada sesión, se hizo una primera exploración de los datos del trabajo en pareja. Se realizó una tabla relativa a cada sesión donde se resumieron las soluciones o aproximaciones realizadas por cada pareja para cada una de las cuestiones del enunciado de cada problema. También se elaboró una descripción narrativa donde se resumen las dificultades y los detalles relevantes de la actividad en el contexto de cada pareja.

A continuación, la Tabla 2 muestra de forma sintética las aproximaciones realizadas por cada pareja en la primera sesión de clase. Seguidamente se exponen las descripciones narrativas donde se resume el trabajo de cada pareja durante la resolución del primer problema. Aunque no se incluye en esta memoria, esta labor se ha realizado para todos los problemas y todas las parejas.

	Irene - Óscar	Sara – Ruth	Cristina- Maria	Gabriel – Jose
5 jardineras	Usan la regularidad "*Para cada jardinera añadimos cuatro baldosas*" y hacen 14+4+4	Dibujan la serie y cuentan las baldosas	Dibujan la serie y usan la regularidad "*Para cada vez que añadimos una se cuentan 4 baldosas*" y hacen 14+4+4	Usan la regularidad "*Para cada jardinera añadimos 6 baldosas*" y restan las baldosas compartidas 2·4
100 jardineras	Llegan al patrón $\left(\frac{1}{4}=\frac{100}{x}\right)+2$, usando la regularidad anterior	Usan la regla de tres $[\frac{5}{22}=\frac{100}{x}]$	Usan la regla de tres $[\frac{5}{22}=\frac{100}{x}]$	Usan el patrón "*Para cada jardinera añadimos seis baldosas y luego le restamos dos por n-1*"
n jardineras	$\left(\frac{1}{4}=\frac{n}{x}\right)+2$	$\frac{5}{22}=\frac{n}{x}$	Sugieren verbalmente $6+4(n-1)$ pero no llegan a escribir la expresión algebraica	$6n-2(n-1)$
Extra	Consideran que no hay otras formas de resolución	Una parte dice regularidades pero la otra no las acepta	Les falta tiempo para considerar alternativas	Encuentran el patrón alternativo $4n+2$

Tabla 2. Aproximaciones de las parejas al primer problema

Irene y Óscar

Esta pareja propone como solución de la primera cuestión del problema la que denominan regla de tres $\frac{3}{14} = \frac{5}{x}$, basada en el caso *n=3* facilitado por el enunciado. Inicialmente, descartan este procedimiento porque la solución decimal no se adecua al contexto del problema pero, luego, afirman que no es correcto porque hay baldosas compartidas. A partir de ahí señalan la regularidad "cada jardinera tiene 4 baldosas no compartidas" y suman 8 a las 14 baldosas del caso *n=3*. Verbalmente también apuntan al patrón 4+4+4+4+6 aunque no lo desarrollan. Para la segunda cuestión, proponen la regla de tres $\frac{1}{4} = \frac{100}{x}$, basada en la regularidad "cada jardinera tiene cuatro baldosas". Comprueban la validez del procedimiento con los casos particulares *n=3*, *n=4* y *n=5* y observan que deben de sumar dos al resultado de la regla de tres. Después relacionan esta adición con las dos baldosas no compartidas de un extremo y escriben erróneamente $\left(\frac{1}{4} = \frac{100}{x}\right) + 2$ ($\left(\frac{1}{4} = \frac{n}{x}\right) + 2$, en la generalización matemática). Para acabar llegan a concluir que no puede haber otra forma de solucionar el problema excepto seguir la serie mediante dibujos.

Sara y Ruth

Para resolver la primera cuestión del problema siguen la serie dibujando y cuentan las baldosas, señalando que han añadido cuatro por un lado y cuatro por el otro; sin embargo parecen no apreciar este hecho como una regularidad. En el segundo apartado del enunciado utilizan la que denominan regla de tres $\frac{5}{22} = \frac{100}{x}$, basada en el caso particular *n=5* y la dan por válida sin hacer comprobación alguna. Para la resolución del tercer apartado generalizan la proporcionalidad lineal utilizada en la cuestión anterior, escribiendo la expresión algebraica $\frac{5}{22} = \frac{n}{x}$. Tienen algunas dudas sobre la presencia de dos variables, pero finalmente llegan a concluir que para saber uno de los valores, se requiere que el problema facilite el otro valor.

Cristina y Maria

Para solucionar la primera cuestión del problema continúan la serie dibujando y cuentan 14+4+4 usando la regularidad "Cada jardinera que añadimos ponemos 4 baldosas". Para la segunda cuestión del enunciado, proponen inicialmente multiplicar 22 (el resultado de la primera cuestión) por 20 (que proviene de dividir 100 entre 5) pero lo descartan al apreciar que algunas baldosas están compartidas. Entonces deciden hacer la que denominan regla de tres $\frac{5}{22} = \frac{100}{x}$, basada en el caso particular *n=5*. En ningún momento conectan el razonamiento multiplicativo con la proporcionalidad lineal, considerando el primero erróneo y el segundo válido. Experimentan dificultades relacionadas con el lenguaje algebraico y la presencia de dos variables en la resolución de la tercera cuestión. Así descartan $\frac{5}{22} = \frac{n}{x}$ por tener dos variables y empiezan a buscar estrategias visuales de conteo. Señalan el patrón verbal "la primera jardinera tiene 6 baldosas y el resto tiene 4"; no obstante, tienen muchas dificultades con el uso del lenguaje algebraico proponiendo 6+(x+4)=? ó 6+(4x)=? como representación simbólica del patrón y expresando dudas sobre qué deberían escribir en la segunda parte de la igualdad y de qué modo. Finalmente, parecen decantarse por la segunda opción, pero al intentar validarla mediante el caso particular *n=100*, solucionado erróneamente, la descartan en el preciso momento en que se acaba el tiempo destinado al trabajo en pareja.

Gabriel y Jose

Para resolver la primera cuestión del problema utilizan la regularidad "cada jardinera tiene 6 baldosas", que traducen de forma general como 6 por el número de baldosas, "y luego se restan las dos compartidas". Para el caso particular *n=5* restan 2·4, contando en un dibujo imaginario las jardineras que comparten baldosas. Para la segunda cuestión utilizan la misma regularidad y generalizan el número de baldosas compartidas, el total de jardineras menos una. Finalmente, para la tercera cuestión, proponen hacer $6n = x$ y después $x - 2(n-1)$, pero luego lo simplifican escribiendo la expresión algebraica $6n - 2(n-1)$. Son conscientes de que hay diversas formas de conteo diferentes a la que ya han encontrado y traducen la regularidad "cada baldosa tiene cuatro y luego le sumas dos" al patrón multiplicativo cuya expresión algebraica es $4n + 2$. Entablan una discusión sobre la interpretación de las baldosas compartidas en esta última aproximación. Jose cree que son 2·(*n-1)*, como en la aproximación anterior, mientras que Gabriel le muestra utilizando la representación gráfica y varios casos particulares que las baldosas compartidas son únicamente las dos del final.

3.5 Reducción avanzada de datos

Una vez fragmentados los datos en episodios y realizadas las tablas que resumen la información matemática del trabajo en pareja, se procedió al análisis microscópico de cada subepisodio. Para ello nos inspiramos en métodos y procedimientos de la Teoría Fundamentada (Glaser & Strauss, 1967). Más concretamente se aplicaron métodos de comparación constante entre datos y constructos teóricos, con la ayuda de memorandos redactados a lo largo del análisis.

El microanálisis conlleva examinar e interpretar los datos de manera recurrente y minuciosa. Para ello se hizo una codificación preliminar "línea por línea" de los subepisodios, que permitió conceptualizar y clasificar acciones de los participantes en cada discusión matemática desde la perspectiva de la interacción y del contenido matemático. Este proceso implicó un continuo ir y venir de los datos siguiendo el método de comparación constante y teórica. Posteriormente, en base a los memorandos que se redactaron durante la codificación preliminar y la revisión de literatura relativa a la interacción social, se estableció un sistema final de códigos de interacción que permitió reducir e interpretar los datos de esta investigación acorde a los objetivos planteados. Para ello se siguieron en todo momento los principios de comparación constante. En el proceso se redactaron memorandos, de distinta extensión y profundidad, que fueron de vital importancia en la conformación final del análisis narrativo de los subepisodios.

Una vez realizada la codificación se desarrollaron dos herramientas analíticas, el 'Identificador de argumentación colectiva' y el 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva'. La primera herramienta tiene el propósito de reducir el análisis de los subepisodios a una tabla de triple entrada donde se identifican movimientos en la argumentación colectiva junto a los códigos de interacción y contenido matemático involucrados en estos movimientos. La segunda herramienta se centra en el análisis de los episodios y tiene por objetivo representar avances en la argumentación colectiva juntos a los códigos de interacción involucrados. Tanto el 'Identificador' como el 'Descriptor' han sido primordiales en la determinación de los resultados de esta investigación.

Codificación preliminar y códigos finales

El análisis comenzó con la codificación "línea por línea" de los subepisodios de la primera sesión, construyendo tantos códigos iniciales en bruto como convino para marcar intervenciones relevantes desde la perspectiva de la interacción y del contenido matemático. A medida que avanzamos con el análisis de datos de la primera sesión, si encontramos otra intervención que compartía características comunes con una anterior la etiquetamos con el mismo código, siguiendo el método de comparación constante. A pesar de que cada vez que se seleccionó o etiquetó una intervención hubo un cierto grado de interpretación de significados derivados del propio contexto que quedaron plasmados en los memorandos, este primer estadio de codificación no proporcionó comprensión suficiente sobre los conceptos que representan; fue más bien un proceso intuitivo de fragmentación y nomenclatura. Conscientes de ello, se volvió hacia atrás con la intención de hacer un análisis más profundo y minuciosos de los datos de la primera sesión.

La segunda vuelta analítica tuvo como objetivo agrupar los códigos en dos familias, según el contenido del que informaran en mayor medida (interacción y actividad matemática), y refinar su nomenclatura, para facilitar la comprensión de los conceptos que representan y, su campo de aplicación. Se fusionaron códigos cuando fue posible. Además de reducir el número de unidades con las que trabajar y agilizar así el análisis de las siguientes sesiones, estos códigos tienen un potencial explicativo mayor sobre contenidos de interacción y matemáticas. El proceso se sustentó en memorandos escritos en el transcurso de la codificación inicial y en la literatura revisada. Esta comparativa entre los datos empíricos de nuestro estudio y la literatura es lo que Strauss y Corbin (2002) denominan comparación teórica. La literatura no es usada como datos sino como apoyo para identificar, comprender, explicar y codificar acontecimientos presentes en los datos.

Una vez finalizada la codificación de la primera sesión, los códigos fueron comparados sistemáticamente a lo largo del análisis de todas las sesiones, con la intención de llegar a la saturación (Glaser & Strauss, 1967). En ocasiones este proceso llevó a la modificación de algunos códigos, incluyendo o variando la información asociada, la creación y definición de nuevos códigos o la fusión o fragmentación de algunos de ellos. Nuevamente, este proceso estuvo acompañado y sustentado por la redacción de memorandos y la revisión de literatura.

Completada la primera fase del análisis, se establecieron dos familias de códigos preliminares, códigos de contenido de interacción (CCI) y códigos de contenido matemático (CCM). Los CCI informan sobre contenidos de interacción de intervenciones de estudiantes durante la discusión en grupo. Más concretamente, responden a qué tipo acciones discursivas hacen los estudiantes en interacción cuando comunican, validan o generalizan razonamientos matemáticos. Para su representación lingüística se usaron nombres que caracterizan el tipo de contenido de interacción de una intervención. Por ejemplo, *Validación* es una intervención donde un estudiante aprueba un razonamiento o idea expuesta aportando o no razones. La Tabla 3 presenta la familia de códigos de contenido de interacción, las abreviaturas utilizadas en la codificación y sus descripciones.

Los CCM informan sobre el contenido matemático presente en las contribuciones de estudiantes a la discusión matemática y su aportación a la argumentación colectiva. Concretamente, responden a qué contenidos asociados al pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones usan los estudiantes mientras comunican, validan o generalizan razonamientos vinculados a resoluciones realizadas durante el trabajo en pareja y, cómo estos, contribuyen a la construcción de la argumentación colectiva. Para su representación lingüística se utiliza un nombre seguido de un adjetivo o de otro nombre (omitiendo las preposiciones entre nombres) que caracterizan el contenido matemático de una intervención. Por ejemplo, *Secuencia dinámica* se refiere a una intervención en la que se interpreta la serie como un continuo para sustentar o rechazar un procedimiento a debate en la puesta en común. La Tabla 4 presenta la familia de códigos de contenido matemático, las abreviaturas utilizadas en la codificación y sus descripciones.

Llegados a este punto cabe aclarar que los CCI y los CCM no son excluyentes y una misma intervención puede estar etiquetada con más de un código de una familia, siendo frecuente esta situación con los códigos de contenido matemático. Se muestra un ejemplo de la codificación de datos en la Figura 8. Asimismo, como ya ocurriera con la segmentación de episodios y subepisodios, la codificación se consensuó con tres investigadores del equipo al que pertenece la autora del estudio.

CCI	*Abrev.*	*Descripción*
Refutación	R	Un estudiante no acepta lo que se ha dicho, pudiendo rebatir con razones.
Validación	V	Un estudiante aprueba lo que se ha dicho, pudiendo afirmar con razones.
Cuestionamiento	C	Un estudiante pide aclaraciones o una reformulación de un razonamiento expuesto.
Paráfrasis	P	Un estudiante reformula lo que se ha dicho, pudiendo generar refutación, validación o cuestionamiento.
Ampliación	A	Un estudiante amplía lo que se ha dicho, pudiendo adjuntar o complementar con razones.
Síntesis	S	Un estudiante concluye conectando los puntos básicos de lo expuesto.
Clarificación	Cl	Un estudiante corrige o clarifica lo dicho por otro o por él mismo, pudiendo aportar razones.
Exposición	E	Un estudiante expone espontáneamente su aproximación, pudiendo compararla con otra.
Duda	D	Un estudiante expresa dudas o confusión respecto a un razonamiento expuesto.

Tabla 3. Códigos de contenido de interacción

CCM	*Abrev.*	*Descripción*
Comparación numérica	CN	Comparación de resultados numéricos para contrastar resoluciones.
Comparación resolución	CR	Comparación de técnicas, procedimientos o razonamientos para contrastar resoluciones.
Razonamiento visual	RV	Explicitación de transformaciones geométricas o estrategias de conteo para sustentar un procedimiento.
Unidad conteo	UC	Énfasis de la unidad básica de conteo para conectar estrategias de conteo con procedimientos o símbolos.
Secuencia dinámica	SD	Interpretación de la serie como un continuo para sustentar un procedimiento o razonamiento.
Razonamiento inductivo	RI	Uso de casos particulares para fundamentar una generalización.
Conexión (visual) casos	CC	Ejemplificación de la generalización mediante un caso particular (y la representación gráfica) para interpretar el lenguaje algebraico o natural.
Lenguaje visual	LV	Uso de la representación gráfica o gestos ilustrar o interpretar términos (palabras) el lenguaje natural
Lenguaje algebraico	LA	Uso de símbolos para vincular el lenguaje natural y algebraico asociado a una regularidad o patrón.
Razonamiento funcional	RF	Énfasis en la eficiencia de cálculo para valorar una expresión algebraica.
Identificación variable	IV	Identificación de una variable para dotar de sentido el lenguaje algebraico.
Pensamiento covariacional	PC	Interpretación de una expresión algebraica para dotar de sentido la relación de dependencia intrínseca.
Manipulación algebraica	MA	Manipulación de una expresión algebraica para adecuarla o comprobar una equivalencia.

Tabla 4. Códigos de contenido matemático

La Figura 8 muestra un ejemplo empírico y su interpretación mediante los CCI y CCM para facilitar una mayor comprensión de la codificación. En la primera columna aparece el participante que interviene, en la segunda la transcripción, en la tercera la abreviatura del CCI asociado a esa intervención y en la cuarta la abreviatura del CCM. Concretamente es un fragmento del Subepisodio 1.1.3 con una discusión sobre la generalización cercana del primer problema de la secuencia. La conversación se centra en un procedimiento expuesto. Con este fragmento se ejemplifican intervenciones codificadas con seis CCI: exposición (E), validación (V), cuestionamiento (C), duda (D), paráfrasis (P) y ampliación (A); y cinco CCM: comparación resolución (CR), razonamiento visual (RV), lenguaje visual (LV), conexión visual casos (CVC), y unidad conteo (UC).

Participante	Intervención	CCI	CCM
Gabriel:	¡Nosotros hemos hecho una segunda resolución! Hemos hecho lo mismo que ellos pero sin la regla de tres. O sea, el número de jardineras por cuatro, las que tienen libres, y sumarles dos que son las que quedarían separadas.	E	CR
Irene:	Sí, nosotros hemos hecho esto.	V	CR
Profesora:	Maria, ¿lo has entendido?	C	
Maria:	Sí.	V	
Profesora:	¿Nos lo puedes explicar?	C	
Maria:	Bueno, es que no me he enterado muy bien de lo que ha explicado ella	D	
Irene:	Mira, sí. Cada jardinera tiene cuatro, que no comparte, ¿vale? cuatro, cuatro, cuatro… [señala el dibujo] pero quedan dos, que es lo que hay que añadir porque éstas [señala dos baldosas de un extremo] no están compartidas. Y entonces hay que hacer, el número de jardineras que te dicen, en este caso cinco, por cuatro y después sumar las dos de un lado.	P/ A	RV LV CVC
Óscar:	Es que, una baldosa, ¡ay!, una jardinera, tiene cuatro, y entonces es como una sola unidad. Como una tiene cuatro, pues haces cien, dos mil, no sé qué…y le sumas dos.	A	UC

Figura 8. Fragmento del Subepisodio 1.1.3

Llegados a este punto, el análisis se centró en la codificación de la interacción. Hubo una tercera vuelta sobre los datos aplicando comparación constante. El objetivo era construir una codificación relativa a la interacción de un orden abstracto superior y con un mayor poder explicativo de los fenómenos sociales que son de interés en este estudio. Durante este proceso tuvimos el propósito de reagrupar los datos que se fracturaron durante la codificación preliminar. Así, no se siguió un proceso de codificación línea a línea. De esta manera, en los códigos finales de interacción prevalece la interacción situada más que la acción discursiva.

La construcción de estos códigos finales estuvo influenciada por la revisión de los memorandos acerca de contenidos de interacción redactados en la codificación preliminar y por la literatura sobre interaccionismo simbólico (Krummheuer, 1995) y análisis focalizado en el discurso (Sfard & Kieran, 1991). Esto llevó a enfatizar la importancia de las interpretaciones de los interlocutores para que un proceso de comunicación sea efectivo. La interacción social es vista como un proceso en el que las acciones individuales están influenciadas por la interpretación y reacción al sistema de acciones que tienen lugar en un entorno particular. De esta manera, las acciones encaminadas a aprender matemáticas en un aula son símbolos que denotan acciones colectivas (es decir, acciones interdependientes de un sistema) con funciones comunicativas, pedagógicas y sociales diversas.

A pesar de que la codificación preliminar de contenidos de interacción no proporcionó comprensión en un sentido completo sobre interpretaciones de los estudiantes ni sobre la función de sus intervenciones, sí fueron de utilidad para la creación del sistema de códigos de interacción final. Por ejemplo, una *Paráfrasis* representa situaciones en las que un estudiante repite o reformula lo dicho con anterioridad. Aunque este código preliminar aporta cierto grado de información sobre la interpretación del estudiante, es ambiguo en tanto que no clarifica si esta situación conlleva un rechazo de significados expuestos, una complementación de la explicación de su pareja de trabajo, una demanda de aclaración de un razonamiento, etc. Al respecto, los códigos de interacción finales suponen un refinamiento y una mayor adecuación del análisis a los objetivos de este estudio. Los códigos de interacción informan sobre reacciones identificables de estudiantes a acciones de otros participantes en torno a la explicación o interpretación de soluciones al problema. Se representan lingüísticamente mediante un verbo en infinitivo para indicar una acción clave. La Tabla 5 muestra los códigos finales de interacción que emergieron de los datos mediante comparación constante.

Códigos de interacción	*Descripción*
Iniciar	Introducción de una resolución de una cuestión del problema.
Aportar	Introducción de una idea matemática clave que aporta claridad a una situación problemática.
Rechazar	Negativa al uso de interpretaciones matemáticas acordadas.
Dudar	Expresión de falta de comprensión de un razonamiento matemático.
Solicitar	Demanda de aclaración de un razonamiento matemático.
Respaldar	Apoyo de un razonamiento matemático en detrimento de otro.
Inquirir	Examen progresivo de partes de un razonamiento matemático.
Compartir	Respaldo entre miembros de una pareja en una explicación matemática.
Indicar	Cuestionamiento de la profesora que alude a contenidos matemáticos.

Tabla 5. Códigos de interacción

Cuando las acciones de interacción se realizaron a instancias de la profesora, se incluyo la palabra “Inducido” tras la nomenclatura del código. Por ejemplo, si una alumna expresa falta de comprensión de un razonamiento expuesto tras la demanda explícita de la profesora, se codifica con *Dudar Inducido*. Esta situación de interacción aparece en los datos asociada a *Iniciar*, *Dudar*, *Rechazar* o *Solicitar*.

Esto evidencia que los códigos de interacción pueden representar más de un turno de habla. La Figura 9 muestra la interpretación mediante los códigos de interacción de un fragmento del Subepisodio 1.1.3 considerado también en la Figura 8.

Participante	Intervención	CI	CCM
Gabriel:	¡Nosotros hemos hecho una segunda resolución! Hemos hecho lo mismo que ellos pero sin la regla de tres. O sea, el número de jardineras por cuatro, las que tienen libres, y sumarles dos que son las que quedarían separadas.	Iniciar	CR
Irene:	Sí, nosotros hemos hecho esto.		CR
Profesora:	Maria, ¿lo has entendido?	Dudar Inducido	
Maria:	Sí.		
Profesora:	¿Nos lo puedes explicar?		
Maria:	Bueno, es que no me he enterado muy bien de lo que ha explicado ella		
Irene:	Mira, sí. Cada jardinera tiene cuatro, que no comparte, ¿vale? cuatro, cuatro, cuatro… [señala el dibujo] pero quedan dos, que es lo que hay que añadir porque éstas [señala dos baldosas de un extremo] no están compartidas. Y entonces hay que hacer, el número de jardineras que te dicen, en este caso cinco, por cuatro y después sumar las dos de un lado.		RV LV CVC
Óscar:	Es que, una baldosa, ¡ay!, una jardinera, tiene cuatro, y entonces es como una sola unidad. Como 1 tiene cuatro, pues haces cien, dos mil, no sé qué…y le sumas dos.	Compartir	UC

Figura 9. Fragmento del Subepisodio 1.1.3

En el ejemplo de la Figura 9, se observa que el código *Dudar Inducido* alude a la expresión de falta de comprensión de un razonamiento tras la intervención de la profesora y abarca más de un turno de habla. En general, turnos de habla consecutivos pueden aparecer agrupados en torno a un mismo código de interacción ya que el propósito es señalar la situación de habla por delante de dar información sobre quién es el interlocutor. Por otro lado, aunque todos los turnos son inexorablemente parte de una interacción, conviene hacer notar la existencia de turnos sin código de interacción asignado. Esto también ocurre para la codificación de contenido matemático. Es evidente que existen intervenciones sin contenido matemático explícito que no han requerido la asignación de un código. Respecto al análisis de la interacción, la no asignación de código a una intervención se basa en la visión de la interacción como acción-reacción o en el mínimo contenido de interacción de esa intervención. Por ejemplo, el último turno de habla de Irene no tiene asignado código de interacción (ver Figura 9). La intervención anterior está direccionada a esta alumna y, por consiguiente, se le ha asignado código al siguiente turno de habla. En el flujo natural de la conversación, es una intervención esperable y forma parte indirecta de la situación de habla que representa ese código. Asimismo, el primer turno de habla de Irene en la conversación de la Figura 9 tampoco tiene código de interacción asignado. Esto es debido a su bajo contenido de interacción, desde el punto de vista de la influencia que ejerce según nuestro análisis en el resto de acciones del sistema interdependiente.

Identificador de argumentación colectiva

Una vez establecido un sistema de códigos de interacción, se avanzó hacia la descripción de la argumentación colectiva. Para ello se creó un instrumento metodológico donde se identifican movimientos en la argumentación colectiva (MAC). Si bien los códigos de interacción nos informan sobre interpretaciones de acciones previas, los movimientos de argumentación colectiva hacen referencia a movimientos en el contenido matemático que se producen a medida que se avanza en la argumentación colectiva. Se representan lingüísticamente mediante una frase donde se especifica de qué objeto a qué objeto matemático se ha pasado. Así, los movimientos en la argumentación colectiva marcan cambios en el discurso según el objeto matemático en el que se centra la conversación. Estos cambios están influenciados por las acciones de los participantes, que direccionan la conversación sobre un objeto en concreto y por el contenido matemático representado por o en torno a ese objeto. Con el objetivo de captar esta dualidad se creó para cada subepisodio un instrumento metodológico en forma de tabla de triple entrada donde están representados los códigos de interacción y el contenido matemático involucrados en un MAC. La Tabla 6 muestra parte del instrumento ‘Identificador de argumentación colectiva’ aplicado al Subepisodio 1.1.3 (ver Figura 9).

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Iniciar</td><td rowspan="2">Comparación resolución</td><td>De la comparación de resoluciones al procedimiento 4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Del procedimiento 4 al razonamiento visual 3+4</td></tr>
<tr><td>Dudar [I]</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lenguaje visual
Razonamiento visual
Conexión visual casos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Del razonamiento visual 3+4 a la unidad de conteo</td></tr>
<tr><td>Compartir</td><td>Unidad conteo</td></tr>
</table>

Tabla 6. Fragmento del Identificador de AC del Subepisodio 1.1.3

El Identificador de AC tiene tres columnas, la primera para los códigos de interacción (CI), la segunda para los códigos de contenido matemático (CCM) y la tercera para los movimientos de argumentación colectiva (MAC). Una lectura vertical de los MACs informa de los cambios sucesivos en la discusión según los objetos matemáticos a los que se alude. Al respecto se numeran los procedimientos, de carácter más técnico, los razonamientos, de carácter más conceptual, y las expresiones algebraicas surgidas en la discusión. Por ejemplo, en la segunda fila de la columna relativa a MAC de la Tabla 6, se lee “Del procedimiento 4 al razonamiento visual 3+4” que hace referencia al cambio del cuarto procedimiento expuesto en la sesión a un razonamiento visual asociados al tercer y cuarto procedimientos. Para cada fila relativa a un MAC una lectura horizontal informa de qué códigos de interacción y qué contenidos matemáticos están directamente (en el sentido de cercanía temporal) involucrados en el cambio que se ha identificado.

Una lectura horizontal de las dos primeras columnas muestra relaciones entre los códigos de interacción y los códigos de contenido matemático, que se ubican en filas según un orden temporal. Si el contenido matemático y la interacción son simultáneos se indican en la misma fila; si por el contrario no hay simultaneidad, se utilizan filas contiguas. Una lectura vertical de la columna de los códigos de interacción orienta sobre relaciones entre estos códigos que, luego, serán interpretadas en profundidad mediante otro instrumento. Por otro lado, una lectura vertical de la columna de códigos de contenido matemático informa meramente acerca de la sucesión producida de contenidos matemáticos.

Descriptor de dinámica de argumentación colectiva

Esta última fase del análisis se focalizó en los episodios de cada sesión. Una vez finalizada la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' de cada subepisodio, se reagruparon las tablas resultantes de los subepisodios que conforman un mismo episodio. El objetivo fue la creación de una herramienta metodológica que permitiera caracterizar avances en la argumentación colectiva a partir de las relaciones entre códigos de interacción, de contenido matemático y los movimientos de argumentación colectiva representados por el 'Identificador'.

Para caracterizar los avances en la argumentación colectiva nos centramos en las narrativas en torno a un objeto matemático determinado durante los movimientos de argumentación colectiva y en la acción comunicacional básica involucrada en la manifestación de esa narrativa. Siguiendo los principios de comparación constante, esto supuso en ocasiones una fusión entre movimientos de argumentación colectiva contiguos. Por ejemplo, el MAC "Del razonamiento visual al lenguaje algebraico" seguido del MAC "Del lenguaje algebraico a la variable", se pueden fusionar en "De la explicitación del razonamiento visual a la identificación de la variable", considerando el lenguaje algebraico como parte de la narrativa en la que se identifica la variable. Por otro lado, la introducción de acciones de "explicitación" e "identificación" informa de las acciones activadas en el manejo de los objetos centrales de las narrativas. Esta forma de caracterizar una narrativa aporta información sobre de qué se habla (objeto matemático), qué se hace desde el punto de vista comunicacional (acción comunicacional) y con qué fundamento (orientación social y matemática). La Figura 10 muestra la representación del cambio de narrativas del ejemplo mencionado.

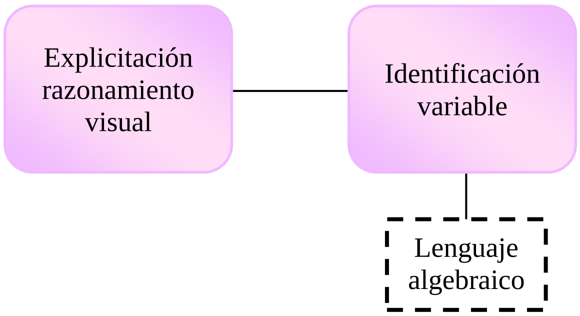


Figura 10. Representación de un avance en argumentación colectiva

Tras determinar avances en la argumentación colectiva se desarrolló la herramienta analítica ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ a partir de la reagrupación de las tablas asociadas a un mismo episodio. En el ‘Descriptor’ se representa de forma lineal la concatenación de los avances relativos a un episodio y los códigos de interacción involucrados. A modo de ejemplo, la Figura 11 muestra la aplicación de esta herramienta analítica al fragmento de la Figura 8 y la Tabla 6.

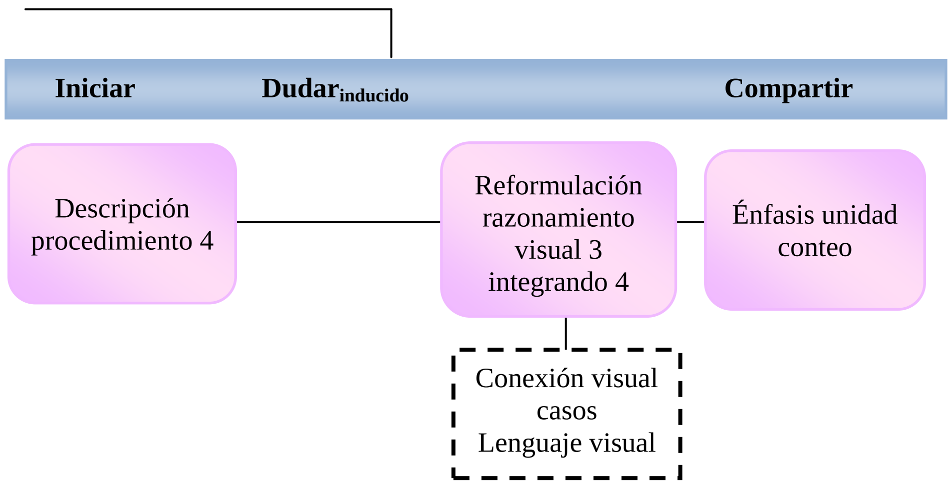


Figura 11. Fragmento del Descriptor de dinámica de AC del Episodio 1.2

Los códigos de interacción (barra superior azul) y la caracterización de cada narrativa (casillas lilas) se han dispuesto de forma temporal. Así, si un código de interacción y una narrativa son simultáneos en el tiempo, se colocan en la misma línea vertical. Por ejemplo, véase *Iniciar* y *Descripción procedimiento 4* en la Figura 11. Además, una lectura vertical informa sobre el contenido matemático usado en la fundamentación de una narrativa. Por ejemplo, relativo a la Figura 11, *Conexión visual casos* y *Lenguaje visual* se usan en *Reformulación del* *razonamiento visual 3 integrando 4*. Cabe aclarar que los códigos de contenido matemático no solo aparecen como parte de la fundamentación de narrativas. En ocasiones tienen un papel de mediador en el cambio entre narrativas.

La lectura horizontal de la barra superior azul informa sobre la evolución de las reacciones de los estudiantes en interacción así como sobre las relaciones de proximidad entre códigos de interacción. Si un código de interacción no hace referencia al código y/o la narrativa situada inmediatamente anterior en el esquema, se conecta mediante una flecha al código de interacción o a la narrativa a la que alude. De esta manera, aunque las acciones sean contiguas en el tiempo se marca el contenido al que hacen referencia y su situación temporal. La lectura horizontal de las casillas lilas informa sobre la evolución de la actividad conjunta matemática en términos de avances en la argumentación colectiva. Por su parte, la lectura horizontal conjunta de los códigos de interacción y los avances de argumentación colectiva muestran la naturaleza colectiva de la construcción de la argumentación.

Cabe aclarar dos situaciones particulares y su representación en el ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’. Por un lado, cuando un código de interacción agrupa varios turnos de habla donde se caracteriza más de una narrativa, esto se señala con una línea al lado del código de interacción. Esta línea se dibuja desde la primera hasta la última narrativa identificada. Se puede ver un ejemplo en la Figura 12 donde *Inquirir* agrupa varios turnos de habla que caracterizan tres narrativas. Por otro lado, el código de interacción *Compartir* puede aparecer en el ‘Descriptor’ con una flecha que señala la caracterización de una narrativa situada físicamente debajo. Esto hace referencia a una situación de interacción directa entre miembros de una pareja donde se discute en torno a la narrativa señalada por la flecha (ver un ejemplo en la Figura 12).

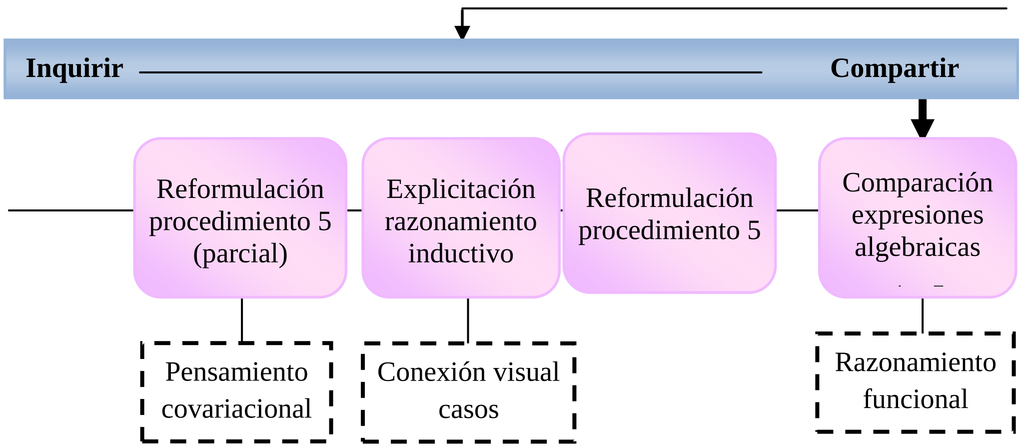


Figura 12. Fragmento del Descriptor de dinámica de AC del Episodio 2.2

4. Análisis

En este capítulo se muestra un estudio detallado de los episodios y subepisodios elaborados para la primera, segunda y cuarta sesiones de clase de la secuencia didáctica. Las secciones internas 4.1, 4.2 y 4.3 hacen referencia a los episodios de cada sesión. En cada sección se presentan los subepisodios que lo conforman y un análisis integrado.

En el análisis de cada subepisodio se especifica: i) la descripción matemática de la discusión de grupo, a partir de los códigos de contenido matemático creados con este fin, ii) la transcripción literal correspondiente al subepisodio, iii) la descripción de los códigos de interacción con influencia en el flujo de la conversación y iv) la tabla que surge de aplicar el ‘Identificador de argumentación colectiva’.

Al final del microanálisis de los subepisodios que conforman un episodio, se realiza un análisis integrado de cada episodio, mediante la aplicación del ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’.

Tabla de contenidos

4.1. Análisis de la primera sesión

En adelante se presenta el análisis de cada subepisodio y episodio de la primera sesión de la secuencia didáctica. Como se expuso en el Capítulo 3, cada sesión está fragmentada según las discusiones relativas al momento de la generalización solicitada en el enunciado del problema. En esta ocasión se obtuvieron los Episodios 1.1, 1.2 y 1.3 relativos, respectivamente, al desarrollo de la generalización cercana, lejana y matemática. Cada uno se segmentó a su vez en subepisodios para realizar un análisis narrativo a nivel micro que aporta una comprensión más detallada, más explicativa y menos descriptiva, de las distintas discusiones matemáticas. La Figura 13 muestra un esquema de los episodios y subepisodios de la primera sesión.

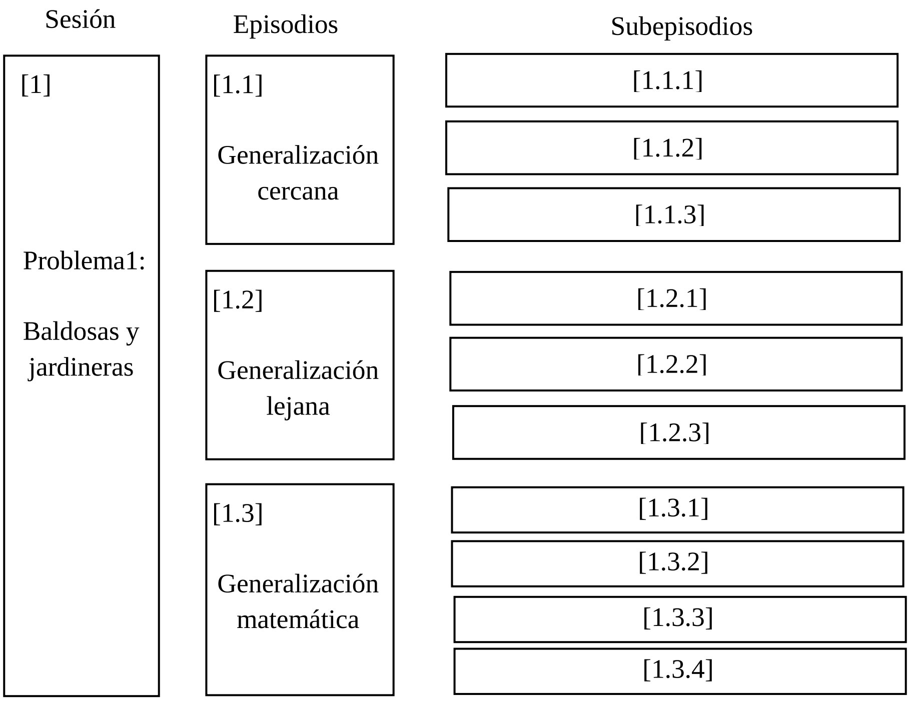


Figura 13: Esquema de episodios y subepisodios de la primera sesión

Episodio 1.1 y subepisodios

Sigue de forma cronológica el análisis narrativo de los Subepisodios 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3 que conforman el Episodio 1.1, y el análisis integrado del Episodio.

Subepisodio 1.1.1

Este primer subepisodio corresponde al inicio de la puesta en común. La profesora insta a Sara a exponer su aproximación a la primera cuestión del problema sobre generalización cercana [1]. Sara dice haber hecho conteo mediante la continuación gráfica de la serie. Ruth sigue con la explicación de su compañera de pareja y conecta la solución sobre generalización cercana con la generalización lejana [2-3]. Irene distingue su solución de la expuesta y Gabriel *compara numéricamente* los resultados para *n=100*. Este alumno empieza a exponer la generalización matemática relativa al patrón $6n-2(n-1)$ sin mencionar razonamientos subyacentes [5]. Entonces, Jose explicita la estrategia de conteo que sustenta dicho patrón (*razonamiento visual*). Para ello conecta regularidades observadas "*a cada jardinera la rodean 6 baldosas*" con la correspondiente generalización matemática en lenguaje natural "*Entonces, las 6 baldosas, por el número de jardineras en total*" y usa el *lenguaje visual* para aclarar el término baldosas compartidas señalando en la representación gráfica las dos baldosas entre dos jardineras [6]. Se observa que Gabriel y Jose, a pesar de estar explicando la resolución relativa a la generalización cercana, exponen el patrón general desarrollado y lo *conectan* con el *caso* particular en discusión. Jose expresa la generalización relativa a las baldosas compartidas mediante lenguaje natural de forma correcta "*le restamos las dos que quedan compartidas o sea, por el número de jardineras totales menos una*" [8] pero Gabriel, mediante el *lenguaje visual*, hace una interpretación no adecuada de esta regularidad que prevalece sobre la anterior [9-10]. Finalmente, tras la demanda de aclaración de Ruth, Jose explicita el resultado numérico del caso *n=100* y Sara e Irene reaccionan *comparando numéricamente* los resultados de sus aproximaciones con la dada por Jose [11-16]. La transcripción literal es la siguiente:

[3]	Profesora:	Pues va, Sara, tú misma, ¿nos cuentas el primero?
[4]	Sara:	A ver, hemos añadido dos jardineras a cada lado y las hemos rodeado con cuatro baldosas más. Entonces eh…

[5] Ruth: Hemos contado las baldosas, que son 22, y entonces hemos hecho una regla de tres: si 22 rodean a cinco... *x* rodean a 100 y nos da 440.

[6] Irene: Lo hemos hecho diferente nosotros que ellas.

[7] Gabriel: Nos da diferente, 402. Nosotros hemos aplicado una formula, bueno hemos llegado a la conclusión de que si multiplicamos el número de jardineras por seis, y luego le restamos dos por el número de….

[8] Jose: Lo que hacíamos era: a cada jardinera la rodean seis baldosas. Entonces, lo que hemos hecho ha sido multiplicar estas seis baldosas por el total que…

[9] Cristina: Cuatro, porque cuando añades ya no tienes seis.

[10] Jose: Sí, sí, hay dos que están compartidas. Entonces, las seis baldosas, por el número de jardineras en total, si son cinco, pues por cinco. Y al resultado, que si fueran cinco jardineras sería treinta, le restamos las dos que quedan compartidas [señala dos baldosas entre dos jardineras], o sea, por el número de jardineras totales menos una, cuatro. Porque hay una que no comparte, o sea, porque hay una jardinera que no comparte ninguna….

[11] Gabriel: Las de las puntas.

[12] Jose: Porque las jardineras de las puntas, no comparten estas dos [señala los dos extremos del dibujo].

[13] Ruth: O sea cada baldosa se multiplica por seis, porque cada baldosa está rodeada de seis, pero después se restan las comunes, ¿menos las de las puntas porque no las comparten?

[14] Jose: Sí. Y entonces da 22 baldosas y el segundo, con 100, 402.

[15] Ruth: Le da lo mismo.

[16] Sara: No, no pero a él, el segundo le ha dado 400.

[17] Gabriel: ¡402!

[18] Irene: A nosotros también, 402.

Se define *Compartir* como el respaldo entre miembros de una pareja en la explicación de una aproximación o razonamiento asociado al problema. En este subepisodio se observa a Ruth finalizar la explicación iniciada por Sara. Esta alumna aporta nueva información donde conecta el caso particular $n=5$ con el procedimiento usado en el caso $n=100$ y explicita resultados [2-3]. La influencia de este código se observa también en la interacción entre Jose y Gabriel [5-10]. Jose toma la responsabilidad no sólo de continuar con la explicación iniciada por su compañero durante el trabajo en pareja, sino también de conectar el patrón general con la estrategia visual de conteo subyacente. En ambos casos, *Compartir* implica la explicitación de información previamente oculta, aportando nuevos elementos en la argumentación colectiva. Por otro lado, se observa además la influencia de *Iniciar* en la evolución de la discusión matemática cuando Gabriel expone su aproximación al problema de forma espontánea, es decir, sin responder a ninguna petición [5]. Aunque Irene en [4] también establece una comparación no toma la iniciativa de exponer su aproximación al problema, necesitando la demanda explícita de la profesora para hacerlo (ver el inicio del Subepisodio 1.1.2). Así, la intervención de Gabriel guía la discusión posterior marcando el objeto a debate. Por último, *Solicitar* aparece cuando Ruth demanda aclaraciones respecto al razonamiento expuesto [11].

La Tabla 7 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ a este subepisodio. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del procedimiento 1 a la comparación numérica
Compartir		
	Comparación numérica	De la comparación numérica al procedimiento 2
Iniciar		Del procedimiento 2 al razonamiento visual 2
Compartir	Razonamiento visual Lenguaje visual Conexión casos	Del razonamiento visual 2 a la comparación numérica
Solicitar		
	Comparación numérica	

Tabla 7. Identificador de AC del Subepisodio 1.1.1

Subepisodio 1.1.2

Tras la demanda explícita de la profesora, Irene explica su resolución basada en la conexión entre una regularidad observada “*cada jardinera tiene cuatro baldosas*” y un procedimiento, la regla de tres $\frac{1}{4}=\frac{5}{x}$, para n=5 [17-18]. Esta alumna indica que después hay que añadir dos baldosas no compartidas en uno de los extremos y expone la fórmula en la que subyace la relación entre baldosas y jardineras para el caso de cinco jardineras, mediante la expresión algebraica escrita incorrectamente en la hoja $(\frac{1}{4}=\frac{5}{x})+2$. Sara refuta esta interpretación del término baldosas no compartidas y afirma que hay cuatro baldosas no compartidas, dos para cada extremo, tal y como implícitamente se acordó en el subepisodio anterior. Esta alumna usa *lenguaje visual* para aclarar a qué baldosas se refiere [19]. Irene reafirma su interpretación de las baldosas no compartidas mediante *lenguaje visual* y Sara vuelve a mostrar su disconformidad en [20-22]. En este momento Óscar, compañero de Irene durante el trabajo en pareja, expone un *razonamiento visual* que sustenta el procedimiento expuesto, *conectando visualmente* el razonamiento general con la representación gráfica del *caso* particular facilitado por el enunciado. Apoyado por Irene, vincula la regla de tres con la estrategia visual de conteo que de forma directa correspondería al patrón $4(n-1)+6$ y no al expuesto por su compañera [23-24]. Si pensamos en el *razonamiento visual* asociado como en un proceso de distribuir el todo en unidades más simples para después reorganizar esas unidades, ambos patrones están relacionados al compartir la unidad básica de conteo (cuatro baldosas por cada jardinera). En su intervención Óscar identifica y hace énfasis en la *unidad* básica de *conteo* asociada al patrón expuesto. La transcripción literal es la siguiente:

[35]	Profesora:	¿Y cómo es tu resolución Irene?
[36]	Irene:	Hemos hecho una regla de tres, y hemos, bueno... porque hemos visto que cada jardinera tiene cuatro baldosas que no comparte con nadie, entonces decimos: si una jardinera son cuatro, cinco serán *x* jardineras. Y nos da veinte, entonces deberíamos añadir las dos de la punta que no las comparten.
[37]	Sara:	No pero son dos que no comparten [señala los dos extremos].
[38]	Irene:	No, porque las de este lado [señala un extremo] sí que las comparte.
[39]	Óscar:	Claro.
[40]	Sara:	Ya pero estas dos también [señala un extremo]. O sea que son cuatro las que no comparte.
[41]	Óscar:	Porque nosotros contamos que esta jardinera tiene estas cuatro, esta estas cuatro pero esta, seis [señala el dibujo].

[42] Irene: Es como si la última las tuviera todas.

[43] Sara: ¡Ah! Vale.

Definimos *Rechazar* como la negativa a utilizar interpretaciones matemáticas acordadas con anterioridad. En este subepisodio, Sara rechaza dos veces parte de la interpretación del patrón explicado por Irene. Aunque Irene responde a la primera refutación de Sara, su intervención carece de justificaciones [19-20]. Es Oscar quien reacciona al segundo rechazo de Sara, haciendo explícito un razonamiento visual como sustento del procedimiento expuesto. Así se observa la influencia de *Compartir* en la evolución positiva de la argumentación colectiva. Por otro lado, la intervención de la profesora tiene un papel importante en el inicio de esta discusión, provocando que Irene exponga su aproximación al problema (*Iniciar Inducido*). En este sentido, se hace explicita una resolución que no se había expuesto con anterioridad y se guía la conversación hacia un particular contenido matemático.

Mediante la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’, la Tabla 8 representa este subepisodio. Se indican los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), junto a los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del procedimiento 3 a los términos 1
Rechazar	Lenguaje visual	De los términos 1 a los términos 2
	Lenguaje visual	
Rechazar	Lenguaje visual	De los términos 2 a los términos 1
Compartir	Razonamiento visual Conexión visual casos Unidad de conteo	De los términos 1 al razonamiento visual 3

Tabla 8. Identificador de AC del Subepisodio 1.1.2

Subepisodio 1.1.3

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior donde Irene expuso una resolución asociada a la expresión algebraica escrita de forma no adecuada como $(\frac{1}{4}=\frac{5}{x})+\ 2$. Gabriel *compara* su *resolución* con la de Irene afirmando que son la misma pero que los procedimientos son distintos [26]. Gabriel expone, mediante un razonamiento multiplicativo, el patrón general asociado a la expresión algebraica *4n+2*, vinculándolo, de forma implícita, con la particularidad pedida [26]. Irene reconoce la equivalencia de las dos resoluciones y tras la intervención de Maria, reformula lo expuesto en el subepisodio anterior [27-32]. En la segunda explicación, Irene vincula el razonamiento visual anterior con el razonamiento multiplicativo de Gabriel [32]. Asimismo, utiliza *lenguaje visual* para interpretar el término baldosa no compartida y para *conectar* el patrón general con el *caso* particular en discusión, *n=5*. Se observa también cómo Óscar apoya esta explicación, remarcando la *unidad* básica de *conteo* de la estrategia visual expuesta [33]. El subepisodio finaliza con una reformulación ambigua del patrón por parte de Maria. La alumna usa una interpretación del término baldosas compartidas que es errónea en la aproximación expuesta. Tanto en el subepisodio anterior como en este, hay ambigüedad, a lo largo de la conversación matemática, respecto al término baldosas (no) compartidas que queda sin clarificar. La transcripción literal es la siguiente:

[44]	Gabriel:	¡Nosotros hemos hecho una segunda resolución! Hemos hecho lo mismo que ellos pero sin la regla de tres. O sea, el número de jardineras por cuatro, las que tienen libres, y sumarles dos que son las que quedarían separadas.
[45]	Irene:	Sí, nosotros hemos hecho esto.
[46]	Profesora:	Maria, ¿lo has entendido?
[47]	Maria:	Sí.
[48]	Profesora:	¿Nos lo puedes explicar?
[49]	Maria:	Bueno, es que no me he enterado muy bien de lo que ha explicado ella.
[50]	Irene:	Mira, sí. Cada jardinera tiene cuatro, que no comparte, ¿vale? cuatro, cuatro, cuatro… [señala el dibujo] pero quedan dos, que es lo que hay que añadir porque éstas [señala dos baldosas de un extremo] no están compartidas. Y entonces hay que hacer, el

		número de jardineras que te dicen, en este caso cinco, por cuatro y después sumar las dos de un lado.
[51]	Óscar:	Es que, una baldosa, ¡ay!, una jardinera, tiene cuatro, y entonces es como una sola unidad. Como uno tiene cuatro, pues haces 100, 2000, no sé qué…y le sumas dos.
[52]	Maria:	Entonces…todas las baldosas comparten cuatro, ¿No?
[53]	Alumnos:	No, no comparten.
[54]	Maria:	Ah…no, no, que no comparten cuatro. Comparten dos, las del medio. Entonces que cada una le tienes que sumar cuatro menos a las dos del final.

Iniciar se define como la introducción de una resolución a la cuestión del problema. En este subepisodio, Gabriel toma esta iniciativa de forma espontánea poniendo en paralelo una aproximación que afirma equivalente a la de Irene en el Subepisodio 1.1.2 [26]. La conversación avanza hacia la comparación de resoluciones y la posterior integración de razonamientos en la reformulación de Irene [32]. Las acciones de Maria y la profesora son también relevantes en el progreso de la argumentación colectiva [28-31]. La profesora facilita que Maria exprese su falta de comprensión en relación al razonamiento expuesto (*Dudar Inducido*). Como respuesta, Irene reformula su explicación anterior, incluyendo esta vez el razonamiento multiplicativo dado por Gabriel y la estrategia visual que lo sustenta [32]. También se aprecia la influencia de *Compartir* cuando Oscar complementa la explicación de Irene, haciendo énfasis en la unidad básica de conteo [33].

Mediante la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’, la Tabla 9 representa el subepisodio. Se anotan los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), junto a los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Iniciar	Comparación resolución	De la comparación de resoluciones al procedimiento 4
Dudar [I]		Del procedimiento 4 al razonamiento visual 3 (integrando 4)
	Lenguaje visual Razonamiento visual Conexión visual casos	Del razonamiento visual 3 (integrando 4) a la unidad de conteo 3 y 4
Compartir	Unidad conteo	
Solicitar		

Tabla 9. Identificador de AC del Subepisodio 1.1.3

Análisis integrado del Episodio 1.1

Aunque los estudiantes incluyen referencias a la generalización lejana o incluso a la generalización matemática en sus intervenciones, el Episodio 1.1 conformado por los Subepisodios 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3 gira en torno a la generalización cercana. Al respecto, se han expuesto tres aproximaciones diferentes a la cuestión del problema: i) la continuación de la serie mediante dibujos y el posterior conteo de las baldosas (con referencias a su aplicación en la generalización lejana a través de la regla de tres $\frac{5}{22} = \frac{100}{x}$); ii) el patrón $6n - 2(n-1)$ aplicado al caso n=*5* y; iii) el patrón $4n + 2$ basado por unos estudiantes en la proporcionalidad lineal $\frac{1}{4} = \frac{5}{x}$ y la posterior suma de dos baldosas y, por otros, en un razonamiento multiplicativo.

La Figura 14 muestra la aplicación del ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ al Episodio 1.1. En este episodio se observa la gran frecuencia de la interacción codificada como *Compartir* así como algunas reacciones de estudiantes que no son inmediatas a los contenidos a los que hacen referencia. La argumentación colectiva se ha caracterizado a partir de descripciones de procedimientos, explicitaciones y reformulaciones de razonamientos, interpretaciones de términos y énfasis en partes de razonamientos. Cabe destacar que en la reformulación del razonamiento 4 se integran aspectos del razonamiento 3.

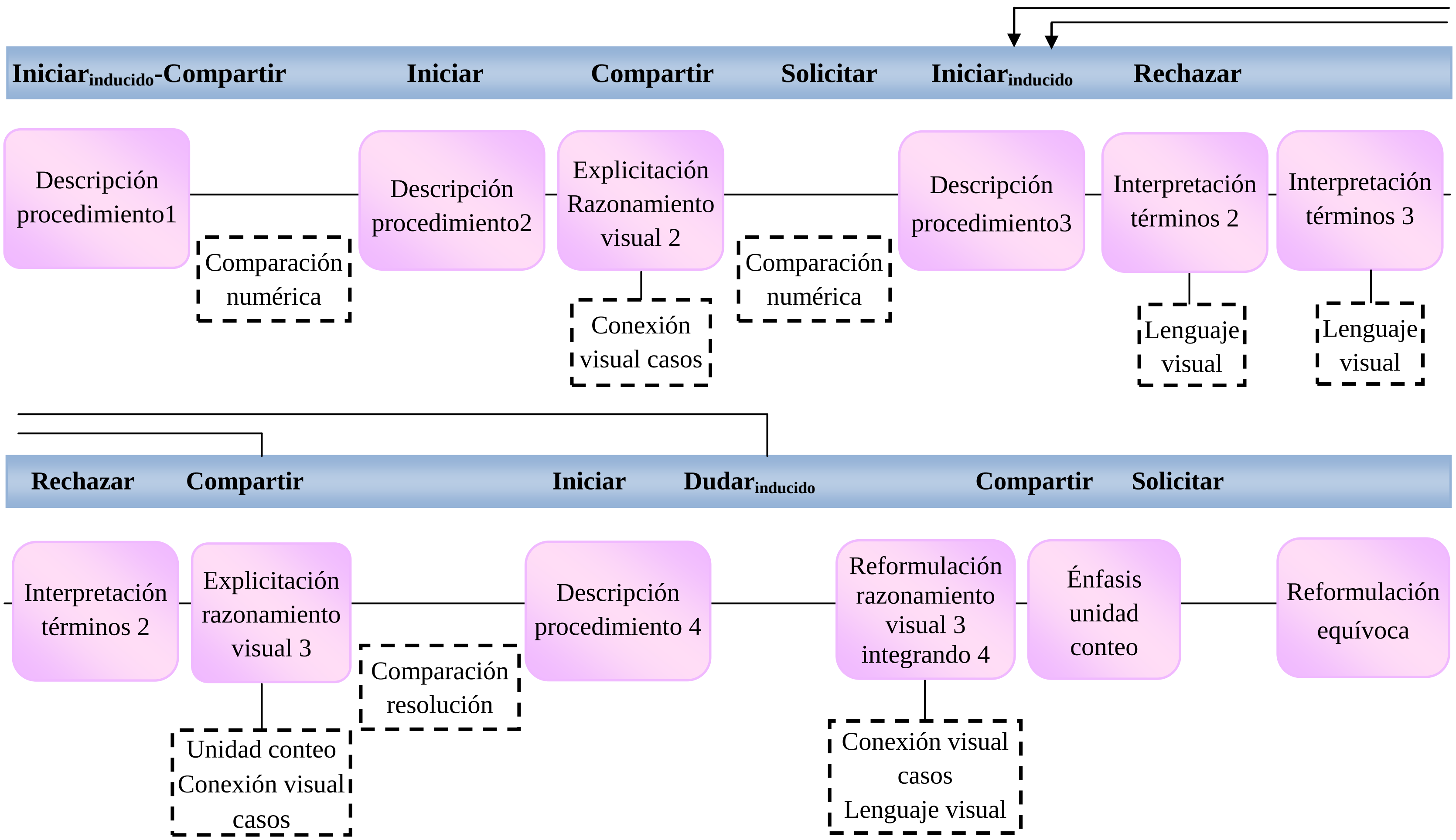


Figura 14. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 1.1

Episodio 1.2 y subepisodios

Se expone, en orden cronológico, el análisis narrativo de los Subepisodios 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3 que conforman el Episodio 1.2, así como su posterior análisis integrado.

Subepisodio 1.2.1

Este subepisodio se inicia cuando la profesora cuestiona a los alumnos sobre la validez de las resoluciones asociadas a las expresiones: $6n-2(n-1)$, $4n+2$ (expresado también como $\left(\frac{1}{4}=\frac{n}{x}\right)+2$) y $\frac{5}{22}=\frac{n}{x}$, expuestas con anterioridad. Aunque primero Jose y Gabriel afirman la validez de todas las resoluciones, rápidamente tanto Jose como Ruth, basándose en la *comparación numérica* de los resultados, dicen que no todas pueden ser correctas [38-41]. Gabriel deja entrever que debería de ser la regla de tres $\frac{5}{22}=\frac{100}{x}$ la incorrecta apoyándose de nuevo en la *comparación numérica* de los resultados [42]. Jose reacciona dando validez a la regla de tres como procedimiento para resolver el problema [43]. Entonces Óscar dice que el error reside en la no substracción de las dos baldosas compartidas en la proporcionalidad lineal. Este alumno conecta este procedimiento con el *razonamiento visual* correspondiente a la estrategia y la *unidad* básica de *conteo* del patrón $6n-2(n-1)$[44]. Otros estudiantes exponen su conformidad con esta idea. Óscar interpreta vagamente la serie como *secuencia dinámica*, puntualizando que siempre sobran dos e Irene apunta que son 38 las baldosas sobrantes [45-49]. Este subepisodio acaba con una intervención de Gabriel casi inaudible por lo que pasa desapercibida para el resto de participantes en la discusión. Gabriel parece cuestionarse el origen de las 38 baldosas sobrantes que relaciona con las ocho baldosas compartidas según la interpretación dada para el caso *n=5* [50]. La transcripción literal es la siguiente:

[55]	Profesora:	¿Creéis que todas las formas de resolución que habéis explicado están bien?
[56]	Jose:	Sí.
[57]	Gabriel:	Sí.
[58]	Jose:	Pero no todas pueden estar todas igual de bien porque dan resultados distintos.
[59]	Ruth:	No da lo mismo.

[60]	Gabriel:	Claro, claro. Yo creo que el nuestro está bien porque si miramos lo que hemos hecho antes, cuatro por 100 da 400 más dos, 402. Tiene que estar bien el nuestro. No sé. O sea yo no sé si ellas…
[61]	Jose:	El suyo también tendría que estar bien porque si han hecho una regla de tres no sé porqué…
[62]	Óscar:	Noooo… ¡Pero no han contado las dos que comparten! O sea han contado que una jardinera tiene seis.
[63]	Jose:	Ah! pero no han contado las dos que comparten. Claro, claro…
[64]	Irene:	Entonces tiene dos baldosas de más.
[65]	Sara:	Sobrarían.
[66]	Óscar:	Siempre hay dos baldosas contadas dos veces.
[67]	Irene:	En este caso sobran 38, porque doblan las compartidas…
[68]	Gabriel:	Ocho por cinco, ¿38?

Indicar representa acciones de la profesora que señalan determinados contenidos matemáticos en la discusión en grupo. En este subepisodio el cuestionamiento de la profesora direcciona el contenido matemático hacia la comparación de las distintas resoluciones expuestas y su validez [37]. La introducción de Óscar de una idea clave (aunque no sea correcta) aporta claridad a la discusión matemática y direcciona el contenido matemático de la conversación posterior (*Aportar*) [44]. Como se observa en este y sucesivos subepisodios, la interpretación del término baldosas compartidas asociada a distintas estrategias visuales de conteo será crucial para la adecuación de la regla de tres en discusión. También se observa la influencia de *Respaldar* cuando varios estudiantes apoyan lo dicho por Óscar, dando consecuencias que se derivan del razonamiento dado [45-49]. Por otro lado, al final del subepisodio, se observa la demanda de aclaración de Gabriel que pasa desapercibida en el grupo (*Solicitar*) [50].

La Tabla 9 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ a este subepisodio. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Indicar		De la comparación numérica al procedimiento erróneo (procedimiento 1)
	Comparación numérica	Del procedimiento erróneo al razonamiento visual 1 (conectando 2)
Aportar	Razonamiento visual Unidad conteo	Del razonamiento visual 1 (conectando 2) a la secuencia dinámica
Respaldar	Secuencia dinámica	
Solicitar		

Tabla 10. Identificador de AC del Subepisodio 1.2.1

Subepisodio 1.2.2

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior, donde la mayoría de estudiantes parecían estar de acuerdo en que la no validez de la regla de tres $\frac{5}{22} = \frac{100}{x}$ provenía de la no substracción de las baldosas compartidas, consideradas de forma implícita como las dos baldosas situadas entre dos jardineras. La profesora insta a Ruth a exponer sus dudas lo que conlleva que salgan a la luz, mediante *lenguaje visual*, dos interpretaciones diferentes del término baldosas compartidas [53-55]. Por un lado Sara y Jose señalan dos baldosas situadas entre dos jardineras como las baldosas compartidas. Por otro, Irene apunta que las dos baldosas compartidas son las dos de un extremo. Tras no convencer a Ruth, Sara conecta la regla de tres con la *unidad* básica de *conteo* relativa al patrón $6n - 2(n - 1)$ [56-57]. Gabriel interviene apoyando la interpretación dada anteriormente por Irene [58-59]. Como justificación, este estudiante especifica cómo se unirían las partes si se continuara con la serie (*secuencia dinámica*), usando *lenguaje visual* y conectando este razonamiento con la modificación adecuada en la regla de tres (*manipulación algebraica*) [59]. Ruth y Sara validan lo dicho por Gabriel [60-61]. La transcripción literal es la siguiente:

[69]	Profesora:	¿Estás de acuerdo? Yo no te veo cara de convencida.
[70]	Ruth:	Bueno es que si por cinco hemos contado 22, ¿cuáles se repiten?
[71]	Irene:	[Señala dos baldosas de un extremo]

[72]	Jose:	Estas [señala dos baldosas entre dos jardineras].
[73]	Sara:	Estas de aquí [señala dos baldosas entre dos jardineras] son las mismas que las dos de aquí [señala otras dos baldosas entre dos jardineras].
[74]	Ruth:	No, nosotras no hemos contado esas [señala dos baldosas entre dos jardineras] dos veces.
[75]	Sara:	Estábamos haciendo como si una estuviese rodeada por seis.
[76]	Ruth:	¡No! porque no las has contado dos veces.
[77]	Gabriel:	¡Sara, Sara! Estas dos [señala dos baldosas de un extremo], continúas con la serie y se repiten. O sea, las cuentas dos veces, entonces las restas y en vez de multiplicar por 22 lo multiplicas por 20 y te da 400. Y a los 400 les sumas los dos finales y ya está. O sea, en lugar de hacerlo con 22 lo haces con 20.
[78]	Sara:	Ya, ya…
[79]	Ruth:	Sí.

Se define *Solicitar* como la demanda de una aclaración relativa a un razonamiento expuesto. En este episodio, Ruth incitada por la profesora, solicita una clarificación sobre la interpretación de la regla de tres y cuestiona qué baldosas son las llamadas compartidas y por tanto repetidas en el conteo [52]. Esta intervención provoca que se desvelen dos interpretaciones diferentes de las baldosas compartidas y, por consiguiente, de la proporcionalidad lineal [52-55]. Asimismo *Rechazar* tiene una clara influencia en la evolución de la conversación. La doble negativa de Ruth a aceptar una de las interpretaciones del término baldosas compartidas hace que se explicite información inicialmente oculta [56-59]. En este sentido, *Aportar*, es decir, la introducción de una idea clave que da claridad a la discusión, tiene un efecto positivo en la evolución de la argumentación colectiva. Gabriel argumenta su interpretación del término baldosas compartidas mediante la visión dinámica de la serie y las consiguientes modificaciones en la regla de tres para su adecuación [59].

La Tabla 11 representa el subepisodio mediante la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’. Se anotan los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Solicitar [I]		De los términos 3 a los términos 2
	Lenguaje visual	
Rechazar		De los términos 2 a la unidad de conteo 2
	Unidad conteo	
Rechazar		De la unidad de conteo 2 a la secuencia dinámica
Aportar	Secuencia dinámica Lenguaje visual Manipulación algebraica	De la secuencia dinámica a la expresión algebraica 1

Tabla 11. Identificador de AC del Subepisodio 1.2.2

Subepisodio 1.2.3

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior y se inicia cuando la profesora pide una reformulación de lo expuesto [62]. Ruth afirma que las baldosas repetidas son las dos de un extremo pero, tras la intervención de Jose donde apunta que las baldosas repetidas son las situadas entre dos jardineras, Ruth cambia su afirmación y parafrasea lo dicho por Jose, evidenciando así su confusión [63-65]. Cristina, apoyada por Ruth, expresa desacuerdo con la aproximación de Jose afirmando que ella no cuenta dos veces las dos baldosas entre dos jardineras cuando hace el recuento de las baldosas en el caso *n=5 (razonamiento visual)* [66-67]. Jose se reafirma en su interpretación haciendo explícita esta vez la *unidad* básica de *conteo* (seis baldosas por cada jardinera) del *razonamiento visual* que vincula con la regla de tres [68]. Cristina vuelve a rechazar esta interpretación [69]. En este momento Gabriel rebate a Jose con el ejemplo del caso *n=5* facilitado en la representación gráfica (*conexión visual casos*) la forma de conteo de Cristina (*razonamiento visual*) [70]. Junto a Irene, insisten en la visión *dinámica* de la *secuencia* para justificar que hay restar dos baldosas de un extremo [70-76]. La transcripción literal es la siguiente:

[80]	Profesora:	Entonces, ¿cuál es el problema?
[81]	Ruth:	Pues que hemos contado estas dos [señala baldosas de un extremo] repetidas.
[82]	Jose:	Estas dos, estas dos [señala dos baldosas entre dos jardineras] tantas veces como…
[83]	Ruth:	Que sí, que sí. Que estas dos [señala las dos baldosas entre dos jardineras] las hemos contado cada vez dos veces.
[84]	Cristina:	¡Qué no! Porque cuando se suman las 22 no las has sumado dos veces. Cuando cuentas las 22 baldosas, no has sumado dos veces estas [señala dos baldosas entre dos jardineras].
[85]	Ruth:	¡Claro!
[86]	Jose:	No, sí, porque estás haciendo como si fuesen separadas. Como si esto fuera una, entonces aquí hubiese otra… [señala el dibujo].
[87]	Cristina:	¡No!, porque cuento 22.
[88]	Gabriel:	No, están contando así [señala el dibujo].
[89]	Jose:	[Asiente]
[90]	Irene:	Porque has contado las de los dos lados, y hay uno de los dos lados que no se debe contar.
[91]	Gabriel:	Claro, porque se juntan aquí [señala dos baldosas de un extremo], al final.
[92]	Irene:	Hay un lado que no hay que contarlo.
[93]	Maria:	Ah, ¡vale!
[94]	Irene:	Porqué estas [señala dos baldosas de un extremo] serán de la siguiente.
[95]	Cristina:	Ah, ¡vale!
[96]	Ruth:	¡Claro!

En este episodio, se observa la influencia de *Rechazar* en la evolución de la argumentación colectiva. Primeramente, Jose rechaza la interpretación de Ruth de las baldosas compartidas, hecho que provoca el cambio de posicionamiento de Ruth [63-65]. Se evidencia, pues, que continúan habiendo dos interpretaciones del término baldosas compartidas. Por otro lado Cristina rechaza dos veces la interpretación de Jose que se hace más patente cuando este explicita la unidad de conteo asociada [66-69]. La negativa de Cristina a usar la interpretación matemática respaldada por Jose adquiere importancia en las posteriores acciones de otros estudiantes. Concretamente, Irene y Gabriel se involucran en la discusión y desatascan la problemática. Estos estudiantes utilizan aportan nuevos argumentos para justificar que las baldosas compartidas son dos de un extremo y las consecuentes modificaciones en la regla de tres. Se observa, como *Respaldar*, es decir, el apoyo y refuerzo de un razonamiento en detrimento de otro, también influye y media en la discusión sobre la interpretación de la regla de tres [70-76]. Cabe mencionar, que el contenido de la conversación es inicialmente guiado por la demanda de la profesora de una reformulación de lo previamente acordado en el subepisodio anterior (*Indicar*) [62].

La Tabla 12 representa la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio. Se muestran los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), junto con los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td>Indicar</td><td></td><td rowspan="4">De los términos 3 a los términos 2</td></tr>
<tr><td></td><td>Lenguaje visual</td></tr>
<tr><td>Rechazar</td><td>Lenguaje visual</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lenguaje visual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De los términos 2 al razonamiento visual 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rechazar</td><td rowspan="2">Lenguaje visual
Razonamiento visual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Del razonamiento visual 1 a la unidad de conteo 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Razonamiento visual
Unidad conteo
Lenguaje visual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De la unidad de conteo 2 al razonamiento visual 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rechazar</td><td rowspan="2">Razonamiento visual
Conexión visual casos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Del razonamiento visual 1 al razonamiento visual 1 (conectando 3)</td></tr>
<tr><td>Respaldar</td><td>Razonamiento visual
Lenguaje visual
Secuencia dinámica</td></tr>
</table>

Tabla 12. Identificador de AC del Subepisodio 1.2.3

Análisis integrado del Episodio 1.2

El Episodio 1.2, conformado por los Subepisodios 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, gira en torno a la discusión de la segunda cuestión del problema sobre generalización lejana aunque en ocasiones se hace referencia a la generalización matemática pedida en la tercera cuestión. El episodio está marcado inicialmente por la comparación de las tres aproximaciones del Episodio 1.1 aplicadas al caso *n=100*. Pronto la conversación matemática se centra en la interpretación de la expresión ‘baldosas (no) compartidas’ y la adecuación de la expresión $\frac{5}{22} = \frac{100}{x}$. Se observan dos narrativas en torno a baldosas (no) compartidas que derivan del uso y significación de esta expresión.

La Figura 15 muestra la aplicación del ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ al Episodio 1.2. Como ya ocurriera con el episodio anterior, se observan reacciones de estudiantes que no son inmediatas a los contenidos a los que hacen referencia. Cabe destacar la gran presencia del código de interacción *Rechazar* que informa sobre la existencia y perseverancia de la confrontación entre dos narrativas. Por otro lado, en los avances de la argumentación colectiva se nota en varias ocasiones que los estudiantes conectan en sus reformulaciones la interpretación de términos a razonamientos diferentes expuestos con anterioridad.

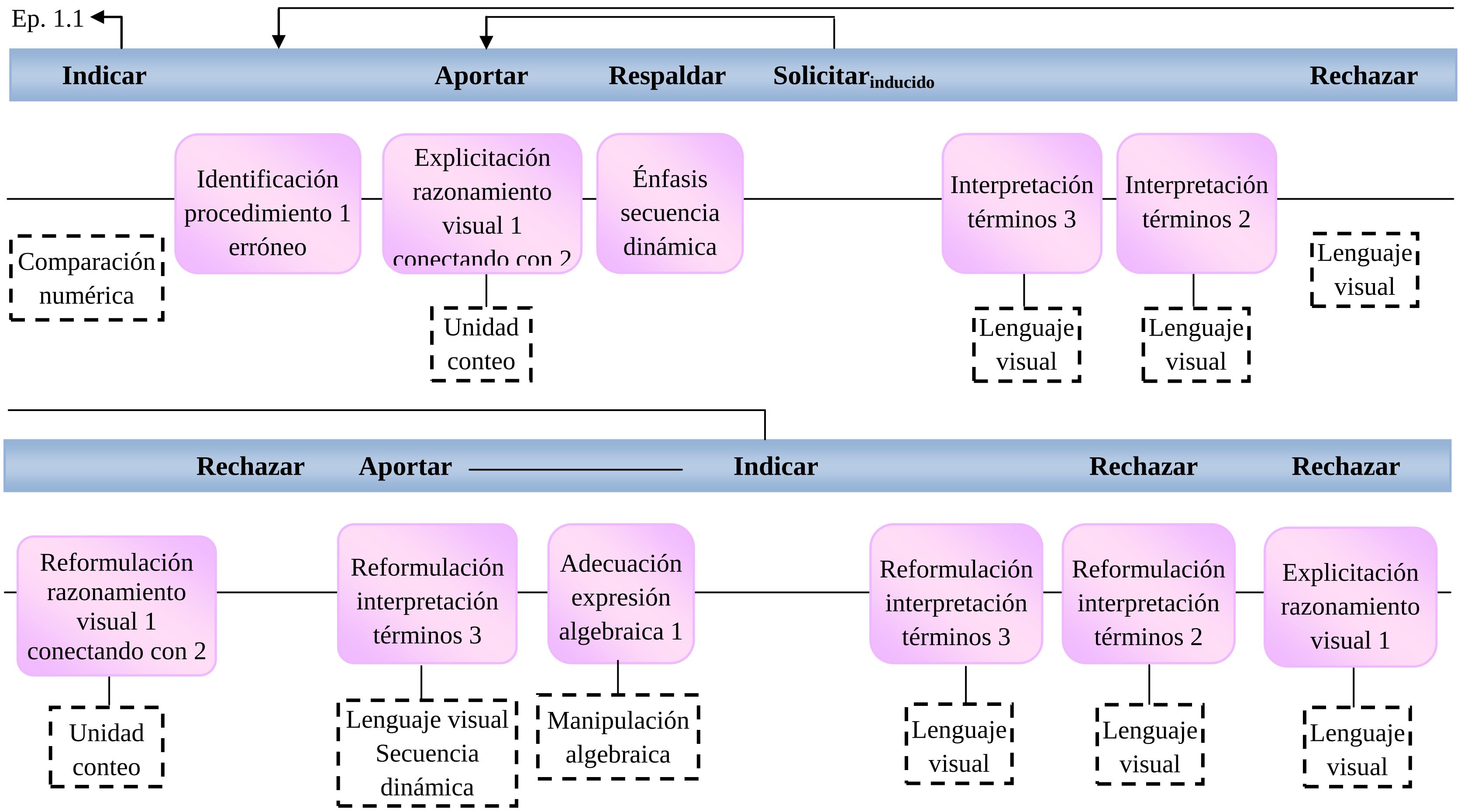


Figura 15. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 1.2

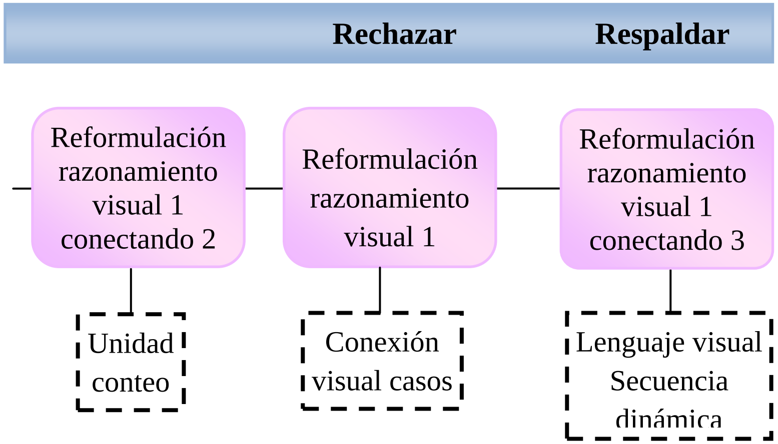


Figura 15. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 1.2

Episodio 1.3 y subepisodios

Sigue en orden cronológico el análisis de los Subepisodios 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.4 que conforman el Episodio 1.3. Se acaba con el análisis integrado del episodio.

Subepisodio 1.3.1

El subepisodio empieza cuando la profesora insta a exponer las soluciones para la tercera cuestión del problema sobre generalización matemática [79]. Irene apunta a la introducción de la variable *n* en la aproximación anterior como una mera traducción simbólica de la aproximación relativa al caso *n=100* y expresa sus dudas acerca de la utilización de dos símbolos en la expresión [80]. Ruth reacciona mostrando un *pensamiento covariacional* y señala la necesidad de dar valor a una variable para determinar el valor de la otra [81]. Irene explicita la expresión simbólica $\left(\frac{1}{4}=\frac{n}{x}\right)+2$ y corrige a Óscar cuando este se equivoca en la *manipulación algebraica*. La expresión algebraica inicial está escrita incorrectamente y no se llega a corregir en toda la discusión. Aun así, el razonamiento subyacente expuesto era adecuado, esto, probablemente, hace que se explicite una expresión algebraica correcta [82-84]. Entonces, Ruth expone la expresión correspondiente a su aproximación al problema, $\frac{5}{22}=\frac{n}{x}$, enfatizando la relación de dependencia entre las variables [85]. Sara consulta las anotaciones hechas en la hoja del problema y puntualiza a Ruth recordándole la corrección de la regla de tres que se había discutido anteriormente [86]. Con ayuda de Ruth, integran las modificaciones acordadas en su aproximación (*manipulación algebraica*) [86-88]. La transcripción literal es la siguiente:

[97]	Profesora:	¿Qué habéis hecho en el último?
[98]	Irene:	La ecuación, o sea la regla de tres que hacíamos, poniendo *n*. Pero es…es una con dos incógnitas ¿no?
[99]	Ruth:	Claro. O sea, porque siempre te darán una de las dos incógnitas. O sea, el número de baldosas o el de jardineras. Si haces una regla de tres, o sea, te darán el número de baldosas o el de jardineras, y sacando uno de los dos puedes encontrar el otro.
[100]	Irene:	Entonces, ¿la solución no es un número? Porque nosotros hemos puesto, uno es a cuatro como *n* es a *x*, y a todo esto le sumas dos.

[101]	Oscar:	Y entonces se puede traducir como *n* partido por cuatro más dos.
[102]	Irene:	*n* por cuatro partido por uno más dos igual a *x*.
[103]	Ruth:	No, no es un número. Nosotras hemos hecho veintidós es a cinco, es igual a *x* entre *n*, y lo hemos dejado así, diciendo que nos tienen que dar una de las dos incógnitas.
[104]	Sara:	Ya, pero en verdad se haría veinte partido por cinco es igual a *x* partido por cien.
[105]	Ruth:	Por *n*, más dos.
[106]	Sara:	Eso, y al resultado le sumamos dos.

Se observa la influencia de *Solicitar* que acompaña a *Iniciar* cuando Irene, que mostró dificultades en la comprensión de la dependencia entre variables durante el trabajo en pareja, pide clarificaciones sobre el uso de dos variables en la expresión algebraica [80, 82]. Estas demandas que acompañan la exposición del procedimiento, son atendidas por Ruth [81, 85]. Se introduce así, un nuevo elemento en la discusión, la relación de dependencia entre variables. Por otro lado se ve la influencia positiva de *Compartir* en la manipulación y significación del lenguaje simbólico y en la integración de razonamientos expuestos anteriormente. En [84] Irene corrige a Oscar cuando este compañero opera la expresión algebraica con intención de facilitar una expresión más sintética. Sara y Ruth comunican la generalización introduciendo las modificaciones en la regla de tres acordadas en episodios anteriores [86-88].

La Tabla 13 representa el subepisodio mediante la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’. Se anotan los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td>Iniciar [I]
Solicitar</td><td></td><td rowspan="2">Del procedimiento 3 al pensamiento covariacional</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Pensamiento covariacional</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Del pensamiento covariacional a la expresión algebraica 3</td></tr>
<tr><td>Iniciar
Solicitar</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Compartir</td><td rowspan="2">Manipulación algebraica</td></tr>
<tr><td>De la expresión algebraica 3 a la manipulación algebraica 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Pensamiento covariacional</td><td>De la manipulación algebraica 3 a la expresión algebraica 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De la expresión algebraica 1 a la manipulación algebraica 1</td></tr>
<tr><td>Compartir</td><td>Manipulación algebraica</td></tr>
</table>

Tabla 13. Identificador de AC del Subepisodio 1.3.1

Subepisodio 1.3.2

El subepisodio se inicia cuando Jose describe la expresión algebraica asociada al patrón que habían expuesto en el Subepisodio 1.1.1 [89]. Irene y Óscar reaccionan *comparando* su aproximación con la expuesta mediante los resultados *numéricos* [90-91]. A partir de aquí se suceden intervenciones donde los cuatro estudiantes *comparan* procedimientos y razonamientos asociados a las *resoluciones* que se están contrastando [92-96]. La profesora pregunta si los patrones son equivalentes y Jose afirma su equivalencia *comparando* los resultados *numéricos* de ambas [97-100]. Entonces, Gabriel empieza a operar la expresión algebraica $6n - 2(n-1)$ asociada a su aproximación al problema (*manipulación algebraica*). Ayudado por Jose, llegan a la expresión $4n + 2$ que se había relacionado con la generalización de Irene y Óscar [101-103]. Finalmente, Irene, *comparando* las expresiones algébricas asociadas a cada *resolución*, valora su expresión algebraica por delante de la de Gabriel y Jose con base en un *razonamiento funcional* [104]. La transcripción literal es la siguiente:

[107] Jose: A nosotros nos ha dado *6n*, o sea... lo que hemos hecho antes: *6n* menos, abrimos paréntesis, dos por *n* menos uno, o sea, tenemos un corchete, o sea *6n* menos, abrimos corchete, dos por, paréntesis, *n-1*, y cerramos todo.

[108] Irene: Es el mismo que el nuestro pero de diferente manera. Porque da lo mismo.

[109] Óscar: Sí, los dos tienen el mismo resultado.

[110] Gabriel: Pero nosotros no necesitaríamos hacer divisiones, solo multiplicamos.

[111] Irene: O sea vosotros lo que hacéis es multiplicar todo, como si todas tuvieran seis y después restáis y nosotros directamente contamos como si todas tuvieran cuatro.

[112] Óscar: Y después sumamos.

[113] Jose: Claro lo hemos hecho al revés, hemos sumado el total y después hemos restado las que sobraban, o sea las que estaban compartidas que hemos contado de más.

[114] Gabriel: Y hemos llegado a que hay que restar... o sea el número de baldosas compartidas, que es dos. Entonces, contando, hemos llegado a la conclusión que compartidas hay el número total de jardineras menos una.

[115] Profesora: Pero las expresiones ¿son equivalentes o no?

[116] Jose: ¡Sí!

[117] Gabriel: Esta…Bueno, sí, sí.

[118] Jose: Sí, porque da el mismo resultado.

[119] Gabriel: Porque si sacamos, si operamos ésta, nos da que *6n* por menos dos por *n*, entonces da *4n*, menos dos por uno, menos dos y haces...

[120] Jose: Son más dos.

[121] Gabriel: ¡Ay sí! Menos dos por menos uno, como está entre paréntesis, y es negativo, se convierte en más dos. *4n* más dos.

[122] Irene: ¡Claro! Acaba dando lo mismo pero el vuestro es más largo, nuestra fórmula es más sencilla.

[123] Jose: ¡Sí!

[124] Gabriel: ¡Sí!

Iniciar aparece al principio del subepisodio cuando Jose expone de forma espontánea la expresión algebraica relativa a su aproximación [89]. A partir de aquí se suceden una serie de intervenciones donde Irene y Óscar, por una parte, y Jose y Gabriel, por otra, comparan sus resoluciones, primero los resultados numéricos, luego los razonamientos asociados y finalmente las expresiones algebraicas que representan las dos aproximaciones. Se observa la influencia de *Compartir* en la complementación de los argumentos entre los miembros de cada una de las parejas [90-96]. Por otro lado, la profesora cuestiona la equivalencia de las dos expresiones algebraicas expuestas (*Indicar*) [97]. Este cuestionamiento provoca que Gabriel, tras operar una de las expresiones algebraicas, afirme su equivalencia. En el vídeo de la sesión, se aprecia de nuevo la influencia positiva de *Compartir*. Jose, compañero de Gabriel durante el trabajo en pareja, sigue atento todas las operaciones simbólicas que este verbaliza y, en un momento de la explicación, puntualiza una de las operaciones [102]. Por último, Irene *respalda* la equivalencia de las expresiones y valora su efectividad.

La Tabla 14 muestra la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio. Se notan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), junto con los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar		De la expresión algebraica 2 a la comparación numérica
	Comparación numérica	
Compartir	Comparación resolución	De la comparación numérica a la comparación de resoluciones
Indicar		
	Comparación numérica	De la comparación de resoluciones a la manipulación algebraica 2
Compartir	Manipulación algebraica	
Respaldar	Razonamiento funcional Comparación resolución	De la manipulación algebraica 2 al razonamiento funcional

Tabla 14. Identificador de AC del Subepisodio 1.3.2

Subepisodio 1.3.3

En subepisodios anteriores se discutió sobre el razonamiento que subyace en la regla de tres $\frac{5}{22} = \frac{n}{x}$. Se podría inferir que se llegaron a acuerdos sobre las modificaciones necesarias para su adecuación, en cambio, en este subepisodio se evidencia la confusión de varios estudiantes sobre lo debatido. La discusión se inicia cuando la profesora insta a Maria a exponer la generalización matemática de su aproximación. Esta alumna reconoce que la regla de tres $\frac{5}{22} = \frac{100}{x}$ usada para solucionar la segunda cuestión es errónea, pero calla cuando es cuestionada por las modificaciones necesarias para su adecuación [107-110]. Sara y Jose reaccionan explicitando los cambios numéricos que hay que introducir en la expresión algebraica (*manipulación algebraica*) [111-113]. Óscar, respaldado por Sara, conecta la regla de tres con el conteo asociado al patrón *6n-2(n-1)* expuesto (*razonamiento visual*) [115-116]. Este hecho parece confundir a Cristina y Maria que vuelven a cuestionar la expresión 'baldosas compartidas' [117-118]. Sara, mediante *lenguaje visual*, interpreta las baldosas compartidas como el par de baldosas situadas entre dos jardineras [120]. Posteriormente, aunque considera la serie como una *secuencia dinámica*, afirma que las baldosas compartidas se repiten cada vez que añades una jardinera [123]. Esta afirmación es rebatida por varios estudiantes que afirman que las baldosas compartidas son dos de un extremo [125-128]. A pesar de que Jose y Gabriel utilizan jardineras en plural y remarcan la idea de *secuencia dinámica*, en ningún momento de la conversación se concreta que son grupos de cinco jardineras [122, 128]. Se aprecia un cambio de posicionamiento respecto a la interpretación del término baldosas compartidas a cargo de Ruth y Jose. La transcripción literal es la siguiente:

[125]	Profesora:	¿Qué habéis hecho vosotras, Maria?
[126]	Maria:	Es que no lo hemos hecho, y el anterior no está bien.
[127]	Profesora:	¿Y cómo lo podemos arreglar?
[128]	Maria:	[Silencio]
[129]	Ruth:	Sería cambiarlo desde el principio.
[130]	Sara:	Veinte partido por cinco es igual a *x* entre *n* y a todo le sumamos dos.
[131]	Jose:	En vez de decir veintidós entre cinco, veinte entre cinco.
[132]	Cristina:	¡Ah! Vale.

[133]	Óscar:	Es como si estuviese en la mitad de la formula de Gabriel y Jose. Están en la mitad, y lo han contado todo y ahora lo tendrían que restar…
[134]	Sara:	¡Claro!
[135]	Cristina:	Entonces… ¿al resultado le tenemos que restar?
[136]	Maria:	Le tenemos que restar las dos compartidas… ¿las del medio?
[137]	Ruth:	¡No!
[138]	Sara:	A ver... es que si pones que veintidós es a cinco, estás contando estas dos [señala dos baldosas entre dos jardineras] que están compartidas.
[139]	Cristina:	Y ¿las cuentas dos veces?
[140]	Jose:	O sea las cuentas cuando añades jardineras.
[141]	Sara:	O sea cada vez que estábamos añadiendo una jardinera, estábamos poniendo dos de más.
[142]	Cristina:	¡Vale!
[143]	Ruth:	¡No! Sólo las últimas.
[144]	Gabriel:	¡No, no Sara, son sólo las últimas!
[145]	Jose:	¡Son las últimas!
[146]	Gabriel:	Son las dos últimas que se comparten con las que vienen después.
[147]	Sara:	¡Ah sí! Las del final.

En este subepisodio Maria expresa tácitamente su falta de compresión de razonamientos expuestos, tras ser cuestionada por la profesora (*Dudar Inducido*) [107-110]. Varios estudiantes reaccionan apoyando un razonamiento acordado previamente (*Respaldar*) [111-115]. Además se observa la influencia de *Solicitar* en la construcción de la argumentación colectiva cuando Cristina y Maria piden clarificaciones respecto a una de las interpretaciones [117-118, 121]. Estas intervenciones tienen un efecto positivo porque ayudan a que se expliciten interpretaciones diferentes de una misma expresión. Por último el rechazo de varios estudiantes a una de las interpretaciones (*Rechazar*) cierra el subepisodio facilitando que se refuerce la idea de serie dinámica [125-129].

La Tabla 15 represente el subepisodio mediante la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva'. Se anotan los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Dudar [I]		De la expresión algebraica 1 al razonamiento visual 1 (conectando 2)
	Manipulación algebraica	
Respaldar	Razonamiento visual	
Solicitar		Del razonamiento visual 1 (conectando 2) a los términos 2
	Lenguaje visual	
Solicitar		De los términos 2 al razonamiento visual 1 (conectando 2)
	Secuencia dinámica	
Rechazar	Secuencia dinámica	Del razonamiento visual 1 (conectando 2) a los términos 3

Tabla 15. Identificador de AC del Subepisodio 1.3.3

Subepisodio 1.3.4

El subepisodio es continuación inmediata del anterior. Cristina y Maria corroboran con Gabriel punto a punto el razonamiento matemático asociado a la manipulación algebraica basada en el cambio numérico de 22 por 20 en la regla de tres $\frac{5}{22}=\frac{n}{x}$. Gabriel, mediante *lenguaje visual* y apoyándose en la idea de *secuencia dinámica*, interpreta la expresión baldosas compartidas como las dos baldosas de un extremo y especifica las modificaciones necesarias en la expresión algebraica (*manipulación algebraica*) [131-136]. Cristina pide confirmación sobre su solución para el caso *n=5* [138]. Gabriel valida la resolución de Cristina para este caso y lo contrapone con el caso general [139]. Utilizando *lenguaje visual y* reforzando la idea de *secuencia dinámica*, compara las dos interpretaciones de las baldosas compartidas que han sido en centro del debate en diferentes discusiones durante toda la sesión. Mediante la idea de secuencia dinámica, clarifica porque las dos baldosas entre dos jardineras no se repiten en el conteo y las dos últimas sí al continuar con la serie. Finalmente Maria reformula lo expuesto, clarificando el papel de las baldosas compartidas en el caso *n=5* y en el caso general cuando se continua con la serie (*secuencia dinámica*). Mediante *lenguaje visual*, interpreta las baldosas compartidas como las dos de un extremo y explicita las modificaciones necesarias en la regla de tres (*manipulación algebraica*) [140]. La transcripción literal es la siguiente:

[148] Maria: Es que nosotras lo hemos hecho seguido, ¿sabes?, solamente una…

[149] Gabriel: Sí, claro, has hecho veintidós, esto [señala el dibujo] te da el veintidós, pero ahora, si seguimos añadiendo pasa que estas [señala dos baldosas de un extremo] se comparten.

[150] Cristina: ¿Entonces tienes que restar?

[151] Gabriel: Tienes que restar estas dos y hacer la regla de tres y después sumar dos porque te quedarán aquí [señala un final imaginario].

[152] Cristina: ¡Ah! ¡Vale!

[153] Maria: Entonces, ¿en lugar de veintidós es veinte?

[154] Gabriel: Claro, tienes que hacer la regla de tres con veinte.

[155] Jose: Pero... después tienes que sumar las dos.

[156] Cristina: Pero ¿la primera sí que es veintidós?

[157] Gabriel: El resultado, el total es veintidós sí, pero entonces al hacer la regla de tres con esto y dejar estas últimas... porque mira, aquí estas [señala dos baldosas entre dos jardineras] las cuentas como si fueran de esto, o sea, estas no cuentan dos veces. En cambio si empiezas contando aquí [señala un extremo] contarían dos veces.

[158] Maria: Porque cuando tenemos las cinco nosotras contamos como que éstas [señala dos baldosas de un extremo] no se repiten, entonces tenemos veintidós. Pero luego, aquí [señala un extremo] añadiremos y se compartirá con ellas, entonces es veinte, tenemos que hacer la regla de tres con veinte, y una vez tenemos el resultado que es cuatrocientos, le debemos sumar dos del final.

[159] Alumnos: [Asienten]

[160] Cristina: Sí porque las dos del final no estarán compartidas.

Se define *Inquirir* como el conjunto de acciones realizadas con el objetivo de realizar un examen progresivo de un razonamiento matemático. Ante la confusión de Cristina y Maria en el subepisodio anterior se observa cómo, en este, mantienen una conversación con Gabriel donde a través de cuestionamientos, validaciones y parafraseos se revisa punto a punto un razonamiento. Estas estudiantes comprueban su comprensión del objeto a debate mediante la interacción con un miembro del grupo al que de alguna manera otorgan autoridad matemática. Por otro lado, el miembro que acepta esta posición, Gabriel en este subepisodio, no sólo clarifica o valida las intervenciones de Maria y Cristina; en su reformulación del razonamiento expuesto, hace explícita información nueva en la discusión. Aunque *Inquirir* supone una interacción centrada en tres alumnos [140-142], también otorga la oportunidad de abarcar nuevas fundamentaciones al resto del grupo. En este sentido, inferimos que *Inquirir* tienen un efecto positivo en la evolución de la argumentación colectiva. En este subepisodio se observa cómo se contraponen las dos interpretaciones de baldosas compartidas para clarificar cuales se repiten en la continuidad de la serie [133].

La Tabla 16 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se muestran los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Inquirir	Lenguaje visual Secuencia dinámica	De los términos 3 a la manipulación algebraica 1
	Manipulación algebraica Secuencia dinámica	De la manipulación algebraica 1 a la interpretación de términos 2 y 3
	Lenguaje visual Secuencia dinámica	De la interpretación de términos 2 y 3 a la secuencia dinámica
	Lenguaje visual Secuencia dinámica Manipulación algebraica	De la secuencia dinámica a la manipulación algebraica 1

Tabla 16. Identificador de AC del Subepisodio 1.3.4

Análisis integrado del Episodio 1.3

El Episodio 1.3, conformado por los Subepisodios 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.4, hace referencia a la discusión de la tercera cuestión del problema sobre generalización matemática. Los dos primeros subepisodios muestran discusiones acerca de la formalización matemática mediante lenguaje algebraico de las aproximaciones expuestas y su comparación. En los dos últimos subepisodios el objeto a debate es la interpretación y adecuación de $\frac{5}{22}=\frac{n}{x}$, como ya pasara en el Episodio 1.2.

En la Figura 16 se presenta el ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ que hace referencia al Episodio 1.3. En varias ocasiones, se observan reacciones de estudiantes que no son inmediatas a los contenidos a los que hacen referencia, algunas de ellas relativamente lejanas en el tiempo. Acorde con la cuestión del problema que se está discutiendo, en la argumentación colectiva se incluye lenguaje simbólico en las exposiciones de expresiones algebraicas. Al respecto se observa en varias ocasiones que los estudiantes corrigen o modifican las expresiones algebraicas para adecuar el lenguaje simbólico. El final del esquema está marcado por las reformulaciones de los estudiantes donde se conectan diversos razonamientos con diferentes interpretaciones de términos y el lenguaje algebraico.

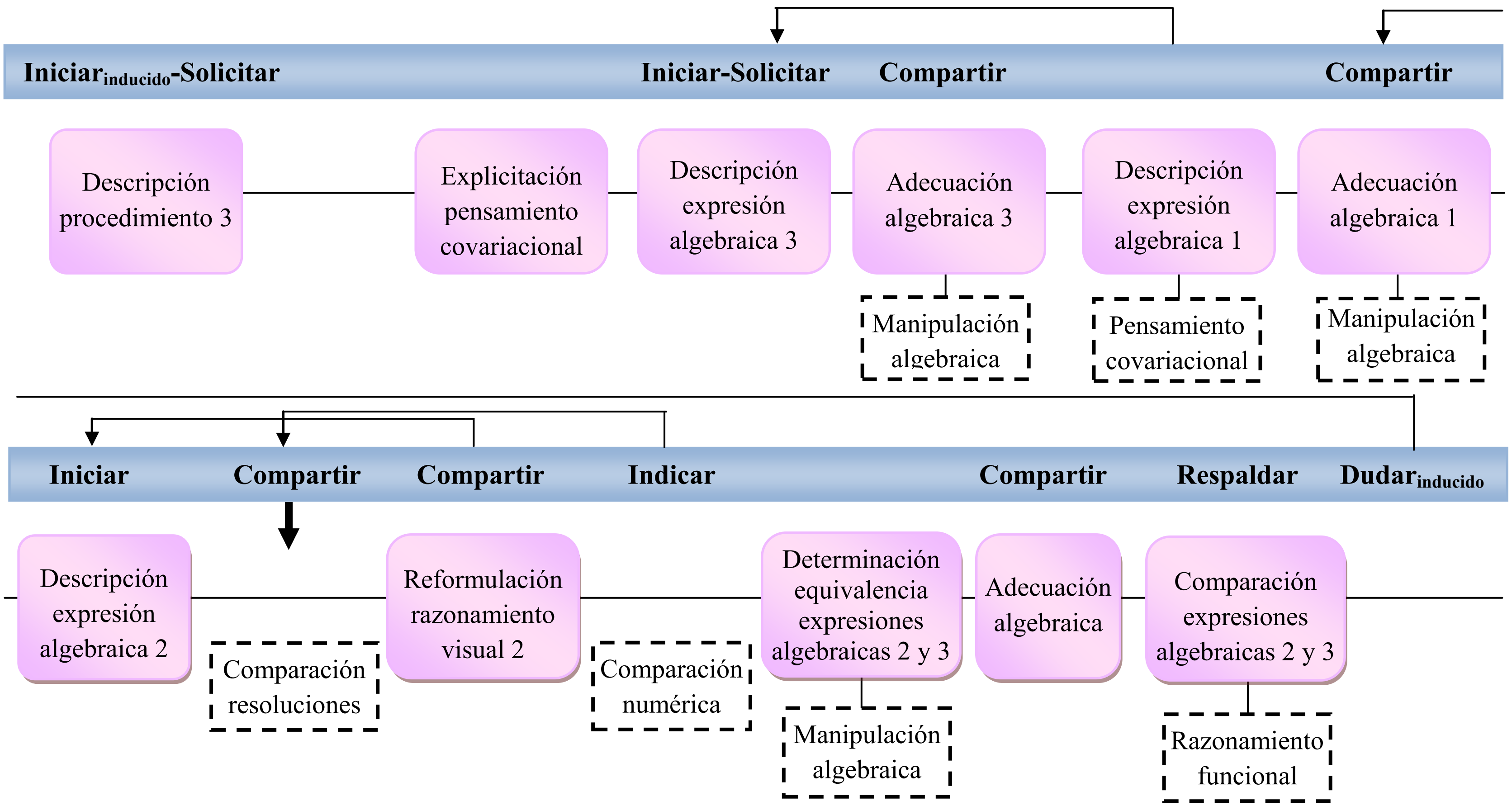


Figura 16. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 1.3

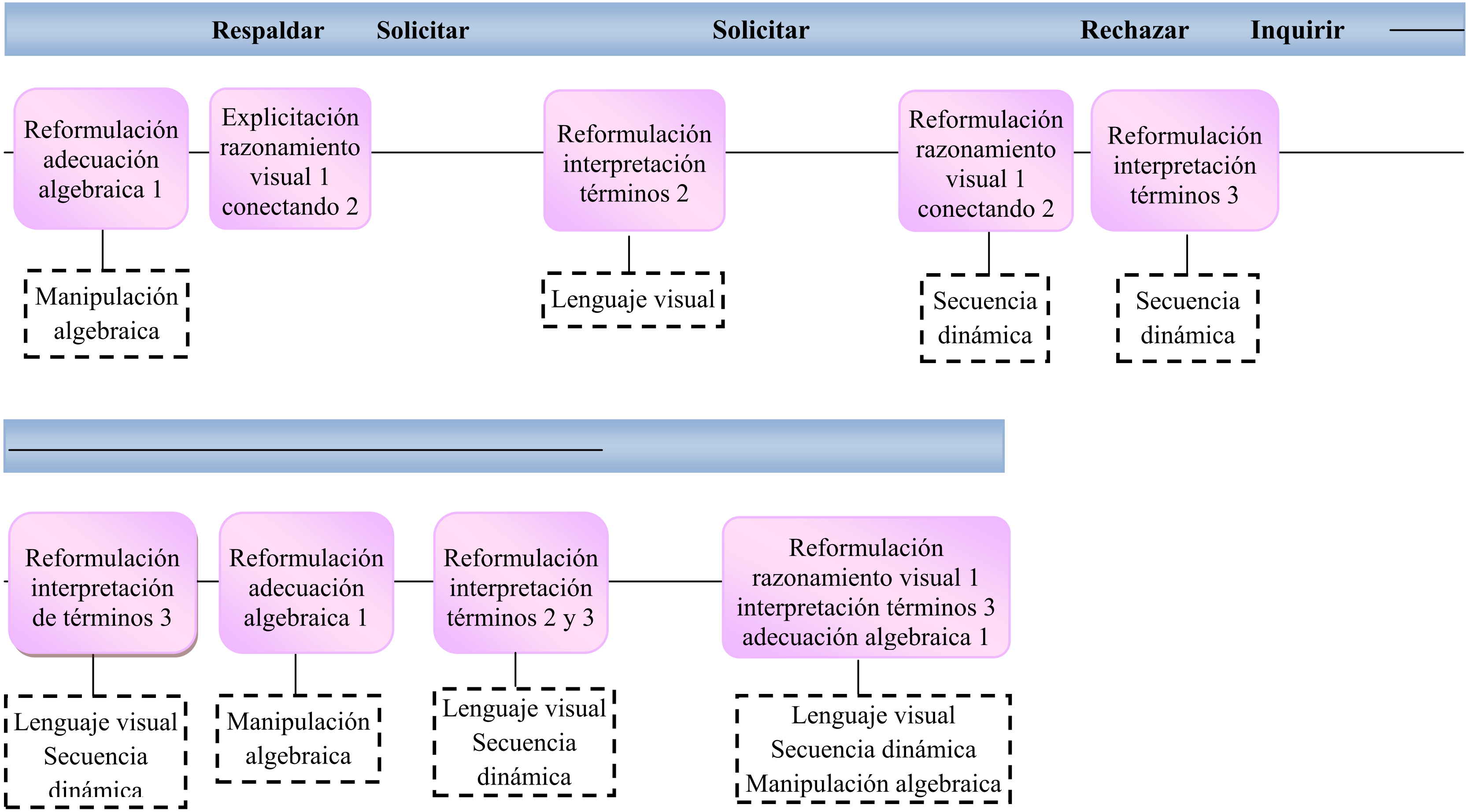


Figura 16. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 1.3

4.2 Análisis de la segunda sesión

Se presenta el análisis de cada subepisodio y episodio de la segunda sesión de la secuencia didáctica. La sesión está fragmentada en los Episodios 2.2 y 2.3 sobre generalización matemática y manipulación algebraica, respectivamente. A pesar de que la primera cuestión del enunciado hace referencia a la generalización cercana, por iniciativa de los alumnos se empieza la puesta en común discutiendo aproximaciones relativas a la generalización matemática. En este problema se suprimió la cuestión sobre generalización lejana y se introdujo una sobre la manipulación algebraica, atendiendo así a criterios de dificultad progresiva de la secuencia. Cada episodio se segmentó a su vez en subepisodios para realizar un análisis narrativo a nivel micro. En la Figura 17 se muestra el esquema de los episodios y subepisodios de esta sesión.

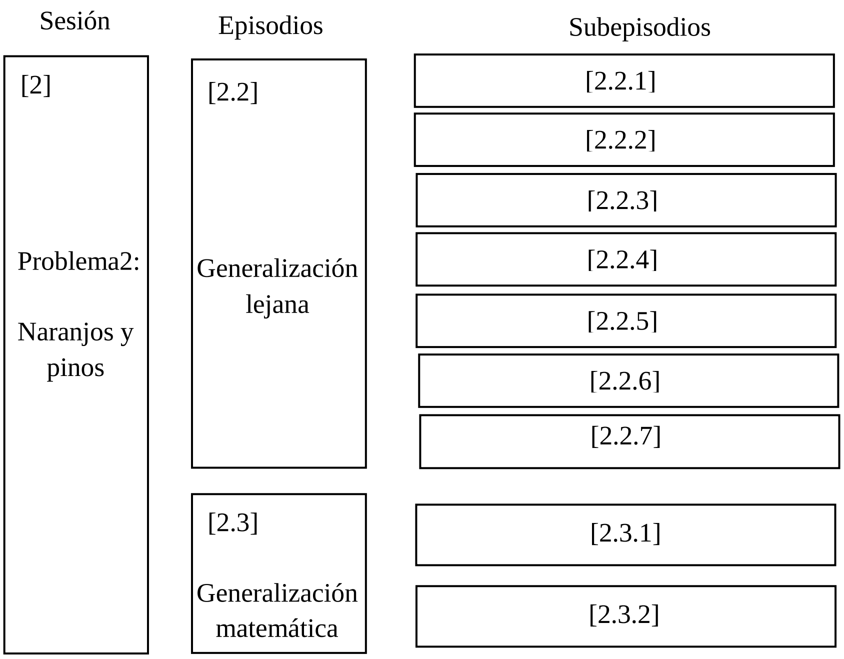


Figura 17. Esquema de episodios y subepisodios de la segunda sesión

Episodio 2.2 y subepisodios

Sigue en orden cronológico el análisis narrativo de los subepisodios comprendidos entre el 2.2.1 y el 2.2.7 que conforman el Episodio 2.2. Al final se incluye también el análisis integrado de todo el episodio.

Subepisodio 2.1

La puesta en común se inicia con la discusión sobre la generalización matemática. Los alumnos comentan a la profesora que han resuelto la primera cuestión dibujando el caso particular solicitado. Sara y Ruth empiezan comentando sus dificultades en la resolución de la cuestión. Ambas alumnas, que fueron pareja en la primera parte de la sesión, exponen diversos razonamientos visuales y regularidades en las que intentan relacionar el número de pinos con el número de naranjos. Expresan sus dificultades para escribir algebraicamente estos razonamientos y afirman no haber encontrado una regularidad que se cumpliera en todos los casos. La dificultad de estas alumnas subyace en la no identificación de la variable, que en este problema representa el número de filas de naranjos. Este subepisodio se inicia cuando la profesora insta a Oscar a exponer su aproximación al problema. Este alumno relaciona el número de naranjos y pinos con las filas de naranjos [2]. Ante el cuestionamiento de Sara, Oscar reformula su explicación para el número de naranjos, haciendo énfasis en el *razonamiento visual* e incluyendo a modo de ejemplo referencias visuales del caso *n=2* representado en el enunciado (*conexión visual casos*) [3-5]. Tras esta intervención, Irene utiliza *el lenguaje algebraico* para expresar el patrón expuesto en lenguaje natural por su compañero durante el trabajo en pareja y Sara *identifica la variable* con el número de filas [6-8]. La transcripción literal es la siguiente:

[161]	Profesora:	¿Qué habéis hecho vosotros?
[162]	Óscar:	Pues primero hemos pensado que hay el mismo número de filas que de naranjos por cada fila. Y entonces a partir de aquí podíamos hacer una regla de tres pensando en las filas de naranjos, entonces en el primero hay ocho pinos y una fila.
[163]	Sara:	¿Una fila de qué?
[164]	Irene:	De naranjos.

[165] Óscar: De naranjos. Mira, en el segundo hay dos filas y dos naranjos en cada fila. Sabiendo las filas podíamos saber el número de naranjos porque sabíamos que, bueno eso, que hay el mismo número de filas que de naranjos por fila [señala el segundo dibujo].

[166] Irene: O sea, n por n, n^2

[167] Cristina: Número de filas por el mismo número.

[168] Sara: ¡Ah! Tantos naranjos como filas haya… ¡Es con las filas!

[169] Ruth: Sí, o sea, naranjos por fila como filas haya.

En este subepisodio se aprecia la influencia de *Solicitar* en la clarificación e identificación de la variable independiente facilitada por el problema. Sara demanda una clarificación relativa a la resolución expuesta por Oscar tras la petición de la profesora (*Iniciar Inducido*) [1-3]. Oscar reformula su razonamiento que es complementado por Irene (*Compartir*), explicitando el lenguaje algebraico relativo a la generalización y remarcando el significado de la variable dentro del contexto del problema [5-6]. Sara, Ruth y Cristina *respaldan* la identificación de la variable con las filas de naranjos en vez de con el número de naranjos como habían hecho durante el trabajo en pareja y la primera parte de la discusión. Así, *Solicitar*, *Respaldar* y *Compartir* tienen un efecto positivo evolución de la discusión matemática.

La Tabla 17 corresponde al 'Identificador de argumentación colectiva' del subepisodio, con los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del procedimiento 1 al razonamiento visual 1
Solicitar		
	Razonamiento visual Conexión visual casos	Del razonamiento visual 1 a la expresión algebraica 1
Compartir	Lenguaje algebraico Identificación variable	Del expresión algebraica 1 a la variable
Respaldar	Identificación variable	

Tabla 17. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.1

Subepisodio 2.2.2

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior y se inicia cuando la profesora pregunta por la generalización matemática relativa al número de pinos. Irene describe un procedimiento basado en la regla de tres $\frac{1}{8}=\frac{n}{x}$, donde se utiliza el caso *n=1* [11]. Gabriel reacciona exponiendo un patrón equivalente basado en un razonamiento multiplicativo [12]. Óscar e Irene comparan las resoluciones expuestas y dicen verlas iguales, pero Gabriel remarca la diferencia de razonamientos [15-17]. Durante varias intervenciones, Jose, utilizando *lenguaje visual* y ayudado por Gabriel, explica el *razonamiento visual* que subyace al patrón *8n,* conectándolo con un caso facilitado en la representación gráfica (*conexión visual casos*) y explicitando una relación de dependencia entre las filas de naranjos y el número de pinos [18-22]. Gabriel introduce el *lenguaje algebraico* para expresar la generalización de su compañero durante el trabajo el pareja [23]. Finalmente, Irene y Óscar vuelven a comparar las resoluciones dando valor al razonamiento visual por delante del inductivo (utilizado por ellos) y remarcando la funcionalidad de la expresión (*razonamiento funcional*) [25-27]. La transcripción literal es la siguiente:

[170]	Profesora:	¿Y los pinos?
[171]	Irene:	Hemos hecho una regla de tres, que si para una fila hay ocho pinos para *n* filas habrá *x* naranjos, ¡ay, qué lío!, *x* pinos.
[172]	Gabriel:	Nosotros hemos encontrado directamente que si multiplicamos ocho por el número de filas nos da el número de abetos.
[173]	Jose:	De pinos.
[174]	Gabriel:	Eso, de pinos.
[175]	Óscar:	Pero es esto.
[176]	Irene:	Es la regla de tres.
[177]	Gabriel:	Pero nosotros lo hemos visto observando en el primero y en el segundo. Y luego hemos visto el porqué.
[178]	Jose:	Sí, luego hemos visto el porqué. Hemos encontrado, o sea, multiplicando por dos el número de filas tenemos el número de pinos que forman un lado del cuadrado, este [señala el dibujo], pero uno no, uno ya lo contamos como del otro.
[179]	Gabriel:	El de la punta.
[180]	Jose:	Menos el de la punta que ya lo contamos para el otro lado. Entonces si tiene tres filas, tres por dos son seis, o sea que aquí

		hay seis pinos, aquí seis más, aquí seis más y aquí otros seis [señala el tercer dibujo].
[181]	Sara:	Seis más, seis más y seis más [repite con Jose].
[182]	Jose:	Por lo tanto el número de filas por dos te da el número de un lado y entonces lo multiplicas por cuatro que son los lados de un cuadrado.
[183]	Gabriel:	Entonces si multiplicas $2n$ por cuatro te da $8n$.
[184]	Jose:	Que es lo que habíamos visto antes y no sabíamos el porqué.
[185]	Óscar:	Es más directo, es la fórmula evolucionada.
[186]	Irene:	Es como una simplificación de la nuestra, más directa.
[187]	Óscar:	Bueno… la suya es pensada, nosotros hemos ido probando.

Se define *Compartir* como el respaldo entre miembros de la pareja en la explicación de una aproximación o razonamiento matemático. En este subepisodio se observa cómo Gabriel y Jose explican conjuntamente el razonamiento que sustenta el procedimiento inicialmente expuesto por Gabriel [12-24]. Así *Compartir* tiene un efecto positivo en la construcción de la argumentación colectiva en tanto que se hace explícita información inicialmente oculta. También se aprecia la influencia de *Iniciar* en el principio de la conversación. Primero Irene, inducida por la profesora, presenta su aproximación y seguidamente Gabriel expone la suya de forma espontánea. Estas dos intervenciones desembocan en la comparación de dos resoluciones y la posterior explicitación de razonamientos relativos a una de ellas [10-17].

La Tabla 18 muestra el ‘Identificador de argumentación colectiva’ aplicado al subepisodio. Se anotan los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del procedimiento 2 al procedimiento 3
Iniciar		Del procedimiento 3 a la comparación de resoluciones
	Comparación resolución	De la comparación de resoluciones al razonamiento visual 3
Compartir	Razonamiento visual Conexión visual casos Lenguaje algebraico	Del razonamiento visual 3 a la expresión algebraica 3
		De la expresión algebraica 3 a la comparación de resoluciones
Compartir	Comparación resolución Razonamiento funcional	De la comparación de resoluciones al razonamiento funcional

Tabla 18. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.2

Subepisodio 2.2.3

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior y se inicia cuando Maria, a instancias de la profesora, expone sus dudas referentes a la resolución expuesta en el episodio anterior. Gabriel reacciona reformulando el *razonamiento visual* expuesto previamente y ejemplificando la estrategia usada con el caso particular $n=3$ mediante la representación gráfica (*conexión visual casos*) [30, 32]. Maria cuestiona si es generalizable el patrón expuesto [35]. Gabriel y Jose argumentan su validez basándose, a priori, en un *razonamiento inductivo* y a posteriori en un *razonamiento visual* asociado a la continuidad de la serie, reforzando así, la idea de *secuencia dinámica* [36-38]. La transcripción literal es la siguiente:

[188] Profesora: ¿Maria?

[189] Maria: Es que yo no lo veo, lo que han hecho ellos…

[190] Gabriel: Espera que te lo explico yo. Si multiplicamos el número de filas por dos nos da el número de abetos [señala el dibujo].

[191] Cristina: Menos uno.

[192]	Gabriel:	Menos uno, el de la punta que lo contamos con el siguiente lado y así con todos los lados. Entonces tenemos todos los pinos contados. En el de tres filas tenemos tres por dos, seis y entonces son los pinos de este lado, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y aquí, seis más [señala el dibujo].
[193]	Maria:	Y aquí y aquí… ¡Ah! Vale.
[194]	Gabriel:	Multiplicamos por cuatro y ya está.
[195]	Maria:	¿Y siempre es así?
[196]	Jose:	Lo cumplen los tres ejemplos.
[197]	Gabriel:	Sí, en los tres se cumple.
[198]	Jose:	Y porque este cuadrado tiene esta forma y va creciendo proporcionalmente. Guarda esta proporción, siempre igual.
[199]	Maria:	[Asiente]

Se observa la influencia de *Dudar inducido* en la evolución de la argumentación colectiva. Maria, a instancias de la profesora, expresa sus dudas en relación a la aproximación expuesta en el subepisodio anterior que conlleva una reformulación del razonamiento expuesto [28-32]. Por otro lado la demanda de clarificación respecto al rango de validez de la resolución (*Solicitar*) a cargo de Sara, hace que Gabriel y Jose expliciten argumentos basados en diferentes razonamientos [35-38]. Esta petición conlleva en sí misma un salto cualitativo relativo a la argumentación de la validez de una regularidad o patrón. La comprobación o ejemplificación de una generalización con un caso particular no parece ser un argumento suficiente para su ratificación.

La Tabla 19 ilustra el ‘Identificador de argumentación colectiva’ aplicado al subepisodio. Se muestran los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Dudar[I]		
	Razonamiento visual Conexión visual casos	Del razonamiento visual 3 al razonamiento inductivo
Solicitar		
Compartir	Razonamiento inductivo Razonamiento visual Secuencia dinámica	Del razonamiento inductivo 3 al razonamiento visual

Tabla 19. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.3

Subepisodio 2.2.4

El subepisodio comienza cuando la profesora insta a Cristina a exponer una aproximación al problema que había trabajado junto a Maria. Durante el trabajo en pareja estas dos alumnas verbalizaron un patrón de forma correcta pero presentaron dificultades en la formalización con lenguaje algebraico. Tras la demanda de la profesora, Cristina expone de forma imprecisa la aproximación al problema con referencias al caso particular pedido en la primera cuestión, $n=5$ y Maria hace hincapié en el *razonamiento visual* asociado [41-43]. Sara reacciona haciendo una *comparación* con la *resolución* del subepisodio anterior y afirmando su igualdad. Esta afirmación es rechazada por Cristina y Óscar mediante la reformulación, más completa, del *razonamiento visual* expuesto con anterioridad [45-49]. Cristina hace públicas sus dificultades en la escritura algebraica del patrón. En intervenciones previas se ha explicado la estrategia de conteo de los pinos pero no se ha mencionado la relación de dependencia entre pinos y filas de naranjos. Esto parece confundir a Gabriel e Irene [51-52] y es aclarado por Jose quien, mediante *lenguaje algebraico*, muestra la relación de dependencia entre número de pinos de un lado y filas (*pensamiento covariacional*) [54]. Junto con Irene hace énfasis en la identificación de la variable y Maria acaba explicitando, mediante *lenguaje algebraico*, la expresión simbólica asociada [55-56]. La transcripción literal es la siguiente:

[200] Profesora: ¿Tú no has hecho algo parecido Cristina?

[201] Cristina: Yo he dicho que si multiplicabas…que al resultado le restabas cuatro, los de las puntas. A ver…es que no sé.

[202]	Maria:	Es que a cada lado le cuentas uno más, el de la punta, o sea si hay cuatro lados, cuatro vértices… y luego se los restas...
[203]	Cristina:	Once por cuatro… Cada lado sumando las dos puntas…
[204]	Sara:	Pues es lo mismo que han dicho ellos.
[205]	Cristina:	No, porque lo sumas todo y le restas cuatro que son los de las puntas.
[206]	Óscar:	Las puntas se están incluyendo en los dos lados.
[207]	Sara:	¡Ah, vale! Entonces se las tienes que restar.
[208]	Irene.	O sea, pero, ¿sumarlos y luego restarlos?
[209]	Cristina:	Tú lo que haces es, de cada lado cuentas el número de pinos que hay con las dos puntas, entonces lo multiplicas por cuatro y luego tienes que restar cuatro porque las puntas las has contado dos veces. Pero no sé escribirlo.
[210]	Óscar:	¿En plan fórmula?
[211]	Gabriel:	Pero el número de lados, o sea el número de pinos no lo puedes saber, ¿no?
[212]	Irene:	Claro, ¿cómo puedes saber el número de pinos si no lo tienes dibujado?
[213]	Cristina:	Pero vosotros lo habéis sabido.
[214]	Irene:	Es verdad con las filas, la n.
[215]	Jose:	Claro con las filas, es $2n$.
[216]	Maria:	Entonces sería $2n$…no, $2n+1$, multiplicamos por cuatro y luego le restamos los cuatro.

Se observa la influencia de la profesora quien invita a Cristina a exponer una aproximación al problema generada durante el trabajo en pareja con Maria (*Iniciar Inducido*) [40]. Esta intervención configura el contenido de la posterior conversación recogida en este y el siguiente subepisodio. También se observa la influencia de *Compartir* y *Rechazar* en la complementación y reformulación del razonamiento visual inicialmente dado por Cristina de forma no detallada [41-47]. Por otro lado, *Solicitar* influye en una segunda reformulación del razonamiento, esta vez con mayor detalle, y luego en la focalización de la conversación en el pensamiento covariacional para dotar de sentido el lenguaje algebraico [48-54]. Finalmente, *Respaldar* tiene efecto positivo en la conversación ya que se explicita la expresión algebraica asociada al razonamiento expuesto y se pone énfasis en la identificación de la variable [55-56].

La Tabla 20 muestra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ a este subepisodio, con los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del razonamiento visual 4 a la comparación de resoluciones
Compartir	Razonamiento visual	
	Comparación resolución	
Rechazar		De la comparación de resoluciones al razonamiento visual 4 (parcial)
	Razonamiento visual	
Solicitar		Del razonamiento visual 4 (parcial) al razonamiento visual 4 (completo)
	Razonamiento visual	
Solicitar	Pensamiento covariacional	Del razonamiento visual 4 (completo) a la variable
	Identificación variable	
Respaldar	Lenguaje algebraico	De la variable a la expresión algebraica 4

Tabla 20. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.4

Subepisodio 2.2.5

El subepisodio es continuación inmediata del anterior. Aunque en el anterior Jose usó pensamiento covariacional para construir la expresión algebraica que representa la generalización en discusión, ahora parece no advertir la diferencia entre esa expresión y la ligada a su resolución (*comparación resolución*) [57, 60]. Maria y Óscar señalan diferencias en los *razonamientos visuales* asociados [58-59]. Cuando Jose pide la expresión algebraica, se advierten dificultades de algunos alumnos con el lenguaje simbólico que representa el patrón en discusión [61-63]. Maria expresa bien la generalización con lenguaje algebraico [64]. Gabriel *compara* ambas *resoluciones*, usa *razonamientos visuales* y detalla las relaciones de dependencia en cada resolución (*pensamiento covaricional*) y sus implicaciones en la escritura algebraica de la expresión. Además afirma la equivalencia de las dos expresiones algebraicas operando una parcialmente (*manipulación algebraica*) [65]. Por último, Cristina vuelve a *comparar* las *resoluciones* y remarca sus dificultades en la escritura algebraica. Maria *identifica* la *variable n* en la relación de dependencia para explicar el origen de esas dificultades [68-69]. La transcripción literal es la siguiente:

[217]	Jose:	Nosotros hemos hecho lo mismo y no hemos restado cuatro. ¿Por qué con la misma fórmula nosotros no hemos restado cuatro y ellas sí?
[218]	Maria:	Porque nosotras hemos contado a la vez los dos lados.
[219]	Óscar:	Vosotros ya lo estáis contando.
[220]	Jose:	Pero vuestra fórmula final ¿cuál es?
[221]	Maria:	*x* por *2n…*
[222]	Sara:	Ellos han dicho *2n* por cuatro.
[223]	Óscar:	*2n+1* es igual, a no, *2n+1* por 4 igual a *x* menos cuatro.
[224]	Maria:	*2n+1* por cuatro menos cuatro.
[225]	Gabriel:	Vale, nosotros no sumamos el uno del lado, hacemos *2n* no *2n+1* y por eso luego no nos hace falta restar el cuatro que ellas suman cuando hacen el paréntesis. Ellas suman uno para hacer un lado y también es del otro y nosotros en vez de sumarlo, queda uno libre que lo cogemos como del lado siguiente.
[226]	Sara:	Claro, por eso a ellos no les hace falta.
[227]	Ruth:	[Asiente]
[228]	Cristina:	Son diferentes pero iguales… pero es que yo no sabía hacerlo, no encontrábamos la relación que cumpliera, hemos ido probando pero no la hemos encontrado.
[229]	Maria:	Porque esto era el número de filas, no de naranjos… ¡No lo hemos hecho con el número de filas! [señala la hoja]

La configuración inicial del contenido matemático de la conversación viene influenciada por *Solicitar*. Las demandas de clarificación de Jose direccionan la conversación hacia la comparación de resoluciones y la construcción de fundamentos que ratifiquen su equivalencia [57, 60]. En este sentido, *Aportar* es crucial en la resolución de la situación. Gabriel enfatiza el pensamiento covariacional y, mediante manipulación algebraica y razonamientos visuales, aporta claridad a la situación y determina la equivalencia entre las dos resoluciones [65]. El subepisodio se cierra con una conversación entre Cristina y Maria donde se vuelve a identificar la variable y su importancia para establecer relaciones de dependencia (*Compartir*) [68-69].

La Tabla 21 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio, con los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC)

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td>Solicitar</td><td>Comparación resolución</td><td rowspan="2">De la comparación de resoluciones al razonamiento visual 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Razonamiento visual</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Del razonamiento visual 4 a la expresión algebraica 4</td></tr>
<tr><td>Solicitar</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Comparación resolución
Lenguaje algebraico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De la expresión algebraica 4 al pensamiento covariacional</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aportar</td><td rowspan="3">Pensamiento covariacional
Lenguaje algebraico
Manipulación algebraica
Razonamiento visual</td></tr>
<tr><td>Del pensamiento covariacional al razonamiento visual 3 y 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Del razonamiento visual 3 y 4 a la comparación de resolución</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Comparación resolución</td></tr>
<tr><td rowspan="2">De la comparación de resolución a la identificación de la variable</td></tr>
<tr><td>Compartir</td><td>Identificación variable</td></tr>
</table>

Tabla 21. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.5

Subepisodio 2.2.6

El subepisodio se inicia con la exposición espontánea, a cargo de Jose, de una nueva resolución de la segunda cuestión del problema sobre generalización matemática. Gabriel interviene para *identificar* la *variable* expresada con *lenguaje algebraico* por Jose [71-72]. Tras la expresión de confusión de Ruth, Jose reformula su explicación con énfasis en el *pensamiento covariacional* sobre pinos y filas de naranjos que originó la aproximación. Este alumno ilustra la generalización con la representación gráfica de varios casos particulares facilitados por el enunciado (*conexión visual casos*) y remarca, mediante un *razonamiento inductivo,* el origen y la validez de su procedimiento [74-77]. Finalmente Sara y Ruth *comparan* esta *resolución* con la expuesta con anterioridad por Jose, subrayando la mayor eficiencia de la anterior (*razonamiento funcional*) [78-79]. La transcripción literal es la siguiente:

[230]	Profesora:	¿Vamos por el siguiente apartado?
[231]	Jose:	No, no, que nosotros tenemos otra. Se nos ha ido un poco la olla pero a ver… Con el número de filas he intentado encontrar cuántos pinos hay aquí sin contar los cuatro pinos de los vértices. Sin contar estos cuatro y partir del número de filas, cuántos pinos hay aquí. Y he visto que *n* más *n-1* es el número de pinos.
[232]	Gabriel:	O sea, el número de filas más el número de filas menos uno.
[233]	Jose:	Sí, el número de filas menos uno da el número de pinos que hay aquí.
[234]	Ruth:	¿Qué? ¡No me estoy enterando de nada!
[235]	Jose:	Lo enseño y entonces entenderás el porqué, dicho así queda muy…si hay tres filas y le sumas dos…O sea, hemos visto que aquí hay cinco pinos y tres filas y en este hay tres pinos y dos filas [señala el segundo y tercer dibujos].
[236]	Ruth:	Vale.
[237]	Jose:	Entonces hemos dicho ¿qué relaciona esto?, y relaciona dos filas, más dos filas menos uno, da tres.
[238]	Ruth:	Pero ¿porqué dos filas menos uno?
[239]	Jose:	Porque hemos visto que lo cumplen todos los dibujos. Mira, tres filas más dos, cinco y este dos, es el número de filas menos uno, ¿sabes? [señala el tercer dibujo]
[240]	Ruth:	Sí, sí.
[241]	Jose:	Tú sumas el número de filas más el número de filas menos una y te da el número de pinos que hay en un lado. Entonces esto lo multiplicas por cuatro y le sumas estos cuatro que no habías contado.
[242]	Sara:	¡Ahhhh! Pero el otro era más fácil.
[243]	Ruth:	Ya ves, esto te queda muy largo…*n* más *n-1*…
[244]	Sara:	Y es muy difícil llegar.

Iniciar tiene un efecto en la configuración inicial de este y el siguiente subepisodio ya que la conversación se centra en la nueva aproximación introducida por Jose [71]. De forma inmediata, se observa el efecto positivo de *Compartir* en la construcción de la argumentación colectiva cuando Gabriel aporta el significado de la variable expresada simbólicamente por su compañero durante el trabajo en pareja [72]. Por otro lado, *Dudar* e *Inquirir* juegan un papel crucial en la reformulación progresiva de la aproximación al aportarse nuevos argumentos y explicarse el razonamiento inductivo del que surge la resolución en discusión [74-77]. Al final del episodio se vuelve a observar la influencia de *Compartir* en la conversación entre Sara y Ruth, quienes valoran la efectividad y utilidad de las expresiones algebraicas expuestas [82-84].

La Tabla 22 ilustra el 'Identificador de argumentación colectiva' aplicado al subepisodio. Se ven los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), además de los códigos de interacción (CI) y los códigos de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Iniciar		Del procedimiento 5 a la variable
Compartir	Lenguaje algebraico Identificación variable	
Dudar		De la variable al razonamiento visual 5 (parcial)
	Conexión visual casos Razonamiento visual	
Inquirir		Del razonamiento visual 5 (parcial) al procedimiento 5 (parcial)
	Pensamiento covariacional Razonamiento inductivo Conexión visual casos	Del procedimiento 5 (parcial) al razonamiento inductivo Del razonamiento inductivo al procedimiento 5
Compartir	Comparación resolución Razonamiento funcional	Del procedimiento 5 a la comparación de resoluciones

Tabla 22. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.6

Subepisodio 2.2.7

El subepisodio es continuación inmediata del anterior y se inicia cuando la profesora insta a Maria a exponer sus dudas [81]. La alumna rechaza parte de lo expuesto por Jose en el episodio anterior al *identificar la variable* con número de naranjos y no con filas de naranjos [82]. Esto es aclarado por Gabriel, quien reformula la aproximación del subepisodio anterior vinculando, con la representación gráfica, la generalización a un caso particular (*conexión visual casos*) [83-85]. Se suceden intervenciones de Gabriel y Jose que reformulan y validan el razonamiento expuesto. *Conectan visualmente* la generalización con *casos* particulares para exponer el *razonamiento visual* que originó el patrón. Se remarca el *pensamiento covariacional* para dotar de sentido el *lenguaje algebraico* [87-92]. La transcripción literal es la siguiente:

[245]	Profesora:	¿Maria?
[246]	Maria:	Pero es que está diciendo naranjos que no se corresponden con los que hay, ha dicho que hay cinco y no hay cinco.
[247]	Gabriel:	Son las filas, con las filas.
[248]	Maria:	¡Ay! Sí, sí, vale.
[249]	Gabriel:	Hemos visto que si sumamos el número de filas más, el número de filas menos uno, da estos pinos de aquí. Dos más, dos menos uno, que es uno tres [señala el segundo dibujo].
[250]	Maria:	¿Cómo que dos, que uno?
[251]	Gabriel:	Mira, tres más dos, que dos es tres menos uno, el número de filas menos uno, da el número de abetos que hay aquí [señala el segundo dibujo].
[252]	Jose:	Nosotros no hemos visto esto al principio. Lo que hemos visto es que si aquí hay dos filas, entonces sin contar los de las puntas que están en todos, aquí hay tres pinos.
[253]	Maria:	O sea uno más.
[254]	Jose:	Sí, pero aquí [señala el tercer dibujo] ya no. Aquí sumamos dos. Entonces hemos dicho aquí es uno más pero aquí son dos, entonces ¿qué puede ser? Y hemos visto que es *n*, o sea tres, más *n-1*, o sea tres menos uno, dos que son cinco.
[255]	Gabriel:	Entonces multiplicamos por cuatro *n-1* y sumamos los cuatro.
[256]	Jose:	Aquí [señala el segundo dibujo], dos más uno que son tres que es esto. Dos más uno sería dos más, dos menos uno, que es uno.
[257]	Maria:	Sí, sí.

El inicio del subepisodio viene marcado por el código *Rechazar Inducido* cuando Maria, a instancias de la profesora, no acepta la interpretación de la variable *n* en la aproximación expuesta que es clarificada por Gabriel [81-84]. Se observa cómo este alumno reformula la aproximación expuesta en el subepisodio anterior. Así se vuelve a situar esta aproximación como centro del debate. Se observa también la influencia de *Inquirir* y *Compartir* en la construcción de argumentación colectiva. Por un lado, con cuestionamientos, paráfrasis y validaciones, Maria examina su comprensión de la generalización dada. Por el otro, Gabriel y Jose amplían y reformulan conjuntamente argumentos que sustentan la resolución bajo discusión [86-93].

La Tabla 23 representa el subepisodio mediante la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva'. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td>Rechazar [I]</td><td></td><td rowspan="2">De la variable al razonamiento visual 5 (parcial)</td></tr>
<tr><td></td><td>Identificación variable</td></tr>
<tr><td></td><td>Conexión visual casos
Razonamiento visual</td><td rowspan="2">Del razonamiento visual 5 (parcial) al razonamiento visual 5 (parcial)</td></tr>
<tr><td>Inquirir</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Compartir</td><td rowspan="2">Razonamiento visual
Pensamiento covariacional
Conexión visual casos
Lenguaje algebraico</td><td>Del razonamiento visual 5 (parcial) al pensamiento covariacional</td></tr>
<tr><td>Del pensamiento covariacional a la expresión algebraica 5</td></tr>
</table>

Tabla 23. Identificador de AC del Subepisodio 2.2.7

Análisis integrado del Episodio 2.2

El Episodio 2.2, con los subepisodios comprendidos entre el 2.2.1 y el 2.2.7, gira en torno a la discusión de la segunda cuestión del problema sobre generalización matemática o algebraica. A lo largo de los subepisodios se exponen aproximaciones o resoluciones al problema que corresponden a distintas expresiones algebraicas. Una de las expresiones algebraicas es desarrollada en el grupo a partir de un razonamiento expuesto y el lenguaje simbólico correspondiente a otras expresiones.

La Figura 18 ilustra el 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' aplicado al Episodio 2.2. En varias ocasiones, se observan reacciones de estudiantes que no son inmediatas a los contenidos a los que aluden. De acuerdo a la cuestión que se discute, se incluye lenguaje simbólico en las exposiciones de expresiones algebraicas que acompañan a la descripción de los procedimientos o razonamientos asociados. Se comparan expresiones y se hace hincapié en la identificación de la variable. Así se consideran aspectos sobre la significación del lenguaje simbólico. También se incluyen razonamientos inductivos para reforzar explicaciones de procedimientos, aclarar el uso de símbolos o justificar el origen de expresiones algebraicas.

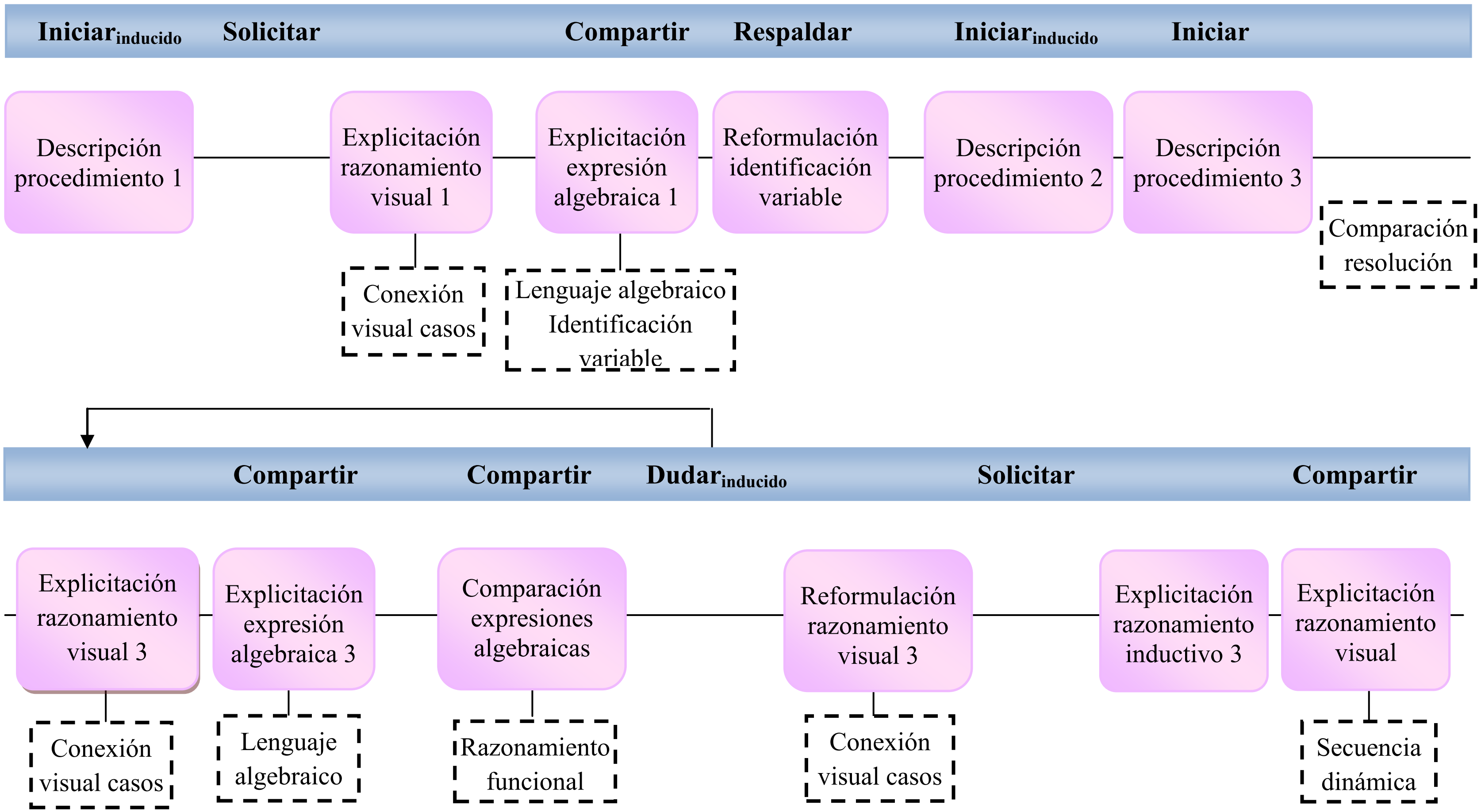


Figura 18. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 2.2

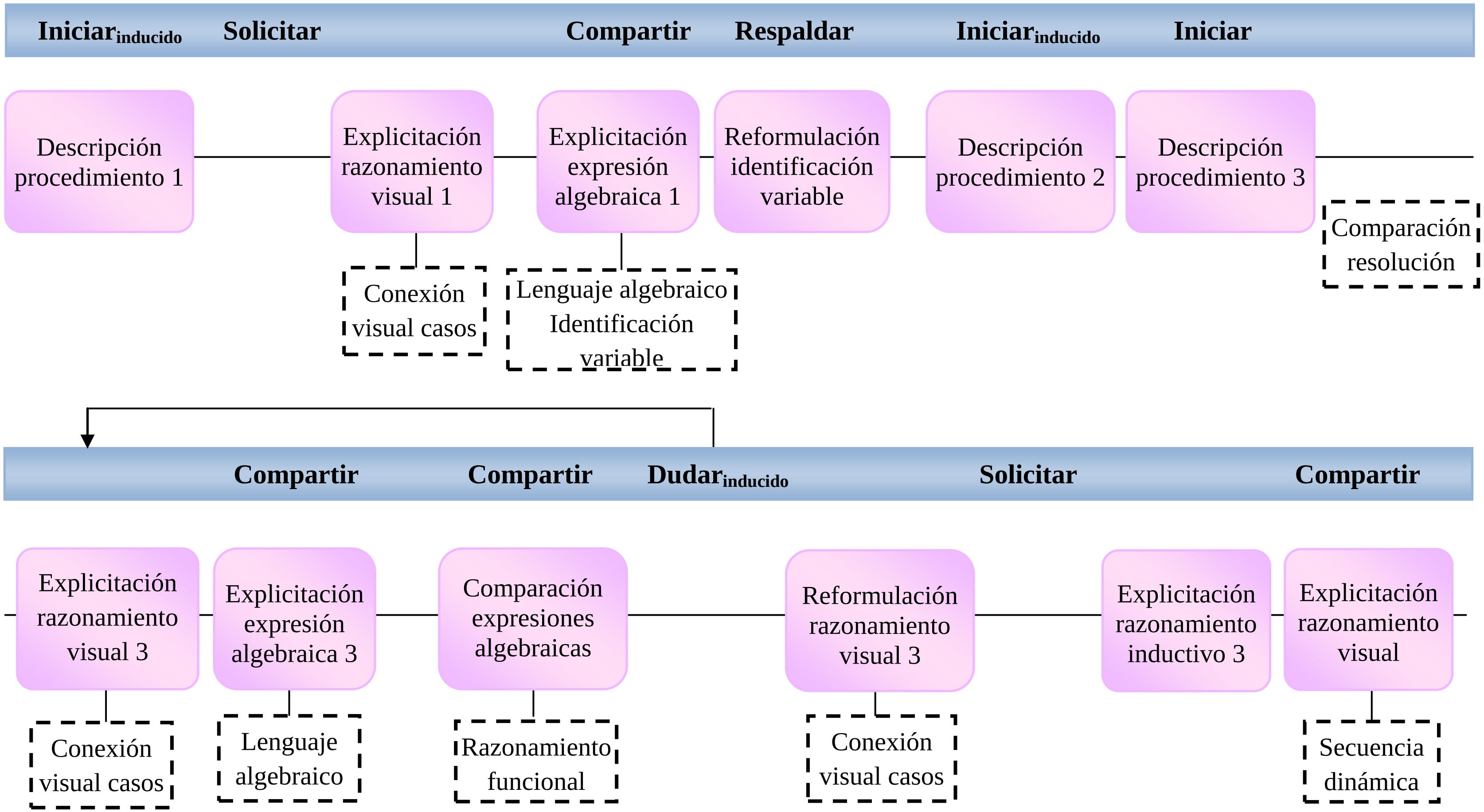


Figura 18. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 2.2

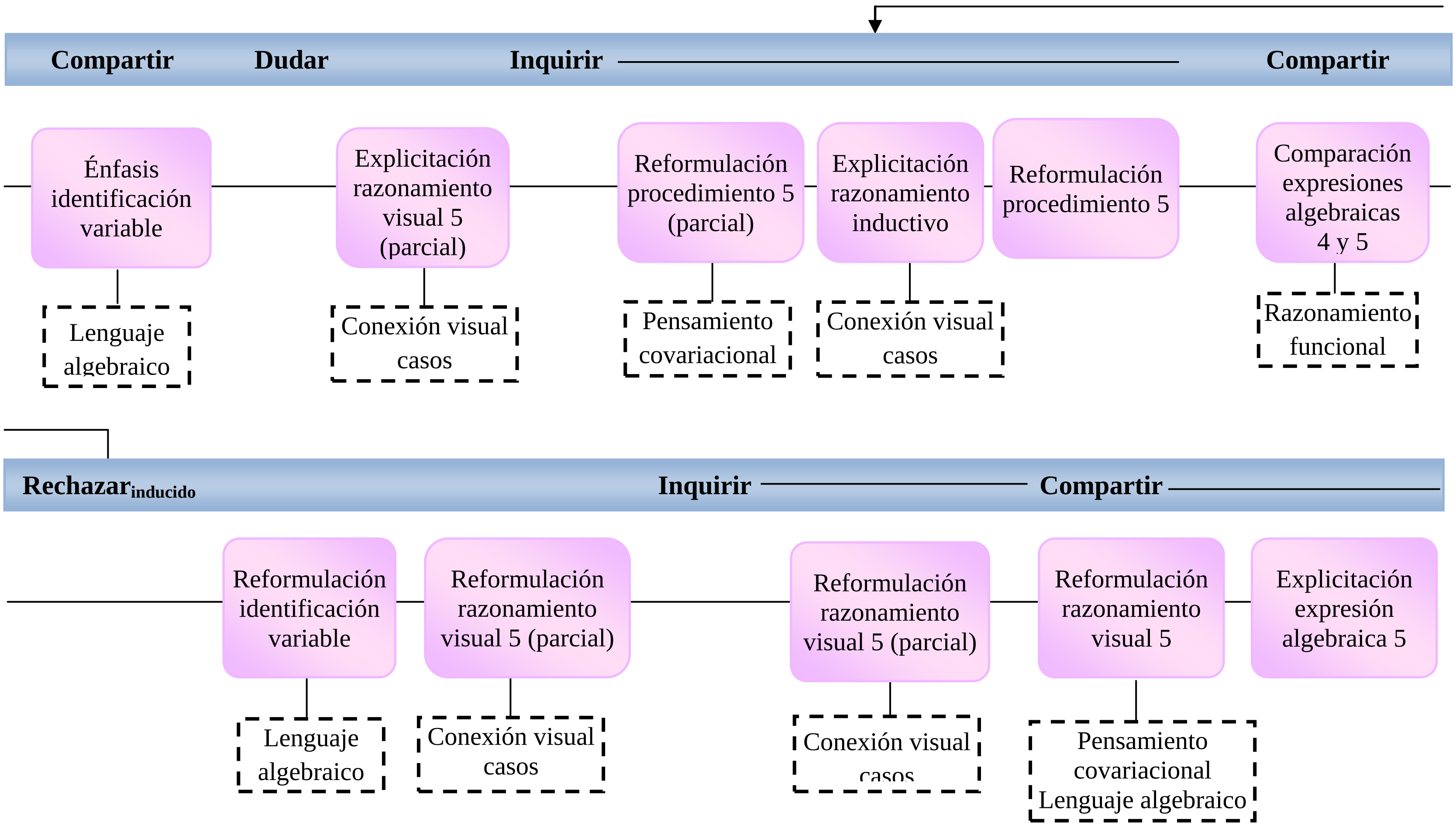


Figura 18. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 2.2

Episodio 2.3 y subepisodios

Sigue cronológicamente el análisis narrativo de los Subepisodios 2.3.1 y 2.3.2 que conforman el Episodio 2.3. Se incluye también el análisis integrado del episodio.

Subepisodio 2.3.1

El subepisodio representa el inicio de la discusión sobre la tercera cuestión del problema. Maria expone su opinión sin fundamentación matemática, que es refutada por Cristina con un *razonamiento* basado en una intuición *visual* [96]. Irene explicita expresiones algebraicas validadas para el número de pinos y de naranjos para apoyar el razonamiento dado. Esta alumna *conecta* las generalizaciones con el *caso* particular $n=8$ para *comparar numéricamente* las dos expresiones. Tras mostrar la igualdad numérica, afirma que el número de naranjos será mayor que el de pinos cuando haya más de ocho filas [97]. Gabriel y Jose, que en pareja han resuelto la cuestión con una desigualdad entre las dos expresiones algebraicas, hallan un error al *comparar* los resultados *numéricos* de las dos expresiones para el caso $n=9$. Jose corrige la desigualdad en la hoja del problema [98-102]. La transcripción literal es la siguiente:

[258]	Profesora:	Vamos por el último apartado. Ya sé que no habéis llegado, pero ¿qué piensas tú, Maria?
[259]	Maria:	Que no puede ser.
[260]	Cristina:	Yo creo que sí porque si lo haces muy grande tendrás más en el medio que pinos.
[261]	Irene:	Sí, sí que es posible porque utilizando la fórmula de $8n$ y la de n^2, llega un momento en el que cuando tienes ocho filas igualas el número de pinos y el de naranjos y una vez lo pasas hay más naranjos que pinos.
[262]	Gabriel:	No, porque nueve al cuadrado que sería el número de naranjos no es más grande que ocho por nueve.
[263]	Jose:	Nueve por nueve sí que es más grande que ocho por nueve.
[264]	Irene:	Sí que es más grande.
[265]	Gabriel:	Lo tenemos equivocado. No entiendo, si hemos hecho una inecuación.

[266] Jose: ¡Ah! Es verdad, no, pues sí. Nosotros hemos hecho esto [señala la inecuación en la hoja] pero al revés o sea que hemos dicho que no, pero es que sí.

En este subepisodio se observa la influencia de *Rechazar* en dos ocasiones. Primero Cristina *rechaza* la solución no fundamentada dada por Maria tras la demanda de la profesora (*Iniciar Inducido*) [94-96]. Esta alumna aporta un razonamiento visual basado en la intuición. Luego, el *rechazo* de Gabriel y la consiguiente comparación numérica lleva a este estudiante y a su compañero a darse cuenta de un error en la interpretación del procedimiento usado [98-101]. También se aprecia la influencia de *Compartir* en la adecuación e interpretación de este procedimiento para llegar a verbalizar una solución correcta [102]. Por otro lado, se observa la influencia de *Respaldar* cuando Irene apoya la solución de Cristina y explicita nuevos argumentos basados en la comparación de las expresiones algebraicas [97].

La Tabla 24 ilustra la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio. Se muestran los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del razonamiento intuitivo 1 al razonamiento intuitivo visual 2
Rechazar	Razonamiento visual	Del razonamiento intuitivo visual 2 al procedimiento 2
Respaldar	Comparación numérica Conexión casos	Del procedimiento 2 a la comparación numérica errónea
Rechazar	Comparación numérica	De la comparación numérica errónea a la comparación numérica adecuada
	Comparación numérica	De la comparación numérica adecuada al procedimiento 3
Compartir	Manipulación algebraica	Del procedimiento 3 a la manipulación algebraica 3

Tabla 24. Identificador de AC del Subepisodio 2.3.1

Subepisodio 2.3.2

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior y se inicia con la intervención de Irene donde esta alumna expone un *razonamiento visual* para afirmar que la intuición parece contradecir la solución acordada en el subepisodio anterior [103]. Óscar apunta a la necesidad de probar con diferentes casos particulares para poder concluir (*razonamiento inductivo*) y Gabriel enfatiza el uso de la desigualdad como procedimiento para la resolución del problema [105-106]. Este alumno *compara* las *resoluciones* expuestas remarcando la eficiencia de la desigualdad por encima del procedimiento sugerido por Óscar (*razonamiento funcional*). Esta idea es apoyada por varios estudiantes [107-109]. La transcripción literal es la siguiente:

[267]	Irene:	Mirando el dibujo, parece que no puede ser, por los espacios que hay parece que hay más fuera.
[268]	Sara:	Sí, parece que hay más fuera.
[269]	Óscar:	Ya, pero si pruebas con los números, te das cuenta de que cuando el número de filas es más grande de ocho entonces, hay más naranjos que pinos.
[270]	Gabriel:	Mejor hacerlo con la inecuación pero bien y te da que a partir de ocho. Con ocho tienen el mismo número. Porque si fuera ochenta y tienes que ir probando…
[271]	Jose:	¡Te puedes hacer viejo probando!
[272]	Óscar:	Ya, es verdad.
[273]	Sara:	Claro…no te puedes fiar…porque esto [señala el dibujo] engaña y con números si son muy grandes tardas mucho.

Iniciar pone en el centro del debate la no fiabilidad de la intuición visual como procedimiento de resolución [103]. Este debate influye en el contenido matemático de la conversación. También se aprecia el efecto de *Respaldar* en la evolución de la argumentación colectiva cuando Óscar explicita un argumento inductivo para la validación de la resolución [105]. *Rechazar* tiene un efecto positivo ya que se expone y valora la inecuación como procedimiento. Esto supone un cambio cualitativo en la conversación que se centra no sólo en la validez de procedimientos sino en su funcionalidad tanto en el caso particular como en otros casos imaginarios [106-109].

La Tabla 25 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se muestran los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Iniciar	Razonamiento visual	Del razonamiento intuitivo visual 1 al razonamiento inductivo 2
Respaldar	Razonamiento inductivo	Del razonamiento inductivo 2 a la comparación de resoluciones
Rechazar	Razonamiento funcional Comparación resolución	De la comparación de resoluciones al razonamiento funcional
Respaldar	Razonamiento funcional	

Tabla 25. Identificador de AC del Subepisodio 2.3.2

Análisis integrado del Episodio 2.3

El Episodio 2.3, con los subepisodios 2.3.1 y 2.3.2, gira en torno a la discusión de la tercera cuestión del problema sobre manipulación algebraica de expresiones halladas. Se exponen razonamientos basados en intuiciones visuales para luego considerar razonamientos más formales de comparación de las dos expresiones asociadas al número de pinos y de naranjos. Se acaba con una valoración de la utilidad y validez del lenguaje algebraico por delante de la intuición visual y el razonamiento inductivo.

La Figura 19 aplica el ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ al Episodio 2.3. Los códigos de interacción más frecuentes, en ocasiones contiguos, son *Rechazar* y *Respaldar*. A diferencia del Episodio 1.2, las confrontaciones no se prolongan en el tiempo y se llega a acuerdos de forma rápida. No hay diferencia en la interpretación y uso de ciertas palabras, sino conflictos basados en la no validez de una intuición visual o en un error en la interpretación o escritura de una desigualdad algebraica. Ambos casos son refutables con lenguaje simbólico o comparación numérica de resultados. Así, la argumentación colectiva se construye a través de la resolución de conflictos en ciertos contenidos o interpretaciones matemáticas.

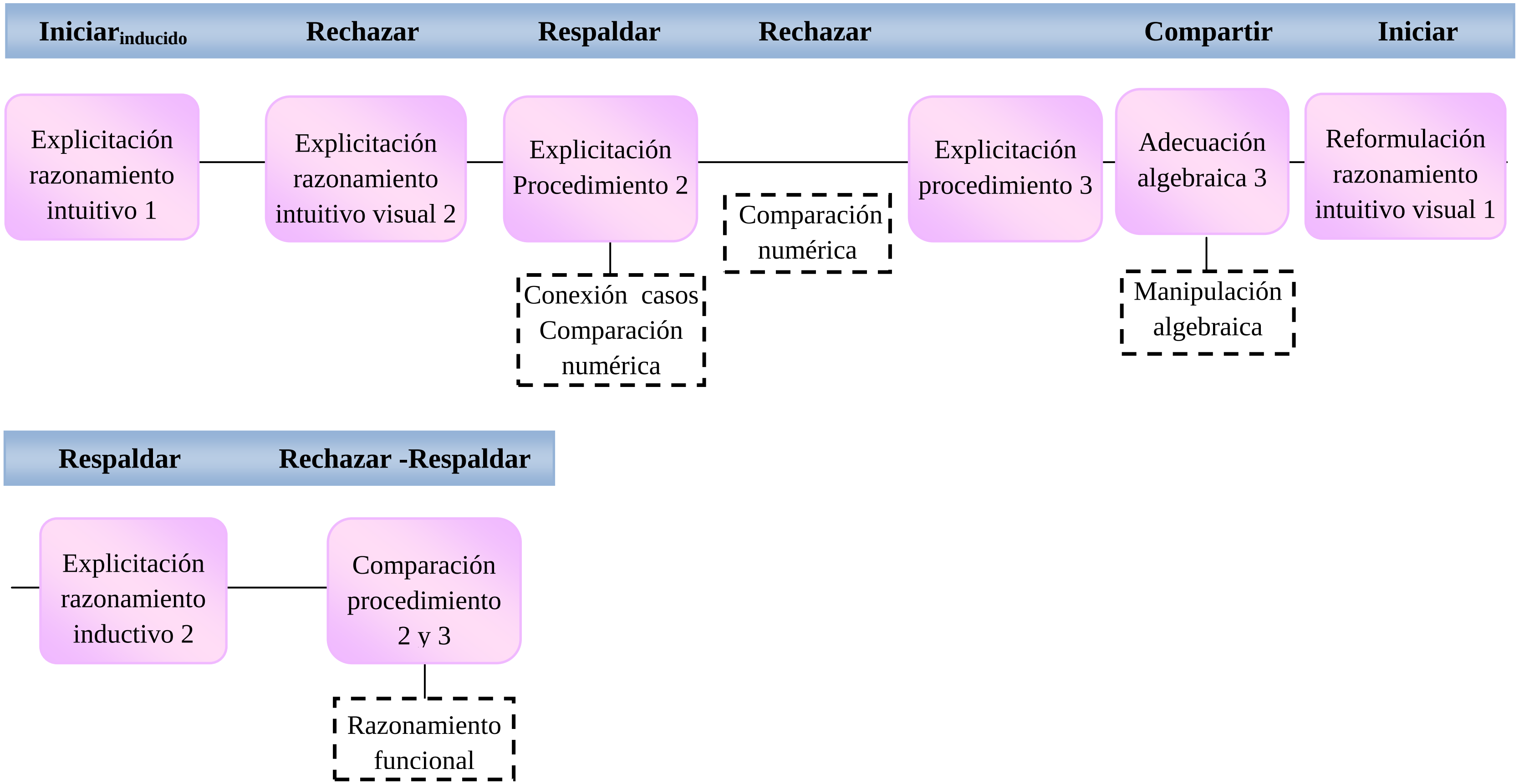


Figura 19. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 2.3

4.3 Análisis de la cuarta sesión

Se presenta el análisis de cada subepisodio y episodio de la cuarta sesión de la secuencia didáctica. La sesión está fragmentada según las discusiones relativas a cada momento de la generalización solicitado por el enunciado del problema. Se obtuvieron los Episodios: 4.1 sobre generalización cercana y 4.2, 4.3 y 4.4 sobre generalización matemática (el 4.3 sin el requerimiento de expresión algebraica). En esta ocasión se suprimió la cuestión sobre generalización lejana y se incluyeron varias preguntas sobre generalización matemática que requerían discriminar números naturales pares e impares, atendiendo a criterios de progresiva dificultad de la secuencia. Cada episodio se segmentó en subepisodios para un análisis narrativo a nivel micro. La Figura 20 muestra los episodios y subepisodios de la sesión.

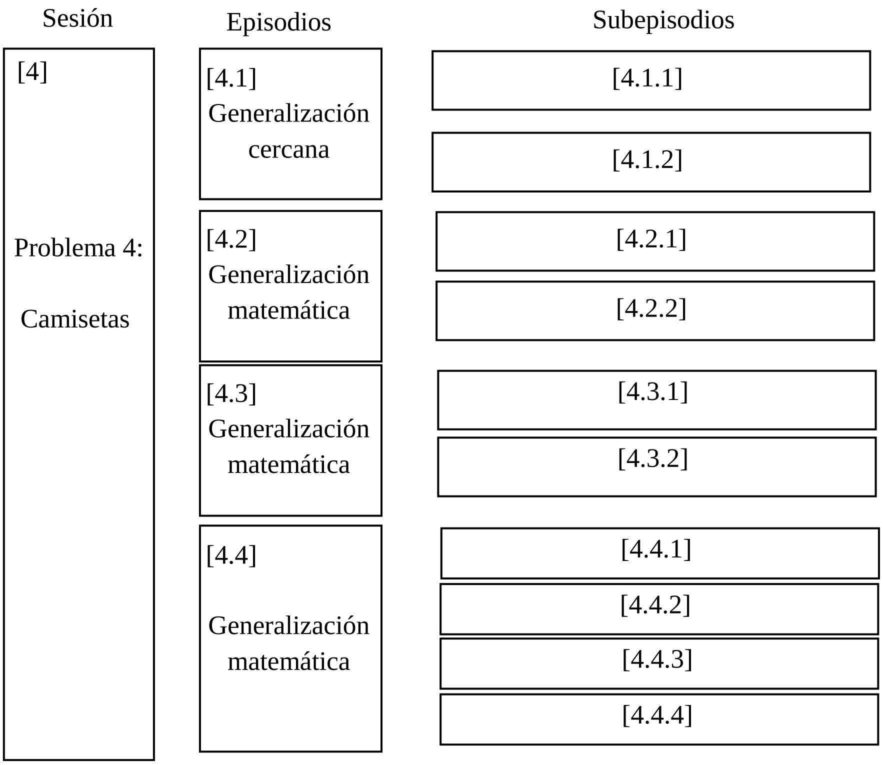


Figura 20. Esquema de episodios y subepisodios de la cuarta sesión

Episodio 4.1 y subepisodios

Se expone cronológicamente el análisis de los Subepisodios 4.1.1 y 4.1.2 que forman el Episodio 4.1. Se considera para finalizar el análisis integrado de todo el episodio.

Subepisodio 4.1.1

El subepisodio corresponde al inicio de la puesta en común de la cuarta sesión. Maria, por iniciativa propia, expone su aproximación a la primera cuestión del enunciado del problema sobre generalización cercana [1-3]. Esta alumna incluye aspectos generales en su explicación, discriminando números pares e impares, pero luego describe el procedimiento relativo al año 2015 sin aportar razones matemáticas que lo sustenten [3]. Irene *compara* su *resolución* con la de Maria, afirmando que son similares. Esta alumna expone su resolución basándola parcialmente en el hecho de que las figuras relativas a años impares tienen un cuadrado blanco más que gris [4]. Entonces Sara *compara* las *resoluciones* expuestas con la suya y afirma su equivalencia mediante un *razonamiento visual*. Además amplía lo expuesto explicitando una regularidad relativa a los años pares [5]. La transcripción literal es la siguiente:

[274]	Maria:	¿Empiezo yo?
[275]	Profesora:	Venga.
[276]	Maria:	Tiene que haber una fórmula para los pares y otra para los impares. Para el año 2015 lo que hacemos es restar 2015 menos 2009, que nos da seis, y entonces lo dividimos entre dos y nos da tres blancas y tres grises, pero como es impar le sumamos uno al blanco y nos queda cuatro blancas y tres grises.
[277]	Irene:	Nosotros tenemos una fórmula diferente pero es más o menos lo mismo. Hacemos 2015 menos 2009 y le sumamos uno y nos da siete. Entonces como sabemos que es impar, hay uno más blanco, entonces cuatro son blancas y tres son grises.
[278]	Sara:	Sí, es lo mismo que hemos hecho nosotras. En los pares siempre habrá el mismo número de blancos que de grises y en los impares uno más blanco que gris, porque si empiezas en blanco siempre acabarás en blanco.
[279]	Alumnos:	[Asienten]

Iniciar, es decir, la introducción de una resolución de la cuestión solicitada por el problema, influye en la conformación de la estructura y desarrollo de la conversación matemática del subepisodio. Maria inicia la discusión exponiendo una aproximación a la primera cuestión del problema [3]. Irene y Sara intervienen de forma espontánea poniendo en paralelo su aproximación. Irene se centra más en el procedimiento seguido mientras que Sara explicita razonamientos visuales que sustentan los diferentes procedimientos [4-5]. Así la conversación es guiada hacia la comparación de distintas aproximaciones al problema, explicitando diferencias y similitudes.

La Tabla 26 muestra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), junto con los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td>Iniciar</td><td></td><td rowspan="2">Del procedimiento 1 a la comparación de resoluciones</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Iniciar</td><td rowspan="3">Comparación resolución</td></tr>
<tr><td>De la comparación de resoluciones al procedimiento 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Del procedimiento 2 al razonamiento visual 1 y 2</td></tr>
<tr><td></td><td>Comparación resolución
Razonamiento visual</td></tr>
</table>

Tabla 26. Identificador de AC del Subepisodio 4.1.1

Subepisodio 4.1.2

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior donde se han expuesto dos procedimientos diferentes de resolución para el caso del año 2015. El procedimiento de Maria se puede asociar al inicio de la serie en $n=0$, mientras que el de Irene correspondería al inicio en $n=1$. La profesora pretende hacer explícita esta diferencia y promover el *pensamiento covariacional* que subyace en la relación de dependencia entre el año y la posición de la camiseta dentro de la secuencia [7, 12]. Aunque Irene en su resolución considera la operación 2015-2009+1 como el total de cuadrados, no conecta este procedimiento con la posición de la camiseta y afirma que el año 2015 indica la sexta camiseta, junto con Cristina, Gabriel y Sara [8-11]. Tras el segundo cuestionamiento de la profesora, Cristina e Irene afirman que la camiseta del año 2015 es la séptima [12-15]. Gabriel apoya esta afirmación con un *razonamiento visual* que liga la posición al número de cuadrados de la camiseta. Irene asocia este razonamiento a la relación de dependencia entre la variable *n* y el año de la camiseta, mediante la operación 2015-2009+1, expuesta en la discusión anterior (*pensamiento covariacional)* [16-17]. Finalmente, Óscar propone una simplificación de la expresión (*manipulación algebraica*) abogando por la facilidad de cálculo (*razonamiento funcional*) [18]. La transcripción literal es la siguiente:

[280]	Profesora:	Y entonces, ¿qué número de camiseta es la del 2015?
[281]	Gabriel:	La número seis.
[282]	Irene:	Sí.
[283]	Cristina:	Sí.
[284]	Sara:	Es la sexta y tiene cuatro blancos y tres grises.
[285]	Profesora:	¿Y la 2012?
[286]	Alumnos:	La cuarta.
[287]	Cristina:	¡Ah! No, claro. ¡Es la séptima!
[288]	Irene:	Es la séptima.
[289]	Gabriel:	Lo que pasa es que la del 2009 no cuenta como cero, cuenta como uno porque tiene un cuadrado.
[290]	Irene:	Por eso nosotros sumamos el uno antes.
[291]	Óscar:	También podríamos restarle el 2008 y así luego no le sumamos el uno.

Las dos intervenciones de la profesora son clave para el desarrollo de argumentación colectiva [7, 12]. *Indicar*, es decir, el cuestionamiento de la profesora señala, en esta ocasión, la relación entre el año, la posición de la camiseta y el valor de la variable, con el objetivo de promover el pensamiento covariacional y la identificación de la variable *n*. Por otro lado, *Respaldar* facilita la explicitación de fundamentaciones sobre la interpretación de la variable y las relaciones de dependencia en el contexto del problema [15-17]. Finalmente se observa la influencia de *Compartir* cuando Oscar propone ciertas manipulaciones para simplificar una expresión algebraica [18].

La Tabla 27 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se incluyen los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), junto con los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Indicar		
	Identificación variable	De la variable 1 a la variable 2
Indicar		
	Identificación variable	De la variable 2 al razonamiento visual 2
Respaldar	Razonamiento visual Pensamiento covariacional	Del razonamiento visual 2 a la manipulación algebraica
Compartir	Manipulación algebraica Razonamiento funcional	

Tabla 27. Identificador de AC del Subepisodio 4.1.2

Análisis integrado del Episodio 4.1

El Episodio 4.1, con los Subepisodios 4.1.1 y 4.1.2, gira en torno a la discusión de la primera cuestión del problema sobre generalización cercana. También se considera en la discusión la relación de dependencia entre la posición de una camiseta dentro de la secuencia, representada por *n*, y el año correspondiente a dicha camiseta, facilitado en el problema. Inicialmente se exponen y comparan dos resoluciones basadas en dos procedimientos distintos pero que recurren al uso de una misma regularidad.

La Figura 21 presenta el 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' aplicado al Episodio 4.1. Se nota la influencia de la profesora (*Indicar*) quien incide en que se discuta la relación de dependencia entre años y posiciones de las camisetas. Además de la descripción de varios procedimientos, se ve la identificación de la variable dentro del contexto del problema en el logro de argumentación colectiva.

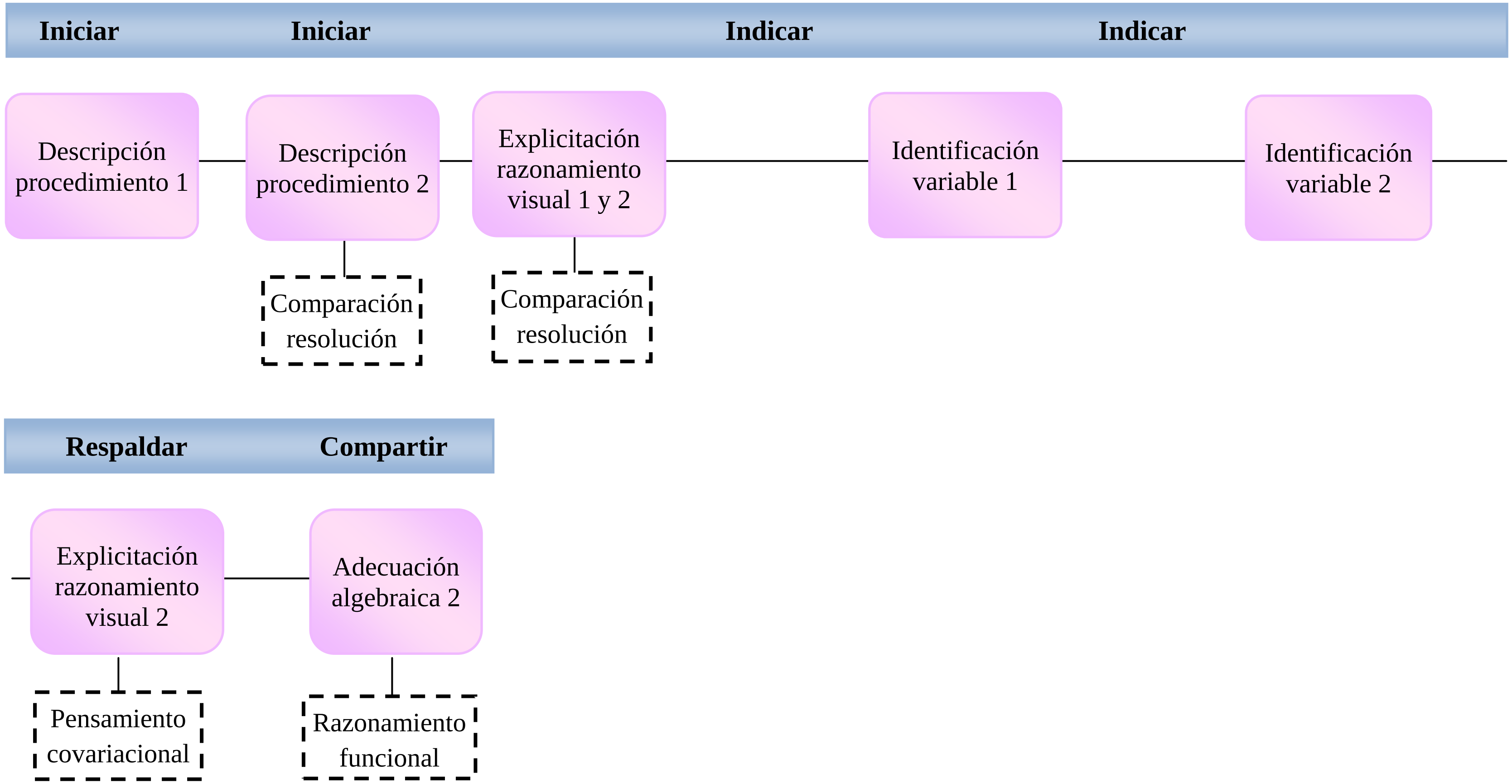


Figura 21. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 4.1

Episodio 4.2 y subepisodios

A continuación se expone, en orden cronológico, el análisis narrativo de los Subepisodios 4.2.1 y 4.2.2 del Episodio 4.2. Se incluye para cada subepisodio la tabla con la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’, donde se muestra información relevante de forma esquemática. Seguidamente, se muestra el análisis integrado del Episodio 4.2 mediante la aplicación del ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’.

Subepisodio 4.2.1

El subepisodio comienza cuando la profesora insta a Cristina a exponer la resolución relativa a la generalización matemática solicitada en la segunda cuestión del problema [19]. Esta alumna generaliza verbalmente lo expuesto por Maria, su compañera en el trabajo en pareja, en el Episodio 4.1.1. Se observan las dificultades de Cristina en el uso del lenguaje algebraico y en la identificación de la variable *n*, no facilitada por el enunciado [20, 22]. Esto parece dificultar la comprensión de Jose [21], quien acaba cuestionando el significado de la variable *n* en la aproximación de Cristina [23]. Apoyada por Sara, Cristina *identifica la variable n* con el año correspondiente a cada camiseta. Jose expresa su desacuerdo diciendo que *n* es el número de camiseta, no el del año [24-28]. A partir de aquí, se suceden una serie de intervenciones de diferentes alumnos en torno a la relación de dependencia entre *n* y los años (*pensamiento covariacional*). Finalmente parece que hay acuerdo en que la relación de dependencia subyace en la expresión *n = año-2009* [29-36]. Cristina, utilizando esta relación, *manipula la expresión algebraica* expuesta antes e introduce la variable *n*. Jose parece aceptar implícitamente esta relación pero pone énfasis en la *identificación* y uso de la *variable n* en la expresión algebraica [32, 38]. Este alumno, apoyado por Oscar, pone énfasis en la no necesidad de utilizar los años para calcular la *n* al ser facilitada por el problema (*razonamiento funcional*) [40-41]. El subepisodio finaliza cuando Cristina reformula la expresión algebraica inicial introduciendo *n* mediante el uso de la relación de dependencia acordada. La transcripción literal es la siguiente:

[292]	Profesora:	Cristina, ¿y el caso *n*?
[293]	Cristina:	Haces lo mismo, en lugar de poner 2015 haces el año menos 2009 es igual al año menos 2009 dividido entre dos más una.
[294]	Jose:	¿Qué?
[295]	Cristina:	Pues el año menos 2009 es igual al año menos 2009 partido entre dos más una blanca si fuera impar y sin una blanca, si fuera par.
[296]	Jose:	¿Y la *n*?
[297]	Cristina:	El año, el año que estás buscando o sea el año que te dan.
[298]	Sara:	El año que pone en la camiseta.
[299]	Jose:	No, porque la enésima camiseta, la *n* no sería el año es el número de camiseta.
[300]	Sara:	No.
[301]	Jose:	Claro, la enésima camiseta no es 2009 o 2013, ¿qué sería la dos mil treceava camiseta? No, es la sexta, la quinta…
[302]	Cristina:	Entonces sería esto [señala año menos 2009].
[303]	Óscar:	Pero puedes pensar que es la sexta camiseta y poner el año en el que se ha hecho.
[304]	Maria:	Claro.
[305]	Jose:	Pero la *n* que te dan, es como si te dieran el número de camiseta. Esta *n* no es el año.
[306]	Cristina:	Pues *n* dividido por dos más uno si es impar y sin el uno si es par.
[307]	Irene:	Es la misma fórmula pero substituyendo los años por incógnitas.
[308]	Cristina	Él lo que dice es que el año menos el 2009 sea la *n*. Es lo mismo.
[309]	Gabriel:	Sí, sí, es lo mismo.
[310]	Maria:	Es lo mismo si pones la novena camiseta o haces el año que sea menos 2009.
[311]	Jose:	Yo lo único que digo es que no te dan el año, te dan el número de camiseta y tu decías que te daban el año.
[312]	Maria:	Pero con el número de camiseta puedes saber el año.
[313]	Jose:	¿Y de qué te sirve calcularlo? Tú lo que quieres saber es el número de cuadrados, no el año.
[314]	Óscar:	No, claro, si te dan el número de camiseta no necesitas poner el año.
[315]	Cristina:	Pues ya está, a todo esto [señala *año-2009*] le pones *n* y haces la fórmula.

Jose pide aclaraciones sobre la resolución de Cristina y el significado de la variable en esa aproximación [21, 23]. De esta forma *Solicitar* direcciona el contenido de la conversación que se centra en el significado y uso de la variable dentro del contexto del enunciado y en la relación de dependencia entre posición de la camiseta y año. Se observa como *Rechazar* es también relevante en el progreso y focalización del contenido matemático. Jose no sólo se niega a aceptar y usar la interpretación de la variable defendida por Cristina y Sara inicialmente [24-28]; además sostiene la no necesidad de conectarla con los años a pesar de que Sara, Óscar, Maria y Gabriel parecen *respaldar* este razonamiento [29-42]. Esto hace que la conversación se centre en el significado y uso de la variable en la expresión algebraica expuesta, que parece ser aclarado. Aunque provoca que no se desarrollen ni se aclaren otros contenidos matemáticos implícitos en la conversación, como son la adecuación del lenguaje algebraico de la aproximación de Cristina [20, 22] y las diferentes relaciones entre posición y año de la camiseta y las diferentes expresiones algebraicas asociadas a dichas relaciones. Por ejemplo, implícitamente se acepta el procedimiento de Cristina para las camisetas de años pares, siendo su expresión incorrecta [33].

La Tabla 28 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se indican los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		De la expresión algebraica 1 a la variable 3
Solicitar		De la variable 3 a la variable 4
	Identificación variable	De la variable 4 a la expresión algebraica 3-4
Rechazar	Identificación variable	De la expresión algebraica 3-4 al pensamiento covariacional
	Pensamiento covariacional	Del pensamiento covariacional a la variable 4
Respaldar	Pensamiento covariacional	De la variable 4 a la manipulación algebraica 1
Rechazar	Identificación variable	De la manipulación algebraica 1 al pensamiento covariacional
	Manipulación algebraica	Del pensamiento covariacional a la variable 4
Respaldar	Pensamiento covariacional	De la variable 4 al pensamiento covariacional
Rechazar	Identificación variable	Del pensamiento covariacional al razonamiento funcional
	Pensamiento covariacional	Del razonamiento funcional a la manipulación algebraica 1
Rechazar	Razonamiento funcional	
Respaldar	Manipulación algebraica	

Tabla 28. Identificador de AC del Subepisodio 4.2.1

Subepisodio 4.2.2

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior, donde se ha discutido el significado de la variable *n* en el contexto del enunciado del problema y la relación de dependencia con los años de las camisetas. Parece que todos están de acuerdo en que la relación entre *n* y los años subyace en la expresión *n=año-2009* y la *n* se identifica con la posición de la camiseta en la secuencia. La conversación empieza cuando Irene vuelve a cuestionar el valor de *n* en el caso del año 2015 discutido en el Subepisodio 4.2.1, donde se había acordado que correspondía al valor 7 (considerando *n=año-2009+1*) [43]. Jose dice que la camiseta del año 2015 es la sexta y la del 2009 es la primera [44, 46]. Irene y Cristina rebaten esta idea afirmando que si es la sexta, la serie empezaría en *n=0* [47-48]. Jose reformula un razonamiento visual expuesto en el subepisodio anterior que establece una relación entre variable y número de cuadrados [49]. Irene, junto a Óscar, expresa con *lenguaje algebraico* esta relación considerando que la *n* se inicia en cero (*identificación variable*) [50-51]. Jose parece no ver necesario conectar el caso del año 2015 con el caso general. Entonces Gabriel reformula el procedimiento de Cristina en el subepisodio anteriora considerando el inicio de la variable en uno [53]. Este alumno justifica los diferentes procedimientos seguidos según el año sea impar o par mediante un *razonamiento funcional* y ejemplificado el caso general para los impares con el de 2015 (*conexión casos*) [53]. El subepisodio finaliza con la intervención de Cristina, quien afirma la equivalencia de su resolución con la de Gabriel. Aunque el razonamiento que subyace a los dos procedimientos es el mismo, las resoluciones difieren en su interpretación de la variable. Además mientras la expresión algebraica de Gabriel es correcta y coherente con la interpretación de la variable usada, la de Cristina para las camisetas pares es incorrecta, lo cual pasa desapercibido. La transcripción literal es la siguiente:

[316]	Irene:	Pero entonces…la *n* en el 2015, ¿qué es? ¿la sexta?
[317]	Jose:	Sí.
[318]	Irene:	¿Pero esta es…? [señala la primera camiseta]
[319]	Jose:	La primera.
[320]	Cristina:	La cero.
[321]	Irene:	Cuentas desde el cero sino sería la séptima, ¿no?
[322]	Jose:	Pero después le sumamos una. Porque empezamos con un cuadrado, entonces le sumamos una.

[323]	Irene:	Pero entonces, esto sería como *n* más uno.
[324]	Óscar:	Claro, piensas que 2009 es la cero y 2010 es la uno, por eso luego le sumas uno.
[325]	Jose:	Pero en el 2015 no te dan el número de camiseta, te dan el año, entonces da igual…
[326]	Gabriel.	Hemos tomado el seis porque al dividirlo entre dos da números enteros y luego le sumamos el uno y así tres más cuatro te da siete que coincide con la camiseta, la *n*, y con el número de cuadrados que tiene la camiseta. Entonces para dividirlo haces… tomas *n* menos uno. Y después cuando el número es par pues le sumas uno antes de dividirlo entre dos para que te de entero, que si lo haces con la *n*, pues la divides directamente.
[327]	Cristina:	Eso es equivalente a lo que hemos hecho nosotras.

Se define *Solicitar* como la petición de aclaraciones respecto a un razonamiento expuesto. En este subepisodio, Irene es la estudiante que pide clarificaciones sobre la identificación de la variable y su valor en la aproximación del subepisodio anterior [43, 45, 48]. Las reacciones a la intervención de Irene revelan dos interpretaciones relativas al valor de la variable y al inicio de la serie en cero o uno [46-48]. Jose *rechaza* la interpretación de Irene y la necesidad de conectar entre el caso particular de la primera cuestión y la generalización [49, 52]. Se observa la influencia de *Compartir* en la evolución de la discusión matemática cuando Óscar conecta el lenguaje algebraico explicitado por Irene con el natural [51] y cuando Gabriel justifica la interpretación de Jose apoyándose en un razonamiento funcional [53].

La Tabla 29 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se muestran los movimientos en la argumentación colectiva (MAC), así como los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM).

CI	CCM	MAC
Solicitar		De la variable 2 a la variable 1
	Identificación variable	
Solicitar	Identificación variable	De la variable 1 al razonamiento visual 2
	Razonamiento visual Lenguaje algebraico	Del razonamiento visual 2 a la variable 1
Compartir	Identificación variable	
Rechazar		De la variable 1 al procedimiento 1 (integrando variable 2)
Compartir	Conexión casos Razonamiento funcional Identificación variable	
	Comparación resolución	Del procedimiento 1 (integrando variable 2) a la comparación de resoluciones

Tabla 29. Identificador de AC del Subepisodio 4.2.2

Análisis integrado del Episodio 4.2

El Episodio 4.2, conformado por los Subepisodios 4.2.1 y 4.2.2, gira en torno a la discusión de la segunda cuestión del problema sobre generalización matemática o algebraica. Concretamente, las discusiones relativas a los dos subepisodios están centradas en una aproximación al problema y en la identificación de la variable *n*, inicialmente en esa aproximación y luego en el contexto del problema.

La Figura 22 presenta el ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ aplicado al Episodio 4.2. Se observa una reacción de un estudiante a contenidos expuestos en el episodio anterior. Por otro lado, en este episodio el código *Rechazar* es frecuente y aparece, a veces junto con *Respaldar*, de forma consecutiva. Esto indica la existencia y perduración de la confrontación entre dos narrativas. En esta ocasión, esta confrontación tiene su origen en diferentes interpretaciones de la variable *n*. En cambio la continuidad en el tiempo del conflicto se debe a diferencias en el discurso de varios estudiantes. Unos defienden el uso de la relación de dependencia entre los años y la n, mientras para otros esto carece de sentido. Así, la argumentación colectiva está marcada por reformulaciones donde se incluyen distintas interpretaciones y usos de la variable n. Acorde con la cuestión del problema en discusión, los estudiantes incluyen el lenguaje simbólico en sus explicaciones aunque no siempre de forma correcta. Al respecto se observan modificaciones en expresiones algebraicas para adecuar el lenguaje algebraico.

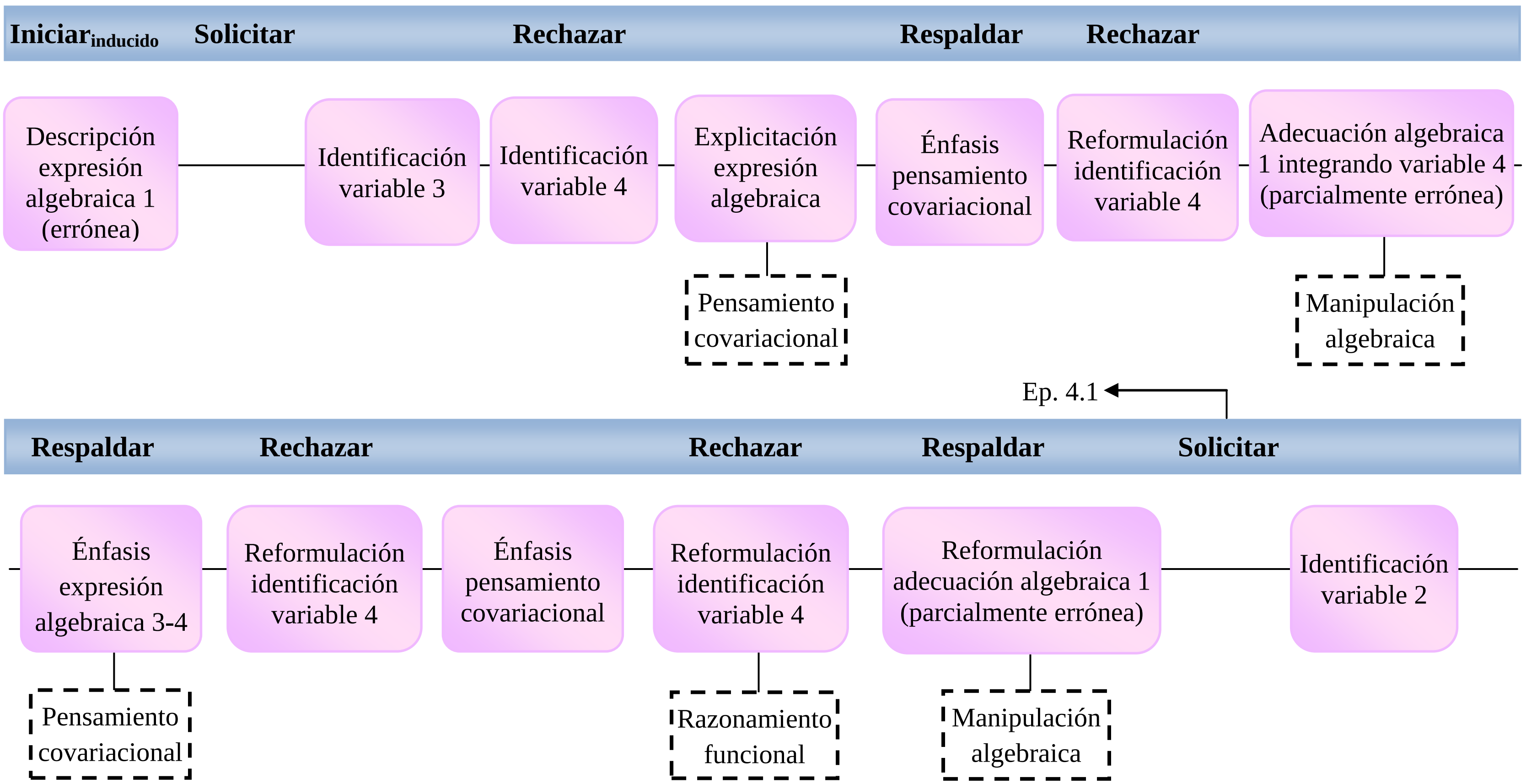


Figura 22. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 4.2

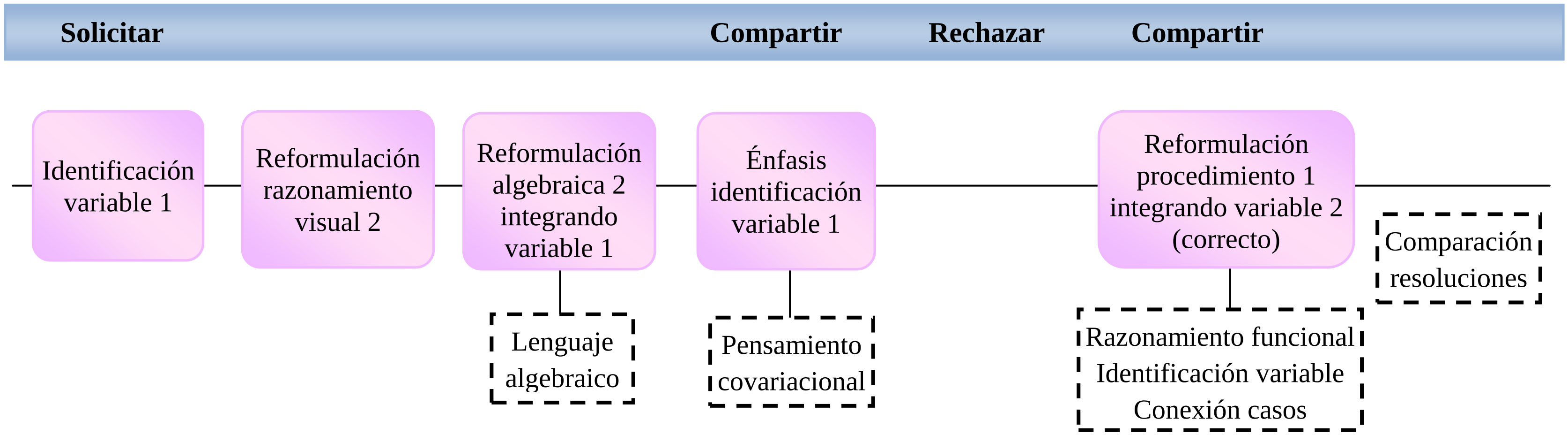


Figura 22. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 4.2

Episodio 4.3 y subepisodios

En lo que sigue, se expone en orden cronológico el análisis de los Subepisodios 4.3.1 y 4.3.2 del Episodio 4.3. Se incluye para cada subepisodio la tabla con la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva', donde se muestra información relevante de forma esquemática. Para finalizar se presenta el posterior análisis integrado del episodio.

Subepisodio 4.3.1

Este episodio representa el inicio de la discusión sobre la tercera cuestión del problema. Sara explica su resolución basada en una interpretación del enunciado [57]. Tras la refutación explícita de Óscar, Sara se reafirma en su interpretación mediante un *razonamiento visual* que implica la aplicación de transformaciones geométricas en la figura [58-59]. Entonces Óscar, con *lenguaje visual*, dice a Sara que su interpretación del problema no es adecuada ya que la figura no está compuesta por capas (*razonamiento visual*) [60]. Tanto Sara como el resto de alumnos validan lo explicado por Óscar [61-62]. La transcripción literal es la siguiente:

[328]	Profesora:	Vamos con el siguiente apartado, ¿hay más superficie blanca o gris?
[329]	Sara:	Blanca, porque el primer blanco es más grande que el gris que pones después.
[330]	Óscar:	Eso es en la primera, pero en la segunda…
[331]	Sara:	Es que es lo mismo, si tú pusieras el gris y el blanco en el mismo sentido, el blanco sería más grande. Entonces habría más superficie blanca.
[332]	Óscar:	No, es que tú no tienes que contar que por debajo también hay superficie blanca. Es decir ahora te queda esto de blanco y esto de gris [señala la segunda camiseta]. Entonces te queda igual. No vas poniendo pisos.
[333]	Alumnos:	[Asienten]
[334]	Sara:	¡Ah! Vale…pues lo hemos entendido mal.

Se define *Rechazar* como la negativa a aceptar y usar interpretaciones matemáticas defendidas por otros estudiantes. Óscar rechaza en dos ocasiones la aproximación a la tercera cuestión del problema basada en una interpretación del enunciado de Sara. Ante la primera refutación, Sara expone el razonamiento visual asociado a su interpretación del enunciado [58-59]. Óscar vuelve a refutar a Sara, exponiendo esta vez razones matemáticas para identificar el error [60]. Inferimos que *Rechazar* tiene un efecto positivo en la argumentación colectiva ya que contribuye a que se expliciten interpretaciones inicialmente ocultas.

La Tabla 30 ilustra la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]	Razonamiento visual	Del razonamiento visual 1 al razonamiento visual 1
Rechazar		
	Razonamiento visual	
Rechazar	Lenguaje visual Razonamiento visual	Del razonamiento visual 1 al razonamiento visual 2

Tabla 30. Identificador de AC del Subepisodio 4.3.1

Subepisodio 4.3.2

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior donde se acordó una interpretación del enunciado del problema. Gabriel, Irene y Sara afirman que en las figuras de las camisetas relativas a los años pares hay más superficie blanca que gris y en los años impares hay la misma superficie blanca que gris [63-66]. En la justificación de esta afirmación, proporcionan varias justificaciones basadas en *razonamientos visuales* con transformaciones geométricas de la figura relativa al año 2010 (*conexión visual casos*) que aluden a compensaciones entre áreas. Tras el cuestionamiento de la profesora sobre la validez de estos razonamientos en la figura de la camiseta del año 2012, Cristina se da cuenta de que en esa figura hay más superficie blanca que gris. La alumna argumenta su afirmación con *razonamientos visuales* basados en transformaciones geométricas para compensar áreas de la figura de 2012 (*conexión visual casos*) [68-70]. Óscar valida la afirmación de Cristina comparando las figuras de dos casos y Gabriel sintetiza a modo de conclusión lo expuesto [71, 74]. En ese momento, Óscar cuestiona la generalización del razonamiento [75]. Ruth reacciona validando el *razonamiento visual* mediante las propiedades dinámicas de la serie (*secuencia dinámica*) y sus implicaciones en la construcción geométrica de las figuras de las camisetas [76]. El subepisodio finaliza con Irene y Óscar, quienes piden comprobar los razonamientos con más de un caso particular (*razonamiento inductivo*), reafirmando la idea de continuidad de la serie [77-80]. La transcripción literal es la siguiente:

[335]	Gabriel:	Nosotros hemos puesto que en los pares hay la misma superficie blanca y gris y en los impares hay más blanca.
[336]	Irene:	[Asiente] En los años pares la superficie es la misma y en los impares hay más blanca.
[337]	Sara:	Sí, yo creo que en los pares hay la misma superficie blanca que gris. Porque si los de fuera blancos los metes dentro del gris te dará lo mismo [señala la segunda camiseta].
[338]	Gabriel:	Sí, si coges la figura esta por ejemplo, la de 2010, y haces triángulos de los grises y los pones encima de los blancos es lo mismo.
[339]	Profesora:	¿Y en el 2012?
[340]	Gabriel:	Los de fuera los metes aquí…
[341]	Cristina:	¡Nooo! Claro porque el cuadrado no está entero el de dentro. Encima del gris ya hay blanco, o sea hay menos gris y el blanco no es igual que el gris.
[342]	Óscar:	Pero luego dentro vuelve a haber gris.
[343]	Cristina:	Lo de dentro sí, pero lo de fuera no es igual [señala la cuarta camiseta]. A ver el último cuadrado, el pequeño y el blanco de alrededor son iguales, la superficie. Pero lo otro no, los que están fuera no.
[344]	Óscar:	Claro, el 2010 y el 2012 son iguales lo único que el cuadrado gris tiene agujeros blancos.
[345]	Cristina:	Por eso, hay más blanco
[346]	Óscar:	Sí, hay más blanco.
[347]	Gabriel:	Siempre hay más blanco que gris menos en el 2010.
[348]	Óscar:	¿Siempre?
[349]	Ruth:	Sí, porque si sigues el cuadrado gris que tenías al principio volverá a tener más blanco.

[350] Óscar: Claro, teníamos que haber probado con más casos.

[351] Irene: Sí, con pequeños y con más grandes.

[352] Óscar: Porque algunos dan problemas.

[353] Alumnos: [Asienten]

Iniciar se define como la introducción de una resolución en la discusión matemática. Gabriel es quien inicia la conversación de forma espontánea direccionando el contenido matemático [62]. Irene y Sara *respaldan* la resolución expuesta haciendo explícitos razonamientos visuales que apoyan lo dicho [63-64]. La intervención de la profesora es crucial para que se descubra el error en el razonamiento expuesto (*Indicar*) [66]. Junto con el *rechazo* de Óscar, se exponen razonamientos visuales que apoyan un razonamiento correcto respecto a la cuestión del problema y que es respaldado por varios estudiantes (*Respaldar*) [69-74]. También se observa la influencia de *Solicitar* cuando Óscar cuestiona la validez del razonamiento y se reformulan razonamiento visuales que refuerzan, esta vez, la idea de serie dinámica [75-76]. Se acaba con Óscar e Irene hablando del razonamiento inductivo, afirmando la necesidad de comprobar los razonamientos con más de un caso (*Compartir*) [77-79]. Esta reflexión supone un cambio cualitativo en la argumentación ya que el objeto central es la comprobación de un razonamiento como procedimiento no sólo en el caso particular de la resolución de este problema en concreto.

Mediante la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’, la Tabla 31 ilustra el subepisodio. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), junto a los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar		
Respaldar	Razonamiento visual Conexión visual casos	De la solución 3 al razonamiento visual 3
Indicar		Del razonamiento visual 3 al razonamiento visual 4
	Razonamiento visual	
Rechazar		Del razonamiento visual 4 al razonamiento visual 4
	Conexión visual casos	Del razonamiento visual 4 a la solución 4
Respaldar	Conexión visual casos Razonamiento visual	
Solicitar		De la solución 4 a la secuencia dinámica
	Secuencia dinámica	De la secuencia dinámica al razonamiento inductivo
Compartir	Razonamiento inductivo	

Tabla 31. Identificador de AC del Subepisodio 4.3.2

Análisis integrado del Episodio 4.3

El Episodio 4.3, con los Subepisodios 4.3.1 y 4.3.2, gira en torno a la discusión de la tercera cuestión del enunciado donde no se requiere lenguaje algebraico. Se pide una generalización que puede ser solucionada mediante razonamientos visuales que se apoyen exclusivamente en la construcción geométrica y en la continuidad de la serie. A lo largo de los dos subepisodios se discute sobre la interpretación del enunciado y sobre la validez de razonamientos visuales para distintos casos particulares.

La Figura 23 presenta el ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ aplicado al Episodio 4.3. *Rechazar*, junto a *Respaldar*, aparecen ligados a la resolución de conflictos sobre la interpretación visual del problema. La intervención de la profesora (*Indicar*) es crucial para que los alumnos modifiquen un razonamiento erróneo basado en la aplicación de transformaciones geométricas a la figura para compensar áreas. Así la argumentación colectiva avanza hacia la explicitación de razonamientos visuales y finaliza con una reflexión sobre la necesidad de comprobar un razonamiento o procedimiento con varios casos particulares.

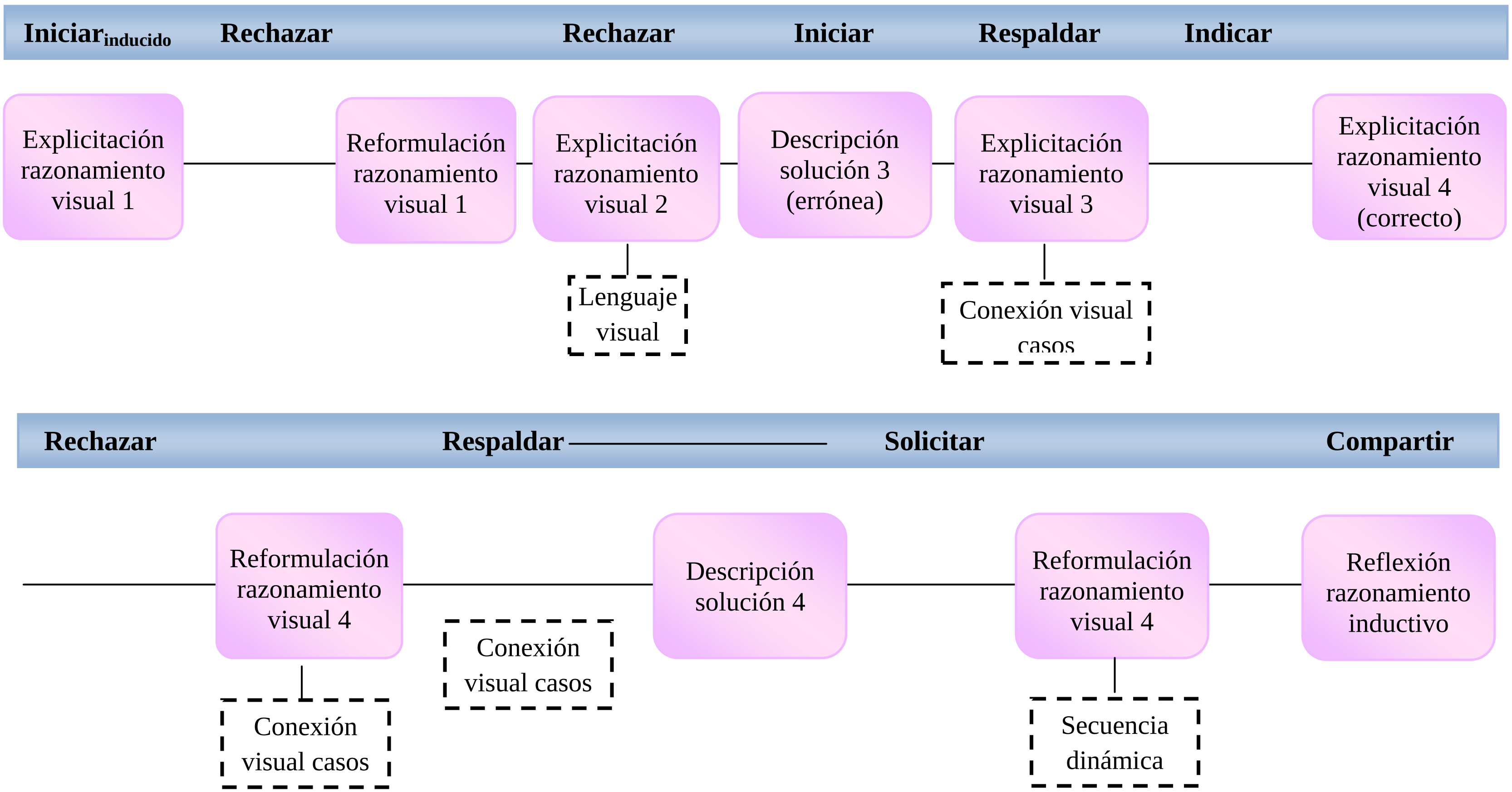


Figura 23. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 4.3

Episodio 4.4 y subepisodios

Se expone en orden cronológico el análisis narrativo de los Subepisodios 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4 del Episodio 4.4. Se incluye también el análisis integrado del episodio.

Subepisodio 4.4.1

El subepisodio se refiere a la cuarta cuestión del problema sobre cuántos triángulos blancos y grises tiene la enésima camiseta. Óscar discrimina camisetas de años impares y camisetas de años pares utilizando una regularidad ya expuesta en la discusión de la primera cuestión: hay un cuadrado más blanco que gris en las camisetas de años impares. Este alumno explica el procedimiento seguido para años impares sin mencionar razonamientos que lo sustenten [82]. Tras las dudas de Ruth, expresadas a instancias de la profesora, Óscar explicita un *razonamiento visual* para las camisetas impares [83-87]. Afirma que tener un cuadrado más blanco implica tener el mismo número de triángulos blancos que grises. Ruth comprueba esta afirmación con Sara contando los triángulos de cada color de la figura de 2011 (*conexión visual casos*) [88-92]. Tras la validación de Ruth, Óscar finaliza su explicación describiendo el procedimiento seguido todavía sin incluir razonamientos, por lo que Ruth vuelve a pedir aclaraciones [93-96]. Para dar validez a su patrón, Óscar lo aplica al caso del año 2011 (*conexión visual casos*) y afirma que se originó mediante un *razonamiento inductivo* observando las figuras de diferentes casos particulares [97-104]. La transcripción literal es la siguiente:

[354]	Profesora:	¿Qué habéis hecho vosotros?
[355]	Óscar:	Una fórmula para los pares y una para los impares. Como los cuadrados de años impares siempre tienen un cuadrado blanco más, tienen el mismo número de triángulos blancos que grises. Entonces la fórmula es el número de cuadrados multiplicados por dos menos dos y te da el número de cuadrados grises y el número de cuadrados blancos, que es el mismo. Y luego en los pares…
[356]	Profesora:	Espera, espera… ¿Lo tenemos hasta aquí?
[357]	Alumnos:	[Asienten]
[358]	Profesora:	Ruth, ¿nos lo explicas?
[359]	Ruth:	¡Es que yo no he entendido nada!

[360]	Óscar:	Cuando el año es impar hay un cuadrado blanco más. Por lo tanto, esto hace que haya el mismo número de triángulos grises que blancos
[361]	Ruth:	Si el año es impar…
[362]	Sara:	Uno, dos, tres, cuatro y uno, dos, tres, cuatro [cuenta en la tercera camiseta]. ¡Hay los mismos!
[363]	Ruth:	Pero no, porque dentro hay otro más blanco.
[364]	Sara:	Pero es un cuadrado.
[365]	Ruth:	¡Ah! Vale.
[366]	Óscar:	¿Sí?
[367]	Ruth:	Sí.
[368]	Óscar:	Entonces lo que hacemos es el número de cuadrados multiplicados por dos y a todo esto le restas dos.
[369]	Ruth:	¿Y por qué le restas dos?
[370]	Óscar:	Bueno, no sé exactamente la lógica pero observando los cuadrados y los diseños y todo, he visto que se cumple.
[371]	Ruth:	Pues, bueno…
[372]	Óscar:	Por ejemplo, 2011, tiene un cuadrado gris y dos cuadrados blancos, por lo tanto tiene tres cuadrados. Entonces multiplicamos el número de cuadrados por dos, tres por dos que da seis y le restas dos que da cuatro, que es el número de cuadrados blancos que son cuatro y el número de cuadrados grises que también son cuatro.
[373]	Irene:	Triángulos.
[374]	Óscar:	Sí, eso, triángulos.
[375]	Ruth:	Si lo has comprobado…
[376]	Óscar:	Con el 2011, trece y quince.
[377]	Cristina:	Vale.

Dudar Inducido se define como la manifestación de falta de comprensión respecto a un razonamiento expuesto, a instancias de una intervención de la profesora. En este subepisodio Ruth muestra su confusión respecto al razonamiento de Óscar [82-86]. Esta falta de entendimiento podría estar derivada de una explicación descriptiva, con pocas referencias a razonamientos que sustenten el procedimiento expuesto. En este sentido, *Dudar Inducido* genera acciones productivas orientadas a la argumentación colectiva ya que, tras la intervención de Sara, se hacen explícitos razonamientos no facilitados inicialmente [87]. Se observa la influencia de *Compartir* cuando Ruth y

Sara validan juntas las afirmaciones de Óscar [88-92]. Aunque *Compartir* va ligado a situaciones en la que un estudiante refuerza la explicación de su compañero en el trabajo en pareja, en el video del subepisodio se observa cómo las acciones de Sara están encaminadas a ayudar a Ruth a visualizar y validar las afirmaciones de Óscar. *Inquirir* adquiere relevancia en la progresión de argumentación colectiva. Ruth, con cuestionamientos y validaciones, examina junto a Óscar el detalle del razonamiento. Se amplía y reformula la sustentación del procedimiento seguido [93-104].

La Tabla 32 ilustra la aplicación del ‘Identificador de argumentación colectiva’ al subepisodio. Se muestran los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos detectados en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del procedimiento 1 al razonamiento visual 1 (parcial)
Dudar [I]		
	Razonamiento visual	Del razonamiento visual 1 (parcial) al razonamiento visual 1 (parcial)
Compartir	Conexión visual casos	Del razonamiento visual 1 (parcial) al procedimiento 1
Inquirir		
	Razonamiento inductivo Conexión visual casos Razonamiento inductivo	Del procedimiento 1 al razonamiento inductivo

Tabla 32. Identificador de AC del Subepisodio 4.4.1

Subepisodio 4.4.2

Este subepisodio es continuación inmediata del subepisodio anterior. Óscar acepta la demanda de la profesora y explica su aproximación a la cuarta cuestión del problema sobre las camisetas de años pares [105-106]. Como en el subepisodio anterior, la explicación de Óscar se centra en el procedimiento utilizado sin apenas añadir razonamientos. Esto parece obstaculizar la comprensión de Maria, quien expresa confusión a instancias de la profesora [107-108]. Óscar manifiesta la falta de razonamiento visual que sustente la totalidad de su procedimiento pero aún así le da validez con un *razonamiento inductivo* [109]. Vuelve a hacer hincapié en el *razonamiento visual* que fundamenta la discriminación entre camisetas de años pares e impares. Varios alumnos reformulan y amplían el razonamiento visual [110-113]. Cristina liga este razonamiento al caso del año 2012 con la representación gráfica (*conexión visual casos*) [112]. La transcripción literal es la siguiente:

[378]	Profesora:	¿Y los pares?
[379]	Óscar:	Y en los pares, como el número de cuadrados es igual tienen cuatro triángulos más blancos. Por tanto la fórmula es número de cuadrados multiplicado por dos y esto te da el número de triángulos blancos. Entonces he comprobado que hay cuatro triángulos blancos más que grises. Entonces cuando sabes los blancos para saber los grises y le restas cuatro.
[380]	Profesora:	¿Maria?
[381]	Maria:	A ver, es que yo no lo he entendido muy bien…
[382]	Óscar:	Ni yo tampoco, pero numéricamente se cumple. Lo único que va con el dibujo es que en los pares hay cuatro triángulos más blancos que grises y en los impares hay el mismo número de triángulos blancos que grises.
[383]	Gabriel:	Claro, porque el de dentro no genera triángulos.
[384]	Óscar:	Si los hiciera entonces tendríamos los mismos, pero es un cuadrado sin triángulos.
[385]	Cristina:	Claro, entonces este gris [señala la cuarta camiseta] no genera triángulos y por eso hay cuatro más blancos.
[386]	Ruth:	¡Ahora! Claro, este no tiene triángulos…

Se observa la influencia de *Dudar Inducido* en la manifestación de razonamientos omitidos inicialmente. Maria, ayudada por la demanda de la profesora, muestra su confusión y así influye en la reformulación posterior de Óscar, quien incluye un razonamiento visual e inductivo [107-108]. También se aprecia la influencia de *Respaldar* en la progresión de argumentación colectiva cuando varios estudiantes refuerzan el razonamiento visual ampliando la información dada [110-113]. Por último, la demanda de la profesora de una resolución, influye en la configuración de la conversación, direccionando el contenido matemático (*Iniciar Inducido*) [105-106].

La Tabla 33 muestra la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio, con los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

<table>
<tr><th>CI</th><th>CCM</th><th>MAC</th></tr>
<tr><td>Iniciar [I]</td><td></td><td rowspan="2">Del procedimiento 2 al razonamiento inductivo y visual 2 (parcial)</td></tr>
<tr><td>Dudar [I]</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Razonamiento inductivo
Razonamiento visual</td><td rowspan="2">Del razonamiento inductivo y visual 2 al razonamiento visual 2 (parcial)</td></tr>
<tr><td>Respaldar</td><td>Razonamiento visual
Conexión visual casos</td></tr>
</table>

Tabla 33. Identificador de AC del Subepisodio 4.4.2

Subepisodio 4.4.3

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior. Jose explica la aproximación al problema que ha desarrollado con Gabriel en pareja, usando el símbolo *n* para distinguir la posición de la camiseta y el número de cuadrados de cada camiseta [114]. Por primera vez en la sesión, se discrimina *n* par e impar, a diferencia de la distinción entre año par y año impar. Con lenguaje natural, se expone la expresión $\frac{4(n-1)}{2}$ en el caso de *n* impar para llegar a la cantidad desconocida de triángulos blancos y grises. A pesar de la confusión entre *n* par e impar, Jose va construyendo el patrón, conectando procedimientos y razonamientos. Gabriel señala la problemática de la adecuación del patrón a camisetas pares o impares [115]. Los estudiantes, sin embargo, parecen no tener claro el uso de *n* o *n-1*, probablemente influenciados por las discusiones de los Subepisodios 4.1.2 y 4.2.2 sobre ordinal de la camiseta y su relación con el año. Gabriel, con la representación gráfica de la tercera camiseta (*conexión visual casos*), concluye que el patrón de Jose sirve para *n* impar (*identificación variable*) [117]. Recurre a un caso particular, pero toma las características generales del conjunto de camisetas impares. Los dos estudiantes consiguen dar sentido al lenguaje algebraico usando la convención simbólica para la representación genérica de los números naturales [118]. A demanda de la profesora, Maria expresa su falta de comprensión del patrón [119-122]. Jose reacciona ejemplificando parte del *razonamiento visual* asociado a la generalización expuesta con el *caso n=3* mediante representación gráfica (*conexión visual casos*). Este alumno hace hincapié en la transformación de la figura a lo largo de la serie (*secuencia dinámica*) [123]. Siguen turnos de Maria y Jose, quienes explican el *razonamiento visual* que sustenta el procedimiento de forma progresiva, volviendo al caso *n=3* (*conexión visual casos*) [124-129]. La transcripción literal es la siguiente:

[387]	Jose:	Nosotros hemos hecho, suponiendo que *n* es el número de camiseta que nos dan, sabemos que *n*, el número de camiseta es igual que el número de cuadrados que hay dentro. Porque en la primera camiseta hay un cuadrado, en la segunda hay dos, en la tercera hay tres… Entonces el número de camiseta menos uno, porque como ya se ha dicho hay un cuadrado que no genera triángulos, es el número de cuadrados que generan triángulos. Entonces lo multiplicamos por cuatro, porque cada cuadrado hace cuatro triángulos. Entonces obtienes el número total de triángulos. Si la *n* es par, divides el número total entre dos y obtienes el número de triángulos cualesquiera porque hay el mismo número de triángulos blancos que grises. Porque cuando la *n* es par hay el mismo número de cuadrados blancos que grises, como le has restado uno, te queda el mismo número de triángulos blancos que grises.
[388]	Gabriel:	No, esto es cuando la *n* es impar, no...sí, sí cuando *n-1* es impar.
[389]	Jose:	Sí, es *n-1* que es impar…
[390]	Gabriel:	Es decir, cuando *n-1* es impar. Nos hemos equivocado [señala la tercera camiseta], cuando *n* es impar es cuando hay un cuadrado más blanco y es lo que hace que haya el mismo número de triángulos blancos que grises.
[391]	Jose:	Sí, claro. Cuando la *n* es impar divides entre dos y te da el número de triángulos de los dos colores.
[392]	Profesora:	Maria, ¿lo hemos entendido?
[393]	Maria:	Sí.
[394]	Profesora:	¿Nos lo explicas?
[395]	Maria:	¡Es que no me he enterado de nada!
[396]	Jose:	A ver, si a ti te dicen que hay tres camisetas, una, dos y tres [señala el dibujo]… Esta que es la tercera, al ser la tercera sabes que tienes tres cuadrados, porque cada año le pones uno más.
[397]	Maria:	Entonces tendrá los mismos triángulos blancos que grises…

[398]	Jose:	Eso da igual, todavía no lo hemos tocado. O sea, tienes tres cuadrados dentro pero sabes que hay uno que no hace triángulos, el del medio no hace triángulos [señala la tercera camiseta]. Entonces le restas uno.
[399]	Maria:	Pero ¿por qué le restas uno?
[400]	Jose:	Porque este [señala la tercera camiseta] no hace triángulos. Entonces te quedan estos dos cuadrados que sí hacen triángulos y los multiplicas por cuatro, porque cada cuadrado hace cuatro triángulos.
[401]	Maria:	Vale, sí.
[402]	Jose:	Entonces tienes el número total de triángulos, o sea tres cuadrados menos uno, dos, por cuatro ocho, que es el número total de triángulos. Pero ahora no sabes cuántos hay grises y cuántos blancos, solo sabes que el total es ocho. Pero como la *n* es impar, sabes que hay el mismo número de triángulos blancos que grises. Entonces divides entre dos y te da un número, que es el número de triángulos blancos y el de grises.

Compartir representa situaciones de apoyo entre miembros de una pareja en la explicación de una resolución o razonamiento matemático. Gabriel y Jose comparten la responsabilidad de dotar de sentido el lenguaje algebraico ligado a un patrón inicialmente expuesto por Jose (*Iniciar*) [114-117]. Se observa la importancia de *Dudar Inducido* en la evolución de la actividad. Maria, tras la demanda de la profesora, muestra confusión respecto al razonamiento expuesto [118-122]. La expresión de falta de comprensión influye en la reformulación de la aproximación al problema a cargo de Jose. A partir de aquí, Maria y Jose generan una conversación donde se explora, revisa y amplía el contenido matemático mediante un proceso de ayuda mutua con objetivo de comprender [124-129]. Se ve la influencia positiva de *Inquirir* en el logro de argumentación colectiva.

La Tabla 34 muestra la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio, con los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar	Razonamiento visual	Del razonamiento visual 3 a la variable
Compartir	Identificación variable Conexión visual casos	
Dudar [I]		De la variable al razonamiento visual 3 (parcial)
	Razonamiento visual Conexión visual casos Secuencia dinámica	
Inquirir		Del razonamiento visual 3 al razonamiento visual 2
	Razonamiento visual Conexión visual casos Conexión casos	Del razonamiento visual 2 al razonamiento visual 3 (integrando 2)

Tabla 34. Identificador de AC del Subepisodio 4.4.3

Subepisodio 4.4.4

Este subepisodio es continuación inmediata del anterior donde se ha expuesto una generalización relativa al número de triángulos de las camisetas impares (*n* impar). Se inicia cuando la profesora pregunta sobre la aproximación relativa a las camisetas pares [131]. Sara responde explicando una regularidad para figuras impares (*n* impar) que es refutada por Maria, Irene y Gabriel [132-134], quienes dan un *razonamiento visual* adecuado para *n* par. Gabriel presenta, de forma no completa y con cierta confusión entre triángulos blancos y grises, un procedimiento ligado a las expresiones algebraicas $\frac{4(n-1)-4}{2}$ para los triángulos grises y $\frac{4(n-1)-4}{2}+4$ para los triángulos blancos [134-137]. Ante la demanda de aclaración de Maria, Jose *compara* las *resoluciones* relativas a camisetas impares y pares, remarcando el *razonamiento visual* común y el diferenciado que conlleva la discriminación de procedimientos según pares e impares [139-141]. Gabriel continúa la explicación de su compañero exponiendo el procedimiento para camisetas pares que es completado por Irene [142-143]. Maria expresa su falta de comprensión del patrón y es Ruth quien reformula lo expuesto por Gabriel y Jose utilizando la representación gráfica de un caso particular (*conexión visual casos*) [147]. Finalmente Maria *compara* las *resoluciones* de las camisetas pares e impares, explicando diferencias entre los procedimientos y razonamientos asociados [148]. La transcripción literal es la siguiente:

[403]	Profesora:	Y cuando *n* es par, ¿qué pasa?
[404]	Sara:	Tendrá el mismo número de triángulos blancos que de grises.
[405]	Maria:	No, al revés, hay cuatro más blancos.
[406]	Irene:	Hay cuatro más blancos porque tienes el mismo número de cuadrado blancos que grises, pero el gris de dentro no hace triángulos.
[407]	Gabriel:	Hay cuatro más blancos, por eso cuando es par al total le restamos estos cuatro y entonces lo divides entre dos y tienes estos. Y a los grises… ¿era a los grises o a los blancos? No, a los blancos.
[408]	Jose:	Te has colado.
[409]	Gabriel:	Vuelvo a empezar. Los pares siempre tendrán cuatro triángulos más.
[410]	Irene:	De blancos.
[411]	Gabriel:	Blancos, sí. Entonces en el número total de triángulos que los hemos conseguido multiplicando por cuatro como antes, le restamos estos cuatro.
[412]	Maria:	Pero al número total ¿de qué? ¿De cuadrados?
[413]	Irene:	De triángulos.
[414]	Jose:	O sea, al principio del todo lo que hemos hecho es multiplicar el número de cuadrados menos uno, que es el que no hace triángulos, por cuatro y esto te da el número total de triángulos. Entonces una vez tienes esto es cuando miras si es par o impar. Cuando es impar hacemos lo ya he explicado y cuando es par, Gabriel…
[415]	Gabriel:	Restas los cuatro porque tiene cuatro blancos más. Los restas y entonces divides entre dos y te da los grises y los blancos.
[416]	Irene:	Y le sumas cuatro a los blancos.
[417]	Maria:	Vale.
[418]	Profesora:	¿Lo explicas, Maria?
[419]	Maria:	Yo los impares sí lo he entendido, pero los pares no.
[420]	Ruth:	A ver, en los impares haces lo del principio para saber los triángulos que tienes, o sea cuentas los cuadrados y le restas uno que no tiene triángulos y lo multiplicas por cuatro. En los pares tienes cuatro triángulos blancos más [señala el dibujo del caso

		2012]. Entonces al total de triángulos le restas cuatro y estos cuatro sabes que son blancos y los dejas aparte, y divides entre dos para saber cuántos blancos y cuántos grises tienes y a los blancos le sumas los cuatro de antes.
[421]	Maria:	¡Ah, vale! Y en los impares dividimos entre dos y ya está porque tenemos los mismos.
[422]	Alumnos	[Asienten]

Gabriel y Jose *comparten* la responsabilidad de explicar una aproximación desarrollada en el trabajo en pareja. Jose sigue de forma activa la explicación de Gabriel, señalando cierta confusión en su explicación y reformulando parte del razonamiento que sustenta el procedimiento inicialmente expuesto tras la demanda de clarificación de Maria (*Solicitar*) [139-142]. Asimismo, la explicación inicial de Gabriel está influenciada por el *rechazo* de varios estudiantes a una regularidad expuesta tras la demanda de la profesora (*Iniciar Inducido*) [130-134]. Se observa también la influencia de *Respaldar*. En diferentes ocasiones, Irene puntualiza a Gabriel [134] aportando información que complementa y clarifica las intervenciones de este estudiante [137, 140, 143]. El subepisodio finaliza con la reformulación de Ruth de los razonamientos expuestos tras la manifestación de falta de comprensión facilitada con la demanda de la profesora a Maria (*Dudar Inducido)* [144-146].

La Tabla 35 ilustra la aplicación del 'Identificador de argumentación colectiva' al subepisodio. Se anotan los códigos de interacción (CI) y de contenido matemático (CCM), así como los movimientos detectados en la argumentación colectiva (MAC).

CI	CCM	MAC
Iniciar [I]		Del razonamiento visual 2 (erróneo) al razonamiento visual 2 (correcto)
Rechazar		Del procedimiento 2 (parcial) al procedimiento 4
Iniciar		
Respaldar		Del procedimiento 4 al razonamiento visual 3 integrando 2 (parcial)
Solicitar		
Compartir	Comparar resoluciones Razonamiento visual	Del razonamiento visual 3 integrando 2 (parcial) al procedimiento 4
Respaldar		Del procedimiento 4 al razonamiento visual 4 integrando 2 y 3
Dudar [I]		
	Conexión visual casos Razonamiento visual	Del razonamiento visual 4 integrando 2 y 3 a la comparación de resoluciones
	Comparar resoluciones	

Tabla 35. Identificador de AC del Subepisodio 4.4.4

Análisis integrado del Episodio 4.4

El Episodio 4.4, conformado por los Subepisodios 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4, gira en torno a la discusión de la cuarta cuestión del problema sobre generalización matemática o algebraica. A lo largo de los cuatro subepisodios se exponen y valoran dos aproximaciones al problema que suponen cada una dos generalizaciones diferentes según la posición de la camiseta sea par o impar. La primera aproximación, tanto para números pares como para impares, se origina numéricamente mediante deducción, aunque se apoya parcialmente en un razonamiento visual. Por el contrario, la segunda aproximación se basa totalmente en razonamientos visuales.

La Figura 24 presenta el ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ aplicado al Episodio 4.4. Se observan dos reacciones de estudiantes que no se siguen de forma inmediata de los contenidos matemáticos a los que aluden. El desarrollo de argumentación colectiva está en síntesis marcado por la reformulación de contenidos varios. En muchas reformulaciones se integran distintos razonamientos expuestos durante la discusión en grupo por distintos estudiantes. Aunque no se pueda rastrear aprendizaje, si se aprecian avances cualitativos en la argumentación colectiva.

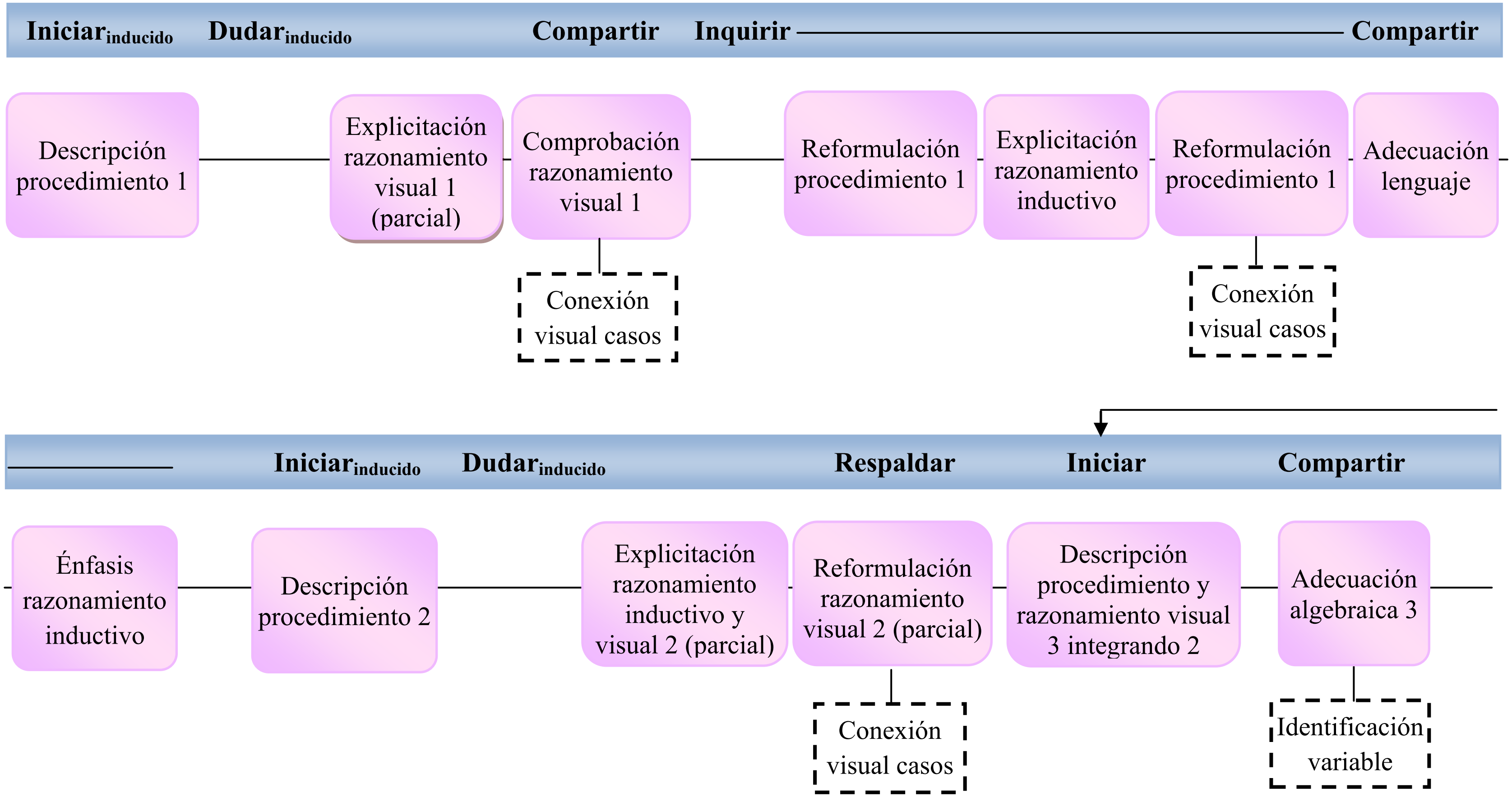


Figura 24. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 4.4

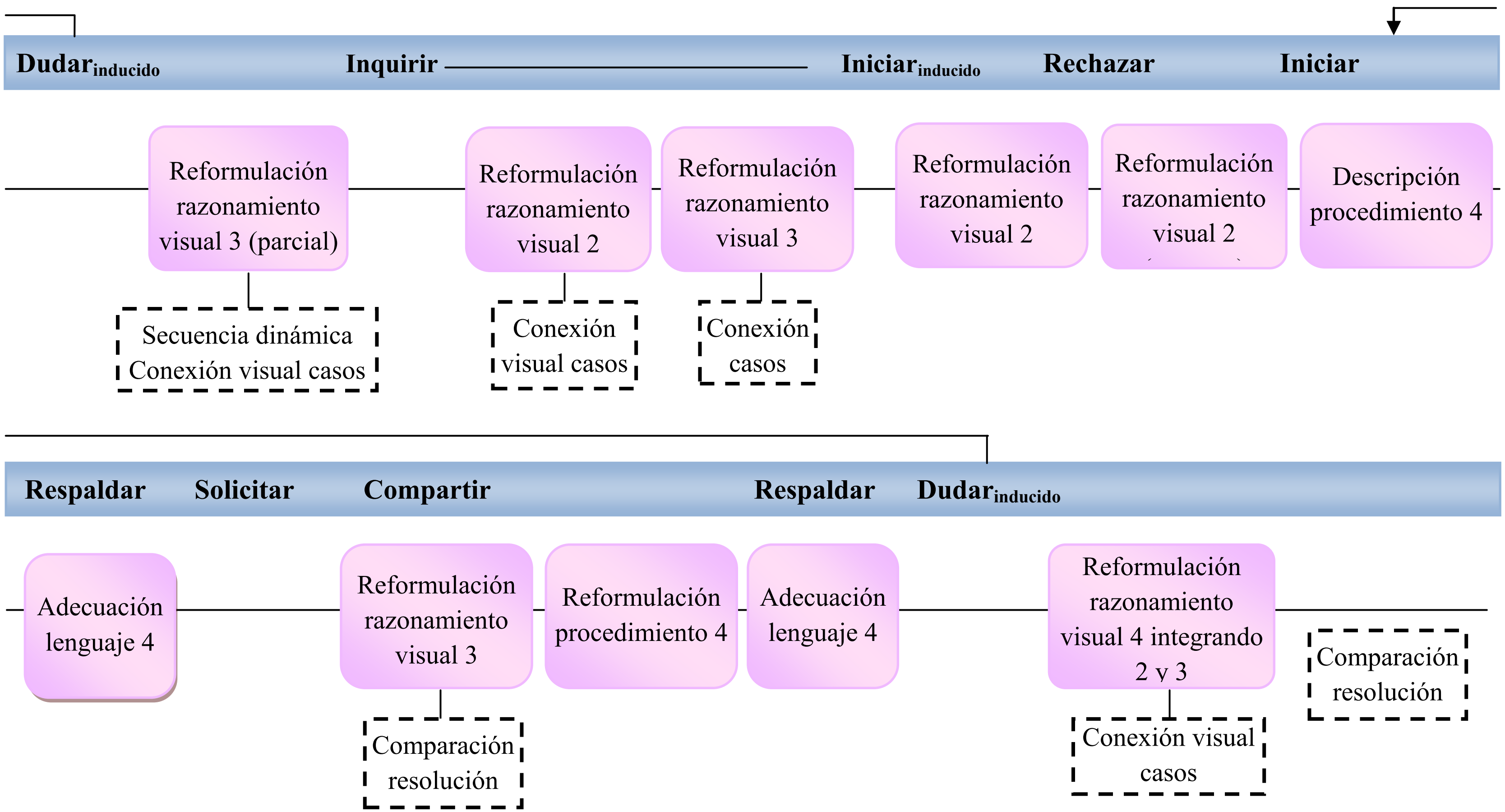


Figura 24. Descriptor de dinámica de AC del Episodio 4.4

5. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados relativos al logro de los tres objetivos de esta investigación. Primero, se introducen los resultados sobre los tipos de interacción identificados en situaciones de discusión en grupo. Seguidamente, se muestran patrones de interacción que se han probado susceptibles de promover la construcción de argumentación colectiva y que emergieron de la búsqueda de relaciones entre tipos de interacción. Por último, se presentan los resultados relativos a la composición de patrones básicos que surgieron de examinar la complejidad de la interacción en la construcción de argumentación colectiva.

En general, se sigue un método de identificación de regularidades que va del análisis de estructuras mínimas de interacción al análisis de estructuras más complejas que aúnan relaciones entre estructuras mínimas. De este modo se ponen de relieve ambos tipos de estructura y, además, se indica que, en combinación, una estructura mínima puede ver modificada sustancialmente su función en el desarrollo de la argumentación colectiva orientada a la resolución de tareas matemáticas.

Tabla de contenidos

5.1 Tipos de interacción en discusión en grupo

El primer objetivo del presente estudio es identificar tipos de interacción en situaciones de discusión en grupo en el aula de matemáticas de secundaria. Para su consecución se creó un sistema de códigos de interacción que han informado sobre reacciones identificables en los alumnos a acciones previas de otros participantes. Estos códigos emergen del análisis comparativo de los subepisodios presentados en el Capítulo 4. Para indicar la presencia de cada código en el conjunto total de datos, en la Tabla 36 se muestran las frecuencias absolutas de cada tipo de interacción ordenadas cuantitativamente de mayor a menor (considerando en la ordenación, la frecuencia conjunta de un código y la del código inducido respectivo).

Código de interacción	Frecuencia absoluta
Compartir	26
Iniciar	11
Iniciar inducido	12
Rechazar	21
Rechazar inducido	1
Respaldar	18
Solicitar	17
Solicitar inducido	1
Dudar	1
Dudar inducido	7
Inquirir	5
Indicar	5
Aportar	3
	127

Tabla 36. Frecuencias absolutas de los códigos de interacción

En lo que sigue, se describen los tipos de interacción que emergieron del análisis comparativo de datos, así como las situaciones en las que estos tipos aparecen involucrados en el transcurso de las discusiones en grupo.

Compartir

Compartir representa situaciones en las que un estudiante respalda una explicación matemática dada por su compañero durante el trabajo en pareja. Este código apunta a una responsabilidad basada en los esfuerzos conjuntos durante el trabajo en pareja. Por lo tanto es un código influenciado por el diseño de la intervención didáctica del presente estudio, que sitúa la dinámica de pareja con anterioridad a la discusión en grupo. A lo largo de los diferentes subepisodios se aprecia cómo se presta una mayor atención a la idoneidad de las explicaciones del compañero durante el trabajo en pareja en comparación con las de cualquier otro estudiante. En este sentido, se observa cómo la estructura de pareja se mantiene en el grupo y cómo los miembros de la pareja comparten la responsabilidad de comunicar o construir una narrativa en torno a un razonamiento matemático generado por ellos aun cuando uno haya sido más artífice que el otro.

Este tipo de interacción tiene una doble influencia en la discusión en grupo. Por un lado, la estrecha interacción entre los dos miembros de la pareja se sigue consolidando en el grupo. Al respecto se observan conversaciones entre miembros de una pareja donde se puntualizan o corrigen cuestiones relativas a razonamientos visuales o al uso del lenguaje algebraico, o bien se reflexiona de forma conjunta sobre procedimientos desarrollados o problemáticas experimentadas durante el trabajo previo al grupo. Aunque estas conversaciones tienen un carácter privado y están claramente direccionadas a un interlocutor específico, se producen de forma pública constituyendo así una aportación a todo el grupo. Por otro lado, los miembros de la pareja se comportan como un equipo donde se comparte la responsabilidad de comunicar una resolución y atender a los posibles cuestionamientos del resto de participantes. Esto tiene el efecto de aumentar la riqueza en la fundamentación de una narrativa teniendo, a su vez, un efecto positivo en la evolución de la argumentación colectiva.

Iniciar

Iniciar representa situaciones en las que se introduce una aproximación al problema. Este tipo de interacción influye en el curso de la conversación, dirigiendo el contenido de la discusión hacia un discurso matemático en torno a una narrativa concreta. El estudiante que interactúa de esta forma determina a priori la definición de la estructura de la conversación dirigiéndose a otros estudiantes del grupo. De 23 situaciones codificadas como *Iniciar*, 12 representan una exposición inducida por la profesora (ver Tabla 1). Asociamos este hecho en parte a la distribución tradicional de la autoridad en el aula, donde los alumnos tienen permiso para hablar si la profesora lo concede. A pesar de esto, 11 intervenciones codificadas como *Iniciar* se produjeron de forma espontánea a cargo de algún alumno. Se infiere que la dinámica de aula propuesta, así como la normativa que la reguló, facilitó ciertas formas de comunicación donde los estudiantes tuvieron el espacio suficiente para ejercer su agencia. Así mismo la agencia de ciertos estudiantes reforzó la dinámica de trabajo en el aula y la consolidación de normas de autonomía en la actividad matemática.

Este tipo de interacción supone el comienzo de una narrativa en torno al desarrollo de una resolución o aproximación al problema. Por otra parte, esta narrativa, principalmente liderada por uno de los participantes, está sujeta a la aprobación o rechazo mediante discursos específicos por parte de otros participantes en la discusión. Si observamos el contenido matemático de las intervenciones, obtenemos información relativa a cómo los alumnos describen inicialmente los objetos y procesos seguidos para la resolución del problema. Aunque una de las normas establecidas explícitamente por la profesora fue ‘explicar y justificar las soluciones derivadas del trabajo en pareja’, se aprecia una falta de fundamentación en las explicaciones iniciales, siendo mayoritariamente descriptivas. Se documenta, por tanto, una cierta resistencia de los estudiantes a incluir justificaciones o argumentaciones en sus explicaciones iniciales.

Rechazar

Rechazar representa situaciones en las que no se aceptan ciertas interpretaciones matemáticas expuestas respecto a la resolución de la tarea. De las 22 ocasiones en las que aparece este código en nuestros datos, solo en una ocasión está influenciado por la intervención de la profesora (ver el tipo inducido en la Tabla 36). Se infiere de este hecho, que la norma 'mostrar acuerdo o desacuerdo con lo matemáticamente explicado', establecida explícitamente en las sesiones de clase, fue aceptada y suscrita por los estudiantes a lo largo de todas las sesiones.

Este tipo de interacción va asociado a la confrontación de narrativas. Esta confrontación, en general, puede significar distintas situaciones, pero aquí solo se consideran las que efectivamente se producen a partir de los datos de la investigación. Si las narrativas de dos participantes o más son excluyentes desde la perspectiva del contenido matemático, *Rechazar* implica la existencia de un razonamiento matemáticamente incorrecto (con errores de procedimiento, de interpretación de conceptos…) que o bien es señalado o bien es defendido por el estudiante que realiza la acción. En este sentido, *Rechazar* puede conllevar la explicitación de fundamentaciones matemáticamente erróneas tal como se muestra en diferentes ocasiones a lo largo del análisis de los subepisodios. Por otro lado, si las narrativas no son excluyentes desde la perspectiva del contenido matemático, *Rechazar* aparece vinculado a la existencia de narrativas aparentemente contradictorias que se originan por la presencia de diferentes discursos matemáticos que difieren en el uso de ciertas palabras, procedimientos o fundamentaciones. En cualquier caso, *Rechazar* implica, por un lado, la existencia y descubrimiento de un conflicto de significados en el grupo y la oportunidad de resolverlo; por el otro, implica la explicitación y reformulación de fundamentaciones que ofrezcan validez a la narrativa defendida. De acuerdo con esto, *Rechazar* puede generar –y en realidad acaba generando– acciones matemáticamente productivas que contribuyen a la evolución de la argumentación colectiva y a la resolución de la tarea.

Respaldar

Respaldar representa situaciones en las que se apoya un razonamiento matemático en detrimento de otro. Este código aparece en un total de 18 ocasiones en nuestros datos. Aunque este código no siempre aparece junto a *Rechazar*, hace referencia a situaciones en las que existe cierta confrontación entre dos resoluciones o razonamientos. Si comparamos las frecuencias de ambos códigos (22 en el tipo *Rechazar*), se infiere una alta implicación de diversos estudiantes en las discusiones matemáticas. En este sentido, se observa la suscripción por parte de los estudiantes a dos normas establecidas explícitamente por la profesora: 'indicar acuerdo (cuando lo haya) respecto a lo matemáticamente explicado' y 'desencallar situaciones en las que exista un conflicto entre significados'.

En general, este código representa un conjunto de intervenciones en las que uno o varios estudiantes muestran acuerdo con una narrativa expuesta en contraposición a otra; hay por tanto al menos un alumno que asume el papel de ofrecer un respaldo a la cadena argumentativa que se está construyendo. Este tipo de interacción muestra el posicionamiento, desde el punto de vista del contenido matemático, de los estudiantes involucrados en la discusión sobre dos narrativas. Más allá de mostrar acuerdo con un razonamiento expuesto, a menudo este apoyo va acompañado de una ampliación de la fundamentación de la narrativa que está siendo respaldada. Así, *Respaldar* implica acciones matemáticamente productivas desde el punto de vista de la contribución a la argumentación colectiva, en tanto que se verbalizan o enfatizan razonamientos para lograr fundamentar una narrativa.

Solicitar

Solicitar representa situaciones en las que se piden clarificaciones relativas a un razonamiento matemático expuesto. Este código aparece 21 veces en nuestros datos y sólo en una ocasión es inducido por la profesora (ver Tabla 36). Este hecho informa acerca del rechazo, o la poca disposición, de los alumnos a mantener sus dudas sobre un cierto contenido matemático y, de ahí, su alta involucración en la discusión matemática que se está produciendo. En este sentido, los estudiantes adoptan la norma explícitamente establecida 'escuchar y dar sentido a las explicaciones de los compañeros, preguntando las dudas al respecto' en la práctica matemática habitual. Como en la consideración de las normas de clase para los tipos anteriores, esta norma ha sido introducida de modo explícito por la profesora.

El tipo de interacción *Solicitar* aparece asociado a dos situaciones diferenciadas en la puesta en común. En ocasiones es un tipo que hace referencia a aclaraciones demandadas por un estudiante en relación a un razonamiento expuesto por un compañero. Para estos casos se observa o bien la falta de comprensión parcial de un contenido matemático relevante para la resolución de la tarea; o bien, la necesidad de que se repita dicho razonamiento para reafirmar su interpretación. En ambos casos es un tipo de interacción que conlleva la explicitación o reformulación, parcial o total, de fundamentaciones asociadas a narrativas expuestas. En otras ocasiones, las clarificaciones solicitadas aluden a un razonamiento matemático introducido por el estudiante que las pide. Aquí, *Solicitar* representa situaciones en las que un estudiante busca ratificar su comprensión o interpretación de cuestiones matemáticas. El alumno no sólo busca apoyos (fundamentación matemática) que den validez a su razonamiento, sino que también busca la validación pública de su narrativa.

Dudar

Dudar representa situaciones en las que se expresa falta de comprensión de un razonamiento matemático expuesto. Tal como se puede observar en la Tabla 36, este código aparece en los datos del estudio tras la demanda explícita de la profesora, excepto en una única ocasión. Esto podría pensarse como una contradicción respecto a *Solicitar*, que aparece mayormente de forma espontánea a cargo de alumnos. Sin embargo, no hay contradicción puesto que existe una diferencia cualitativa entre ambos códigos. La petición de clarificaciones implica que se ha seguido y comprendido parcialmente lo expuesto. En cambio, *Dudar* expresa una falta de comprensión más general a cerca de las narrativas que se están barajando en la discusión. La dificultad por comprender puede deberse a una explicación matemáticamente pobre o ambigua, a una falta puntual de atención o bien a la complejidad de la discusión matemática. Independientemente de cuáles sean las posibles razones, encontramos relevante la necesidad de que intervenga la profesora para que se logre manifestar confusión respecto a una aproximación a la tarea matemática. En la mayoría de estas situaciones, la confusión no es reconocida por el estudiante que, a priori, afirma públicamente comprender el razonamiento en discusión. Tras la demanda explicita de reformulación es cuando el estudiante manifiesta su falta de comprensión respecto a lo dicho. La naturaleza inducida de *Dudar* en 7 de las 8 ocasiones, apunta a la dificultad de seguir la norma establecida explícitamente ‘manifestar dificultades en la comprensión de un razonamiento expuesto’. En este sentido, cabe suponer que, en ciertos momentos, la falta de comprensión de algunos estudiantes habrá pasado desapercibida, con la correspondiente pérdida de oportunidades de aprendizaje matemático. En cualquier caso, las situaciones codificadas con *Dudar* y *Dudar Inducido* conllevan acciones matemáticamente productivas en términos de argumentación colectiva ya que promueven la explicitación de información inicialmente suprimida en la fundamentación o exposición de una narrativa.

Inquirir

Inquirir representa situaciones en las que se examina un razonamiento matemático de forma progresiva mediante el recurso de cuestionamientos, parafraseos, validaciones, refutaciones u otros giros del discurso. Este código hace referencia a un conjunto de intervenciones claramente direccionadas a la participación de un estudiante, que adopta en esta interacción el papel local de autoridad matemática. Como se observa en la Tabla 36 y al igual que con el tipo anterior, este no es muy frecuente en nuestros datos, apareciendo en cinco ocasiones. Esto confirma el carácter colectivo dominante de las discusiones, en las que en general se involucran de forma activa varios estudiantes.

Este código indica el tipo de interacción que se crea entre dos estudiantes del grupo con el objetivo de examinar punto a punto una narrativa expuesta. Por un lado, el estudiante que lidera la acción toma la responsabilidad de su propia comprensión y aprendizaje, mostrando así acuerdo con la norma establecida de ‘dar sentido a las explicaciones de los compañeros’. Por el otro, el estudiante que reacciona a estas intervenciones acepta la posición relativa de autoridad matemática y espera ratificación de cada una de sus afirmaciones para proseguir con la explicación del razonamiento. De esta forma se reafirma la norma establecida sobre ‘atender las demandas respecto a las aproximaciones presentadas’. Aunque *Inquirir* señala una interacción de carácter privado entre dos estudiantes, se produce de forma pública constituyendo así, una aportación a la creación de oportunidades de aprendizaje matemático para todo el grupo. Al respecto, se infiere que *Inquirir* genera acciones productivas en la discusión matemática que se focalizan en la revisión, el refinamiento y la ampliación de los procesos de fundamentación de una narrativa.

Indicar

Indicar representa situaciones en las que la atención de los estudiantes es guiada por la profesora hacia un razonamiento matemático concreto. En esta interacción la profesora adquiere un papel especialmente activo desde el punto de vista de la construcción del conocimiento matemático que se promueve. Este código es poco frecuente en nuestros datos, apareciendo en cinco ocasiones. Esto era esperable y es sobre todo debido al propio diseño de la intervención didáctica en el que la profesora ejerce una función de facilitadora de la discusión en lo que respecta al plano social de la comunicación durante las sesiones de clase. A pesar de esto, sin embargo, se han documentado intervenciones de la profesora con influencia en la elaboración de contenidos matemáticos. Aquí, es la norma de actuación docente con la que está familiarizada esta profesora la que se impone en determinados momentos por delante de lo planificado en el contexto de la investigación.

Este último código, como los anteriores, tiene influencia en el desarrollo de la argumentación colectiva ya que promueve la reflexión sobre razonamientos matemáticos expuestos. En ocasiones direcciona la conversación hacia la comparación de diferentes razonamientos o hacia la reformulación o incorrección matemática de un razonamiento consensuado por el grupo. En este sentido, se trata de ocasiones con impacto, en mayor o menor grado, en la evolución de la argumentación colectiva en tanto que guía la articulación de contenidos matemáticos en la discusión de la tarea correspondiente y de su resolución.

Aportar

Aportar representa situaciones en las que se introduce una idea clave que desatasca o aporta claridad a una situación problemática relacionada con la resolución de la tarea. Como se muestra en la Tabla 36, este no es un código frecuente en nuestros datos, apareciendo en apenas tres ocasiones. *Aportar* indica la verbalización de un pensamiento matemático que se ha generado durante la propia discusión. Así está asociado a la norma establecida sobre ‘explicar y justificar razonamientos personales’. No podemos inferir si esta norma resulta fácil o no para los estudiantes ya que esto puede depender de un factor de dificultad cognitiva, de la complejidad comunicativa de la discusión o de la dificultad del seguimiento de una norma que puede no haberse practicado lo suficiente en sesiones de clase anteriores.

Por otra parte, este tipo de interacción puede direccionar el curso de la conversación hacia una narrativa concreta o puede representar la conclusión de una problemática concreta que, a su vez, puede ser considerada como el inicio de otra. *Aportar* conlleva la explicación de nuevas conexiones matemáticas entre diferentes objetos que conforman la narrativa sujeta a debate. Aunque las ideas expuestas pueden ser matemáticamente erróneas, sí apuntan a un razonamiento bien orientado que eventualmente deberá ser en parte ajustado. Por todo esto, se considera que *Aportar* tiene un efecto positivo en la evolución de la argumentación colectiva; en particular, se asume que su presencia en la discusión es un detonante de avances en la comprensión de la tarea matemática y de su dificultad.

5.2 Patrones básicos de interacción

Para la consecución del segundo objetivo de esta investigación ‘Relacionar los tipos de interacción desde la perspectiva de la argumentación colectiva’, se utilizaron los esquemas de los episodios creados mediante el instrumento ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’. De acuerdo con el modo en el cual hemos procedido, no hubiera sido posible llegar a caracterizar patrones básicos de interacción sin antes haber identificado tipos básicos más simples, que no son tipos ideales imaginables sino tipos prácticos surgidos del análisis de datos.

Es sumamente importante comprender la diferencia que establecemos, a un doble nivel teórico y práctico, entre lo que es un tipo básico y lo que es un patrón básico. Mientras que el tipo básico alude a características discursivas de un par indisoluble de acción-reacción, el patrón básico amplía la caracterización a varias secuencias de pares acción-reacción, cuya conexión en cadenas complejas también aparece como indisoluble. Según esta diferenciación, la detección de patrones básicos supone un avance en la comprensión de la estructura comunicativa de la discusión en grupo que sostiene la actividad matemática.

Una mirada atenta al microanálisis que lleva a la construcción de esquemas, y una posterior discusión de estos esquemas en su conjunto, revelan la existencia de regularidades entre tipos básicos de interacción y avances en la argumentación colectiva. Este es otro modo de interpretar los patrones ya que a las regularidades se las ha denominado patrones básicos de interacción a favor de la construcción de la argumentación colectiva.

Cada patrón básico está conformado por dos tipos de interacción contiguos en el esquema y denominados primera y segunda parte del patrón, estando siempre ambos involucrados en el desarrollo de la argumentación colectiva. El avance específico en este desarrollo se considera y denomina el producto del patrón básico, es decir, su contribución a la argumentación colectiva relativa a la resolución de la tarea matemática.

En lo que sigue, se describen los patrones básicos encontrados. Como se verá, a pesar de que son patrones principalmente binarios y los tipos de interacción aparecen de forma contigua, en su discusión se contemplan algunas variantes con especial significancia en la construcción de la argumentación colectiva, en las que por ejemplo la segunda parte del patrón no es inmediatamente posterior a la primera. Este hecho, que es recurrente a lo largo del análisis de datos, se examina con mayor detalle en la tercera sección del capítulo, donde se contemplan las combinaciones de patrones básicos.

Antes de proseguir con la descripción de los patrones básicos de interacción que emergen de nuestros datos, es importante aclarar que no se discrimina entre los códigos de interacción y sus respectivos códigos inducidos (interacciones facilitadas por la profesora). Así, *Iniciar* representa la introducción de una aproximación al problema ya sea de forma espontánea o tras la demanda explicita de la profesora (*Iniciar Inducido*). Esta decisión se tomó en un momento avanzado del análisis, al notar la conveniencia de examinar regularidades y conexiones comunes independientemente de quien fuera el participante que iniciara los pares acción-reacción en los esquemas para la ilustración de patrones básicos.

Iniciar+Compartir

El patrón básico formado por *Iniciar* seguido de *Compartir* representa situaciones en las que una narrativa es construida mediante la complementación entre contenidos introducidos por los miembros de una pareja. Tal como se deduce del nombre dado al patrón, los tipos básicos de interacción que se combinan son los de *Iniciar* y *Compartir*. En las situaciones caracterizadas mediante este patrón, la descripción de un procedimiento o expresión algebraica es acompañada de la explicitación de un razonamiento matemático que lo sustente o de la adecuación de la expresión o lenguaje algebraico. En este sentido, o bien se facilita la fundamentación en torno a una narrativa o bien se refinan o corrigen argumentos dados. La Figura 25 reproduce la representación esquemática de este patrón.

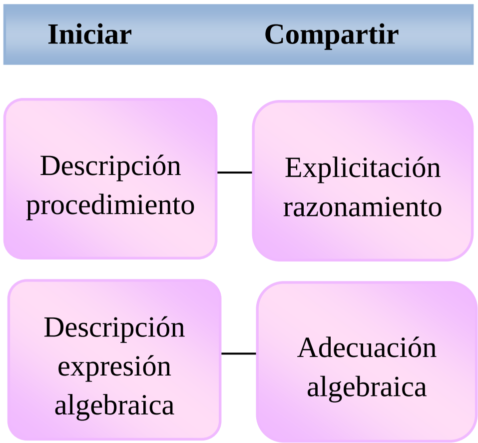


Figura 25. Representación de *Iniciar+Compartir*

Este patrón admite básicamente dos variantes respecto a la representación esquemática de la Figura 25. En primer lugar, una variante responde a situaciones en las que mediante las acciones-reacciones dentro de los tipos *Iniciar* y *Compartir* se describe un procedimiento aunque no se faciliten argumentos que lo sustenten ni se refine el lenguaje matemático utilizado. Se considera igualmente una complementación ya que la descripción es construida por dos estudiantes que han formado pareja en el trabajo previo a la discusión en grupo. En segundo lugar, otra variante responde a situaciones en las que un razonamiento o expresión algebraica es reformulado o explicitado entre los dos miembros de una pareja. Aquí, la primera parte del patrón se amplía mediante el énfasis en una parte concreta del razonamiento dado, la explicación de nueva información o la adecuación del lenguaje algebraico. En estas ocasiones de esta segunda variante, donde no aparece el código *Iniciar*, la reformulación o explicitación inicial se consideran el resultado de interacciones previas y el origen mismo de activación del patrón. A modo de ejemplo, la Figura 26 reproduce un fragmento del esquema relativo al Episodio 2.2 (ver detalles del episodio en el Capítulo 4) que indica la última situación descrita.

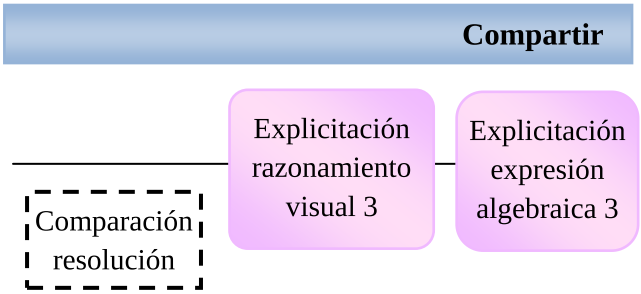


Figura 26. Ejemplo de variante de *Iniciar+Compartir*

En la situación representada en la Figura 26, la explicitación del razonamiento visual 3 (asociado al tercer procedimiento expuesto en la segunda sesión) es el resultado de interacciones previas donde se describieron y compararon los procedimientos denominados 2 y 3 (ver Capítulo 4). A su vez, la explicitación del razonamiento visual 3 señala la primera parte del patrón *Iniciar+Compartir* que tiene como resultado la manifestación de nueva información directamente relacionada con la primera parte. La explicitación de la expresión algebraica asociada al procedimiento 3 complementa y amplía matemáticamente la intervención previa. Así, a pesar de que no aparezca de un modo explícito *Iniciar*, se trata de una situación donde una narrativa es construida mediante la complementación entre contenidos introducidos por los miembros de una pareja, que siguen actuando como pareja (según el análisis de acción-interacción en los tipos básicos) durante la discusión en grupo.

Iniciar+Dudar

El patrón formado por *Iniciar* seguido de *Dudar* representa situaciones en las que se facilitan fundamentaciones acerca de una narrativa mediante la expresión de falta de comprensión de la explicación inicial. En estas situaciones la descripción de un procedimiento o expresión algebraica es acompañada de la explicitación de un razonamiento. En la Figura 27, se muestra la representación esquemática de este patrón básico.

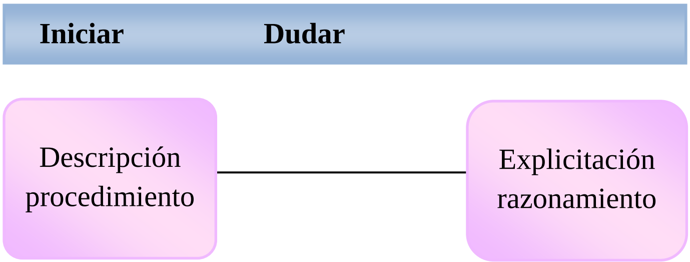


Figura 27. Representación de *Iniciar+Dudar*

Este patrón admite básicamente dos variantes respecto al esquema mostrado en la Figura 27. En primer lugar, *Solicitar* puede aparecer en el lugar de *Dudar* teniendo el mismo efecto en lo que respecta a la contribución a la argumentación colectiva. En segundo lugar, puede ocurrir que la explicitación de un razonamiento vaya acompañada por su reformulación, pudiendo ampliar la información inicial. Aquí, o bien la primera parte del patrón se considera el resultado de interacciones previas, como ya pasara en el patrón *Iniciar+Compartir*; o bien *Dudar* hace referencia a una intervención más lejana en el tiempo. En este último caso, se señaliza la primera parte del patrón mediante una flecha en el 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva'. En ambos casos, *Iniciar* puede no aparecer o no hacerlo de forma inmediatamente anterior a *Dudar*. A continuación, la Figura 28 reproduce un fragmento del esquema relativo al Episodio 2.2 donde se ilustra esta situación.

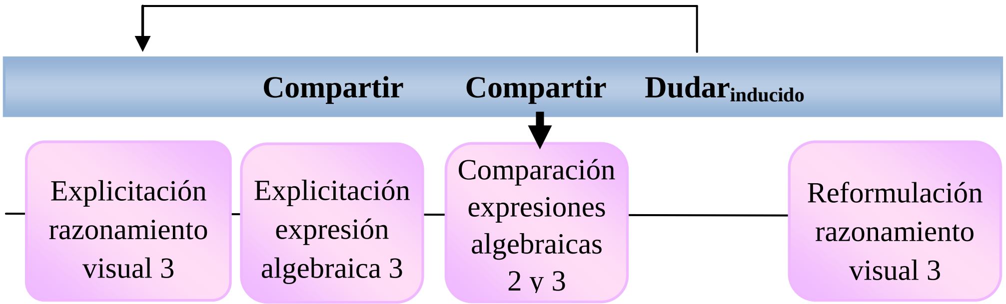


Figura 28. Ejemplo de variante de *Iniciar+Dudar*

En la situación representada en la Figura 28, *Dudar*$_{inducido}$ hace referencia a la explicitación del razonamiento visual 3 que, por un lado, es el resultado de interacciones previas (ver discusión en torno a Figura 26) y, por el otro no es inmediatamente anterior a Dudar$_{\text{inducido}}$. Así, la explicitación del razonamiento visual 3 es la primera parte de este patrón que tiene como resultado, aunque no sea de forma inmediata, la reformulación del mismo. De esta manera, a pesar de que no aparezca *Iniciar*, es una situación donde fundamentaciones de una narrativa son facilitadas por la expresión de confusión.

Dudar+Inquirir

El patrón básico formado por *Dudar* seguido de *Inquirir* representa situaciones en las que la fundamentación de una narrativa es ampliada de forma progresiva mediante la interacción directa entre dos estudiantes. En estas situaciones la explicitación de la fundamentación de una narrativa está acompañada por una reformulación donde se examina punto a punto el razonamiento expuesto y se aporta nueva información. La Figura 29 se muestra la representación esquemática de este patrón.

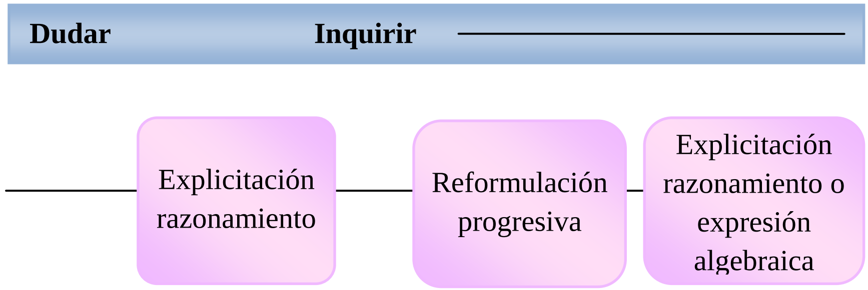


Figura 29. Representación de *Dudar* + *Inquirir*

Este patrón admite básicamente dos variantes respecto al esquema mostrado en la Figura 29. En algunas ocasiones *Rechazar* aparece en lugar de *Dudar*, teniendo el miso efecto en la argumentación colectiva. Aquí, la conversación inmediatamente anterior a *Inquirir* conlleva cierta confusión, en tanto existe una confrontación de narrativas. En este sentido, se considera que mediante *Rechazar* se expresa falta de comprensión en torno a un razonamiento matemático. Por otro lado *Dudar+Inquirir* aparece en ocasiones combinado con la variante de *Iniciar+Compartir* de la Figura 26. La combinación de estos dos patrones básicos representa situaciones en las que, tras la manifestación de falta de comprensión en el grupo, se genera una interacción direccionada entre tres miembros. Dos de los estudiantes trabajaron en pareja y comunican de forma conjunta la reformulación progresiva de un razonamiento y/o la explicitación de nueva información a un tercer estudiante que valida o cuestiona la información recibida. A modo de ejemplo, en la Figura 30 se ve un fragmento reducido del esquema relativo al final del Episodio 2.2 que representa esta variante.

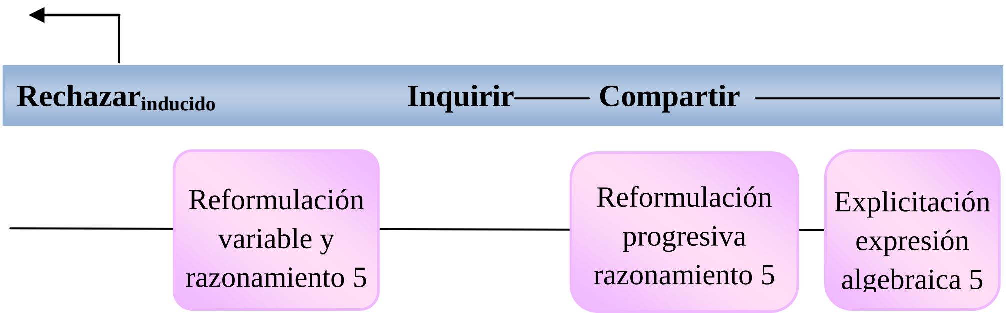


Figura 30. Ejemplo de variante de *Dudar+Inquirir*

Debido a la longitud del fragmento original, la Figura 30 muestra una versión reducida, sin pérdida de información esencial que dificulte la comprensión de la variante de *Dudar+Inquirir* (ver original en la Figura 31). En la situación representada se rechazan interpretaciones previas debido a una confusión en la significación de la variable. Así, aunque la primera parte del patrón sea *Rechazar*, se está representando una falta de comprensión matemática. Por otro lado, la segunda parte del patrón viene marcada por la influencia de *Iniciar+Compartir*. La reformulación progresiva del razonamiento visual 5 se complementa por los contenidos de las intervenciones de dos estudiantes que trabajaron en pareja.

Iniciar+Iniciar

El patrón formado por *Iniciar* seguido de *Iniciar* representa situaciones en las que se comparan abiertamente dos narrativas tras su presentación en la discusión en grupo. En estas situaciones la descripción de dos procedimientos o expresiones algebraicas desemboca en una comparación de las soluciones a la tarea asociadas. Esta comparación se realiza mediante resultados numéricos o razonamientos y procedimientos para cada solución. La Figura 31 muestra una representación esquemática de este patrón.

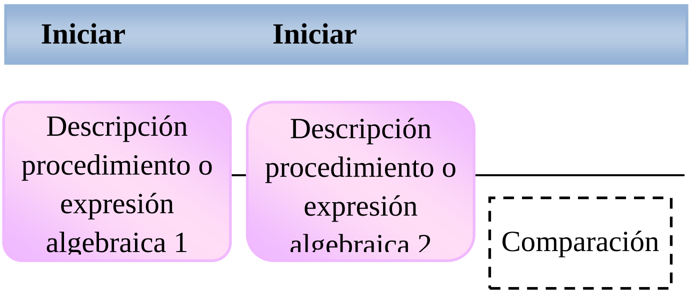


Figura 31. Representación de *Iniciar+Iniciar*

Este patrón admite básicamente una variante respecto al esquema mostrado en la Figura 31. En ocasiones la comparación aparece tras el primer y el segundo *Iniciar* o simultáneamente al segundo. Aquí, la comparación de resoluciones más que ser el resultado de la exposición de dos procedimientos adopta un papel mediador entre las dos descripciones. Es decir, la descripción del segundo procedimiento viene influenciada por la comparación con el primero, ya sea a nivel numérico o de razonamientos y procedimientos asociados.

Iniciar+Solicitar

El patrón que combina *Iniciar* y *Solicitar* representa situaciones en las que, mediante la demanda de clarificación, la conversación es direccionada hacia contenidos matemáticos concretos presentes en una narrativa que ha sido expuesta. En estas situaciones, la descripción de un procedimiento o expresión algebraica va acompañada de una focalización del contenido de la discusión en torno a la interpretación de términos o la identificación de la variable. La Figura 32 muestra una representación esquemática de este patrón.

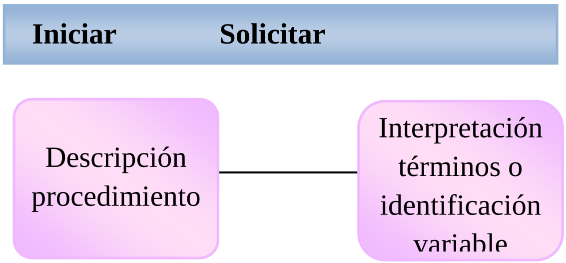


Figura 32. Representación de *Iniciar+Solicitar*

Iniciar+Solicitar admite básicamente dos variantes respecto al esquema mostrado en la Figura 31. En primer lugar, *Indicar* puede aparecer en lugar de *Solicitar*, teniendo el mismo efecto en lo que respecta a la argumentación colectiva. En segundo lugar, frecuentemente en los datos, la focalización del contenido matemático proviene de la discusión en torno a una aproximación o razonamiento. En este sentido, o bien la primera parte del patrón es el resultado de interacciones previas que se consideran el inicio de *Iniciar+Solicitar*; o bien solicitar hace referencia a una discusión más lejana en el tiempo. Así el código *Iniciar* puede no aparece explícitamente. A continuación, la Figura 33 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 1.2 a modo de ejemplo.

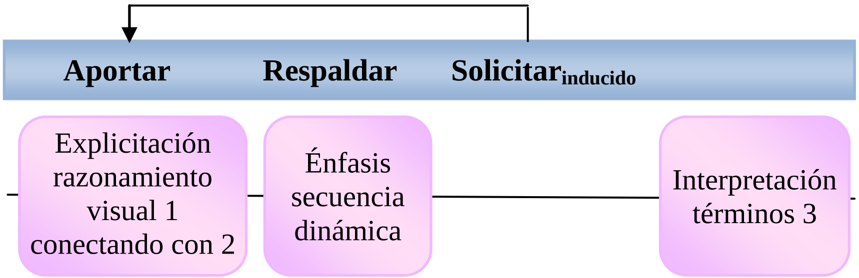


Figura 33. Ejemplo de variación de *Iniciar+Solicitar*

En la situación representada en la Figura 28, *Solicitar* hace referencia a la interpretación de términos usados en la explicitación de un razonamiento visual que no es inmediatamente anterior a *Solicitar*. Además, la explicitación del razonamiento visual 1 conectado con el 2 se produce mediante *Aportar* como resultado de interacciones previas. Igualmente, mediante solicitar la discusión se centra en la interpretación de términos. De esta manera, a pesar de que *Iniciar* no sea identificable, es una situación donde la discusión acerca de una narrativa se focaliza en un contenido matemático concreto.

Rechazar+Respaldar

El patrón formado por *Rechazar* seguido de *Respaldar* representa situaciones en las que una narrativa es construida y respaldada por varios estudiantes. En estas situaciones, la reformulación de la fundamentación de una narrativa se completa con el contenido matemático de las intervenciones de estudiantes. Así, la fundamentación es ampliada mediante la manifestación de nueva información de forma explícita o en una segunda reformulación. La Figura 34 muestra una representación esquemática de este patrón.

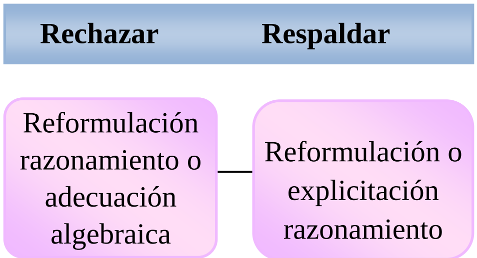


Figura 34. Representación de *Rechazar+Respaldar*

Este patrón admite básicamente una variante respecto al esquema de la Figura 34. En ocasiones, *Respaldar* acompaña a la explicitación de información resultante de una discusión donde se ha producido cierta confrontación entre narrativas. Aquí, la primera parte del patrón es ampliada mediante el énfasis en una parte concreta del razonamiento dado o la explicitación de nueva información. En estas situaciones, donde *Rechazar* no es identificable, la primera parte del patrón es el resultado de interacciones previas. A modo de ejemplo, la Figura 35 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 4.2 que ilustra la situación descrita.

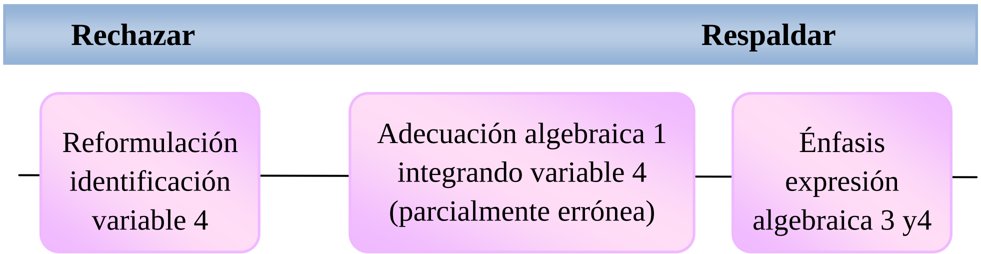


Figura 35. Ejemplo de variante de *Rechazar+Respaldar*

En la situación representada, la adecuación de una expresión algebraica se respalda mediante el énfasis dado a una expresión algebraica dada con anterioridad. La primera parte del patrón, la adecuación algebraica 1 integrando la variable 4, es el producto de una situación de confrontación entre dos narrativas que se evidencia por la presencia de *Rechazar*. Así, por un lado es en la respuesta al rechazo donde se reformula la cuarta interpretación de la variable y, por el otro, es en el inicio de *Rechazar+Respaldar* donde se refuerza una narrativa en contraposición a otra.

Rechazar+Rechazar

El patrón formado por *Rechazar* seguido de *Rechazar* representa situaciones de confrontación entre dos narrativas dadas que no son necesariamente excluyentes desde la perspectiva del contenido matemático. En estas situaciones se explicitan dos interpretaciones de términos o de una variable contrapuestas y, seguidamente, se reformula una de ellas o se aporta información que la sustente. La Figura 36 muestra una representación esquemática de este patrón.

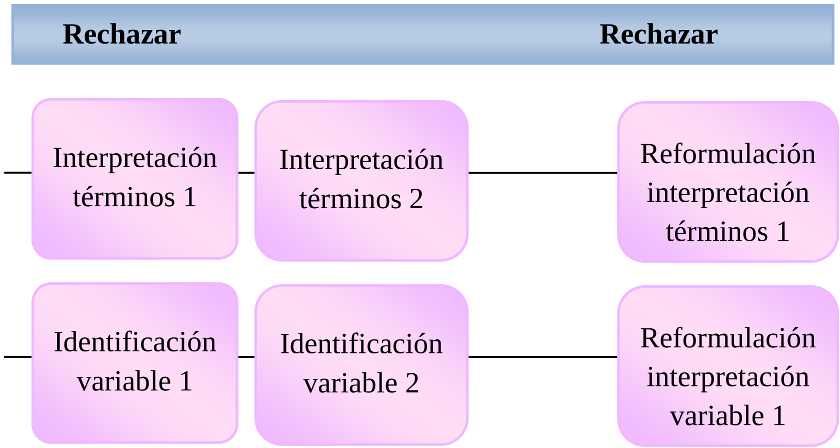


Figura 36. Representación de *Rechazar+Rechazar*

Rechazar+Rechazar admite básicamente dos variantes respecto al esquema mostrado en la Figura 36. Una de ellas, la más general, está relacionada con la ubicación de *Rechazar* en el esquema. Este tipo de interacción puede aparecer en posiciones diferentes. Así, por ejemplo, hay situaciones en las que el primer *Rechazar* aparece en la segunda interpretación de términos o variable. Hay otras ocasiones en las que las dos interpretaciones confrontadas se manifiestan de forma casi simultánea como respuesta a interacciones previas. Aquí *Rechazar* aparece una vez y adquiere un papel mediador entre las interpretaciones y la reformulación o explicitación de razonamientos que sustente una de ellas. La Figura 37 muestra un fragmento del esquema relativo al 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' del Episodio 1.2 para ilustrar la situación descrita.

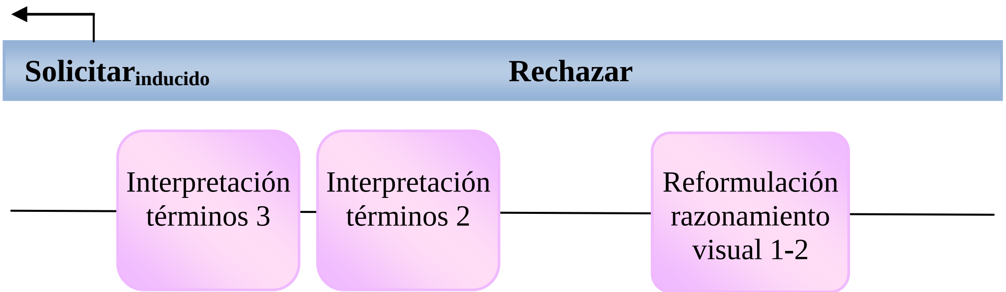


Figura 37. Ejemplo de variante de *Rechazar+Rechazar*

En la situación representada en la Figura 37, dos interpretaciones diferentes de términos aparecen como resultado de interacciones previas. En esta ocasión la primera parte del patrón se manifiesta como respuesta a *Solicitar Inducido.*

Rechazar actúa como mediador en la explicitación de información que sustenta la segunda interpretación. Así, se observa una situación de confrontación entre dos narrativas expuestas y las fundamentaciones que apoyan una de ellas.

5.3 Composición de patrones básicos de interacción

Una vez definidos los patrones básicos de interacción que señalan relaciones fuertes entre tipos de interacción, avanzamos hacia la consecución del tercer objetivo del estudio, esto es, ‘Explorar la complejidad de la interacción en la construcción de argumentación colectiva’. La ejemplificación de variantes de patrones básicos expuestas en la sección anterior deja entrever la complejidad de la interacción en la evolución de la argumentación en el grupo.

Un examen minucioso de los patrones básicos en los esquemas de episodios construidos mediante la aplicación del ‘Descriptor de dinámica de argumentación colectiva’, indica la existencia de combinaciones entre patrones y de ciertas regularidades en su composición. Por un lado, hay patrones básicos *ensamblados*, donde el producto del primero es el inicio del segundo. Por otro lado, si fijamos la atención en las situaciones en las que los tipos de interacción que conforman un patrón básico no aparecen de forma contigua, se identifican dos formas de composición que hemos denominado *substitución* e *inserción*. Como se verá, los patrones básicos que se producen mediante composición tienen una especial significancia respecto al impacto en la argumentación colectiva que se está construyendo durante la resolución de las tareas matemáticas.

Aunque somos conscientes de que no toda la conversación se puede caracterizar mediante patrones básicos, frecuentemente se observa cómo una vez fijada la primera parte de un patrón básico, la segunda parte es el resultado de una serie de composiciones de patrones básicos donde se combinan las tres técnicas: ensamblaje, substitución e inserción. Este hecho informa sobre la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación colectiva.

A continuación se describen las tres técnicas o mecanismos de composición emergentes del análisis así como combinaciones entre ellos. Mediante ejemplos empíricos se ilustra su influencia en el desarrollo de la argumentación colectiva orientada a la resolución de las tareas matemáticas.

Ensamblaje

Ensamblaje es una técnica de composición que consiste en la unión de forma continua de diferentes patrones básicos. La unión de dos patrones se produce por solapamiento, es decir, el producto de un patrón básico es el inicio del siguiente, pudiendo en algunas ocasiones solaparse también la segunda parte del patrón. A continuación se describen ensamblajes donde uno de los patrones básicos es *Iniciar+Dudar* o *Rechazar+Rechazar*, puesto que estos son especialmente frecuentes en nuestros datos.

Iniciar+Dudar

Iniciar+Dudar aparece ensamblado al patrón *Iniciar+Compartir* teniendo un efecto positivo en la argumentación colectiva. La unión de ambos patrones básicos conlleva la ampliación o refinación de fundamentaciones asociadas a una narrativa. A continuación, la Figura 38 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 2.2 para ejemplificar el ensamblaje de estos dos patrones.

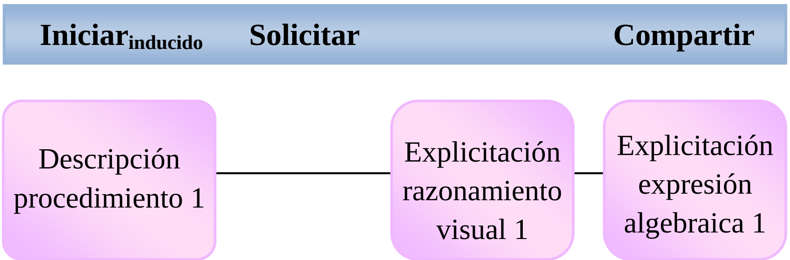


Figura 38. Ejemplo de ensamblaje de *Iniciar+Dudar* con *Iniciar+Compartir*

En el ejemplo se observa como la unión de *Iniciar+Dudar* e *Iniciar+Compartir* no sólo conlleva la explicitación de un razonamiento que fundamenta el procedimiento descrito (que es lo que se contempla en el patrón *Iniciar+Dudar* sin componer), también se explicita la expresión algebraica asociada. Así el ensamblaje de estos dos patrones básicos tiene un impacto en lo que respecta a la argumentación colectiva ya que se facilita información inicialmente implícita (nótese que *Iniciar+Dudar* aparece en la variante donde *Solicitar* está en el lugar de *Dudar*).

Iniciar+Dudar aparece también ensamblado con *Dudar+Inquirir*. La unión de estos dos patrones conlleva la reformulación progresiva y la ampliación de fundamentaciones relativas a una narrativa. La Figura 39 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 2.2 para ejemplificar la unión de ambos patrones. Debido a la longitud del fragmento original, se reproduce una versión reducida sin pérdida de información esencial que dificulte la comprensión del ensamblaje de estos dos patrones básicos (ver original en la Figura 39).

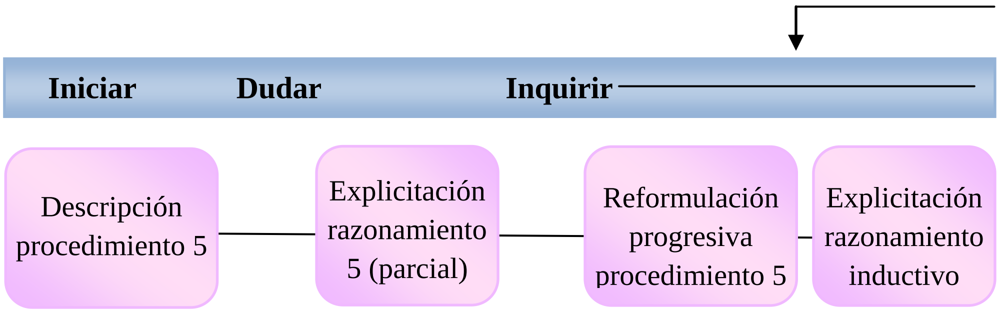


Figura 39. Ejemplo de ensamblaje de *Iniciar+Dudar* con *Dudar+Inquirir*

En el ejemplo se observa que la unión de *Iniciar+Dudar* y *Dudar+Inquirir* no sólo conlleva la explicitación de un razonamiento visual asociado al procedimiento expuesto, sino que además se reformula progresivamente el procedimiento y se explicitan nuevos razonamientos. Aunque *Inquirir* hace referencia a una conversación direccionada entre dos estudiantes, esta se produce de forma pública en el grupo. En la Figura 39 se observa que en una interacción posterior a esta conversación se mencionan los contenidos explicitados en la interacción del tipo *Inquirir*. Así el ensamblaje de estos dos patrones básicos tiene un impacto en lo que respecta a la argumentación colectiva ya que se reformula lo dicho y se facilita información inicialmente implícita.

Rechazar+Rechazar

Rechazar+Rechazar aparece ensamblado con *Rechazar+Respaldar*. La unión de ambos patrones básicos conlleva la ampliación o refinación de fundamentaciones asociadas a una narrativa que está confrontada con otra narrativa expuesta. Por otro lado, *Iniciar+Solicitar* también aparece ensamblando con *Rechazar+Rechazar*, estando este último patrón en segunda posición temporal. La unión de estos dos patrones básicos conlleva la focalización de la conversación en la interpretación de contenidos matemáticos concretos de la narrativa expuesta que, luego, entra en confrontación con otras interpretaciones. La Figura 40 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 4.2 donde se ilustra el ensamblaje de estos tres patrones básicos.

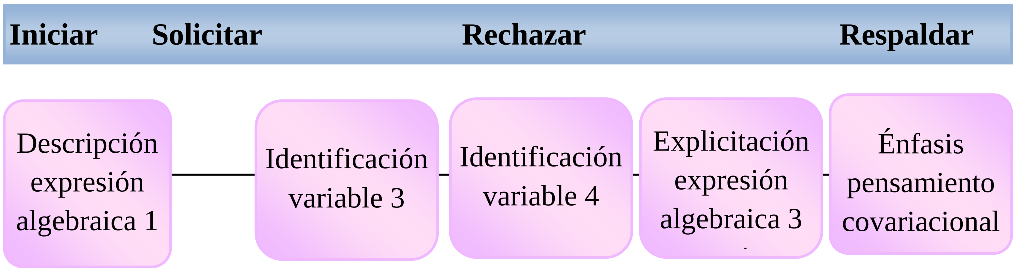


Figura 40. Ejemplo de ensamblaje de tres patrones básicos

La unión de *Iniciar+Solicitar* y *Rechazar+Rechazar,* en la Figura 40, conlleva la focalización del contenido de la conversación en la variable asociada a una expresión algebraica expuesta y la posterior confrontación de interpretaciones sobre la variable. Por otro lado, la unión de *Rechazar+Rechazar* y *Rechazar+Respaldar* refuerza la fundamentación en torno a una de las interpretaciones que resultó del patrón básico *Rechazar+Rechazar*. Así, la unión de estos patrones básicos tiene un impacto en la argumentación colectiva ya que se facilita la manifestación de dos narrativas confrontadas y se refuerza la fundamentación asociada a una de ellas.

Por otro lado, *Rechazar+Rechazar* aparece ensamblado consigo mismo. La unión repetida de este patrón básico denota no sólo la existencia de dos narrativas confrontadas sino la continuidad en el tiempo del conflicto. También supone la explicitación o reformulación de fundamentaciones que refuerzan las narrativas contrapuestas. La Figura 41 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 1.2 donde se ilustra una unión de *Rechazar+Rechazar* consigo mismo.

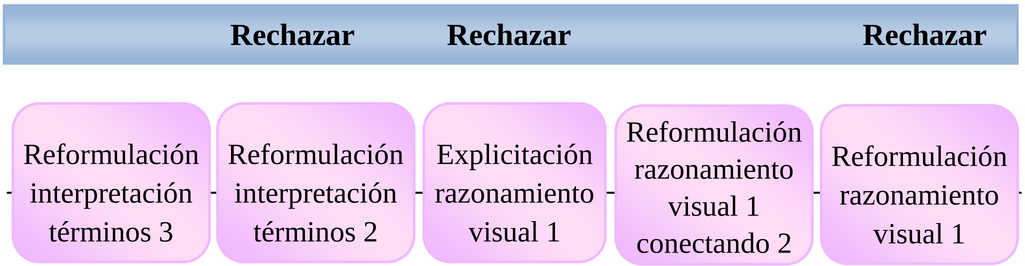


Figura 41. Ejemplo de ensamblaje de *Rechazar+Rechazar*

En el ejemplo se observa que la unión repetida de *Rechazar+Rechazar* denota la continuidad en el tiempo de dos narrativas confrontadas. El fragmento mostrado proviene de una discusión donde se explicitan interpretaciones diferentes de un término. De aquí que el primer *Rechazar+Rechazar* conlleve la reformulación de dichas interpretaciones. El producto de esta interacción es la explicitación de un razonamiento visual que es el inicio del siguiente *Rechazar+Rechazar* donde se reformulan y amplían fundamentaciones asociadas a las narrativas confrontadas. Aunque esto no suponga la resolución del conflicto, el ensamblaje de este patrón tiene un impacto en el desarrollo de la argumentación colectiva ya que se explicita o se amplía información inicialmente no presente en la discusión en grupo.

Substitución

Substitución es una técnica de composición, emergente del análisis, donde una de las partes de un patrón básico se substituye por otro patrón básico. Es decir, un patrón básico puede ser considerado la primera parte o la segunda de otro patrón básico. A continuación se detallan dos substituciones especialmente habituales en los datos: *Iniciar+Compartir* sustituyendo a *Iniciar* y *Rechazar+Respaldar* sustituyendo a *Rechazar*.

Iniciar+Compatir

Iniciar+Compartir aparece en el lugar de *Iniciar*, siendo este tipo de interacción parte de otro patrón. La substitución de este tipo por el patrón básico *Iniciar+Compartir* conlleva la ampliación o explicitación de fundamentaciones relativas a una narrativa. Por ejemplo, si observamos el fragmento del esquema relativo al inicio del Episodio 1.1 en la Figura 42, se nota que *Iniciar* ha sido substituido por *Iniciar+Compartir*, en el patrón básico *Iniciar+Iniciar*.

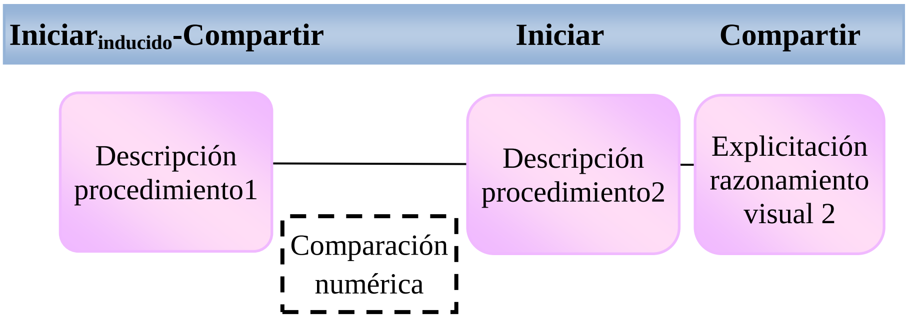


Figura 42. Ejemplo de substitución de *Iniciar* por *Iniciar+Compartir*

En el ejemplo se observa que la substitución de *Iniciar* por *Iniciar+Compartir* tiene un impacto en lo que respecta a la evolución de la argumentación colectiva. La segunda parte del patrón básico no sólo conlleva la descripción de un procedimiento (que es lo que se contempla en el patrón básico sin componer), sino que además se explicita un razonamiento matemático asociado. En este sentido, la composición por substitución facilita que se expliciten fundamentaciones de una narrativa relativa a la resolución de la tarea.

Rechazar+Respaldar

Así como *Iniciar+Compartir* puede estar presente mediante substitución en diferentes patrones básicos, *Rechazar+Respaldar* sólo puede substituir a *Rechazar* en el patrón básico *Rechazar+Rechazar*. La composición de ambos patrones mediante substitución conlleva la ampliación o refinación de fundamentaciones asociadas a una narrativa que está confrontada con otra narrativa que ha sido expuesta en la discusión de grupo. La Figura 43 muestra un fragmento del esquema relativo al Episodio 1.2 donde se ilustra una composición por substitución de *Rechazar* por *Rechazar+Respaldar*.

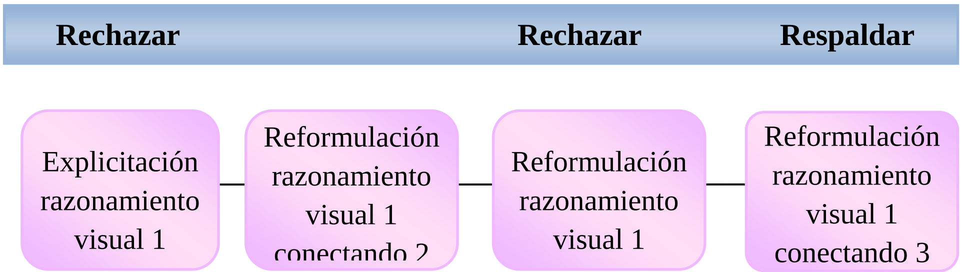


Figura 43. Ejemplo de substitución de *Rechazar* por *Rechazar+Respaldar*

El ejemplo proviene del ensamblaje de *Rechazar+Rechazar* consigo mismo (ver discusión en torno a la Figura 41). Al final del fragmento se observa que la substitución de *Rechazar* por *Rechazar+Respaldar* conlleva la reformulación y ampliación de la fundamentación en torno a una de las narrativas confrontadas. Así, esta substitución tiene un impacto en la evolución de la argumentación colectiva ya que se amplían fundamentaciones asociadas a una narrativa.

Inserción

Inserción es otra técnica de composición, emergente del análisis, que consiste en la inserción de un patrón básico dentro de otro. Es decir, entre la primera y la segunda parte de un patrón básico se encuentra otro. En este tipo de composición, el patrón insertado puede influir en el cierre del patrón que lo incluye, tal como se ilustra en la Figura 44.

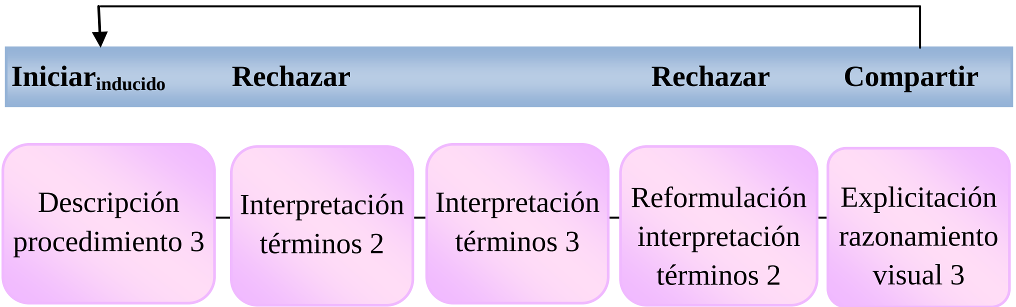


Figura 44. Ejemplo de inserción de *Rechazar+Rechazar* en *Iniciar+Compartir*

El ejemplo de la Figura 44 corresponde a un fragmento del esquema relativo al Episodio 1.1. Se observa cómo entre la primera y la segunda parte de *Iniciar+Compartir* se encuentra el patrón básico *Rechazar+Rechazar*. Tras la descripción de un procedimiento, se produce una situación de confrontación en torno a la interpretación de términos usados en la exposición previa. Esta situación conlleva la explicitación de un razonamiento visual que sustenta el procedimiento inicial y pretende aportar claridad a la situación de confrontación. Así, se infiere que el patrón de *Rechazar+Rechazar* tiene un impacto en el desarrollo de la argumentación colectiva ya que influye en el cierre de un patrón básico que aporta fundamentaciones de una narrativa.

Aunque la composición por inserción hace referencia a la introducción de un patrón básico dentro de otro, se considera también la inserción de *Compartir* dentro de un patrón básico cuando este tipo de interacción indica una conversación de carácter privado entre los dos miembros de una pareja. Se recuerda que para estos casos *Compartir* aparece en el ‘descriptor de dinámica de argumentación colectiva’ con una flecha que apunta directamente a la narrativa sobre la que se ha reflexionado durante el trabajo en pareja. La Figura 45 ilustra esta situación mostrando un fragmento del esquema relativo al Episodio 2.2.

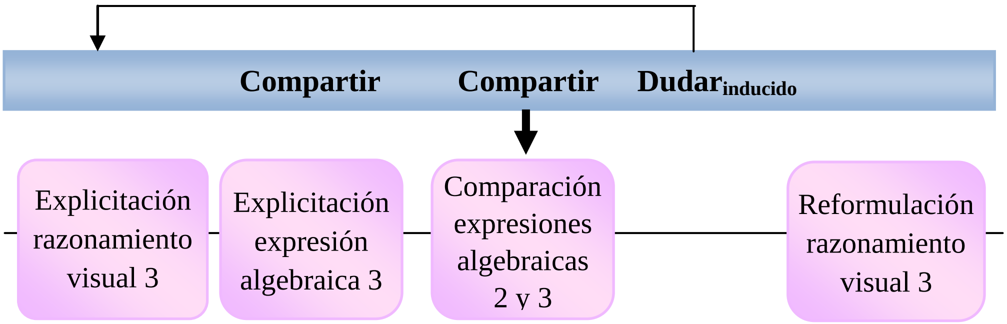


Figura 45. Ejemplo de inserción de *Compartir* en *Iniciar+Dudar*

En el fragmento de la Figura 45, *Iniciar+Compartir* substituye a *Iniciar* en el patrón básico *Iniciar+Dudar*. Esta substitución tiene un efecto en la argumentación colectiva ya que se explicita información complementaria (expresión algebraica) relativa a un procedimiento. Por otro lado y a diferencia del ejemplo de la Figura 44, la inserción de *Compartir* no influye en el producto final de *Iniciar+Dudar*. La reformulación del razonamiento visual tres es independiente de la comparación de las expresiones algebraicas relativas a los procedimientos dos y tres. Así la comparación de expresiones algebraicas es el producto de interacciones previas entre las que se encuentran *Iniciar+Compartir*, pero no tiene una influencia explícita en el patrón básico *Iniciar+Dudar*.

Combinación de técnicas de composición

Aunque en los datos los patrones básicos de interacción aparecen en su formato más sencillo, es más común encontrarlos de forma compuesta mediante una de las tres técnicas expuestas y, aún más frecuentes mediante una combinación de varias de ellas. Por ejemplo, en el último fragmento de esquema mostrado en la descripción de la técnica de inserción, se aprecia una combinación entre substitución e inserción (ver Figura 45). Este hecho informa de la complejidad de la interacción en grupo en la construcción de la argumentación colectiva.

A continuación, a partir de un ejemplo empírico se describen varias combinaciones de las tres técnicas de composición de patrones básicos. La Figura 46 muestra un fragmento del esquema relativo al 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' del Episodio 1.1. El inicio corresponde al fragmento de la Figura 44 para ejemplificar la inserción de *Rechazar+Rechazar* en el patrón *Iniciar+Compartir*. Siguiendo a Sacks (1998) y debido a la longitud del esquema original se usa {I {R-R} C} para notar esta inserción, donde I hace referencia a Iniciar, R a Rechazar y C a Compartir. Si nos fijamos en el inicio del esquema hasta la descripción del procedimiento 4, se observa el patrón básico *Iniciar+Iniciar*, donde la primera parte ha sido substituida por {I {R-R} C}. A su vez este patrón substituye a Iniciar en el patrón básico *Iniciar+Dudar*. Así todas las interacciones previas desde la descripción del procedimiento 3 hasta la descripción del procedimiento 4 se corresponden con el inicio del patrón *Iniciar+Dudar*. Finalmente, se observa el ensamblaje entre este patrón básico e *Iniciar+Compartir* al final del esquema.

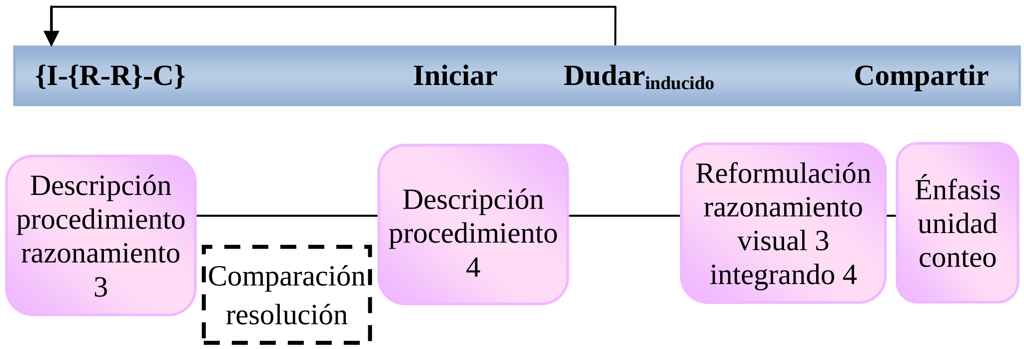


Figura 46. Ejemplo de combinación de ensamblaje, substitución e inserción

Más allá de las formas de combinación de las diferentes técnicas de composición, es de interés notar la complejidad de la interacción presente en la discusión representada por este esquema, en el que varios estudiantes intervienen en la construcción de la argumentación; por otro lado, también es de interés notar la progresión cualitativa de la argumentación construida mediante la explicitación y ampliación de fundamentaciones asociadas a narrativas expuestas. En relación a este último hecho cabe señalar que, aunque esta interacción se pueda representar básicamente mediante el patrón *Iniciar+Dudar*, el producto resultante es cualitativamente superior desde el punto de vista matemático. Así, mientras que la contribución a la argumentación colectiva del patrón básico *Iniciar+Dudar* es la explicitación de un razonamiento, cuando este patrón es el resultado de composiciones de patrones, la contribución a la argumentación colectiva también es el producto de aportaciones previas. Este producto es la reformulación de un razonamiento donde se integra otro razonamiento que ha sido expuesto.

6. Conclusiones

En este último capítulo se discuten los resultados de forma conjunta a fin de alcanzar una mayor comprensión de las relaciones entre la interacción en grupo y la argumentación colectiva, pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En primer lugar, se da respuesta a la pregunta que ha guiado esta investigación: *¿Cómo se construye la argumentación colectiva durante la interacción en grupo en una clase de matemáticas de secundaria?* En segundo lugar, se discute la utilidad y generalización de las herramientas metodológicas creadas para y a partir del análisis de datos. Seguidamente, se reflexiona sobre la idoneidad del diseño experimental llevado a cabo. Se acaba con implicaciones didácticas y se consideran limitaciones y prospectivas que darían continuidad a este estudio.

Tabla de contenidos

6.1 Discusión sobre la construcción de argumentación colectiva

En la aproximación a la respuesta para la cuestión *¿Cómo se construye la argumentación colectiva durante la interacción en grupo en una clase de matemáticas de secundaria?*, se han identificado varios fenómenos. Se trata de hechos que han sido empíricamente probados y teóricamente contrastados, siendo algunos de ellos emergentes en el área de conocimiento de educación matemática. En general, se confirma la pertinencia de considerar la argumentación colectiva y la interacción en grupo como un objeto de estudio de pleno derecho en el área. Se han podido documentar multitud de ejemplos que aluden a la interacción en grupo como lugar privilegiado donde emergen significados matemáticos.

En lo que sigue, se describen y discuten los fenómenos identificados de un modo sucinto. La base empírica de cada uno de los fenómenos debe buscarse en el capítulo donde se compilan los resultados de la investigación.

La complejidad de la interacción y la argumentación colectiva

De los resultados expuestos en el capítulo anterior se desprende un elevado grado de complejidad de la interacción, y por consiguiente de la conversación matemática, en grupo. La construcción de la argumentación colectiva se realiza a través de las acciones o turnos de palabra en interacción de los participantes en la discusión. La argumentación se desarrolla mediante contenidos matemáticos presentes en intervenciones de estudiantes en torno a una narrativa. Estos contenidos son utilizados por los participantes para actualizar el estado de la información acerca de la narrativa en discusión e influyen en las consiguientes reacciones individuales en el grupo.

De los resultados del estudio se deduce que la interdependencia de las acciones de estudiantes es más compleja en la interacción en grupo que en pareja. Aunque la comunicación en el grupo puede considerarse a menudo bilateral porque la conversación se centra en dos de los participantes, coexisten en realidad varios emisores y receptores, con diferentes tiempos de reacción, grados de involucración, formas de participación, etc. Así, respecto a una acción, se pueden obtener diferentes reacciones de diferentes interlocutores, pudiendo algunas de ellas no ser inmediatas ni consecutivas. Existen evidencias empíricas en esta investigación que apuntan a la complejidad de la interacción en grupo, entendida como un sistema de acciones interdependientes. Al respecto, se han identificado reacciones de estudiantes no inmediatamente posteriores a acciones de otros, siendo en algunas ocasiones bastante lejanas en el tiempo. Se infiere que la involucración y el seguimiento de la argumentación colectiva en grupo no es por tanto una tarea fácil para un estudiante. Para actualizar los contenidos matemáticos relativos a la narrativa a debate, el estudiante precisa seguir las múltiples interacciones directamente interconectadas en el grupo. Así, seguir una discusión implica que el estudiante recuerde y recupere acuerdos previos respecto a contenidos matemáticos ocurridos durante la sesión de clase pero sobre los cuales no se ha insistido o bien no ha habido un énfasis específico.

Junto con esta complejidad, hay asociaciones entre dos tipos de interacción que aparecen de forma regular en las discusiones en grupo. Son los denominados patrones básicos de interacción facilitadores de argumentación colectiva. Los resultados de esta investigación muestran que parte de la interacción en grupo se puede caracterizar a partir de patrones básicos de interacción, y su composición mediante diferentes técnicas. Esto es consistente con los resultados obtenidos por Sacks (1998) sobre ‘pares adyacentes’ en sus análisis de los turnos de habla y de la conversación. A pesar de que en las investigaciones de este autor sobre la organización secuencial de la conversación, se examinan intercambios en una conversación, mientras que en este estudio se consideran asociaciones entre tipos de interacción, encontramos similitudes relevantes entre los resultados de ambas investigaciones. Sacks (1998) concluye sobre la existencia de secuencias de dos afirmaciones, denominadas ‘pares adyacentes’, que están relativamente relacionadas y guardan un orden (un ejemplo típico de par adyacente es. “ofrecimiento-rechazo”). Aunque, a priori, las partes de par adyacente son contiguas, puede ocurrir que un par se abra en un turno y no se cierre hasta un turno muy posterior en la conversación. Sacks considera situaciones en las que, entre la primera y la segunda parte de un par adyacente, hay otro par insertado o situaciones en las que varios pares adyacentes se suceden de forma continua. Estas dos formas de expandir un par adyacente son consistentes con dos de las técnicas o mecanismos de composición hallados en esta investigación, *insertar* y *ensamblar*. Según lo expuesto, dentro del complejo sistema de interacciones interdependientes del grupo, existen relaciones con una cierta estabilidad entre tipos particulares de interacción. Estos patrones básicos de interacción representan una situación aislable en el grupo que conlleva un impacto específico en la argumentación colectiva. En otras palabras, el producto, des del punto de vista de las matemáticas, de los patrones básicos de interacción, representa una contribución a la argumentación colectiva. Así cabe esperar que las aportaciones a la argumentación que resultan de la composición de un grupo variable de patrones básicos, sean cualitativamente superiores que las resultantes de un solo patrón básico. Aunque esta investigación aporta evidencias empíricas que respaldan esta afirmación, también hay ejemplos en los que no se aprecia un aumento de la calidad de la argumentación como resultado de una composición de patrones básicos de interacción. Así, no se puede concluir que una mayor complejidad en la interacción implique una mayor calidad en los argumentos construidos.

Estructura de pareja en el grupo y oportunidades de aprendizaje

Uno de los fenómenos novedosos derivados de este estudio es la conservación de la estructura de pareja en la interacción en grupo. De los resultados se desprende que la consolidación de la relación de pareja en el grupo tiene un efecto positivo en la construcción de la argumentación colectiva orientada a la resolución de la tarea matemática. Muchas de las narrativas son construidas conjuntamente por los miembros de la pareja de forma que uno complementa, corrige o amplía en el grupo lo dicho por el otro. Mayormente la intervención de un miembro de la pareja se hace sin que el otro se haya dirigido a él de forma directa, es decir, participa en la discusión como consecuencia de alusiones que se expresan de forma indirecta (Goffmann, 1981a).

Por lo general, la obligación de mantener un nivel alto de atención se asocia con la participación directa, es decir, cuando un estudiante interviene como respuesta a una demanda direccionada hacia él (Krummheuer, 2011). En cambio, en este estudio se ha identificado que los miembros de una pareja tienen un alto grado de involucración y atención a la información matemática facilitada por uno de ellos, independientemente de que la participación en el grupo se esté dando de manera directa o indirecta. Desde este punto de vista, se puede considerar que la participación de un miembro de la pareja es directa aunque el compañero no le haya asignado explícitamente el siguiente turno de palabra o se lo haya asignado a otro miembro del grupo con quien no se ha compartido el tiempo de trabajo en pareja.

El mantenimiento y la consolidación de la estructura de pareja en el grupo suponen la coexistencia de dos escenarios dominantes de interacción, la interacción entre miembros de una pareja y la interacción entre la pareja y el grupo. Si se fija la atención en el primer escenario, se trata de una interacción a dos donde un miembro de la pareja tiene el turno de habla y el otro, a priori, es un receptor como lo son el resto de participantes del grupo. Como ya se ha expuesto, el miembro receptor de la pareja adopta un papel activo en la construcción de la narrativa que se está sometiendo a discusión. Aunque otros estudiantes en el grupo puedan participar en la construcción o fundamentación de una narrativa, se ha identificado una mayor frecuencia de este fenómeno entre miembros de una pareja. En términos de Krummheuer (2011), la pareja adquiere el papel de “production design” en el grupo, sin que esto excluya la participación de otros estudiantes.

Siguiendo el enfoque interaccionista que considera la forma de participación en el aula como un condicionante del aprendizaje matemático, el doble papel de la pareja en el grupo es productivo en términos de oportunidades de aprendizaje. Por un lado, aunque las aportaciones del miembro receptor de la pareja no supusieran grandes contribuciones a la construcción de la narrativa, el compromiso de escuchar y llevar a cabo acciones que complementan contenidos matemáticos expuestos -sin haber sido directamente escogido para este fin- es una condición positiva para el inicio de un proceso de aprendizaje (Krummheuer, 2011). Por otro lado, la construcción conjunta de una narrativa a cargo de los miembros de una pareja, puede suponer la comunicación de un proceso de resolución de la tarea que podría no haberse logrado individualmente. Esto genera oportunidades de aprendizaje para los miembros de la pareja al facilitar la reestructuración de significados matemáticos. Así mismo, también supone una oportunidad para el resto de participantes que, independientemente de su participación en la construcción de la narrativa a debate, son potencialmente receptores de la información matemática y susceptibles de experimentar cambios conceptuales e interpretativos.

Tal como se expuso en el capítulo de resultados, la participación de los miembros de la pareja, en ocasiones, también es explícitamente directa, es decir, la intervención de un miembro está direccionada y concede el turno de habla al otro miembro de la pareja. Se tratan de secuencias relativamente cortas, entre tres y cinco turnos, donde los miembros de la pareja reflexionan de forma conjunta sobre problemáticas discutidas en el grupo. Se destacan estas conversaciones bilaterales de pareja por el contenido matemático involucrado. A diferencia de las discusiones focalizadas en narrativas directamente conectadas con las particularidades del problema en discusión, estas reflexiones implican un nivel de abstracción superior, con conclusiones más generales que hacen referencia a conceptos o procesos matemáticos. Por ejemplo, si en la fundamentación de una narrativa se ha explicitado un razonamiento inductivo, la reflexión es en torno a la aplicación del método inductivo más allá del razonamiento concreto en discusión. Aunque sean conversaciones de carácter privado entre los miembros de una pareja, se realizan de forma pública, lo cual supone oportunidades de aprendizaje para todos los participantes. Como en Sfard (2008), el contacto directo de los estudiantes con discursos nuevos, que en nuestro caso surgen de discusiones en torno a narrativas concretas, posibilita el meta-aprendizaje.

A partir de los resultados de esta investigación, se concluye que la consolidación de la estructura de pareja en el grupo favorece la creación de oportunidades de meta-aprendizaje sobre significados matemáticos que pueden ser aprovechadas por todos los participantes.

Confrontación de narrativas y dificultades emergentes

La caracterización de la argumentación colectiva a través de la composición de patrones, llevó a identificar situaciones en las que la confrontación de dos narrativas o bien tenía una continuidad en el tiempo mayor a la esperada o bien se repetía en diferentes ocasiones a lo largo de una misma sesión de clase. Una mirada atenta a estas situaciones permite afirmar que, más allá de posibles conflictos cognitivos, las narrativas confrontadas se originan o perduran debido a la existencia de diferentes discursos que difieren en el uso de ciertas palabras o reglas de fundamentación. En este sentido, el conflicto existente en estas situaciones es cercano al concepto de conflicto comognitivo desarrollado por Sfard (2008). Es decir, la resolución de conflictos recae en dar sentido al pensamiento del otro (y por lo tanto al habla), averiguando la lógica interna del discurso matemático de los demás.

Aunque pueda existir progreso respecto a la resolución de la tarea, desde la perspectiva del contenido matemático y su contribución a la argumentación colectiva, el discurso aparentemente inconexo en estas conversaciones obstaculiza una negociación de significados exitosa. Las evidencias empíricas de esta investigación muestran, por ejemplo, que participantes involucrados en una discusión usan las mismas palabras o términos para referirse a cosas diferentes. Se produce entonces una comunicación no efectiva. Aunque la interacción sea satisfactoria, en términos de participación, la involucración y colaboración de los estudiantes en el desarrollo de la tarea no es productiva desde el punto de vista de la capacidad para llegar a acuerdos entre narrativas confrontadas. Así, las características de la comunicación matemática se convierten en un obstáculo en el avance de la argumentación colectiva, haciendo que los estudiantes no avancen en lo que a contenidos e interpretaciones matemáticas se refiere. Estos resultados son consistentes con los reportados por Sfard y Kieran, (2001), donde se apunta que no toda interacción entre estudiantes facilita el acceso al aprendizaje matemático. Al respecto, coincidimos con estas autoras en la necesidad de una comunicación efectiva, donde todos los participantes sepan de qué se está hablando, mediante qué palabras y con base en qué reglas.

Se ha identificado que la inclusión en la conversación de mediadores visuales, que son las representaciones gráficas facilitadas en los enunciados de los problemas, no parece ayudar, en estas ocasiones, a la consecución de un discurso efectivo y conexo. En cambio, estos mediadores sí facilitan la manifestación de diferentes interpretaciones de un mismo término y, por consiguiente, la explicitación de conflictos entre significados que deberán ser resueltos en el seno del grupo. A partir de estos resultados se concluye que la interpretación matemática asociada a un término perdura en el tiempo a pesar de disponer de razones o incluso de elementos visuales, para cuestionarla. De ahí se infiere la dificultad por modificar la relación entre una palabra y el objeto matemático al que representa, una vez la palabra está establecida. Al respecto, Sfard (2008) afirma que la relación entre lo que somos capaces de representar y lo que somos capaces de decir es reflexiva, por lo que se requieren cambios en el discurso que visibilicen nuevas posibilidades de experimentación real.

Esta investigación aporta evidencias empíricas sobre la dificultad de los estudiantes por modificar su discurso, desde el punto vista del uso y significación de ciertas palabras y sobre cómo este hecho supone un obstáculo en la comprensión de contenidos matemáticos.

Fundamentación de narrativas en la argumentación colectiva

De esta investigación se desprende que la interacción en grupo facilita la explicitación, reformulación y énfasis de razonamientos matemáticos que fundamentan narrativas orientadas a la resolución de la correspondiente tarea. Parafrasear una idea propia o de otro puede no suponer una contribución importante, desde el punto de vista matemático, a la solución de un problema, pero sí podría contribuir a la comprensión de una solución, tanto para el estudiante que realiza la reformulación como para el resto de participantes. Se coincide con Krummheuer (2011) en que la repetición de un razonamiento puede generar reflexiones en el estudiante que lleven a una reestructuración interna de ideas matemáticas. Al respecto, en esta investigación se ha identificado que con frecuencia los estudiantes integran en sus reformulaciones algunos de los razonamientos expuestos con anterioridad por otros. No se pueda asegurar que se haya producido un aprendizaje, pero sí tiene sentido concluir sobre la existencia de oportunidades de aprendizaje potencialmente aprovechables. Expresar ideas de otra persona mediante las propias palabras o incluir ideas de otros en los propios razonamientos son indicadores de oportunidades de aprendizaje que se dan durante la construcción de la argumentación colectiva.

Aunque la explicitación y reformulación de razonamientos contribuye al progreso de argumentación colectiva, en este estudio se han documentado estudiantes que construyen las fundamentaciones basándose, esencialmente, en argumentos empíricos, no llegando a justificaciones abstractas ni pruebas formales. Estas fundamentaciones empíricas se establecen a partir de características perceptivamente accesibles de objetos concretos. A su vez, estas características se ilustran usando la representación gráfica de casos particulares facilitada en los enunciados de todos los problemas de la secuencia diseñada. Al respecto, se observan diferentes tipos de argumentación empírica según el uso de los casos particulares como elemento de convencimiento. Estos resultados son consistentes con los reportados en Marrades y Gutiérrez (2000), donde se estudian tipos de justificación usados por estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas de geometría con software dinámico.

Retomando la confrontación de narrativas, en este estudio se ha identificado cómo el diferente uso de casos particulares para fundamentar una narrativa dificulta la comprensión de razonamientos. A menudo se observa que los estudiantes basan sus fundamentaciones en la percepción visual de un caso particular concreto, asumiendo que un razonamiento es correcto si es cierto en ese ejemplo. En cambio, en otras ocasiones se utiliza un caso particular a modo de ejemplo genérico para ilustrar razonamientos abstractos o transformaciones generales. Las diferencias en reglas de fundamentación provocan situaciones de conflicto entre narrativas. Por otro lado, diversas investigaciones en el área afirman que la transición de fundamentaciones empíricas a formas más abstractas o formales de justificación es lenta (Marrades & Gutiérrez, 2000; Sfard, 2008).

Se concluye que la fundamentación y confrontación de narrativas conllevan la oportunidad de progresar en la calidad de las argumentaciones empíricas y de adoptar nuevos discursos matemáticos útiles en la resolución de la tarea.

6.2 Discusión sobre los instrumentos de análisis

En esta sección se discute en torno a la eficiencia de los instrumentos metodológicos creados para y durante el análisis de datos. Aunque la reflexión se centra en la utilidad y generalización del 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva', se empieza con algunas consideraciones relativas al 'Identificador de argumentación colectiva'. Una aportación esencial de la investigación es precisamente la elaboración y aplicación de estos dos instrumentos de análisis cualitativo de datos de discusiones en grupo en clase de matemáticas. La obtención de resultados y conclusiones sobre relaciones entre la interacción en grupo y la argumentación colectiva evidencian la utilidad, idoneidad y fortaleza de estos instrumentos.

El instrumento denominado 'Identificador de argumentación colectiva' permitió reducir cada subepisodio a una tabla de triple entrada con la información básica que emerge del microanálisis de las conversaciones en grupo. Esta herramienta señala tipos de interacción, contenidos matemáticos y movimientos en la argumentación colectiva presentes en cada subepisodio así como relaciones entre estos tres aspectos. El 'Identificador' además de tener un poder explicativo, desde el punto de vista de la argumentación colectiva construida en las discusiones de cada subepisodio, fue crucial en la creación del instrumento denominado 'Descriptor de dinámica de la argumentación colectiva'. La visión conjunta de las tablas relativas a los subepisodios que conforman un episodio, guió la investigación hacia la creación de una herramienta metodológica que captara las relaciones recogidas en los identificadores de argumentación colectiva y tuviera un mayor poder explicativo sobre la complejidad de la interacción en grupo.

El 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' fue decisivo para la consecución del segundo y tercer objetivos, buscar relaciones entre tipos de interacción y examinar la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación colectiva. Por un lado, la aplicación de esta herramienta a cada episodio permitió presentar las conversaciones de cada discusión de forma lineal. Así, en los esquemas de cada episodio se muestra la continuidad de la conversación según cómo se concadenan los tipos de interacción y los avances en la argumentación colectiva, además de la complejidad de las discusiones en lo que respecta a las relaciones entre los tipos de interacción y entre estas relaciones y los avances en la argumentación. En este sentido, el 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' es una herramienta metodológicamente efectiva ya que facilita la búsqueda de patrones de interacción y plasma la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación.

Respecto a las limitaciones, hay un menor poder explicativo del 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' sobre el desarrollo de contenidos matemáticos específicos. Esta herramienta no muestra dificultades concretas ni razonamientos erróneos desde el punto de vista matemático en la argumentación colectiva. A pesar de que, en ocasiones, permite observar la evolución de un razonamiento incorrecto a uno correcto (o parcialmente correcto), no muestra en detalle qué argumentos específicos se han aportado para lograr este avance. Por otro lado, en el 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' no se representan las trayectorias de aprendizaje individual de cada estudiante. De ahí que no se puedan analizar cambios, cognitivos o discursivos, individuales que constituirían evidencias de aprendizaje.

Aunque se necesitarían evidencias empíricas para asegurar la adaptabilidad del 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' a otras investigaciones, los consideramos generalizable para estudios similares donde se examine la interacción social en conversaciones de aula. Por un lado, se remarca la utilidad de esta herramienta en la búsqueda de relaciones entre tipos de interacción, más allá de que el sistema de códigos de interacción fuera diferente al de esta investigación. El poder representativo del 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' facilita la búsqueda de regularidades mediante la comparación constante de los esquemas que surgen de su aplicación. Por otro lado, cabe la posibilidad de su adaptación a otros enfoques teóricos de la argumentación colectiva. En este estudio se han caracterizado avances en la argumentación, entendidos como contribuciones a la fundamentación de una narrativa de naturaleza matemática (explicitaciones o reformulaciones de razonamientos asociados a una narrativa expuesta, comparaciones entre expresiones algebraicas o procedimientos, etc.). En otros estudios donde se examine la argumentación desde un punto de vista estructural, se podrían adaptar los avances en la argumentación según los elementos del modelo argumentativo de Toulmin (1969), obteniendo cadenas donde la conclusión de una argumentación son los datos de la siguiente (Krummheuer, 2007).

6.3 Discusión sobre el diseño experimental

En esta sección se discute sobre la idoneidad del diseño experimental llevado a cabo en este estudio. No debe obviarse que las decisiones iniciales sobre la experiencia didáctica de clase han tenido inevitablemente influencia en los fenómenos que han acabado siendo identificados. A continuación se exponen reflexiones sobre los problemas de la secuencia, la dimensión del grupo y la gestión del aula.

Problemas de la secuencia didáctica

En relación a los problemas propuestos en la secuencia didáctica y con base en la experimentación llevada a cabo, para futuros estudios convendría introducir cambios en el segundo y cuarto problemas. Antes de pasar a describir estos cambios, cabe señalar la idoneidad en su conjunto de la secuencia de problemas, con una triple aproximación progresiva a la generalización matemática y el recurso de representación visual de patrones aritmético-geométricos.

Respecto al segundo problema, “Naranjos y pinos”, se observaron dificultades de algunos estudiantes en la identificación de las filas de naranjos como variable independiente. Este hecho obstaculizó el avance en la construcción del problema por parte de algunas parejas, que intentaron relacionar la cantidad de pinos con la de naranjos, tal vez influenciados por el primer problema de la sesión anterior en el que se demandaba la relación entre baldosas y jardineras. Al respecto, se introducirían modificaciones en el orden de las cuestiones del problema. Primero se pediría la cantidad de naranjos para el caso particular de cinco filas de naranjos y luego para *n* filas. Posteriormente se haría lo propio para la cantidad de pinos. De esta manera, se facilita la identificación de la variable independiente y se diferencian mejor las cuestiones relativas al número de naranjos y al de pinos, distanciándose así, de las cuestiones del primer problema de la secuencia.

En lo que respecta al cuarto problema de la secuencia didáctica, "Las Camisetas", durante la experimentación en el aula se observaron dificultades en torno a la relación de dependencia entre los años y la posición de las camisetas en la serie del enunciado. Este hecho obstaculizó la identificación de la variable *n* en algunas parejas y el establecimiento de la relación entre el caso particular demandando en la primera cuestión y la generalización demandada en la segunda. En este sentido, se podría introducir una cuestión entre la primera y la segunda donde se pidiera explícitamente la relación entre los años y la posición de las camisetas en la serie. Otra modificación sería introducir en la primera cuestión un caso particular relativo a un año par junto al año impar ya demandado. Esto podría facilitar la adecuación del lenguaje simbólico en las expresiones algebraicas requeridas para la generalización. Quizás la modificación más evidente seria eliminar la variable de los años en el problema y pedir directamente un caso particular que hiciera referencia a la ubicación de la camiseta. Aunque esto rebajaría considerablemente la complejidad del problema, por lo que nos inclinamos a mantener esa dificultad.

Dimensión del grupo-clase

En la comunidad científica no hay consenso sobre el tamaño "ideal" de un grupo para optimizar su productividad en términos de aprendizaje. Por ejemplo, Webb, Ender y Lewis (1986) concluyen que existe una mayor involucración y colaboración de los estudiantes cuando trabajan en pareja en comparación con grupos de tres o cuatro estudiantes. Apoyan esta conclusión en la mayor facilidad para eludir la responsabilidad de ayudar a los demás cuanto más grande sea el grupo. Así, mientras que en una pareja sería violento no responder una pregunta, en el grupo se puede asumir que la pregunta va dirigida a otra persona. Por el contrario, Fern (1982) concluye sobre la productividad en términos de generación de ideas, de las discusiones en grupos de ocho participantes en comparación con grupos de cuatro. Más recientemente, Morera (2013) ha concluido sobre la productividad matemática de discusiones en grupos de hasta veinticinco estudiantes.

Aunque hay múltiples factores que influyen en la participación de los estudiantes, se considera que la dimensión del grupo de este estudio (ocho estudiantes), facilitó su involucración en las discusiones. A lo largo del manuscrito, se ha intentado evitar en lo posible la expresión “gran grupo” precisamente por el tamaño del grupo de nuestro estudio; sin embargo, por contraste con las investigaciones en educación matemática sobre trabajo en parejas, sí puede decirse que este estudio contribuye al conocimiento de las circunstancias de la actividad matemática en grupo. Asimismo, la disposición de los estudiantes en torno a una mesa circular permitió la comunicación directa entre ellos. En este sentido se coincide con Wells (1974) en que la disposición de los estudiantes en el aula es un factor que influye en su participación.

Gestión del aula y de las tareas

Respecto a la gestión del aula y de las tareas de la secuencia didáctica, se exponen consideraciones relativas a la introducción y al uso de las normas sociales y sociomatemáticas en clase y al papel de la profesora como facilitadora de la discusión matemática de las tareas en grupo.

En lo referente a las normas sociales y sociomatemáticas, en esta investigación se convirtieron en temas explícitos de conversación durante el inicio de cada sesión con la intención de crear oportunidades en la comunicación matemática donde los alumnos tuvieran que explicitar argumentos, confrontar resoluciones y valorar diferentes aproximaciones al problema. Se perseguía crear un ambiente de indagación que fomentara la participación activa de los estudiantes en las discusiones en grupo. Para ello se siguieron las recomendaciones de Cobb, Yackel y Wood (1995) relativas a la normas durante el trabajo en pareja y las discusiones en grupo. Aunque en este estudio no se analiza la interpretación de las normas en profundidad, de los resultados se desprende que su mención explícita en las sesiones de clase tuvo un efecto positivo en cuanto a la participación de los estudiantes en la construcción de la argumentación colectiva. A pesar de ello, cabe mencionar que no se aprecia una mejoría ni un ajuste estricto en el seguimiento de algunas normas sociomatemáticas a lo largo de las sesiones. Probablemente esto es debido a la periodicidad quincenal de las sesiones, a que los alumnos no estaban habituados a negociar las normas de forma explícita en el aula regular y a que algunas de las normas son en realidad difíciles de seguir si no ha habido una práctica suficiente (Planas, 2014).

Por otro lado, se exponen consideraciones sobre el papel de la profesora como facilitadora de la participación e interacción en grupo. De los resultados se desprende que algunas acciones de la profesora reforzaron el establecimiento de las normas sociales y sociomatemáticas en el aula. Esto facilitó, en ciertos momentos, que algunos estudiantes manifestaran sus dudas o falta de comprensión respecto a razonamientos matemáticos expuestos por compañeros. Se infiere que una mayor intervención de la profesora, en lo que a contenido matemático se refiere, podría haber repercutido en un mayor aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje creadas en las discusiones en grupo. En ocasiones, se crearon oportunidades adecuadas para profundizar en conceptos matemáticos, la generalización de situaciones o el uso del lenguaje en la comunicación matemática que no fueron suficientemente aprovechadas o que incluso pasaron desapercibidas a los estudiantes. Una mayor intervención de la profesora en la gestión de las tareas podría haber aumentado cualitativamente la naturaleza matemática de varias argumentaciones.

En general, pues, para futuros estudios convendría diseñar con mayor detenimiento los aspectos de gestión de las tareas matemáticas a cargo de la profesora. Aun manteniendo una dinámica de trabajo centrada en la participación de los estudiantes, debería incrementarse el tiempo destinado a explicaciones y comentarios sobre las prácticas matemáticas realizados por la profesora en tanto que participante experta.

6.4 Implicaciones didácticas

En esta sección se reflexiona sobre implicaciones didácticas que se deprenden de este estudio en relación a la práctica educativa. A pesar de no ser un objetivo directo de la investigación realizada, han surgido varias recomendaciones didácticas para docentes en relación a la gestión de la interacción social en el aula y las discusiones en grupo. A continuación, se exponen reflexiones en torno a recomendaciones centradas en dos aspectos: en referencia al plano social y en referencia al discurso matemático de los estudiantes en la interacción en grupo.

En lo que respecta al plano social, los resultados de este estudio apoyan la idoneidad de la dinámica de aula propuesta en el diseño experimental, con el trabajo en pareja previo a la discusión en grupo. Como se ha destacado, la estructura de pareja continua presente en el grupo. El hecho de que las parejas actúen como un equipo en las discusiones en grupo, favorece la explicitación, reformulación y ampliación de razones para fundamentar una narrativa. Asimismo, las discusiones matemáticas en grupos reducidos tienen un impacto en la involucración de los estudiantes en la actividad matemática. Junto con esta elevada participación, la reflexión en torno a resoluciones construidas por otros y a las propias genera oportunidades de aprendizaje potencialmente aprovechables para todos los participantes.

Por otro lado, se recomienda el establecimiento explícito de normas sociales y sociomatemáticas en el aula de matemáticas a fin de favorecer la participación de los alumnos en las discusiones en grupo. Esta implicación didáctica está altamente validada por números estudios en el área (ver, por ejemplo, Cobb, Yackel y Wood, 1995). Aunque las normas no son objeto de estudio en esta investigación, se infiere que la alta participación de los estudiantes en las discusiones en grupo fue facilitada por la negociación explícita de las formas de regulación de la actividad. De los resultados relativos a los tipos de interacción, se desprende que algunas normas son más difíciles de introducir y seguir que otras. Así, se recomienda una pronta y sostenida introducción que permita a los estudiantes institucionalizar las normas de clase a lo largo del tiempo. En este sentido, las conversaciones explícitas sobre las normas que regulan el aula de matemáticas en general, y dinámicas concretas de ciertas actividades, favorecen su establecimiento y la creación de un ambiente de aprendizaje participativo. Junto con estas conversaciones explícitas, hay acciones del profesor que pueden reforzar de forma implícita el seguimiento y la adquisición progresiva de las normas. En esta investigación se observan dificultades en el establecimiento de la norma ‘Manifestar dificultades en la comprensión de un razonamiento expuesto’. Acciones concretas de la profesora, que incluyeron la demanda explicita de reformulación de lo expuesto, facilitaron la expresión de falta de comprensión por parte de algunos estudiantes.

En lo que respecta al desarrollo del discurso matemático en las discusiones en grupo, se recomienda que los docentes presten especial atención a las dificultades de los estudiantes con el uso e interpretación del lenguaje matemático. Aunque el lenguaje tampoco es objeto de estudio de esta investigación, en el análisis de las discusiones de aula se observaron dificultades de los estudiantes con el lenguaje simbólico, tanto en la comunicación en el grupo como en la construcción de resoluciones durante el trabajo en pareja. Siendo alumnos del último curso de la etapa de secundaria obligatoria cabría esperar un mayor dominio de la interpretación y del uso del lenguaje algebraico en enunciados con contextos extra-matemáticos. Esto nos lleva a recomendar el recurso de problemas con contextos extra-matemáticos en el aula, donde los estudiantes revisen y usen conceptos como el de variable o la relación de dependencia lineal y no lineal, que faciliten la posterior escritura simbólica de expresiones algebraicas. Aunque en nuestros datos se producen descripciones de expresiones algebraicas utilizando símbolos, se observa una alta permisividad en la falta de rigor de las expresiones expuestas. Por ello también se recomienda una mayor presencia de actividades donde se requiera el uso del lenguaje simbólico así como una mayor atención a las correcciones y adecuaciones de expresiones algebraicas expuestas mediante lenguaje oral.

De los resultados de este estudio se desprende otra problemática relativa al lenguaje en la comunicación matemática. En las discusiones en grupo que se analizaron, se observan situaciones de confrontación entre dos narrativas que se alargan en el tiempo debido a problemáticas relacionadas con el discurso matemático, más concretamente con el uso e interpretación de algunas palabras. Por ejemplo, en la primera sesión se introduce y usa la expresión del lenguaje ordinario “baldosas compartidas’ en diversas discusiones. Los estudiantes interpretan esta expresión de forma diferente, lo que dificulta y obstaculiza la comunicación matemática en varias ocasiones. Así, se recomienda el uso del lenguaje de forma clara y concisa, evitando en lo posible el uso de pronombres para referirse a objetos matemáticos o precisando el uso y significado de ciertos términos o metáforas del lenguaje ordinario en la comunicación matemática.

6.5 Limitaciones y prospectiva

En esta última sección del último capítulo, se presentan de forma conjunta limitaciones y expectativas de ampliación de esta investigación. Aunque no es nuestra intención analizar de forma exhaustiva las limitaciones del estudio, comentarios retrospectivos sobre limitaciones contribuirán a identificar posibles ampliaciones en la línea de estudio. Así, en lo que sigue, se señalan limitaciones y propuestas centradas básicamente en tres aspectos: el contexto de investigación, las teorías sociales y el discurso matemático.

Respecto al contexto y teniendo en cuenta la cantidad de alumnos en las aulas ordinarias de la mayoría de países, una de las limitaciones del presente estudio es el número de alumnos que conformaron las discusiones en grupo. En este sentido, una investigación futura consistiría en plantear un diseño experimental similar donde, tras el trabajo en pareja, las discusiones en grupo se produjeran en un aula regular (unos 30 alumnos) para comprobar la generalización de resultados relativos a la continuidad de la estructura de pareja en el grupo y a la complejidad discursiva de la interacción en la argumentación colectiva.

Otra limitación relativa al contexto de investigación es la particularidad didáctica de este estudio, donde se analizan tres sesiones de clase dirigidas al trabajo de la transición de la aritmética al álgebra elemental. Este hecho impide generalizar los resultados encontrados a otros dominios de las matemáticas. Futuras investigaciones donde se exploren patrones básicos de interacción y la composición de los mismos en otros dominios, permitirían afianzar y ampliar las conclusiones relativas a la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación colectiva obtenidas.

Por otro lado, en cualquier práctica matemática influyen conjuntamente múltiples factores, cuya consideración por separado puede llevar a conclusiones desviadas. En esta investigación, con la deliberada intención de centrarnos en aspectos sociales y comunicativos de la interacción en clase de matemáticas, se han omitido importantes aspectos de las dimensiones cognitiva, afectiva, cultural, instruccional, etc. A pesar de que en este estudio abrazamos conceptos que provienen de diferentes teorías sociales en educación matemática, no se consideraron enfoques alternativos que podrían haber enriquecido los análisis. . En este sentido, la introducción de la teoría del posicionamiento desarrollada por Harré y Van Langenhove (1999) podría dar continuidad al presente estudio. Considerando los recientes trabajos de Wagner y Herbel-Eisenmann (2009) sobre la noción de posicionamiento, se propone relacionar los resultados relativos a los tipos de interacción con el posicionamiento de los estudiantes, desde el punto de vista de la interacción entre ellos (posición inmanente) y de la interacción con la actividad matemática (posición trascendente). Adecuando así los tipos de interacción, una línea de investigación a seguir sería explorar las diferencias en la estabilidad de los posicionamientos en las interacciones en parejas y en el grupo.

En lo que respecta al discurso matemático de los estudiantes, aunque en el presente estudio no se realiza un estudio detallado de las dificultades de en la comunicación matemática, sí se apuntan situaciones de confrontación que se alargan en el tiempo debido a problemáticas relacionadas con el uso de partes específicas del discurso matemático. Así, analizar con detalle el origen de estas dificultades desde la perspectiva del marco comognitivo (Sfard, 2008) sería otro modo de dar continuidad a esta investigación.

Hay, pues, varias posibles direcciones futuras con sentido, algunas de ellas originadas precisamente a partir de lo que pueden considerarse limitaciones en la presente investigación. Una vez más, las limitaciones son potenciales puntos de partida de refinamientos y mejoras.

7. Conclusions

In this final chapter we present a joint interpretation of the results in order to foster our understanding of the relationships between group interaction and collective argumentation that are relevant to teaching and learning mathematics. Firstly, we address the guiding research question: *How is collective argumentation constructed in group interaction in a secondary mathematics classroom?* Secondly, we discuss the usefulness of the tools created for and from our data analysis along with possible future applications to similar researches. Thirdly, we reflect on the suitability of the experimental design carried out. To finish, educational implications as well as constraints and forecasts are considered.

.

Table of contents

6.1 Discussion on the construction of collective argumentation

Four major phenomena have been identified on the approach towards answering the question, *How is collective argumentation constructed in group interaction in a secondary mathematics classroom?* Being facts that have been empirically proven and theoretically corroborated, these phenomena may be seen as strongly founded in the field of mathematics education and the tradition of design research within the field. The relevance of putting together collective argumentation and group interaction as a topic of study has been scientifically validated by means of various results. Many documented and analysed examples point out classroom group interaction as a privileged setting where mathematical meanings emerge and promote the development of collective processes of argumentation.

In what follows, we describe the four phenomena and reflect on them. The empirical basis for all of them can be found in the chapter with the results. The strategy in the description of each phenomenon is an introduction by means of a title linked to an explanation with evidence from results and theories.

The complexity of interaction and collective argumentation

Most results point to the high complexity of group interaction and mathematical conversation among students. The construction of collective argumentation is achieved through particular interrelated actions accompanied by turns of participants in the discussion. Argumentation is developed through the exposition of mathematical contents in the various actions and turns included in a narrative. These contents are used by participants to update the status information about the narrative under discussion and to influence the corresponding reactions in the group by other participants.

As expected, multiple results point to the fact that the interdependence of the students' actions is more complex in group than pair work. Although group communication can be often considered bilateral because the conversation is focused on two of the participants, various speakers with different reaction times, degrees of engagement, forms of participation, etc. actually coexist. Concerning an action or a turn, we obtain different reactions from different speakers, with some of these reactions not being immediate or consecutive. Drawing on group interaction as a system of interdependent actions and turns, it is very relevant that some student's reactions are not immediately consecutive to what and to whom they react to, often being quite far in time during the same lesson. Hence the involvement in collective argumentation can be difficult for the student, not only in terms of the mathematics but also in terms of the discontinuities in the communication dynamics. In order to update the contents related to the mathematical narrative under discussion, a student requires following and integrating several interactions in the group. To follow a discussion asks for remembering and retrieving prior agreements regarding mathematical contents covered in the lesson, some of which may have not been overtly stressed or may have not received special emphasis on the part of any participant.

Along with complexity, there are associations between two types of interaction that appear regularly in group discussion. These types have been called basic patterns of interaction with potential for collective argumentation. Results show that important moments of group interaction can be characterized through basic patterns of interaction and compositions among them. This is consistent with the results reported by Sacks (1998) about 'adjacency pairs' in his analysis of speaking turns and conversation. In his work Sacks examines the sequential organization of conversation exchanges, while in this research associations between types of interaction are considered. The focus is different but there are still relevant similarities. Sacks concluded the existence of sequences of two utterances, called by him 'adjacency pairs', which are relatively connected and ordered (an example of an adjacency pair would be 'offering-rejection'). Although, in principle, the parts of an adjacency pair are contiguous, it may happen that a pair can be opened in a turn and not be closed until a later turn in the conversation occurs. Sacks detected situations where, between the first and the second components of a pair, there is another pair inserted or situations where several adjacency pairs occur. These two ways of expanding an adjacency pair are consistent with two of the techniques of composition detected in this study, *inserting* and *assembling*.

As said above, within the system of interdependent interactions in the group, there are some regular relationships between particular types of interaction. We claim that these basic patterns of interaction correspond to an analytically isolable situation in the group with specific impact on the development of collective argumentation. In other words, the mathematical product of the basic patterns of interaction acts as a contributor to collective argumentation oriented toward the resolution of the mathematical tasks. It could be expected that contributions to the argumentation resulting from the composition of a varying set of basic patterns would be qualitatively more sophisticated than those resulting from a single basic pattern. This research provides empirical evidence supporting the absolute frequency of this statement, but there are also examples in which an increase in the quality of argumentation does not appear as resulting from the composition of basic patterns of interaction. Thus, it cannot be concluded that greater complexity in the structure of the interaction implies higher mathematical quality in the emerging constructed arguments.

Pair structure in the group and learning opportunities

The second major phenomenon arising from this study is the preservation of the pair structure in group interaction. Moreover, results suggest that the consolidation of the pair relationship in the group has a positive effect on the construction of collective argumentation aimed at the resolution of the mathematical tasks. Many narratives are developed together by the two students of a pair so that one of them complements, corrects or gives further information about what the other has said or is saying in the context of the group. Mostly, the interventions of one of the students take place without directly addressing to the other, but following Goffmann (1981), it can be claimed that the initiative by the peer is taken as a consequence of indirectly expressed references.

More generally, high attention and direct participation of a student is detected close to the moments when his/her peer in pair work intervenes in the group discussion; this situation reminds us of the role of authors in the discussion by Krummheuer (2011) and how they are conformed in interaction. In brief, it has been seen that the two students of a pair experiment high involvement and attention to the mathematical information provided by the peer, whether participation in the group is being direct or indirect at that moment. From this perspective, the participation of one member of the pair is seen direct although the other member has not explicitly assigned the next turn to him/her, or even if it has been assigned to other members of the group with whom he/she has not shared pair work.

Keeping and strengthening the pair structure in the group go together with two dominant scenarios: the interaction between members of a pair and the interaction between the pair and the group. The first scenario illustrates an interaction between the two students of a pair in which one of them talks, the peer is indirectly referenced to, and the rest of participants may join the discussion but it is the peer who plays the most active role in the construction of the narrative under discussion. While other students in the group can participate and support the construction of that same narrative, it is the members of a pair who pose themselves as a team relating an ongoing reasoning to an audience. According to Krummheuer (2011), the pair takes the role of “production design” in the group, without being excluded the social and mathematical participation by the other students and the teacher.

Under the assumption that the form of the students’ participation in the classroom is determinant to mathematical learning, the role of the pair structure in the group is seen productive in terms of the creation of learning opportunities. On the one hand, although the contributions of one of the members of the pair may seem not to be substantial to the construction of the narrative, the commitment to listen and carry out actions that complement the exposed mathematical content -without being directly chosen for this purpose- is a positive condition for the learning process. On the other hand, the joint construction of a narrative by the two members of a pair implies the communication of the task resolution in a way and with contents that could not have been otherwise individually achieved. These circumstances create learning opportunities by means of facilitating the restructuring of mathematical meanings. Further, the participation of the pair also represents a learning opportunity for the other students in the group who, regardless of their direct participation in the construction of the narrative under discussion, are potential receivers of the mathematical information and are susceptible to experience conceptual and interpretative changes in their understanding.

As discussed in the results, the participation may be explicitly direct for the two members of a pair on some occasions. Thus, the intervention of a member is targeted and offers the next turn to the other member. These are relatively short sequences, over three or five turns, where the two members reflect together on issues discussed in the group. Unlike discussions focused on narratives directly connected with particular features of the problem, these reflections imply high levels of abstraction, with more general conclusions connected to mathematical concepts or processes. For instance, if an inductive reasoning has been explained during the substantiation of a narrative, the reflection can appear about the application of the inductive method beyond the specific reasoning in discussion. Despite the private nature of the pair conversations, they take place in public and consequently any participant can take advantage of the created learning opportunities. According to Sfard (2008), having students in direct contact with new discourses, which in our case arise from discussions around specific narratives, enables meta-learning.

We conclude that the strengthening of the pair structure in the group supports the creation of (meta-) learning opportunities related to mathematics. Moreover and despite the more direct participation of the members of the pair, all participants are exposed to the pair narrative and can take advantage of them.

Confronting narratives and emerging difficulties

The characterization of collective argumentation using composition of patterns has led to identify situations in which the confrontation between two narratives persists more than it could be expected for several moments during a lesson. A closer look at these situations reveals that, beyond the potential experience of cognitive conflicts, confronting narratives persist or arise from the co-existence of discourses that differ in the use of certain words or in the rules of substantiation. Accordingly, the existing conflict in these situations is close to the commognitive conflict developed by Sfard (2008). This concept implies that the resolution of the conflict lies in giving meaning to the others' thinking (and therefore to the speech) and finding out the internal logic of the other's mathematical discourse.

Although there might be progress on solving the task, from the perspective of the mathematical content and its contribution to collective argumentation, the apparently disconnected discourse in the discussion hinders any negotiation of meanings. Empirical evidence shows a non-effective communication occurring when participants use the same words or expressions to point different things. The involvement and cooperation of the students in the resolution of the task is not productive from the perspective of the ability to reach agreements between confronting narratives. Thus, mathematical communication becomes an obstacle to the development of collective argumentation by adding obstacles to progress in mathematical elaboration and interpretation. These results are consistent with those reported by Sfard and Kieran (2001) who point out that the student's interaction does not always facilitate access to mathematical learning. Accordingly, we claim the need for effective communication in which all participants know what is being said, by which words and based on what rules.

We have detected that the use of visual mediators in the conversation, that are the graphical representations in the problem wording, does not help to achieve an effective and coherent discourse. Visual mediators facilitate that distinct interpretations of the same expression are made public. Consequently, the conflict among interpretations to be solved within the group is made explicit. From this, we conclude that the underlying mathematical interpretation of an expression persists despite having reasons or even visual effects to dismiss it. This fact points out the difficulties to modify the relationship between a word and the mathematical object that it represents when the word has been established. In this regard, Sfard (2008) claims that the relationship between what we are able to represent and what we are able to say is reflective, hence, changes in the discourse are required to have access to new possibilities for real experimentation.

This study provides empirical evidence that confirms the existence of difficulties in the attempts to modify the mathematical discourse, in terms of the use and interpretation of certain words. This fact may be interpreted as an obstacle to achieve the understanding of mathematical contents, but also as an obstacle to the development of concrete aspects of collective argumentation.

Substantiation of narratives in collective argumentation

This research reveals that group interaction facilitates explanation, reformulation and emphasis on mathematical reasoning underlying narratives aimed at solving the corresponding task. From a mathematical point of view, re-voicing an idea might not represent a significant contribution to the resolution of a problem, but it could contribute to the understanding of a solution for the student who reformulates the idea as well as for the other participants. As Krummheuer (2011) did, we claim that a student can generate reflections from the reformulation of an argument that leads to internal restructuring of mathematical ideas. In this regard, we have identified that students often incorporate in their reformulations some of the exposed prior arguments in the lesson. This cannot imply that learning has occurred, but it does make it logical to conclude about the existence of potentially useful learning opportunities to be exploited. The expression of the ideas by one own or by the others is as indicator of learning opportunities taking place in the construction of collective argumentation among students.

Although explanation and reformulation of reasoning contributes to progress of collective argumentation, it has been documented that students build their substantiations using, basically, empirical arguments, with an important lack of abstract justifications and formal proofs. These empirical arguments are established on perceptively accessible features of concrete objects. In turn, these features are illustrated using the graphical representation of particular cases provided in the wording of the problems. In this regard, we observe different types of empirical arguments according to the use of particular cases as an element of reasoning. These results are consistent with those reported by Marrades and Gutiérrez (2000), who described different justification forms used by secondary students when solving geometric problems in a dynamic software environment.

Coming back to the confrontation of narratives, we have detected that the different use of particular cases to substantiate a narrative interferes with the understanding of reasoning. Often it is noted that students base their arguments on the visual perception of a concrete particular case. They assume that the validity of the reasoning depends on its applicability to the concrete example. However, on other occasions, a particular case is used as a generic example to illustrate an abstract reasoning or general transformations instead. Differences in the rules of substantiation cause conflict between narratives. Several investigations in the field claim that the transition from empirical arguments to a more abstract or formal justification forms is a slow process (Marrades & Gutiérrez, 2000; Sfard, 2008).

In relation to the fourth phenomenon, we conclude that the substantiation and confrontation of narratives provide opportunities to improve the quality of the empirical arguments and to learn new mathematical discourses with new narratives that are useful for the resolution of the mathematical tasks.

6.2 Discussion on the methodological tools

In this section, we discuss the efficiency of the methodological tools developed for the purpose of this study. Although the discussion is focused on the usefulness of the 'Descriptor of Collective Argumentation Dynamic' as well as its possible application in future similar researches, we introduce some considerations on the 'Identifier of Collective Argumentation'. A crucial contribution of this research is precisely the elaboration and the application of these two instruments to the analysis of data coming from group discussions in mathematics classrooms. Results and conclusions about group interaction and collective argument highlight the usefulness, suitability and strength of the instruments.

The instrument called 'Identifier of Collective Argumentation' allows reducing each sub-episode to a triple input table with basic information that emerges from the group conversation microanalysis. This instrument identifies types of interaction, mathematical content and movements in collective argumentation within each sub-episode as well as relationships between these three aspects. The 'Identifier' has an explanatory power of the kind of collective argumentation that has been constructed in the discussions of each sub-episode. In addition, it is crucial for the development of the instrument called 'Descriptor of Collective Argumentation Dynamics'. The joint vision of the tables from the sub-episodes that make up an episode guides the research towards the creation of a tool to grasp the relationships described in the identifiers of collective argumentation and provides a broad explanation of the complexity in group interaction.

The ‘Descriptor’ became decisive in achieving the second and third scientific goals, that is, to connect types of interaction and to examine the complexity of the interaction in the construction of collective argumentation. On the one hand, the application of this tool to each episode allowed “linearly” representing collective argumentation. By using this tool, a conversation can be presented as a consecutive and jointed concatenation of types of interaction and collective argumentation progresses. It also serves to represent the complexity of the discussions regarding the relationship between types of interaction as well as between these relationships and progress in collective argumentation. Accordingly, the ‘Descriptor’ is a methodologically effective tool since it facilitates the search for interaction patterns and grasps the complexity of the interaction in the construction of argumentation.

Attending to the limitations of the ‘Descriptor’ in comparison to the ‘Identifier’, it is a tool with a less explanatory power regarding the development of specific mathematical contents. It does not indicate mathematical particular difficulties or incorrect arguments in collective argumentation. Occasionally it points to the evolution from an incorrect reasoning to a (partially) correct one, but specific arguments given to achieve this progress are not shown in detail. On the other hand, individual learning trajectories of each student are not represented in the ‘Descriptor’. As a result, cognitive or discursive individual changes that would constitute evidence of learning cannot be analysed.

Although empirical evidence is needed to claim the adaptability of the ‘Descriptor’ to other researches, we consider that it could be applied to similar studies in which social interaction in classroom conversations are examined. We highlight the usefulness of this tool to search for relationships between types of interaction, although the interaction coding system was different. The representative power of the ‘Descriptor’ simplifies the search for regularities through constant comparison of schemes arising from its application. Also, it might be adapted to other theoretical approaches of collective argumentation. In this study progresses in argumentation have been documented as mathematical contributions to the substantiation of a narrative (explanations or reformulations of reasoning associated with an exposed narrative, comparisons between algebraic expressions or procedures, etc). In other studies that examine argumentation from a structural point of view, argumentation progress could be adjusted according to the elements of the argumentative model by Toulmin (1969), with chains where the conclusion of an argument is the data in the following argument (Krummheuer, 2007).

6.3 Discussion on the teaching experiment

In this section we discuss the suitability of the teaching experimental carried out in this study. It should be taken into account that the initial decisions about the kind of classroom teaching experiment have had unavoidable influence on the kind of phenomena identified. In what follows, we reflect on the tasks of the sequence, the size of the group and the classroom management.

Tasks of the teaching sequence

Regarding the proposed tasks of the teaching sequence and based on the teaching experiment conducted, we consider some modifications in the second and fourth tasks that might be considered in future researches. Before proceeding to describe these changes, it should be noted the suitability of the tasks of the sequence as a whole based on a triple progressive approach to mathematical generalization and the use of visual representation of arithmetic-geometric patterns.

Concerning the second problem, ‘Orange trees and pines’, we note students’ difficulties to identify the rows of orange trees as an independent variable. This hindered the progress in the construction of the problem by some pairs who attempted to relate the amount of pines with the amount of orange trees. This might have occurred because, in the first problem of the previous lesson, the relationship between floor tiles and green boxes was required. In this regard, we would introduce modifications related to the order of the questions in the problem. The amount of orange trees would first be asked for the particular case of five rows of orange trees and then for *n* rows. In relation to the pines we would consider the same modification. Such modifications should help students to identify the independent variable and to distinguish better between the questions related to the number of orange trees and the number of pines, making the difference with the questions of the first problem of the sequence clearer.

In relation to the fourth problem of the teaching sequence, ‘T-shirts’, we detected some difficulties during the experimentation in the classroom. These difficulties are mostly related to the dependent relationship between years and T-shirts position in the sequence given in the wording. This hampered the identification of the *n* variable and the determination of a relationship between the particular case required in the first question and the generalization required in the second one. A complementary question could be introduced between the first and the second question in which the relation between the year and the T-shirts position in the sequence should be asked. Another recommendable modification would be to introduce in the first question a particular case related to an even year along with the odd year already asked. This could facilitate the use of the symbolic language involved in the representation of algebraic expressions. Perhaps the most evident modification would be to eliminate the variable of the years in the problem and to directly request a particular case referring to the location of the T-shirt. This would reduce considerably complexity, but we are inclined to keep this difficulty.

Size of the group discussion

There is not an agreement in the field on the “ideal” size of a group to optimize productivity in terms of learning. For instance, Webb, Ender and Lewis (1986) conclude that students’ collaboration and participation are higher when they work in pairs compared to groups of three or four students. These authors claim that students have more occasions to evade the responsibility of helping others in a large group. While in a pair it would be inappropriate not to answer a question, in the group students can assume that the question is addressed to someone else. By contrast, Fern (1982) confirms the productivity in terms of generating ideas that came out of discussions in groups of eight participants compared to discussions in groups of four. More recently, Morera (2013) documented the mathematical productivity that comes on group discussions of twenty-five students.

Although there are many factors that influence students’ participation, we consider that the size of the group in this study (eight students around a circular table and the teacher) is adequate to foster involvement in discussions. Throughout the manuscript, as far as it was possible, efforts were made to avoid the term ‘large group' due to the size of eight plus one. However, in contrast to studies in mathematics education that has dealt with pair work, it can be said that this study contributes to the understanding of issues related to mathematical activity developed in group. In line with Wells (1974), we suggest that the disposition of the students around a circular table in the classroom was a determinant of participation based on face-to-face direct communication.

Classroom and tasks management

Regarding classroom and tasks management of the teaching sequence, we point out some considerations related to the introduction and use of social and socio-mathematical norms in classroom and the role of the teacher as facilitator of mathematical discussion on the task during group work.

Concerning social and socio-mathematical norms in this research, they became explicit topics of conversation at the beginning of every lesson. This was done in order to create opportunities in the mathematical communication where students might explain arguments, compare resolutions and evaluate different approaches to the problem. The aim was to develop an inquiry environment that fosters active participation in group discussion. For this purpose, we considered Cobb, Yackel and Wood's (1995) recommendations concerning norms for pair work and group discussion. Although the interpretation of the norms is not analysed in this study, results suggest that the negotiation in the lessons had a positive effect on the students' participation towards the construction of collective argumentation. However, it is worth saying that neither improvement nor strict adjustment to some socio-mathematical norms has been appreciated throughout the sequence. Further it is know that the adjustment to some norms is not easy if there is not enough practice and modelling around them (Planas, 2014), and if the students are not used to negotiate the norms in the regular classroom.

On the other hand, we reflect on the role of the teacher as facilitator of the students' participation and interaction in group. Results suggest that some actions of the teacher reinforced the introduction of social and socio-mathematical norms in the classroom. On certain occasions, this facilitated that some students expressed their doubts or lack of understanding of mathematical reasoning exposed by others. It may be inferred that a more interventionist role of the teacher in the management of the mathematical content, would have provided the creation of more learning opportunities during group discussion. We claim the existence of unexploited learning opportunities in relation to the deeper understanding of mathematical concepts, the generalization of particular situations, or the use of formal algebraic language in the communication of mathematical arguments.

Overall, for further studies it is sensible to pay special attention to the management aspects of mathematics tasks by the teacher. Despite the eventual maintenance of a classroom dynamics focused on the students' participation, time devoted to explanations and clarification of mathematical practices carried out by the teacher, as an expert participant, should be increased.

6.4 Educational implications

In this section we reflect on educational implications emerging from this study in relation to school educational practice. Although it is not a direct target of this investigation, several educational recommendations for teachers related to the management of social interaction in classroom and group discussion have been raised up. We reflect on recommendations focused on the social level and referring to the mathematical students' discourse in group interaction.

Regarding the social level, findings of this study support the suitability of the class dynamics proposed in the teaching experiment, with pair work preceding group discussion. As it has been said, pair structure is still present in the group. The fact that pairs act as teams in group discussions encourages explanation and reformulation of arguments to substantiate a narrative. Similarly, mathematical discussions in small groups have an impact on the involvement of students in mathematical activity. Alongside with high participation, the reflection on narratives constructed by the students and by others generates potentially useful learning opportunities for all participants.

On the other side, we suggest the explicit negotiation of social and socio-mathematical norms in the mathematics classroom as a way to encourage student participation in group discussions. This claim is validated by many studies in the field (for example, Cobb, Yackel & Wood, 1995). Although the modification of norms is not a specific goal in this research, we have documented that participation of students in group discussions was facilitated by explicit conversations about activity regulation. The findings regarding the types of interaction indicate that some norms are more difficult to introduce than others. Thus, we suggest an early and sustained introduction that allows students to institutionalize classroom norms over time. Accordingly, explicit conversations about the norms regulating the mathematics classroom, and specific dynamics of certain activities, support its establishment and the creation of a collaborative learning environment. Together with explicit conversations, some specific actions of the teacher may implicitly reinforce a progressive adjusting to the norms. For instance, we detected obstacles to the adjusting to the norm 'Expressing difficulties in the understanding of an explained reasoning'. Concrete actions by the teacher, that included the requirement of an explicit reformulation, facilitated the expression of lack of understanding by some students.

Regarding the development of mathematical discourse in group discussions, we recommend that teachers pay special attention to difficulties of students with the use and interpretation of mathematical language. Although language issues are not an aim of this study, in the analysis of classroom discussions we observed several students' difficulties with symbolic language both in group communication and pair work. Being final year students of the secondary school, it would be expected a greater proficiency in the interpretation and the use of algebraic language in wordings with extra-mathematical contexts. This leads us to recommend the use of problems with extra-mathematical contexts in classroom, where students are asked to review and use concepts such as variable and linear and non-linear dependence, that facilitate the further symbolic writing of algebraic expressions. In our data students describe algebraic expressions by using symbols, but there is high tolerance in the algebraic expressions during mathematical communication. Accordingly, it is also recommended to include more activities where the use of symbolic language is required in the instructions as well as special attention to correction of algebraic expressions exposed through oral language.

Results of this study illustrate further problems related to language in mathematical communication. In group discussion, there exist confrontations between two narratives that remain in time due to difficulties related to the use and interpretation of certain technical words of the school mathematics discourse. For example, at the first session students introduce and use the expression “shared tiles” in different discussions. They use this expression with different assigned meanings, which hinders mathematical communication. Thus, a clear and precise use of language is recommended, avoiding the use of pronouns referring to mathematical objects or specifying the use and meaning of certain expressions or metaphors of the ordinary language in the mathematical communication.

6.5 Constraints and forecasts

In this final section of this last chapter, constraints and broadening expectations of the investigation are jointly presented. Although it is not our intention to analyse thoroughly the constraints of the study, retrospective comments about limitations help to identify possible forecasts on the line of study. We point out constraints and forecasts basically focused on the research context, the role of social theories and the notion of mathematical discourse.

With regard to the context of the research and taking into account the number of students in regular classrooms for most countries in the world, one of the constraints of this study is the number of students who participated in the group discussions. We suggest a future research based on a similar teaching experiment where, after pair work, the group discussions would occur in a classroom of about thirty students. This would help to confirm the results relating to the continuity of the pair structure in the group and the discursive complexity of interaction in the creation of collective argumentation.

Another limitation on the research context is the didactical particularity of this study, where only three lessons were planned for work on the transition from arithmetic to elementary algebra. This impedes any attempt to generalise the results obtained in this study, not only to other mathematical domains, but also to the domain of early algebra itself. Further investigations on basic patterns of interaction and ways of composition in other domains might revise and expand conclusions concerning, for instance, the discursive complexity of interaction.

There are multiple factors that jointly influence any mathematical practice, for which a separate consideration may lead to biased conclusions. In this study, with the deliberate intention of focusing on social and communicative aspects of the interaction in the mathematic classroom, we have not considered some important aspects of cognitive, emotional, cultural, instructional, and other dimensions. Although we embrace concepts from social theories in mathematics education, we have not included additional approaches that might have enriched the analysis. In this regard, the introduction to the positioning theory developed by Harré and van Langenhove (1999) could give continuity to this study. Considering studies by Wagner and Herbel-Eisenmann (2009) about the notion of positioning, we suggest connecting results regarding types of interaction with students' positioning, from the standpoint of the interaction between them (immanent position) and the interaction with mathematical activity (transcendent position). By adapting types of interaction in this way, a future line of research could be to explore the differences in the stability of positions in pair and group work.

Regarding the notion of mathematics discourse, it is our intention to examine it in more detail in future studies. Although we have not examined the difficulties of communicating mathematics discourse, we have pointed out conflicts that remain in time due to difficulties related to the use of specific parts of the school mathematics discourse. A detailed analysis of the origin of these difficulties from the commognitive framework (Sfard, 2008) would be another way to follow up this research, which requires a more precise theoretical foundation on discourse.

We have suggested several meaningful future directions, some of them arise from what can be considered limitations in this research. Once again, constraints become potential starting points for refinements and improvements.

Resumen

El trabajo de tesis doctoral ‘Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas’ constituye una aportación a la investigación en Educación Matemática enmarcada en el ámbito de las teorías sociales del aprendizaje. En particular, para el análisis de procesos de aprendizaje en el aula de matemáticas de secundaria se considera la dimensión discursiva. La interpretación práctica de esta dimensión se corresponde con el estudio de la construcción de argumentación colectiva en interacción en grupo.

La pregunta de investigación que ha guiado este trabajo es: *¿Cómo se construye la argumentación colectiva durante la interacción en grupo en una clase de matemáticas de secundaria?* La concreción de esta pregunta se realiza mediante tres objetivos de logros consecutivos: 1) Identificar tipos de interacción en discusiones en grupo de un aula de matemáticas; 2) Relacionar los tipos de interacción desde la perspectiva de la argumentación colectiva; y 3) Explorar la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación colectiva. Para la consecución de estos objetivos, se realiza un diseño experimental en una clase de secundaria de un centro de Barcelona con alumnos de 14 y 15 años.

El marco teórico tiene dos ejes de desarrollo principales. En primer lugar se fundamenta teóricamente la introducción en el aula de contenidos de pensamiento algebraico mediante la generalización a través de patrones en un ambiente de resolución de problemas. Se consideran también las recomendaciones de la literatura en torno al papel de la visualización en los procesos de generalización y las dificultades iniciales del pensamiento algebraico. Estas recomendaciones se incluyen en el diseño de los problemas de la secuencia didáctica. En segundo lugar, se introducen aspectos del interaccionismo simbólico como marco específico dentro las teorías sociales en Educación Matemática. Desde esta perspectiva, se exponen consideraciones sobre las normas sociales y sociomatemáticas que luego se incluyen en el diseño experimental. Posteriormente se introduce el enfoque

teórico adoptado en este estudio en torno a las nociones de comunicación, discurso matemático y argumentación colectiva.

Se realiza un diseño metodológico acorde con los principios teóricos, la pregunta y los objetivos de investigación. En la elaboración de la secuencia didáctica de resolución de problemas de generalización a través de patrones, se atiende a las recomendaciones de la literatura. En su implementación se considera una dinámica de aula basada en el trabajo en pareja seguido de una discusión en grupo donde la profesora ejerce un papel poco intervencionista. En segundo lugar, en la consecución del primer objetivo, se establece una familia de códigos de interacción y otra de contenido matemático mediante la aplicación de métodos de comparación constante a datos de las discusiones en grupo. Para la consecución del segundo y tercer objetivos, se diseñan dos instrumentos de análisis inéditos con el fin último de identificar regularidades y examinar la complejidad de la interacción en la construcción de la argumentación colectiva.

El procedimiento de análisis se basa en la aplicación de métodos de comparación constante y sigue una línea constructiva acorde con los objetivos. Los datos de cada sesión se segmentan en episodios que hacen referencia a las discusiones relativas a cada cuestión del problema. Cada episodio es segmentado a su vez en subepisodios según el contenido matemático en discusión. Una vez realizado el análisis narrativo de cada subepisodio a partir de los códigos de interacción y de contenido matemático, se aplica el 'Identificador de argumentación colectiva'. Esta herramienta de análisis permite reducir cada subepisodio a una tabla de triple entrada con la información básica que emerge del microanálisis de las conversaciones en grupo. El 'Identificador' señala tipos de interacción, contenidos matemáticos y movimientos en la argumentación colectiva presentes en cada subepisodio así como relaciones entre estos tres aspectos. Posteriormente, el análisis se focaliza en los episodios mediante la aplicación del 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva'. Esta herramienta de análisis permite presentar una conversación de forma continua mediante la concatenación conjunta y articulada de tipos de interacción y avances en la argumentación colectiva.

La aplicación del 'Descriptor de dinámica de argumentación colectiva' a todos los episodios sirve para hallar patrones básicos de interacción, que son regularidades en las relaciones entre tipos de interacción. Los patrones están formados por dos tipos de interacción contiguos cuyo efecto es un avance concreto en la construcción de argumentación colectiva orientada a la resolución de la tarea matemática. Más en general, los patrones suponen un avance en la comprensión de la estructura comunicativa de la discusión en grupo que sostiene la actividad matemática.

El logro del segundo objetivo de investigación permite avanzar hacia la consecución del tercero mediante la identificación de combinaciones entre patrones básicos de interacción. Se han hallado tres técnicas o mecanismos de composición que permiten mostrar y examinar la complejidad inherente a la interacción en grupo, a saber: ensamblaje, substitución e inserción. El primer tipo hace referencia a la unión de patrones donde el producto del primero es el inicio del segundo. Los otros dos tipos hacen referencia a situaciones en las que la primera y la segunda parte de un patrón no son consecutivas de modo que o bien otro patrón substituye una de las partes o bien aparece en medio de las dos partes del patrón inicial.

De los resultados se desprende la complejidad de la interacción en grupo al identificarse reacciones de estudiantes que aluden a acciones no inmediatamente anteriores, pudiendo ser lejanas en el tiempo en una misma sesión de clase. Así la actualización de los contenidos matemáticos a debate precisa que el estudiante siga múltiples interacciones y recuerde y recupere acuerdos previos respecto a ciertos contenidos matemáticos discutidos en mayor o menor medida con anterioridad.

Dentro de este complejo sistema de interacciones interdependientes en la discusión en grupo, existen patrones básicos de interacción que representan una situación aislable en el grupo y que conllevan un impacto específico en el progreso de la argumentación colectiva. Aunque la composición de patrones básicos implica la interconexión de diversas contribuciones a la argumentación colectiva, no se puede concluir que una mayor complejidad en la interacción repercuta en una mayor calidad de la argumentación.

Uno de los fenómenos novedosos que emergen de este estudio es la conservación de la estructura de pareja en la interacción en grupo. Se concluye que la consolidación de la estructura de pareja en la discusión en grupo favorece la creación de oportunidades de aprendizaje sobre contenidos relacionados con la resolución de la tarea. En menor grado este fenómeno también tiene un impacto en la creación de oportunidades de meta-aprendizajes sobre significados matemáticos. A pesar de que estas oportunidades surjan de una comunicación bilateral al haber básicamente dos participantes involucrados, pueden ser aprovechadas por todos los participantes del grupo. De este aprovechamiento no se habla en el estudio, pero sí abundan datos que apuntan a evidencias en este sentido.

Por otro lado, se confirma la dificultad de los estudiantes por modificar su discurso matemático, desde el punto vista del uso e interpretación de ciertas palabras, y se ve cómo este hecho supone un obstáculo en la comprensión de contenidos matemáticos. Otro obstáculo en el progreso de la argumentación colectiva detectado proviene del diferente uso de casos particulares en argumentaciones empíricas de los estudiantes. A pesar de esto, se concluye que la fundamentación y confrontación de narrativas conllevan la oportunidad de progresar en la calidad de las argumentaciones empíricas y de adoptar nuevos discursos matemáticos útiles en la resolución de la tarea.

En términos generales se confirma la idoneidad del diseño experimental con base en la introducción de determinadas normas sociales y sociomatemáticas en el aula, la dimensión reducida del grupo, la aproximación progresiva a la generalización matemática y la inclusión de representación visual en los problemas de la secuencia didáctica. Aún así, se sugieren modificaciones que apuntan a un aumento de la participación de la profesora en momentos concretos de la discusión de grupo.

Respecto a recomendaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas en el aula, del estudio se infiere la necesidad de que el profesorado de matemáticas preste especial atención 1) al contenido y al uso e interpretación de ciertas palabras en el discurso matemático de los estudiantes; y 2) a la introducción y continuidad de conversaciones explícitas sobre las normas sociales y sociomatemáticas que regulan las actividades del aula. Asimismo una dinámica de aula que contemple el trabajo en pareja y la discusión en grupo se considera positiva para la construcción de la argumentación colectiva en clase de matemáticas.

Summary

The PhD dissertation entitled ‘Impact of group interaction in the construction of collective argumentation in the mathematics classroom’ constitutes a contribution to the field of Mathematics Education and the tradition of social theories of learning. In particular, the discursive dimension is related to the understanding of learning processes in the secondary mathematics classroom. The practical interpretation of this dimension is linked to the exploration of how collective argumentation is constructed in group interaction.

The key guiding question is the following: *How is collective argumentation constructed in group interaction in a secondary mathematics classroom?* To address this question, three goals of consecutive attainment have been posed: 1) Identifying types of interaction in group discussions in a mathematics classroom; 2) Connecting types of interaction from the perspective of collective argumentation; and 3) Exploring the complexity of the interaction in the construction of collective argumentation. To achieve these goals, a teaching experiment has been designed with a group of 14 and 15-year-old students in a school of Barcelona.

The framework is based on the development of three main axes. First, it is examined the approach to contents of algebraic thinking by generalizations through patterns in solving problem classroom dynamics. In addition, recommendations from the literature about the visualization in generalization processes and initial difficulties in algebraic thinking have been considered. Such recommendations have been useful in the design of tasks for the teaching experiment. Moreover, issues from the symbolic interactionism tradition within social theories have been introduced as a specific frame for the research. From this perspective, reflections on the socio and sociomathematical norms included in the created teaching experiment are presented. Thereupon, the approach to the notions of mathematical communication, discourse and collective argumentation are discussed.

The methodological design has been created in accordance with the theoretical position, the research question and the scientific goals. The design is first composed of a teaching sequence of problems on generalisation through patterns in line with suggestions from the literature. For the implemented instruction, a lesson dynamic with work in pairs and group discussion, and the teacher playing a non-interventionist role was decided. With respect to the first scientific goal, two sets of codes, one for interactional contents and another for mathematical contents, has emerged by applying comparative methods in data from group discussions. For the achievement of the second and the third goals, two original tools have been created to identify regularities and examine the complexity of the interaction in the construction of collective argumentation.

The procedure of analysis is based on the constant application of comparative methods and follows a constructive approach in relation to the goals. Data from each session is segmented in episodes according to the discussions on each question of the corresponding problem. In turn, each episode is segmented in sub-episodes depending on the mathematical content under discussion. After the narrative analysis of each sub-episode, having been assigned interactional and mathematical contents codes, we apply the 'Identifier of collective argumentation'. This tool allows reducing each sub-episode to a triple input table that includes basic information coming from de micro analysis of group conversations. The 'Identifier' points out types of interaction, mathematical contents and collective argumentation changes of each sub-episode along with relationships between these three aspects. Afterwards, the analysis is focused on the episodes by applying the 'Descriptor of collective argumentation dynamics'. Using this tool, a conversation can be presented as a consecutive and jointed concatenation of various types of interaction and collective argumentation progresses.

From the application of the 'Descriptor of collective argumentation dynamics' to all the episodes, regularities in relationships between types of interaction are detected. They are called basic patterns of interaction. These patterns are formed by two consecutive types of interaction that produce as a practical result progress in the construction of collective argumentation oriented towards the resolution of the mathematical tasks. The basic patterns represent a crucial aspect of the communicative structure of group discussions holding up mathematical activity.

With respect to the achievement of the second goal, the analysis is addressed to the identification of combinations of basic patterns of interaction. It has been found that three techniques or mechanisms of composition help explain the complexity underlying group interaction. These mechanisms are provided the names: assembly, substitution and insertion. The first type is related to the amalgamation of patterns in such a way that the product of the initial pattern acts as the beginning of the second. The other two types are related to situations where the first and the second part of a pattern are not consecutive because there are other patterns substituting one of the parts or appearing between the two of them.

Overall the results point to the complexity of group interaction in terms of its discontinuity. Students' reactions are often a response to prior actions far in time in that same lesson. To update the mathematical contents under discussion, a student must pay close attention to the multiple interactions, as well as remember and rebuilt prior agreements on mathematical contents publicly discussed to a greater o lesser extent at different moments which are not necessarily contiguous.

Within the complex system of interdependent interactions in the group there are basic patterns of interaction that represent an isolated situation in the group that leads to a specific impact on the collective argumentation. Although the composition of basic patterns leads to the interconnection of various contributions to the collective argumentation, it cannot be concluded that a greater complexity in the interaction implies a greater quality in the constructed collective argumentation.

One of the original phenomena emerging from this research is the maintenance of the pair structure in group interaction. It is concluded that the consolidation of the pair structure during group activity creates important learning opportunities around mathematical contents directly related with the resolution of the task. To a lesser extent, this phenomenon has also an impact on the creation of meta-learning opportunities around mathematical curricular meanings. Although these opportunities come from a bilateral communication in that two participants are mostly involved, all of the participants can take advantages of them. In the research, however, the exploitation of opportunities is not put at the forefront.

On the other hand, it has been confirmed the students difficulties when attempting to modify their mathematical discourse, in terms of the use and the interpretation of certain words. This fact may be interpreted as an obstacle to achieve the understanding of mathematical contents. Another obstacle that hinders the progress of collective argumentation comes from the different use of particular cases in the development of the students' empirical argumentations. Despite of this, the substantiation and confrontation of narratives provide the opportunity to improve the quality of the empirical argumentations as well as to learn new mathematical discourses useful for the resolution of the task.

It has been corroborated the suitability of the teaching experiment based on the introduction and negotiation of certain social and sociomathematical norms in the classroom, the size of the group discussion, the progressive approach to the algebraic generalization, and the graphical representation provided in the wordings of the problems. Nevertheless, modifications will be needed in further experiments in order to increase the teacher participation in the management of concrete moments of group discussion.

Regarding recommendations for mathematics school teaching, from the research it can be inferred that mathematics teachers are to pay close attention to: 1) the content and the use of certain words in the students' mathematical discourse; 2) the explicit negotiation of the major social and sociomathematical norms that regulate the activities in the lesson. In addition, a dynamics classroom based on pair work and group discussion is seen as positive for the construction of collective argumentation in the mathematics classroom.

Referencias bibliográficas

Andriessen, J. (2006). Arguing to learn. In K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 443-459). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Arnal, A. (2013). *Mediación tecnológica en la enseñanza y el aprendizaje de Geometría con grupos de riesgo: Estudio múltiple de casos.* Trabajo de Tesis Doctoral. Bellatera, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 121-128). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Betty, R. & Mos, J. (2006). Multiple vs. numeric approaches to developing functional understanding through patterns –affordances and limitations for grade 4 students. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 87-94). Mérida, México: UPN.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 3-22.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Carpenter, T. P., Loef Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1995). The teaching experiment classroom. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 17-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: four case studies. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 25-129). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobo, P. (1998). *Análisis de las procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Cobo, P. & Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 115-140.

Chico, J. & Planas, N. (2011a). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 319-328). Ciudad Real, España: SEIEM.

Chico, J. & Planas, N. (2011b). Question-answer, validation, and follow-up in lessons of mathematics. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 279). Ankara, Turquía: PME.

Chico, J. & Planas, N. (2011c). Mathematical learning in collaborative and argumentative lessons from a secondary classroom. En G. H. Gunnarsdóttir et al. (Eds.), *Proceedings of the 6th Nordic Conference on Mathematics Education* (p. 695). Reijkavik, Islandia: University of Iceland.

Chico, J. & Planas, N. (2012). Students' mathematical interactions in whole group work. En T. T. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 261). Taipei, Taiwan: PME.

Chico, J., Planas, N. & Goizueta, M. (2012). The identification of students' progress in the mathematics classroom: the case of whole group work. *Pre-*

Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Seúl, Corea del Sur: ICMI.

Chico, J., Planas, N., Morera, L. & Fortuny, J. M. (2012). Mathematical practices inside the classroom: an episode of cooperative interaction in pair work. En B. Di Paola & J. Díez-Palomar (Eds.), *Proceedings of the 63rd Conference of the Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching - Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 22*(1), 403-406.

Davies, B. & Harré, R. (1999). Positioning and personhood. En R. Harré, & L. Van Lagenhove (Eds.), *Positioning theory: moral contexts of intentional action* (pp. 32-52). Malden, MA: Blackwell.

Departament d'Educació (2010). *Orientacions per al desplegament del currículum de matemàtiques a l'ESO*. Barcelona, Catalunya: Generalitat de Catalunya.

Departament d'Educació (2012). *Educació, currículum, educació secundària obligatòria*. Barcelona, Catalunya: Generalitat de Catalunya.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Ellis, A. B. (2007a). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Ellis, A. B. (2007b). Connections between generalizing and justifying: students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194–229.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: how classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308–345.

Fern, E. F. (1982). The use of focus groups for idea generation: the effects of the group size, acquaintanceship and moderator on response quantity and quality. *Journal of Marketing Research*, *19*, 1-13.

Gellert, U. (2008). Validity and relevance: comparing and combining two sociological perspectives on mathematics classroom practice. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 40*, 215 - 224.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory*. Chicago, IL: Aldine.

Goffman, E. (1979). *Relaciones en público. Microestudios de orden público*. Madrid, España: Alianza.

Goffman, E. (1981a). *Forms of talk*. Philadelphia, PE: University of Philadelphia Press.

Goffman, E. (1981b). A reply to Denzin and Keller. *Contemporary Sociology: A Journal of Reviews, 10,* 60-68.

Godino, J. D. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 2*(1), 70-92.

Harré, R. & Van Langenhove, L. (1999). *Positioning theory: moral contexts of intentional action*. Oxford, Reino Unido: Blackwell.

Jurow, A. S. (2004). Generalizing in interaction: middle school mathematics students making mathematical generalizations in a population-modeling project. *Mind, Culture, and Activity*, *11*(4), 279-300.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra* (vol. 1, pp. 344-350). Melbourne, Australia: ICMI.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 229-270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behaviour, 26*(1), 60-82.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion “learning-as-participation” in everyday situations of mathematics classes. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *43*(1/2), 81-90.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 45-70). New York: Springer.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematics discussions: an investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133.

Morera, L (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Trabajo de Tesis Doctoral. Bellatera, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Morera, L., Chico, J., Badillo, E. & Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *SUMA-Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, 70*, 9-20.

Mason, J. (2002). Generalisation and algebra: exploiting children's power. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: perspectives on practice* (pp. 105-120). Londres, Reino Unido: Routledge Falmer.

Moss, J. & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441-465.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

OCDE (2002). *Muestra de reactivos empleados en la evaluación PISA 2000. Aptitudes para lectura, matemáticas y ciencias*. Ciudad de México, México: Santillana.

Pijls, M., Dekker, R. & Van Hout-Wolters, B. (2007). Reconstruction of a collaborative mathematical learning process. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 309-329.

Planas, N. (2013). Iniciación al lenguaje algebraico en aulas multilingües: contribuciones de un proyecto en desarrollo. *AIEM–Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 25-44.

Planas, N. (2004). Metodología para analizar la interacción entre lo cultural, lo social y lo afectivo en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(1), 19-36.

Planas, N. (2014). One speaker, two languages: learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, DOI: 10.1007/S10649-014-9553-3.

Planas, N. & Chico, J. (2013). The productive role of interaction: students' algebraic thinking in whole group discussion. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti, (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society of Research on Mathematics Education* (pp. 1586-1595) Antalya, Turquía: ERME.

Presmeg, N. C. & Nenduradu, R. (2005). An investigation of a preservice teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships. En H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 105-112).

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Presmeg, N. C., Barret, J. & McCrone, S. (2007). Fostering generalization in connecting registers of dynamic geometry and euclidean constructions. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 81-88). Seúl, Corea del Sur: PME.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics 42*, 237-268.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 13-36). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers (Springer).

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Médez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp. 2-21). Mérida, México: UPN.

Rasmussen, C. & Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of innovative design research in science, technology, engineering, mathematics (STEM) education* (pp. 195-215). Londres, Reino Unido: Taylor & Francis.

Real Sociedad Matemática Española (2004). *XL Olimpiada matemática española fase nacional***.** Recuperado de http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimp2004.html en fecha diciembre de 2010.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrik, P. Gómez y L. Rico (Eds), *Educación Matemática* (vol. 3, pp. 69-108). Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sacks, H., Schegloff, E. A. & Jefferson, G. (1974). A simplest systematics for the organization of turn taking for conversation. *Language 50*(4), 696-735.

Sacks, H. (1998). *Lectures on conversation 3*. Oxford, Reino Unido: Blackwell.

Saxe, G. B., Gearhart, M., Saughnessy, M., Earnest, D., Cremer, S., Sitabkhan, Y., Platas, L. & Young, A. (2009). A methodological framework and empirical techniques for studying the travel of ideas in classroom communities. En B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 203-222). Abingdon, Reino Unido: Routledge.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. & Pelet, I. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 127-134). Honolulu, Hawai: University of Hawaii.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sensemaking in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Taylor & Francis.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Steele, D. F. & Johanning, D. I. (2004). A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *57*, 65-90.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wagner, D. & Herbel-Eisenmann, B. (2009). Re-mythologizing mathematics through attention to classroom positioning. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 1-15.

Wagner, D. & Herbel-Eisenmann, B. (2013). Disbursing authority among mathematics students. En M. Berger, K. Brodie, V. Frith & K. Le Roux (Eds.), *Proceedings of the 7th International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 483-491). Cape Town, Sudáfrica: MES.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Warren, E. A., Cooper, T. J. & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 25,* 208-223.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics. 68*, 247–261.

Webb, N. M., Ender, P. & Lewis, S. (1986). Problem-solving strategies and group processes in small groups learning computer programming. *American Educational Research Journal, 23,* 243-261.

Webb, N. M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Educational Research, 13*, 21–40.

Wells, W. D. (1974). Group interviewing. En R. Ferber (Ed.), *Handbook of marketing research* (pp. 136-146). New York: McGraw-Hill.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior 21*, 423-440.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2*(1), 93-120.

Zazkis, R., Liljedahl, P. & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 131-141.