TRABAJO EN PAREJA Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN UN AULA DE MATEMÁTICAS DE SEXTO DE PRIMARIA

Autora
Ana María Manrique Ortega

Directoras
Edelmira Rosa Badillo Jiménez
Núria Planas Raig

Coordinadora dels Estudis de Doctorat de Didàctica de les Ciències i les Matemàtiques

Edelmira Rosa Badillo Jiménez

Directora del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Mequè Edo i Basté

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Facultat de Ciències de l'Educació

Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis presentada para obtener el título de Doctora por la Universidad Autónoma de Barcelona

Septiembre de 2014

A Janna i Pep

Agradecimientos

A Núria y Edelmira por toda su dedicación, su esfuerzo infinito y sus ánimos constantes.

A les Escoles Fonlladosa de Malgrat de Mar y en especial a mis compañeros de secundaria Mònica, Eugènia, Lluïsa, Lourdes, Roser, Rosa, Gabi, Jordi y Josep, que me substituyeron en mis clases para que pudiera realizar esta investigación.

A Marta y Mònica por sus sabios consejos.

A los alumnos que participaron en la recogida de datos.

A mis compañeros de proyecto Laura, Judith y Manuel.

A quienes leyeron partes de este trabajo y contribuyeron en su mejora.

A mi familia que me animó a continuar y en especial a Janna y a Pep que son mi motor.

Tabla de contenido

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Lista de Anexos (CD adjunto)

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Capítulo 1.
Introducción

No hay que empezar siempre
por la noción primera de las cosas que se estudian,
sino por aquello que puede facilitar el aprendizaje.
(Aristóteles)

Este trabajo de Tesis Doctoral denominado *Trabajo en pareja y construcción de conocimiento matemático en un aula de matemáticas de sexto de primaria* investiga aspectos que influyen en la construcción del conocimiento matemático durante la resolución de problemas. Se desarrolla en el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la *Universitat Autònoma de Barcelona*, dentro del Programa de *Estudis de Doctorat de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències*. Forma parte del conjunto de investigaciones realizadas por el equipo del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, 2014-SGR972, en el marco del Proyecto *Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático*, EDU2012-31464, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Centramos el estudio en alumnos de sexto curso de primaria y analizamos aspectos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo compartido de conocimiento matemático. Atendemos a la participación del alumnado en procesos de negociación de argumentaciones colectivas cuando se trabaja en parejas la resolución de problemas aritméticos de reparto. En concreto, es de interés el proceso de ajuste colectivo de las producciones personales propuestas por los alumnos de manera individual o que se ponen en evidencia cuando se realiza alguna tarea específica.

1.1. Estructura de la memoria

Hemos estructurado la memoria del trabajo de Tesis Doctoral en cinco capítulos que recogen los aspectos más relevantes del proceso investigativo.

En el primer capítulo junto con esta sección, determinamos la problemática que es objeto de estudio, a través del planteamiento de la pregunta de investigación y de un objetivo general desglosado en tres objetivos más específicos.

En el segundo capítulo, elaboramos el marco teórico que establece los ejes sobre los que se sustenta la investigación. Inicialmente, identificamos diversos estudios acerca de los usos de la fracción y, en particular, sobre significados, operaciones y representaciones de las fracciones. En esta investigación no hacemos referencia a los significados de la fracción que no se incluyen en la secuencia didáctica implementada (medida y operador). A continuación, mostramos aspectos de carácter argumentativo referentes al tipo de estructura que conforma un argumento y en base a la variedad de prácticas argumentativas que se pueden generar dentro del aula de matemáticas. Por último, dentro del marco de la interacción social, tomamos investigaciones relacionadas con la construcción de conocimiento matemático en base a oportunidades de aprendizaje generadas en entornos de colaboración entre alumnos.

En el tercero capítulo, elaboramos una metodología cualitativa para describir e interpretar los datos. La finalidad es caracterizar la influencia de los procesos de negociación de argumentaciones colectivas en el desarrollo de conocimiento matemático. Adoptamos un diseño flexible, con cambios en función de las decisiones en el transcurso de la investigación y emergente, al centrarse en las continuas interpretaciones del análisis. Presentamos el enfoque, el contexto y los participantes. Siguen los métodos de recogida de datos, la temporización del experimento y los momentos organizativos, con el detalle de la secuencia didáctica. Para acabar, mostramos los tipos de datos y los métodos de análisis. Diseñamos instrumentos analíticos en base a los códigos para cada eje, a fin de lograr los objetivos y responder a la cuestión. Los conjuntos de códigos evolucionan a medida que se hallan regularidades en las producciones. El avance del diseño deriva en nuevas fases de reducción de datos, relacionadas e influenciadas por una opción discursiva en la interpretación de prácticas matemáticas y de tareas de investigación respecto a éstas. Realizamos la primera reducción de datos orales mediante la identificación de episodios.

En el cuarto capítulo, aplicamos los instrumentos de análisis a las producciones orales y escritas de los alumnos para analizarlas y caracterizarlas. Conectamos los resultados obtenidos en las diversas etapas de análisis para interpretar evidencias de cambio en las producciones de los alumnos en el proceso que va de la resolución individual a la resolución en pareja. Presentamos el análisis detallado para una pareja participante.

En el quinto capítulo, mostramos las conclusiones, limitaciones e implicaciones sobre la influencia de ciertos entornos de colaboración en la construcción de significados de la fracción. En concreto, enfatizamos aspectos que influyen en la construcción compartida de conocimiento durante la resolución de problemas aritméticos de reparto.

Debido a la gran cantidad de material, presentamos un apartado final de *Anexos*. Se incluyen documentos para la investigación, registros escritos de datos orales y escritos, todos los episodios elaborados, ejemplos de la aplicación de los diversos instrumentos de análisis, que han sido usados pero no incluidos en la elaboración de los capítulos.

1.2. Justificación de la investigación

La educación matemática en primaria persigue un aprendizaje de las matemáticas para la vida diaria, facilitando la interpretación del mundo y modelizando situaciones de la vida real para hallar soluciones (Departament d'Ensenyament, 2009). De ahí centramos la temática del estudio en aspectos sobre la construcción de conocimiento matemático. Se parte de trabajos de Krummheuer (2007 y 2011) en los que se investigan entornos y prácticas matemáticas que desarrollan el aprendizaje como participación. Además, se tienen presentes resultados de Yackel y Cobb (1996) y de Brandt y Schütte (2010) en las que se relacionan aspectos asociados a la interacción social con la construcción de argumentación matemática. Conectamos el desarrollo de la cognición matemática y de los procesos que pueden dar sentido a esta cognición con la participación en entornos de construcción compartida de significados.

A partir de estos referentes y de la práctica profesional en el aula del centro escolar seleccionado, proponemos un trabajo empírico en una clase de matemáticas de ciclo superior de primaria. Analizamos entornos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas durante la resolución de problemas aritméticos de repartición para vincular el aprendizaje matemático con la participación del alumno en los procesos de negociación de argumentación colectiva.

El contexto de la resolución de problemas es un elemento vehicular para la obtención de datos que permite el análisis del avance en la construcción de conocimiento. El objetivo de plantear problemas a resolver, de forma individual y en pareja, es observar el proceso de resolución de cada alumno o pareja. La interacción con la pareja la utilizamos para acceder a razonamientos y analizar parte de ellos, además de observar la influencia de la interacción en el momento de aprendizaje y en la construcción de conocimiento matemático.

Conectamos la construcción del concepto de fracción con la argumentación en clase de matemáticas y con la interacción social en entornos colaborativos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entendemos que el hecho de promover la interacción entre alumnos estimula la construcción de conocimiento matemático a través de la comunicación y la negociación de significados.

1.3. Pregunta y objetivos

La definición del problema es el punto clave que permite acotar el estudio a través de supuestos iniciales que se concretarán en un contexto didáctico específico. Nuestra pregunta relaciona el papel de la interacción social con la construcción de conocimiento matemático durante la resolución de problemas:

> *¿Cómo influye la resolución en pareja de problemas contextualizados en la construcción del concepto de fracción en un aula de primaria?*

Para dar respuesta a esta cuestión, examinamos cómo los procesos de interacción en la gestión de la resolución de problemas en pareja influyen en la construcción del concepto de fracción. El objetivo general es:

> *Examinar la construcción del concepto de fracción y sus significados durante la interacción alumno-alumno en un aula de sexto de primaria.*

Desglosamos el objetivo general en otros específicos. De acuerdo con un marco teórico que da prioridad a los ejes conceptual, interaccional y estructural, planteamos los siguientes objetivos específicos:

Objetivo 1: *Caracterizar las producciones escritas individuales iniciales de los alumnos en la resolución de los problemas.*

Objetivo 2: *Caracterizar la posterior interacción oral y escrita en pareja.*

Objetivo 3: *Caracterizar las producciones escritas individuales de revisión.*

Para la consecución de los objetivos, recopilamos una gran cantidad de datos mediante diversas técnicas cualitativas. Por una parte, los alumnos responden de forma individual y escrita cuestionarios vinculados a las tareas matemáticas propuestas. Por otra, se graban en vídeo las sesiones donde se resuelven en pareja, de manera oral y escrita, las tareas de la secuencia didáctica. Por último, recogemos las producciones individuales y escritas, en las que se revisan las respuestas iniciales. Analizamos los datos de vídeo y las producciones orales según tres ejes teóricos: *conceptual, estructural e interaccional*.

Para caracterizar las producciones escritas individuales de los alumnos, los ejes de análisis son el conceptual y estructural. Para caracterizar las producciones orales de las parejas de alumnos, tomamos el eje conceptual y el interaccional. La caracterización de las producciones escritas de las parejas gira en torno al eje conceptual y al estructural. Finalmente, basamos el análisis en la combinación de los tres ejes para interpretar evidencias de cambio en las producciones de los alumnos en el proceso que va del trabajo individual al trabajo en pareja.

A través de la consecución de los tres objetivos, ponemos de manifiesto de qué manera la interacción social y, en concreto, la interacción alumno-alumno influye en la construcción del concepto de fracción y de sus significados dentro de un aula de sexto de primaria.

Capítulo 2.

Marco teórico

En este capítulo, presentamos los tres bloques temáticos que sustentan la investigación. El primero trata sobre el concepto de fracción desde la perspectiva de los usos de la fracción; el segundo se refiere a la argumentación en clase matemáticas y a cómo esta se estructura; el tercero se centra en los procesos de interacción que tienen lugar en situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tomamos referencias que contribuyen a desarrollar unos y otros aspectos por separado y posteriormente de forma combinada.

2.1. Usos de la fracción

El currículo en nuestro contexto (Departament d'Educació, 2009) señala que los alumnos de 10 a 12 años deberían ser capaces de mostrar cierta comprensión de las fracciones mediante: a) el uso y la comprensión de fracciones para medir cantidades continuas en contextos significativos; b) la comprensión de los números, de sus formas de representación y del sistema de numeración; c) la descripción oral, gráfica y escrita de los procesos de comprensión de los diferentes conjuntos numéricos y del cálculo; d) el reconocimiento y uso de las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes en casos sencillos; e) el uso y contraste de modelos para representar las relaciones entre decimales, fracciones y porcentajes; f) el reconocimiento y búsqueda de fracciones equivalentes siguiendo caminos diversos; g) la utilización de diferentes modelos para comparar y ordenar fracciones. En estas edades los alumnos han de tomar consciencia de las ventajas y desventajas de utilizar una u otra representación de cantidades según la situación. Además, las representaciones visuales de las fracciones han de ser una ayuda en tareas de comparación.

A medida que los alumnos avanzan en los niveles deberían tener asimilada una comprensión de las fracciones interpretando cómo pueden representarse, cómo se relacionan, de qué manera se pueden utilizar y cuáles son las operaciones realizables en función de la situación planteada. El NCTM (2000) señala que la comprensión de la fracción se desarrolla, desde edades tempranas, cuando se cuenta y aprende a reconocer la cantidad de objetos de una colección. En los primeros niveles escolares, se pueden aprender los tipos de número y sus características. No obstante, junto con comprender los números naturales, se debe motivar en el alumno el trabajo con fracciones en contextos cotidianos para progresivamente ir viendo las fracciones como partes de una unidad entera o de una colección, potenciando así el desarrollo de la noción fracción.

En esta investigación, estimamos que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones requiere una especial atención, no solo por estar presentes en el currículo escolar, sino por el hecho de que el aprendizaje de los significados de la fracción está condicionado por una variedad de estructuras cognitivas. Consideramos que los alumnos deben disponer de mecanismos y conocimientos que les ayuden a superar las dificultades asociadas al aprendizaje de las fracciones. Partiendo de esta premisa, desarrollamos este apartado en base a la recopilación de resultados que, por una parte, se basan en la caracterización de los significados de la fracción y, por otra, surgen de investigaciones centradas en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en la escuela primaria.

2.1.1. Significados de la fracción

Contemplamos los significados de la fracción como las diversas interpretaciones matemáticamente posibles de las fracciones: a) parte-todo; b) cociente; c) medida; d) razón; e) operador (Kieren, 1980).

Significado como parte-todo

Una de las primeras referencias sobre el significado parte-todo de la fracción es la de Kieren (1980), quien expone que este significado enfatiza la fracción *a/b* como relación establecida entre dos cantidades: un todo o unidad *b*, que representa un número total de partes iguales, y una parte *a*, que destaca un número de esas partes iguales del total. Esta interpretación de la fracción es necesaria para construir el resto de significados. Se define como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales, indicando la relación entre el todo y un número designado de partes. El conjunto puede ser variable, pero la fracción siempre se refiere a las partes de ese todo (Hallet, 2008).

De acuerdo con los trabajos de Inhelder y Szeminska (1960, citado en Llinares y Sánchez, 1988), esta interpretación se asocia a situaciones en las que un todo, ya sea continuo o discreto, se divide en partes equivalentes. El todo es designado como la unidad y la fracción expresa la relación entre el número de partes y el número total de partes en que ha sido dividido el todo. El todo está compuesto por elementos separables y finitos, y se conserva después de realizar la partición. Estos autores proponen siete atributos para dicha relación:

- El todo está formado por elementos separables y se conserva.
- La separación se puede realizar en un número determinado de partes.
- Las subdivisiones cubren el todo sin excluir partes que lo constituyen.
- El número de partes no coincide con el número de divisiones.
- Las partes tienen que ser iguales.
- Las partes también se pueden considerar como la totalidad.

Payne (1976, citado en Llinares y Sánchez, 1988) considera otros atributos imprescindibles para el dominio del significado parte-todo de la fracción:

- Dominar los símbolos relacionados con las fracciones.
- Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos.
- Trabajar con fracciones mayores que la unidad.
- Reconocer subdivisiones que representan la misma cantidad.

La relación parte-todo en contexto continuo es identificable con el significado de la fracción como relación parte-todo, siendo la fracción *a/b* la relación entre dos cantidades: una unidad *b* a repartir y una parte *a* respecto a un número de partes de la unidad. Por otra parte, identificamos la relación parte-todo en contexto discreto con el significado de la fracción como relación parte-todo, siendo la fracción *a/b* la relación entre dos cantidades: un total de elementos *b* a repartir y una parte *a* respecto a un número de elementos del total.

Significado como cociente

Como Kieren (1980), entendemos que el significado de cociente considera la fracción *a/b* como la operación de dividir un número natural por otro no nulo; así la fracción es una división exacta que establece una acción de reparto. Se refiere al resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de partes. Se interpreta la fracción como el resultado de una situación de reparto a partir de un proceso de diferenciación, división, abreviación, simbolización, representación, etc., donde se pretende encontrar la dimensión de cada parte resultantes al distribuir *a* unidades en *b* partes iguales. Desde esta perspectiva, tiene sentido pensar la fracción como cociente a partir del significado de la fracción como cociente de números, al emerger de una situación de reparto, la dimensión de cada parte obtenida al distribuir *a* unidades en *b* partes iguales.

Significado como medida

Todavía según Kieren (1980), contemplamos el significado de la fracción que implica la medida de cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. Este significado indica la asignación de un número a una región o magnitud, producto de la partición equitativa de la unidad. La fracción *a/b* implica dividir la unidad de medida en *b* subunidades iguales y considerar una cantidad *a* hasta obtener la cantidad deseada. Así, tiene sentido pensar la fracción como medida a partir del significado de la fracción como medida de cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no corresponde con un múltiplo entero de la unidad de medida.

Significado como razón

Kieren (1980) sigue su discusión con el significado de razón, que toma la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. Se interpreta como la comparación numérica entre dos magnitudes donde *a/b* corresponde a la razón que evidencia la comparación entre los valores *a* y *b*, siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas. Siguiendo este autor, pensamos la fracción como razón a partir del significado de la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjunto de unidades, estableciéndose una razón entre ellas.

Significado como operador

Kieren (1980) discute un último significado que hace actuar a la fracción como transformador. La fracción *a/b* es utilizada como operador, siendo el número que modifica un valor *n* al multiplicarlo por *a* y dividirlo por *b*. La interpretación de la fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la ampliación o la reducción de una figura en otra figura *a/b* veces mayor o *a/b* veces menor. Aquí la fracción es interpretada como un objeto que modifica una situación realizándose una secuencia de operaciones de multiplicación y división. En este trabajo pensamos la fracción como operador en base al significado de la fracción como transformador o función de cambio de un estado inicial.

En general, el significado como parte-todo tiene una importante presencia en la escuela, donde a menudo es el único significado de fracción que se enseña explícitamente (Gairín y Sancho, 2002). Esto es así a pesar de que la comprensión del concepto de fracción requiere el conocimiento de sus diversos significados. Se reitera la presentación de la fracción como partes distinguibles sombreadas respecto de otras que aparecen en blanco mediante una figura geométrica. De esta manera, la interpretación parte-todo se define cuando existe la división de una unidad en partes iguales con algunas de ellas marcada. El todo corresponde al denominador, que señala las partes de división de la unidad, mientras que el numerador señala la parte seleccionada.

En concreto, la enseñanza del significado como parte-todo requiere realizar transferencias entre representaciones gráficas y simbólicas, e implica:

- Promover un aprendizaje con un fuerte componente visual.
- Describir, en la representación gráfica, las partes que representan el *todo* y las que representan las partes destacadas.
- Realizar un doble recuento, el de las partes distinguibles y el del total de las partes, reforzando el sentido de número natural.

- Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos; colocar debajo de una línea el resultado del todo; y escribir sobre la línea el resultado de contar las partes destacables. Con esto la fracción no tiene estatus de número ya que se asocia a una situación descriptiva.

Asumimos que en la construcción del conocimiento de la fracción conviene trabajar los diversos significados involucrados. Por ello, como Llinares (2003), creemos pertinente la inclusión de aspectos que presenten la fracción como parte-todo, otros que potencien el significado como razón, y otros como cociente de números naturales en situaciones de reparto.

Prestamos atención a los estudios sobre el análisis semántico y sintáctico de las fracciones y nociones relacionadas (Lamon, 2007; Hallet, 2008), en los que se señala la diversidad de interpretaciones de la fracción. En síntesis, tomamos los siguientes significados centrales: a) relación entre una parte y un todo que actúa como unidad de referencia; b) relación parte de un conjunto; c) cociente o división sin realizar; d) resultado de una medida; e) operador.

2.1.2. Operaciones con fracciones

Hay numerosas investigaciones sobre la comprensión de los significados asociados a la fracción, las operaciones aritméticas que implican el uso de fracciones y su comparación y equivalencia. Confrey y Carrejo (2005) examinan fracción y razón a través de la evolución de ambos conceptos. Por una parte, manifiestan que una razón describe una relación subyacente entre un conjunto de proporciones, con los números comparados pudiéndose modificar de forma individual. Por otra parte, indican que las fracciones son relaciones en las que una unidad externa representa de forma independiente la relación que se establece entre las cantidades iniciales. La medida de la fracción se adopta como unidad externa en base a la proporción establecida.

Lamon (1996) menciona que, en el desarrollo conceptual de la fracción, interviene el acoplamiento de las unidades de medida y la magnitud de las cantidades, con el fin de entender las relaciones y las operaciones que se establecen. A partir de un estudio en la escuela primaria, este autor identifica y clasifica estrategias de alumnos cuando pretenden repartir unidades en contextos continuos y discretos, combinando la representación gráfica de operaciones con la representación simbólica matemática asociada a la cantidad repartida. Lamon destaca otros parámetros más precisos sobre cómo marcar las fracciones en los objetos o cómo repartir las unidades (por ejemplo, marcar sextos de una unidad y posteriormente dividirla en tercios). Explica la utilización de diversas estrategias de repartición de las unidades:

- Conservación de unidades. Cuando se debe recibir una cantidad superior a una unidad, solo se dividen las unidades a distribuir (contexto continuo); esto ocurre también en la repartición dentro de un contexto discreto.
- División de unidades en el mínimo número de partes. Todas las unidades están marcadas, pero se dividen minimizando el número de cortes (por ejemplo, no dividir en sextos cuando un reparto en tercios es suficiente).
- Distribución y división de las unidades que solo son necesarias tanto en contexto discreto como continuo. Se reconoce la importancia de resaltar la conexión entre el contexto de la situación y las matemáticas en el proceso de separación y reparto de unidades.

Lamon (1996) afirma que, cuando el alumno intenta resolver actividades de modelización, combina la información externa proporcionada con los modelos construidos a partir de la experiencia. El alumno toma decisiones sobre qué aspectos del mundo debe contemplar (seleccionar unidades); de qué forma puede establecer equivalencias para repartir unidades (dividir una unidad en dos partes y después marcar la mitad de cada una para mostrar los cuartos) e interpretar los resultados respecto a la información inicial. Esta autora expone que los alumnos no muestran muchas dificultades al descomponer y distribuir en partes las unidades; sin embargo, el hecho de considerar una opción de reparto que contempla una cantidad superior a la unidad implica el uso de otras ideas matemáticas. Por ello, tiene sentido considerar la distinción entre reparto total y parcial con base en la diferencia entre unidades totales del conjunto y unidades implicadas en el reparto, siendo una repartición que implica más o menos unidades que las totales. Además, Lamon explica que marcar y dividir todas las unidades alude a un paso intermedio en la construcción de unidades compuestas; y que el uso de la representación gráfica permite establecer una equivalencia visual para expresar cantidades equivalentes. En este sentido, se considera que la aplicación de equivalencia de fracciones implica establecer que dos o más fracciones representan la misma cantidad.

Por otro lado, Lamon (1996) destaca la necesidad de un proceso asociado a la conceptualización de la cantidad de un producto o acción antes, durante y después del reparto. Para entender el proceso por el que se llega a conocer la fracción como entidad en sí misma, es necesaria la interacción entre la actividad intuitiva y los procesos cognitivos vinculados con la construcción de una cantidad a partir de números racionales. Por ello, debe trabajarse la operación matemática que genera una cantidad concreta, a través de una actividad intuitiva con base en una distribución justa. En particular, se debe vincular la construcción de la noción de fracción con el conocimiento informal del alumno.

Para Mack (1995 y 2001), el conocimiento informal es circunstancial y construido por los individuos en respuesta a experiencias desarrolladas en la vida. Esta autora establece diversos niveles de conocimiento que participan en la construcción del conocimiento matemático, destacando el papel del conocimiento informal y del previo. A través de estudios con alumnos de primaria, Mack explica que aunque la compresión inicial de una variedad de conceptos matemáticos puede ser limitada, es necesaria para el desarrollo del conocimiento matemático. Esta comprensión inicial se requiere para comprender un contenido más complejo. Así, la comprensión no se desarrolla de manera lineal, sino que debe estimularse a partir de relaciones y conexiones que permiten construir ideas más complejas en torno a la comprensión inicial del conocimiento matemático. Además, se puede aprovechar una concepción limitada para desarrollar la suma o resta de números racionales. A partir de situaciones sobre multiplicación de fracciones, analiza: a) la forma de construir conocimiento informal a través del reparto de unidades; b) la manera de representar gráficamente las unidades y las particiones con el fin de resolver problemas que implican la multiplicación de fracciones.

En Mack (2001), se examinan tipos de acuerdos de los alumnos en el desarrollo inicial de la multiplicación de fracciones. Se detecta cómo se parte del conocimiento matemático informal y se analiza de qué manera se desarrolla la comprensión de la multiplicación de fracciones propias. Se estudia el aprovechamiento del conocimiento informal para repartir de diversas formas las unidades establecidas en diferentes situaciones, emergiendo en la resolución la multiplicación de dos fracciones propias y la conexión entre el denominador del multiplicador y el numerador del multiplicando. No obstante, aunque el conocimiento informal de los alumnos puede fundamentar el desarrollo de un contenido matemático complejo, este conocimiento también limita y dificulta el desarrollo comprensivo requerido en la resolución de la situación.

Mack (2001) afirma que, en ocasiones, los alumnos solo utilizan las fracciones para establecer las partes independientes que corresponden al reparto de cada unidad, pero no consideran que en determinados repartos se debe asociar más de un elemento ya que deben repartir la unidad compuesta. El conocimiento informal de los alumnos de primaria sobre la multiplicación de fracciones, puede ser modificado con el propósito de respaldar el valor asociado a la cantidad que resulta del reparto de una unidad y promover la operación multiplicativa de dos fracciones. A pesar de que las ideas previas informales de los alumnos pueden ser diferentes de las ideas que están construyendo, juegan un papel decisivo en la comprensión de un contenido más complejo. En esta investigación compartimos que el conocimiento previo informal proporciona la base sobre la que construir un puente, de manera gradual, que permite conectar ideas más complejas sobre la comprensión de los usos de la fracción.

Una de las primeras referencias acerca de la resolución de problemas con fracciones es la de Behr, Wachsmuth y Post (1985), donde se estudia la comprensión de la cantidad que representa la fracción. Estos autores examinan la habilidad de ordenar, comparar y establecer equivalencias entre fracciones, la ubicación de la fracción en una recta numérica y la estimación de resultados con una operación de fracciones. Consideran que las diversas interpretaciones asociadas a la fracción incluyen aspectos que potencian los usos de razón, transformación y cociente de números naturales en situaciones de reparto, así como la vinculación con decimales. La habilidad de estimar y comparar fracciones, indicar un orden y establecer equivalencias son es requisito para la comprensión del concepto de fracción. En este trabajo entendemos que la comparación de fracciones conlleva establecer si dos o más fracciones pueden representar la misma cantidad o cantidades distintas. En general, asociar a la relación que se establece entre el numerador y el denominador el valor de la fracción implicada evita contemplar numeradores y denominadores sin ningún tipo de relación, y aproxima la comprensión integrada del concepto.

Según Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), algunas de las operaciones aritméticas que requieren el uso de fracciones, conducen al modelo de adición de multiplicaciones y de divisiones, diferenciando entre el partitivo y el de cociente. Estos modelos imponen limitaciones frente a los números utilizados y sus funciones en la estructura del problema. El alumno puede tener dificultades para decidir la operación aritmética que debe usar en la resolución, ya que se puede desviar o bloquear en el desarrollo del algoritmo de solución. En primer lugar, en las interpretaciones de adición de multiplicación, el operador debe ser un número entero y el producto debe ser mayor que el operando. En segundo lugar, en la interpretación de la división partitiva, el divisor debe ser un número entero, y el divisor y el cociente deben ser menores que el dividendo. Por último, en la interpretación de la división como cociente, solo hay una restricción: el divisor debe ser menor que el dividendo. Si en la multiplicación y en la división la parte entera de un número decimal es sustancialmente mayor que la parte fraccionaria, esta puede contemplarse de forma intuitiva como el todo, desestimando la parte decimal y considerando el valor como un número entero.

Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel (2009) investigan cómo la resolución de problemas requiere la aplicación de conceptos relacionados con la proporcionalidad, con base en diversas operaciones matemáticas. Establecen que el carácter intuitivo asociado al razonamiento proporcional requiere un trabajo previo mediante el uso de métodos de proporcionalidad que permiten resolver situaciones donde se pide un valor desconocido y proporcional a los datos. En el caso de problemas aditivos, las estrategias aditivas y los coeficientes no enteros implicados en estas situaciones requieren trabajar las formas de resolución verbal y numérica. En este trabajo reconocemos la aplicación de métodos de suma de fracciones con el uso de uno o más métodos (gráfico, numérico o verbal) para obtener una fracción resultante.

Hallet (2008) estudia la comprensión de la fracción y el papel de los conocimientos conceptuales y procedimentales en el aprendizaje matemático en la escuela primaria. Propone examinar tres tipos de dificultad. Primero, examina la comprensión de la cantidad ligada a una fracción; esto es, en su forma simple la cantidad de una fracción no está representada por un solo número sino por la relación entre dos números enteros o, en su forma compleja, por la combinación aditiva entre dos números enteros y un tercer número entero. Segundo, examina la comprensión de los procedimientos para calcular y manipular fracciones, más complicados que los que se usan con números enteros. Tercero, examina la comprensión de la naturaleza variable de la relación entre numerador y denominador de una fracción en diferentes contextos (representa una relación, una parte, una cantidad continua y una cantidad discreta).

Los alumnos combinan de varias maneras el conocimiento conceptual y procedimental en el aprendizaje de la fracción. Con todo, en la escuela primaria, los alumnos deberían desarrollar el concepto de fracción mediante: a) la comprensión del significado como parte de la unidad, parte de un conjunto, expresión de un cociente de números enteros, puntos en la recta numérica y operador; b) la comprensión de los significados de las operaciones y de relaciones entre ellas; c) la comparación y ordenación de fracciones; d) la conexión entre formas de representación.

2.1.3. Formas de representar la fracción

Los diversos significados de la fracción son generadores de símbolos y lenguaje, ofreciendo a los alumnos la oportunidad de utilizar diferentes representaciones ligadas a la construcción del concepto (Llinares y Sánchez, 1988). Al trabajar las interpretaciones relacionadas con la fracción, se realizan acciones para pensar la fracción como resultado de una acción física o mental. De ahí, se infiere la necesidad de comunicar la acción y su resultado a través del lenguaje que puede ser oral o escrito, informal o formal, mediante el uso de la representación gráfica o a través de símbolos numéricos (Pimm, 1990; Alcalá, 2003).

En esta investigación, consideramos que los alumnos pueden utilizar el lenguaje oral o escrito, formal (matemático) o informal (no matemático), para representar las fracciones. Dentro del lenguaje matemático diferenciamos entre lenguaje verbal, numérico y gráfico. Contemplamos que el lenguaje no matemático implica utilizar, en la resolución, el lenguaje verbal y/o escrito para expresar la fracción del reparto. Por otra parte, usar el lenguaje matemático-verbal requiere el registro matemático-verbal para expresar la fracción del reparto. Así, usar el lenguaje matemático-numérico requiere el registro matemático-numérico para expresar la fracción del reparto. Por último, el uso de lenguaje matemático-gráfico implica el registro matemático-gráfico para expresar la fracción del reparto. De esta manera, aparecen las diversas representaciones y se establecen diferentes conexiones que ponen de manifiesto la relación entre interpretaciones de la fracción, dotándola de significado y asignándole un símbolo matemático. La enseñanza de fracciones se lleva a cabo, por lo general, con representaciones gráficas, predominando las figuras geométricas. Se destaca el contexto continuo, en oposición al discreto, que se plantea como caso particular de la multiplicación de fracciones por un número natural. El conocimiento y aplicación de varias representaciones conduce al desarrollo de procesos mentales (comparación, análisis, síntesis e inferencia) propios del razonamiento matemático, con el fin de promover la comprensión del concepto de fracción. En este sentido, la conexión entre lenguajes y/o registros se basa en la conexión entre el lenguaje no matemático o informal y matemático para expresar la fracción del reparto.

Además, es imprescindible la resolución de situaciones en diferentes contextos y mediante el uso de diversos tipos de representación, ya que no todas pueden ser resueltas mediante una misma y única interpretación. Por este motivo, el contexto en el que se plantean las situaciones que implican el uso de fracciones es un aspecto que ayuda a mejorar la comprensión de este concepto (Hallet, 2008). De acuerdo con esto, Streefland (1993) menciona que, para la enseñanza del concepto de fracción, es útil un enfoque basado en el trabajo con situaciones realistas. Actividades como repartir, organizar, comparar y compensar brindan la oportunidad de construir significados múltiples. En particular, la utilización de diversas formas de representación ofrece la opción de disponer de diversos referentes, mientras se desarrollan estos significados.

A partir del marco presentado construimos el eje conceptual. Definimos este eje para caracterizar los usos de la fracción a través de sus significados y sus maneras de representación. Los 15 usos fundamentados en la teoría son:

a) identificación de la relación parte-todo en contexto continuo
b) identificación de la relación parte-todo en contexto discreto
c) identificación de la fracción como cociente
d) identificación de la fracción como medida
e) identificación de la fracción como razón
f) identificación de la fracción como operador
g) distinción entre reparto total y parcial
h) aplicación de equivalencia de fracciones
i) comparación de fracciones
j) aplicación de métodos de suma de fracciones
k) uso de lenguaje no matemático

l) conexión entre lenguajes y/o registros

m) uso de lenguaje matemático-verbal

n) uso de lenguaje matemático-numérico

o) uso de lenguaje matemático-gráfico

2.2. Estructura de los argumentos y argumentación

Argumentar consiste en apoyar el enunciado que se afirma con razones a partir de enunciados no sujetos a duda (datos), que actúan como inferencia. Consideramos que la argumentación en el aula de matemáticas (esto es, la actividad de argumentar situada en entornos formales de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) es un componente esencial de la comunicación y una herramienta del proceso cognitivo de organización del razonamiento.

Tomamos a Brandt y Schütte (2010), quienes apuntan la existencia de una fuerte relación entre las oportunidades de aprendizaje cooperativo y la verbalización matemática en los procesos de aprendizaje. Estos autores destacan que la enseñanza de la matemática se debe centrar en el fomento y expresión de argumentaciones matemáticas colectivas que vayan más allá del aprendizaje de vocabulario matemático, estableciéndose así una conexión entre la argumentación matemática y los procesos de interacción.

Es además imprescindible analizar la estructura de los argumentos. Para ello, es útil el trabajo de Toulmin (2007), centrado en explorar el funcionamiento de los argumentos para relacionar validez y estructura. Este autor propone un modelo estructural en torno a las diversas fases que constituyen el orden natural en el que se manifiesta la justificación de una conclusión. Establece el esquema de un argumento y todos los elementos que forman parte del proceso desarrollado para pasar de unos datos a una conclusión o solución final. Considera, como punto de partida, la distinción establecida entre la afirmación o conclusión cuyo valor se está tratando de establecer (C) y los datos que se aportan como base de la afirmación que se realiza (D). De ahí, diferenciamos dos opciones generales a la hora de elaborar argumentos. La primera supone que un desajuste entre datos y garantía implica ofrecer garantías en desacuerdo con datos del enunciado. La segunda contempla el resto de argumentos que están de acuerdo con los datos del enunciado.

Presentar unos datos como base de una conclusión supone dar un cierto paso, de manera que la cuestión se establece en torno a la naturaleza y justificación de este paso una o diversas veces. Sin embargo, en ocasiones, pueden producirse afirmaciones sin garantía al omitir elementos que validan el paso de los datos a las conclusiones pasando directamente de los datos a la afirmación. Toulmin (2007) considera que, al ofrecer nuevos datos, no se soluciona esta situación, ya que deben presentarse reglas, principios, enunciados, etc., que permitan realizar inferencias en lugar de agregar información. En esta investigación, diferenciamos entre ofrecer u omitir verbalmente una proposición que se elabora a partir de otra existente mediante la realización de una operación mental que permite obtener una conclusión, distinguiendo entre afirmación con inferencia explícita o implícita.

Por otra parte, Toulmin (2007) señala la necesidad de ofrecer garantías (G) de carácter general que actúen como puente entre los elementos que constituyen el argumento, legitimando, a su vez, este proceso. Al analizar los argumentos, se genera una relación entre los datos y la afirmación a la que sirven de base, representándose como inferencia (ver Figura 1).

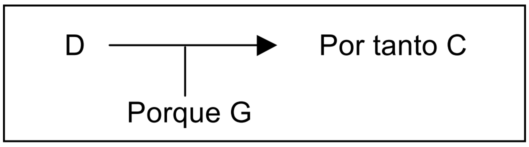


Figura 1. Primer esquema de argumentación (Toulmin, 2007)

Considerar las características vinculadas al desarrollo de los argumentos obliga a ampliar el esquema ilustrado en la Figura 1. La estructura de la argumentación adquiere, entonces, la forma mostrada en la Figura 2.

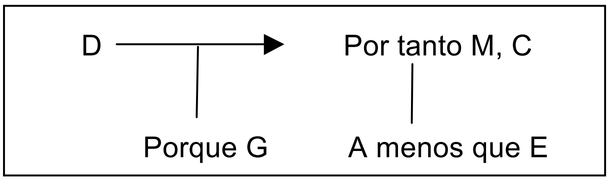


Figura 2. Segundo esquema de argumentación (Toulmin, 2007)

Al defender una afirmación, hay que tener en cuenta que se pueden haber presentado los datos, la garantía y las matizaciones y condiciones relevantes. No obstante, puede suceder que la persona que la cuestiona no haya quedado satisfecha, ya que no solo pone en duda un argumento, sino que cuestiona si la garantía (G) es admisible siempre. Esta situación desemboca en la siguiente premisa: poner en entredicho una afirmación puede provocar una duda respecto a la legitimidad de una serie completa de argumentos. En numerosas ocasiones, se requiere el uso de otras certezas vinculadas con las garantías, denominadas respaldo (R). Esta idea lleva a un esquema todavía más complejo (ver Figura 3).

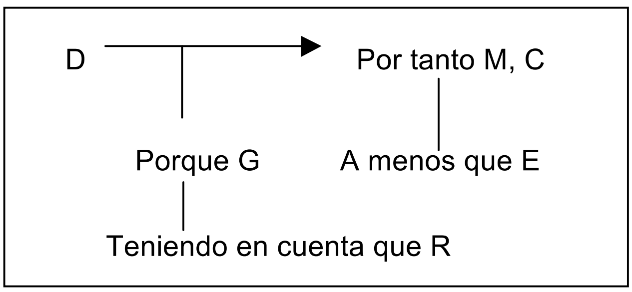


Figura 3. Tercer esquema de argumentación (Toulmin, 2007)

En resumen, para analizar el funcionamiento de los argumentos a fin de comprobar cómo se relaciona su validez con la manera de estructurarlos, destacamos los siguientes elementos del modelo de Toulmin (2007):

Afirmación o conclusión (C) cuyo valor se trata de establecer.

Elementos justificatorios o datos (D) que se aportan como base de la afirmación que se realiza.

Garantías (G) como reglas, principios y enunciados que llevan a inferencias, siendo el conocimiento básico que asegura la justificación.

Condiciones de excepción o refutación (E) que permiten pasar de los datos a las conclusiones de manera sujeta a excepciones o matizaciones (E).

Modalizador (M) encargado de señalar las circunstancias en que las que la autoridad general de la garantía ha de obviarse (M).

Respaldo (R) como otras certezas vinculadas con las garantías a fin de dar soporte directo a las conclusiones.

Consideramos que los alumnos de primaria cuando elaboran argumentos en el aula de matemáticas, pueden desarrollar una argumentación débil o fuerte. Si elaboran una argumentación débil, pueden producir: a) una afirmación con garantía matemática; b) una afirmación con garantía extramatemática; c) una afirmación con garantía matemática y extramatemática. En estas situaciones se ofrecen garantías matemáticas, extramatemáticas, o ambas, que aseguran la legitimidad de las conclusiones, actuando como enlace con los datos. Si elaboran una argumentación fuerte, pueden desarrollar: a) una afirmación con respaldo matemático; b) una afirmación con respaldo extramatemático; c) una afirmación con respaldo matemático y extramatemático. En estas situaciones se ofrecen garantías matemáticas y/o extramatemáticas para asegurar la validez de las conclusiones, así como otras certezas matemáticas y/o extramatemáticas vinculadas, para respaldar de manera directa las conclusiones. Además, se pueden elaborar argumentos basados en garantías y respaldos de forma conjunta: a) afirmación con garantía matemática y respaldo matemático; b) afirmación con garantía matemática y respaldo extramatemático; c) afirmación con garantía extramatemática y respaldo matemático; d) afirmación con garantía extramatemática y respaldo extramatemático.

El modelo de Toulmin (2007), por sí solo, no muestra la complejidad contextual relacionada con las prácticas argumentativas de los alumnos en clase de matemáticas. Para dar cuenta de esta complejidad, nos centramos en referentes teóricos que consideran contextos empíricos de aula. En este sentido, aprender matemáticas está vinculado con el aprendizaje de procesos matemáticos relacionados con observar, describir, analizar, definir, comparar, clasificar, explicar, demostrar, imaginar, justificar y visualizar (Gutiérrez, 2005 y 2007). Desde esta perspectiva, asociamos una noción más amplia de argumentación en el aula de matemáticas con la elección entre opciones, razonando cuáles son los criterios que permiten evaluar como más adecuada una opción. La argumentación aparece ligada, por tanto, a la justificación y explicación.

Camargo (2010) analiza el aprendizaje de un grupo de estudiantes de un curso universitario de geometría plana. Examinar cómo los estudiantes participan en actividades matemáticas asociadas a la demostración y cómo producen demostraciones en el marco de un sistema axiomático construido colectivamente. Esta autora considera el aprendizaje como un proceso de participación en el repertorio de prácticas que se llevan a cabo en la clase y que dan sentido a la demostración, ligado al proceso de materialización que conduce a las demostraciones. Se refiere a las relaciones entre actividades matemáticas del aula tales como explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar, que conforman el repertorio de prácticas de lo que denomina actividad demostrativa, esto es, el conjunto de actividades que impulsan la producción de argumentaciones.

Siguiendo a estos referentes, notamos que la argumentación está constituida por explicaciones, justificaciones u otros modos de razonamiento desarrollados mediante diversas habilidades activadas en los procesos de actividad matemática en el aula. Descripción, explicación, argumentación y justificación forman parte del conjunto de prácticas argumentativas en clase de matemáticas:

- *Describir* conlleva expresar las características necesarias y suficientes para que un hecho no se confunda con otro enumerando datos.
- *Explicar* implica hacer comprensible un hecho mediante la enumeración de datos y propiedades que actúan como garantías, conectándolo con otros hechos dentro de un sistema coherente de relaciones.
- *Argumentar* supone enumerar datos y propiedades a los que les vinculan otras certezas que actúan de respaldo con el propósito de dar soporte directo a las conclusiones.
- *Justificar* supone reforzar con nuevos argumentos un enunciado a fin de establecer una conclusión.

En este sentido, para desarrollar el proceso de matematización vinculado con el análisis, razonamiento y comunicación de ideas matemáticas, cabe poseer unas capacidades básicas. En primer lugar, la capacidad de pensamiento y razonamiento se refiere al planteamiento de preguntas tales como *¿cuántos?* o *¿cómo puedo hallar?* Se trata de conocer los tipos de respuesta que las matemáticas ofrecen a esas preguntas; distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionales; y comprender y saber utilizar el alcance y los límites de los conceptos matemáticos. En segundo lugar, la capacidad de argumentación pretende entender en qué consisten las pruebas matemáticas y qué las diferencia de otros tipos de razonamiento. Se deben seguir y evaluar cadenas de argumentaciones matemáticas de distintos tipos, que pueden tener un sentido heurístico *¿qué puede o no puede suceder?* y *¿por qué?*; y crear y expresar argumentaciones matemáticas.

Planas y Morera (2011) señalan que la argumentación se interpreta como un discurso que va dirigido a un receptor con el propósito de justificar una opinión partiendo de unos datos y basándose en el razonamiento de unos criterios sobre los que se considera si la opción elegida es la correcta o no. Destacan la importancia de fomentar, dentro del aula, la creación de argumentaciones matemáticas colectivas. Más en general, indican que la argumentación está asociada a toda actividad social, intelectual y verbal que permite la justificación o refutación de una opinión, mediante la formulación de una serie de declaraciones considerando al receptor y la finalidad con la cual se emiten.

Por otra parte, Goizueta y Planas (2013) discuten la argumentación matemática en situaciones de enseñanza y aprendizaje como práctica discursiva y situada, cuya comprensión requiere ubicarse a medio camino entre la práctica matemática y la práctica educativa. Estos autores sostienen que cualquier argumentación debe entenderse en el contexto donde se produce. En general, no hay una línea neta entre las prácticas argumentativas y las de otros tipos que permita distinguirlas, si solo se atienden las características intrínsecas de una proposición. Pero sí es posible establecer diferencias en función del contexto de la práctica. De acuerdo con esto, Goizueta y Planas observan cómo varios profesores, a la hora de identificar argumentaciones en episodios ficticios de clase, se centran en aspectos semánticos de contenidos curriculares concretos y en su desarrollo en situaciones de enseñanza y aprendizaje, alejándose de procedimientos asociables a la disciplina matemática.

A partir del marco presentado construimos el eje estructural. Definimos este eje para caracterizar el uso de la argumentación en los procesos de resolución de los alumnos. Los 14 usos fundamentados en la teoría son:

a) desajuste entre datos y garantía
b) afirmación sin garantía
c) afirmación con garantía explícita
d) afirmación con garantía implícita
e) afirmación con garantía matemática
f) afirmación con garantía extramatemática
g) afirmación con garantía matemática y extramatemática
h) afirmación con respaldo matemático

i) afirmación con respaldo extramatemático

j) afirmación con respaldo matemático y extramatemático

k) afirmación con garantía matemática y respaldo matemático

l) afirmación con garantía matemática y respaldo extramatemático

m) afirmación con garantía extramatemática y respaldo matemático

n) afirmación con garantía extramatemática y respaldo extramatemático

2.3. Interacciones en el aula

Desde un enfoque social, el aprendizaje de la matemática se concibe como una construcción de conocimiento matemático con base en la participación en contextos de prácticas. Bajo este enfoque, en este estudio vemos el aprendizaje ligado a la participación, a la comunicación y a la negociación de significados, en particular en contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tomamos como punto inicial los trabajos de Krummheuer (2007 y 2011) sobre la necesidad de desarrollar entornos y prácticas matemáticas facilitadoras de interacción. Este autor explica que el aprendizaje de las matemáticas depende de la participación del alumno en los procesos de negociación de argumentación colectiva. Entiende la interacción en relación con el aprendizaje de las matemáticas, a partir del estudio de situaciones cotidianas dentro del aula de primaria, enfatizando el estudio de la argumentación y el papel de cada participante en el habla. Contempla las acciones mutuas de los participantes dentro de una clase de matemáticas como situaciones cotidianas producidas por los participantes. Diferencia entre el individuo que realiza la intervención (interlocutor) y el individuo a quien se dirige el interlocutor (receptor).

Según Krummheuer (2007), las acciones permiten crear un espacio de interacción mediante la adaptación, acción, planificación y experiencia. En Krummheuer (2011) se asocia el aprendizaje de las matemáticas con la participación en procesos de negociación de argumentaciones colectivas. Para ello, en primer lugar, se adopta el modelo de Toulmin (2007) como instrumento para el análisis de la estructura de la argumentación. En segundo lugar, se enfatiza el papel de los participantes, estableciéndose diversos tipos en función de si la participación en el habla del aula es más o menos directa.

Como Yackel y Cobb (1996) apuntan, las explicaciones elaboradas por los alumnos pueden tener una base social además de matemática. A medida que se avanza en la participación, se diferencian distintas razones matemáticas (por ejemplo, explicaciones de procedimientos y descripciones de objetos). Estos autores plantean cómo deben constituirse las razones matemáticas que forman parte de las explicaciones elaboradas en el aula. Así, evidencian la relación entre aspectos ligados a la interacción social con la construcción de argumentaciones matemáticas. En este sentido, el desarrollo de la cognición matemática y los procesos que pueden dar sentido a esta cognición no se pueden separar de la participación en entornos de construcción compartida de significados.

Gresalfi, Martin, Hand y Greeno (2009) establecen una relación entre la participación de un alumno en el desarrollo de una actividad dentro del aula de matemáticas y las formas en que se aprovecha esa participación dentro de un contexto de aula. Para ello, indagan qué tipo de habilidades son atribuidas al alumno, al margen de los contextos que intervienen en los procesos de participación, con la interacción entre participantes cuando trabajan un contenido matemático. También, determinan que el conocimiento matemático generado en el aula se adquiere mediante un proceso de aprendizaje que impulsa la participación de los alumnos y las formas de relacionarse.

Orrantia y Rodríguez (2008) defienden que la interacción social es esencial para que se dé el aprendizaje, ya que la construcción individual del conocimiento ocurre a través de procesos de interacción, negociación y colaboración que requieren modificar el papel del alumno desde un receptor de conocimiento descontextualizado hasta un constructor activo de conocimiento mediante la interacción con el ambiente físico y social. En general, en la construcción de conocimiento académico, es importante el proceso de negociación que tiene lugar cuando se comunican modelos y teorías con la finalidad de validar representaciones sobre el mundo (Sardà, 2003).

Al abordar la comunicación en los procesos de interacción, es fundamental que los alumnos verbalicen sus ideas a través del diálogo, tal y como explican Brandt y Schütte (2010). La construcción de conocimiento matemático debe basarse en la elaboración de argumentaciones matemáticas colectivas que permitan desarrollar comprensión. Así, hay una estrecha relación entre las oportunidades de aprendizaje cooperativo y la importancia de la verbalización matemática en los procesos de aprendizaje. En concreto, adoptar una perspectiva social en educación matemática tiene que ver con la tarea intelectual y práctica de pensar la interacción como: a) un concepto que debe ser aprendido; b) una habilidad que debe ser practicada por alumnos y profesores en clase de matemáticas; c) un mediador positivo en la activación y el avance de los procesos de aprendizaje matemático (Planas y Morera, 2011; Morera, 2013). Aprender requiere interacción, discusión y negociación de significados, ya que cada participante tiene su papel en la co-construcción de conocimientos, y donde a través de interacciones se promueve un cambio en la actividad cognitiva del estudiante, permitiendo confrontar sus ideas con las de otros (Badillo y Manrique, 2011).

La enseñanza y el aprendizaje se basan en un proceso de comunicación social, con una construcción conjunta que requiere la negociación de significados y el traspaso progresivo del control y de la responsabilidad del proceso de aprendizaje del profesor al alumno. En la escuela primaria el proceso de construcción de conocimiento matemático se basa, inicialmente, en la intuición espontánea surgida en el aula de matemáticas, para transformarse en objeto de reflexión que abra paso a otro tipo de experiencias matemáticas. En general, al referirnos al aula de matemáticas, consideramos que es una compleja red de maneras de interactuar, entre personas y entre grupos. En las interacciones se produce un intercambio de contenidos condicionados por otras múltiples interacciones (Planas y Edo, 2008). Estas autoras proponen seis aspectos a incluir en el estudio de la interacción social en el aula, informando sobre las características de la interacción en relación con el aprendizaje: a) el alumno; b) el profesor y/o las personas que interactúan con el alumno; c) el grupo clase; d) los recursos materiales; e) los contenidos de enseñanza y aprendizaje; f) el colegio y, eventualmente, otros contextos más amplios.

Con objeto de examinar la interacción, nos basamos en Cobo (1998), quien propone un modelo de análisis del discurso en torno a la construcción de unidades dialogales jerarquizadas, ordenadas de menor a mayor grado de generalidad, para analizar el tipo de interacción que se desarrolla en la resolución de problemas entre dos interlocutores que verbalizan sus ideas:

- *Intervención*. Aportación de un individuo al desarrollo de aquello que se habla y sobre lo que informará o tomará posición. Hay intervenciones problematizadas, centradas en el contenido del tema de debate; intervenciones directivas, introduciendo uno o más temas y presentando un objeto de discusión; y no problematizadas, centradas en la gestión, la estructura de la comunicación o la relación entre participantes.
- *Intercambio*. Definido en términos de acción-(re)acción, hace referencia a la intervención del sujeto A que produce una (re)acción en el sujeto B. Puede suceder que en la intervención de B se establezca alguna referencia, implícita o explícita, al contenido de la intervención de A o a alguno de sus elementos.
- *Interacción*. Sucesión de intercambios donde se produce un cambio cognitivo al menos en uno de los interlocutores, siendo el episodio los límites de dicha sucesión.

Cobo (1998) matiza que tanto en el intercambio como en la interacción se establece un diálogo entre participantes, mientras que en la intervención tiene lugar una unidad de monólogo. Para coordinar el análisis interactivo, Cobo propone una delimitación de las interacciones, basada en la homogeneidad de la naturaleza de las acciones y la finalidad en cada momento del proceso resolutivo. Para ello, asocia los límites de las interacciones con los de los episodios resultantes de dividir dicho proceso, entendiendo por episodio los períodos de tiempo que limitan las interacciones (por ejemplo, en el caso de evaluar una parte de la resolución desarrollada, cuando su finalidad es comprender el enunciado del problema, etc.).

Siguiendo esta línea, Cobo (1998) y Cobo y Fortuny (2000) presentan un modelo de análisis de la interacción basado en el estudio de dos dimensiones dependientes: la temática del discurso, dentro del contexto de la resolución de problemas y relacionada con la forma en que los estudiantes contribuyen en el proceso de resolución; y la interlocutiva del discurso, refiriéndose al mecanismo de comunicación en el que se destaca el origen y la forma en que los hablantes se turnan en la conversación (si lo hacen por iniciativa propia o como consecuencia de la exigencia de otros individuos, a través de indicaciones explícitas, preguntas directas, imperativos o aseveraciones asociadas a un orador y que requieren respuesta del otro interlocutor).

En este estudio, adoptamos los términos de intervención, intercambio e interacción, siguiendo los trabajos mencionados. Pretendemos diferenciar y analizar intervenciones e intercambios que se producen cuando los participantes interactúan para resolver problemas, con el fin de caracterizar la interacción que tiene lugar. Además, perseguimos analizar cómo participa el alumnado, evidenciando diversas acciones y maneras de contribuir que impulsen el desarrollo del pensamiento dentro del aula a partir de la adquisición de responsabilidades dentro de las estructuras participativas. Yackel y Cobb (1996); Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent (2007 y 2010); Krummheuer (2011); Morera, Fortuny y Planas (2012); Morera (2013) y Chico (2014), entre otros, prestan especial atención a las actuaciones que muestran evidencias directas de acciones que pueden generar oportunidades de aprendizaje para el alumnado: desarrollo de razonamientos, elaboración de ideas, resolución de dudas, etc. A partir de estos referentes, sostenemos que es primordial la manera en la que se articula la participación, ya sea a través de una acción aceptada, elaborada, cuestionada, desafiada u obviada, para analizar cadenas de intervenciones orientadas a la elaboración de argumentaciones colectivas.

Chico (2014) considera los siguientes aspectos que informan sobre interacciones: a) aclaración; para mejorar la comprensión de un planteamiento, desarrollo o conclusión; b) acuerdo; para reflexionar o madurar un planteamiento, desarrollo o conclusión; c) desacuerdo; para declarar disconformidad en torno a un planteamiento, desarrollo o conclusión existente de modo implícito o explícito; d) ampliación; para aportar nuevos desarrollos o conclusiones que complementan otro desarrollo existente de modo implícito o explícito; e) cuestionamiento; para plantear un interrogante en torno a un tema surgido; f) clarificación; para corregir o clarificar un planteamiento, desarrollo o conclusión entre la pareja; g) validación; para aprobar un planteamiento, desarrollo o conclusión, pudiendo afirmar con razones; h) paráfrasis; para reformular la determinación de un planteamiento, desarrollo o conclusión ya establecido; i) imposición; para exigir la adopción de un planteamiento, desarrollo o conclusión que se admite como correcto por uno de los alumnos; j) interrupción; para detener el turno de palabra de un alumno a fin de manifestar una nueva tesis sin continuidad con la intervención que tiene lugar; k) modificación; para transformar un planteamiento, desarrollo o conclusión existente de modo implícito o explícito; l) síntesis; para simplificar un planteamiento, desarrollo o conclusión existente de modo implícito o explícito.

En esta investigación tenemos en cuenta otros aspectos relacionados con las creencias y los valores que desarrollan los alumnos cuando participan en clase de matemáticas (Yackel y Cobb, 1996; Morera, 2013). A través del análisis de episodios de clase, se puede acceder a aspectos normativos vinculados con las argumentaciones matemáticas De acuerdo con esto cabe examinar las acciones en entornos de trabajo en grupo, donde los alumnos explican y justifican sus interpretaciones, razonamientos y soluciones. El aprendizaje matemático corresponde a un proceso activo de construcción individual y colectiva, en el que participan normas sociales enfocadas al desarrollo del conocimiento matemático que sustentan los acuerdos alcanzados (por ejemplo, desafiar el pensamiento de los demás y justificar sus propias interpretaciones en el aula de matemáticas o considerar aceptable una explicación o una justificación matemática). Cabe distinguir una norma social de una norma sociomatemática. Esperar que se manifieste entendimiento alude a una norma social, por ejemplo, mientras que la comprensión de lo que constituye la diferencia matemática entre cada solución establecida alude a una norma sociomatemática. En concreto, incidimos en cómo unas y otras normas regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje generadas en el aula.

A partir del marco presentado construimos el eje interaccional. Definimos este eje para caracterizar las intervenciones de los alumnos en los procesos de resolución en pareja, distinguiendo entre el individuo que realiza la intervención (interlocutor), el individuo a quien se dirige el interlocutor (receptor), y el desarrollo de la intervención en la que actúa el interlocutor, prestando atención al contenido matemático y/o no matemático involucrado. Los 12 tipos de intervención fundamentados en la teoría son: a) aclaración; b) acuerdo; c) desacuerdo; d) ampliación; e) cuestionamiento; f) clarificación; g) validación; h) paráfrasis; i) imposición; j) interrupción; k) modificación; l) síntesis.

Capítulo 3.
Metodología

Describimos el planteamiento metodológico del estudio. Adoptamos un enfoque cualitativo con el fin de responder a la pregunta de investigación y de lograr los objetivos. Indicamos enfoque, contexto y participantes. Seguimos con la recogida de datos y los momentos organizativos del experimento. Luego mostramos la secuencia didáctica y el tipo de datos. Finalizamos con los métodos de análisis.

3.1. Enfoque, contexto y participantes

La metodología del estudio se rige por un enfoque cualitativo para el análisis de las producciones de alumnos en la resolución escrita y oral de tareas. Como Krummheuer (2007 y 2011), consideramos la participación del alumnado en los procesos de resolución individual y de negociación de argumentaciones colectivas a fin de de examinar su construcción de conocimiento matemático. El análisis toma las nociones de argumentación matemática e de interacción social. Desde la perspectiva del experimento didáctico, tomamos el paradigma constructivista del aprendizaje, priorizando el trabajo personal y en pareja de los alumnos y potenciando el aula como espacio de construcción de conocimiento.

Con respecto al contenido matemático asociado a las fracciones, diseñamos la secuencia didáctica como contexto de la investigación para promover la realización de tareas de resolución de problemas en el aula, entre ellas, razonar y argumentar, representar, tomar decisiones, discutir, operar y solucionar. Desarrollamos una secuencia de problemas aritméticos de reparto excluyendo los significados de medida y operador de la fracción. Esta secuencia actúa como instrumento que estimula la exploración de propiedades y la formulación de conjeturas, así como el interés por explicar los razonamientos elaborados, en términos de Brandt y Schütte (2010). La secuencia se lleva a cabo durante el tercer trimestre del curso escolar 2010-2011, cuando los alumnos ya han trabajado el concepto de fracción y algunos de sus significados.

En favor de una dinámica de aula que favorezca la participación, establecemos unas normas inspiradas en Yackel y Cobb (1996) y en Morera (2013). El investigador y los participantes consensúan estas normas antes de realizar la recogida de datos. Promovemos que los alumnos muestren interés por compartir la resolución de los problemas, escuchen las ideas del compañero y respeten los turnos de palabra. También, pretendemos que el alumnado asuma de manera conjunta la responsabilidad de superar dificultades individuales y de pareja, que participe en la generación de ideas, aunque no sean correctas, y que cuestione y valore resoluciones alternativas. Pretendemos que se indiquen razones para las afirmaciones, se relacionen los datos del enunciado con sus conclusiones, y se elaboren razonamientos para sustentar el proceso de resolución.

Los participantes del estudio son ocho alumnos ($A_1 \cdots A_8$) de sexto curso de Primaria (11 y 12 años) de una escuela de la provincia de Barcelona, en una clase de desdoblamiento de matemáticas. A grandes rasgos, se caracterizan por su familiarización con la resolución de problemas matemáticos, por su alto grado de participación en clase y por su capacidad comunicativa. Pedimos autorización de sus padres y/o tutores, previa información de los propósitos del estudio (Anexo 1). Otorgamos un nombre ficticio a cada participante, velando por el anonimato y constituimos de forma aleatoria cuatro parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$, $P_{7\text{-}8}$). La maestra, que es también la investigadora, ejerce un papel activo destacado en situaciones ocasionales, promoviendo la interacción en la resolución de problemas y evitando en lo posible intervenciones con contenido matemático.

3.2. Recogida de datos y momentos organizativos

La experiencia transcurre en nueve sesiones de clase ($S_1 \cdots S_9$), de cuarenta y cinco minutos, dentro del aula de matemáticas. Los participantes resuelven, de manera individual y en pareja, los cinco problemas de la secuencia. Implementamos tres momentos organizativos (M_1, M_2, M_3), interrelacionados: M_1, resolución de los problemas, individual y por escrito; M_2, resolución en pareja, oral y escrita; M_3, reconstrucción de las respuestas, individual y por escrito. Recogemos datos, escritos y orales, para analizar cómo la resolución en pareja de problemas contextualizados influye en la construcción del concepto de fracción en un aula de matemáticas de sexto de primaria.

Momento de resolución individual (M_1)

La investigadora recuerda las normas y entrega a los alumnos el enunciado escrito del problema que se inicia en la sesión. Los alumnos resuelven los problemas por escrito y de manera individual. En S_1 resuelven el problema 1, en S_2 resuelven los problemas 2 y 3, y en S_3 los problemas 4 y 5. Si quieren rectificar algo escrito, no pueden borrar; tienen que indicar qué parte no es válida y continuar con su respuesta, sin hablar con otros alumnos. No hay grabación de vídeo o audio puesto que los datos son las respuestas escritas.

Momento de resolución en pareja (M_2)

La investigadora proporciona a las parejas el enunciado escrito del problema y sus respuestas individuales iniciales. Los alumnos resuelven los problemas en pareja, de forma oral y escrita. En S_4 elaboran la resolución del problema 1, en S_5 resuelven los problemas 2 y 3, y en S_5 los problemas 4 y 5. Se parte de las resoluciones individuales escritas y se confrontan los argumentos individuales para obtener nuevos argumentos o consensuar los establecidos. Cada pareja elabora una respuesta escrita conjunta, sin copiar las respuestas individuales iniciales. Si se quiere rectificar algo escrito, se debe indicar qué parte no es válida sin borrar. No hay intercambio con otras parejas y la maestra solo interviene para promover la participación. Una cámara graba la resolución de cada pareja. Se recopilan las respuestas orales y escritas de las parejas.

Momento de reconstrucción individual (M_3)

La investigadora distribuye a cada alumno una copia de su resolución individual inicial y solicita que la revise, de forma individual, para incorporar los cambios que considere necesarios usando un bolígrafo de otro color distinto al inicial. Se puede rectificar, ampliar o modificar lo que se decida, e incluso volver a resolver los problemas. Hay varias sesiones de reconstrucción individual de las respuestas. En S_7, reconstruyen la respuesta al problema 1, en S_8 reconstruyen las respuestas a los problemas 2 y 3, y en S_3 reconstruyen las respuestas a los problemas 4 y 5. No hay intercambio entre alumnos, ni grabación de vídeo o audio. Los datos recopilados son las respuestas reconstruidas de cada alumno.

3.3. Secuencia didáctica

La secuencia didáctica contiene cinco problemas aritméticos de repartición ($P_1 \cdots P_5$) con contextos extramatemáticos. Los significados de la fracción que involucran son: relación parte-todo en contexto continuo o discreto, cociente y razón. Para el diseño, consideramos la información de la maestra sobre los conocimientos atribuidos a los alumnos acerca de la noción de fracción.

P_1 se extrae de Badillo, Corral, Chico y Planas (2011) y Badillo y Manrique (2011), P_2 de Planas (2001), P_3 y P_4 de dos problemas presentados en *Problemes a l'esprint* de FEEMCAT en su edición de 2007, y P_5 del concurso *Fem Matemàtiques* en su edición de 1997. La secuencia no sigue un orden específico y la introducción de los problemas es aleatoria. A través del análisis de su resolución, pretendemos caracterizar significados logrados de la fracción.

Problema 1

P_1 busca trabajar el significado de fracción como relación parte-todo en contexto continuo y contexto discreto, abordar diversas operaciones con fracciones, estimular el uso de diversos tipos de lenguaje para expresar la fracción y potenciar las conexiones entre representaciones.

El enunciado da la representación gráfica de dos reparticiones. Se requiere la comprensión de interpretaciones numéricas diferentes de las fracciones de cada reparto, la conexión entre representaciones de la fracción, la comparación de fracciones y la operación con fracciones. El contexto del problema hace potencialmente más rica la argumentación de las respuestas de los alumnos.

PROBLEMA 1. SORTIDA A LA PIZZERIA

Una colla de 8 amics van a sopar a la pizzeria "La Ragazza". Després de fer una ullada a la carta, fan la següent comanda de 5 pizzes, per tallar-les i compartir-les entre tots: 1 pizza Margarita, 1 pizza Quatre formatges, 1 pizza Quatre estacions i 1 pizza d'espinacs.

Tant punt arriben les pizzes a la taula es genera una petita discussió:

- En Marc, que és un dels líders de la colla, proposa dividir totes les pizzes a parts iguals, de forma que cada pizza, cadascun d'ells pot agafar-ne un tall, i menjar-ne tots la mateixa quantitat, tal i com observem:

- La Sara, considera que és millor no fer tants talls a les pizzes i que és millor dividir-les, de forma diferent a la proposada per en Marc, fent servir el menor nombre de talls a les pizzes, així:

a) Quina de les dues reparticions t'agrada més, la d'en Marc o la de la Sara? Per què?

b) Quina quantitat de pizza Margarita menja un noi/a de la colla a cada repartiment?

c) Mengen tots la mateixa quantitat de pizza Margarita a cada repartiment?, Per què?

d) En total, quina quantitat de pizzes menja cada noi/noia de la colla a cada repartiment?

e) Mengen la mateixa quantitat de pizza total a cada repartiment?, Per què?

f) Quina de les dues opciones de repartiment de les pizzes creus que li és favorable?, Per què?

Figura 4. Enunciado de P_1

En la primera repartición, Marc distribuye unidades en partes iguales, atendiendo al número de personas a repartir. En la segunda, Sara reparte cada unidad en el menor número de partes posibles (fracción egipcia). Los antiguos egipcios solo utilizaban fracciones de la forma 1/n (exceptuando 2/3) por lo que cualquier otra fracción tenía que ser representada como suma de fracciones de unidad con distinto denominador. El uso de la fracción egipcia ayuda a representar la cantidad total de pizza que come cada chico en las dos reparticiones de dos maneras diferentes, utilizando siempre fracciones unitarias (1/n) que son de más fácil comprensión para la etapa de primaria (Alsina, Fortuny y Giménez, 1995). Se interpretan las fracciones egipcias como la suma de los resultados parciales obtenidos al efectuar el reparto en fases sucesivas, y al elaborar dos alternativas sobre el modo de realizar los cálculos numéricos en el proceso de reparto.

P_1(a) plantea la elección de una de las reparticiones. En base a los gustos y preferencias de los participantes, se prioriza el uso de uno de los repartos presentados. A través de la comprensión y de la interpretación del enunciado, se identifica la relación parte-todo en un contexto continuo (tipo específico de pizza) y en un contexto discreto (conjunto de pizzas).

P_1(b) cuestiona la cantidad de pizza Margarita asociada a cada repartición, tomando la fracción como parte-todo en un contexto continuo. En el reparto de Marc, a todos les corresponde 1/8 de pizza Margarita, mientras que en el reparto de Sara solo dos personas recibirán 1/2 de pizza Margarita. Se fomenta el uso de fracciones unitarias (1/n) en los diferentes repartos.

P_1(c) plantea si las dos reparticiones representan la misma cantidad de pizza Margarita para las distintas personas. La comparación, ordenación e interpretación de las fracciones de las reparticiones permiten establecer que los repartos no son equivalentes. Se dota de significado el concepto de reparto equitativo y el significado de la fracción como parte-todo en un contexto continuo.

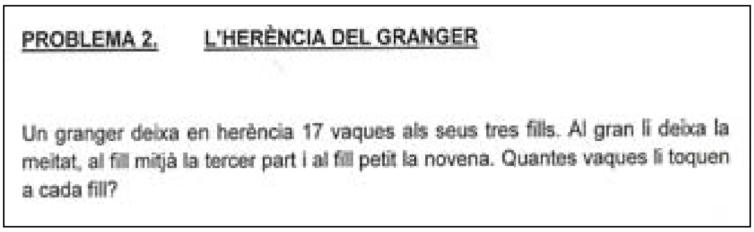
P_1(d) hace referencia al total de pizza que come cada persona en cada repartición, fomentando la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto (conjunto de pizzas). A través de la aplicación de métodos de suma de fracciones, se obtiene la fracción 5/8 de pizza del reparto total.

P_1(e) cuestiona si a los dos repartos les corresponde la misma cantidad de pizza total. A través de la comparación de la fracción de cada repartición, se establece que los repartos son equivalentes. Además, se promueve la argumentación en torno a la equivalencia establecida.

P_1(f) presenta un nuevo personaje que condiciona la forma de repartir. La comprensión del enunciado permite identificar la relación parte-todo en contexto continuo (tipo específico de pizza) y en contexto discreto (conjunto de pizzas), para priorizar el uso del reparto egipcio en base a la restricción impuesta.

Problema 2

P_2 busca trabajar el significado de la fracción como relación parte-todo en un contexto discreto en el que no se reparten todos los elementos disponibles y como cociente, potenciando las operaciones con fracciones, el uso del lenguaje matemático y la conexión entre representaciones.


PROBLEMA 2. L'HERÈNCIA DEL GRANGER

Un granger deixa en herència 17 vaques als seus tres fills. Al gran li deixa la meitat, al fill mitjà la tercer part i al fill petit la novena. Quantes vaques li toquen a cada fill?

Figura 5. Enunciado de P_2

El enunciado usa el lenguaje matemático-verbal para indicar las fracciones unitarias que representan los repartos: un medio, un tercio y un noveno. La comprensión de la situación de reparto no equitativo y la aplicación de métodos de suma de fracciones permite calcular la fracción propia asociada a la repartición: 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18. No intervienen en el reparto 1/18 partes del conjunto, diferenciándose entre reparto parcial y reparto total. A cada hijo le corresponden: 1/2 de 18 = 9 vacas; 1/3 de 18 = 6 vacas; 1/9 de 18 = 2 vacas.

Problema 3

P_3 busca trabajar el significado de la fracción como expresión de un cociente de números enteros y como parte-todo en contexto discreto. El enunciado plantea una situación de reparto equitativo de elementos según unas condiciones. La comprensión del enunciado y la aplicación de los conceptos de divisores de un número natural y de división exacta entre dos números permiten calcular el reparto.

PROBLEMA 3. EL BANQUET DE NOCES

Per a un banquet de noces s'han de distribuir 180 persones en taules iguals amb la condició que s'omplin totes les taules i que hi hagi un nombre parell de persones en cadascuna.

a) Si fossis l'encarregat del restaurant on tindrà lloc el banquet, quantes persones podries col·locar a cada taula amb la condició que hi hagin més de 4 i menys de 20 persones.

b) Quantes taules haurà a cada un dels casos anteriors?

Figura 6. Enunciado de P_3

P_3(a) plantea repartir 180 personas en conjuntos iguales de mesas siguiendo dos condiciones. El cálculo de todos los divisores de 180 y la aplicación de las restricciones permiten establecer todas las opciones de reparto y especificar, para cada una, las personas: colocar en cada mesa grupos de 6, 10, 12 y 18 personas. Se identifica la fracción como cociente de números enteros y se establece el número de elementos de la repartición.

P_3(b) cuestiona la cantidad de subconjuntos que se obtienen al repartir todos las personas. Refuerza el significado de la fracción como cociente, al precisar todos los subconjuntos implicados en el reparto equitativo del primer apartado: 30 mesas con 6 personas cada una; 18 mesas con 10 personas cada una; 15 mesas con 12 personas cada una; y 10 mesas con 18 personas cada una.

Problema 4

P_4 busca trabajar el significado de la fracción como parte-todo en un contexto discreto en el se reparten más elementos de los disponibles y como cociente de números enteros. Se aborda el uso de operaciones con fracciones, se estimula la utilización de tipos de lenguaje para expresar la fracción y se potencian las conexiones entre representaciones.

> PROBLEMA 4. LA COMANDA DE L'ESPAVILAT
>
> Un espavilat va entrar en una botiga i va demanar una dotzena d'ous. Amb l'excusa que eren per repartir-los entre tres amics, va demanar al botiguer que n'emboliqués separadament la meitat, la tercera part i la quarta part.
>
> a) Per què creus que va demanar així la comanda?
>
> b) Com haguessis fet aquesta comanda?

Figura 7. Enunciado de P_4

P_4(a) plantea una situación de reparto que implica más elementos de los disponibles. La comprensión de la situación de reparto y de las fracciones unitarias del enunciado (la mitad, la tercera parte y la cuarta parte) llevan a repartos parciales de huevos: 1/2 de 12=6; 1/3 de 12=4; 1/4 de 12=3. La aplicación de métodos de suma de fracciones permite obtener la fracción impropia del reparto total: 1/2+1/3+1/4=13/12; 6+4+3=13 huevos. Se diferencia el reparto parcial del reparto total a través de un doble recuento, y hay más de doce elementos implicados en la repartición. También se puede establecer el reparto total mediante un número mixto y la equivalencia 13/12=1·1/12.

P_4(b) propone la repartición desde diversos puntos de vista. La comparación, la ordenación de las fracciones de los repartos parciales y el uso de métodos de suma de fracciones refuerzan la repartición establecida en el apartado inicial.

Problema 5

P_5 busca trabajar el significado de fracción como razón. Mediante un enunciado expresado en lenguaje no matemático, se plantea una situación que usa a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjunto de unidades.

P_5(a) y P_5(b) plantean evaluar diversas formas de repartir un conjunto de elementos para establecer el criterio de distribución más justo según la comparación entre panes y monedas. El análisis de cada opción muestra tres criterios de reparto: a) la cantidad total de pan inicial de cada persona, dejando al margen la fracción como razón (opción A); b) la cantidad de pan que cede cada persona al mercader, con la fracción como razón (opción B). Se reparten los panes iniciales, en tres partes iguales, y se obtienen 24 porciones a distribuir entre tres. Se calcula la fracción total con métodos de suma de fracciones, 9/3+15/3=24/3 de pan inicial = 8 panes iniciales. Cada persona recibe monedas según la cantidad de pan que cede al mercader. Pere cede 1/24 de pan y recibe 1 moneda, Joan cede 7/24 de pan y recibe 7 monedas; c) la cantidad de pan que consume cada uno, dejando al margen la relación fracción-proporción (opción C). Siguiendo el criterio de razón y proporción, el alumno debe ver que la segunda opción es la correcta al utilizar la fracción como índice comparativo de dos cantidades, mediante el significado de fracción como razón.

PROBLEMA 5. EN JOAN, EN PERE I EL MERCADER

En el llibre "El hombre que calculaba" s'explica la següent història: En Joan i en Pere realitzen la travessa d'un desert i es troben amb un ric mercader a qui uns lladres acaben d'assaltar. En Joan i en Pere ajuden el mercader a retornar al seu palau i comparteixen amb ell les seves provisions.

- En Joan disposa de 5 panets i en Pere de tres i tots tres en mengen durant el viatge a parts iguals.
- En arribar al palau el mercader agraït els hi dóna una moneda per a cada panet.
- A l'hora de repartir-se les monedes, es produeix un petit conflicte ja que la repartició que faria en Joan, en Pere i el mercader és diferent, donant lloc a les tres opcions següents:
    - Opció A: En Pere creu que 5 monedes són per a en Joan i les altres 3 per a ell.
    - Opció B: En Joan diu que ell ha de rebre 7 i en Pere 1.
    - Opció C: El mercader proposa que cada un se'n quedi 4.

Els tres personatges no es posen d'acord, i necessiten de la teva ajuda, per tal de solucionar el conflicte que s'ha generat. Per resoldre aquesta situació recorda tot allò que saps de fraccions i respon:

a) Quina de les diverses opcions consideres que és la més justa per a cada personatge? Per què?

b) Qui creus que té raó? Per què?

Figura 8. Enunciado de P_5

La Tabla 1 resume los significados de la fracción implicados en la resolución de cada problema de la secuencia.

SIGNIFICADO DE FRACCIÓN	PROBLEMA									
	P_1(a)	P_1(b)	P_1(c)	P_1(d)	P_1(e)	P_1(f)	P_2	P_3	P_4	P_5
Parte-todo en contexto continuo	X	X	X			X				
Parte-todo en contexto discreto	X			X	X	X	X	X	X	
Cociente							X	X	X	
Razón										X

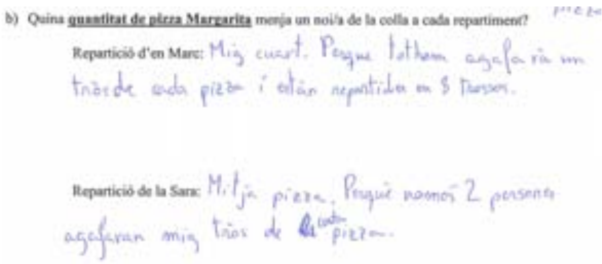
Tabla 1. Significados de la fracción implicados en la secuencia

3.4. Tipos de datos

A través del diseño y aplicación de los instrumentos de recogida de datos en torno a la resolución de los problemas en M_1, M_2 y M_3, obtenemos el conjunto de datos primarios del estudio. En concreto, para cada alumno y pareja de alumnos, tomamos datos escritos y orales.

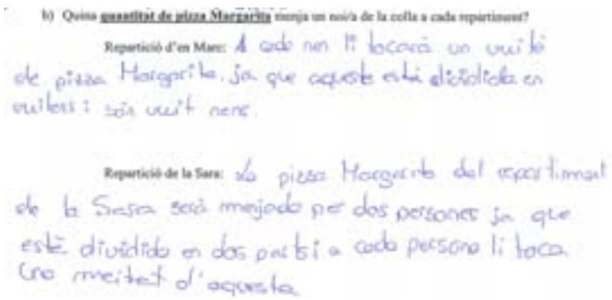
Datos escritos: Producción escrita individual y en pareja

En M_1, tomamos datos escritos de los alumnos al resolver los problemas (producción individual inicial); en M_2, datos escritos de la pareja (producción escrita en pareja); y en M_3, datos escritos a raíz de la revisión individual de respuestas (producción individual de revisión). A fin de ilustrar producciones escritas tomamos P_1(b) y A_1 (ver todas las producciones en los Anexos 2, 3 y 4).



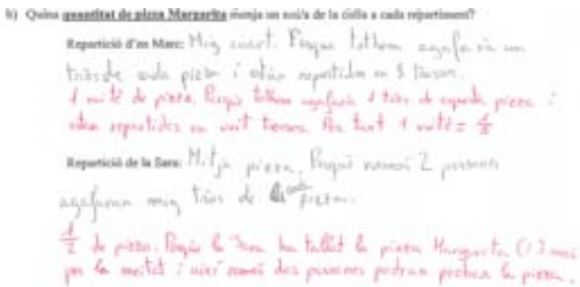
Reparto de Marc: *Medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y están repartidas en 8 trozos.* Reparto de Sara: *Media pizza. Porque sólo dos personas cogerán medio trozo de cada pizza.*

Figura 9. Producción individual inicial de A_1 en P_1(b)



Reparto de Marc: *A cada niño le tocará un octavo de pizza Margarita, ya que esta está dividida en octavos y son ocho niños.* Reparto de Sara: *La pizza Margarita del reparto de Sara será comida por dos personas ya que está dividida en dos partes y a cada persona le toca una mitad de ésta.*

Figura 10. Producción escrita de la pareja $P_{1\text{-}2}$ en P_1(b)



Reparto de Marc: *Medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y están repartidas en 8 trozos. 1 octavo de pizza. Porque todos cogerán 1 trozo de esta pizza y todas están repartidas en ocho trozos. Por tanto 1 octavo=1/8.* Reparto de Sara: *Media pizza. Porque sólo dos personas cogerán medio trozo de pizza. 1/2 de pizza. Porqué Sara ha cortado la pizza Margarita (y 3 más por la mitad y así sólo dos personas pueden probar la pizza.*

Figura 11. Producción individual de revisión de A_1 en P_1(b)

Datos orales: Producción oral en pareja

En M_2, obtenemos datos orales (producción oral en pareja) de los registros de audio y vídeo transcritos. Aquí cabe señalar que la elaboración de las transcripciones conlleva una importante base interpretativa. Partiendo del vídeo registrado de la resolución de los problemas en parejas, elaboramos la transcripción de los datos orales. La Tabla 2 resume las normas de transcripción de la investigación combinando Cobo (1998), Gille (2001) y Krummheuer (2007).

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
Texto con tipo de letra normal	Enunciado audible con claridad
(+) acompaña al texto	Aumento del tono de voz
(-) acompaña al texto	Disminución del tono de voz.
Subrayado	Enfatiza esa parte del texto, palabra acentuada.
(P: intervalo)	Pausa de silencio con intervalo de tiempo
(¿?) acompaña al texto	Duda sobre la exposición
(T e x t o)	Lentitud de habla
(G)	Registro no verbal (gesticular)
(*texto en cursiva*)	Enunciado poco claro
(##)	Fragmento inaudible no reproducible
(Ri)	Risas
(Re)	Ruido externo
(I)	Interrupción y habla de otro locutor

Tabla 2. Normas de transcripción del registro de vídeo

Para realizar la transcripción íntegra de los datos orales obtenidos en M_2, diseñamos una tabla de cuatro columnas. El Anexo 5 contiene la transcripción de todos los registros de vídeos de las parejas. En las transcripciones hay:

Turnos. Número de serie de cada intervención que ordena de forma ascendente los datos orales. El turno facilita localizar los fragmentos de interés. Para la resolución de cada problema, y para cada pareja, se inicia una nueva numeración.

Líneas de tiempo. Intervalos de tiempo de cada intervención. Se indican los minutos y segundos transcurridos en cada turno.

Participantes. Autor de cada intervención. En general, corresponde al alumno y, en ocasiones, a la maestra.

Registros verbales y acciones no verbales. Datos orales e información adicional, no oral, de cada turno.

Para ejemplificar una parte de las producciones orales, tomamos P_1(b) y la pareja $P_{1\text{-}2}$. La Tabla 3 ilustra la transcripción comprendida entre los turnos 30 y 39, con una duración de 1 minuto y 14 segundos.

Turno	Línea de tiempo	Participante	Registro verbal y acciones no verbales
30	(4:24 - 4:34)	A_2	Quina quantitat de pizza margarita menja un noi noia de la colla a cada repartiment? Repartició d'en Marc. Té el boli… a vere la d'en Marc (I). (G): A_2 lee el enunciado, y A_1 observa el cuestionario. A_2 pasa el bolígrafo y el papel a A_1.
31	(4:34 - 4:38)	A_1	Jo he posat mig quart, un quart seria això (-) (G): A_1 señala su respuesta, remarca un octavo de la pizza del dibujo y mira a A_2 que está observando.
32	(4:38 - 4:42)	A_2	Una persona es tindria que menjar, si són vuit nens un de cada. (G): A_2 señala las pizzas del enunciado y A_1 observa.
33	(4:42 - 4:57)	A_2	En total de pizza margarita en la repartición d'en Marc cada nen menjaria un vuitè… fica… un vuitè coma
34	(4:57 - 5:22)	Maestra	Però no li dictis, parleu. Ella t'ha donat una resposta, explica-li tu la teva a veure si coincidiu o no, potser ell no té raó i la tens tu. No dicteu. Tu diga-li què penses, tu diga-li què penses, a veure si heu arribat al mateix resultat o no? Heu de parlar. No heu de dictar i copiar. Vinga.
35	(5:22 - 5:26)	A_2	… llavors, tu què penses?
36	(5:26 - 5:28)	A_1	El mateix.
37	(5:28 - 5:30)	A_2	Doncs ja està, si creiem el mateix?
38	(5:30 - 5:32)	Maestra	Tu abans has dit el mateix?
39	(5:32 - 5:38)	A_1	He dit que això, bueno, que jo he posat mig quart …

Tabla 3. Ejemplo de producción oral de $P_{1\text{-}2}$ en P_1(b)

3.5. Métodos de análisis

Después de diseñar la secuencia didáctica e implementarla en el aula, actuamos siguiendo un método de análisis fundamentado en los tres ejes definidos en el Capítulo 2: conceptual, estructural e interaccional. Buscamos lograr los objetivos a partir del análisis de las producciones de los alumnos, con atención a los usos de la fracción, los tipos de estructura de los argumentos y los procesos de interacción. La caracterización de los ejes sirve para crear los instrumentos. Como punto de partida, realizamos un análisis preliminar del conjunto de datos primarios y examinamos qué códigos permiten caracterizarlo. Reducimos el número de códigos que se usan en el diseño de los instrumentos de análisis (Anexo 6).

En el eje conceptual adoptamos los siguientes usos de la fracción: identificación de la relación parte-todo en contexto continuo, identificación de la relación parte-todo en contexto discreto, identificación de la fracción como cociente, identificación de la fracción como razón, distinción entre reparto total y reparto parcial, comparación de fracciones, aplicación de métodos de suma de fracciones, conexión entre lenguajes y/o registros, uso del lenguaje no matemático, uso del lenguaje matemático-verbal, uso del lenguaje matemático-numérico y uso del lenguaje matemático-gráfico.

En el eje estructural tomamos los siguientes tipos de estructura de los argumentos: desajuste entre datos y garantía, afirmación sin garantía, afirmación con garantía matemática, afirmación con garantía extramatemática, afirmación con respaldo matemático y afirmación con respaldo extramatemático.

En el eje interaccional tenemos en cuenta los siguientes tipos de interacción: aclaración, acuerdo, ampliación, cuestionamiento, desacuerdo, imposición, interrupción, modificación y síntesis.

La conjunción de los tres ejes permite organizar los datos para analizar factores que influyen en el proceso de construcción de conocimiento matemático. El conjunto de códigos avanza a medida que encontramos regularidades en las producciones de los alumnos, considerando pertinente incluir o suprimir códigos.

Perfilamos el diseño de cada instrumento de análisis para describir, reducir y analizar los datos. Elaboramos cuatro instrumentos: I_1, I_2, I_3, I_4. Su diseño se basa en el cruce del eje conceptual con el estructural y/o el interaccional (Figura 12).

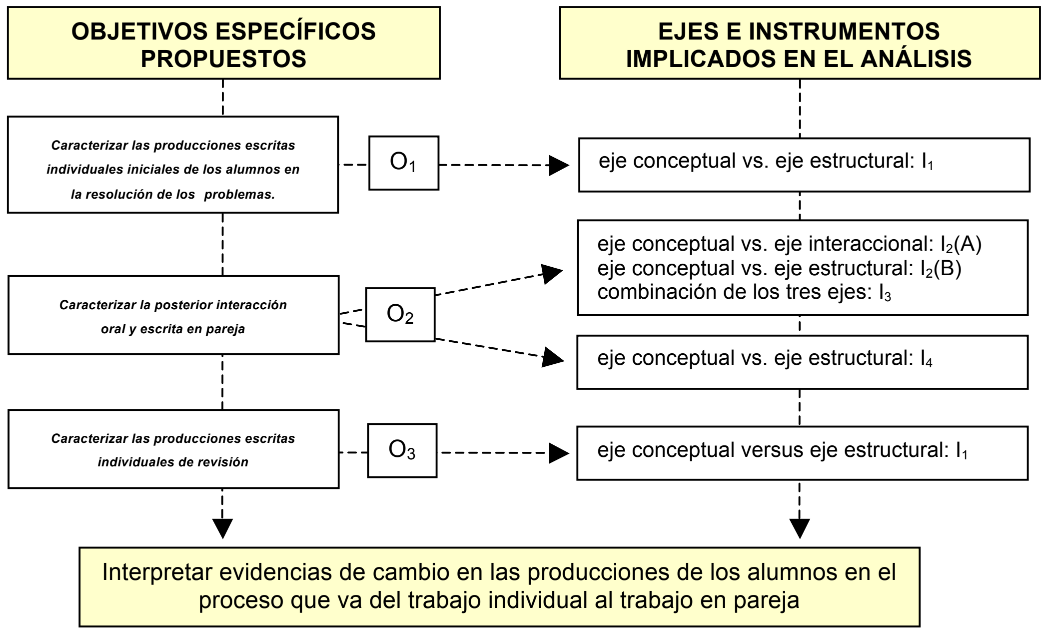


Figura 12. Relación entre objetivos, ejes e instrumentos

El diseño de I_1 atiende al cruce del eje conceptual con el eje estructural. I_2 tiene dos versiones, I_2(A) y I_2(B), para indicar dos combinaciones: conceptual vs. estructural y conceptual vs. interaccional. A partir de estas combinaciones bidimensionales, desarrollamos I_3 para combinar de forma tridimensional los aspectos de cada eje. La elaboración de I_4 contempla aspectos analizados en los instrumentos anteriores mediante tres partes diferenciadas.

3.5.1. Método de análisis para los objetivos 1 y 3

Debido a la estrecha relación entre O_1 y O_3, planificamos un método de análisis conjunto centrado en aspectos que definen los ejes conceptual y estructural. En concreto, identificamos los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos que elaboran alumnos en sus respuestas en M_1 y M_3.

El diseño y aplicación de I_1 atiende a la consecución de estos dos objetivos. Diseñamos una tabla de doble entrada. En las filas, situamos los usos de la fracción y en las columnas, los tipos de estructura de los argumentos. I_1 no indica aspectos temporales ni cronológicos, al no ser necesario porque los problemas de la secuencia son analizables por separado. Además es aplicable progresivamente a cuatro conjuntos de datos escritos: a) producciones escritas por alumno y problema; b) producciones escritas por alumno y para todos los problemas; c) producciones escritas de todos los alumnos y por problema; d) producciones escritas de todos los alumnos y para todos los problemas.

Aplicamos I_1 a cada producción individual de cada alumno. En las celdas situamos ejemplos de datos para analizar rasgos conceptuales y estructurales de sus respuestas. En segundo lugar, sintetizamos información de las producciones escritas de un alumno en la resolución de todos los problemas. Ahora las celdas cuantifican la frecuencia de cada combinación bidimensional entre ejes, sin ejemplos. Obtenemos información de la resolución de todos los problemas para cada alumno a fin de caracterizar las producciones individuales de un alumno en concreto. En tercer lugar, recopilamos información sobre las producciones escritas de todos los alumnos en la resolución de cada problema. De nuevo, las celdas muestran la frecuencia de cada combinación bidimensional entre los ejes, sin ejemplos de datos. Esto informa sobre todas las producciones individuales de la resolución de un problema. Por último, contabilizamos la frecuencia de cada combinación bidimensional entre ejes, y mostramos el recuento para las producciones escritas (iniciales y de revisión) de todos los alumnos y todos los problemas. Comparamos el recuento de las respuestas iniciales y revisadas y establecemos resultados sobre cómo influye la interacción alumno-alumno en el proceso de resolución.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto						
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes y/o registros						
Uso del lenguaje no matemático						
Uso del lenguaje matemático-verbal						
Uso del lenguaje matemático-numérico						
Uso del lenguaje matemático-gráfico						

Tabla 4. Instrumento de análisis I_1

En general, al incluir sin temporalidad los resultados en M_1 y M_3 para los distintos problemas y alumnos, señalamos la relación que interesa entre el eje conceptual y el estructural antes y después de la interacción en pareja.

3.5.2. Método de análisis para el objetivo 2

Para la consecución de O_2, el método de análisis se basa en la identificación de los usos de la fracción, los tipos de estructura de los argumentos de los alumnos en sus producciones y el tipo de interacción en el aula al resolver en M_2, de forma oral y escrita, los cinco problemas de la secuencia.

Método de análisis para las producciones orales de las parejas

Tras transcribir los registros orales de las grabaciones en la resolución de los problemas en pareja, determinamos qué partes de la interacción son de interés para el estudio. Definimos episodio (E_i) al fragmento de la interacción que engloba intervenciones relativas al trabajo de un aspecto concreto en torno a usos de la fracción, tipos de estructura de los argumentos o procesos de interacción en pareja.

Para identificar cada episodio, señalamos:

Número de episodio. Iniciamos la numeración en el primer episodio para la primera pareja (P_{1-2}) y seguimos una numeración correlativa hasta el último episodio elaborado para la cuarta pareja participante (P_{7-8}). Se va del Episodio 1, asociado a la resolución de la pareja P_{1-2} en P_1(a), hasta el Episodio 178, para la pareja P_{7-8} en P_5.

Problema. Presentamos el problema que resuelve la pareja.

Turno inicial y final del episodio. Volvemos a adjudicar un número de serie a cada intervención que ordena de forma ascendente los datos orales. No seguimos los turnos establecidos en la transcripción íntegra de todos los registros orales, sino que volvemos a numerar las intervenciones. Así se sigue un número de serie correlativo que obvia los fragmentos que no forman parte de ningún episodio. La numeración tiene dos números separados por un punto. El primer número expresa la numeración que ordena el conjunto de todas las intervenciones realizadas por la misma pareja, siguiendo un orden correlativo. Después del punto, se presenta un número, del 1 al 4, que indica la pareja participante en ese momento. Se utiliza la siguiente numeración: el número 1 corresponde a la pareja P_{1-2}, el número 2 se adjudica a la pareja P_{3-4}, el número 3 representa a la pareja P_{5-6} y el número 4 corresponde a la pareja P_{7-8}. Para cada pareja se inicia el turno de los episodios a partir del número 1.

Intervalo temporal. Expresamos en segundos el intervalo de tiempo asociado al episodio. Seguimos la temporización establecida en el episodio anterior para todos los episodios de la misma pareja.

Después mostramos el fragmento de la transcripción asociado al episodio, mediante una tabla de tres columnas. En cada fila, situamos turno, participante e intervención (agrupando registros verbales y no verbales). En la primera reducción de datos orales, hemos obtenido un total de 178 episodios (ver Anexo 7). A modo de resumen, la Tabla 5 indica todos los episodios asociados a cada pareja para la resolución de los problemas de la secuencia: a) P_{1-2} (48 episodios); b) P_{3-4} (41 episodios); c) P_{5-6} (34 episodios); d) P_{7-8} (55 episodios).

PROBLEMA	EPISODIOS DE CADA PAREJA PARA CADA PROBLEMA			
	P_{1-2}	P_{3-4}	P_{5-6}	P_{7-8}
P_1	22	25	18	27
P_2	7	2	4	9
P_3	7	6	5	5
P_4	6	4	4	6
P_5	6	4	3	8
TOTAL EPISODIOS	**48**	**41**	**34**	**55**

Tabla 5. Episodios para cada pareja y problema

A modo de ejemplo, presentamos los episodios E_4 y E_5 obtenidos a partir del fragmento de transcripción ilustrado en la sección anterior. De nuevo, atendemos a la resolución conjunta de A_1 y A_2 en P_1(b). Así, conectamos todos los ejemplos presentados en este apartado de recogida de datos y reducción inicial.

E_4 corresponde al fragmento de la transcripción comprendido entre los turnos 34 y 53. Siguiendo la nueva numeración establecida para identificar a los episodios, a E_4 le corresponden los turnos del 29 al 46. Al corresponder a P_{1-2}, la nueva numeración está comprendida entre el turno 29.1 y 46.1. El episodio dura 1:59 segundos según el intervalo de tiempo (4:57s – 6:56s).

EPISODIO 4: P_1(b) / (29.1 – 46.1) / (4:57s – 6:56s)

(29.1)	Maestra	**Però no li dictis, parleu. Ella t'ha donat una resposta, explica-li tu la teva a veure si coincidiu o no, potser ell no té raó i la tens tu. No dicteu. Tu diga-li que penses, tu diga-li què penses, a veure si heu arribat al mateix resultat o no? Heu de parlar. No heu de dictar i copiar. Vinga.** (G): Ambos escuchan las indicaciones que les da y miran al investigador. Ella ha dejado de escribir.
(30.1)	A_2	**… llavors, tu què penses?**
(31.1)	A_1	**El mateix.**
(32.1)	A_2	**Doncs ja està, si creiem el mateix…**
(33.1)	Maestra	**Tu abans has dit el mateix? Explica-li a ell.**
(34.1)	A_1	**He dit que això, bueno, que jo he posat mig quart… que he posat mig quart i?** (G): Ella responde señalando una de las pizzas del dibujo.
(35.1)	A_2	**Però, per què?**
(36.1)	A_1	**No sé, perquè pensava que això era mig quart.** (G): Ella señala una pizza. Él observa y le indica en el dibujo.
(37.1)	A_2	**Però com, mig quart?**
(38.1)	A_1	**Això és un quart, espera.** (G): Ella señala una pizza.
(39.1)	A_2	**Està dividit en vuitens, o sigui que un és un vuitè.** (G): Él señala una pizza del enunciado y ella observa. Hablan con un tono de voz alto.
(40.1)	A_1	**Però, un quart estaria bé?**
(41.1)	A_2	**A vere, un quart seria això... això és el quart, un quart.** (G): Joan dibuja y ella observa y pregunta señalando el dibujo.
(42.1)	A_1	**I això?**

(43.1)	A_2	**Això seria, dos quarts, tres quarts i quatre quarts…** (G): Joan dibuja.
(44.1)	A_2	**Ho entens?** (G): Joan acaba de dibujar su explicación y ella escucha sorprendida.
(45.1)	A_1	**Ah!, pues ja.**
(46.1)	A_2	**Però com està repartida en vuitens, la millor resposta jo crec que seria un vuitè. Un quart tampoc veig perquè que ha d'estar malament, però en principi un vuitè està millor, perquè si està repartida la pizza en vuitens?, No?... a cada nen… li tocarà… un vuitè… de pizza… margarita.**

E_5 corresponde al fragmento de la transcripción comprendido entre los turnos 54 y 61. Atendiendo la nueva numeración establecida, a E_5 le corresponden los turnos del 47 al 55. Este episodio corresponde a $P_{1\text{-}2}$ y, por este motivo, la nueva numeración es 47.1 y 55.1. El episodio dura 0:37 segundos (6:56s –7:33s).

EPISODIO 5: $P_1(b_1)$ / (47.1 – 55.1) / (6:56s –7:33s)

(47.1)	A_2	**(##) Eeehhh… a cada nen… li tocarà… un vuitè… de pizza… margarita.** (G): Joan escribe la respuesta y ella observa.
(48.1)	A_1	**Bueno, de totes les pizzes.** (G): Joan sigue escribiendo y señala en el texto y responde al comentario de Rita
(49.1)	A_2	**Fica pizza margarita.**
(50.1)	A_1	**Ah, vale.**
(51.1)	A_2	**Per això (##)... cada nen per un vuitè de pizza margarita coma, ja que... aquesta... està dividida...** (G): Joan relee el escrito y sigue escribiendo. Ella observa y sigue el escrito.
(52.1)	A_1	**En vuit trossos.**
(53.1)	A_2	**… En vuitens, no? queda millor en vuitens o en trossos?** (G): Joan deja de escribir y plantea una cuestión.
(54.1)	A_1	**En vuitens.** (G): Joan vuelve a escribir.
(55.1)	A_2	**En vuitens... i són vuit amics.** (G): Joan termina de escribir y ella observa.

Tras determinar qué partes de la interacción son de interés para el estudio, elaboramos los instrumentos que permiten analizar los datos orales obtenidos en M_2. El diseño y aplicación del instrumento I_2 (A y B) busca el logro del objetivo 2. Es una tabla de dos columnas que relacionan los códigos del eje conceptual con los del estructural o interaccional. Distinguimos dos tipos (ver Tabla 6):

- I_2(A) relaciona usos de la fracción con tipos de estructura de los argumentos
- I_2(B) relaciona usos de la fracción con procesos de interacción

I_2 es aplicable a todos los episodios identificados. En la cabecera de las columnas con usos de la fracción/tipos de estructura de los argumentos, para el tipo A, y usos de la fracción/procesos de interacción, para el tipo B, situamos el código del eje conceptual, estructural o interaccional del episodio. En las celdas llamadas ejemplo de dato, presentamos los fragmentos del episodio y señalamos en negrita las partes que ejemplifican los códigos formulados en las celdas superiores. A partir de los datos orales, analizamos la doble mirada conceptual y estructural, o conceptual e interaccional en las producciones orales.

I_2 resulta útil en la consecución del segundo objetivo, ya que facilita la caracterización, de manera ordenada, de los fragmentos de la interacción de interés. Este instrumento permite clasificar las partes de la interacción de forma independiente. El hecho de aplicar I_2 a cada episodio excluye factores temporales y permite reagrupar episodios en función de sus características conceptuales, estructurales e interaccionales. Al incluir sin temporalidad los resultados de M_2 para los problemas y parejas, indicamos la relación que interesa entre eje conceptual y estructural o interaccional durante la interacción en pareja. Es decir, la aplicación de este instrumento permite iniciar la caracterización de las producciones orales que elaboran las cuatro parejas cuando resuelven los cinco problemas de la secuencia. Además, su empleo complementa el uso de I_4 aplicado a las producciones escritas de las parejas.

Identificación del episodio	
Usos de la fracción	**I_2(A)- Tipos de estructura de los argumentos**
Código del eje conceptual	Código del eje estructural
Ejemplo de dato	Ejemplo de dato
Usos de la fracción	**I_2(B)- Procesos de interacción**
Código del eje conceptual	Código del eje interaccional
Ejemplo de dato	Ejemplo de dato

Tabla 6. Instrumentos de análisis I_2(A) y I_2(B)

Con el diseño y la aplicación del instrumento I_3, pretendemos conseguir el objetivo 2. Elaboramos I_3 a partir de las dos combinaciones establecidas en I_2 (A y B) para las producciones orales de las parejas. Combinamos de manera tridimensional los aspectos que definen a cada eje mediante una tabla formada por cinco columnas: episodio, relación entre ejes, usos de la fracción, procesos de interacción y tipos de estructuras de los argumentos. Añadimos las filas necesarias para analizar cada episodio seleccionado (ver Tabla 7).

I_3 es aplicable a todos los episodios que tienen en común una de las dos combinaciones bidimensionales anteriores. A través de su aplicación, se examina, para cada episodio, cómo se relacionan los tres ejes conceptual, interaccional y estructural que caracterizan las producciones orales de las parejas. En cada fila identificamos un episodio, situamos la combinación tridimensional que lo caracteriza y aportamos fragmentos relativos a cada eje, como ejemplo de datos que serán analizados en base a una combinación establecida para los tres ejes. A partir del análisis de la información que proporciona I_3, intentamos obtener patrones de actuación para caracterizar las formas de interactuar, argumentar y participar en la clase de matemáticas.

I_3 resulta útil para proseguir la consecución del segundo objetivo, al facilitar la caracterización ordenada de los fragmentos de la interacción que son de interés. Su aplicación permite clasificar las partes de la interacción de forma independiente, conectando con la información obtenida en I_2(A) e I_2(B). El análisis de la información que proporciona pone de relieve la relación entre los tres ejes, de forma atemporal y sin relevancia cronológica. En síntesis, caracteriza las producciones orales de los alumnos, cuando resuelven los cinco problemas de la secuencia, desde una perspectiva tridimensional.

Episodio	Relación entre ejes	Usos de la fracción	Procesos de interacción	Tipos de estructura de los argumentos
Episodio y problema	Código tridimensional	Ejemplo de dato	Ejemplo de dato	Ejemplo de dato

Tabla 7. Instrumento de análisis I_3

En el análisis de las producciones orales en parejas, destacamos que I_3 también es aplicable a cuatro conjuntos de datos con episodios: a) de cada pareja para todos los problemas desde lo conceptual y estructural; b) de cada pareja para todos los problemas desde lo conceptual e interaccional; c) de todas las parejas para todos los problemas desde lo conceptual y estructural; d) de todas las parejas para todos los problemas desde lo conceptual e interaccional.

Por una parte, I_3 sintetiza la información obtenida, desde las dos combinaciones bidimensionales (conceptual vs. estructural y conceptual vs. interaccional), para los episodios de cada pareja cuando resuelven todos los problemas. En sus celdas, indicamos el episodio y el problema sin ejemplos. Así informa de la resolución de todos los problemas para cada pareja, permitiendo la caracterización de las producciones orales en la interacción alumno-alumno. Por otra parte, implementamos I_3 para recontar la frecuencia de cada combinación bidimensional entre ejes, sin ejemplos.

Método de análisis para las producciones escritas de las parejas

El diseño y aplicación de I_4 busca la consecución del objetivo 2 y al caracterizar las producciones escritas de las parejas. Es un instrumento que combina aspectos estudiados en instrumentos anteriores y que está dividido en tres partes diferenciadas, señalizadas tal y como muestra la Tabla 8: a) producción individual inicial escrita de cada miembro de la pareja en M_1; b) episodios implicados en la resolución en M_2; c) producción escrita en pareja en M_2.

Resolución de: (Indicar el problema y/o apartado) **Alumnos de la pareja:** (Indicar los participantes)			
Producción individual inicial de (alumno A)		**Producción individual inicial de** (alumno B)	
Ejemplo de dato		Ejemplo de dato	
Eje conceptual	Usos de la fracción	**Eje conceptual**	Usos de la fracción
Eje estructural	Tipos de estructura de los argumentos	**Eje estructural**	Procesos de interacción

Episodios relacionados con la resolución en pareja			
Episodio	**Eje conceptual**	**Eje estructural**	**Eje interaccional**
Episodio	Usos de la fracción	Tipos de estructura de los argumentos	Procesos de interacción

Producción en pareja Redactada por (indicar el participante)						
Ejemplo de dato						
Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extra-matemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto						
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes y/o registros						
Uso del lenguaje no matemático						
Uso del lenguaje matemático-verbal						
Uso del lenguaje matemático-numérico						
Uso del lenguaje matemático-gráfico						

Tabla 8. Instrumento de análisis I_4

Aplicamos la primera parte de I_4 a cada producción individual inicial de miembro de la pareja. Esta parte inicial del instrumento presenta dos columnas, una para la producción del alumno A y otra para la producción del alumno B de la pareja $P_{A\text{-}B}$. En sus celdas, situamos las producciones individuales iniciales, e indicamos los usos de la fracción y los tipos de estructura argumentativa.

La segunda parte de I_4 es aplicable a los episodios que están relacionados con la resolución del mismo problema. Hay cuatro columnas para identificar los episodios relativos a la interacción alumno-alumno y los códigos identificados para los ejes conceptual, estructural e interaccional. No mostramos relaciones de ejes de manera bidimensional o tridimensional ni ejemplos de datos.

Aplicamos la tercera parte de I_4 a la producción escrita de la pareja, adoptando el diseño de I_1. Se trata de una tabla de doble entrada que relaciona los códigos empíricos provisionales de los ejes conceptual y estructural. En la cabecera de la tabla indicamos qué alumno realiza la producción. En las filas situamos los usos de la fracción y en las columnas, los tipos de estructura de los argumentos. Sus celdas contienen ejemplos de datos que se analizan en base a la combinación bidimensional. Tras aplicar la tercera parte del instrumento, eliminamos las filas y las columnas sin datos primarios. Para sintetizar la información aportada por I_4, volvemos a usar el instrumento I_1 para las producciones escritas de todas las parejas en la resolución de todos los problemas.

Capítulo 4.

Análisis y resultados

En el siguiente capítulo, aplicamos los instrumentos de análisis a las producciones escritas de los alumnos y a los episodios obtenidos a partir de las transcripciones. Analizamos en qué medida influyen ciertos entornos de colaboración en la construcción de conocimiento matemático.

4.1. Caracterización de producciones escritas individuales iniciales

Este apartado se centra en la caracterización de las producciones escritas individuales iniciales que elaboran los alumnos cuando resuelven los cinco problemas (Objetivo 1). En primer lugar, presentamos ejemplos de producciones y los describimos en función de los usos de la fracción y de los tipos de estructura de los argumentos. En segundo lugar, aplicamos el primer instrumento de análisis (I_1) a todas las respuestas iniciales escritas de los alumnos. A continuación, sintetizamos los resultados de cada alumno en la resolución de todos los problemas, de todos los alumnos en la resolución de cada problema y de todos los alumnos en la resolución de todos los problemas. Por último, extraemos resultados y caracterizamos las producciones escritas individuales iniciales de los alumnos.

4.1.1. Producciones escritas individuales iniciales

Para ejemplificar la producción escrita individual inicial, tomamos respuestas de A_1 o A_2 en la resolución de cada problema en el primer momento organizativo (M_1). Para cada producción, describimos su contenido matemático en torno a los usos de la fracción y el tipo de prácticas argumentativas de los alumnos atendiendo a los códigos del eje conceptual y del estructural descritos en el Capítulo 2.

a) Quina de les dues reparticions t'agrada més, la d'en Marc o la de la Sara? Per què?

La d'en Marc. Porque així tothom probarà un tròs de cada pizza.

El de Marc. Porque así todos probarán un trozo de cada pizza.

---

b) Quina **quantitat de pizza Margarita** menja un noi/a de la colla a cada repartiment?

Repartició d'en Marc: Mig cuart. Porque tothom agafarà un tròs de cada pizza i están repartides en 8 trossos.

Repartició de la Sara: Mitja pizza. Porquè només 2 persones agafaran mig tròs de cada pizza.

Reparto de Marc: *Medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y están repartidas en 8 trozos.*
Reparto de Sara: *Media pizza. Porque solo dos personas cogerán medio trozo de pizza.*

---

c) Mengen tots la mateixa **quantitat de pizza margarita** a cada repartiment?, Per què?

No. Porque en la d'en Marc tothom s'agafa 1 tròs de cada pizza i la de la Sara només s'agafen 2 persones cada pizza.

No. Porque en el de Marc todos cogerán 1 trozo de cada pizza y la de Sara solo cogerán 2 personas en cada pizza.

---

d) En total, quina **quantitat de pizzes** menja cada noi/noia de la colla a cada repartiment?

Repartició d'en Marc: Mitja pizza i mitg quart. Porque tothom agafarà un tròs de cada pizza i són 5 pizzes en total, cadascú menjarà Mitja pizza i mitg quart.

Repartició de la Sara: Mitja pizza i mitg quart. Porque són 4 pizzes de 2 trossos (que en total són 8, un tròs per cadascú) i una repartida en 8 trossos. De la pizza d'espinacs.

Reparto de Marc: *Media pizza y medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y son 5 pizzas en total, cada uno comerá media pizza y medio cuarto.*
Reparto de Sara: *Media pizza y medio cuarto. Porque son 4 pizzas de 2 trozos (que en total son 8, un trozo para cada uno) y una repartida en 8 trozos de la pizza de espinacas.*

---

e) Mengen la mateixa **quantitat de pizza total** a cada repartiment? ¿Per què?

~~No. Porque~~ A la d'en Marc sí però en la de la Sara no. Porque en la de la Sara només mengen 2 noi/es una pizza i els altres no la poden probar.

En la de Marc sí, pero en la de Sara no. Porque en la de Sara solo comen 2 chicos/as una pizza y los otros no la pueden probar.

Quina de les dues opcions de repartiment de las pizzes creus que li és favorable? ¿Per què?

La de la Sara. Porque pot triar una altra pizza i que un altre amic es mengi la seva part de la pizza de quatre formatges.

La de Sara. Porque puede escoger otra pizza y que otro amigo se coma su parte de la pizza de cuatro quesos.

Figura 13. Producción escrita individual inicial de A_1 del problema 1

La producción escrita de A_1 en $P_1(M_1)$ sugiere cierta comprensión del significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto (Figura 13): a) nombra mediante el uso del lenguaje matemático-verbal las fracciones unitarias de cada reparto (*medio cuarto, media pizza* y *media pizza y medio cuarto*) y expresa mediante el lenguaje matemático-gráfico la cantidad total de cada reparto (*media pizza y medio cuarto*); b) dota de significado la suma de fracciones homogéneas y heterogéneas (*media pizza y medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y son 5 pizzas en total, cada uno comerá media pizza y medio cuarto*); c) establece una equivalencia y comparación entre las fracciones de los repartos; d) conecta diferentes formas de representar a la fracción. Sin embargo, no integra en una expresión simbólica de la fracción que represente la cantidad de pizza Margarita en cada reparto (*1/8*) y (*1/2*) o el total para cada reparto (*5/8*).

La representación gráfica y el contexto del problema llevan a dar una respuesta de cada reparto sin usar un lenguaje matemático. En ocasiones, utiliza el lenguaje no matemático (*trozo)* o (*su parte de pizza*) para designar dos fracciones diferentes (*1/2*) y (*1/8*). No hace referencia a las partes de la unidad que considera en algunos repartos, al no indicar en lenguaje matemático la cantidad exacta correspondiente. Muestra desajuste entre la representación gráfica del reparto que presenta el enunciado y el reparto que indica en su producción escrita usando el lenguaje matemático-verbal.

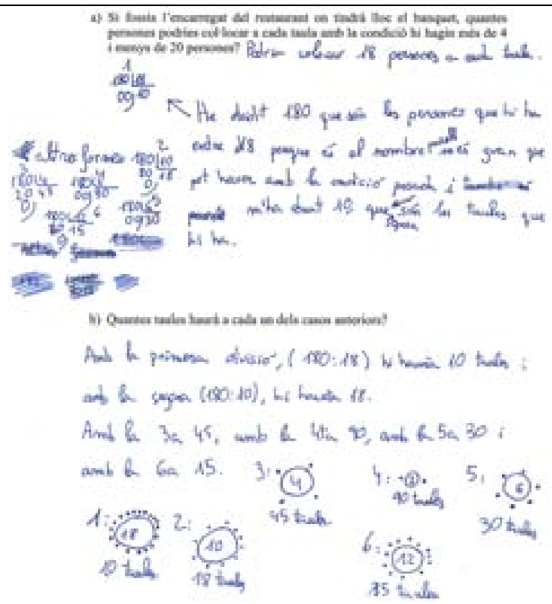
Explica las razones que le conducen a escoger uno de los repartos (*El de Marc. Porque así todos probarán un trozo de cada pizza*) y a establecer las cantidades de los repartos (*Medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y están repartidas en 8 trozos, Media pizza. Porque solo dos personas cogerán medio trozo de pizza, Media pizza y medio cuarto. Porque todos… cada uno comerá media pizza y medio cuarto, Media pizza y medio cuarto. Porque son 4 pizzas de 2 trozos – que en total son 8, un trozo para cada uno – y una repartida en 8 trozos pizza espinacas*). Indica el reparto más favorable cuando se establecen condiciones (*La de Sara porque puede escoger otra pizza y que otro amigo se coma su parte de la pizza de Cuatro quesos*). Aporta razones que complementan su respuesta, pero no justifica los repartos mediante respaldos matemáticos o extramatemáticos.

Leyéndome el problema, a primera vista, pienso que 17 no se puede repartir entre dos para atribuir la mitad al hermano grande, por eso, pasaré a mirar cuántas vacas tocan al resto. Al mediano le toca una tercera parte cosa que tampoco se puede hacer. Ahora pienso, puede que los hermanos compartan una vaca o que se la dejen al abuelo. De la primera manera al hermano mayor le tocan 8 vacas + la que comparten, tiene 9 vacas. Al mediano le tocan 5 vacas y media así no puede ser de esta manera. También puede ser que a un amigo le den cinco vacas y de esta manera quedan 12 cosa que no puede ser porque no se puede dividir entre dos. Una posibilidad puede ser que el hijo pequeño no quiera las vacas y una la regale a un amigo. Las otras las reparten a partes iguales entre los otros dos hermanos, con lo cual a cada hermano le tocan 8 vacas porque 8(vacas) x 2(hermanos) = 16 (vacas totales ya que el hermano pequeño ha regalado una).

Figura 14. Producción escrita individual inicial de A_2 del problema 2

La producción escrita de A_2 en $P_2(M_1)$ refleja que el alumno muestra cierta dificultad en la comprensión del enunciado. Presenta errores sobre el significado de la fracción como relación parte-todo en contexto discreto y como cociente en un reparto en el que no se distribuyen todas las unidades (Figura 14): a) no comprende las condiciones del reparto y no calcula los repartos parciales; b) utiliza el lenguaje matemático-verbal en conexión con el contexto extramatemático del problema (*la mitad, repartir a partes iguales, tercera parte*); c) omite la suma de fracciones (*1/2+1/3+1/9=17/18*) y no obtiene la fracción asociada al reparto total; d) no indica que (*1/18*) de las unidades del conjunto no se reparten; e) no usa fracciones propias.

Al establecer los repartos parciales, se ponen de relieve errores conceptuales respecto al significado de la fracción como parte-todo en contexto discreto. Aunque A_2 considera que las unidades no pueden fraccionarse, establece un resultado incoherente (*pienso que 17 no se puede repartir entre dos para atribuir la mitad al hermano grande… puede que los hermanos compartan una vaca o que se la dejen al abuelo... al hermano mayor le tocan 8 vacas + la que comparten, tiene 9 vacas. Al mediano le tocan 5 vacas y media así no puede ser de esta manera*). Busca nuevas razones que argumenten su opción, cediendo o compartiendo unidades del reparto. Produce desajustes entre los datos y su respuesta, mostrando incomprensión del enunciado y usando incorrectamente los repartos (*un medio, un tercio y un noveno*).



Podría colocar 18 personas en cada mesa. He dividido 180 que son las personas que hay entre 18 porque es el número par más grande que puede haber con la condición puesta y me ha dado 10, que supongo son las mesas que hay.
En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18. En la 3ª. 45, con la 4ª. 90, con la 5ª. 30 y con la 6ª. 15.

Figura 15. Producción escrita individual inicial de A_1 del problema 3

La producción escrita de A_1 en $P_3(M_1)$ indica comprensión del enunciado. Dota de significado a la fracción como cociente, al distribuir de forma equitativa y con restricciones todos los elementos del conjunto (Figura 15): a) comprende las restricciones del reparto y reparte los elementos (*personas*) en subgrupos de igual amplitud (*mesas)*, sin precisar todas las opciones de reparto (*En la primera división (180:18), habrá 10 mesas y en la segunda (180:10) habrá 18. En la 3ª. 45, con la 4ª. 90, con la 5ª. 30 y con la 6ª. 15*)*;* b) muestra repartos que omiten alguna restricción (e*n la 3ª. 45, con la 4ª. 90*); c) dota de significado los conceptos de reparto equitativo, división exacta y divisor de un número entero; d) realiza divisiones indicadas (*he dividido 180 que son las personas que hay entre 18 porque es el número par más grande que puede haber con la condición puesta y me ha dado 10, que supongo son las mesas que hay*); e) usa el lenguaje no matemático del enunciado en conexión con el lenguaje matemático-verbal y matemático-gráfico que usa en su respuesta.

Explica posibles opciones de reparto usando el lenguaje matemático-verbal y el matemático-gráfico (*En la primera división (180:18), habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18. En la 3ª. 45, con la 4ª. 90, con la 5ª. 30 y con la 6ª. 15*). Justifica una opción de reparto (*Podría colocar 18 personas en cada mesa. He dividido 180 que son las personas que hay entre 18 porque es el número par* *más grande que puede haber con la condición puesta y me ha dado 10, que supongo son las mesas que hay*). En ocasiones, omite una de las restricciones y considera dos repartos incompatibles con el enunciado (*180 entre 2 y 180 entre 4*).

Porque así se lleva un huevo más.
Vendedor: Si yo fuese el vendedor, habría contado los huevos; así estaría seguro de que me da 12 y si hubiese visto que me ha engañado no le diría nada y le pondría 11 huevos. Espabilado: Si yo fuese el espabilado hubiese hecho el pedido como lo ha hecho él, pero con la excusa de que era para hacer tortillas para unos invitados. Si el vendedor se hubiese enterado, hubiese cogido el dinero y me iría a otra tienda.

Figura 16. Producción escrita individual inicial de A_1 del problema 4

La producción escrita de A_1 en $P_4(M_1)$ muestra que comprende el significado de la fracción como relación parte-todo en un contexto discreto y, como cociente, en un reparto en el que se distribuyen más unidades de las disponibles (Figura 16): a) interpreta el reparto de trece unidades y no una docena, significando a la fracción como parte de un conjunto; b) usa las fracciones unitarias de los repartos (*la mitad, la tercera parte y la cuarta parte*) para obtener las unidades de cada reparto (*6, 3 y 4*); c) suma fracciones (*1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12*) y establece numéricamente que se distribuyen trece unidades y no una docena (*Porque así se lleva un huevo más, 6+3+4=13*); d) dota de significado a la fracción como cociente al dividir (*12 entre 2, 4 y 3*) y expresar el resultado de cada división (*6, 3 y 4*); e) no usa la fracción impropia del reparto (*13/12*) ni utiliza los números mixtos para indicar el reparto parcial o el total; f) conecta el lenguaje matemático-verbal del enunciado con el lenguaje no matemático y con algunos tipos de lenguaje matemático. No usa la representación gráfica del reparto.

Desarrolla razones acerca del reparto (*Porque así se lleva un huevo más. 6+3+4=13*), pero no aporta garantías matemáticas basadas en las fracciones de los reparto parciales. Justifica diversas opciones de reparto en base a los protagonistas de la situación (*Vendedor: Si yo fuese el vendedor, habría contado los huevos; así estaría seguro de que me da 12 y si hubiese visto que me ha engañado no le diría nada y le pondría 11 huevos. Espabilado: Si yo fuese el espabilado, hubiese hecho el pedido como lo ha hecho él, pero con la excusa de que era para hacer tortillas para unos invitados. Si el vendedor se hubiese enterado, hubiese cogido el dinero y me iría a otra tienda*).

"Yo pienso que lo primero que se debe tener en cuenta es que cada uno tenía un número de panes diferente y que la persona que tenía más panes era Joan. Pero mi opinión es que la opinión del mercader es la más justa, ya que cada persona se lleva 4 monedas y tienen las mismas."
"Creo que tiene razón el mercader, ya que según mi opinión los ocho panes que tiene los dividen en tercios y cada uno se come uno. De esta manera, cada persona come lo mismo que es 8/3= 2 panes y 2 tercios. Si todos comen lo mismo, la opción del mercader es la mejor."

Figura 17. Producción escrita individual inicial de A_2 del problema 5

La producción escrita de A_2 en $P_5(M_1)$ muestra cierta dificultad respecto al significado de la fracción como razón, al no usar a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades (Figura 17): a) no comprende el enunciado y no analiza todas las opciones de reparto presentadas. Omite el único reparto que sigue un criterio de razón y proporción; b) no dota de significado a la fracción como razón, al considerar un reparto, de forma verbal y gráfica, en desconexión con la relación fracción-proporción (*Yo pienso que lo primero que se debe tener en cuenta es que cada uno tenía un número de panes diferente y que la persona que tenía más panes era Joan. Pero mi opinión es que la opinión del mercader es la más justa, ya que cada persona se lleva 4 monedas y tienen las mismas*).

Elabora razones, numéricas y gráficas, para establecer el reparto (*Creo que tiene razón el mercader, ya que según mi opinión los ocho panes que tiene los dividen en tercios y cada uno se come uno. De esta manera, cada persona come lo mismo que es 8/3= 2 panes y 2 tercios. Si todos comen lo mismo, la opción del mercader es la mejor*). Sin embargo, omite el significado de la fracción como razón y el concepto de proporción en el reparto de unidades (*monedas*).

4.1.2. Análisis respecto al objetivo 1

Para dar respuesta al primer objetivo aplicamos I_1, de forma individual, a las producciones escritas individuales iniciales de los ocho alumnos cuando resuelven los cinco problemas de la secuencia (en total 40). Ejemplificamos la aplicación de este instrumento para las producciones de A_1 y de A_2 presentadas en la sección anterior a modo de ejemplo (Tablas 9-13). En las celdas de I_1, situamos ejemplos extraídos de los datos para analizar los ejes conceptual y estructural. Para cada tabla, solo consideramos las celdas de los códigos de los que se tiene información. A partir del análisis de las respuestas iniciales de los alumnos, concluimos qué usos de la fracción participan en el proceso resolutivo de los problemas en conexión con el tipo de estructura argumentativa que elaboran los alumnos en sus producciones. De esta manera, caracterizamos conjuntamente las características conceptuales y estructurales de las producciones escritas individuales que elaboran los alumnos en M_1.

Aplicación de I_1

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
		Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	*Media pizza. Porque solo dos personas cogerán medio trozo de pizza.* (ambiguo)	*No. Porque en el de Marc todos cogerán 1 trozo de cada pizza y la de Sara solo dos cogerán 2 personas de cada pizza.*		*Medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y están repartidas en 8 trozos.*	
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*A la de Marc sí pero en la de Sara no. Porque en la de Sara solo comen 2 chicos/as una pizza y los otros no la pueden probar.* (erróneo)	Reparto de Marc: *Media pizza y medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza, cada uno comerá media pizza y medio cuarto.*	*El de Marc. Porque así todos probarán un trozo de cada pizza.*	Reparto de Sara: *Media pizza y medio cuarto. Porque son 4 pizzas de 2 trozos (que en total son 8, un trozo para cada uno) y una repartida en 8 trozos pizza espinacas.*	*La de Sara porque puede escoger otra pizza y que otro amigo se come su parte de la pizza de cuatro quesos.*
Comparación de fracciones	*A la de Marc sí pero en la de Sara no…*	*No… Marc todos cogerán 1 trozo de cada pizza… Sara solo dos… cada pizza.*			
Aplicación de equivalencia de fracciones				*Medio cuarto"* y una porción de la pizza 	
Aplicación de métodos de suma de fracciones		Solo de forma gráfica establece el reparto total: 		Solo de forma gráfica establece el reparto total: 	
Conexión entre lenguajes y/o registros	*medio trozo; media pizza* y la mitad de: 	*Media pizza y medio cuarto"*  y *Media pizza* y la mitad de la pizza del enunciado; *Medio cuarto* o *un trozo* y una porción de la pizza del enunciado: 		*Media pizza* y la mitad de la pizza del enunciado  *Medio cuarto* y un octavo del enunciado:  *8 trozos* y toda la pizza  *trozo* y una parte de ellas.	
Uso del lenguaje no matemático	*medio trozo*	*1 trozo; un trozo*	*un trozo*	*un trozo* *8 trozos* *2 trozos*	*su parte de la pizza*
Uso del lenguaje matemático-verbal	*media pizza*	*media pizza* *medio cuarto*		*medio cuarto* *media pizza*	
Uso del lenguaje matemático-gráfico					

Tabla 9. Aplicación de I_1 a la producción escrita de A_1 en $P_1(M_1)$

Del análisis de la producción escrita de A_1 en $P_1(M_1)$ se desprende que, en P_1(a), prioriza el uso del reparto que distribuye las partes de forma equitativa. Usa el lenguaje matemático-gráfico del enunciado en conexión con el lenguaje no matemático (Tabla 9). Elabora garantías extramatemáticas basadas en sus preferencias significando la relación parte-todo de la fracción en contexto continuo y discreto.

En P_1(b) da un desajuste entre los datos y la garantía al distribuir las partes según el reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles. Sin embargo, asigna la cantidad de unidad del reparto equitativo y muestra una equivalencia entre la fracción del reparto y la fracción unitaria del enunciado. Aporta respaldos matemáticos que dotan de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo y usa el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal en sus argumentos.

En P_1(c) no argumenta la comparación de fracciones para diferenciar las dos opciones de reparto. No obstante, muestra cierta comprensión en torno al significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo al distribuir las partes de los repartos, pero omitiendo la fracción asociada en cada repartición.

En P_1(d) aporta garantías matemáticas para explicar la fracción del reparto equitativo y añade otros respaldos matemáticos para justificar la fracción del reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles. Indica cómo obtener la cantidad total de cada reparto pero no integra la expresión simbólica de la fracción que la representa. Compara fracciones y establece equivalencias entre la fracción que indica de manera gráfica en su respuesta y la fracción asociada a la representación gráfica del enunciado. Dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto.

En P_1(e) denotamos cierta incomprensión del enunciado, ya que no compara los repartos totales.

En P_1(f) utiliza el lenguaje no matemático para desarrollar certezas extramatemáticas que respaldan la elección del reparto que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles. Se basa en las restricciones del enunciado y en la interpretación de las dos opciones de reparto.

A partir de la información que hemos obtenido de las respuestas en $P_1(M_1)$, hacemos notar que A_1 es capaz de realizar una serie de conjeturas garantizadas para establecer algunos repartos totales y parciales. Sabe utilizar la representación gráfica en conexión con el lenguaje no matemático o con el lenguaje matemático-verbal y/o matemático-numérico. Aplica equivalencias entre las fracciones de los repartos para compararlas y usa métodos gráficos para sumar las fracciones de los repartos.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*… al hermano mayor le tocan 8 vacas + la que comparten, tiene 9 vacas. Al mediano le tocan 5 vacas y media así no puede ser de esta manera.*
Identificación de la fracción como cociente	*También puede ser que a un amigo le den cinco vacas y de esta manera quedan 12 lo cual no puede ser porque no se puede dividir entre dos.*
Distinción entre reparto total y parcial	*…pienso que 17 no se puede repartir entre dos para atribuir la mitad al hermano grande… Al mediano le toca una tercera parte lo cual tampoco se puede hacer… puede que los hermanos compartan una vaca o que se la dejen al abuelo.* *Una posibilidad puede ser que el hijo pequeño no quiera las vacas y una la regale a un amigo. Las otras las reparten a partes iguales entre dos otros dos hermanos, con lo cual a cada hermano le tocan 8 vacas porque 8(vacas) x 2(hermanos) = 16 (vacas totales ya que el hermano pequeño ha regalado una).*
Aplicación de métodos de suma de fracciones	*8 vacas porque 8(vacas) x 2(hermanos) = 16 (vacas totales ya que el hermano pequeño ha regalado una).*
Uso del lenguaje matemático-verbal	*la mitad* *media* *partes iguales* *tercera parte*

Tabla 10. Aplicación de I_1 a la producción escrita de A_2 en $P_2(M_1)$

El análisis de la producción escrita de A_2 en $P_2(M_1)$ sugiere cierta dificultad en la comprensión del enunciado del problema. No dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente en un reparto que no distribuye todas las unidades (Tabla 10). Admite que los elementos no pueden fraccionarse, pero omite las condiciones del reparto. Usa el lenguaje matemático-verbal en desconexión con el contexto extramatemático del problema al no contemplar que no se reparten todas las unidades del conjunto. Suma de fracciones, pero no obtiene la fracción del reparto.

En concreto, produce un desajuste entre los datos y las razones que muestra para validar la fracción del reparto. Justifica repartos parciales mediante respaldos matemáticos y extramatemáticos que omiten las condiciones de la repartición. Su argumentación evidencia errores conceptuales respecto a los significados de la fracción implicados en la resolución del segundo problema, estableciendo un resultado incoherente. Intenta elaborar nuevas razones para justificar su respuesta.

El análisis de la información obtenida en $P_2(M_1)$ muestra que A_2 no comprende el enunciado y no dota de significado a la fracción como parte-todo en este contexto discreto. Sus argumentos no conectan con las características que definen al reparto y, en su respuesta, no establece el reparto total a partir de los repartos parciales (*un medio, un tercio y un noveno*).

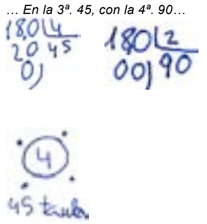
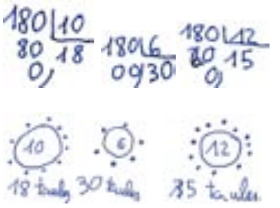
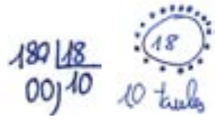
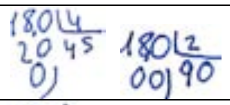
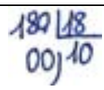
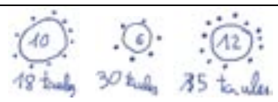
Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación con garantía	Afirmación con respaldo
		Matemática	Matemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*… En la 3ª. 45, con la 4ª. 90…*	*En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18… con la 5ª 30 y con la 6ª 15.*	*Podría colocar 18 personas en cada mesa. He dividido 180 que son las personas que hay entre 18 porque es el número par más grande que puede haber con la condición puesta y me ha dado 10, que supongo son las mesas que hay.*
Identificación de la fracción como cociente		*En la primera división, (180:18)… en la segunda (180:10)…*	*He dividido 180 que son las personas que hay entre 18… y me ha dado 10.*
Conexión entre lenguajes y/o registros	*… En la 3ª. 45, con la 4ª. 90…* 	*En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18… con la 5ª. 30 y con la 6ª. 15.* 	*He dividido 180… entre 18… y me ha dado 10,* 
Uso del lenguaje matemático-verbal	*… En la 3ª. 45, con la 4ª. 90…*	*En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18… con la 5ª. 30 y con la 6ª. 15.*	*He dividido 180… entre 18… y me ha dado 10.*
Uso del lenguaje matemático-numérico			
Uso del lenguaje matemático-gráfico			

Tabla 11. Aplicación de I_1 a la producción escrita de A_1 en $P_3(M_1)$

Al centrarnos en el análisis de la producción escrita de A_1 en $P_3(M_1)$, denotamos cierta comprensión del significado de la fracción como relación parte-todo en contexto discreto y como cociente (Tabla 11). Muestra que comprende el reparto restringido al distribuir los elementos (*personas*) en subgrupos (*mesas*). Sin embargo, no especifica todos los posibles repartos, y solo presenta algunas opciones que satisfacen las restricciones. Dota de significado a la fracción como parte de un conjunto en el que se reparten equitativamente todos sus elementos, al presentar subconjuntos con el mismo número de elementos. Identifica a la fracción como cociente de números enteros y aplica los conceptos de división exacta y de divisor de un número entero. Conecta el uso del lenguaje matemático-verbal del enunciado con el uso del lenguaje matemático-verbal, matemático-numérico y matemático-gráfico de su respuesta. En ocasiones, da repartos que las omiten las restricciones.

Explica los repartos mediante garantías matemáticas y justifica una opción de reparto. Sin embargo, presenta un desajuste entre los datos y la garantía al presentar dos opciones ajenas a las restricciones del problema.

La información obtenida referente a la resolución $P_3(M_1)$ revela que A_1 muestra cierta comprensión del enunciado, pero omite algunas restricciones. Por un lado, produce argumentos que conectan con las características que definen al reparto. Por otro, produce desajustes entre los datos del problema y algunas garantías.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Afirmación con garantía	Afirmación con respaldo
	Matemática	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*Porque así se lleva un huevo más..*	*Vendedor: Si yo fuese el vendedor, habría contado los huevos así estaría seguro de que me da 12 y si hubiese visto que me ha engañado no le diría nada y le pondría 11 huevos. Espabilado: Si yo fuese el espabilado, hubiese hecho el pedido como lo ha hecho él pero con la excusa de que era para hacer tortillas para unos invitados. Si el vendedor se hubiese enterado, hubiese cogido el dinero y me iría a otra tienda.*
Identificación de la fracción como cociente	La mitad, la tercera parte y la cuarta parte.	
Distinción entre reparto total y parcial	Docena y *un huevo más.*	*…no le diría nada y le pondría 11 huevos.* *…con la excusa de que era para hacer tortillas para unos invitados.*
Aplicación de métodos de suma de fracciones	6 +3 4 13	
Conexión entre lenguajes y/o registros	6 +3 4 13 *Se lleva un huevo más.*	
Uso del lenguaje no matemático	*un huevo más.*	*me da 12*
Uso del lenguaje matemático-numérico	6 +3 4 13	

Tabla 12. Aplicación de I_1 a la producción escrita de A_1 en $P_4(M_1)$

El examen de la producción escrita de A_1 en $P_4(M_1)$, refleja que comprende el significado de la fracción como relación parte-todo en contexto discreto y como cociente en un reparto que distribuye más unidades de las disponibles (Tabla 12). Interpreta las fracciones propias del enunciado y obtiene la cantidad de unidades del reparto. Suma las fracciones unitarias de los repartos (*1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12*), aunque no las explicita en su resolución. Establece numéricamente que se reparten 13 elementos y no una docena. Divide (*12*) entre (*2, 4* y *3*), y expresa el resultado de cada división. Muestra que comprende la fracción impropia del reparto total (*13/12*) al usarla implícitamente en sus argumentos. No utiliza números mixtos para expresar los repartos parciales o el total. Conecta el uso del lenguaje matemático-verbal del enunciado con el uso del lenguaje matemático-numérico y con el lenguaje no matemático que presenta en su respuesta. Omite la representación gráfica de los repartos.

Aporta garantías matemáticas para indicar las fracciones de los repartos parciales y del total, y expresa en lenguaje no matemático un razonamiento que complementa las cantidades que representan las fracciones. Presenta respaldos extramatemáticos para justificar otras opciones de reparto desde el punto de vista de cada uno de los personajes, mostrando que comprende las condiciones del reparto.

La información que obtenemos sobre $P_4(M_1)$ indica que A_1 realiza una serie de conjeturas, garantizadas matemáticamente o respaldadas de manera extramatemática, para establecer los repartos parciales o el total. Utiliza el lenguaje matemático-numérico en conexión con el lenguaje no matemático. Distingue entre el reparto total y los repartos parciales. Suma fracciones para dar el reparto total.

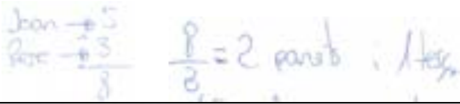
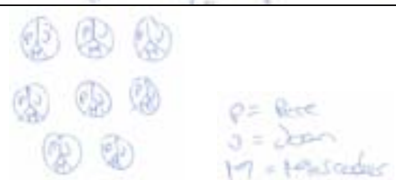
Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía
Identificación de la fracción como razón	*Yo pienso que lo primero que hay que tener en cuenta es que cada uno tenía un número de panes diferente y que la persona que tenía más era Joan. Pero mi opción es que la opción del vendedor es la más justa, ya que cada persona se lleva 4 monedas y tienen las mismas.* *Creo que tiene razón el vendedor ya que según mi opinión los ocho panes que tienen los dividen en tercios y cada uno se come uno. De esta manera cada persona come lo mismo que es 8/3= 2 panes, 1 tercio. Si todos comen lo mismo, la opción del vendedor es la mejor.*
Comparación de fracciones	*… cada persona se lleva 4 monedas y tienen las mismas.* *… si todos comen lo mismo, la opción del vendedor es la mejor.*
Conexión entre lenguajes y/o registros	  *8/3= 2 panes, 1 tercio*
Uso del lenguaje no matemático	*… cada persona se lleva 4 monedas y tienen las mismas.*
Uso del lenguaje matemático-verbal	*tercio*
Uso del lenguaje matemático-numérico	
Uso del lenguaje matemático-gráfico	

Tabla 13. Aplicación de I_1 a la producción escrita de A_2 en $P_5(M_1)$

Al analizar la producción escrita de A_2 en $P_5(M_1)$, advertimos que no comprende el enunciado y que no identifica a la fracción como razón (Tabla 13). No compara las unidades (*panes*) con las unidades (*monedas*) para establecer el reparto. Divide las unidades (*panes*) en tres partes iguales, pero no las distribuye en base al índice comparativo que se establece entre los dos conjuntos de unidades. Expone que el criterio de reparto correcto se basa en un reparto equitativo de (*monedas*) en desconexión con el significado de la fracción como razón. No usa la relación fracción-proporción y no establece las unidades que recibe cada protagonista. Utiliza el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico. Produce desajustes al omitir criterios de razón y de proporción.

Al examinar la información sobre P_5 (M_1), intuimos que A_2 no comprende el enunciado. Omite las características que definen al reparto, dejando al margen a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades.

Síntesis de la aplicación de I_1

Para reagrupar aspectos identificados en la aplicación del primer instrumento, recopilamos características, conceptuales y estructurales, de las producciones escritas individuales iniciales de cada alumno al resolver los cinco problemas. Aplicamos I_1 para sintetizar la aplicación de este instrumento para:

- Las producciones escritas individuales iniciales de cada alumno cuando resuelve las tareas de la secuencia. En la tabla, no incluimos ejemplos de datos, y, en las celdas, mostramos el problema y el apartado que resuelve el alumno. En ocasiones, para el primer problema, indicamos con el subíndice (1) el reparto de Marc y con el subíndice (2) el reparto de Sara. Triangulamos los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos de las producciones de cada alumno. Solo ilustramos la síntesis de las respuestas de A_1 y A_2 al resolver todos los problemas (Tablas 14 y 15), conectando con los ejemplos que hemos mostrado con anterioridad. El resto de tablas aparecen en el Anexo 8.

- Las producciones escritas individuales iniciales de los alumnos cuando resuelven cada uno de los problemas. La tabla no contiene ejemplos de datos. En las celdas, indicamos el alumno y el apartado que resuelve, atendiendo a cada combinación de los ejes conceptual y estructural. Obtenemos una reagrupación de las características conceptuales y estructurales para todas las respuestas en la resolución de un problema específico. Presentamos la síntesis de las producciones escritas de todos los alumnos en la resolución de cada problema (Tablas 16-20).

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	P1(b2)		P1(c)		P1(b1)	
Identificación de la relación parte-todo en un contexto discreto	P1(e) P2 P3		P1(d1) P3 P4(a)	P1(a)	P1(d2) P3	P1(f) P4(b)
Identificación de la fracción como cociente	P2		P3 P4(a)		P3	
Identificación de la fracción como razón	P5					
Distinción entre reparto total y parcial	P2		P4(a)			P4(b)
Comparación de fracciones	P1(e) P5		P1(c) P4(a)			P4(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones					P1(b1)	
Aplicación de métodos de suma de fracciones	P2		P1(d1) P4(a)		P1(d2)	
Conexión entre lenguajes y/o registros	P1(b2) P2 P3		P1(d1) P3 P4(a)		P1(b1) P1(d2) P3	
Uso del lenguaje no matemático	P1(b2) P1(e) P5		P1(c) P4(a)	P1(a)	P1(b1) P1(d2)	P1(f) P4(b)
Uso del lenguaje matemático-verbal	P1(b2) P2 P3		P1(d1) P3		P1(b1) P1(d2) P3	
Uso del lenguaje matemático-numérico	P2 P3		P3 P4(a)		P3	
Uso del lenguaje matemático-gráfico	P3		P1(d1) P3		P1(d2) P3	

Tabla 14. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas de A_1 en M_1

Los resultados que obtenemos tienen que ver con la caracterización de las producciones escritas individuales iniciales de A_1 en la resolución de los cinco problemas (Tabla 14). La síntesis de la aplicación de I_1 a las cinco producciones escritas de A_1 en M_1 muestra que elabora desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_1(b) no identifica la relación parte-todo en contexto continuo. No establece las partes en el reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles, usando el lenguaje no matemático y el lenguaje matemático-verbal; b) en P_1(e) no compara los repartos totales y no identifica la relación parte-todo en contexto discreto al producir argumentos erróneos de forma no matemática; c) en P_2 no significa a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente en un reparto que no distribuye todas las unidades. No advierte que una parte del conjunto no se distribuye y no distingue entre reparto total y parcial. No suma correctamente las fracciones. Conecta el uso del lenguaje matemático-verbal con el numérico para elaborar argumentos contradictorios; d) en P_3 no identifica a la fracción como parte-todo en contexto discreto cuando presenta dos opciones de reparto que omiten las restricciones del problema, usando el lenguaje matemático-verbal y numérico; e) en P_5 no usa la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades. Usa el lenguaje informal para elaborar argumentos ajenos a criterios de razón y de proporción.

Presenta una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantías matemáticas cuando: a) en P_1(c) comprende el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo, indicando cómo se distribuyen las unidades en los repartos. Compara los repartos de manera informal y no presenta la fracción de los repartos; b) en P_1(d) identifica la relación parte-todo en contexto discreto y aplica la suma de fracciones para establecer el reparto total. Conecta el uso del lenguaje matemático-verbal con el lenguaje matemático-gráfico; c) en P_3 dota de significado a la fracción como parte de un conjunto en el que se reparten equitativamente todos sus elementos y como cociente. Explica, de manera verbal y gráfica, diversas opciones de reparto acordes con las restricciones; d) en P_4(a) dota de significado a la fracción como relación parte-todo en contexto discreto y como cociente en un reparto que distribuye más elementos de los disponibles. Distingue entre el reparto total y parcial. Suma fracciones y obtiene la fracción de los repartos. Usa el lenguaje matemático-numérico y el no matemático para explicar sus conclusiones.

Elabora una argumentación débil en P_1(a) al afirmar con garantías extramatemáticas basadas en sus preferencias. Prioriza el uso del reparto equitativo identificando la relación parte-todo en contexto continuo y discreto.

Muestra una argumentación fuerte al presentar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) asigna las partes del reparto equitativo y muestra una equivalencia entre la fracción que establece y la fracción unitaria del enunciado. Aporta argumentos para dotar de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo, usando el lenguaje informal en conexión con el lenguaje matemático-verbal; b) en P_1(d) establece la cantidad que representa el reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles, significando a la fracción como parte-todo en contexto discreto. Suma fracciones conectando el uso del lenguaje no matemático con el matemático-verbal y matemático-gráfico; c) en P_3 justifica una de las opciones de reparto en base a las restricciones. Identifica la relación parte-todo en contexto discreto cuando se establecen subconjuntos de igual amplitud.

Desarrolla una argumentación fuerte al producir afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(f) elabora argumentos basados en la restricción del enunciado para escoger la segunda opción de reparto. Dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto; b) en P_4(b) justifica otras opciones de reparto, desde el punto de vista de cada uno de los personajes, mostrando que comprende las restricciones. Da conjeturas no matemáticas para distinguir el reparto total del parcial.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo			P1(a)		P1(b) P1(c)	
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P2 P3		P1(a) P1(d)		P1(e) P3 P4(a)	P1(f) P4(b)
Identificación de la fracción como cociente	P2 P3				P3 P4(a)	
Identificación de la fracción como razón	P5					
Distinción entre reparto total y parcial	P2				P4(a)	P4(b)
Comparación de fracciones	P5				P1(c) P1(e) P4(a)	P1(f) P4(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones	P5				P1(e)	
Aplicación de métodos de suma de fracciones	P2		P1(d1)		P1(e) P4(a)	
Conexión entre lenguajes y/o registros	P3 P5				P3 P4(a)	
Uso del lenguaje no matemático	P2					P4(b)
Uso del lenguaje matemático-verbal	P3 P5		P1(a) P1(d)		P1(b) P1(c) P1(e) P3 P4(a)	P1(f)
Uso del lenguaje matemático-numérico	P3 P5				P3 P4(a)	
Uso del lenguaje matemático-gráfico	P5					

Tabla 15. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas de A_2 en M_1

A partir de los resultados obtenidos, caracterizamos las producciones escritas de A_2 en M_1 para todos los problemas (Tabla 15). La síntesis de la aplicación de I_1 a las cinco respuestas muestra desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_2 no identifica la relación parte-todo en contexto discreto y como cociente, en una situación que no distribuye todas las unidades disponibles. No distingue entre reparto total y parcial y elabora argumentos informales para validar la suma de fracciones que aplica; b) en P_3 no identifica a la fracción como parte-todo en contexto discreto cuando presenta dos opciones de reparto que omiten las restricciones del problema; c) en P_5 no significa a la fracción como razón, al elaborar argumentos matemáticos (verbales, numéricos y gráficos) que no contemplan a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades.

Produce una argumentación débil al dar afirmaciones con garantías matemáticas cuando: a) en P_1(a) explica, en base a sus preferencias, la elección del reparto equitativo, dotando de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto; b) en P_1(d) identifica la relación parte-todo en contexto discreto al sumar verbalmente fracciones y obtener la fracción total del reparto equitativo.

Presenta una argumentación fuerte al elaborar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) obtiene los repartos usando el lenguaje matemático-verbal, significando a la fracción como parte-todo en continuo; b) en P_1(c) compara las fracciones de los repartos usando el lenguaje matemático-verbal; c) en P_1(e) compara las fracciones de los repartos y establece que son equivalentes. Suma fracciones y obtiene el reparto total, dotando de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto; d) en P_3 identifica la relación parte-todo en contexto discreto y a la fracción como cociente, y justifica, usando el lenguaje matemático-verbal y numérico, algunos repartos condicionados; e) en P_4(a) identifica la relación parte-todo en contexto discreto y como cociente al distribuir más unidades de las disponibles. Diferencia entre reparto total y parcial. Justifica la suma de fracciones para obtener el reparto total. Conecta el uso del lenguaje matemático-verbal con el matemático-numérico.

Elabora una argumentación fuerte al desarrollar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(f) identifica la relación parte-todo en contexto discreto para justificar la elección del reparto que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles. Compara las fracciones de los repartos y descarta la repartición equitativa; b) en P_4(b) valida otras opciones de reparto, desde el punto de vista de cada uno de los personajes, siguiendo las condiciones del reparto. Argumenta, de forma no matemática, la diferencia entre entre el reparto total y el parcial.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	A1-(b2) A3-(b2) A4-(a,c) A6-(b,c) A8-(b,c)	A4-(b)	A1-(c) A2-(a) A3(b1) A7-(b,c)		A1-(b1) A2-(b,c) A3-(c) A5-(b,c)	A3-(a)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A1-(e) A3-(d,e) A4-(d1,e,f) A5-(a) A6-(a,e,f) A8-(a,d,e,f)	A4-(d2)	A1-(d1) A2-(a,d) A3-(d)	A1-(a) A4-(a)	A1-(d2) A2-(e) A5-(d) A6-(d) A7-(d,e)	A1-(f) A2-(f) A3-(f) A5-(e,f) A7-(a,f)
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y parcial						
Comparación de fracciones	A1-(e) A3-(e) A4-(c,e,f) A5-(a) A6-(c,e,f) A8-(c,e)	A1-(c)	A7-(c)		A2-(c,e) A3-(c) A5-(c) A7-(e)	A2-(f) A5-(e,f) A7-(a,f)
Aplicación de la equivalencia de fracciones					A1-(b1) A2-(e) A5-(b)	A5-(e)
Aplicación de métodos de suma de fracciones	A3-(d,e) A4-(d,e) A8-(c,d,e)		A1-(d1) A2-(d1)		A1-(d2) A2-(e) A6-(d1) A7-(d,e)	A5-(e) A7-(e)
Conexión entre lenguajes y/o registros	A1-(b2) A3-(b2,d,e) A4-(c,e) A6-(b,c,e,f) A8-(b,c,d,e)	A4-(b,d2)	A1-(d1) A3-(b1,d) A7-(b,c)	A4-(a)	A1-(b1, d2) A3-(c) A5-(b,d) A7-(d)	A3-(a) A5-(e,f) A7-(a)
Uso del lenguaje no matemático	A1-(b2,e) A3-(b2,d,e) A4-(a,c,d1,f) A5-(a) A6-(a,b,c,e,f) A8-(a,b,c,e,f)	A4-(b)	A1-(c) A3-(b1,d) A7-(c)	A1-(a) A4-(a)	A1-(b1, d2) A3-(c) A5-(c) A7-(d)	A1-(f) A3-(a,f) A7-(a,e,f)
Uso del lenguaje matemático-verbal	A1-(b2) A3-(b2,d,e) A4-(e) A8-(b,c)	A4-(d2)	A1-(d1) A2-(a,d) A3-(b1,d)		A1-(b1, d2) A2-(b,c,e) A3-(c) A5-(b,d)	A2-(f) A3-(a) A5-(e,f)
Uso del lenguaje matemático-numérico	A4-(c,e) A6-(b,c,e,f) A8-(b,c,d,e)	A4-(b,d2)	A7-(b)	A4-(a)	A6-(d) A7-(d,e)	A3-(a) A7-(a)
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A8-(b,d)		A1-(d1) A7-(b,c)		A1-(d2) A5-(d)	

Tabla 16. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_1(M_1)$

Los resultados que obtenemos están relacionados con la caracterización de las producciones escritas individuales iniciales de todos los alumnos en la resolución del primer problema (Tabla 16). La síntesis de la aplicación de I_1 a las producciones escritas de todos los alumnos en M_1 muestra que en P_1 dan desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_1(a) cuatro alumnos (A_4, A_5, A_6, A_8) no identifican la relación parte-todo en contexto continuo o discreto al argumentar la elección del reparto; b) en P_1(b) tres alumnos (A_1, A_6, A_8) no dotan de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo cuando argumentan las partes de unidad de cada reparto. A_1 conecta el lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal para expresar la fracción. A_6 expresa el reparto con lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico, y A_8 añade la representación gráfica del reparto; c) en P_1(c) tres alumnos (A_4, A_6, A_8) no identifican la relación parte-todo en contexto continuo, al explicar las partes de la unidad, y/o comparar las fracciones de los repartos. Solo A_8 usa lenguaje matemático-verbal; d) en P_1(d) tres alumnos (A_3, A_4, A_8) suman fracciones e indican el reparto total. No dotan de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto. A_3 usa el lenguaje informal en conexión con el lenguaje matemático-verbal. A_4 expresa la fracción a través del lenguaje matemático-verbal. A_8 usa el lenguaje matemático-verbal y matemático-gráfico en conexión con el lenguaje no matemático para mostrar el reparto total; e) en P_1(e) cinco alumnos (A_1, A_3, A_4, A_6, A_8) no establecen la equivalencia entre los dos repartos. No elaboran garantías ni respaldos para comparar las fracciones de cada reparto, dejando de significar a la fracción como parte-todo en discreto. En tres ocasiones, suman fracciones para obtener el reparto total; f) en P_1(f) tres alumnos (A_4, A_6, A_8) no identifican la relación parte-todo en contexto discreto. No verifican la comparación de fracciones de los repartos ni descartan el reparto equitativo en una situación restringida.

Desarrollan una argumentación muy débil al mostrar afirmaciones sin garantía cuando: a) en P_1(b) dos alumnos (A_3, A_4) presentan directamente la fracción de los repartos. Dotan de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo sin el apoyo de argumentos. Usan el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal o matemático-numérico; b) en P_1(c), A_1 compara, informalmente, las fracciones de los repartos; c) en P_1(d), A_4 muestra, sin argumentar, la representación gráfica y numérica de las partes del reparto.

Presentan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía matemática cuando: a) en P_1(a), A_2 explica la elección del reparto equitativo, identificando la relación parte-todo en contexto continuo y discreto usando el lenguaje matemático-verbal; b) en P_1(b), A_7 argumenta, a través del lenguaje matemático-numérico y gráfico, la fracción de cada reparto, identificando la relación parte-todo en contexto continuo; c) en P_1(c) dos alumnos (A_1, A_7)

argumentan cómo comparan las fracciones de los repartos. Usan el lenguaje no matemático, y A_7 añade la representación gráfica del reparto; d) en P_1(d) tres alumnos (A_1, A_2, A_3) elaboran argumentos para obtener los repartos totales. Usan el lenguaje matemático-verbal para garantizar los repartos totales (A_3 en conexión con el lenguaje no matemático y A_1 en conexión con el lenguaje matemático-gráfico).

Muestran una argumentación débil al presentar afirmaciones con garantía extramatemática cuando: a) en P_1(a) dos alumnos (A_1, A_4) explican de manera formal e informal la elección del reparto equitativo.

Elaboran una argumentación fuerte al desallorar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) tres alumnos (A_1, A_2, A_5) justifican las partes de la unidad en los repartos. Dotan de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo, conectando el uso del lenguaje no matemático con el uso del lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico; b) en P_1(c) tres alumnos (A_2, A_3, A_5) comparan las fracciones de los repartos. Solo A_3 conecta el lenguaje informal con el formal, mientras que A_2 y A_5 usan el lenguaje matemático-verbal para mostrar las partes de la unidad; c) en P_1(d) cuatro alumnos (A_1, A_5, A_6, A_7) obtienen la fracción de los repartos totales. A_1, A_6 y A_7 justifican la suma fracciones y obtienen los repartos totales. A_1 usa el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal para justificar su respuesta. A_5 elabora argumentos matemáticos, verbales, numéricos y gráficos, y A_6 solo utiliza el lenguaje matemático-numérico; d) en P_1(e), A_2 justifica con argumentos matemáticos, verbales y numéricos, la comparación de las fracciones de los repartos. Establece que los repartos son equivalentes, identificando la relación parte-todo en contexto discreto.

Presentan una argumentación fuerte al mostrar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a), A_7 justifica la elección del reparto equitativo, en base a sus preferencias y a la comparación de fracciones. Dota de significado a la fracción como parte de un conjunto. Utiliza el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-numérico para expresar la fracción; b) en P_1(e), A_5 muestra argumentos matemáticos, verbales y numéricos, para justificar la suma de fracciones y comparar los repartos. Establece extramatemáticamente que los repartos son equivalentes. Identifica la relación parte-todo en contexto discreto; c) en P_1(f) cinco alumnos (A_1, A_2, A_3, A_5, A_7) comparan las fracciones de los repartos. Escogen el reparto que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles cuando la repartición está restringida. En general, utilizan el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal y/o matemático-numérico para expresar el reparto.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Identificación de la fracción como cociente	A1 A2 A3 A5 A6 A7 A8					
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y parcial	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones	A1 A2					
Conexión entre lenguajes y/o registros	A1 A3 A5 A6 A7 A8					
Uso del lenguaje no matemático	A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Uso del lenguaje matemático-verbal	A1 A2 A5 A6 A8					
Uso del lenguaje matemático-numérico	A1 A7 A8					
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A3 A7					

Tabla 17. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_2(M_1)$

A partir de los resultados logrados, caracterizamos las producciones escritas individuales iniciales de todos los alumnos en la resolución del segundo problema (Tabla 17). La síntesis de la aplicación de I_1 a las respuestas de todos los alumnos en M_1 refleja que en P_2 solo elaboran desajustes entre los datos y las garantías. Ningún alumno identifica a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente en una situación que no distribuye todas las unidades disponibles. No diferencian entre el reparto total y el parcial y no advierten que una parte del conjunto no participa en el reparto. Todos los alumnos elaboran argumentos incorrectos, de manera informal o formal, para validar la suma de fracciones. Indican repartos desconexos con el enunciado.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8		A1 A4 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A3 A5
Identificación de la fracción como cociente	A2 A4 A5 A6 A7 A8		A1 A4 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A5
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones	A7				A7	
Conexión entre lenguajes y/o registros	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A8		A1 A4 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A3 A5
Uso del lenguaje no matemático	A3 A4 A5 A6 A7		A4 A6		A3	A3 A5
Uso del lenguaje matemático-verbal	A1 A2 A5 A8		A1 A8		A1 A2 A7	A5
Uso del lenguaje matemático-numérico	A1 A2 A3 A4 A6 A8		A1 A4 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A3 A5
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A1 A3		A1		A1 A7	A3

Tabla 18. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_3(M_1)$

En base a los resultados alcanzados, caracterizamos las producciones escritas individuales iniciales de todos los alumnos en la resolución del tercer problema (Tabla 18). La síntesis de la aplicación de I_1 a las respuestas de todos los alumnos en M_1 refleja que elaboran desajustes entre los datos y las garantías en P_3 cuando: a) todos presentan algún reparto incompatible con las restricciones del enunciado o no muestran todos los repartos equitativos que las satisfacen. Utilizan el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-numérico. También usan el lenguaje matemático-verbal y matemático-gráfico para presentar algún reparto incompatible con el enunciado; b) seis alumnos (A_2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8) muestran, de forma numérica, divisiones para argumentar repartos que no satisfacen las restricciones, dejando de significar a la fracción como cociente.

Presentan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía matemática cuando cuatro alumnos (A_1, A_4, A_6, A_8) validan opciones de reparto según las restricciones. Identifican la relación parte-todo en un contexto discreto y como cociente al argumentar los repartos. En ocasiones, conectan el lenguaje matemático-numérico con el lenguaje matemático-verbal o con el lenguaje no matemático. Solo A_1 usa la representación gráfica del reparto.

Muestran una argumentación fuerte al ofrecer afirmaciones con respaldo matemático cuando cuatro alumnos (A_1, A_2, A_3, A_7) justifican repartos restringidos. Dotan de significado a la fracción como parte de un conjunto y como cociente, conectando el uso del lenguaje matemático-verbal y del matemático-numérico. A_3 también utiliza el lenguaje informal para justificar su respuesta. A_1 y A_7 respaldan el reparto con argumentos gráficos.

Elaboran una argumentación fuerte al desarrollar afirmaciones con respaldo extramatemático cuando dos alumnos (A_3, A_5) establecen repartos restringidos y los justifican. Elaboran argumentos no matemáticos y matemáticos para verificar su respuesta.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A5-(a,b) A7-(a,b)		A1-(a)	A4-(b) A7-(b)	A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A1-(b) A2-(b) A3-(b) A6-(b) A8-(b)
Identificación de la fracción como cociente	A7-(a,b)		A1-(a)		A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A6-(b) A8-(b)
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y parcial	A5-(a,b) A7-(a,b)		A1-(a)	A4-(b)	A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A1-(b) A2-(b) A3-(b) A6-(b) A8-(b)
Comparación de fracciones	A5-(a,b) A7-(a,b)		A1-(a)		A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A1-(b) A2-(b) A6-(b) A8-(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones	A7-(a,b)		A1-(a)	A7-(b)	A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A6-(b) A8-(b)
Conexión entre lenguajes y/o registros	A5-(b) A7-(a,b)		A1-(a)	A7-(b)	A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A6-(b) A8-(b)
Uso del lenguaje no matemático	A5-(a,b) A7-(a,b)		A1-(a)	A4-(b)		A1-(b) A2-(b) A4-(b) A6-(b) A8-(b)
Uso del lenguaje matemático-verbal	A5-(b) A7-(a,b)				A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A8-(b)
Uso del lenguaje matemático-numérico	A5-(b) A7-(a,b)		A1-(a)	A7-(b)	A2-(a) A3-(a) A4-(a) A6-(a) A8-(a)	A6-(b)
Uso del lenguaje matemático-gráfico				A7-(b)	A3-(a) A4-(a) A8-(a)	A8-(b)

Tabla 19. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_4(M_1)$

Los resultados logrados nos permiten caracterizar las producciones escritas individuales iniciales de todos los alumnos en la resolución del cuarto problema (Tabla 19). La síntesis de la aplicación de I_1 a las respuestas de todos los alumnos en M_1 refleja que elaboran desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_4(a) dos alumnos (A_5 y A_7) no diferencian entre el reparto total y el parcial. No comparan las fracciones de los repartos y establecen un reparto incorrecto. Aunque A_7 intenta elaborar argumentos basados en la suma de fracciones, muestra certezas en desconexión con el enunciado. A_5 solo utiliza el lenguaje informal en sus argumentos, y A_7 conecta el uso del lenguaje no matemático con el uso del lenguaje matemático-verbal y numérico. Omiten la relación parte-todo en contexto discreto al repartir más elementos de los disponibles. No significan a la fracción como cociente; b) en P_4(b) dos alumnos (A_5 y A_7) no validan opciones de reparto desde el punto de vista de cada uno de los personajes. No comprenden las restricciones del reparto al omitir que se reparten más elementos de los disponibles, dejando de significar a la fracción como parte de un conjunto y como cociente.

A_1 muestra una argumentación débil cuando presenta afirmaciones con garantía matemática al resolver P_4(a). Elabora argumentos, no matemáticos y matemáticos, que muestran cómo a partir de las fracciones unitarias de los repartos parciales se obtiene el reparto total. Realiza un doble recuento, suma fracciones para obtener el reparto total, y distingue entre el reparto total y el parcial. Dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente.

Presentan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía extramatemática cuando en P_4(b) dos alumnos (A_4, A_7) explican de qué manera hubiesen realizado el pedido, protagonizando la situación desde diversos puntos de vista. Distinguen entre el reparto total y el parcial. Suman fracciones para obtener el reparto total. A_4 elabora argumentos informales. A_7 usa el lenguaje matemático-numérico y matemático-gráfico.

Elaboran una argumentación fuerte al desarrollar afirmaciones con respaldo matemático cuando en P_4(a) cinco alumnos (A_2, A_3, A_4, A_6, A_8) justifican algunas opciones de reparto que implican más elementos de los disponibles. Identifican la relación parte-todo en este contexto discreto y dotan de significado a la fracción como cociente. Basan su argumentación en la diferencia entre el reparto total y el parcial, en la comparación de las fracciones de cada reparto y en el reparto total obtenido al sumar fracciones. Ningún alumno usa el lenguaje no matemático. Todos utilizan el lenguaje matemático-verbal en conexión con el lenguaje matemático-numérico para justificar el reparto total. A_3, A_4 y A_8 también usa el lenguaje matemático-gráfico para expresar el reparto.

Muestran una argumentación fuerte al presentar afirmaciones con respaldo extramatemático cuando en P_4(b) cinco alumnos (A_1, A_2, A_3, A_6, A_8) justifican los repartos desde diversas perspectivas. Usan la relación parte-todo en este contexto discreto y comprenden las restricciones de los repartos. En general, comparan las fracciones que obtienen para mostrar la diferencia entre el reparto parcial y el total. A_6 y A_8 suman fracciones para argumentar diversas opciones de reparto que protagonizan. Los cinco alumnos elaboran argumentos informales, y solo A_8 usa el lenguaje matemático-verbal y gráfico para justificar los repartos. A_6 emplea el lenguaje matemático-numérico.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto						
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Distinción entre reparto total y parcial						
Comparación de fracciones	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Aplicación de la equivalencia de fracciones	A2 A3 A4 A5 A6 A7					
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes y/o registros	A2 A3 A4 A5 A6 A7					
Uso del lenguaje no matemático	A1 A4 A5 A6 A7 A8					
Uso del lenguaje matemático-verbal	A2 A3					
Uso del lenguaje matemático-numérico	A2 A4					
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A2 A3 A4 A5 A7 A8					

Tabla 20. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_5(M_1)$

Estos resultados nos sirven para caracterizar las producciones escritas individuales iniciales de todos los alumnos en la resolución del quinto problema (Tabla 20). Ningún alumno ajusta sus garantías a los datos proporcionados en el enunciado y omiten el significado de la fracción como razón. No comparan correctamente las fracciones de los repartos y no aplican equivalencias entre las fracciones del reparto. En sus argumentos no utilizan a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades. A_1, A_4, A_5, A_6 y A_7 ofrecen garantías erróneas y usan el lenguaje no matemático.

4.1.3. Consecución del objetivo 1

El análisis de las producciones escritas iniciales de los ocho alumnos, realizadas individualmente, lleva a 10 resultados. Los resultados se han organizado atendiendo a los usos de la fracción documentados, respectivamente, en P_1(a), P_1(b), P_1(c), P_1(d), P_1(e), P_1(f), P_2, P_3, P_4 y P_5. Para cada resultado, se incluyen los subresultados sobre los tipos de estructura de los argumentos.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto cuando se distribuyen las partes según un reparto equitativo dando garantías o respaldos.

- A_1 produce garantías extramatemáticas, y A_3, A_7 respaldos extramatemáticos al priorizar en P_1(a) el uso del reparto equitativo. Solo A_2 da garantías matemáticas en su explicación. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo cuando se distribuyen las partes según los dos repartos no siempre dando garantías o respaldos.

- Seis alumnos asignan la parte de unidad para cada reparto en P_1(b). A_4 da respuestas sin garantías. A_3, A_7 afirman con garantías matemáticas el reparto. A_1, A_2, A_5 elaboran una argumentación fuerte al afirmar, con respaldos matemáticos, la fracción del reparto equitativo y del reparto que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal. Solo A_7 usa el lenguaje matemático-numérico en conexión con la representación gráfica.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo cuando se distribuyen las partes según las dos reparticiones dando garantías o respaldos al comparar los repartos.

- A_1, A_2, A_3, A_5, A_7 interpretan cómo se dividen las unidades en cada reparto en P_1(c). Ordenan y comparan las fracciones de los repartos y afirman que las reparticiones no son equivalentes. A_1, A_7 dan garantías matemáticas, y A_2, A_3, A_5 justifican mediante respaldos matemáticos. A_1, A_3, A_7 asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático. A_5 solo usa el lenguaje informal en la elaboración de argumentos y A_2 solo utiliza el lenguaje matemático-numérico en sus producciones.

Se identifica la relación parte-todo en contexto discreto cuando se distribuyen las partes según los dos repartos no siempre dando garantías o respaldos a la suma de fracciones para obtener el reparto total.

- Seis alumnos asignan el reparto total de alguna de las dos reparticiones en P_1(d). A_4 da respuestas sin garantías. A_2 afirma con garantías matemáticas, y A_1, A_5, A_6, A_7 afirman con respaldos matemáticos la suma de fracciones para obtener la fracción que representa el reparto total. En general, asocian el lenguaje matemático-verbal al lenguaje matemático-numérico. Solo A_1 usa la representación gráfica del reparto.

No se identifica la relación parte-todo en contexto discreto cuando se distribuyen las partes según los dos repartos con desajuste entre los datos y las garantías al comparar los repartos totales.

- A_1, A_3, A_4, A_6, A_8 producen desajustes entre los datos y las garantías al no establecer que los repartos totales son equivalentes en P_1(e). Solo A_2 y A_7 afirman con respaldos matemáticos y A_5 con respaldos extramatemáticos esta equivalencia.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto cuando se distribuyen las partes según un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles dando respaldos.

- A_1, A_2, A_3, A_5, A_7 producen respaldos extramatemáticos al priorizar en P_1(f) el uso del reparto que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles. Comparan las fracciones de los repartos en base a los condicionantes impuestos en la repartición. A_1, A_3, A_7 utilizan el lenguaje informal. A_2, A_5 justifican usando el lenguaje matemático-verbal.

No se identifica la relación parte-todo en contexto discreto ni la fracción como cociente con desajuste entre datos y garantías en la distinción entre reparto total y parcial.

- Todos los alumnos producen desajustes entre los datos y las garantías en P_2. Omiten que no se reparten todos los elementos disponibles y no diferencian entre reparto total y parcial. Suman fracciones pero no obtienen el reparto total. A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 usan el lenguaje informal, en algunas ocasiones, en conexión con el lenguaje matemático. Solo A_1,

A_7, A_8 una el lenguaje matemático-numérico para expresar la fracción de forma numérica, y A_3, A_7 su representación gráfica.

Se identifican la relación parte-todo en contexto discreto y la fracción como cociente cuando se distribuyen de forma equitativa las unidades dando garantías o respaldos a repartos con restricción.

- Todos los alumnos calculan opciones de reparto según los criterios impuestos en P_3. Presentan algunas divisiones y aplican los conceptos de divisores de un número natural y de división exacta entre dos números. Reparten todos los elementos del conjunto en subconjuntos de igual amplitud. A_1, A_4, A_6, A_8 muestran repartos mediante afirmaciones con garantías matemáticas. A_1, A_2, A_3, A_7 dan respaldos matemáticos para justificar repartos. Solo A_3, A_5 elaboran respaldos extramatemáticos para argumentar algunos subconjuntos de igual amplitud. Ningún alumno establece todos los repartos compatibles con las restricciones. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal, numérico y/o gráfico.

Se identifican la relación parte-todo en contexto discreto y la fracción como cociente cuando se reparten más unidades que elementos del conjunto con garantías o respaldos.

- Todos los alumnos, excepto A_5 y A_7, argumentan la diferencia entre el reparto total y el parcial en P_4(a). A_4 produce garantías matemáticas y A_2, A_3, A_4, A_6, A_8 dan respaldos matemáticos cuando diferencian los repartos. En general, presentan divisiones para establecer el número de elementos de repartos parciales, suman fracciones para obtener el reparto total y comparan las fracciones del reparto total y del parcial. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal, numérico y/o gráfico.

- A_4 afirma con garantías extramatemáticas la forma de repartir desde diversas perspectivas en P_4(b). A_1, A_2, A_3, A_6, A_8 producen respaldos extramatemáticos al repartir los elementos. Predonima el uso del lenguaje no matemático en las explicaciones y justificaciones para mostrar los repartos. A_5 y A_7 producen desajustes a la hora de indicar repartos.

No se identifica la fracción como razón al no usarla como índice comparativo entre dos conjuntos de elementos dando desajuste entre datos y garantías.

- Todos los alumnos producen desajustes entre los datos y las garantías al no contemplar a la fracción como razón en P_5. Su argumentación refleja desajustes entre la comprensión del enunciado del problema y su respuesta. No comparan las fracciones asociadas al reparto ni establecen equivalencias entre fracciones. Predonima el uso del lenguaje no matemático en la elaboración de argumentos que omiten la elección del reparto que distribuye los elementos en base a la relación de fracción-proporción.

4.2. Caracterización de producciones orales y escritas de las parejas

Este apartado se centra en la caracterización de la posterior interacción oral y escrita en pareja (Objetivo 2). En primer lugar, mostramos ejemplos de producciones orales y escritas en pareja y los describimos en función de los usos de la fracción, de los tipos de estructura de los argumentos y de los tipos de interacción. En segundo lugar, aplicamos el instrumento (I_2) a todos los episodios, y el instrumento (I_3) a los episodios seleccionados. También, aplicamos el instrumento (I_4) a las respuestas escritas en pareja. Sintetizamos los resultados de cada pareja en la resolución de todos los problemas, de todas las parejas en la resolución de cada problema y de todas las parejas en la resolución de todos los problemas. Por último, extraemos resultados y caracterizamos las producciones orales y escritas de las parejas.

4.2.1. Producciones orales y escritas de las parejas

Producciones orales de las parejas

Para ejemplificar la producción oral de las parejas, tomamos los cuatro primeros episodios de la resolución de P_1 (E_1, E_2, E_3 y E_4) de la pareja $P_{1\text{-}2}$ en M_2. Para cada episodio, describimos su contenido matemático en torno a los usos de la fracción, los tipos de estructura de los argumentos y los tipos de interacción atendiendo a los códigos del eje conceptual, estructural e interaccional, descritos en el Capítulo 2.

EPISODIO 1: (P_1(a), M_2) / (1.1 – 5.1) / (0:32s – 1:11s)

(1.1)	A_2	**Quina de les dues reparticions t'agrada més la d'en Marc o la de la Sara, per què?... bueno (I)**
(2.1)	A_1	**A mi la d'en Marc.**
(3.1)	A_2	**A mi també, perquè cada persona se'n porta un tros de pizza (##). L'última pregunta et fa pensar que si a una persona no li agrada també seria bona la de la Sara. (##) clar per què... en principi la d'en Marc també està bé.** (G): A_2 va señalando las representaciones gráficas del enunciado al mismo tiempo que A_1 escucha y observa.
(4.1)	A_1	**Potser tothom vol la margarita.**
(5.1)	A_2	**Per això ho deia, que potser tu vols la Hawaiana que t'agrada molt, o també t'agrada molt la Quatre estacions i la Margarita. (##) Amb aquesta un tros de cada i ja està. Sí seria millor.** (G): A_2 señala las representaciones gráficas del enunciado.

En el Episodio 1 la pareja $P_{1\text{-}2}$ comprende el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto, desde dos repartos diferenciados, en conexión con la representación gráfica. A_1 y A_2 interpretan la información del enunciado, mostrando cierta comprensión del significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo a través del uso del lenguaje no matemático (3.1). Diferencian los repartos y usan fracciones unitarias. Priorizan el uso del reparto equitativo (2.1 y 3.1). A_2 usa la representación gráfica del enunciado (3.1 y 5.1) e identifican a la fracción como parte-todo en contexto discreto al mostrar las partes de cada personaje (5.1).

A_2 ofrece garantías y respaldos mediante ejemplos, desarrollando la propuesta de solución conjunta. A_1 enuncia su elección del reparto omitiendo garantías y respaldos (2.1). Sin embargo, A_2, partiendo de los datos verbales y gráficos del enunciado, explica a través de diversas garantías, orales y gráficas, sus conclusiones (3.1). A partir de un replanteamiento expuesto por A_1 (4.1), A_2 aporta nuevos respaldos que refuerzan su elección. Proporciona ejemplos, basados en la representación gráfica de los repartos, para respaldar su elección (5.1).

La pareja $P_{1\text{-}2}$ establecen consenso oral de una solución. A_2 lee el enunciado de P_1(a). A continuación, A_1 interrumpe a su compañero y enuncia de manera informal una solución. A_2 respalda la elección de A_1 y añade argumentos que explican, de forma verbal y gesticular, los motivos de la elección (3.1). Realiza una ampliación del planteamiento inicial y lo mejora. A_1 interviene y provoca que A_2 elabore ejemplos para clarificar su postura (5.1) y mejorar la compresión de A_1. Se ha generado un pequeño diálogo dirigido por A_2, en el que se dan algunas explicaciones. Establecen un consenso oral de la solución al acordar la opción escogida y validar las aportaciones de ambos.

EPISODIO 2: (P_1(a), M_2) / (6.1 – 24.1) / (1:22s – 4:24s)

(6.1)	A_2	**Quina de les dues reparticions t'agrada més?... ho fiquem a ens agrada més o m'agrada més? Ens agrada més, no?**
(7.1)	A_1	(G): A_1 afirma (con la cabeza) la cuestión que A_2 ha formulado. Se miran.
(8.1)	A_2	**...Ens agrada més... la d'en Marc...**
(9.1)	A_1 y A_2	**...Perquè tothom pot provar un tros de cada pizza.**
(10.1)	A_2	**Perquè tothom pot provar… un vuité.** (G): A_2 escribe y comenta la respuesta.
(11.1)	A_1	**Jo he posat mig quart.**
(12.1)	A_2	**De pizza... i d'aquesta manera tothom provar cada pizza.**
(13.1)	A_1 y A_2	**Provar cada pizza.**
(14.1)	A_2	**...D'aquesta manera... tothom... pot... provar un tros de pizza. Mira que fica aquí.**
(15.1)	A_1	**(##)**
(16.1)	A_2	**No podem retocar, això sí.** (G): A_2 coge su producción escrita inicial y los dos la miran.
(17.1)	A_2	**La d'en Marc m'agrada més ja que (##) nen menja, cada nen menja un vuité de cada pizza i encanvi amb el repartiment de la Sara no li toca un vuité a cadascú sinó que (##) dos nens podràn gaudir de la pizza Margarita. Dos nens la Hawaiana, dos nens de la**

		Quatre formatges i dos de la Quatre estacions però cada nen tindrà un quart de la d'espinacs... Sí en definitiva és millor la d'en Marc... Expliquem també el perquè de la Sara?
(18.1)	A_2	**(##) Tothom pot provar un tros de pizza un vuitè... coma però... en canvi... amb la reparti...ció...**
(19.1)	A_1	**De la Sara...**
(20.1)	A_2	**De la Sara... hi haurà... gent... que no... podrà provar... una pizza que li agradi, no?** (G): A_2 escribe y A_1 observa.
(21.1)	A_1	**Però si algú no li agrada la pizza que li ha tocat pot canviar.**
(22.1)	A_2	**Clar, això és veritat... que li agradi... uff... ja que... li tocarà... una meitat...**
(23.1)	A_1	**A cadascú.**
(24.1)	A_2	**D'una pizza… que escolli… coma… i… un vuitè… de pizza d'espinacs, bueno d'espinacs a seques… ja està. Ara escriu tú, vale?**

En el Episodio 2 la pareja $P_{1\text{-}2}$ comprende el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto, desde dos repartos diferenciados, sin establecer una equivalencia entre las fracciones pero mejorando el uso del lenguaje. A_1 y A_2 establecen sus preferencias y la elección del reparto (8.1), y razonan su elección de manera informal (9.1) o a través del lenguaje matemático-verbal (10.1). Diferencian los dos repartos. Por una parte, comprenden el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo al referirse a las partes de la unidad, mediante el uso de fracciones unitarias (10.1) o a través de la multiplicación de fracciones (11.1). Sin embargo, aunque mejoran el uso del lenguaje, no establecen una equivalencia entre la fracción que propone A_1 y la propuesta por A_2. Por otra parte, intuyen la cantidad total del reparto al distribuir las partes del conjunto, significando a la fracción como parte-todo en contexto discreto. Muestran cierta familiarización con las representaciones gráficas del enunciado (17.1).

Utilizan la opción eliminada para respaldar la solución escrita. A_2 relee el enunciado de P_1(a) y presenta y resuelve un cuestionamiento referente a cómo deben expresar la respuesta. A_1 afirma de manera gesticular (7.1) y A_2 formula una posible solución (8.1). Aunque desarrollan sus conclusiones de manera ordenada, A_2 ignora cómo expresar la solución de su compañera (11.1) y aporta nuevas razones en base a la elección del reparto de forma autoritaria (17.1). Las intervenciones de A_1 se caracterizan por su pasividad, ya que se deja llevar por los razonamientos de A_2. Sin embargo, en la parte final del episodio, A_1 plantea una aclaración (21.1) que es respaldada por A_2 (22.1). El desenlace del episodio indica que se produce un acuerdo de la respuesta común y un consenso de la solución.

A_2 mejora la argumentación, pasando de ofrecer garantías a exponer respaldos extramatemáticos. A_2 relee el enunciado de P_1(a) y cuestiona de qué manera deben presentar la solución (6.1). La pareja formula una garantía para dar soporte a la solución conjunta (9.1), mejorándola gracias al buen uso del lenguaje de A_2 (10.1). Se establece un diálogo entre A_1 y A_2 para explicar la elección. Sin embargo, A_2 adopta protagonismo y produce nuevos argumentos con el propósito de justificar la respuesta de pareja (17.1). Este alumno mejora el tipo de argumentación elaborada al incorporar un respaldo extramatemático que permite ampliar las conclusiones acordadas. Las intervenciones de A_1 se caracterizan por su pasividad y solo da afirmaciones sin garantías. En la parte final del episodio, A_1 enuncia una aclaración (21.1) que es apoyada por la explicación de A_2 (22.1 y 24.1). Se ha producido una ampliación de sus argumentos basada en la opción de reparto que habían descartado anteriormente.

EPISODIO 3: (P_1(b), M_2) / (25.1 – 28.1) / (4:24s – 4:57s)

(25.1)	A_2	**Quina quantitat de pizza Margarita menja un noi noia de la colla a cada repartiment? Repartició d'en Marc. Té el boli… a vere la d'en Marc (I)**
(26.1)	A_1	**Jo he posat mig quart, un quart seria això.** (G): A_1 señala su respuesta, remarca un octavo de la pizza del dibujo y mira a su compañero. A_2 observa.
(27.1)	A_2	**Una persona es tindria que menjar, si són vuit nens un de cada.**
(28.1)	A_2	**En total de pizza Margarita en la repartición d'en Marc cada nen menjaria un vuitè… fica… un vuitè coma.** (G): A_2 señala, una a una, cada pizza, mientra comenta y A_1 observa.

En el Episodio 3 la pareja $P_{1\text{-}2}$ usa formas equivalentes para expresar la fracción como parte-todo en contexto continuo sin establecer la equivalencia. A_1 y A_2 son capaces de hacer una primera aproximación de la fracción como parte-todo en contexto continuo en el reparto equitativo. Usan el lenguaje matemático-verbal, en conexión con la representación gráfica, para expresar la fracción unitaria (26.1) y la fracción compuesta (28.1) del reparto. Solo en una ocasión, A_2 da el reparto de manera informal (27.1). Sin embargo, no establecen una equivalencia entre las fracciones unitarias que presentan en sus soluciones de M_1. Recuentan las cantidades del reparto parcial (28.1).

A_1 enuncia un posible reparto y da una equivalencia entre las formas de repartir presentadas individualmente (26.1). A_2 explica, de forma verbal y con apoyo de la representación gráfica, su elección del reparto y enuncia el reparto, ignorando la intervención de A_1 (28.1). Elaboran directamente las conclusiones.

A_2 expone su solución sin intención argumentativa. A_2 lee el enunciado de P_1(b). A_1 interrumpe a A_2 para clarificar su postura usando el lenguaje matemático (26.1). La intervención de A_1 es ignorada por su compañero, quien impone una propuesta de solución al formular una aclaración no argumentada (27.1). Finaliza el episodio con la intervención de A_2, en la que manifiesta los motivos de su elección a través de su propuesta de solución en base a la representación gráfica del reparto (28.1).

EPISODIO 4: (P_1(b), M_2) / (29.1 – 46.1) / (4:57s – 6:56s)

(29.1)	Maestra	**Però no li dictis, parleu. Ella t'ha donat una resposta, explica-li tu la teva a veure si coincidiu o no, potser ell no té raó i la tens tu. No dicteu. Tu diga-li que en penses a veure si heu arribat al mateix resultat o no? Heu de parlar. No heu de dictar i copiar. Vinga.** (G): Ambos escuchan las indicaciones y ella deja de escribir.
(30.1)	A_2	**… llavors, tu què penses?**
(31.1)	A_1	**El mateix.**
(32.1)	A_2	**Doncs ja està, si creiem el mateix…**
(33.1)	Maestra	**Tu abans has dit el mateix? Explica-li a ell.**
(34.1)	A_1	**He dit què això, bueno, que jo he posat mig quart… que he posat mig quart i?** (G): Ella responde señalando una de las pizzas del dibujo.
(35.1)	A_2	**Però, per què?**
(36.1)	A_1	**No sé, per què pensava que això era mig quart.** (G): Ella señala una pizza.
(37.1)	A_2	**Però com, mig quart?** (G): Él observa y le indica en el dibujo.
(38.1)	A_1	**Això és un quart, espera.** (G): Ella señala una pizza.
(39.1)	A_2	**Està dividit en vuitens, o sigui que um és un vuitè.** (G): Él señala una pizza del enunciado y ella observa. Hablan con un tono de voz alto.
(40.1)	A_1	**Però, un quart estaria bé?**
(41.1)	A_2	**A vere, un quart seria això... això és el quart, un quart.** (G): Joan dibuja y ella observa y pregunta señalando el dibujo.
(42.1)	A_1	**I això?**
(43.1)	A_2	**Això seria, dos quarts, tres quarts i quatre quarts…** (G): Joan dibuja.
(44.1)	A_2	**Ho entens?** (G): Joan acaba de dibujar su explicación y ella escucha.
(45.1)	A_1	**Ah!, pues ja.**
(46.1)	A_2	**Però com està repartida en vuitens, la millor resposta jo crec que seria un vuitè. Un quart tampoc veig perquè que ha d'estar malament, però en principi un vuitè està millor, perquè si està repartida la pizza en vuitens? no?... a cada nen… li tocarà… un vuitè… de pizza… Margarita.**

En el Episodio 4, A_2 incorpora la representación gráfica de la fracción sin llegar a establecer la equivalencia entre repartos. Interpretan la información del enunciado y usan el lenguaje matemático para expresar el reparto, dejando al margen sus preferencias. Al inicio de E_4, A_1 establece un resultado apoyándose en la representación gráfica del reparto para argumentar su solución (34.1). A_2 muestra cierta disconformidad y prioriza el uso de la fracción unitaria (39.1). Realiza el recuento de fracciones homogéneas que constituyen la fracción entera que representa la unidad, significando a la fracción como parte-todo en contexto continuo (39.1, 41.1 y 43.1). Mejoran el uso del lenguaje, pero no establecen la equivalencia entre las fracciones que dieron en M_1 (46.1).

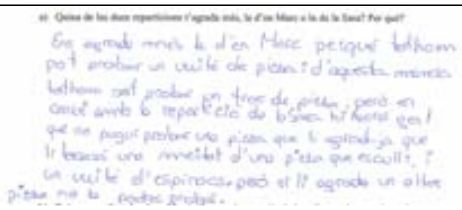
A_2 pasa de enunciar a explicar la solución al aportar, de forma verbal y gráfica, garantías que apoyan las conclusiones. Al inicio de E_4, la maestra demanda un desarrollo argumentativo más elaborado, dejando al margen el consenso autoritario establecido (29.1). A_1 enuncia el reparto en conexión con la representación gráfica (34.1), pero sin aportar garantías que lo validen (38.1). A_2 interviene para justificar la cantidad del reparto, usando los datos del enunciado

(39.1), para garantizar el reparto (41.1 y 43.1) en conexión con los datos iniciales (46.1). A_2 mejora los argumentos al mostrar a A_1 razones matemáticas sobre el reparto, pero sin ser capaz de conectar sus respuestas individuales elaboradas en M_1.

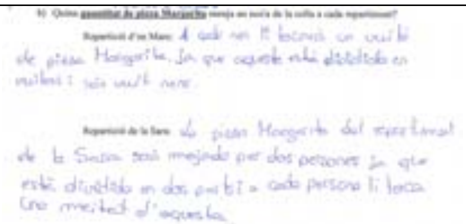
La maestra demanda la revisión conjunta de las respuestas individuales para aclarar y unificar posicionamientos (29.1). A_2 cuestiona a A_1 si respalda el desarrollo adoptado y A_1 indica, sin dar argumentos, que está en desacuerdo (32.1). La maestra vuelve a demandar un diálogo argumentativo para fomentar la intención argumentativa en la pareja (33.1). A_1 da una solución del reparto (38.1) y A_2 ofrece una solución (39.1) que genera algunos interrogantes en A_1. A_2 responde y permite que A_1 relacione su respuesta con la de su compañero. Para finalizar, A_2 pregunta a A_1 si ha comprendido la respuesta conjunta (44.1). Aunque, inicialmente, A_2 incorpora a A_1 en la construcción de la solución, se establece un consenso en el que A_1 tiene una participación pasiva (46.1).

Producciones escritas de las parejas

Para ejemplificar la producción escrita de las parejas, tomamos respuestas de $P_{1\text{-}2}$ en la resolución de P_1, P_3 y P_4 en el segundo momento organizativo (M_2). Describimos su contenido matemático en base a los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos que elaboran los alumnos atendiendo a los códigos del eje conceptual y del eje estructural, descritos en el Capítulo 2. Los datos escritos, que presentamos de esta pareja, conectan con los ejemplos mostrados en secciones anteriores.



Nos gusta más la de Marc porque todos pueden probar un octavo de pizza y de esta manera todos pueden probar un trozo de pizza, pero en cambio con el reparto de Sara habrá gente que no podrá probar una pizza que le guste ya que le tocará una mitad de una pizza que escoja y un octavo de espinacas, pero si le gusta otra pizza no la podrá probar.



Reparto de Marc: *A cada niño le tocará un octavo de pizza Margarita, ya que esta está dividida en octavos y son ocho niños.*
Reparto de Sara: *La pizza Margarita del reparto de la Sara será comida por dos personas, ya que está dividida en dos partes y a cada persona le toca una mitad de esta.*

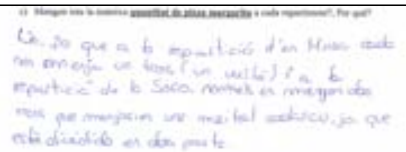
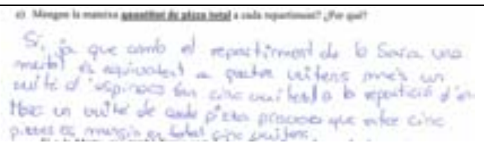
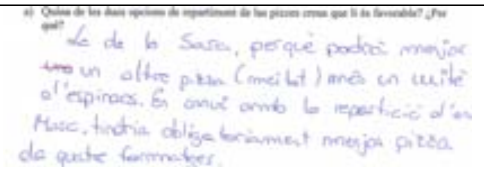
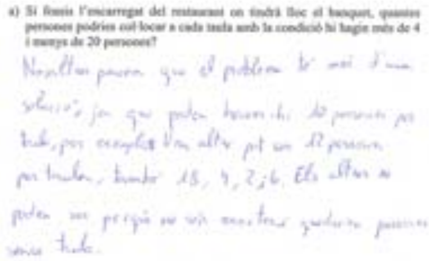
 *No, ya que en el reparto de Marc cada niño come un trozo (un octavo) y en el reparto de Sara solo comen dos niños que comerían una mitad cada uno, ya que está dividida en dos partes.*
 Reparto de Marc: *Cada niño come cinco octavos de pizza, ya que están divididas en ocho partes y hay cinco pizzas y ocho amigos.* Reparto de Sara: *Cada niño comerá un octavo de pizza de espinacas y una mitad de pizza de cualquier otro tipo, ya que las otras están divididas en mitades.*
 *Sí, ya que en el reparto de Sara una mitad es equivalente a cuatro octavos más un octavo de espinacas hacen cinco octavos. Y en el reparto de Marc un octavo de cada pizza provoca que entre cinco pizzas se coman un total de cinco octavos.*
 *La de Sara, porque podrá comer otra pizza (mitad) más un octavo de espinacas. En cambio con el reparto de Marc, tendrá obligatoriamente que comer pizza de Cuatro quesos.*

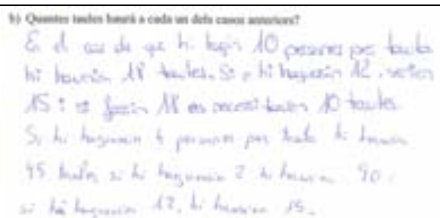
Figura 18. Producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ del problema 1

La producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ en $P_1(M_2)$ sugiere cierta comprensión del significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto (Figura 18): a) nombran mediante el uso del lenguaje matemático-verbal las fracciones unitarias de cada reparto (*un octavo, una mitad*) y dotan de significado matemático las cantidades que presentan en lenguaje no matemático (*un trozo, una parte*); b) significan la suma de fracciones homogéneas y heterogéneas (*Cada niño come cinco octavos de pizza, ya que están divididas en ocho partes y hay cinco pizzas y ocho amigos; una mitad… más un octavo de espinacas hacen cinco octavos*); c) comparan y establecen una equivalencia entre las fracciones de los repartos. Afirman que a los dos repartos les corresponde la misma cantidad total (*Sí, ya que en el reparto de Sara… cinco octavos. Y en el reparto de Marc un octavo de cada pizza provoca que entre cinco pizzas se coman un total de cinco octavos*). Dan equivalencias entre las fracciones que utilizan de forma individual (*una mitad es equivalente a cuatro octavos*); d) escogen uno de los repartos cuando se dan condiciones (*La de Sara, porque podrá comer otra pizza (mitad) más un octavo de espinacas. En* *cambio con el reparto de Marc, tendrá obligatoriamente que comer pizza de cuatro quesos*); e) conectan el lenguaje matemático-verbal con el lenguaje no matemático, omitiendo el lenguaje matemático-numérico y matemático-gráfico.

La pareja elabora razones matemáticas y extramatemáticas para dar una respuesta de cada reparto. Desarrollan argumentos extramatemáticos cuando eligen un reparto en base a sus preferencias o en base a una condición (*Nos gusta más la de Marc porque todos pueden probar...*), (*La de Sara, porque podrá comer otra pizza – mitad – más un octavo de espinacas. En cambio con el reparto de Marc, tendrá obligatoriamente que comer pizza de Cuatro quesos*). Justifican la cantidad asociada a los repartos parciales y argumentan la comparación de fracciones para establecer que los repartos no son equivalentes. Ofrecen respaldos matemáticos en base a la suma de fracciones y dan el reparto total. Elaboran certezas matemáticas o extramatemáticas para justificar su respuesta.


a) Si fossis l'encarregat del restaurant on tindrà lloc el banquet, quantes persones podries col·locar a cada taula amb la condició hi hagin més de 4 i menys de 20 persones?

Nosotros pensamos que el problema tiene más de una solución, ya que puede haber 10 personas por mesa, por ejemplo. Otra puede ser 12 personas por mesa, también 18, 4, 2 y 6. Las otras no pueden ser porque no son exactas y quedarían personas sin mesa.

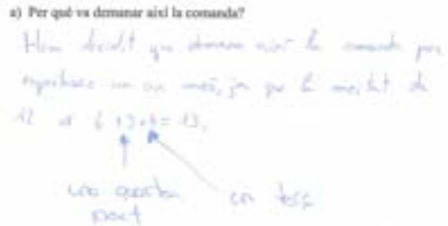


En el caso que haya 10 personas por mesa habría 18 mesas. Si hubiese 12, serían 15 y si fuesen 18 se necesitarían 10 mesas. Si hubiese 4 personas por mesa habría 45 mesas, si hubiese 2 habría 90 y si hubiese 12, habría 15.

Figura 19. Producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ del problema 3

La producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ en $P_3(M_2)$ indica que entienden el enunciado del problema. Significan a la fracción como cociente al distribuir de forma equitativa y con restricciones todos los elementos del conjunto (Figura 15): a) comprenden las restricciones del reparto y reparten los elementos (*personas*) en subgrupos (*mesas)*, sin precisar todas las opciones de reparto. En algunas ocasiones, omiten una condición (*Si hubiese 4 personas por mesa habría 45 mesas, si hubiese 2 habría 90*); b) significan el concepto de reparto equitativo al establecer subconjuntos de igual amplitud; c) exponen directamente los resultados de las divisiones que realizan, usan los conceptos de divisor de un número y de división exacta; d) no utilizan la representación gráfica de los repartos.

En general, no elaboran razones matemáticas para apoyar los repartos y solo enuncian los subgrupos que dan y los elementos que los constituyen.



Hemos decidido que pide así el pedido para llevarse un huevo más, ya que la mitad de 12 es 6 + 3 (cuarta parte) + 4 (un tercio) = 13.

Si fuésemos el vendedor habríamos contado los huevos y probablemente venderíamos los huevos por Kilos. Si fuésemos el espabilado todo dependería de si fuésemos delincuentes o no. Si lo fuésemos haríamos este mismo pedido con la excusa de que es para hacer tres tortillas, y si no lo fuésemos haríamos el pedido como se debe.

Figura 20. Producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ del problema 4

La producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ en $P_4(M_2)$ muestra que comprenden el significado de la fracción como relación parte-todo en contexto discreto y como cociente en un reparto en el que se distribuyen más unidades de las disponibles (Figura 20): a) interpretan que deben repartirse trece unidades y no una docena, significando a la fracción como parte de un conjunto; b) usan las fracciones unitarias de los repartos (*la mitad, la tercera parte y la cuarta parte*) y obtienen la cantidad de elementos asociados a cada reparto (*la mitad de 12 es 6 y 4 es un tercio y 3 que es la cuarta parte*); c) suman fracciones y establecen el reparto total (*mitad de 12 es 6 + 3 (cuarta parte) + 4 (un tercio)* = 13); d) significan a la fracción como cociente al dividir, ya que implícitamente dividen 12 entre 2, 4 y 3, y expresan el resultado del reparto parcial en cada uno de los casos (*6, 3 y 4*); e) no usan la fracción impropia que representa el reparto total (*13/12*); f) diferencian entre el reparto parcial y el total; g) omiten el lenguaje matemático-gráfico y usan el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico.

Aportan garantías y razones matemáticas en conexión con el contexto extramatemático (*Hemos decidido que pide así el pedido para llevarse un huevo más, ya que la mitad de 12 es 6 + 3 (cuarta parte) + 4 (un tercio) = 13.*) También justifican los repartos en base a los protagonistas de la situación (*Si* *fuésemos el vendedor habríamos contado… Si fuésemos el espabilado todo dependería de…*).

4.2.2. Análisis respecto al objetivo 2

Para dar respuesta al segundo objetivo, aplicamos I_2, I_3, I_4 a las producciones orales y escritas de las cuatro parejas cuando resuelven los cinco problemas de la secuencia. Respecto a los datos orales, aplicamos I_2(A) e I_2(B) a los datos orales. Ejemplificamos su implementación para los tres primeros episodios y lo describimos (Tablas 21-26). Sintetizamos características en torno a los usos de la fracción, los tipos de estructura de los argumentos y de los tipos de interacción que caracterizan a cada episodio. Elaboramos códigos bidimensionales, que usamos al aplicar I_3. Respecto a los datos escritos, aplicamos I_4 a las respuestas de las parejas (en total 20) y presentamos ejemplos. Concluimos qué usos de la fracción participan en el proceso resolutivo de los problemas en conexión con los tipos de estructura de los argumentos que elaboran los alumnos en sus producciones y con los tipos de interacción que tiene lugar entre parejas de alumnos. De esta forma, caracterizamos, conjuntamente, los rasgos conceptuales, estructurales e interaccionales de las producciones en pareja que elaboran los alumnos en M_2.

4.2.2.1. Análisis de las producciones orales de las parejas

Aplicación de I_2(A)

E_1: (P_1(a), M_2) / (1.1 – 5.1) / (0:32s – 1:11s) de la pareja $P_{1\text{-}2}$			
Usos de la fracción		**Tipos de estructura de los argumentos**	
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo y discreto		Afirmación con respaldo extramatemático	
A_2 (1.1)	*Quina de les* ***dues reparticions*** *t'agrada més la d'en Marc o la de la Sara, per què?... bueno (I)*	A_2 (3.1)	*A mi també,* ***perquè cada persona se'n porta un tros de pizza****)… L'última pregunta et fa pensar que si a una persona no li agrada també seria bona la de la Sara…*
A_1 (2.1)	*A mi la d'en Marc.*	A_1 (4.1)	*Potser tothom vol la Margarita.*
A_2 (5.1)	*Amb aquesta* ***un tros de cada*** *i ja està. Sí seria millor.*	A_2 (5.1)	*Per això ho deia,* ***que potser tu vols la Hawaiana que t'agrada molt, o també t'agrada molt la Quatre estacions i la Margarita****… Amb aquesta un tros de cada i ja està. Sí seria millor.*

Tabla 21. Aplicación de I_2(A) al primer episodio de $P_{1\text{-}2}$

El análisis de E_1 muestra que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ comprenden el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto en P_1(a). Saben diferenciar las dos opciones de reparto. Interpretan las representaciones gráficas y elaboran respaldos extramatemáticos basados en sus preferencias para indagar en torno al uso del reparto que divide las unidades en partes iguales (Tabla 21).

E_2: (P_1(a), M_2) / (6.1 – 24.1) / (1:22s – 4:24s) de la pareja $P_{1\text{-}2}$			
Usos de la fracción		**Tipos de estructura de los argumentos**	
Uso del lenguaje matemático		Afirmación con respaldo extramatemático	
A_1 y A_2 (9.1)	*...Perquè tothom pot provar* ***un tros de cada pizza.***	A_2 (17.1)	*La d'en Marc m'agrada més ja que… cada nen menja* ***un vuitè de cada pizza i però amb el repartiment de la Sara no li toca un vuitè a cadascú sinó que... dos nens podran gaudir de la pizza Margarita. Dos nens la Hawaiana, dos nens de la Quatre formatges i dos de la Quatre estacions però cada nen tindrà un quart de la d'espinacs...*** *Sí en definitiva és millor la d'en Marc... Expliquem també el perquè de la Sara?*
A_2 (10.1)	*Perquè tothom pot provar…* ***un vuitè****.*	A_1 (21.1)	*Però* ***si algú no li agrada la pizza que li ha tocat pot canviar.***
A_1 (11.1)	*Jo he posat* ***mig quart.***		
A_2 (18.1)	*Tothom pot provar* ***un tros de pizza un vuitè****...*		
A_2 (22.1)	*Clar, això és veritat... que li agradi... uff... ja que... li tocarà...* ***una meitat****...*		

Tabla 22. Aplicación de I_2(A) al segundo episodio de $P_{1\text{-}2}$

El análisis de E_2 indica que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ interpretan el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto en P_1(a). Diferencian los repartos e interpretan las representaciones gráficas. Elaboran respaldos extramatemáticos para priorizar el uso del reparto equitativo (Tabla 22). No establecen una equivalencia entre las fracciones que presentan de forma individual, pero mejoran el uso del lenguaje para respaldar la solución conjunta.

E_3: (P_1(a), M_2) / (25.1 – 28.1) / (4:24s – 4:57s) de la pareja $P_{1\text{-}2}$			
Usos de la fracción		**Tipos de estructura de los argumentos**	
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo		Afirmación sin garantía	
A_1 (26.1)	*Jo he posat* ***mig quart****, un quart seria això.*	A_2 (27.1)	*Una persona es tindria que menjar,* ***si són vuit nens un de cada.***
		A_2 (28.1)	*En total de pizza Margarita en la* ***repartición d'en Marc cada nen menjaria un vuitè****… fica… un vuitè coma.*

Tabla 23. Aplicación de I_2(A) al tercer episodio de $P_{1\text{-}2}$

Del análisis de E_3 se desprende que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ muestran formas equivalentes para expresar a la fracción como parte-todo en contexto continuo en P_1(a). Sin embargo, no elaboran garantías que argumenten las fracciones unitarias que representan el reparto, ya que elaboran directamente sus conclusiones (Tabla 23).

Aplicación de $I_2(B)$

E_1: (P_1(a), M_2) / (1.1 – 5.1) / (0:32s – 1:11s) de la pareja P_{1-2}			
Usos de la fracción		**Tipos de interacción**	
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo y discreto		Acuerdo	
A_2 (1.1)	*Quina de les **dues reparticions** t'agrada més la d'en Marc o la de la Sara, per què?... bueno (I)*	A_1 (2.1)	***A mi la d'en Marc.***
		A_2 (3.1)	***A mi també**, perquè cada persona se'n porta un tros de pizza)… L'última pregunta et fa pensar que si a una persona no li agrada també seria bona la de la Sara…*
A_2 (5.1)	*Amb aquesta **un tros de cada** i ja està.*	A_2 (5.1)	***Per això ho deia**, que potser tu vols la Hawaiana que t'agrada molt, o també t'agrada molt… i la Margarita… Amb aquesta un tros de cada i ja està. **Sí seria millor**.*

Tabla 24. Aplicación de I_2(B) al primer episodio de P_{1-2}

El análisis de E_1 muestra que los alumnos de P_{1-2} interpretan el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto en P_1(a), desde dos repartos diferenciados (Tabla 24). Establecen un consenso oral de una solución, y A_2 elabora garantías en base a los datos verbales y gráficos que presenta el enunciado para explicar el acuerdo.

E_2: (P_1(a), M_2) / (6.1 – 24.1) / (1:22s – 4:24s) de la pareja P_{1-2}			
Usos de la fracción		**Tipos de interacción**	
Uso del lenguaje matemático		Acuerdo	
A_1 y A_2 (9.1)	*...Perquè tothom pot provar **un tros de cada pizza.***	A_2 (8.1)	***...Ens agrada més...** la d'en Marc...*
		A_1 y A_2 (9.1)	***...Perquè tothom pot provar** un tros de cada pizza.*
A_2 (10.1)	*Perquè tothom pot provar… **un vuitè**.*	A_2 (10.1)	***Perquè tothom pot provar**… un vuitè.*
A_1 (11.1)	*Jo he posat **mig quart.***	A_2 (12.1)	*De pizza... i d'aquesta manera tothom **provar cada pizza.***
		A_1 y A_2 (13.1)	***Provar cada pizza.***
A_2 (18.1)	*Tothom pot provar **un tros de pizza un vuitè**...*	A_2 (17.1)	***...Expliquem** també el perquè de la Sara?*
A_2 (22.1)	*Clar, això és veritat... que li agradi... uff... ja que... li tocarà... **una meitat**...*		

Tabla 25. Aplicación de I_2(B) al segundo episodio de P_{1-2}

El análisis de E_2 sugiere que los alumnos de P_{1-2} comprenden el significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto en P_1(a). Interpretan las partes de unidad y el reparto (Tabla 25). Acuerdan la elección del reparto.

Mejoran el uso del lenguaje. Diferencian los repartos sin manifestar ningún tipo de equivalencia entre las fracciones de cada reparto.

E_3: (P_1(a), M_2) / (25.1 – 28.1) / (4:24s – 4:57s) de la pareja P_{1-2}			
Usos de la fracción		**Tipos de estructura de los argumentos**	
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo		Imposición	
A_1 (26.1)	*Jo he posat **mig quart**, un quart seria això.*	A_2 (27.1)	*Una persona **es tindria que menjar**, si són vuit nens un de cada.*
		A_2 (28.1)	*En total de pizza Margarita en la repartición d'en Marc cada nen menjaria un vuitè… **fica… un vuitè coma.***

Tabla 26. Aplicación de I_2(B) al tercer episodio de P_{1-2}

El análisis de E_3 muestra que los alumnos de P_{1-2} usan fracciones equivalentes en P_1(a) para expresar la relación parte-todo en contexto continuo, pero no establecen esta equivalencia (Tabla 26). A_2 se impone al indicar los motivos de su elección y al enunciar el reparto, ignorando la equivalencia formulada por A_1.

Síntesis de la aplicación de I_2

Para reagrupar aspectos identificados al aplicar I_2, recopilamos, en una misma tabla, características conceptuales, estructurales e interaccionales de los episodios (Tabla 27). En el Anexo 9, presentamos la síntesis de forma íntegra. Diferenciamos las dos combinaciones bidimensionales entre ejes.

EPISODIO	Usos de la fracción	Tipos de estructura de los argumentos	Tipos de interacción
E_1-P_1(a)	Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo y discreto	Afirmación con respaldo extramatemático	Acuerdo
E_2-P_1(a)	Uso del lenguaje matemático	Afirmación con respaldo extramatemático	Acuerdo
E_3-P_1(b)	Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	Afirmación sin garantía	Imposición

Tabla 27. Fragmento de la caracterización de los episodios

Aplicamos las tablas usadas en la síntesis de la aplicación de I_1 para resumir la aplicación de I_2(A) e I_2(B) para:

- Los episodios de cada pareja en la resolución de todos los problemas. En la tabla, no incluimos ejemplos de datos y, en las celdas, mostramos el episodio, el problema y el apartado que resuelve la pareja. En ocasiones, para el primer problema, indicamos con el subíndice (1) el reparto de *Marc*, y, con el subíndice (2), el reparto de *Sara*. Recombinamos los usos de la fracción con los tipos de estructura de los argumentos o con los tipos de interacción que caracterizan a cada episodio. Solo ilustramos la síntesis de las respuestas orales de $P_{1\text{-}2}$ al resolver todos los problemas (Tablas 28 y 29), conectando con los ejemplos anteriores. El resto de tablas aparecen en el Anexo 10.

- Los episodios de todas las parejas cuando resuelven cada uno de los problemas. La tabla no contiene ejemplos de datos. En las celdas, indicamos la pareja, el episodio y el apartado que resuelven, atendiendo a cada combinación bidimensional de los ejes. Reagrupamos características conceptuales, estructurales e interaccionales de todas las producciones orales en la resolución de un problema específico. En ocasiones, indicamos entre paréntesis la negación del código que precede al aplicar I_2(B). Presentamos la síntesis de los episodios elaborados al resolver cada problema (Tablas 30-39).

Eje Estructural / **Eje Conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo		E3-P1(b1)				E1-P1(a) E17-P1(a)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E25-P2	E15-P1(f)	E5-P1(b) E7-P1(b) E11-P1(d) E32-P3(a) E35-P3(b)	E16-P1(f)		E1-P1(a) E17-P1(a)
Identificación de la fracción como cociente	E23-P2 E26-P2 E36-P3(b)		E30-P3(a) E34-P3(b)		E31-P3(a) E33-P3(a) E39-P4	
Identificación de la fracción como razón	E43-P5 E44-P5 E45-P5 E47-P5 E48-P5					
Distinción entre reparto total y reparto parcial	E24-P2 E27-P2 E28-P2	E29-P2 E41-P4		E42-P4	E37-P4	E40-P4
Comparación de fracciones		E8-P1(c)			E9-P1(c) E19-P1(c)	
Aplicación de la equivalencia de fracciones			E14-P1(e)		E13-P1(e)	E22-P1(e)
Aplicación de métodos de suma de fracciones			E10-P1(d)		E12-P1(e) E20-P1(d) E21-P1(d)	
Uso de lenguaje no matemático			E6-P1(b)			
Uso de lenguaje matemático	E46-P5		E4-P1(b1)		E18-P1(b)	E2-P1(a)

Tabla 28. Síntesis de I_2(A) para todos los episodios de $P_{1\text{-}2}$ en M_2

Los resultados que obtenemos tienen que ver con la caracterización de los episodios de $P_{1\text{-}2}$ en la resolución de los cinco problemas, desde la combinación del eje conceptual versus el eje estructural (Tabla 28). La síntesis de la aplicación de I_2(A) a las producciones orales en M_2 muestra que presentan desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_2 no identifican la relación parte-todo en contexto discreto ni a la fracción como cociente en un reparto que no distribuye todas las unidades. No diferencian entre el reparto total y el parcial; b) en P_3(b) no identifican a la fracción como cociente de números enteros; c) en P_5 no significan a la fracción como razón al no interpretarla como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades.

Elaboran una argumentación muy débil al afirmar sin garantías cuando: a) en P_1(b) indican la fracción asociada al reparto equitativo; b) en P_1(c) comparan las fracciones de los repartos; c) en P_1(f) enuncian la elección del reparto, dotando de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto; d) en P_2 diferencian el reparto total del parcial; e) en P_4 manifiestan la diferencia entre los repartos sin aportar argumentos que lo expliquen o lo justifiquen.

Desarrollan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantías matemáticas cuando: a) en P_1(b) asignan las partes de los repartos y usan las fracciones unitarias del enunciado. Dan argumentos para significar a la fracción como parte-todo en contexto continuo; b) en P_1(d) suman fracciones y establecen el reparto total; c) en P_1(e) establecen equivalencias entre las fracciones de los repartos; d) en P_3 reparten los elementos del conjunto en subconjuntos de igual amplitud.

Presentan una argumentación débil al dar afirmaciones con garantías extramatemáticas cuando: a) en P_1(f) priorizan la elección del reparto sujeto a restricciones identificando la relación parte-todo en contexto discreto; b) en P_4 dan argumentos para validar opciones de reparto.

Muestran una argumentación fuerte al elaborar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) verifican las partes de los repartos usando el lenguaje matemático; b) en P_1(c) justifican la comparación de las fracciones de los repartos; d) en P_1(d) argumentan la suma de fracciones para dar el reparto total; e) en P_1(e) justifican la aplicación de la equivalencia de fracciones para establecer equivalencias; f) en P_3 argumentan repartos restringidos al establecer subconjuntos de igual amplitud; g) en P_4 justifican el reparto y diferencian entre el reparto total y el parcial.

Elaboran una argumentación fuerte al dar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) priorizan el uso del reparto equitavivo; b) en P_1(e) justifican la equivalencia de fracciones para establecer equivalencias; c) en P_4 justifican el reparto y diferencian entre el reparto total y el parcial.

Eje Interaccional / Eje Conceptual	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E5-P1(b)	E1-P1(a) E7-P1(b)	E17-P1(a)			E3-P1(b1)			
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto		E1-P1(a) E15-P1(f) E32-P3(a) E35-P3(b)	E17-P1(a)			E11-P1(d)	E16-P1(f)		
Identificación de la fracción como cociente	E30-P3(a) E36-P3(b)		E31-P3(a) E39-P4			E34-P3(b)			E33-P3(a)
Identificación de la fracción como razón									
Distinción entre reparto total y reparto parcial	E40-P4	E37-P4 E42-P4				E41-P4			
Comparación de fracciones		E9-P1(c)			E8-P1(c)				E19-P1(c)
Aplicación de la equivalencia de fracciones	E13-P1(e) E22-P1(e)	E14-P1(e)							
Aplicación de métodos de suma de fracciones	E10-P1(d)		E20-P1(d)	E21-P1(d)	E12-P1(e)				
Conexión entre lenguajes									
Uso de lenguaje no matemático		E6-P1(b)							
Uso de lenguaje matemático	E18-P1(b) E4-P1(b1) E46-P5	E2-P1(a)							

Tabla 29. Síntesis de I_2(B) para todos los episodios de P_{1-2} en M_2

Los resultados reportados muestran la caracterización de los episodios de P_{1-2} en la resolución de los cinco problemas, desde la combinación del eje conceptual versus el eje interaccional (Tabla 29). La síntesis de la aplicación de I_2(B) a las producciones orales de estos alumnos en M_2 indica que establecen aclaraciones para mejorar la comprensión de la respuesta cuando: a) en P_1(b) identifican la relación parte-todo en contexto continuo y dan el reparto; b) en P_1(d) suman fracciones para obtener el reparto total; c) en P_1(e) establecen equivalencias entre las fracciones de los repartos; d) en P_4 distinguen el reparto parcial y del total; e) en P_5 usan el lenguaje matemático.

Presentan acuerdos para reflexionar o madurar la respuesta cuando: a) en P_1(a) identifican la relación parte-todo en contexto continuo y discreto al elegir un reparto; b) en P_1(b) significan a la fracción como parte-todo en contexto continuo para dar el reparto; c) en P_1(c) comparan las fracciones de los repartos; d) en P_1(d) suman fracciones; e) en P_1(e) usan equivalencias; f) en P_1(f) priorizan la elección del reparto, que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles en base a la restricción del enunciado; g) en P_3 significan a la fracción como cociente al repartir los elementos del conjunto en subgrupos de igual amplitud; h) en P_4 distinguen entre el reparto total y el parcial al disponer de más elementos de los totales.

Muestran ampliaciones para aportar nuevos desarrollos o conclusiones que mejoren la respuesta cuando: a) en P_1(a) identifican la relación parte-todo en contexto continuo y discreto al priorizar el uso de un reparto; b) en P_1(d) suman fracciones para obtener el reparto total; c) en P_3 reparten los elementos en subgrupos de igual amplitud según las restricciones; d) en P_4 comprenden el significado de la fracción como cociente al distribuir más unidades de las disponibles.

Ofrecen un cuestionamiento para plantear un interrogante en torno a un tema surgido en la pareja cuando en P_1(d) suman fracciones y establecen que los repartos son equivalentes.

Presentan desacuerdos al declarar una disconformidad en el planteamiento de la respuesta cuando: a) en P_1(c) comparan las fracciones de los dos repartos; b) en P_1(e) intentan mostrar que los repartos son equivalentes.

Establecen imposiciones para exigir la adopción de un planteamiento, desarrollo o conclusión que uno de los alumnos admite como correcto cuando: a) en P_1(b) un alumno presenta la fracción del reparto omitiendo la equivalencia con la fracción que da su compañero; b) en P_1(d) suman fracciones para obtener el reparto y un alumno ignora la representación gráfica de su compañero; c) en P_3 un alumno establece opciones de reparto omitiendo las aportaciones de su compañero; d) en P_4 un alumno da otras opciones de reparto desde el punto de vista de cada uno de los personajes.

Producen una interrupción al detener el turno de palabra del compañero y manifestar sus propias conclusiones para establecer el reparto en P_1(f).

Muestran una síntesis al simplificar un planteamiento, desarrollo o conclusión existente cuando: a) en P_1(c) comparan las fracciones de los repartos, significando a la fracción como parte-todo en contexto continuo; b) en P_3 establecen repartos según las restricciones.

Eje Estructural / Eje Conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo		P12-E3(b1) P34-E55,E56,E57(b) P56-E96(b) P78-E134,E137(c)	P34-E52(a) P56-E95(b) P78-E128,E130(b) P78-E140(c)	P78-E138(c)	P56-E92,E94(b) P56-E97(c)	P12-E1,E17(a) P34-E49(a)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P56-E105(e)	P12-E15(f) P34- E58,E59,E71(d)	P12-E5,E7(b) P12-E11(d) P34-E65,E73(f) P56-E100,E101(d)	P12-E16(f) P78-E131(b) P78-E144(d)	P34-E51,E67(a) P34-E63(f)	P12-E1,E17(a) P56-E90,E91(a) P78-E124,E125,E127(a) P78-E149,E150(f)
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones		P12-E8(c)	P34-E54(a) P34-E57,E70(c) P56-E98(c) P78-E135(d) P78-E146(e)		P12-E9,E19(c) P34-E53(a)	
Aplicación de la equivalencia de fracciones			P12-E14(e)	P78-E136(d)	P12-E13(e) P34-E68(a) P34-E60,E72(e) P78-E133(b)	P12-E22(e) P56-E102(e)
Aplicación de métodos de suma de fracciones			P12-E10(d) P34-E61(e) P78-E148(e)		P12-E12(e) P12-E20,E21(d) P56-E99(d) P78-E126(a) P78-E142,E143(d) P78-E147(e)	
Conexión entre lenguajes						
Uso de lenguaje no matemático			P12-E6(b)		P34-E50(a)	
Uso de lenguaje matemático	P56-E107(f)	P78-E132(b)	P12-E4(b1) P34-E66(f) P78-E129(b) P78-E139,E141(c) P78-E145(d)		P12-E18(b) P34-E62(e) P34-E64(f) P56-E93(b) P56-E103(e)	P12-E2(a) P56-E104(e) P56-E106(f)

Tabla 30. Síntesis de $I_2(A)$ para los episodios en $P_1(M_2)$

Los resultados que obtenemos nos permiten caracterizar las producciones orales de las parejas al resolver el primer problema (Tabla 30). La síntesis de la aplicación de $I_2(A)$ a los episodios de todas las parejas en M_2 indica que en P_1 elaboran desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en $P_1(e)$ una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, calcula el reparto total; b) en $P_1(f)$ una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, usa el lenguaje no matemático para priorizar la elección del reparto.

Elaboran una argumentación muy débil al mostrar afirmaciones sin garantía cuando: a) en P_1(b) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en cinco episodios, dan los repartos; b) en P_1(c) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, identifica la relación parte-todo en contexto continuo. Otra pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, compara fracciones.

Desarrollan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía matemática, predominando el uso del lenguaje matemático cuando: a) en P_1(a) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, explica la elección del reparto o compara fracciones; b) en P_1(b) una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en dos episodios, identifica la relación parte-todo en contexto discreto. Dos parejas ($P_{5\text{-}6}$, $P_{7\text{-}8}$), en tres episodios, explican los repartos significando a la fracción como parte de la unidad; c) en P_1(c) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, identifica la relación parte-todo en contexto continuo. Dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en tres episodios, comparan fracciones; d) en P_1(d) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$), en tres episodios, dan los repartos totales. Una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, compara las fracciones. Otra pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, suma fracciones para dar el reparto total; e) en P_1(e) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, argumenta la comparación de los repartos totales. Otra pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, explica equivalencias. Dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, suman fracciones para obtener el reparto total; f) en P_1(f) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, argumenta la elección del reparto.

Muestran una argumentación débil al presentar afirmaciones con garantía extramatemática cuando: a) en P_1(b) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, indica el reparto; b) en P_1(c) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo; c) en P_1(d) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, explica los repartos totales, y en otro episodio, argumenta la equivalencia de fracciones; d) en P_1(f) una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, elabora garantías para elegir un reparto restringido.

Presentan una argumentación fuerte al desarrollar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(a) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, justifica la elección del reparto equitativo. Esta pareja, en dos episodios, argumenta la comparación y equivalencia de fracciones. La pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, suma fracciones para priorizar el uso del reparto; b) en P_1(b) una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en dos episodios, justifica la relación parte-todo en contexto continuo; c) en P_1(c) una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, identifica la relación parte-todo en contexto continuo. Otra pareja ($P_{1\text{-}2}$), en dos episodios, justifica la comparación de las fracciones; d) en P_1(d) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$,$P_{7\text{-}8}$), en cinco episodios, argumentan la suma de fracciones para dar reparto total; e) en P_1(e) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, justifica la equivalencia de los repartos. Dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, suman fracciones para obtener el reparto total; f) en P_1(f) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto y priorizan el uso del reparto.

Elaboran una argumentación fuerte al mostrar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) dos parejas (P_{1-2}, P_{3-4}), en tres episodios, justifican la elección del reparto equitativo. Tres parejas (P_{1-2}, P_{5-6},P_{7-8}), en siete episodios, justifican el uso de un reparto, significando a la fracción como parte-todo en contexto discreto; b) en P_1(e) dos parejas (P_{1-2}, P_{5-6}), en dos episodios, justifican la equivalencia de fracciones; c) en P_1(f) una pareja (P_{7-8}), en dos episodios, argumenta la elección del reparto.

Eje Estructural / Eje Conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P12-E25					
Identificación de la fracción como cociente	P12-E23,E26 P56-E108 P78-E154,E156,E157					
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P12-E24,E27,E28 P34-E74,E75 P56-E109,E110,E111 P78-E152;E155,E158	P12-E29				
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes						
Uso de lenguaje no matemático						
Uso de lenguaje matemático	P78-E153;E159					

Tabla 31. Síntesis de I_2(A) para los episodios en $P_2(M_2)$

En base a los resultados logrados, caracterizamos las producciones orales de las parejas en la resolución del segundo problema (Tabla 31). La síntesis de la aplicación de I_2(A) a los episodios de las cuatro parejas en M_2 indica que en P_2 las parejas, en once episodios, ofrecen desajustes entre los datos y las garantías al intentar diferenciar entre el reparto total y el parcial. P_{1-2}, en un episodio, no identifica a la fracción como parte-todo en contexto discreto. Las parejas (P_{1-2}, P_{3-4}, P_{5-6}), en seis episodios, no significan a la fracción como cociente. Solo P_{1-2}, en un episodio, distingue los repartos sin dar garantías.

Eje Estructural / **Eje Conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto		P34-E77 P56-E116	P12-E32,E35 P34-E79,E80 P78-E160,E164			
Identificación de la fracción como cociente	P12-E36		P12-E30,E34 P34-E76 P78-E162,E163		P12-E31,E33 P56-E114,E115 P78-E161	P34-E81 P56-E112
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes						
Uso de lenguaje no matemático	P56-E113					
Uso de lenguaje matemático				P34-E78		

Tabla 32. Síntesis de $I_2(A)$ para los episodios en $P_3(M_2)$

A partir de los resultados obtenidos, caracterizamos las producciones orales de las parejas en la resolución del tercer problema (Tabla 32). La síntesis de la aplicación de $I_2(A)$ a los episodios de todas las parejas en M_2 refleja que elaboran desajustes entre los datos y las garantías en P_3 cuando dos parejas (P_{1-2}, P_{5-6}), en dos episodios, no significan a la fracción como parte-todo en contexto discreto o como cociente al presentar alguna opción de reparto que no cumple las restricciones.

Muestran una argumentación muy débil al elaborar afirmaciones sin garantía cuando dos parejas (P_{3-4}, P_{5-6}), en dos episodios, enuncian algunos repartos, identificando la relación parte-todo en contexto discreto.

Presentan una argumentación débil al dar afirmaciones con garantía matemática cuando: a) tres parejas (P_{1-2}, P_{3-4}, P_{7-8}), en seis episodios, argumentan repartos, según las restricciones e identifican la relación parte-todo en un contexto discreto; b) tres parejas (P_{1-2}, P_{3-4}, P_{7-8}), en cinco episodios, explican el reparto, aplicando los conceptos de divisores de un número natural y de división exacta entre dos números.

Elaboran una argumentación fuerte al aportar afirmaciones con respaldo matemático cuando tres parejas (P_{1-2}, P_{5-6}, P_{7-8}), en cinco episodios, justifican opciones de reparto significando a la fracción como cociente.

Desarrollan una argumentación fuerte al ofrecer afirmaciones con respaldo extramatemático cuando dos parejas (P_{3-4}, P_{5-6}), en dos episodios, justifican opciones de reparto mediante divisiones, identificando a la fracción como cociente.

Eje Estructural / **Eje Conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto				P78-E167		P34-E83
Identificación de la fracción como cociente					P12-E39 P34-E84	P56-E118
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P78-E169	P12-E41		P12-E42 P34-E85 P56-E119,E120 P78-E166	P12-E37 P34-E82 P56-E117	P12-E40
Comparación de fracciones						P78-E168
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes						
Uso de lenguaje no matemático						
Uso de lenguaje matemático			P78-E170			

Tabla 33. Síntesis de $I_2(A)$ para los episodios en $P_4(M_2)$

Partiendo de los resultados logrados, caracterizamos las producciones orales de las parejas en la resolución del cuarto problema (Tabla 33). La síntesis de la aplicación de $I_2(A)$ a los episodios de todas las parejas en M_2 muestra que solo P_{7-8} da un desajuste entre datos y garantías cuando, en un episodio, confunde el reparto total con el parcial. Además, solo P_{1-2}, en otro episodio, enuncia directamente esta distinción.

Muestran una argumentación débil al presentar afirmaciones con garantía extramatemática al resolver P_4 cuando P_{7-8}, en un episodio, argumenta la elección del reparto. Realizan un doble recuento, usan las fracciones unitarias y diferencian entre el reparto total y el parcial. Además, las cuatro parejas, en cinco episodios, explican la diferencia entre el reparto total y el parcial.

Elaboran una argumentación fuerte al desarrollar afirmaciones con respaldo matemático cuando: a) en P_4(a) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, identifican a la fracción como cociente; b) en P_4(a) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en tres episodios, diferencian el reparto total del parcial. En general, basan sus argumentos en la comparación y en la suma de fracciones.

Desarrollan una argumentación fuerte al producir afirmaciones con respaldo extramatemático en P_4(b) para justificar el reparto, desde la perspectiva de los protagonistas, cuando: a) $P_{3\text{-}4}$, en un episodio, argumentan el significado de la fracción como parte-todo en contexto discreto; b) $P_{5\text{-}6}$, en un episodio, argumentan el significado de la fracción como cociente; c) $P_{1\text{-}2}$, en un episodio, diferencian el reparto total del parcial; d) $P_{7\text{-}8}$ comparan fracciones.

Eje Estructural / **Eje Conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto						
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón	P12-E43, E44, E45, E47, E48 P34-E86, E87, E89 P56-E121,E122,E123 P78-E171,E172,E174,E175,E176					
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes						
Uso de lenguaje no matemático						
Uso de lenguaje matemático	P12-E46					

Tabla 34. Síntesis de I_2(A) para los episodios en P_5(M_2)

A partir de los resultados que alcanzamos, caracterizamos las producciones orales de las parejas en la resolución del quinto problema (Tabla 34). La síntesis de la aplicación de $I_2(A)$ a los episodios de las cuatro parejas en M_2 indica que en P_5 las parejas, en diecisiete episodios, dan desajustes entre los datos y las garantías al no identificar a la fracción como razón. No muestran razones coherentes para indicar el reparto más justo y omiten criterios de razón y de proporción.

Eje Interaccional / **Eje Conceptual**	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	P12-E5(b) P34-E55(b) P34-E69(b) P56-E95(b) P78-E128(b) P78-E134(c) P78-E137(c)	P12-E1(a) P12-E7(b) P34-E56(b) P56-E92(b) P56-E96(b)	P12-E17(a)	P34-E52(a) P56-E94(b) P78-E130(b)	P56-E97(c)	P12-E3(b1) P78-E140(c)		P78-E138(c)	
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P34-E51(a) P56-E101(d) P78-E144(d) P78-E150(f)	P12-E1(a) P12-E15(f) P34-E49(a) P34-E58(d) P34-E59(d) P34-E65(f) P56-E90(a) P56-E100(d) P56-E105(e) P78-E124(a) P78-E149(f)	P12-E17(a) P34-E67(a) P78-E127(a)		P34-E63(f) P78-E131(b)	P12-E11(d) P78-E125(a)	P12-E16(f)		P34-E71(d) P34-E73(f)
Identificación de la fracción como cociente									
Identificación de la fracción como razón									
Distinción entre reparto total y reparto parcial									
Comparación de fracciones		P12-E9(c) P34-E57(c) P56-E98(c) P78-E135(d)	P34-E53(a)	P34-E54(a)	P12-E8(c)				P12-E19(c) P34-E70(c) P78-E146(e)
Aplicación de la equivalencia de fracciones	P12-E13(e) P12-E22(e) P34-E60(e) P34-E72(e) P78-E136(d)	P12-E14(e)	P34-E68(a) P78-E133(b)		P56-E102(e)				
Aplicación de métodos de suma de fracciones	P12-E10(d) P78-E126(a) P78-E142(d)	P56-E99(d)	P12-E20(d) P78-E143(d) P78-E147(e) P78-E148(e)	P12-E21(d)	P12-E12(e)				P34-E61(e)
Conexión entre lenguajes									
Uso de lenguaje no matemático	P34-E50(a)	P12-E6(b)							
Uso de lenguaje matemático	P12-E18(b) P12-E4(b) P34-E64(f) P56-E103(e)	P12-E2(a)	P56-E104(e) P78-E139(c) P78-E145(d)	P34-E62(e) P78-E129(b)	P56-E106(f)	P56-E93(b)		P78-E132(b) P78-E141(c)	P34-E66(f) P56-E107(f)

Tabla 35. Síntesis de $I_2(B)$ para los episodios en $P_1(M_2)$

Los resultados logrados nos permiten caracterizar las producciones orales de las parejas en la resolución del primer problema (Tabla 35). La síntesis de la aplicación de I_2(B) a los episodios de todas las parejas en M_2 indica que en P_1 presentan aclaraciones cuando: a) en P_1(a) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, suma fracciones para elegir el reparto. $P_{3\text{-}4}$ identifica la relación parte-todo en contexto discreto en un episodio; b) en P_1(b) las cuatro parejas, en siete episodios, identifican la relación parte-todo en contexto continuo y dan el reparto priorizando, en algunas ocasiones, el uso del lenguaje matemático; c) en P_1(c) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, compara fracciones; d) en P_1(d) dos parejas ($P_{5\text{-}6}$, $P_{7\text{-}8}$), en tres episodios, mejoran la comprensión de sus conclusiones en torno a la suma de fracciones; e) en P_1(e) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$), en cuatro episodios, establecen equivalencias entre las fracciones de los repartos; f) en P_1(f) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, prioriza el uso de uno de los repartos en base a las restricciones.

Muestran acuerdos para reflexionar o madurar la respuesta cuando: a) en P_1(a) todas las parejas, en cinco episodios, identifican la relación parte-todo en contexto continuo y discreto al priorizar el uso de un reparto; b) en P_1(b) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en cinco episodios, establecen el reparto. En alguna ocasión, destaca el uso del lenguaje no matemático; c) en P_1(c) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en tres episodios, comparan fracciones; d) en P_1(d) dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en tres episodios, identifican la relación parte-todo en contexto discreto. $P_{7\text{-}8}$, en una ocasión, comparan fracciones, y $P_{5\text{-}6}$ suma fracciones para dar el reparto total; e) en P_1(e) una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, significa a la fracción como parte-todo en contexto discreto, y otra pareja ($P_{1\text{-}2}$) considera que las fracciones de los repartos son equivalentes; f) en P_1(f) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en tres episodios, prioriza la elección del reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles, siguiendo las restricciones.

Elaboran ampliaciones en sus respuestas cuando: a) en P_1(a) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en tres episodios, identifican la relación parte-todo en contexto discreto y, además, $P_{1\text{-}2}$ también identifica la relación parte-todo en contexto continuo al priorizar el uso de un reparto. En un episodio, $P_{3\text{-}4}$ compara las fracciones de los repartos para ampliar las conclusiones. En otro, esta misma pareja utiliza la equivalencia de fracciones para mejorar la respuesta; b) en P_1(b) solo la pareja ($P_{7\text{-}8}$) amplia su desarrollo usando la equivalencia de las fracciones de los repartos; c) en P_1(d) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, suman fracciones para da el reparto total; e) en P_1(e) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, suman fracciones para mejorar sus conclusiones.

Las parejas desarrollan un cuestionamiento cuando: a) en P_1(a) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, identifica la relación parte-todo en contexto continuo y, en otro, aplica la comparación de fracciones para plantear un interrogante sobre la elección del reparto; b) en P_1(b) dos parejas ($P_{5\text{-}6}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, identifican la relación parte-todo en contexto continuo y plantean una cuestión sobre el reparto; d) en P_1(d) una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, debate la suma de fracciones.

Muestran una disconformidad que gira sobre un planteamiento, desarrollo o conclusión existente cuando: a) en P_1(b) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, los alumnos están en desacuerdo con el reparto; b) en P_1(c) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, identifica la relación parte-todo en contexto, y otra pareja ($P_{1\text{-}2}$) compara fracciones; c) en P_1(e) una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, uno de los alumnos establece que los repartos son equivalentes, pero su compañero desestima esta equivalencia. En $P_{1\text{-}2}$ un alumno considera que los repartos no son equivalentes y su compañero argumenta, usando la suma de fracciones, que lo son; d) en P_1(f) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, discute las restricciones del reparto y muestra diferencias a la hora de escoger el reparto.

Establecen imposiciones cuando: a) en P_1(a) un alumno de una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, exige a su compañero la adopción de las conclusiones que admite como correctas, significando al mismo tiempo a la fracción como parte-todo en contexto discreto; b) en P_1(b) un alumno de una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, impone la fracción del reparto, omitiendo la fracción equivalente que presenta su compañero; c) en P_1(c) un alumno de una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, obliga a admitir el reparto que él había establecido, dándolo por válido; d) en P_1(d) un alumno de una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, impone el lenguaje utilizado para mostrar el reparto, omitiendo en la respuesta escrita en pareja, la representación gráfica aportada por su compañero.

Producen una interrupción cuando en P_1(f) uno de los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, en un episodio, detiene la intervención de su compañero para manifestar sus propias conclusiones sobre la elección del reparto.

Desarrollan una modificación de su respuesta cuando en P_1(c) la pareja $P_{7\text{-}8}$ identifica la relación parte-todo en contexto continuo y, en dos episodios más, prioriza el uso del lenguaje matemático.

Ofrecen una síntesis cuando: a) en P_1(c) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, simplifican la comparación de fracciones elaborada con anterioridad; b) en P_1(d) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, resume sus argumentos en base al reparto establecido; c) en P_1(e) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, sintetiza la comparación de fracciones para establecer el reparto total. Otra pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, simplifica la suma de fracciones para obtener, de forma simultánea, cada reparto; d) en P_1(f) una pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, resume la elección del reparto sujeto a restricciones, significando a la fracción como parte-todo en contexto discreto. Dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en dos episodios, priorizan el uso del lenguaje matemático para sintetizar la elección del reparto.

Eje Interaccional / Eje Conceptual	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo									
(NO) Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto				P12-E25					
(NO) Identificación de la fracción como cociente	P12-E23 P56-E108 P78-E151 (SI)	P78-E154	P78-E157	P12-E26 P78-E156					
Identificación de la fracción como razón									
(NO) Distinción entre reparto total y reparto parcial	P12-E24 P34-E74 P78-E155	P12-E27 P12-E29 P34-E75		P56-E109 P78-E152		P12-E28		P56-E110	P56-E111 P78-E158
Comparación de fracciones									
Aplicación de la equivalencia de fracciones									
Aplicación de métodos de suma de fracciones									
Conexión entre lenguajes									
Uso de lenguaje no matemático									
Uso de lenguaje matemático			P78-E153 P78-E159						

Tabla 36. Síntesis de I_2(B) para los episodios en $P_2(M_2)$

Según los resultados conseguidos, caracterizamos las producciones orales de las parejas en la resolución del segundo problema (Tabla 36). La síntesis de la aplicación de I_2(B) a los episodios de todas las parejas en M_2 indica que en P_2 elaboran aclaraciones cuando: a) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$), en dos episodios, mejoran sus conclusiones, pero no significan a la fracción como cociente. Tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en tres episodios, no diferencian entre el reparto total y el parcial, aunque intentan progresar en la obtención de la fracción del reparto.

Reflexionan o maduran la determinación de sus conclusiones cuando; a) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, acuerda la forma de obtener el reparto, pero no identifica a la fracción cociente; b) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$), en tres episodios, pactan el reparto pero no distinguen entre el reparto total y el parcial al no advertir que no se distribuyen todas las unidades del conjunto.

Promueven nuevos desarrollos o conclusiones que complementan las ya elaboradas cuando: a) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, amplia su respuesta sin identificar a la fracción como cociente. Además, esta pareja, en dos episodios, prioriza el uso del lenguaje matemático.

Plantean interrogantes sobre el reparto cuando: a) una pareja (P_{1-2}), en un episodio, cuestiona, sin éxito, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; b) dos parejas (P_{1-2}, P_{7-8}), en dos episodios, plantean el uso de la fracción como cociente, sin llegar a identificar esta relación; c) dos parejas (P_{5-6}, P_{7-8}), en dos episodios, cuestionan el reparto, pero no distinguen entre el reparto total y el parcial.

Presentan una imposición cuando un alumno de la pareja (P_{1-2}) exige a su compañero que admita su planteamiento, omitiendo la diferencia entre el reparto total y el reparto parcial en una situación que no distribuye todas las unidades del conjunto.

Transforman su respuesta cuando la pareja (P_{5-6}) modifica sus conclusiones en torno al reparto, pero sin llegar a establecer que no se distribuyen todas las unidades del conjunto, no distinguiendo entre el reparto total y el parcial.

Muestran una síntesis cuando dos parejas (P_{5-6}, P_{7-8}), en dos episodios, simplifican el método que usan para establecer el reparto, sin llegar a diferenciar entre el reparto total y el total.

Eje Interaccional / **Eje Conceptual**	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo									
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P34-E79 P78-E160 P78-E164	P12-E32 P12-E35 P34-E80							P34-E77 P56-E116
Identificación de la fracción como cociente	P12-E30 P12-E36 P34-E76 P56-E114 P56-E115		P12-E31 P34-E81	P78-E161		P12-E34 P78-E162 P78-E163			P12-E33 P56-E112
Identificación de la fracción como razón									
Distinción entre reparto total y reparto parcial									
Comparación de fracciones									
Aplicación de la equivalencia de fracciones									
Aplicación de métodos de suma de fracciones									
Conexión entre lenguajes									
Uso de lenguaje no matemático	P56-E113(a)								
Uso de lenguaje matemático			P34-E78(a)						

Tabla 37. Síntesis de $I_2(B)$ para los episodios en $P_3(M_2)$

Siguiendo los resultados alcanzados, caracterizamos las producciones orales de las parejas al resolver el tercer problema (Tabla 37). Sintetizamos la aplicación de I_2(B) a los episodios de todas las parejas en M_2 y observamos que mejoran la comprensión de sus conclusiones cuando: a) dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, aclaran opciones de reparto al dar el número de unidades de los subconjuntos que constituyen, e identifican la relación parte-todo en contexto discreto; b) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, clarifica el número de subconjuntos de igual amplitud que obtienen, significando a la fracción como parte-todo en contexto discreto; c) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en cuatro episodios, aclaran la identificación de la fracción como cociente al explicitar, verbalmente, divisiones indicadas para mostrar las unidades del reparto; d) una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, realiza aclaraciones que significan a la fracción como cociente al dar los subconjuntos que forman parte del reparto.

Establecen acuerdos cuando: a) una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, realiza una reflexión en torno al número de elementos de los subconjuntos establecidos en el reparto, madurando el significado de la fracción como parte-todo en contexto discreto; b) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, pactan el número de subconjuntos que constituyen el reparto, identificando a la fracción como parte-todo en contexto discreto.

Muestran nuevos desarrollos, que complementan las conclusiones que habían obtenido, cuando dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$), en dos episodios, amplían las opciones de reparto, aportando nuevas maneras de repartir las unidades del conjunto siguiendo las restricciones del enunciado. Significan a la fracción como cociente al indicar algunas divisiones que realizan en su producción escrita.

Solo una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, muestra un cuestionamiento sobre el número de unidades que corresponden a uno de los subconjuntos que establece. A partir del desarrollo que responde a esta cuestión, significan a la fracción como cociente.

Dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en tres episodios, presentan una imposición cuando uno de sus alumnos exige a su compañero la admisión de sus propias conclusiones para validar las opciones de reparto.

Elaboran una síntesis cuando: a) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$), en dos episodios, simplifican el método que usan para establecer el reparto dando las unidades que constituyen cada subconjunto. Significan a la fracción como cociente al dividir las unidades del conjunto y al obtener diversas opciones de reparto; b) dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en dos episodios, identifican la relación parte-todo en contexto discreto al sintetizar qué subconjuntos establecen en el reparto.

Eje Interaccional / Eje Conceptual	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo									
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P34-E83 P78-E167								
Identificación de la fracción como cociente	P56-E118		P12-E39	P34-E84					
Identificación de la fracción como razón									
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P12-E40 P34-E85 P56-E119	P12-E37 P12-E42 P34-E82 P56-E117			P78-E166	P12-E41 P78-E169			P56-E120
Comparación de fracciones					P78-E168				
Aplicación de la equivalencia de fracciones									
Aplicación de métodos de suma de fracciones		P78-E165							
Conexión entre lenguajes									
Uso de lenguaje no matemático									
Uso de lenguaje matemático			P78-E170						

Tabla 38. Síntesis de I_2(B) para los episodios en P_4(M_2)

A partir de los resultados logrados, realizamos la caracterización de las producciones orales de las parejas al resolver el cuarto problema (Tabla 38). La síntesis de la aplicación de I_2(B) a los episodios de todas las parejas en M_2 indica que en P_4 pretenden mejorar la comprensión de sus conclusiones cuando: a) dos parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, aclaran el reparto; b) una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, obtiene el reparto a través de divisiones; c) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en tres episodios, aclaran la distinción entre el reparto total y el parcial al atender la implicación de más unidades de las disponibles.

Establecen acuerdos para reflexionar o madurar la determinación de sus conclusiones cuando; a) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$), en cuatro episodios, determinan que el reparto total y el parcial son diferentes; b) una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en un episodio, pacta el uso de la suma de fracciones para calcular el reparto en una situación que implica más unidades de las disponibles, haciendo uso de las fracciones unitarias del enunciado.

Solo una pareja ($P_{1\text{-}2}$), en un episodio, realiza una ampliación para mejorar las conclusiones que había elaborado en base al uso del significado de la fracción como cociente para obtener el reparto. Otra pareja ($P_{3\text{-}4}$), en un episodio, plantea interrogantes que cuestionan cómo usan a la fracción como cociente al calcular el reparto total, a partir de las fracciones unitarias relacionadas con los repartos parciales.

Presentan una disconformidad sobre una conclusión ya elaborada cuando: a) los alumnos de una pareja ($P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, están en desacuerdo cuando argumentan otras opciones de reparto desde el punto de vista de cada uno de los personajes. Muestran que comprenden las restricciones, que distinguen el reparto total del parcial, que comparan las fracciones de los repartos, pero no pactan opciones del reparto.

Se produce una imposición cuando un alumno de la pareja ($P_{1\text{-}2}$, $P_{7\text{-}8}$), en dos episodios, exige a su compañero que admita el reparto, siguiendo la distinción entre el reparto total y el parcial, al repartir más unidades de las totales.

Solo una pareja ($P_{5\text{-}6}$), en un episodio, sintetiza la forma de protagonizar el reparto desde el punto de vista de los personajes, diferenciando entre el reparto total y el parcial.

Eje Interaccional / **Eje Conceptual**	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo									
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto									
Identificación de la fracción como cociente									
(NO) Identificación de la fracción como razón	P12-E48 P34-E89 P56-E121 P78-E172 P78-E174	P12-E44 P34-E86 P34-E87 P56-E123 P78-E178	P78-E173	P12-E45 P34-E88 P78-E177	P12-E43 P12-E47 P56-E122 P78-E171 P78-E175 P78-E176				
Distinción entre reparto total y reparto parcial									
Comparación de fracciones									
Aplicación de la equivalencia de fracc.									
Aplicación de métodos de suma de fracciones									
Conexión entre lenguajes									
Uso de lenguaje no matemático									
Uso de lenguaje matemático	P12-E46								

Tabla 39. Síntesis de $I_2(B)$ para los episodios en $P_5(M_2)$

Los resultados que obtenemos tienen que ver con la caracterización de las producciones orales de las parejas al resolver el quinto problema (Tabla 39). La síntesis de la aplicación de I_2(B) a los episodios de todas las parejas en M_2 indica que en P_5 no identifican a la fracción como razón. En veinte episodios, las parejas desarrollan aclaraciones, muestran acuerdos o desacuerdos, elaboran ampliaciones de sus conclusiones y plantean interrogantes, pero omiten el significado de la fracción como razón.

Combinaciones bidimensionales

Debido a la complejidad asociada al análisis de las producciones orales, al combinar aspectos que caracterizan a los tres ejes, indagamos en torno a las combinaciones bidimensionales entre ejes (eje conceptual versus eje estructural, eje conceptual versus eje interaccional). Sintetizamos la información aportada por I_2(A) e I_2(B) para el conjunto de datos orales, para caracterizar los episodios de forma bidimensional y analizar características comunes. Realizamos un recuento de todos los episodios atendiendo a cada combinación (Tablas 40 y 41). Marcamos de color amarillo las celdas que contienen más de tres episodios para elaborar códigos empíricos bidimensionales desde dos perspectivas diferenciadas, desestimando las relaciones que implican un desajuste entre los datos y las garantías. La tabla del conjunto de códigos empíricos bidimensionales aparece en el Anexo 11.

Eje Estructural / **Eje Conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía matemática	Afirmación con garantía extramatemática	Afirmación con respaldo matemático	Afirmación con respaldo extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo		**7**	**7**	**1**	**3**	**3**
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	**3**	**6**	**10**	**4**	**3**	**10**
Identificación de la fracción como cociente	**9**		**5**		**7**	**4**
Identificación de la fracción como razón	**16**					
Distinción entre reparto total y reparto parcial	**12**	**2**		**5**	**3**	**1**
Comparación de fracciones		**1**	**6**		**3**	**1**
Aplicación de la equivalencia de fracciones			**1**	**1**	**5**	**2**
Aplicación de métodos de suma de fracciones			**3**		**9**	
Uso de lenguaje no matemático	**1**		**1**		**1**	
Uso de lenguaje matemático	**4**	**1**	**8**	**2**	**5**	**3**

Tabla 40. Recuento de episodios (eje conceptual vs. eje estructural)

Establecemos 15 códigos empíricos bidimensionales para relacionar el eje conceptual con el eje estructural: a) afirmar, sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; b) afirmar, con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; c) afirmar, sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; d) afirmar, con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; e) afirmar, con garantía extramatemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; f) afirmar, con respaldo extramatemático, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; g) afirmar, con garantía matemática, la identificación de la fracción como cociente; h) afirmar, con respaldo matemático, la identificación de la fracción como cociente; i) afirmar, con respaldo extramatemático, la identificación de la fracción como cociente; j) afirmar, con garantía extramatemática, la distinción entre reparto total y reparto parcial; k) afirmar, con garantía matemática, la comparación de fracciones; l) afirmar, con respaldo matemático, la equivalencia de fracciones; m) afirmar, con respaldo matemático, la aplicación de métodos de suma de fracciones; n) afirmar, con garantía matemática, priorizando el uso del lenguaje matemático; o) afirmar, con respaldo matemático, priorizando el uso del lenguaje matemático.

Eje Interaccional / **Eje Conceptual**	Aclaración	Acuerdo	Ampliación	Cuestionamiento	Desacuerdo	Imposición	Interrupción	Modificación	Síntesis
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	**7**	**5**	**1**	**3**	**1**	**2**		**1**	
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	**10**	**14**	**3**		**2**	**2**	**1**		**4**
Identificación de la fracción como cociente	**7**		**3**	**2**		**3**			**2**
Identificación de la fracción como razón									
Distinción entre reparto total y reparto parcial	**3**	**4**			**1**	**2**			**1**
Comparación de fracciones		**4**	**1**	**1**	**2**				**3**
Aplicación de la equivalencia de fracciones	**5**	**1**	**2**		**1**				
Aplicación de métodos de suma de fracciones	**3**	**2**	**4**	**1**	**1**				**1**
Uso de lenguaje no matemático	**2**	**1**							
Uso de lenguaje matemático	**5**	**1**	**8**	**3**	**1**	**1**		**2**	**2**

Tabla 41. Recuento de episodios (eje conceptual vs. eje interaccional)

Determinamos 12 códigos empíricos bidimensionales para conectar el eje conceptual con el eje interaccional: a) aclarar la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; b) acordar la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; c) aclarar la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; d) acordar la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; e) sintetizar la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; f) aclarar la identificación de la fracción como cociente; g) acordar la distinción entre reparto total y reparto parcial; h) acordar la comparación de fracciones; i) aclarar la aplicación de la equivalencia de fracciones; j) ampliar la aplicación de métodos de suma de fracciones; k) aclarar priorizando en la resolución el uso del lenguaje matemático para expresar la fracción del reparto; l) ampliar priorizando en la resolución el uso del lenguaje matemático para expresar la fracción del reparto.

A continuación, confeccionamos una tabla de doble entrada para contabilizar y examinar qué episodios atienden a esta nueva codificación (Tablas 42 y 43). En sus columnas, situamos el código empírico bidimensional, los episodios de cada pareja asociados con la codificación establecida y el total de episodios contabilizado. Cada fila contempla aspectos particulares de cada combinación bidimensional entre ejes. Establecemos una tercera reducción de datos para conectar las tres perspectivas que definen a los ejes principales. Elaboramos temas más refinados para determinar qué aspectos conceptuales, estructurales e interaccionales permiten caracterizar las producciones orales de las parejas de alumnos y obtener similitudes entre las intervenciones de los alumnos.

Código empírico bidimensional eje conceptual vs. eje estructural	**Episodios / parejas**				**Total episodios**
	$P_{1\text{-}2}$	**$P_{3\text{-}4}$**	**$P_{5\text{-}6}$**	**$P_{7\text{-}8}$**	
Afirmar, sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E3-P1(b1)	E55-P1(b) E56-P1(b) E69-P1(b)	E96-P1(b)	E134-P1(c) E137-P1(c)	**7**
Afirmar, con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E5-P1(b) E7-P1(b)	E52-P1(a)	E95-P1(b)	E128-P1(b) E130-P1(b) E140-P1(c)	**7**
Afirmar, sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E15-P1(f)	E58-P1(d) E59-P1(d) E71-P1(d) E77-P3(b)	E116-P3(b)		**6**
Afirmar, con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E11-P1(d) E32-P3(a) E35-P3(b)	E65-P1(f) E73-P1(f) E79-P3(a) E80-P3(b)	E100-P1(d) E101-P1(d)	E160-P3(a)	**10**
Afirmar, con garantía extramatemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E16-P1(f)			E131-P1(b) E144-P1(d) E167-P4	**4**
Afirmar, con respaldo extramatemático, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E1-P1(a) E17-P1(a)	E83-P4	E90-P1(a) E91-P1(a)	E124-P1(a) E125-P1(a) E127-P1(a) E149-P1(f) E150-P1(f)	**10**
Afirmar, con garantía matemática, la identificación de la fracción como cociente	E30-P3(a) E34-P3(b)	E76-P3(a)		E162-P3(a) E163-P3(b)	**5**
Afirmar, con respaldo matemático, la identificación de la fracción como cociente	E31-P3(a) E33-P3(a) E39-P4	E84-P4	E114-P3(a) E115-P3(a)	E161-P3(a)	**7**

Código empírico bidimensional eje conceptual vs. eje estructural	Episodios / parejas				Total episodios
	P_{1-2}	P_{3-4}	P_{5-6}	P_{7-8}	
Afirmar, con respaldo extramatemático, la identificación de la fracción como cociente		E81-P3(a)	E112-P3(a) E118-P4	E151-P2	4
Afirmar, con garantía extramatemática, la distinción entre reparto total y reparto parcial	E42-P4	E85-P4	E119-P4 E120-P4	E166-P4	5
Afirmar, con garantía matemática, la comparación de fracciones		E54-P1(a) E57-P1(c) E70-P1(c)	E98-P1(c)	E135-P1(d) E146-P1(e)	6
Afirmar, con respaldo matemático, la equivalencia de fracciones	E13-P1(e)	E60-P1(e) E68-P1(a) E72-P1(e)		E133-P1(b)	5
Afirmar, con respaldo matemático, la aplicación de métodos de suma de fracciones	E12-P1(e) E20-P1(d) E21-P1(d)		E99-P1(d)	E126-P1(a) E142-P1(d) E143-P1(d) E147-P1(e) E165-P4	9
Afirmar, con garantía matemática, priorizando el uso del lenguaje matemático	E4-P1(b)	E66-P1(f)		E129-P1(b) E139-P1(c) E141-P1(c) E145-P1(d) E170-P4 E173-P5	8
Afirmar, con respaldo matemático, priorizando el uso del lenguaje matemático	E18-P1(b)	E62-P1(e) E64-P1(f)	E93-P1(b) E103-P1(e)		5

Tabla 42. Episodios y códigos bidimensionales (conceptual vs. estructural)

Código empírico bidimensional eje conceptual vs. eje interaccional	Episodios / parejas				Total episodios
	P_{1-2}	P_{3-4}	P_{5-6}	P_{7-8}	
Aclarar la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E5-P1(b)	E55-P1(b) E69-P1(b)	E95-P1(b)	E128-P1(b) E134-P1(c) E137-P1(c)	7
Acordar la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E1-P1(a) E7-P1(b)	E56-P1(b)	E92-P1(b) E96-P1(b)		5
Aclarar la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto		E51-P1(a) E79-P3(a) E83-P4	E91-P1(a) E101-P1(d)	E144-P1(d) E150-P1(f) E160-P3(a) E164-P3(b) E167-P4	10
Acordar la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E1-P1(a) E15-P1(f) E32-P3(a) E35-P3(b)	E49-P1(a) E58-P1(d) E59-P1(d) E65-P1(f) E80-P3(b)	E90-P1(a) E100-P1(d) E105-P1(e)	E124-P1(a) E149-P1(f)	14
Sintetizar la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto		E71-P1(d) E73-P1(f) E77-P3(b)	E116-P3(b)		4
Aclarar la identificación de la fracción como cociente	E30-P3(a) E36-P3(b)	E76-P3(a)	E114-P3(a) E115-P3(a) E118-P4	E151-P2	7
Acordar la distinción entre reparto total y reparto parcial	E37-P4 E42-P4	E82-P4	E117-P4		4
Acordar la comparación de fracciones	E9-P1(c)	E57-P1(c)	E98-P1(c)	E135-P1(d)	4
Aclarar la aplicación de la equivalencia de fracciones	E13-P1(e) E22-P1(e)	E60-P1(e) E72-P1(e)		E136-P1(d)	5
Ampliar la aplicación de métodos de suma de fracciones	E20-P1(d)			E143-P1(d) E147-P1(e) E148-P1(e)	4

Código empírico bidimensional eje conceptual vs. eje interaccional	Episodios / parejas				Total episodios
	P_{1-2}	P_{3-4}	P_{5-6}	P_{7-8}	
Aclarar utilizando en la resolución el lenguaje matemático para expresar la fracción del reparto	E4-P1(b) E18-P1(b) E46-P5	E64-P1(f)	E103-P1(e)		5
Ampliar utilizando en la resolución el lenguaje matemático para expresar la fracción del reparto		E78-P3(a)	E104-P1(e)	E139-P1(c) E145-P1(d) E153-P2 E159-P2 E170-P4 E173-P5	8

Tabla 43. Episodios y códigos bidimensionales (conceptual vs. interaccional)

Combinaciones tridimensionales

Elaboramos códigos empíricos tridimensionales para cruzar aspectos que definen, al mismo tiempo, a los tres ejes de análisis de forma conjunta a un mínimo de dos episodios. Para ejemplificar la forma de conectar los ejes, tomamos los episodios E_{55}-P_1(b) y E_{69}-P_1(b) que aparecen en las tablas anteriores. En primer lugar, advertimos que el código empírico bidimensional (conceptual vs. estructural) que caracteriza a estos episodios es: *aclarar la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo.* Detectamos que el código empírico bidimensional (conceptual vs. interaccional) que los define es: *afirmar sin garantía la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo.* En segundo lugar, para realizar un análisis más exhaustivo, combinamos las tres perspectivas para elaborar una combinación tridimensional: *aclarar mediante una afirmación sin garantía la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo* (Figura 21).

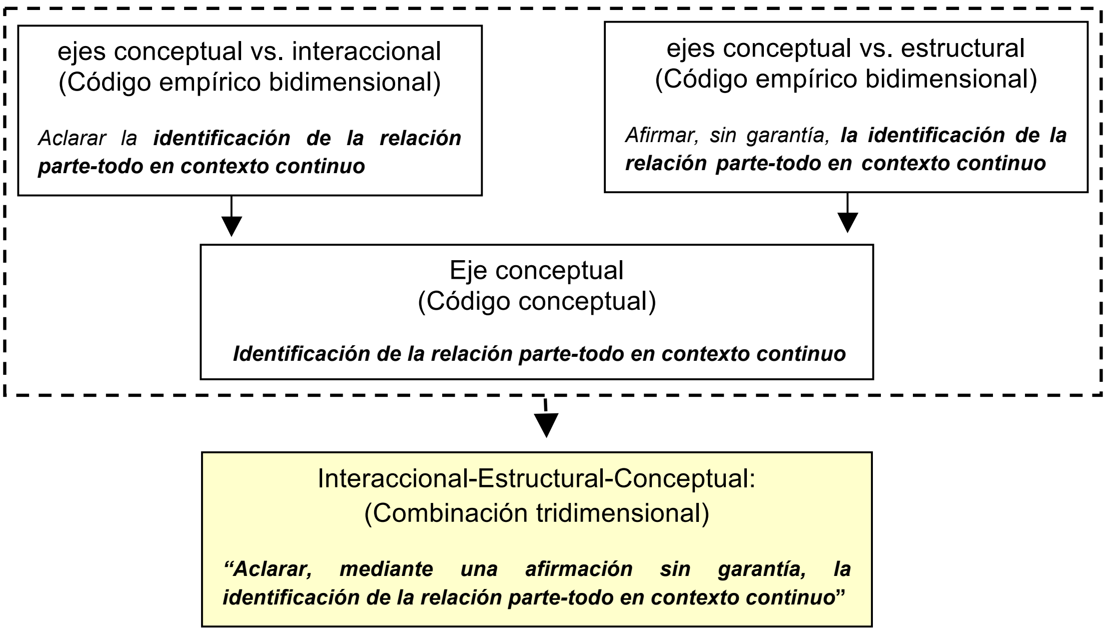


Figura 21. Formación de un código tridimensional

En total, establecemos 16 códigos empíricos tridimensionales para acotar los temas a analizar: a) aclarar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; b) aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; c) acordar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo; d) aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; e) aclarar, mediante una afirmación con garantía extramatemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; f) aclarar, mediante una afirmación con respaldo extramatemático, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; g) acordar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; h) acordar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; i) acordar, mediante una afirmación con respaldo extramatemático, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; j) sintetizar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto; k) aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la fracción como cociente; l) aclarar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la identificación de la fracción como cociente; m) aclarar, mediante una afirmación con respaldo extramatemático, la identificación de la fracción como cociente; n) acordar, mediante una afirmación con garantía matemática, la comparación de fracciones; o) aclarar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la equivalencia de fracciones; p) ampliar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la aplicación de métodos de suma de fracciones.

Aplicación de I_3

Usamos la combinación tridimensional establecida para analizar las producciones orales de las parejas aplicando I_3. Pretendemos abordar el conjunto de episodios desde una perspectiva tridimensional, intentando lograr patrones que caractericen las formas de interactuar y de participar en el aula de matemáticas. En las tablas 44-47, ilustramos algunos ejemplos de aplicación de I_3 para episodios de la pareja $P_{1\text{-}2}$, conectando con ejemplificaciones anteriores.

Episodio	Relación entre ejes	Usos de la fracción	Procesos de interacción	Tipos de estructura de los argumentos
E_5-P_1(b)	Aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	(47.1) (A_2) ***…a cada nen… li tocarà… un vuitè… de pizza… Margarita.*** (51.1) (A_2) ***...cada nen per un vuitè de pizza Margarita coma, ja que... aquesta... està dividida...***	(47.1) (A_2) ***…a cada nen… li tocarà… un vuitè… de pizza… Margarita.*** (48.1) (A_1) ***Bueno de totes les pizzes.*** (49.1) (A_2) ***Fica pizza Margarita.*** (50.1) (A_1) ***Ah! Vale***	(51.1) (A_2) ***Per això (##)... cada nen per un vuitè de pizza Margarita coma, ja que... aquesta... està dividida...*** (G): A_2 relee la parte escrita y sigue escribiendo. A_1 observa. (52.1) (A_1) ***En vuit trossos.*** (53.1) (A_2) ***En vuitens, no? queda millor en vuitens o en trossos?*** (G): A_2 deja de escribir y plantea una cuestión. (54.1) (A_1) ***En vuitens.*** (G): A_2 vuelve a escribir. (55.1) (A_2) ***En vuitens... i són vuit amics.*** (G): A_2 termina de escribir y A_1 observa.

Tabla 44. Aplicación de I_3 al episodio E_5-P_1(b) de $P_{1\text{-}2}$

Del análisis de E_5 se desprende que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ identifican la relación parte-todo en contexto continuo en P_1(b) a través de una aclaración y mediante una afirmación con garantía matemática (Tabla 44). Usan la fracción unitaria del reparto para designar las partes de la unidad (47.1), significando a la fracción como parte de la unidad al mostrar la cantidad que representa al (51.1) reparto. Utilizan el lenguaje matemático para mejorar la comprensión de sus conclusiones. A_1 realiza una afirmación que no contempla al reparto (48.1) y A_2 aclara la intervención de su compañero (49.1). No elaboran directamente sus conclusiones ya que desarrollan garantías matemáticas (51.1) y (55.1) para explicar los motivos que les conducen a realizar el reparto que establecen. Gracias a las intervenciones de A_2, apreciamos que A_1 identifica la relación parte-todo en contexto continuo y mejora el uso del lenguaje al desestimar el lenguaje no matemático y utilizar el lenguaje matemático para expresar el reparto.

Episodio	Relación entre ejes	Usos de la fracción	Procesos de interacción	Tipos de estructura de los argumentos
E_{15}-P_1(f)	Acordar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	(150.1) (A_2) **A vere, si a la Marta, que també forma part de la colla no li agrada gens la pizza quatre formatges i no vol canviar cap tall de pizza amb la resta d'amics, quina de les dues opcions de repartiment de les pizzes creus que li és més favorable?** (151.1) (A_1) **La de la Sara!** (152.1) (A_2) **La Sara, perquè pot menjar (I)**	(151.1) (A_1) **La de la Sara!** (152.1) (A_2) **La Sara, perquè pot menjar (I)** (153.1) (A_1) **Pot canviar (##)...perquè la d'en Marc.** (G): A_2 empieza a redactar. (154.1) (A_2) **La de (##), la de la Sara... canviarem el ja que...**	(154.1) (A_2) **La de (##), la de la Sara... canviarem el ja que...** (155.1)(A_1) **Perquè...** (156.1) (A_1 y A_2) **Perquè, la de la Sara, perquè... podrà... perquè podrà menjar...**

Tabla 45. Aplicación de I_3 al episodio E_{15}-P_1(f) de $P_{1\text{-}2}$

A partir del análisis de $E_{15,}$ apreciamos que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ identifican la relación parte-todo en contexto discreto en P_1(f) a través de un acuerdo y mediante una afirmación sin garantía (Tabla 45). Enuncian la elección del reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles (151.1) y (152.1), basándose en las restricciones del enunciado y en la interpretación de las dos opciones de reparto (150.1). Acuerdan priorizar el uso de uno de los repartos (151.1), (152.1), (154.1) y la forma de redactar la respuesta escrita de la pareja (154.1). Sin embargo, no elaboran garantías matemáticas que respalden la elección, ya que superponen sus intervenciones e incluso se produce alguna interrupción a la hora de explicar o justificar la respuesta (152.1), (153.1).

Episodio	Relación entre ejes	Usos de la fracción	Procesos de interacción	Tipos de estructura de los argumentos
E_{30}-P_3(a)	Aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la fracción como cociente	(244.1) (A_1) **Si fossis l'encarregat del restaurant on tindrà lloc el banquet, quantes persones podries col·locar a cada taula amb la condició que hi hagin més de 4 i menys de 20 persones? Jo, clar que he posat com a primera opció és 180 entre 18 i m'ha donat 10 que he posat que són les taules.**	(245.1) (A_2) **És l'últim que he posat jo… Divuit persones per taula i 10 taules.** (246.1) (A_1) **Jo he fet, amb aquesta a a... a fora cinc opcions més.** (247.1) (A_2) **A vere jo he ficat, tenint en compte que te que estar, més de quatre i menys de vint, ostres! jo pensava que més de deu. Amb vuit també es podria…**	(244.1) (A_1)… **Jo, clar que he posat com a primera opció és 180 entre 18 i m'ha donat 10 que he posat que són les taules.** (247.1) (A_2) **A vere… tenint en compte que te que estar, més de quatre i menys de vint, ostres! jo pensava que més de deu. Amb vuit també es podria…**

Tabla 46. Aplicación de I_3 al episodio E_{30}-P_3(a) de $P_{1\text{-}2}$

Siguiendo el análisis de $E_{30,}$ advertimos que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ identifican a la fracción como cociente en P_3(a) mediante una aclaración y a través de una afirmación con garantía matemática (Tabla 46). Después de plantear la situación que presenta el enunciado, A_1 elabora argumentos matemáticos que significan a la fracción como cociente. Explica el reparto a través de garantías interpretando a la fracción como el resultado de una situación de reparto a partir de un proceso de división (244.1). A_1 da el tamaño de las partes resultantes al distribuir todas las unidades *personas* en subconjuntos de igual amplitud *mesas* (245.1). Además, aclara la existencia de diversas formas de distribuir las unidades del conjunto (246.1). A_2 enuncia las restricciones del enunciado y aclara que había considerado de forma errónea los condicionantes que definen el reparto (247.1), modificando sus conclusiones iniciales. Gracias a las intervenciones de $A_{1,}$ advertimos que A_2 identifica los repartos con restricción.

Episodio	Relación entre ejes	Usos de la fracción	Procesos de interacción	Tipos de estructura de los argumentos
E_{13}-P_1(e)	Aclarar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la equivalencia de fracciones	(135.1) (A_2) ***Una pizza es equivalente a cuatro cuartos…*** (138.1) (A_2) ***O sea, aquí sería cuatro cuartos más un octavo cinco octavos y aquí un octavo, dos octavos, tres octavos, cuatro octavos, y cinco octavos. Se comen lo mismo…***	(131.1) (A_2) ***¿Lo entiendes?*** (132.1) (A_1) ***No.*** (133.1) (A_2) ***Mira, esta mitad.*** (134.1) (A_1) ***Sí.*** (135.1) (A_2) ***Una pizza es equivalente a cuatro cuartos, ¿me entiendes, verdad?*** (138.1) (A_2) ***O sea, aquí sería cuatro cuartos más un octavo cinco octavos y aquí un octavo, dos octavos, tres octavos, cuatro octavos, y cinco octavos. Se comen lo mismo, ¿claro?*** (139.1) (A_1) ***Ahora sí.*** (140.1) (A_2) ***Vale.***	(135.1) (A_2) ***Una pizza es equivalente a cuatro cuartos, ¿me entiendes, verdad?*** (G): A_2 señala media pizza del reparto de Sara y luego le señala media pizza del reparto de Marc, y le cuantifica el número cuatro con los dedos que le muestra a su compañera. (138.1) (A_2) ***O sea aquí sería cuatro cuartos más un octavo cinco octavos y aquí un octavo, dos octavos, tres octavos, cuatro octavos, y cinco octavos. Se comen lo mismo, ¿claro?*** (G): A_2 señala las pizzas del reparto de Sara y termina observando a su compañera. A continuación, señala las pizzas del reparto de Marc y vuelve a mirar a A_1.

Tabla 47. Aplicación de I_3 al episodio E_{13}-P_1(e) de $P_{1\text{-}2}$

El análisis de E_{13} muestra que los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ usan la equivalencia de fracciones en P_1(e) a través de una aclaración y mediante una afirmación con respaldo matemático (Tabla 47). A_2 usa la unidad y la fracción unitaria del reparto para mostrar que los repartos son equivalentes (135.1), (138.1). Además, A_2 insiste en comprobar si A_1 comprende la equivalencia establecida (131.1), (135.1), (138.1). Debido a las intervenciones de A_1, su compañero estima pertinente aclarar, en todo momento, de forma verbal, los desarrollos que elabora. A_2 usa la representación gráfica del enunciado para elaborar argumentos consistentes que verifiquen que los dos repartos son equivalentes. Este alumno compara las partes de cada reparto para mostrar a A_1 que representan la misma cantidad de *pizza*. Gracias a los respaldos matemáticos que elabora A_2 en diversas intervenciones (135.1), (138.1), mejora la comprensión de A_1 en torno a la resolución del primer problema.

Síntesis de la aplicación de I_3

Relación entre ejes	Episodios
Aclarar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E55-P1(b) E69-P1(b) E134-P1(c) E137-P1(c)
Aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E5-P1(b) E95-P1(b) E128-P1(b)
Acordar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	E56-P1(b) E96-P1(b)
Aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E79-P3(a) E101-P1(d) E160-P3(a)
Aclarar, mediante una afirmación con garantía extramatemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E144-P1(d) E167-P4
Aclarar, mediante una afirmación con respaldo extramatemático, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E83-P4 E91-P1(a) E150-P1(f)
Acordar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E15-P1(f) E58-P1(d) E59-P1(d)
Acordar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E32-P3(a) E35-P3(b) E65-P1(f) E80-P3(b) E100-P1(d)
Acordar, mediante una afirmación con respaldo extramatemático, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E1-P1(a) E90-P1(a) E124-P1(a) E149-P1(f)
Sintetizar, mediante una afirmación sin garantía, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	E71-P1(d) E77-P3(b) E116-P3(b)
Aclarar, mediante una afirmación con garantía matemática, la identificación de la fracción como cociente	E30-P3(a) E36-P3(b)
Aclarar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la identificación de la fracción como cociente	E114-P3(a) E115-P3(a)
Aclarar, mediante una afirmación con respaldo extramatemático, la identificación de la fracción como cociente	E118-P4 E151-P2
Acordar, mediante una afirmación con garantía matemática, la comparación de fracciones	E57-P1(c) E98-P1(c) E135-P1(d)
Aclarar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la equivalencia de fracciones	E13-P1(e) E60-P1(e) E72-P1(e)
Ampliar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la aplicación de métodos de suma de fracciones	E20-P1(d) E143-P1(d) E147-P1(e)

Tabla 48. Síntesis de I_3 para todos los episodios seleccionados

A modo de síntesis, presentamos, mediante una tabla, las 16 combinaciones tridimensionales establecidas y todos los episodios que satisfacen cada combinación, resumiendo así la aplicación del instrumento I_3 (Tabla 48). En general, aparecen episodios de las cuatro parejas participantes en la resolución de los problemas de la secuencia. En múltiples ocasiones, atribuimos, a cada uno de los códigos, episodios de diversas parejas en la resolución de un mismo problema o apartado. Por ejemplo, los episodios que asociamos con el código tridimensional *aclarar mediante una afirmación sin garantía la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo* están relacionados con la resolución de

P_1(b) y P_1(c). O, por ejemplo, los episodios identificados con el código tridimensional *aclarar, mediante una afirmación con respaldo matemático, la identificación de la fracción como cociente* se relacionan con las respuestas de P_3(a). Este hecho provoca que, a la hora de establecer temas más refinados, obtengamos combinaciones entre ejes que resaltan comportamientos similares entre las diversas parejas, aportando nuevos resultados a la investigación.

4.2.2.2. Análisis de las producciones escritas en pareja

Aplicamos el cuarto instrumento de análisis I_4 a las veinte respuestas escritas que se elaboran en el transcurso de la interacción alumno-alumno. Como punto de partida, tomamos las producciones escritas individuales iniciales de los alumnos, destacando los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos que las caracterizan. Pretendemos conectar la respuesta escrita de cada alumno con la producción oral y escrita que desarrollan los alumnos cuando resuelven los problemas en pareja. En las celdas de I_4, situamos ejemplos extraídos de los datos para analizar los ejes conceptual, estructural e interaccional. Para cada tabla, solo consideramos las celdas de los códigos de los que se tiene información. Ejemplificamos parte del análisis realizado a las producciones escritas de las parejas tal y como mostramos en las tablas 49-51.

A partir del análisis general de las producciones en pareja, se concluye qué usos de la fracción utilizan en el proceso resolutivo en conexión con los procesos de interacción y con los tipos de estructura argumentativa que desarrollan en sus respuestas. De esta manera, caracterizamos conjuntamente los rasgos conceptuales, estructurales e interaccionales de las producciones orales y escritas en pareja que elaboran los alumnos en M_2.

Aplicación de I_4

Resolución de: P_1(a) **Alumnos de la pareja:** A_1 y A_2			
Producción individual inicial de A_1		**Producción individual inicial de A_2**	
La d'en Marc. Perquè així tothom probarà un tros de cada pizza.		El d'en Marc m'agrada més, ja que cada nen menja un octau de cada pizza. en canvi, amb el repartiment de la Sara no li toca un octau a cadascú, sino que sol dos nens podran ~~gaudi~~ gaudir de la pizza Margarita, dos nens de la Hawaiana, dos de la de quatre formatges i dos de la quatrestacions, però cada nen tindrà un quart de la d'espinac.	
Eje conceptual	Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto Uso del lenguaje no matemático	**Eje conceptual**	Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto Uso del lenguaje matemático-verbal
Eje estructural	Afirmación con garantía extramatemática	**Eje estructural**	Afirmación con respaldo extramatemático

Episodios relacionados con la resolución en pareja

Episodio	**Eje conceptual**	**Eje estructural**	**Eje interaccional**
E_1	Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	Afirmación con respaldo extramatemático	Acuerdo
E_2	Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	Afirmación con respaldo extramatemático	Acuerdo
E_{17}	Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	Afirmación con respaldo extramatemático	Ampliación

Producción en pareja
(Redactada por A_2)

Ens agrada més la d'en Marc perquè tothom pot probar un octau de pisa i d'aquesta manera tothom pot probar un tros de pizza, però en canvi amb la repartició de la Sara hi haurà gent que no pogui probar una pizza que li agradi, ja que li tocarà una meitat d'una pizza que esculli, i un octau d'espinacs, però si li agrada un altre

Eje estructural / **Eje conceptual**	Afirmación con respaldo Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo y discreto	*Nos gusta más la de Marc porque todos pueden probar un octavo de pizza y de esta manera todos pueden probar un trozo de pizza, pero en cambio con el reparto de Sara habrá gente que no pueda probar una pizza que le guste ya que le tocará una mitad de una pizza que escoja y un octavo de espinacas, pero si le gusta otra pizza no la probará.*
Conexión entre lenguajes y/o registros	*un octavo de pizza,*  *, un trozo de pizza una mitad ,* 
Uso del lenguaje no matemático	*un trozo*
Uso del lenguaje matemático-verbal	*un octavo de pizza, una mitad*

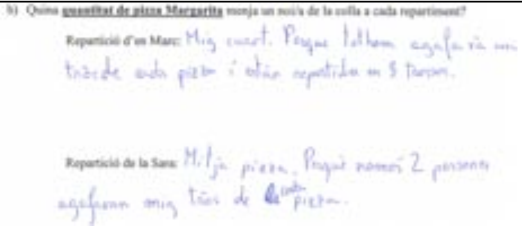
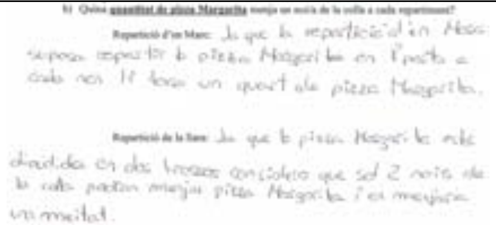
Tabla 49. Aplicación de I_4 a la producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ en P_1(a)

La producción escrita elaborada por A_1 y A_2 cuando interactúan para resolver P_1(a) es el resultado de los acuerdos que establecen en los episodios E_1 y E_2, y de la ampliación que realizan en E_{17} (Tabla 49).

Cada alumno se apoya en su respuesta individual inicial (afirmación con garantía extramatemática en el caso de A_1 y afirmación con respaldo extramatemático en la resolución de A_2) para identificar la relación parte-todo en contexto continuo o discreto mediante la elaboración de respaldos extramatemáticos. En E_1 y E_2 reflexionan y maduran la determinación de sus planteamientos y establecen de forma conjunta sus conclusiones en pareja. En la revisión que realizan en E_{17} el alumno A_2 da nuevos argumentos que complementan la respuesta en pareja.

El análisis de la producción escrita que elabora $P_{1\text{-}2}$ en P_1(a) muestra que priorizan el uso del reparto equitativo. Conectan el lenguaje matemático-verbal y gráfico del enunciado con el lenguaje matemático-verbal y no matemático usado en sus producciones individuales iniciales. Elaboran garantías y respaldos extramatemáticos para significar a la fracción como parte-todo en contexto discreto: *Nos gusta más la de Marc porque todos pueden probar un octavo de pizza y de esta manera todos pueden probar un trozo de pizza, pero en cambio con el reparto de Sara habrá gente que no pueda probar una pizza que le guste ya que le tocará una mitad de una pizza que escoja y un octavo de espinacas, pero si le gusta otra pizza no la probará.*

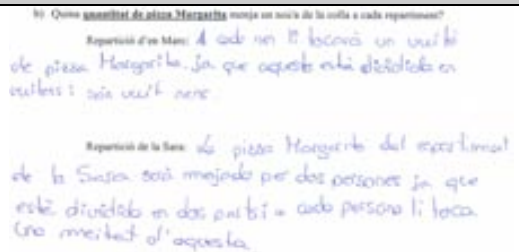
En esta ocasión, A_2 es el encargado de redactar la producción escrita de la pareja, basándose en su propia producción individual inicial. Además, dirige la interacción que tiene lugar, tal y como muestran los tres episodios seleccionados (E_1, E_2 y E_{17}). Este alumno adopta un papel protagonista, tanto en la producción oral como escrita que elabora la pareja $P_{1\text{-}2}$.

Resolución de: P_1(b) Alumnos de la pareja: A_1 y A_2			
Producción individual inicial de A_1		**Producción individual inicial de A_2**	
			
Eje conceptual	Identificación de la relación parte-todo en un contexto continuo Uso del lenguaje no matemático y matemático-verbal	**Eje conceptual**	Identificación de la relación parte-todo en un contexto continuo Uso del lenguaje no matemático y matemático-verbal
Eje estructural	Desajustes entre datos y garantía y afirmación con respaldo matemático	**Eje estructural**	Afirmación con respaldo matemático

Episodios relacionados con la resolución en pareja

Episodio	Eje conceptual	Eje estructural	Eje interaccional
E_3	Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	Afirmación sin garantía	Imposición
E_4	Uso del lenguaje matemático-gráfico	Afirmación con garantía matemática	Aclaración
E_5	Identificación de la fracción como cociente	Afirmación con garantía matemática	Aclaración
E_6	Uso del lenguaje no matemático	Afirmación con garantía matemática	Acuerdo
E_7	Identificación de la fracción como cociente	Afirmación con garantía matemática	Acuerdo
E_{18}	Uso del lenguaje matemático-verbal	Afirmación con respaldo matemático	Aclaración

Producción en pareja
(Redactada por A_2)



Eje conceptual \ Eje estructural	Afirmación con respaldo Matemático
Identificación de la relación parte-todo en un contexto continuo	*Reparto de Marc: A cada niño le tocará un octavo de pizza Margarita, ya que esta está dividida en octavos y son ocho niños. Reparto de Sara: La pizza Margarita del reparto de Sara será comida por dos personas ya que está dividida en dos partes y a cada persona le toca una mitad de ésta.*
Identificación de la fracción como cociente	*…está dividida en octavos…está dividida en dos partes…*
Conexión entre lenguajes y/o registros	*dos partes, una mitad ,* 
Uso del lenguaje no matemático	*dos partes*
Uso del lenguaje matemático verbal	*un octavo, una mitad*

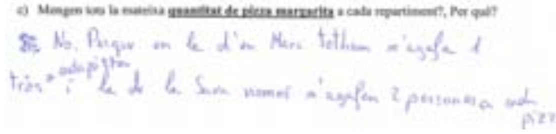
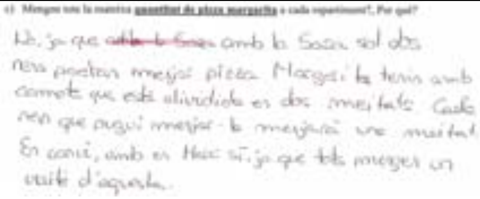
Tabla 50. Aplicación de I_4 a la producción escrita de P_{1-2} en P_1(b)

La producción escrita elaborada por A_1 y A_2 cuando interactúan para resolver P_1(b) es el resultado de la imposición que establece A_2 en E_3, de sus aclaraciones en E_4 y E_5, de los acuerdos constituidos en E_6 y E_7 y de la aclaración que realiza A_2 en E_{18} (Tabla 50).

De nuevo, cada alumno recurre a su respuesta individual inicial (desajuste entre datos y garantía y afirmación con respaldo matemático al resolver A_1 y afirmación con respaldo matemático cuando resuelve A_2) para identificar la relación parte-todo en contexto continuo a través de una afirmación con respaldo matemático. Sin embargo, a medida que interactúan en E_3 percibimos que A_2 exige la adopción de sus conclusiones elaboradas de forma individual. Debido a los desajustos elaborados por A_1 en la etapa inicial, A_2 intenta razonar sus conclusiones en E_4 y E_5. A_1 acepta los desarrollos que indica su compañero. En E_7 y E_8 los alumnos establecen acuerdos para justificar su respuesta.

El análisis de la producción escrita que elabora $P_{1\text{-}2}$ en P_1(b) indica que saben establecer la cantidad de unidad asociada a los dos repartos. Identifican la relación parte-todo en contexto continuo al dar la fracción de cada reparto mediante una afirmación con respaldo matemático: *Reparto de Marc: A cada niño le tocará un octavo de pizza Margarita, ya que esta está dividida en octavos y son ocho niños. Reparto de Sara: La pizza Margarita del reparto de Sara será comida por dos personas ya que está dividida en dos partes y a cada persona le toca una mitad de ésta.* Mejoran el uso del lenguaje al omitir el lenguaje no matemático.

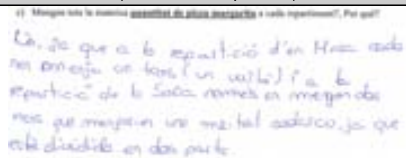
Una vez más, A_2 se encarga de escribir la producción escrita de la pareja, basándose en su propia producción individual inicial y omitiendo los desajustes iniciales de su compañero. Este alumno vuelve a dirigir la interacción que tiene lugar, tal y como muestran los episodios seleccionados, adoptando un papel protagonista en la producción oral y escrita de esta pareja.

Resolución de: $P_1(c)$ — **Alumnos de la pareja:** A_1 y A_2			
Producción individual inicial de A_1		**Producción individual inicial de A_2**	
			
Eje conceptual	Comparación de fracciones Uso del lenguaje no matemático	**Eje conceptual**	Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo Comparación de fracciones Uso del lenguaje matemático-verbal
Eje estructural	Afirmación con garantía matemática	**Eje estructural**	Afirmación con respaldo matemático

Episodios relacionados con la resolución en pareja

Episodio	**Eje conceptual**	**Eje estructural**	**Eje interaccional**
E_8	Comparación de fracciones	Afirmación sin garantía	Desacuerdo
E_9	Comparación de fracciones	Afirmación con respaldo matemático	Acuerdo
E_{19}	Comparación de fracciones	Afirmación con respaldo matemático	Síntesis

Producción en pareja
(Redactada por A_2)



Eje estructural / **Eje conceptual**	Afirmación con respaldo — Matemático
Identificación de la fracción como cociente	*…sólo se comen dos niños que comerían una mitad cada uno, ya que está dividida en dos partes.*
Comparación de fracciones	*No, ya que en el reparto de Marc cada niño come un trozo (un octavo) y en el reparto de Sara…*
Conexión entre lenguajes y/o registros	*un trozo, un octavo*  *una mitad, dos partes,* 
Uso del lenguaje no matemático	*un trozo, dos partes*
Uso del lenguaje matemático verbal	*un octavo, una mitad*

Tabla 51. Aplicación de I_4 a la producción escrita de $P_{1\text{-}2}$ en $P_1(c)$

La producción escrita desarrollada por A_1 y A_2 al interactúan en la resolución de $P_1(c)$ es el resultado de un desacuerdo inicial dado en E_8 debido a las diversas interpretaciones que realizan los alumnos de sus respuestas iniciales y de un acuerdo y una síntesis que tienen lugar en el transcurso de E_9 y E_{19} (Tabla 51). Para elaborar la producción escrita de la pareja, cada alumno se apoya en su resolución individual inicial (afirmación con garantía matemática en el caso de A_1

y afirmación con respaldo matemático al resolver A_2) para comparar las fracciones de los repartos e identificar la relación parte-todo en contexto continuo. Inicialmente los alumnos enuncian sus conclusiones iniciales mediante una afirmación sin garantía en E_8. Pero a medida que evoluciona la resolución del tercer apartado, maduran sus afirmaciones y mejoran sus argumentos al elaborar afirmaciones con respaldo matemático en torno a la comparación de fracciones de los repartos (E_9 y E_{19}). Destacamos por tercera vez, el papel adoptado por A_2 al usar el lenguaje matemático-verbal en la resolución conjunta, mejorando el uso del lenguaje de A_1.

El análisis de la producción escrita que elabora $P_{1\text{-}2}$ en P_1(c) sugiere que son capaces de comparar los repartos y establecer que implican diferentes tipos de unidades para un número diferente de individuos: *No, ya que en el reparto de Marc cada niño come un trozo (un octavo) y en el reparto de Sara sólo se comen dos niños que comerían una mitad cada uno, ya que está dividida en dos partes.* Utilizan el lenguaje matemático-verbal en conexión con el lenguaje no matemático y con la representación gráfica del enunciado para elaborar argumentos en base a los dos repartos. A_2 sigue adoptando el papel descrito para la resolución conjunta de los dos primeros apartados de P_1.

Síntesis de la aplicación de I_4

Para reagrupar aspectos identificados en la aplicación del cuarto instrumento, recopilamos características, conceptuales y estructurales, de las producciones escritas de cada pareja participante en la resolución de los cinco problemas, así como, de los episodios implicados en su elaboración. En esta ocasión, dividimos en dos partes la síntesis del análisis:

- Mediante una tabla de columnas presentamos, para cada pareja, el problema que se resuelve, los usos de la fracción y los tipos de estructuras de los argumentos de las respuestas escritas de todas las parejas en la resolución de los cinco problemas y los episodios transcurridos. En las tablas no se dan ejemplos de datos. Presentamos la tabla 52 para ejemplificar la síntesis elaborada para la pareja $P_{1\text{-}2}$. El resto de tablas aparecen en el Anexo 12.

- A través de I_1 resumimos las características conceptuales y estructurales de las producciones escritas de las parejas al resolver cada uno de los problemas de la secuencia, sin aportar ejemplos de datos. En las celdas, presentamos la pareja y el apartado que resuelve de forma conjunta, en base a cada combinación de los ejes conceptual y estructural. Reagrupamos las características conceptuales y estructurales de todas las respuestas escritas en la resolución de una tarea concreta. Ilustramos la síntesis de las producciones de todas las parejas la resolución de cada problema (Tablas 53-57).

PROBLEMA	PRODUCCIÓN ESCRITA EN PAREJA	EPISODIOS
P_1(a)	**Afirmación con respaldo extramatemático** - Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo y discreto - Uso y conexión del lenguaje no matemático y con el lenguaje matemático-verbal	- Acuerdo (E1, E2) - Ampliación (E17)
P_1(b)	**Afirmación con respaldo matemático** - Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo - Uso y conexión del lenguaje no matemático y con el lenguaje matemático-verbal	- Imposición (E3) - Aclaración (E4, E5, E18) - Acuerdo (E6, E7)
P_1(c)	**Afirmación con respaldo matemático** - Comparación de fracciones - Uso y conexión del lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal	- Desacuerdo (E8) - Acuerdo (E9) - Síntesis (E19)
P_1(d)	**Afirmación con respaldo matemático** - Aplicación de métodos de suma fracciones - Uso del lenguaje matemático-verbal **Afirmación con garantía matemática** - Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto - Uso del lenguaje matemático-verbal	- Aclaración (E10) - Imposición (E11) - Ampliación (E20) - Cuestionamiento (E21)
P_1(e)	**Afirmación con respaldo matemático** - Comparación de fracciones - Aplicación de equivalencia de fracciones y de métodos de suma fracciones - Uso del lenguaje matemático-verbal	- Desacuerdo (E12) - Aclaración (E13, E22) - Acuerdo (E14)
P_1(f)	**Afirmación con respaldo extramatemático** - Identificación la relación parte-todo en contexto discreto - Uso del lenguaje matemático-verbal	- Acuerdo (E15) - Interrupción (E16)
P_2	**Desajuste datos y garantía** - Identificación la relación parte-todo en contexto discreto y de la fracción como cociente - Distinción entre reparto total y reparto parcial - Uso del lenguaje no matemático	- Aclaración (E22, E23, E24) - Cuestionamiento (E25, E26) - Acuerdo (E27, E29) - Imposición (E28)
P_3	**Afirmación con garantía extramatemática** - Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto y de la fracción como cociente - Uso del lenguaje no matemático **Desajuste datos y garantía** - Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto - Uso del lenguaje no matemático	- Aclaración (E30) - Ampliación (E31) - Acuerdo (E32) -´Síntesis (E33) - Imposición (E34) - Acuerdo (E35) - Aclaración (E36)
P_4(a)	**Afirmación con respaldo matemático** - Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto - Distinción entre reparto total y reparto parcial - Comparación de fracciones y aplicación de métodos de suma fracciones - Uso y conexión del lenguaje no matemático y con el lenguaje matemático-verbal y numérico	- Acuerdo (E37, E38) - Ampliación (E39)
P_4(b)	**Afirmación con respaldo extramatemático** - Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto - Distinción entre reparto total y reparto parcial - Uso del lenguaje no matemático	- Acuerdo (E42) - Aclaración (E40) - Imposición (E41)
P_5	**Desajuste datos y garantía** - Identificación de la fracción como razón - Comparación de fracciones - Uso y conexión del lenguaje no matemático y con el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico	- Desacuerdo (E43, E47) - Acuerdo (E44) - Cuestionamiento (E45) - Aclaración (E46, E47)

Tabla 52. Síntesis de I_4 para las producciones escritas y episodios de P_{1-2}

Siguiendo los resultados logrados, caracterizamos las producciones escritas de P_{1-2} en M_2 para todos los problemas (Tabla 52). La síntesis de la aplicación de I_4 a las cinco respuestas muestra desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_2 no identifican la relación parte-todo en contexto discreto y como cociente, en una situación que no distribuye todas las unidades disponibles. No diferencian entre reparto total y parcial y desarrollan argumentos en lenguaje no matemático para mostrar el reparto. La pareja interviene en ocho episodios (E_{22}-E_{29}) para dar aclaraciones, cuestionamientos, acuerdos e incluso una imposición por parte de A_2, pero sin llegar a elaborar argumentos consistentes; b) en P_3 apreciamos que A_2 no identifica a la fracción como parte-todo en contexto discreto cuando presentan en lenguaje no matemático una opción de reparto que no satisface las restricciones. A_1 presenta una aclaración que omite el reparto de su compañero en E_{36}; c) en P_5 no significan a la fracción como razón, al elaborar argumentos matemáticos para comparar las fracciones de los repartos. No contemplan a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades. Se producen desacuerdos, acuerdos, cuestionamientos y aclaraciones, pero no resuelven de manera satisfactoria el reparto (E_{43}-E_{48}).

Presentan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía matemática cuando en P_1(d) explican el reparto a través de la suma de fracciones, identificando la relación parte-todo en contexto discreto usando el lenguaje matemático. Para elaborar la respuesta se produce una aclaración y una imposición en dos episodios consecutivos (E_{10} y E_{11}).

Muestran una argumentación débil al presentar afirmaciones con garantía extramatemática cuando en P_3 significan a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente. Explican con lenguaje no matemático diversas opciones del reparto restringido a través de aclaraciones, ampliaciones, acuerdos, síntesis e incluso una imposición, tal y como sucede en los episodios (E_{30}-E_{35}).

Elaboran una argumentación fuerte al desallorar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) justifican las partes de la unidad en los dos repartos. Dotan de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo, conectando el lenguaje no matemático con el lenguaje matemático. Para elaborar esta producción escrita tiene lugar una imposición en E_3, una serie de aclaraciones en E_4 y E_5, y finalmente establecen acuerdos en E_6 y E_7; b) en P_1(c) comparan las fracciones de los repartos, usando el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático. Inicialmente, se produce un desacuerdo en el episodio E_8 a la hora de comparar las fracciones de los repartos. Sin embargo, gracias a la intervención de A_2 se establece un consenso en la solución en E_9 y una síntesis de la forma de repartir en E_{19}; c) en P_1(d) dan la fracción de los repartos totales, mediante la justificación de la suma de las fracciones de los repartos parciales. Usan el lenguaje matemático-verbal para elaborar su respuesta; d) en P_4 justifican el reparto identificando la relación parte-todo en contexto discreto. Comprenden las restricciones que condicionan los repartos, comparan las fracciones que los caracterizan y distinguen entre el reparto parcial y el total. Utilizan la suma de fracciones para argumentar el reparto. Usan el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático. Producen acuerdos en E_{37} y E_{38}. Además, tiene lugar una ampliación de la solución en E_{39} para intentar mejorar la respuesta conjunta.

Desarrollan una argumentación fuerte al desallorar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) justifican la elección del reparto equitativo, identificando la relación parte-todo en contexto continuo y discreto. Establecen dos acuerdos (E_1 y E_2) para elaborar la respuesta conjunta y una posterior ampliación de la solución en E_{17}; b) en P_1(f) argumentan la elección del reparto condicionado usando el lenguaje matemático. En la interacción se produce un acuerdo de la solución (E_{15}) y una posterior interrupción en (E_{16}) a la hora de establecer la producción escrita; c) en P_4 justifican los repartos desde diversas perspectivas. Tiene lugar una aclaración protagonizada por los dos alumnos en E_{40} para consolidar la solución establecida, y una imposición de A_2 en E_{41} para acabar de argumentar la forma de repartir, y finalmente, un acuerdo en E_{42}.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	P_{5-6} (a)	P_{3-4} (b, d) P_{5-6} (c)	P_{3-4} (b, c) P_{5-6} (b) P_{7-8} (b)		P_{1-2} (b) P_{5-6} (d) P_{7-8} (c, d, e)	P_{1-2} (a) P_{3-4} (a) P_{7-8} (a)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P_{5-6} (a, f)	P_{3-4} (d)	P_{1-2} (d) P_{5-6} (d)	P_{5-6} (a)	P_{7-8} (d)	P_{1-2} (a, f) P_{3-4} (a, f) P_{7-8} (a, f)
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones	P_{5-6} (e)		P_{3-4} (c)		P_{1-2} (c, e) P_{7-8} (e)	P_{3-4} (a, e) P_{7-8} (a)
Aplicación de la equivalencia de fracciones					P_{1-2} (e)	
Aplicación de métodos de suma de fracciones					P_{1-2} (d, e) P_{5-6} (d) P_{7-8} (d, e)	P_{3-4} (e)
Conexión entre lenguajes y/o registros	P_{5-6} (e)		P_{5-6} (b) P_{7-8} (b)		P_{1-2} (b, c) P_{7-8} (c, d, e)	P_{1-2} (a) P_{3-4} (a, e)
Uso del lenguaje no matemático	P_{5-6} (a, e, f)		P_{5-6} (b)	P_{5-6} (a)	P_{1-2} (b)	P_{1-2} (a) P_{3-4} (e) P_{7-8} (a)
Uso del lenguaje matemático-verbal	P_{5-6} (e)	P_{3-4} (d) P_{5-6} (c)	P_{1-2} (d) P_{3-4} (b)		P_{1-2} (b, c, d, e) P_{7-8} (d, e)	P_{1-2} (a, f) P_{3-4} (a, f) P_{7-8} (f)
Uso del lenguaje matemático-numérico		P_{3-4} (b, d)	P_{3-4} (c) P_{5-6} (b, d) P_{7-8} (b)		P_{5-6} (d) P_{7-8} (c, d, e)	P_{3-4} (a, e, f)
Uso del lenguaje matemático-gráfico			P_{7-8} (b)		P_{7-8} (c, d)	

Tabla 53. Síntesis de I_4 para todas las producciones escritas en $P_1(M_2)$

Los resultados logrados nos permiten caracterizar las producciones escritas de todas las parejas en la resolución del primer problema (Tabla 53). Al sintetizar la aplicación de I_4 a las respuestas escritas de los alumnos en M_2 apreciamos que en P_1 solo P_{5-6} elabora desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_1(a) no identifican la relación parte-todo en contexto continuo o discreto al argumentar su elección del reparto usando el lenguaje no matemático; b) en

P_1(e) no comparan de manera satisfactoria las fracciones de los repartos; f) en P_1(f) no identifican la relación parte-todo en contexto discreto al realizar el reparto restringido.

Presentan una argumentación muy débil al dar afirmaciones sin garantía cuando: a) en P_1(b) la pareja $P_{3\text{-}4}$ indica directamente la fracción de los repartos sin aportar argumentos que la validen. Significan a la fracción como parte-todo en contexto continuo omitiendo la representación gráfica del reparto; b) en P_1(c) la pareja $P_{5\text{-}6}$ presenta directamente las fracciones de los repartos usando el lenguaje matemático-verbal; c) en P_1(d) la pareja $P_{3\text{-}4}$ ofrece el reparto total sin argumentar como obtiene la fracción que le asocia.

Desarrollan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía matemática cuando: a) en P_1(b) tres parejas ($P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$) explican con lenguaje matemático, y en una ocasión, con lenguaje no matemático, la fracción de cada reparto, identificando la relación parte-todo en contexto continuo; b) en P_1(c) una pareja $P_{3\text{-}4}$ argumenta la comparación de las fracciones de los repartos, significando a la fracción como parte de la unidad mediante el uso del lenguaje matemático-numérico; c) en P_1(d) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$ y $P_{5\text{-}6}$) argumentan los repartos.

Elaboran una argumentación débil al exponer afirmaciones con garantía extramatemática cuando en P_1(a) la pareja $P_{5\text{-}6}$ prioriza, usando el lenguaje no matemático, la elección del reparto equitativo.

Llevan a cabo una argumentación fuerte al confeccionar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) la pareja $P_{1\text{-}2}$ justifica cada reparto, dotando de significado a la fracción como parte de la unidad; b) en P_1(c) una pareja ($P_{1\text{-}2}$) argumenta la comparación de las fracciones de los repartos y otra ($P_{7\text{-}8}$) identifica la relación parte-todo en contexto continuo; c) en P_1(d) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$) justifican los repartos totales mediante la suma de las fracciones de los repartos parciales conectando el uso de diversos registros matemáticos. Además, $P_{5\text{-}6}$ identifica la relación parte-todo en contexto continuo, y $P_{7\text{-}8}$ dota de significado a la fracción como parte de la unidad y como parte de un conjunto; d) en P_1(e) dos parejas ($P_{1\text{-}2}$ y $P_{7\text{-}8}$) basan sus argumentos en la comparación de las fracciones de los repartos para establecer que son equivalentes. En general, usan el lenguaje matemático-verbal en conexión con el lenguaje matemático-numérico. Solo la pareja $P_{7\text{-}8}$ añade la representación gráfica del reparto en su respuesta escrita.

Desarrollan una argumentación fuerte al presentar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) tres parejas ($P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$) justifican la elección del reparto equitativo, en base a sus preferencias y, en algunas ocasiones, en torno a la comparación de fracciones. Dotan de significado a la fracción como parte de un conjunto y como parte de la unidad; b) en P_1(e) solo la pareja P_{3-4} muestra argumentos que justifican la manera de comparar los repartos para establecer que son equivalentes; c) en P_1(f) tres parejas (P_{1-2}, P_{3-4} y P_{7-8}) validan la elección del repartos en base a la restricción. Usan el lenguaje matemático-verbal y solo P_{7-8} utiliza también, en la elaboración de sus argumentos, el lenguaje matemático-numérico para expresar el reparto.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P_{1-2} P_{5-6} P_{7-8}					
Identificación de la fracción como cociente	P_{1-2} P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}					
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P_{1-2} P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}					
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes y/o registros	P_{7-8}					
Uso del lenguaje no matemático	P_{1-2}					
Uso del lenguaje matemático-verbal	P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}					
Uso del lenguaje matemático-numérico	P_{5-6} P_{7-8}					
Uso del lenguaje matemático-gráfico	P_{7-8}					

Tabla 54. Síntesis de I_4 para todas las producciones escritas en $P_2(M_2)$

Siguendo los resultados conseguidos, realizamos la caracterización de las producciones escritas de todas las parejas en la resolución del segundo problema (Tabla 54). La síntesis de la aplicación de I_4 a las respuestas escritas de todas las parejas en M_2 refleja que en P_2 solo ofrecen desajustes entre los datos y las garantías. Los alumnos, al interactuar en pareja, no identifican a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente en una situación que no distribuye todas las unidades disponibles. No diferencian entre el reparto total y el parcial, y omiten que una parte del conjunto no participa en el reparto. Todas las parejas presentan argumentos incoherentes y carentes de significado que no explican ni justifican la suma de fracciones que realizan. Muestran que no comprenden el enunciado y no aportan el reparto en su producción escrita.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P_{1-2} P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}	P_{5-6}	P_{5-6}	P_{1-2} P_{3-4}	P_{7-8}	
Identificación de la fracción como cociente			P_{5-6}	P_{1-2} P_{3-4}	P_{7-8}	
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones			P_{5-6}		P_{7-8}	
Conexión entre lenguajes y/o registros	P_{3-4}			P_{3-4}		
Uso del lenguaje no matemático	P_{1-2} P_{3-4}			P_{1-2} P_{3-4}		
Uso del lenguaje matemático-verbal						
Uso del lenguaje matemático-numérico	P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}	P_{5-6}	P_{5-6}	P_{3-4}	P_{7-8}	
Uso del lenguaje matemático-gráfico	P_{3-4}			P_{3-4}		

Tabla 55. Síntesis de I_4 para todas las producciones escritas en $P_3(M_2)$

Los resultados que alcanzamos tienen que ver con la caracterización de las producciones escritas de todas las parejas en la resolución del tercer problema (Tabla 55). La síntesis de la aplicación de I_4 a las respuestas escritas de todas las parejas en M_2 muestra que producen desajustes entre los datos y las garantías en P_3 cuando: a) todas las parejas presentan alguna opción de reparto que omite las restricciones del enunciado o no muestran todos los repartos. En general, utilizan el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-numérico.

Elaboran una argumentación muy débil al elaborar afirmaciones sin garantía cuando la pareja $P_{5\text{-}6}$ indica, sin argumentar, alguna opción de reparto. Identifican la relación parte-todo en un contexto discreto usando el lenguaje matemático-numérico.

Presentan una argumentación débil al desarrollar afirmaciones con garantía matemática cuando la pareja $P_{5\text{-}6}$ explica alguna opción de reparto mediante argumentos que se basan en la suma de fracciones. Identifican la relación parte-todo en contexto discreto y significan a la fracción como cociente. Solo usan el lenguaje matemático-numérico para elaborar sus argumentos y validar su respuesta conjunta.

Muestran una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía extramatemática cuando las parejas $P_{1\text{-}2}$ y $P_{3\text{-}4}$ presentan argumentos que dotan de significado a la fracción como parte de un conjunto y como cociente. $P_{1\text{-}2}$ usa el lenguaje no matemático para dar opciones de reparto. $P_{3\text{-}4}$ conecta en sus argumentos el uso del lenguaje no matemático con el uso del lenguaje matemático-numérico y con la representación gráfica del reparto.

Ofrecen una argumentación fuerte al desarrollar afirmaciones con respaldo matemático cuando la pareja $P_{7\text{-}8}$ indica de forma justificada opciones de reparto condicionadas apoyándose en la suma de fracciones. Significan a la fracción como parte de un conjunto y como cociente, usando lenguaje matemático-numérico en la elaboración de su respuesta.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{1\text{-}2}$(b) $P_{3\text{-}4}$(b) $P_{5\text{-}6}$(b) $P_{7\text{-}8}$(b)
Identificación de la fracción como cociente					$P_{7\text{-}8}$(a)	
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{1\text{-}2}$(b) $P_{3\text{-}4}$(b) $P_{5\text{-}6}$(b) $P_{7\text{-}8}$(b)
Comparación de fracciones					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{5\text{-}6}$(b) $P_{7\text{-}8}$(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{5\text{-}6}$(b) $P_{7\text{-}8}$(b)
Conexión entre lenguajes y/o registros					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{5\text{-}6}$(b) $P_{7\text{-}8}$(b)
Uso del lenguaje no matemático					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{1\text{-}2}$(b) $P_{3\text{-}4}$(b) $P_{5\text{-}6}$(b) $P_{7\text{-}8}$(b)
Uso del lenguaje matemático-verbal					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	
Uso del lenguaje matemático-numérico					$P_{1\text{-}2}$(a) $P_{3\text{-}4}$(a) $P_{5\text{-}6}$(a) $P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{5\text{-}6}$(b)
Uso del lenguaje matemático-gráfico					$P_{7\text{-}8}$(a)	$P_{7\text{-}8}$(b)

Tabla 56. Síntesis de I_4 para todas las producciones escritas en $P_4(M_2)$

En base a los resultados logrados llevamos a cabo la caracterización de las producciones escritas de todas las parejas en la resolución del cuarto problema (Tabla 56). La síntesis de la aplicación de I_4 a las respuestas escritas de todas las parejas en M_2 refleja que desarrollan una argumentación fuerte al presentar afirmaciones con respaldo matemático cuando en P_4(a) todas las parejas identifican la relación parte-todo en contexto discreto y $P_{7\text{-}8}$ significa a la fracción como cociente. Justifican las opciones del reparto en base a la diferencia entre el reparto total y el reparto parcial, en la comparación de las fracciones de los repartos y en el reparto total obtenido mediante la suma de fracciones. Todas las parejas conectan, en la redacción de su producción escrita, el uso del lenguaje no matemático con el uso del lenguaje matemático-verbal y numérico. Solo P_{7-8} utiliza la representación gráfica del reparto en la confección de sus argumentos.

Presentan una argumentación fuerte al elaborar afirmaciones con respaldo extramatemático cuando en P_4(b) todas las parejas argumentan extramatemáticamente los repartos desde diversas perspectivas, en torno a la relación parte-todo en contexto discreto y a la diferencia entre el reparto total y el parcial. P_{5-6} y P_{7-8} comparan las fracciones que obtienen y muestran la diferencia entre el reparto parcial y el total, y suman fracciones para argumentar diversas opciones de reparto que protagonizan. Usan el lenguaje no matemático y solo P_{5-6} usa el lenguaje matemático-numérico y P_{7-8} utiliza el lenguaje matemático-gráfico.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto						
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón	P_{1-2} P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}					
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P_{1-2} P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}					
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes y/o registros	P_{1-2} P_{7-8}					
Uso del lenguaje no matemático	P_{1-2} P_{3-4} P_{5-6} P_{7-8}					
Uso del lenguaje matemático-verbal	P_{1-2}					
Uso del lenguaje matemático-numérico	P_{1-2}					
Uso del lenguaje matemático-gráfico	P_{1-2} P_{7-8}					

Tabla 57. Síntesis de I_4 para todas las producciones escritas en $P_5(M_2)$

A partir de los resultados que hemos alcanzado, caracterizamos las producciones escritas de todas las parejas en la resolución del quinto problema (Tabla 57). La síntesis de la aplicación de I_4 a las respuestas escritas de todas las parejas en M_2 refleja que solo elaboran desajustes entre los datos y sus respuestas. No usan a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos. Todas las parejas utilizan el lenguaje no matemático para elaborar sus argumentos. Además, P_{1-2} usa el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico para intentar validar sus conclusiones, y P_{7-8} presenta la representación gráfica del reparto que establece.

4.2.3. Consecución del objetivo 2

El análisis de las producciones orales y escritas de las cuatro parejas nos conduce a 10 resultados que hemos organizado diferenciando entre las producciones orales y las escritas. Organizamos los resultados relacionados con las producciones de las parejas según los usos de la fracción documentados, respectivamente, en P_1(a), P_1(b), P_1(c), P_1(d), P_1(e), P_1(f), P_2, P_3, P_4 y P_5. Para cada resultado, incluimos los subresultados sobre los tipos de estructura de los argumentos que tienen lugar en las producciones orales; sobre los procesos de interacción implicados en los episodios; y sobre los tipos de estructura de los argumentos identificados en las producciones escritas. Ilustramos los resultados de las producciones de forma análoga a los resultados obtenidos para el objetivo 1 en cada problema y apartado.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto cuando se distribuyen las partes según un reparto equitativo dando garantías o respaldos. Predominan los acuerdos y las ampliaciones.

- P_{3-4} produce garantías matemáticas en sus producciones orales, y el resto de parejas usa respaldos matemáticos o extramatemáticos al priorizar en P_1(a) el uso del reparto equitativo. P_{3-4} explica el significado de la fracción como parte de la unidad en E_{52}, usando la comparación de fracciones en sus argumentos en E_{54}. Además, elaboran respaldos matemáticos para identificar la relación parte todo en contexto discreto (E_{51}, E_{67}), usando la equivalencia de las fracciones de los repartos en E_{68}. P_{7-8} suma fracciones en E_{126} para justificar sus conclusiones mediante respaldos matemáticos. P_{1-2}, P_{5-6} y P_{7-8} justifica la elección del reparto en base al significado de la fracción como parte-todo en contexto continuo y/o discreto en diez episodios, al aportar en sus intervenciones respaldos extramatemáticos que validan sus conclusiones.

- Las cuatro parejas muestran acuerdos y ampliaciones al priorizar en P_1(a) la elección del reparto equitativo. P_{1-2} acuerda la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo en E_1. Las cuatro parejas establecen pactos que dotan de significado a la fracción como parte de un conjunto en E_1, E_{49}, E_{90}, E_{124}. $P_{1\text{-}2}$ amplia sus conclusiones en torno a la elección del reparto en E_{17}. $P_{3\text{-}4}$ realiza ampliaciones en sus intervenciones en E_{53}, E_{67} y E_{68}, mejorando la comparación de fracciones, la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto y la aplicación de la equivalencia de las fracciones de los repartos. Las ampliaciones de $P_{7\text{-}8}$ giran en torno al significado de la fracción como parte de un conjunto.

- $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ presentan respaldos extramatemáticos en sus producciones escritas para indicar la elección del reparto en P_1(a). Solo una parte de la respuesta escrita de $P_{5\text{-}6}$ muestra un desacuerdo entre los datos y la garantía, pero posteriormente, dan una garantía extramatemática para priorizar el uso de una opción de reparto. Identifican la relación parte-todo en contexto continuo y discreto. $P_{3\text{-}4}$ usa la comparación de fracciones para elaborar la respuesta. Conectan el lenguaje no matemático con el lenguaje matemático.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo cuando se distribuyen las partes según los dos repartos no siempre dando garantías o respaldos. Predominan las aclaraciones y los acuerdos.

- $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{5\text{-}6}$ asignan la parte de unidad para cada reparto en P_1(b) sin presentar garantías en algunos de los episodios que protagonizan en E_3, E_{55}, E_{56}, E_{57}, E_{96}. En cinco episodios $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ afirman con garantías matemáticas el reparto, identificando la relación parte-todo en contexto continuo y discreto en sus explicaciones. Solo $P_{5\text{-}6}$ en E_{92} y E_{94} da respaldos matemáticos para justificar la fracción del reparto equitativo y del reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles. Dotan de significado a la fracción como parte de la unidad.

- Las cuatro parejas producen aclaraciones y/o acuerdos para asignar la parte de unidad de los repartos en P_1(b). En E_5, E_{55}, E_{69}, E_{95}, E_{128} las parejas intentan mejorar la identificación de la relación parte-todo en contexto continuo. Los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$ establecen consensos orales para acordar el reparto en E_7, E_{56}, E_{92} y E_{96}. En E_{94} y E_{130}, las parejas $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ cuestionan el reparto, planteando una cuestión en torno al significado de la fracción como parte de la unidad.

- Las cuatro parejas asignan la parte de unidad para cada reparto cuando dan su respuesta escrita en P_1(b). $P_{3\text{-}4}$ presenta una parte de su respuesta sin garantías y otra parte con garantías. $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ afirman con garantías matemáticas el reparto. $P_{1\text{-}2}$ justifica la fracción que asocian al reparto equitativo y al reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal y numérico. Solo $P_{7\text{-}8}$ utiliza la representación gráfica de los repartos.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo cuando se distribuyen las partes según las dos reparticiones no siempre dando garantías o respaldos al comparar los repartos. Predominan los acuerdos y las síntesis.

- Todas las parejas interpretan cómo se dividen las unidades en cada reparto en P_1(c). Presentan de forma oral la ordenación y la comparación de las fracciones de los repartos y afirman que los repartos no son equivalentes. $P_{7\text{-}8}$ en E_{134} y E_{137} no presenta garantías a la hora de identificar la relación parte-todo en contexto continuo. $P_{1\text{-}2}$ no ofrece argumentos al comparar las fracciones en E_8. En dos episodios, $P_{7\text{-}8}$ produce garantías matemáticas o extramatemáticas para explicar cómo son los repartos. $P_{3\text{-}4}$ y $P_{5\text{-}6}$ dan garantías matemáticas para argumentar la comparación de fracciones en $E_{57,}$ E_{70} y E_{98}. $P_{1\text{-}2}$ y $P_{5\text{-}6}$ justifican mediante respaldos matemáticos.

- $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{5\text{-}6}$ establecen acuerdos y síntesis, en $E_{9,}$ E_{19}, E_{57}, E_{70} y E_{98}, para mostrar cómo se reparten las unidades en cada reparto en P_1(c) a partir de la comparación de fracciones. En algunas ocasiones, los alumnos de $P_{7\text{-}8}$ identifican la relación parte-todo en contexto continuo al intentar mejorar la comprensión de sus conclusiones en E_{134} y E_{137}. Se imponen en E_{140} y modifican su posicionamiento en E_{138}. $P_{5\text{-}6}$ ofrece un desacuerdo en E_{97}.

- Todas las parejas ordenan y comparan las fracciones de los repartos y afirman que las reparticiones no son equivalentes en P_1(c). $P_{1\text{-}2}$ y $P_{7\text{-}8}$ presentan respaldos matemáticos en sus producciones escritas. $P_{3\text{-}4}$ explica la comparación de fracciones a través de garantías matemáticas. $P_{5\text{-}6}$ afirma sin garantías. Utilizan el lenguaje matemático-verbal y/o numérico. Omiten el uso del lenguaje no matemático y solo $P_{7\text{-}8}$ se expresa con el lenguaje matemático-gráfico.

Se identifica la relación parte-todo en contexto discreto cuando se distribuyen las partes según los dos repartos no siempre dando garantías o respaldos a la suma de fracciones para obtener el reparto total. Predominan las aclaraciones y los acuerdos.

- Todas las parejas asignan, de forma oral, el reparto total en P_1(d). $P_{3\text{-}4}$ da respuestas sin garantías en E_{58}, E_{59} y E_{71}, identificando la relación parte-todo en contexto discreto. En $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ los alumnos realizan intervenciones para explicar o justificar la suma de fracciones que permite obtener la fracción del reparto total. $P_{1\text{-}2}$ elabora garantías matemáticas en

E_{10} y respaldos matemáticos en E_{20} y E_{21}. $P_{5\text{-}6}$ desarrolla respaldos matemáticos en E_{99}. $P_{7\text{-}8}$ muestra respaldos matemáticos en E_{142} y E_{143}. En algunas ocasiones, los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ exponen garantías matemáticas o extramatemáticas para identificar la relación parte-todo en contexto discreto en E_{11}, E_{100}, E_{101} y E_{144}. En otras, los alumnos de $P_{7\text{-}8}$ explican la comparación de fracciones (E_{135}) o cómo aplican la equivalencia de fracciones (E_{136}).

- Todas las parejas establecen aclaraciones y/o acuerdos en sus intervenciones para ofrecer la fracción que representa el reparto total de las reparticiones en P_1(d). Por una parte, en $P_{1\text{-}2}$ aclaran en sus intervenciones en E_{10} la suma de fracciones. $P_{5\text{-}6}$ intenta mejorar la su respuesta, en torno a la identificación de la fracción como parte de un conjunto, en E_{101}. En $P_{7\text{-}8}$ realizan aclaraciones en base a la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto en E_{144}, a la aplicación de la equivalencia de fracciones en E_{136}, y a la suma de fracciones en E_{142}. Por otra parte, en $P_{3\text{-}4}$ se establecen acuerdos para identificar la relación parte-todo en contexto discreto en E_{58}, E_{59}. Asimismo, los alumnos de $P_{5\text{-}6}$ consensúan la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto en E_{100} y la suma de fracciones en E_{99}. Se producen algunas ampliaciones (E_{20} y E_{143}), un cuestionamiento (E_{21}), una imposición (E_{11}), y una síntesis (E_{71}).

- Las cuatro parejas, en su producción escrita, asignan el reparto total de las dos opciones de reparto en P_1(d). $P_{3\text{-}4}$ da respuestas sin garantías, identificando la relación parte-todo en contexto continuo y discreto. $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ usan la suma de fracciones para obtener la fracción que representa el reparto total. $P_{1\text{-}2}$ y $P_{5\text{-}6}$ elaboran garantías matemáticas para dotar de significado a la fracción como parte de un conjunto. $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ dan respaldos matemáticos que significan a la fracción como parte de la unidad, y $P_{7\text{-}8}$ también justifica la relación parte-todo en contexto discreto. Todas las parejas usan el lenguaje matemático-verbal y/o numérico para argumentar su respuesta escrita. Solo $P_{7\text{-}8}$ añade la representación gráfica del reparto.

Se identifica la relación parte-todo en contexto discreto cuando se distribuyen las partes según los dos repartos dando garantías o respaldos al comparar los repartos totales. Predominan las aclaraciones.

- Las parejas establecen, de forma oral, que los repartos totales son equivalentes en P_1(e). Elaboran garantías o respaldos para explicar o justificar la comparación de las fracciones de los repartos, la equivalencia de fracciones y la suma de fracciones para obtener el reparto total. Los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ elaboran garantías matemáticas en E_{14}, E_{61},

E_{146} y E_{148}. Estos alumnos desarrollan respaldos en sus intervenciones en E_{12}, E_{13}, E_{60}, E_{72} y E_{147}. Solo $P_{1\text{-}2}$ en E_{22} y $P_{5\text{-}6}$ en E_{102} dan respaldos extramatemáticos para justificar que los repartos totales son equivalentes.

- En E_{13}, E_{22}, E_{60} y E_{72} los alumnos de $P_{1\text{-}2}$ y $P_{3\text{-}4}$ aclaran que los repartos totales son equivalentes en P_1(e). Sin embargo, en la resolución de este apartado se producen intervenciones que se caracterizan por algunos desacuerdos, acuerdos y síntesis. $P_{1\text{-}2}$ en E_{12} ofrece un desacuerdo a la hora de sumar las fracciones de los repartos, y en E_{14} un consenso en torno a la equivalencia de los repartos. $P_{5\text{-}6}$ muestra una disconformidad al establecer que los repartos son equivalentes en E_{102} y un acuerdo en E_{105}. $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ sintetizan sus resultados y conclusiones en E_{61} y E_{146}, respectivamente.

- $P_{1\text{-}2}$ y $P_{7\text{-}8}$ afirman con respaldos matemáticos y $P_{3\text{-}4}$ con respaldos extramatemáticos la suma de fracciones y la equivalencia de los repartos totales en P_1(e). En general, en su respuesta escrita usan el lenguaje matemático-verbal y/o numérico en conexión con el lenguaje no matemático.

Se identifica la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto cuando se distribuyen las partes según un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles dando garantías y respaldos. Predominan los acuerdos.

- $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ elaboran argumentos orales para explicar o justificar la elección del reparto en P_1(f). Comparan las fracciones de los repartos siguiendo las restricciones y establecen el uso del reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles. Identifican la relación parte-todo en contexto discreto. Aunque en E_{15} la pareja $P_{1\text{-}2}$ presenta directamente sus conclusiones, en E_{16} da garantías extramatemáticas para priorizar el uso de uno de los repartos. $P_{3\text{-}4}$ muestra garantías matemáticas en E_{65} y E_{73}, y respaldos matemáticos en E_{63}. Los alumnos de $P_{7\text{-}8}$ desarrollan en sus intervenciones respaldos extramatemáticos en E_{149} y E_{150}.

- Los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ acuerdan en sus intervenciones de E_{15}, E_{65} y E_{149} la elección de uno de los repartos en P_1(f). Además, para identificar la relación parte-todo en contexto discreto los alumnos de $P_{7\text{-}8}$ en E_{150} producen una aclaración, los de $P_{3\text{-}4}$ en E_{63} un desacuerdo y en E_{73} un síntesis, y los de $P_{1\text{-}2}$ en E_{16} una interrupción.

- $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ dan respaldos extramatemáticos para priorizar en P_1(f) el uso de una opción de reparto. En su producción escrita, argumentan la elección del reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles usando la comparación de fracciones. Omiten el lenguaje no matemático, y solo utilizan el lenguaje matemático-verbal y/o numérico para elaborar su respuesta.

No se identifica la relación parte-todo en contexto discreto ni la fracción como cociente con desajuste entre datos y garantías en la distinción entre reparto total y parcial. Predominan las aclaraciones y los cuestionamientos.

- Todas las parejas producen desajustes orales entre los datos y las garantías en P_2. Omiten que no se reparten todas las unidades disponibles y no diferencian entre reparto total y parcial. Suman fracciones pero no obtienen el reparto total. $P_{1\text{-}2}$ en E_{25} no identifica la relación parte-todo en contexto discreto. $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ omiten a la fracción como cociente en E_{23}, E_{26}, E_{108}, E_{154}, E_{156} y E_{157}. Las cuatro parejas en un total de once episodios muestran en sus intervenciones que no distinguen en el reparto total y el reparto parcial.

- Todas las parejas establecen aclaraciones que omiten cómo realizar el reparto en P_2. En E_{23} y E_{108} no identifican a la fracción como cociente. En E_{24}, E_{74} y E_{155} no diferencian entre el reparto total y el parcial. Los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ plantean algunos interrogantes referentes al reparto en E_{25}, E_{26}, E_{109}, E_{152} y E_{156}. Además, en algunas intervenciones se generan acuerdos y ampliaciones. $P_{1\text{-}2}$ y $P_{3\text{-}4}$ en E_{27}, E_{29} y E_{75} consensúan, sin éxito, la diferencia entre el reparto parcial y el total. $P_{7\text{-}8}$ en E_{154} acuerda el uso de la fracción como cociente. $P_{7\text{-}8}$ realiza tres ampliaciones de sus conclusiones en E_{153}, E_{157} y E_{159}. En determinadas ocasiones, se produce una imposición (E_{28}), una modificación (E_{110}) y dos síntesis de los resultados (E_{111} y E_{158}).

- Todas las parejas producen desajustes entre los datos y las garantías cuando redactan su respuesta en P_2. No contemplan que el reparto no implica todas las unidades disponibles. Aunque suman fracciones, no obtienen el reparto total ni distinguen entre el reparto total y el parcial. $P_{1\text{-}2}$ usa el lenguaje no matemático. $P_{3\text{-}4}$ utiliza el lenguaje matemático-verbal. $P_{5\text{-}6}$ da argumentos usando el lenguaje matemático-verbal y numérico. $P_{7\text{-}8}$ expresa la fracción de forma verbal, numérica, y gráfica.

Se identifican la relación parte-todo en contexto discreto y la fracción como cociente cuando se distribuyen de forma equitativa las unidades dando garantías o respaldos a repartos con restricción. Predominan las aclaraciones y las síntesis.

- Todas las parejas exponen opciones de reparto según los criterios impuestos en P_3. Dotan de significado a la fracción como parte de un conjunto y como cociente. Aplican los conceptos de divisores de un número natural y de división exacta entre dos números. Reparten todos los elementos del conjunto en subconjuntos de igual amplitud con el mismo número de elementos. Aunque $P_{3\text{-}4}$ en E_{77} y $P_{5\text{-}6}$ en E_{116} muestran afirmaciones sin garantías, en general, todas las parejas dan garantías o respaldos a las opciones de reparto. Los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$ en once episodios elaboran garantías matemáticas en sus intervenciones. En E_{31}, E_{33}, E_{114}, E_{115} y E_{161} las parejas $P_{1\text{-}2}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ ofrecen respaldos matemáticos para justificar las opciones del reparto restringido. $P_{3\text{-}4}$ en E_{81} y $P_{5\text{-}6}$ en E_{112} identifican a la fracción como cociente mediante el desarrollo de respaldos extramatemáticos.

- En ocho episodios, $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ intentan mejorar la comprensión de algunas opciones de reparto según los criterios impuestos en P_3, aclarando la forma de repartir todos los elementos del conjunto en subconjuntos de igual amplitud con el mismo número de elementos. Además, los alumnos acuerdan, amplían, imponen, sintetizan, y en una ocasión, cuestionan maneras de repartir los elementos. $P_{1\text{-}2}$ en E_2 y E_{35}, y $P_{3\text{-}4}$ en E_{80} consensúan los repartos. $P_{1\text{-}2}$ en E_{31}, y E_{34} en E_{81} usan a la fracción como cociente para ampliar sus argumentos en torno a los repartos. A_8 ($P_{7\text{-}8}$) en E_{161} cuestiona cómo realizan el reparto. Alumnos de $P_{1\text{-}2}$ en E_{34} y de $P_{7\text{-}8}$ en E_{162} y E_{163} exigen a su pareja la aceptación del proceso que usan para establecer algunas opciones de reparto. $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$ y $P_{5\text{-}6}$ en E_{33}, E_{77}, E_{112} y E_{116} sintetizan sus resultados.

- Todas las parejas dan, de manera escrita, algunas opciones del reparto restringido en P_3. En sus respuestas muestran algunas divisiones indicadas y usan los conceptos de divisores de un número natural y de división exacta entre dos números. Identifican la relación parte-todo en contexto discreto y continuo, y presentan diversas opciones que distribuyen los elementos del conjunto en subconjuntos de igual amplitud. $P_{5\text{-}6}$ presenta una opción de reparto sin garantía y otras con garantías matemáticas. $P_{1,2}$ y $P_{3\text{-}4}$ usan respaldos extramatemáticos para justificar los repartos. $P_{7\text{-}8}$ argumenta con respaldos matemáticos. Ninguna pareja determina todas las opciones de reparto restringidas.

Se identifican la relación parte-todo en contexto discreto y la fracción como cociente cuando se reparten más unidades que elementos del conjunto con garantías o respaldos. Predominan las aclaraciones y los acuerdos.

- Todas las parejas desarrollan argumentos orales para explicar o justificar la diferencia entre el reparto total y el parcial en P_4(a) y para protagonizar el reparto en P_4(b). Elaboran argumentos matemáticos para establecer el reparto y argumentos extramatemáticos para protagonizarlo desde diversas perspectivas. Identifican a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente, comparan las fracciones de los repartos y advierten que se distribuyen más unidades de las disponibles. $P_{7\text{-}8}$ en E_{170} da garantías matemáticas. Las parejas elaboran garantías extramatemáticas en E_{42}, E_{85}, E_{119}, E_{120}, E_{166}, E_{167}. Presentan afirmaciones con respaldo matemático en E_{37}, E_{39}, E_{82}, E_{84}, E_{117}. Protagonizan el reparto basándose en respaldos extramatemáticos en E_{40}, E_{83}, E_{118}, E_{168}.

- En seis episodios, predominan las aclaraciones que elaboran los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ para mejorar la comprensión de cómo se realiza el reparto en P_4. En cinco ocasiones, los alumnos consensúan la diferencia entre el reparto total y el parcial. $P_{1\text{-}2}$ realiza una ampliación en E_{39}. $P_{3\text{-}4}$ plantea un cuestionamiento en E_{84}. Se producen dos desacuerdos entre A_7 y A_8 en E_{166} y E_{168}. Algunos alumnos imponen sus conclusiones en E_{41} y E_{169}. $P_{5\text{-}6}$ sintetiza algunos resultados en E_{120}.

- Todas las parejas justifican, de forma escrita, la diferencia entre el reparto total y el parcial en P_4(a) y la forma de protagonizar el reparto en P_4(b). Producen respaldos matemáticos para identificar la relación parte-todo en contexto discreto, y $P_{7\text{-}8}$ como cociente. Usan métodos de suma de fracciones para obtener el reparto total, comparan las fracciones de los repartos y establecen que el reparto total difiere del reparto parcial. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal, numérico y/o gráfico.

No se identifica la fracción como razón al no usarla como índice comparativo entre dos conjuntos de elementos dando desajuste entre datos y garantías. Predominan los desacuerdos.

- Todas las parejas producen desajustes entre los datos y las garantías al no contemplar a la fracción como razón en P_5. Omiten comparar las fracciones del reparto y establecer equivalencias entre fracciones. En dieciséis episodios los alumnos de $P_{1\text{-}2}$, $P_{3\text{-}4}$, $P_{5\text{-}6}$ y $P_{7\text{-}8}$ elaboran argumentos que no conectan con el enunciado.

- En siete episodios, los alumnos de P_{1-2}, P_{3-4}, P_{5-6} y P_{7-8} muestran alguna disconformidad cuando intentan establecer el reparto en P_5, omitiendo la relación fracción-proporción. Además, en sus intervenciones dan aclaraciones, acuerdos, algunos cuestionamientos y una ampliación que no consideran a la fracción como razón. Producen aclaraciones P_{1-2} en E_{48}, P_{3-4} en E_{89}, P_{5-6} en E_{121}, y P_{7-8} en E_{172} y E_{173}. Muestran acuerdos P_{1-2} en E_{44}, P_{3-4} en E_{86} y E_{87}, P_{5-6} en E_{123}, y P_{7-8} en E_{178}.

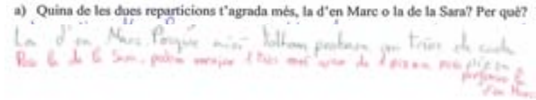
- Todas las parejas producen desajustes entre los datos y las garantías al no contemplar, en su producción escrita, a la fracción como razón en P_5. Omiten comparar las fracciones del reparto y establecer equivalencias entre fracciones. Su argumentación refleja desajustes entre la comprensión del enunciado del problema y su respuesta. No comparan las fracciones asociadas al reparto ni establecen equivalencias entre fracciones. Predomina el uso del lenguaje no matemático.

4.3. Caracterización de producciones escritas individuales de revisión

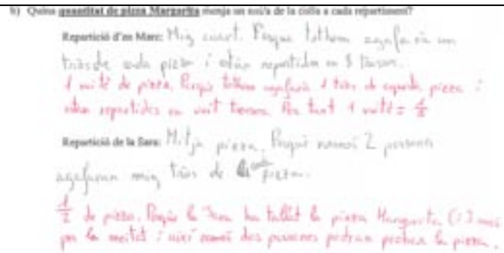
Este apartado es una continuación del primero en tanto que sigue su misma estructura para caracterizar las producciones escritas individuales de revisión de los alumnos cuando revisan las respuestas de los cinco problemas (Objetivo 3). En primer lugar, ilustramos algunos ejemplos de producciones escritas individuales de revisión y describimos los aspectos conceptuales y estructurales más destacados de cada una de ellas. En segundo lugar, aplicamos I_1, tal y como se realizó con las producciones escritas individuales iniciales, a todas las respuestas revisadas de los alumnos. En tercer lugar, sintetizamos los resultados alcanzados para cada alumno en la resolución de todos los problemas, de todos los alumnos en la resolución de cada problema y de todos los alumnos en la resolución de todos los problemas. Por último, extraemos resultados para caracterizar las producciones escritas individuales de revisión en base a los usos de la fracción y a tipos de estructuras de los argumentos.

4.3.1. Producciones escritas individuales de revisión

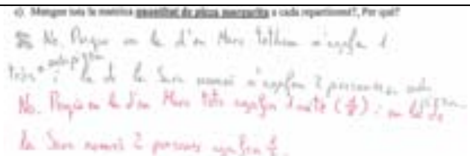
Para ilustrar ejemplos de producción escrita individual de revisión, presentamos las respuestas revisadas de A_1 o A_2 de cada problema en M_3, siguiendo la ejemplificación ilustrada en la sección (4.1.1.). Para cada producción, describimos su contenido matemático en base a los usos de la fracción y tipos de estructura de los argumentos, atendiendo a los códigos teóricos de los ejes conceptual y estructural descritos en el Capítulo 2.



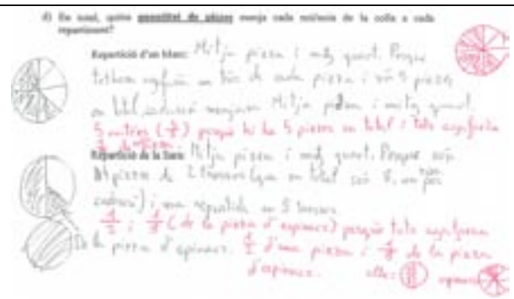
El de Marc. Porque así todos probarán un trozo de cada pizza. ***Pero el de Sara podemos comer un trozo más grande de una pizza pero prefiero el de Marc***.



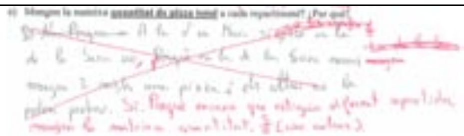
Reparto de Marc: *medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y están repartidas en 8 trozos.* ***1 octavo de pizza. Porque todos cogerán 1 trozo de esta pizza y todas están repartidas en ocho trozos. Por tanto 1 octavo = 1/8.***
Reparto de Sara: *media pizza. Porque solo dos personas cogerán medio trozo de pizza.* ***1/2 de pizza. Porque Sara ha cortado la pizza Margarita (y 3 más por la mitad y así solo dos personas pueden probar la pizza).***



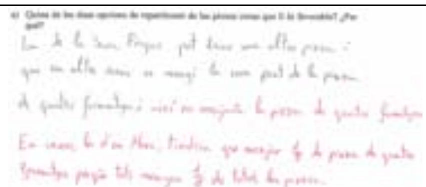
No. Porque en el de Marc todos cogerán 1 trozo a cada pizza y la de Sara solo dos cogerán 2 personas a cada pizza. ***No porque en el de Marc todos cogen 1 octavo (1/8) y en el de Sara solo 2 personas cogen 1/2.***



Reparto de Marc: *media pizza y medio cuarto. Porque todos cogerán un trozo de cada pizza y son 5 pizzas en total, cada uno comerá media pizza y medio cuarto* ***5 octavos (5/8) porque hay 5 pizzas en total y todos cogerán 1/8 de cada pizza***.
Reparto de Sara: *media pizza y medio cuarto. Porque son 4 pizzas de 2 trozos (que en total son 8, un trozo para cada uno) y una repartida en 8 trozos pizza espinacas* ***1/2 y 1/8 (de la pizza de espinacas) porque todos cogerán 1/2 de una pizza y 1/8 de la pizza de espinacas***.



Sí, porque aunque estén repartidas diferente, comen la misma cantidad, 5/8 (cinco octavos).



La de Sara porque puede escoger otra pizza y que otro amigo se coma su parte de la pizza de Cuatro quesos ***y así no comerá la pizza de Cuatro quesos. En cambio, el de Marc, tendrá que comer 1/8 de la pizza de Cuatro quesos porque todos comen 1/8 de todas las pizzas.***

Figura 22. Producción escrita individual de revisión de A_1 del problema 1

La producción escrita individual de revisión de A_1 en $P_1(M_3)$ indica que mejora el uso del significado de fracción parte-todo en un contexto continuo (Figura 22): a) conecta la información gráfica del enunciado con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para expresar las fracciones unitarias de los repartos (*1 octavo de pizza. Porque todos cogerán 1 trozo de esta pizza y todas están repartidas en ocho trozos. Por tanto 1 octavo = 1/8, tendrá que comer 1/8 de la pizza de Cuatro quesos porque todos comen 1/8 de todas las pizzas*); b) integra el lenguaje matemático-numérico y matemático-gráfico, con referencias al contexto extramatemático sugerido en el enunciado, para obtener las fracciones de los repartos; c) compara fracciones equivalentes y no equivalentes, conectando el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico (*Sí, porque aunque estén repartidas diferente, comen la misma cantidad, 5/8 cinco octavos*); d) suma fracciones de forma verbal y gráfica para establecer el reparto total (*5 octavos (5/8) porque hay 5 pizzas en total y todos cogerán 1/8 de cada pizza*).

Muestra avances al pasar de explicar a justificar su respuesta. Mejora sus garantías, al añadir otros respaldos que verifican sus conclusiones, mediante: a) el uso del contexto extramatemático sugerido por el enunciado; b) la comparación de fracciones equivalentes y no equivalentes; c) la significación de la fracción como parte de la unidad y como parte de un conjunto; d) la suma fracciones usando el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico. Sin embargo, aún hay aspectos de la comprensión de la fracción parte-todo que A_1 no ha incorporado en su respuesta como, por ejemplo, dotar de significado la suma de fracciones heterogéneas y conectar las representaciones gráfica y numérica de las fracciones no unitarias obtenidas en los repartos.

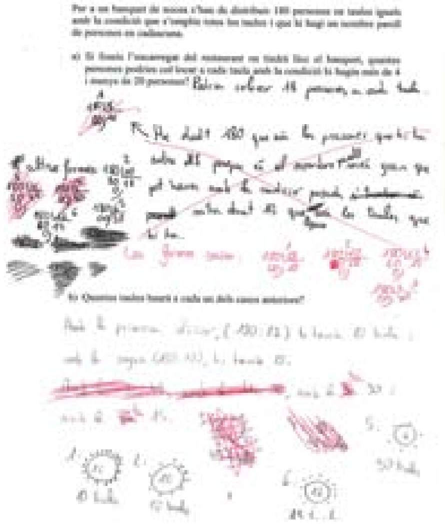
Pensándome el problema creo que la mejor opción es que una vaca está embarazada ya que el resultado de la suma de las fracciones que corresponden a cada hijo es la siguiente:

1/2 + 1/3 + 1/9 = 9/18 + 6/18 + 2/18 = 17/18

Y el hecho de que hay dieciocho vacas queda al descubierto. Si una vaca estuviese embarazada habría una vaca más y a cada hermano le tocarían las siguientes vacas:
Hermano mayor: 9 vacas + hijo de vaca.
Hermano mediano: 6 vacas
Hermano pequeño: 2 vacas

Figura 23. Producción escrita individual de revisión de A_2 del problema 2

La producción escrita individual de revisión de A_2 en $P_2(M_3)$ muestra pocos avances en la comprensión del enunciado (Figura 23). Aparentemente, apreciamos que mejora el uso del significado de la fracción como parte-todo en contexto discreto, pero su respuesta reelaborada no evidencia que comprenda el enunciado del problema. El hecho de incorporar la suma de fracciones y su resultado: *1/2 + 1/3 + 1/9 = 9/18 + 6/18 + 2/18 = 17/18* no está de acorde con el avance en las razones que respaldan al reparto. Establece argumentos desligados del propósito de la repartición (*Si una vaca estuviese embarazada habría una vaca más*) al omitir que no se reparten todas la unidades.



Podría colocar 18 personas en cada mesa. ***Las formas serían: 180 entre 18, 180 entre 10, 180 entre 6 y 180 entre 12.***
En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18. En la ***3ª*** *30 y con la* ***4ª*** *15.*

Figura 24. Producción escrita individual de revisión de A_1 del problema 3

En la respuesta revisida de A_1 en $P_3(M_3)$, advertimos mejoras en torno al significado de la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente cuando se reparten equitativamente las unidades (Figura 24): a) dota de significado a la fracción como parte de un conjunto al establecer todos los repartos equitativos posibles (*mesas*) con el mismo número de elementos (*personas*); b) aplica las dos restricciones del enunciado (*las formas serían: 180 entre 18, 180 entre 10, 180 entre 6 y 180 entre 12*); c) dota de significado a la fracción como expresión de un cociente de números enteros, al indicar qué representan las divisiones que realiza (*las formas serían (180:18) habrá 10 mesas… (180:10), habrá 18*); d) usa los conceptos de división exacta y divisor de un número natural; e) conecta el lenguaje no matemático del enunciado con el lenguaje matemático-verbal y matemático-gráfico de su respuesta, desestimando los repartos erróneos presentados en su producción individual inicial.

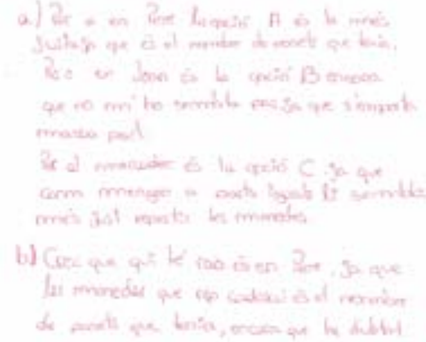
Apreciamos notables mejoras en sus explicaciones. Interpreta el enunciado del problema y elabora argumentos en base a los conceptos de reparto equitativo, divisores de un número natural y división exacta entre dos números enteros. Refleja que comprende el enunciado, al basar sus conclusiones en el reparto equitativo. Usa el lenguaje matemático-verbal y matemático-gráfico para explicar los cambios que considera oportunos al revisar y resolver correctamente el problema (*Podría colocar 18 personas en cada mesa. Las formas serían: 180 entre 18, 180 entre 10, 180 entre 6 y 180 entre 12. En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), habrá 18. En la 3ª 30 y con la 4ª 15*). Destacamos la ausencia de respaldos que justifiquen la solución.

Se lleva un huevo más porque pide una docena, que son 12 huevos pide de esta forma, se lleva trece, que es un huevo más.
Vendedor: Si yo fuese el vendedor, habría contado los huevos así estaría seguro de qué dar.
Espabilado: Si yo fuese el espabilado hubiese hecho el pedido como lo ha hecho él. Si el vendedor se hubiese enterado, hubiese cogido el dinero y me iría a otra tienda ***o directamente hubiese hecho bien el pedido.***

Figura 25. Producción escrita individual de revisión de A_1 del problema 4

La producción escrita individual de revisión de A_1 en $P_4(M_3)$ indica un avance en base al significado de fracción como relación parte-todo en este contexto y como cociente (Figura 25): a) mejora el significado de la fracción como parte de un conjunto al calcular de manera gráfica, numérica y verbal las unidades (*huevos*) de los repartos parciales y del reparto total; b) significa a la fracción como cociente de números enteros, al dividir *12* entre *2, 3* y *4*, para calcular los repartos parciales mediante el resultado de cada división; c) suma las unidades de los repartos parciales para obtener el reparto total (*la mitad 6, la cuarta parta parte 3 y la tercera parte 4).* No explicita el resultado de la suma de fracciones (*1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12*), aunque resuelve de forma implícita esta operación; d) mejora la conexión entre los registros asociados al lenguaje matemático, al incorporar la representación gráfica de cada uno de los repartos y añadir, en lenguaje matemático-verbal, las fracciones de cada reparto.

Pasa de explicar sus conclusiones a justificarlas. Aporta respaldos matemáticos vinculados con las garantías que ya había elaborado en M_1 para justificar su respuesta. Muestra que comprende la fracción impropia asociada al reparto total, y que es capaz de calcular y garantizar, mediante el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico, las unidades de los repartos parciales. Diferencia entre el reparto total y el parcial, al admitir que la repartición requiere más unidades de las disponibles, en conexión con el contexto extramatemático del problema (*Se lleva un huevo más porque pide una docena, que son 12 huevos pide de esta forma, se lleva trece, que es un huevo más*), (*la mitad 6, la cuarta parta parte 3 y la tercera parte 4*). Sin embargo, no aporta nuevos argumentos para validar el reparto desde diversas perspectivas en P_4(b).



Para Pere la opción A es la más justa ya que es el número de panes que tenía. Para Joan es la opción B aunque no me lo parece ya que se lleva mucha parte. Para el mercader es la opción C ya que como comen a partes iguales le parece más justo repartir las monedas.
Creo que quien tiene razón es Pere, ya que las monedas que recibe cada uno es el número de panes que tenía, aunque he dudado.

Figura 26. Producción escrita individual de revisión de A_2 del problema 5

En la producción escrita individual de revision de A_2 en $P_5(M_3)$, no detectamos mejoras respecto la respuesta inicial (Figura 17). Revisa y rectifica su producción pero vuelve a presentar un reparto carente de significado matemático al no usar la relación entre fracción y proporción. No avanza en la identificación de la fracción como razón, aunque intenta mejorar los argumentos que elabora en su revisión.

4.3.2. Análisis respecto al objetivo 3

Para lograr el tercer objetivo aplicamos I_1, de forma individual, a las producciones escritas individuales de revisión de los ocho alumnos cuando revisan sus respuestas para los cinco problemas de la secuencia (en total 40). Seguimos el esquema de análisis usado para alcanzar el primer objetivo. Mostramos la aplicación de este instrumento para las producciones revisadas de A_1 y de A_2 presentadas en la sección anterior a modo de ejemplo (Tablas 58-62). En las celdas de I_1, situamos ejemplos extraídos de los datos para analizar los ejes conceptual y estructural. Para cada tabla consideramos las celdas de los códigos que muestran información. A continuación, describimos los usos de la fracción y tipos de estructuras de los argumentos más destacados, para caracterizar las revisiones de los alumnos en M_3 y para ilustrar evidencias en torno a las mejoras producidas gracias a la interacción alumno-alumno.

Aplicación de I_1

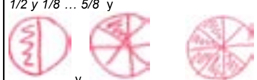
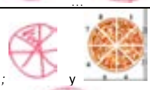
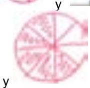
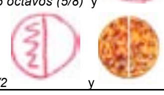
Eje estructural / Eje conceptual	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
	Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	*…No porque en el de Marc todos cogen 1 octavo (1/8) y en el de Sara solo 2 personas cogen 1/2*		(Añade): Reparto de Marc: *… 1 octavo de pizza. Porque todos cogerán 1 trozo de esta pizza y todas están repartidas en ocho trozos. Por tanto 1 octavo = 1/8.* (Añade): Reparto de Sara: *…1/2 de pizza. Porque Sara ha cortado la pizza margarita (y 3 más por la mitad) y así solo dos personas pueden probar la pizza.* 	
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*Sí, porque aunque estén repartidas diferente, comen la misma cantidad, 5/8 (cinco octavos).*	*… El de Marc. Porque así todos probarán un trozo de cada pizza.*	(Añade): Reparto de Marc: … 5 octavos (5/8) porque hay 5 pizzas en total y todos cogerán 1/8 de cada pizza. (Añade): Reparto de Sara: … 1/2 y 1/8 (de la pizza de espinacas) porque todos cogerán 1/2 de una pizza y 1/8 de la pizza de espinacas.	*(Añade): … Pero el de Sara pueden comer un trozo más grande de una pizza pero prefiero el de Marc.* *(Añade): … y así no comerá la pizza de cuatro quesos. En cambio, el de Marc, tendrá que comer 1/8 de la pizza de cuatro quesos porque todos comen 1/8 de todas las pizzas.*
Identificación de la fracción como cociente				
Comparación de fracciones	*…No…Marc todos cogen 1 octavo (1/8)… Sara solo 2 personas cogen 1/2.”* *“Sí… comen la misma cantidad, 5/8…*			
Aplicación de la equivalencia de fracciones			*Medio cuarto* y 1/8 - una porción de la pizza  *Media pizza y medio cuarto* - con “5/8” 	
Aplicación de métodos de suma de fracciones			*1/2 y 1/8 … 5/8* y  y …	
Conexión entre lenguajes y/o registros	*5/8 (cinco octavos).*		 *1 octavo = 1/8 ;* y  *5 octavos (5/8)* y  *1/2* y	
Uso del lenguaje no matemático			*1 trozo; ocho trozos*	*un trozo más grande; un trozo*
Uso del lenguaje matemático-verbal	*cinco octavos*		*5 octavos; 1 octavo*	
Uso del lenguaje matemático-numérico	*5/8*		*1/8; 1/2; 5/8*	*1/8*
Uso del lenguaje matemático-gráfico				

Tabla 58. Aplicación de I_1 a la producción escrita individual de revisión de A_1 en $P_1(M_3)$

El análisis de la respuesta revisada de A_1 en $P_1(M_3)$ refleja una mejora en su reconstrucción (Tabla 58). Advertimos un avance en torno a la identificación de la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto. A partir de la información que nos aporta el instrumento, intuimos que comprende el enunciado e interpreta todos los repartos. Prioriza el uso del reparto equitativo y, en el reparto restringido, prioriza el uso de la repartición que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles. Integra la fracción unitaria que representa el reparto de unidades. Mejora la aplicación de la equivalencia de fracciones y progresa en la suma de fracciones para calcular los repartos. Incorpora el uso de diversos registros asociados al lenguaje matemático, al mismo tiempo que conecta su aplicación. Desde un punto de vista estructural, apreciamos que corrige y amplia su respuesta, y que elabora algunos argumentos que garantizan o respaldan la solución de forma matemática o extramatemática. En general, verifica y mejora sus conclusiones, con el fin de ampliar o corregir la solución escrita y la representación gráfica generada en su producción individual inicial en M_1.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación con garantía
		Matemática
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*…a cada hermano le tocarían las siguientes vacas: Hermano mayor: 9 vacas + hijo de vaca. Hermano mediano: 6 vacas Hermano pequeño: 2 vacas*	
Distinción entre reparto total y reparto parcial	*…creo que la mejor opción es que una vaca está embarazada ya que el resultado de la suma de las fracciones … Y el hecho de que hay dieciocho vacas queda al descubierto. Si una vaca estuviese embarazada habría una vaca más…*	
Aplicación de la equivalencia de fracciones		$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}$
Aplicación de métodos de suma de fracciones		$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}\boxed{\frac{17}{18}}$
Conexión entre lenguajes y/o registros	Enunciado: *una mitad, un tercio y un noveno* con *1/2"; 1/3;* 1/9	
Uso del lenguaje no matemático	*una vaca está embarazada*	
Uso del lenguaje matemático-verbal	*dieciocho"; "una más*	
Uso del lenguaje matemático-numérico	*9 vacas; 6 vacas; 2 vacas*	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}\boxed{\frac{17}{18}}$

Tabla 59. Aplicación de I_1 a la producción escrita individual de revisión de A_2 en $P_2(M_1)$

El análisis de la producción individual de revisión de A_2 en $P_2(M_3)$ no refleja una mejora en su respuesta reconstruida (Tabla 59). Sigue sin comprender el enunciado, aunque intuye que las unidades a repartir no pueden fraccionarse. Los motivos que le conducen a estimar una unidad más en el reparto no están conectados con las razones matemáticas que validarían la repartición. Intenta encontrar motivos, una vez más, en consonancia con los repartos exactos, evitando repartir una unidad entre diversos individuos. En la elaboración de sus argumentos, conecta diferentes formas de representar a la fracción, al usar el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para expresar el reparto parcial o el total. Recalcula la cantidad total del reparto mediante la suma fracciones unitarias (*1/2 + 1/3 + 1/9*) y homogéneas (*9/18 + 6/18 + 2/18*). Expresa el resultado mediante la fracción impropia (*17/18*), pero omite su significado. Formula equivalencias entre fracciones al expresar la suma de repartos de dos maneras diferentes (*1/2 + 1/3 + 1/9 = 9/18 + 6/18 + 2/18*). Sin embargo, calcula los repartos parciales de manera incorrecta, mediante aproximaciones y condiciones adicionales que inventa e incorpora en su resolución.

Las razones que presenta y reelabora no apuntan hacia una mejora en la comprensión del enunciado del problema. El hecho de desarrollar de forma matemática el desarrollo de su respuesta (*1/2 + 1/3 + 1/9 = 9/18 + 6/18 + 2/18 = 17/18*) no está acorde con el avance en los argumentos usados en su respuesta revisada. No identifica la relación parte-todo en este contexto discreto y no diferencia entre el reparto total y el reparto parcial.

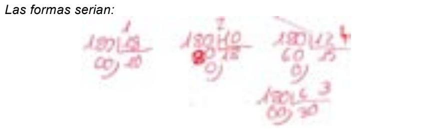
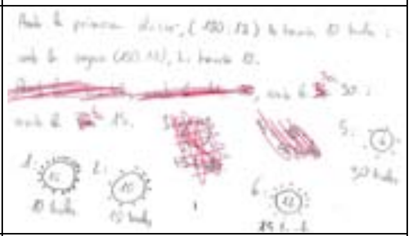
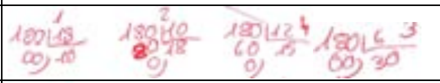
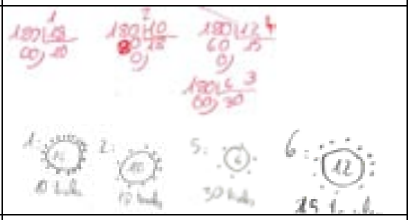
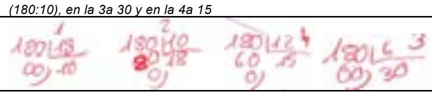
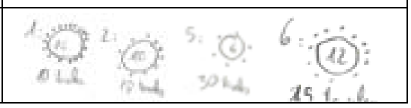
Eje estructural / **Eje conceptual**	Afirmación con garantía	Afirmación con respaldo
	Matemática	Matemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*Las formas serian:* 	
Identificación de la fracción como cociente		
Conexión entre lenguajes y/o registros	 *En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas*	
Uso del lenguaje matemático verbal	*En la primera división, (180:18) habrá 10 mesas y en la segunda (180:10), en la 3a 30 y en la 4a 15*	
Uso del lenguaje matemático-numérico		
Uso del lenguaje matemático-gráfico		

Tabla 60. Aplicación de I_1 a la producción escrita individual de revisión de A_1 en $P_3(M_3)$

El examen de la repuesta revisada de A_1 en $P_3(M_3)$ refleja mejoras respecto el significado de fracción como parte-todo en este contexto discreto y como cociente (Tabla 60). Demuestra que comprende el enunciado del problema al omitir repartos que no satisfacen las restricciones y al añadir todos los repartos. Significa a la fracción como cociente de números enteros dentro del contexto extramatemático del problema al indicar divisiones de forma numérica y gráfica. Usa el concepto de división exacta y de divisores de un número. Conecta el lenguaje matemático-verbal del enunciado con el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico de su respuesta.

Se evidencian mejoras en sus explicaciones al elaborar garantías y respaldos matemáticos que validan todas las distribuciones equitativas acordes con las restricciones. Mediante el uso del lenguaje matemático-numérico y matemático-gráfico, explica los cambios que considera oportunos para obtener todas las opciones de reparto, evitando un desajuste entre los datos y las afirmaciones que elabora.

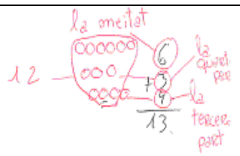
Eje estructural / **Eje conceptual**	Afirmación con respaldo	
	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	*Se lleva un huevo más porque pide una docena, que son 12 huevos pide de esta forma, se lleva trece, que es un huevo más.*	*Vendedor: Si yo fuese el vendedor, habría contado los huevos así estaría seguro de que dar. Espabilado: Yo fuese el espabilado hubiese hecho el pedido como lo ha hecho él. Si el vendedor se hubiese enterado, hubiese cogido el dinero y me iría a otra tienda o directamente hubiese hecho bien el pedido.*
Identificación de la fracción como cociente	*la mitad: 6"; "la tercera parte: 4"; "la cuarta parte: 3*	
Distinción entre reparto total y reparto parcial	*Se lleva un huevo más porque…*	*…habría contado los huevos así estaría seguro de qué dar.* *…me iría a otra tienda o directamente hubiese hecho bien el pedido.*
Aplicación de métodos de suma de fracciones		
Conexión entre lenguajes y/o registros	 *una docena; 12 huevos*  *…se lleva trece, que es un huevo más.* 	
Uso del lenguaje no matemático	*…se lleva trece, que es un huevo más.*	
Uso del lenguaje matemático-verbal	*una docena; la mitad; la tercera parte; la cuarta parte*	
Uso del lenguaje matemático-numérico	*12 huevos*	
Uso del lenguaje matemático-gráfico	 	

Tabla 61. Aplicación de I_1 a la producción escrita individual de revisión de A_1 en $P_4(M_3)$

Al analizar la producción individual de revisión de A_1 en $P_4(M_3)$, advertimos un avance respecto a su respuesta inicial (Tabla 61). Mejora el uso del significado de la fracción como parte de un conjunto en el que se reparten, de manera no equitativa, las unidades, al obtener la fracción del reparto de forma gráfica, numérica y verbal. Resuelve gráficamente la suma de las fracciones de cada reparto (*1/2 + 1/3 + 1/4*) y excluye la unidad sobrante en su representación. Dota de significado a la fracción como cociente al dividir *12* entre *2, 3* y *4* y expresar el resultado con lenguaje matemático-numérico y gráfico. Enriquece la conexión entre lenguajes al incorporar la representación gráfica de cada reparto parcial y enunciar la fracción que lo representa con lenguaje matemático-verbal.

Mejora su argumentación al pasar de explicaciones a justificaciones. Añade respaldos matemáticos para validar los repartos parciales y la coherencia de sus conclusiones. Comprende la fracción impropia asociada al reparto total y justifica la cantidad de unidades asociadas a los repartos parciales. Caracteriza la fracción del reparto total y admite que el reparto requiere más unidades de las disponibles. Aporta una nueva razón extramatemática para argumentar una nueva opción de reparto desde el punto de vista de cada uno de los personajes, mostrando que comprende el reparto.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía
Identificación de la fracción como razón	*Para Pere la opción A es la más justa ya que es el número de panes que tenía. Para Joan es la opción B aunque no me lo parece ya que se lleva mucha parte. Para el mercader es la opción C ya que como comen a partes iguales le parece más justo repartir las monedas.* *Creo que quien tiene razón es Pere, ya que las monedas que recibe cada uno es el número de panes que tenía, aunque he dudado.*
Comparación de fracciones	*Creo que quien tiene razón es Pere, ya que las monedas que recibe cada uno es el número de panes que tenía…*
Uso del lenguaje no matemático	*… la opción A es la más justa ya que es el número de panes que tenía. .. la opción B aunque no me lo parece ya que se lleva mucha parte. …la opción C ya que como comen a partes iguales le parece más justo repartir las monedas...* *Creo que quien tiene razón es Pere, ya que las monedas que recibe cada uno es el número de panes que tenía, aunque he dudado.*

Tabla 62. Aplicación de I_1 a la producción escrita individual de revisión de A_2 en $P_5(M_3)$

El análisis de la producción individual de revisión de A_2 en $P_5(M_3)$ refleja que no identifica a la fracción como razón (Tabla 62). Se limita a aportar un nuevo desajuste entre los datos y la garantía para validar otra opción de reparto incorrecta. Intenta presentar una forma de repartir que no es compatible con la relación fracción-proporción, reconstruyendo de forma insatisfactoria su solución.

Síntesis de la aplicación de I_1

Para reagrupar aspectos identificados en la aplicación del primer instrumento, recopilamos características, conceptuales y estructurales, de las producciones escritas individuales de revisión de cada participante en la resolución de los cinco problemas. De nuevo, utilizamos I_1 para sintetizar la aplicación de este instrumento para:

- Las producciones escritas individuales de revisión de cada alumno al reconstruir las respuestas a los cinco problemas. En la tabla, no incluimos ejemplos de datos y, en las celdas, indicamos el problema y el apartado que revisa el alumno. Tal y como realizamos en el análisis de las respuestas iniciales, para el primer problema, indicamos con el subíndice (1) el reparto de Marc y con el subíndice (2) el reparto de Sara. De esta forma, volvemos a recombinar los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos de las producciones escritas de los alumnos. Solo mostramos la síntesis de las respuestas de A_1 y A_2 al resolver todos los problemas (Tablas 63 y 64), conectando con los ejemplos que hemos mostrado con anterioridad. El resto de tablas aparecen en el Anexo 13.

- Las producciones escritas individuales de revisión de los alumnos al resolver cada uno de los problemas de la secuencia. En la tabla no aparecen ejemplos de datos. En las celdas, presentamos el alumno y el apartado que revisa, en base a cada combinación de los ejes conceptual y estructural. Obtenemos una reagrupación de las características conceptuales y estructurales en torno a todas las revisiones en la resolución de una tarea concreta. Ilustramos la síntesis de las reconstrucciones de todos los alumnos en la resolución de cada problema (Tablas 65-69).

- Todas las producciones escritas individuales iniciales y de revisión de todos los alumnos en la resolución de los cinco problemas (Tabla 70). En cada celda, cuantificamos el total de respuestas iniciales y revisadas para cada combinación conceptual-estructural. Representamos mediante círculos de color azul (respuestas iniciales) y de color verde (respuesas revisadas), de un diámetro proporcional a la cantidad que representan, los valores de cada combinación. Reagrupamos los usos de la fracción y los tipos de estructuras de los argumentos de todas las producciones escritas. Comparamos el total de respuestas iniciales y revisadas de cada celda y señalamos de color amarillo aquellas combinaciones que reflejan mejoran en las reconstrucciones. Caracterizamos los usos de la fracción y el tipo de estructura de los argumentos implicados en las producciones de los alumnos para obtener resultados más generales.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo			P1(c)		P1(b)	P1(a) P1(f)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P2		P3		P1(d) P1(e) P3 P4(a)	P1(a) P1(f) P4(b)
Identificación de la fracción como cociente	P2		P3		P3 P4(a)	
Identificación de la fracción como razón	P5					
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P2				P4(a)	P4(b)
Comparación de fracciones	P5		P1(c)		P1(e) P4(a)	P4(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones					P1(b)	
Aplicación de métodos de suma de fracciones	P2				P1(d) P1(e) P4(a)	
Conexión entre lenguajes y/o registros	P2		P1(c) P3		P1(b) P1(d) P1(e) P3 P4(a)	P1(f)
Uso del lenguaje no matemático	P2 P5				P1(b) P1(d) P4(a)	P1(a) P1(f) P4(b)
Uso del lenguaje matemático-verbal	P2		P1(c) P3		P1(b) P1(d) P1(e) P3 P4(a)	
Uso del lenguaje matemático-numérico	P2		P1(c) P3		P1(b) P1(d) P1(e) P4(a)	P1(f)
Uso del lenguaje matemático-gráfico					P1(d) P3 P4(a)	

Tabla 63. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas revisadas de A_1 en M_3

Caracterizamos las producciones individuales de revisión de A_1 en la resolución de todos los problemas a partir de los resultados obtenidos al aplicar I_1 para todas las respuestas reconstruidas (Tabla 63). La síntesis de la aplicación de I_1 a las cinco producciones escritas de A_1 en M_3 indica que produce desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_2 no identifica la relación parte-todo en contexto discreto y como cociente en una situación que no reparte todas las unidades. No diferencia entre el reparto total y el parcial y presenta ideas erróneas en torno al reparto. No advierte que una parte del conjunto no participa en la repartición y no valida la suma de fracciones que aplica en su revisión. Conecta el lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para producir nuevos argumentos ajenos al reparto; b) en P_5 no significa a la fracción como razón al no interpretarla como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades. En esta ocasión, solo usa el lenguaje no matemático para exponer argumentos que omiten criterios de razón y de proporción.

Elabora una argumentación débil al desarrollar afirmaciones con garantías matemáticas cuando: a) en P_1(c) identifica la relación parte-todo en contexto continuo al presentar los dos repartos y comparar las fracciones que los representan. En su revisión, añade argumentos usando el lenguaje matemático-numérico en conexión con el lenguaje no matemático; b) en P_3 significa a la fracción como parte de un conjunto en el que se reparten equitativamente todas las unidades y como cociente. Mejora su explicación, de manera verbal y numérica, en base a diversos repartos restringidos.

Produce una argumentación fuerte al mostrar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) indica la cantidad de unidad de cada reparto y asigna una equivalencia entre la fracción del reparto y la fracción unitaria del enunciado. Identifica la relación parte-todo en contexto continuo mediante la elaboración de una argumentación sólida en torno a los repartos. Conecta el lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico; b) en P_1(d) identifica la relación parte-todo en contexto discreto al sumar las fracciones de los repartos y establece el reparto total. En su reconstrucción, conecta el uso del lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico; c) en P_3 dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto al repartir, en conjuntos de igual amplitud, las unidades. Justifica, de manera informal y gráfica, una de las opciones de reparto en base a las restricciones del enunciado.

Muestra una argumentación fuerte al presentar afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) mejora sus argumentos para priorizar la elección del reparto equitativo respecto al reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles, identificando, de manera informal, la relación parte-todo en contexto continuo y discreto; b) en P_1(f) reelabora sus argumentos en base a las restricciones del problema, de forma numérica e informal, para descartar el reparto equitativo. Dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto; c) en P_4(b) justifica otras opciones de reparto, desde el punto de vista de cada uno de los personajes, mostrando que comprende las condiciones. Realiza una serie de conjeturas extramatemáticas que le permiten diferenciar entre el reparto total y el parcial.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo					P1(b) P1(c)	P1(a)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	P2		P1(d)		P1(e) P3 P4(a)	P1(a) P1(f) P4(b)
Identificación de la fracción como cociente				P2	P3 P4 (a)	
Identificación de la fracción como razón	P5					
Distinción entre reparto total y reparto parcial	P2				P4(a)	P4(b)
Comparación de fracciones	P5				P1(c) P1(e) P4(a)	P1(f) P4(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones	P5			P2	P1(e)	
Aplicación de métodos de suma de fracciones	P2		P1(d1)	P2	P1(e) P4(a)	
Conexión entre lenguajes y/o registros	P2 P5				P3 P4(a)	
Uso del lenguaje no matemático	P2					P1(a)
Uso del lenguaje matemático-verbal	P2 P5		P1(d)		P1(b) P1(c) P1(e) P3 P4(a)	P1(f) P4(b)
Uso del lenguaje matemático-numérico	P2 P5			P2	P3 P4(a)	
Uso del lenguaje matemático-gráfico	P5					

Tabla 64. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas revisadas de A_2 en M_3

Los resultados que obtenemos tienen que ver con la caracterización de las producciones individuales de revisión de A_2 al resolver los cinco problemas (Tabla 64). Al sintetizar la aplicación de I_1 a las cinco producciones escritas de A_2 en M_3, advertimos que elabora desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_2 no dota de significado a la fracción como parte-todo en este contexto. No diferencia entre el reparto total y el reparto parcial, y no interpreta que una parte del conjunto no interviene en el reparto. Reelabora su argumentación pero no valida la suma de fracciones; b) en P_5 no identifica a la fracción como índice comparativo entre dos conjuntos de unidades, al revisar y modificar sus argumentos matemáticos (verbales, numéricos y gráficos).

Muestra una argumentación débil al aportar afirmaciones con garantías matemáticas cuando: a) en P_1(d) identifica la relación parte-todo en un contexto discreto. Suma fracciones, de forma verbal, y obtiene el reparto total equitativo, pero no amplía su respuesta con el cálculo de la fracción que representa el reparto total que distribuye las unidades en el mínimo número de cortes posibles.

Ofrece una argumentación débil al elaborar en su revisión afirmaciones con garantías extramatemáticas cuando: a) en P_2 dota de significado a la fracción como cociente al usar las fracciones unitarias de los repartos, aplicar equivalencias entre las fracciones y calcular numéricamente la fracción del reparto total. No diferencia entre el reparto total y el parcial.

Elabora una argumentación fuerte, en múltiples respuestas revisadas, al mostrar afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) calcula la fracción de los repartos, utilizando el lenguaje matemático-verbal. Identifica la relación parte-todo en contexto continuo; b) en P_1(c) compara las fracciones de los repartos a través del uso del lenguaje matemático-verbal; c) en P_1(e) compara los repartos y establece que son equivalentes. Suma fracciones para calcular, de forma verbal, la fracción que representa el reparto total. Identifica la relación parte-todo en contexto discreto; d) en P_3 dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente al justificar todas las opciones de reparto restringido. Desestima los repartos que no satisfacen las restricciones y que había presentado en su respuesta inicial. Conecta el uso del lenguaje matemático-verbal con el lenguaje matemático-numérico; e) en P_4(a) dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto cuando se reparten más unidades de la disponibles y como cociente, diferenciando entre el reparto total y el parcial. Justifica la suma de fracciones y obtiene el reparto total. Usa el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico.

Desarrolla una argumentación fuerte al formular afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto continuo y discreto. Elabora argumentos y prioriza, de manera informal, el uso del reparto equitativo; b) en P_1(f) dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto al justificar el reparto. Compara las fracciones de los repartos de manera formal, y prioriza uno de los repartos; c) en P_4(b) justifica otros repartos. Elabora argumentos en base a las restricciones y diferencia entre el reparto total y el reparto parcial. Usa el lenguaje matemático-verbal en el desarrollo de su justificación.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	A3-(b2) A6-(b) A8-(b2)	A4-(b)	A1-(c) A3-(b1) A7-(b,c) A8-(b1)		A1-(b1) A2-(b,c) A3-(b1,c) A4-(c) A5-(b,c) A6-(c) A8-(c)	A1-(a,f) A2-(a)
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A4-(d1) A6-(a) A8-(d2,e2)	A4-(d2)	A2-(d) A3-(d1) A8-(d1, e1)	A3-(a)	A1-(d,e) A2-(e) A4-(e) A5-(d) A6-(d,e) A7-(d,e)	A1-(a,f) A2-(a,f) A3-(d2,e,f) A4-(a,f) A5-(a,e,f) A6-(f) A7-(a,f) A8-(a,f)
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones	A6-(a)		A1-(c) A7-(c)		A1-(e) A2-(c) A3-(c) A4-(c,e) A5-(c) A7-(e) A8-(c)	A2-(f) A3-(d2,e) A5-(f) A7-(a,f)
Aplicación de la equivalencia de fracciones					A1-(b1) A2-(e) A5-(b) A7-(d)	
Aplicación de métodos de suma de fracciones	A4-(d1) A8-(b2,c,d2,e2)		A2-(d1) A3-(d1) A8-(d1, e1)		A1-(d,e) A2-(e) A4-(c,d) A6-(d1) A7-(d,e)	
Conexión entre lenguajes y/o registros	A3-(b2) A4-(d1) A6-(b) A8-(b2,e2)	A4-(d2)	A1-(c) A3-(b1) A7-(b,c) A8-(b1,e1)		A1-(b,d,e) A3-(c) A4-(c,e) A5-(b) A6-(c,e) A7-(d) A8-(c)	A1-(f) A3-(d2,e) A4-(a.f) A5-(e,f) A6-(f) A7-(a)
Uso del lenguaje no matemático	A3-(b2) A4-(d1) A6-(a,b) A8-(b2)	A4-(b)	A3-(b1) A7-(c) A8-(b1,e1)	A3-(a)	A1-(b,d) A3-(c) A4-(c,e) A5-(b,d) A6-(c,e) A8-(c)	A1-(a,f) A2-(a) A3-(d2,e,f) A5-(a,e,f) A6-(f) A8-(a,f)
Uso del lenguaje matemático-verbal	A3-(b2) A4-(d1) A8-(b2,e2)	A4-(d2)	A1-(c) A2-(d) A3-(b1)		A1-(b,d,e) A2-(b,c,e) A4-(c,e) A5-(b,c,d) A6-(c) A7-(d) A8-(c)	A2-(f) A3-(d2,e) A4-(a,f) A5-(e,f) A6-(f) A8-(a,f)
Uso del lenguaje matemático-numérico	A4-(d1) A6-(b) A8-(b2,c,d2,e2)	A4-(b,d2)	A1-(c) A3-(d1) A7-(b) A8-(b1,d1, e1)		A1-(b,d,e) A4-(c,e) A6-(c,d,e) A7-(d,e) A8-(c)	A1-(f) A4-(a,f) A6-(f) A7-(a)
Uso del lenguaje matemático-gráfico			A7-(b,c)		A1-(d) A5-(d)	

Tabla 65. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_1(M_3)$

Los resultados que obtenemos están relacionados con la caracterización de las producciones escritas individuales de revisión de todos los alumnos en la resolución del primer problema (Tabla 65). Seguimos el mismo método de trabajo que habíamos aplicado para sintetizar todas las respuestas iniciales de los alumnos en 4.1.2.

La síntesis de la aplicación de I_1 a las producciones escritas revisadas de todos los alumnos en una etapa inicial posterior a la interacción indica que en P_1 se elaboran desajustes entre los datos y las garantías cuando: a) en P_1(a) un alumno (A_6) no significa a la fracción como parte-todo en contexto discreto al argumentar, informalmente y de manera incorrecta, la elección del reparto; b) en P_1(b) tres alumnos (A_3, A_6 y A_8) no identifican la relación parte-todo en contexto continuo y explican cómo obtienen la fracción de los repartos. A_3 conecta el uso del lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para indicar la fracción. A_6 utiliza el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-numérico para mostrar la fracción del reparto. A_8 suma fracciones, de forma verbal y numérica, para obtener la fracción del reparto; c) en P_1(d) dos alumnos (A_4 y A_8) no establecen la fracción total de los repartos. No identifican la relación parte-todo en contexto discreto al sumar fracciones de forma incorrecta. Elaboran argumentos usando el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico; d) en P_1(e) un alumno (A_8) no interpreta la equivalencia entre las fracciones de los repartos ni la suma de fracciones para dar el reparto total.

En sus revisiones, elaboran una argumentación muy débil al desarrollar afirmaciones sin garantía cuando: a) en P_1(b) un alumno (A_4) indica, sin argumentar, la fracción asociada a los repartos. Identifica la relación parte-todo en contexto continuo sin apoyarse en garantías que la verifiquen. Utiliza el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-numérico; b) en P_1(d) un alumno (A_4) indica directamente las fracciones de los repartos.

Muestran una argumentación débil al presentar afirmaciones con garantía matemática cuando: a) en P_1(b) tres alumnos (A_3, A_7, A_8) significan a la fracción como parte-todo en contexto continuo. Reelaboran argumentos para validar la fracción de los repartos. Solo A_7 usa la representación gráfica; b) en P_1(c) dos alumnos (A_1, A_7) explican cómo comparan las fracciones que obtienen para cada reparto, significando a la fracción como parte-todo en contexto continuo. A_1 utiliza, en la revisión de sus argumentos, el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico. A_7 expresas sus conclusiones mediante el lenguaje no matemático en conexión con la representación gráfica del reparto; c) en P_1(d) tres alumnos (A_2, A_3 y A_8) argumentan la fracción del reparto total, identificando la relación parte-todo en contexto discreto. Suman fracciones de forma verbal y numérica para obtener el reparto total; d) en P_1(e) A_8 establece que los repartos son equivalentes, y se apoya en la aplicación de métodos de suma de fracciones para calcular la fracción total del reparto equitativo. Dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto.

Presentan una argumentación débil al elaborar afirmaciones con garantía extramatemática cuando, en P_1(a), A_3 significa a la fracción como parte-todo en contexto discreto. Elabora argumentos extramatemáticos, basados en sus preferencias, para priorizar la elección del reparto equitativo.

Al revisar sus conclusiones, apreciamos que formulan una argumentación fuerte en base a afirmaciones con respaldos matemáticos cuando: a) en P_1(b) cuatro alumnos (A_1, A_2, A_3 y A_5) verifican la manera de calcular la fracción del reparto. Identifican la relación parte-todo en contexto continuo usando el lenguaje no matemático y los diversos registros del lenguaje matemático; b) en P_1(c) seis alumnos (A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_8) comparan fracciones y mejoran sus argumentos para indicar que los repartos no son equivalentes. A_4 suma fracciones, obtiene las fracciones de los repartos totales y las compara. En general, usan el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para elaborar sus respaldos; c) en P_1(d) cinco alumnos (A_1, A_4, A_5, A_6, A_7) significan a la fracción como parte-todo en contexto discreto. A_1, A_4, A_6, A_7 argumentan la suma de fracciones y la cantidad que representa el reparto. Algunos utilizan el lenguaje no matemático en conexión con algún registro del lenguaje matemático. Otros solo usan el lenguaje matemático para justificar su respuesta; d) en P_1(e) cinco alumnos (A_1, A_2, A_4, A_6, A_7) identifican la relación parte-todo en contexto discreto al establecer que los repartos son equivalentes. A_1, A_2 y A_7 usan métodos de suma de fracciones para justificar las fracciones totales de los repartos y compararlas. A_2 establece equivalencias entre las fracciones de los repartos. Dos alumnos (A_4 y A_6) conectan el uso del lenguaje matemático con el no matemático. Dos alumnos se expresan de manera informal, tres alumnos utilizan el lenguaje matemático-verbal y cuatro alumnos usan el lenguaje matemático-numérico para justificar su respuesta. Ninguno utiliza la representación gráfica de los repartos.

Elaboran una argumentación fuerte al producir afirmaciones con respaldos extramatemáticos cuando: a) en P_1(a) dos alumnos (A_1 y A_2) significan a la fracción como parte de una unidad, y seis alumnos (A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_8) significan a la fracción como parte de un conjunto. Justifican la comparación de las fracciones de los repartos y priorizan el uso del reparto equitativo. Además, A_7 utiliza la comparación de fracciones para realizar la elección; b) en P_1(d_2) A_3 identifica la relación parte-todo en contexto discreto al comparar las fracciones de los repartos, y la justifica mediante argumentos extramatemáticos. Usa el lenguaje no matemático en conexión con el lenguaje matemático-verbal; c) en P_1(e) A_3 compara las fracciones de los repartos, identificando la relación parte-todo en contexto discreto y A_5, de forma no matemática y matemático-verbal, muestra razones para justificar el reparto; d) en P_1(f) todos los alumnos justifican la comparación de los repartos, dotando de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto. Priorizan la elección de un reparto en base a la restricción. Tres alumnos (A_2, A_5 y A_7) usan la comparación de fracciones para reelaborar sus conclusiones. Cuatro alumnos (A_1, A_4, A_5 y A_6) usan diversos tipos de lenguaje en sus revisiones. Cinco alumnos usan el lenguaje no matemático para elaborar respaldos. Cinco alumnos utilizan el lenguaje matemático-verbal en sus desarrollos. Tres alumnos expresan mediante el lenguaje matemático-numérico su respuesta. Ningún alumno usa la representación gráfica de los repartos para elaborar respaldos.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Identificación de la fracción como cociente	A1 A3 A4 A5 A6 A7 A8			A2		
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones				A2		
Aplicación de métodos de suma de fracciones	A1 A2	A5 A6		A2		
Conexión entre lenguajes y/o registros	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8	A6				
Uso del lenguaje no matemático	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8	A6				
Uso del lenguaje matemático-verbal	A1 A2 A6					
Uso del lenguaje matemático-numérico	A1 A2 A3 A4 A7 A8	A5 A6		A2		
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A7 A8					

Tabla 66. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_2(M_3)$

A partir de los resultados logrados, caracterizamos las producciones individuales de revisión de todos los alumnos al resolver el segundo problema (Tabla 66). La síntesis de la aplicación de I_1 a las revisiones de los alumnos muestra que en P_2 dos alumnos presentan alguna garantía cuando suman fracciones, o establecen equivalencias de fracciones. Sin embargo, este hecho no indica que comprendan el enunciado del problema. Apreciamos que todos dan desajustes entre los datos y las garantías para identificar la relación parte-todo en este contexto discreto en el que no se reparten todas las unidades y como cociente. No distinguen entre el reparto total y el parcial al no contemplar que una parte de las unidades no participa en el reparto. Argumentan repartos incorrectos.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	A6		A1 A4 A5 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A3 A5
Identificación de la fracción como cociente	A6		A1 A4 A5 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A5
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones						
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones					A7	
Conexión entre lenguajes y/o registros	A6		A1 A4 A6 A8		A1 A2 A3 A7	A5
Uso del lenguaje no matemático	A6		A4 A6		A3	A5
Uso del lenguaje matemático-verbal			A1 A5 A8		A1 A2 A7	A5
Uso del lenguaje matemático-numérico	A6		A1 A4 A6 A8		A2 A3 A7	A3 A5
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A6				A1 A3 A7	A3

Tabla 67. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_3(M_3)$

A partir de los resultados alcanzados, caracterizamos las producciones escritas individuales de revisión de todos los alumnos en la resolución del tercer problema (Tabla 67). La síntesis de la aplicación de I_1 a las respuestas revisadas refleja que solo A_6 elabora desajustes entre los datos y las garantías cuando no presenta todas las opciones de reparto compatibles con las restricciones. Omite el significado de la fracción como parte-todo en contexto discreto. Sin embargo, la mayoría de alumnos mejora su respuesta al rectificar o ampliar algunos repartos.

Si nos centramos en la producción de una argumentación débil, advertimos que elaboran afirmaciones con garantía matemática cuando en P_3 cinco alumnos (A_1, A_4, A_5, A_6 y A_8) revisan algunas opciones de reparto, en base a las restricciones. Significan a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente, e incluyen todas las opciones de reparto posibles. Cuatro alumnos (A_1, A_4, A_6 y A_8) conectan el uso de diversos tipos de lenguaje en su revisión. A_4 y A_6 utilizan el lenguaje no matemático; A_1, A_5 y A_8 se expresan a través del lenguaje matemático-verbal; y A_1, A_4, A_6 y A_8 exponen parte de sus resultados mediante el lenguaje matemático-numérico. Ningún alumno usa la representación gráfica para mejorar sus respuestas.

Los alumnos muestran una argumentación fuerte al conjeturar mediante afirmaciones con respaldo matemático cuando en P_3 cuatro alumnos (A_1, A_2, A_3, A_7) revisan su respuesta y justifican todas las opciones de reparto que formulan siguiendo las restricciones. Dotan de significado a la fracción como parte de un conjunto y como cociente. A_1 utiliza el lenguaje matemático-verbal y matemático-gráfico en la revisión de sus conclusiones. A_2 conecta el uso del lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para reelaborar sus argumentos. A_3 se expresa de manera informal y formal. A_7 basa sus argumentos en la suma de fracciones de forma verbal, numérica y gráfica.

Presentan una argumentación fuerte al elaborar afirmaciones con respaldo extramatemático cuando, en P_3, dos alumnos (A_3, A_5) revisan algunas opciones de reparto ya elaboradas en M_1 y añaden nuevos argumentos para dar otras opciones de reparto. Estos dos alumnos identifican la relación parte-todo en contexto discreto, y A_5 muestra divisiones para calcular el reparto en su reconstrucción significando a la fracción como cociente. A_3 usa el lenguaje matemático-numérico y matemático-gráfico para reelaborar su respuesta. A_5 conecta el uso del lenguaje no matemático con el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico cuando desarrolla respaldos.

Eje conceptual \ Eje estructural	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto			A7-(a)	A7-(b)	A1-(a) A2-(a) A3-(a) A4-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A1-(b) A2-(b) A3-(b) A4-(b) A5-(b) A6-(b) A8-(b)
Identificación de la fracción como cociente			A7-(a)		A1-(a) A2-(a) A3-(a) A4-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A3-(b) A5-(b) A6-(b) A8-(b)
Identificación de la fracción como razón						
Distinción entre reparto total y reparto parcial			A7-(a)		A1-(a) A2-(a) A3-(a) A4-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A1-(b) A2-(b) A3-(b) A4-(b) A5-(b) A6-(b) A8-(b)
Comparación de fracciones			A7-(a)		A1-(a) A2-(a) A3-(a) A4-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A1-(b) A2-(b) A5-(b) A6-(b) A8-(b)
Aplicación de la equivalencia de fracciones						
Aplicación de métodos de suma de fracciones			A7-(a)	A7-(b)	A1-(a) A2-(a) A3-(a) A4-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A3-(b) A5-(b) A6-(b) A8-(b)
Conexión entre lenguajes y/o registros			A7-(a)	A7-(b)	A1-(a) A2-(a) A3-(a) A4-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A3-(b) A5-(b) A6-(b) A8-(b)
Uso del lenguaje no matemático					A1-(a) A4-(a) A5-(a)	A1-(b) A4-(b) A6-(b) A8-(b)
Uso del lenguaje matemático-verbal					A1-(a) A2-(a) A3-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A2-(b) A3-(b) A5-(b) A8-(b)
Uso del lenguaje matemático-numérico			A7-(a)	A7-(b)	A1-(a) A2-(a) A3-(a) A5-(a) A6-(a) A8-(a)	A3-(b) A5-(b) A6-(b)
Uso del lenguaje matemático-gráfico			A7-(a)	A7-(b)	A1-(a) A3-(a) A4-(a) A8-(a)	A3-(b) A8-(b)

Tabla 68. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_4(M_3)$

Los resultados que hemos alcanzado nos permiten caracterizar las producciones individuales de revisión de todos los alumnos en la resolución del cuarto problema (Tabla 68). La síntesis de la aplicación de I_1 a las revisiones refleja que solo A_7 elabora una argumentación débil cuando presenta afirmaciones con garantía matemática y extramatemática al resolver P_4(a) y P_4(b), respectivamente. Primero, revisa sus argumentos formales, numéricos y gráficos, a partir de las fracciones unitarias de los repartos para concluir que, en el reparto total, se distribuyen más unidades de las disponibles. Revisa el doble recuento realizado, la suma de fracciones que da para obtener la fracción total y la distinción entre el reparto total y el parcial. Después, revisa la forma de explicar de qué manera hubiese realizado el pedido, dando diversos repartos. Dota de significado a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente.

Elaboran una argumentación fuerte al presentar afirmaciones con respaldo matemático cuando en P_4(a) todos los alumnos, excepto $A_{7,}$ revisan y amplían sus conclusiones al justificar todas las opciones de reparto. Identifican la relación parte-todo en este contexto discreto y significan a la fracción como cociente. Revisan la diferencia entre el reparto total y el reparto parcial, la comparación de las fracciones de los repartos y la suma de fracciones que desarrollan para obtener el reparto total. En algunas ocasiones, añaden la fracción de los repartos de forma numérica y gráfica.

Advertimos una argumentación fuerte al mostrar afirmaciones con respaldo extramatemático cuando en P_4(b) todos los alumnos, excepto $A_{7,}$ revisan y amplían algunos argumentos para validar los repartos desde diversas perspectivas. Utilizan la relación parte-todo en este contexto discreto con restricciones. Repasan cómo comparan las fracciones de los repartos para distinguir entre el reparto parcial y el total. Revisan la suma de fracciones y cómo respaldan diversas opciones de reparto que protagonizan. Algunos alumnos mejoran su uso del lenguaje.

Eje estructural / Eje conceptual	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo						
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto						
Identificación de la fracción como cociente						
Identificación de la fracción como razón	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Distinción entre reparto total y reparto parcial						
Comparación de fracciones	A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Aplicación de la equivalencia de fracciones	A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8					
Aplicación de métodos de suma de fracciones						
Conexión entre lenguajes y/o registros	A2 A3 A5 A8					
Uso del lenguaje no matemático	A1 A4 A5 A6 A7 A8					
Uso del lenguaje matemático-verbal	A2 A3 A5					
Uso del lenguaje matemático-numérico	A2					
Uso del lenguaje matemático-gráfico	A2 A3 A8					

Tabla 69. Síntesis de I_1 para todas las producciones escritas en $P_5(M_3)$

Los resultados recopilados nos sirven para caracterizar las producciones individuales de revisión en la resolución del quinto problema (Tabla 69). No ajustan las garantías a los datos del enunciado, omitiendo el significado de la fracción como razón. Aunque elaboran garantías verbales, numéricas y gráficas, no comparan correctamente las fracciones de los repartos. Tampoco revisan de manera satisfactoria la aplicación de equivalencias entre las fracciones de los repartos. Ningún alumno mejora su respuesta inicial, reflejando incomprensión en el enunciado del problema.

Eje estructural / **Eje conceptual**	Desajuste datos y garantía	Afirmación sin garantía	Afirmación con garantía		Afirmación con respaldo	
			Matemática	Extramatemática	Matemático	Extramatemático
Identificación de la relación parte-todo en contexto continuo	9 / 3	1 / 1	6 / 5	0 / 0	4 / 10	0 / 3
Identificación de la relación parte-todo en contexto discreto	34 / 13	1 / 1	9 / 10	4 / 2	14 / 21	14 / 26
Identificación de la fracción como cociente	15 / 9	0 / 0	5 / 6	0 / 1	9 / 11	3 / 5
Identificación de la fracción como razón	8 / 8	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
Distinción entre reparto total y reparto parcial	12 / 8	0 / 0	1 / 1	1 / 0	5 / 7	5 / 7
Comparación de fracciones	21 / 9	1 / 0	2 / 3	0 / 0	10 / 15	9 / 11
Aplicación de la equivalencia de fracciones	6 / 7	0 / 0	0 / 0	0 / 1	3 / 4	1 / 0
Aplicación de métodos de suma de fracciones	12 / 7	0 / 2	3 / 5	1 / 2	10 / 16	4 / 4
Conexión entre lenguajes y/o registros	36 / 18	2 / 3	10 / 11	2 / 1	14 / 22	8 / 14
Uso del lenguaje no matemático	40 / 20	0 / 2	8 / 6	1 / 1	10 / 15	6 / 17
Uso del lenguaje matemático-verbal	21 / 10	1 / 1	7 / 6	0 / 0	16 / 23	6 / 14
Uso del lenguaje matemático-numérico	24 / 15	2 / 4	6 / 11	2 / 2	15 / 22	6 / 10
Uso del lenguaje matemático-gráfico	12 / 5	0 / 0	4 / 3	1 / 1	6 / 9	2 / 3

Tabla 70. Síntesis comparativa de la aplicación de I_1 en M_1 y M_3

Mediante la Tabla 70, sintetizamos la aplicación del instrumento I_1 para todas las producciones de iniciales y de revisión de los alumnos cuando resuelven los cinco problemas. Diferenciamos por colores el recuento realizado para las producciones escritas individuales iniciales (color azul) y para las producciones de revisión (color verde). Comparamos la aplicación del primer instrumento para las respuestas de M_1 y M_3 para mostrar evidencias de cómo el trabajo en pareja influye en la construcción de conocimiento matemático en un aula de matemáticas. Remarcamos de color amarillo las celdas que muestran avances en la reconstrucción de las respuestas de los alumnos, con el fin de presentar resultados en torno a la influencia de la interacción alumno-alumno en la resolución de los problemas.

En primer lugar, advertimos que en las reconstrucciones disminuye el número de desajustes entre los datos y las garantías. Los alumnos mejoran su respuesta cuando: a) en 6 revisiones, identifican la relación parte-todo en contexto continuo en la resolución de P_1; b) en 21 ocasiones, significan a la fracción como parte-todo en contexto discreto al resolver P_1 y P_4; c) en 6 reconstrucciones, dotan de significado a la fracción como cociente al obtener los repartos en P_3 y P_4. Destacamos que todos los alumnos, excepto $A_{6,}$ reconstruyen su respuesta para indicar todas las opciones de reparto restringidas en P_3; d) en 4 revisiones, reconstruyen su respuesta para indicar la diferencia entre el reparto parcial y el total al resolver la situación propuesta en P_4; e) en 12 reconstrucciones, saben modificar sus argumentos al comparar las fracciones de los repartos en P_1 y P_4; f) en 5 revisiones, desestiman los desajustes producidos en M_1 y reelaboran garantías y respaldos que avalan la suma de fracciones para calcular el reparto en P_1, P_3 y P_4.

En segundo lugar, evidenciamos que en algunas reconstrucciones, se producen mejoras respecto a los argumentos desarrollados en M_1. Por una parte, reelaboran garantías matemáticas cuando: a) en 2 revisiones, argumentan el significado de la fracción como cociente al resolver P_3; b) en 3 revisiones, garantizan la comparación de las fracciones asociadas a los repartos en P_1. Por otra parte, los alumnos elaboran respaldos matemáticos y/o extramatemáticos para validar sus conclusiones. Pasan de explicar a justificar cuando: a) en 9 reconstrucciones, se producen mejoras en torno al significado de la fracción como parte de la unidad al obtener el reparto en P_1; b) en 19 revisiones, mejoran sus argumentos en torno a la identificación de la relación parte-todo en contexto discreto al resolver los repartos en P_1, P_3 y P_4; c) en 4 ocasiones, enriquecen sus desarrollos en torno a los repartos en P_3 y P_4, mejorando el significado de la fracción como cociente; d) en 4 revisiones, reelaboran argumentos matemáticos o extramatemáticos para diferenciar entre el reparto total y el parcial a la hora de obtener los repartos o protagonizarlos en P_4; e) en 7 reconstrucciones, elaboran respaldos matemáticos o extramatemáticos para validar cómo comparan las fracciones de los repartos al revisar la resolución de P_1 y P_4; f) en 6 revisiones, elaboran o mejoran respaldos matemáticos para justificar la suma de fracciones que les permite obtener la fracción asociada al reparto en P_1, P_3 y P_4.

Detectamos avances en la construcción de conocimiento matemático cuando los alumnos resuelven situaciones que implican la identificación de la fracción como parte-todo en contexto continuo, la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto y, la identificación de la fracción como cociente. También detectamos mejoras en el uso del lenguaje y en la conexión entre el lenguaje matemático-verbal, numérico y verbal en las respuestas reconstruidas de P_1, P_3 y P_4. Sin embargo, no apreciamos avances en torno a la resolución de P_2 y P_5 para significar a la fracción como parte-todo en contexto discreto y como cociente, y como razón, respectivamente.

Referente a la identificación de la fracción como parte-todo en contexto continuo, evidenciamos progresos en las reconstrucciones de los alumnos cuando: a) distribuyen unidades siguiendo un reparto equitativo o un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles; b) distribuyen partes según dos repartos diferenciados; c) comparan dos formas de repartir unidades. Mostramos algunos ejemplos de avance en la reconstrucción:

- Reconstrucción de A_1 y de A_2, al añadir nuevos argumentos, después de acordar en E_1 y E_7 la elección de una opción de reparto y, ampliar sus argumentos en E_{17} y E_{20}.

- Revisión de A_4 después de interaccionar con A_3 para acordar, aclarar y cuestionar la elección del reparto en E_{49}, E_{51} y E_5; ampliar la comparación de los repartos en E_{53}; y establecer equivalencias entre las fracciones de los repartos en E_{68}.

Referente a la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto, detectamos avances en las revisiones de los alumnos cuando: a) distribuyen unidades siguiendo un reparto equitativo o un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles; b) suman fracciones para obtener el reparto total asociado a dos opciones de reparto distintas; c) comparan los repartos totales de dos distribuciones diferenciadas; d) reparten de forma equitativa de las unidades de un conjunto siguiendo una restricción; e) reparten más unidades que elementos del conjunto. Damos diversos ejemplos que reflejan mejoras en la revisión:

- Reconstrucción de A_1 y de A_2 después de acordar en E_1, imponer en E_{11}, y ampliar en E_{17} la elección de una opción de reparto.

- Revisión de A_1, de A_3, de A_7 y de A_8 al ampliar los argumentos que validan el reparto total obtenido al sumar fracciones. Resaltamos los avances de A_7 al añadir un nuevo respaldo matemático para justificar, de forma numérica, la suma de fracciones, después de interaccionar con A_8, en E_{135} y E_{136} para aclarar y acordar argumentos.

- Reconstrucción de A_6 al omitir desajustes iniciales y justificar la comparación de los repartos totales después de interaccionar en pareja. Inicialmente, $P_{5\text{-}6}$ establece un desacuerdo en E_{102} en torno a la equivalencia de las fracciones de los repartos. Sin embargo, al aclarar en E_{103} y ampliar en E_{104} los argumentos que sustentan la equivalencia, establecen un consenso en E_{105} para mostrar el reparto. Creemos que este proceso, permite de alguna manera modificar los desajustes iniciales que elabora A_6 y reconvertirlos en respaldos matemáticos que validan el reparto. De forma análoga actúan A_4 y A_8 después de interaccionar en pareja.

- Revisión de todos los alumnos, excepto A_6, para mejorar sus argumentos en base a la forma de distribuir, de manera equitativa, las unidades de un conjunto dando garantías o respaldos a todos los repartos con restricción. A_1 y A_2, reelaboran respaldos matemáticos para justificar todos los repartos. Intuimos que estos alumnos, después de interaccionar en E_2 y E_{35} para consensuar los repartos, obtienen referentes que les permiten avanzar en sus reconstrucciones. También sería el caso de los alumnos de $P_{3\text{-}4}$ y $P_{7\text{-}8}$, en las que uno de sus miembros es capaz de mejorar las garantías iniciales, mientras que el otro compañero avanza en la reelaboración de respaldos.

En lo que respecta a la identificación de la fracción como cociente, detectamos progresos en las producciones revisadas de los alumnos cuando: a) distribuyen de forma equitativa y restringida las unidades del conjunto; b) reparten más unidades que elementos del conjunto. Ilustramos algunos ejemplos de avance en la reconstrucción:

- Revisión de A_1 y de A_2 después de interaccionar en E_{30}, E_{31}, E_{33}, E_{34}, E_{36} y E_{39}. Se puede inferir que gracias a las aclaraciones, ampliaciones y acuerdos que establecen en estos episodios, para usar el significado de la fracción como cociente y obtener los repartos, los alumnos obtienen recursos que les conducen a mejoras en los argumentos que reelaboran.

- Reconstrucción de A_5 y de A_7 al pasar de desajustes a respaldos matemáticos para justificar el reparto que implica más unidades de las disponibles.

- Reconstrucción de A_1, de A_3, de A_4, de A_5, de A_7 y de A_8 al añadir respaldos extramatemáticos basados en las distintas formas de protagonizar el reparto que implica más unidades que elementos del conjunto.

4.3.3. Consecución del objetivo 3

El análisis de las producciones escritas individuales finales de los ocho alumnos lleva a 10 resultados. Hemos organizado estos resultados análogamente a los resultados del objetivo 1 en P_1(a), P_1(b), P_1(c), P_1(d), P_1(e), P_1(f), P_2, P_3, P_4 y P_5.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto cuando se distribuyen las unidades según un reparto equitativo dando garantías o respaldos.

- A_1 y A_2 continúan identificando la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto, pero mejoran sus estructuras de argumentación en P_1(a). Los dos alumnos añaden respaldos extramatemáticos para priorizar el uso del reparto que distribuye las unidades en partes iguales. A_4, A_5 y A_8 omiten los desajustes entre los datos y garantías elaborados en M_1 y reelaboran nuevos argumentos extramatemáticos para respaldar la elección de uno de los repartos en P_1(a). A_3 y A_7 mantienen los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos en la revisión de P_1(a) al no añadir cambios en su respuesta. A_6 tampoco modifica su producción. Sigue sin identificar la relación parte-todo en contexto discreto al no mejorar sus argumentos en torno a los desajustes que produjo en M_1.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto continuo cuando se distribuyen las partes según los dos repartos dando garantías o respaldos.

- A_1, A_3 y A_8 rectifican sus argumentos iniciales para pasar de desajustes a explicaciones o justificaciones que significan a la fracción como parte-todo en contexto continuo en P_1(b). A_1 elabora respaldos matemáticos para apoyar a la fracción que representa el reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles. A_3 y A_8 dan garantías matemáticas para validar una u otra opción del reparto. El resto de compañeros no modifican sus respuestas, y solo A_6 sigue sin significar a la fracción como parte de la unidad. En general, se producen mejoras en las respuestas revisadas.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto continuo cuando se distribuyen las partes según las dos reparticiones dando garantías o respaldos al comparar los repartos.

- Todos los alumnos comparan, ordenan y/o interpretan las fracciones de los repartos en P_1(c). Significan a la fracción como parte-todo en contexto continuo al interpretar cómo se distribuyen las unidades en cada reparto. A_1 y A_5 reelaboran parte de sus argumentos (garantías o respaldos, respectivamente) para mejorar el uso del lenguaje, al desestimar el lenguaje no matemático y usar el lenguaje matemático-numérico o matemático- verbal. A_4, A_6 y A_8 rectifican su respuesta inicial para pasar de desajustes a respaldos matemáticos en torno a la comparación de la fracción de los repartos. Establecen que los repartos no son equivalentes. A_2, A_3 y A_7 mantienen los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos al no incorporar modificaciones en su producción.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto discreto cuando se distribuyen las partes según los dos repartos dando garantías o respaldos a la suma de fracciones para obtener el reparto total.

- A_1, A_3, A_7 y A_8 revisan y amplían sus conclusiones iniciales y mejoran sus argumentos. Significan a la fracción como parte de un conjunto cuando calculan mediante suma de fracciones el reparto total en P_1(d). A_1 mejora el uso del lenguaje al omitir el lenguaje no matemático y usar el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico. Elabora respaldos matemáticos para justificar el reparto que distribuye las unidades en partes iguales. A_3 pasa del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-numérico y elabora nuevas garantías matemáticas para explicar el reparto total de uno de los repartos. A_7 añade un nuevo respaldo matemático que explicita la suma de fracción de forma numérica. A_8 también mejora sus argumentos al desestimar los desajustes que produjo en M_1 en torno al reparto equitativo y reformular garantías matemáticas que validan el reparto. Sin embargo, aunque modifica los argumentos iniciales en torno al reparto que distribuye las unidades en el mínimo número de partes posibles, no valida sus conclusiones.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto discreto cuando se distribuyen las partes según los dos repartos con desajuste entre los datos y las garantías al comparar los repartos totales.

- Todos los alumnos, excepto $A_{8,}$ establecen los repartos totales significando a la fracción como parte de un conjunto en P_1(e). Aplican la equivalencia de fracciones y establecen que los repartos son equivalentes. A_1, A_3, A_4 y A_6 revisan y rectifican su respuesta inicial, pasando de producir desajustes entre los datos y las garantías a justificar sus conclusiones. A_1, A_4 y A_6 usan el lenguaje matemático-verbal y matemático-numérico para justificar los repartos y la comparación que realiza mediante respaldos matemáticos. $A_{4,}$ además, desarrolla argumentos que giran en torno a la suma de fracciones. A_3 elabora respaldos extramatemáticos, de manera informal, para justificar la equivalencia que establece. Solo A_8 elabora una garantía matemática para explicar el reparto total en base a la distribución equitativa, pero no argumenta satisfactoriamente el otro reparto. En general, los alumnos aprovechan la revisión de sus respuestas para mejorarlas.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto continuo y en discreto cuando se distribuyen las partes según un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles dando respaldos.

- Todos los alumnos producen respaldos extramatemáticos al priorizar en P_1(f) el uso del reparto que corta las unidades en el mínimo número de partes posibles. A_4, A_6 y A_8 modifican sus argumentos y pasan de desajustes a justificaciones usando el lenguaje no matemático y, en alguna ocasión, el lenguaje matemático-numérico. A_1, A_2 y A_3 añaden nuevos respaldos extramatemáticos para justificar sus argumentos iniciales, utilizando el lenguaje no matemático. Percibimos una mejora en M_3 al no producirse ningún desajuste entre los datos y las garantías en las revisiones de los alumnos.

No aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto discreto ni la fracción como cociente con desajuste entre datos y garantías en la distinción entre reparto total y parcial.

- Ningún alumno reconstruye de forma satisfactoria sus conclusiones en P_2. Después de revisar sus respuestas, siguen sin identificar la relación parte-todo en este contexto discreto, en el que no se reparten todas las unidades disponibles, y como cociente. De nuevo, todos los participantes producen desajustes entre los datos y las garantías, reflejando que no comprenden el enunciado del problema. Vuelven a omitir que una parte del conjunto total no participa en la repartición y no distinguen entre el reparto total y el parcial.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto discreto y la fracción como cociente cuando se distribuyen de forma equitativa las unidades dando garantías o respaldos a todos los repartos con restricción.

- Todos los alumnos, excepto A_6, reelaboran garantías o respaldos matemáticos cuando en P_3 calculan el reparto restringido. A_4, A_5 y A_8 reelaboran garantías matemáticas para explicar todas las opciones de reparto. A_1, A_2, A_3 y A_7 dan respaldos matemáticos para justificar todas las opciones posibles. Siguen usando divisiones indicadas y aplicando los conceptos de divisores de un número natural, de división exacta entre dos números, y de reparto equitativo. Conectan el uso del lenguaje matemático (registro verbal, numérico, y en algunas ocasiones gráfico) con el uso del lenguaje no matemático. En general, los alumnos mejoran sus respuestas, al modificarlas, ampliarlas o reconstruirlas de forma íntegra. Avanzan en sus conclusiones al significar a la fracción como parte-todo y como cociente. Solo A_6 no mejora toda su respuesta, al presentar algunos desajustes entre los datos y alguna opción de reparto. Este alumno no da todas las opciones que satisfacen las restricciones del reparto.

Aumenta el número de alumnos que identifican la relación parte-todo en contexto discreto y la fracción como cociente cuando se reparten más unidades que elementos del conjunto con garantías o respaldos.

- Algunos alumnos mejoran sus argumentos en base a la diferencia entre el reparto total y el parcial en P_4(a). A_1 y A_3 mejoran su argumentación al añadir un respaldo matemático para justificar el reparto, o al mejorar el uso del lenguaje conectando el lenguaje matemático-verbal, numérico y gráfico. A_5 y A_7 modifican su respuesta, desestimando los desajustes producidos en M_1 y dando nuevos respaldos matemáticos para justificar el reparto. En general, presentan divisiones indicadas para establecer el número de elementos de algunos repartos parciales, usan métodos de suma de fracciones para obtener el reparto total y comparan las fracciones del reparto total con las del reparto parcial. Asocian términos del lenguaje no matemático al lenguaje matemático-verbal, numérico y/o gráfico.

- A_1, A_3, A_4, A_5, A_7, A_8 revisan sus respuestas iniciales y añaden respaldos extramatemáticos basados en las distintas formas de protagonizar el reparto en P_4(b). A_1, A_4, A_8 justifican su respuesta de forma informal. A_3 añade la representación gráfica de los repartos parciales para justificar la comparación de fracciones. A_5 basa sus argumentos en la suma de fracciones. A_7 rectifica la cantidad que representa el reparto total. En general, todos advierten que se reparten más unidades de las disponibles, identificando la relación parte-todo en contexto discreto y dotando de significado a la fracción como cociente. Basan sus argumentos en la distinción entre el reparto total y el parcial, en la suma de fracciones y en la comparación de fracciones; mejorando en algunas ocasiones el uso del lenguaje.

No se identifica la fracción como razón al no usarla como índice comparativo entre dos conjuntos de elementos dando desajuste entre datos y garantías.

- Ningún alumno reconstruye de forma satisfactoria su respuesta inicial en P_5. Después de revisar sus respuestas, siguen sin dotar de significado a la fracción como razón. Todos los alumnos vuelven a producir desajustes entre los datos y las garantías cuando deben utilizar a la fracción como índice comparativo de dos cantidades. Una vez más, sus argumentos reflejan desajustes entre los datos y sus conclusiones. Siguen sin comparar las fracciones asociadas al reparto y no establecen equivalencias entre las fracciones. En concreto, advertimos que en la revisión de las respuestas de P_5 no se producen avances en las conclusiones. Los participantes no identifican a la fracción como razón, al dejar al margen la relación fracción-proporción.

Capítulo 5.
Conclusiones

En este capítulo retomamos la pregunta de investigación sobre el papel que desempeña la interacción social en la construcción de conocimiento matemático durante la resolución de problemas: *¿Cómo influye la resolución en pareja de problemas contextualizados en la construcción del concepto de fracción en un aula de primaria?* Primero discutimos resultados relacionados con los objetivos y la metodología. Acabamos con limitaciones e implicaciones.

5.1. Influencia de la interacción en la construcción de conocimiento matemático

Los resultados que pasamos a discutir muestran cómo influye la resolución en pareja de problemas contextualizados en la construcción del concepto de fracción en un aula de matemáticas en primaria. Se han analizado aspectos conceptuales y estructurales que caracterizan las producciones iniciales de cada alumno. También se han examinado aspectos conceptuales, interaccionales y/o estructurales que caracterizan los episodios y las respuestas escritas de cada pareja. Por último, se han analizado aspectos conceptuales y estructurales que caracterizan las respuestas iniciales y las revisiones de cada alumno, en conexión con la interacción en pareja.

Enmarcamos el concepto de fracción a partir de un enfoque curricular, destacando aspectos relevantes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el ciclo superior de primaria. Nos centramos en la importancia de significados de la fracción. Además, para construir el eje conceptual, seguimos resultados sobre el papel que adoptan las formas de representación, relaciones entre fracciones, fracciones equivalentes, comparación y ordenación de fracciones y operaciones con fracciones. Este eje caracteriza los usos de la fracción a través de sus significados y sus representaciones.

Por otra parte, enmarcamos la argumentación en el aula de matemáticas como un componente esencial de la comunicación y una herramienta del proceso de organización del razonamiento. Apuntamos hacía la existencia de una fuerte relación entre las oportunidades de aprendizaje cooperativo y la importancia de la verbalización matemática en los procesos de aprendizaje. La contribución teórica de Toulmin (2007) sobre el análisis de la estructura de los argumentos y de los elementos que constituyen esta estructura, nos permite establecer las bases del eje estructural. Sin embargo, debido a la complejidad contextual relacionada con el tipo de prácticas argumentativas que desarrollan los alumnos, consideramos una noción más amplia de argumentación. Nos apoyamos en los aportes de Camargo (2010) y Planas y Morera (2011), entre otros, para señalar que la argumentación está constituida por descripciones, explicaciones, justificaciones u otros modos de razonamiento desarrollados mediante diversos tipos de habilidades y capacidades activadas en los procesos de actividad matemática en el aula. Elaboramos el eje estructural para caracterizar el uso de la argumentación en los procesos de resolución de los alumnos.

Es de nuestro interés vincular el aprendizaje de las matemáticas con procesos de la negociación de argumentación colectiva basados en la comunicación y en el consenso de significados. Obtenemos referentes que nos permiten relacionar procesos de participación dentro del aula de matemáticas con la generación de oportunidades de aprendizaje cooperativo, en base a la interacción, la discusión y la negociación de significados. Desarrollamos el eje interaccional para caracterizar las intervenciones de los alumnos en los procesos de resolución en pareja, prestando atención en el contenido matemático y/o no matemático.

De nuestro estudio se desprende que la interacción alumno-alumno favorece la construcción del concepto de fracción durante la resolución de problemas aritméticos de reparto. La implementación de la secuencia de problemas ha generado progresos en la construcción de conocimiento matemático. En términos de Brandt y Schütte (2010), establecemos una conexión entre la argumentación matemática y los procesos de interacción para avanzar en la construcción del concepto de fracción. También detectamos situaciones en las que no se produce mejora o retroceso en el proceso de co-construcción de conocimiento y en la elaboración de argumentos colectivos.

Se han detectado abundantes interacciones en pareja orientadas al desarrollo de argumentación colectiva y consenso de significados. Se dan intervenciones e intercambios, en el sentido de Cobo (1998) y Cobo y Fortuny (2000). Estas situaciones permiten afirmar que, en el proceso de resolución en pareja predominan acuerdos, ampliaciones y síntesis. Se observa además que alumnos involucrados en una misma discusión producen desacuerdos que permiten avanzar, de forma conjunta, en contenidos matemáticos o en argumentaciones.

Podemos concluir sobre interacciones atendiendo al papel de los participantes. En ocasiones, se dan interacciones satisfactorias en términos de argumentación colectiva y de construcción de conocimiento matemático, donde uno de los alumnos impone sin discusión sus argumentos. Así, la elaboración de aclaraciones, imposiciones, revisiones, e incluso, ampliaciones emergen de este tipo de actuaciones, provocando o no, un avance en la construcción matemática.

Nuestro estudio muestra avances conceptuales y estructurales en el trabajo inicial y de revisión de cada alumno en una etapa posterior a la interacción en pareja. Esto es coherente con lo obtenido en Badillo y Manrique (2011) y Badillo, Planas, Manrique y Goizueta (2012). Varios avances aparecen ligados a procesos de interacción, discusión y negociación de significados. Los alumnos obtienen los recursos necesarios para elaborar, rectificar o ampliar su respuesta inicial, y mejorar aspectos conceptuales y estructurales de sus producciones. Los alumnos recuperan acuerdos previos, respecto a contenidos matemáticos ocurridos en el transcurso de sesiones previas, en el sentido de Chico (2014), utilizándolos en la revisión de sus respuestas iniciales.

Detectamos avances en la construcción de conocimiento matemático cuando los alumnos resuelven situaciones que implican la identificación de la fracción como parte-todo en contexto continuo, la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto y, la identificación de la fracción como cociente.

En lo que respecta a la identificación de la fracción como parte-todo en contexto continuo, apreciamos progresos en las reconstrucciones de los alumnos cuando: a) distribuyen unidades siguiendo un reparto equitativo o un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles; b) distribuyen partes según dos repartos diferenciados; y, c) comparan dos formas de repartir unidades. Evidenciamos avances en los argumentos reelaborados por los alumnos del significado de la fracción como parte de la unidad, mejorando al mismo tiempo, el uso del lenguaje o la equivalencia entre fracciones. Los avances se asocian a situaciones que implican priorizar la elección de una opción de reparto, indicar un reparto o comparar las fracciones asociadas a dos repartos diferenciados. Algunos ejemplos de avance en la reconstrucción:

- Reconstrucciones basadas en añadir nuevos argumentos, después de acordar la elección de una opción de reparto y ampliar argumentos.

- Revisiones después de interaccionar para acordar, aclarar y cuestionar a la elección del reparto, ampliar la comparación de repartos y establecer equivalencias entre las fracciones de dichos repartos.

Referente a la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto, detectamos avances en las revisiones de los alumnos cuando: a) distribuyen unidades siguiendo un reparto equitativo o un reparto que divide las unidades en el mínimo número de cortes posibles; b) suman fracciones para obtener el reparto total asociado a dos opciones de reparto distintas; c) comparan los repartos totales de dos distribuciones diferenciadas; d) reparten de forma equitativa de las unidades de un conjunto siguiendo una restricción; y, e) reparten más unidades que elementos del conjunto. Obtenemos evidencias sobre avances en la argumentación reelaborada para significar a la fracción como parte de un conjunto, mejorando también, el uso del lenguaje matemático, la suma de fracciones, la comparación de fracciones y la equivalencia de fracciones. Damos ejemplos que reflejan mejoras en la revisión:

- Reconstrucciones después de acordar, imponer y ampliar la elección de una opción de reparto.

- Revisiones al ampliar, aclarar y acordar argumentos que validan el reparto total obtenido al sumar fracciones añadiendo un respaldo matemático.

- Reconstrucciones al omitir desajustes iniciales y justificar la comparación de los repartos totales y la equivalencia de las fracciones después de la interacción en pareja.

- Revisiones para mejorar argumentos en la distribución equitativa de las unidades de un conjunto dando garantías o respaldos a todos los repartos con restricción.

En lo que respecta a la identificación de la fracción como cociente, detectamos avances en las producciones revisadas de los alumnos cuando: a) distribuyen de forma equitativa y restringida las unidades del conjunto; y, b) reparten más unidades que elementos del conjunto. Hay avances en los argumentos que reelaboran los alumnos del significado de fracción como cociente, progresando también en la distinción entre reparto total y parcial, la suma de fracciones, la comparación de fracciones, el uso de lenguaje matemático y la elaboración de divisiones. Ilustramos ejemplos de avance en la reconstrucción que mejoran la aplicación de conceptos matemáticos sobre el significado de divisores de un número natural, división exacta entre números y reparto equitativo:

- Revisiones tras la interacción debidas a aclaraciones, ampliaciones y acuerdos para usar el significado de la fracción como cociente.

- Reconstrucciones al pasar de desajustes a respaldos matemáticos para justificar el reparto que implica más unidades de las disponibles.

- Reconstrucciones al añadir respaldos extramatemáticos basados en distintas formas de repartir más unidades que elementos del conjunto.

Esta investigación sugiere que la interacción alumno-alumno ejerce una influencia matemáticamente positiva en los alumnos cuando reflexionan sobre sus argumentos individuales y los reconstruyen. La comprensión del concepto de fracción ha permitido que la interacción en pareja ayude a la co-construcción de conocimiento matemático promoviendo la elaboración de argumentaciones colectivas. La reelaboración de nuevos argumentos, para dar repartos parciales y totales, comparar fracciones y establecer equivalencias entre fracciones y sumarlas, indica avances en el proceso de resolución.

Los alumnos avanzan en la reconstrucción de sus argumentos al desestimar desajustes iniciales para dar garantías o respaldos, o al ampliar explicaciones o justificaciones elaboradas en una etapa inicial, mejorando también el uso del lenguaje y sus conexiones. Estas mejoras pueden deberse a: a) la influencia del contexto en la resolución y, en particular, en el tipo de respuesta de los alumnos; b) el conocimiento informal previo y el dominio del significado de la fracción de los alumnos sobre el significado implicado en la situación de reparto; y, c) el rol del alumno en la resolución en pareja y en la elaboración de sus respuestas.

No detectamos avances en la construcción de conocimiento matemático cuando los alumnos resuelven situaciones que implican la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto, como cociente cuando no se reparten todas las unidades disponibles y en la identificación de la fracción como razón. En estos significados de la fracción, las reconstrucciones de los alumnos no mejoran e incluso detectamos cambios en respuestas que reflejan retrocesos matemáticos y/o argumentativos.

Los alumnos no diferencian el reparto total del parcial o no usan la fracción como índice comparativo entre conjuntos de elementos. La complejidad del concepto matemático con los obstáculos derivados, la comprensión del enunciado del problema y del contexto de la situación, junto con la singularidad del papel del profesor en esta investigación son aspectos que han podido influir en el proceso de resolución de problemas y, en concreto, en la construcción del concepto de fracción durante el desarrollo de argumentos individuales y colectivos.

Concluimos sobre la importancia del enunciado del problema, del contexto y del significado involucrado de fracción en el tipo de argumentos que elaboran los alumnos. En este sentido, Hallet (2008) sostiene que el contexto planteado es un aspecto que ayuda a mejorar la comprensión del concepto de fracción. Siguiendo la educación matemática realista, contemplamos el contexto y las situaciones problema planteadas como generadoras de actividad matemática. La estructuración y organización de la realidad puede ser modificado según el contexto del problema. En ocasiones, en los problemas de la secuencia didáctica, el alumno debe proponer un reparto o priorizar la elección de una distribución donde la proximidad a la realidad es relevante. Aquí observamos un predominio de la elaboración de garantías y respaldos extramatemáticos, así como, el uso de lenguaje informal. En otras ocasiones, el contexto conduce a la elaboración de argumentos matemáticos expresados en lenguaje matemático-verbal y/o numérico, en conexión o no, con el lenguaje matemático-gráfico.

El papel del alumno al interactuar en pareja ha sido clave en este estudio. Por un lado, los alumnos se posicionan en el proceso interactivo, contribuyendo a la resolución en pareja, y consecuentemente, a la reconstrucción que realiza su compañero o a su propia revisión. En ocasiones, los alumnos de una pareja se comportan de forma similar en la elaboración de argumentos matemáticos y/o extramatemáticos. Por otro lado, se dan comportamientos pasivos en la interacción que facilitan el seguimiento de aportaciones del compañero. Puede ocurrir que el error de un participante dominante conduce a un cambio de rol en la pareja; también puede ocurrir que la elaboración de una argumentación débil lleve a cambios en el papel que un determinado alumno ejerce sobre la pareja.

La actividad de la maestra en ciertas situaciones promueve la interacción en la resolución de problemas mediante normas consensuadas con los alumnos, a modo de lo discutido en Yackel y Cobb (1996) y en Morera (2013). Inferimos que hay momentos en los alumnos no avanzan en la resolución por falta de una interacción anticipada con la maestra. En este sentido, consideramos crucial la orquestación por parte del profesor en la gestión de la tarea y en el andamiaje del proceso de construcción de conocimiento matemático.

5.2. Discusión sobre el diseño experimental y los instrumentos

En este estudio se ha seguido la tradición del diseño experimental, con la particularidad del cuestionario escrito, individual y en pareja, y la grabación en video de la resolución oral. Esta opción metodológica se ha mostrado útil y pertinente para la recogida de datos y la obtención de información científica.

Siguiendo a Streefland (1993), para la enseñanza del concepto de fracción se ha elaborado una secuencia didáctica de problemas con enunciados en contextos realistas. El grado de complejidad de los problemas se ha decidido de acuerdo a la información proporcionada por la maestra acerca del conocimiento atribuido a los alumnos sobre fracciones. Respecto a los problemas de la secuencia y, según la experimentación, para futuros estudios convendría introducir algunos cambios. Para dos de los problemas, cabe concluir sobre dificultades en la comprensión de los enunciados, sin considerar el tipo de reparto implicado en cada situación. Convendrá valorar si redacciones acompañadas de datos gráficos facilitan la comprensión del enunciado. Varios de los obstáculos mostrados por los alumnos en la resolución cuestionan si el enunciado dificulta la comprensión del significado implicado de la fracción.

Para caracterizar la resolución individual inicial, se creó un instrumento de análisis que integra el eje conceptual con el estructural. La elaboración y aplicación de este instrumento ha permitido analizar datos escritos individuales, previos a la interacción en clase. Esto nos ha llevado a examinar las respuestas de los alumnos al resolver los cinco problemas para identificar los usos de la fracción y los tipos de estructura de los argumentos que participan en las respuestas que elaboran los alumnos antes de interactuar en pareja. Este mismo instrumento llevó a caracterizar las producciones de revisión. Estamos ante un instrumento decisivo, que ha aportado información progresiva sobre la evolución de las respuestas individuales de cada alumno.

Para caracterizar la interacción en pareja, confeccionamos otros tres instrumentos. Analizamos los fragmentos de la interacción de interés para el estudio, realizando un examen inicial de las respuestas orales de los alumnos. Para caracterizar de forma más acotada la interacción en pareja, realizamos un análisis de las intervenciones de los alumnos. Por su parte, las respuestas escritas en pareja han informado sobre la resolución escrita de forma conjunta. Esto ha permitido indagar en el papel de cada alumno al resolver de forma escrita a partir de sus respuestas iniciales.

A través de la metodología implementada en esta investigación, hemos mejorado nuestra comprensión sobre cómo se construye el concepto de fracción y algunos de sus significados, en entornos de interacción alumno-alumno de un aula de sexto de primaria. Concluimos sobre la existencia de relaciones entre la interacción en pareja y la construcción de conocimiento matemático que se espera institucionalmente, con evidencias de progreso desde el trabajo individual hasta la reflexión personal posterior a la discusión en pareja.

El experimento estaba integrado en el calendario del grupo clase. Al finalizar la recogida de datos se proporcionó a la maestra de aula la información sobre el proceso de resolución, individual y en pareja, incidiendo especialmente en aspectos que no evidenciaban mejoras en la construcción del concepto de fracción. Así se pretendió que hubiera en lo posible una transferencia de los resultados de la investigación en la mejora de la práctica de aula.

5.3. Limitaciones e implicaciones de la investigación

En toda investigación es fundamental tomar conciencia de las limitaciones experimentadas a distintos niveles. En nuestro estudio, podría considerarse que el número de alumnos participantes y el trabajo con un grupo pequeño de desdoblamiento actúan como limitación. En el futuro podría plantearse un estudio similar con un grupo clase completo, para así establecer resultados que corroborasen lo aquí concluido sobre la influencia de la interacción entre alumnos en la construcción del concepto de fracción. El hecho de contar con un grupo clase completa abriría la posibilidad de examinar otras organizaciones de la dinámica de clase. Al respecto, se podría incluir el estudio de las discusiones en gran grupo y de su influencia en la resolución de las tareas.

Otra limitación del estudio es la particularidad didáctica dada por el papel de la maestra en la gestión de la interacción matemática en pareja. Sería conveniente complementar este estudio con otro en el que el maestro de aula orqueste la actividad matemática y la interacción en un entorno de resolución de problemas, a fin de reducir dificultades en la construcción de conocimiento matemático.

Han quedado sin analizar los significados de medida y operador para la noción de fracción. Esta es una tercera limitación de un estudio que podría haber contemplado todos los significados de fracción. Diversas circunstancias, entre ellas la realidad del aula seleccionada, recomendaron centrar la secuencia didáctica en los significados planteados por la maestra.

En lo que concierne a implicaciones de esta investigación, consideramos que hay cuestiones didácticas para la práctica de enseñar matemáticas que se desprenden de los resultados y que pueden aportar mejoras en la práctica matemática de aula, en concreto respecto a la enseñanza de la fracción. Para empezar, el hecho de que la maestra haya sido la investigadora indica el compromiso desde el inicio entre resultados científicos y práctica educativa.

Cabe atender al papel del alumno, antes y después de la interacción en pareja, así como la dinámica de aula centrada en la estructura en pareja. Hemos constatado que el hecho de discutir con un compañero una resolución, favorece la explicitación, reformulación y ampliación de argumentos. La reflexión individual de resoluciones reconstruidas puede generar oportunidades de aprendizaje matemático. Asimismo, es pertinente apoyar una dinámica que complemente los logros conseguidos de la interacción alumno-alumno, fomentando el desarrollo de nuevos acuerdos, aclaraciones, síntesis, cuestionamientos, etc. Esto sugiere la relevancia del plano social en la construcción de conocimiento matemático, y en concreto, del concepto de fracción en el aula de primaria.

Recomendamos que el maestro de aula adopte un papel activo, promoviendo la interacción en la resolución de problemas y actuando en situaciones que generen dificultades matemáticas. Es imprescindible que el maestro consensúe, a priori, con los alumnos un conjunto de normas sociales y matemáticas, que favorezcan la participación. Conviene que el maestro promueva la elaboración de argumentos de validación, favoreciendo las relaciones entre los datos del enunciado y sus conclusiones, y reforzando la generación de garantías y/o razones. El maestro debe usar diversos tipos de lenguaje, y en concreto, para las situaciones diseñadas, promover la equivalencia entre fracciones, la comparación de fracciones, distintas maneras de sumar fracciones, etc.

Resumen

El trabajo de tesis doctoral *Trabajo en pareja y construcción de conocimiento matemático en un aula de matemáticas de sexto de primaria* constituye una aportación a la investigación en Educación Matemática enmarcada en las teorías socio-cognitivas sobre la construcción de conocimiento matemático. Para el análisis de procesos de construcción compartida de conocimiento matemático en el aula de primaria, consideramos usos de la fracción, estructuras de los argumentos y tipos de interacción en discusiones en pareja.

La pregunta de investigación es: *¿Cómo influye la resolución en pareja de problemas contextualizados en la construcción del concepto de fracción en un aula de primaria?* Para responder a esta cuestión, planteamos tres objetivos consecutivos de caracterización de: 1) las producciones escritas individuales iniciales de los alumnos en la resolución de problemas; 2) la posterior interacción oral y escrita en pareja; y 3) las producciones escritas individuales de revisión. Diseñamos una situación de investigación en una clase de primaria de un centro de la provincia de Barcelona con alumnado de 11 y 12 años.

El marco teórico se organiza mediante tres ejes. En primer lugar, el eje conceptual trata el concepto de fracción desde la perspectiva de sus usos. En segundo lugar, el eje estructural trata la argumentación en clase de matemáticas como un componente esencial de la comunicación y como herramienta del proceso de organización del razonamiento. Por último, el eje interaccional trata los procesos de interacción que tienen lugar en situaciones escolares de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con la pregunta, los objetivos y los ejes teóricos, proponemos el diseño y los métodos de análisis. Elaboramos una secuencia de tareas aritméticas de reparto sin incluir los significados de medida y operador de la fracción, pensada para ser gestionadas en un ambiente de resolución de problemas en pareja. En la implementación consideramos una dinámica basada en trabajo individual seguido de discusión en pareja y su posterior reconstrucción de nuevo individual. Los datos son escritos y orales, relativos a los momentos de resolución individual y en pareja.

Creamos cuatro instrumentos para el estudio combinado de los distintos ejes. Para cada eje, definimos códigos que permiten reducir la información oral y escrita más relevante. Los instrumentos de análisis constituyen una aportación original de la investigación. La aplicación de los instrumentos lleva a caracterizar las producciones escritas iniciales y de revisión de los alumnos, así como las producciones orales en pareja, atendiendo a la coordinación de los ejes conceptual, estructural e interaccional.

Del estudio se desprende que la interacción alumno-alumno favorece la construcción del concepto de fracción durante la resolución de problemas aritméticos de reparto. La implementación de la secuencia de problemas ha generado progresos en el conocimiento matemático. Establecemos una conexión entre la argumentación matemática y los procesos de interacción. También detectamos situaciones sin mejora o retroceso en la construcción compartida de conocimiento ni en la elaboración de argumentación colectiva.

Hay avances en la construcción de conocimiento matemático cuando los alumnos resuelven situaciones que implican la identificación de la fracción como parte-todo en contexto continuo, la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto y la identificación de la fracción como cociente. No hay avances en la construcción de conocimiento matemático cuando los alumnos resuelven situaciones que implican la identificación de la fracción como parte-todo en contexto discreto, como cociente cuando no se reparten todas las unidades disponibles y en la identificación de la fracción como razón. En estos significados de la fracción, las reconstrucciones no mejoran e incluso aparecen cambios en respuestas que reflejan retrocesos matemáticos y argumentativos.

En cuanto a la actividad argumentativa, los alumnos avanzan en la reconstrucción de sus argumentos cuando desestiman desajustes para dar garantías o respaldos, o cuando amplían explicaciones o justificaciones elaboradas, mejorando el uso del lenguaje y conexiones. Estas mejoras pueden deberse a la influencia del contexto en la resolución, al dominio del significado de la fracción, o bien al papel del alumno en la resolución en pareja y en la elaboración de respuestas.

Por último, concluimos sobre la relevancia de las interacciones atendiendo al papel de los alumnos en ellas. En ocasiones, se dan interacciones satisfactorias en términos de argumentación colectiva y de construcción de conocimiento matemático, donde uno de los alumnos impone sin discusión sus argumentos. Así, la elaboración de aclaraciones, imposiciones, revisiones y ampliaciones emergen de estas actuaciones, provocando o no, avances matemáticos. Hemos detectado abundantes interacciones en pareja orientadas al desarrollo de argumentación colectiva y consenso de significados. Se dan intervenciones e intercambios que muestran que, en el proceso de resolución en pareja, predominan acuerdos, ampliaciones y síntesis. Observamos además que alumnos involucrados en una discusión producen desacuerdos que permiten avanzar, de forma conjunta, en contenidos matemáticos o en argumentaciones.

Abstract

The doctoral work *Pair work and construction of mathematical knowledge in the grade 6 mathematics classroom* constitutes a progress in mathematics education research under the tradition of socio-cognitive approaches about the construction of mathematical knowledge. For the analysis of processes of shared construction of mathematical knowledge in a primary school classroom, we consider the uses of fractions, the structures of arguments and the discussions in pairs.

The research question is: *How does the resolution in pairs of contextualized problems influence on the construction of the fraction concept in a primary school class?* To answer this question we take three consecutive goals aimed at characterizing: 1) the initial individual written productions of the students' solutions to the problems; 2) the follow-up oral and written interactions among students; and 3) the revised individual written productions. We desing a scientific situation with 11-and-12-year-old students in a class of Barcelona province.

The theoretical framework is organized around three axes. First, the conceptual axis deals with is the concept of fraction from the perspective of its uses. Second, the structural axis deals with argumentation in the mathematics classroom as an essential component of communication and as a tool of the process of organizing reasoning. Finally, the interactional axis deals with the interaction processes that take place in school settings of teaching and learning mathematics.

According to the question, the goals and theoretical axes, we propose the experimental design and methods of analysis. We create a sequence of arithmetic problems on distribution excluding the meanings of measurement and operator for fraction, planned to be orquestrated in a problem-solving environment with pair work. For the implementation, we consider a lesson dynamics with individual work followed by pair discussion and subsequent individual reconstructions. Our data set is written and oral, in relation to the moments for individual and pair resolution.

We create four analytical tools for the combined study of the different axes. For each axis, we define codes that lead to reduce oral and written relevant data. The analytical tools are themselves an original contribution of the research. Through the application of the tools we characterize the initial and revised individual written productions of the students and their oral productions in pairs. The coordination of the conceptual, structural and interactional axes is key to this stage of the study.

It can be inferred from the analysis that student-student interaction facilitates the construction of the concept of fraction during the resolution of arithmetic problems of distribution. The implementation of the sequence of problems has been proved to generate progress in the students' mathematical knowledge. We establish a connection between the mathematical argumentation and the interaction processes. Also, we detect situations without either improvement or regression in the shared construction of knowledge and the development of collective argumentation.

There are progresses in the construction of mathematical knowledge when the students solve situations involving identification of the fraction as part-whole in a continuous context, the identification of the fraction as part-whole in a discrete context, and the identification of the fraction as quotient. Nevertheless, there is no progress detected in the construction of mathematical knowledge when the students solve situations involving the identification of the fraction as part-whole in a discrete context, as quotient when all available units are not distributed, and as ratio. Under these meanings of the fraction, the reconstructions do not improve and may reflect changes in responses that point to mathematical and argumentative misunderstandings.

As for the argumentative activity, students progress in the reconstruction of their arguments when rejecting mismatches to provide guarantees or endorsements, or when extending explanations or justifications, while improving the use of language and connections. These improvements may be due to the influence of the context in the resolution, the domain of the meaning of the fraction, or the role of the student in pair work during the resolution and the elaboration of responses.

Finally, we conclude on the relevance of interactions by paying attention to the roles of the students. Sometimes satisfying interactions are reached in terms of collective reasoning and mathematical knowledge construction, where one of the students imposes without discussion her/his arguments. Thus, the development of clarification, enforcement, revision and expansion emerge from these actions, causing or not, mathematical advances. We have detected many pair work interactions oriented toward collective argumentation and meaning consensus. Various interventions and exchanges show that in pair work resolutions agreements, extensions and synthesis are dominant. We further note that students involved in a discussion, tend to produce disagreements that have the effect to facilitate joint progress in mathematical contents or in argumentations.

Resum

El treball de tesis doctoral *Treball en parella i construcció de coneixement matemàtic a l'aula de matemàtiques de sisè de primària* constitueix una aportació a la investigació en Educació Matemàtica emmarcada en les teories socio-cognitives sobre la construcció de coneixement matemàtic. Per a l'anàlisi de processos de construcció compartida de coneixement matemàtic a l'aula de primària, considerem usos de la fracció, estructures dels arguments i tipus d'interacció en discussions en parella.

La pregunta de recerca és: *Com influeix la resolució en parella de problemes contextualitzats en la construcció del concepte de fracció en una aula de primària?* Per respondre a aquesta qüestió, plantegem tres objectius consecutius de caracterització de: 1) les produccions escrites individuals inicials dels alumnes en la resolució de problemes; 2) la posterior interacció oral i escrita en parella; i 3) les produccions escrites individuals de revisió. Dissenyem una situació d'investigació en una classe de primària d'un centre de la província de Barcelona amb alumnat de 11 i 12 anys.

El marc teòric s'organitza mitjançant tres eixos. En primer lloc, l'eix conceptual tracta el concepte de fracció des de la perspectiva dels seus usos. En segon lloc, l'eix estructural tracta l'argumentació a la classe de matemàtiques com un component essencial de la comunicació i com a eina del procés d'organització del raonament. Finalment, l'eix interaccional tracta els processos d'interacció que tenen lloc en situacions escolars d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

D'acord amb la pregunta, els objectius i els eixos teòrics, proposem el disseny i els mètodes d'anàlisi. Elaborem una seqüència de tasques aritmètiques de repartiment sense incloure els significats de mesura i operador de la fracció, pensada per ser gestionades en un ambient de resolució de problemes en parella. En la implementació considerem una dinàmica basada en treball individual seguit de discussió en parella i la seva posterior reconstrucció de nou individual. Les dades són escrites i orals, relatives als moments de resolució individual i en parella.

Creem quatre instruments per a l'estudi combinat dels diferents eixos. Per a cada eix, definim codis que permeten reduir la informació oral i escrita més rellevant. Els instruments d'anàlisi constitueixen una aportació original de la investigació. L'aplicació dels instruments porta a caracteritzar les produccions escrites inicials i de revisió dels alumnes, així com les produccions orals en parella, atenent a la coordinació dels eixos conceptual, estructural i interaccional.

De l'estudi es desprèn que la interacció alumne-alumne afavoreix la construcció del concepte de fracció durant la resolució de problemes aritmètics de repartiment. La implementació de la seqüència de problemes ha generat progressos en el coneixement matemàtic. Establim una connexió entre l'argumentació matemàtica i els processos d'interacció. També vam detectar situacions sense millora o retrocés en la construcció compartida de coneixement ni en l'elaboració d'argumentació col·lectiva.

Hi ha avenços en la construcció de coneixement matemàtic quan els alumnes resolen situacions que impliquen la identificació de la fracció com a part-tot en context continu, la identificació de la fracció com a part-tot en context discret i la identificació de la fracció com a quocient. No hi ha avenços en la construcció de coneixement matemàtic quan els alumnes resolen situacions que impliquen la identificació de la fracció com a part-tot en context discret, com a quocient quan no es reparteixen totes les unitats disponibles i en la identificació de la fracció com a raó. En aquests significats de la fracció, les reconstruccions no milloren i fins i tot apareixen canvis en respostes que reflecteixen retrocessos matemàtics i argumentatius.

Quant a l'activitat argumentativa, els alumnes avancen en la reconstrucció dels seus arguments quan desestimen desajustos per donar garanties o suports, o quan amplien explicacions o justificacions elaborades, millorant l'ús del llenguatge i connexions. Aquestes millores poden ser degudes a la influència del context en la resolució, al domini del significat de la fracció, o bé al paper de l'alumne en la resolució en parella i en l'elaboració de respostes.

Finalment, concloem sobre la rellevància de les interaccions atenent al paper dels alumnes en elles. De vegades, es donen interaccions satisfactòries en termes d'argumentació col·lectiva i de construcció de coneixement matemàtic, on un dels alumnes s'imposa sense discussió els seus arguments. Així, l'elaboració d'aclariments, imposicions, revisions i ampliacions emergeixen d'aquestes actuacions, provocant o no, avenços matemàtics. Hem detectat abundants interaccions en parella orientades al desenvolupament d'argumentació col·lectiva i consens de significats. Es donen intervencions i intercanvis que mostren que, en el procés de resolució en parella, predominen acords, ampliacions i síntesi. Observem a més que alumnes involucrats en una discussió produeixen desacords que permeten avançar, de manera conjunta, en continguts matemàtics o en argumentacions.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M. (2003). *La construcción del lenguaje matemático.* Barcelona: Graó.

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Giménez, J. (1996). *Bon dia mates 14-16: material curricular*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.

Badillo, E. y Manrique, A. (2011). Mathematical learning in collaborative and argumentative lessons from a primary classroom. En G. H. Gunnarsdóttir et al. (Eds.), *Proceedings of the 6th Nordic Conference on Mathematics Education* (691). Reijkavik, Islandia: Universidad de Islandia.

Badillo, E., Morera, L., Corral, I., Chico, J. y Planas, N. (2011). Participación, aprendizaje matemático e interacción en un entorno virtual*. Comunicación en las XV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Gijón: JAEM.

Badillo, E., Planas, N., Manrique, A. y Goizueta, M. (2012). *The construction of fractions while solving problems in interaction: the case of pair work.* Report presented at the TSG28-Language and communication in mathematics education, 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea, Julio de 2012.

Behr, M. J., Wachsmuth, I. y Post, T. R. (1985). Construct a sum: a measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Reserch in Mathematics Education 16(2),* 120-131.

Brandt, B. y Schütte, M. (2010). Collective mathematical reasoning in classrooms with a multilingual body of pupils. In U. Gellert, E. Jablonka y C. Morgan (Eds.), *Proceedings of the sixth international mathematics education and society conference* (111-114). Berlin, Alemania: MES*.*

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Trabajo de Tesis Doctoral. València: Universitat de València.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en un grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas.* Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos.* Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interaction and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

Confrey, J. y Carrejo, D. (2005). Ratio and fraction: the difference between epistemological complementarity and conflict. *Journal for Research in Mathematics Education.* Monograph, 13, Chapter 4. Reston, VA: NCTM.

Departament d'Ensenyament (2009). *Currículum Educació Primària, Matemàtiques* – Decret 142/2007. DOGC núm. 4915. Barcelona: Generalitat de Catalunya.

Dooren, W. V., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students overuse of proportionality on missing-value problems: how numbers may change solutions. *Journal for Reserch in Mathematics Education 40(2),* 187-211.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, S. M. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Reserch in Mathematics Education, 16*(1)*,* 3-17.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.

Gille, J. (2001). *Pautas argumentativas en el diálogo espontáneo. Un estudio de conversaciones intra e interculturales.* Trabajo de Tesis Doctoral. Stockholm, Suecia: Universidad de Estocolmo.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(1), 61-78.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V. y Greeno, J. (2009). Constructing competence: an analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 49-70.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (27-44). Córdoba: SEIEM.

Gutiérrez, A. (2007). *Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría*. Conferencia en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas (16-19). Medellín, Colombia.

Hallett, D. (2008). Effects of fraction situations and individual differences: A review of recent research regarding children's understanding of fractions. En D. De Bock, B. Dahl, B. Gómez y C. C. Litwin (Eds.), *Proceedings of ICME-11* (17-26). Monterrey, México: ICMI.

Jorba, J. (2000). La comunicación y las habilidades cognitivo-lingüísticas. En J. Jorba, I. Gómez y À. Prat (Eds.), *Hablar y escribir para aprender: uso de la lengua en situación de enseñanza-aprendizaje desde las áreas curriculares* (29-49). Madrid: Síntesis.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct –Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (125-149). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 60-82.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning-as-participation" in everyday situations of mathematics classes. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *43*(1/2), 81-90.

Lamon, S. (1996). The developement of unitizing: its role in children's partitioning strategies. *Journal for Reserch in Mathematics Education, 27(2),* 170-193.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (629-667). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid: Síntesis.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (3-30). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowlegde. *Journal for Reserch in Mathematics Education, 26*(5), 422-441.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Reserch in Mathematics Education, 32*(3), 267-295.

Morera, L., Fortuny, J. M. y Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno de clase colaborativo y tecnológico. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 143-154.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2007). The professional development of a novice teacher in a collaborative context: an analysis of classroom practice. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou et al (Eds.), *Proceedings of the V Congress of the ERME* (1935-1944). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (451-462). Lleida: SEIEM.

NCTM. (2000). *Principles & Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Orrantia, J. y Rodríguez, L. (2008). Aprendizaje de las matemáticas y práctica educativa. *Cultura y Educación, 20*(4), 381-389.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata-MECD.

Planas, N. (2001). *Obstacles en l'aprenentatge matemàtic: La diversitat d'interpretacions de la norma.* Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Planas, N. y Edo, M. (2008). Interacción entre discursos en una situación de práctica matemática escolar. *Cultura y Educación, 20*(4), 441-457.

Planas, N. y Morera, L. (2011). Educación matemática e interacción en el aula de secundaria. *Uno-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *58*, 77-83.

Sardà, A. (2003). *Argumentar: proposar i validar models*. En N. Sanmartí (Ed.), *Aprendre Ciències tot aprenent a escriure ciència* (121-148). Barcelona: Edicions 62.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press. Inc.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sensemaking in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (334-370). New York: MacMillan.

Streefland, L. (1993). Fractions: a realistic approach. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (289-325). Hillsdale, Misuri: Erlbaum.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona: Ediciones Península.

Van Dooren W., De Bock D., Evers M. y Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: how numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 187-211.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Educations, 27*(4), 390-408.