Universitat Autònoma de Barcelona
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales

Tesis Doctoral

El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad

Eugenia Torres Martín

Director: Jordi Deulofeu Piquet

Barcelona, marzo de 2015

Universitat Autònoma de Barcelona
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales

Tesis Doctoral

El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad

Autora
Eugenia Torres Martín

Director de la tesis
Jordi Deulofeu Piquet

Barcelona, marzo de 2015

La tesis se inició dentro del proyecto de investigación I+D *Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre Primaria y Secundaria* (EDU 2009-07298), dirigido por Lourdes Figueiras, que sirvió para la definición del trabajo y la recolección de datos, y finalizó en el marco del proyecto de investigación I+D *Caracterización del conocimiento disciplinar en Matemáticas* (EDU 2013-46083-R), del Ministerio de Economía y Competitividad de España, dirigido por Núria Gorgorió. En ambos proyectos participa como investigador Jordi Deulofeu, director de la tesis.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas las personas que han contribuido de una manera u otra a la realización de este trabajo de investigación.

En primer lugar, a Jordi Deulofeu, director de la tesis, quiero agradecerle su dedicación y su apoyo incondicional durante estos años. A su lado he aprendido mucho y, sobre todo, he "redescubierto" aspectos de las Matemáticas y de la Didáctica que ya forman parte de mi bagaje profesional y personal. En segundo lugar, a Lourdes Figueiras, codirectora de esta tesis durante largo tiempo, quiero reconocerle sus consejos, sus valiosas aportaciones y su apoyo incalculable. Ambos no han hecho más que alimentar mi fascinación por las Matemáticas y mi vocación como docente.

A los profesores y alumnos protagonistas de este trabajo de investigación sin los cuales no hubiera sido posible, pues ellos han sido la fuente principal de los datos.

A mis padres, Alejandro y Mª Teresa, mi agradecimiento por su apoyo incondicional en todos los proyectos que he emprendido, desde el momento en que decidí estudiar Matemáticas y abandonar Gran Canaria, pasando por las oposiciones a Secundaria, hasta el presente doctorado. Mi agradecimiento también a mis hermanos, Alejandro y Carolina. Aunque la familia esté físicamente lejos, siempre la he sentido muy cerca. Mi gratitud a todos por los días compartidos, tanto en Canarias como en Cataluña, por las horas al teléfono y por los detalles que han tenido conmigo.

A mi tío Fernando y a mi tío Emilio, quiero agradecerles que me hayan animado a emprender esta investigación. Ellos saben muy bien lo que supone embarcarse en un trabajo de este tipo, y me han dado siempre buenos consejos para que pueda llegar a buen puerto.

A mis amigos, sin duda mi otra familia, quiero agradecerles lo que me han animado en esta empresa, con sus charlas, sus salidas a la montaña, sus consejos, sus ratos de esparcimiento, sus risas,… ¿Cómo olvidar su apoyo, principalmente en momentos personales difíciles y sus muestras de cariño? Me han allanado mucho el camino para seguir adelante.

A Héctor, quiero agradecerle de una manera especial su implicación personal, su apoyo inestimable y su acompañamiento en el día a día. Gracias sobre todo por las horas compartidas corriendo a pie o en *ElliptiGO* que me han servido para desconectar o para compartir lo que me ocupaba de la tesis en cada momento.

A Puck, mi perro, quiero agradecerle, aunque él no pueda saberlo, su disposición para salir a pasear en cualquier momento. ¡Qué necesarias han sido estas caminatas para reflexionar sobre lo que la tesis demandaba en cada etapa de su realización!

A todos, mi gratitud y mi más sincero reconocimiento.

No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute

Carl Friedrich Gauss

Índice

Capítulo 1. Introducción

Uno de los elementos fundamentales del proceso de enseñanza es el profesor, y por lo tanto, la mejora de la enseñanza está relacionada, en parte, con la actuación del profesorado en las aulas. Si bien los trabajos de investigación sobre el profesor, sus conocimientos y creencias, tienen ya algunos años (Shulman, 1986), el estudio sistemático de su práctica docente y en particular de los conocimientos que moviliza en dicha práctica es un campo de investigación reciente.

Para poder enseñar Matemáticas el profesor debe tener unos conocimientos matemáticos sólidos del tema que está enseñando, conocimientos que le permitan ayudar al alumno a comprender el tema más allá del soporte didáctico de que disponga. Un profesor que no disponga de un buen conocimiento de la materia que enseña tendrán menos posibilidades de poder ayudar a los estudiantes a aprender un determinado concepto (Ball, Thames y Phelps, 2008). Ahora bien, el hecho de que un profesor tenga un alto conocimiento de la materia influye de manera positiva cuando enseña Matemáticas pero no es suficiente para enseñar, por lo que es muy importante que los profesores tengan un conocimiento adecuado no sólo de los contenidos matemáticos, sino también de los procedimientos, de las representaciones de dichos contenidos y de la relación entre conocimientos, procedimientos y representaciones (Fennema y Franke, 1992).

A partir del análisis de las interacciones de los profesores de Primaria con el contenido matemático, Rowland, Huchstep y Thwaites (2005) elaboraron el marco del *Knowledge Quartet*, herramienta útil para observar el conocimiento matemático de los profesores en su práctica en el aula. El *Knowledge Quartet* es una teoría desarrollada a partir de la observación en el aula de la enseñanza de las Matemáticas y categorizada en cuatro dimensiones en las que se revela el conocimiento del contenido matemático (Fundamento, Transformación, Conexión y Contingencia).

De todos los temas que se abordan en el currículum de Matemáticas, el razonamiento multiplicativo (proporciones, tasas y porcentajes) y la proporcionalidad es uno de los más complejos matemáticamente hablando y de los más difíciles de enseñar. Saber "razonar proporcionalmente" es clave en numerosas aplicaciones prácticas de la vida cotidiana. Es una competencia matemática determinante para poder seguir profundizando tanto en Matemáticas como en ciencias después de los años de Secundaria Obligatoria.

El razonamiento multiplicativo es un campo conceptual complejo, y los estudiantes de Secundaria, en los primeros años de esta etapa, no se manejan adecuadamente con los temas de proporcionalidad, presentando dificultades y errores en su aprendizaje. Diferentes investigaciones se han ocupado de esta temática, atendiendo a las cuestiones que tienen que ver con la enseñanza de estos contenidos o con su aprendizaje (Lamon, 2007).

Siguiendo el marco de Rowland, una línea de investigación consiste en descubrir cómo el conocimiento del profesor se hace visible cuando enseña Matemáticas. El papel del profesor de Matemáticas como gestor del proceso de construcción del concepto de proporcionalidad y del razonamiento proporcional tiene una especial relevancia y en este sentido, esta tesis doctoral se dirige a investigar los conocimientos de Matemáticas que el profesor moviliza en la práctica docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria. Nuestro trabajo se centra en el conocimiento matemático sobre proporcionalidad del profesor, observado en su práctica docente en el aula, y no en el aprendizaje de la proporcionalidad por parte del alumno.

La tesis se inició en el marco del proyecto *Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre Primaria y Secundaria* (EDU 2009-07298), dirigido por Lourdes Figueiras y llevado a cabo dentro del grupo PREMAT (Educación y Competencia Matemática, SGR00364, 2009-2013), dirigido por Jordi Deulofeu del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universitat Autònoma de Barcelona. Actualmente el trabajo se inscribe dentro del proyecto *Caracterización del conocimiento disciplinar en Matemáticas* (EDU 2013-46083-R) del grupo de investigación "Educació Matemàtica i Context" (EMICCOM, SGR00723, 2014), que dirige Núria Gorgorió y en el que participa Jordi Deulofeu que es el director de este trabajo.

Hemos estructurado esta memoria en 6 capítulos, el primero de los cuales es la introducción. En el segundo capítulo plantearemos cuál es el problema de investigación y los objetivos en los que se concreta dicho problema. Para ello necesitamos un marco teórico principal de referencia, centrado en la construcción del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad, en el que fundamentar nuestra investigación. Los ejes fundamentales del mismo, tal como veremos en el capítulo tercero, son el *Knowlegde Quartet*, el *Mathematical knowledge for Teaching*, en particular el *Horizon Content Knowledge*, y los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad. En el cuarto capítulo explicamos el diseño del marco metodológico que nos permite analizar la actividad docente, en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad, en Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria, desde un punto de vista cualitativo y centrada en el estudio de casos. El análisis de los datos se desarrolla en el quinto capítulo y las conclusiones se recogen en el sexto capítulo. Esta memoria se completa con la bibliografía y el índice de tablas.

Capítulo 2. Planteamiento del problema y objetivos

2.1. El problema de investigación y su justificación

A lo largo de la escolarización, los docentes en Matemáticas constatan una evolución negativa de la relación del alumno con las Matemáticas, así como de sus competencias matemáticas, agravándose en los últimos años de la Educación Secundaria Obligatoria.

En las últimas décadas muchos de los estudios se han centrado, de una manera u otra, en la asimilación o no por parte del alumno de algunas competencias matemáticas, dejando al margen al profesor. Y los estudios que se han ocupado del profesor se han centrado sobre todo en analizar las programaciones, las creencias y los conocimientos matemáticos que son necesarios para enseñar (Ball y otros, 2005), pero no desde el punto de vista de la práctica docente en el aula. Nos encontramos ante un cambio de paradigma, a saber, estudiar la práctica docente analizando la realidad del aula (Rowland y otros, 2005; Rowland, 2008). De esta manera podremos saber cuáles son los conocimientos matemáticos que el profesor es capaz de movilizar en la clase.

Por lo tanto, es necesario investigar sobre la práctica del docente para analizar hasta qué punto los conocimientos y los objetivos del profesor de Matemáticas pueden influir en el aprendizaje del alumno, tanto en un curso escolar concreto como en los sucesivos. El hecho de haber podido trabajar en el marco del proyecto de investigación *Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre Primaria y Secundaria*[1] y a un convenio con el *Consorci d'Educació* de la ciudad de Barcelona, nos han dado la oportunidad de conseguir datos de profesores de Primaria y de Secundaria y obtener dichos datos en años sucesivos. Estos datos nos han permitido analizar dos tipos de profesores con una formación inicial diferente, el de Primaria de formación generalista, diplomado en Magisterio; y el de Secundaria especialista, licenciado en Matemáticas, hecho que no se da en la transición de Secundaria al Bachillerato donde los profesores tienen una formación especializada en Matemáticas[2]. Se trataría de ver cómo los conocimientos movilizados al enseñar Matemáticas de

[1] Proyecto financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en la convocatoria de 2009, referencia: edu2009-07298.

[2] Cuando hablamos de transición de etapa en este estudio, nos referimos al paso de Primaria a Secundaria. Sería muy interesante abordar el estudio de las transiciones de otras etapas como de Secundaria al Bachillerato; o del Bachillerato a la universidad en futuros proyectos.

ambos perfiles de profesor, sin duda muy diferentes, pueden jugar un papel decisivo en el aprendizaje del alumno y en la asunción de las competencias matemáticas.

Para hacer este análisis de la práctica docente hemos decidido centrarnos en un tema concreto y relevante del currículum: la proporcionalidad. Nos centramos en un tema porque así podemos hacer un análisis en profundidad y detallado de cuáles son los conocimientos del profesor respecto a este tema. Dentro del marco general de las concreciones del currículum que todo alumno debe lograr al final de su escolarización, reconocer relaciones de proporcionalidad, obtener cantidades proporcionales, traducir diferentes situaciones de porcentajes a su expresión numérica en forma de fracción o determinar la escala de un plano, son objetivos de la Matemáticas presentes y vigentes tanto en los currículum de Primaria como de Secundaria. Además, estos objetivos van estrechamente ligados a la de resolución de problemas, una de las dimensiones de la competencia matemática, puesto que gran parte de los problemas que se plantea resolver a los alumnos en la transición de etapa de Primaria a Secundaria tienen que ver con las cuestiones de proporcionalidad. Por lo que nuestro estudio pretende centrarse en ambos pues entendemos que el razonamiento multiplicativo y las cuestiones de proporcionalidad no pueden desligarse de la resolución de problemas.

Esta investigación, contextualizada en la práctica matemática del docente, así como su influencia en el aprendizaje matemático del estudiante durante la transición entre las etapas de educación Primaria y Secundaria, pretende comparar los conocimientos de Matemáticas de los profesores de enseñanza Primaria y Secundaria en lo que respecta a la proporcionalidad (proporciones, tasas y porcentajes). Conviene precisar que el objetivo del mismo no es sólo el de comparar los conocimientos matemáticos del profesor sobre proporcionalidad, sino el de observar y analizar cómo enseña dichos contenidos con la finalidad de explicar cuáles son los objetivos que se plantea y cómo construye los conceptos matemáticos, en nuestro caso, los de proporcionalidad. Se trata de analizar y profundizar sobre los factores que pueden influir positiva o negativamente en la adquisición, por parte del alumno, de las competencias matemáticas de proporcionalidad.

Si bien el objetivo de nuestro estudio es la enseñanza y no el aprendizaje, no hemos querido perder la oportunidad de hacer también una pequeña incursión en el aprendizaje con el estudio de un caso. La posibilidad de tener datos para analizar las clases de los mismos alumnos en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria, con un año de diferencia y en el mismo tema de proporcionalidad, es una magnífica ocasión para comparar momentos del aprendizaje de un alumno concreto, sin intención de hacer un estudio exhaustivo, con la finalidad de evidenciar la estrecha relación que hay entre enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar. Cómo influye la enseñanza de un tipo de profesor (generalista o especialista) en muchos alumnos y no en un alumno concreto, es una línea de investigación que queda para estudios futuros.

2.2. Objetivos de la investigación

Las preguntas de investigación en las que se puede concretar nuestro estudio son las siguientes:

- ¿Cuáles son los contenidos de proporcionalidad que el profesor de Matemáticas manifiesta en su práctica docente en Sexto curso de Primaria (6º) y en el Primer curso de Secundaria Obligatoria (1ESO)?
- ¿Se detecta un incremento de la complejidad al iniciar la Educación Secundaria o el grado de la misma se mantiene?
- ¿Cuál es el significado de los contenidos que intervienen en esta temática que los profesores de Matemáticas de Primaria y Secundaria pretenden hacer construir a los estudiantes?

Para responder a estas cuestiones, nos fijamos, como objetivo general de investigación, el análisis de la actividad docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria Obligatoria, siguiendo el modelo de las cuatro categorías de Rowland - *Fundamento*, *Transformación*, *Conexión* y *Contingencia* (*The Knowledge Quartet*), para dotar a la "proporcionalidad" de todos los elementos que la recubren.

A partir del objetivo general, nos planteamos cuatro objetivos como objetivos específicos de investigación, el primero de ellos de tipo metodológico para poder llevar a cabo el análisis de la actividad docente y los otros tres derivados de la aplicación del instrumento.

- El primer objetivo es elaborar el instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula. Esto es, elaborar una lista de indicadores relacionados con el conocimiento del profesor, indicadores que concreten los factores que intervienen en el contenido matemático de la proporcionalidad y que sirvan para analizar cualquier episodio de clase sobre proporcionalidad.

- El segundo objetivo, analizar desde la práctica docente cuáles son los objetivos del profesor al enseñar el tema de proporcionalidad.
- El tercer objetivo, analizar desde la práctica docente cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad.
- Y el cuarto objetivo, explicar las consecuencias que una determinada construcción del concepto de proporcionalidad tiene en el aprendizaje de una alumna concreta.

Capítulo 3. Marco teórico de referencia

Los ejes fundamentales en los que se apoya el marco teórico principal de referencia de esta investigación, centrada en la construcción del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad, son: el *Knowlegde Quartet* (KQ), el *Mathematical knowledge for Teaching* (MKT), en particular el *Horizon Content Knowledge* (HCK), y los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad (apartados 3.2, 3.3 y 3.7 respectivamente).

El *Knowledge Quartet* es una teoría desarrollada por Tim Rowland (2008) para describir y analizar las observaciones hechas en el aula. Conceptualizado a partir del análisis de las interacciones de los profesores de Primaria con el contenido matemático, distingue cuatro categorías de conocimiento de los profesores: *Fundamento* o conocimiento y comprensión de las Matemáticas *per se* [MKT]; *Transformación* de los conocimientos del profesor para que los alumnos sean capaces de aprenderlos (ejemplos, representaciones, etc.); *Conexión* o conocimiento en acción manifestado en la coherencia y planificación de los contenidos a enseñar [HCK]; y *Contingencia* o conocimiento en interacción en el aula, pensar sobre la marcha.

El *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) o los conocimientos matemáticos que son necesarios para enseñar de Deborah Ball y otros (2008) es un concepto entendido como una combinación de conocimientos de la propia materia (contenidos propios del tema que se enseña) y la pedagogía necesaria para llevar a cabo la empresa de enseñar con éxito (conocimientos y capacidades de los profesores para ayudar a los alumnos a entender un determinado concepto).

Ahora bien, conocer sólo los contenidos matemáticos no es suficiente para enseñar y de aquí la necesidad del *Horizon Content Knowledge* (HCK) o Conocimiento del Horizonte Matemático. El HCK lo entendemos no como un subtipo del conocimiento de los contenidos matemáticos, sino en un sentido amplio, la conciencia del profesor de los conocimientos matemáticos previos y futuros, como el eje vertebrador de todos los conocimientos anteriores, ya que se relaciona estrechamente con todos ellos y los dota de continuidad. De esta manera, el HCK, como categoría de conocimiento matemático que se refiere tanto a los conocimientos previos como a los futuros, es especialmente relevante durante la transición de la enseñanza Primaria a la enseñanza Secundaria.

Asimismo se puede describir el HCK en términos de conexiones matemáticas en el aula: el HCK se caracteriza por las conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción de significado de los contenidos matemáticos escolares y del aprendizaje en términos de continuidad. El enriquecimiento de la idea del HCK y la caracterización de su expresión en la práctica docente pretende desarrollar una herramienta teórica para poder abordar la transición desde la perspectiva de los conocimientos matemáticos de los docentes. Por ello y puesto que los datos de nuestra investigación se han centrado justamente en la transición de Primaria a Secundaria -en grabaciones de aula de alumnos y profesores de Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria-, además de abordar el KQ, el MKT y el HCK en este marco teórico, hemos creído conveniente completar el mismo con tres apartados dedicados a los conocimientos del profesor de Matemáticas (3.1), a las conexiones y el HCK (3.4), y a la transición de Primaria a Secundaria (3.5).

Finalmente, como es nuestro objetivo incluir en este marco teórico una caracterización de lo que se le pide saber al profesor de Matemáticas de Primaria y de Secundaria sobre proporcionalidad, nos ocuparemos, entre otros temas, de lo que supone entender la proporcionalidad, de las situaciones en las que puede aplicarse y de los modelos tanto informales como formales de razonamiento proporcional, a saber, el incremento gradual aditivo, la reducción a la unidad o la regla de tres. Para ello hemos estructurado esta parte en tres apartados: el razonamiento multiplicativo (3.6), las estrategias de razonamiento proporcional (3.8) y las dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad (3.9), con ejemplos que ilustran adecuadamente todo lo que recubre este tema tan importante.

3.1. Los conocimientos del profesor de Matemáticas

El conocimiento matemático es un tipo de conocimiento de naturaleza dual, que conjuga aspectos internos, relacionados con su propia estructura formal abstracta, y aspectos externos, relacionados con su aplicación a la resolución de problemas reales (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001). Esta dualidad es extensiva a las Matemáticas escolares y se manifiesta explícitamente en distintas definiciones de la competencia matemática (Departament d’Educació, Decret 143/2007 DOGC núm. 4915; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; OCDE, 2003).

Así pues, las Matemáticas escolares presentan dos caras simultáneas que conviene tener presentes si se pretende que los alumnos adquieran una competencia matemática. Por un lado, en su vertiente más interna, las Matemáticas constituyen un conocimiento "cerrado" en el sentido en que no depende de otro tipo de conocimiento para ser construido, estudiado o comunicado. Las Matemáticas se caracterizan por ser un conocimiento de alto nivel de abstracción y generalidad, de naturaleza deductiva, que utiliza un lenguaje formal especifico propio para ser comunicado y que está exento de intencionalidad o temporalidad (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001). Por otro lado, la vertiente de las Matemáticas que denominaremos externa se refiere al papel que juegan las Matemáticas en múltiples contextos extra matemáticos vinculados al mundo real. Así pues, es necesario atender a esta dualidad de las Matemáticas en la educación, intentando que los alumnos puedan coordinar el significado matemático con el significado referencial. Una enseñanza de las Matemáticas dirigida a enseñar procedimientos matemáticos genera una descontextualización de los contenidos, convirtiendo las Matemáticas escolares en una repetición mecánica de técnicas con una conexión muy reducida con el mundo real (Onrubia y otros, 2001).

Por el contrario, si se pretende construir el conocimiento matemático desde sus aspectos externos, incidiendo en los procesos matemáticos que ocurren en situaciones reales, se hacen necesarios aspectos internos de las Matemáticas (Fernández y Figueiras, 2010). Dado que la definición de competencia matemática que se da en el currículum catalán de Educación Secundaria Obligatoria alude explícitamente a elementos de las Matemáticas que podríamos definir, según los criterios anteriores, como componentes internos y externos de las Matemáticas, creemos que la adquisición de la competencia matemática implica la integración de los dos tipos de elementos, ya que para poder entender fenómenos clave del mundo actual es necesario disponer de diversos conocimientos sobre aspectos internos de las Matemáticas, que a su vez, para ser entendidos de forma significativa requieren de aspectos externos de las Matemáticas.

Para poder enseñar Matemáticas atendiendo a su propia dualidad y ofrecer a los alumnos oportunidades para comprender aspectos internos de las Matemáticas y relacionarlos de forma significativa con aspectos externos, el profesor debe tener unos conocimientos matemáticos sólidos del tema que está enseñando, que le permitan ayudar a los estudiantes a comprender el tema más allá del soporte didáctico de que disponga. Profesores que no dispongan de un buen conocimiento de la materia que enseñan tendrán menos posibilidades de poder ayudar a los estudiantes a aprender un determinado concepto (Ball y otros, 2008). Sin embargo, conocer sólo los contenidos matemáticos no es suficiente para enseñar. Aunque los puros conocimientos matemáticos favorecen la ayuda que pueda dar el profesor a los alumnos para comprender las Matemáticas, no son suficientes, puesto que no garantizan que el profesor pueda dar un sentido matemático al trabajo de los estudiantes o disponer de diversas representaciones que le permitan representar el concepto de forma que los estudiantes lo puedan entender (Ball y otros, 2008).

En el caso concreto de la proporcionalidad, existen diferentes conceptos que tienen una estrecha relación con otros contenidos presentes en los currículums de Matemáticas de Secundaria. Tal es el caso de la relación entre fracciones, decimales y porcentajes; la función lineal; la medida de magnitudes; la proporcionalidad geométrica o la probabilidad. Por tanto, es necesario que el profesor de Matemáticas sea consciente, por una parte, de la relación que el alumno establece con sus conocimientos previos; y por otra, de que el alumno los utiliza. Al mismo tiempo el profesor debe intentar que el alumno construya el concepto de forma que se conecte con los demás contenidos con los que se relaciona. Por lo tanto, para poder ayudar a los alumnos a comprender lo que significa la proporcionalidad, brindarle la oportunidad de conectarla con otros conceptos matemáticos y construir una comprensión significativa de la misma, el profesor debe conocer toda la potencialidad del concepto de proporcionalidad, sus puntos clave, como la definición de fracción, de número racional y las diferencias entre ambos (entre otros), las diferentes interpretaciones del número racional (parte-de-un-todo, cociente, medida, razón y operador), entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido (entre dos valores de la misma magnitud y entre valores correspondientes de las dos magnitudes), las dificultades que presenta que la razón de proporcionalidad sea entera o no y la forma en que se relaciona la proporcionalidad con otros conceptos como el de función lineal, representando para los alumnos el primer modelo de función que estudian. De esta manera el profesor estará mejor preparado para escoger las actividades que propone en el aula, planificar su implementación, flexibilizarlas si hace falta y responder a las dudas y las inquietudes de los estudiantes.

Asimismo, es importante que el profesor controle diferentes formas de interpretar los conceptos para, por un lado, dar a los estudiantes la oportunidad de profundizar en el conocimiento y la comprensión de los mismos, y por otro, intentar que las intervenciones de los alumnos no sean malinterpretadas y evitar que se generen instrucciones equivocadas por parte del profesor (Fernández y Figueiras, 2010). Se han identificado diversos bloqueos de oportunidades en términos de la construcción del conocimiento matemático en el aula, generadas al menos en parte, por la forma de responder del profesor a las intervenciones de los alumnos en clase de Matemáticas (Fernández y Figueiras, 2010). Por todo lo anterior, consideraremos que el papel del profesor de Matemáticas como gestor del proceso de construcción de conocimiento matemático tiene una especial relevancia y por lo tanto pretendemos establecer un marco teórico que nos permita analizar cómo el profesor moviliza sus conocimientos en la práctica en el aula.

3.2. *El Knowledge Quartet*

El *Knowledge Quartet* (KQ) es una teoría desarrollada por Rowland (2008) en primera instancia para describir y analizar las observaciones hechas en el aula. Es razonable suponer que las construcciones basadas en la práctica son potencialmente más útiles para los profesionales, en este caso los profesores de Primaria, que las construcciones desarrolladas sin este soporte y sin conocer la complejidad del conocimiento de la enseñanza (Skott, 2005).

Esta conceptualización del conocimiento de los profesores fue creada en respuesta a la llamada de Fennema y Franke (1992) para estudiar el conocimiento de los profesores de Matemáticas en el contexto de la enseñanza. Fennema y Franke argumentaron que el hecho de que un profesor tenga un alto conocimiento de la materia, las Matemáticas en el caso que nos ocupa, influye de manera positiva cuando enseña Matemáticas, por lo que es muy importante que los profesores tengan un conocimiento adecuado de los contenidos matemáticos, de los procedimientos, de las representaciones de dichos contenidos y de la relación entre conocimientos, procedimientos y representaciones, esto es, un conocimiento interrelacionado. Puesto que las Matemáticas son un vasto conjunto de abstracciones profundamente interrelacionadas, si los profesores no saben cómo trasladar dichas abstracciones a los alumnos de manera que estos sean capaces de relacionar las Matemáticas con lo que ya saben, los alumnos no podrán entender los contenidos de las Matemáticas que se les enseña (Fennema y Franke, 1992).

El marco del KQ fue desarrollado a partir de la observación de la enseñanza de las Matemáticas y de la categorización de situaciones en las que quedó revelado el conocimiento del contenido matemático. El objetivo del estudio de Rowland

(2005) es descubrir cómo el conocimiento del profesor (el estudio se centra en Primaria) se hace visible en el aula cuando enseña Matemáticas. En concreto:

1. Evidenciar si los profesores de Primaria con un fuerte conocimiento de la materia (*Subject Matter Knowledge*, SMK) tienden a ser más competentes como profesores respecto a los que no tienen tantos conocimientos. O lo que es lo mismo, si un conocimiento superior del SMK marca una diferencia respecto a la enseñanza de las Matemáticas elementales de Primaria y si esto es "observable" en la práctica del profesor "instruido" y viceversa.

2. Identificar y comprender mejor la manera en la que el conocimiento del contenido matemático de los profesores de Primaria (SMK), o la carencia del mismo, se pone de manifiesto en la práctica de la enseñanza.

A partir del análisis de las interacciones de los profesores de Primaria con el contenido matemático, Rowland elaboró un marco, el *Knowledge Quartet* (KQ), que permite observar el conocimiento matemático de los profesores en su práctica en el aula.

En origen se consideraron 18 códigos claves en las que se ponía de manifiesto el conocimiento del contenido matemático del profesor. Posteriormente se agruparon estos códigos en cuatro categorías o unidades de rango superior. Se trataba de analizar primero, para después sintetizar y finalmente priorizar, o lo que es lo mismo, clasificar por relevancia. Estas 4 unidades que podemos ver en el siguiente diagrama representan conceptos más completos y de rango más elevado y se concibe el todo, el KQ, como una herramienta dirigida a la observación de las clases de Matemáticas (Rowland, 2008).

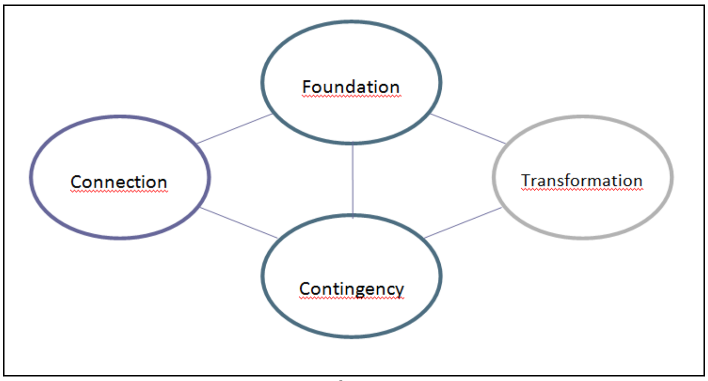

Tabla 3.1: Categorías del KQ

Una breve caracterización de cada una de las dimensiones del KQ es la siguiente:

3.2.1. Fundamento

Es la primera categoría de las 4 dimensiones del KQ, base de los otros tres tipos de conocimiento y que se refiere al conocimiento "teórico". Es decir, consiste en los conocimientos, las creencias y la comprensión que los futuros profesores han adquirido "en su formación académica" y en sus prácticas para prepararse como profesores en el aula. Las componentes claves de este bagaje teórico son: el conocimiento y la comprensión de las Matemáticas *per se*, el conocimiento de lo más significativo de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, junto con las creencias concernientes a la naturaleza del conocimiento de las Matemáticas, los objetivos de la educación matemática y las condiciones en las que los alumnos pueden aprender mejor Matemáticas.

Más concretamente, se trata de conocimiento de proposiciones y creencias – que los futuros enseñantes han adquirido "en su formación académica" para prepararse como profesores en el aula- concernientes a:

- Significados y descripciones de los conceptos matemáticos relevantes
- Relación entre los conceptos matemáticos relevantes
- Factores que la investigación ha mostrado significativos en la enseñanza y en el aprendizaje de las Matemáticas
- Conocimiento de lo más significativo de la literatura y el pensamiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

- Sistemas de creencias concernientes a la naturaleza del conocimiento de las Matemáticas, creencias sobre por qué y cómo se aprenden las Matemáticas
- Estatus ontológico de las Matemáticas
- Objetivos de la educación matemática, de la enseñanza de las Matemáticas
- Condiciones en las que los alumnos pueden aprender mejor Matemáticas

Códigos claves:

- *Conciencia de los objetivos*
- *Identificación de errores*
- *Conocimiento manifiesto de la materia*
- *Puntales teóricos de pedagogía*
- *Uso de terminología*
- *Utilización de libros de texto*
- *Dependencia de los procedimientos*

3.2.2. Transformación

La segunda categoría tiene que ver con el conocimiento en acción, demostrado tanto en la planificación de lo que se va a enseñar como en el mismo acto de enseñar. Las descripciones y los significados propios del profesor se transforman y se presentan en método y manera que los alumnos sean capaces de aprenderlos. Como Shulman indica (1986), la presentación de ideas a los alumnos conlleva la representación de las mismas en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Es particularmente importante la elección que hacen los futuros profesores de los ejemplos presentados a sus alumnos con el fin de ayudarlos a la formación de un concepto, a la adquisición del lenguaje y para demostrar procedimientos (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2003). La elección de ejemplos que hace el profesor se hace particularmente visible por:

- La óptima adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos
- La confrontación y la resolución de ideas equivocadas o confusas comunes

- La justificación (mediante ejemplos genéricos) o la refutación (mediante contraejemplos) de conjeturas matemáticas

Códigos claves:

- *Elección de representaciones*
- *Demostraciones del profesor*
- *Elección de ejemplos*

3.2.3. Conexión

La tercera categoría combina ciertas elecciones y decisiones que se hacen en partes concretas del contenido matemático. Esta dimensión del conocimiento se refiere a la coherencia de la planificación o de la enseñanza a lo largo de un curso, lección o serie de lecciones. La concepción de esta coherencia incluye también la secuenciación de material para la enseñanza y conciencia de las demandas cognitivas pertinentes de los diferentes temas y tareas.

Se trata de conocimiento en acción manifestado en la deliberación y en la elección de la planificación y de la enseñanza. En una misma lección o a través de varias lecciones, el profesor *unifica* la materia de la asignatura y ofrece *cohesión* con respecto a por un lado, las conexiones entre diferentes significados y descripciones de conceptos particulares *o* entre modos alternativos de representar conceptos y de llevar a cabo los procedimientos; y por otro lado, la complejidad pertinente y la demanda cognitiva de conceptos y procedimientos matemáticos, por la atención de la secuenciación del contenido.

Así en un mismo episodio (lección o a través de varias lecciones), el profesor unifica la materia presentando coherencia respecto a:

- Conexiones entre diferentes significados de conceptos concretos
- Conexiones entre diferentes descripciones de conceptos concretos
- Conexiones entre modos alternativos de representar conceptos concretos
- Conexiones entre distintos procedimientos
- Secuenciación de temas en la instrucción en una lección y entre lecciones

- Orden de tareas y ejercicios a realizar
- Conciencia de las demandas cognitivas pertinentes de los diferentes temas y tareas

Códigos claves:

- *Establecimiento de conexiones entre procedimientos*
- *Establecimiento de conexiones entre conceptos*
- *Anticipación a la complejidad*
- *Decisiones sobre la secuenciación*
- *Reconocimiento de la conveniencia de los conceptos*

3.2.4. Contingencia

La cuarta y última categoría se manifiesta en los acontecimientos de la clase que no han sido planificados previamente. Es la habilidad, la capacidad para pensar sobre la marcha, "improvisar", "reconducir". Incluye la buena disposición para responder, por una parte, a las ideas de los alumnos y la consiguiente preparación, si conviene, para desviarse del "orden del día" planificado al preparar la clase.

Se trata por tanto de conocimiento en interacción en el aula, manifestado en la habilidad del profesor para pensar sobre la marcha (según las circunstancias) y responder adecuadamente a las intervenciones de los alumnos durante un episodio de clase. A veces esto puede verse en la voluntad del profesor para desviarse de lo que tenía programado (agenda de su propia programación) cuando la contribución inesperada de un alumno pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho alumno, o pueda implicar una vía de investigación productiva. Es el conocimiento relativo a las decisiones que se toman en el mismo momento de dar clase, es la habilidad de pensar y decidir en acción, e incluye:

- Tratamiento de la interacción en el aula
- Dificultades del alumno
- Intervenciones desatendidas
- Capacidad (habilidad) del profesor para desviarse de lo que tenía programado cuando la contribución inesperada de un alumno pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho alumno, o pueda implicar una vía de investigación productiva (rentable).

Códigos claves:

- *Respuesta a las ideas de los alumnos*
- *Utilización de las oportunidades*
- *Desviación de lo programado*

3.3. El *Mathematical knowledge for Teaching* y el *Horizon Content Knowledge*[3]

Hasta ahora se consideraba que lo que los profesores necesitan saber para enseñar Matemáticas es lo que está en el plan de estudios (currículum), más un plus adicional correspondiente a unos años de estudio en Matemáticas en la universidad. Sin embargo, algunos estudios recientes (Loewenberg, Hoover y Phelps, 2009) han recogido la necesidad de que los profesores de Matemáticas conozcan el currículum de una manera "más profunda", además de numerosos aspectos del conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*). Tanto en el primer caso como en el segundo sigue sin estar claro cuál es exactamente este "plus" de conocimiento que todo docente precisa para llevar a cabo la tarea de enseñar satisfactoriamente. Dicho de otra manera, ¿qué es lo que los maestros y/o profesores necesitan saber para ser capaces de enseñar con eficacia? O, ¿qué exige la enseñanza eficaz de las competencias matemáticas en términos de la comprensión del contenido? Estas cuestiones trasladan el foco de atención de los propios profesores al uso del conocimiento en la enseñanza y para la enseñanza.

Es importante identificar, aislar y medir los conocimientos y habilidades propias, distintivas de la tarea de enseñar esenciales para establecer el estatus del enseñar como actividad profesional, a pesar de que se reconozca que en la enseñanza real del día a día, tales límites pueden parecer artificiales.

Por "enseñar", nos referimos a todo lo que los profesores deben hacer para que sus alumnos aprendan. Está claro que esto significa trabajar interactivamente en el aula impartiendo conocimientos y realizando todas las tareas que se plantean en el curso de su desarrollo. Pero también nos referimos a la planificación de las

[3] El primero (MKT) es el conocimiento matemático utilizado para llevar a cabo la tarea de enseñar matemáticas. El segundo (HCK) es el conocimiento que hace referencia a cómo los tópicos matemáticos están relacionados a lo largo del currículum.

clases, la evaluación del trabajo de los estudiantes, a la explicación del trabajo de clase a los padres, a los deberes en casa, a intentar ser ecuánime y equitativo, sin perder de vista el currículum de Matemáticas. Cada una de estas tareas, y otras muchas, suponen tener ciertas ideas y conocimientos matemáticos, habilidades de razonamiento matemático, soltura para manejar ejemplos y términos, reflejos para encontrar los errores en los alumnos y reflexionar acerca de la naturaleza de la competencia y la suficiencia matemática (Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001).

Enseñar puede requerir un conocimiento especializado "puro" de la materia. Puro en el sentido de que es un conocimiento que no se mezcla con los conocimientos de los estudiantes o con la pedagogía y, por lo tanto, distinto también del contenido didáctico de la materia. Especializado ya que sólo se utiliza o es necesario en el ámbito de enseñar Matemáticas y no al enseñar otras disciplinas. Esta singularidad es lo que hace que este conocimiento del contenido sea especial.

Para ello se requiere un marco teórico que se adapte a nuestro propósito de comprender mejor el papel del profesor y, en particular, la relación de su conocimiento matemático con la práctica en la transición de Primaria a Secundaria. Dentro de la teoría basada en la práctica del conocimiento de los contenidos necesarios en el ámbito de la enseñanza desarrollado por Ball, Thames, y Phelps (2008) elegimos el concepto teórico de los conocimientos matemáticos que son necesarios para enseñar (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) (Ball y otros, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008), concepto entendido como una combinación de conocimientos de la propia materia (contenidos propios del tema que se enseña) y la pedagogía necesaria para llevar a cabo la empresa de enseñar con éxito (conocimientos y capacidades de los profesores para ayudar a los alumnos a entender un determinado concepto).

Los autores distinguen, dentro del MKT, dos dominios diferentes: el *Pedagogical Content Knowledge* (conocimiento del contenido didáctico) y el *Subject Matter Knowledge* (conocimiento de la materia), los cuales se dividen a su vez en diferentes subdominios que intervienen en las habilidades del profesor de Matemáticas con el objetivo de abastar este tema en toda su complejidad. Dentro del conocimiento de la materia se encuentra el conocimiento matemático especializado (*SCK*), que implica el dominio de conocimientos y habilidades que no son en absoluto necesarias para poder utilizar las Matemáticas que se estén tratando aunque sí para poderlas enseñar de forma adecuada. Por ejemplo, en el caso de la proporcionalidad no es necesario comprender la justificación de la regla de tres para poderla utilizar, mientras que sí lo es para poder enseñarla a los alumnos de forma adecuada.

Asimismo dentro del conocimiento de la materia se conceptualiza el subdominio denominado *Horizon Content Knowledge* (HCK): concepto particularmente relevante para nuestro trabajo. El HCK hace referencia a los conocimientos generales sobre las etapas educativas anterior y posterior, y es definido por los propios autores como "una toma de conciencia sobre cómo los diferentes temas de Matemáticas se relacionan durante el currículum escolar". Se entiende así esta categoría de conocimiento matemático no como un subtipo del conocimiento de los contenidos matemáticos, sino en un sentido amplio, la conciencia del profesor de los conocimientos matemáticos previos y futuros, como el eje vertebrador de todos los conocimientos anteriores, ya que se relaciona estrechamente con todos ellos y los dota de continuidad.

Así, el *Horizon Content Knowledge* surge como respuesta teórica a los conocimientos necesarios para la enseñanza continua de las Matemáticas, es decir, el conocimiento de cómo los tópicos matemáticos están relacionados a lo largo del currículum. Por tanto, el HCK es especialmente relevante durante la transición a la enseñanza Secundaria. El HCK se refiere tanto a los conocimientos previos como a los futuros. El enriquecimiento de la idea del HCK y la caracterización de su expresión en la práctica docente pretende desarrollar una herramienta teórica para poder abordar la transición desde la perspectiva de los conocimientos matemáticos de los docentes (Fernández y Figueiras, 2010).

Además del HCK, existen en el MKT otros subdominios como el *Knowledge of Content and Students* (KCS) o conocimiento de las Matemáticas y de los estudiantes, el *Knowledge of Content and Teaching* (KCT) o conocimiento de las Matemáticas y de la enseñanza, y el *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC) o conocimiento matemático curricular. El KCS se refiere al conocimiento de los estudiantes en relación con las Matemáticas y se relaciona con las habilidades que debe tener un profesor para identificar y gestionar aspectos como los conceptos que los estudiantes encuentran especialmente difíciles, la predicción de la actitud de los estudiantes cuando se les propone una tarea, los ejemplos que entienden mejor o la interpretación de las intervenciones incompletas y poco rigurosas de los alumnos. En el caso de la proporcionalidad, tal y como se detalla más adelante, existen diversos aspectos que suelen presentar dificultades a los alumnos, como por ejemplo la aplicación de la proporcionalidad directa a situaciones en las que no se aplica. El KCT alude a los conocimientos y habilidades que debe poner en práctica un profesor para poder escoger la forma en la que introduce un tema, los ejemplos que utiliza, o la conveniencia o no conveniencia de proponer una determinada actividad. Se refiere también a la contingencia o capacidad del profesor para gestionar las intervenciones de los alumnos en el aula, para decidir cuándo conviene una explicación o cuándo proponer otras preguntas a los estudiantes. Finalmente, el conocimiento matemático curricular, además de tratar con los conocimientos relativos a los distintos programas curriculares que existen para temas concretos y niveles concretos, también se relaciona con el conocimiento de materiales (libros, TAC, materiales manipulativos, etc.) que existen para trabajar un tema curricular específico. En este sentido los autores proponen su inclusión, junto con los dos anteriores, en los relacionados con el conocimiento pedagógico.

Nuestro trabajo, en lo que se refiere a la temática sobre la proporcionalidad y el razonamiento multiplicativo, toma en consideración el MKT con especial atención al HCK como categoría relevante para la transición de etapa Primaria-Secundaria. Queremos centrarnos en la cuestión de *cómo* los profesores necesitan conocer el contenido que enseñan.

Por lo tanto, la cuestión que se plantea es, y con respecto al caso particular de las cuestiones de proporcionalidad, ¿qué tienen que hacer los profesores cuando enseñan Matemáticas -en virtud de ser responsable de la enseñanza y del aprendizaje del contenido- y dicha tarea, qué razonamientos, comprensiones y habilidades matemáticas exige? Este interrogante así formulado supone un cambio de paradigma: en lugar de comenzar abordando el plan de estudios (currículum), o los tópicos sobre el aprendizaje del estudiante, se analiza qué implica enseñar. Por ello queremos establecer el conocimiento de los profesores a partir del análisis de la práctica de docentes concretos en determinados momentos. Este análisis pretende descubrir las formas en que las Matemáticas se involucran en las demandas de la enseñanza en el día a día para finalmente sentar las bases de una *práctica de enseñar* basada en la teoría del conocimiento matemático necesario para enseñar.

Mediante la coordinación de las perspectivas matemática y pedagógica en el análisis de los datos observados en la práctica, se trata de desarrollar una teoría del conocimiento matemático "basada en la práctica", una teoría que determinase qué conocimientos se usan en la enseñanza, tal como mostraron Ball y otros (2008).

Aunque la generalización de sus resultados podría ser limitada, es probable que dichos resultados se puedan generalizar extensamente ya que la concepción de la tarea de enseñar de esta investigación no se basa en un enfoque particular del hecho de enseñar sino en identificar las tareas y funciones fundamentales que entraña la enseñanza. Se trata de completar, en palabras de Schulman (1987) la rudimentaria "tabla periódica" del conocimiento del docente. Asimismo, dicho estudio puso de manifiesto que los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar son multidimensionales. Es decir, la habilidad matemática general no justifica completamente el conocimiento y las habilidades que conlleva enseñar Matemáticas (Hill, Rowan y Ball, 2005).

Estudios más recientes (Fernández y Figueiras, 2010) tienen como objetivo dar su propio enfoque en el enriquecimiento de la idea de HCK, en el contexto particular de la transición de Primaria a Secundaria. Su propósito es poder responder a algunas preguntas como: ¿Qué características debe tener un maestro de Primaria o de Secundaria para garantizar una transición sin problemas? ¿Cuáles de estas características se refieren específicamente a sus conocimientos matemáticos? ¿Hasta qué punto responder a estas preguntas nos puede ayudar a definir el HCK y su lugar en el marco de MKT? ¿Cómo se refleja el HCK en la práctica cotidiana de docentes, en cualquier grado? Los programas de formación de docentes ¿deben considerar el HCK específicamente? Lejos de ofrecer respuestas completas a estas preguntas, el objetivo de su estudio es dar algunas sugerencias para abordar en futuras investigaciones, y ampliar la conceptualización del HCK para utilizarlo como una herramienta teórica para abordar la transición.

3.4. Las conexiones y el HCK

Las conexiones en Matemáticas forman parte de lo que se consideran las buenas prácticas en la enseñanza. Cuando se ofrece un ejemplo de un concepto se establece una conexión entre algo concreto y un concepto matemático más general. Asimismo cuando se proponen problemas reales que remiten a situaciones de la vida cotidiana, se están estableciendo conexiones entre conceptos matemáticos y situaciones externas a la matemática. Sin embargo, la idea moderna de conexión implica algo más que ejemplos y resolución de problemas ligados a la realidad. Cualquier nuevo concepto matemático tiene una naturaleza personal en el sentido de que es significativo en la medida en que se relaciona o se vincula con conocimientos individuales ya adquiridos (Bishop y Goffree, 1986). Puede estar relacionado con el conocimiento individual de otros temas o con otros conceptos matemáticos, con el conocimiento individual que uno tiene de ciertas situaciones de la realidad, incluso puede ser un ejemplo de otro concepto matemático (Da Ponte, 2010).

Conviene resaltar esta naturaleza personal que se da en toda conexión puesto que no hay dos personas que establezcan las mismas conexiones y en particular, los profesores y los alumnos tienen ideas muy diferentes asociadas a las Matemáticas (Bishop y Goffree, 1986). La idea de conexión está estrechamente ligada a la de explicación puesto que explicar significa precisamente establecer conexiones: "es un proceso sin fin de establecer conexiones y relaciones entre la idea que se va a explicar y otras ideas" (Bishop y Goffree 1986, p. 331).

En los currículums de Matemáticas se considera el establecer conexiones como la orientación metodológica central de todo aprendizaje. Al colocar las conexiones como objetivos del aprendizaje no sólo es importante que los alumnos sean capaces de establecer conexiones sino que también es relevante que puedan sacarles partido con vistas a razonar y resolver problemas matemáticos. Además el establecimiento de conexiones es esencial no sólo en el aprendizaje de las Matemáticas sino para comprenderlas y ser capaz de disfrutar con ellas. Como consecuencia, una función primordial del profesor dentro del aula es que los alumnos desarrollen la capacidad para establecer conexiones en general, tanto internas a las Matemáticas como externas: "las capacidades que potencia el currículum de Matemáticas tienen que ayudar al alumno a establecer razonamientos cuantitativos sobre situaciones de la vida real y sobre el mundo que le rodea y a modelizar situaciones de la vida real y vinculadas a otras áreas de conocimiento y a traducirlas a modelos matemáticos" (*Currículum Educació Secundària Obligatòria– Decret 143/2007 DOGC núm. 4915*). Difícilmente se adquiere competencia matemática si no se orienta el aprendizaje de los contenidos de manera que se posibilite su utilización fuera de las clases de Matemáticas, tanto en la vida diaria de los alumnos como en el resto de materias.

Consideramos que la proporcionalidad, además de jugar un papel especialmente relevante en el currículum de la enseñanza Secundaria, es un tema especialmente rico desde el punto de vista de las conexiones tanto internas como externas de las Matemáticas. Por un lado, es uno de los temas curriculares de Matemáticas que los alumnos aplican más (regla de tres, proporciones en recetas o mezclas, porcentajes, aumento, descuentos); y por otro lado, la proporcionalidad tiene relación con todos los bloques de contenidos del currículum del Primer curso de Secundaria en Cataluña. Por ejemplo, se relaciona con las fracciones, decimales y porcentajes (bloque de numeración y cálculo); con la función lineal (bloque de relaciones y cambio); con la medida y relación entre magnitudes (bloque de la medida); con la proporcionalidad geométrica (bloque de espacio y forma) o con la regla de Laplace (bloque de estadística y azar).

Con respecto a la proporcionalidad, un ejemplo importante de conexión interna es establecer conexiones entre dos representaciones de los números racionales relativamente próximas, la decimal y la fraccionaria. Normalmente se estudia primero la representación de los números racionales como decimales y las operaciones entre ellos y después la representación equivalente del número racional como fracción. Para muchos alumnos no existe ningún tipo de conexión entre ambas representaciones por lo que optar por estudiar los números racionales manteniendo en la medida de lo posible los dos tipos de representaciones en paralelo (la decimal y la fraccionaria) tiene la ventaja de permitir que se establezcan conexiones a medida que se despliega el estudio de los números racionales. Representar porcentajes pictóricamente o usar el símbolo %, relacionar porcentajes con fracciones y decimales son otros ejemplos de conexiones internas en las Matemáticas.

Las conexiones externas entre conceptos y representaciones matemáticas y la realidad exterior son fundamentales para que los alumnos desarrollen los conceptos y las ideas matemáticas pero también para que desarrollen su capacidad de utilizar las Matemáticas en la resolución de problemas de diferentes ámbitos. En este sentido el aprendizaje de los diferentes significados que tienen los números racionales –como *parte-de-un-todo*, cociente, razón, medida u operador- ligados a contextos reales de la vida cotidiana que los puedan hacer más comprensibles, puede contribuir poderosamente a que el alumno establezca conexiones externas con otras disciplinas.

Por otra parte, las conexiones internas en la matemática son esenciales para comprender los conceptos, así como sus representaciones y las relaciones entre ellos, por lo que el papel del profesor es decidir, en su práctica docente diaria y dependiendo de las experiencias previas de los alumnos, las tareas a proponer con vistas a comprender los conceptos y las relaciones entre conceptos y representaciones, las conexiones a valorar y los modos de trabajar con vistas al aprendizaje del alumno. Se incentiva al profesor a que cree oportunidades de trabajo en el aula con diversos tipos de conexiones y que las use para promover el aprendizaje de los alumnos y el desarrollo de sus capacidades.

En síntesis, el profesor debe vincular las conexiones a objetivos del aprendizaje a tres niveles, de manera que todos los alumnos puedan: 1) reconocer y utilizar las conexiones entre ideas matemáticas; 2) conocer cómo se interrelacionan las ideas matemáticas y cómo se construyen unas a partir de las otras para producir un todo coherente y 3) reconocer y aplicar las matemáticas en contextos externos a la misma. Una buena manera de empezar a trabajar las conexiones en la clase de Matemáticas es utilizando como punto de partida las experiencias previas de los alumnos. Cuando los estudiantes establecen conexiones entre ideas o conceptos matemáticos, profundizan en la comprensión de dichas ideas de manera que éstas son más duraderas en el alumno y no sólo aprenden Matemáticas sino que también aprenden a reconocer la utilidad de las mismas.

El alumno ha de estar asimismo capacitado para: identificar y usar contextos entre ideas matemáticas; comprender cómo las ideas matemáticas se interrelacionan constituyendo un todo; y reconocer y aplicar ideas matemáticas en contextos no matemáticos, construyendo modelos matemáticos simples. Además los estudiantes deben contemplar la matemática en su conjunto, de una manera integrada, estableciendo conexiones entre lo que están aprendiendo actualmente y lo que aprendieron en el pasado.

Por lo que respecta al Conocimiento del Horizonte Matemático del que hablamos con anterioridad, este puede describirse en términos de conexiones matemáticas en el aula: el HCK se caracteriza por las conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción del significado de los contenidos matemáticos escolares en términos de continuidad (Martínez y otros, 2011). De esta manera consideraremos que las conexiones matemáticas son las que permiten dar significado a los contenidos matemáticos escolares. En otras palabras a mayor cantidad y calidad de las conexiones que un profesor provoque en el aula se considera que su conocimiento matemático para la enseñanza es mayor y de mejor calidad.

Las intervenciones del profesor de Matemáticas al responder a las intervenciones de los alumnos son las que pueden permitir o impedir establecer conexiones matemáticas en el aula. Por lo que las intervenciones de los alumnos son la base sobre la cual el profesor hace explícito su conocimiento del horizonte matemático y, por tanto, la base sobre la que se construye en el aula el conocimiento matemático. Sin embargo, aun cuando el profesor realice intervenciones que puedan establecer conexiones, es importante que su gestión del aula no impida que se establezcan conexiones. Para el profesor de Matemáticas, tanto de Primaria como de Secundaria, será una herramienta útil de reflexión y mejora el análisis, en primer lugar, de las situaciones en las que pierde oportunidades de establecer conexiones, para poder aprender así a identificar estas situaciones y minimizar las consecuencias de este tipo de ausencias. Y en segundo lugar, el descubrimiento de sus puntos fuertes para incrementar el conocimiento de sus propias capacidades y su estilo como profesor de Matemáticas.

Si bien las conexiones pueden ser de muchos tipos, se pueden concretar tres categorías de conexiones en el Conocimiento del Horizonte Matemático: conexiones intraconceptuales, conexiones interconceptuales y conexiones temporales.

- Las *conexiones intraconceptuales* se refieren a las conexiones que se establecen en un mismo concepto, como pueden ser la equivalencia entre caracterizaciones de un concepto, la equivalencia entre dos definiciones, la distinción de condición necesaria de condición suficiente o la expresión de un concepto en un caso particular. Un ejemplo de conexión intraconceptual sería, en el caso de la proporcionalidad la equivalencia entre fracción y decimal como expresión de una razón de proporcionalidad; o la representación de un número racional como decimal y como fracción. En estos casos los alumnos pueden tener dificultades para establecer las debidas conexiones entre un tipo de representación y la otra sin conseguir transformar la información dada en forma decimal a la dada en forma de fracción y viceversa.

- Las *conexiones interconceptuales* se refieren a diferentes representaciones o interpretaciones de un mismo concepto o a diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento. Un ejemplo de conexión interconceptual sería, en el caso de la proporcionalidad, la conexión entre proporcionalidad y función lineal. O vincular la aritmética y el álgebra en la presentación algebraica de un problema: el profesor representa los datos de forma rectangular y denota la cantidad desconocida como “x”.

- Las *conexiones temporales* se refieren a conexiones entre conocimientos previos y futuros. Son producto del conocimiento del profesor sobre los conocimientos previos y futuros de los estudiantes. El establecimiento de este tipo de conexiones posibilita profundizar en las propiedades de un concepto o procedimiento, así como aplicar el concepto aprendido a situaciones nuevas y más complejas. Como ejemplos de este tipo de conexión se tiene: 1) relacionar la definición de proporcionalidad con la definición previa de equivalencia de fracciones para después utilizar el concepto en el estudio de las funciones lineales y más en general en el cálculo de la pendiente de una recta cualquiera; 2) recordar ideas claves sobre conocimientos anteriores, como relacionar la multiplicación con la división, afianzando la relación; o 3) explicitar el cambio de significado de la notación, como en el caso de la "x" en el paso de Primaria a Secundaria. El profesor podría enfatizar la dualidad de la "x": signo de la multiplicación y denominación de una cantidad desconocida.

3.5. La transición de Primaria a Secundaria

Las tendencias actuales en la enseñanza de las Matemáticas tienden a considerar el papel del profesor y el de los estudiantes desde una perspectiva holística, teniendo en cuenta todo el proceso de aprendizaje en su conjunto, pero también la asunción por parte del alumno de las competencias matemáticas desde una perspectiva de aprendizaje continuo. El aprendizaje de la matemática es concebido entonces como un proceso continuo en el que los estudiantes se enfrentan a episodios que implican cambios de diversa índole que pueden provocar asimismo un sinfín de alteraciones en su trayectoria educativa.

Las transiciones obligatorias por las que el alumno debe pasar dentro de la estructura educativa específica (denominada transición sistémica por Rice 1997), resultan particularmente problemáticas para los estudiantes ya que en ellas se producen influencias externas especialmente significativas que pueden afectar a su rendimiento académico y al ajuste de la educación matemática (Ding, 2008; McGee, Ward, Gibbons y Harlow, 2004; Noyes, 2006; Rice, 1997). En particular, la importancia de estudiar la transición Primaria-Secundaria, con respecto a otras transiciones proviene de su carácter obligatorio para todos los alumnos.

La transición Primaria-Secundaria resulta ser una de las transiciones más investigada por la problemática que conlleva debido a su carácter obligatorio para todos los ciudadanos, pero también influyen factores como la edad de los alumnos y la multitud de alteraciones que implica. En muchos casos es necesario un cambio de centro y las posibles repercusiones educativas que ello implica han sido investigadas por Ferguson y Fraser (1998), que observan un impacto más negativo cuanto mayor es la diferencia entre la escuela de Primaria y la de Secundaria.

Además del tamaño del centro, otros elementos derivados de este cambio, como la disminución en la seguridad que pudiera percibir el estudiante o el entorno académico, afectan negativamente en su rendimiento académico (Rice, 1997). Es más, este cambio de entorno puede llegar a menoscabar la propia percepción del estudiante sobre su competencia, que a su vez influye en su motivación y, en última instancia, en sus resultados académicos (Zanobini y Usai, 2002).

Se trata de una transición que se lleva a cabo dentro de la enseñanza obligatoria y por lo tanto, afecta a todos los estudiantes. En la misma se hace hincapié en las dificultades que los estudiantes presentan en su aprendizaje frente a algunos de los contenidos matemáticos fundamentales (como el álgebra, los números enteros, la generalización y la demostración) con más presencia en Secundaria que en Primaria, y porque en esta transición de dan muchas diferencias que tienen que ver con el conocimiento de los profesores y con la práctica docente como cuestiones clave para la investigación.

Además del amplio número de estudios precedentes centrados en los estudiantes durante la transición y en el desarrollo de las políticas educativas destinadas a pasar con éxito este proceso, también es necesario prestar atención a los conocimientos matemáticos de los maestros de Primaria y de los profesores de Secundaria durante la transición.

El papel que juega el profesor en la transición es crucial puesto que estos permiten el acceso de los estudiantes a este contenido. Sin embargo, las escasas investigaciones que hemos encontrado en la revisión del articulado respecto al papel relativamente importante que el docente desempeña se centran principalmente en el papel del profesor en el aula durante la transición y su influencia en el ambiente del aula (Fraser, 1998; Ferguson y Fraser, 1998), a las opiniones de los profesores y acerca de la transición (Akos y Galassi, 2004; Lewbel, Haskins, Spradling y Thompson, 1996) y a la importancia del conocimiento de los maestros en la transición en lo que se refiere a las necesidades específicas de los estudiantes con necesidades educativas especiales (Zhang, Ivester y Katsiyamis, 2005; Benítez, Morningstar y Frey, 2009).

Por lo demás las investigaciones que se centran específicamente en las Matemáticas han estudiado principalmente la interacción entre el alumno y el profesor (Ding, 2008; Noyes, 2006); los efectos de las estrategias como el aprendizaje en equipo (Alspaugh y Harting, 1997; Alspaugh y Harting, 2008) y el papel del profesor en el desarrollo de proyectos transversales ideados para suavizar los efectos de la transición (Simpson y Goulder, 1998).

En otras palabras, las investigaciones centradas en los conocimientos de los docentes han sido abundantes en la literatura, más bien en lo que se refiere a los aspectos pedagógicos del conocimiento y dejando al margen el conocimiento del contenido matemático, conocimiento que consideramos fundamental para que los estudiantes asuman bien los contenidos matemáticos durante la transición. Nos interesa investigar qué es lo que caracteriza la transición en las Matemáticas o la hace diferente y si hay factores vinculados específicamente a las Matemáticas que son relevantes durante la transición Primaria-Secundaria.

Rice (1997) observa como un descenso en las expectativas del profesor de Secundaria durante la transición desde la Primaria provoca un efecto positivo en el rendimiento académico de algunos alumnos. Otros estudios citados por McGee y otros (2003) observan el efecto contrario: las bajas expectativas del profesor de Secundaria desmotivan a muchos alumnos que esperaban nuevos retos en la transición. Observamos, pues, la complejidad de este proceso desde el punto de vista de la tarea docente. Asimismo, Ferguson y Fraser (1998) afirman que la actuación del docente durante la transición puede causar un perjuicio a largo plazo en la futura actitud del estudiante hacia las Matemáticas. Todo ello fundamenta una necesidad de investigar la práctica docente desde el punto de vista de la transición.

Por otra parte, el tipo de tarea en la clase de Matemáticas sufre también un cambio de Primaria a Secundaria: mientras que en la primera la presencia de actividades manipulativas es predominante, en la educación secundaria la actividad matemática prescinde en general de materiales concretos (Howard, Perry y Tracy, 1997). Surge así la necesidad de generalizar y justificar proposiciones matemáticas, lo que, por ejemplo, en un campo tan intuitivo como la geometría, supone a los alumnos una dificultad cognitiva añadida (Sdrolias y Triandafillidis, 2008).

3.6. El razonamiento multiplicativo

El razonamiento multiplicativo (proporciones, tasas y porcentajes) es un factor clave en gran número de aplicaciones prácticas de la vida cotidiana y en la aplicación de las competencias matemáticas. De todos los temas que se abordan en el currículum de Matemáticas, este es uno de los más complejos matemáticamente hablando y de los más difíciles de enseñar. Es una competencia determinante para poder seguir estudiando y profundizando tanto en Matemáticas como en ciencias después de los años de Secundaria Obligatoria.

Por un lado, el razonamiento multiplicativo es un campo conceptual complejo; y, por otro lado, los estudiantes de Secundaria, en los primeros años de esta etapa, no se manejan adecuadamente con las cuestiones de proporcionalidad, presentando dificultades y errores en su aprendizaje. Diferentes investigaciones se han ocupado de esta temática, atendiendo a las cuestiones que tienen que ver con la enseñanza de estos contenidos o con su aprendizaje.

Parte de la complejidad del razonamiento multiplicativo proviene de su vínculo intrínseco al concepto de número racional. Al principio de los años 90, en el primer *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, los investigadores remarcaron que era difícil encontrar hasta entonces literatura que se ocupase concretamente de la enseñanza del concepto de número racional (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992). Los trabajos dedicados hasta entonces a fracciones, números racionales, razones y proporciones no habían alcanzado un nivel de madurez como para poder ofrecer propuestas docentes prácticas, sino tan sólo invenciones conceptuales al respecto (Lamon, 2007).

Hubo un amplio consenso en que no tenía sentido desarrollar programas de mejora en el aprendizaje de los números racionales sin antes reconocer y comprender mejor las diferencias entre los conceptos de número entero y número racional. Previamente se habían analizado las diferentes interpretaciones o subconstructos del número racional como *parte-de-un-todo, medida, cociente, razón* y *operador* (Kieren, 1976, 1980, 1983, 1993 y Behr, Lesh, Post y Silver, 1983), generándose discrepancias sobre si el subconstructo de *parte-de-un-todo* era distinto o no al de *medida* o si es en realidad un caso particular del de medida (Kieren, 1988). Ahora bien, independientemente del número de subconstructos considerados, no resultaba apropiado reducir la enseñanza del concepto de número racional a sólo uno de ellos, por lo que las investigaciones abordaron los diferentes análisis semántico-matemáticos del significado de los números racionales y las barreras conceptuales que los alumnos tienen al pasar del número entero al racional.

Behr y otros (1992) presentaron un análisis semántico-matemático del número racional acompañado de un sistema de notación matemática basado en unidades y en el modo en que éstas pueden reagruparse para representar los subconstructos de los números racionales. Aunque dicho microanálisis de conversión de unidades no tuvo en cuenta si las operaciones a realizar estaban relacionadas o no con contextos reales, si representaban procesos mentales reales en los alumnos o si los profesores debían enseñar todas las particiones de unidades razonables, resultó muy útil para estudiar las dificultades que tienen los alumnos a la hora de *empaquetar* (hacer paquetes de unidades, *unitizing*), esto es, fragmentar o agrupar una cantidad determinada en parcelas que tengan un tamaño más manejable para poder trabajar con ellas (Lamon, 1996).

El análisis del número racional como cantidad formal propuesto por Behr y otros consideraba sólo representaciones *discretas* de los números racionales sin abordar la cuestión crucial de cómo facilitar que el alumno haga el salto conceptual pertinente de las cantidades discretas a las denominadas *intensivas* o "por" (Schwartz 1988). Se alude con este adjetivo a aquellas cantidades que desafían la representación física, a las que provienen de la abstracción y a las que no se derivan ni de contar, ni de mecanismos de correspondencia, ni de la medida directa, como la velocidad (km por hora), el precio (céntimos por gramo) o la densidad (gramos por centímetro cúbico).

Varios estudios sobre el desarrollo del razonamiento proporcional avalan que los niños son capaces de hacer juicios sobre relaciones proporcionales antes de ir a la escuela. Estos juicios se relacionan con un razonamiento intuitivo que es producto de su experiencia personal (Singer, Kohn y Resnick, 1997). Este tipo de razonamiento cualitativo intuitivo puede aplicarse tanto a los números racionales como a las situaciones de proporcionalidad, concretamente para comparar fracciones (relaciones de orden) o determinar la equivalencia o no de 2 fracciones. Los conceptos de orden y equivalencia de los números racionales se basan en determinar si una relación multiplicativa varía o no, pero en ciertos casos este tipo de razonamiento cualitativo resulta suficiente para establecer relaciones de orden. Conviene subrayar que una cantidad no es sino una cualidad medible de un objeto, independientemente de que dicha cualidad sea realmente cuantificada o no. Por ejemplo, se pueden comparar los pesos o las alturas de 2 personas sin pesarlas ni medirlas. Este tipo de razonamiento de relacionar cantidades o determinar la dirección del cambio en la razón entre dos cantidades sin cuantificarlas es bastante accesible al alumno siempre que se le muestre en contextos comprensibles, pues conviene recordar que el contexto en el que se presenta un problema también es importante (Lamon, 2006).

Además de estos contenidos, el primer *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* recogió una serie de observaciones que mantienen su vigencia hoy como: la necesidad de ponerse de acuerdo en los conceptos de fracción y de número racional, la distinción entre razón y tasa, la clarificación de las diferencias entre *razonar* y *comprender* proporcionalmente o la confusión al denominar las estrategias del alumno para determinar la equivalencia de razones -estrategia *dentro* de un sistema o estrategia *entre* sistemas- dependiendo del término utilizado por los investigadores en función de su bagaje matemático o científico (Behr y otros, 1992). Asimismo, cuestiones fundamentales como qué significa razonar proporcionalmente o cuál es la conexión entre razonamiento proporcional y fracción fueron abordadas en el trabajo de Susan J. Lamon de 2007 (*Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*). Su trabajo, sin pretender dirigirse a futuros profesores, sintetizó de manera notable y en términos comprensibles todo lo hecho hasta entonces sobre los números racionales y el razonamiento proporcional con el objetivo de animar a nuevos investigadores en este ámbito.

La prioridad en abordar tópicos multiplicativos para llevarlos al aula, más allá de la mera abstracción matemática, es inminente. Las nuevas líneas de investigación abogan por una relación dinámica entre la investigación en el laboratorio y en la clase, una dialéctica en la que el investigador proponga hacer cambios en la práctica en el aula mientras al mismo tiempo intenta descubrir los medios para ejecutar estos cambios de manera más efectiva. Se trata de que el investigador ajuste el curso de su estudio a partir de las dinámicas de una clase real.

Muchos alumnos no aprenden los conceptos multiplicativos *avanzados* porque los profesores no han sabido enseñar bien los conceptos y las operaciones multiplicativas *elementales*. Incluso muchos adultos, profesores y futuros profesores mantienen las mismas ideas erróneas que aprendieron como estudiantes (Harel, Behr, Post y Lesh, 1994; Post, Harel, Behr y Lesh, 1988; Graeber, Tirosh y

Glober, 1989; Simon y Blume, 1994). Esto se debe al hecho de que los conceptos multiplicativos no se han considerado adecuadamente en el currículum de Matemáticas y a que los profesores llevan al aula el mismo tipo de actividades o experiencias que recibieron como alumnos en este ámbito. Además muchos profesores no están preparados para enseñar otro concepto de fracción que el de *parte-de-un-todo*, es decir, el de comparar una parte con el todo.

Así, investigadoras como Lamon (2007) realizaron un estudio longitudinal en 4 años (comenzando con alumnos de 8 años), partiendo del concepto de fracción y de las diferentes interpretaciones del número racional –parte-de-un-todo, cociente, medida, razón y operador- para abordar después las cuestiones de proporcionalidad. Para Lamon, la profunda conexión entre todos los subconstructos de los números racionales provoca que enseñar sólo uno de ellos sea imposible.

Dicho estudio se diseñó basándose principalmente en los puntos siguientes:

- ¿Qué comprensión puede desarrollarse de las fracciones si la enseñanza de las mismas se basa en otros subconstructos diferentes al de comparación entre una parte y el todo?
- ¿Qué tipos de actividades en el aula refuerzan cada uno de los constructos no tradicionales de los números racionales?
- ¿Cuánto tiempo necesitan los estudiantes para desarrollar una comprensión "útil" de cualquier subconstructo de los números racionales?
- ¿Todos los subconstructos son alternativas igualmente válidas para aprender los conceptos y el cálculo?
- ¿Qué subconstructos son suficientes para conectar con otras interpretaciones sin abordar directamente estas interpretaciones?
- ¿Hay procesos o mecanismos de desarrollo que conecten el conocimiento de los números enteros con el de los números racionales?

Uno de los puntos más importantes en esta investigación fue la flexibilidad en el diseño de las actividades del día a día en el aula. Es decir, las actividades se diseñaban y se programaban susceptibles de ser cambiadas en función de las observaciones en el aula. El objetivo era satisfacer mejor las necesidades de los alumnos al servicio de los cuales se suponía que estaban dichas actividades. Hay que diseñar las actividades, según Lamon (2007), más que para demostrar si la teoría funciona, para estudiar la sinergia y la ecología de una clase en pleno funcionamiento y en toda su complejidad. De esta manera, el investigador y el profesor más que controlar las variables, van regulando lo que hacen en función de la diversidad que se encuentran en el aula. Creemos que es importante que el profesor de Matemáticas, además de conocer bien los contenidos de proporcionalidad, introduzca la flexibilidad indicada aquí como factor clave en el desarrollo de la clase.

El estudio mostró que: 1) el subscontructo de medida se presentó como el más fuerte porque es el que conecta de manera natural con los otros cuatro; 2) no todos los subcontructos son igual de potentes: operadores y cocientes fueron menos potentes que medidas, razones y partes de un todo; 3) al estudiar las razones y las tasas como interpretación principal del número racional se desarrolla una noción muy fuerte de clases de equivalencia y de razonamiento proporcional en general; y 4) los alumnos necesitan partir de uno de los subconstructos para poder aprender bien las fracciones; necesitan bastante tiempo para trabajar en esa interpretación concreta de la que han partido sin que se les dé reglas de cálculo de manera que desarrollen bien el sentido de fracción, se manejen con comodidad al razonar con fracciones y muestren flexibilidad.

Asimismo la incorporación de otras interpretaciones del número racional alternativas a la de parte de un todo, se mostró en sí misma insuficiente para facilitar un aprendizaje significativo. Los alumnos necesitan profundizar y fundamentar una interpretación específica del número racional (comparaciones parte-todo, razones, operadores, medidas o cocientes) a la cual puedan dirigirse y centrar su pensamiento cuando se enfrentan a un nuevo problema. Este estudio dejó abiertas cuestiones interesantes como si el hecho de que el alumno acceda a las cinco interpretaciones a un tiempo le permite conocer en profundidad los distintos subconstructos, o alguno de ellos.

3.7. Factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad

Para realizar este apartado del marco teórico hemos utilizado el excelente artículo de S. Lamon (2007), Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical Framework. Dado que nuestro trabajo no se centra en el aprendizaje de la proporcionalidad por parte del alumno sino en el conocimiento matemático del profesor observado en su práctica docente en el aula, hemos utilizado como referencia fundamental este exhaustivo artículo de Lamon en el que hace una revisión de los estudios realizados hasta el año 2007 y en el que se incluyen las últimas referencias hasta entonces. En concreto, nos interesa detallar los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad que son importantes en nuestro trabajo, y para ello nos centraremos en las siguientes temáticas: los números racionales y las fracciones; los cinco subconstructos del número racional, la distinción entre razón interna y externa, las diferencias entre razón y tasa y la comprensión del razonamiento multiplicativo y de la proporcionalidad.

3.7.1. Número racional y fracción

Lo primero que conviene remarcar es que a menudo se utilizan las expresiones fracción y número racional como si fueran indistinguibles, tanto en el lenguaje coloquial como en la clase de Matemáticas. A este respecto, la palabra fracción se utiliza de muchas maneras, tanto dentro de la clase como fuera, lo que genera confusión, porque fracción tiene varios significados, no todos matemáticos. Las diferentes acepciones que la RAE otorga a la palabra "fracción" son: 1. División de algo en partes; 2. Cada una de las partes separadas de un todo o consideradas como separadas; 3. Cada uno de los grupos de un partido u organización, que difieren entre sí o del conjunto, y que pueden llegar a independizarse; 4. Cada una de las partes en que se separa una mezcla sometida a ciertos procesos, como la destilación; 5. Expresión que indica una división y 6. El número que expresa una o varias partes alícuotas (proporcionales) de la unidad. La dos últimas son las acepciones que la RAE señala como específicamente matemáticas. Por lo tanto, una fracción puede ser entendida como "trozo", "porción de una mezcla, o de un terreno", o como "una pequeña parte".

Cuando a un alumno se le enseña que una fracción está formada por partes enteras, el numerador y el denominador, se le puede generar confusión pues ya tiene asumido por su experiencia de la vida diaria que una fracción es "un poco". El problema se agudiza cuando una fracción como 4/3 se refiere a más de una unidad, con lo que el alumno constata que la definición de fracción como "un poco" no se corresponde con este caso.

Ahora bien, si el uso de la palabra fracción en el lenguaje coloquial es complejo, también resultan problemáticos los diferentes usos que se le da en la enseñanza de las Matemáticas: unos utilizan la palabra fracción para referirse en concreto a una comparación entre partes enteras; otros para aludir a cualquier número de la forma a/b. Pero la expresión "fracción" y "número racional" no se pueden utilizar indistintamente, como si fueran intercambiables puesto que los conceptos de fracción y número racional no son sinónimos.

Es más adecuado pensar la fracción como una representación de los números racionales. Cada fracción no se corresponde con un número racional distinto. Por ejemplo, no existe un número racional diferente para cada una de las fracciones 2/3, 6/9 y 10/15. Estas fracciones designan el mismo número racional. Como fracciones son distintas, aunque son equivalentes, que no iguales. En cada clase de fracciones equivalentes podemos escoger como representante la fracción irreducible y ésta sería el número racional que le corresponde. Así, un número racional es la clase de todas las fracciones equivalentes a una fracción concreta.

Ahora bien, los números racionales se pueden escribir en forma de fracción, pero también se pueden expresar de otras maneras (como número decimal, por ejemplo). El profesor tendría que evitar utilizar la palabra "fracción" para referirse exclusivamente a "una" de las interpretaciones de los números racionales, a saber, como comparación entre partes enteras, esto es, como *parte-de-un-todo*.

3.7.2. Subconstructos del número racional

De las cinco interpretaciones principales del número racional -a saber, como *parte-de-un-todo, razón, cociente, operador* y *medida*-, es necesario que el profesor de Matemáticas trabaje en el aula con alternativas al subconstructo del número racional como fracción o *parte-de-un-todo*, la más preponderante en la enseñanza. Con dicha identificación se provoca que el alumno entienda que son sinónimas y se le trasmite una noción empobrecida de lo que significa un número racional. Si además de como *parte-de-un-todo*, el profesor se refiere al número racional como *operador*, *medida*, *razón* o *cociente*, la interpretación de la fracción como comparación entre partes enteras estaría a la par con las otras cuatro interpretaciones del número racional evitando que el alumno la identifique exclusivamente con el número racional. A modo de ejemplo y siguiendo a Lamon, presentamos en el siguiente cuadro las cinco interpretaciones alternativas a 3/4:

Interpretaciones de 3/4	Significado	Actividades seleccionadas para la clase
Comparaciones de parte-todo con hacer paquetes de 3 partes a partir de 4 partes iguales	¾ significa tomar 3 partes de las cuatro partes en las que se puede dividir la unidad. Respecto a encontrar fracciones equivalentes, pensar en las partes en términos de pedazos mayores o menores: $\frac{3(pies\ enteros)}{4(pies\ enteros)} = \frac{12(cuartos\ de\ pies)}{16(cuartos\ de\ pies)} = \frac{1\frac{1}{2}\ pares\ de\ pies}{2\ pares\ de\ pies}$	Empaquetar para encontrar fracciones equivalentes y comparar fracciones
Medir "3 unidades de ¼"	¾ significa una distancia de 3 unidades de ¼ desde el 0 sobre una recta numérica, o 3 unidades de ¼ de cierta área dada.	Particiones sucesivas en los medidores de los contadores
Operador "3/4 de algo"	3/ 4 es una regla que nos dice cómo operar sobre una unidad (o sobre el resultado de una operación previa): multiplicar por 3 y dividir el resultado por 4, o dividir el resultado por 4 y luego multiplicar por 3. De aquí resultan significados multiplicativos para ¾: 3 unidades de ¼, 1 unidad de ¾ y ¼ de 3 unidades.	Máquinas, papiroflexia, descuentos, fotocopiar, modelos de áreas para multiplicar y dividir
Cociente "3 entre 4"	¾ es la cantidad que recibe cada persona cuando 4 personas se reparten 3 unidades de algo	Partir, repartir
Razones: "3 de A se comparan con 4 de B"	3:4 es una relación en la cual se comparan 3 As con 4 Bs, en un sentido multiplicativo y no aditivo.	Actividades tipo bicolor

Tabla 3.2: Interpretaciones alternativas a la fracción como parte-de-un-todo

El estudio longitudinal realizado por Lamon al que ya nos hemos referido con anterioridad mostró que la idea de "empaquetar" le da dinamismo a la interpretación tradicional de fracción como parte de un todo, de manera que el alumno fortalece la noción de la unidad y de equivalencia de fracciones. Si bien esta interpretación del número racional tiene conexiones fuertes y naturales con las de medida, no ofrece una interpretación intuitiva del producto de fracciones.

Los cocientes tienen conexiones naturales con razones y tasas de manera que los cocientes y las tasas son intercambiables en contextos donde se comparte o se compara. Los alumnos pudieron encontrar con facilidad fracciones equivalentes, así como comparar, sumar o restar fracciones, pero no resultó fácil el razonamiento con el producto y el cociente. A este respecto, los denominados modelos de áreas o representaciones en forma de tabla ayudan al profesor a introducir significativamente la multiplicación y la división de fracciones, además de servir para compararlas y dar un significado simbólico a la suma y a la resta. Por ejemplo, para sumar 2/3 + 3/4, se pueden observar 2/3 de una unidad y 3/4 de la misma unidad partiendo una unidad de área en 3 filas y en 4 columnas. El alumno puede ver entonces que 2/3 (2 filas) son 8/12 del área y que 3/4 (3 columnas) son 9/12 del área. Por lo tanto, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$.

Por otra parte, aunque la interpretación del número racional como operador ofrezca un contexto útil para la multiplicación y la división, las escalas y el sentido general de fracción, no conduce fácilmente a la suma y resta de fracciones. Esto se debe a la naturaleza dual de los números racionales. En términos matemáticos son un cuerpo, obedeciendo 2 grupos de axiomas: los del producto y los de la suma. Son operaciones que se definen independientemente una de la otra y en el subsconstructo del número racional como operador, la separación entre ambas operaciones es más evidente que en otros subconstructos.

Con la interpretación del número racional como medida los alumnos desarrollaron nociones potentes de la unidad, de equivalencia, de orden y de densidad de los números racionales, así como de las operaciones de suma y resta de fracciones. De manera natural muchos alumnos ampliaron este subsconstructo al de operador. Por ejemplo, de trabajar con rectas y del uso de tablas como la anterior saben que 1/2 de 1/6 es 1/12 o que 1/3 de 1/7 es 1/21. De esta manera se preparan para el lenguaje de los operadores y no tienen problemas en conectarlo con el modelo de la división.

Finalmente, la gran diferencia entre las razones y las otras 4 interpretaciones de los números racionales es el modo como se combinan a través de las operaciones aritméticas. Las otras 4 interpretaciones son todas diferentes conceptualmente pero son indistinguibles una vez escritas simbólicamente: se suman, se restan, se dividen y se multiplican según las mismas reglas. Sin embargo uno no opera con las razones del mismo modo que lo hace con las proporciones.

3.7.3. Razón interna y razón externa

Una razón es interna cuando las magnitudes que la constituyen o que se comparan comparten el mismo espacio de medida o provienen del mismo sistema. Dicho de otra manera, una razón es interna cuando se comparan elementos "dentro de un sistema". Por ejemplo, $\frac{4\,personas}{20\,personas} = \frac{1coche}{5coches}$, donde se comparan personas con personas y coches con coches. Se trata de una comparación "interna". En cambio, una razón es externa cuando las magnitudes que la constituyen provienen de diferentes espacios de medida, como por ejemplo, $\frac{4\,personas}{1coche} = \frac{20\,personas}{5coches}$, donde se comparan personas con coches (Freudenthal, 1978). Ahora bien, definir lo que se entiende por razón interna o externa depende a su vez de lo que se entiende por sistema.

Si se considera la definición alternativa de sistema como conjunto de elementos que interactúan (Karplus, Pulos y Stage, 1983a, 1983b; Noelting, 1980a, 1980b), el segundo ejemplo citado muestra dos sistemas, formados ambos por personas y coches, en los que se interactúa dentro de cada uno de ellos (en el primero interactúan 4 personas y 1 coche, mientras que el segundo 20 personas y 5 coches), con lo cual la definición de razón interna como comparación de elementos "dentro de un sistema" se correspondería con la noción de razón externa de Freudenthal. Por ejemplo: $\frac{1milla}{4horas} = \frac{3millas}{12horas}$, que el sistema son millas y horas. Asimismo se entiende que una razón es externa cuando los elementos implicados provienen de dos sistemas diferentes. Por ejemplo: $\frac{1milla}{3millas} = \frac{4horas}{12horas}$, en el que el sistema 1 son las millas y el sistema 2 las horas. Por lo tanto, para poder definir lo que se entiende por razón interna o externa, hay que concretar muy bien qué es lo que se entiende por sistema.

Una manera de evitar esta confusión es adoptar la terminología "interna o entre sistemas" o "interna o entre espacios de medida". Generalmente nos referimos a distintos espacios de medida cuando aludimos a conjuntos diferentes de objetos, tipos diferentes de cantidades o unidades diferentes de medida. El siguiente ejemplo muestra una razón interna como razón entre espacios de medida: *Ramón compra 4 pasteles a 8.95€ cada uno, ¿cuánto tiene que pagar?*

Se puede utilizar la terminología de Vergnaud (1988) sobre isomorfismo de medidas –la medida 1 (M1) sería el número de pasteles y la medida 2 (M2) el precio.

M1	**M2**
1	8.95€
4	x€

En este caso, $\frac{1}{4} = \frac{8.95€}{x€}$ sería una razón que se establecería entre espacios de medida. En cambio, si comparamos el grado de "naranjez" del líquido contenido en 2 jarras que contienen cubos de agua y de naranja concentrada:

Jarra 1	**Jarra 2**
3 de naranja	5 de naranja
5 H_2O	11 H_2O

Las razones que surgen aquí al comparar partes de naranja concentrada con partes de agua, $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{11}$, son razones "dentro de un sistema" pues en este sistema interactúan partes de naranja concentrada con partes de agua.

3.7.4. Comprensión del razonamiento proporcional o multiplicativo

Así como para los investigadores el llamado razonamiento proporcional o multiplicativo es consecuencia de comprender la naturaleza de los números racionales, en los libros de texto de Matemáticas dirigidos a alumnos de 11 a 13 años, la razón y la proporción han venido definidos tradicionalmente en términos de dos tipos de problemas: problemas de comparación (de fracciones) y problemas de valor-incógnita (equivalencias). Tener "razonamiento proporcional" significa saber detectar, expresar, analizar, explicar y demostrar relaciones proporcionales.

En un problema de comparación de fracciones, se trata de que a partir de 4 valores conocidos, a, b, c y d, se encuentre la relación de orden entre las razones $\frac{a}{b}$

y $\frac{c}{d}$ (esto es, descubrir si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$; o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; o $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$). Por ejemplo, *María hace limonada concentrada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de zumo de limón. Claudia también pero utilizando 5 y 20 cucharadas respectivamente. ¿Qué limonada es más dulce?, ¿la de María o la de Claudia? ¿O son igual de dulces las dos?*

En un problema de valor-incógnita se conocen 3 de los 4 valores a, b, c y d en la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y el objetivo es encontrar el cuarto valor que falta. Por ejemplo, *María hace limonada concentrada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de zumo de limón. ¿Cuántas cucharadas de zumo de limón necesitará añadir Claudia a 5 cucharadas de azúcar si quiere que cuando alguien pruebe su zumo sepa exactamente igual que el de María?*

A pesar de la definición implícita de razón y de proporción que se halla en estos dos problemas tipo, las expresiones "proporcionalidad" y "razonamiento proporcional" se utilizan a menudo de manera intercambiable. De hecho, han llegado a definirse, erróneamente, como términos "paraguas", en el sentido de que se refieren a "algo" y a "todo" lo relacionado con la razón y la proporción (Karplus y otros, 1983b).

Se puede definir el razonamiento proporcional como la capacidad para comprender las relaciones de estructura que hay en los problemas de comparación de fracciones y de valor-incógnita. También como "una forma de razonamiento matemático que implica el sentido de covariación y comparaciones múltiples, así como la capacidad para recopilar y procesar mentalmente varios grupos de información. Se relaciona con la inferencia y la predicción y supone un pensamiento cualitativo y cuantitativo" (Lesh, Post y Behr, 1988, p.93). Algunos afirman que el razonamiento proporcional es un prerrequisito necesario pero no suficiente para entender la proporcionalidad. Otro enfoque consiste en definir el razonamiento proporcional en función de si cubre las expectativas razonables de los estudiantes al final de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, teniendo en cuenta que el estudio de variables, funciones, ecuaciones lineales, vectores y otros contenidos del currículum de Matemáticas post-obligatorio continuará ampliando las perspectivas que los alumnos tienen sobre relaciones multiplicativas y profundizando en las mismas. Susan Lamon entiende el razonamiento proporcional como aquél que ofrece argumentos adicionales que refuercen las afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales existentes entre 4 cantidades a, b, c y d, en un contexto que involucre simultáneamente tanto la covariabilidad de las cantidades como la invariabilidad de las razones o productos entre ellas. Esto significa, por un lado, tener la capacidad para reconocer una relación multiplicativa entre dos cantidades; y por otro, saber extender o extrapolar la misma relación a otros pares de cantidades.

Estas relaciones estructurales fundamentales, tanto escalares como funcionales, se ilustran mejor utilizando el esquema de Vergnaud (1983) para analizar estructuras multiplicativas. El siguiente ejemplo muestra una proporción directa simple entre dos espacios de medida. Como podemos constatar, existe una relación funcional lineal entre los elementos correspondientes de los espacios de medida (M1 y M2) y un operador escalar que transforma las cantidades del mismo tipo: *Si María puede coser 5 camisetas con 7.5m de tela, ¿cuantos metros necesitará para coser 15 camisetas para todos los miembros de un determinado equipo de futbol?*

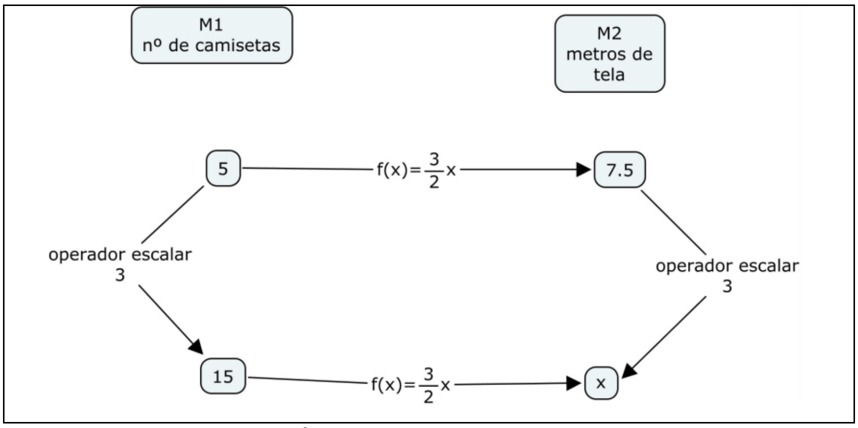

Tabla 3.3: Relación funcional entre los espacios de medida
nº de camisetas y metros de tela

El hecho de que un alumno conteste correctamente a este tipo de preguntas como la que acabamos de plantear no garantiza que esté utilizando razonamiento proporcional. A menudo se contestan adecuadamente cuestiones sobre proporcionalidad porque se utilizan conocimientos mecanizados sobre fracciones equivalentes, relaciones numéricas o la aplicación de procedimientos algorítmicos (como por ejemplo la regla de tres), que lo que hacen en realidad es eludir el uso de la razón o constante de proporcionalidad. La palabra *razonar* sugiere que a la hora de resolver problemas se utiliza más bien el sentido común, el buen juicio y el enfoque reflexivo, en vez de utilizar datos numéricos de los problemas de enunciado y aplicar ciegamente reglas y operaciones. De hecho en las investigaciones, el razonamiento no se asocia con procedimientos mecánicos o basados en reglas sino con procesos mentales de flujo libre que exigen más bien un análisis concienzudo de las relaciones entre las cantidades.

Consideremos ahora el siguiente ejemplo: *Si tenemos una mezcla con 2 medidas de azúcar por 6 de zumo de limón y otra con 8 medidas de azúcar por 24 de zumo de limón, ¿cuál es más dulce?* En este contexto se acostumbra a considerar como razonamiento proporcional la respuesta del alumno s*on las dos igual de dulces porque 8 está en 24 tres veces y 2 en 6 también.* En realidad, un observador externo, a partir de la respuesta dada, no podría decir gran cosa sobre la comprensión que tiene el alumno sobre la proporcionalidad. Incluso muchos adultos no son capaces de asociar los problemas de comparación de fracciones con el hecho de intentar encontrar qué situación tiene la constante de proporcionalidad mayor. La proporcionalidad es un constructo más amplio que el de razonamiento proporcional.

El aspecto de "razonamiento" que tiene el razonamiento proporcional conlleva el reconocimiento de la razón constante que hay entre los elementos del mismo espacio de medida así como el reconocimiento de la relación funcional que existe entre los espacios de medida (en el ejemplo de las camisetas y los metros de tela, el reconocimiento de la razón constante M2:M1=3:2).

En el caso de una relación simple inversamente proporcional, reconocer los aspectos estructurales supone comprender, en primer lugar, que hay dos operadores escalares actuando, uno de los cuales es el inverso multiplicativo del otro; y en segundo lugar, registrar que el producto de las cantidades correspondientes es constante. Veamos a este respecto el ejemplo siguiente: *Si 3 obreros pueden levantar un muro en 2 horas, ¿cuánto tiempo les llevará a 2 personas levantar el mismo muro?* En este caso, los dos operadores que actúan son el nº de personas y las horas de trabajo tal como se recoge en el esquema siguiente:

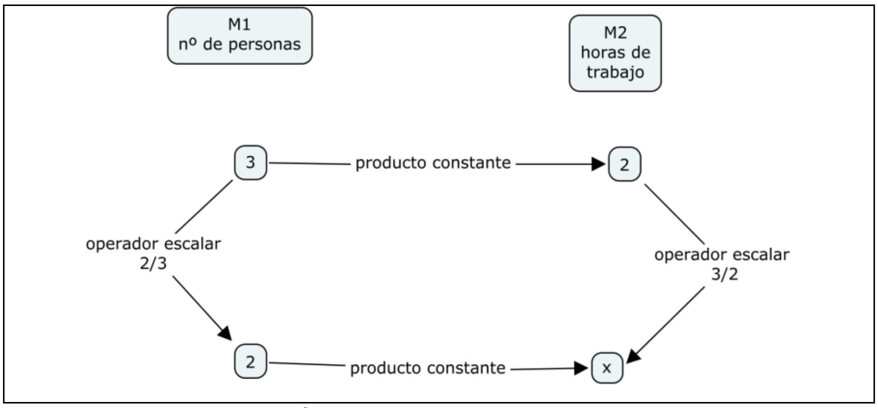

Tabla 3.4: Relación funcional entre los espacios de medida
nº de personas y horas de trabajo

3.7.5. Comprensión de la proporcionalidad

La proporcionalidad es un constructo matemático que se refiere a la condición o a la estructura subyacente a una situación en la cual existe una relación invariante especial (constante) entre dos cantidades covariables, esto es, dos cantidades que están relacionadas y que cambias juntas. La proporcionalidad es un constructo más amplio que el del razonamiento proporcional (Lamon, 2007). Implica relacionar la razón $k=y/x$ entre pares de valores de la misma magnitud y la razón $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre dos valores de la misma magnitud. Nos referiremos a estas dos razones, siguiendo a Vergnaud, como razón de proporcionalidad y razón escalar respectivamente.

Las situaciones de proporcionalidad se pueden modelizar mediante una relación funcional del tipo $y=kx$, donde a k se le denomina constante de proporcionalidad. Esto es, y es un múltiplo constante de x. Asimismo k es un número real (no necesariamente entero o racional), de manera que cada incremento (o detrimento) de x, implica un incremento (o detrimento) k de y. Equivalentemente dos cantidades son proporcionales cuando varían de tal manera que mantienen la razón $\frac{y}{x}=k$ constante. La razón k juega un papel esencial en la comprensión de la proporcionalidad.

A nivel pedagógico, el problema es que el carácter de k es "resbaladizo" porque su aspecto cambia de unos a otros contextos y de unas representaciones a otras que tengan que ver con relaciones proporcionales. A menudo no aparece explícitamente en el contexto del problema, sino que es más bien un elemento estructural que tiene que descubrirse más allá de los detalles obvios, de los datos que da el problema. Por ejemplo, en la representación gráfica de una función lineal es la pendiente, mientras que en una representación de datos en forma de tabla, como la siguiente, es la diferencia entre cualquier entrada relativa a la altura de la pila de cubos y la precedente (6-3=9-6=…).

nº de cubos de madera apilados	1	2	3	4	5
Altura de la pila de cubos (m.)	3	6	9	12	15

O equivalentemente, la razón o constante de proporcionalidad es la tasa por la que una cantidad cambia (la altura de la pila de cubos) con respecto a otra expresada como unidad (número de cubos apilados):

nº de cubos de madera apilados	2	5	9	12	15
Altura de la pila de cubos (m.)	6	15	27	36	45

En general, en situaciones relacionadas con tasas, *k* es la tasa constante; en la lectura de mapas, *k* es la escala; en ampliaciones o reducciones de figuras, *k* es el factor de escala; en impuestos sobre ventas, como el IVA, k es un porcentaje y en un contexto de lanzamiento de un dado, *k* es una probabilidad. Por lo que podríamos afirmar que la interpretación de la razón de proporcionalidad *k* es específica de cada situación. El siguiente problema ilustra cómo los estudiantes deberían ser capaces de expresar lo que significan las cantidades, las magnitudes y la constante de proporcionalidad según el contexto en el que las usan.

Problema: supongamos que vas a hacer un viaje en coche por una autopista. Estima la cantidad de combustible que necesitas.

<u>Alumno</u>: Sé que la cantidad de combustible que necesito (la denomino *g*), depende de la longitud del viaje (denomino *d* a la distancia recorrida). De hecho, si hago 1000km, utilizaré el doble de combustible que si hago 500km; y si hago 1500km, gastaré como máximo el triple de lo que necesito para hacer 500km. Por lo tanto, el combustible que gastaré *g* será proporcional a la distancia *d* recorrida en el viaje. Por lo que *g* es un múltiplo constante de *d*: $g=k\cdot d$.

Cuál es esta constante *k*? Sospecho que tendrá que ver algo con el consumo de mi coche. Yo sé que en autopista mi coche gasta 1 litros de gasoil cada 20km. Por lo que la ecuación que corresponde al consumo de mi coche es *g=20d*. Pero aquí es donde yo me bloqueo. Esta ecuación no tiene sentido porque si yo recorro 1km, dice que necesito 20 litros.

<u>Profesor</u>: Explícame el modo como tú crees que funciona

<u>Alumno</u>: La cantidad de gasoil que se necesita es igual a 1km dividido por 20, lo cual es $\frac{1}{20}$ veces el número de km. Así que yo diría que $g=\frac{1}{20}d$. Por lo que $k=\frac{1}{20}$. Pero, ¿cómo iba yo a saber eso?

<u>Profesor</u>: Vuelve a la ecuación $g=k\cdot d$ y resuélvela para *k*.

<u>Alumno</u>: $k=\frac{g}{d}$

<u>Profesor</u>: ¿Qué etiqueta le pones a esta cantidad *k*?

<u>Alumno</u>: Gasoil por distancia recorrida. De acuerdo, voy a retroceder. Puedo escribir 1 litro cada 20 km como $\frac{20km}{1litro}$, o lo que es lo mismo: $\frac{1litro}{20km}$. Por lo que la ecuación que busco tendrá que ser: $g=\frac{1}{20}d$.

<u>Profesor</u>: Entonces, ¿qué quiere decir 20 km por litro?

<u>Alumno</u>: Que para recorrer 1 km necesito $\frac{1}{20}$ litros de gasoil

Tabla 3.5: Ejemplo que ilustra la interpretación de la constante de proporcionalidad según el contexto

También es razonable esperar que la comprensión de la proporcionalidad por parte del alumno comporte:

- La capacidad para utilizar la proporcionalidad como modelo matemático en determinados contextos del mundo real.
- La capacidad para distinguir las situaciones en las que la proporcionalidad se presenta como el modelo matemático apropiado de las que no lo son.

- Desarrollar y utilizar el lenguaje de la proporcionalidad.
- Usar funciones para expresar la covariación de 2 cantidades.
- La capacidad para explicar la diferencia entre funciones del tipo $y=kx$ y funciones de la forma $y=kx+b$. En esta, y no es proporcional a x, sino que el incremento de y (Δy) es el que es proporcional al incremento de x (Δx).
- Saber que la representación gráfica de una situación directamente proporcional ($y=kx$) es una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- Saber que la representación gráfica de $y=kx+b$ es una recta que corta a eje de abscisas b unidades por encima o por debajo del origen de coordenadas (según sea b positiva o negativa).
- La capacidad para distinguir diferentes tipos de proporcionalidad y asociar cada uno de ellos a determinadas situaciones del mundo real en las que pueden aplicarse: proporciones directas, proporciones inversas, proporcionalidades cuadráticas ($y = kx^2$) y proporcionalidades cúbicas ($y = kx^3$).
- Saber que en una situación directamente proporcional k es la razón constante entre dos cantidades.
- Saber que en una situación inversamente proporcional k es simplemente el producto de cualquier par de valores de las dos cantidades.
- Saber que la representación gráfica de una situación inversamente proporcional es una hipérbola.

El razonamiento proporcional provoca que se estudien las fracciones como subconjunto de los números racionales. Se podría decir que el razonamiento proporcional es, de alguna manera, un indicador del sentido que el alumno tiene de los números racionales. No obstante, comprender la proporcionalidad es un objetivo mucho más exigente que entender cualquier interpretación que se le puedan dar a los números racionales o al razonamiento proporcional. En particular, comprender la proporcionalidad capacita al alumno a utilizarla como modelo matemático de situaciones del mundo real que el alumno acabará desarrollando mejor en cursos superiores de Matemáticas y ciencias. Por modelizar matemáticamente se entiende la sucesión de procesos siguiente: 1) investigar y distinguir los principios y las regularidades que se dan en el contexto de un problema; 2) usar las proporciones para expresar dichas relaciones simbólicamente; y 3) interpretar los símbolos de lo aprendido en función del contexto específico en el que se aplican (en este caso, consumo de combustible para hacer un viaje en coche).

La hipótesis de Lamon (2007) es que las proporciones surgen al estudiar los números racionales como expresión natural de su equivalencia y que cuando se desarrolla el sentido de los números racionales a través de las distintas interpretaciones que tienen los números racionales, se aprende a razonar proporcionalmente. Sin embargo, se llega a comprender bien ese concepto mayor que es la proporcionalidad a través de la interacción con situaciones matemáticas y científicas en general que involucren la invariabilidad de una razón o de un producto.

3.8. Estrategias de razonamiento proporcional

El campo conceptual multiplicativo es, en primer lugar, un sistema complejo formado por conceptos interrelacionados, ideas de los estudiantes (tanto competencias matemáticas como conceptos erróneos), procedimientos, problemas, representaciones, objetos, propiedades y relaciones que no pueden estudiarse aisladamente (Vergnaud, 1983; Lamon, 2007). En segundo lugar, respecto a la enseñanza de los conceptos multiplicativos y la asunción por parte de los alumnos se pueden establecer, según Lamon, siete puntos críticos: las interpretaciones de los números racionales, la medida, las cantidades y su covariación, el pensamiento relativo, empaquetar y normar, repartir y comparar, y razonamiento hacia arriba y hacia abajo. Esta combinación de conceptos y estrategias no se presentan aisladamente sino que están relacionados. En tercer lugar, el contenido de este campo conceptual multiplicativo es extenso (incluye tópicos como la multiplicación, la división, las fracciones, las razones, las proporciones simples y dobles, los números racionales, el análisis dimensional y los espacios vectoriales) de manera que para que el alumno llegue a comprender dicho campo conceptual han de pasar muchos años de escolarización. Este constructo sugiere asimismo que el aprendizaje del mismo no es lineal. Para que las líneas de investigación puedan aportar avances a la enseñanza y al aprendizaje de la proporcionalidad en las escuelas se debe tener en cuenta la complejidad de todo el contenido de proporcionalidad, el desarrollo en la clase y la experiencia real que los estudiantes aportan proveniente del mundo exterior a la clase.

Precisamente la experiencia que tiene el alumno del mundo exterior y el razonamiento intuitivo le ayudan a construir parte del campo conceptual multiplicativo desplegando algunos mecanismos o estrategias de utilidad en situaciones que tienen que ver con proporciones, sean dichas estrategias "informales" o "formales". Explicamos a continuación cuáles son los tipos de razonamiento proporcional que puede desarrollar un alumno siguiendo a Kaput y West (1994).

3.8.1. Modelos de razonamiento que constituyen métodos "competentes aunque informales" de razonamiento proporcional

Se entiende que un modelo de razonamiento es considerado razonamiento proporcional "competente aunque informal" si permite resolver problemas de "valor-incógnita", esto es, encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad, sin manipular ecuaciones algebraicas formales, como por ejemplo, multiplicar en cruz o dividir para despejar la variable. Este tipo de razonamiento competente-informal podría implicar, en su forma más sofisticada, tener que escribir ecuaciones algebraicamente correctas pero no realizar operaciones organizadas sobre las mismas.

Hay cinco tipos de razonamiento proporcional "competente aunque informal" que puede observarse con frecuencia en los alumnos en la resolución de problemas de "valor-incógnita": el primero y más fundamental, el procedimiento básico de incremento/detrimento gradual aditivo (build-up/build-down); el segundo, el procedimiento abreviado de incremento/detrimento gradual utilizando la multiplicación y la división; el tercero, el procedimiento de normar; el cuarto, el procedimiento de empaquetar; y el quinto, la aproximación a la reducción a la unidad (Unit factor). En el caso de magnitudes discretas y en contextos de números enteros, el segundo tipo de razonamiento proporcional se reduce al primero considerando la multiplicación como repetición aditiva de unidades enteras mayores que la unidad.

Se tratan de estrategias multiplicativas en las que dos valores dados están relacionados multiplicativamente y esta relación se aplica a un tercer valor. La preferida de los alumnos es la aproximación escalar, la que considera razones internas, esto es razones entre cantidades de la misma naturaleza.

Estas cinco formas de razonamiento se pueden dar en uno o múltiples sistemas de representación, si bien el más frecuente es la tabla de valores o los pictogramas.

3.8.2. Procedimientos básicos de incremento/detrimento gradual aditivo

El procedimiento más simple de incremento, identificado por Hart, Lamon y otros, implica incrementar coordinadamente las cantidades para encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad. Veamos por ejemplo, el problema siguiente: *En un restaurante se pueden poner 7 cubiertos y 4 platos por mantel individual. Si en una mesa se han utilizado 35 cubiertos, ¿cuántos platos se han utilizado?* La solución a partir de un procedimiento básico de incremento gradual implicaría razonar de la siguiente manera: si a 7 cubiertos le corresponden 4 platos, a 14 cubiertos (que son 7 cubiertos más) le corresponden 8 platos, a 21 cubiertos 12 platos, a 28 cubiertos 16 platos y a 35 cubiertos 20 platos. A su vez, estas cantidades obtenidas coordinadamente contando de 7 en 7 y de 4 en 4 se podrían presentar en forma de tabla, tanto con la organización de los datos en forma horizontal como vertical:

Cubiertos	7	14	21	28	35
Platos	4	8	12	16	20

Antes de comenzar a realizar operaciones de este tipo, el alumno tiene que ser capaz: de distinguir los dos referentes o magnitudes involucradas (nº de cubiertos y nº de platos); de formar grupos (en el caso de magnitudes discretas) o segmentos (en el caso de magnitudes continuas) de referencia para incrementar las cantidades de las magnitudes; y de coordinar finalmente los dos tipos de grupos o segmentos para coordinar los pasos del incremento gradual dual.

Presentamos a continuación una lista de pasos que se encuentran en el fondo de un modelo o estrategia de razonamiento por incremento gradual, pasos que no tienen por qué darse en este orden exacto que vamos a presentar. Estos pasos los clasificaremos en dos categorías: conceptualización inicial y cálculo.

Conceptualización inicial

1. Distinguir entre los dos referentes o magnitudes A y B a cuantificar en la solución del problema.
2. Construir una relación de correspondencia semántica "grosso modo" entre las clases de referentes A y B a nivel elemental.

3. Formar unidades dentro de cada referente, A unidades, B unidades, entendiendo por formar unidades cubrir ambos referentes simultáneamente, sean discretos o continuos.
4. Construir una relación de correspondencia entre unidades respectivas a nivel de cada grupo, emparejando una unidad de A con una unidad de B (variante: construir otro grupo que contenga la unidad de A y la unidad de B como sus dos elementos).
5. Distinguir entre la tercera cantidad dada por el problema y la cuarta, desconocida, relacionándola con su referente respectivo A ó B según el caso.

Cálculo

6. Incremento/detrimento de ambas cantidades gradualmente, contando saltos hasta que se alcance la tercera cantidad dada, coordinando el emparejamiento entre unidades repetidas de A y de B (variante: repitiendo una unidad mayor formada por la unidad A y la unidad B juntas).
7. Identificar el elemento que corresponde a la otra cantidad, la cuarta, como la solución del problema.

Esta es una de las primeras estrategias que desarrolla el alumno, la del "incremento gradual aditivo". Se trata de una estrategia correcta, muy simple, en la que el alumno establece una razón entre dos cantidades que luego extiende a una segunda razón a base de sumar. El alumno llega a la cantidad deseada reconociendo y aplicando el mismo patrón, por lo que resulta útil para resolver algunos problemas de proporciones. Sin embargo, si el alumno no es capaz de añadir información adicional, este procedimiento del incremento gradual no puede ser considerado como razonamiento proporcional porque no tiene en cuenta la razón constante que existe entre los dos espacios de medida.

3.8.3. Procedimientos abreviados de incremento/detrimento gradual

El hecho de reemplazar la adición repetida por la multiplicación conduce a abreviar o consolidar los procedimientos básicos de incremento/detrimento gradual que acabamos de describir. Estos procedimientos abreviados, asociados con un manejo más eficiente de los procesos de incremento/detrimento gradual aditivo a partir de la multiplicación y la división, parecen ser una abstracción de los procedimientos de formar unidades, alejados eso sí de organizar semánticamente los referentes y dirigidos a calcular estrictamente valores numéricos de las cantidades involucradas. De hecho podríamos denominar a estos procedimientos de incremento/detrimento gradual multiplicativo.

Los primeros 5 pasos que constituyen la conceptualización inicial son en esencia los mismos que en el caso del procedimiento básico de incremento/detrimento gradual aditivo ya descrito. La diferencia se encuentra en los cálculos utilizados para deducir la solución que pueden aumentar su complejidad, bien porque aumente el grado de sofisticación del alumno, bien porque aumente la complejidad numérica del problema. Así denominaríamos a los dos últimos pasos como 6A y 7A, equivalentes a las versiones abreviadas 6 y 7 del procedimiento básico de incremento/detrimento gradual aditivo:

> 6A. Dividir el valor de la cantidad dada entre el valor de la cantidad por unidad para obtener el número de unidades.
> 7A. Multiplicar el número de unidades por la correspondiente cantidad por unidad para determinar el valor de la cantidad desconocida que se busca.

Veamos al respecto, el problema siguiente: *En un restaurante se pueden poner 7 cubiertos y 4 platos por mantel individual. Si en una mesa se han utilizado 392 cubiertos, ¿cuántos platos se han utilizado?* Una vez completados los 5 primeros pasos, dividiríamos 392 cubiertos entre 7 cubiertos por mantel individual obteniendo como cociente 56 manteles individuales, para obtener a continuación 224 platos como resultado de multiplicar 56 manteles individuales por 4 platos por mantel.

$$\frac{392 \text{ cubiertos}}{7 \text{ cubiertos/mantel individual}} = 56 \text{ manteles individuales} \ \ (\text{paso 6A})$$

$$56 \text{ manteles} \cdot 4 \text{ platos/mantel individual} = 224 \text{ platos} \ \ (\text{paso 7A})$$

Fijémonos que el paso 6A de este procedimiento consiste en hacer una división cuotitiva para determinar el nº de incrementos de la cantidad conocida, 56 incrementos en este caso, seguido de una multiplicación del nº de incrementos por la longitud del incremento de la cantidad desconocida, platos en este caso (paso 7A).

Este procedimiento abreviado de incremento gradual es claramente una elaboración conceptual del procedimiento básico de incremento gradual aditivo ya que se basa en las mismas conceptualizaciones iniciales (pasos 1-5). Ahora bien, los pasos concernientes al cálculo son conceptualizaciones de la multiplicación y la división como abreviaturas del procedimiento básico de incremento gradual. A pesar de su sofisticación conceptual, el procedimiento abreviado de incremento gradual es en el fondo aditivo. Modeliza un crecimiento repetido más que un auténtico crecimiento multiplicativo.

Complicaciones respecto a la divisibilidad en los procedimientos abreviados de incremento/detrimento gradual

La mayor complicación que puede presentarse aquí tiene que ver con la divisibilidad entre los valores de la cantidad o magnitud conocida, tal como ilustra el siguiente problema: *En un parque 15 árboles dan sombra a 21 mesas de picnic. Si se quiere ampliar el parque a 50 árboles, ¿cuántas mesas de picnic se pueden albergar bajo la sombra de estos árboles?* 50 no es divisible por 15, por lo que si el alumno sigue el procedimiento puro de incremento/detrimento, saltando de 15 en 15 se pasaría de 50, y si sigue el procedimiento abreviado, el cociente 50/15 no es un número entero, por lo que el alumno no puede obtener un número entero de incrementos de la cantidad conocida, el número de árboles en este caso. La estrategia que puede adoptar el alumno en ambos tipos de procedimiento para solucionar esta dificultad de la divisibilidad es ajustar la longitud de las dos cantidades correspondientes dividiéndolas por un nº entero de manera que las cantidades resultantes sean una múltiplo de la otra. Este ajuste se puede hacer al principio o al final del procedimiento.

Así en el problema del parque, se podría proceder de la siguiente manera:

1) Ajustando al principio, esto es, como 50/15=3.5, un nº entre 3 y 4, dividimos 15/3=5 y 21/3=7 para ajustar las longitudes de las unidades y después como 50/5=10, entonces la solución es 7x10=70. En forma de tabla los pasos serían los siguientes:

Árboles	15	5	50
Mesas	21	7	70

2) Ajustando al final, esto es, multiplicamos 15 y 21 por 2 y por 3 obteniendo que a 45 árboles le corresponden 63 mesas, utilizando el procedimiento básico del incremento hasta justo antes de exceder la cantidad dada, 50 árboles (15 por 4 ya serían 50 árboles). Entonces se reduce la cantidad obtenida, 45 árboles en este caso, de manera que con incrementos adicionales se pueda alcanzar la cantidad dada, en este caso, 45/9=5, 63/9=7 y como 50/5=10, entonces la solución es 7x10=70. En forma de tabla los pasos serían los siguientes:

Árboles	15	30	45	5	50
Mesas	21	42	63	7	70

Otro ajuste alternativo en el procedimiento abreviado consiste en analizar el resto de la división, en este caso del problema de los árboles y las mesas, el resto de dividir 50 entre 15. Al dividir 50 entre 15 se obtienen 3 grupos de 21 mesas con un resto de 5 árboles. Como 5 es 1/3 de 15 y 7 es 1/3 de 21 mesas, por un argumento de reducción de unidad ya utilizado anteriormente, se añaden 7 mesas a las 3·21=63 mesas completando la solución, 70 mesas. Esto supondría introducir un paso entre los pasos 6A y 7A y ejecutar el 7A con un ajuste final.

3.8.4. Procedimiento de normar

Otra estrategia interesante que los alumnos son capaces de seguir es la denominada de "doble contabilidad" o "normar", útil para comparar razones y resolver satisfactoriamente problemas como el siguiente: *si repartimos 1 pizza entre 3 chicos y 3 pizzas entre 7 chicas, ¿quién come más pizza, un chico o una chica?* Antes de que los alumnos hayan trabajado con los números racionales, son capaces de construir unidades complejas para resolver problemas como este. Eligen una de las razones, en este caso, 1 pizza: 3 chicos y la utilizan para reinterpretar la otra razón 3:7. A este proceso se le denomina también "normar", es decir, reinterpretar una situación en función de alguna unidad elegida, en este caso, 1:3. En esencia es un proceso de doble contabilidad: se mide la razón 1:3 de la razón 3:7 contando cuántas partes de la razón pizza-por-chico corresponden a la razón pizza-por-chica. Para los estudiantes que utilizan esta estrategia les es bastante fácil representarla a base de símbolos. La razón aritmética es: (3:7)-3(1:3)=(3:7)-(3:9)=(0:-2). Por lo que los estudiantes explican que si se sirvió la pizza de manera que siempre se repartiera 1 pizza entre 3 personas, las chicas comieron más que los chicos puesto que con 3 pizzas podrían haber comido 2 chicas más.

Al igual que el procedimiento del incremento gradual aditivo, esta estrategia de normar no es un buen indicador del grado de razonamiento proporcional del alumno puesto que los alumnos que la utilizan a menudo no reconocen todas las relaciones estructurales que hay en una proporción. De hecho, aunque los alumnos que utilizan esta estrategia no tienen aún conceptualizada la razón como un número (como una razón cociente o como un índice), "normar" sí que parece ser un paso natural en el proceso de conceptualizar la razón como unidad de unidades de unidades. El alumno reconoce: a) el número de pizzas; b) el número de personas y c) la nueva cantidad intensiva pizzas por persona compuesta por a) y b).

Existen variaciones en esta estrategia de doble contabilidad (Lo y Watanabe, 1997). Al proponer a un grupo de alumnos el siguiente problema: *ayer compré 28 golosinas con 12 céntimos de euro. Si voy hoy a la misma tienda a comprar con 15 céntimos, ¿cuántas golosinas podré comprar?*, uno de ellos hizo 7 grupos de 4 golosinas cada uno y puso 2 céntimos en cada grupo, lo que no resultó satisfactorio pues con 0.12€ sólo se podían hacer 6 grupos de 0.02€ y no 7. Sin embargo, después de probar diferentes reagrupamientos de golosinas y céntimos, los alumnos fueron capaces de verbalizar la relación entre las 7 golosinas y los 3 céntimos de euro, llegando al resultado de que con 15 céntimos podían comprar 35 golosinas.

Uno de los ejemplos más fáciles de este mecanismo de normar es la determinación de un factor de escala dentro de un espacio de medida. En un espacio de medida, cualquier elemento es un múltiplo escalar de otro, es decir, hay un operador escalar que actúa sobre cualquier elemento del espacio para producir otro y viceversa. Por ejemplo, *si tenemos las magnitudes 4 y 7 en el espacio de medida M1, se puede obtener el 7 en función del 4 mediante* $7 = 1 \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 4$. Aquí el 4 es la unidad entera y el 7 se escribe en función del 4, si bien podría haberse hecho a la inversa. Por lo que normar conlleva a reinterpretar la medida de un elemento en función del otro mediante la descomposición escalar.

Pero el ejemplo más claro de normar lo encontramos en los problemas de proporcionalidad y en los problemas de "valor incógnita". Esto es, problemas en los que se utiliza un operador escalar para encontrar un valor concreto en una proporción, puesto que en este caso, el operador que relaciona las magnitudes del primer espacio de medida es el mismo que actúa entre las del segundo espacio de medida. Nos referimos a encontrar el valor correspondiente en una tabla de proporcionalidad a partir de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$. Esta es una de las relaciones más críticas que se dan en una proporción. Se dice que un alumno utiliza una estrategia interna para resolver proporciones cuando es capaz de igualar dos razones internas (o dentro de un espacio de medida) e utiliza el mismo operador escalar para determinar el valor que falta (véase el ejemplo recogido en la tabla 3.3 del apartado 3.7.4).

Existe otra relación crítica en una proporción que es la relación funcional entre los espacios de medida M1 y M2 y que es también un ejemplo de normar aplicado a los problemas de "valor incógnita". Se dice que un alumno utiliza una estrategia "entre" espacios de medida o un método funcional cuando es capaz de igualar dos razones externas o entre dos espacios de medidas, M1 y M2, y religarlas mediante una relación funcional (como la del ejemplo de la tabla 3.3, $f(x)=\frac{3}{2}x$) para encontrar el valor que falta. La relación funcional permite encontrar el valor que se busca mediante la descomposición escalar de una función, otro ejemplo más del proceso de normar.

Por su parte encontraríamos otros ejemplos del proceso de normar en los porcentajes, en el significado de fracción o en la división de fracciones. En los porcentajes se elige el 100 como la unidad estándar en el segundo miembro de una razón. El símbolo numérico a/b puede representar diferentes cantidades según la unidad entera a la que se refiere. Y en el caso de la división de fracciones se requiere considerar al divisor como la unidad que norma y reinterpretar el dividendo en función del divisor.

3.8.5. Procedimiento de empaquetar

Otra estrategia intuitiva importante es "empaquetar", es decir, "hacer paquetes de unidades" (unitizing). Por "empaquetar" se entiende la habilidad para construir una unidad de referencia o una unidad entera con la que reinterpretar una situación (Lamon, 1994). Dicho de otra manera, es fragmentar, agrupar o reestructurar una cantidad determinada en parcelas que tengan un tamaño más manejable para trabajar con ellas (Lamon, 1996). Por ejemplo, podemos pensar en 1 caja de 24 latas de refresco, o en 2 cajas de 12 latas o en 4 de 6. Una de las diferencias más sobresalientes entre los alumnos que razonan proporcionalmente y los que no es que los primeros son expertos en la construcción y el uso de unidades compuestas cuando el contexto favorece más la utilización de estas unidades que las simples. Por ejemplo: *¿Qué es mejor comprar? ¿Una barra de cereales que pesa 160gr y cuesta 3.36€ o la que pesa 120gr. y cuesta 2.64€?* O *¿dónde hay más cantidad de pizza, en ½ o en 3/5?* En este caso, si no se dispone de lápiz ni de calculadora, es más conveniente comparar los precios de 40gr. de cada cereal que utilizar mentalmente un divisor de 2 dígitos para calcular el coste de 1gr. de cada cereal.

Este proceso que conlleva formar unidades compuestas progresivamente para formar estructuras más complejas ya lo hace el alumno desde su infancia, primero de una manera visual. De hecho un alumno que sea capaz de reconsiderar una situación en términos de una unidad mayor que le permite ver simultáneamente los elementos individuales y agregados que componen un conjunto, posee un tipo de pensamiento más sofisticado. En cualquier caso, la capacidad para reinterpretar información en función de diferentes unidades enteras (en ocasiones varias veces dentro de la misma situación) es esencial para comprender las razones.

Los estudios con alumnos muestran que las estrategias intuitivas presentadas son adecuadas en edades tempranas en las que los alumnos no han recibido aún conocimientos importantes sobre fracciones. Mientras que los alumnos de 11-12 años reemplazan estas estrategias de razonamiento "informales", más intuitivas, por reglas y algoritmos puesto que aquellas no funcionan cuando las razones no son enteras (Karplus y otros, 1983b). El hecho de reemplazar las estrategias "informales" por "reglas" para crear fracciones equivalentes (multiplicando numerador y denominador por el mismo número) que no le servían a los estudiantes a la hora de trabajar con razones no enteras ha mostrado que la manera de enseñar ha jugado un papel determinante en la pobre actuación que presentan los alumnos. Por lo tanto, debería ser prioritaria la enseñanza basada en los recursos previos a la instrucción que tienen los alumnos (Lamon, 2007), sin que la introducción de reglas y algoritmos cuando sean necesarios menoscabe el uso de las estrategias intuitivas.

3.8.6. Aproximación a la reducción a la unidad

Este procedimiento, que puede surgir de manera natural como una estrategia de reajuste de la divisibilidad, es utilizado a veces por los alumnos espontáneamente y antes de que el profesor explique la proporcionalidad. De hecho es la base para introducir la técnica de reducción a la unidad, se utiliza sobre todo en contextos de magnitudes continuas, aunque no únicamente, donde no son necesarios contextos de números enteros, como por ejemplo, precio por unidad (Kaput y West, 1994).

Los 4 primeros pasos de la conceptualización son los mismos en este caso que en los procedimientos de incremento gradual. Ahora bien, una vez se relacionan (o emparejan) las dos unidades iniciales, hace falta tomar una decisión respecto a qué cantidad actuará como dividendo y qué cantidad actuará como divisor para formar el cociente que actuará como factor unidad. Esto requiere distinguir entre las cantidades conocidas y la desconocida de manera que la cantidad conocida actúe como divisor, completando así el paso 5 de los procedimientos del incremento con una longitud de unidad prefigurada. Los pasos 6 y 7 de cálculo para hallar la solución, que denominaremos 6U y 7U respectivamente, equivalen a dividir para determinar el factor unidad y multiplicar después el cociente por la cantidad. Notemos que en este procedimiento la división es partitiva en vez de cuotitiva, como era el caso del procedimiento abreviado.

6A. Dividir la longitud de la unidad de la cantidad desconocida entre la longitud de la unidad de la cantidad conocida para determinar el factor unidad.

7A. Multiplicar el factor unidad por la cantidad dada para determinar el valor que corresponde a la cantidad desconocida.

Veámoslo en el problema siguiente: *Para hacer un aliño de ensalada se necesitan 4 partes de vinagre por nueve partes de aceite. ¿Cuánto vinagre se necesitará para 25 litros de aceite?*

$$\frac{4 \text{ vinagre}}{9 \text{ aceite}} = 0,\hat{4} \text{ vinagre/aceite} \quad \text{(paso 6U)}$$

$$0,\hat{4} \text{ vinagre/aceite} \cdot 25 \text{ aceite} \cong 11 \text{ litros de vinagre} \quad \text{(paso 7U)}$$

3.8.7. Aproximación aditiva

Se considera que un alumno utiliza erróneamente la aproximación aditiva, cuando sabiendo distinguir las cantidades, construir las unidades e identificar correctamente la cantidad desconocida, identifica que la diferencia entre la cantidad desconocida y la cantidad conocida es la misma que la diferencia entre las respectivos valores de las cantidades que ofrece el problema como datos. Por ejemplo, en el primer problema que utilizamos para ilustrar el procedimiento básico de incremento, en cada mantel individual por cada 7 cubiertos teníamos 4 platos y se pedía el número de platos que corresponderían a 35 cubiertos. Un alumno que utiliza la aproximación aditiva erróneamente supondría que como hay 3 piezas menos de platos que de cubiertos (7-4=3), entonces habrían 35-3=32 platos.

Este tipo de errores se da más cuando la diferencia entre los dos valores de la misma cantidad que aparecen en el problema es relativamente pequeña comparada con las medidas de las unidades mismas. Este no sería el caso del problema que acabamos de mostrar, en el que la diferencia de 7 a 35 no es pequeña, aunque sí el caso de un problema como el siguiente: *Si Joan ha utilizado 15 botes de pintura para pintar 18 sillas, ¿cuántas sillas podrá pintar con 20 botes?*, en el que la diferencia de 15 a 20 sí que es pequeña (Kaput y West, 1994).

En los contextos de semejanza geométrica y medidas lineales, este tipo de aproximación aditiva errónea es la estrategia que más utilizan los alumnos. Esto se debe a dos factores: el primero, que el alumno no comprende bien las implicaciones cuantitativas de la semejanza; y el segundo, la fuerza que tiene en el alumno comparar aditivamente medidas lineales. Esta fuerza proviene de la experiencia personal del alumno en las que utiliza continuamente diferencias aditivas en comparaciones de medidas lineales cuando se contestan, por ejemplo, cuestiones del tipo ¿cuál es más grande? o ¿quién es más alto?

Otro factor que es primordial en la relación entre las concepciones aditiva y multiplicativa tiene que ver con dos concepciones muy diferentes del crecimiento: repetitiva, subyacente a las aproximaciones informales que hemos expuesto en este apartado; y multiplicativa, en la que el crecimiento se distribuye continuamente en las cantidades, como en los cambios de escala.

3.8.8. Estrategia “formal” de razonamiento proporcional: aproximación basada en ecuaciones

Para resolver un problema de valor-incógnita, primero es necesario identificar y distinguir las cantidades involucradas, lo que equivale a los dos primeros pasos de la conceptualización inicial ya descritos. A partir del paso 3 y dependiendo del método que se le enseñe al alumno, se puede empezar a escribir una ecuación directamente estableciendo una comparación de razones, de una de ellas conocemos el valor y la otra tiene que ser de igual valor. Fijémonos que esta comparación puede implicar un par de relaciones parte-todo si se quiere establecer la comparación dentro del espacio de medida, o si se multiplica en cruz, un par de relaciones parte-parte si se quiere establecer la comparación entre espacios de medida. Por ejemplo, en el problema de los cubiertos y los platos, hay que comparar piezas de cubiertos y de platos. Si se quiere mantener la comparación dentro de cada espacio de medida, es necesario escribir los datos de las cantidades de cubiertos y de platos separados, en miembros distintos de la ecuación. Para acabar de escribir la ecuación, hay que emparejar las dos razones que tienen que ser iguales: $\frac{7\ \text{cubiertos}}{392\ \text{cubiertos}} = \frac{4\ \text{platos}}{\text{X platos}}$.

¿Qué comprensión mínima conceptual de la situación necesita tener el alumno para conservar escrita la ecuación como parte-todo o como parte-parte? Esto tiene que ver con el paso 5 de la conceptualización inicial: saber distinguir las cantidades conocidas y las desconocidas para relacionarlas en los dos espacios de medida involucrados, en este caso cubiertos y platos. Además se requiere comprender la invariabilidad de esta relación sobre las dos comparaciones multiplicativas. De todas formas se puede plantear una ecuación sin comprender esta invariabilidad. En el ejemplo que nos ocupa, el alumno podría simplemente notar que la comparación del número de cubiertos de la menor cantidad a la mayor se tiene que mantener de la misma manera para el número de platos, por lo que a partir de una comprensión cuantitativa básica de la situación se puede plantear una ecuación.

Sean cuales sean los medios a partir de los cuales el alumno plantee la ecuación, a partir de aquí ya puede completar los pasos para encontrar la solución, en función de la posición de la incógnita en la ecuación. Queremos remarcar que en este caso, las cantidades intermedias que se generan formalmente en los pasos sucesivos para encontrar la solución, como las resultantes de multiplicar en cruz o de multiplicar ambos miembros de la ecuación por X, normalmente no tienen referentes conceptuales para el alumno, dichas cantidades no tienen una interpretación en la situación de problema que se está modelando. Esto es muy diferente de lo que sucede en los procedimientos de crecimiento donde cada paso intermedio se deriva de la conceptualización inicial y está vinculado a dicha conceptualización. En los procedimientos "informales" que hemos analizado, el cálculo es una extensión natural de la conceptualización, mientras que en las aproximaciones basadas en ecuaciones, el paso de la conceptualización al cálculo es brusco, de manera que el alumno puede actuar sobre el sistema formal de símbolos y usar sus reglas sintácticas sin utilizar una conceptualización de la situación del problema.

3.9. Dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad

En líneas generales, para tratar convenientemente el tema de la proporcionalidad en el aula creemos que es importante que las intervenciones del profesor respondan a dos criterios básicos: construir los conceptos desde lo más concreto hacia lo más abstracto y poner el énfasis en entender bien los conceptos antes de desarrollar técnicas de cálculo. Asimismo el diseño de las unidades didácticas de proporcionalidad debería adecuar el contenido que se trabaja a la edad de los alumnos y evitar las dificultades más comunes que se le presentan a los alumnos con el concepto de proporcionalidad.

Por un lado, es conveniente que la introducción del tema de proporcionalidad aproveche los conocimientos previos que los alumnos poseen respecto a este tema. Así, en la comparación de fracciones, el razonamiento cualitativo intuitivo puede ayudar al alumno si éstas son presentadas en contextos familiares para él. Por ejemplo: *Ayer compartiste galletas con tus amigos. Si hoy compartes menos galletas con más amigos, cada uno de ellos ¿recibirá más, menos o la misma cantidad de galletas que ayer?* El alumno puede contestar fácilmente que sus amigos recibirán hoy menos galletas que ayer sin contar ni el número de personas ni el de galletas. Es un tipo de razonamiento intuitivo, basado en la experiencia previa que el alumno tiene al respecto. El contexto es familiar para él. De hecho, la pregunta planteada invita al alumno a determinar la dirección del cambio en la razón entre el número de galletas y de personas de ayer a hoy. De las nueve situaciones diferentes que se pueden presentar en la dirección del cambio de una razón (véase la tabla 3.6), sólo 2 son indeterminadas.

Cambio en la cantidad *galletas* por persona			
	Cambio en el nº de personas		
Cambio en el nº de galletas	+	-	0
+	?	+	+
-	-	?	-
0	-	+	?

Tabla 3.6: Ejemplo que ilustra las diferentes posibilidades en la dirección de cambio de una razón

En las otras siete situaciones el alumno puede especificar el cambio en la razón galletas/niños conociendo cuál es la dirección del cambio en cada cantidad, pero sin cuantificar ninguna de ellas. Ahora bien, este tipo de razonamiento intuitivo, útil en algunas comparaciones como 4/7 y 5/6 (hoy menos personas comparten más galletas) no es suficiente para cualquier comparación como por ejemplo 4/7 y 5/8. Se necesitan otros métodos para comparar fracciones.

Por otro lado, utilizar para la introducción de la proporcionalidad formas de trabajo a las que estén habituados los alumnos, ya que a la dificultad conceptual no se le debería añadir una innecesaria dificultad de procedimiento. Asimismo, el profesor debe intentar evitar prácticas que refuercen los problemas que tienen los estudiantes con la proporcionalidad. Debe potenciar la conexión de la proporcionalidad con otros temas.

Finalmente, una adecuada introducción a la proporcionalidad en la que se haga énfasis en su aplicabilidad tanto a contextos matemáticos como a contextos no matemáticos puede ser de gran utilidad para el tratamiento de otros temas de Matemáticas en Secundaria ya que "la proporcionalidad integra y conecta muchos de los temas matemáticos que se estudian en los niveles 6-8 (Sexto curso de Primaria a Segundo curso de Secundaria). Aparece al estudiar funciones lineales de la forma y=kx, al considerar la distancia existente entre dos puntos de un mapa hecho a escala y la correspondiente distancia real, al usar la relación entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro, y cuando se razona sobre los datos que presenta un histograma de frecuencias relativas" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 217).

A partir de estas directrices generales, conviene que el profesor trabaje en el aula con problemas cuya resolución proporcione ideas sobre la construcción del concepto de proporcionalidad.

Entre las múltiples dificultades que pueden presentar los problemas de proporción, se encuentran: el contexto en el que se presentan las proporciones (Tourniaire, 1983, 1986); lo familiarizados o no que estén los alumnos con el uso de las proporciones en un contexto dado (Tourniaire, 1983); saber encontrar el valor-incógnita que falta en una proporción en relación a otras 3 cantidades y el uso excesivo de la proporcionalidad para resolver los problemas de valor incógnita (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009); saber si un determinado problema tiene que ver con cantidades discretas o continuas (Behr y otros, 1983; Pulos, Karplus y Stage, 1981); la presencia de razones internas/externas enteras o no (Van Dooren y otros, 2009) y la presencia de razones de la unidad, concretamente 1:2 (Hart, 1984, 1988; Karplus y otros, 1983b; Noelting, 1980a, 1980b).

Ahora bien, todas estas dificultades que los alumnos presentan respecto a la asunción de la proporcionalidad se relacionan con los siguientes conceptos matemáticos que el profesor de Matemáticas debería tener bien integrados para facilitar el aprendizaje del alumno al respecto. Detallamos a continuación un listado de 19 cuestiones que tienen que ver con la proporcionalidad y que son importantes, bien porque son de tipo conceptual, o bien porque se refieren a aspectos difíciles, a veces errores, que el profesor debería tener en cuenta para no conducir al alumno a un aprendizaje erróneo o incompleto.

3.9.1. Entender qué es la proporcionalidad

El primer objetivo del profesor tendría que centrarse en que el alumno entendiera bien lo que es la proporcionalidad, a partir de una buena definición. En este sentido, una primera actividad formativa podría consistir por ejemplo, en una actividad práctica sobre sombras en las que los alumnos deban relacionar las medidas de algunos objetos con las medidas de sus sombras. El objetivo de esta actividad sería que los estudiantes acabaran viendo que si el tamaño del objeto se multiplica por un cierto número k entonces la longitud de su respectiva sombra también se multiplica por este mismo número k.

Aunque sea una primera actividad, sería conveniente que en algunos de los ejemplos de sombras, la cantidad *k* por la que se multiplique sea menor que 1 para evitar en el futuro inmediato que el alumno asocie que la constante de proporcionalidad tenga que ser siempre mayor que 1. Dicho de otra manera, que alguna de las medidas de los objetos propuestos sea menor que la de su sombra. Así se evitaría desde un principio que el alumno sólo relacione la proporcionalidad con la multiplicación y la contemple también como una división según el contexto o el ejemplo.

3.9.2. Entender la proporcionalidad en sentido amplio

Tal como la definió Euclides en Los Elementos: "Cuatro números son proporcionales si el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, del segundo como el tercero lo es del cuarto" (Libro VII, definición 21). Conviene que el profesor utilice en un primer ejemplo números muy pequeños y una razón de proporcionalidad entera, para que el alumno pueda ver la razón de proporcionalidad de manera muy clara. Por ejemplo: *María compra 2 bolsas de manzanas obteniendo 8 manzanas. Si compra 10 bolsas, ¿cuántas manzanas obtendrá?* El hecho de utilizar números muy pequeños permite ver la razón de proporcionalidad de manera muy directa, pues es una razón entera.

En un segundo problema, se puede presentar al alumno una razón que no sea entera. Por ejemplo, *un panadero prepara 13 kilogramos de pan con 10 kilogramos de harina. ¿Qué cantidad de pan puede hacer con 23 kilogramos de harina?* Aquí los números también son pequeños, como en el primer ejemplo de las manzanas, pero la razón no es entera: 13/10=1,3.

En ambos problemas existe una relación de proporcionalidad entre las magnitudes, pero la diferencia está en la relación numérica que presentan los números en términos de divisibilidad. Mientras que en el problema de las manzanas, los números eran múltiplos (o divisores) en los dos sentidos, en el caso del problema del pan y la harina no hay una relación de multiplicidad (o de divisibilidad) en ningún sentido.

3.9.3. Entender en qué situaciones puede aplicarse la proporcionalidad

Es importante que los alumnos distingan las situaciones de proporcionalidad de las que no lo son, para que no tiendan a aplicar la proporcionalidad en contextos erróneos. Existen otras relaciones entre dos cantidades dadas que no son proporcionales en absoluto y el alumno ha de ser capaz de reconocer la diferencia entre relaciones proporcionales y no proporcionales entre dos cantidades cualesquiera. Con este fin el profesor podría presentar al alumno un listado de situaciones diversas para que aprenda a identificar situaciones de proporcionalidad frente a escenarios en los que no puede aplicarse, pero en los que el alumno tiende a aplicarla erróneamente. El listado tendría que contener actividades de proporcionalidad, actividades aditivas (en las cuales las magnitudes que intervienen se relacionan de forma aditiva $y=x+b$), actividades afines (en las cuáles las magnitudes x e y que intervienen se relacionan de forma afín $y=ax+b$) y actividades constantes (en las cuales una de las dos magnitudes permanece constante). Presentar como una de las primeras actividades de la unidad una colección de problemas diversos de este tipo para que el alumno encuentre los que corresponden a escenarios de proporcionalidad, entendemos que es una buena manera de abordar la unidad (véase por ejemplo la tabla 3.7).

1. A Carlos y a Ricardo les gusta correr juntos ya que lo hacen al mismo ritmo. Hoy Ricardo comenzó a correr antes de que Carlos saliera de los vestuarios de manera que cuando Ricardo llevaba 7 vueltas, Carlos llevaba sólo 3. ¿Cuántas vueltas habrá hecho Ricardo cuando Carlos haya completado 12? (donde el *cambio* de una de las cantidades puede ser proporcional al *cambio* en la otra cantidad).
2. Mamá pone 3 toallas a secar. Después de 12 horas están secas. Si el vecino tiende 6 toallas en el tendedero, ¿cuánto tardarán en secarse?
3. Mamá compra 2 bolsas de manzanas obteniendo 8 manzanas en total. ¿Cuántas manzanas obtendrá si compra 10 bolsas de manzanas?
4. Juan, que es panadero, puede preparar 13 kilogramos de pan con 10 kilogramos de harina. ¿Qué cantidad de pan puede preparar con 23 kilogramos de harina?
5. La locomotora de un tren mide 12 metros de longitud. Si el tren tiene 4 coches conectados a la locomotora, entonces mide 52 metros de longitud. ¿Qué longitud tendría el tren si tuviera 8 coches conectados a la locomotora?
6. Hoy Jordi cumple 2 años y Sergi 6. Cuando Jordi tenga 12 años, ¿cuál será la edad de Sergi?
7. Un grupo de 5 músicos tarda 10 minutos en tocar una canción. ¿Cuánto tardará un grupo de 35 músicos en tocar la misma canción?
8. Ayer un barco llegó al puerto con una carga de 326 coches. El peso total de los

coches era de 521 toneladas. Mañana llegará otro barco con una carga de 732 coches. ¿Cuál será el peso total de estos coches?

9. En el pasillo de la escuela hay 2 mesas alineadas con 10 sillas alrededor. Si la profesora alinea 6 mesas, ¿cuántas sillas habrá?

10. En una tienda, 4 paquetes de lápices cuestan 8€. El profesor quiere comprar un paquete para cada uno delos 24 alumnos. ¿Cuánto tendrá que pagar?

11. Si un jugador de fútbol pesa 92kg, ¿cuánto pesarán 3 jugadores?

12. Si Mario pinta su habitación en 3 horas, ¿cuánto tardará en pintarla con su amigo Javier si éste pinta al mismo ritmo que Mario?

13. Si en una compra de 20€ pagamos un IVA de 1.30€, ¿cuánto pagaremos por una compra de 50€?

Tabla 3.7: Listado que muestra diferentes problemas (de proporcionalidad, aditivos, afines y constantes)

Ahora bien, una vez centrados en resolver situaciones de proporcionalidad, conviene que el alumno empiece a identificar tipos de problemas, esto es, a distinguir por ejemplo, aquellos que puede resolver mentalmente (porque las cantidades son pequeñas y las relaciones de proporcionalidad fáciles) de los que no.

3.9.4. Entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido

La representación de los datos en un esquema rectangular permite entender la proporcionalidad como una relación que va en los dos sentidos: entre los valores de la misma magnitud o espacio de medida y entre las dos magnitudes o espacios de medida. Así, la definición de proporcionalidad de Euclides se cumple tanto ordenando los números por filas como por columnas. En el ejemplo de las manzanas y las bolsas, cada columna (bolsas y manzanas) representa una magnitud distinta: 2 divide a 10 de la misma manera que 8 divide al número que buscamos. Análogamente, 10 es múltiplo de 2 de la misma manera que el número buscado lo es de 8. En cambio, cada fila representa los valores de cada magnitud relacionados: 2 divide a 8 de la misma manera que 10 divide al número buscado; 8 es múltiplo de 2 de la misma forma que el número buscado es múltiplo de 10. Conviene destacar aquí que esta interpretación de la proporcionalidad en dos sentidos que se desprende de la definición de Euclides contrasta con la presentación que se hace en muchos libros de texto, donde se muestra la proporcionalidad sólo entre magnitudes, reduciéndola por tanto a una relación sólo en un sentido.

3.9.5. Razonamiento mental sin lápiz ni papel: reducción implícita a la unidad

El concepto de "razonamiento" no sólo tiene que ver con cálculos escritos sino con un trabajo más mental, en el que se pueden extraer conclusiones o inferir resultados sin utilizar lápiz y papel. De hecho, de las 8 acepciones de la entrada "razonar" en el diccionario de la RAE, la primera y la segunda son respectivamente "discurrir, ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión" y "hablar dando razones para probar algo" mientras que la sexta es "computar o regular".

En el caso de la proporcionalidad, se puede decir coloquialmente que razonar proporcionalmente supone razonar "subiendo y bajando" sin utilizar la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ni escribir nada, al menos en los primeros años de aprendizaje matemático del alumno, cuando se introducen las fracciones. Veamos a continuación una secuencia de 3 situaciones donde el alumno puede razonar de esta manera:

Problema 1: si un tambor de detergente para lavar la ropa contiene 80 dosis y mi lavadora recomienda $1\frac{1}{4}$ dosis por lavado, ¿cuántos lavados podré hacer con este tambor de detergente?

Pensamiento del alumno: si $1\frac{1}{4}$ dosis hacen 1 lavado; 5 dosis harán 4 lavados; 40 dosis, 32 lavados y 80 dosis 64 lavados.

En este caso el problema nos da las dosis que corresponden a 1 lavado (aunque no los lavados que corresponden a 1 dosis) y el alumno puede "subir" fácilmente para encontrar una relación fácil (5 dosis para 4 lavados) que le permita trabajar sin demasiadas dificultades.

Problema 2: si 6 obreros completan un trabajo en 4 días, ¿cúantos días tardarán en hacer el mismo trabajo 8 hombres?

Pensamiento del alumno: si 6 hombres necesitan 4 días; 1 solo hombre necesitaría 24 días y 8 hombres, 3 días.

Aunque en este caso la relación hombres/días es inversamente proporcional, el alumno puede encontrar rápidamente la relación de reducción a la unidad (1 hombre 24 días) que le permita resolver el problema.

<u>Problema 3</u>: en una caja hay 8 monedas de 1 céntimo de euro que representan $\frac{2}{3}$ del dinero que tiene Joana. ¿Cuántos céntimos serán $\frac{1}{2}$ de lo que tiene Joana?

<u>Pensamiento del alumno</u>: este problema da información sobre $\frac{2}{3}$ de la unidad, a partir de aquí se puede "bajar" a $\frac{1}{3}$, después a 1, puesto que $\frac{3}{3}$ (esto es, 3 veces $\frac{1}{3}$) completan el total de céntimos y, finalmente a $\frac{1}{2}$. Así, 8 céntimos son $\frac{2}{3}$; 4 céntimos son $\frac{1}{3}$; 12 céntimos son el conjunto completo de céntimos y 6 céntimos son $\frac{1}{2}$ de lo que tiene Joana.

Este tercer problema, siendo más complejo que los dos precedentes, puede llevar exitosamente al alumno a la reducción a la unidad primero (12 céntimos son el conjunto completo de céntimos), y a la solución final después porque precisamente en los dos primeros problemas ha podido razonar rápido y sin escribir nada.

En los tres problemas, sobre todo en los dos primeros, la reducción a la unidad está implícita, por lo que el alumno no necesita lápiz y papel sino que puede razonar mentalmente, "subiendo y bajando" en las razones. Desgraciadamente, rara vez los estudiantes razonan sin lápiz y papel. El profesor debería proponerse como objetivo el "razonar en voz alta" como una de las actividades constructivista más profundas y desafiante. Porque "razonar en voz alta" permite a los alumnos no sólo participar activa y comunicativamente en el desarrollo de la clase al poder influir en las interpretaciones y en las actuaciones de sus compañeros, sino que además, un alumno que es capaz de "razonar en voz alta" se convierte en el mejor crítico de sí mismo. Un alumno que escucha lo que él mismo verbaliza produce al instante abstracción reflexiva, con lo cual le sirve para desarrollar sus habilidades metacognitivas.

3.9.6. Covariabilidad e invariabilidad

Una de las maneras de pensar y operar en Matemáticas implica la transformación de cantidades o ecuaciones de tal modo que la estructura matemática permanezca invariante. Las relaciones proporcionales involucran una de las formas más sencillas que existen de covariabilidad: dos cantidades están ligadas entre ellas de manera que cuando una de las dos cambia, la otra también cambia con respecto a la primera de un modo muy concreto.

Una parte de lo que significa comprender la naturaleza proporcional de los números racionales es reconocer qué transformaciones son válidas y cuáles no en cada contexto que tenga que ver con relaciones de proporcionalidad. Los dos tipos principales de invariabilidad que se dan en dichas relaciones son: la invariabilidad de la razón de dos cantidades en el caso de magnitudes directamente proporcionales y la invariabilidad del producto de dos cantidades en el caso de magnitudes inversamente proporcionales. Si retomamos los tres problemas expuestos en el apartado anterior, respecto al alumno, la cuestión estriba en cómo saber cómo se producirán estos cambios entre las cantidades relacionadas, es decir, qué es lo que permanece invariable entre ellas, ¿la razón?, ¿el producto? Respecto al profesor, cómo ayudar al alumno a reconocer los errores de razonamiento que se produzcan.

En una relación de proporcionalidad directa, la dirección del cambio en las cantidades x e y relacionadas es siempre la misma, de manera que se dice que "y varía como x" o que "y es directamente proporcional a x". Por ejemplo, se vierten 2 tazas de agua en un bol y se añade media taza de azúcar. Si se cuadruplica la cantidad de agua de manera que se viertan 8 tazas, entonces se deberán verter 2 tazas de azúcar. La cantidad de agua comparada con la cantidad de azúcar es siempre la misma: siempre hay cuatro veces más de agua que de azúcar, independientemente de la cantidad de azúcar que se vierta. O lo que es lo mismo, se pueden aumentar o disminuir las dos cantidades de modo que se mantiene constante la "relación" entre ellas: la "razón" $\frac{y}{x} = k, \frac{n_1 y}{n_1 x} = k, \frac{n_2 y}{n_2 x} = k, \frac{n_3 y}{n_3 x} = k, \ldots$ donde $n_i \in N$ y k es la constante de proporcionalidad. Así en el problema 1 del detergente, k es $\frac{5}{4} = \frac{40}{32} = \frac{80}{64} = 1.25$, mientras que en el problema 3 de los céntimos de euros k es $\frac{8}{2/3} = \frac{12}{1}$.

Hay un segundo tipo de invariabilidad en la que 2 cantidades cambian a la vez, si bien la dirección del cambio no es siempre la misma, como en el problema 2 de los obreros. En esta caso "y es inversamente proporcional a x". Aquí lo que es invariable es el producto de las dos cantidades: el número de obreros por el número de días.

Para que un alumno sea capaz de detectar cuál es la cantidad invariable al cambiar simultáneamente dos cantidades, debe pasar por diversos estadios de desarrollo. Para empezar, los estudiantes no siempre se centran en lo que hay de cuantificable en una situación concreta. Por ejemplo, si en Secundaria se les pregunta a los alumnos *cuando te montas en bicicleta delante de tu casa y bajas la calle, ¿qué cambia?*, nos podemos encontrar con respuestas del tipo: *que los pedales suben y bajan, que pasas árboles, que me alejo del punto del que he salido, que las ruedas de la bici se mueven, que paso delante de la casa de mi amigo o que me canso*. Hay que estimular a los alumnos para que vean más allá de lo obvio, más allá de las observaciones superficiales y encuentren características más significativas y cuantificables como la distancia recorrida, la velocidad de la bicicleta o el peso de los propios pies sobre el suelo. Si de entrada los alumnos no piensan en cantidades, ¿qué sentido tiene hablarles de cómo las cantidades cambian a la vez?

Además hay estudiantes que tienden a asumir que las cantidades que están relacionadas cambian a la vez: es decir, si se incrementa una de ellas, también se incrementa la otra con la que está relacionada. Por ejemplo, en un estudio realizado sobre el sentido de la razón (Lamon, 2007), más del 50% de los estudiantes dijeron que si una orquesta toca una pieza en 15m, dos orquestas tardarán 30m. Incluso algunos alumnos señalaron que 2 orquestas no tardarían más que una sino menos.

Otros alumnos necesitan a menudo "recordatorios" que les retrotraigan a afirmaciones de sentido común que les ayuden a pensar en el modo como las cantidades cambian a la vez. Por ejemplo, si se disminuye el número de personas que realiza una determinada tarea, ¿hará falta más tiempo para completarla?, o si hoy vas en bicicleta a la misma velocidad que ibas ayer pero en una bicicleta más larga, ¿hoy tardarás más?

3.9.7. El salto conceptual de las cantidades discretas a las denominadas intensivas

Siguiendo con los problemas anteriores del detergente y los obreros, ¿por qué las transformaciones consisten en *multiplicar* (o dividir) las dos cantidades por el mismo número entero? Es necesario que el alumno tenga algún grado adicional de madurez matemática para comprender la diferencia entre sumar y multiplicar en contextos en los que se requiere una u otra operación. Precisamente una de las cosas más difíciles de entender para los alumnos es la naturaleza multiplicativa de los números racionales. Así, por ejemplo, los alumnos desconocen que encoger o alargar la imagen de un gato supone mucho más que añadir o quitarle peso al gato. Saber razonar proporcionalmente supone ser capaz de diferenciar las situaciones aditivas de las multiplicativas para aplicar en cada una de ellas la transformación apropiada.

El proceso de sumar se asocia con situaciones que supongan añadir, unir, sustraer, separar o eliminar, acciones que son familiares para los alumnos puesto que ésta es su experiencia con los números enteros. Mientras que el proceso de multiplicar se asocia con situaciones que supongan contraer, alargar, ampliar, duplicar, "exponenciar" o distribuir equitativamente. Utilizar el sentido común o reconocer explícitamente las cantidades implicadas en una situación, como acabamos de ver en el apartado anterior, no es suficiente. Cuando un alumno interactúa con situaciones multiplicativas y analiza las relaciones entre las cantidades, entonces puede llegar a comprender eventualmente por qué las transformaciones aditivas no funcionan. No obstante esto requiere tiempo y experiencia y no se da a menos que el alumno vaya más allá de las dos cantidades involucradas en un problema concreto para construir una tercera cantidad, implícita, derivada de la relación entre las dos cantidades conectadas y cambiantes. En este caso las estructuras multiplicativas combinan dos magnitudes con "distintas etiquetas" para producir una cantidad cuya etiqueta no es ni la una ni la otra.

Esta nueva cantidad permanece constante. Concebir la relación (la razón) entre las dos cantidades como una cantidad es difícil puesto que se trata de un salto de dos cantidades discretas a una nueva cantidad que a veces es "intensiva", es una unidad nueva de medida y que es precisamente una abstracción. Entendemos como cantidades intensivas la velocidad (km por hora), el precio (céntimos por gramo), la pendiente o la densidad (gramos por centímetro cúbico). Esta nueva cantidad necesita ser conceptualizada como una entidad en sí misma, diferenciada de las medidas que la constituyen. Una cantidad intensiva no está explícita en el contexto del problema, tiene un referente diferente a cada una de las dos cantidades que están presentes y además es difícil de representar (Kaput, 1986; Lamon, 2007).

Por ejemplo, *para una fiesta se ha planificado comprar 2 kilogramos de crema de chocolate para 8 personas. Sin embargo resulta que irán 10 personas en vez de 8. Entonces, ¿cuántos kilogramos de crema de chocolate se deberían comprar?* El hecho de que vayan 10 personas supone 2 personas más de las 8 que se suponía de partida. Añadir 2 kilogramos de crema de chocolate para 2 personas implicaría que se necesita un kilo entero por persona, cuando en un principio no se supuso esta cantidad por persona. Por lo tanto, en este caso una transformación aditiva no conserva la razón *kilogramos de crema de chocolate/nº de personas*. Lo que este ejemplo ilustra es que un estudiante no va a ser capaz de analizar una situación de este tipo a menos que "vea" implícitamente en esta situación la tercera cantidad: *kilogramos por persona*.

3.9.8. La invariabilidad de un producto

El tipo de tarea multiplicativa que conlleva la invariabilidad de un producto es mucho más difícil que la proporcionalidad directa simple. El producto de medidas es una estructura consistente en el producto cartesiano de dos espacios de medida que genera un tercer espacio de medida, muy adecuada en problemas de áreas, volúmenes, productos cartesianos, trabajos o múltiples conceptos físicos. Por ejemplo, al multiplicar el nº de personas por el nº de horas que trabajan se obtiene otra cantidad que es el nº de personas por hora; o al multiplicar el área de la base de un prisma recto por su altura, se obtiene una tercera medida, el volumen, que no es ni área ni altura.

Este tipo de tarea es más exigente cognitivamente hablando porque requiere en primer lugar, coordinar como mínimo tres cantidades simultáneamente; en segundo lugar, conocer los principios físicos involucrados; y en tercer lugar, atender a cierta cantidad de información para comprender la situación (Lamon, 2006).

3.9.9. La abstracción: más allá de la observación y de la medida directa

El razonamiento multiplicativo va más allá de las operaciones concretas como la suma y la multiplicación para tener que ver con el razonamiento formal. En esta era digital en la que se encuentran los alumnos, están acostumbrados a recibir un aluvión de datos que entran por los sentidos. Parece como si la comprensión como proceso cognitivo se limitase a la percepción basada en datos. Sin embargo, en el conocimiento lógico-matemático la comprensión consiste en captar las abstracciones que se imponen sobre los datos que entran por los sentidos. La abstracción conlleva la imposición de una estructura relacional, un esquema de clasificación sin tener en cuenta el objeto, el suceso o la imagen en la que se ejemplifica. No es tanto una *per*cepción como una *con*cepción. La construcción y el uso de proporciones como medidas es un ejemplo de ello.

En el ejemplo anterior de la crema de chocolate, las cantidades como el número de personas o el número de kilogramos de crema de chocolate tienen que ver con contar y con pesar, dos acciones con las que gran parte de los alumnos (y el público en general) se encuentran cómodos. Sin embargo, la cantidad "kilogramo por persona", como acabamos de destacar, es a la vez una relación entre las dos cantidades kilogramos y personas y una nueva medida nueva derivada de las otras dos medidas al considerar su razón.

El concepto subyacente en una razón (relación entre 2 cantidades) es fundamental en aritmética (fracciones), en física (tasas), en geometría (transformaciones de semejanzas) y en estadística (probabilidades), por nombrar algunas de sus aplicaciones matemáticas. Asimismo, la densidad, la pendiente o la velocidad, se denominan cantidades intensivas frente a cantidades extensivas como el cardinal, la longitud, el peso o el tiempo. Las cantidades intensivas no se pueden observar ni medir directamente puesto que son relaciones (comparaciones o razones) entre dos cantidades. En resumen, el razonamiento o pensamiento comparativo o relativo, en contraposición al pensamiento absoluto, es necesario para ir más allá de los datos que nos ofrecen nuestros sentidos.

El pensamiento relativo ofrece al alumno la posibilidad de ampliar el campo semántico de adverbios como "más" o atributos como "mayor", que sólo asocia con conceptos aditivos. Muchos estudiantes lo relacionan exclusivamente con la adición y la sustracción, si bien puede tener también un significado proporcional o relativo. Así por ejemplo, ser capaz de ver que 2 chicas representan una proporción mayor de la familia de Darío (la mitad o el 50%) que de la de Rodrigo (2/5 o el 20%), está relacionado con la comprensión de los problemas de porcentajes de incremento/detrimento.

La comprensión de las cantidades intensivas requiere en ocasiones más intuición que experiencia, pero sin conocimiento de las cantidades intensivas no se puede razonar proporcionalmente.

3.9.10. Funcionamiento y aplicación de la regla de tres

Cuando los números que aparecen en un problema no permiten establecer una relación numérica inmediata (como en el caso del problema de la harina y el pan del apartado 3.9.2), y además tienen la dificultad añadida de que son números grandes, se hace necesario el establecimiento de un método que permita calcular la cantidad desconocida independientemente de los números que intervengan.

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{x} \end{array}$$

A partir de la disposición de las cantidades en forma tabular, como se indica en la figura de la derecha, dicho procedimiento consiste en una mecanización del proceso de calcular la razón entre las dos cantidades conocidas que están en la misma columna A y C (o fila, A y B) y multiplicarla por la tercera cantidad (B o C según proceda). De esta manera se va hacia una generalización progresiva de las estrategias de resolución de los problemas de proporcionalidad, esto es, realizar el cociente entre dos números y multiplicarlo por el tercero para obtener el cuarto: $x = \frac{C}{A} \times B = \frac{C \times B}{A}$, buscando la relación por columnas o $x = \frac{B}{A} \times C = \frac{B \times C}{A}$, buscando la relación por filas.

Dicha sofisticación es lo que se conoce como "regla de tres", cuyas instrucciones se representan muchas veces en términos visuales, utilizando la representación rectangular analizada anteriormente. Conviene que el alumno asuma su justificación matemática: se realiza el cociente entre 2 números (C y A; o B y A) y aunque esta relación de proporcionalidad no sea fácil ni pequeña (no sea entera), y se multiplica por B (C respectivamente), al igual que se ha hecho en el primer problema de las bolsas y las manzanas del apartado 3.9.2. Si el alumno no interioriza esta justificación de la regla de tres, la técnica de multiplicar los dos números de la diagonal del rectángulo (C y B) y dividirlo por el otro (A) se convierte en una técnica tipo "truco", simple de aplicar, pero de la cual no se sabe, sobre todo, por qué funciona y no se puede saber exactamente cuándo es posible aplicarla.

Así pues la regla de tres se basa en la representación rectangular de los datos y en la realización de dos pasos automáticos e independientes de los números que aparezcan en el problema. Utilizando la presentación visual del problema en forma tabular, se hace una presentación equivalente del método, basada en la representación visual de los datos:

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & x \end{array}$$

Insistimos que esta presentación de la regla se fundamenta en la representación rectangular y utiliza como regla nemotécnica multiplicar los elementos de la diagonal y dividir el resultado obtenido entre el que queda: $x = \dfrac{B \times C}{A}$. Esta técnica, aunque más sencilla debido a su presentación visual, tiene el problema de que necesita que los datos sean correctamente interpretados en términos de la proporcionalidad y correctamente representados de forma rectangular, para poder aplicar adecuadamente el algoritmo. Así, es necesario que la técnica se trabaje en un contexto de resolución de problemas en el cual se analice previamente la situación que plantea el problema para no utilizar la Regla de tres de forma inadecuada. Este proceso implica que los estudiantes construyan progresivamente un tipo de problemas a los cuales se les puede aplicar la regla de tres, que no es otra cosa que los problemas en los que se da una relación lineal.

Así por ejemplo, en el problema anterior de los kilogramos de harina y pan, el hecho de que los números no sean múltiplos (o divisores) enteros unos de los otros provoca que este problema se resuelva aplicando una estrategia más sofisticada que la del problema de las manzanas y las bolsas. La relación numérica entre 10 y 23 o entre 10 y 13 no es inmediata y, por lo tanto, no está tan claro que el alumno descubra cuál es el número que busca. Además el hecho de no poder realizar los cálculos mentalmente es una dificultad suplementaria para el alumno.

Para ello, el profesor puede guiar al alumno hacia una técnica (la regla de 3) que permita calcular este tipo de relaciones "no evidentes" o "no tan evidentes como las del problema de las manzanas y las bolsas. Dicha técnica consistirá en dividir alguno de los pares de números 10 y 23 (por columnas) o 10 y 13 (por filas) y multiplicar después el resultado obtenido por 13 ó 23 respectivamente.

Sin embargo, en la introducción de la regla de 3 el profesor debería no transmitir implícitamente al alumno el mensaje de que si los números son pequeños o "fáciles", el problema se resuelve multiplicando o dividiendo, al poder encontrar fácilmente la relación de proporcionalidad; mientras que si los números son "complicados" –aunque sean pequeños en magnitud- hay que buscar otro "método" como el de la regla de 3 para resolver el problema. Asimismo debería evitar limitar la proporcionalidad a sólo una relación entre valores de la misma magnitud (hay que dividir dos números, el 10 y el 23) y mencionar que también se puede establecer una relación entre los valores de los dos espacios de medida o las dos magnitudes (dividiendo el 10 y el 13).

3.9.11. La excesiva dependencia de la regla de tres

El hecho de reducir los problemas de proporcionalidad a establecer proporciones en las que falta uno de los valores se relaciona también con un uso excesivo de la regla de tres. Así, el tema de proporcionalidad directa es pensado especialmente como el uso de la regla de tres en problemas de valor-incógnita (Robinson, 1981). Es importante que el alumno no abuse de la regla de tres, como ya hemos remarcado. Hay problemas en los que no es necesario ni siquiera una representación rectangular de los datos.

Cuando un alumno aplica ciegamente una regla o proceso para resolver una cuestión de proporciones como por ejemplo la regla de tres, esto debe dar a entender al profesor que el alumno no sabe qué *no* es proporcionalidad y cuando *no* se aplica, pues una parte de comprender un concepto como el de proporcionalidad significa saber lo que *no* es proporcionalidad.

Creemos que también es interesante promover la frescura del alumno sin obligarlo ni a representar los datos ni a resolver los problemas unívocamente, aunque sí a explicar cómo ha encontrado la solución. Quién no recuerda aquel alumno que contesta espontánea y mentalmente a una pregunta sin hacer ningún cálculo en su cuaderno y al que el profesor le obliga a "resolver" de una determinada manera.

3.9.12. La generalización de la proporcionalidad a contextos en los que no puede aplicarse

Al final de la Educación Primaria y a comienzos de la Educación Secundaria los alumnos no sólo adquieren habilidades para calcular proporciones y resolver problemas proporcionales, sino que el esquema de la proporcionalidad llega a estar tan presente en la mente de los estudiantes de manera que comienzan a transferirlo a contextos y situaciones en lo que no es válido ni importante. La gran aplicabilidad y simplicidad del modelo proporcional y de la regla de tres como modelo de resolución provoca también que los estudiantes tiendan a aplicar la proporcionalidad de forma masiva, sin reflexionar suficientemente si la proporcionalidad puede aplicarse o no en todos los contextos. Así, "el esquema de la proporcionalidad llega a ocupar un lugar prominente en la mente de los estudiantes, por lo que empiezan a transferirlo a situaciones en las que no es ni válido ni relevante" (De Bock, Van Dooren y Verschafel, 2005, p. 99).

3.9.13. La asociación entre problemas de proporcionalidad y problemas de "valor incógnita"

Esto es, problemas en los que se presenta una relación entre magnitudes y después se pide el valor que toma una de ellas para un valor concreto de la otra. El hecho de que los alumnos de Secundaria relacionen los problemas de proporcionalidad con los problemas de valor-incógnita se puede deber a que "la inmensa mayoría de los problemas de proporcionalidad que los estudiantes se encuentran en la escuela están formuladas en formato de valor-incógnita" (De Bock y otros, 2005, p. 98). Además este tipo de relación que el alumno pueda llegar a identificar entre los problemas de proporcionalidad y los problemas de "valor-incógnita" le puede llevar a estereotipar tipos de enunciados con tipos de resoluciones sin analizar si la situación es la adecuada y a utilizar en exceso la proporcionalidad para resolver problemas de valor incógnita (Van Dooren y otros, 2009).

3.9.14. La introducción a la notación algebraica y la duplicación del significado de la x

Cuando el profesor introduce la notación algebraica en la resolución de problemas de proporcionalidad, denominando a la cantidad desconocida "x", esta denominación de la cantidad desconocida como "x", puede provocar en el alumno una duplicación del significado de la "x", puesto que hasta este momento de su escolaridad la letra "x" representa la operación de multiplicar, es el símbolo de la multiplicación. En Primaria los alumnos utilizan la letra *x* como símbolo de multiplicación. Sin embargo es en Secundaria, y más concretamente en el Primer curso de Secundaria y con la introducción de la notación algebraica cuando se empieza a substituir el signo de la multiplicación por el punto. La "x" aparece como la representación de una cantidad desconocida que posteriormente será la base sobre la cual construir el concepto de variable. Queremos remarcar aquí la conveniencia de que esta cantidad desconocida no se denomine unívocamente "x" (aunque este comentario no tenga que ver con las nociones de proporcionalidad), ya que puede comportar dificultades en la asunción de futuras competencias matemáticas por parte del alumno.

3.9.15. La simplificación de la proporcionalidad como una igualdad entre dos razones

La identificación de proporcionalidad con problemas de tipo valor-incógnita genera además que los alumnos asocien la proporcionalidad con el simple establecimiento de una proporción. Este tipo de generalizaciones generan un estancamiento en el pensamiento proporcional de los alumnos, ya que "ser competente en proporcionalidad implica mucho más que reconocer dos razones equivalentes y encontrar el término que falta. Implica reconocer cantidades que se relacionan proporcionalmente y usar números, tablas, gráficos y ecuaciones para analizar las cantidades y sus relaciones" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

3.9.16. Funcionamiento y aplicación de la técnica de reducción a la unidad. La proporcionalidad como función lineal

Como en el caso de la regla de 3, cuando los números que aparecen en un problema no permiten establecer una relación numérica inmediata (como en el caso del problema de la harina y el pan), y además tienen la dificultad añadida de que son números grandes, se hace necesario el establecimiento de un método que permita calcular la cantidad desconocida independientemente de los números que intervengan. La técnica de reducción a la unidad consiste en empezar con el valor unidad de una de las magnitudes, para encontrar el valor que corresponde en la tabla de proporcionalidad multiplicando por la razón de proporcionalidad adecuada. Por ejemplo, en un zumo A se han puesto 2 naranjas por 6 partes de agua, por lo que a una naranja le corresponderán 3 partes de agua. Si en un zumo B se han puesto 10 naranjas, ¿cuántas partes de agua le corresponden? 10·3=30 partes de agua.

3.9.17. La proporcionalidad como función lineal y=kx frente a la función afín y=x+k

Una dificultad y confusión característica en el aprendizaje de la proporcionalidad es la confusión entre relaciones lineales (proporcionales) y relaciones afines. El profesor debería diseñar actividades para responder a este tipo de dificultades.

Las situaciones de proporcionalidad se pueden modelizar matemáticamente mediante una relación funcional del tipo $y=kx$, siendo k un número real (no necesariamente entero o racional), de manera que cada incremento (o detrimento) de x, implica un incremento (o detrimento) k de y. Ahora bien, en el ejemplo de la harina y el pan, se da con frecuencia el hecho de que un alumno conteste que son 26 los kilogramos de pan a los que corresponden 23 kilogramos de harina, estableciendo una relación funcional afín del tipo $y=x+k$, en la que cada incremento de x provoque un incremento de y constante, la cantidad k. La diferencia entre x e y es siempre la misma. Los alumnos utilizan a menudo este tipo de estrategias aditivas donde se tienen que usar comparaciones multiplicativas. Estudios recientes con alumnos de 8 a 11 años muestran cómo se da una evolución desde aplicar estrategias aditivas por todas partes en los primeros años de la educación Primaria, a utilizar estrategias de proporcionalidad en los últimos años, pasando por un estadio intermedio en el que aplican métodos aditivos a problemas de proporcionalidad y estrategias de proporcionalidad a problemas aditivos dependiendo de si los números o razones que aparecen en los problemas son enteras o no (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010).

Posteriormente, la persistencia de este tipo de confusiones en el estudio de relaciones funcionales puede generar que el alumno cometa errores conceptuales diversos, como por ejemplo, pensar que las funciones afines $y=x+k$ pasan por el origen de coordenadas (como las funciones lineales del tipo $y=kx$).

3.9.18. La vinculación de la aritmética y el álgebra

Cabe señalar que las relaciones de proporcionalidad numérica guardan una estrecha relación con la proporcionalidad geométrica y en concreto con la semejanza de figuras. Una adecuada representación de los números que proponen los problemas se podrían representar de forma geométrica y así conectar la idea de proporcionalidad con la semejanza de figuras y en consecuencia con la representación geométrica de los números naturales y su conexión con el paso de la aritmética al álgebra. De hecho, la definición 21 del libro VII de los elementos de Euclides dice: *"números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales"*. Para Euclides, números planos son el resultado de multiplicar dos números naturales y sólidos el resultado de multiplicar tres.

3.9.19. La relación entre cálculo de razones, fracciones y números decimales

Ya hemos destacado la complejidad de las conexiones entre los números racionales, el razonamiento proporcional y muchos otros conceptos matemáticos de naturaleza multiplicativa. Por una parte, para que el alumno comprenda bien los números racionales, el profesor debería haber experimentado en el aula con las cinco interpretaciones principales de la fracción, como *parte-de-un-todo, razón, cociente, operador y medida* (Kieren, 1980). Por otra parte, conviene utilizar materiales que desarrollen las fracciones y las razones simultáneamente a través de aproximaciones centradas en problemas realistas. Una posibilidad es empezar con porcentajes y decimales y utilizar la naturaleza proporcional de los números racionales para ayudar a los alumnos a construir el sentido de los números. También utilizar una interpretación de lo que significa medir usando cantidades continuas y su relación con la división.

Materiales y aproximaciones de este tipo se utilizaron en el estudio longitudinal realizado por Lamon resultando significativos en la medida en que primero, aprovecharon al máximo los conocimientos informales de los alumnos, y segundo, fomentaron desde el principio de la instrucción las estrategias intuitivas y aquellas que pretenden dar sentido, estrategias que van más allá del contenido tradicional de la enseñanza del concepto de fracción (Lamon, 2007).

Hasta aquí hemos expuesto 19 cuestiones importantes relacionadas con la proporcionalidad, incluyendo las principales dificultades que el alumno se puede encontrar con la proporcionalidad y sin olvidar otras dificultades que surgen en los cursos superiores de Secundaria, como la generalización de la linealidad al hacer gráficos. No obstante, no querríamos acabar este apartado sin mencionar otro aspecto importante: la dependencia que tiene el alumno de las representaciones que aparecen en su libro de texto. Muchos estudiantes, al intentar modelizar matemáticamente una situación determinada muestran un exceso de dependencia de las representaciones que aparecen en su libro de texto. La manera de representar la situación ya es un problema específico en sí mismo hasta el punto que si se deja que el alumno trate de resolverlo solo, su rendimiento se reduce. Incluso frente a problemas de proporcionalidad que tengan que ver con el mismo contenido, los estudiantes cambian la operación necesaria para resolverlo en función de los datos numéricos utilizados. Este hecho se denomina la "no conservación de operaciones". Graeber y otros establecieron en 1989 la hipótesis de que las operaciones fundamentales de la aritmética están vinculadas a modelos intuitivos primitivos, implícitos e inconscientes que limitan la capacidad de los estudiantes para predecir cuáles son las operaciones adecuadas que tienen que realizar, hasta el punto de que dichos modelos llevan a que el alumno asuma que la multiplicación "amplifica" y la división "reduce".

3.9.20. El profesor de Matemáticas y la enseñanza de la proporcionalidad

El profesor de Matemáticas a menudo equipara la comprensión de los conceptos de razón y proporción con la capacidad para resolver problemas relacionados con semejanzas, porcentajes, trigonometría, probabilidad, ampliaciones y reducciones de figuras, escalas de planos, etc. También con encontrar fracciones o razones equivalentes o con resolver problemas de valor-incógnita. No obstante, hay que tener presente que sólo enseñando definiciones, algoritmos y aplicaciones de los números racionales no se facilita que el alumno desarrolle el sentido de los números racionales ni la capacidad para razonar de manera proporcional.

Se impone por tanto un nuevo marco de referencia que facilite la comprensión de los números racionales y del razonamiento proporcional, marco que tenga que ver con el conocimiento didáctico del contenido (PCK) introducido por Shulman (1986, 1987). Este PCK es el conocimiento de la materia que todo profesor necesita tener para ser capaz de enseñar una rama particular del contenido y que va más allá del conocimiento del contenido en sí mismo. El PCK de un dominio tan complejo como el de los números racionales no se referiría tanto a los conceptos y a las operaciones dentro de este dominio, como a las estructuras cognitivas centrales, esto es, los conceptos, las formas de pensar y los mecanismos de crecimiento que son fundamentales en gran parte de los tópicos multiplicativos (Lamon, 2007). El profesor necesita conocer a los estudiantes, sus capacidades reales, y además de tener conocimientos de Matemáticas, necesita saber cuáles son los componentes particulares de la comprensión humana que pueden facilitar la construcción del conocimiento del alumno sobre un contenido concreto. Además respecto al PCK, Rowland afirma que es necesario también sacar a la luz los aspectos más invisibles del conocimiento pedagógico del contenido matemático, para que los profesores tomen conciencia de que no todo el conocimiento pedagógico del contenido matemático se puede adquirir como subproducto reflexivo del conocimiento de la materia, o incluso del conocimiento matemático avanzado. Es particularmente interesante el análisis y la reflexión profunda que el profesor realice de los mismos conceptos que enseña y su capacidad para analizar de forma pedagógicamente útil dichos conceptos, los cuales se encuentran de algún modo bajo la conciencia incluso de las personas matemáticamente competentes. Pero en algunos casos se necesita también la investigación observacional particularmente perspicaz con el objetivo de considerar los procesos aisladamente y descomprimirlos, pues son habilidades que los adultos matemáticamente competentes inevitablemente van automatizando y por lo tanto trivializando (Rowland, 2012).

Si en el ámbito de los números racionales, las razones y las proporciones se considera el PCK desde la perspectiva de los conceptos y procesos emergentes, el PCK no tiene por qué aparecer relacionado ni con las definiciones, ni con los problemas que se utilizan en los libros de texto, ni con los problemas y aplicaciones para los que es útil el razonamiento proporcional. Por lo tanto, el profesor, antes de preguntarse qué tipos de problemas quiere que los alumnos sean capaces de resolver en dicho campo, tendría que buscar los procesos cognitivos, los puntos centrales y las grandes ideas que conforman la base del pensamiento y del conocimiento de los números racionales y relacionarlos con los tópicos multiplicativos. Esto es lo que se llama hacer un *análisis conceptual* (Lesh, 1985). Una forma de análisis conceptual consiste en identificar las capacidades cognitivas previas de los estudiantes que subyacen en las ideas sobre los números racionales, es decir, mecanismos útiles como los de *incrementar gradualmente, normar o empaquetar* explicados anteriormente a un desarrollo con posterioridad de procesos más potentes.

Capítulo 4. Marco metodológico

De acuerdo con el objetivo general de nuestra investigación, a saber, analizar la actividad docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria, la investigación que nos ocupa es de tipo cualitativo y se centra en el estudio de casos. Entendemos que la práctica docente debe estudiarse analizando la realidad del aula y los estudios relevantes de los que disponemos sobre esta temática son asimismo cualitativos, como los que ha realizado Rowland (2005 y 2008).

Con este propósito de hacer un análisis cualitativo de la práctica docente se propusieron como datos las clases de proporcionalidad de Sexto curso de Primaria y del Primer curso de Secundaria de varios centros. Se grabaron las clases durante dos cursos sucesivos (2010-2011 y 2011-12) para que los alumnos fueran prácticamente los mismos durante los dos años. Una vez recogidos los datos, se seleccionaron las grabaciones de los centros en función del perfil del profesor y de los objetivos de investigación. Se transcribieron todas las clases de proporcionalidad subdividiéndolas en episodios según el contenido desarrollado.

Para seleccionar cuáles eran los episodios más ricos, complejos e interesantes para el análisis de la práctica docente en el aula, recogimos los contenidos que aparecían en cada episodio y viceversa. Esto nos permitió considerar qué contenidos sobre proporcionalidad se trabajaban en los dos cursos y el grado de profundidad de los mismos. A partir de aquí, constatamos que los episodios que se revelaban más ricos para hacer un análisis de la práctica docente fueron aquellos que abordaban la introducción de la técnica de reducción a la unidad y en los que se introducía el concepto de proporcionalidad, pues en dichos episodios se construía de manera más evidente el concepto de proporcionalidad, se explicaba una técnica como la de reducción a la unidad y se relacionaba la técnica con el concepto.

Una vez centramos el análisis de la actividad docente en el aula en estos episodios, abordamos el primer objetivo, de carácter metodológico, que consiste en elaborar un instrumento para realizar dicho análisis. Para ello construimos una lista de indicadores a partir del marco teórico de referencia y de acuerdo con el modelo de las categorías de Rowland. Esta lista de indicadores ha sido el instrumento que hemos utilizado para hacer el análisis de práctica docente de los profesores.

4.1. Diseño metodológico

En cuanto a la metodología de este estudio, se propuso la observación externa no participativa y la grabación de las clases de Matemáticas de Sexto curso de Primaria que abordasen la temática de la proporcionalidad en dos centros educativos públicos durante el curso 2010-11.

Se propuso su equivalente en las clases de Matemáticas del Primer curso de Secundaria, esto es, observación y grabación, durante el curso 2011-12, de las clases que afrontasen la temática de proporcionalidad en los institutos de Secundaria a los que fueron a parar gran parte de los alumnos de los dos centros educativos de Primaria en los que se habían realizado las observaciones y las grabaciones durante el curso 2010-11.

La observación de las clases tanto de Primaria como de Secundaria fue externa y no participativa, limitándonos a observar de manera natural, ajenos al objeto de la observación y sin aportar otra cosa que nuestra presencia física en el aula. La población la conformaban tanto los alumnos y profesores de Matemáticas de Sexto curso de los dos centros educativos de Primaria, como los alumnos y profesores de Matemáticas de Primer curso de Secundaria de los tres institutos en los que estaban cursando la Secundaria la mayoría de los alumnos de Sexto curso objeto de nuestra observación e investigación.

En cuanto a la temporalización, se observaron y se grabaron todas las clases de Sexto curso de Primaria y de Primer curso de Secundaria que se ocuparon de la temática de proporcionalidad.

De la manera descrita, la investigación quedó contextualizada en alumnos que fueron observados y grabados, en primer lugar, cuando cursaron Sexto curso de Primaria y, en segundo lugar, cuando cursaron el Primer Curso de Secundaria Obligatoria, obteniendo así los datos para nuestra investigación a partir de la grabación en el aula en dos años sucesivos.

La realización de un elevado número de grabaciones de aula fue posible gracias al proyecto de investigación *Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre Primaria y Secundaria*[4] y a un convenio con el

[4] Proyecto financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en la convocatoria de 2009, referencia: edu2009-07298.

Consorci d'Educació de la ciudad de Barcelona. En concreto, se pudieron grabar las clases de Matemáticas de Sexto curso de Primaria de 2 centros y las de Primer curso de Secundaria de 3 centros. Creímos que este era un contexto adecuado para estudiar satisfactoriamente la práctica docente, tanto de los profesores de Primaria, de formación generalista (diplomados en Magisterio), como de Secundaria, de formación especialista (licenciados en Matemáticas), lo cual permite además estudiar la transición de etapa de Primaria a Secundaria.

4.2. Obtención de los datos

Los datos se recogieron durante los cursos 2010-2011 y 2011-12 para que los alumnos fueran los mismos o casi los mismos durante los dos años. En mayo del 2011 se habían grabado las clases de Sexto curso de Primaria en los dos centros públicos convenidos según el proyecto, y en los meses de abril y mayo de 2012, las clases del Primer curso de Secundaria en los tres institutos de Secundaria correspondientes, por lo que en mayo de 2012 contábamos con el 100% de los datos brutos que necesitábamos.

Puesto que nuestro objetivo es hacer un estudio cualitativo a fondo y no cuantitativo, miramos las grabaciones de las clases de los cinco centros educativos que formaban parte del proyecto y decidimos seleccionar dos, las correspondientes a un centro de Primaria y a un instituto de Secundaria. Con esta selección el cuerpo global de datos consiste en un centro de Primaria y un centro de Secundaria, datos suficientes para el propósito de nuestro trabajo.

El criterio para privilegiar un centro de cada curso ha sido que el perfil del profesor y la manera como este abordaba las clases era más interesante en aras a nuestros objetivos de investigación: explicar de qué manera la actuación del profesor modula lo que tiene que ver con la proporcionalidad, esto es, cuáles son los objetivos del profesor para el tema de proporcionalidad y cómo construye el concepto. El hecho de tener grabaciones de aula de cinco centros educativos nos ha permitido poder observar actuaciones docentes diferentes y poder elegir de entre todas las más ricas para el propósito de nuestro estudio.

De la secuencia de clases de proporcionalidad de los dos centros seleccionados, 8 de Sexto curso de Primaria (6º) y 8 del Primer curso de Secundaria (1ESO), hemos trascrito todas las clases y hemos estructurado el conjunto de las mismas en 48 episodios, escogidos atendiendo al contenido sobre proporcionalidad desarrollado. Estos episodios corresponden a la totalidad de las clases de proporcionalidad de ambos centros.

De estos 48 episodios, 15 son de Sexto curso de Primaria y 33 del Primer curso de Secundaria. El criterio para delimitar un episodio ha sido el contenido desarrollado en el mismo, es decir, si hay un cambio de contenido de proporcionalidad, si se trabaja un contenido o un concepto, si se trabajan ejemplos sobre un concepto, si se explica una técnica, si se ponen ejemplos de una técnica o si se relaciona una técnica con un concepto. A partir de aquí hemos denominado cada episodio en función del contenido, ejemplo o técnica sobre proporcionalidad que contiene. En la siguiente tabla 4.1 recogemos los 48 episodios especificando para cada uno de ellos la numeración asignada, el curso al que pertenecen y si corresponden a proporcionalidad directa o inversa.

Nº	**Curso**	**Contenido Episodio**
		Proporcionalidad directa
1	6º	Definición de proporcionalidad
2.1	6º	Magnitudes proporcionales
2.2	6º	Magnitudes no proporcionales
3	6º	Ejemplo magnitudes proporcionales y no proporcionales
4	6º	Ejemplo erróneo magnitudes proporcionales
5	6º	Ejemplo del estadio (alumno)
6	6º	Ejemplo del Camp Nou (alumno)
7	6º	Ejemplo de kilogramos y naranjas (profesor)
8.1	6º	Reducción a la unidad
8.2	6º	Regla de 3
8.3	6º	Problema del reloj
9	6º	Porcentajes-1
10	6º	Porcentajes-2. Diagrama de sectores
11	6º	Porcentajes-3. Cálculo de porcentajes
12	6º	Dudas de un alumno haciendo un problema
13	1ESO	Introducción a la proporcionalidad
14	1ESO	Introducción a la definición de proporcionalidad
15	1ESO	Función de proporcionalidad. Número de vueltas=1,2 veces la gasolina
16	1ESO	Ejemplo de las fotocopias
17	1ESO	Introducción reducción a la unidad y constante de proporcionalidad
18	1ESO	Relación de proporcionalidad directa
19	1ESO	Reformular ejemplo de la fórmula 1
20	1ESO	Reformular ejemplo de cajas y peso

21	1ESO	Reformular ejemplo de copias y coste
22	1ESO	Problema grifo y tiempo
23	1ESO	Problema naranjas y precio y reducción a la 1
24	1ESO	Ejemplo parking y reducción a la 1
25	1ESO	Problema jamón y reducción a la 1
26	1ESO	Problema cadena de montaje
28	1ESO	Problema cadena de montaje-ecuaciones
29	1ESO	Reflexión sobre la regla de 3
30	1ESO	Problema de las ensaimadas
31	1ESO	Problema km y tiempo. Opción 1 tiempo-distancia
32	1ESO	Problema km y tiempo. Opción 2 distancia-tiempo
33	1ESO	Problema queso-aproximaciones y errores
39	1ESO	Teoría de proporcionalidad inversa y directa
40	1ESO	Porcentajes-1. Relación concepto de fracción
41	1ESO	Porcentajes-2. Cálculo de porcentajes
42	1ESO	Porcentajes-3. 2 maneras de calcular un porcentaje
43	1ESO	Porcentajes-4. Dificultad alumno
44	1ESO	Porcentajes-5. Equivalencia de porcentajes
45	1ESO	Porcentajes-6. Problema porcentajes agricultura
Proporcionalidad inversa		
34	1ESO	Proporcionalidad inversa-1. Introducción
35	1ESO	Proporcionalidad inversa-2
36	1ESO	Proporcionalidad inversa-3
37	1ESO	Proporcionalidad inversa-4. Problema caudal del surtidor
38	1ESO	Proporcionalidad inversa-5. Problema velocidad

Tabla 4.1: Denominación de los episodios

4.3. Clasificación de los episodios

Una vez transcritos y nombrados los episodios, decidimos elaborar a partir del marco teórico de referencia un listado de contenidos sobre proporcionalidad que nos permitiera clasificar los episodios desde el punto de vista del contenido matemático de proporcionalidad. Este primer listado que recogemos en la tabla 4.2 estaba formado por 39 contenidos: 25 correspondientes a conceptos y/o procedimientos y 14 correspondientes a representaciones y/o contextos.

Nº	CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS y REPRESENTACIONES
a	Proporcionalidad
a.1	Proporcionalidad directa
a.2	Proporcionalidad inversa
b	Relaciones afines
c	Representaciones de situaciones de proporcionalidad
c.1	Tabular
c.2	Gráfica
c.3	Algebraica
c.4	Homotética
d	Procedimientos
d.1	Informal
d.2	Reducción a la unidad
d.3	Regla de 3
d.4	Incremento gradual aditivo [$f(x+y)=f(x)+f(y)$]
d.5	Incremento gradual multiplicativo [$f(\lambda x)= \lambda f(x)$]
e	Razón de proporcionalidad $k=y/x$
e.1	Razón de proporcionalidad mayor que la unidad
e.1.1	Razón de proporcionalidad entera
e.1.2	Razón de proporcionalidad no entera
e.2	Razón de proporcionalidad menor que la unidad
f	Razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$
f.1	Razón escalar mayor que la unidad
f.1.1	Razón escalar entera
f.1.2	Razón escalar no entera
f.2	Razón escalar menor que la unidad
g	Representaciones de números racionales: fracción, decimal y porcentaje
g.1	Fracción como parte de un todo [3/4 es tomar 3 de las 4 partes en que puede dividirse la unidad]
g.2	Fracción como medida [3/4 es medir 3 unidades de ¼]
g.3	Fracción como operador [3/4 es multiplicar por 3 y dividir el resultado por 4]
g.4	Fracción como cociente [3/4 es lo que recibe cada uno cuando 4 personas se reparten 3 unidades]
g.5	Fracción como razón [3/4 como relación que compara "3 de A con 4 de B"]
	CONTEXTOS
h	Ejemplos
h.1	Ejemplo que introduce un concepto
h.2	Ejemplo que muestra la aplicación de un procedimiento o una técnica
h.3	Ejemplo que muestra distintos procedimientos pero poniendo énfasis en uno de ellos
h.4	Ejemplo que repite un procedimiento o técnica

h.5	Ejemplo que muestra los detalles o peculiaridades
h.6	Ejemplo que muestra un concepto más a fondo
h.7	Contraejemplo

Tabla 4.2: Contenidos

A partir del listado de contenidos de la tabla 4.2, procedimos a realizar un primer análisis de los episodios de Sexto curso de Primaria y de Primer Curso de Secundaria, recogiendo en una tabla los contenidos que aparecen en cada episodio. El objetivo era detectar cuáles eran los episodios más ricos y complejos con respecto al concepto, procedimiento, representación o ejemplo sobre proporcionalidad que se trabajase en el mismo y que pudiesen resultar más interesantes para el análisis de la práctica docente en el aula. Así la siguiente tabla 4.3 denominada de "Episodios-Contenidos" presenta cada episodio con la numeración que le corresponde, el curso a que pertenece, su denominación y los contenidos de la tabla 4.2 que aparecen en dicho episodio.

Nº	**Curso**	**Contenido Episodio**	**Contenidos**
		Proporcionalidad directa	
1	6º	Definición de proporcionalidad	a
2.1	6º	Magnitudes proporcionales	a, a.1, c, c.1, d, d.1, d.2, d.4, d.5, e, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, f.2, h
2.2	6º	Magnitudes no proporcionales	a, c, c.1, h, h.7
3	6º	Ejemplo magnitudes proporcionales y no proporcionales	a, c, c.1, e, e.1, e.1.1, f, f.1, f.1.1
4	6º	Ejemplo erróneo magnitudes proporcionales	a, c, c.1
5	6º	Ejemplo del estadio (alumno)	a, a.1, c, c.1, d, d.5, e, e.1, e.1.1, f, f.1, f.1.1
6	6º	Ejemplo del Camp Nou (alumno)	a, a.1, c, c.1, d, d.4, d.5, e, e.1, f, f.1, f.1.1, h, h.1, h.7
7	6º	Ejemplo de kilogramos y naranjas (profesor)	a, a.1, c, c.1, d, d.2, d.5, e, e.1, e.1.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2, f.2, h
8.1	6º	Reducción a la unidad	a, a.1, c, c.1, d, d.2, e, e.1, e.1.1, f, f.1, f.1.2, h, h.1, h.2, h.4
8.2	6º	Regla de 3	a, a.1, d, d.3, e, e.1, f, f.1, f.1.2, h, h.1, h.2, h.3
8.3	6º	Problema del reloj	a, a.1, c, c.1, d, d.2, d.3, d.5, e, e.1.2, e.2, f, f.1.2, f.2, h, h.4
9	6º	Porcentajes-1	c, g

10	6º	Porcentajes-2. Diagrama de sectores	g, h
11	6º	Porcentajes-3. Cálculo de porcentajes	c, d, d.3, g, g.1, g.2, g.3, h, h.1
12	6º	Dudas de un alumno haciendo un problema	d, d.2, d.3
13	1ESO	Introducción a la proporcionalidad	a, a.1, c, c.1, d, d.4, d.5, e, e.1, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, h, h.1
14	1ESO	Introducción a la definición de proporcionalidad	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.4, d.5, e, e.1, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2
15	1ESO	Función de proporcionalidad. Número de vueltas=1,2 veces la gasolina	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2, h
16	1ESO	Ejemplo de las fotocopias	a, a.1, c, c.1, d, d.2, d.4, d.5, e, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2, f.2, h, h.4
17	1ESO	Introducción reducción a la unidad y constante de proporcionalidad	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, d.4, d.5, e, e.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2, f.2, h, h.1, h.2, h.3, h.4
18	1ESO	Relación de proporcionalidad directa	a, a.1, c, c.3
19	1ESO	Reformular ejemplo de la fórmula 1	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1, e.1.2, f, f.1, f.1.1, h, h.2, h.6
20	1ESO	Reformular ejemplo de cajas y peso	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1.2, e.2, h, h.2, h.6
21	1ESO	Reformular ejemplo de copias y coste	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1.2, e.2, h, h.2, h.6
22	1ESO	Problema grifo y tiempo	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, d.4, d.5, e, e.1, e.1.1, e.2, f, f.1, h, h.2, h.6
23	1ESO	Problema naranjas y precio y reducción a la 1	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1, e.1.1, f, f.1, f.1.2
24	1ESO	Ejemplo parking y reducción a la 1	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2
25	1ESO	Problema jamón y reducción a la 1	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, d.4, e, e.1, e.1.1, e.1.2, e.2, f, f.1.2, f.2
26	1ESO	Problema cadena de montaje	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.1, d.2, d.4, d.5, e, e.1, e.1.1, f, f.1, f.1.1
28	1ESO	Problema cadena de montaje-ecuaciones	a, a.1, c, c.1, c.3, e, e.1, e.1.1, h
29	1ESO	Reflexión sobre la regla de 3	c.3
30	1ESO	Problema de las ensaimadas	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, f.1.2, f.2, h
31	1ESO	Problema km y tiempo. Opción 1 tiempo-distancia	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1, e.1.1, e.1.2, f, f.1, f.1.2, h,
32	1ESO	Problema km y tiempo. Opción 2 distancia-tiempo	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1.2, e.2, f, f.1, f.1.1, h

33	1ESO	Problema queso-aproximaciones y errores	a, a.1, c, c.1, c.3, d, d.2, e, e.1.2, e.2, f, f.1.2, h
39	1ESO	Teoría de proporcionalidad inversa y directa	a, a.1, a.2, c, c.1, c.3, d, d.3
40	1ESO	Porcentajes-1. Relación concepto de fracción	c, g, g.1, g.2, g.3, h, h.1
41	1ESO	Porcentajes-2. Cálculo de porcentajes	g, g.1, g.2, g.3
42	1ESO	Porcentajes-3. 2 maneras de calcular un porcentaje	g, g.1, g.2, g.3
43	1ESO	Porcentajes-4. Dificultad alumno	g, g.1, g.2, g.3
44	1ESO	Porcentajes-5. Equivalencia de porcentajes	g, g.1, g.2, g.3
45	1ESO	Porcentajes-6. Problema porcentajes agricultura	g, g.1, g.2, g.3, h, h.2
Proporcionalidad inversa			
34	1ESO	Proporcionalidad inversa-1. Introducción	a, a.2, c, c.1, c.3, f, f.1.2, f.2, h, h.1
35	1ESO	Proporcionalidad inversa-2	a, a.2, c, c.1, c.3, f, f.1, f.1.2, h, h.2
36	1ESO	Proporcionalidad inversa-3	a, a.2, c, c.1, c.3, f, f.1.2, f.2, h, h.2
37	1ESO	Proporcionalidad inversa-4. Problema caudal del surtidor	a, a.2, c, c.1, c.3, f, f.1, f.1.1, f.1.2, f.2, h, h.2
38	1ESO	Proporcionalidad inversa-5. Problema velocidad	a, a.2, c, c.1, c.3, f, f.1, f.1.1, f.1.2, f.2, h, h.2

Tabla 4.3: Episodios-Contenidos

Esta tabla 4.3 nos permitió ver cuáles eran los episodios más ricos desde el punto de vista de los contenidos que aparecían en cada episodio como ya hemos señalado. En los episodios tanto de Sexto curso de Primaria como del Primer curso de Secundaria que abordaban la introducción al concepto de proporcionalidad y la introducción de la técnica de reducción a la unidad aparecían numerosos contenidos de la tabla 4.2. Decidimos hacer una tabla que recogiese las informaciones de la tabla 4.3 de manera inversa, esto es, listando los contenidos e indicando en qué episodio aparecía cada contenido para detectar si hay contenidos que sólo se trabajaban en uno de los dos cursos, y cuando se trabajaban los mismos contenidos, con qué profundidad. Así la siguiente tabla 4.4 denominada de "Contenidos-Episodios" presenta cada contenido listado en la tabla 4.2 con la numeración que le corresponde, y el episodio donde aparece dicho contenido con el curso al que pertenece.

CONCEPTOS y/o PROCEDIMIENTOS			
Nº	**Contenido**	**Episodio**	
		6º	1ESO
a	Proporcionalidad	1, 2.1, 2.2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.1, 8.2, 8.3	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39
a.1	Proporcionalidad directa	2.1, 5, 6, 7, 8.1, 8.2, 8.3	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 39
a.2	Proporcionalidad inversa		34, 35, 36, 37, 38, 39
b	Relaciones afines		
c	Representaciones	2.1, 2.2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.1, 8.3, 9, 11	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
c.1	Tabular	2.1, 2.2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.1, 8.3, 9, 11	13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39
c.2	Gráfica		
c.3	Algebraica		14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39
c.4	Homotética		
d	Procedimientos	2.1, 5, 6, 7, 8.1, 8.2, 8.3, 11, 12	13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 33, 39
d.1	Sin explicitar	2.1	26
d.2	Reducción a la unidad	2.1, 7, 8.1, 8.3, 12	15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 33

d.3	Regla de 3	8.2, 8.3, 11, 12	39
d.4	Incremento gradual aditivo [$f(x+y)=f(x)+f(y)$]	2.1, 6	13, 14, 16, 17, 22, 25, 26
d.5	Incremento gradual multiplicativo [$f(\lambda x)=\lambda f(x)$]	2.1, 5, 6, 7, 8.3	13, 14, 16, 17, 22, 26
e	Razón de proporcionalidad *k=y/x*	2.1, 3, 5, 6, 7, 8.1, 8.2, 8.3	13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33
e.1	Razón de proporcionalidad mayor que la unidad	3, 5, 6, 7, 8.1, 8.2	13, 14, 15, 19, 22, 23, 25, 26, 28, 31
e.1.1	Razón de proporcionalidad entera	3, 5, 8.1	22, 23, 25, 26, 28, 31
e.1.2	Razón de proporcionalidad no entera	2.1, 7, 8.3	13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 24, 25, 30, 31, 32, 33
e.2	Razón de proporcionalidad menor que la unidad	2.1, 8.3	13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 24, 25, 30, 32, 33
f	Razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	2.1, 3, 5, 6, 7, 8.1, 8.2, 8.3	13, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38
f.1	Razón escalar mayor que la unidad	2.1, 3, 5, 6, 7, 8.1, 8.2	13, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 35, 37, 38
f.1.1	Razón escalar entera	2.1, 3, 5, 6, 7	13, 14, 15, 16, 17, 19, 24, 26, 30, 32, 37, 38
f.1.2	Razón escalar no entera	7, 8.1, 8.2, 8.3	14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38
f.2	Razón escalar menor que la unidad	2.1, 7, 8.3	16, 17, 25, 30, 34, 36, 37, 38
	REPRESENTACIONES y/o CONTEXTOS		
g	Fracción, decimal y porcentaje	9, 10, 11	40, 41, 42, 43, 44, 45
g.1	Fracción como parte de un todo [3/4 es tomar 3 de las 4 partes en que puede dividirse la unidad]	11	40, 41, 42, 43, 44, 45
g.2	Fracción como medida [3/4 es medir 3 unidades de ¼]	11	40, 41, 42, 43, 44, 45

g.3	Fracción como operador [3/4 es multiplicar por 3 y dividir el resultado por 4]	11	40, 41, 42, 43, 44
g.4	Fracción como cociente [3/4 es lo que recibe cada uno cuando 4 personas se reparten 3 unidades]		
g.5	Fracción como razón [3/4 como relación que compara "3 de A con 4 de B"]		
h	Ejemplos	2.1, 2.2, 6, 7, 8.1, 8.2, 8.3, 10, 11	13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 45
h.1	Ejemplo que introduce un concepto	6, 8.1, 8.2, 11	13, 17, 34, 40
h.2	Ejemplo que muestra la aplicación de un procedimiento o una técnica	8.1, 8.2	17, 19, 20, 21, 22, 35, 36, 37, 38, 45
h.3	Ejemplo que muestra distintos procedimientos pero poniendo énfasis en uno de ellos	8.2	17
h.4	Ejemplo que repite un procedimiento o técnica	8.1, 8.3	16, 17
h.5	Ejemplo que muestra los detalles o particularidades		
h.6	Ejemplo que muestra un concepto más a fondo		19, 20, 21, 22
h.7	Contraejemplo	2.2, 6	

Tabla 4.4: Contenidos-Episodios

Si bien todos los episodios son de proporcionalidad, hacer las 2 tablas nos ha servido para hacer una revisión de los mismos y seleccionar aquellos episodios que se revelaban más ricos para hacer un análisis de la práctica docente pues se construyen de manera más evidente los conceptos y las técnicas fundamentales. Nos referimos a los episodios que abordaban la introducción de la técnica de reducción a la unidad y a los episodios donde se introducía el concepto de proporcionalidad.

4.4. Selección de los episodios para el análisis

A la luz de la revisión de los episodios a partir de las tablas 4.3 y 4.4 en las que relacionamos los episodios según los contenidos y viceversa, vimos que para hacer un análisis de la práctica docente no eran necesarios todos los episodios, sino aquellos que además de referirse tanto a conceptos como a técnicas, ofrecían enfoques diferentes por parte del profesor.

Los tres pares de episodios que seleccionamos para analizar y comparar son:

- Los episodios sobre introducción a la proporcionalidad 1 de Sexto curso de Primaria y 13 de Primer curso de Secundaria.
- Los episodios sobre introducción a la proporcionalidad 2.1 de Sexto curso de Primaria y 14 de Primer curso de Secundaria.
- Los episodios sobre reducción a la unidad 8.1 de Sexto curso de Primaria y 17 de Primer curso de Secundaria.

Hemos elegido estos tres pares de episodios porque es donde más claramente se construye el concepto de proporcionalidad, se explica una técnica como la de reducción a la unidad y se relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad.

El hecho de que el análisis de los tres pares de episodios no se presente cronológicamente se debe a que los episodios de introducción a la técnica de reducción a la unidad son más ricos y complejos para analizar la práctica docente en el aula pues en ellos se explica una técnica y se relaciona la técnica con el concepto, el de proporcionalidad.

Comenzamos el análisis por los episodios 8.1 y 17 sobre introducción a la técnica de reducción a la unidad porque vimos enfoques diferentes de los dos profesores. Por su propio contenido y por la riqueza que ofrecen ambos profesores se posibilita la comparación de la práctica docente en el aula. En ambos episodios se trabaja una técnica (la de reducción a la unidad) en relación a un concepto (el de proporcionalidad), se utilizan ejemplos de diferente tipo por lo que respecta a la razón de proporcionalidad entre las dos variables (entera o no, mayor o menor que la unidad) y a la razón escalar entre dos valores de la misma variable (entera o no, mayor o menor que la unidad), se pide completar una tabla de proporcionalidad y se pueden observar momentos del aprendizaje de una alumna concreta que presenta ciertas dificultades con la temática de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria. Por ello creímos conveniente empezar el análisis por estos episodios.

Seguimos el análisis con los episodios sobre introducción a la proporcionalidad que están divididos en dos: 1 y 2.1 de Sexto curso de Primaria, 13 y 14 de Primer Curso de Secundaria. Los hemos cortado porque hay un cambio de contenido: hay una primera parte donde se trabaja el concepto de proporcionalidad y después se ponen ejemplos. Y esto se produce tanto en Sexto curso de Primaria como en el Primer curso de Secundaria.

Estos 6 episodios han constituido el núcleo fundamental de datos para el análisis de la práctica docente de los dos profesores de acuerdo con el modelo que se presenta como el más adecuado para analizar la práctica docente en el aula, el del *Knowledge Quartet* de Rowland (2008). A partir de aquí hemos cogido el episodio 17 sobre introducción a la técnica de reducción a la unidad del Primer curso de Secundaria y hemos construido la lista de indicadores, tal como explicaremos en el siguiente apartado.

4.5. Construcción de la lista de indicadores según el *Knowledge Quartet*

Uno de los objetivos del trabajo, de carácter metodológico, consiste en la construcción de indicadores para el análisis de la práctica del profesorado, de acuerdo con el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland (2008). A partir del análisis de las acciones que hace la profesora del Primer curso de Secundaria en el episodio 17, viendo por ejemplo, lo que sorprende, en positivo, lo que validan las respuestas de los alumnos, construimos una lista de indicadores para la práctica del profesorado a partir del modelo de Rowland. Elegimos el modelo de las cuatro categorías de Rowland (*Fundamento-Transformación-Conexión-Contingencia*) porque es especialmente adecuado para el análisis de la práctica.

En el KQ, Rowland desarrolla un marco conceptual basado en la práctica adecuado para revisar y analizar episodios de clase, centrándose sobre todo en el contenido matemático del episodio y en el papel que desempeñan el *Subject Matter Knowledge* (SMK) y el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) del profesor en prácticas de Primaria (2005). Para Rowland era necesario que dicho marco fuese capaz de "recoger", al igual que una máquina de hacer fotos, las ideas y factores importantes sobre el conocimiento del contenido matemático y concretarlas en un número pequeño de categorías conceptuales (*Fundamento-Transformación-Conexión-Contingencia*). Cada una de estas categorías contiene un conjunto de códigos clave a modo de etiquetas fácilmente recordables.

Nuestro objetivo ha sido aplicar este procedimiento a los contenidos de proporcionalidad y al análisis de la práctica de profesores de Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria.

Para construir la lista definitiva de indicadores que nos sirvieran para analizar cualquier episodio de clase sobre proporcionalidad, en primer lugar elaboramos, a partir del marco teórico de referencia, una lista de contenidos (tabla 5.1) relacionados con el conocimiento del profesorado que concretasen los factores que intervienen en el contenido matemático de proporcionalidad y que nos sirvieran para analizar los episodios de clase referentes a la reducción de la unidad.

Después empezamos a agrupar los indicadores de esta lista en las cuatro categorías de Rowland, esto es, consideramos las categorías de Rowland desde el punto de vista del contenido matemático de proporcionalidad. Además de estas 4, añadimos una quinta categoría *General*, donde listamos una serie de indicadores no dependientes del contenido y que pueden aparecer en cualquier episodio de una clase de Matemáticas, independientemente de la temática.

Como resultado obtuvimos una lista definitiva de 39 indicadores (11 para la categoría de Fundamento, 11 para la de Transformación, 7 para la de Conexión, 4 para la de Contingencia y 6 para la de General). A continuación se explicitan las características más relevantes de cada categoría, cuál es el contenido de cada indicador y la inclusión de cada uno de ellos en una u otra categoría, teniendo en cuenta que dichos indicadores corresponden a la temática de proporcionalidad.

4.5.1. Fundamento

En la categoría de Fundamento se recogen los conceptos principales sobre proporcionalidad y las relaciones entre los mismos.

Tanto para introducir el concepto de proporcionalidad como para profundizar en él los profesores se apoyan en diferentes tipos de ejemplos y problemas.

A partir de la observación y el análisis de distintos episodios donde se trabaja la proporcionalidad, hemos determinado los factores que intervienen en la proporcionalidad, por lo que respecta al conocimiento teórico de la misma, independientemente de que el profesor considere todos estos factores o sólo parte de los mismos.

Los 11 indicadores que consideramos en esta categoría son los que consideramos que corresponden a la dimensión de Fundamento:

1.1. Identificación de las magnitudes
1.2. Asignación de una medida a una magnitud
1.3. Características de las magnitudes (discreta, continua)
1.4. Utilización del incremento gradual aditivo [$f(x+y)=f(x)+f(y)$]
1.5. Utilización del incremento gradual multiplicativo [$f(\lambda x)=\lambda f(x)$]
1.6. Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad
1.7. Trabajo de la relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$.
1.8. Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$ (entera o no, mayor o menor que la unidad).
1.9. Tipo de razón escalar $x_2/x_1= y_2/y_1$ (entera o no, mayor o menor que la unidad)
1.10. Explicitación de la razón dada por el problema ($k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$).
1.11. Explicitación de la constante de proporcionalidad obtenida al hacer la reducción a la unidad para obtener la función de proporcionalidad.

Pasamos a justificar indicador por indicador su inclusión en esta categoría (en todas las categorías agruparemos algunos de los indicadores si lo consideramos conveniente):

- <u>1.1, 1.2 y 1.3. Identificación de las magnitudes, asignación de una medida a una magnitud y características de las magnitudes (discreta, continua)</u>. En cualquier problema de proporcionalidad, es importante identificar en primer lugar las magnitudes que intervienen en el problema y asignar correctamente una medida a una magnitud. Incluimos también que el profesor introduzca contextos donde las magnitudes sean continuas para que el alumno diferencie las magnitudes discretas de las continuas, esto es, que sepa si un determinado problema tiene que ver con magnitudes discretas o continuas (el salto conceptual de las cantidades discretas a las intensivas).

- 1.4 y 1.5. Utilización del incremento gradual aditivo [$f(x+y)=f(x)+f(y)$] e utilización del incremento gradual multiplicativo [$f(\lambda x)=\lambda f(x)$]. Son dos estrategias que el alumno desarrolla en contextos donde se trabaja con magnitudes proporcionales porque pertenecen a los conocimientos previos que los alumnos tienen sobre proporcionalidad. De hecho constituyen las primeras estrategias que el alumno utiliza antes de que asuma incluso qué es la razón de proporcionalidad o estrategias más elaboradas como la de reducción a la unidad.

- 1.6. Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad. La reducción a la unidad es una técnica que sirve para resolver problemas de proporcionalidad en los que se quiere encontrar el valor-incógnita que falta en una proporción en relación a otras tres cantidades. Se puede inicialmente utilizar la reducción a la unidad de una manera implícita, es decir, razonando sin lápiz ni papel, "subiendo" y "bajando" en las razones cuando las relaciones numéricas entre las magnitudes se presentan en términos de múltiplos o de divisores enteros, incluso sin que el profesor aluda a que se está utilizando la técnica de reducción a la unidad o que está explicando un procedimiento. La matización de este indicador como "explicitación del procedimiento de reducción a la unidad" es porque hemos considerado importante que el profesor explique en qué consiste este procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad y por qué es útil reducir a la unidad. El hecho de reducir a la unidad permite que el alumno vaya más allá de las dos magnitudes involucradas en un problema concreto para construir una tercera cantidad, implícita, derivada de la relación entre las dos magnitudes relacionadas: magnitud1/magnitud2 (kilogramos por persona, precio por litro, etc.). Reducir a la unidad también es una manera de hallar la razón de proporcionalidad.

- 1.7. Trabajo de la relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$. La constante *k* juega un papel esencial en la comprensión de la proporcionalidad, si bien es importante entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido: entre pares de valores de las dos variables, la dependiente y la independiente; y entre dos valores de la misma variable. De aquí que hablemos de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ cuando se relacionan las dos magnitudes, o de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ cuando se relacionan dos valores de la misma magnitud.

- 1.8 y 1.9. Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$ (entera o no, mayor o menor que la unidad) y de razón escalar $x_2/x_1= y_2/y_1$ (entera o no, mayor o menor que la unidad). En general, los profesores, en los primeros problemas de proporcionalidad, utilizan razones (bien $k=y/x$, bien $x_2/x_1= y_2/y_1$) enteras "simples", como el doble o el triple, y en el caso de razones no enteras, acostumbran a utilizar la mitad. Con posterioridad y según el caso se consideran razones no enteras, mayores o menores que la unidad. Además del concepto de razón de proporcionalidad entre las magnitudes, consideramos que el hecho de trabajar con razones enteras o no, mayores o menores que la unidad, ayuda a entender qué es la proporcionalidad y a profundizar en este concepto. De aquí que hayamos introducido en la categoría de Fundamento este indicador.

- 1.10. Explicitación de la razón dada por el problema ($k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$). Bajo este epígrafe estamos considerando, en primer lugar, si el profesor expone con claridad cuál es la razón de proporcionalidad entre las dos magnitudes del problema en cuestión; y en segundo lugar, qué tipo de razón, $k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$ es la que aparece.

- 1.11. Explicitación de la constante de proporcionalidad obtenida al hacer la reducción a la unidad para obtener la función de proporcionalidad. La inclusión de este indicador se debe a la insistencia de algunos profesores en que hay un "dato" en cada problema de proporcionalidad que los alumnos deben identificar antes de resolver el problema. Este dato no es más que la constante de proporcionalidad, obtenida al hacer la reducción a la unidad. Ver la razón de proporcionalidad ayuda a entender el procedimiento de reducción a la unidad, para buscar después el modelo de proporcionalidad. Se quiere centrar la atención en buscar la constante de proporcionalidad porque dicha constante es la que determinará la función de proporcionalidad a posteriori.

4.5.2. Transformación

Esta categoría se relaciona con el conocimiento en acción, mostrado tanto en la planificación de lo que se va a enseñar como en el mismo acto de enseñar.

Los conocimientos del contenido de proporcionalidad que el profesor tiene se transforman y se presentan de distintas maneras para ayudar a los alumnos aprenderlos, lo que conlleva la representación de los mismos en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y pruebas.

Es particularmente importante la elección que hacen los profesores de los ejemplos presentados a sus alumnos con el fin de ayudarlos a entender un concepto y también profundizar en el mismo, a adquirir el lenguaje adecuado y para mostrar la validez de procedimientos.

En esta categoría hemos incluido 11 indicadores que son los siguientes:

- 2.1. Explicitación de que se va a enseñar una técnica para aquellos casos en que la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no sea entera
- 2.2. Explicitación que permite diferenciar una técnica de un concepto
- 2.3. Uso de una representación de la situación del problema mediante dibujos o esquemas
- 2.4. Uso de un dibujo o esquema para construir un modelo
- 2.5. Asignación de un valor concreto a la representación en tabla de valores
- 2.6. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de visualización gráfica
- 2.7. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad $k=y/x$
- 2.8. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad utilizando un contexto adecuado
- 2.9. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la razón de proporcionalidad $k=y/x$
- 2.10. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a aplicar la técnica de la reducción a la unidad
- 2.11. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la función lineal $y=kx$

Pasamos a justificar indicador por indicador su inclusión en esta categoría:

- 2.1 y 2.2. Explicitación de que se va a enseñar una técnica para aquellos casos en que la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no sea entera y explicitación que permite diferenciar una técnica de un concepto. Estos dos indicadores se incluyen en la categoría de Transformación puesto que el profesor hace más accesible al alumno un concepto como el de proporcionalidad al concretar alguna técnica para resolver problemas de proporcionalidad, sobre todo si ya no se puede razonar "sin lápiz ni papel", subiendo y bajando en las razones. Introducir una técnica, como podría ser la de reducción a la unidad, le permite al alumno tener un procedimiento general para resolver problemas de proporcionalidad, sobre todo cuando la razón $k=y/x$ no sea entera y sea menor que la unidad.

- 2.3 y 2.4. Uso de una representación de la situación del problema mediante dibujos o esquemas y uso de un dibujo o esquema para construir un modelo. Son recursos que el profesor utiliza para representar visualmente los datos del problema de proporcionalidad y analizar las relaciones entre las magnitudes implicadas. Estos recursos (dibujos, esquemas, representaciones) pueden ayudar a visualizar el modelo subyacente al problema de proporcionalidad, mediante una relación funcional del tipo $y=kx$ entre las dos variables.

- 2.5. Asignación de un valor concreto a la representación en tabla de valores. La representación de los datos en un esquema rectangular permite, en primer lugar, entender la proporcionalidad como una relación que va en los dos sentidos; en segundo lugar, permite descubrir la razón de proporcionalidad $k=y/x$; en tercer lugar, ayuda a aplicar una técnica (como la de reducción a la unidad) y por último, puede también guiar al alumno a la construcción de un modelo como el de función lineal $y=kx$.

- 2.6 y 2.8. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de visualización gráfica y elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad utilizando un contexto adecuado. El hecho de que el profesor elija un tipo u otro de ejemplo para introducir una técnica como la de reducción a la unidad incide en que la visualización gráfica de la situación del problema sea más o menos clara y por tanto ayude al alumno a aplicar la técnica. Sin duda, si el ejemplo está contextualizado en una situación próxima y adecuada al alumno, se facilita la comprensión y la aplicación de la técnica.

- <u>2.7. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad *k=y/x*</u>. Asimismo, elegir un ejemplo introductorio a una técnica como la de reducción a la unidad, con una razón de proporcionalidad entera y mayor que la unidad, ayuda al alumno a entender en qué consiste reducir a la unidad y para qué se aplica. Ahora bien, nos referimos aquí a la elección del ejemplo introductorio, siendo recomendable que el profesor llegue a trabajar también con razones de proporcionalidad *k=y/x* no enteras y menores que la unidad (semejanzas, porcentajes, ampliaciones y reducciones de figuras, escalas de planos, etc.). Se trataría de evitar que la razón de proporcionalidad tenga que ser siempre mayor que 1, puesto que interesa que el alumno aplique la proporcionalidad tanto a contextos matemáticos como a contextos no matemáticos.

- <u>2.9, 2.10 y 2.11. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la razón de proporcionalidad *k=y/x*, a aplicar la técnica de la reducción a la unidad, a descubrir la función lineal *y=kx*</u>. Se trata de analizar en qué medida la elección que el profesor hace de cada ejemplo, con sus representaciones y sus explicaciones, guían al alumno a descubrir la razón de proporcionalidad *k=y/x* (concepto), a aplicar una técnica como la de reducción a la unidad (procedimiento) y a modelizar el ejemplo, descubriendo el modelo escondido en el problema (la función lineal *y=kx*).

4.5.3. Conexión

Esta categoría combina ciertas elecciones y decisiones que se hacen en partes concretas del contenido matemático de proporcionalidad, por lo que respecta a la coherencia de la planificación o de la enseñanza a lo largo de uno o varios episodios. Se trata de un conocimiento en acción.

Establecer conexiones se refiere a las acciones del profesor para relacionar conceptos, o procedimientos, o bien para relacionar conceptos y procedimientos. Por ello esta categoría se podría subdividir en: "establecer conexiones entre conceptos", "establecer conexiones entre procedimientos" y "establecer conexiones entre procedimientos y conceptos".

En esta categoría hemos incluido los 7 indicadores siguientes:

3.1. Relación y comparación de la técnica de reducción a la unidad con otras técnicas como la regla de 3 y la técnica basada en la propiedad fundamental de las proporciones.

3.2. Énfasis en el descubrimiento de un modelo dentro del problema y búsqueda por parte de los alumnos de dicho modelo dentro del problema

3.3. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la técnica de reducción a la unidad

3.4. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$

3.5. Énfasis en la relación entre la técnica de reducción a la unidad y la función lineal $y=kx$

3.6. Visión del horizonte matemático hacia adelante: la proporcionalidad como modelo de función

3.7. Visión del horizonte matemático hacia atrás: modelos aditivos y multiplicativos

Pasamos a justificar indicador por indicador su inclusión en esta categoría:

- <u>3.1. Relación y comparación de la técnica de reducción a la unidad con otras técnicas como la regla de 3 y la técnica basada en la propiedad fundamental de las proporciones</u>. Se trata de analizar si el profesor establece conexiones entre estos tres procedimientos. Por propiedad fundamental de las proporciones nos referimos a que si dos magnitudes x e y son proporcionales, por cada par de valores relacionados se tiene que $x_2/x_1=y_2/y_1$.

- <u>3.2. Énfasis en el descubrimiento de un modelo dentro del problema y búsqueda por parte de los alumnos de dicho modelo dentro del problema</u>. Se trata de analizar si el profesor establece conexiones entre conceptos y procedimientos. En este caso, entre el procedimiento de reducción a la unidad y la búsqueda de un modelo dentro del problema, modelo que no es otro que el de la función lineal $y=kx$. Está clara aquí la conexión entre procedimiento y concepto. Hemos creído importante distinguir entre énfasis y búsqueda, pues nos interesa analizar si aparte de insistir el profesor en la importancia de buscar un modelo, realmente después guía a los alumnos en los episodios de clase a buscar el modelo explícitamente con más ejemplos.

- 3.3. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad *k=y/x* y la técnica de reducción a la unidad. Este indicador es una conexión entre concepto y procedimiento.

- 3.4. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad *k=y/x* y la función lineal *y=kx*. Este indicador es una conexión entre dos conceptos.

- 3.5. Énfasis en la relación entre la técnica de reducción a la unidad y la función lineal *y=kx*. Este indicador es una conexión entre concepto y procedimiento.

- 3.6 y 3.7. Visión del horizonte matemático hacia adelante: la proporcionalidad como modelo de función i visión del horizonte matemático hacia atrás: modelos aditivos y multiplicativos. Consideramos que en un episodio de clase concreto como en el conjunto de todas las clases de proporcionalidad, el hecho de que el profesor tenga visión del horizonte matemático hacia adelante (como por ejemplo, explicar el procedimiento de reducción a la unidad para buscar el modelo escondido que permita ver la función de proporcionalidad *y=kx*) y/o visión del horizonte matemático hacia atrás (como por ejemplo, tener presente la dificultad que tienen los alumnos para considerar que multiplicación y división son inversa una de la otra, que multiplicar por 0,5 es lo mismo que multiplicar por ½ o que dividir por 2) es importante tanto para establecer objetivos concretos para las clases como para explicar un procedimiento o a la hora de anticiparse a las dificultades de los alumnos.

4.5.4. Contingencia

Esta categoría se manifiesta en los acontecimientos de la clase que no han sido planificados previamente por el profesor o que se desvían de la planificación hecha por el profesor para la clase. Es el conocimiento relativo a las decisiones que se toman en la clase, pensando y decidiendo en acción ante situaciones no previstas por el profesor. Se trata por tanto de conocimiento en interacción en el aula, manifestado en la habilidad del profesor para pensar sobre la marcha y responder a las intervenciones de los alumnos durante un episodio de clase. Las posibles actuaciones del profesor cuando se presenta una situación contingente van desde desviarse de lo que tenía programado cuando la contribución inesperada de un alumno pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho alumno y a la mayoría de la clase, o pueda implicar una vía de investigación productiva, hasta la no consideración de la intervención, pasando por diversos caminos intermedios.

Los 4 indicadores que consideramos en esta categoría son:

4.1. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales

4.2. Gestión de intervenciones en las que el alumno generaliza la razón de proporcionalidad $k=y/x$ a partir de un caso concreto

4.3. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$

4.4. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre pares de valores de la misma magnitud

Pasamos a justificar indicador por indicador su inclusión en esta categoría:

- 4.1. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales. Nos referimos en este indicador a la gestión que el profesor hace ante una intervención en la que un alumno sugiere un método no estandarizado para resolver una cuestión de proporcionalidad, como por ejemplo utilizar la propiedad distributiva para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad.

- 4.2. Gestión de intervenciones en las que el alumno generaliza la razón de proporcionalidad $k=y/x$ a partir de un caso concreto. Nos referimos en este indicador a la gestión que el profesor hace ante una intervención en la que un alumno ve la razón de proporcionalidad $k=y/x$ involucrada en el ejemplo concreto que se está trabajando (por ejemplo, k=2), para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad, como la razón que se repetirá siempre en otras situaciones (véase por ejemplo episodio 8.1, capítulo 5).

- 4.3. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$. Nos referimos en este indicador a la gestión que el profesor hace ante una intervención en la que un alumno ve la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$ involucrada en el ejemplo concreto que se está trabajando, en vez de la razón de proporcionalidad $k=y/x$, para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad, porque por ejemplo le resulte más fácil ver que se multiplica por 2 en vez de ver que se divide por 2.

- 4.4. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre pares de valores de la misma magnitud. Nos referimos en este indicador a la gestión que el profesor hace ante una intervención en la que un alumno ve la relación entre pares de valores de la misma magnitud, en vez de ver la razón de proporcionalidad $k=y/x$, para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad.

4.5.5. General

Esta categoría recoge una serie de indicadores que entendemos pueden aparecer en cualquier episodio de clase, pero que no se pueden catalogar dentro de las cuatro categorías de Rowland. Son de carácter más general, no están relacionados directamente con el contenido de proporcionalidad, ni con los procedimientos, ni con las situaciones de contingencia.

La siguiente lista de 6 indicadores recoge los factores que hemos considerado se pueden categorizar en esta dimensión de General:

5.1. Explicitación de los objetivos marcados para la clase
5.2. Claridad en el camino a seguir para llegar al objetivo
5.3. Generación por parte del profesor de una situación de aula interactiva
5.4. Explicitación reiterada de lo que se hace
5.5. Discusión activa del problema en la pizarra, escribiendo explícita y continuamente
5.6. Recapitulación del trabajo de los alumnos en relación con los objetivos de la clase

Pasamos a justificar indicador por indicador su inclusión en esta categoría:

- 5.1 y 5.2. Explicitación de los objetivos marcados para la clase y claridad en el camino a seguir para llegar al objetivo. Nos parece fundamental que los objetivos que el profesor se marca para la clase estén bien explicitados cuando expone a los alumnos lo que pretende hacer. Igualmente cuando explica qué es lo que tiene planificado hacer para llegar al objetivo. Ofrece coherencia, seguridad y genera un contexto que facilita la comprensión de los alumnos.

- 5.3. Generación por parte del profesor de una situación de aula interactiva. Nos referimos aquí a la importancia de que se da interacción en el aula entre el profesor y los alumnos, y que sea el profesor el que fomente esta interacción. A parte de los objetivos que el profesor se haya marcado para la clase relativos a contenidos, entendemos que una situación de aula interactiva puede contribuir más a la asunción de dichos objetivos por parte de los alumnos que una situación de aula donde el alumno resta pasivo. Es una manera más eficiente de que el alumno "construya" los contenidos.

- 5.4. Explicitación reiterada de lo que se hace. El hecho de que el profesor explicite continuamente lo que está haciendo es un recurso pedagógico que facilita a los alumnos la comprensión (de los contenidos, de los procedimientos) y que ayuda al mismo tiempo al profesor a no perder de vista dónde quiere llegar (los objetivos marcados para la clase).

- 5.5. Discusión activa del problema en la pizarra, escribiendo explícita y continuamente. Aunque el profesor genere una situación de aula interactiva, hemos observado episodios de clase donde el profesor mantiene la discusión del problema con los alumnos oralmente, sin utilizar el soporte de la pizarra (u otro soporte escrito) o utilizándolo muy poco. Creemos que el hecho de apoyar las explicaciones y las discusiones en gran grupo escribiendo lo relevante en la pizarra es un recurso visual que ayuda a la comprensión de los alumnos e incluso puede promover su intervención. De aquí la necesidad de incluir un indicador como este para el análisis de un episodio cualquiera de clase.

- 5.6. Recapitulación del trabajo de los alumnos en relación con los objetivos de la clase. Al final del episodio de clase, el hecho de hacer un esfuerzo pedagógico de síntesis del trabajo realizado con los alumnos contribuye, por una parte, a dar a los alumnos un sentido de coherencia de lo que se ha hecho, de lo que se ha aprendido y de dónde se pretendía llegar (objetivos marcados para la clase); y por otra parte, dejar el camino preparado para conectar con la siguiente clase.

Capítulo 5. Análisis de los datos

Empezamos el análisis de los datos reflexionando sobre las acciones del profesor respecto a la temática de proporcionalidad, a partir de la lista de indicadores que elaboramos siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Tim Rowland, en torno a las cinco categorías de *Fundamento*, *Transformación*, *Conexión*, *Contingencia* y *General* (ver capítulo 4, apartado 4.5). Con esta lista de indicadores hemos analizado y comparado, desde el punto de vista del profesor, tres pares de episodios de clase de Sexto curso de Primaria y del Primer curso de Secundaria que abordan la introducción al concepto de proporcionalidad y la técnica de la reducción a la unidad.

Para realizar el análisis, empezamos con los episodios sobre la reducción a la unidad porque entendemos que estos episodios son claves para detectar posibles diferencias en los objetivos de la enseñanza de la proporcionalidad, puesto que, como veremos marcan la diferencia entre una enseñanza centrada en las técnicas para resolver ejercicios y problemas (como la regla de tres), y una enseñanza basada en modelos. Después comparamos los dos pares de episodios que se refieren a la introducción del concepto de proporcionalidad.

Como ya hemos señalado en el capítulo anterior (apartado 4.4), de los episodios etiquetados seleccionamos tres pares de episodios para comparar y analizar. Esta selección se ha realizado en función de cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad, de cómo explica una técnica como la de reducción a la unidad y de cómo relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad. El análisis de los tres pares de episodios no se presenta cronológicamente debido a que los episodios de introducción a la técnica de reducción a la unidad son más ricos y complejos para analizar la práctica docente en el aula, pues en ellos se explica una técnica y se relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad. Por lo tanto, el cuerpo de datos principal para el análisis está constituido por:

- Los episodios sobre reducción a la unidad 8.1 de Sexto curso de Primaria y 17 de Primer curso de Secundaria.
- Los episodios sobre introducción a la proporcionalidad 1 de Sexto curso de Primaria y 13 de Primer curso de Secundaria.
- Los episodios sobre introducción a la proporcionalidad 2.1 de Sexto curso de Primaria y 14 de Primer curso de Secundaria.

Una cuestión importante es ver cómo las actuaciones del profesor pueden influir en el aprendizaje de los alumnos, y en nuestro caso, cómo una determinada manera de explicar la proporcionalidad por parte del profesor puede influir en la manera cómo los alumnos la aprenden. A este respecto, nos planteamos explicar las consecuencias que la construcción del concepto de proporcionalidad, según un modelo u otro del profesor, tiene en el aprendizaje de una alumna concreta. Por lo que en la última parte del análisis vamos a realizar un estudio de caso concreto centrado en una alumna, Ainoa, a partir de sus intervenciones en los episodios de clase correspondientes a la introducción del concepto de proporcionalidad y a la técnica de reducción a la unidad, tanto en Sexto curso de Primaria como en el Primer curso de Secundaria.

De acuerdo con lo anterior, hemos organizado el capítulo en 4 apartados. En el primero, el 5.1, analizamos y comparamos los episodios 17 del Primer curso de Secundaria y 8.1 de Sexto Curso de Primaria. En el segundo, el 5.2, analizamos y comparamos los episodios 13 del Primer curso de Secundaria y 1 de Sexto Curso de Primaria; en el tercero, el 5.3, analizamos y comparamos los episodios 14 del Primer curso de Secundaria y 2.1 de Sexto Curso de Primaria; y en el cuarto, el 5.4, seguimos las intervenciones de una alumna concreta, Ainoa, en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria.

5.1. Análisis y comparación de los episodios 17 del Primer curso de Secundaria y 8.1 de Sexto curso de Primaria sobre la Reducción a la unidad

5.1.1. Episodio 17 del Primer curso de Secundaria

Contextualización del episodio

<u>Contenido</u>: Introducción reducción a la unidad y constante de proporcionalidad
<u>Curso</u>: alumnos de 12-13 años del Primer curso de Secundaria (IES Verdaguer)
<u>Duración</u>: 8:46
<u>Fecha grabación</u>: 12.04.2012

Episodio extraído de la segunda clase de proporcionalidad directa destinada a la Reducción a la unidad, después de haber dedicado la primera clase a: introducir la proporcionalidad (con un ejemplo contextualizado en las carreras de fórmula 1), definir la proporcionalidad, buscar el modelo *y=kx* y hacer un ejemplo sobre fotocopias para aplicar el modelo.

Se corrige en la pizarra el siguiente problema de enunciado que se presenta ya en forma de tabla en la que hay que rellenar lo que falta: *Si 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, ¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos?*

Transcripción del episodio[5]

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:00	Profesora	[Ejercicio 6.2] Era el nº de cajas y después era el tiempo. El nº de cajas estaba medido en unidades y el tiempo estaba medido en kilogramos, entonces los datos que daba el enunciado es que teníamos 4 cajas que hacían 2kg de peso y lo que me pedían era rellenar la tabla [escribe una tabla con las magnitudes, cajas y peso, y situando 4 y 2 por en medio de la tabla].
0:35		Entonces no sé cómo lo habéis ido haciendo vosotros. Supongo que cada uno ha ido llenando la tabla pero yo ahora, si os parece bien, os voy a dar una especie de esquema para este tipo de problemas. Este esquema funciona así: a ver, yo tengo que completar una tabla que pone el 1, el 2, el 3, el 4 y bueno, si a lo mejor me ponen un 8 es fácil, es multiplicar por 2 ¿sí? Si aquí ponemos 8 cajas, pues por dos aquí [a la izquierda] y por 2 aquí [a la derecha, en el peso]. Perfecto.
1:03		Pero claro, si me ponen 27, voy a hacer un poco un esquema donde ir. Entonces yo me sitúo en este dilema. Quiero dejar muy claro que esto es un dato del problema [4 cajas <-> 2kg, escribe "dato" al lado], ¿sí? Pero de este dato vamos a sacar la información realmente relevante. Mirad, pongo un dibujo. Tengo 1 caja, 2 cajas, 3 cajas y 4 cajas y resulta que 4 cajas están valiendo 2kg [dibuja 4 recuadros=2kg]. Entonces la clave para hacer, para rellenar estas tablas de valores, yo creo que le podemos poner una

[5] En adelante, las anotaciones entre corchetes son comentarios propios

    1:52 2:38 3:03		etiqueta a esta estructura [la de tabla]. Esta estructura se llama tabla de valores y pediría que todos, en vuestros deberes, pusieseis la flecha y pusieseis que esto se denomina "tabla de valores". Muy bien, pues para rellenar esta tabla de valores, resulta que la clave, para hacerlo de una manera relativamente rápida yo os lo explico, yo lo haré así, a ver qué os parece. Yo primero, del dato que me dé el problema me hago un dibujo y me pregunto siempre qué relación, qué número, qué medida le corresponde a 1 unidad. A mí me informan sobre 4. A mí me informan que 4 unidades corresponden a 2kg [escribe 4u->2kg]. Perfecto. Esto es de lo que me están informando. Yo os lo he puesto allá en forma de dibujo. Entonces la pregunta, para ser ordenada, que tenemos que responder es cuánto vale 1 unidad [dibuja 1 caja y pone =]. Qué peso le corresponde a 1 unidad [escribe 1u->]. Yo creo que esto, con todo el tema de decimales que hemos hecho, es una cosa inmediata. Entonces 1 unidad, si esto [4 cajas] vale 2, 1 unidad, yo creo que todo el mundo más o menos ha llegado a que valdría 0,5kg [escribe 0,5kg al lado del recuadro que simboliza 1 caja]. Pero cómo puedo llegar a este 0,5kg de una manera sencilla, ¿Laura?
3:13	Laura	La mitad de 2 y la mitad de 1 [se refiere a los kilogramos]
3:16	Profesora	Ok, la mitad de 2 y la mitad de 2 que es ¿Ainoa?
3:21	Ainoa	0,5
3:23	Profesora	Sí 0,5. Pero aquí vas y haces 4 cajas, perdón 2kg
3:31	Ainoa	¡Ah! Yo también lo he hecho así.
3:33	Profesora	2kg que reparto entre 4 cajas, ¿todos lo vemos? 2kg que reparto entre 4 cajas. Si hago 2 entre 4, el resultado es 0,5. ¿Ok todos? [escribe a la altura del 0,5 (=2:4)]. Entonces de esta manera ya hemos rellenado que si tengo 1 caja, 0,5. [Escribe 1 y 0,5]. Y ahora completar la tabla es superfácil. Sigrid, ¡2!
4:03	Sigrid	1
4:06	Profesora	1. Paolo, ¡3!
4:10	Paolo	1,5
4:11	Profesora	Farfan, ¡5! [Va poniendo los datos en la tabla].
4:12	Farfan	2,5
4:16	Profesora	Leo, ¡10!
4:17	Alumnos	No, falta el 6
4:18	Profesora	¡Ah! ¿Falta el 6?

4:20	Alumno	Y el 3
4:23	Profesora	Perdón. Leo, ¡6!
4:24	Leo	3
4:25	Profesora	3, ¿cuál toca ahora?
4:26	Alumnos	10
4:27	Profesora	10. Juanjo, ¡10!
4:30	Juanjo	5
4:31	Profesora	¿5?
4:32	Alumnos	Sí.
4:33	Profesora	Vale. ¿Lo damos como bueno? Luna, ¡20!
4:36	Alumnos	No, 30.
4:36	Luna	15
4:37	Profesora	¡Ah! Falta el 15, es que lo estoy diciendo de memoria y... no sé dónde escribirlo porque necesito aquí... No, vamos a quitar esto. Falta el 15. Venga Luna.
4:51	Luna	7,5
4:52	Profesora	15, 7,5. Estoy totalmente de acuerdo, ¿sí? Dani...
4:57	Dani	El 20
4:58	Profesora	¡20!
5:00	Dani	9
5:00	Juanjo	10
5:01	Alumnos	10
5:03	Profesora	¿Por qué es 10 y no 9 Dani?
5:07	Dani	Porque... sí.
5:08	Profesora	No, no. Los matemáticos de 1ª división como nosotros no decimos porque sí jamás. Tomás, ayúdale.
5:17	Tomás	20 entre 2 es 10
5:20	Juanjo	No. Una cosa...
5:23	Alumnos	¡Yo, yo!
5:26	Ainoa	Gloria, yo tenía un truco
5:27	Profesora	A ver, otro truco. ¡Tomás!
5:29	Tomás V.	Tenemos el resultado del 10, el doble de 10. Si tenemos el resultado de 10 que es 5. El doble de 10 será 10.
5:38	Aimar	No, el doble de 10 es 20.
5:39	Profesora	Lo que dice Tomás no está mal. Tranquilos... Vamos a hablarlo todo. Lo que dice Tomás no está mal. Hombre si este 10 lo he multiplicado por 2, pues este 5 lo multiplicaré por 2. A mí no me parece mal. Esto es una de las cosas que vimos el otro día. Pero Ainoa tiene otra idea quizás.
5:55	Ainoa	Pues si tú te das cuenta, todos los números siempre es la

		mitad del número de cajas. Entonces a 20, si es la mitad, son 10.
6:06	Profesora	Eso es lo que ha hecho Dani, creo recordar. Está bien, es un buen truco ¿sí? Es un buen truco, está bien pero hay otra cosa más allá ahí escondida. Bianca venga.
6:16	Bianca	He cogido con el 15 ¿no? y da 7,5 ¿no?
6:24	Profesora	Sí...
6:25	Bianca	Entonces de 15 a 20 hay 5 ¿no? Entonces lo que pesa el 5 se lo he sumado a lo que pesa el 15...
6:32	Alumno	Y da 10.
6:33	Profesora	Vale, eso también lo vimos en la clase del otro día. Podíamos hacer trocitos e irlos sumando. ¿Alguien más? Aimar
6:40	Aimar	Que como en el 2 da 1kg de peso, pues como es 20, lo multiplicas por 10 por 2 y ya está.
6:46	Profesora	Perfecto. Pero esta es la técnica Tomás Vercoger. Es la técnica 2 por 10, 20; 1 por 10, 10. Es la misma técnica, pero con otros números. Está perfecta. Laura.
6:59	Laura	0,5 por 20
7:01	Profesora	¡Ahora! [Escribe 10=0,5·20]. Todo lo que habéis dicho, todos mis aplausos. Está superbien. La intuición en Matemáticas es genial. Está fenomenal. Todo, pero como dije en la clase de ayer, por alguna razón a mí ahora me interesa que busquemos este modelo [señala 10=0,5·20].
7:30	Alumno	El mínimo por
7:31	Profesora	¿Perdón?
7:32	Alumno	El mínimo por el número que se necesita.
7:35	Profesora	Uno constante [0,5] por el número de cajas. Uno constante. Este es el modelo que por alguna razón a mí me interesa que trabajemos. Pero repito, todo lo que habéis dicho, fenomenal. Todo. Pero ahora vamos a intentar desentrañar dentro de los problemas esta estructura. Y tú dirás, ¿qué estructura Gloria? Esta, mírala. Está en todos los números, 0,5 por 15 [escribe =0,5·15 al lado del 7,5], ¿sí? En todos. Es que... coge el que quieras. No sé. El 3 de Leo. El 3 de Leo es 0,5 por 6 [escribe =0,5·6 al lado del 3]. El 5 que creo que era, ¿de Dani? Bueno, no sé de quién, 0,5 por 10. Todos, todos, coge el número que tú quieras, me da lo mismo. Coge el número que tú quieras [escribe X en la tabla, al final], me da lo mismo [escribe 0,5·X]. Pongas el número que pongas la relación siempre es esa, ¿lo estamos viendo? ¿Sí? Ok. Si todo el mundo lo ha visto, vamos a abrir apuntes.

Tabla 5.1: Transcripción episodio 17

Descripción del episodio

La profesora va a corregir en la pizarra un problema de proporcionalidad directa, presentado ya en forma de tabla, en el que los alumnos deben completar los datos que faltan. Esta tarea se pide a los alumnos después de una primera clase introductoria sobre la proporcionalidad directa.

En relación con la resolución del problema, la profesora tiene claro que su objetivo es explicar la reducción a la unidad, un procedimiento que relativamente rápido permite completar una tabla de valores donde se presentan dos magnitudes proporcionales. Los alumnos ya han resuelto el problema con anterioridad y el objetivo de la profesora es poner en orden lo que han hecho los alumnos para llegar a explicar un modelo, el de la función lineal $y=kx$: "os voy a dar una especie de esquema para este tipo de problemas". La profesora reconduce el problema para: 1) explicar el método, esto es, enseñar una manera de resolver el problema centrado en la reducción a la unidad [0:35-1:52]; 2) resolver un problema para tomar conciencia de que esta técnica de reducción a la unidad permite a su vez trabajar un concepto fundamental, a saber, que la reducción a la unidad es una forma de presentar la constante de proporcionalidad; y 3) enseñar una técnica para cuando no hayan razones $k=y/x$ enteras, lo que le permite trabajar la dificultad que supone para los alumnos tener una constante de proporcionalidad k no entera [1:03], pues entendemos que la técnica de reducción a la unidad cuando k es entera y pequeña, como por ejemplo, 2, 3, 4, 5 o 10, está clara para los alumnos mientras que si k no es entera, como por ejemplo 0.5, no.

La profesora elige un ejemplo introductorio a la reducción a la unidad donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es menor que la unidad: "4 cajas de caramelos pesan 2kg". El ejemplo elegido está contextualizado en un ámbito amable para los alumnos: "si 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, ¿cuánto pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos?

La constante de proporcionalidad $k=y/x$ de este ejemplo introductorio, a deducir del "dato" del problema de que 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, no es entera. La profesora insiste en la explicitación del "dato" del problema, no como un número, sino como una relación relevante: "Quiero dejar muy claro que esto es un dato del problema [4 cajas <-> 2kg, escribe "dato" al lado], ¿sí? Pero de este dato vamos a sacar la información realmente relevante" [1:03].

La profesora insiste en la importancia de identificar las magnitudes implicadas y se asignan a las magnitudes las medidas correspondientes.

La profesora guía al alumno a que busque la técnica de la reducción a la unidad y vea la razón de proporcionalidad $k=y/x$: "Entonces 1 unidad, si esto [4 cajas] vale 2, 1 unidad, yo creo que todo el mundo más o menos ha llegado a que valdría 0,5kg… Pero ¿cómo puedo llegar a este 0,5kg de una manera sencilla?... [2:38]. Asimismo conduce al alumno a que descubra la función lineal $f(x)=0,5x$ como un modelo dentro del problema.

Trabaja asimismo con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ variadas, mayores que la unidad y no enteras pues en el problema se pide cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos.

Utiliza lenguajes de representación pues recurre a una representación gráfica de la situación del problema, cajas y kilogramos, una representación gráfica que permita sacar un modelo a partir de la visualización del "dato/datos" de una manera gráfica.

Otorga un valor concreto a la representación en tabla de valores, pensando en su futura conexión como representación de una función [1:03].

La profesora genera una situación de aula interactiva. Se discute el problema activamente en la pizarra, escribiendo continuamente.

En relación con las situaciones de contingencia, observamos que la profesora recoge las intervenciones de los alumnos en las que para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad, éstos utilizan métodos aritméticos informales, o la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre dos valores de una de las variables, pero sin detenerse demasiado pues ella parece estar esperando una intervención donde salga la función de proporcionalidad. Asimismo la profesora no se hace eco de una intervención en la que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$ para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad.

En cuanto a las intervenciones de los alumnos, la profesora las gestiona de una manera ágil. Las intervenciones de los alumnos que tienen que ver con cómo se puede rellenar la tabla a partir de haber encontrado la k=0,5 son [2:38-3:21]:

- “Si tenemos el resultado de 10 que es 5. El doble de 10 será 10” [5:29];
- “Pues si tú te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas. Entonces a 20, si es la mitad, son 10” [5:55];
- “He cogido con el 15 ¿no? Y da 7,5 ¿no? Entonces de 15 a 20 hay 5 ¿no? Entonces lo que pesa el 5 se lo he sumado a lo que pesa el 15… y da 10” [6:16-6:25],
- “Que como en el 2 da 1kg de peso, pues como es 20, lo multiplicas por 10 por 2 y ya está” [6:40];
- “0,5 por 20” [6:59],

Se observa que la profesora enfatiza la intervención relevante [6:59] y en cambio no considera de la misma manera otras intervenciones como la [5:55] que correspondería al modelo $y = \frac{1}{2} \cdot x$. Entendemos que la profesora está tratando de explicitar la constante *k* más como un número decimal ($y = 0{,}5 \cdot x$) que como una fracción ($y = \frac{1}{2} \cdot x$), sin establecer la equivalencia entre ambos porque no está segura que los alumnos tengan claro que multiplicar por 1/2 sea lo mismo que dividir por 2. En ese momento le interesa que los alumnos vean la *k* y eso que la intervención de la alumna ya está indicando que ve de alguna manera “el modelo” al que la profesora pretende llegar.

Análisis del episodio

Después de la transcripción y de la descripción del episodio 17, pasamos a analizar el episodio a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland, mostrada en el capítulo 4 (apartado 4.5).

	Indicadores	**Evidencia**
	FUNDAMENTO	
1.1	Identificación magnitudes	“Era el nº de cajas y después era el tiempo”.
1.2	Asignación medida-magnitud	“el nº de cajas estaba medido en unidades y el tiempo estaba medido en kilogramos”.
1.3	Características magnitudes	---

1.4	Utilización incremento gradual aditivo	"Vale, eso también lo vimos en la clase del otro día. Podíamos hacer trocitos e irlos sumando" [6:16-6:33]
1.5	Utilización incremento gradual multiplicativo	"Si a lo mejor me ponen un 8 es fácil, es multiplicar por 2 ¿sí? Si aquí ponemos 8 cajas, pues por dos aquí [a la izquierda] y por 2 aquí [a la derecha, en el peso]".
1.6	Explicitación procedimiento reducción a la unidad	"A mí me informan sobre 4. A mí me informan que 4 unidades corresponden a 2kg [escribe 4u->2kg]. Perfecto. Esto es de lo que me están informando. Yo os lo he puesto allá en forma de dibujo. Entonces la pregunta, para ser ordenada, que tenemos que responder es cuánto vale 1 unidad [dibuja 1 caja y pone =]. Qué peso le corresponde a 1 unidad [escribe 1u->]".
1.7	Trabajo de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	"Entonces 1 unidad, si esto [4 cajas] vale 2, 1 unidad, yo creo que todo el mundo más o menos ha llegado a que valdría 0,5kg" [2:38]. "Si aquí ponemos 8 cajas, pues por dos aquí [a la izquierda] y por 2 aquí [a la derecha, en el peso]. Perfecto" [1:03].
1.8	Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$	$k=0,5$ menor que la unidad y no entera "4 cajas de caramelos pesan 2kg". La profesora insiste en el 0,5 más que en el ½. Le interesa que la forma de expresión de la razón de proporcionalidad sea decimal y no en forma de fracción.
1.9	Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Razón mayor que la unidad, menor, entera y no entera: "¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos?".
1.10	Explicitación razón dada en el problema: $k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$	"Entonces 1 unidad, si esto [4 cajas] vale 2, 1 unidad, yo creo que todo el mundo más o menos ha llegado a que valdría 0,5kg" [2:38].
1.11	Explicitación de la constante de	"Quiero dejar muy claro que esto es un

	proporcionalidad (lo que el profesor denomina "dato")	dato del problema [4 cajas <-> 2kg, escribe "dato" al lado], ¿sí? Pero de este dato vamos a sacar la información realmente relevante". Se explicita el "dato" del problema como una relación relevante.
TRANSFORMACIÓN		
2.1	Explicitación enseñar técnica si *k=y/x* no entera	"Pero claro, si me ponen 27, voy a hacer un poco un esquema donde ir".
2.2	Explicitación que diferencia técnica de concepto	---
2.3	Representación situación del problema con dibujos/esquemas	"Mirad, pongo un dibujo. Tengo 1 caja, 2 cajas, 3 cajas y 4 cajas y resulta que 4 cajas están valiendo 2kg [dibuja 4 recuadros=2kg]".
2.4	Uso dibujo/esquema para construir modelo	"Yo primero, del dato que me dé el problema me hago un dibujo y me pregunto siempre qué relación, qué número, qué medida le corresponde a 1 unidad".
2.5	Asignación valor a la representación en la tabla de valores	"Yo creo que le podemos poner una etiqueta a esta estructura [la de tabla]. Esta estructura se llama tabla de valores y pediría que todos, en vuestros deberes, pusieseis la flecha y pusieseis que esto se denomina 'tabla de valores' [1:03].
2.6	Elección ejemplo introductorio nivel visualización gráfica	---
2.7	Elección ejemplo introductorio nivel razón *k=y/x*	"4 cajas de caramelos pesan 2kg".
2.8	Elección ejemplo introductorio con contexto adecuado	"4 cajas de caramelos pesan 2kg".
2.9	Ayuda a descubrir la razón *k=y/x*	"Entonces 1 unidad, si esto [4 cajas] vale 2, 1 unidad, yo creo que todo el mundo más o menos ha llegado a que valdría 0,5kg [escribe 0,5kg al lado del recuadro que simboliza 1 caja]. Pero cómo puedo llegar a este 0,5kg de una manera sencilla, ¿Laura?... La mitad de 2 y la mitad de 1 [se refiere a los kilogramos]".

2.10	Ayuda a aplicar la reducción a la unidad	"2kg que reparto entre 4 cajas. Si hago 2 entre 4, el resultado es 0,5. ¿Ok todos? [Escribe a la altura del 0,5 (=2:4)]… Entonces de esta manera ya hemos rellenado que si tengo 1 caja, 0,5. [Escribe 1 y 0,5]. Y ahora completar la tabla es superfácil".
2.11	Ayuda a descubrir la función lineal $y=kx$	"a mí ahora me interesa que busquemos este modelo [señala 10=0,5·20]… ahora vamos a intentar desentrañar dentro de los problemas esta estructura... Coge el número que tú quieras [escribe X en la tabla, al final], me da lo mismo [escribe 0,5·X]. Pongas el número que pongas la relación siempre es esa".
CONEXIÓN		
3.1	Relación y comparación reducción a la unidad con otras técnicas	---
3.2	Énfasis (profesor) descubrimiento modelo en el problema y búsqueda modelo dentro del problema (alumno)	"A mí ahora me interesa que busquemos este modelo [señala 10=0,5·20]… ahora vamos a intentar desentrañar dentro de los problemas esta estructura". La profesora pone el énfasis en la búsqueda del "modelo" escondido.
3.3	Énfasis relación razón $k=y/x$ y red. a la unidad	[1:52-3:33]
3.4	Énfasis relación razón $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$	"Coge el número que tú quieras [escribe X en la tabla, al final], me da lo mismo [escribe 0,5·X]. Pongas el número que pongas la relación siempre es esa".
3.5	Énfasis relación red. a la unidad y la función lineal $y=kx$	Comienza en 3:33 y llega a 7:35.
3.6	Horizonte matemático adelante	"Coge el número que tú quieras [escribe X en la tabla, al final], me da lo mismo [escribe 0,5·X]. Pongas el número que pongas la relación siempre es esa". Al querer llegar al 0,5x, se prepara para la función de proporcionalidad con razones no

		enteras.
3.7	Horizonte matemático atrás	Se arrastra una dificultad que viene de antes, no considerar que multiplicación y división son inversa una de la otra, cuando la profesora tenía la oportunidad porque hay un alumno que interviene: "todos los números siempre es la mitad del número de cajas" [5:55]. Se evidencia que dicho alumno no tiene claro que multiplicar por 0,5 es lo mismo que multiplicar por ½ o que dividir por 2. Los alumnos tendrían que ver que multiplicar por ½ es lo mismo que dividir por 2.
	CONTINGENCIA	
4.1	Utilización métodos aritméticos informales	[5:29-5:39; 6:25-6:33]
4.2	Generalización razón de proporcionalidad $y=k/x$ a partir de un caso concreto	---
4.3	Utilización razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$	[5:38-5:39]
4.4	Utilización razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	[6:40-6:46]
	GENERAL	
5.1	Claridad en los objetivos	Explicitación de la necesidad del método de reducción a la unidad cuando la constante de proporcionalidad no sea entera. "Os voy a dar una especie de esquema para este tipo de problemas" [0:35]; "voy a hacer un poco de esquema donde ir" [1:03]; "pero hay otra cosa más allá ahí escondida" [6:06]; "ahora me interesa que busquemos este modelo" [7:01] y "este es el modelo que por alguna razón a mí me interesa que trabajemos" [7:35].
5.2	Claridad en el camino a seguir	Reitera los objetivos, la necesidad del método de reducción a la unidad. "Del dato que me dé el problema me hago un dibujo y me pregunto siempre qué relación, qué número, qué medida le

		corresponde a 1 unidad" [1:52]; "y ahora completar la tabla es superfácil" [3:33].
5.3	Generación situación interactiva	Numerosas intervenciones de los alumnos hasta 33.
5.4	Explicitación reiterada de lo que se hace	Reitera los objetivos, la necesidad del método de reducción a la unidad y la búsqueda de un modelo [hasta 7 intervenciones].
5.5	Discusión activa en la pizarra	Constante en todo el episodio
5.6	Recapitulación objetivos	"Este es el modelo que por alguna razón a mí me interesa que trabajemos" [7:35].

Tabla 5.2: Evidencias indicadores episodio 17

5.1.2. Episodio 8.1 de Sexto curso de Primaria

Contextualización del episodio

<u>Contenido</u>: Reducción a la unidad
<u>Curso</u>: alumnos de 11-12 años de Sexto curso de Primaria (CEIP Parc de la Ciutadella)
<u>Duración</u>: 11:37,36
<u>Fecha grabación</u>: 23.05.2011

Episodio extraído de la segunda clase de proporcionalidad directa destinada a la introducción de la reducción a la unidad, después de haber dedicado la primera clase a: definir qué son magnitudes proporcionales y a poner ejemplos tanto de magnitudes proporcionales como no proporcionales.

Se aborda el siguiente problema de enunciado: *Para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones?*

Transcripción del episodio

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:08	Profesor	Vamos a ver un concepto de hacer estos problemas de proporcionalidad, que se llama reducción a la unidad ¿vale? Es muy fácil. Es decir, mirad este problema y lo entenderéis enseguida, ¿de acuerdo? Este concepto de reducción a la unidad lo dijo Bernat el otro día. Él hizo un problema, planteó un problema y dijimos que lo resolvió reduciendo a la unidad y después multiplicando por lo que nos piden, ¿lo recordáis o no? ¿Quieres decir [no se entiende]?
0:43	Alumno	Vale porque tienes que dividir, bueno los números... es que no sé...
0:47	Profesor	¿Recuerdas el problema que dijiste?
0:53	Alumno	Sí,... es que no sé cómo explicarlo. Dividiendo los 2 números por 2...
0:58	Profesor	Mirad, dice, para hacer un sorbete de limón ¿vale?, ¿sabéis qué es un sorbete de limón?, ¿no?
1:03	Alumnos	Sí
1:04	Profesor	Muy bien... se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. [El profesor proyecta el enunciado de un problema con una tabla hecha de 4 filas y 2 columnas donde constan en la primera fila las magnitudes implicadas: limones y cucharadas de azúcar. El trazo que separa las dos casillas de la cuarta fila del resto, las correspondientes a la unidad- es más grueso. Además están ya puestos los datos que da el problema en las casillas de la segunda, 3 y 6, y en las casillas de la tercera y cuarta fila, 5 y 1]. Lo primero que tenemos que hacer a la hora de plantear un problema, ¿qué era?, ¿saber qué?
1:21	Alumnos	Las magnitudes
1:22	Profesor	Las magnitudes. En este caso tenemos limones y...
1:24	Alumno	Cucharadas
1:25	Profesor	... cucharadas de azúcar
1:27	Alumno	Cantidad
1:28	Profesor	¿Vale? Tenemos 3 limones [señala la casilla 21 donde ya está puesto el 3] y 6 cucharadas [señala la casilla 22 donde ya está puesto el 6]. Dice, ¿cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones? [Señala la casilla 31 donde ya está puesto el 5]. ¿Qué pasa en este problema? Que aquí no sabemos, si fueran 6 [limones] sería más fácil, porque

		sabemos que es el... [señala las casillas 21 y 31 de la tabla]
1:47	Alumno	Doble
1:48	Profesor	...doble, si fueran 9 [limones] sería más fácil, porque sabemos que es el...
1:51	Alumno 1	Triple
1:52	Profesor	...triple
1:52	Alumno 2	No tienen relación [3 y 5]
1:53	Profesor	Entonces aquí, entre el 3 y el 5 no vemos, no tenemos la relación [no se entiende bien]. Los problemas anteriores se resolvían porque sabíamos que había aquí el concepto de doble, el concepto de triple... [Vuelve a señalar las casillas 21 y 31 de la tabla], el concepto de mitad y lo sabíais hacer ¿sí o no?, pero ¿qué pasa aquí entre el 3 y el 5?, que no es...
2:08	Alumno	Proporcional
2:10	Profesor	...que no tienen relación ¿vale? no es el doble, ni es la mitad, ni el triple. Porque no sabemos multiplicar aún con las reglas de tres.
2:18	Alumno	Yo sí sé
2:19	Profesor	¿Qué pasa? Que Bernat dijo: una forma de resolver estos problemas es reducir a la unidad [señala la casilla 41 donde ya aparece puesto el 1]. Es decir, saber con 1 limón cuántas cucharadas de azúcar ponemos. Si sabemos con 1 limón cuántas cucharadas de azúcar ponemos, 5, ¿qué tendremos que hacer?, ¿multiplicar por cuánto?
2:40	Alumno	5
2:41 3:07	Profesor	Por 5, ¿sí o no?, ¿lo estáis entendiendo? […] Entonces lo vuelvo a repetir para los que no lo habéis entendido, escuchad: el 3 y el 5 aquí no es el doble, ni el triple, ni la mitad, no podemos…
3:11	Alumno	No son proporcionales
3:14	Profesor	Por proporcionales se entienden magnitudes ¿vale? [Y señala las casillas 11 y 12 donde están escritas las unidades, kg y euros], estos números… nosotros resolvíamos estos problemas de proporcionalidad porque era el doble, el triple o la mitad, ¿vale? y multiplicábamos por el doble o por el triple. Ahora qué pasa, que entre el 3 y el 5 no hay relación.
3:29	Alumno	Habría que sacar decimales ahí [no se entiende bien]
3:34	Profesor	No, números decimales, no. Entre el 3 y el 5, el 3 no es el doble del 5, a que no; el 5 no es triple del 3; ni el 3 es la mitad del 5, a que no. Entonces, ¿cómo lo calculamos? reduciendo… cómo no sabemos hacer esta regla de 3 porque aún no la hemos estudiado [señala las casillas 21, 22, 23 y 24

		con los datos respectivos, 3, 6 y 5], reducimos a la unidad, es decir, en lugar de averiguar 5 cucharadas que es lo que pide el problema…
4:03	Alumno	3 por 5 entonces se tiene que hacer
4:06	Profesor	Un momento… en lugar de saber las 5 cucharadas, vamos a saber lo que vale 1 que es fácil ¿no?, en 1 limón cuántas cucharadas ponemos y una vez sabemos en 1 limón cuántas cucharadas ponemos para hacer un sorbete, 5 es más fácil ¿no?, multiplicaríamos por…
4:23	Alumno	5
4:24 4:33	Profesor	…por 5 el resultado ¿sí o no? ¿Lo entendéis o no? Es decir, el lugar de comenzar por 5, reducimos a la unidad ¿vale? A ver Iván, explícalo tú ahora
4:35	Alumno	Se tiene que dividir, se tiene que dividir en este número…
4:40	Profesor	¿Cómo podemos averiguar en 1 limón cuántas cucharadas de azúcar tenemos? si en 3 tenemos 6, en 1 ¿qué es?, ¿el 3 y el 1 tienen relación?
4:50	Alumno	No
4:51	Profesor	¿Cómo que no?
4:56	Alumno 1	Que son impares
4:57	Alumno 2	Es 1/3
5:02	Profesor	En 3 limones, tengo que tirar 6 cucharadas. En 1, ¿cuántas necesitaré?
5:10	Alumnos	2
5:11	Profesor	2, ¿qué habéis hecho?
5:12	Alumno	6 entre 3 que da 2
5:14	Profesor	¿Sí o no?
5:15	Alumno	Y después 5 son 10
5:16	Profesor	¿Tú qué has hecho?
5:17	Alumno	Porque si 6, la mitad de 6 es 3, pues 1 es 2
5:22	Profesor	También, ¿sí o no? Porque todos sabemos esta relación [señala el 3 y el 1]… Lo volvemos a decir… ¿quieres salir aquí [a la pizarra]? ¡Venga!
5:41	Alumno	Hay 3 limones y…
5:43	Profesor	Muy bien… y necesitamos
5:45	Alumno	…y necesitamos 6 cucharadas de azúcar y ahora nos pregunta con 5 limones, cuántas cucharadas necesitas. Entonces como no tienen relación [señala el 3 y el 5]…
5:56	Profesor	Porque no son el doble ni… ¿ves cómo lo sabes tú?

		[dirigiéndose a un alumno que no lo había entendido, que no es la alumna de la pizarra]
6:06	Alumno	…dividimos esto [el 6] entre el 3 para saber cuántas cucharadas de azúcar necesitamos con 1 limón
6:14	Profesor	¿Sí Iván?
6:18	Alumno	Y da 2. Dijimos que habían 2 cucharadas de azúcar para 1 limón
6:19	Profesor	Muy bien. A ver Iván qué es lo que ha hecho
6:23	Iván	Yo había conseguido hacer el 1 pero dividiendo 3 entre 3 que da 1 o sea 6 y después entre 3 que da 2
6:36	Profesor	O como ella ha dicho: como para 3 limones habían 3 cucharadas ¿no?, para 1, como es el doble ¿no? [Señala el 3 y el 6], ¿6 no es el doble de 3?, ¿el doble de 1 cuál es?
6:44	Alumno	2
6:45	Profesor	2. ¿Sí o no? ¿Lo entendéis o no? Si para este [3] necesitamos 6 que es el doble, para 1 necesitaremos… 2. Y para 5, ¿cuántas necesitaremos?
6:57	Alumno	10
6:58	Profesor	10
7:04	Alumno	Pero podemos hacer que… [Sale otra alumna a la pizarra], por ejemplo: si 6 cucharadas son por 3 limones ¿no?
7:20	Profesor	No, tú para 3 limones, son 6 cucharadas
7:23	Alumno	Pues aquí hay 5, pero 3 más 2 son 5, pero 3 más 3 son 6, entonces 6 más 6 son 12, le quitas 2 y te dan 10.
7:38	Profesor	Un poco complicado este…
7:39	Alumno	Ah pero es fácil
7:41	Profesor	También, tal como lo has hecho está bien… pero vamos a intentar hacer el concepto de proporcionalidad, porque es fácil. Siempre que tengamos dos números [señala el 3 y el 5] que no tengan relación, ni el doble ni la mitad ni el triple, reducimos a la unidad. Imagínate que te preguntan aquí el 7, y el 3 y el 7 tampoco tienen relación, reducimos a la unidad. Reducimos a la unidad y sabemos que si de 3 es 6, de 1 es el 2 ¿no? ¿Qué pasa? Ya tenemos el 2. Ya sabemos que con 1 limón son 2 cucharadas de azúcar…
8:13	Ainoa	No lo entiendo
8:15	Profesor	En 5 necesitaremos el doble, que son…
8:16	Alumno 1	10
8:17	Profesor	10 o la unidad…
8:19	Alumno 2	Ah, o sea siempre es el doble, siempre es el doble
8:20	Profesor	Siempre es el doble no. En este caso sí. En este caso sí. Te lo

		dice el ejemplo [señala varias veces el 3 y el 6]. Imagínate que aquí [casilla 22 donde está el 6] hubiera un 9. Aquí [casilla 42] habría un…
8:29	Alumno	3
8:30	Profesor	3, el triple
8:31	Alumno	Ah, la unidad siempre es el número por el que se multiplica.
8:34	Profesor	Claro ¿vale? Entonces aquí [casilla 32] el doble de 5 es 10, o como ya tenemos la unidad, 2 por 5 que es la unidad, ¿cuánto hacen?
8:44	Alumno	10
8:45	Profesor	10, ¿vale o no? Este concepto, ¿lo tenéis claro? de reducir a la unidad. Es muy fácil ¿no? Siempre que tengamos un problema de estos, y dicen que no tienen relación, no es el doble, ni la mitad, ni el triple, voy a reducir a la unidad. Imaginad que aquí… ahora haré 2 problemas de reducir a la unidad
9:08	Ainoa	No lo entiendo aún
9:10	Alumno	Cuando reducimos a la unidad ¿siempre es el doble?
9:12	Profesor	No, puede ser el triple o puede ser la mitad.
9:14	Alumno	Pero quiero decir…
9:19	Profesor	Ahora veremos otro ejemplo ¿vale?
9:21	Ainoa	No entiendo este
9:24	Profesor	Este no lo entiendes, ¿qué no entiendes?
9:25	Ainoa	No. ¿Por qué ponemos un 2?
9:27	Profesor	Mira Ainoa, entre el 3 y el 6 ¿hay relación?
9:28	Alumno	3 por 2, 6 ¿no?
9:31	Ainoa	Sí
9:30	Profesor	¿Qué? Entre el 3 y el 6 ¿qué es?
9:32	Ainoa	El doble
9:33	Profesor	El doble. Pues si para 3 necesitamos 6 cucharadas, para 1, ¿no necesitaremos también el doble?
9:42	Alumno 1	O puedes dividir 3 entre 6
9:43	Profesor	¿Proporcional no?
9:44	Alumno 2	6 entre 3
9:45	Profesor	¿Son proporcionales estas magnitudes?
9:46	Alumno	Sí
9:47	Profesor	Sí ¿no? Para 1… si para 3 necesitas el doble de cucharadas que son 6, para 1 limón ¿cuántas cucharadas necesitarás? El doble, el doble de 1 ¿cuál es?
9:57	Ainoa	2

9:58	Profesor	2, ¿sí o no?, ¿no lo entiendes? Pero ¿qué no entiendes? Si no me dices qué no entiendes… no decir no lo entiendo y ya está…
10:06	Ainoa	¿Por qué ponemos un 2?
10:08	Alumno 1	Porque es el doble
10:09	Alumno 2	Porque si tu divides 6 por 3 te da 2, entonces ese 2 lo pones en la unidad, porque lo has dividido y 1 son 2 cucharadas, porque lo has dividido
10:23	Profesor	Se puede explicar de muchas formas. A ver Ainoa, escucha, aquí tú tienes el problema, el problema no te lo inventas tú, esto no lo tienes que saber porque el problema te da los datos ¿sí o no? Te dice que para hacer un sorbete de limón necesitas 3 limones y 6 cucharadas de azúcar ¿sí o no? Si tú lo quieres hacer con 1 limón, ¿cuántas cucharadas de azúcar necesitarás?, ¿6 también? No porque tienes menos limones ¿no? ¿Aquí no es el doble?, ¿no necesitas para 3 limones el doble de cucharadas?, pues para 1 limón necesitarás también el doble de cucharadas, ¿cuántas?
11:08	Ainoa	2
11:09	Profesor	2. El doble de cucharadas
11:11	Ainoa	Ah vale
11:12	Profesor	Y para 5 limones necesitarás el doble de cucharadas, ¿son?
11:16	Ainoa	10
11:17	Alumno	Siempre necesitas el doble del número que tienes
11:18	Profesor	Aquí sí […]
11:21	Ainoa	A mí eso de dividir no…
11:23	Alumno 2	A mí tampoco, yo lo hago multiplicando
11:27	Profesor	Lo de dividir y multiplicar viene de la regla de 3. Este problema se puede solucionar de esta forma, reduciendo a la unidad o con un regla de 3, que es lo que vamos a ver ahora.

Tabla 5.3: Transcripción episodio 8.1

Descripción del episodio

El profesor propone resolver en la pizarra un problema de proporcionalidad directa, presentado ya en forma de tabla. El problema es el siguiente: *Para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones?* Esta tarea se pide a los alumnos después de una primera clase introductoria sobre la proporcionalidad directa.

En relación con la resolución del problema, el profesor tiene claro que su objetivo es explicar una técnica, la de la reducción a la unidad. Alude a que es fácil porque en cierta manera ya lo han visto en la clase anterior mediante un ejemplo. Los alumnos ya lo han hecho sin saberlo, sin etiquetar el procedimiento como de reducción a la unidad [0:08]. Su objetivo es: 1) explicar el método, esto es, enseñar una manera de resolver el problema centrado en la reducción a la unidad; y 2) enseñar a los alumnos una técnica para cuando no hayan razones enteras $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre dos valores de la una de las variables (más que razones no enteras $k=y/x$ para cada par de valores de las dos variables relacionadas), lo que le permite trabajar la dificultad que supone para los alumnos tener una razón escalar no entera. Para ello insiste a lo largo del episodio en la importancia de este método de reducción de la unidad cuando no se ve clara la relación entre las magnitudes implicadas en los datos del problema [1:28 a 1:53; 3:14; 7:41]. El mensaje es: si se ve clara la relación (doble, triple o mitad) hay que utilizarla directamente; y si no, se requieren métodos más complejos, como por ejemplo el de reducción a la unidad.

Elige un ejemplo introductorio a la reducción a la unidad sencillo, puesto que la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es 2, razón mayor que la unidad y entera: "Para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar". El ejemplo elegido está contextualizado en un ámbito amable para los alumnos.

Explicita el "dato" del problema, como un número, importante para poder resolver el problema: "el problema te da los datos… Te dice que para hacer un sorbete de limón necesitas 3 limones y 6 cucharadas de azúcar" [10:23].

Insiste en la importancia de identificar las magnitudes implicadas y se observa en las intervenciones del profesor cierta confusión entre la idea de magnitud y la de medida [1:22 a 1:27].

Conduce a que el alumno vea la razón de proporcionalidad $k=y/x$ "¿Cómo podemos *averiguar* en 1 limón cuántas cucharadas de azúcar tenemos? si en 3 tenemos 6, en 1 ¿qué es?, ¿el 3 y el 1 tienen relación? [4:40]... En 3 limones, tengo que tirar 6 cucharadas. En 1, ¿cuántas necesitaré?... 2, ¿qué habéis hecho?... 6 entre 3 que da 2 [5:02 a 5:12]".

Guía al alumno a que busque la técnica de la reducción a la unidad y vea la razón de proporcionalidad $k=y/x$: "Si para este [3] necesitamos 6 que es el doble, para 1 necesitaremos… 2. Y para 5, ¿cuántas necesitaremos?... 10 [6:45]".

Trabaja asimismo con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ variadas, mayores que la unidad y no enteras pues en el problema se pide cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones.

El profesor utiliza lenguajes de representación pues proyecta el enunciado del problema con una tabla hecha de 4 filas y 2 columnas donde constan en la primera fila las magnitudes implicadas: limones y cucharadas de azúcar. El trazo que separa las dos casillas de la cuarta fila del resto, las correspondientes a la unidad, es más grueso. Además están ya puestos los datos que da el problema en las casillas de la segunda, 3 y 6, y en las casillas de la tercera y cuarta fila, 5 y 1.

El profesor genera una situación de aula interactiva. Se discute el problema activamente en la pizarra, eso sí, verbalmente, sin escribir explícita y continuamente.

En relación con las situaciones de contingencia, observamos que el profesor recoge las intervenciones de los alumnos en las que para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad, éstos utilizan métodos aritméticos informales, la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$ o la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ pero sin detenerse demasiado. A la situación en la que una alumna generaliza la razón de proporcionalidad $y=k/x$ a k=2, a partir del caso concreto del problema del episodio, el profesor interviene para sacar a la alumna de su error y volverle a explicar lo que no ha entendido.

En cuanto a las intervenciones de los alumnos, el profesor reconoce y pone de manifiesto algunas aportaciones valiosas de los alumnos, como por ejemplo "no tienen relación [3 y 5]" [1:52]. Esta intervención le interesa al profesor pues muestra que la razón escalar x_2/x_1 "número de limones" puede no ser entera y por tanto la necesidad de un método para resolver el problema en estos casos. Sin embargo, no todas las intervenciones relevantes de los alumnos son atendidas. En este sentido, un ejemplo de intervención de los alumnos desatendida es "pues aquí hay 5, pero 3 más 2 son 5, pero 3 más 3 son 6, entonces 6 más 6 son 12, le quitas

2 y te dan 10” [7:23]. El alumno está aplicando el incremento gradual aditivo para llegar a la solución y el profesor, con su respuesta [7:38-7:41] muestra que este no es el camino que está interesado en seguir, que no le interesa que se resuelva el problema de esta manera.

Análisis del episodio

Después de la transcripción y de la descripción del episodio 8.1, pasamos a analizar el episodio a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland, mostrada en el capítulo 4 (apartado 4.5).

	Indicadores	**Evidencia**
	FUNDAMENTO	
1.1	Identificación magnitudes	“Lo primero que tenemos que hacer a la hora de plantear un problema, ¿qué era?, ¿saber qué?... Las magnitudes”.
1.2	Asignación medida-magnitud	“En este caso tenemos limones y... cucharadas de azúcar”. Se puede observar cierta confusión entre la ideas de magnitud y medida.
1.3	Características magnitudes	---
1.4	Utilización incremento gradual aditivo	---
1.5	Utilización incremento gradual multiplicativo	“Si sabemos con 1 limón cuántas cucharadas de azúcar ponemos, 5, ¿qué tendremos que hacer?, ¿multiplicar por cuánto?... Por 5”.
1.6	Explicitación procedimiento reducción a la unidad	“Una forma de resolver estos problemas es reducir a la unidad [señala la casilla fila 4-columna 1 donde ya aparece puesto el 1]. Es decir, saber con 1 limón cuántas cucharadas de azúcar ponemos. Si sabemos con 1 limón cuántas cucharadas de azúcar ponemos, 5, ¿qué tendremos que hacer?, ¿multiplicar por cuánto?”.
1.7	Trabajo de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón	“Reducimos a la unidad y sabemos que si de 3 es 6, de 1 es 2 ¿no? ¿Qué

	escalar $x_2/x_1= y_2/y_1$	pasa? Ya tenemos el 2. Ya sabemos que con 1 limón son 2 cucharadas de azúcar… en 5 necesitaremos el doble que son… 10" [7:41-8:17].
1.8	Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$	Razón de proporcionalidad $k=y/x$ mayor que la unidad y entera: "Para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar".
1.9	Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Razón mayor que la unidad y no entera: ¿Cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones?".
1.10	Explicitación razón dada en el problema: $k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$	"Ya sabemos que con 1 limón son 2 cucharadas de azúcar".
1.11	Explicitación de la constante de proporcionalidad (lo que el profesor denomina "dato")	"El problema no te lo inventas tú, esto lo tienes que saber porque el problema te da los datos ¿sí o no? Te dice que para hacer un sorbete de limón necesitas 3 limones y 6 cucharadas de azúcar" [10:23].
	TRANSFORMACIÓN	
2.1	Explicitación enseñar técnica si $k=y/x$ no entera	"Los problemas anteriores se resolvían porque sabíamos que había aquí el concepto de doble, el concepto de triple... [Vuelve a señalar las casillas 21 y 31 de la tabla], el concepto de mitad y lo sabíais hacer ¿sí o no?, pero ¿qué pasa aquí entre el 3 y el 5?, que no es… proporcional... que no tienen relación ¿vale? no es el doble, ni es la mitad, ni el triple. Porque no sabemos multiplicar aún con las reglas de tres… ¿Qué pasa? Que Bernat dijo: una forma de resolver estos problemas es reducir a la unidad".
2.2	Explicitación que diferencia técnica de concepto	---
2.3	Representación situación del problema con dibujos/esquemas	---
2.4	Uso dibujo/esquema para construir modelo	---
2.5	Asignación valor a la representación	Tabla hecha de 4 filas y 2 columnas

	en la tabla de valores	donde constan en la primera fila las magnitudes implicadas: limones y cucharadas de azúcar. El trazo que separa las dos casillas de la cuarta fila del resto, las correspondientes a la unidad- es más grueso. Además están ya puestos los datos que da el problema en las casillas de la segunda, 3 y 6, y en las casillas de la tercera y cuarta fila, 5 y 1.
2.6	Elección ejemplo introductorio nivel visualización gráfica	---
2.7	Elección ejemplo introductorio nivel razón *k=y/x*	"Para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar".
2.8	Elección ejemplo introductorio con contexto adecuado	"Para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar".
2.9	Ayuda a descubrir la razón *k=y/x*	"¿Cómo podemos averiguar en 1 limón cuántas cucharadas de azúcar tenemos? si en 3 tenemos 6, en 1 ¿qué es?, ¿el 3 y el 1 tienen relación?... En 3 limones, tengo que tirar 6 cucharadas. En 1, ¿cuántas necesitaré?... 2, ¿qué habéis hecho?... 6 entre 3 que da 2 [respuesta del alumno]".
2.10	Ayuda a aplicar la reducción a la unidad	"Si para este [3] necesitamos 6 que es el doble, para 1 necesitaremos… 2. Y para 5, ¿cuántas necesitaremos?... 10".
2.11	Ayuda a descubrir la función lineal *y=kx*	---
CONEXIÓN		
3.1	Relación y comparación reducción a la unidad con otras técnicas	Sólo se menciona la relación con otras técnicas: "lo de dividir y multiplicar viene de la regla de 3. Este problema se puede solucionar de esta forma, reduciendo a la unidad o con una regla de 3, que es lo que vamos a ver ahora" [11:27].
3.2	Énfasis (profesor) descubrimiento modelo en el problema y búsqueda	---

	modelo dentro del problema (alumno)	
3.3	Énfasis relación razón $k=y/x$ y red. a la unidad	---
3.4	Énfasis relación razón $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$	---
3.5	Énfasis relación red. a la unidad y la función lineal $y=kx$	---
3.6	Horizonte matemático adelante	---
3.7	Horizonte matemático atrás	---
	CONTINGENCIA	
4.1	Utilización métodos aritméticos informales	[7:23-7:41]
4.2	Generalización razón de proporcionalidad $y=k/x$ a partir de un caso concreto	[8:19-8:20; 9:10-9:12; 11:17-11:18]
4.3	Utilización razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$	[10:09-10:23]
4.4	Utilización razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	[6:23-6:36]
	GENERAL	
5.1	Claridad en los objetivos	Explicitación de la necesidad del método de reducción a la unidad cuando la razón entre dos valores de la misma magnitud x_2/x_1 no sea ni el doble, ni el triple, ni la mitad: "Vamos a ver un concepto de hacer estos problemas de proporcionalidad, que se llama reducción a la unidad" [0:08].
5.2	Claridad en el camino a seguir	Explicita los objetivos, la necesidad del método de reducción a la unidad: "Los problemas anteriores se resolvían porque sabíamos que había aquí el concepto de doble, el concepto de triple,… el concepto de mitad" [1:53].
5.3	Generación situación interactiva	Numerosas intervenciones de los alumnos hasta 60.
5.4	Explicitación reiterada de lo que se hace	Reitera los objetivos, la necesidad del método de reducción a la unidad que les permita resolver el problema cuando la razón entre dos valores de la misma magnitud x_2/x_1 no sea ni el doble, ni el triple, ni la mitad [hasta 8

		intervenciones].
5.5	Discusión activa en la pizarra	El profesor fomenta una discusión activa pero no utiliza un soporte escrito sino que tiene proyectado el problema en forma de tabla en la pizarra y la discusión se desarrolla verbalmente.
5.6	Recapitulación objetivos	"Siempre que tengamos un problema de estos, y dicen que no tienen relación, no es el doble, ni la mitad, ni el triple, voy a reducir a la unidad" [8:45].

Tabla 5.4: Evidencias indicadores episodio 8.1

5.1.3. Comparación episodios 17 y 8.1

Después del análisis de los episodios 17 y 8.1 a partir de la lista de indicadores, pasamos a comparar ambos episodios, categoría a categoría.

1. Fundamento

Los dos profesores insisten en la importancia de identificar las magnitudes implicadas y en asignar a las magnitudes las medidas correspondientes, aunque en el profesor de Primaria se pueda observar cierta confusión entre la ideas de magnitud y medida. No parece distinguir las magnitudes de sus medidas: "Lo primero que tenemos que hacer a la hora de plantear un problema, ¿qué era?, ¿saber qué?... las magnitudes. En este caso tenemos limones y… cucharadas de azúcar" y un alumno responde "cantidad" [1:04-1:27]. ¿Qué medidas ponemos? Los limones los podemos medir en unidades (en vez de en kilogramos) y el azúcar en cucharadas, pero ¿cómo medimos las cucharadas? A este respecto se refiere la intervención del alumno "cantidad". El profesor no recoge esta intervención del alumno y sigue adelante sin preguntar al alumno a qué se está refiriendo cuando dice "cantidad". La magnitud "cucharadas de azúcar" se puede medir en unidades (1, 2, 3, etc.), aunque también se puede medir en gramos en función de lo que pese cada cucharada de azúcar, es decir, de la cantidad de azúcar que tenga cada cucharada. Se podía haber aprovechado la intervención del alumno para considerar las dos posibilidades y centrarse en una pero el profesor no la recoge. Puede ser que el profesor sólo tenga en mente la primera posibilidad y desconozca la segunda; o bien que conociendo ambas posibilidades, tema que esto pueda generar dificultades a algunos alumnos y le haga desviarse de su objetivo que es explicar la técnica de reducción a la unidad y aplicarla para encontrar valores en una tabla de proporcionalidad. En la profesora de Secundaria no se ve esta confusión. Comienza el episodio explicitando las unidades y sus medidas.

Los dos profesores trabajan asimismo con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ mayores que la unidad y no enteras. Hay coincidencia en los dos profesores en presentar un problema de proporcionalidad en el que se pide a los alumnos encontrar valores en la tabla de proporcionalidad donde la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ no sea entera. Entendemos que así se justifica la utilización de la técnica de reducción a la unidad. Es el caso del profesor de Primaria que sólo pide encontrar un valor en la tabla de proporcionalidad donde la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ sea mayor que la unidad y no entera. Ahora bien, para enseñar al alumno en la aplicación de la técnica, se observa en el transcurso del episodio que la profesora de Secundaria pide asimismo a los alumnos encontrar hasta 7 valores en la tabla de proporcionalidad. Entendemos que esto se debe a que el objetivo de la profesora va más allá de la aplicación de la técnica y pretende que el alumno vea la función de proporcionalidad.

Ambos insisten en la importancia de detectar el "dato"[6] del problema, bien como un número importante para resolver el problema: "el problema te da los datos", afirma el profesor de Primaria [10:23]; bien como una relación relevante: "de este dato vamos a sacar la información relevante", afirma la profesora de Secundaria [1:03]. Entendemos que ambos quieren dejar claro a los alumnos que es importante identificar bien los datos, pues a partir de los mismos que se puede deducir la razón de proporcionalidad (reduciendo a la unidad) y a partir de aquí encontrar todos los valores de la tabla de proporcionalidad que pide el problema.

2. Transformación

La profesora de Secundaria busca una representación de los datos que le permita sacar un modelo. La etiqueta como "tabla de valores", dando así una representación del modelo, es decir, le da a la "tabla de valores" categoría de representación [0:35-1:52]. Entendemos que su objetivo es conectar la

[6] Recordamos aquí que lo que el profesor llama "dato" es la constante de proporcionalidad $k=y/x$ obtenida al hacer la reducción a la unidad para obtener la función de proporcionalidad.

representación gráfica de la tabla con la función lineal, por lo que tiene una visión del horizonte matemático más hacia adelante que hacia atrás. El profesor de Primaria también presenta los datos del problema en una tabla de valores aunque en ningún momento etiqueta esta estructura como "tabla de valores". No parece darle un valor concreto a esta representación de los datos más allá de ser una representación visual y clara de las magnitudes implicadas, los datos y los valores que se pretende encontrar. Esto puede deberse a que en los libros de texto se acostumbran a representar los datos de proporcionalidad en forma de tabla y simplemente le parece un buen recurso sin ir más allá. En este caso el profesor no tendría una visión del horizonte matemático hacia adelante. Pero también puede deberse a que aun teniendo conocimientos de proporcionalidad suficientes sobre la función de proporcionalidad, no le parezca apropiado introducir el tema en Sexto curso de Primaria. Entonces el profesor sí que tendría una visión del horizonte matemático hacia adelante pero no la utilizaría. Digamos que para el profesor de Primaria representar los datos en una tabla de valores es un fin en sí mismo mientras que la profesora de Secundaria podría estar pensando en la representación de la función lineal.

Ambos profesores eligen un ejemplo introductorio a la reducción a la unidad contextualizado en un ámbito amable para los alumnos. Ahora bien, en el caso de la profesora de Secundaria elige un ejemplo donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ para cada par de valores de las dos variables relacionadas es menor que la unidad, 1/2; mientras que el profesor de Primaria opta por una razón $k=y/x$ mayor que la unidad y entera (k=2). En el caso del profesor de Primaria esto puede deberse a que, consciente de la dificultad de la técnica de la reducción a la unidad para alumnos de Sexto curso que trabajan la proporcionalidad por primera vez a este nivel, si elige la razón de proporcionalidad más sencilla, 2, los alumnos la podrán deducir sin problemas y podrán entender y aplicar con más facilidad la técnica, que es su objetivo. Mientras que una razón de proporcionalidad no entera añadiría complejidad al tema. En cambio la profesora de Secundaria opta por una razón de proporcionalidad $k=y/x$ no entera para explicar la técnica. Es verdad que aunque ½ no sea entera es la más sencilla posible de entre las razones no enteras. El hecho de que la profesora elija esta razón puede deberse a que como los alumnos ya han trabajado la proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y normalmente con problemas donde la razón de proporcionalidad es 2 ó 3, no quiera que los alumnos asocien que dicha razón tenga que ser siempre entera y mayor que la unidad.

Ambos profesores guían al alumno a que busque la técnica de la reducción a la unidad como método para resolver el problema. En ambos casos se desarrolla la técnica de reducción a la unidad, si bien en el caso del profesor de Primaria queda como una buena técnica, un buen instrumento para resolver un problema; mientras que para la profesora de Secundaria es un instrumento conceptual para entender la razón de proporcionalidad y alcanzar posteriormente la función de proporcionalidad.

En cuanto a las representaciones gráficas de la situación del problema, la profesora de Secundaria extrae un modelo a partir de la visualización del "dato/datos" de una manera gráfica, haciendo un dibujo de la equivalencia entre las cajas de caramelos y los kilos que le permita conectar con los datos de la tabla de valores; mientras que el profesor de Primaria proyecta el enunciado del problema ya en forma de tabla de valores sin apoyarse en ningún tipo de representación gráfica de la situación del problema. Entendemos que para la profesora de Secundaria, una representación gráfica de la situación del problema no es más que un medio para pasar fácilmente a la tabla de valores, e incluso para ver rápidamente la reducción a la unidad de una manera visual. Como ya hemos dicho más arriba, el valor de la representación en la tabla de valores tendrá que ver con la conexión de estos valores con la representación de una función lineal.

Ambos profesores explicitan en mayor o menor medida la relación entre las magnitudes dada por el enunciado del problema, lo que ambos llaman "dato" o "datos" del problema, a partir del cual se pueda encontrar la constante de proporcionalidad. Siguiendo la expresión utilizada por los dos profesores lo denominaremos "datos". En el problema utilizado por el profesor de Primaria, el dato es "3 limones y 6 cucharadas de azúcar". Es una relación dada en el enunciado del problema y a partir de aquí la resolución del problema consiste en escribir relaciones equivalentes a esta. Ahora bien, por un lado, la profesora de Secundaria representa los "datos" de una manera gráfica, insistiendo en la representación gráfica del "dibujo" del problema. Por otro lado, subraya que del "dato" se va a sacar una relación relevante. Es interesante observar que este dato no se refiere a un número concreto sino a una relación. La profesora sabe que quiere llegar a la constante de proporcionalidad para obtener la función lineal.

3. Conexión

Ambos profesores guían la interacción de los alumnos para tratar de obtener la razón de proporcionalidad $k=y/x$. Sin embargo, la profesora de Secundaria pone el énfasis en la búsqueda del "modelo" escondido $y=kx$. Potencia que los alumnos busquen un patrón, un modelo-estructura dentro del problema de manera que sean capaces de ver al mismo tiempo la razón de proporcionalidad $k=y/x$ para cada par de valores de las dos variables relacionadas, y la función lineal $y=kx$. En cambio el profesor de Primaria no tiene presente esta búsqueda de un modelo, pues parece no tener en mente la función lineal. Esto puede ser porque o bien le falte conocimiento del horizonte matemático hacia adelante que le permita establecer la conexión entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$; o bien porque teniendo dicho conocimiento, no lo movilice porque quizás no quiera utilizarlo.

Al utilizar la estrategia que consiste en buscar el "modelo" escondido $y=kx$, los alumnos pueden entender mejor cuál es el objetivo de reducir a la unidad y la utilidad de su aplicación como técnica. A este respecto, una alumna como Ainoa que tenía problemas para entender la técnica de reducción a la unidad en Sexto curso de Primaria e incluso pregunta si la razón de proporcionalidad es siempre 2, con la guía de la profesora de Secundaria para buscar la razón de proporcionalidad y la función lineal de la manera que lo hace, no tiene ninguna dificultad de comprensión de la técnica y puede resolver el problema satisfactoriamente.

Por lo tanto, entendemos que en la profesora de Secundaria hay conocimiento de la técnica de reducción a la unidad y del modelo subyacente a la misma, mientras que en el profesor de Primaria, y de acuerdo con el episodio 8.1, no parece existir un conocimiento suficiente de la relación entre la técnica y el modelo. Esto le lleva a resolver el problema y a mostrar la técnica para hacerlo, pero tiene dificultades para ayudar a los alumnos a construir el concepto porque posiblemente le faltan conocimientos para reconocer el modelo, y constatamos que hay alumnos que parecen no haberlo entendido. En este sentido el conocimiento del contenido matemático sobre proporcionalidad movilizado en uno y otro profesor es distinto.

A la profesora de Secundaria le interesa que sus alumnos vean en el ejemplo concreto abordado que la razón de proporcionalidad es multiplicar por 0,5 y no dividir por 2 como sugiere alguno de ellos. Dividir por 2 o hacer la mitad (horizonte matemático hacia atrás) es lo mismo que multiplicar por 0,5 (horizonte matemático hacia adelante). Lo que la profesora ya no explicita es que multiplicar por 0,5 sea lo mismo que multiplicar por ½ y que esto equivalga a dividir por 2. La profesora no establece conexiones entre estos conceptos de acuerdo con la evidencia obtenida al surgir una situación de contingencia que no recoge [5:17] y que nos parece relevante desde el punto de vista del horizonte matemático hacia atrás. Entendemos que la profesora tiene conocimiento matemático al respecto y visión del horizonte matemático hacia atrás pero no lo moviliza en ese momento. Esto puede deberse a que la profesora esté más interesada en que el alumno vea el modelo de proporcionalidad $y=kx$, esto es, que para encontrar el valor de la magnitud "y" siempre hay que multiplicar el valor correspondiente "x" por un número.

4. Contingencia

En relación con las situaciones de contingencia, ambos profesores gestionan las intervenciones de los alumnos de una manera similar, teniendo en cuenta, en general, muchas de las intervenciones de los alumnos.

Los dos profesores coinciden en recoger las intervenciones de los alumnos en las que estos utilizan tanto métodos aritméticos informales, como la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$ o la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ para calcular el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad, pero sin detenerse mucho pues entendemos que ambos profesores tienen claro que el objetivo es llegar a resolver el problema a partir de la técnica de la reducción a la unidad.

El profesor de Primaria se encuentra con una situación de contingencia en la que una alumna (Ainoa) generaliza la razón de proporcionalidad $y=k/x$ a 2, a partir del caso concreto del problema que están resolviendo y pregunta si la razón siempre es 2, el doble. El profesor atiende esta intervención con el objetivo de sacar a la alumna de su error.

Sin embargo, en ambos profesores hay ejemplos intervenciones de los alumnos desatendidas, que entendemos lo son por motivos diferentes. En el caso de la profesora de Secundaria porque trata de recoger aquellas intervenciones que considera que pueden ayudar a los alumnos a construir el concepto de razón de proporcionalidad $k=y/x$ y de preparación para la función lineal $y=kx$. Mientras que el profesor de Primaria parece no recoger algunas de las aportaciones relevantes de los alumnos, como por ejemplo en el caso de asignar una medida a una magnitud, seguramente por dificultades en la interpretación de las mismas.

5. General

En relación con la resolución del problema, los dos profesores tienen claro que su objetivo es explicar la reducción a la unidad. La profesora de Secundaria parece tener más claro que el profesor de Primaria a dónde quiere llegar: en primer lugar, explicita cuáles son los objetivos marcados para la clase al principio del episodio; y en segundo lugar, explica continuamente lo que hace. Es más pedagógica en este sentido. El profesor de Primaria se plantea como objetivo enseñar a sus alumnos una técnica, la reducción de la unidad, que les permita resolver el problema cuando la razón escalar x_2/x_1 no sea ni el doble, ni el triple, ni la mitad; mientras que la profesora de Secundaria pretende enseñarles, además de una técnica, su relación con el concepto de función de proporcionalidad cuando la razón de proporcionalidad no sea entera. El énfasis en la repetición que pone el profesor de Primaria en que va a enseñar una técnica para cuando la razón escalar entre 2 valores de la misma magnitud no sea ni el doble, ni el triple, ni la mitad indica que su objetivo es enseñar una técnica; mientras que la profesora pone el énfasis en la razón de proporcionalidad 0,5 y en que el número de kilos se obtiene multiplicando el número de cajas por 0,5.

Los dos profesores generan una situación de aula interactiva. Se discute el problema activamente en la pizarra, utilizando la representación tabular de los datos. El profesor de Primaria mantiene toda la discusión de la resolución del problema verbalmente, sin escribir en la pizarra (tiene la tabla proyectada en la pizarra); mientras que la profesora de Secundaria escribe continuamente en la pizarra.

5.2. Análisis y comparación de los episodios 13 del Primer curso de Secundaria y 1 de Sexto curso de Primaria sobre la Introducción a la proporcionalidad-1

5.2.1. Episodio 13 del Primer curso de Secundaria

Contextualización del episodio

<u>Contenido</u>: Introducción a la proporcionalidad. Ejemplo introductorio de proporcionalidad sobre las carreras de fórmula 1.
<u>Curso</u>: alumnos de 12-13 años del Primer curso de Secundaria (IES Verdaguer)
<u>Duración</u>: 8:04
<u>Fecha grabación</u>: 10.04.2012

Episodio extraído de la primera clase de proporcionalidad donde se introduce la proporcionalidad con un ejemplo contextualizado en las carreras de fórmula 1: *si un coche hace con 10 litros de gasolina 1,2 vueltas al circuito de Montmeló, ¿cuántas vueltas hará con 90 litros de gasolina?*

La primera clase de proporcionalidad de la profesora de Secundaria la he dividido en dos episodios: el 13 y el 14. En el episodio 13 la profesora parte de un ejemplo en el que hay que encontrar un valor desconocido en una tabla de proporcionalidad para llegar, al final del episodio a una definición de proporcionalidad. En el episodio 14 continúa trabajando con el mismo ejemplo y pide a los alumnos que encuentren diversos valores desconocidos en la tabla de proporcionalidad del ejemplo trabajado.

De igual forma la primera clase de proporcionalidad del profesor de Sexto curso de Primaria la he dividido en dos episodios: el 1 y el 2.1. En el primero el profesor parte de una definición de proporcionalidad y después trabaja la definición ofrecida. En el segundo propone a los alumnos algunos pares de magnitudes para que justifiquen si son proporcionales o no y después trabaja con un ejemplo concreto en el que pide encontrar valores desconocidos en una tabla de proporcionalidad.

Transcripción del episodio

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:02	Profesora	[Escribe en la pizarra PROPORCIONALIDAD, 6.1. Relación de proporcionalidad entre magnitudes]. No sé si habéis seguido alguna vez una carrera de fórmula 1, pero una de las cosas más interesantes es el peso que lleva el coche. Cuando el coche lleva menos peso corre más. ¿Alguien ha visto alguna vez una carrera de fórmula 1?
0:19	Alumno 1	¡Sí!
0:19	Alumno 2	Todo el mundo
0:20 0:39	Profesora	Yo, que soy fan de Alonso. ¿Sí? Pues resulta que los coches de fórmula 1, una variable muy interesante es el peso que llevan. Cuando un coche es más ligero, entonces el coche corre más, va más rápido y gana más. Resulta que si un piloto necesita menos gasolina para hacer una vuelta, entonces el coche va menos cargado, ¿todo el mundo entiende esta afirmación?
0:56	Alumno	Sí
0:57 1:37	Profesora	¿Sí? Entonces, una variable que distingue mucho a los pilotos, yo es que la sigo mucho la fórmula 1, ya sé que a lo mejor les aburro, a mí me gusta mucho, mucho más que el futbol... un elemento muy interesante es la conducción ¿no? ¿Cuál es la diferencia por ejemplo entre Hamilton y Fernando Alonso? Que Hamilton va adelanta, frena, delante, atrás y eso gasta mucha gasolina; en cambio Alonso es como mucho más suave, como mucho más elegante, no le da tantos altibajos al coche. Total que un elemento muy interesante a estudiar es que... ahora voy a inventarme un poco los números, pero es para nosotros, que quizás Alonso sea mejor piloto porque si le pongo, no sé, 10l de gasolina, pues con 10l de gasolina al siguiente gran premio..., bueno, vamos a imaginarnos que estamos estudiando el gran premio de aquí, el que se hará en Montmeló, con 10l de gasolina supongamos que llega a dar 1,2 vueltas. [Ha escrito 10l de gasolina-> 1.2 vueltas]. A ver, nosotros acabamos de estudiar el tema de los decimales, ya sabemos que 1.2 vueltas al circuito quiere decir que hace 1 vuelta completa y un trocito más, una porción ¿sí? del circuito. ¿Una porción? pues tendríamos que mirar el trozo, la cantidad de km que hay y calcular la parte pro-por-cio-nal. Esta palabra clave, proporcional, saldrá mucho en el tema. ¿Esto se ha entendido? ¿Sí?

2:52	Alumnos	[Asienten]
2:53	Profesora	Entonces mi pregunta es... y si a Alonso le ponen... pues cuando hacen la carrera, de gasolina no ponen 10l ¿no?, ponen muchos ¿no? O sea, ¿cuántos ponen?, ¿90l? Pongamos que ponen 90, con 90l de gasolina, ¿cuántas vueltas haría? Ainoa, ¿tú qué crees?, ¿Laura? [Ha escrito 90l de gasolina->]
3:29	Laura	9
3:30	Profesora	¿9 vueltas? Por aquí en medio está el 9, es decir, la diferencia de pasar de aquí [señala el 10] a aquí [señala el 90], estoy de acuerdo que es el 9, el 9 es un elemento clave porque de aquí a aquí hemos pasado como... hay un 9 involucrado ¿no? [Escribe a la izquierda "9"]. Continuamos Aimar
3:50	Aimar	10,8
3:51	Profesora	¿Cuántas?
3:52	Aimar	10,8
3:53	Profesora	10,8, ¡Madre mía! Y ¿cómo has llegado al 10,8?
3:57	Aimar	Pues como allí se multiplica por 9 [señala el 10 y el 90], aquí [señala el 1,2] también se multiplica por 9.
4:03	Profesora	Aimar, lo que nos está diciendo es que se ha guardado la misma relación en la parte de la izquierda que en la parte de la derecha. Mirad, resulta que si le pongo 10l, hace 1,2 vueltas ¿sí?, ¿todos estamos aquí? [Escribe un trozo de recta delimitado y pone arriba 1.2 vueltas y abajo 10l.]
4:24	Alumnos	Sí [asienten]
4:25	Profesora	Quiera esto decir en km lo que quiera decir, que ahora mismo me es igual, si... eso serían 10l ¿no? Si le pongo otros 10l, ¿cuántas vueltas haremos?: 1.2+1.2 ¿sí?, ¿todo el mundo de acuerdo? Ya llevo 2,4 ¿todo el mundo lo está viendo esto? [Añade otro segmento de recta igual al primero y repite los datos arriba y abajo]. Si pongo 10 más, Farfán, ¿cuántas vueltas tendré?
5:20	Farfán	[No responde]
5:27	Profesora	Otra 1,2 ¿no? Y ahora voy a ver en total cuánto es esto
5:31	Farfán	3,...7
5:36	Profesora	Juanjo te ayuda
5:38	Juanjo Farfán	3,6 3,...
5:39	Profesora	No has necesitado ayuda y Aimar lo que ha hecho es repetir esto muchas veces hasta 90 porque 10, 10, 10... Es como si hubiera puesto 9 cositas de estas [pone una llave por abajo

		abarcando todos los segmentos y escribe 9], 9 tiras es como si hubiera puesto 9 tiras abajo ¿todo el mundo está viendo esto?
6:03	Alumnos	Sí
6:04 7:00	Profesora	Y si Aimar ha puesto 9 tiras abajo, entonces también ha puesto 9 tiras arriba [pone otra llave por arriba abarcando todos los segmentos y escribe 9], ¿sí? Este 9 que está aquí involucrado, del 10 hemos pasado al 90 [va a la parte izquierda de la pizarra donde está escrito el "9"], en realidad también se tiene que ver involucrado aquí [va a la parte derecha donde está escrito 1.2], y el 10.8 vueltas [lo escribe ahora debajo del 1.2]. Aimar lo ha obtenido de la misma manera que nosotros hemos obtenido este 90 a partir del 10. Lo hemos obtenido como 9·10 [pone una llave debajo del 90 y escribe 9·10] ¿no?, 9 por 10l ¿todo el mundo de acuerdo?, ¿sí? Pues aquí lo pondremos como 9 por lo que haya arriba que se llama 1.2 vueltas [pone una llave debajo del 10.8 y escribe 9·1,2]. Hasta aquí, ¿hay alguna duda? Pues señores, tienen ustedes aquí delante su primer modelo de pro-por-cio-na-li-dad. Es un modelo que se denomina de proporcionalidad entre magnitudes. Pero esto es un ejemplo. Ahora de aquí a un momento haremos la teoría. Pero este ejemplo es una relación... ¿qué nos tenemos que quedar?, ¿qué foto tengo que guardar en la cabeza? Hemos de guardar la foto de que la proporcionalidad quiere decir que lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro. Aunque son diferentes magnitudes porque en un lado estoy hablando de gasolina y en el otro lado estoy hablando de vueltas. La proporcionalidad, es una proporcionalidad directa, ya hablaremos más adelante. La proporcionalidad quiere decir que mantiene a un lado y al otro la misma relación ¿de acuerdo?

Tabla 5.5: Transcripción episodio 13

Descripción del episodio

La profesora va a introducir el concepto de proporcionalidad a partir de un ejemplo contextualizado en las carreras de coches de fórmula 1. Este episodio junto con el 14 están extraídos de la primera clase sobre proporcionalidad directa.

En relación con el concepto de proporcionalidad, la profesora tiene claro que su objetivo es: 1) introducir la proporcionalidad como una relación que mantiene la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre pares de valores de la misma variable, donde x_i es el número de litros de combustible e y_i el número de vueltas al circuito; y 2) pretende resaltar que la proporcionalidad no es otra cosa que conservar el factor de cambio que se aplica entre 2 valores de las variables número de litros y número de vueltas al circuito respectivamente. En este ejemplo concreto, se quiere explicar que la razón entre dos valores de la magnitud litros 90/10=9 se conserva entre los dos valores correspondientes de la magnitud número de vueltas al circuito 10,8/1,2=9.

La profesora elige como ejemplo introductorio las carreras de fórmula 1. Alude al principio del episodio a magnitudes inversamente proporcionales como el peso y la velocidad del coche: cuando el coche lleva menos masa corre más [0:02]. Posteriormente se centra el tema en magnitudes directamente proporcionales como la cantidad de combustible que lleva el coche y el número de vueltas que da al circuito con dicha cantidad de combustible.

La constante de proporcionalidad $k=y/x$ de este ejemplo introductorio, a deducir del "dato" de que un coche con 10 litros de combustible da 1,2 vueltas a un circuito como el de Montmeló, no es entera. El ejemplo se concreta en un contexto familiar para los alumnos. La profesora pide a los alumnos el número de vueltas que dará el coche al circuito con 90 litros de gasolina.

La profesora utiliza lenguajes de representación al recurrir a una representación gráfica de la situación del problema [4:03; 4:25], número de litros y vueltas al circuito, una representación gráfica que permita sacar un modelo a partir de la visualización del "dato/datos" de una manera gráfica: 90l=9·10l y 10,8=9·1,2 [6:04].

Otorga un valor concreto a la representación en tabla de valores, pensando en su futura conexión como representación de una función: "el 9 es un elemento clave porque de aquí a aquí hemos pasado como… hay un 9 involucrado ¿no?" [3:30].

La profesora genera una situación de aula interactiva solicitando reiteradamente la intervención de los alumnos. Se discute el problema activamente en la pizarra, escribiendo continuamente.

En relación con las situaciones de contingencia, la profesora las gestiona de una manera ágil y las reconduce para llegar donde ella quiere. Por ejemplo, a la pregunta de cuántas vueltas haría Alonso con 90 litros de gasolina [2:53], un alumno responde 10,8 [3:52]. La profesora pregunta al alumno cómo lo ha hecho: "¡Madre mía! Y ¿cómo has llegado al 10,8?" [3:53]. El alumno da una respuesta: "pues como allí se multiplica por 9 [señala el 10 y el 90], aquí [señala el 1,2] también se multiplica por 9" [3:57]. La profesora enfatiza esta intervención del alumno porque le interesa que los alumnos vean el factor de cambio involucrado. Vuelve a explicarlo para toda la clase siguiendo lo que ha hecho el alumno [3:57-4:03]. De esta manera reinterpreta lo que ha hecho el alumno y lo explica para el resto de la clase. Esta reinterpretación le servirá para llegar al objetivo marcado para la clase dar la definición de proporcionalidad al final del episodio: la proporcionalidad es una relación que conserva el factor de cambio entre 2 valores de la misma magnitud $x_2/x_1=y_2/y_1$ [7:00].

Siguiendo con las situaciones de contingencia, la profesora recoge la intervención donde el alumno utiliza métodos aritméticos informales para encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad [5:38-5:39] y la lleva hacia donde ella quiere. En este caso aprovecha lo que ha salido para enseñar que multiplicar es sumar repetidas veces. El alumno ha visto una pauta numérica. Posiblemente no ha visto la suma repetida y la profesora aprovecha la intervención del alumno para explicar que el producto es igual a la suma repetida.

Análisis del episodio

Después de la transcripción y de la descripción del episodio 13, pasamos a analizar el episodio a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland, mostrada en el capítulo 4 (apartado 4.5).

	Indicadores	**Evidencia**
	FUNDAMENTO	
1.1	Identificación magnitudes	"Aunque son diferentes magnitudes porque en un lado estoy hablando de gasolina y en el otro lado estoy hablando de vueltas" [7:00].
1.2	Asignación medida-magnitud	---

1.3	Características magnitudes	Sólo una referencia a qué significa 1,2 vueltas: "resulta que si le pongo 10l, hace 1,2 vueltas… quiera esto decir en km lo que quiera decir, que ahora me es igual" [4:03-4:25].
1.4	Utilización incremento gradual aditivo	"Si le pongo otros 10l, ¿cuántas vueltas haremos?: 1.2+1.2 ¿sí?, ¿todo el mundo de acuerdo? Ya llevo 2,4" [4:25]
1.5	Utilización incremento gradual multiplicativo	"Este 9 que está aquí involucrado, del 10 hemos pasado al 90 [va a la parte izquierda de la pizarra donde está escrito el "9"], en realidad también se tiene que ver involucrado aquí [va a la parte derecha donde está escrito 1.2], y el 10.8 vueltas [lo escribe ahora debajo del 1.2]. Aimar lo ha obtenido de la misma manera que nosotros hemos obtenido este 90 a partir del 10. Lo hemos obtenido como 9·10 [pone una llave debajo del 90 y escribe 9·10] ¿no?, 9 por 10l ¿todo el mundo de acuerdo?, ¿sí? Pues aquí lo pondremos como 9 por lo que haya arriba que se llama 1.2 vueltas [pone una llave debajo del 10.8 y escribe 9·1,2]" [6:04].
1.6	Explicitación procedimiento reducción a la unidad	---
1.7	Trabajo de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	"Este 9 que está aquí involucrado, del 10 hemos pasado al 90 [va a la parte izquierda de la pizarra donde está escrito el "9"], en realidad también se tiene que ver involucrado aquí [va a la parte derecha donde está escrito 1.2], y el 10.8 vueltas [lo escribe ahora debajo del 1.2]" [6:04].
1.8	Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$	$k=0,12$ menor que la unidad y no entera: "Con 10l se hacen 1,2 vueltas al circuito".
1.9	Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Razón mayor que la unidad y entera: "¿cuántas vueltas se darán con 90l?".
1.10	Explicitación razón dada en el problema: $k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$	---
1.11	Explicitación del concepto relevante dentro del problema (lo que el profesor	---

	denomina "dato")	
TRANSFORMACIÓN		
2.1	Explicitación enseñar técnica si $k=y/x$ no entera	---
2.2	Explicitación que diferencia técnica de concepto	---
2.3	Representación situación del problema con dibujos/esquemas	"Mirad, resulta que si le pongo 10l, hace 1,2 vueltas ¿sí?, ¿todos estamos aquí? [Escribe un trozo de recta delimitado y pone arriba 1.2 vueltas y abajo 10l.]" [4:03].
2.4	Uso dibujo/esquema para construir modelo	"Aimar lo que ha hecho es repetir esto muchas veces hasta 90 porque 10, 10, 10... Es como si hubiera puesto 9 cositas de estas [pone una llave por abajo abarcando todos los segmentos y escribe 9], 9 tiras es como si hubiera puesto 9 tiras abajo ¿todo el mundo está viendo esto?" [5:39]. "Y si Aimar ha puesto 9 tiras abajo, entonces también ha puesto 9 tiras arriba [pone otra llave por arriba abarcando todos los segmentos y escribe 9], ¿sí?... Aimar lo ha obtenido de la misma manera que nosotros hemos obtenido este 90 a partir del 10. Lo hemos obtenido como 9·10 [pone una llave debajo del 90 y escribe 9·10] ¿no?, 9 por 10l ¿todo el mundo de acuerdo?, ¿sí? Pues aquí lo pondremos como 9 por lo que haya arriba que se llama 1.2 vueltas [pone una llave debajo del 10.8 y escribe 9·1,2]" [6:04].
2.5	Asignación valor a la representación en la tabla de valores	---
2.6	Elección ejemplo introductorio nivel visualización gráfica	---
2.7	Elección ejemplo introductorio nivel razón $k=y/x$	"con 10l de gasolina supongamos que llega a dar 1,2 vueltas".
2.8	Elección ejemplo introductorio con contexto adecuado	"con 10l de gasolina supongamos que llega a dar 1,2 vueltas".
2.9	Ayuda a descubrir la razón $k=y/x$	---
2.10	Ayuda a aplicar la reducción a la unidad	---

2.11	Ayuda a descubrir la función lineal $y=kx$	---
CONEXIÓN		
3.1	Relación y comparación reducción a la unidad con otras técnicas	---
3.2	Énfasis (profesor) descubrimiento modelo en el problema y búsqueda modelo dentro del problema (alumno)	"Lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro" [7:00].
3.3	Énfasis relación razón $k=y/x$ y red. a la unidad	---
3.4	Énfasis relación razón $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$	--- [énfasis no pero sale: 6:04, 10,8=9·1,2]
3.5	Énfasis relación red. a la unidad y la función lineal $y=kx$	---
3.6	Horizonte matemático adelante	"Aimar lo ha obtenido de la misma manera que nosotros hemos obtenido este 90 a partir del 10. Lo hemos obtenido como 9·10 [pone una llave debajo del 90 y escribe 9·10] ¿no?, 9 por 10l ¿todo el mundo de acuerdo?, ¿sí? Pues aquí lo pondremos como 9 por lo que haya arriba que se llama 1.2 vueltas [pone una llave debajo del 10.8 y escribe 9·1,2]" [6:04]. Al querer explicitar el 9·1,2, se prepara para la función de proporcionalidad.
3.7	Horizonte matemático atrás	---
CONTINGENCIA		
4.1	Utilización métodos aritméticos informales	[5:38-5:39]
4.2	Generalización razón de proporcionalidad $y=k/x$ a partir de un caso concreto	---
4.3	Utilización razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$	---
4.4	Utilización razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	[3:50-4:03]
GENERAL		
5.1	Claridad en los objetivos	Se introduce de la proporcionalidad como una relación que mantiene la razón $x_2/x_1=y_2/y_1$, donde x_i es el número de litros de combustible e y_i el número de vueltas al circuito [2:53-3:30; 4:03]. Esto es, la proporcionalidad no es otra cosa que conservar el factor de cambio que se

		aplica entre 2 valores de las magnitudes número de litros y número de vueltas al circuito respectivamente: "se ha guardado la misma relación en la parte de la izquierda que en la parte de la derecha" [4:03]; "hemos de guardar la foto de que la proporcionalidad quiere decir que lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro" [7:00].
5.2	Claridad en el camino a seguir	A partir del "dato" del problema, con 10 litros de combustible se dan 1,2 vueltas al circuito, se descubre que para obtener el nº de vueltas que se darán con 90 litros, hay que multiplicar por 9 el número de vueltas que se dan con 10 litros: "Por aquí en medio está el 9, es decir, la diferencia de pasar de aquí [señala el 10] a aquí [señala el 90], estoy de acuerdo que es el 9, el 9 es un elemento clave porque de aquí a aquí hemos pasado como... hay un 9 involucrado ¿no?" [3:30].
5.3	Generación situación interactiva	Numerosas intervenciones de los alumnos hasta 10.
5.4	Explicitación reiterada de lo que se hace	Para obtener que se dan 10,8 vueltas al circuito con 90 litros de combustible, se insiste en cómo en la obtención del 10,8 está el 9 involucrado [4 intervenciones: 3:30; 4:03; 5:39 y 6:04].
5.5	Discusión activa en la pizarra	Constante en todo el episodio
5.6	Recapitulación objetivos	"Hemos de guardar la foto de que la proporcionalidad quiere decir que lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro." [7:00].

Tabla 5.6: Evidencias indicadores episodio 13

5.2.2. Episodio 1 de Sexto curso de Primaria

Contextualización del episodio

Contenido: Introducción a la proporcionalidad
Curso: alumnos de 11-12 años de Sexto curso de Primaria (CEIP Parc de la Ciutadella)
Duración: 12:22:08
Fecha grabación: 20.05.2011

Episodio extraído de la primera clase de proporcionalidad destinada a la introducción a la proporcionalidad: definir qué son magnitudes proporcionales y a poner ejemplos tanto de magnitudes proporcionales como no proporcionales.

Transcripción del episodio

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:09	Profesor	Si tenemos que hacer una definición de lo que es la proporcionalidad, ya os digo yo que a vosotros os va a costar hacer en este tema una definición ¿sí o no?
0:17	Alumno	Sí
0:18 0:34	Profesor	¿Por qué? No sabéis nada. Por tanto, os diré yo una y a ver si (¿?) después. La proporcionalidad... de porcentajes sí que habéis oído hablar, de rebajas, o de descuentos, o algo, pero de lo que es la proporcionalidad, es la primera vez que lo oís, ¿sí o no?
0:52	Alumno 1	Bueno, viene de proporción
0:56	Alumno 2	Viene de por ciento
1:06 2:00	Profesor	La proporcionalidad es una relación [escribe en la pizarra] entre magnitudes mesurables. Vamos a leer la definición. La proporcionalidad no sabéis lo que es, pero... a ver qué dice el resto de la definición. Es una relación. Hasta aquí, ¿sabéis lo que es? Mesurables, ¿sabéis lo que quiere decir?
2:16	Alumno	Que se pueden medir
2:17	Profesor	Muy bien, que se pueden medir
2:18	Profesor	Y lo que no sabéis, ¿qué es?
2:20	Alumno 1	Magnitud
2:21	Alumno 2	Magnitudes mesurables

2:26	Profesor	Magnitud. ¿Qué creéis que son magnitudes? ¿No habéis visto qué son magnitudes? A ver, a quién se le ocurre qué es una magnitud.
2:37	Alumno 1	Los imanes
2:38	Profesor	¿Imanes?
2:58	Alumno 2	Algo como de potencia o algo así... por ejemplo, de coches [no se entiende]
3:11	Alumno 3	No es lo mismo que multitudinario, ¿verdad?
3:14	Profesor	No. Alguien más...
3:16	Alumno	De magnés [¿?]
3:20 3:35 3:51	Profesor	De magnés... El magnetismo no es lo mismo que la magnitud, pero... ¿conocéis algún tipo de magnitud? Por ejemplo, os pongo un ejemplo de magnitud, ¿de acuerdo? Después vosotros... Por ejemplo, una magnitud, ¿qué sería?... la edad que tengo, ¿sería una magnitud?
3:55	Alumno	No
3:56	Profesor	¿Por qué?
3:57	Alumno	[No se entiende]
4:00	Profesor	Sí que es una magnitud la edad, porque magnitud es todo aquello que se puede medir en términos numéricos.
4:10	Alumno 1	¡Ah vale! Es ¡Cuánto pesas!
4:12	Profesor	Por ejemplo, por ejemplo, ¿otra magnitud?
4:13	Alumno 2	El peso
4:15	Profesor	El peso [lo escribe en la pizarra]
4:17	Alumno 3	La altura
4:18	Profesor	...la altura... Todo aquello que tú cuando lo mencionas en términos numéricos, con un número. ¿Qué más?
4:27	Alumno 1	La medida de la mano
4:29	Alumno 2	Del pie...
4:30	Alumno 3	[no se entiende]
4:36	Profesor	Acabáis de decir la distancia, ¿alguna más? Magnitud es todo aquello que se puede medir en términos numéricos, con números. Yo he dicho, por ejemplo, la edad y después, vosotros solos habéis dicho todas éstas. Muy bien, son muchas ya, para no saber qué es una magnitud... Sí que lo sabíais pero no sabíais cómo definirlo. Habéis dicho el peso, la altura, el volumen, la distancia ..., sí

		que conocéis Para que sea una magnitud, se tiene que poder medir ¿sí o no?
5:15	Alumno 1	Todo aquello que se pueda medir...
5:22	Alumno 2	El metro... Con el metro puedo medir.
5:26	Profesor	Ahora vamos ahí... Se entiende ¿no?
5:38	Alumno 1	Yo no lo entiendo
5:40	Alumno 2	Yo tampoco
5:48	Profesor	Hemos dicho que la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables. En esta definición entendéis qué es una magnitud, ¿sí o no? Si ahora decimos que una magnitud es todo aquello que se puede medir en términos numéricos, en números, ¿la edad se puede medir en términos numéricos?
6:16	Alumnos	Sí
6:17	Profesor	¿Por ejemplo?
6:19	Alumno	12 años
6:20	Profesor	¿En qué?
6:21	Alumno	En años.
6:23	Profesor	¿El peso? ¿En qué?
6:24	Alumno 1	En kilos
6:24	Alumno 2	En gramos
6:25	Profesor	En kilogramos, en gramos, ¿no? ¿La altura?
6:27	Alumno	En metros
6:29	Profesor	En metros, centímetros... Muy bien, ¿el volumen?
6:32	Alumno	En litros
6:33	Profesor	En litros. Muy bien
6:42	Alumno	El volumen... ¿no será agua?
6:47	Profesor	De agua... [no se entiende] ¿La distancia?
6:50	Alumno	Kilómetros
6:51	Profesor	En kilómetros, metros. ¿Y el tiempo?
6:52	Alumno	Minutos
6:53	Profesor	Minutos, segundos, ¿vale? Por tanto, sí que sabéis qué son magnitudes. Si miráis allá detrás, tenéis la tabla que pone, km, hm, dam, m, dm, cm... Todo esto ¿es una magnitud? ¿Sí o no?
7:11	Alumno	Sí
7:12	Profesor	¿Qué magnitud será?

7:14	Alumno	Longitud
7:17	Profesor	¿Sí o no? Y vimos en un tema anterior que para pasar, en esta escalera, para pasar de km a m, ¿qué hacíamos?
7:30	Alumno	Multiplicábamos y dividíamos.
7:31	Profesor	Cuando bajábamos de la escalera, ¿qué hacíamos?
7:32	Alumno	Multiplicábamos
7:34	Profesor	Multiplicábamos. ¿Y cuándo subíamos?
7:35	Alumno	Dividíamos
7:37	Profesor	Por ejemplo
7:38	Alumno	¿Y no será cuando subes multiplicas y cuando bajas divides?
7:43	Profesor	Por ejemplo, un km... Si te sitúas en lo alto de la escalera, en los km..., esto lo sabéis que lo hicimos en un tema anterior, si tenemos 1km, ¿cuántos m serán? Si bajamos, ¿cuántos escalones tenemos que bajar en esta escalera?
7:54	Alumno	3
7:56	Profesor	3. Por tanto, ¿por cuánto multiplicaremos?
7:57	Alumno 1	30
7:58	Alumno 2	Por 1000
8:00	Profesor	Cada escalón, ¿a cuantas unidades equivaldrá?
8:02	Alumno	A 3
8:03	Profesor	Muy bien. Dijimos que cada escalón significaba 10...
8:07	Alumno	Sí, pero pensaba que eran 3 escalones por 10
8:11	Profesor	Por tanto, 1km... Si bajar se multiplica, es por 1000. Por tanto serán 1000m. Si subimos, se divide ¿sí o no?
8:20	Alumno	Porque si subes en las escaleras, cada vez quedan menos [no se entiende bien]
8:32	Profesor	Por tanto, aquí [señalando a la tabla del póster de la pared] tenéis diferentes magnitudes: tenéis la longitud, el peso y la capacidad. Por tanto, si en algún problema os dicen que transforméis de km a m, que no creo que sea en este caso, hay que recordar este listado: siempre bajar se multiplica y subir se divide. Cada escalón...
9:00	Alumno	Pero yo tenía razón porque cuando divides lo haces más pequeño y de esta manera en las escaleras quedan menos
9:14	Profesor	Por tanto, esta definición [señalando a la pizarra], ¿la entendéis? Muy bien, o sea que hemos dicho que magnitudes son todas éstas, todo aquello que se puede medir en términos numéricos. Pero hay cosas que no son magnitudes, que no se pueden medir en términos numéricos. Por ejemplo, el color, el

		color del pelo, el color de los ojos, ¿eso es una magnitud?
9:35	Alumno	No
9:36	Profesor	¿Por qué?
9:38	Alumno	Porque no se puede medir
9:39	Profesor	Uno puede decir, un amarillo... ¿tú puedes medir el color?
9:45	Alumno 1	Una magnitud pero no mesurable
9:48	Alumno 2	No
9:52	Alumno 3	O sí.
9:53	Profesor	¡Ah! Vale, por tanto ¿qué será el color?
9:55	Alumno 1	Una magnitud
9:56	Alumno 2	Un número
9:58	Profesor	No es una magnitud porque no la podemos medir
9:59	Alumno 1	Una magnitud no mesurable
10:00	Alumno 2	Sí, porque puede ser el amarillo ... [no se entiende] claro
10:03	Profesor	¿No hemos dicho que magnitud es todo aquello que es mesurable?
10:06	Alumno	¿?? [no se entiende]
10:07	Profesor	No, sería una cualidad... el color del pelo, el color de los ojos, ¿vale?, pero no sería una magnitud ¿vale? Por tanto id con cuidado, si en algún problema, en la calle o algo, os dicen si sabéis qué es una magnitud y os dicen el color, es una cualidad porque si no se puede medir en números, en términos numéricos, no es una magnitud, es una cualidad, como por ejemplo el color ¿vale? Todo esto que habéis dicho vosotros [señala en la pizarra: el peso, la altura, el volumen, la distancia] sí que son magnitudes, son magnitudes, ¿sí? se pueden medir
10:42	Alumno	¿Y hay muchas más magnitudes?
10:45	Profesor	Sí claro...Si se pueden medir... pensad en... litros, en metros, en km y en horas... Copiad estas magnitudes...
11.14	Alumno	Pero por ejemplo, la cantidad se puede contar, por ejemplo, hay muchas sillas.
11:22	Profesor	He dicho calidad, no cantidad
11:25	Alumno	Ya lo sé, pero ¿la cantidad se podría poner ahí?
11:33	Profesor	¿La cantidad es una magnitud? No. Es contable pero no es mesurable. Di una cantidad, por ejemplo... Tienes ¿qué?
11:38	Alumno	Por ejemplo, hay 3 sillas...
11:55	Profesor	¿El número? Sillas. Es contable, puedes medirlo, puedes contarlo... una silla puedes decir lo que pesa, qué altura tiene, eso sí es una magnitud pero lo que tú estás diciendo es que

		es contable o no es contable... ¿Habéis entendido hasta aquí?

Tabla 5.7: Transcripción episodio 1

Descripción del episodio

El profesor va a introducir la proporcionalidad, definiendo qué son magnitudes proporcionales y poniendo ejemplos tanto de magnitudes proporcionales como no proporcionales.

En relación con la introducción al concepto de proporcionalidad, el profesor tiene claro que su objetivo es: 1) ofrecer a los alumnos una definición de proporcionalidad a partir de la que comenzar a trabajar; 2) explicar detalladamente todos los conceptos que intervienen en la definición ofrecida (relación, magnitud, mesurable) y poner ejemplos; 3) insistir en las unidades de las magnitudes y en el cambio de unidades de las mismas; y 4) distinguir entre magnitudes mesurables y no mesurables y dar ejemplos de éstas últimas.

El profesor propone al comienzo del episodio la siguiente definición de proporcionalidad: "La proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables" [0:18], definición que irá después analizando con los alumnos en el resto del episodio, a saber, ¿qué es una relación?, ¿qué es una magnitud?, ¿qué quiere decir mesurables?, ¿qué tipos de magnitudes conocen los alumnos?

El profesor define también qué es una magnitud: "Todo aquello que se puede medir en términos numéricos, con un número, en números" [4:00; 4:36; 5:48; 10:07]. A la hora de poner ejemplos de magnitudes, como la longitud, el tiempo, el peso o la capacidad, se trabaja la unidad de medida de la misma y se recuerda cómo se pasa de una unidad de medida a otra, aprovechando que los alumnos han trabajado el cambio de unidades en un tema anterior.

El profesor identifica el concepto de magnitud con el de magnitud mesurable, de manera que después de trabajar las magnitudes mesurables y las unidades de medida de las mismas, pone también ejemplos de lo que no sería una magnitud, o de lo que sería una magnitud no mesurable (identifica las dos cosas), como el color del pelo o de los ojos [9:14]. Se presenta una cualidad como el concepto opuesto al de magnitud [10:07].

El profesor genera durante todo el episodio una situación de aula interactiva, analizando y discutiendo con los alumnos los conceptos verbalmente, sin escribir mucho en la pizarra. De hecho lo único que escribe en la pizarra es la definición de proporcionalidad a partir de la que se genera toda la discusión.

En cuanto a las intervenciones de los alumnos, el profesor reconoce y pone de manifiesto las aportaciones valiosas de los alumnos, como la respuesta de los alumnos a qué quiere decir mesurables [2:00] "que se pueden medir" [2:16]; ejemplos de magnitudes como el peso o la altura [4:13; 4:17]; las unidades en las que pueden medirse algunas magnitudes [6:24; 6:27]; o cómo cambiar de unidades de medida [7:30].

En relación con las situaciones de contingencia, el profesor atiende las intervenciones de los alumnos pero no siempre de manera satisfactoria. Por ejemplo, hay una intervención de un alumno donde este confunde el cardinal de un conjunto con la medida de una magnitud: "la cantidad se puede contar, por ejemplo, hay muchas sillas" [11:14]. El profesor no ve la duda y no la resuelve: ¿la cantidad es una magnitud? No. Es contable pero no es mesurable" [11:33].

Análisis del episodio

Después de la transcripción y de la descripción del episodio 1, pasamos a analizar el episodio a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland, mostrada en el capítulo 4 (apartado 4.5).

	Indicadores	**Evidencia**
	FUNDAMENTO	
1.1	Identificación magnitudes	No se identifican magnitudes, pero se define magnitud como "todo aquello que se puede medir en términos numéricos, con números" [4:36] y se pide a los alumnos que den ejemplos de magnitudes (mesurables).
1.2	Asignación medida-magnitud	Se pide a los alumnos la unidad de medida de las magnitudes ofrecidas en el curso del episodio para poner de manifiesto que "se pueden medir" [4:36].

1.3	Características magnitudes	Se observa cierta confusión entre magnitud y medida: "¿La cantidad es una magnitud? No. Es contable pero no es mesurable" [11:33]; "¿El número? Sillas. Es contable, puedes medirlo, puedes contarlo... una silla puedes decir lo que pesa, qué altura tiene, eso sí es una magnitud pero lo que tú estás diciendo es que es contable o no es contable..." [11:55]
1.4	Utilización incremento gradual aditivo	---
1.5	Utilización incremento gradual multiplicativo	---
1.6	Explicitación procedimiento reducción a la unidad	---
1.7	Trabajo de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	---
1.8	Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$	---
1.9	Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	---
1.10	Explicitación razón dada en el problema: $k=y/x$ o $x_2/x_1= y_2/y_1$	---
1.11	Explicitación del concepto relevante dentro del problema (lo que el profesor denomina "dato")	---
	TRANSFORMACIÓN	
2.1	Explicitación enseñar técnica si $k=y/x$ no entera	---
2.2	Explicitación que diferencia técnica de concepto	---
2.3	Representación situación del problema con dibujos/esquemas	---
2.4	Uso dibujo/esquema para construir modelo	---
2.5	Asignación valor a la representación en la tabla de valores	---
2.6	Elección ejemplo introductorio nivel visualización gráfica	---
2.7	Elección ejemplo introductorio nivel razón $k=y/x$	---
2.8	Elección ejemplo introductorio con contexto adecuado	---
2.9	Ayuda a descubrir la razón $k=y/x$	---

2.10	Ayuda a aplicar la reducción a la unidad	---
2.11	Ayuda a descubrir la función lineal $y=kx$	---
	CONEXIÓN	
3.1	Relación y comparación reducción a la unidad con otras técnicas	---
3.2	Énfasis (profesor) descubrimiento modelo en el problema y búsqueda modelo dentro del problema (alumno)	---
3.3	Énfasis relación razón $k=y/x$ y red. a la unidad	---
3.4	Énfasis relación razón $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$	---
3.5	Énfasis relación red. a la unidad y la función lineal $y=kx$	---
3.6	Horizonte matemático adelante	---
3.7	Horizonte matemático atrás	Se conecta con el tema del cambio de unidades de las magnitudes: longitud, peso y capacidad [7:17-8:32].
	CONTINGENCIA	
4.1	Utilización métodos aritméticos informales	---
4.2	Generalización razón de proporcionalidad $y=k/x$ a partir de un caso concreto	---
4.3	Utilización razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$	---
4.4	Utilización razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	---
	GENERAL	
5.1	Claridad en los objetivos	Se introduce una definición del concepto de proporcionalidad: "la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables" [1:06] y se analizan todos los conceptos involucrados en la definición dada.
5.2	Claridad en el camino a seguir	Se parte de la definición de proporcionalidad y se pregunta a los alumnos sobre los conceptos de relación, magnitud, mesurable, unidad de medida de una magnitud. Se pide a los alumnos ejemplos de magnitudes mesurables y se trabaja el concepto de magnitud no mesurable como contrapuesto al concepto

		de cualidad.
5.3	Generación situación interactiva	Numerosas intervenciones de los alumnos hasta 50.
5.4	Explicitación reiterada de lo que se hace	---
5.5	Discusión activa en la pizarra	---
5.6	Recapitulación objetivos	"Todo esto que habéis dicho vosotros [señala en la pizarra: el peso, la altura, el volumen, la distancia] sí que son magnitudes, son magnitudes, ¿sí? se pueden medir" [10:07].

Tabla 5.8: Evidencias indicadores episodio 1

5.2.3. Comparación episodios 13 y 1

1. Fundamento

En cuanto a la introducción del concepto de proporcionalidad, la manera de proceder de uno y otro profesor son bien diferentes. El profesor de Primaria define la proporcionalidad al comienzo del episodio como "una relación entre magnitudes mesurables" y a partir de aquí trabaja los conceptos de magnitud, mesurable y unidad de medida, pasando muy por encima por el concepto de relación. Aborda también el cambio de unidades de las magnitudes aprovechando que los alumnos lo habían trabajado anteriormente, por lo que se observa en él visión del horizonte matemático hacia atrás. Esta manera de proceder, de partir de la definición de proporcionalidad para después irla trabajando puede deberse a que como los alumnos no han trabajado antes la proporcionalidad, él profesor mismo afirma "no sabéis nada" [0:18], considere que o bien sea la manera más fácil de entender el concepto de proporcionalidad; o bien que es difícil guiarlos para que lleguen a una definición de proporcionalidad. Los alumnos tampoco saben qué es una magnitud. Lo que sí han trabajado con anterioridad es el concepto de medida y sus unidades y entendemos que el profesor se aprovecha de esto para entrar con más facilidad en el concepto de proporcionalidad e ir desglosando con los alumnos la definición que ha dado.

La profesora de Secundaria, en cambio, llega al final del episodio a definir la proporcionalidad como "lo que haces en un lado [la gasolina], el factor de cambio en un lado se respeta en el otro [nº de vueltas]" o que "mantienes a un lado y al otro la misma relación", sirviéndose de un ejemplo concreto que ha planteado desde el comienzo del episodio, el de las carreras de fórmula 1. La profesora sólo menciona las magnitudes al final del episodio "son diferentes magnitudes porque en un lado estoy hablando de gasolina y en el otro lado estoy hablando de vueltas" y a diferencia del profesor de Primaria, no habla de magnitudes mesurables o no, ni de unidades, ni de cambios de unidades. Esto puede deberse, en primer lugar, a que su objetivo sea que los alumnos lleguen a una definición de proporcionalidad en vez de darles ella una definición como punto de partida. En segundo lugar, a que dicha definición de proporcionalidad sea la de una relación que se conserva, sin entrar en ese momento en cuestiones de magnitudes o unidades como hace el profesor de Primaria. Su objetivo es que los alumnos se queden con la foto de que la proporcionalidad es una relación que se conserva y esto es para la profesora lo relevante, probablemente porque considere que los conceptos de magnitud, unidad de medida y cambios de unidades ya se han trabajado ampliamente en Primaria mientras que la proporcionalidad como relación lineal entre magnitudes no y sea esto último lo que quiere que sus alumnos asuman.

A este respecto quisiera destacar aquí que la secuenciación de la primera clase de proporcionalidad (correspondiente a dos episodios en cada caso) en uno y otro profesor es completamente distinta. El profesor de Primaria, en primer lugar, parte de una definición de proporcionalidad que va desglosando con los alumnos (episodio 1); en segundo lugar, propone a los alumnos dos pares de magnitudes para que justifiquen si son mesurables o no para centrarse, en tercer lugar, en un ejemplo concreto sobre barras de pan (episodio 2.1).

La profesora de Secundaria parte, en primer lugar (episodio 13), del ejemplo de las carreras de fórmula 1 llevando a los alumnos hacia la definición de proporcionalidad como relación que se conserva a ambos lados, que es la definición que le interesa. En segundo lugar (episodio 14), destaca cuál es la magnitud que uno controla, los litros de gasolina y que es ésta la que "pondremos en el eje de las x". Sin duda ya está pensando aquí en la función de proporcionalidad y en su representación. En tercer lugar, que se ha de buscar siempre la información, el dato de partida, a partir del cual poder empezar a trabajar (rellenar los valores correspondientes de la tabla de valores que se piden). Y finalmente, pide a los alumnos encontrar algunos valores en la tabla de proporcionalidad, esto es, el número de vueltas que se pueden dar al circuito con 90, 50 o 120 litros de gasolina.

El hecho de programar secuenciaciones bien distintas para la primera clase de proporcionalidad puede deberse a que uno u otro profesor tenga en mente modelos de enseñanza bien diferentes. En el caso del profesor de Primaria, quiere desarrollar una técnica, por lo que su modelo es partir de la definición de proporcionalidad para desarrollar posteriormente la técnica de reducción a la unidad. En el caso de la profesora de Secundaria, quiere "modelizar" la proporcionalidad y de ahí que su modelo sea partir de un ejemplo y llegar a la definición de proporcionalidad.

Se observa en la profesora de Secundaria visión del horizonte matemático hacia adelante cuando se enfatiza que las 10,8 vueltas al circuito que corresponden a 90l de gasolina se obtienen a partir de 9·1,2, pensando en la futura conexión de la razón de proporcionalidad con la función lineal. No tenemos elementos para valorar si el profesor de Primaria tiene esta misma visión del horizonte matemático hacia adelante puesto que en este episodio no ha introducido todavía ningún ejemplo de proporcionalidad.

La profesora de Secundaria ha elegido un ejemplo introductorio donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no es entera y donde se trabaja para comenzar con una razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ mayor que la unidad y entera. El profesor de Primaria no ha introducido todavía ningún ejemplo de proporcionalidad por lo que no podemos decir aquí nada al respecto.

En cuanto a las magnitudes implicadas, la profesora de Secundaria explicita casi al final del episodio las magnitudes implicadas en el ejemplo, gasolina y número de vueltas [7:00] sin mencionar las unidades de medida de las mismas, pues entendemos que su objetivo principal es llegar a que los alumnos conciban la relación de proporcionalidad como una relación que conserva la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$, donde x_i es el número de litros de combustible e y_i el número de vueltas al circuito.

El profesor de Primaria sí que trabaja la identificación de magnitudes mesurables y sus unidades de medida pero sin relacionar proporcionalmente dos magnitudes concretas, ya que entendemos que su objetivo es que los alumnos entiendan todos los conceptos que aparecen en la definición de proporcionalidad que ha ofrecido al comienzo del episodio. A este respecto define también una magnitud como "todo aquello que se puede medir en términos numéricos". Identifica el concepto de magnitud con el de magnitud mesurable y el de cualidad con el de magnitud no mesurable, esto es, presenta una cualidad como el concepto opuesto al de magnitud.

2. Transformación

En cuanto a los ejemplos utilizados para introducir el concepto de proporcionalidad, la profesora de Secundaria utiliza uno sobre las carreras de coches de fórmula 1, que entendemos se halla en un contexto familiar para los alumnos. El profesor de Primaria no ofrece ningún ejemplo de magnitudes proporcionales en este episodio pues su objetivo es analizar los conceptos de magnitud, magnitud mesurable o no, unidad de medida y cambio de unidad que se derivan de la definición de proporcionalidad ofrecida al comienzo del episodio y a este respecto, surgen a lo largo de todo el episodio ejemplos variados, próximos a los alumnos, de todos estos aspectos. Destacamos de nuevo una secuenciación completamente distinta en ambos profesores para la primera clase de proporcionalidad (episodios 13 y 14 del Primer curso de Secundaria y episodios 1 y 2.1 de Sexto curso de Primaria).

En cuanto a la utilización de representaciones gráficas de la situación del problema, la profesora de Secundaria recurre a la representación del "dato" del problema (con 10l se dan 1,2 vueltas al circuito) que le permita tanto extraer un modelo para responder el número de vueltas que se darán con 90l, como ofrecer una primera definición de proporcionalidad (mantener a un lado y a otro la misma relación). Destaca que se ha de buscar siempre la información, el dato de partida que el problema siempre ofrece y que "tenemos que aprender a descubrirla para visualizarlo [4:40]". Entendemos que para la profesora de Secundaria una representación gráfica de la situación del problema es un medio para pasar fácilmente a la tabla de valores y con ello a la reducción a la unidad. Otorga un valor concreto a la tabla de valores. El profesor de Primaria, por su parte, no recurre a las representaciones gráficas pues no resuelve ningún problema en el episodio 1 objeto de esta comparación.

3. Conexión

Entendemos que la profesora de Secundaria, al pretender llegar a que la proporcionalidad no es otra cosa que conservar el factor de cambio que se aplica entre 2 valores de las magnitudes número de litros y número de vueltas al circuito respectivamente, busca en cierta manera que los alumnos saquen un modelo del problema. Incluso en el hecho de remarcar que para saber el número de vueltas que corresponden a 90l hay que multiplicar 9 por 1,2 ya se está estableciendo algún tipo de relación, sin explicitarla todavía, entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$.

4. Contingencia

En relación con las intervenciones de los alumnos, ambos profesores las gestionan de manera ágil, tienen en cuenta muchas intervenciones de los alumnos.

Respecto a las situaciones de contingencia, el profesor de Primaria no gestiona situaciones de contingencia que tengan que ver con la utilización de métodos aritméticos informales, la utilización de la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$ o la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$, puesto que en este episodio el profesor no ha ofrecido aún a los alumnos un problema de proporcionalidad en el que tengan que buscar valores en una tabla de proporcionalidad y no se dan por tanto las condiciones para que puedan aparecer estas situaciones de contingencia.

El profesor de Primaria pone de manifiesto las numerosas aportaciones de los alumnos que tienen que ver con el concepto de magnitud mesurable, con ejemplos de magnitudes, con unidades de medida de las mismas y con cambio de unidades. Ahora bien, en el profesor se observa al final del episodio cierta confusión entre magnitud y medida, en las intervenciones que hace entre 11:33 y 11:55. Es una situación de contingencia en la que un alumno pregunta si el cardinal de un conjunto es una medida [11:14] y el profesor se mete en un lío sin resolver la duda del alumno [11:33]. El profesor distingue contar de medir pero lo que no hace es ver que contar es un caso particular de medir, por lo que parece no tener claro qué significa medir.

En cambio, la profesora de Secundaria recoge la intervención que lleva a ver la proporcionalidad como una relación que conserva el factor de cambio entre 2 valores de la misma magnitud $x_2/x_1=y_2/y_1$, preguntando al alumno cómo ha encontrado el valor 10,8 vueltas al circuito que corresponde a 90 litros de gasolina. Asimismo la profesora recoge las intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales para encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad, aunque esta intervención del alumno está guiada por la profesora y no se consideraría como una situación de contingencia al estar planificada.

5. General

En relación con la definición de proporcionalidad, los dos profesores tienen claro que su objetivo es introducir el concepto de proporcionalidad a partir del cual comenzar a trabajar en clases sucesivas. La profesora de Secundaria llega al final del episodio a una definición de proporcionalidad a partir del ejemplo sobre las carreras de coches de fórmula 1; mientras que el profesor de Primaria ofrece a los alumnos desde el inicio una definición general de proporcionalidad que irá después desgranando y contextualizando. El hecho de que el profesor de Primaria ofrezca una definición de proporcionalidad como punto de partida puede deberse a que o bien considere que los alumnos no son capaces de llegar a una definición guiada por él puesto que él mismo afirma al comienzo del episodio que de proporcionalidad los alumnos no saben nada; o bien a que se encuentre más a gusto planteándolo de esta manera, porque este sea su modelo de enseñar.

Los dos profesores generan durante todo el episodio una situación de aula interactiva. El profesor de Primaria analiza y discute con los alumnos los conceptos verbalmente, pues lo único que escribe en la pizarra al comienzo del episodio es la definición de proporcionalidad a partir de la que se genera toda la discusión. En cambio la profesora de Secundaria escribe continuamente mientras discute activamente el problema en la pizarra.

5.3. Análisis y comparación de los episodios 14 del Primer curso de Secundaria y 2.1 de Sexto curso de Primaria sobre la Introducción a la proporcionalidad-2

5.3.1. Episodio 14 del Primer curso de Secundaria

Contextualización del episodio

<u>Contenido</u>: Introducción a definición de proporcionalidad.
<u>Curso</u>: alumnos de 12-13 años del Primer curso de Secundaria (IES Verdaguer)

Duración: 9:43

Fecha grabación: 10.04.2012

Episodio extraído de la primera clase de proporcionalidad donde se introduce la proporcionalidad con un ejemplo contextualizado en las carreras de fórmula 1. Si un coche da 1,2 vueltas al circuito de Montmeló, se pide que los alumnos encuentren cuántas vueltas se pueden dar al circuito con 90, 50 y 120 litros de gasolina.

Transcripción del episodio

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:00	Profesora	[Escribe en la pizarra...] En este problema [el de la fórmula 1] hemos observado una relación de proporcionalidad -proporcionalidad va subrayado porque es una definición, una frase nueva, una idea nueva-, entre 2 magnitudes: la gasolina y las vueltas al circuito. Vamos a ver el modelo matemático –y ahora una palabra nueva, ¿vale?- inherente –y ahora os explico qué quiere decir: inherente quiere decir que está interno, que está dentro, que está como escondido y que es propio, in-he-ren-te con una "h" intercalada, y que es propio del problema correspondiente.
2:36		Mirad, nosotros los matemáticos lo hacemos así: ponemos las 2 magnitudes en forma tabular, en forma de tabla. Nosotros el formato de tabla lo conocemos desde hace unos meses, desde que hicimos la estadística. Y las tablas a veces van en vertical, como ésta que tengo en la pizarra, o en horizontal. No hay ninguna diferencia conceptual entre ellas. Aquí tendremos una vertical y en el libro, la primera que nos ponen de las chocolatinas y los tés es en horizontal, ¿de acuerdo? Vale.
3:08		¿Qué he hecho yo? Dar la gasolina [la escribe] y la gasolina era algo que yo controlaba, algo que yo podía decidir cuánta iba en el coche ¿todos de acuerdo? Por eso es la primera que escribo. Por cierto, nosotros que ya hemos hecho las representaciones gráficas en la hora partida, esto lo pondremos en el eje de las "x", en el eje horizontal. Falta un poco... pero no es arbitrario que está la primera y que esté en la posición de las "x", y aquí a la derecha pondremos las vueltas.
3:55		Y ahora voy a resumir un poco, a poner de una manera mejor la información que nos viene. Esto es un dato: yo os he dicho que

 4:40 5:00		con 10l hacía 1,2 vueltas y esto es un dato del problema. Siempre tenemos que tener algún dato de partida para poder comenzar a trabajar. Esto es el enunciado [escribe al lado de 1,2 vueltas "Dato"="Enunciado"]. El dato no siempre [no se entiende], ya la desentrañaremos en cada problema... Es un dato, es una parte del enunciado. Siempre tiene que haber alguna, algún tipo de información sobre el problema y nosotros tenemos que aprender a descubrirla para visualizarlo. Una vez tenemos el dato o el enunciado, ya podemos comenzar a trabajar. ¿Qué pasaría si ponemos 90l? Hemos visto que eran 10,8 vueltas. ¿Y si pongo 50l Bianca?
5:19	Bianca	Eh... [No contesta]
5:26	Profesora	50... Jonás
5:30	Jonás	3 con 5
5:31	Profesora	¿Cuánto?
5:32	Jonás	Por 5
5:33	Profesora	Por 5 ¿qué?
5:34	Jonás	El 1,2 por 5
5:36	Profesora	El 1,2 por 5, que son, ¿Aimar?
5:40	Aimar	60
5:41	Profesora	60...
5:42	Aimar	¡Ay! 6
5:43	Profesora	6 vueltas ¿no? 6 vueltas ¿sí? Serían 6 vueltas. ¿Y si pongo 47l?
5:50	Aimar	7 con [no se entiende]. Habría que multiplicarlo...
5:56	Profesora	Soy mala ¿eh? 47. Soy mala
5:58	Aimar	...por 4,7...
6:00	Profesora	Bueno, todavía 47 no. Y ¿si pongo 120l?... ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l]...? Este es el enunciado. Es que esta es la clave, por eso la he marcado. ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l] hasta aquí abajo [señala los 120l], Farfán? ¿Por cuánto he multiplicado el 10?
6:29	Farfán	Por 10
6:33	Profesora	Venga Ainoa
6:34	Ainoa	¿14,4?
6:35	Profesora	14,4
6:36	Alumno	1,2 por 120
6:37	Profesora	Sí, sí. Genial, si está superbien. Tomás explícanos porque Ainoa ha dicho el último resultado. Tú explícanos el proceso.
6:44	Tomás	Pues haces, multiplicas por 1, por 12...

6:50	Profesora	Genial, 10 por 12, que es lo que preguntaba Farfán. Perfecto, hemos hecho 10 multiplicado por 12 y entonces... [señala la derecha de la tabla]
6:59	Tomás	El 1,2 por 12
7:00	Profesora	El 1,2 por 12 que son 14,4.
7:03	Ainoa	Yo lo he hecho de otra forma
7:04	Profesora	Venga Ainoa. ¡Explícanoslo!
7:06	Ainoa	He hecho 50 que son 6 ¿no? Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2.
7:21	Profesora	A ver, vuélvemelo a explicar
7:24	Ainoa	O sea, que 50 son 6 vueltas ¿no? Y como es 120, yo he cogido el 100 y he hecho 50 y 50, 12...
7:33	Profesora	Muy bien
7:34	Alumno	Y después como me sobran 20, he sumado 10 y 10 que son 20 y me sale 2,4.
7:40	Profesora	Genial
7:41	Ainoa	14,4
7:42	Profesora	Genial. Pinta bien. Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120, lo ha partido en trocitos con los cuales ella se encontraba cómoda. Lo voy a explicar un momento en la pizarra. Al final no utilizaremos esta técnica pero me parece superingeniosa.
7:58	Aimar	Es mejor poner 10,8 y sumarle 2 veces 4 [no se entiende bien]
8:02 8:16 9:10	Profesora	Hay muchas maneras de hacerlo pero conceptualmente vuestras dos maneras son diferentes. A mí me gustan las dos, lo que pasa que en el tema que estamos, digamos que la tuya es la que busco [la de Tomás]. Pero está muy bien y como está muy bien yo pienso que está bien explicarla. Ella ha hecho, a ver. Yo tengo 120 [dibuja un segmento grande] que es todo este trozo. Entonces el 120 lo puedo descomponer en trocitos que ya conozco: sería 50 y 50 y me faltan 20 [va dividiendo el segmento en tres partes y escribiendo encima de cada trozo los litros: 50, 50 y 20]. Con 50 hago 6 vueltas porque ella lo está viendo [señala en la tabla 50l y 6 vueltas] ¿todos? Y con 50 más hago unas 6 vueltas [escribe debajo de los 2 primeros segmentos 6 y 6]. Y ahora el 20. Entonces ha dicho. Vale y el 20 ¿qué hago? No tengo el 20 en la tabla, pero sí que tengo el 10. Pues puedo pensarme que hay 10, 2 veces. Sería 1.2 y 1.2, 2.4 ¿todos lo estamos viendo? Entonces al final ha sumado 6 y 6, 12, oye 14.4. Genial. ¿Estamos entendidos como lo ha hecho Ainoa? Otra manera. Tomás ha llegado a este 14,4 haciendo el 1,2 por 12 [escribe al

		lado de 14,4=1,2·12] porque la razón de que Tomás haya hecho 1,2 por 12 es que ha dicho, hombre, el factor de paso de aquí [10l] a aquí [120l] es por 12 ¿todos lo vemos?, ¿sí? y entonces, el factor de paso de aquí [1,2 vueltas] a 14,4 también va a ser multiplicar por 12. ¿Ok todos?

Tabla 5.9: Transcripción episodio 14

Descripción del episodio

La profesora va a introducir el concepto de proporcionalidad, profundizando en el ejemplo contextualizado en las carreras de coches de fórmula 1 con el que ha introducido el tema de la proporcionalidad. Este episodio 14 junto con el 13 está extraído de la primera clase sobre proporcionalidad.

A partir del ejemplo introductorio de las carreras de fórmula 1 con el que la profesora ha introducido el concepto de proporcionalidad en la primera parte de la clase, irá extrayendo de dicho ejemplo todos los elementos que necesita para llegar a modelizar la proporcionalidad como función lineal.

En relación con el concepto de proporcionalidad, la profesora tiene claro que su objetivo es ver el modelo matemático inherente a una relación de proporcionalidad [0:00], es decir, ver la proporcionalidad como una función lineal. Para ello, en primer lugar, se guía a que el alumno vea cuál es la variable independiente de la función, "la gasolina era algo que yo controlaba, algo que yo podía decidir cuánta iba en el coche" [3:08], y se relaciona con las representaciones gráficas que los alumnos ya han estudiado con anterioridad, "esto lo pondremos en el eje de las 'x', en el eje horizontal" [3:55]. Se está relacionando la representación tabular de los datos del problema con la representación de una función lineal. En segundo lugar, al plantear a los alumnos el número de vueltas que se darán al circuito con por ejemplo 120 litros de combustible y que expliquen cómo obtienen la repuesta, la profesora enfatiza que la solución que le interesa es la que llega a la solución de que el número de vueltas es 1,2·12=14,4 vueltas. Se otorga un valor concreto a la tabla de valores al insistir en que se pongan las 2 magnitudes en forma tabular, remarcando a su vez que las tablas pueden recoger los datos en forma vertical u horizontal y recordando a los alumnos que ya han utilizado el formato de tabla al estudiar la estadística [2:36].

Se insiste en el "dato" del problema, "yo os he dicho que con 10 litros hacía 1,2 vueltas y esto es un dato del problema", subrayando a continuación que siempre hay que extraer un dato de partida del enunciado del problema para poder empezar a trabajar [4:40-5:19].

La profesora elige un ejemplo introductorio donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no es entera. Se trabaja con posterioridad con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ enteras y mayores que la unidad pues se pide a los alumnos que busquen cuántas vueltas al circuito se darán con 50, 90 y 120 litros de combustible. Sin embargo, la profesora introduce en un momento dado una razón escalar no entera al preguntar el número de vueltas que se daría con 47 litros [5:43] con la intención de justificar después que la modelización de la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes como función lineal permite dar una respuesta más rápida y satisfactoria al número de vueltas que se dará al circuito con x litros de combustible, independientemente de que la razón $x/10$ sea entera o no, mayor o menor que la unidad.

La profesora genera una situación de aula interactiva solicitando reiteradamente la intervención de los alumnos. Se discute el problema activamente en la pizarra, escribiendo continuamente.

En relación a las situaciones de contingencia, la profesora gestiona las intervenciones de los alumnos de una manera muy ágil. Al plantear cuántas vueltas se darán al circuito con por ejemplo 120l de combustible, recoge intervenciones de los alumnos donde estos utilizan métodos aritméticos informales (la estrategia del incremento gradual aditivo): "Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2" [7:06]. Enfatiza intervenciones en las que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y su conexión con la función lineal $y=kx$, como la intervención en la que el alumno encuentra que con 120 litros se pueden dar 14,4 vueltas al circuito, llegando a 14,4 como 1,2 por 12 [6:59]. Le interesa que los alumnos vean la proporcionalidad como función lineal: "a mí me gustan las dos [maneras de llegar a la solución, con métodos aritméticos informales y con el modelo de la función lineal], lo que pasa que en el tema que estamos, digamos que la tuya es la que busco [la de 1,2 por 12]" [8:02].

Análisis del episodio

Después de la transcripción y de la descripción del episodio 14, pasamos a analizar el episodio a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland, mostrada en el capítulo 4 (apartado 4.5).

	Indicadores	**Evidencia**
	FUNDAMENTO	
1.1	Identificación magnitudes	"…entre 2 magnitudes: la gasolina y las vueltas al circuito" [0:00].
1.2	Asignación medida-magnitud	---
1.3	Características magnitudes	---
1.4	Utilización incremento gradual aditivo	"Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120, lo ha partido en trocitos con los cuales ella se encontraba cómoda. Lo voy a explicar un momento en la pizarra" [7:42]
1.5	Utilización incremento gradual multiplicativo	"¿Y si pongo 50l Bianca?... el 1,2 por 5" [5:00-5:36]
1.6	Explicitación procedimiento reducción a la unidad	---
1.7	Trabajo de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	"Porque la razón de que Tomás haya hecho 1,2 por 12 es que ha dicho, hombre, el factor de paso de aquí [10l] a aquí [120l] es por 12" [9:10].
1.8	Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$	$k=0,12$ aunque la profesora trabaja en realidad con 1,2. En cualquier caso, razón no entera: "con 10l se dan 1,2 vueltas al circuito".
1.9	Tipo de razón escalar $x_2/x_1= y_2/y_1$	Razón mayor que la unidad y enteras: ¿cuántas vueltas se darán con 90, 50 y 120l?
1.10	Explicitación razón dada en el problema: $k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$	--- [no explícitamente, la profesora considera k=1,2 en vez de 0,12 y divide el nº de litros por 10. Asimila 10l a la unidad].
1.11	Explicitación del concepto relevante dentro del problema (lo que el profesor denomina "dato")	"Yo os he dicho que con 10 litros hacía 1,2 vueltas y esto es un dato del problema. Siempre tenemos que tener algún dato de partida para poder

		comenzar a trabajar" [3:55].
TRANSFORMACIÓN		
2.1	Explicitación enseñar técnica si $k=y/x$ no entera	---
2.2	Explicitación que diferencia técnica de concepto	---
2.3	Representación situación del problema con dibujos/esquemas	"Yo tengo 120 [dibuja un segmento grande] que es todo este trozo. Entonces el 120 lo puedo descomponer en trocitos que ya conozco: sería 50 y 50 y me faltan 20 [va dividiendo el segmento en tres partes y escribiendo encima de cada trozo los litros: 50, 50 y 20]. Con 50 hago 6 vueltas porque ella lo está viendo [señala en la tabla 50l y 6 vueltas] ¿todos? Y con 50 más hago unas 6 vueltas [escribe debajo de los 2 primeros segmentos 6 y 6]. Y ahora el 20. Entonces ha dicho. Vale y el 20 ¿qué hago? No tengo el 20 en la tabla, pero sí que tengo el 10. Pues puedo pensarme que hay 10, 2 veces. Sería 1.2 y 1.2, 2.4 ¿todos lo estamos viendo? Entonces al final ha sumado 6 y 6, 12, oye 14.4 [8:16].
2.4	Uso dibujo/esquema para construir modelo	---
2.5	Asignación valor a la representación en la tabla de valores	"Ponemos las 2 magnitudes en forma tabular, en forma de tabla. Nosotros el formato de tabla lo conocemos desde hace unos meses, desde que hicimos la estadística. Y las tablas a veces van en vertical, como ésta que tengo en la pizarra, o en horizontal. No hay ninguna diferencia conceptual entre ellas." [2:36].
2.6	Elección ejemplo introductorio nivel visualización gráfica	---
2.7	Elección ejemplo introductorio nivel razón $k=y/x$	"con 10l se dan 1,2 vueltas al circuito".
2.8	Elección ejemplo introductorio con contexto adecuado	"con 10l se dan 1,2 vueltas al circuito".

2.9	Ayuda a descubrir la razón *k=y/x*	---
2.10	Ayuda a aplicar la reducción a la unidad	---
2.11	Ayuda a descubrir la función lineal *y=kx*	"La gasolina era algo que yo controlaba, algo que yo podía decidir cuánta iba en el coche ¿todos de acuerdo? Por eso es la primera que escribo. Por cierto, nosotros que ya hemos hecho las representaciones gráficas en la hora partida, esto lo pondremos en el eje de las "x", en el eje horizontal. Falta un poco... pero no es arbitrario que está la primera y que esté en la posición de las "x", y aquí a la derecha pondremos las vueltas" [3:55].
	CONEXIÓN	
3.1	Relación y comparación reducción a la unidad con otras técnicas	----
3.2	Énfasis (profesor) descubrimiento modelo en el problema y búsqueda modelo dentro del problema (alumno)	"Hay muchas maneras de hacerlo pero conceptualmente vuestras dos maneras son diferentes. A mí me gustan las dos, lo que pasa que en el tema que estamos, digamos que la tuya es la que busco [la de Tomás]… Tomás ha llegado a este 14,4 haciendo el 1,2 por 12 [escribe al lado de 14,4=1,2·12]" [8:02-9:10].
3.3	Énfasis relación razón *k=y/x* y red. a la unidad	---
3.4	Énfasis relación razón *k=y/x* y la función lineal *y=kx*	---
3.5	Énfasis relación red. a la unidad y la función lineal *y=kx*	---
3.6	Horizonte matemático adelante	"Hay muchas maneras de hacerlo pero conceptualmente vuestras dos maneras son diferentes. A mí me gustan las dos, lo que pasa que en el tema que estamos, digamos que la tuya es la que busco" [8:02]. La profesora se refiere a modelizar la proporcionalidad como función lineal.

3.7	Horizonte matemático atrás	---
CONTINGENCIA		
4.1	Utilización métodos aritméticos informales	[5:36]
4.2	Generalización razón de proporcionalidad $y=k/x$ a partir de un caso concreto	---
4.3	Utilización razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$	[4:58; 5:57]
4.4	Utilización razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	[5:02]
GENERAL		
5.1	Claridad en los objetivos	Ver la proporcionalidad como una función lineal.
5.2	Claridad en el camino a seguir	Guiar al alumno para que vea cuál es la variable independiente de la función, "la gasolina era algo que yo controlaba, algo que yo podía decidir cuánta iba en el coche" [3:08]; relacionar la variable con las representaciones gráficas que los alumnos ya han estudiado con anterioridad, "esto lo pondremos en el eje de las 'x', en el eje horizontal" [3:55]; y llegar de esta manera al modelo nº de vueltas=1,2·nº de litros. [Nota, la profesora considera k=1,2 en vez de 0,12 y divide el nº de litros por 10].
5.3	Generación situación interactiva	Numerosas intervenciones de los alumnos hasta 18.
5.4	Explicitación reiterada de lo que se hace	---
5.5	Discusión activa en la pizarra	Constante en todo el episodio
5.6	Recapitulación objetivos	"Tomás ha llegado a este 14,4 haciendo el 1,2 por 12 [escribe al lado de 14,4=1,2·12] porque la razón de que Tomás haya hecho 1,2 por 12 es que ha dicho, hombre, el factor de paso de aquí [10l] a aquí [120l] es por 12 ¿todos lo vemos?, ¿sí? y entonces, el factor de paso de aquí [1,2 vueltas] a 14,4 también va a ser multiplicar por

		12. ¿Ok todos?" [9:10].

Tabla 5.10: Evidencias indicadores episodio 14

5.3.2. Episodio 2.1 de Sexto curso de Primaria

Contextualización del episodio

Contenido: Magnitudes proporcionales
Curso: alumnos de 11-12 años de Sexto curso de Primaria (CEIP Parc de la Ciutadella)
Duración: 13:32:24
Fecha grabación: 20.05.2011

Episodio extraído de la primera clase de proporcionalidad donde después de haber dado la definición de proporcionalidad y de haber trabajado los conceptos de magnitud, mesurable, unidades de medida de una magnitud, cambio de unidades y magnitudes no mesurables, se propone ahora a los alumnos, en este episodio de clase, algunos pares de magnitudes para que justifiquen si son proporcionales o no y se trabaja después con un ejemplo concreto: *si 2 barras de pan cuestan 1,80€, ¿cuánto costarán 4 barras de pan?*

Transcripción del episodio

HORA	INTERVINIENTE	DIÁLOGO
0:13	Profesor	Cómo sabemos qué magnitudes son proporcionales y qué magnitudes no son proporcionales. Por ejemplo, voy a hacerlo al revés y vosotros me tenéis que decir si son proporcionales o no. Por ejemplo, tenemos aquí barras de pan… o número de barras de pan y aquí tenemos una magnitud que acabamos de decir es…
0:58	Alumno	El dinero
0:59	Profesor	El precio ¿no? Dinero. ¿Cómo escribimos el dinero?
1:01	Alumno	En Euros
1:02	Profesor	En euros. La pregunta que os hago es cómo sabemos cuáles magnitudes son proporcionales y cuáles no si sabemos que la proporcionalidad es la relación que hay entre magnitudes…

		Y aquí tenemos [en otra parte de la pizarra] la edad por ejemplo y aquí tenemos la altura… Son ejemplos, se pueden hacer muchos ejemplos.
1:45	Alumno	Pero, ¿por qué haces esto?
1:47	Profesor	Porque son dos diferentes. Aquí hay 2 magnitudes y aquí otras dos. La pregunta que yo os hago después de ver estas gráficas, ¡ay! después de ver estas columnas es si estas 2 magnitudes son proporcionales [señala las 2 primeras] y estas otras también [señala las dos segundas]. Es decir, si sabéis qué quiere decir proporcionales, si tienen relación. Serán proporcionales si hay relación entre ellas.
2:10	Alumno	Y ¿cómo se sabe si hay relación?
2:11	Profesor	Vamos a verlo. Por ejemplo, ¿cómo sabemos si dos magnitudes son proporcionales? Vamos a entrar en este concepto, en el de proporcionalidad. Es muy fácil si lo entendéis. Por ejemplo, imaginad que vais a la panadería a comprar el pan como todos los días ¿no?… Imaginemos que vamos a comprar 2 barras de pan. Número de barras de pan: 2. Y la de la panadería nos dice que valen 1…
3:06	Alumno	¿Cada una?
3:08	Profesor	…80. No, ¿cuántas?
3:10	Alumnos	2
3:11	Profesor	¿Valen?
3:12	Alumnos	1,80
3:14	Alumno 1	¡Qué caro!
3:15	Alumno 2	Está barato
3:16	Profesor	Sí. Son caras ¿no?
3:17	Alumno 1	Son caras
3:20	Alumno 2	A mí 2 me cuestan 1€.
3:21	Alumno 3	Por eso
3:22	Profesor	2 ¿1€?
3:23	Alumno	¿1€ sólo?
3:25	Alumno	Pues a mí...
3:26	Profesor	En este caso, imaginemos que son barras de pan de… integrales o de cereales. Las más caras. Si no, no dará bien... 2 barras de pan, 2 ¿eh?, 1.80. Aquí [señala debajo del precio], ¿qué unidad de medida habéis...?
3:54	Alumno 1	Precio

3:55	Alumno 2	Altura
3:57	Profesor	Sí, el precio es la magnitud, pero ¿cuál es la unidad de medida?
4:01	Alumno	Euros
4:02	Profesor	En euros ¿eh? Recordad esto. Valen 1,80. Mi pregunta es, ya os lo he dicho al principio, cómo sabemos si éstas magnitudes son proporcionales, es decir, si tienen relación [señala las primeras, las de la izquierda: barras de pan-euros] y éstas [señala las segundas, las de la derecha: edad-altura], si son proporcionales o no son proporcionales… ¿Cómo sabemos esto? Es decir, si yo digo, voy y digo, si dos barras de pan me costarán 1,80, quiero comprar...
4:30	Alumno	3
4:32	Profesor	…4!! Os hago la pregunta, ¿si quiero comprar 4?
4:35	Alumno	1,80 por 2
4:38	Profesor	…Si el día anterior fui y compré 2 barras de pan y me cobraron 1,80, al día siguiente tengo invitados en casa y quiero comprar 4 barras de pan. ¿Sabré lo que… me anticiparé a lo que… podré predecir lo que me podrán costar?
4:54	Alumnos	Sí
4:55	Profesor	¿Sí o no podré?
4:56	Alumno	Sí
4:57	Profesor	¿Por qué?
4:58	Alumno	Porque en 2 está la mitad de 4. 4 es el doble de 2
5:01	Profesor	¿Cómo has dicho?
5:02	Alumno	4 es el doble de 2
5:04	Profesor	Ha dicho un concepto nuevo ¿no? El doble ¿no?... Sabéis que es el doble ¿no? ¿Qué es el doble?
5:12	Ainoa	Vicenç, yo haría 1,80 por 2
5:17	Profesor	1,80 por 2. ¿Por qué?
5:19	Ainoa	Cómo 2 barras valen 1,80 y son 2 barras más
5:24	Alumno 1	El doble
5:25	Profesor	Lo que haría la Ainoa: 1,80 por 2. Muy bien. ¿Se podría hacer otra cosa?
5:31	Alumno	Sí
5:32	Profesor	Con este concepto de doble. ¿Es el doble?
5:36	Alumno	Se podría sumar: 1,80 y 1,80
5:38	Profesor	Se podrían sumar
5:39	Ainoa	Que son 3,60. 3,60
5:46	Profesor	¿Y se podría hacer otra cosa? ¿Qué?
5:47	Alumno	Sí

5:50	Alumno	180 dividido entre 2 y esto por 4
5:52	Profesor	Sí pero tú ya sabes que son 4 las que quieres comprar, tú necesitas saber el precio
5:57	Alumno	Sí, 180 dividido entre 2 que da el precio de una, por 4
6:01	Profesor	Ah vale. Muy bien también. 1,80 dividido entre 2 y el resultado...
6:07	Alumno	1,80
6:08	Profesor	Multiplicado por 4 has dicho. ¿Veis? Cada uno lo haría de diferentes formas [1,80x2; 1,80+1,80; (1,80:2)x4] y el resultado sería ¿cuál?
6:17	Alumno	0,90 por 4
6:18	Alumno	90 dividido por 4
6:20	Profesor	Por tanto, esto está bien… llegar al resultado de diferentes formas… ya sé que lo sabéis. Pero lo que me interesa es esto, de esta tabla de aquí [señala la tabla que ha hecho en la pizarra donde pone número de barras de pan, precio, 2, 1.80, 4].
6:31	Ainoa	¡Vicenç!, una barra vale 90 céntimos. [El profe no lo recoge esto en la tabla]
6:41	Profesor	Por tanto, si ya sabemos lo que son 4, lo que valen 4 barras, ¿cuánto costarían?
6:47	Alumno	3,60
6:48	Profesor	3,60. Muy bien [el profesor escribe 3,60 en la tabla] Por tanto…
6:51	Alumno	Euros
6:52	Profesor	¿Son proporcionales estas dos?
6:55	Alumno	Sí
6:56	Profesor	¿Por qué?
6:57	Alumno	Porque son iguales. Bueno no es que sean iguales, que…
7:01	Profesor	A ver, me tenéis qué decir por qué son proporcionales estas dos magnitudes, ¿por qué son proporcionales?
7:06	Alumno	Porque se pueden medir
7:07	Profesor	Todas son magnitudes. Todas se pueden medir.
7:10	Ainoa	Porque son dobles
7:12	Profesor	Porque son dobles. Este concepto lo habéis visto muy bien. Hacemos otra para que lo veáis. Tengo más convidados [escribe 6 y lo borra]. Venga, tengo 1 convidado más que no lo había dicho el día anterior porque trabajaba [el profesor escribe 5 en la tabla]
7:28	Alumno	No 6
7:29	Profesor	Pues ponemos 6. Venga va: 6. ¿Sabemos también el…?

		[señala el lugar de la tabla donde toca el precio de 6 barras]
7:36	Ainoa	Sí. 3,60 por 2
7:41	Profesor	¿Y qué daría?
7:44	Alumno 1	No, no es por 2
7:45	Alumno 2	No, no es por 2
7:46	Alumno 3	5,40
7:47	Alumno 4	5,20
7:48	Alumno	…tienes que dividir… 180 por 3
7:49	Profesor	Lo ponemos aquí, ¿qué haríamos aquí?
7:50	Alumno 1	por 3
7:51	Alumno 2	Yo haría 90 por 3
7:53	Profesor	¿Qué operaciones haríamos aquí? Venga
7:56	Alumno 1	180 por 3
7:58	Profesor	180 por 3
8:00	Alumno 2	1, 80 [corrige al alumno 1]
8:01	Profesor	¡Ah! Y esto ¿qué quiere decir? ¿Qué sería esto?
8:06	Alumno 1	Doble
8:07	Alumno 2	Triple
8:08	Profesor	Muy bien. Aquí hay un concepto nuevo. El triple.
8:17	Alumno	90 por 3. ¡Ay! Por 6, por 6…
8:22	Ainoa	¿Y eso cuánto da?
8:27	Alumno	5,20
8:28	Profesor	¿Seguro?
8:29	Alumno	Con 40, perdón
8:30	Alumno	Ahora
8:38	Ainoa	360 por 2
8:39	Alumno	No
8:44	Alumno	Entonces serían 4 por …
8:46	Alumno	90 por 3 por 2
8:47	Profesor	90 por 3 y después por 2
8:50	Alumno 1	Y el resultado por 2
8:53	Alumno 2	Y nos da 5 con 40
8:54	Profesor	Después el resultado multiplicarlo por 2 ¿no? también
8:57	Alumno 2	O primero dividirlo por…
8:59	Profesor	¿Seguro? ¿Nos daría lo mismo?
9:01	Alumno	Sí
9:02	Alumno	5,20
9:03	Profesor	Por tanto, da ¿qué?
9:05	Alumno	5 con 20
9:05	Alumno	5,40
9:06	Alumno	Y luego multiplicarlo por dos, y luego

9:10	Alumno	5,40
9:11	Alumno	3,60+1,80
9:13	Profesor	Claro, también [el profesor hace la operación en la pizarra].
9:19	Alumno	Ya lo he dicho yo
9:20	Ainoa	Pues yo tengo otro
9:21	Profesor	Se pueden hacer muchas cosas
9:22	Ainoa	1 con 80 por 6, no por 4
9:27	Profesor	¿Por qué? No…
9:28	Alumno	O 3,50 + 0,90
9:30	Profesor	Por 6 no, porque aquí son 2 [señala casilla 21 de la tabla, donde está el 2].
9:32	Alumno	El resultado, ¿cuál es?
9:34	Profesor	¿Cuál es el resultado?
9:37	Alumno	5,40
9:38	Profesor	Muy bien [escribe 5,40 en la tabla]. Por tanto, hemos visto que, incluso Ainoa ha pensado que 1 barra de pan… ¿cuánto vale 1 barra de pan? Aquí no está la unidad. ¿Cómo lo sabemos? Habéis dicho que 2 valen 1,80, que valen 3,60 [señala las 4 barras] porque alguien ha dicho que es el doble, el doble será 3,60; después habéis dicho que es el triple, si ponemos 6 ¿sí o no? y ella ha dicho que de 1, ¿cuánto has dicho que vale 1 barra de pan?
10:19	Alumnos	90
10:20	Profesor	90 céntimos. Pero ¿cómo lo sabemos esto?
10:22	Alumno	Porque 90 por 90…
10:24	Profesor	90 por 90 no
10:34	Ainoa	180 entre 2
10:37	Profesor	90 entre 2 ¿Qué quiere decir esto? ¿Qué concepto es este?
10:40	Ainoa	Pues la división
10:42	Profesor	Pero ¿qué sería? Si esto es el doble [señala las casillas donde están el 2 y el 4], después tengo el triple [señala las casillas 2 y 6]… ¿Qué sería?
10:49	Ainoa	El 1
10:50	Profesor	Si tú divides esto [1,80] entre 2, te dará la unidad que tú has dicho ¿no? 90. ¿Esto qué es?
10:57	Ainoa	Una unidad. La unidad.
11:00	Profesor	Sí, esto es lo que vale una barra de pan. Pero ¿qué es siempre que dividimos entre 2? ¿Qué hacemos?
11:04	Alumnos	¡Ah! La mitad
11:05	Profesor	Muy bien. La mitad. Por tanto, vemos aquí que con estas dos

		magnitudes, ¿qué relación tenemos entre estas 2 magnitudes? Si son proporcionales o no. Habéis visto también que de unidad, de doble y de triple y la pregunta que os hacía al principio, si estas dos magnitudes son proporcionales o no y por qué, cómo lo sabemos
11:41	Alumno	Bueno yo creo que sí porque a partir de 2 barras de pan y el precio, se puede saber más.
11:52	Profesor	Podemos predecir el resultado
11:53	Alumno	A partir de esas
11:54	Profesor	A partir de las que nos dan. Por tanto, ¿serán proporcionales?, ¿sí o no?, ¿qué pensáis la mayoría de la clase?
12:01	Alumnos	¡Sí!
12:02	Alumno	Y porque este siempre [este caso de las barras de pan y el precio], este justamente, si tienes 2, 1.80, si da 4, 3.60 pero en cambio la edad [se refiere al caso de la edad y la altura]
12:18	Profesor	Es decir, tú puedes predecir aquí lo que te van a costar 4 ¿no? [Señala en la pizarra]. Es decir, si tú aumentas el número de barras, ¿cómo aumentará el número del precio?
12:26	Alumno	Pues el mismo número por el que has multiplicado el otro.
12:29	Profesor	Es decir, de la misma forma. Es decir, dos magnitudes serán proporcionales, lo decimos así ¿vale?, si cuando aumentamos una magnitud, en este caso, cuando aumentamos el número de barras, ¿vale?, la otra magnitud aumenta de la misma forma, en este caso, ha aumentado el doble y el triple. ¿Sí o no? Incluso también, igual que aumenta puede disminuir. Aquí ha disminuido a la mitad y ha disminuido de la misma forma… ¿lo entendéis o no? Por tanto, dos magnitudes son proporcionales si aumentan o disminuyen de la misma forma. Es decir, podemos y también lo dijiste tú, que podemos predecir lo que nos va a costar, en este ejemplo, ¿sí o no?, porque lo sabemos [señala el 1,80].
13:20	Alumno	Pero ese [el otro ejemplo de la edad y la altura]...
13:21	Profesor	Ahora veremos ese. No te anticipes.

Tabla 5.11: Transcripción episodio 2.1

Descripción del episodio

Este episodio 2.1, junto con el 1, está extraído de la primera clase sobre proporcionalidad. El profesor ha definido la proporcionalidad, en el episodio 1, como la relación que hay entre magnitudes mesurables y propone a los alumnos en primer lugar, en este episodio 2.1, pares de magnitudes para que éstos digan si son proporcionales o no; y en segundo lugar, trabajar la proporcionalidad con un ejemplo concreto.

El primer ejemplo propuesto por el profesor es "2 barras de pan cuestan 1,80 euros. Si quiero comprar 4 barras de pan al día siguiente… ¿podré predecir lo que me costarán?" [2:11-4:38]. Es un ejemplo centrado en una panadería, un contexto familiar para los alumnos que de hecho genera un diálogo entre el profesor y los alumnos a propósito del precio del pan dado en este ejemplo concreto. Se identifica el precio como una de las magnitudes y se concreta en euros su unidad de medida [3:57-4:01].

Se representan los "datos" del problema, 2 barras de pan y 1,80€ en forma tabular. El profesor genera durante todo el episodio una situación de aula interactiva, discutiendo el problema en la pizarra a partir de la representación de todos los datos que salen a lo largo del episodio en la tabla de valores: 4 barras; 3,60€; 6 barras, etc.

Se trabaja asimismo con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ mayores que la unidad y enteras, pues se pide cuánto costarán 4 y 6 barras de pan. Entendemos que estas razones resultan cómodas para los alumnos.

En relación con el concepto de proporcionalidad, el profesor tiene claro que su objetivo es: 1) reconocer si dos magnitudes son proporcionales o no a partir de la definición dada en el episodio 13 (la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables); 2) identificar el "reconocer" si dos magnitudes son proporcionales con el hecho de poder "predecir" el resultado de una de las magnitudes (el precio) al variar la otra (número de barras de pan); 3) concretar esta variación de una de las magnitudes (en este caso, el número de barras de pan) en el doble, el triple o la mitad de barras de pan de las que se ofrecen como "dato" de partida en el enunciado, ya que si la razón escalar x_2/x_1 es 2, 3 ó ½, resulta más fácil obtener el precio; y 4) ofrecer un "método" para saber si dos magnitudes son proporcionales o no, a saber, dos magnitudes son proporcionales "si cuando aumentamos una magnitud,… la otra magnitud aumenta de la misma forma", o mejor dicho, "si aumentan o disminuyen de la misma forma" [12:29].

En relación con las situaciones de contingencia, el profesor recoge las intervenciones de los alumnos en las que calculan el valor desconocido en una tabla de proporcionalidad como es saber cuánto costarán 4 barras de pan. El profesor pregunta: "¿podré predecir lo que me podrán costar?" y un alumno, utilizando la razón $x_2/x_1=y_2/y_1$, afirma que "4 es el doble de 2" [4:56-5:02]. O las intervenciones en las que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad *k=y/x* para encontrar que 4 barras de pan cuestan 3,60€ como resultado de multiplicar 1,80 por 2 [5:12]; o bien utilizando métodos aritméticos informales, sumando dos veces 1,80 [5:36]; o bien utilizando la razón de proporcionalidad inversa *k'=x/y*, dividiendo 1,80 entre 2 y multiplicando el resultado por 4 [5:57].

Sin embargo, no todas las intervenciones relevantes de los alumnos son atendidas. En este sentido, un ejemplo de intervención de los alumnos desatendida es "una barra de pan vale 90 céntimos" [6:31], intervención que el profesor pasa por alto pues entendemos que no está interesado en ese momento en introducir el procedimiento de reducción a la unidad. Incluso cuando el profesor parece recoger más adelante la intervención de una alumna en este sentido y dice "si tú divides esto [1,80] entre 2, te dará la unidad que tú has dicho ¿no? 90" y pregunta a la clase "¿esto qué es?", y la alumna contesta "Una unidad. La unidad", el profesor le contesta "sí, esto es lo que vale una barra de pan. Pero ¿qué es siempre que dividimos entre 2? ¿Qué hacemos?", para llegar al concepto de mitad que es lo que realmente le interesa remarcar [10:34-11:05].

Análisis del episodio

Después de la transcripción y de la descripción del episodio 8.1, pasamos a analizar el episodio a partir de la lista de indicadores creada para la praxis del profesorado siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland, mostrada en el capítulo 4 (apartado 4.5).

	Indicadores	**Evidencia**
FUNDAMENTO		
1.1	Identificación magnitudes	"Tenemos aquí barras de pan… o número de barras de pan y aquí tenemos una magnitud que acabamos de decir es…" [0:13].
1.2	Asignación medida-magnitud	"El precio ¿no? Dinero. ¿Cómo escribimos el dinero?... En euros" [0:59-1:02]. "Sí, el

		precio es la magnitud, pero ¿cuál es la unidad de medida?” [3:57].
1.3	Características magnitudes	---
1.4	Utilización incremento gradual aditivo	Para encontrar cuánto valen 4 barras de pan, se podría sumar 1,80 y 1,80 [5:36-5:39].
1.5	Utilización incremento gradual multiplicativo	Para encontrar cuánto valen 4 barras de pan, 1,80 por 2 [5:25].
1.6	Explicitación procedimiento reducción a la unidad	--- [no se explicita el procedimiento pero sale: 9:38-10:20].
1.7	Trabajo de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	“Si el día anterior fui y compré 2 barras de pan y me cobraron 1,80, al día siguiente tengo invitados en casa y quiero comprar 4 barras de pan. ¿Sabré lo que… me anticiparé a lo que… podré predecir lo que me podrán costar?” [4:38].
1.8	Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$	Razón de proporcionalidad $k=y/x$ menor que la unidad: “2 barras de pan cuestan 1,80€”.
1.9	Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Razón mayor que la unidad y entera: ¿Cuánto costarán 4 barras de pan, 6 barras de pan?”.
1.10	Explicitación razón dada en el problema: $k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$	“¿Cuánto vale 1 barra de pan? Aquí no está la unidad. ¿Cómo lo sabemos? Habéis dicho que 2 valen 1,80, que valen 3,60 [señala las 4 barras] porque alguien ha dicho que es el doble, el doble será 3,60; después habéis dicho que es el triple, si ponemos 6 ¿sí o no? y ella ha dicho que de 1, ¿cuánto has dicho que vale 1 barra de pan?... 90 céntimos” [9:38-10:20].
1.11	Explicitación del concepto relevante dentro del problema (lo que el profesor denomina “dato”)	--- [Se trabaja a partir de que 2 barras de pan valen 1,80€ pero no se explicita que este es el dato aunque está implícito en toda la discusión].
	TRANSFORMACIÓN	
2.1	Explicitación enseñar técnica si $k=y/x$ no entera	---
2.2	Explicitación que diferencia técnica de concepto	---
2.3	Representación situación del problema	---

	con dibujos/esquemas	
2.4	Uso dibujo/esquema para construir modelo	---
2.5	Asignación valor a la representación en la tabla de valores	"Pero lo que me interesa es esto, de esta tabla de aquí [señala la tabla que ha hecho en la pizarra donde pone número de barras de pan, precio, 2, 1.80, 4]" [6:20].
2.6	Elección ejemplo introductorio nivel visualización gráfica	---
2.7	Elección ejemplo introductorio nivel razón *k=y/x*	"2 barras de pan cuestan 1,80€".
2.8	Elección ejemplo introductorio con contexto adecuado	"Imaginemos que vamos a comprar 2 barras de pan. Número de barras de pan: 2. Y la de la panadería nos dice que valen 1, 80" [2:11-3:08].
2.9	Ayuda a descubrir la razón *k=y/x*	"¿Cuánto vale 1 barra de pan? Aquí no está la unidad. ¿Cómo lo sabemos? Habéis dicho que 2 valen 1,80, que valen 3,60 [señala las 4 barras] porque alguien ha dicho que es el doble, el doble será 3,60; después habéis dicho que es el triple, si ponemos 6 ¿sí o no? y ella ha dicho que de 1, ¿cuánto has dicho que vale 1 barra de pan?... 90 céntimos" [9:38-10:20].
2.10	Ayuda a aplicar la reducción a la unidad	---
2.11	Ayuda a descubrir la función lineal *y=kx*	---
	CONEXIÓN	
3.1	Relación y comparación reducción a la unidad con otras técnicas	---
3.2	Énfasis (profesor) descubrimiento modelo en el problema y búsqueda modelo dentro del problema (alumno)	Los alumnos ven un modelo de alguna manera: "una barra de pan vale 90 céntimos" [6:31]; "180 dividido entre 2 que da el precio de una, por 4" [5:57].
3.3	Énfasis relación razón *k=y/x* y red. a la unidad	---
3.4	Énfasis relación razón *k=y/x* y la función lineal *y=kx*	---
3.5	Énfasis relación red. a la unidad y la función lineal *y=kx*	---
3.6	Horizonte matemático adelante	---
3.7	Horizonte matemático atrás	---

CONTINGENCIA		
4.1	Utilización métodos aritméticos informales	
4.2	Generalización razón de proporcionalidad *y=k/x* a partir de un caso concreto	
4.3	Utilización razón de proporcionalidad inversa *k'=x/y*	
4.4	Utilización razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	
GENERAL		
5.1	Claridad en los objetivos	Reconocer si dos magnitudes son proporcionales o no a partir de la definición de proporcionalidad como la relación que hay entre magnitudes y ofrecer un "método" para saber si dos magnitudes son proporcionales: "si aumentan o disminuyen de la misma forma" [12:29].
5.2	Claridad en el camino a seguir	Explicita los objetivos: para reconocer si dos magnitudes son proporcionales se tiene que poder predecir el resultado de una de las magnitudes (precio) al variar la otra (número de barras de pan). Concreta que la variación de una de las magnitudes (el número de barras de pan) sea el doble, el triple o la mitad del valor de partida para que resulte más fácil obtener el precio.
5.3	Generación situación interactiva	Numerosas intervenciones de los alumnos hasta 90.
5.4	Explicitación reiterada de lo que se hace	---
5.5	Discusión activa en la pizarra	Constante en todo el episodio.
5.6	Recapitulación objetivos	"Dos magnitudes serán proporcionales, lo decimos así ¿vale?, si cuando aumentamos una magnitud, en este caso, cuando aumentamos el número de barras, ¿vale?, la otra magnitud aumenta de la misma forma"; "si aumentan o disminuyen de la misma forma" [12:29].

Tabla 5.12: Evidencias indicadores episodio 2.1

5.3.3. Comparación episodios 14 y 2.1

1. Fundamento

En cuanto al concepto de proporcionalidad, el profesor de Primaria identifica al final del episodio las magnitudes proporcionales como aquellas que aumentan o disminuyen de la misma forma dando así un criterio para reconocer si dos magnitudes son proporcionales o no. La profesora de Secundaria, después de ayudar a los alumnos a ver que hay una variable independiente de la función (la gasolina), que se representa en el eje de las "x", tiene en mente ver la proporcionalidad como una función lineal pues para averiguar cuántas vueltas se dan al circuito con 120l de combustible, le interesa la solución de que el número de vueltas es $14,4=1,2\cdot 12$. No obstante, la profesora enfatiza al final del episodio la definición de proporcionalidad que ha propuesto en el episodio 13, lo que haces en un lado (la gasolina), el factor de cambio en un lado se respeta en el otro (nº de vueltas). Por lo tanto entendemos que si bien la manera de proceder de uno y otro profesor son diferentes, las definiciones propuestas son equivalentes (o básicamente la misma) pues que las magnitudes implicadas aumenten o disminuyan de la misma manera no es sino respetar el factor de cambio en uno u otro lado de la tabla.

Los dos profesores han elegido ejemplos donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es menor que la unidad y no entera (0,90 en el caso de las barras de pan y 0,12 en el caso de las carreras de coches de fórmula 1). Ahora bien, ambos trabajan con razones escalares $x_2/x_1=y_2/y_1$ enteras y mayores que la unidad que entendemos resultan cómodas para los alumnos: el profesor de Primaria pide a sus alumnos que busquen cuánto costarán 4 y 6 barras de pan, y la profesora de Secundaria que investiguen cuántas vueltas al circuito se darán con 50, 90 y 120 litros de combustible, eso sí, lanzando en un momento dado la pregunta de cuántas vueltas se darían con 47 litros, planteando así una razón escalar no entera, si bien mayor que la unidad.

En cuanto a las magnitudes implicadas, el profesor de Primaria explicita una de las magnitudes (precio de las barras de pan) y su unidad de medida (euros), aunque se observa cierta inseguridad por parte del profesor en la siguiente situación: "Por ejemplo, tenemos aquí barras de pan… o número de barras de pan y aquí tenemos una magnitud que acabamos de decir es…". El alumno contesta: "el dinero" y el profesor dice: "El precio ¿no? Dinero. ¿Cómo escribimos el dinero?... En euros" [0:59-1:02]. La profesora de Secundaria menciona al principio del episodio las magnitudes implicadas en el ejemplo (la gasolina y el número de vueltas al circuito) sin indicar las unidades de medida de las mismas.

Respecto al "dato del problema", la profesora de Secundaria insiste en la importancia del mismo, subrayando que siempre hay que extraer un dato de partida del enunciado del problema para poder empezar a trabajar: "os he dicho que con 10 litros hacía 1,2 vueltas y esto es un dato del problema"; el profesor de Primaria, en cambio, si bien representa los "datos" del problema en forma tabular, 2 barras de pan y 1,80€, no menciona explícitamente que estos son los "datos" del problema.

2. Transformación

En cuanto a los ejemplos utilizados para introducir el concepto de proporcionalidad, ambos profesores los sitúan en un contexto familiar para los alumnos: precio de barras de pan en el caso del profesor de Primaria y carreras de fórmula 1 en el caso de la profesora de Secundaria.

En cuanto a la utilización de representaciones gráficas de la situación del problema, la profesora de Secundaria recurre a la representación del "dato" del problema (con 10l se dan 1,2 vueltas al circuito) que le permita tanto extraer un modelo para responder el número de vueltas que se darán con 90l, como ofrecer una primera definición de proporcionalidad (mantener a un lado y a otro la misma relación). Entendemos que el profesor de Primaria, por su parte, no recurre a las representaciones gráficas pues no resuelve ningún problema en el episodio 1 objeto de esta comparación.

Ambos profesores otorgan un valor concreto a la tabla de valores, aunque explicitándolo en distintos grados. El profesor de Primaria señalando en la pizarra que lo que le interesa es "esta tabla de aquí" [6:20], la tabla donde pone número de barras de pan, precio, 2, 1.80, 4; y la profesora de Secundaria insistiendo en que hay que poner las magnitudes en forma tabular, recordando a los alumnos que ya han utilizado el formato de tabla al estudiar la estadística y remarcando que los datos se pueden representar en las tablas tanto en forma vertical como horizontal [2:36].

3. Conexión

Entendemos que la profesora de Secundaria, al pretender remarcar al final del episodio que la proporcionalidad no es otra cosa que conservar el factor de cambio que se aplica entre 2 valores de las magnitudes número de litros y número de vueltas al circuito respectivamente, busca que los alumnos descubran un modelo del problema. Lo sabemos porque cuando los alumnos buscan el número de vueltas que corresponden a 120 litros de gasolina, de las dos maneras propuestas por ellos, utilizando el incremento gradual aditivo [7:42] o multiplicando 1,2 por 12 [6:59], la profesora resalta que es esta segunda manera de encontrar la solución la que le interesa [8:02-9:10].

4. Contingencia

En relación con las situaciones de contingencia, ambos profesores gestionan las intervenciones de los alumnos de una manera similar y muy ágil, reconociendo y resaltando todas las aportaciones valiosas de los alumnos. La profesora de Secundaria enfatiza sobre todo aquellas intervenciones que conducen a ver la proporcionalidad como una función lineal [8:02]. Y el profesor de Primaria, si bien pone de manifiesto las diferentes aportaciones de los alumnos relacionadas con la obtención del precio de las 4 barras de pan (incremento gradual aditivo, incremento gradual multiplicativo), no todas las intervenciones relevantes de los alumnos son atendidas. En este sentido, un ejemplo de intervención de los alumnos desatendida es "una barra de pan vale 90 céntimos" [6:31], intervención que el profesor pasa por alto. Esto puede deberse a que el profesor no esté interesado en ese momento en introducir el procedimiento de reducción a la unidad, aunque con anterioridad el profesor sí que ha recogido una intervención de un alumno que ha propuesto obtener el precio de las 4 barras de pan dividiendo 1,80 entre 2 y multiplicando el resultado por 4 [5:57].

El profesor de Primaria no muestra seguridad en todas las intervenciones, como por ejemplo en el caso de asignar una medida a una magnitud: "El precio ¿no? Dinero. ¿Cómo escribimos el dinero?" [0:59]. Se observa aquí cierta confusión o inseguridad.

5. General

En relación con el concepto de proporcionalidad, los dos profesores tienen claro que su objetivo es profundizar sobre dicho concepto aunque de maneras bien diferentes. Mientras el profesor de Primaria propone a los alumnos al final del episodio una definición de proporcionalidad más concreta que la que ofreció en el episodio 1 cuando introdujo la proporcionalidad, la profesora de Secundaria por su parte insiste en la definición que propuso en el episodio 13.

Los dos profesores generan durante todo el episodio una situación de aula interactiva, solicitando reiteradamente la intervención de los alumnos, discutiendo activamente el problema en la pizarra y escribiendo continuamente. El profesor de Primaria analiza y discute con los alumnos el problema en la pizarra a partir de la representación de todos los datos que salen a lo largo del episodio en la tabla de valores.

5.4. Seguimiento de las intervenciones de una alumna concreta, Ainoa, en Sexto curso de Primaria y en Primer curso de Secundaria

Hasta este momento hemos reflexionado sobre las acciones del profesor respecto a la temática de proporcionalidad, a partir de una lista de indicadores que elaboramos siguiendo el modelo del *Knowledge Quartet* de Tim Rowland, en torno a las cinco categorías de *Fundamento*, *Transformación*, *Conexión*, *Contingencia* y *General*. Esta lista de indicadores nos ha permitido analizar y comparar, desde el punto de vista del profesor, tres pares de episodios de clase de Sexto curso de Primaria y del Primer curso de Secundaria que abordan la introducción al concepto de proporcionalidad y la técnica de la reducción a la unidad.

Ahora bien, una cuestión importante es ver cómo las actuaciones del profesor pueden influir en el aprendizaje de los alumnos. A este respecto, y aunque este no era el objetivo de la tesis, vamos a valorar cómo una determinada manera de explicar la proporcionalidad por parte del profesor puede influir en la manera cómo los alumnos la aprenden. Para ello vamos a realizar un estudio de caso concreto centrado en una alumna, Ainoa, a partir de sus intervenciones en los episodios de clase correspondientes a la introducción del concepto de proporcionalidad y a la técnica de reducción a la unidad, tanto en Sexto curso de Primaria como en Primer curso de Secundaria.

El hecho de haber podido obtener datos de los mismos alumnos para nuestra investigación cuando cursaban Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria nos ha permitido hacer este tipo de seguimiento de un alumno concreto en las clases de proporcionalidad. Este seguimiento particular nos permite contextualizar la transición de Primaria a Secundaria, en primer lugar, en una temática concreta como la de proporcionalidad, una de las "big idees" en Matemáticas y fundamental para la transición de etapa; y en segundo lugar, en dos profesores concretos y bien diferentes, con interacciones distintas en el aula, que pueden provocar diferencias notables en el aprendizaje de una alumna como Ainoa, tal como mostraremos a continuación.

Creemos que es importante seguir a un estudiante particular para mostrar que el aprendizaje por parte del alumno no se produce en un día. Precisamente el haber obtenido datos con un año de diferencia, viendo dos veces el mismo tema y desde el punto de vista de dos profesores diferentes nos permite ver la evolución de un alumno. Y hemos elegido a esta alumna, Ainoa, porque nos sorprende cómo la imagen inicial que ofrece dicha alumna en Sexto curso de Primaria, con dificultades para entender el concepto de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, puede cambiar en el Primer curso de la Secundaria al tener un profesor distinto al que había tenido en Sexto. Parece otra alumna. Nos sorprende cómo un mismo alumno puede generar dos imágenes distintas con dos profesores diferentes.

En el análisis de las intervenciones de la alumna Ainoa respecto a los episodios que abordan la introducción al concepto de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, seguiré un orden cronológico, primero los episodios de Sexto curso de Primaria (episodios 2.1, 3 y 8.1) y después los del Primer curso de Secundaria (episodios 14 y 17).

Nos proponemos remarcar en cada intervención de Ainoa, cuál es el indicador involucrado de nuestra lista y cuál es la respuesta del profesor a la intervención de la alumna. Para ello, recogeremos en una tabla las intervenciones de Ainoa de cada episodio así como las respuestas del profesor a las mismas. A veces hemos intercalado intervenciones de otros alumnos si nos han parecido pertinentes para contextualizar mejor la comprensión de la intervención de la alumna. Señalaremos, siempre que sea posible, el número del indicador con el que se relaciona la intervención y comentaremos la respuesta del profesor. Cuando no sea posible, adaptaremos el indicador a la situación de la alumna. Recordemos que los indicadores están pensados para analizar las acciones del profesor. En las intervenciones que reflejan errores de la alumna, señalaremos asimismo el indicador con el que tendría relación la intervención.

Las intervenciones no tendrán relación con todos los indicadores de las cinco categorías utilizadas en nuestro estudio, sino que centraremos nuestra atención en 4 indicadores concretos que nos servirán para mostrar el aprendizaje de Ainoa respecto a las actuaciones del profesor relacionadas de alguna manera con esos indicadores. Los indicadores que amplificaremos son los siguientes:

En la categoría de *Fundamento*:

- 1.6, "Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad"
- 1.7, "Trabajo de la relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$".

En la categoría de *Transformación*:

- 2.7, "Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad $k=y/x$".

Y en la categoría de *Contingencia*:

- 4.1, "Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales".

5.4.1. Ainoa en Sexto curso de Primaria

Episodio 1			
Contextualización: si 2 barras de pan cuestan 1,80€, ¿cuánto costarán 4 barras de pan?			
Indicador		**Ainoa**	**Profesor**
Intervención 1			
1.5	Utilización del incremento gradual multiplicativo	Vicenç, yo haría 1,80 por 2 [5:12] Cómo 2 barras valen 1,80 y son 2 barras más [5:19]	1,80 por 2 ¿Por qué? [5:17] Lo que haría la Ainoa: 1,80 por 2. Muy bien. ¿Se podría hacer otra cosa? [5:25]

	[$f(\lambda x) = \lambda f(x)$]		
Intervención 2			
1.6	Reducción a la unidad	¡Vicenç!, una barra vale 90 céntimos. [El profe no lo recoge esto en la tabla] [6:31]	Por tanto, si ya sabemos lo que son 4, lo que valen 4 barras, ¿cuánto costarían? [6:41]
Intervención 3			
4.4	Utilización de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$		A ver, me tenéis qué decir por qué son proporcionales estas dos magnitudes, ¿por qué son proporcionales? [7:01]
		Porque son dobles [7:10]	Porque son dobles. Este concepto lo habéis visto muy bien. Hacemos otra para que lo veáis. Tengo más convidados… Pues ponemos 6. Venga va: 6. ¿Sabemos también el…? [señala el lugar de la tabla donde toca el precio de 6 barras] [7:12-7:29]
	Utilización (errónea) de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Sí. 3,60 por 2 [7:36]	¿Y qué daría? [7:41]
Intervención 4			
4.4	Utilización (errónea) de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Pues yo tengo otro [9:20] 1 con 80 por 6, no por 4 [9:20-9:22]	Se pueden hacer muchas cosas [9:21] ¿Por qué? No… Por 6 no, porque aquí son 2 [señala casilla 21 de la tabla, donde está el 2] [9:30]
Intervención 5			
1.6 1.8 1.9	Reducción a la unidad Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$ Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$		Por tanto, hemos visto que, incluso Ainoa ha pensado que 1 barra de pan… ¿cuánto vale 1 barra de pan? Aquí no está la unidad. ¿Cómo lo sabemos? Habéis dicho que 2 valen 1,80, que valen 3,60 [señala las 4 barras] porque alguien ha dicho que es el doble, el doble será 3,60; después habéis dicho que es el triple, si ponemos 6 ¿sí o no? y ella ha dicho que de 1, ¿cuánto has dicho que vale 1 barra de pan?... 90 céntimos. Pero ¿cómo lo sabemos esto? [9:38-10:20]

		180 entre 2 [10:34]	90 entre 2 ¿Qué quiere decir esto? ¿Qué concepto es este? [10:37].
		Pues la división [10:40]	Pero ¿qué sería? Si esto es el doble [señala las casillas donde están el 2 y el 4], después tengo el triple [señala las casillas 2 y 6]… ¿Qué sería? [10:42]
		El 1 [10:49]	Si tú divides esto [1,80] entre 2, te dará la unidad que tú has dicho ¿no? 90. ¿Esto qué es? [10:50]
		Una unidad. La unidad [10:57]	Sí, esto es lo que vale una barra de pan. Pero ¿qué es siempre que dividimos entre 2? ¿Qué hacemos? [11:00]

Tabla 5.13: Intervenciones Ainoa episodio 1

Episodio 3			
Contextualización: Los alumnos tienen que inventar dos problemas. El primero en el que las dos magnitudes sean proporcionales y el segundo en el que las dos magnitudes no sean proporcionales. Tienen que justificar en cada caso por qué las magnitudes son o no proporcionales. El profesor propone en la pizarra pares de magnitudes -peso y precio, tiempo y volumen, edad y peso, tiempo y número de espectadores-, para que los alumnos escojan las que quieran.			
Indicador		**Ainoa**	**Profesor**
Intervención 6			
1.1 1.2	Identificación de las magnitudes Asignación de una medida a una magnitud		Veamos el de Ainoa, ¿cuál vas a hacer? ¿El de magnitudes proporcionales o no? [0:01]
		Tiempo y volumen [0:04]	Tiempo y volumen. Venga lo haremos muy bien. Ella ha cogido las magnitudes el tiempo y el volumen. El volumen ¿en qué? [Mientras la alumna, Ainoa, escribe en la pizarra en forma de tabla su problema] [0:08]
		En litros [0:17]	En litros, muy bien. ¿Y el tiempo? [0:18]
		Horas [0:22]	En horas, muy bien [0:23]

2.5 4.4	Uso de la tabla de valores Utilización de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$		A ver. Venga, pero lee el problema, sino no sabemos de qué va. [La alumna está escribiendo en la pizarra la tabla, con las magnitudes y las unidades] [0:23]
		Tengo una piscina y la quiero llenar y abro un grifo... [0:27]	¿Y qué pasa? Pero ¿cuánto tiempo? [0:45]
		Pues eso es lo que voy a ver. [La alumna escribe 1h y 100l.] [0:47]	Lleno la piscina durante 1h y en 1h la piscina llena 100l ¿no? [0:52]
		Alumno 1: [Pero cuántos litros] caben en la piscina [0:59] Alumno 2: No se sabe [1:01]	Ella dice que en esta piscina, ella tiene el grifo funcionando durante 1h y en 1h deja 100l, está bien el problema [1:06] En 2h, te llena 200l y en 3h, 300l [1:17]
		[Escribe 2h y 200l, 3h y 300l, mientras el profesor habla] [1:12]	
		Es proporcional [1:19]	¿Es proporcional el tiempo y el volumen? ... el resultado es directo... venga, ¿cómo sabes que son 200l? [1:21-1:29]
		Porque esto es el doble [escribe al lado de 2h, doble] y esto es el triple [escribe al lado de 3h, triple] [1:34]	Muy bien. Ya vemos que aquí tenemos el concepto de doble y de ... [1:38]
		Alumno: triple [1:42]	Triple... siempre y cuando lo que decís vosotros, caiga la misma cantidad de agua, ¿sí o no? porque si no, estas magnitudes difícilmente pueden ser proporcionales, el tiempo y el volumen

			¿eh? [1:43]
Intervención 7			
1.1 2.5	Identificación de las magnitudes Uso de la tabla de valores	[Ahora se pasa al 2º problema propuesto por Ainoa] Tiempo y nº de espectadores [2:21] Alumno: cantidad [2:25] [Discusión entre profesor y alumnos porque Ainoa ha hecho el problema con otra alumna pero usando magnitudes diferentes en el mismo problema] En un cine entran en 1h, 100… en 2h, 200 y en 3h, 300 [Lo escribe en la tabla de la pizarra] [3:25-3:33] Este no es proporcional [3:42] Porque… [3:44] Pero si no me dejáis hablar pues no sabéis por qué no es proporcional [3:50] Porque en 1h entran 100 personas pero a lo mejor en 2h salen	A ver cómo lo haces. Tiempo y ... [2:23] Y cantidad… Nº de espectadores, ¿vale? Tú pon tu problema y lee el problema porque si no, no sabemos de qué va [2:26-2:31] Pero si... No, a ver Ainoa, era un problema proporcional y otro no proporcional [3:36] ¿Por qué? [3:43] Es proporcional ¿no? Yo veo aquí... [3:45] Venga, a ver, por qué no [3:52]

		unas personas y no entran 200 [3:53]	
		Alumno: ¡Pero eso no lo explicas! No sabe la gente a qué hora tiene que entrar para... [4:00-4:03] … 4h, 200 [4:14]	[No se entiende]... que tu pongas aquí el dato de 200... y poner otro dato [4:10]
			¿Vale? Con estos datos de aquí [los que Ainoa ha escrito en la pizarra] son proporcionales [4:18]
		No [4:20]	Sí. ¿Quién te ha dicho que no?... Conforme ella ha hecho aquí el problema, este par de magnitudes sí son proporcionales [4:22-4:34]
		Pero Vicenç… [4:37]	A ver, ¿son proporcionales estas 2 magnitudes?, ¿son proporcionales? [Lo pregunta a la alumna con la que Ainoa ha pensado el problema] … Porque tal como lo ha planteado Ainoa es... [4:43-4:52]
		Alumno: Sí son proporcionales [4:53] ¡Qué va!... Que no… Pero eso es imposible, esto es no proporcional [4:53-5:00]	
		[Sale la alumna que ha hecho el problema con Ainoa a explicar por qué no son proporcionales estas 2 magnitudes]	Escuchemos venga... a ver lo que aporta [5:16]
		Alumna: Yo creo que lo que le ha pasado a Ainoa es que... quito	¿Tú lo has hecho así? [5:51]

		este trozo [borra la parte de la tabla de 3h] en 2h pues es [200 personas] aproximadamente [lo escribe al lado del 200] [5:30] Alumna: Sí, claro. Porque... y la solución, es que aproximadamente entran 200, porque puede ser que haya de menos o de más [5:43] Ainoa: Pues eso es lo que explicaba yo [6:15] Alumna: Tú lo has puesto como si fijaras aquí operaciones y eso [señala a la parte de la tabla donde está el 200 escrito] [6:16]	
		Ainoa: Que no [6:20]	Vale. Entonces... Escucha [a Ainoa] que lo ha explicado muy bien. En 1h entran 100 personas. En 2h, ¿cuántas entrarían? [6:22-6:31] ¡Ah! Por tanto, ¿se puede predecir? [6:40]
		Alumna: Pues 200 aproximadamente si va al mismo ritmo, porque si va diferente... [6:36]	No, no se puede predecir... ¿Alguien ha hecho algún ejemplo más claro de magnitudes que no sean proporcionales? [6:44-6:54]

		Alumna: para mí sí [6:43]	

Tabla 5.14: Intervenciones Ainoa episodio 3

Episodio 8.1			
Contextualización: para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones?			
Indicador		**Ainoa**	**Profesor**
Intervención 8			
1.6 1.8 1.9	Reducción a la unidad Tipo de razón de proporcionalidad *k=y/x* Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$		Siempre que tengamos dos números [señala el 3 y el 5] que no tengan relación, ni el doble ni la mitad ni el triple, reducimos a la unidad. Imagínate que te preguntan aquí el 7, y el 3 y el 7 tampoco tienen relación, reducimos a la unidad. Reducimos a la unidad y sabemos que si de 3 es 6, de 1 es el 2 ¿no? ¿Qué pasa? Ya tenemos el 2. Ya sabemos que con 1 limón son 2 cucharadas de azúcar… [7:41]
		No lo entiendo [8:13]	
1.6 1.8 1.9	Reducción a la unidad Tipo de razón de proporcionalidad *k=y/x* Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$		Este concepto, ¿lo tenéis claro? de reducir a la unidad. Es muy fácil ¿no? Siempre que tengamos un problema de estos, y dicen que no tienen relación, no es el doble, ni la mitad, ni el triple, voy a reducir a la unidad. Imaginad que aquí… ahora haré 2 problemas de reducir a la unidad [8:45]
		No lo entiendo aún [9:08]	(…) Ahora veremos otro ejemplo ¿vale? [9:19]
		No entiendo este [9:21]	Este no lo entiendes, ¿qué no entiendes? [9:24]
		No. ¿Por qué ponemos un 2? [9:25]	Mira Ainoa, entre el 3 y el 6 ¿hay relación? [9:27]
			¿Qué? Entre el 3 y el 6 ¿qué es? [9:30]
		Sí [9:31]	

		El doble [9:32]	El doble. Pues si para 3 necesitamos 6 cucharadas, para 1, ¿no necesitaremos también el doble?… Sí ¿no? Para 1… si para 3 necesitas el doble de cucharadas que son 6, para 1 limón ¿cuántas cucharadas necesitarás? El doble, el doble de 1 ¿cuál es? [9:33-9:47]
		2 [9:57]	2, ¿sí o no?, ¿no lo entiendes? Pero ¿qué no entiendes? Si no me dices qué no entiendes… no decir no lo entiendo y ya está… [9:58]
		¿Por qué ponemos un 2? [10:06]	Se puede explicar de muchas formas. A ver Ainoa, escucha, aquí tú tienes el problema, el problema no te lo inventas tú, esto no lo tienes que saber porque el problema te da los datos ¿sí o no? Te dice que para hacer un sorbete de limón necesitas 3 limones y 6 cucharadas de azúcar ¿sí o no? Si tú lo quieres hacer con 1 limón, ¿cuántas cucharadas de azúcar necesitarás?, ¿6 también? No porque tienes menos limones ¿no? ¿Aquí no es el doble?, ¿no necesitas para 3 limones el doble de cucharadas?, pues para 1 limón necesitarás también el doble de cucharadas, ¿cuántas? [10:23]
		2 [11:08]	2. El doble de cucharadas [11:09]
		¡Ah! Vale [11:11]	Y para 5 limones necesitarás el doble de cucharadas, ¿son? [11:12]
		10 [11:16]	Aquí sí [11:18]
		Alumno: siempre necesitas el doble del número que tienes	
		A mí eso de dividir no… [11:21]	Lo de dividir y multiplicar viene de la regla de 3. Este problema se puede solucionar

			de esta forma, reduciendo a la unidad o con un regla de 3, que es lo que vamos a ver ahora [11:27]

Tabla 5.15: Intervenciones Ainoa episodio 8.1

Descripción y análisis de las intervenciones

<u>Intervención 1</u>: La alumna Ainoa utiliza el incremento gradual multiplicativo para encontrar lo que costarán 4 barras de pan "yo haría 1,80 por 2". El profesor refuerza la intervención pues entendemos que el profesor tiene en mente el objetivo marcado para la clase: dos magnitudes son proporcionales si la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ se mantiene. Si la razón x_2/x_1 es 2, para encontrar el valor de y_2 en la tabla de proporcionalidad que se está trabajando, hay que multiplicar y_1 por 2.

<u>Intervención 2</u>: Después de una intervención donde el profesor señala que está bien llegar de diferentes formas a saber cuánto costarán 4 barras de pan [1,80x2; 1,80+1,80; (1,80:2)x4], y de que el profesor insista en que lo que le interesa es la tabla [6:08-6:20], esto es, encontrar cuánto valen 4 barras de pan a partir de los datos dados, la alumna Ainoa reduce a la unidad cuando afirma que "una barra vale 90 céntimos". Ve lo que cuesta 1 barra de pan pero el profesor no recoge la intervención y sigue preguntando cuánto costarán 4 barras de pan. El profesor podría haber aprovechado esta intervención para guiar a los alumnos a que encuentren que 4 barras de pan costarán 0,90x4=3,60, introduciendo así el procedimiento de reducción a la unidad y no lo hace. Entendemos que esto puede deberse a que al profesor no le interese introducir en este momento una técnica como la de reducción a la unidad para resolver el problema ya que es la primera clase de proporcionalidad. Su objetivo es que los alumnos tengan un criterio para saber si dos magnitudes son proporcionales utilizando la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$.

<u>Intervención 3</u>: A la pregunta del profesor de por qué las dos magnitudes, número de barras de pan y precio, son proporcionales, la alumna Ainoa contesta porque son dobles. El profesor refuerza esta intervención pues como la razón x_2/x_1 es 2, para encontrar el valor de y_2 en la tabla de proporcionalidad que se está trabajando, hay que multiplicar y_1 por 2 y esta es una manera de ver que las dos magnitudes son proporcionales: cuando doblas el valor de una de las magnitudes, se dobla el valor correspondiente de la otra magnitud en la tabla. Ahora bien, inmediatamente pregunta cuánto costarán 6 barras de pan y la alumna, que ha

visto que son 2 más que 4, comete el error de "doblar" el valor correspondiente a 4 barras de pan y contesta 3,60 por 2. El profesor no la saca del error y atiende otras intervenciones que van en la línea de ver que la razón escalar x_2/x_1 entre dos valores de la misma variable es 3.

Intervención 4: Para encontrar cuánto costarán 6 barras de pan, la alumna Ainoa propone primero multiplicar 1,80 (que es lo que cuestan 2 barras) por 6. Inmediatamente rectifica y dice que por 4. El profesor la saca de su error haciéndole ver que $x_2/x_1=3$ y no 2. Aquí Ainoa, al decir que toca multiplicar por 4, ha pensado en el doble del doble. Como si siempre hubiera que hacer el doble o como que de 4 a 6 barras van 2 de diferencia, pues que hay que multiplicar el precio de 4 barras por 2. La alumna utiliza erróneamente la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre pares de valores de la misma magnitud.

Intervención 5: El profesor destaca que Ainoa ha visto que 1 barra de pan vale 90 céntimos y pregunta a la clase cómo se ha llegado a este resultado si en la tabla no sale esta relación. Para ello recapitula todas las razones escalares x_2/x_1 que han salido en el problema (2 y 3) porque quiere llevar a los alumnos a que vean que la razón escalar x_2/x_1 ahora es ½. Ainoa responde que se llega a que 1 barra de pan vale 90 céntimos dividiendo 1,80 entre 2. Se establece un cruce de intervenciones en las que el profesor pregunta qué concepto es este (por su última intervención sabemos que tiene en mente el concepto de la mitad, después de trabajar el doble y el triple) y Ainoa le responde "la división", "el 1", "una unidad", "la unidad". El profesor no aprovecha estas intervenciones para introducir la reducción a la unidad o al menos mencionarla, como ya pasó en la intervención 2, en la que tampoco se aprovechó de la intervención de Ainoa al respecto. Como ya hemos señalado, esto puede deberse a que al profesor no le interese introducir en este momento una técnica como la de reducción a la unidad. Su objetivo es que los alumnos tengan un criterio para encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad cuando la razón escalar x_2/x_1 sea 2, 3 ó ½.

Intervención 6: En el episodio 3, el profesor propone a los alumnos pares de magnitudes como "peso y precio", "tiempo y volumen", "edad y peso" o "tiempo y número de espectadores" para que los alumnos se inventen dos problemas, uno en los que las magnitudes sean proporcionales y otro en el que no lo sean. En estas dos intervenciones, la 6 y la 7, la alumna Ainoa utiliza las magnitudes de "tiempo y volumen" para poner su ejemplo de magnitudes proporcionales: "tengo una piscina, la quiero llenar y abro un grifo". A requerimiento del profesor, identifica bien las unidades de medida de las magnitudes: horas y litros. Utiliza la tabla de valores para poner los datos de su ejemplo: en una piscina en 1 hora entran 100 litros; en 2 horas, 200; y en 3 horas 300 litros. Y cuando el profesor le pregunta cómo sabe que son 200 litros, ella responde que como 2 es el doble de 1, pues a la derecha de la tabla toca poner un 200. Es decir, como la razón entre dos valores de la misma magnitud x_2/x_1 es 2, la razón y_2/y_1 también tiene que ser 2. Ainoa ha utilizado en su problema una razón de proporcionalidad $k=y/x=100$, mayor que la unidad y fácil. Además, el primer dato que ofrece la alumna, a partir del cual escribe los restantes, es el que corresponde a la unidad: en 1h, 100 litros. El profesor señala que efectivamente las dos magnitudes tiempo y volumen son proporcionales, siempre y cuando, "caiga la misma cantidad de agua" [1:43], esto es, suponiendo que el caudal de agua del grifo, la razón volumen/unidad de tiempo, es constante.

<u>Intervención 7</u>: la alumna Ainoa elige las magnitudes de "tiempo y número de espectadores" para poner su ejemplo de magnitudes no proporcionales. El profesor no le pide esta vez que identifique las magnitudes de las unidades como en el ejemplo de las magnitudes proporcionales. Ainoa utiliza la tabla de valores para poner los datos de su ejemplo: en un cine entran en 1 hora, 100 personas; en 2 horas, 200 personas; y en 3 horas, 300 personas. El profesor le dice que con estos datos que ha escrito en la tabla, las magnitudes son proporcionales y comienza un cruce de intervenciones entre ambos en las que Ainoa dice que no lo son y el profesor que sí. Para argumentar que no son proporcionales, Ainoa dice que "en 1h entran 100 personas pero a lo mejor en 2h salen unas personas y no entran 200" [3:53]. Es significativo como la alumna ha puesto exactamente los mismos valores para las magnitudes que en el problema de magnitudes proporcionales de tiempo y litros (1, 100; 2, 200 y 3, 300) pero con la particularidad que cuando ha escrito 200, ha querido decir "aproximadamente" 200.

<u>Intervención 8</u>: El profesor pretende introducir en este episodio el procedimiento de reducción a la unidad y para justificar la utilidad de dicho procedimiento plantea el siguiente problema: "*para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones?*".

La alumna Ainoa no entiende la reducción a la unidad, esto es, que para 1 limón hagan falta dos cucharadas de azúcar. No entiende de dónde sale el 2. Curiosamente en el episodio 1 esta alumna había reducido a la unidad viendo que 1 barra de pan costaba 90 céntimos y en cambio, aquí no lo ve. En toda esta sucesión de intervenciones entre el profesor y Ainoa, ésta manifiesta reiteradamente que no entiende de dónde sale el 2. El profesor intenta resolver la dificultad de la alumna hasta que al final ésta entiende de dónde sale el 2, aunque no muy convencida pues afirma "a mí eso de dividir no". A nuestro entender, este problema del sorbete de limón presenta una dificultad y es que la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es 2 y esto puede generar cierta confusión con la razón escalar x_2/x_1 que también puede ser 2, como en el ejemplo de las barras de pan. El hecho de que el profesor haya insistido tanto en la primera clase de proporcionalidad en los conceptos de doble, triple o mitad y que en el ejemplo de las barras de pan, uno de los valores a encontrar en la tabla de proporcionalidad fuera $x_2/x_1=2$, creemos ha provocado cierta confusión en esta alumna.

5.4.2. Ainoa en el Primer Curso de Secundaria

Episodio 14			
Contextualización: Si un coche hace con 10 litros de gasolina 1,2 vueltas al circuito de Montmeló ¿cuántas vueltas puede dar al circuito con 120 litros?			
Indicador		**Ainoa**	**Profesora**
Intervención 9			
4.1	Utilización métodos aritméticos informales		Y ¿si pongo 120l?... ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l]...? Este es el enunciado. Es que esta es la clave, por eso la he marcado. ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l] hasta aquí abajo [señala los 120l], Farfán? ¿Por cuánto he multiplicado el 10? (…) Venga Ainoa [6:00-6:33]
		¿14,4? [6:34] Alumno: 1,2 por 120 [6:36]	Sí, sí. Genial, si está superbien. Tomás explícanos porque Ainoa ha dicho el último resultado. Tú explícanos el proceso [6:36]
		Tomás: Pues haces, multiplicas por 1, por 12... [6:44]	Genial, 10 por 12, que es lo que preguntaba Farfán. Perfecto, hemos hecho 10 multiplicado por 12 y entonces... [señala la derecha de la

			tabla] [6:50]
		Tomás: El 1,2 por 12 [6:59]	El 1,2 por 12 que son 14,4 [7:00]
		Yo lo he hecho de otra forma [7:03]	Venga Ainoa. ¡Explícanoslo! [7:04]
		He hecho 50 que son 6 ¿no? Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2 [7:06]	A ver, vuélvemelo a explicar [7:21]
		O sea, que 50 son 6 vueltas ¿no? Y como es 120, yo he cogido el 100 y he hecho 50 y 50, 12... [7:24]	Muy bien [7:33]
		14,4 [7:41]	Genial. Pinta bien. Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120, lo ha partido en trocitos con los cuales ella se encontraba cómoda. Lo voy a explicar un momento en la pizarra. Al final no utilizaremos esta técnica pero me parece superingeniosa [7:42]

Tabla 5.16: Intervenciones Ainoa episodio 14

Episodio 17			
Contextualización: Si 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, ¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos?			
Indicador		**Ainoa**	**Profesor**
Intervención 10			
1.6 1.7	Reducción a la unidad Trabajo de la razón $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Laura: La mitad de 2 y la mitad de 1 [se refiere a los kilogramos] [3:13]	Ok, la mitad de 2 y la mitad de 2 que es ¿Ainoa? [3:16]
2.4	Uso de un dibujo o	0,5 [3:21]	Sí 0,5. Pero aquí vas y haces 4 cajas,

	esquema para construir un modelo		perdón 2kg [3:23]
		¡Ah! Yo también lo he hecho así [3:31]	2kg que reparto entre 4 cajas, ¿todos lo vemos? 2kg que reparto entre 4 cajas. Si hago 2 entre 4, el resultado es 0,5. ¿Ok todos? [Escribe a la altura del 0,5 (=2:4)]. Entonces de esta manera ya hemos rellenado que si tengo 1 caja, 0,5. [Escribe 1 y 0,5]. Y ahora completar la tabla es superfácil. Sigrid, ¡2!... [3:33]
Intervención 11			
1.7	Tipo de razón de proporcionalidad *k=y/x*		¡20! [4:58]
		Juanjo: 10 [5:00] (…)	
	Tipo de razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$	Tomás: 20 entre 2 es 10 [5:17]	Lo que dice Tomás no está mal. Tranquilos... Vamos a hablarlo todo. Lo que dice Tomás no está mal. Hombre si este 10 lo he multiplicado por 2, pues este 5 lo multiplicaré por 2. A mí no me parece mal. Esto es una de las cosas que vimos el otro día. Pero Ainoa tiene otra idea quizás [5:39]
1.10	Explicitación de la razón dada por el problema *k=y/x*		
		Gloria, yo tenía un truco… Pues si tú te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas. Entonces a 20, si es la mitad, son 10 [5:26-5:55]	Eso es lo que ha hecho Dani, creo recordar. Está bien, es un buen truco ¿sí? Es un buen truco, está bien pero hay otra cosa más allá ahí escondida. Bianca venga [6:06]

Tabla 5.17: Intervenciones Ainoa episodio 17

Descripción y análisis de las intervenciones

<u>Intervención 9</u>: La alumna Ainoa encuentra el número de vueltas que se pueden dar con 120 litros de gasolina utilizando métodos aritméticos informales: "he hecho 50 que son 6 ¿no? Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2". La profesora recoge la

intervención de la alumna Ainoa y la explica para el resto de la clase: "Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120, lo ha partido en trocitos con los cuales ella se encontraba cómoda. Lo voy a explicar un momento en la pizarra". Refuerza la intervención de la alumna aunque remarca que no se utilizará esta técnica. La profesora tiene en mente el modelo de la función de proporcionalidad $y=kx$.

Intervención 10: La alumna Ainoa reduce a la unidad para encontrar que 1 caja de caramelos pesará medio kilo y la profesora recoge su intervención para luego hacer ver a los alumnos que con esta técnica de reducir a la unidad puedes encontrar de una manera muy rápida cualquier valor de proporcionalidad de la tabla.

Intervención 11: Ainoa explica que para saber cuánto pesarán 20 cajas de caramelos, hay que dividir por dos y serán 10 kilos: "si tú te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas. Entonces a 20, si es la mitad, son 10". La alumna está utilizando que la razón de proporcionalidad es $k=1/2$ aunque puede que ella no sea muy consciente de ello. La profesora recoge la intervención, afirma que es un buen método para encontrar la respuesta pero que hay otra cosa ahí escondida. Sin duda la profesora tiene en mente el modelo $y=kx$ al que va a llegar al final del episodio.

5.4.3. Momentos del proceso de aprendizaje de Ainoa en relación con el profesor

Como mostraremos en este apartado, las intervenciones analizadas no tendrán relación con todos los indicadores de las cinco categorías utilizadas en nuestro estudio. Centraremos nuestra atención en 4 indicadores concretos que nos servirán para mostrar el aprendizaje de Ainoa respecto a las actuaciones del profesor relacionadas de alguna manera con esos indicadores. Estos indicadores que amplificaremos son los siguientes:

En la categoría de *Fundamento*:

- 1.6, "Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad"
- 1.7, "Trabajo de la relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$".

En la categoría de *Transformación*:

- 2.7, "Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad $k=y/x$".

Y en la categoría de *Contingencia*:

- 4.1, "Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales".

Por lo que respecta a la categoría de *Fundamento*, vamos a centrarnos en dos indicadores, el 1.6 sobre el procedimiento de reducción a la unidad y el 1.7, sobre la razón de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la razón escalar entre pares de valores de la misma magnitud.

Ya destacamos en nuestro estudio comparativo más arriba que en cuanto a la introducción del concepto de proporcionalidad, la manera de proceder de uno y otro profesor son bien diferentes. En primer lugar, difieren en las definiciones de proporcionalidad que ofrecen a los alumnos; en segundo lugar, se diferencian también en el momento en que dan la definición; y en tercer lugar, observamos secuenciaciones de las dos primeras clases de proporcionalidad, las que corresponden a la introducción del concepto de proporcionalidad y de la técnica de reducción a la unidad, bien diferentes. Estos puntos, el de la definición de proporcionalidad y el de la secuenciación tienen que ver con los indicadores 1.6 y 1.7 mencionados, como vamos a demostrar.

En cuanto a la definición de proporcionalidad, el profesor de Primaria define la proporcionalidad al comienzo del episodio como "una relación entre magnitudes mesurables" y a partir de aquí trabaja los conceptos de magnitud, mesurable y unidad de medida, pasando muy por encima por el concepto de relación. Creemos no le ha quedado claro a la alumna lo de "relación", el tipo de relación al que se está refiriendo. Esto es, si se trata de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$, o de la razón de proporcionalidad $k=y/x$, o de ambas razones a la vez. Esto puede observarse, por ejemplo, en la intervención 3, cuando el profesor pide a los alumnos que justifiquen si las magnitudes "número de barras de pan y precio" son proporcionales. Ainoa afirma que sí son proporcionales porque son "dobles", es decir, porque $x_2/x_1=y_2/y_1=2$. Pero hay además otra cosa, a la hora de buscar valores correspondientes en una tabla de proporcionalidad, Ainoa ha entendido que siempre se trata de "doblar" como vemos en esta misma intervención 3. El profesor está trabajando la definición de proporcionalidad en el ejemplo de las barras de pan de la manera siguiente: si doblas el valor de una de las magnitudes (4 barras de pan respecto a 2), se dobla el valor correspondiente de la otra (costarán 1,80x2=3,60€ puesto que 2 barras cuestan 1,80€), de forma que cuando el profesor triplica el valor de una de las magnitudes (6 barras de pan), Ainoa afirma que para encontrar lo que costarán, hay que "doblar" 3,60€. Creemos que ambos factores, la definición poco clara de la que parte el profesor, que podía haber trabajado la definición de proporcionalidad como una relación de doble sentido (razón $k=y/x$ y razón $x_2/x_1=y_2/y_1$) más su insistencia en los ejemplos que trabaja de que hay que ver si al doble de un valor le corresponde el doble del otro, han llevado a Ainoa a identificar los conceptos de proporcionalidad y duplicidad de valores de una magnitud.

La profesora de Secundaria, en cambio, llega al final del episodio a definir la proporcionalidad como "lo que haces en un lado [la gasolina], el factor de cambio en un lado se respeta en el otro [nº de vueltas]" o que "mantienes a un lado y al otro la misma relación", sirviéndose de un ejemplo concreto que ha planteado desde el comienzo del episodio, el de las carreras de fórmula 1. La profesora, basando la definición de proporcionalidad en la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$, el primer valor que pide encontrar en la tabla de proporcionalidad no es uno en el que $x_2/x_1=2$ sino 12. Esto ha provocado que Ainoa encuentre el valor correspondiente en la tabla de proporcionalidad utilizando métodos aritméticos informales (cuántas vueltas al circuito se pueden dar con 120 litros de gasolina), tal como vemos en la intervención 9. Fijémonos que el dato del problema es que con 10 litros se dan 1,2 vueltas al circuito y Ainoa ha descompuesto 120 como 50+50+10+10, viendo que con 50 litros se dan 6 vueltas ($x_2/x_1=5$, implica que $y_2=5\text{x}1,2=6$). Es verdad que no ha procedido viendo que si $x_2/x_1=12$, entonces $y_2=12\text{x}1,2=14,4$ pero no ha cometido los mismos errores que en el problema de las barras de pan.

Vemos aquí que cuando el profesor introduce el concepto de proporcionalidad insistiendo en que al doble de un valor le corresponde el doble del otro (si $x_2=2x_1$ -> $y_2=2y_1$); que al triple de un valor le corresponde el triple del otro (si $x_2=3x_1$ -> $y_2=3y_1$); que si una magnitud aumenta, aumenta la otra. El alumno se hace un lío con las tablas de proporcionalidad e identifica que si una función es de aumentar, es que es de proporcionalidad. En cambio la profesora de Secundaria, consciente de este problema de identificación que hacen los alumnos y queriendo evitar que se produzcan este tipo de errores, habla de factor de cambio en un lado y en el otro, sin mencionar conceptos de dobles o de triples. Este tipo de actuaciones, como la de la profesora de Secundaria, son un buen momento para evitar este tipo de errores.

Constatamos que los dos profesores utilizan la palabra "relación" en su definición de proporcionalidad. Sin duda es una palabra difícil y controvertida en Matemáticas, pues el significado que se le asocia es bien distinto según el concepto que se esté trabajando. Ya hemos remarcado que el profesor de Primaria habla de "relación entre magnitudes mesurables" sin dejar claro, a nuestro juicio, a qué tipo de relación se está refiriendo. La profesora de Secundaria, en cambio, además de la palabra "relación", usa otras palabras: "el factor de cambio en un lado se respeta en el otro"; "mantienes a un lado y al otro la misma relación". No limita la comprensión del concepto de proporcionalidad a la comprensión del concepto "relación" aunque sí utiliza "relación" para aclarar la definición que ha ofrecido: "mantienes a un lado y al otro la misma relación". Fijémonos que ha utilizado "factor de cambio". Se ha dado cuenta que "factor de cambio" es difícil de entender y para reexplicar la palabra "factor", sale "relación": "mantienes a un lado y al otro la misma relación". Esta definición con estos matices, unida a que en el ejemplo de introducción de la proporcionalidad el de las carreras de fórmula 1 (si un coche hace con 10 litros de gasolina 1,2 vueltas al circuito) no pida buscar valores en la tabla de proporcionalidad que sean el doble o el triple de los valores ofrecidos como datos (¿cuántas vueltas puede dar con 120 litros?) han llevado a una alumna como Ainoa a entender bien el concepto de proporcionalidad en el Primer curso de Secundaria.

Asimismo creemos que las intervenciones 6 y 7 de Ainoa en el episodio 3, tienen que ver con lo que ella ha entendido de la definición de proporcionalidad. El profesor de Primaria propone pares de magnitudes como "peso y precio", "tiempo y volumen", "edad y peso" o "tiempo y número de espectadores" para que los alumnos se inventen dos problemas, uno en los que las magnitudes sean proporcionales y otro en el que no lo sean. Ainoa utiliza las magnitudes de "tiempo y volumen" para poner su ejemplo de magnitudes proporcionales: "tengo una piscina, la quiero llenar y abro un grifo… en 1 hora entran 100 litros; en 2 horas, 200; y en 3 horas 300 litros". Ainoa utiliza en su problema una razón de proporcionalidad $k=y/x=100$ mayor que la unidad y elige como razones escalares, x_2/x_1, 2 y 3, las mismas en las que ha insistido el profesor continuamente. Pero es más, cuando Ainoa elige las magnitudes de "tiempo y número de espectadores" para poner su ejemplo de magnitudes no proporcionales, escribe en una tabla de valores: "en un cine entran en 1 hora, 100 personas; en 2 horas, 200 personas; y en 3 horas, 300 personas". Utiliza la misma razón $k=y/x=100$ y razones escalares x_2/x_1, iguales a 2 y 3. Ha puesto exactamente los mismos valores para las magnitudes no proporcionales que en el problema de magnitudes proporcionales de tiempo y litros (1, 100; 2, 200 y 3, 300), con la salvedad de que cuando ha escrito 200, ha querido decir "aproximadamente" 200. Ainoa parece no haber entendido la diferencia entre magnitudes proporcionales y no proporcionales, pues podría haber puesto en vez de "200", un valor que se viera claramente que no es el doble de 100 y no lo hace.

Ainoa elige bien el contexto matemático para poner un ejemplo de magnitudes no proporcionales, "tiempo y número de espectadores". Pero cuando escribe en la tabla 1, 100; 2, 200; 3, 300 está pensando en la función de proporcionalidad. Escribe estos datos en la tabla porque está en el tema de proporcionalidad. Ahora bien, en el contexto del cine ella sabe que no pueden ser proporcionales estas magnitudes y por eso escribe 200 aunque queriendo decir "aproximadamente". La alumna es consciente que empíricamente, las magnitudes tiempo y número de espectadores no pueden ser proporcionales, pero esto no se traduce en escribir unos datos en la tabla de valores que lo muestren. Parece no saber pasar lo que es su conocimiento empírico de unas magnitudes que no son proporcionales a lenguaje matemático, esto es, a valores en la tabla. Separa completamente una cosa de la otra. El profesor de Primaria, al proponer a los alumnos que pongan ejemplos de magnitudes proporcionales y no proporcionales tiene como objetivo que los alumnos entiendan el concepto de proporcionalidad y aquí tenemos un ejemplo concreto, en el caso de Ainoa, de que no ha sido así. Fijémonos en cambio que la profesora de Secundaria no propone a los alumnos ninguna actividad de este tipo y Ainoa parece haber entendido bien el concepto de proporcionalidad.

Podemos afirmar que la idea de "modelo" está implícita en lo que los alumnos entienden sobre el concepto de proporcionalidad. Es cierto que el primer modelo de función que los alumnos ven en su currículum es el de proporcionalidad y el objetivo de la profesora de Secundaria es ligar el concepto de proporcionalidad con el modelo de función de proporcionalidad, es decir, presentar la proporcionalidad asociada a la idea de modelización matemática. Su propósito es conectar la proporcionalidad y la idea de modelo para no reducir la proporcionalidad, por ejemplo, a cuestiones de doblar o triplicar magnitudes, relacionando así desde el principio la proporcionalidad con la función de proporcionalidad.

En cuanto al momento en que ambos profesores dan la definición, el profesor de Primaria la da al comienzo del episodio, mientras que la profesora de Secundaria la da al final, conduciendo a los alumnos hasta la definición. Esto va ligado a la secuenciación completamente distinta que hacen uno y otro profesor de la primera y segunda clase de proporcionalidad, tal como indicamos en la comparación de los episodios 13 del Primer curso de Secundaria y 1 de Sexto curso de Primaria. El profesor de Primaria:

- Parte de la definición: "la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables" [Episodio 1, 1:06]
- Trabaja los conceptos de magnitud, mesurable y unidad de medida [Episodio 1]
- Propone a los alumnos pares de magnitudes para que justifiquen si son mesurables o no [Episodio 2.1]
- Pide a los alumnos que pongan ejemplos de magnitudes mesurables y de magnitudes no mesurables [episodio 3]
- Trabaja el primer ejemplo, el de las barras de pan: 2 barras de pan cuestan 1,80€, ¿Cuánto costarán 4 barras de pan, 6 barras de pan? [Episodio 2.1]
- Introduce la reducción a la unidad con el ejemplo del sorbete de limón: si para 3 limones se necesitan 6 cucharadas de azúcar, ¿cuántas cucharadas de azúcar se necesitarán con 5 limones? [Episodio 8.1]

En cuanto a la profesora de Secundaria:

- Parte de un ejemplo concreto, el de las carreras de fórmula 1: con 10 litros de gasolina se dan 1,2 vueltas al circuito [Episodio 13]
- Llega a la definición de proporcionalidad: "la proporcionalidad quiere decir que lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro" [Episodio 13, 7:00]
- Destaca cuál es la magnitud que uno controla, los litros de gasolina [Episodio 14]
- Destaca que esta magnitud es la que pondremos en el eje de las x, pensando aquí en la función de proporcionalidad y en su representación [Episodio 14]

- Insiste en la búsqueda de la información que ofrece el problema, "el dato", a partir del cual se puede comenzar a trabajar [Episodio 14]
- Trabaja el ejemplo con el que ha introducido la proporcionalidad, preguntando el número de vueltas que se pueden dar al circuito con 90, 50 o 120 litros de gasolina [Episodio 14]
- Introduce la reducción a la unidad con el siguiente problema: si 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, ¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos? [Episodio 17]

El hecho de programar secuenciaciones bien distintas para la primera clase de proporcionalidad puede deberse a que uno u otro profesor tengan en mente modelos de enseñar bien diferentes. En el caso del profesor de Primaria, quiere desarrollar una técnica, por lo que su secuencia de clase es partir de la definición de proporcionalidad para desarrollar posteriormente la técnica de reducción a la unidad. En el caso de la profesora de Secundaria, quiere "modelizar" la proporcionalidad y de ahí que su secuencia de clase sea partir de un ejemplo y llegar a la definición de proporcionalidad. Luego introduce la reducción a la unidad de manera que se ve claramente cómo la proporcionalidad es una relación de doble sentido (razón $k=y/x$ y razón $x_2/x_1=y_2/y_1$), con el objetivo de llegar a la función de proporcionalidad.

Los dos profesores tienen en mente que han de construir un concepto, el de proporcionalidad, pero la manera de proceder de ambos en bien distinta, como vemos en las secuenciaciones anteriores. Por lo que respecta a la definición de proporcionalidad, el profesor de Primaria da una definición a los alumnos, después unos ejemplos para que los alumnos trabajen la definición (ver si las magnitudes propuestas son proporcionales o no) y finalmente trabaja el ejemplo de las barras de pan. La profesora de Secundaria, en cambio, va construyendo el concepto de proporcionalidad a partir de un ejemplo, el de las carreras de fórmula 1. Propone un problema y lo problematiza porque es necesario fabricar la herramienta para resolverlo. Esta manera de proceder obliga a los alumnos a construir la definición de proporcionalidad, para que tengan la herramienta para resolver el problema. Necesita generar una respuesta en forma de tabla, poner los datos, mientras construye al mismo tiempo la técnica. Todo va dirigido a construir un modelo. Esta es la diferencia entre una secuenciación y otra. En la segunda secuenciación, la del Primer curso de Secundaria se problematiza la definición de proporcionalidad y en la de Sexto no. Fijémonos lo importante que es llegar a tener una definición de proporcionalidad, de una manera o de la otra. Cuando Ainoa construye su concepto de proporcionalidad en el Primer curso de Secundaria, entiende lo que son magnitudes proporcionales y puede encontrar valores en una tabla de proporcionalidad, bien aplicando métodos aritméticos informales en el primer problema de las carreras de fórmula 1, bien reduciendo a la unidad en el problema de las cajas de caramelos. No comete errores.

Estas secuenciaciones también nos muestran cómo la manera de trabajar la reducción a la unidad influye en Ainoa. En las intervenciones que se refieren a la utilización de la reducción a la unidad, observamos cómo Ainoa, en Sexto curso de Primaria es capaz de reducir a la unidad en el problema de las barras de pan pero no en el problema del sorbete de limón. En el primer caso (intervención 5) el profesor no recoge la intervención de la alumna pues entendemos que no era el objetivo del profesor explicar la técnica de la reducción a la unidad en ese momento. En el segundo caso (intervención 8), la alumna no entiende cómo se ha reducido a la unidad, que para 1 limón hagan falta dos cucharadas de azúcar. En cambio en la intervenciones 10 y 11 del Primer curso de Secundaria, la alumna reduce a la unidad sin problemas, y eso que en este caso la razón de proporcionalidad no es entera, ½, más difícil de ver que en el caso del problema del sorbete de limón que es 2. Creemos que en el caso del profesor de Primaria, el hecho de que haya insistido en su introducción al concepto de proporcionalidad en buscar valores de una tabla de proporcionalidad donde la razón escalar x_2/x_1 era 2 puede haber causado confusión a esta alumna, justamente en un problema como el del sorbete de limón donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ también era 2. Ainoa en el ejemplo del sorbete de limón no es capaz de entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido. No relaciona las dos razones, la razón de proporcionalidad y la razón escalar, entre otras cosas porque en el ejemplo del sorbete de limón, la razón $k=y/x$ es 2 como la razón x_2/x_1 en los ejemplos prototípicos que el profesor ha puesto para explicar el concepto de proporcionalidad, lo que no le permite a Ainoa encontrar correctamente los valores correspondientes en la tabla de proporcionalidad; mientras que en el ejemplo de las cajas de caramelos, Ainoa ve claramente que la razón $k=y/x$ es 1/2, lo que le permite encontrar rápidamente los valores correspondientes en la tabla de proporcionalidad. Esto nos muestra que el profesor de Primaria, al elegir ejemplos prototípicos donde las razones escalares son 2, 3 ó ½, no ha sabido encontrar los ejemplos adecuados para construir el concepto y Ainoa ha asociado la idea de proporcionalidad a un ejemplo, a que al doble de una magnitud corresponde el doble de la otra magnitud, sin relacionar las dos razones $k=y/x$ y $x_2/x_1=y_2/y_1$.

En cuanto a la categoría de *Transformación*, vamos a fijarnos en el indicador 2.7 de nuestra lista, sobre la elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad $k=y/x$. A nuestro entender, y tal como acabamos de remarcar en el párrafo anterior, el ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad ha influido también en la comprensión de la técnica por parte de la alumna. El profesor de Primaria introduce la reducción a la unidad con el ejemplo del sorbete de limón: si para 3 limones se necesitan 6 cucharadas de azúcar, y pide ¿cuántas cucharadas de azúcar se necesitarán con 5 limones? (Episodio 8.1). En este ejemplo $k=y/x=2$ y en la manera de proceder del profesor insiste que como x_2/x_1 es 5/3, "no hay relación", entendiendo que "tener relación" seria si x_2/x_1 fuera 2, 3 ó ½ (el doble, el triple o la mitad), y por eso es necesaria una técnica como la de reducción a la unidad. De hecho el profesor antes de encontrar las cucharadas que corresponden a 5 limones, habla de 6 limones cuando le pregunta "¿entre el 3 y el 6 hay relación?" (episodio 8.1, 9:27). Ainoa no lo entiende como vemos en la intervención 6. Vemos aquí dos cuestiones: la primera, que el profesor de Primaria quiere dar a la palabra "relación" el significado de "razón" pero sin concretar más y la palabra relación es como un cajón de sastre. Se da aquí un abuso del lenguaje por parte del profesor de Primaria que puede deberse a cierto desconocimiento por parte del profesor. Y la segunda cuestión, que el profesor, al utilizar el problema del sorbete de limón, utiliza un ejemplo muy prototípico como he mencionado en el párrafo anterior y cuanto más prototípico es el ejemplo, menos se construye el concepto de proporcionalidad.

En cambio, la profesora de Secundaria introduce la reducción a la unidad con el siguiente problema: si 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, ¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos? (Episodio 17). En este problema la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es ½, no es entera y se pide encontrar valores en la tabla de proporcionalidad $x_2/x_1=3/4$, 3/5, etc. Como lo primero que se pide es lo que pesará 1 caja de caramelos, Ainoa enseguida ve que es la mitad (intervención 8), medio kilo, y que para encontrar el resto de valores de la magnitud que se piden, sólo hay que dividir por 2: "si te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas" (episodio 17, 5:55). Fijémonos también que el profesor de Primaria sólo pide que los alumnos encuentren un valor en la tabla de proporcionalidad (¿cuántas cucharadas de azúcar se necesitan con 5 limones?), y la profesora de Secundaria pide encontrar 7 valores en la tabla (¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos?). Esto se debe a la diferencia de objetivos de los dos profesores. El de Primaria busca que los alumnos aprendan una técnica para resolver este tipo de problemas cuando no pueden resolverse fácilmente porque x_2/x_1 no es ni 2, ni 3, ni ½. La profesora de Secundaria tiene como objetivo que el problema sirva para que los alumnos construyan la idea de función, la idea de modelo, esto es, cuál es la manera de decir el peso de cualquier número de cajas, por eso pide que encuentren tantos valores en la tabla.

Además, por lo que respecta al primer ejemplo con el que se trabaja el concepto de proporcionalidad, y aunque no tenemos un indicador en nuestra lista que se refiera a este punto, creemos que es importante resaltar en este momento las diferencias en los dos profesores respecto a este punto, ya que influyen a nuestro entender, una vez más, en la comprensión del concepto de proporcionalidad por parte de Ainoa. El profesor de Primaria utiliza el problema siguiente: "si 2 barras de pan cuestan 1,80€, ¿Cuánto costarán 4 barras de pan, 6 barras de pan?" (Episodio 2.1), donde $k=y/x=0,90$ y $x_2/x_1=2$ y 3. Mientras que la profesora de Secundaria utiliza el de las carreras de fórmula 1: "si con 10 litros de gasolina se dan 1,2 vueltas al circuito, ¿cuántas vueltas se pueden dar al circuito con 90, 50 o 120 litros de gasolina?" (Episodio 14), donde $k=y/x=0,12$ y $x_2/x_1=9$, 5 y 12. Es cierto que para empezar a trabajar el concepto de proporcionalidad y encontrar valores en una tabla de proporcionalidad puede ir bien que la razón escalar x_2/x_1 sea 2 ó 3, pero como ya hemos dicho más arriba, después, cuando además en el siguiente ejemplo de introducción a la técnica de reducción a la unidad, el del sorbete de limón, la razón de proporcionalidad $k=y/x$ es 2, Ainoa se hace un lío. En Sexto curso de Primaria, Ainoa parece no haber entendido bien el concepto y posteriormente el tipo de ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad donde la razón $y=k/x$ es 2 le dificulta la comprensión de la técnica. En el Primer curso de Secundaria, Ainoa parece haber entendido bien el concepto y posteriormente el tipo de ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad donde la razón $y=k/x$ es 1/2 no le dificulta la comprensión de la técnica. Esto nos muestra que la elección de un ejemplo concreto puede generar dificultades en la comprensión del concepto de proporcionalidad y de la técnica de reducción a la unidad, aunque el profesor de Primaria sea un buen profesor. También nos muestra que las dificultades de la alumna, no son sólo de la alumna, sino que están contextualizadas. No se puede separar enseñanza de aprendizaje, puesto que a un determinado modelo de enseñanza como es el del profesor de Primaria, corresponde un determinado aprendizaje y unas dificultades, como son las de Ainoa.

Por lo que respecta a la categoría de *Contingencia*, vamos a fijarnos en el indicador 4.1 sobre la gestión de las intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales. En el problema del Primer curso de Secundaria, el del circuito de fórmula 1, Ainoa encuentra el valor correspondiente en la tabla de proporcionalidad utilizando métodos aritméticos informales (cuántas vueltas al circuito se pueden dar con 120 litros de gasolina), tal como vemos en la intervención 9. El dato del problema es que con 10 litros se dan 1,2 vueltas al circuito y Ainoa ha descompuesto 120 como 50+50+10+10, viendo que con 50 litros se dan 6 vueltas (x_2/x_1=5, implica que y_2=5x1,2=6). Es verdad que no ha procedido viendo que si x_2/x_1=12, entonces y_2=12x1,2=14,4 pero ha encontrado la respuesta y la profesora de Secundaria ha reforzado su intervención aunque remarcando que no utilizará esa técnica, pues como ya hemos señalado con anterioridad, la profesora tiene en mente el modelo de la función de proporcionalidad $y=kx$.

Una de las funciones del profesor es ayudar a construir al alumno, a partir de los conocimientos informales que este tiene, el concepto matemático que el profesor quiere, estableciendo así puentes entre los métodos informales que el alumno utiliza y los formales. Si miramos el conjunto de las tres intervenciones de Ainoa en el Primer curso de Secundaria (9 a 11), Ainoa utiliza en un caso métodos informales para encontrar el valor que corresponde en una tabla de proporcionalidad, y en el otro caso, reduce a la unidad sin dificultades para ver lo que pesarán unas cajas de caramelos, independientemente del número de cajas que tengas. La secuenciación de las clases de uno y otro permite el establecimiento o no de dichos puentes de conocimiento. Ainoa establece puentes en el Primer curso de Secundaria y en Sexto no. En Sexto curso de Primaria, Ainoa no establece puentes entre las técnicas de cálculo de que al doble o al triple de una magnitud le corresponde el doble o el triple de la otra, y la técnica de reducción a la unidad. Esto puede deberse a que el profesor de Primaria, en su manera de proceder, implícitamente está diciendo: si las razones escalares x_2/x_1 son fáciles (doble, triple o mitad), se encuentran los valores en la tabla fácilmente; y cuando las razones escalares no sean fáciles (5/3), entonces tendremos una técnica. En ningún momento ha dicho que también se puede utilizar la técnica de reducción a la unidad si las razones escalares son fáciles.

Ainoa tampoco establece ningún puente entre la intervención 5 en la que encuentra lo que cuesta 1 barra de pan, y la técnica de reducción a la unidad. En la intervención 8, Ainoa no sólo no entiende que a un limón le correspondan 2 cucharadas de azúcar, sino que tampoco ve ninguna relación entre esta técnica y el hecho de que en el problema de las barras de pan ella dedujera sin problemas lo que costaba 1 barra de pan. Entendemos que la manera de proceder del profesor no provoca el establecimiento de este tipo de relaciones, puesto que ni el mismo profesor se hizo eco de la intervención de Ainoa en su momento. El profesor de Primaria podía haberla aprovechado para decir que lo que había hecho Ainoa en el problema de las barras de pan era reducir a la unidad y en que en la siguiente clase utilizarían este método para encontrar valores en una tabla de proporcionalidad; o también podía recuperar la intervención de Ainoa después de introducir la técnica de reducción a la unidad, relacionando los dos ejemplos, el de las barras de pan y el del sorbete de limón. Todo esto, unido a la elección de ejemplos y a que no ha guiado al alumno a construir el concepto de proporcionalidad, ha provocado que Ainoa no entienda el concepto (no sabe poner ejemplos de magnitudes no proporcionales), no conecte el concepto con la técnica de reducción a la unidad e incluso no sepa aplicar la técnica. Ainoa no ha conectado concepto con técnica. En cambio, con la profesora de Secundaria, Ainoa ha establecido puentes entre el concepto, la técnica y el modelo de función de proporcionalidad.

Capítulo 6. Conclusiones

Las preguntas de investigación que nos planteamos al comienzo de nuestra investigación eran las siguientes:

- ¿Cuáles son los contenidos de proporcionalidad que el profesor de Matemáticas manifiesta en su práctica docente en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria Obligatoria?
- ¿Se detecta un incremento de la complejidad al iniciar la Educación Secundaria o el grado de la misma se mantiene?
- ¿Cuál es el significado de los contenidos que intervienen en esta temática que los profesores de Matemáticas de Primaria y Secundaria pretenden hacer construir a los estudiantes?

Para responder a estas cuestiones, nos fijamos, como objetivo general de investigación, analizar la actividad docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria Obligatoria, siguiendo el modelo de las cuatro categorías de Rowland - *Fundamento*, *Transformación*, *Conexión* y *Contingencia* (*The Knowledge Quartet*), para dotar a la "proporcionalidad" de todos los elementos que la recubren.

Asimismo, nos planteamos los siguientes objetivos, como objetivos específicos de investigación, el primero de ellos de tipo metodológico para poder llevar a cabo el análisis de la práctica docente en el aula y los otros tres derivados del análisis realizado a partir de la lista de indicadores establecida.

Organizamos las conclusiones del trabajo de acuerdo con estos cuatro objetivos:

1. Elaborar un instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula.
2. Analizar desde la práctica docente cuáles son los objetivos del profesor al enseñar el tema de proporcionalidad.
3. Analizar desde la práctica docente cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad.

4. Explicar las consecuencias que una determinada construcción del concepto de proporcionalidad tiene en el aprendizaje de una alumna concreta.

6.1. Conclusiones en relación al objetivo 1

Si el primer objetivo de nuestro trabajo es el de elaborar un instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula, para analizar la actuación docente relativa a la práctica en el aula necesitamos un modelo. Por esto, lo que hemos hecho es elaborar una lista de indicadores, a partir del modelo del *Knowledge Quartet* de las categorías de Rowland que nos sirviera para analizar cualquier episodio de clase sobre el tema de la proporcionalidad.

Para llegar a la lista definitiva de indicadores elaboramos, en primer lugar y a partir del marco teórico de referencia, una lista de indicadores relacionados con el conocimiento del profesorado que concretasen los factores que intervienen en el contenido matemático de proporcionalidad. En segundo lugar, consideramos las categorías de Rowland -*Fundamento*, *Transformación*, *Conexión* y *Contingencia*- desde el punto de vista del contenido matemático de proporcionalidad y agrupamos los indicadores de esta lista según estas cuatro categorías. Para poder tener una visión completa de la práctica docente introducimos una nueva categoría, que denominamos *General*, donde listamos una serie de indicadores, no dependientes del contenido y que pueden aparecer en cualquier episodio de una clase de Matemáticas, independientemente de la temática. Como resultado obtuvimos una lista definitiva de 39 indicadores (11 para la categoría de *Fundamento*, 11 para la de *Transformación*, 7 para la de *Conexión*, 4 para la de *Contingencia* y 6 para la categoría *General*).

La lista de 39 indicadores relacionados con el conocimiento del profesor, a partir del modelo del *Knowlege Quartet* de Rowland, indicadores que concretan los factores que intervienen en el contenido matemático de la proporcionalidad, nos ha servido para analizar la práctica docente de los episodios de clase sobre proporcionalidad.

Esta lista de indicadores ha mostrado ser una herramienta adecuada para analizar y comparar la práctica docente en el aula de dos profesores concretos, uno de Sexto curso de Primaria y otro del Primer curso de Secundaria. A partir de esta lista hemos podido caracterizar las dos prácticas docentes y compararlas, categoría a categoría -*Fundamento*, *Transformación*, *Contingencia*, *Conexión* y *General*-, lo que nos ha permitido confrontar la visión sobre la proporcionalidad observada a través de la práctica docente que tienen ambos profesores y los objetivos que se proponen al desarrollar la proporcionalidad.

Además esta lista de indicadores se ha revelado como una herramienta útil para centrarnos en algunos aspectos particulares sobre la proporcionalidad, amplificarlos y así analizar los momentos de aprendizaje de una alumna concreta.

Por lo tanto, podemos afirmar que esta lista de 39 indicadores es una herramienta útil tanto para analizar la práctica docente de cualquier episodio de clase sobre proporcionalidad como para comparar la práctica docente sobre proporcionalidad de distintos profesores.

6.2. Conclusiones en relación al objetivo 2

Tal como destacamos en el segundo objetivo, uno de los propósitos del trabajo consiste en determinar, a partir del análisis de la práctica docente, cuáles son los objetivos del profesor al realizar el tema de proporcionalidad y establecer relaciones entre estos objetivos y el conocimiento del profesor. Los datos utilizados son las grabaciones en video de sesiones de clase de los profesores: en concreto de un profesor de Sexto curso de Primaria y de una profesora del Primer curso de Secundaria. Hemos podido inducir los objetivos del profesor a partir de la observación de las clases de proporcionalidad, de la elección de los ejemplos que hace, del discurso utilizado con los alumnos, y de las interacciones que se producen en el aula.

6.2.1. Objetivos del profesor de Primaria

Los objetivos que el profesor de Primaria se plantea para el tema de proporcionalidad son: entender qué son magnitudes proporcionales a partir de la razón entre 2 valores de la misma variable; aprender a completar una tabla de proporcionalidad a partir de los datos de un problema; y aprender una técnica, la de reducción a la unidad, para la resolución de problemas de proporcionalidad.

En los episodios analizados de Sexto curso de Primaria, cuando el profesor quiere ilustrar qué son magnitudes proporcionales, elige ejemplos prototípicos donde la razón escalar entre dos valores de la misma variable es 2, 3 ó ½. Sobre todo insiste en los valores 2 y 3. Interpretamos que el profesor de Primaria opta por utilizar razones escalares enteras y simples para facilitar que los alumnos entiendan qué son magnitudes proporcionales y que entiendan el concepto de proporcionalidad. Incluso cuando elige un problema (el precio de las barras de pan) donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ entre las dos variables no es entera (0.90), pide encontrar valores en la tabla de proporcionalidad donde la razón entre dos valores de la misma variable es 2 ó 3, por lo que recurre de nuevo a un ejemplo prototípico.

El principal objetivo del profesor de Primaria es que los alumnos entiendan que dos magnitudes son proporcionales cuando al doble o al triple de una magnitud le corresponde el doble o el triple de la otra magnitud, por lo que la elección de los ejemplos está en función del primer objetivo que se ha marcado para la clase: entender cuando dos magnitudes son proporcionales. Sin embargo, si los casos prototípicos son preponderantes y si no se extiende el concepto a otras razones escalares enteras como por ejemplo puedan ser 4, 5, 6 ó 10, se puede provocar que el alumno acabe entendiendo que la proporcionalidad tiene que ver esencialmente con doblar o triplicar magnitudes. El profesor podría haber utilizado, por ejemplo, una razón escalar como 10 que es entera y sencilla, con la que el alumno podría entender qué son magnitudes proporcionales, sin caer en la simplificación de reducir la proporcionalidad a una cuestión de sólo doblar o triplicar magnitudes (como encontramos en numerosos libros de texto). Incluso podría haber utilizado, aunque sólo fuera una vez, una razón entera más compleja. En cualquier caso, no considera en ningún momento la razón entre valores correspondientes de las dos variables.

El profesor de Primaria, a la hora de encontrar valores en una tabla de proporcionalidad, se plantea como objetivo hacer la siguiente distinción: si las razones entre 2 valores de la misma variable son sencillas, se pueden encontrar fácilmente los valores correspondientes de la variable dependiente (doblando, triplicando o dividiendo por 2). Y en el caso de que las razones entre 2 valores de la misma variable no sean 2, 3 ó ½, introducir una técnica como la de la reducción a la unidad para encontrar el valor deseado en una tabla de proporcionalidad. De esta manera justifica la utilización de la técnica de reducción a la unidad. De hecho, a la hora de presentar un problema de proporcionalidad con el que introducir la técnica de reducción a la unidad, elige un problema (el sorbete de limón) donde la razón de proporcionalidad *k=y/x* entre las dos variables es 2 y pide encontrar un único valor en la tabla de proporcionalidad, donde la razón escalar entre dos valores de la misma variable es mayor que la unidad y no entera (5/3). De esta manera los alumnos verán la necesidad de utilizar la técnica para encontrar el valor correspondiente en la tabla, ya que no es fácil calcular el valor con métodos sencillos de cálculo mental.

Constatamos una vez más que el profesor de Primaria elige un ejemplo prototípico cuando su objetivo es introducir la técnica de reducción a la unidad. No lo es respecto a la razón escalar entre dos valores de la misma variable pero sí lo es respecto a la razón de proporcionalidad entre las dos variables, *k=y/x*, que es 2. Entendemos que el profesor de Primaria no ha querido elegir un ejemplo donde la razón de proporcionalidad no fuese entera para reforzar la justificación y la comprensión de la técnica de reducción a la unidad. Consciente de la dificultad de la técnica de la reducción a la unidad para alumnos de Sexto curso de Primaria que trabajan la proporcionalidad por primera vez a este nivel, elige la razón de proporcionalidad más sencilla, *k=y/x*=2, para que los alumnos la puedan deducir sin dificultades de los datos del problema, la puedan entender y puedan aplicar con más facilidad la técnica para completar una tabla de proporcionalidad, que es su objetivo. El profesor entiende que una razón de proporcionalidad no entera añadiría complejidad al tema. En todo caso, en ningún momento establece relaciones entre las dos técnicas introducidas: la utilización de razones escalares simples entre valores de la misma variable y la reducción a la unidad.

6.2.2. Objetivos de la profesora de Secundaria

Los objetivos que la profesora de Secundaria se plantea para el tema de proporcionalidad son: entender el concepto de magnitudes proporcionales relacionando la razón de proporcionalidad entre dos variables y la razón escalar entre 2 valores de la misma variable; entender que hay una magnitud que uno "controla", es decir, que una de las variables es independiente y por lo tanto puede tomar cualquier valor que le asignemos; completar una tabla de proporcionalidad a partir de los datos de un problema; e introducir una técnica como la de reducción a la unidad para la resolución de problemas de proporcionalidad, relacionando la técnica con la función de proporcionalidad como primer ejemplo de función matemática y con su representación lineal. El objetivo último de la profesora es “modelizar” la proporcionalidad, es decir, entender la proporcionalidad como un tipo de función.

Cuando se trata de entender la definición de proporcionalidad, la profesora de Secundaria elige un ejemplo (las carreras de fórmula 1) donde la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no es entera. Elige asimismo razones escalares entre dos valores de la misma variable enteras (9, 5 y 12), pero no prototípicas (2, 3 ó ½). Entendemos que de esta manera la profesora de Secundaria pretende evitar que los alumnos cometan errores conceptuales como el de asociar la proporcionalidad al hecho de doblar o triplicar magnitudes.

Para enseñar a los alumnos a completar una tabla de proporcionalidad, la profesora de Secundaria insiste en que hay que buscar primero la información que ofrece el problema (lo que ella denomina “el dato”), a partir del cual se puede comenzar a trabajar. Subraya también que siempre hay una magnitud que “uno controla” (una variable independiente), pues entendemos que lo que la profesora tiene en mente es que los alumnos lleguen posteriormente hasta la función de proporcionalidad. En el primer ejemplo que la profesora ofrece para trabajar la proporcionalidad los alumnos tienen que encontrar valores en una tabla de proporcionalidad a partir de los datos del problema y utilizando métodos informales. Después pedirá a los alumnos que completen una tabla de proporcionalidad utilizando la técnica de reducción a la unidad.

Para introducir la técnica de reducción a la unidad, la profesora de Secundaria elige un problema (las cajas de caramelos) donde la razón de proporcionalidad entre las dos variables no es entera (½), si bien es la más sencilla posible de entre las razones no enteras. El hecho de que la profesora elija esta razón puede deberse a que como los alumnos ya han trabajado la proporcionalidad en Primaria y normalmente contextualizada en problemas donde la razón de proporcionalidad es 2 ó 3, no quiera que los alumnos asocien que la razón de proporcionalidad tenga que ser siempre entera y mayor que la unidad o, más concretamente, que tenga que ver sólo con doblar o triplicar magnitudes. Asimismo observamos que para enseñar al alumno cómo aplicar la técnica pide que estos encuentren hasta 7 valores de la variable dependiente en la tabla de proporcionalidad (1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20). Entendemos que esto se debe a que el objetivo de la profesora va más allá de la aplicación de la técnica y pretende que el alumno se aproxime por primera vez a la función de proporcionalidad. Sólo pidiendo encontrar múltiples valores de la variable dependiente en la tabla de proporcionalidad, se facilita que el alumno encuentre la relación funcional que se establece entre las dos variables (el peso es la mitad del número de cajas, $y=1/2x$). Su objetivo es modelizar la proporcionalidad y ofrecer a los alumnos el primer ejemplo de función matemática.

6.2.3. Comparación entre los objetivos de los profesores de Primaria y Secundaria

Observamos aquí que los dos profesores se plantean prácticamente los mismos objetivos generales para el tema de proporcionalidad (entender qué son magnitudes proporcionales, aprender a completar una tabla de proporcionalidad e introducir una técnica como la de reducción a la unidad), aunque con fines bien diferenciados por lo que respecta sobre todo a la introducción de una técnica para completar una tabla de proporcionalidad. Ahora bien, aunque en apariencia coinciden en los objetivos, la elección de los ejemplos que hacen ambos profesores para conseguir dichos objetivos y su gestión en la clase es distinta y muestra que el nivel de profundización de los mismos es diferente. El profesor de Primaria utiliza exclusivamente razones simples, tanto si se trata de razones escalares como de la razón de proporcionalidad; mientras que la profesora de Secundaria no.

En el caso que se quiera introducir la técnica de reducción a la unidad, si sólo se pretende justificar el empleo de la técnica, puede ser suficiente encontrar un valor en la tabla de proporcionalidad donde la razón escalar no sea entera, como hace el profesor de Primaria; pero si lo que se pretende es ver la función de proporcionalidad asociada, hay que pedir muchos más valores en la tabla de proporcionalidad, como hace la profesora de Secundaria. Queremos remarcar que los dos profesores eligen un ejemplo introductorio a la técnica de reducción a la unidad contextualizado en un ámbito amable para los alumnos -hacer un sorbete de limón en el caso de Primaria, y pesar unas cajas de caramelos en el caso de Secundaria- lo que facilita que los alumnos relacionen la proporcionalidad con la realidad.

Ambos profesores guían al alumno a que descubra la técnica de la reducción a la unidad como método para resolver el problema pero con objetivos bien diferenciados. En ambos casos se desarrolla la técnica de reducción a la unidad, si bien en el caso del profesor de Primaria queda únicamente como una técnica útil, un buen instrumento para resolver un problema; mientras que para la profesora de Secundaria es un instrumento conceptual para entender la razón de proporcionalidad y alcanzar posteriormente la función de proporcionalidad. La profesora de Secundaria es consciente de que el primer modelo de función que los alumnos ven en su currículum es el de proporcionalidad, por lo que se plantea como objetivo ligar el concepto de proporcionalidad con el modelo de función de proporcionalidad, presentando la proporcionalidad asociada a la idea de modelización matemática.

Esta actuación de la profesora de Secundaria en el Primer curso de Secundaria tiene en cuenta que el concepto importante que está introduciendo es el de función. La profesora es consciente que a medida que los alumnos pasen a los siguientes cursos de Secundaria, la proporcionalidad quedará como el primer ejemplo de función matemática que han estudiado. En este sentido podemos decir que la profesora de Secundaria tiene una visión del horizonte matemático hacia adelante en el sentido de Deborah Ball (2008). Le da importancia al horizonte matemático hacia adelante por los objetivos que se plantea para el tema de proporcionalidad y las elecciones que toma al servicio de dichos objetivos: tipo de ejemplos, razones de proporcionalidad y razones entre dos valores de la misma variable (enteras o no) y número de valores a encontrar en la tabla de proporcionalidad. Su propósito es conectar la proporcionalidad y la idea de modelo para no reducir la proporcionalidad, como ya hemos señalado, al hecho de doblar o triplicar magnitudes, y para relacionar desde el principio la proporcionalidad con la función de proporcionalidad.

Asimismo ambos profesores, dentro del objetivo de explicar la técnica de reducción a la unidad que se marcan, insisten en la importancia de detectar el "dato" o "los datos" del problema. Ahora bien, para el profesor de Primaria los datos son unos números importantes para resolver el problema: "el problema te da los datos", mientras que para la profesora de Secundaria el dato es una relación relevante: "de este dato vamos a sacar la información relevante". Por lo que este "dato" es de naturaleza distinta en ambos profesores. Para el profesor de Primaria es un dato en el sentido literal del término y tal como lo entienden los alumnos: unos números dados. Para la profesora de Secundaria es una relación. En este sentido la profesora de Secundaria utiliza el término en singular, "de este dato vamos a sacar la información relevante"; mientras que el profesor de Primaria lo utiliza en plural, "el problema te da los datos". Entendemos que bien sea para sólo desarrollar la técnica como en el caso del profesor de Primaria, bien sea para "modelizar" la proporcionalidad a partir de la función de proporcionalidad, como en el caso de la profesora de Secundaria, los dos quieren dejar claro a los alumnos que es importante identificar bien los datos, pues únicamente a partir de los mismos se puede deducir la razón de proporcionalidad $k=y/x$ (reduciendo a la unidad) y a partir de esta relación, encontrar todos los valores de la tabla de proporcionalidad que pida el problema.

6.3. Conclusiones en relación al objetivo 3

El tercer objetivo de nuestro trabajo es el de analizar desde la práctica docente, cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad. A partir del análisis de aquellos episodios en los que se está construyendo dicho concepto, y en concreto del análisis de los objetivos, de la elección de ejemplos y de la observación de la interacción con los alumnos, ha sido posible establecer cómo cada profesor trata de construir el concepto de proporcionalidad.

6.3.1. Concepto de proporcionalidad en el profesor de Primaria

La manera como el profesor de Primaria construye el concepto de proporcionalidad es, en este orden, empezar por establecer una definición, poner ejemplos e introducir una técnica.

La definición de la que parte el profesor de Primaria es que "la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables". A partir de aquí desgrana los conceptos que aparecen en esta definición (magnitud, mesurable y unidad de medida), propone a los alumnos pares de magnitudes para que justifiquen si son proporcionales o no, pide a los alumnos que pongan ejemplos de pares de magnitudes proporcionales y de magnitudes no proporcionales y pone el primer ejemplo para que los alumnos completen una tabla de proporcionalidad. Después introduce la técnica de reducción a la unidad.

El concepto de proporcionalidad que construye el profesor de Primaria se basa en el concepto de relación al afirmar que "la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables". Además de que esta definición es redundante en su expresión pues magnitud se define como "una propiedad física que puede ser medida", este tipo de definición es muy imprecisa, ya que la palabra "relación" es una palabra difícil y controvertida en Matemáticas, pues el significado que se le asocia es bien distinto según el concepto que se esté trabajando. También es difícil conocer la interpretación que los alumnos dan a este término, pero en todo caso, entendemos que es una definición poco útil, tal como podremos constatar al abordar el objetivo número 4.

En el caso de la proporcionalidad no queda claro a qué tipo de relación se está refiriendo el profesor de Primaria: si se refiere a la razón escalar entre dos valores de una de las variables y los valores correspondientes de la otra variable, o a la razón de proporcionalidad $k=y/x$ para cada par de valores de las dos variables relacionadas. A partir de los ejemplos anteriores, deducimos que entiende por relación la primera, esto es, la razón entre dos valores de la misma variable. Esto lo hemos podido identificar porque el profesor de Primaria ha construido el concepto de proporcionalidad insistiendo en que si dos magnitudes son proporcionales, y la razón escalar entre dos valores de la misma variable es 2, 3 ó ½, el valor de la otra variable se encuentra fácilmente doblando, triplicando o dividiendo por 2 el valor correspondiente. También al desarrollar el primer ejemplo de proporcionalidad, insiste en que al doble de un valor le corresponde el doble del otro; que al triple de un valor le corresponde el triple del otro; y que "si una magnitud aumenta, aumenta la otra". Entendemos con esto que no está entre los objetivos del profesor sobre la proporcionalidad que los alumnos entiendan que la proporcionalidad es una relación de doble sentido. Pero además fijémonos en la identificación que hace el profesor de Primaria entre función creciente y función de proporcionalidad cuando afirma que "si una magnitud aumenta, aumenta la otra". El alumno asume que todas las funciones crecientes son de proporcionalidad. Es la primera vez que el profesor trabaja la función de proporcionalidad y este tipo de afirmaciones inducen al error conocido de asociar función de proporcionalidad directa con función creciente, y función de proporcionalidad inversa con función decreciente.

El hecho de que el profesor de Primaria asocie esencialmente la proporcionalidad en las primeras clases con sólo un tipo de razón, la escalar que se da entre dos valores de la misma variable, provoca que los alumnos no vean que hay otra razón en juego, la de proporcionalidad entre las dos variables. Una evidencia de este hecho la vemos cuando el profesor de Primaria pone un problema en el que los alumnos deben completar una tabla de proporcionalidad aplicando la técnica de reducción a la unidad. El profesor elige justamente un problema donde la razón de proporcionalidad es 2, provocando que haya alumnos que no entiendan cómo reducir a la unidad y cómo buscar el valor en la tabla de proporcionalidad. Los alumnos ven aquí un doble, la razón de proporcionalidad $k=y/x$, y se lían. Entendemos que el profesor ha querido elegir un ejemplo donde la razón de proporcionalidad sea lo más sencilla posible, 2, para que los alumnos se centren en la técnica pero justamente el hecho de que esta razón sea 2 los ha confundido.

El profesor de Primaria no parece darle un valor concreto a la representación de los datos del problema en la tabla de valores, más allá de ser una representación visual y clara de las magnitudes implicadas, los datos y los valores que se pretende encontrar. Esto lo deducimos porque el profesor presenta los datos del problema en una tabla de valores pero sin etiquetar en ningún momento esta estructura como "tabla de valores".

El profesor de Primaria no establece puentes entre "métodos informales" de encontrar un valor en la tabla de proporcionalidad" y "métodos formales" como la técnica de reducción a la unidad, separando una cosa de la otra. Esto lo hemos podido inducir porque al introducir la técnica de reducción a la unidad, justifica su utilidad en el caso de que se estén buscando valores en una tabla de proporcionalidad donde no haya relación entre dos valores de la misma variable, esto es, la razón escalar no sea ni 2, ni 3, ni ½, que son casos fáciles de responder. En ningún momento transmite a los alumnos que el método de reducción a la unidad también funciona cuando se puede encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad rápidamente, de manera sencilla, esto es, cuando la razón escalar sea 2, 3 ó ½.

Por lo tanto, el modelo de enseñanza que hemos podido identificar en el profesor de Primaria consiste en una definición, poner ejemplos simples y prototípicos y ofrecer una técnica para resolver problemas no simples de proporcionalidad.

6.3.2. Concepto de proporcionalidad en la profesora de Secundaria

En cuanto a la profesora de Secundaria, la manera como construye el concepto de proporcionalidad es, en este orden, partir de un ejemplo concreto y llegar a la definición, proponer otros ejemplos e introducir una técnica.

La profesora de Secundaria parte de un ejemplo concreto y lleva a los alumnos hasta la siguiente definición de proporcionalidad: "la proporcionalidad quiere decir que lo que haces en un lado, el factor de cambio en un lado se respeta en el otro". A partir de aquí destaca cuál es la magnitud que uno controla; qué magnitud es la que pondremos en el eje de las x, pensando aquí en la función de proporcionalidad y en su representación; insiste en la búsqueda de la información que ofrece el problema, "el dato", a partir del cual se puede comenzar a trabajar y trabaja el ejemplo con el que ha introducido la proporcionalidad, pidiendo completar una tabla de valores. Después introduce la técnica de reducción a la unidad.

El concepto de proporcionalidad que construye la profesora de Secundaria se basa en el concepto de "factor de cambio" que se mantiene a uno y otro lado de la tabla. No limita la comprensión del concepto de proporcionalidad a la comprensión del concepto de "relación" aunque sí utiliza "relación" para aclarar la definición que ha ofrecido: "mantienes a un lado y al otro la misma relación". Esto lo hace porque se percata, en el momento de utilizar la expresión "factor de cambio", que puede ser difícil de entender para los alumnos, por lo que para reexplicar la palabra "factor", utiliza la palabra "relación".

La profesora de Secundaria, al proponer un problema al comenzar el tema de proporcionalidad, lo que hace es "problematizar" el concepto de proporcionalidad porque es necesario fabricar la herramienta para resolverlo. Esta manera de proceder obliga a los alumnos a construir la definición de proporcionalidad, para que tengan la herramienta para resolver el problema. Necesita generar una respuesta en forma de tabla, poner los datos, mientras construye al mismo tiempo la técnica. Cuando trabaja el primer ejemplo para enseñar la técnica de reducción a la unidad, guía a los alumnos para encontrar la función de proporcionalidad. La profesora conecta la representación gráfica de la tabla de valores con la función lineal, pensando en la representación de la función lineal. Entendemos que la profesora le da un valor concreto a la representación en la tabla de valores, más allá de ser una representación visual y clara de las magnitudes implicadas, los datos y los valores que se pretende encontrar, demostrando una visión del horizonte matemático hacia adelante. Todo va dirigido a construir un modelo, el de la función de proporcionalidad.

El modelo de enseñanza que hemos podido identificar en la profesora de Secundaria consiste en problematizar el concepto de proporcionalidad para que el alumno construya una definición y después introducir una técnica que le permite no sólo resolver problemas sino también relacionar la proporcionalidad con la función de proporcionalidad. Su insistencia en encontrar el modelo "escondido" en el problema, aunque también se pueda resolver el problema por "métodos informales”, muestra que su visión del concepto de proporcionalidad es presentarla asociada a la idea de modelización matemática.

6.3.3. Comparación entre los conceptos de proporcionalidad de los profesores de Primaria y Secundaria

Los dos profesores tienen en mente que han de construir el concepto de proporcionalidad, pero la manera de proceder de ambos en bien distinta, como acabamos de ver. La profesora de Secundaria conecta la proporcionalidad y la idea de modelo para no reducir la proporcionalidad, por ejemplo, al hecho de doblar o triplicar magnitudes, relacionando así desde el principio la proporcionalidad con la función de proporcionalidad, construyendo un modelo. Esta es una de las diferencias en la construcción del concepto de proporcionalidad entre el profesor de Primaria y la profesora de Secundaria. La profesora de Secundaria problematiza la definición de proporcionalidad y en cambio el profesor de Primaria no. La visión del concepto de proporcionalidad de la profesora de Secundaria es más compleja que la del profesor de Primaria, pues interviene la función de proporcionalidad y su representación.

Por lo que respecta a la técnica de reducción a la unidad, entendemos que en la profesora de Secundaria hay conocimiento de la técnica de reducción a la unidad y del modelo subyacente a la misma, mientras que en el profesor de Primaria no parece existir un conocimiento suficiente de la relación entre la técnica y el modelo (propiedades de la función lineal). Esto lleva, al profesor de Primaria, a resolver el problema y a mostrar la técnica para hacerlo, pero tiene dificultades para ayudar a los alumnos a construir el concepto, hay alumnos que parecen no haberlo entendido porque al profesor de Primaria le faltan conocimientos matemáticos para dominar el modelo. En este sentido el conocimiento del contenido matemático sobre proporcionalidad movilizado en uno y otro profesor es distinto.

Hay dos conclusiones que van más allá del tema de proporcionalidad. Por un lado, nos parece una actuación relevante la elección que hacen los dos profesores de los ejemplos. Esta elección está en función de sus objetivos, de sus conocimientos y de las expectativas que tiene cada uno respecto a sus alumnos. En el caso del profesor de Primaria utiliza exclusivamente ejemplos simples y prototípicos, mientras que la profesora de Secundaria no.

Por otro lado, una de las tareas del profesor cuando introduce una técnica es que los alumnos establezcan puentes entre dicha técnica y los métodos informales que ellos mismos utilizan. El profesor de Primaria no establece puentes entre una técnica como la de reducción a la unidad y los métodos informales de los alumnos, mientras que la profesora de Secundaria sí. Por ejemplo, en el caso de la técnica de reducción a la unidad el profesor debería mostrar el valor de la técnica, demostrar que vale para todos los casos: para los casos complicados y para los simples, donde en estos últimos la técnica coincide con los métodos informales de los alumnos. A este respecto, el profesor de Primaria no parece tener como objetivo que los alumnos entiendan que la técnica de reducción a la unidad la pueden aplicar siempre, y en particular también cuando se puedan encontrar los valores en la tabla de proporcionalidad por métodos informales. Podría haber utilizado los casos sencillos para ver que la técnica siempre sirve, que siempre se puede utilizar, y no lo hace.

En cambio la profesora de Secundaria sí que establece puentes entre la técnica de reducción a la unidad y la función de proporcionalidad y los métodos informales que los alumnos utilizan. Esto lo sabemos porque cuando pide a los alumnos encontrar valores en una tabla de proporcionalidad y estos utilizan métodos informales, recoge las intervenciones, las valora en positivo explicando para todos los alumnos el razonamiento, afirma que es un buen método para encontrar la respuesta pero que "hay otra cosa más allá ahí escondida". Insiste al mismo tiempo que no se utilizará esta técnica (la de utilizar métodos informales) y que les va a dar un método, "una especie de esquema para este tipo de problemas" (la reducción a la unidad). La profesora de Secundaria, además de valorar positivamente las respuestas informales de los alumnos, las compara con el método formal mostrando que con esta técnica de reducir a la unidad es más sencillo completar la tabla y que los valores coinciden efectivamente con los encontrados utilizando métodos informales. La profesora muestra que la técnica sirve para todos los casos, haciendo hincapié en que este método es el que le interesa. Asimismo la profesora establece otro puente entre los métodos informales y el modelo de la función de proporcionalidad $y=kx$. Y esto lo hace subrayando que todos los métodos informales que han utilizado los alumnos para completar la tabla son correctos, pero que el objetivo es "desentrañar dentro de los problemas" la estructura $y=kx$.

Llegados a este punto nos podemos preguntar hasta qué nivel los alumnos han llegado a construir y a utilizar el razonamiento proporcional. Como ya advirtiera Susan Lamon (2007), para que un alumno llegue a tener "razonamiento proporcional", es necesario que reconozca tanto la razón de proporcionalidad entre dos espacios de medida como la relación funcional entre ambos espacios. El hecho de que un alumno encuentre el valor correspondiente en una tabla de proporcionalidad no garantiza que esté utilizando razonamiento proporcional, pues a menudo los alumnos contestan adecuadamente cuestiones sobre proporcionalidad porque utilizan conocimientos mecanizados sobre fracciones equivalentes, relaciones numéricas o aplicaciones de procedimientos algorítmicos que lo que hacen en realidad es eludir el uso de la razón de proporcionalidad $k=y/x$.

A este respecto, la profesora de Secundaria, al marcarse como objetivo que el alumno llegue a ver la función de proporcionalidad más allá de la aplicación de la técnica de reducción a la unidad, se acercará más que el profesor de Primaria a conseguir que el alumno razone proporcionalmente. Pero hay otra cuestión que ya remarcamos en el marco teórico (capítulo 3, apartado 3.7): a menudo se habla de proporcionalidad y de razonamiento proporcional como si fueran términos intercambiables, siendo en realidad la proporcionalidad un constructo matemático más amplio que el de razonamiento proporcional. La proporcionalidad supone comprender la estructura subyacente a una situación en la cual existe una relación invariante especial entre dos magnitudes que están relacionadas y que cambian a la vez (Lamon 2007). Comprender la proporcionalidad implica relacionar la razón escalar entre dos valores de la misma variable y la razón de proporcionalidad entre la dos variables como ya hemos señalado. Entendemos que con los objetivos que se marca la profesora de Secundaria, el alumno puede comprender mejor que es la proporcionalidad y razonar proporcionalmente. El profesor de Primaria puede conseguir que sus alumnos encuentren valores en una tabla de proporcionalidad pero difícilmente pueden razonar proporcionalmente y entender bien la proporcionalidad. Cuando la profesora de Secundaria se plantea como objetivo que el alumno vea el "modelo escondido" y llegue hasta la función de proporcionalidad, pretende que el alumno comprenda la proporcionalidad, comprensión que pasa por ser capaz de utilizarla como modelo matemático en situaciones del mundo real.

6.4. Conclusiones en relación al objetivo 4

El cuarto objetivo que nos planteamos es el de explicar posibles consecuencias que una determinada construcción del concepto de proporcionalidad tiene en el aprendizaje de una alumna concreta. Para ello, una vez vistos los objetivos que el profesor de Primaria y la profesora de Secundaria se plantean para el tema de proporcionalidad y cómo construyen el concepto de proporcionalidad, vamos a exponer las consecuencias que esto puede tener en el aprendizaje de la proporcionalidad de una alumna concreta.

En el capítulo de metodología ya explicamos que la posibilidad de tener datos para analizar las clases de los mismos alumnos en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria es una oportunidad para realizar el seguimiento de un mismo alumno y en el mismo tema de proporcionalidad con un año de diferencia. Es una magnífica ocasión para comparar momentos del aprendizaje de un alumno concreto, sin intención de hacer un estudio exhaustivo, puesto que el objetivo de nuestro estudio es la enseñanza y no el aprendizaje, pero sí evidenciar la estrecha relación que hay entre enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar.

Sin embargo, aunque el núcleo de nuestro trabajo sea la enseñanza y no el aprendizaje, pensamos que los modelos de enseñanza que utilizan los dos profesores tienen implicaciones relevantes para el aprendizaje de los alumnos. Y esto es lo que destacamos en una alumna concreta, Ainoa, analizando algunos de sus momentos de aprendizaje. Hemos elegido seguir a una alumna como Ainoa, pues a medida que analizábamos los datos recogidos, se hicieron rápidamente visibles algunas diferencias en su aprendizaje de la proporcionalidad, en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria. Sobre todo se le presentaron ciertas dificultades de aprendizaje con el modelo de enseñanza del profesor de Primaria, que en cambio no se presentaron con el modelo de enseñanza de la profesora de Secundaria un año después, incluso cuando el grado de complejidad, tanto de los contenidos como de las actividades propuestas, en el Primer curso de Secundaria era mayor que el de Sexto curso de Primaria.

6.4.1. Construcción del concepto de proporcionalidad

A la hora de construir el concepto de proporcionalidad, ya hemos señalado que los dos profesores tienen en mente que han de construir un concepto, pero la manera de proceder de ambos es distinta: el profesor de Primaria parte de una definición basada en el concepto de relación, pone ejemplos y ofrece una técnica, la de reducción a la unidad, técnica que se revela útil para los casos en que no se pueda encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad por métodos sencillos, como sea doblar, triplicar o dividir por 2. La profesora de Secundaria problematiza el concepto de proporcionalidad para que el alumno construya la definición de proporcionalidad, y después introduce la técnica de reducción a la unidad relacionando la proporcionalidad con la función lineal.

El profesor de Primaria ofrece a los alumnos una definición desde el primer momento, mientras que la profesora de Secundaria guía a los alumnos hasta la definición a partir de un ejemplo. Esta diferencia en el modelo de enseñanza subyacente de cada profesor tiene consecuencias en la manera cómo Ainoa entiende la proporcionalidad: en el primer caso tiene dificultades y en el segundo no.

A partir del análisis de las intervenciones de Ainoa hemos observado que cuando ella construye el concepto de proporcionalidad a partir de una definición como la dada por el profesor de Primaria que se basa en el concepto de relación, tiene dificultades para entender el concepto. Incluso aunque el profesor haya intentado explicar con ejemplos a qué tipo de relación se está refiriendo, como los ejemplos que ha puesto son esencialmente prototípicos, ha provocado que Ainoa identifique la proporcionalidad con doblar y triplicar magnitudes y esto le ha llevado a asociar que si una función es creciente es de proporcionalidad. Por lo que podemos afirmar que en Sexto curso de Primaria Ainoa entiende erróneamente el concepto de proporcionalidad.

En efecto, cuando la alumna al responder a una tarea del profesor de Primaria elige los ejemplos de pares de magnitudes proporcionales y de pares de magnitudes no proporcionales, escoge correctamente las magnitudes, si bien no elige convenientemente los valores numéricos que debe poner en las tablas para mostrar la proporcionalidad en un caso y la no proporcionalidad en el otro. Ainoa ha elegido las magnitudes de "tiempo y volumen" para poner su ejemplo de magnitudes proporcionales y las magnitudes de "tiempo y número de espectadores" para poner su ejemplo de magnitudes no proporcionales. En este último caso, ha elegido bien las magnitudes para poner el ejemplo pero cuando trata de ejemplificarlo numéricamente, utiliza exactamente los mismos valores que ha escogido en el caso de las magnitudes de "tiempo y volumen" y que coinciden a su vez con los valores de los ejemplos prototípicos del profesor de Primaria: una razón de proporcionalidad entre las dos variables mayor que la unidad y entera, 100, y como razones escalares entre dos valores de la misma variable 2 y 3. En el primer caso hay relación proporcional entre las variables mientras que en el segundo caso no. Para Ainoa "relación" quiere decir relación funcional y puede ser de un tipo (proporcional) o de otro tipo (no proporcional), si bien al poner los mismos datos numéricos en las dos tablas, da a entender que ambas relaciones son de proporcionalidad, por lo que se contradice. Incluso aunque Ainoa explica que cuando escribe "200", quiere decir que pueden ser unas pocas personas más o menos, al escribir los mismos datos numéricos está pensando en la función de proporcionalidad y da a entender que ambas relaciones son de proporcionalidad, por lo que no ha entendido la diferencia entre magnitudes proporcionales y no proporcionales.

Ainoa no es capaz de conectar lo cualitativo con lo cuantitativo. En el contexto del cine Ainoa sabe que las magnitudes de "tiempo y número de espectadores" no pueden ser proporcionales pero cuando construye una tabla de valores, repite los mismos valores en el caso de magnitudes proporcionales y en el caso de magnitudes no proporcionales. Podría haber puesto en vez de 200 un valor que se viera claramente que no es el doble de 100 y no lo hace, a pesar de que comenta que el 200 puede ser aproximado. Para ella los datos de la tabla no sirven para determinar el tipo de relación entre las dos magnitudes. Escribe estos datos en la tabla porque está en el tema de proporcionalidad y los únicos ejemplos de tablas que ha visto son los de proporcionalidad. La alumna es consciente que empíricamente, las magnitudes tiempo y número de espectadores no pueden ser proporcionales, pero esto no se traduce en escribir unos datos en la tabla de valores que lo muestren. Parece no saber pasar lo que es su conocimiento cualitativo de unas magnitudes que no son proporcionales a lenguaje matemático, esto es, a valores en la tabla. Separa completamente una cosa de la otra.

El profesor de Primaria, al proponer a los alumnos que pongan ejemplos de magnitudes proporcionales y no proporcionales tiene como objetivo que los alumnos entiendan el concepto de proporcionalidad y aquí tenemos un ejemplo concreto, en el caso de Ainoa, de que no ha conseguido su objetivo. Teniendo en cuenta lo que sucedió un año después en Secundaria, entendemos que la definición ofrecida por el profesor y los ejemplos prototípicos utilizados no fueron suficientes para que Ainoa construyera el concepto de proporcionalidad y no evitaron las dificultades en este punto.

Por otra parte, en lo que respecta a la definición de proporcionalidad, la profesora de Secundaria guía a los alumnos para que lleguen a ver que el factor de cambio en un lado y en el otro se conserva. Consciente de la identificación que hacen los alumnos (y que también se encuentra en numerosos libros de texto) entre los conceptos de proporcionalidad y de duplicidad, la profesora no menciona en ningún momento conceptos de dobles o de triples para evitar que se produzcan este tipo de errores. No utiliza problemas prototípicos cuando pide a los alumnos que completen una tabla de proporcionalidad, evitando así que se produzcan este tipo de errores de identificación.

Cuando una alumna como Ainoa construye el concepto de proporcionalidad a partir de este modelo de enseñanza ya desde la introducción del mismo, no presenta las dificultades de comprensión que se dieron en Sexto curso de Primaria. En este caso Ainoa construye de manera efectiva su concepto de proporcionalidad, entiende correctamente lo que son magnitudes proporcionales y puede encontrar valores en una tabla de proporcionalidad sin cometer errores. Esto lo sabemos porque en el primer problema que utiliza la profesora para introducir la proporcionalidad Ainoa encuentra correctamente un valor de la variable dependiente en la tabla de proporcionalidad aplicando métodos aritméticos informales. Es el problema de las carreras de fórmula 1 en el que la profesora pregunta el número de vueltas que se pueden dar con 120 litros de gasolina. Ainoa parte los 120 litros en 50, 50, 10 y 10, llegando al resultado de 14,4 vueltas.

La principal diferencia en la manera de construir el concepto de proporcionalidad entre el profesor de Primaria y la profesora de Secundaria es que la profesora problematiza la definición de proporcionalidad y el profesor de Primaria no. La profesora de Secundaria construye el concepto de proporcionalidad a partir de un ejemplo: propone un problema y lo problematiza porque es necesario fabricar la herramienta para resolverlo. Esta manera de proceder "obliga" a Ainoa a construir una definición propia de proporcionalidad, para tener una herramienta para resolver el problema. Necesita generar una respuesta en forma de tabla, poner los datos, mientras construye al mismo tiempo la técnica. Todo ello va dirigido a construir un modelo, como ya hemos señalado. Podemos afirmar que Ainoa no entiende el concepto de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y en cambio sí que lo entiende en el Primer curso de Secundaria, porque cuando la profesora de Secundaria ha desarrollado el concepto de diferente manera a como se había hecho en Primaria, Ainoa es capaz de completar una tabla de proporcionalidad correctamente. En Sexto curso de Primaria el profesor da una definición de proporcionalidad desde que introduce el concepto, mientras que en el Primer Curso de Secundaria la profesora conduce al alumno hacia una definición de proporcionalidad. Ainoa es un claro ejemplo de lo importante que es que el alumno llegue a una definición de proporcionalidad siguiendo un proceso de construcción de la misma.

6.4.2. Introducción a la técnica de reducción a la unidad

Por lo que respecta a la técnica de reducción a la unidad, el profesor de Primaria se plantea como objetivo que los alumnos aprendan dicha técnica cuando tienen que completar una tabla de proporcionalidad que no resulta fácil de completar por "métodos informales", sobreentendiendo por métodos informales, doblando, triplicando o dividiendo por 2 la variable implicada. Para ello el profesor elige un ejemplo que no sirve al objetivo planteado y Ainoa no entiende la técnica porque tampoco ha entendido que la proporcionalidad es una relación de doble sentido. El ejemplo que elige el profesor es prototípico en cuanto a la razón entre las dos variables, que es 2, si bien pide encontrar el valor en una tabla de proporcionalidad donde la razón escalar es mayor que la unidad y no entera, lo que justificaría el uso de la técnica. El profesor de Primaria, en la manera de proceder al introducir la técnica de reducción a la unidad insiste que como entre los dos valores de la misma variable "no hay relación" (pues dicha razón no es ni 2, ni 3 ni ½), es necesaria una técnica. Ainoa no entiende cómo se reduce a la unidad en este ejemplo y por tanto no es capaz de completar la tabla de proporcionalidad.

Vemos aquí dos cuestiones: la primera, que el profesor de Primaria quiere dar a la palabra "relación" el significado de "razón" pero sin concretar más y Ainoa no es capaz de entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido. Se da aquí un abuso del lenguaje por parte del profesor. Y la segunda cuestión es que cuanto más prototípico es el ejemplo, menos ayuda a construir el concepto de proporcionalidad. La evidencia nos la proporciona Ainoa al no ser capaz de relacionar las dos razones, la razón de proporcionalidad entre las dos variables y la razón escalar entre dos valores de la misma variable, entre otras cosas porque en este ejemplo la razón de proporcionalidad entre las dos variables es 2, igual que la razón escalar que el profesor utiliza para explicar la proporcionalidad, lo que no le permite a Ainoa completar correctamente los valores en la tabla. El ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad no ha resultado adecuado para que Ainoa pudiera desarrollar dicha técnica.

Esto nos muestra que el profesor de Primaria, al elegir ejemplos simples prototípicos donde las razones escalares entre dos valores de la misma variable son

2, 3 ó ½, no ha sabido encontrar los ejemplos adecuados para construir el concepto y Ainoa ha asociado el concepto de proporcionalidad a cuestiones de doblar o triplicar magnitudes, sin entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido y sin entender cómo funciona la técnica de reducción a la unidad.

Asimismo del análisis de las intervenciones de Ainoa constatamos que aunque ella no ha entendido cómo se ha reducido a la unidad en el problema que el profesor utiliza para introducir la técnica (el del sorbete de limón), sí había sido capaz de hacerlo en el primer problema que el profesor había puesto anteriormente en la introducción al concepto (el de las barras de pan). En este caso, cuando Ainoa es capaz de reducir a la unidad aunque no se le pida, el profesor de Primaria no recoge su intervención. Y en el episodio posterior, en el que el profesor introduce la técnica de reducción a la unidad, Ainoa no sólo no entiende que a un limón le correspondan 2 cucharadas de azúcar, sino que tampoco ve ninguna relación entre esta técnica y el hecho de que en el problema de las barras de pan ella dedujera sin problemas lo que costaba 1 barra de pan. La alumna no establece ningún puente entre su intervención en la que encuentra lo que cuesta 1 barra de pan, y la técnica de reducción a la unidad. Entendemos que la manera de proceder del profesor no provoca el establecimiento de este tipo de relaciones, puesto que ni el mismo profesor se hizo eco de la intervención de Ainoa en su momento. El profesor podía haberla aprovechado para decir que lo que había hecho Ainoa en el problema de las barras de pan era reducir a la unidad y en que en la siguiente clase utilizarían este método para encontrar valores en una tabla de proporcionalidad; o también podía recuperar la intervención de Ainoa después de introducir la técnica de reducción a la unidad, relacionando los dos ejemplos, el de las barras de pan y el del sorbete de limón.

Por su parte, la profesora de Secundaria se plantea relacionar desde el principio la proporcionalidad con la función de proporcionalidad, y el desarrollo de la técnica de reducción a la unidad no es más que un instrumento para que el alumno vea la función de proporcionalidad y el modelo que se encuentra tras dicha técnica. En el ejemplo que la profesora propone (el de las cajas de caramelos) la razón de proporcionalidad entre las dos variables no es entera (1/2). Ainoa ve claramente esta razón, lo que le permite encontrar rápidamente los valores correspondientes en la tabla de proporcionalidad e incluso ver el modelo, pues afirma: "si te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas". Vemos como en este caso el ejemplo que la profesora de Secundaria elige para introducir la técnica de reducción a la unidad sí que sirve al objetivo planteado de desarrollar la técnica como herramienta para construir la función de proporcionalidad.

Podemos afirmar que Ainoa entiende correctamente la técnica de reducción a la unidad en el Primer curso de Secundaria. Las intervenciones de la alumna así lo muestran aun cuando en este caso la razón de proporcionalidad no sea entera, ½, y sea más difícil de deducir que en el caso del problema de Primaria que es 2. Creemos que en el caso del profesor de Primaria, el hecho de que haya insistido en su introducción al concepto de proporcionalidad en buscar valores de una tabla de proporcionalidad donde la razón entre dos valores de la misma variable es 2 puede haber causado confusión a esta alumna, justamente en un problema como el elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad donde la razón de proporcionalidad entre las dos variables también es 2.

Por lo tanto, constatamos que hay una segunda diferencia importante entre los dos profesores, en términos de modelos, que tiene sus consecuencias en el aprendizaje de una alumna como Ainoa. Esta diferencia tiene que ver con la introducción de la técnica de reducción a la unidad, como acabamos de ver. Al introducir dicha técnica hay diferencias en los objetivos que los dos profesores se plantean y en los ejemplos que ponen para introducir la técnica, tanto a nivel de razones escalares como de razones de proporcionalidad entre las dos variables.

En Sexto curso de Primaria Ainoa parece no haber entendido el concepto de proporcionalidad y posteriormente, el tipo de ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad, al ser prototípico, le dificulta la comprensión de la técnica. En el Primer curso de Secundaria Ainoa parece haber entendido el concepto y posteriormente el tipo de ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad, donde la razón de proporcionalidad es simple pero no entera, no le dificulta la comprensión de la técnica. Esto nos muestra la importancia de la elección de un ejemplo concreto para la comprensión tanto de un concepto como de una técnica. También nos muestra que las dificultades de la alumna, no son sólo de la alumna, sino que están contextualizadas. No se puede separar enseñanza de aprendizaje, puesto que a un determinado modelo de enseñanza como es el del profesor de Primaria, le corresponde un determinado aprendizaje y unas dificultades, como son las de Ainoa.

Además, las evidencias proporcionadas por las actuaciones de Ainoa nos permiten afirmar que la idea de "modelo" está implícita en lo que los alumnos entienden sobre el concepto de proporcionalidad.

Ainoa es además un buen ejemplo de lo que hemos dicho en el tercer objetivo respecto al razonamiento proporcional. Ainoa no ha entendido en Sexto curso de Primaria lo que es la proporcionalidad y no ha sido capaz de razonar proporcionalmente. En el Primer curso de la Secundaria podemos afirmar que, por lo menos, sí sabe razonar proporcionalmente. Vemos como la manera de construir el concepto de proporcionalidad de uno u otro profesor, en función de los objetivos que se marcan para este tema, ha influido directamente en que una alumna como Ainoa aprenda a razonar proporcionalmente. Por ello podemos afirmar que en Sexto curso de Primaria no ha sido capaz de hacerlo y en el Primer curso de Secundaria sí.

Bibliografía

Akos, P. y Galassi, J. P. (2004). Middle and high school transitions as viewed by students, parents, and teachers. *Professional School Counseling, 7*(4), 212–221.

Alspaugh, J.W. y Harting, R.D. (1997). Effects of team teaching on the transition to middle school. *ERS Spectrum*, *15*(1), 9-14.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowlegde for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389-407.

Ball, D.L. y Hill, H. (2009). The curious -and crucial- case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2)*,* 68-71.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126. Orlando, FL: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 296-333. New York: Macmillan.

Ben-Chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C. y Miller, J. (1998). Proportional Reasoning among 7th Grade Students with Different Curricular Experiences. *Educational Studies in Mathematics 36*, 247-273.

Benitez, D. T., Morningstar M. E. y Frey, B.B. (2009). A multistate survey of special education teachers' perceptions of their transition competencies. *Career development for exceptional individuals, 32*(1), 6-16.

Bishop, A., y F. Goffree (1986). Classroom organization and dynamics. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education,* 309-365. Dordrecht: D. Reidel.

Brown, M., Küchemann D. y Hodgen J. (2010). The struggle to achieve multiplicative reasoning 11-14. En M. Joubert y P. Andrews (Eds.). *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education*.

Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1993). *Rational Numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Da Ponte, J. P. (2010). Conexôes no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educaçáo e Matemática, 110*, 3-6.

De Bock, D., Van Dooren, W. y Verschafel, L. (2005). Not everything is proportional: task design and small-scale experiment. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, 93-122. Melbourne: PME.

Ding, C. S. (2008). Variations in academic performance trajectories during high school transition: exploring change profiles via multidimensional scaling growth profile analysis. *Educational Research and Evaluation*, *14*(4), 305-319.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 147-164. New York: Macmillan.

Fennema, E., Carpenter, T. P. y Lamon, S. J. (Eds.) (1988). *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics*. Madison: Wiscosin Center for Education Research.

Ferguson, P. D. y Fraser, B. J. (1998). Student gender, school size and changing perceptions of science learning environment during transition from primary to secondary school. *Research in Science Education, 28*(4), 387-397.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, *30*(1), 129-142.

Fernández, C. y Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A Component of The Mathematics Teacher's Professional Practice. *Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M. M. Moreno, A. Estrada , J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.). *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 291-301. Lleida: SEIEM.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: shaping MKT for a continuous mathematical education. *REDIMAT*, *3*(1), 7-29.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Graeber, A., Tirosh, D. y Gloeber, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multilication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 95-102.

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 363-384. New York: State University of New York Press.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. London: NFER-Nelson.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, 198-219. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42* (2), 371-406.

Hines, E. y McMahon, M. (2005). Interpreting Middle School Students' Proportional Reasoning Strategies: Observations From Preservice Teachers. *School Science and Mathematics*, *105*(2), 88-106.

Howard, P., Perry, B. y Stacey, D. (1997). *Mathematics and manipulatives: Comparing primary and secondary mathematics teacher's views.* Recogido en la web: http://www.aare.edu.au/97pap/howap045.htm.

Ilany, B., Keret Y. y Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of A Model Using Authentic Investigate Activities for Teaching Ratio & Proportion in Pre-Service Teacher Education. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 81-88.

Kaput, J. (1986). Information technology and mathematics: opening new representational windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*(2), 187-207.

Kaput, J. y West, M. M. (1994). Missing Value Proportional Reasoning Problems: Factors Affecting Informal Reasoning Patterns. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, 235-287. New York: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983a). Early Adolescents' Proporcional Reasoning on "Rate" Problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219-233.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983b). Proportional Reasoning of Early Adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 45-90. Orlando, FL: Academic Press.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. A. Lesh (Ed.). *Number and measurement*, 101-144.

Columbus: OH: ERIC/ Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education (SMEAC).

Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanism. En T. Kieren (Ed.). *Recent research on number learning*, 125-149. Columbus: OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1983). Axioms and intuition in mathematical knowledge building. En J. C. Bergeron y N. Herscovics (Eds.). *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 67-73. Columbus: OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, 162-181. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.). *Rational Numbers: An integration of research*, 49-84. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. Mathematics Learning Study Committee, National Research Council 2001. Recogido en http://www.nap.edu/catalog/9822.html

Lamon, S. J. (1994). Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 89-121. New York: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework. En F. K. Lester, jr. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 629-668. Reston, VA-Charlotte, NC: National Council of Teachers Mathematics-Information Age Publishing.

Lesh, R. y Landau, M. (Eds.) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Orlando, FL: Academic Press.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of problem-solving performance. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 309-329. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Post, T. R. y Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, 93-118. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Lewbel, S., Haskins, A., Spradling, N. y Thompson, S. C. (1996). Practitioners Respond. *Middle School Journal, 28*(1), 21-23.

Lo, J. J y Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportions schemes: A store of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 216-236.

Loewenberg, D., Hoover, M. y Phelps, G. (2009). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea, (Eds.). *Investigación en Educación Matemática, XV*, 429-438. Ciudad Real: SEIEM.

McGee, C., Ward, R., Gibbons J. y Harlow, A. (2004). *Transition on secondary school: A literature review.* The Ministry of Education. Hamilton: University of Waikato.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1-Differentation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1-Problem-structure at successive stages; Problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331-363.

Noyes, A. (2006). School transfer and the diffraction of learning trajectories. *Research papers in Education*, *21*(1), 43-62.

Nunes, T. y Bryant, P. (Eds.). (2009). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. Hove: Psychology Press.

Onrubia, J., Rochera, M. J. y Barberà, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi. *Desarrollo psicológico y educación 2: Psicología de la educación escolar,* 487-508. Madrid: Alianza.

Post, T. R., Harel, C., Behr, M. y Lesh, R. (1988). Intermediate teacher's knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.). *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics*, 194-217. Madison: Wiscosin Center for Education Research.

Pulos, S., Karplus, R. y Stage, E. K. (1981). Generality of proportional reasoning in early adolescence: Content effects and individual differences. *Journal of Early Adolescence*, *1*, 257-264.

Rice, J. K. (1997). *Explaining the negative impact of the transicion from middle to high school on student performance in mathematics ans science: an examination of school discontinuity and student background variables*. Artículo presentado en el Annual meeting of the American Education Research Association Annual Conference, Chicago, IL.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.). *International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development,* 273-298. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. London: Sage.

Rowland, T. (2012). Contrasting Knowledge for Elementary and Secondary Mathematics Teaching. *For the Learning of Mathematics, 32*(1), 16-21.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2003). Novices' choice of exemples in the teaching of elementary mathematics. En A. Rogerson (Ed.). *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education,* 242-245. Brno, Czech Republic: The Mathematics Education into the 21st Century Project.

Rowland, T., Huckstep P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: LEA.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494.

Simpson M., Goulder, J. (1998). Promoting Continuity and Progression: Implementing the 5-14 Development Programme in Secondary School Mathematics and English Language Departments. *Scottish Educational Review*, *30*(1), 15-28.

Singer, J., Kohn, S. y Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective,* 115-132. Hove: Psychology Press.

Skott, J. (2005). The Role of the Practice of Theorising Practice. En M. Bosch (Ed.): *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1598-1608. Barcelona: FundEmi. Recogido en http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG12.pdf).

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 179-234. New York: State University of New York Press.

Tourniaire, F. (1983). Some aspects of proportional reasoning in young children. En J. C. Bergeron y N. Herscovics (Eds.). *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 319-324. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 410-412.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proporcionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40,* 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of student's additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 127-174. Orlando, FL: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, 141-161. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Vernaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 41-59. New York: State University of New York Press.

Zanobini, M. y Usai, C. (2002). Domain-specific Self-concept and Achievement Motivation in the Transition from Primary to Low Middle School. *Educational Psychology*, *22*(2), 203-217.

Zhang, D., Ivester, J. y Katsiyamis, A. (2005). Teachers' view of transition services: results from a statewide survey in South Carolina. *Education and Training in Developmental Disabilities*, *40*(4), 360-367.

Índice de tablas

Esta tesis doctoral se enmarca en el ámbito de la didáctica de las Matemáticas, concretamente en la línea de investigación sobre el análisis de la práctica docente del profesor de Matemáticas en el aula. Tiene como objetivo general de investigación el análisis de la actividad docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en Sexto curso de Primaria y en el Primer curso de Secundaria Obligatoria.

Los ejes fundamentales en los que se apoya el marco teórico de esta investigación, centrada en la construcción del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad, son: el *Knowlegde Quartet* (Rowland, 2005, 2008, 2009), el *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, 2008), en particular el *Horizon Content Knowledge*, y los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad (Lamon, 2007).

La proporcionalidad supone comprender la estructura subyacente a una situación en la cual existe una relación invariante especial entre dos magnitudes que están relacionadas y que cambian a la vez. Comprender la proporcionalidad implica relacionar la razón escalar entre dos valores de la misma magnitud y la razón de proporcionalidad entre la dos magnitudes, así como reconocer la función de proporcionalidad.

Uno de los objetivos del trabajo, de carácter metodológico, ha consistido en la construcción de indicadores para el análisis de la práctica del profesorado, de acuerdo con el modelo del *Knowledge Quartet* de Rowland (*Fundamento-Transformación-Conexión-Contingencia*). Elegimos este modelo porque es un marco conceptual basado en la práctica, adecuado para analizar episodios de clase, centrándose sobre todo en el contenido matemático del episodio y en el papel que desempeñan el *Subject Matter Knowledge* (SMK) y el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) del profesor.

La metodología utilizada es de tipo cualitativo y se centra en el estudio de casos. La investigación se ha contextualizado en alumnos que fueron observados y grabados en Sexto curso de Primaria y en el Primer Curso de Secundaria Obligatoria, obteniendo así los datos para nuestra investigación a partir de la grabación en el aula en dos años sucesivos (datos recogidos en el marco del proyecto EDU 2009-07298). Este ha sido un contexto adecuado para estudiar satisfactoriamente la práctica docente -tanto del profesor de Primaria, de formación generalista, como del profesor de Secundaria, de formación especialista-, además de estudiar la transición de etapa de Primaria a Secundaria.

De un total de 48 episodios, 15 de Sexto curso de Primaria y 33 del Primer curso de Secundaria, se han seleccionado y analizado 6 episodios (correspondientes a dos profesores distintos, uno de Primaria y otro de Secundaria) en los que el profesor construye el concepto de proporcionalidad, explica una técnica como la de reducción a la unidad y relaciona dicha técnica con el concepto.

Los resultados de la investigación nos han permitido, en primer lugar, elaborar un instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula; en segundo lugar, analizar desde la práctica docente cuáles son los objetivos del profesor al enseñar el tema de proporcionalidad y cómo construye el concepto de proporcionalidad; y finalmente, explicar las consecuencias que una determinada construcción del concepto de proporcionalidad tiene en el aprendizaje de una alumna concreta.

El análisis de la práctica realizado en esta investigación nos ha mostrado la importancia de la elección de los ejemplos concretos para la comprensión tanto del concepto de proporcionalidad como de la técnica de reducción a la unidad. También nos ha mostrado que no se puede separar enseñanza de aprendizaje, puesto que a un determinado modelo de enseñanza le corresponde un determinado aprendizaje que lleva asociado tanto una construcción de los conceptos por parte de los alumnos como un conjunto de dificultades.