Aplicacions entre espais classificadors de grups de Kac-Moody de rang 2

Albert Ruiz Cirera

Universitat Autònoma de Barcelona

Aplicacions entre espais classificadors de grups de Kac-Moody de rang 2

Albert Ruiz Cirera

28 de juny de 2001

Aplicacions entre espais classificadors de grups de Kac-Moody de rang 2

Albert Ruiz Cirera

Memòria presentada per aspirar al grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, març del 2001.

CERTIFICO que aquesta memòria ha estat realitzada per Albert Ruiz Cirera sota la direcció del Dr. Jaume Aguadé Bover

Bellaterra, març del 2001.

Dr. Jaume Aguadé Bover

Contingut

Capítol 1

Introducció

Si considerem una matriu de Cartan A de tamany $n \times n$, o sigui, una matriu amb coeficients enters $(a_{i,j})$, amb $i, j \in S = \{1, \ldots, n\}$ tals que

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & a_{i,i} = 2 & \forall i \in S, \\ \text{(ii)} & a_{i,j} \leq 0 & \forall i \neq j \in S, \\ \text{(iii)} & a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0 & \forall i \neq j \in S, \\ \text{(iv)} & A \text{ és definida positiva,} & \end{array}$$

obtenim un grup de Lie compacte $G(A)$ i una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$ de dimensió finita. Aquesta àlgebra de Lie es pot definir a partir de $3n$ generadors e_i, f_i, h_i amb $i = 1, \ldots, n$ amb les relacions següents:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & [h_i, h_j] = 0,\ [e_i, f_i] = h_i,\ [e_i, f_j] = 0 \text{ si } i \neq j, \\ \text{(b)} & [h_i, e_j] = a_{i,j} e_j,\ [h_i, f_j] = -a_{i,j} f_j, \\ \text{(c)} & (\mathrm{ad} e_i)^{1-a_{i,j}} e_j = 0,\ (\mathrm{ad} f_i)^{1-a_{i,j}} f_j = 0 \text{ si } i \neq j, \end{array}$$

d'on, si la matriu A és definida positiva, la tercera de les relacions (c) ens assegura que l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}(A)$ és de dimensió finita.

Considerem doncs una matriu A que no té perquè ser definida positiva, o sigui, considerem una *matriu de Cartan generalitzada* com una matriu A de tamany $n \times n$ i amb coeficients enters tal que:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & a_{i,i} = 2 & \forall i \in S, \\ \text{(ii)} & a_{i,j} \leq 0 & \forall i \neq j \in S, \\ \text{(iii)} & a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0 & \forall i \neq j \in S, \\ \text{(iv)} & \text{Existeix una matriu diagonal } D \text{ tal que } DA \text{ és simètrica.} & \end{array}$$

D'aquesta manera l'àlgebra de Lie que es defineix pot ser de dimensió infinita.

Tenim que les matrius de Cartan generalitzades es divideixen en tres famílies:

1. *Tipus finit:* Aquelles que són definides positives i els correspon una àlgebra de Lie de dimensió finita (tota matriu definida positiva complint les condicions (i), (ii) i (iii) compleix (iv) automàticament).

2. *Tipus afí:* Matrius semidefinides positives i no de tipus finit (aquestes també, en cas de complir les condicions (i), (ii) i (iii), compleixen automàticament la condició (iv)).

3. *Tipus indefinit:* la resta.

Les dues últimes famílies ens donen àlgebres de Lie de dimensió infinita. Tot i això cada una d'aquestes àlgebres de Lie és integrable i permet la construcció d'un grup $G(A)$, de dimensió infinita, que s'anomena grup de Kac-Moody.

Aquests grups van ser estudiats principalment per V. Kac i D. Peterson a [29] i [31], on van demostrar que tenien moltes analogies amb els grups de Lie compactes. Una d'aquestes analogies és l'existència d'una involució compacta

$$\epsilon\colon G(A) \longrightarrow G(A)$$

que té com a punts fixos un subgrup $L(A)$ (que no és un subgrup compacte) i que anomenarem *forma unitària del grup de Kac-Moody.* La forma unitària ens aporta una descomposició d'Iwasawa anàloga a la dels grups de Lie i obtenim que $L(A)$ és homotop a $G(A)$. Igual que en el cas de grups de Lie, aquests resultats s'utilitzen per a fer teoria d'homotopia amb els grups $K(A)$ en lloc de $G(A)$.

En el cas de rang 2, o sigui, que considerem A una matriu de Cartan generalitzada de tamany 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

amb $a, b \geq 0$ i $a = 0$ si i només si $b = 0$ (la condició (iv) es dedueix directament d'aquestes dues). Les famílies queden agrupades en:

1. *Tipus finit:* Correspon als valors de a i b tals que $ab \leq 3$. En aquests cas obtindrem grups de Lie compactes i el resultat és:

a	b	G
0	0	$SU(2) \times SU(2)$
1	1	$SU(3)$
1	2	$Spin(5)$
1	3	G_2

2. *Tipus afí:* Correspon als valors de a i de b tals que $ab = 4$, o sigui $\{a, b\} = \{1, 4\}$ o bé $\{a, b\} = \{2, 2\}$.

3. *Tipus indefinit:* Correspon als valors de a i de b tals que $ab > 4$. Aquests són els grups de Kac-Moody que estudiarem a aquest treball.

Considerem doncs $K(a,b)$ la forma compacta del grup de Kac-Moody associat a la matriu A de l'equació (1.1), amb $ab > 4$ i considerem $BK(a,b)$ l'espai classificador. Una de les primeres preguntes que ens podem fer és fins a quin punt els coeficients $\{a,b\}$, determinen la classe d'isomorfia de $K(a,b)$ i el tipus d'homotopia de $BK(a,b)$.

El primer que observem és que si $ab < 4$, tant la classe d'isomorfisme de $K(a,b)$ com la classe d'homotopia de $BK(a,b)$ queden determinats pel conjunt $\{a,b\}$.

En el cas $ab > 4$ apareixen grups de Kac-Moody no isomorfs amb espais classificadors homotops, per exemple $K(1,225) \ncong K(9,25)$ i $BK(1,225) \simeq BK(9,25)$.

Un altre dels tòpics importants als grups de Lie és el càlcul de les aplicacions entre els espais classificadors BG. Una possible manera d'enfocar aquesta qüestió passa per completar els espais classificadors a cada primer p, obtenint $\widehat{BG}_p$ i utilitzar el quadrat aritmètic de Sullivan [44]:

$$\begin{array}{ccc}
BG & \longrightarrow & \prod_p \widehat{BG}_p \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
BG_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \left(\prod_p \widehat{BG}_p\right)_{\mathbb{Q}}
\end{array}$$

Apliquem el functor $\mathrm{Map}(BG', -)$ i obtenim un altre quadrat aritmètic. Com que els grups de Lie compactes tenen la cohomologia racional $H^*(BG;\mathbb{Q})$ concentrada en graus parells, obtenim que a nivell de components connexes, les dues aplicacions horitzontals són injectives, per tant:

$$\pi_0\mathrm{Map}(BG', BG) \rightarrowtail \prod_p \pi_0\mathrm{Map}(BG', \widehat{BG}_p)\,.$$

L'estudi de les aplicacions als p-completats utilitza dos resultats fonamentals:

Un és el demostrat per B. Dwyer i A. Zabrodsky [18], que relaciona, per a π un p-grup i G un grup de Lie compacte els centralitzadors de les imatges de les representacions $\rho\colon \pi \longrightarrow G$ amb el tipus d'homotopia de $\mathrm{Map}(B\pi, \widehat{BG}_p)$, obtenint una equivalència mòdul p:

$$\coprod_{\rho\in\mathrm{Rep}(\pi,G)} \widehat{BC_G(\rho)}_p \xrightarrow{\simeq_p} \mathrm{Map}(B\pi, \widehat{BG}_p)\,.$$

Aquest resultat va ser generalitzat per D. Notbohm [37] al cas de grups p-torals.

En el cas dels grups de Kac-Moody, el resultat anàleg al de Dwyer i Zabrodsky va ser demostrat per C. Broto i N. Kitchloo a [10]. En canvi, en general, el resultat de D. Notbohm no és cert: existeixen aplicacions de BT (un tor) a BL (un grup de Kac-Moody que no sigui grup de Lie) que no provenen de representacions.

L'altre resultat fonamental és la descomposició de BG, amb G un grup de Lie compacte, com a colímit homotòpic de subgrups p-torals. En el cas de grups de Lie compactes aquest problema va ser estudiat per S. Jackowski, J. McClure i B. Oliver a [22] i [26].

L'estudi homotòpic dels grups de Kac-Moody el podem trobar a la tesi de N. Kitchloo [32]. Un dels principals teoremes és l'aproximació de BL com a colímit homotòpic de grups de Lie compactes. Més concretament, considerem $J \subset S$ un subconjunt d'índexs tals que la submatriu de Cartan $A_J = (a_{i,j})_{i,j \in J}$ sigui definida positiva i per tant P_J, el subgrup parabòlic, sigui compacte. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria parcialment ordenada formada pels subconjunts propis $J \subset S$ tals que P_J és compacte i el conjunt buit $\emptyset$. Llavors:

$$BK \simeq \mathrm{hocolim}_{I \in \mathcal{C}} BP_I \; .$$

Aquest resultat, en el cas de rang 2, es redueix a considerar T el tor maximal, H_1 i H_2 dos grups de Lie compactes amb tor maximal de rang 2 i grup de Weyl $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i el colímit homotòpic es converteix en un push-out:

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & BH_1 \arrow[d] \\ BH_2 \arrow[r] & BK \end{tikzcd}$$

Utilitzarem aquest push-out per a realitzar l'estudi de l'espai d'aplicacions $[BK, BK]$.

Finalment comentar que en el cas de grups de Lie compactes connexos sabem que la cohomologia racional classifica l'espai de les autoaplicacions. Més concretament, a [26] demostren que si G és un grup de Lie compacte connex, llavors, dues aplicacions $f, f' \colon BG \longrightarrow BG$ són homotopes si i només si $H^*(f;\mathbb{Q}) = H^*(f';\mathbb{Q})$.

Veurem que aquest resultat és fals per a grups de Kac-Moody: dues aplicacions de BK a BK seran la mateixa a cohomologia racional si i només si tenen el mateix grau i veurem que el grau no caracteritza les aplicacions.

Si considerem cohomologia amb coeficients enters, el resultat també és fals, o sigui, podem trobar aplicacions no homotopes que a cohomologia entera indueixen la mateixa aplicació.

1.1 Organització del treball

El treball es divideix en 7 capítols, dels que el primer és la introducció i els resultats principals dels següents són:

Al **capítol 2** hi ha la definició i un resum de les propietats bàsiques dels grups de Kac-Moody de rang n. Es defineixen a partir de la matriu de Cartan, passant per l'àlgebra de Kac-Moody i obtenint finalment el grup $G(A)$.

Es comenten les semblances i diferències entre els grups de Lie compactes i els de Kac-Moody. El més important es concentra en l'estudi dels subgrups parabòlics i els subgrups compactes, obtenint, en particular, que hi ha elements de la forma unitària del grup de Kac-Moody que no estan a cap tor maximal.

Al **capítol 3** es veuen resultats més concrets que afecten a grups de Kac-Moody de rang 2, que anomenem $K(a,b)$, on a i b són els coeficients de la matriu de Cartan 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}.$$

Aquest és un cas molt particular ja que el grup de Weyl sempre és isomorf a $\mathbb{Z}/2*\mathbb{Z}/2$ i per tant tota la seva torsió està concentrada a $p=2$. A aquest capítol també es determina les classes d'isomorfisme dels grups de Kac-Moody de rang 2, obtenint que:

Proposició 3.7.1 *$K(a,b)$ és isomorf a $K(a',b')$ si i només si $\{a,b\}=\{a',b'\}$.*

Al **capítol 4** es repassen alguns resultats coneguts sobre els espais classificadors dels grups de Kac-Moody. Una de les coses que es demostra és que el quadrat aritmètic de Sullivan [44] de l'espai BK, sota bones condicions d'un espai X, ens dóna una aplicació injectiva:

$$[X,BK] \rightarrowtail \prod_p [X,\widehat{BK}_p].$$

Aquesta eina la utilitzarem per a demostrar els resultats principals del treball. Si tenim en compte que $BK_{\mathbb{Q}} \simeq K(\mathbb{Q},4)$, tenim que al quadrat aritmètic

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(X,BK) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_p \mathrm{Map}(X,\widehat{BK}_p) \arrow[d] \\ \mathrm{Map}(X,K(\mathbb{Q},4)) \arrow[r] & \mathrm{Map}(X,K(\widehat{\mathbb{Q}},4)) \end{tikzcd}$$

necessitem molt poques restriccions per a que una família d'aplicacions $(f_p)_p \in \prod_p \mathrm{Map}(X,\widehat{BK}_p)$ estengui a una aplicació $f\colon X \longrightarrow BK$.

A aquest capítol també parlem dels subgrups parabòlics de la forma unitària dels grups de Kac-Moody, que és una altra de les eines importants que aplicarem més endavant. En el cas de rang 2 es tradueix en l'existència d'un push-out homotòpic:

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & BH_1 \arrow[d] \\ BH_2 \arrow[r] & BK \end{tikzcd}$$

on $H_i \cong S^3 \times S^1$ o bé $H_i \cong U(2)$, depenent de la paritat de a i b.

Al mateix capítol estudiem les autoaplicacions d'aquests grups BH_i, que farem servir per a construir autoaplicacions entre els grups de Kac-Moody $K(a, b)$.

Al **capítol 5** s'estudien les components connexes de l'espai $\mathrm{Map}(BT, BK)$. Necessitem l'estudi a cada primer i per això comencem amb alguns conceptes de teoria de nombres sobre formes quadràtiques, definint el gènere i calculant el grup d'automorfs d'una forma quadràtica sobre $\mathbb{Z}$ i sobre $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Aquestes dues eines, juntament amb el càlcul del grup de Weyl completat, ens donen dues demostracions independents d'un resultat que en el cas de grups de Lie no es dóna:

Teorema A *Existeixen aplicacions a $[BT, BK]$ que no provenen de representacions $\rho: T \longrightarrow K$.*

Acabem aquest capítol amb un estudi de l'espai d'aplicacions $\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)$. Primer estudiem l'espai en general i després ens restringim al cas que ens interessa i del que en podem dir més coses: les components connexes $\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)_g$, on g és una aplicació que estén a BK.

En aquest cas, si l'aplicació no és homotopa a constant, quan la restringim a T_{p^n} (els elements d'ordre un divisor de p^n del tor T), ha de tenir nucli finit, d'ordre menor o igual a p^s, per a certa s independent de la n, i aquests espais d'aplicacions són:

Teorema B *Si $n \gg s$ llavors cada component connexa de $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$ és homotòpament equivalent a $\widehat{(BT_K)}_p \times K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1)$.*

Acabem aquest capítol demostrant que el grup de Weyl completat és el grup de Weyl topològic quan completem els espais:

Teorema C *Siguin $\rho, \rho': T_{p^\infty} \longrightarrow T_{p^\infty}$ homomorfismes amb nucli finit. Llavors $B\rho \simeq B\rho'$ a $\mathrm{Map}(BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p)$ si i només si existeix $\alpha \in \widehat{W}_p$ tal que $\rho = \alpha\rho'$.*

Al **capítol 6** es considera un grup de Kac-Moody de rang 2 genèric $K(a, b)$ i s'estudia la dependència del tipus d'homotopia en funció de a i de b. El resultat principal d'aquest capítol és determinar la condició necessària i suficient per a que els espais classificadors de dos grups de Kac-Moody de rang 2, $BK(a, b)$ i $BK(a', b')$

siguin homotops. Aquesta condició no coincideix amb la del tipus d'isomorfisme dels grups $K(a,b)$ i $K(a',b')$, obtenint doncs, grups de Kac-Moody no isomorfs amb el mateix espai classificador i obtenint un altre resultat que difereix del cas de grups de Lie compactes.

Per a l'estudi comencem definint les aplicacions admissibles. Aquí també apareixen diferències respecte als grups de Lie, ja que necessitem treballar amb el grup de Weyl completat a cada primer.

Aquest factor serà precisament el que farà aparèixer equivalències homotòpiques per a cada primer i que estendran a l'espai classificador sense completar:

Teorema D *Siguin a, b , a', b' enters positius. Llavors, $BK(a,b) \simeq BK(a',b')$ si i només si:*

1. $ab = a'b'$ *i* $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a',b')$.
2. *Existeix $u \in \{a',b'\}$ tal que $au = A^2$, $A \in \mathbb{Z}$ i per a tot p tal que $\nu_p(a) \neq \nu_p(u)$, tenim que bu és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.*

Al **capítol 7** d'aquesta memòria, es classifiquen les autoaplicacions dels grups de Kac-Moody de rang 2. El fet que $BK(a,b)$ sigui 3-connex i que $H^4(BK(a,b);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ permet definir el grau d'una aplicació f entre un grup de Kac-Moody i ell mateix com l'enter g tal que l'acció de f a $H^4(BK(a,b);\mathbb{Z})$ correspon amb multiplicar per aquest g.

Aquest enter g no determina, en general, el tipus d'homotopia de l'aplicació. De fet només les aplicacions de grau $g = 0$ queden determinades pel seu grau, obtenint que una aplicació de $BK(a,b)$ en ell mateix és homotopa a constant si i només si és de grau zero:

Teorema E *Sigui $f\colon BK \longrightarrow BK$ una aplicació. Les tres afirmacions següents són equivalents:*

1. *f és homotopa a l'aplicació constant.*
2. *$f|_{BT}$ és homotopa a l'aplicació constant.*
3. *f és una aplicació de grau* 0.

Els primers exemples d'aplicacions no nulhomotopes entre els grups de Kac-Moody els trobem a les aplicacions d'Adams ordinàries, que no és res més que una generalització de les aplicacions d'Adams en el cas de grups de Lie. Aquestes les definim a nivell de subgrups parabòlics i després veiem que estenen a tot $BK(a,b)$. Notarem per φ^λ les aplicacions de BK en ell mateix que estenen l'aplicació a nivell del tor maximal $B\rho\colon T_L \longrightarrow T_L$, on ρ és l'aplicació que envia $t \mapsto t^\lambda$.

Als grups de Lie compactes sabem que aquestes aplicacions apareixen només per a λ tal que no divideixi l'ordre del grup de Weyl. En el cas de grups de Kac-Moody tenim el resultat anàleg:

Teorema F *Suposem que tenim una aplicació d'Adams ordinària:* $\varphi^\lambda \colon BL \longrightarrow BL$*. Suposem també que el grup de Weyl té algun element d'ordre* p*, o sigui,* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset W$*. Llavors* p *no divideix a* λ*.*

Per tant, en el cas de grups de Kac-Moody de rang 2, λ haurà de ser senar.

Un estudi més detallat ens permet veure l'existència d'unes altres aplicacions, que anomenarem aplicacions d'Adams parabòliques, que consisteixen en "*creuar*" els subgrups parabòlics, obtenint una nova família d'aplicacions $\varphi^{\alpha,\beta}$, on α i β són senars i complint $a\alpha = b\beta$.

Si passem a un estudi local de les aplicacions, o sigui, a l'anàlisi primer de $[BK, \widehat{BK}_p]$ per a cada primer p i a estudiar les famílies compatibles d'aplicacions que ens en donaran una de BK a BK, obtenim el que anomenem les aplicacions d'Adams genèriques, que venen determinades per uns coeficients:

$$\Big((\epsilon_p, \lambda_p)\Big)_p \in \prod_p \Big(\{0,1\} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p\Big) \tag{1.2}$$

sota unes certes restriccions. Un anàlisi de les aplicacions entre els espais completats ens dóna el següent resultat:

Teorema G *Sigui* $f \colon BK \longrightarrow BK$ *una aplicació. Llavors* f *és una aplicació d'Adams genèrica.*

Amb tota aquesta informació ja podem caracteritzar els enters g tals que existeix una aplicació $f \colon BK(a,b) \longrightarrow BK(a,b)$ de grau g.

Fins ara tot el que hem vist demostra l'existència d'aplicacions entre espais classificadors de grups de Kac-Moody, però no hem parlat encara de la unicitat d'aquestes aplicacions.

Un primer pas per a veure la unicitat consisteix en, coincidint amb el resultat conegut per a grups de Lie, demostrar que dues aplicacions $f, f' \colon BK \longrightarrow BK'$ són homotopes si i només si ho són sobre el tor maximal. En el cas de grups de Kac-Moody de rang 2 tenim el resultat anàleg:

Teorema H *Siguin* $f, f' \colon BK \longrightarrow BK$*. Les afirmacions següents són equivalents:*

1. f *i* f' *són homotopes.*
2. $f|_{BT_K}$ *i* $f'|_{BT_K}$ *són homotopes.*

Aquest resultat ja és prou rígid i ens permet caracteritzar la relació d'equivalència que hem de posar als coeficients de les aplicacions d'Adams genèriques (1.2) per a tenir la classificació completa de $[BK, BK]$.

Finalment, per tal de resumir l'estudi de $[BK, BK]$, per a cada $f \colon BK \to BK$ donem una família d'invariants:

$$\Big((\varepsilon_p, \gamma_p)\Big)_p \in \prod_p \Big(\{0,1\} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p\Big)$$

complint:

Teorema I *Fixats a, b tals que $ab > 4$, la família d'invariants $(\varepsilon_p, \gamma_p)$ per a cada primer p classifica el tipus d'homotopia de les aplicacions de $BK(a,b)$ a $BK(a,b)$.*

A més, fixada una família:

$$\Big((\varepsilon_p, \gamma_p)\Big)_p \in \prod_p \Big(\{0,1\} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p\Big)$$

sota unes certes restriccions, obtenim:

Teorema J *Existeix una única aplicació $f\colon BK(a,b) \longrightarrow BK(a,b)$ amb aquests invariants.*

Finalment, observem que la cohomologia racional no detecta el tipus d'homotopia de les aplicacions, o sigui, hi ha aplicacions no homotopes de BK en ell mateix que indueixen el mateix a $H^*(BK;\mathbb{Q})$. Afegim, a més, que tampoc la cohomologia entera detecta el tipus d'homotopia de les aplicacions, construint dues aplicacions no homotopes que donen el mateix a $H^*(BK;\mathbb{Z})$.

1.2 Agraïments

L'inici d'aquesta aventura el dec a en Jaume Aguadé. Ell em va proposar el tema central d'aquesta memòria i com a director de tesi m'ha proporcionat continus elements de reflexió.

També agraeixo a en Carles Broto el temps que m'ha dedicat i les interessants converses que hem mantingut.

A tot el grup de Topologia Algebraica: Gemma Bastardas, Natàlia Castellana, Manuel Castellet, Carles Casacuberta, Chiqui Crespo, Ramon Flores, Imma Gàlvez, Javier Gutiérrez, Irene Llerena, Joan Porti, José Luis Rodríguez, Marta Santos, Laia Saumell, Jérôme Scherer, Andy Tonks i Antonio Viruel, per donar-me la possibilitat de "*créixer*" amb ells.

Al Departament de Matemàtiques de la UAB per facilitar-me els recursos i els mitjans per poder-ho dur a terme.

Al grup de Topologia del LAGA, a la Universitat Paris 13, per acollir-me durant tres mesos i oferir-me unes condicions idònies per treballar.

Vull donar les gràcies a *l'estament Z*, companys de penes i glòries durant tot aquest temps.

A la meva família, que com en tots els moments importants de la meva vida ha estat al meu costat i a l'avi Jaumet que continua acompanyant-me.

I finalment a l'Imma, per donar-me suport en tot moment, a ella li dedico la tesi.

Capítol 2

Els Grups de Kac-Moody

A aquest primer capítol definirem les àlgebres i els grups de Kac-Moody.

Definirem l'àlgebra de Kac-Moody d'una matriu de Cartan generalitzada seguint els primers capítols del llibre de V. Kac [28] i enunciarem els resultats necessaris per a més endavant. Quan parlem de grups de Kac-Moody, les referències que hem utilitzat són els articles de V. Kac i D. Peterson [29] i [31].

Tan sols hem escrit la demostració dels resultats que no es troben explícitament enunciats a les referències que hem donat.

2.1 Matrius de Cartan generalitzades

Sigui $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunt finit i $A = (a_{i,j})_{i,j \in S}$ una *matriu de Cartan generalitzada*, o sigui, una matriu $n \times n$ amb coeficients enters i que compleix:

(i) $a_{i,i} = 2 \qquad \forall i \in S.$

(ii) $a_{i,j} \leq 0 \qquad \forall i \neq j \in S.$

(iii) $a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0 \quad \forall i \neq j \in S.$

(iv) Existeix una matriu diagonal D tal que DA és simètrica.

Una matriu A que compleixi aquesta última condició s'anomena una *matriu simetritzable*.

Si aquesta matriu, a més, és definida positiva, obtenim un grup de Lie compacte i una àlgebra de Lie de dimensió finita. En el nostre cas, aquesta restricció no la tindrem, i de manera anàloga obtindrem el grup de Kac-Moody i l'àlgebra de Kac-Moody associats.

2.2 L'àlgebra de Kac-Moody

Fixem doncs $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ una matriu de Cartan generalitzada de rang l. Una *realització* d'A és una tripleta $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ on $\mathfrak{h}$ és un espai vectorial complex, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ i $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ són subconjunts de $\mathfrak{h}^*$ i $\mathfrak{h}$ respectivament, complint les següents condicions:

(a) els dos conjunts Π i $\Pi^\vee$ estan formats per vectors linealment independents.

(b) $\alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{i,j} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$

(c) $\dim \mathfrak{h} = 2n - l$.

Direm que dues realitzacions $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ i $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ són *isomorfes* si existeix un isomorfisme d'espais vectorials $\phi\colon \mathfrak{h}_1 \longrightarrow \mathfrak{h}_2$ tal que $\phi(\Pi_1^\vee) = \Pi_2^\vee$ i $\phi^*(\Pi_2) = \Pi_1$.

Lema 2.2.1 ([28]) *Fixada una matriu de Cartan generalitzada A, existeix una única realització, mòdul isomorfisme.*

Fixades dues matrius de Cartan A_1 i A_2, amb realitzacions $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ i $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$, obtenim una realització per la matriu $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$:

$$(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2\, , \, \Pi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2\, , \, \Pi_1^\vee \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2^\vee)\, ,$$

que anomenarem *suma directa* de realitzacions.

Igual que al cas de dimensió finita, diem que Π és la *base d'arrels* i $\Pi^\vee$ és la *base de coarrels*. Els elements de Π i $\Pi^\vee$ s'anomenen *arrels simples* i *coarrels simples* respectivament. Considerem les *xarxes d'arrels* i les *arrels positives*:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i \quad , \quad Q_+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i\, .$$

Això ens permet definir un ordre parcial a $\mathfrak{h}^*$: direm que $\lambda \geq \mu$ si $\lambda - \mu \in Q_+$.

Considerem ara A una matriu de Cartan i $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ una realització. Definim l'àlgebra de Lie auxiliar $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ amb generadors e_i i f_i, $i = 1, \dots, n$ i $\mathfrak{h}$, amb les següents relacions:

$$\begin{array}{ll} [e_i, f_j] = \delta_{i,j}\alpha_i^\vee & \forall i, j = 1, \dots, n. \\ [h, h'] = 0 & \forall h, h' \in \mathfrak{h}. \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i & \forall i = 1, \dots, n \text{ i } h \in \mathfrak{h}. \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i & \forall i = 1, \dots, n \text{ i } h \in \mathfrak{h}. \end{array}$$

Per la unicitat en la realització d'A tenim que $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ està ben definida i només depèn d'A.

Denotem per $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (respectivament $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) la subàlgebra generada per $e_1, \dots, e_n$ (respectivament $f_1, \dots, f_n$).

Teorema 2.2.2 ([28])

(a) $\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+$ *com a espais vectorials.*

(b) $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ *(respectivament* $\tilde{\mathfrak{n}}_-$*) està lliurement generada per* $e_1, \ldots, e_n$ *(respectivament* $f_1, \ldots, f_n$*).*

(c) *L'aplicació* $e_i \mapsto -f_i$*,* $f_i \mapsto -e_i$ *i* $h \mapsto -h$ *estén de manera única a una involució* $\tilde{\omega}$ *de l'àlgebra de Lie* $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$*.*

(d) *Tenim la descomposició d'arrels*

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_+ \,,\, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_+ \,,\, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) ,$$

on $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) \mid [h, x] = \alpha(h)x\}$*. A més,* $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha < \infty$ *i* $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \tilde{\mathfrak{n}}_\pm$ *per a* $\pm\alpha \in Q_+$*,* $\alpha \neq 0$*.*

(e) *Existeix un únic ideal* $\mathfrak{r}$ *que interseca trivialment* $\mathfrak{h}$ *i és maximal respecte a aquesta condició. A més tenim la suma directa d'ideals:*

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-) \oplus (\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+) \,.$$

Definició 2.2.3 ([28]) *Definim l'*àlgebra de Kac-Moody *associada a la matriu de Cartan* A *com el quocient:*

$$\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r} \,,$$

on $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ *i* $\mathfrak{r}$ *són els que acabem de veure.*

La matriu A s'anomena matriu de Cartan de l'àlgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ i n s'anomena el rang de $\mathfrak{g}(A)$. La quàdrupla $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ s'anomena quàdrupla associada a la matriu A. Dues quàdruples $(\mathfrak{g}(A_1), \mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ i $(\mathfrak{g}(A_2), \mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ s'anomenen isomorfes si existeix un isomorfisme d'àlgebres de Lie $\varphi\colon \mathfrak{g}(A_1) \longrightarrow \mathfrak{g}(A_2)$ tal que $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, $\varphi(\Pi_1^\vee) = \Pi_2^\vee$ i $\varphi^*(\Pi_2) = \Pi_1$.

La subàlgebra $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}(A)$ s'anomena *subàlgebra de Cartan* i els elements e_i, f_i s'anomenen els *generadors de Chevalley*. De fet, aquests generen l'àlgebra derivada: $\mathfrak{g}'(A) = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$. A més, $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A) + \mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A)$ si i només si A té determinant no nul.

Acabem aquest apartat amb un lema:

Lema 2.2.4 ([28])

(a) *Donades dues matrius* $n \times n$*,* A *i* A'*, existeix un isomorfisme entre les quàdruples associades si i només si es pot obtenir* A *a partir d'una permutació dels índexs d'*A'*.*

(b) $\mathfrak{g}(A)$ *és simple si i només si* A *té determinant no nul i per a tota parella d'índexs* (i,j) *existeixen* $i_1,\ldots,i_s$ *tal que el producte* $a_{i,i_1}a_{i_1,i_2}\cdots a_{i_s,j}\neq 0$.

2.3 Sistemes de Coxeter

Definició 2.3.1 ([29]) *Sigui* S *un conjunt finit, direm que* $M=(m_{s,t})_{s,t\in S}$ *és una* matriu de Coxeter sobre S *si és una matriu simètrica amb coeficients no negatius tals que* $m_{s,t}=1$ *si i només si* $s=t$.

Direm que W *és el* grup de Coxeter *associat a* M*, una matriu de Coxeter, si* W *és el grup generat pels elements de* S *amb les relacions:*

$$(st)^{m_{s,t}}=1 \qquad \text{per a tot } s,t\in S.$$

En particular compleix que $s^2=1$ *per a tot* $s\in S$.

Anomenarem a la parella (S,W) *un* sistema de Coxeter.

Si J *és un subconjunt de* S*, denotarem per* W_J *el subgrup de* W *generat pels elements de* J.

Definició 2.3.2 ([29]) *Fixat* $w\in W$*, direm que una expressió* $w=s_1\cdots s_k$*, amb* $s_1,\ldots,s_k\in S$ *és* reduïda *si* k *és mínima. Anomenarem a aquest* k la longitud *de* w *i l'escriurem* $l(w)$.

Considerem ara $A=(a_{s,t})_{s,t\in S}$ una matriu de Cartan generalitzada, definim el *grup de Coxeter associat a la matriu de Cartan* A com l'associat a la matriu de Coxeter M^A, amb coeficients $m^A_{s,s}=1$ i per a $s\neq t$, $m^A_{s,t}=2,3,4,6$ o 0 segons si $a_{s,t}a_{t,s}=0,1,2,3$ o ≥ 4. Sigui $(W(A),S)$ el *sistema de Coxeter associat a la matriu de Coxeter* M^A, amb generadors $\{r_s\}_{s\in S}$.

Siguin Q i $Q^\vee$ grups abelians lliures generats per les variables α_s i $\alpha_s^\vee$, $s\in S$ respectivament. Definim l'aplicació bilineal $Q\times Q^\vee\longrightarrow\mathbb{Z}$ com $\langle\alpha_t,\alpha_s^\vee\rangle=a_{s,t}$.

Lema 2.3.3 ([29]) *Les fórmules*

$$s\cdot\alpha_t=\alpha_t-a_{s,t}\alpha_s \;\; i \;\; s\cdot\alpha_t^\vee=\alpha_t^\vee-a_{t,s}\alpha_s^\vee$$

defineixen accions fidels del grup $W(A)$ *per automorfismes de* Q *i* $Q^\vee$ *respectivament, que respecten l'aplicació bilineal* $\langle\ ,\ \rangle$.

Considerem ara dos exemples de grups de Coxeter que provenen de matrius de Cartan i que per tant, tal i com veurem més endavant, són grups de Weyl de grups de Kac-Moody:

Exemple 2.3.4 Considerem la matriu de Cartan 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$$

amb $ab > 4$, per tant, la matriu de Coxeter és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i el grup de Coxeter té dos generadors w_1, w_2 i dues relacions, $w_1^2 = 1$ i $w_2^2 = 1$, per tant és isomorf a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exemple 2.3.5 Considerem ara la matriu de Cartan 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 \\ -b & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

amb $ab \geq 4$, llavors la matriu de Coxeter és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

i el grup de Coxeter té tres generadors w_1, w_1 i w_3, i les relacions $w_1^2 = w_2^2 = w_3^2 = (w_1 w_3)^2 = (w_2 w_3)^3 = 1$ i aquest grup és isomorf a $PGL_2(\mathbb{Z})$.

2.4 Arrels de l'àlgebra de Kac-Moody

Considerem A una matriu de Cartan generalitzada i $\mathfrak{g}(A)$ l'àlgebra de Kac-Moody associada a A (definició 2.2.3).

Tenim la descomposició d'arrels:

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha \, .$$

On $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}(A) \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ per a tota } h \in \mathfrak{h}\}$ és l'espai associat a l'arrel α. Observem que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{\alpha_s} = \mathbb{C}e_s$ i $\mathfrak{g}_{-\alpha_s} = \mathbb{C}f_s$. Definim la *multiplicitat d'una arrel* α com la dimensió de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Definició 2.4.1 ([28]) *Un element $\alpha \in Q$ s'anomena* arrel *si $\alpha \neq 0$ i té multiplicitat diferent de zero.*

Anomenarem arrels positives *a aquelles que pertanyen a Q_+ i* negatives *a les de Q_-.*

Tenim que tota arrel és o be positiva o be negativa. Denotem per Δ, Δ_+ i Δ_- el conjunt de totes les arrels, les arrels positives i les arrels negatives respectivament. Llavors:

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_- \ .$$

Sigui $\mathfrak{n}_+$ (respectivament $\mathfrak{n}_-$) la subàlgebra de $\mathfrak{g}(A)$ generada per $e_1, \ldots, e_n$ (respectivament $f_1, \ldots, f_n$). Tenim la descomposició triangular:

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_- \ .$$

L'ideal $\mathfrak{r}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ és $\tilde{w}$-invariant (on $\tilde{w}$ és la involució definida al teorema 2.2.2), per tant, tenim una involució $w \colon \mathfrak{g}(A) \longrightarrow \mathfrak{g}(A)$ determinada per les propietats:

$$w(e_i) = -f_i \ , \ w(f_i) = -e_i \ \text{ i } \ w(h) = -h \text{ per a tot } h \in \mathfrak{h}.$$

Com que $w(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tenim que les arrels α i $-\alpha$ tenen la mateixa multiplicitat. En particular

$$\Delta_- = -\Delta_+ \ .$$

Recordem que a la construcció de $\mathfrak{g}(A)$, les arrels complien l'aplicació bilineal del lema 2.3.3, per tant, tenim una acció fidel del grup $W(A)$ sobre Q.

Definició 2.4.2 *Definim les* arrels reals *com el conjunt:*

$$\Delta^{\mathrm{re}} := \{ w \cdot \alpha_s \mid w \in W(A),\ s \in S \} \ .$$

També utilitzem les notacions $\Delta^{\mathrm{re}}_+ = \Delta^{\mathrm{re}} \cap \Delta_+$ i es compleix que $\Delta^{\mathrm{re}} = \Delta^{\mathrm{re}}_+ \cup -\Delta^{\mathrm{re}}_+$ (unió disjunta).

2.5 Integració d'àlgebres de Kac-Moody

Considerem A una matriu de Cartan generalitzada. Considerem $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ una realització. Observem que $(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ és una realització per a A^T, la transposada de la matriu de Cartan A, que és alhora una matriu de Cartan. Llavors, si $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ és una quàdrupla associada a la matriu A, $(\mathfrak{g}(A^T), \mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ és una quàdrupla associada a la matriu A^T. Anomenarem $\mathfrak{g}(A^T)$ *l'àlgebra de Kac-Moody dual* de $\mathfrak{g}(A)$.

Sigui ara V un $\mathfrak{g}$-mòdul sobre una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Diem que un element $x \in \mathfrak{g}$ és *localment nilpotent en* V si per a qualsevol $v \in V$, existeix N un natural tal que $x^N(v) = 0$.

Considerem $\mathfrak{g}(A)$ com a $\mathfrak{g}(A)$-mòdul amb l'adjunció:

Lema 2.5.1 ([28]) $\mathrm{ad}e_i$ *i* $\mathrm{ad}f_i$ *són localment nilpotents a* $\mathfrak{g}(A)$.

Direm que un $\mathfrak{g}(A)$-mòdul V és $\mathfrak{h}$-*diagonalitzable* si $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$, on $V_\lambda = \{v \in V \mid h(v) = \langle \lambda, h \rangle v$ per a tot $h \in \mathfrak{h}\}$. Direm que λ és un *pes* si $V_\lambda \neq 0$ i anomenarem *multiplicitat de* λ a la dimensió de V_λ.

Un mòdul $\mathfrak{h}$-diagonalitzable V sobre una àlgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ s'anomena *integrable* si tots els elements e_i i f_i per a $i = 1, \ldots, n$ són localment nilpotents sobre V.

Un element $x \in \mathfrak{g}$ s'anomena *localment finit sobre* V, on V és un $\mathfrak{g}$-mòdul, si per a qualsevol $v \in V$, l'espai vectorial generat per $\{x^N(v)\}_{N \in \mathbb{Z}}$ és de dimensió finita. Observem que els elements localment nilpotents i $\mathfrak{h}$-diagonalitzables són localment finits.

Fixem $\mathfrak{g}$ una àlgebra de Lie i V un $\mathfrak{g}$-mòdul. Diem que V *és integrable* si $V = V_{\text{fin}}$, on $V_{\text{fin}} = \{v \in V \mid v$ és localment finit$\}$.

Proposició 2.5.2 ([28]) *L'àlgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associada a una matriu de Cartan generalitzada A és una àlgebra integrable.*

Ara podem definir el grup de Kac-Moody associat a l'àlgebra $\mathfrak{g}(A)$: sigui G^* el grup lliure generat pels elements de $\mathfrak{g}(A)$. Considerem V un $\mathfrak{g}(A)$-mòdul integrable. Donada π una representació de $\mathfrak{g}(A)$ en V, definim una representació de G^* sobre V amb l'exponencial:

$$I(\pi)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \pi(x)^n \quad x \in \mathfrak{g}(A) \, .$$

Considerem N^* el nucli de tots els $I(\pi)$, on π varia sobre tots els $\mathfrak{g}$-mòduls integrables.

Definició 2.5.3 ([28]) *Definim $G(A)$ el* grup de Kac-Moody associat a la matriu de Cartan A *com el grup G^*/N^*, on G^* i N^* són els que acabem de definir.*

2.6 El grup $G(A)$

A la secció anterior hem definit el grup de Kac-Moody associat a una matriu de Cartan generalitzada A. A aquesta secció veurem una caracterització axiomàtica del mateix grup, tal i com es fa a l'article de V. Kac i D. Peterson [29] i comentarem les propietats que necessitem.

Per a cada $t \in \mathbb{C}^*$ i $u \in \mathbb{C}$ considerem els següents elements de $SL_2(\mathbb{C})$:

$$h(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad x(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad y(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} .$$

Denotarem per ϵ la involució compacta de $SL_2(\mathbb{C})$

$$\epsilon(a) = \left((\overline{a})^T\right)^{-1} .$$

Tal que els punts fixos per aquesta involució són SU_2.

Teorema 2.6.1 ([29]) *Els següents axiomes ens determinen, mòdul un únic isomorfisme, un grup $G(A)$, isomorf al grup de Kac-Moody associat a la matriu A, i uns morfismes de grups $\varphi_i \colon SL_2(\mathbb{C}) \to G(A)$ per a tot $i \in S$. (A partir d'ara denotarem per $h_i(t)$, $x_i(u)$ i $y_i(u)$ els elements de $G(A)$: $\varphi_i(h(t))$, $\varphi_i(x(u))$ i $\varphi_i(y(u))$ respectivament.)*

(G1) Existeix un $G(A)$-mòdul (V, π) sobre $\mathbb{C}$ fidel tal que cada $SL_2(\mathbb{C})$-mòdul $(V, \pi \circ \varphi_i)$ és una suma directa de submòduls racionals de dimensió finita.

(G2) (a) $h_i(t)x_j(u)h_i(t)^{-1} = x_j(t^{a_{i,j}}u)$ i $h_i(t)y_j(u)h_i(t)^{-1} = y_{s'}(t^{-a_{i,j}}u)$ per a tot i, j elements de S, $t \in (\mathbb{C}^*)^S$ i $u \in \mathbb{C}$.

(b) $x_i(u)y_j(v) = y_j(v)x_i(u)$ per a tot $i \neq j \in S$ i tot $u, v \in \mathbb{C}$.

(G3) Si un grup G i morfismes $\varphi'_i \colon SL_2(\mathbb{C}) \to G$ per a tot $i \in S$ satisfan (G1) i (G2) llavors existeix un únic isomorfisme $\psi \colon G(A) \to G$ tal que $\varphi'_i = \psi \circ \varphi_i$.

Definició 2.6.2 *Composant les φ_i amb ϵ i aplicant l'axioma (G3) obtenim que existeix una única involució $w \colon G(A) \to G(A)$ tal que $\phi_i \circ \epsilon = w \circ \phi_i$ per a tota $i \in S$, que anomenem* involució compacta de $G(A)$.

Considerem els següents subgrups de $G(A)$:

- $G_i = \varphi_i(SL_2(\mathbb{C}))$ per a tot $i \in S$.
- $H_i = \{h_i(t) \mid t \in \mathbb{C}^*\}$ per a tot $i \in S$.
- H el subgrup generat per $\{H_i\}_{i \in S}$, *el tor maximal complex.*
- $T = \{\prod_{i \in S} h_i(t) \mid t \in S^1 \subset \mathbb{C}^*\}$, *el tor maximal real.*

Lema 2.6.3 ([29])

(a) *El morfisme $(\mathbb{C}^*)^S \longrightarrow G(A)$ definit per $(t_i)_{i \in S} \mapsto \prod_{i \in S} h_i(t_i)$ és un isomorfisme amb la seva imatge, que és H.*

(b) *Els morfismes φ_i són injectius, per a tot $i \in S$.*

(c) *$G_i \cap G_j = \{1\}$ per a $i \neq j \in S$.*

Considerem ara els següents elements:

$$\tilde{s_i} = \varphi_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigui N el subgrup de $G(A)$ generat per H i $\tilde{s_i}$ per a $i \in S$. Llavors tenim les propietats:

Lema 2.6.4 ([29])

(a) *H és un subgrup normal de N, per tant, té sentit considerar $W = N/H$, que anomenarem* grup de Weyl de $G(A)$*.*

(b) *Existeix un únic isomorfisme de W en $W(A)$ tal que envia $\tilde{s}_i H$ a r_i per a tot $i \in S$.*

(c) *El centralitzador de H en N i en $G(A)$ és H.*

(d) *El normalitzador de H a $G(A)$ és N.*

(e) *Hi ha un únic isomorfisme de W a $W(A)$ que envia $\tilde{s}_i H$ a r_i per a tot $i \in S$.*

(f) *$G(A) = \coprod_{w \in W} BwB$ (*descomposició de Bruhat*).*

Per tant, a partir d'ara identificarem W amb $W(A)$ i utilitzarem sobre W totes les propietats que hem vist sobre $W(A)$.

2.7 Subgrups parabòlics de $G(A)$

Els subgrups parabòlics jugaran un paper important per a poder entendre homotòpament els grups de Kac-Moody.

Considerem abans els següents subgrups dels grups de Kac-Moody:

- $U_{\alpha_s} = \{x_s(u) \mid u \in \mathbb{C}\}$, per a $s \in S$.
- Si $\alpha = w \cdot \alpha_s$ és una arrel real (definició 2.4.2), sigui $n \in N$ tal que $w = nH$ i considerem $U_\alpha = nU_{\alpha_s}n^{-1}$. Aquest grup està ben definit (veure [29]), per tant, només depèn de α. Observem que $U_{\alpha_s} = \{x_s(u) \mid u \in \mathbb{C}\}$.
- Sigui U_+ (respectivament U_-) el subgrup de $G(A)$ generat per U_α (respectivament $U_{-\alpha}$) per a $\alpha \in \Delta_+^{\mathrm{re}}$.
- W_J el subgrup de $G(A)$ generat per $\tilde{s}$ amb $s \in J \subset S$.
- B el subgrup de G generat per H i U_+.

Definició 2.7.1 *Definim els* subgrups parabòlics de $G(A)$ *com els subgrups $Q_J = BW_JB$, per a cada $J \subset S$.*

Observació 2.7.2 Considerem també B com el subgrup parabòlic corresponent al subconjunt buit ($\emptyset$).

2.8 Els grups $L(A)$ i $K(a, b)$

Considerem ara la involució de $G(A)$ de la definició 2.6.2 i definim $L(A)$, la *forma unitària del grup* $G(A)$ com el conjunt de punts fixos de w.

Observació 2.8.1 Utilitzarem la lletra $L = L(A)$ per a designar la forma unitària d'un grup de Kac-Moody $G(A)$ genèric amb matriu de Cartan A de mida $n \times n$. En canvi, utilitzarem la notació $K(a, b)$ per als grups de Kac-Moody corresponents a matrius 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix},$$

que són les que analitzarem més detalladament.

Lema 2.8.2 ([29])

(a) $G(A) = L(A)H_+U_+$ *de manera única (*descomposició d'Iwasawa*).*

(b) $L(A)$ *és homotop a* $G(A)$*.*

(c) $L(A)$ *està generat per* $\{L_s\}_{s\in S}$*, on* $L_s = L(A) \cap G_s$*.*

(d) $L(A) \cap H = T_L$ *i és un tor maximal de* $L(A)$*.*

(e) *El normalitzador de* T_L *a* $L(A)$*, que escriurem* NT_L*, és* $N \cap L(A)$ *i està generat per* T_L *i* $\{\tilde{s}\}_{s\in S}$*.*

(f) *El grup de Weyl de* $L(A)$*, que definim com* NT_L/T_L*, és isomorf a* $W(A)$*.*

Sigui $D = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leq 1\}$ el disc unitat tancat i $S^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ la seva frontera. Per a $u \in D$ considerem:

$$z(u) = \begin{pmatrix} u & \sqrt{1-|u|^2} \\ -\sqrt{1-|u|^2} & \overline{u} \end{pmatrix} \in SU_2 .$$

Observem que si $t \in S^1$ tenim $z(t) = h(t)$.

Considerem ara SU_2 escrit de la manera següent:

Lema 2.8.3 ([29]) *SU_2 és el grup amb generadors $\{z(\alpha)\}_{\alpha\in D}$, amb les següents relacions (posem $h(t) = z(t)$ quan $t \in S^1$):*

(a) $h(t)h(t') = h(tt')$*, on* $t, t' \in S^1$*.*

(b) $h(t)z(\alpha) = z(t^2\alpha)h(t^{-1})$*, on* $t \in S^1$ *i* $\alpha \in D$*.*

(c) $z(ic)h(t)z(ic)^{-1} = z(c^2t + (1-c^2)\overline{t})$ *on* $0 \leq c \leq 1$ *i* $t \in S^1$ *amb* $\mathrm{Im}t \geq 0$*.*

A més $z(u)^{-1} = z(-\overline{u})h(-1)$.

Observem que un possible isomorfisme és aquell que envia

$$z(u) \mapsto \begin{pmatrix} u & \sqrt{1-|u|^2} \\ -\sqrt{1-|u|^2} & \overline{u} \end{pmatrix} .$$

I per tant podem explicitar la inversa:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \mapsto z\left(x\frac{y}{|y|}\right) h\left(\frac{|y|}{y}\right) .$$

Recordem ara les aplicacions $\varphi_s\colon SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow G(A)$, que donaven l'estructura al grup de Kac-Moody, i la composem amb la inclusió $SU_2 \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$, obtenint unes aplicacions que anomenarem z_s:

$$z_s\colon SU_2 \longrightarrow G(A) .$$

Com que SU_2 són els punts fixos per la involució compacta de $SL_2(\mathbb{C})$ que s'utilitza per a definir la involució compacta de $G(A)$ veiem que l'aplicació z_s té la imatge continguda a $L(A)$ i més concretament:

$$z_s\colon SU_2 \longrightarrow L_s \subset L(A) .$$

Utilitzarem SU_2 amb la notació del lema 2.8.3 i per tant considerem, igual que al principi, $z_s(u) = \varphi_s(z(u))$ i $h_s(t) = \varphi_s(h(t))$, per a $u \in D$ i $t \in S^1 \subset D$.

Tal i com hem vist al lema 2.8.2, els subgrups L_s, per a $s \in S$ generen $L(A)$, per tant, tot element de $g \in L$ es pot escriure com:

$$g = z_{s_1}(u_1)z_{s_2}(u_2)\cdots z_{s_k}(u_k) ,$$

amb $s_j \in S$ i $u_j \in D$.

Lema 2.8.4 ([29])

(a) *Si* $w = s_1 \cdots s_k$ *és una expressió reduïda (definició 2.3.2) per a* $w \in W$ *i* $g \in L(A) \cap BwB$ *llavors existeixen uns únics* $u_1, \ldots, u_k \in \overset{o}{D}$ *i* $t \in T_L$ *tal que*

$$g = z_{s_1}(u_1)\cdots z_{s_k}(u_k)t .$$

(b) *Per a tot* $s, t \in S$, *existeix una única aplicació* $\Gamma_{s,t}\colon (\overset{o}{D})^{m_{s,t}} \longrightarrow (\overset{o}{D})^{m_{s,t}}$ *tal que si* $u = (u_1, u_2, \ldots) \in (\overset{o}{D})^{m_{s,t}}$ *i* $\Gamma_{s,t}(u) = v = (v_1, v_2, \ldots) \in (\overset{o}{D})^{m_{s,t}}$ *llavors*

$$z_s(u_1)z_t(u_2)z_s(u_3)\cdots = z_t(v_1)z_s(v_2)z_t(v_3)\cdots .$$

(c) *$L(A)$ és el producte amalgamat dels subgrups $L(A) \cap P_s$ mòdul les relacions de (b), on P_s són els subgrups parabòlics corresponents a $\{s\} \subset S$.*

Finalment enunciem el teorema que ens dóna l'estructura dels grups $L(A)$:

Teorema 2.8.5 ([29]) *$L(A)$ és el grup amb generadors $z_s(u)$, amb $s \in S$ i $u \in D$ amb les relacions (posarem $h_s(t) = z_s(t)$ si $t \in S^1$):*

(K1) *$h_s(t)h_s(t') = h_s(tt')$ si $s \in S$ i $t, t' \in S^1$.*

(K2) *$z_s(ic)h_s(t)z_s(ic)^{-1} = z_s(c^2t + (1-c^2)\bar{t})$ si $s \in S$, $0 \leq c \leq 1$ i $t \in S^1$ amb $\mathrm{Im}t \geq 0$.*

(K3) *$h_s(t)z_{s'}(u) = z_{s'}(t^{a_{s,s'}}u)h_{s'}(t^{-a_{s,s'}})h_s(t)$ si $s, s' \in S$, $t \in S^1$ i $u \in D$.*

(K4) *$z_s(u)z_{s'}(v) = z_{s'}(v)z_s(u)$ si $s, s' \in S$, $m^A_{s,s'} = 2$ i $u, v \in D$.*

(K5) *$z_s(u_1)z_{s'}(u_2)z_s(u_3)\cdots = z_{s'}(v_1)z_s(v_2)z_{s'}(v_3)\cdots$, amb $m^A_{s,s'}$ factors a cada costat, amb $s, s' \in S$, complint que $a_{s,s'} = -1$ i $a_{s',s} = -k$ per a $k \in \{1, 2, 3\}$ i que $(v_1, \cdots, v_{m^A_{s,s'}}) = \Gamma_{s,s'}(u_1, \cdots, u_{m^A_{s,s'}})$, on $\Gamma_{s,s'}$ és la definida al lema 2.8.4.*

Lema 2.8.6 *El centre d'un grup de Kac-Moody amb matriu de Cartan A és el grup abelià generat per $\{g_s\}_{s\in S}$ amb relacions les files de la matriu de Cartan, tenint en compte que la part lliure $\mathbb{Z}^n$ la substituïm per $(S^1)^n$.*

DEMOSTRACIÓ: Per a simplificar considerem $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Considerem la matriu de Cartan $A = \{a_{i,j}\}_{i,j\in S}$. Si volem que un element sigui del centre, aquest haurà d'estar inclòs al centralitzador del tor maximal, que és ell mateix i per tant, el que ens plantegem és quines condicions haurà de complir un producte:

$$h_1(t_1)h_2(t_2)\cdots h_n(t_n)$$

per a estar al centre. Si ara demanem que la condició *(K3)* sigui una relació de commutació, obtenim el resultat de l'enunciat.

□

2.9 Subgrups compactes

A aquest apartat resumirem alguns resultats que es deduiran de la proposició 2.9.2 que podem trobar a [31]:

Sigui A una matriu de Cartan generalitzada, sigui $G(A)$ el grup de Kac-Moody associat i $L(A)$ la seva forma unitària. Sigui T_L el tor maximal de $L(A)$ de rang n,

NT_L el normalitzador del tor maximal i W el grup de Weyl, generat per les reflexions $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

Sigui $I \subset \{1, \ldots, n\}$ un subconjunt propi. Considerem Q_I el subgrup parabòlic de $G(A)$ definit a la secció 2.7 i $P_I = Q_I \cap L(A)$.

Definició 2.9.1 *Anomenem a P_I construït d'aquesta manera com el* subgrup parabòlic de $L(A)$*.*

Direm que $I \subset \{1, \ldots, n\}$ és de tipus finit *si el grup P_I és compacte.*

Aquest conjunts de subíndexs coincideixen amb aquells tals que el subgrup del grup de Weyl generat per $\{w_i\}_{i \in I}$ és un subgrup finit, o sigui, amb aquells tals que la submatriu de Cartan A_I és definida positiva.

Considerem la descomposició de Bruhat $G(A) = \coprod_{w \in W} BwB$ (lema 2.6.4) i sigui K' un subgrup de $L(A)$:

Proposició 2.9.2 ([31])

(a) *K' és compacte si i només si talla un nombre finit d'elements del conjunt $\{BwB\}_{w \in W}$.*

(b) *Per a tot subgrup compacte K' de $L(A)$ existeix $x \in L(A)$ i $I \subset \{1, \ldots, n\}$ de tipus finit tal que $xK'x^{-1} \subset P_I$.*

(c) *Tot tor de $L(A)$ està contingut al tor maximal, mòdul conjugació. Tot element $g \in L(A)$ tal que el subgrup generat $\langle g \rangle$ té adherència compacta es pot conjugar dins del tor maximal.*

I d'aquesta proposició en podem treure el corol·lari següent:

Corol·lari 2.9.3

(a) *Tot element d'ordre finit es pot conjugar al tor maximal.*

(b) *Sigui $P \subset L(A)$ un subgrup p-toral. Llavors tot element $g \in P$ es pot conjugar al tor maximal.*

Demostració: La proposició anterior ens dóna el primer apartat.

Sigui $g \in P \subset L(A)$ on P és un grup p-toral, o sigui, P es pot escriure com l'extensió:

$$P_0 \rightarrowtail P \twoheadrightarrow \pi \, ,$$

on P_0 és un tor i π és un p-grup finit. Llavors P és un subgrup tancat de $L(A)$ i el grup generat per g està contingut a P, per tant la seva adherència també i tenim que $\overline{\langle g \rangle}$ és compacta (ja que P és compacte), i podem aplicar la proposició 2.9.2. $\square$

Observació 2.9.4 Aquí apareix una diferència amb els grups de Lie compactes. En el cas de grups de Kac-Moody no és cert que tot element de la forma unitària L sigui d'un tor maximal, mòdul conjugació. Per a veure-ho tan sols cal considerar $K(a,b)$, $ab > 4$, un grup de Kac-Moody de rang 2 i $\tilde{w} \in K(a,b)$ un representant del producte $w_1 w_2 \in NT_K/T_K$, per exemple $\tilde{w} = z_1(0)z_2(0)$. Utilitzant el lema 2.8.4 i la proposició 2.9.2, obtenim que el grup generat per $\tilde{w}$ talla un nombre infinit de BwB, fent variar $w \in W$ i per tant, no està contingut a cap subgrup compacte i en particular a cap tor.

2.10 Acció del grup de Weyl

Considerem ara $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ una matriu de Cartan de rang n. La realització de A definida a l'apartat 2.2: $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ compleix que Π i $\Pi^\vee$ són bases per a $\mathfrak{h}^*$ i $\mathfrak{h}$ respectivament.

Recordem ara les reflexions elementals definides sobre h al lema 2.3.3, expressat en la base $\Pi^\vee$:

$$w_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee - a_{j,i}\alpha_i^\vee \ ,$$

per tant, en forma matricial i en aquesta base:

$$w_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{1,i} & -a_{2,i} & \cdots & -1 & \cdots & -a_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

per tant, passant al tor maximal utilitzarem w_i, mentre que quan parlem de l'acció a cohomologia, utilitzarem la seva transposada, w_i^T.

Capítol 3

Els grups de Kac-Moody de rang 2

A aquesta secció considerarem els resultats de l'apartat anterior per al cas particular en que la matriu de Cartan és dos per dos, on es poden simplificar algunes coses:

Considerem doncs la matriu de Cartan generalitzada amb $S = \{1, 2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

Suposarem que $ab > 4$ de tal manera que no sigui ni un cas de dimensió finita ni un cas afí.

3.1 El grup $K(a, b)$

A partir d'ara, considerarem $G(a, b)$ el grup de Kac-Moody associat a la matriu (3.1) i $K(a, b)$ la seva forma unitària.

Si ara considerem les aplicacions φ_1 i φ_2, obtenim que $K(a, b)$ està generat per dos subgrups isomorfs a $SU_2 \cong S^3$ amb intersecció $\{1\}$.

Si volem una descripció de $K(a, b)$, utilitzant les notacions de la secció 2.8 tenim el següent:

Teorema 3.1.1 ([29]) *$K(a, b)$ és el grup amb generadors $z_1(u)$ i $z_2(u)$, amb $u \in D$ (els elements de $\mathbb{C}$ de radi menor o igual a 1) i amb les relacions (posarem $h_j(t) = z_j(t)$ si $t \in S^1$):*

(K1) *$h_j(t)h_j(t') = h_j(tt')$ si $j \in \{1, 2\}$ i $t, t' \in S^1$.*

(K2) *$z_j(ic)h_j(t)z_j(ic)^{-1} = z_j(c^2t + (1 - c^2)\bar{t})$ si $j \in \{1, 2\}$, $0 \le c \le 1$ i $t \in S^1$ amb* $\mathrm{Im}(t) \ge 0$.

(K3) $$\begin{array}{l} h_1(t)z_1(u) = z_1(t^2u)h_1(t^{-1}) \ \textit{si}\ t \in S^1 \ \textit{i}\ u \in D. \\ h_2(t)z_2(u) = z_2(t^2u)h_2(t^{-1}) \ \textit{si}\ t \in S^1 \ \textit{i}\ u \in D. \end{array}$$

(K3') $$\begin{array}{l} h_1(t)z_2(u) = z_2(t^{-b}u)h_2(t^b)h_1(t) \ \textit{si}\ t \in S^1 \ \textit{i}\ u \in D. \\ h_2(t)z_1(u) = z_1(t^{-a}u)h_1(t^a)h_2(t) \ \textit{si}\ t \in S^1 \ \textit{i}\ u \in D. \end{array}$$

On observem que (K1), (K2) i (K3) ens defineixen dos subgrups de $K(a,b)$ isomorfs a SU_2 (lema 2.8.3).

3.2 Tor maximal, normalitzador i matrius del grup de Weyl

Considerem el subgrup de $K(a,b)$: $T_K = \{h_j(t) \mid j = 1,2 \text{ i } t \in S^1\}$. Aquest subgrup és abelià, connex i ens defineix un *tor maximal* a $K(a,b)$, que és de dimensió 2.

El seu normalitzador està format pel subgrup de K generat per:

$$N \cong \langle T_K, z_1(0), z_2(0) \rangle \ .$$

L'estructura del grup de Weyl la podem deduir a partir de la matriu de Coxeter associada a la matriu de Cartan A, que com que $ab > 4$ serà la matriu:

$$M^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Per tant el grup de Weyl $W(A)$ està generat per elements $\{r_1, r_2\}$ amb les úniques relacions $r_1^2 = 1$ i $r_2^2 = 1$, per tant, és el grup $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, generat per r_1 i r_2, elements d'ordre 2. En aquest cas l'acció del grup de Weyl a l'àlgebra de Lie del tor maximal ve donada per les matrius (secció 2.10):

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

Considerarem les matrius corresponents a l'acció a la cohomologia del tor maximal:

$$w_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ i } w_2^T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.3}$$

A més, els elements del Grup de Weyl, a l'acció sobre l'àlgebra de Lie del tor maximal són matrius de la forma:

$$(w_1w_2)^n = \begin{pmatrix} d_{2n+1} & -d_{2n} \\ c_{2n} & -c_{2n-1} \end{pmatrix} \text{ i } (w_1w_2)^n w_1 = \begin{pmatrix} -d_{2n+1} & d_{2n+2} \\ -c_{2n} & c_{2n+1} \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

On els coeficients es defineixen com:

$$\begin{aligned} c_0 &= d_0 = 0\,, \\ c_1 &= d_1 = 1\,, \\ c_{j+1} &= ad_j - c_{j-1}\,, && (3.5) \\ d_{j+1} &= bc_j - d_{j-1}\,. && (3.6) \end{aligned}$$

I on es pot comprovar que compleixen:

$$\begin{aligned} c_{2i+1} &= d_{2i+1} && \forall i \in \mathbb{Z}\,, && (3.7) \\ ad_{2i} &= bc_{2i} && \forall i \in \mathbb{Z}\,. && (3.8) \end{aligned}$$

Lema 3.2.1 *Sigui τ una arrel del polinomi $x^4 + (2 - ab)x^2 + 1$, que a més podem imposar que sigui real i més gran que 1. Llavors:*

$$c_n = \begin{cases} \frac{\tau^{2n}-1}{\tau^{n-1}(\tau^2-1)} & \textit{si } n \textit{ senar,} \\ \frac{a}{\tau^{n-2}}\frac{\tau^{2n}-1}{(\tau^4-1)} & \textit{si } n \textit{ parella,} \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} \frac{\tau^{2n}-1}{\tau^{n-1}(\tau^2-1)} & \textit{si } n \textit{ senar,} \\ \frac{b}{\tau^{n-2}}\frac{\tau^{2n}-1}{(\tau^4-1)} & \textit{si } n \textit{ parella.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ: Veiem que c_0, d_0, c_1 i d_1 coincideixen i que aquestes fórmules compleixen les condicions (3.5) i (3.6).

□

Lema 3.2.2 *La funció diferència entre dos termes $f(n) = c_{2n+1} - c_{2n-1}$ és decreixent en els negatius, té un mínim per a $n = 0$ i creix per a n positiva.*

DEMOSTRACIÓ: Observem primer que la funció és simètrica ($f(n) = f(-n)$), per tant, només cal veure que és creixent en els positius:

$$f(n) = c_{2n+1} - c_{2n-1} = \frac{\tau^{4n+2} - 1}{\tau^{2n}(\tau^2 - 1)} - \frac{\tau^{4n-2} - 1}{\tau^{2n-2}(\tau^2 - 1)} = \tau^{2n} - \tau^{-2n}\,.$$

Considerem doncs la funció $f(x) = \tau^x + \tau^{-x}$, amb $\tau \in \mathbb{R}$ i més gran que 1. La seva derivada, $f'(x) = \lg(\tau)(\tau^x - \tau^{-x})$, s'anul·la només per a $x = 0$, és negativa per a $x < 0$ i és positiva per a $x > 0$.

□

Ara ens interessa estudiar la divisibilitat dels coeficients c_k i d_k per nombres primers fixats. Considerem $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, $a' = a/d$ i $b' = b/d$.

Lema 3.2.3 *Sigui p un primer senar fixat. Les dues definicions de la parella d'enters (k, r) són equivalents:*

(a) *k és l'ordre de la matriu w_1w_2 reduïda mòdul p i r és el màxim exponent tal que $(w_1w_2)^k$ és la identitat mòdul p^r.*

(b) *k és el mínim natural no nul tal que p divideix al màxim comú divisor de c_k i d_k i r el màxim exponent tal que p^r divideix $\mathrm{mcd}(c_k, d_k)$.*

A més, si p divideix a $a'b'(ab-4)$ llavors $r = 1$.

Demostració: Considerem les notacions $\overline{w}$, $\overline{c}_i$ i $\overline{d}_i$ per a les reduccions mòdul p de les matrius $w \in W$ i els coeficients c_i i d_i respectivament.

Segons la definició (a) l'ordre k de $\overline{w}_1\overline{w}_2$ és l'ordre de les arrels del polinomi $\lambda^2 - (ab-2)\lambda+1$ (el polinomi característic de la matriu w_1w_2) al seu cos de descomposició de característica p.

En el cas que k sigui parella, tenim que $(\overline{w}_1\overline{w}_2)^{\frac{k}{2}}$ és una matriu d'ordre 2, per tant, igual a la seva inversa:

$$\begin{pmatrix} \overline{d}_{k+1} & -\overline{d}_k \\ \overline{c}_k & -\overline{c}_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{c}_{k-1} & \overline{d}_k \\ -\overline{c}_k & \overline{d}_{k+1} \end{pmatrix}$$

i per tant obtenim $\overline{c}_k = \overline{d}_k = 0$, $\overline{d}_{k+1} = \overline{c}_{k+1} = -1$ i $\overline{d}_{k-1} = \overline{c}_{k-1} = 1$.

En el cas que k sigui senar considerem la igualtat $(\overline{w}_1\overline{w}_2)^{\frac{k-1}{2}}\overline{w}_1 = \overline{w}_2(\overline{w}_1\overline{w}_2)^{\frac{k-1}{2}}$:

$$\begin{pmatrix} -\overline{d}_k & -\overline{d}_{k+1} \\ \overline{c}_{k-1} & \overline{c}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{d}_k & -\overline{d}_{k-1} \\ \overline{c}_{k+1} & -\overline{c}_k \end{pmatrix}$$

i per tant $\overline{c}_k = \overline{d}_k = 0$.

No pot ser que $c_i = d_i = 0$ mòdul p abans: si això passés, aplicant dels equacions (3.2) i imposant que el determinant sigui 1 arribaríem al fet que la periodicitat dels $(\overline{c}_i, \overline{d}_i)$ comença abans de k' i també que l'ordre de $\overline{w}_1\overline{w}_2$ és inferior a k.

Tots els càlculs que hem fet serveixen per a l'anell $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, (les matrius són igualment invertibles, ja que tenen determinant 1), per tant la definició de la r també és la mateixa.

□

Definició 3.2.4 *Sigui $K(a, b)$ un grup de Kac-Moody de rang dos. Per a cada primer p definim la parella (k, r) com:*

(a) *Si $p = 2$ definim:*

		k	r
a parella	*b parella*	2	*màxim exponent de 2 que divideix* $\mathrm{mcd}(a, b)$
a parella	*b senar*	4	*màxim exponent de 2 que divideix $ab-2$*
b parella	*a senar*	4	*màxim exponent de 2 que divideix $ab-2$*
a senar	*b senar*	3	*màxim exponent de 2 que divideix $ab-1$*

(b) *Si p és senar, definim (k, r) com al lema 3.2.3.*

Considerem la projecció de $GL_2(\mathbb{Z})$ a $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ i W_p la imatge de W per aquesta projecció.

Lema 3.2.5 *Per a tot p senar, l'enter k i el grup W_p compleixen les següents propietats:*

(a) *Si $p|\mathrm{mcd}(a, b)$ llavors $k = 2$ i $W_p = \{\mathrm{Id}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_1\overline{w}_2 = -\mathrm{Id}\}$.*

(b) *Si $p|a$ i $p \not| b$ llavors $k = 2p$,*

$$(\overline{w}_1\overline{w}_2)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ i \ (\overline{w}_1\overline{w}_2)^n\overline{w}_1 = (-1)^n \begin{pmatrix} -1 & (n+1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On observem que $k = 2p$, $-\mathrm{Id} \in W_p$ i no hi ha matrius amb zeros a la diagonal.

(c) *Si $p|(ab - 4)$ llavors $k = p$,*

$$(\overline{w}_1\overline{w}_2)^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -bn \\ an & 1-2n \end{pmatrix}, (\overline{w}_1\overline{w}_2)^n\overline{w}_1 = (-1)^n \begin{pmatrix} -1-2n & b(n+1) \\ -an & 1+2n \end{pmatrix}.$$

Per tant $-\mathrm{Id} \notin W_p$ i $(\overline{w}_1\overline{w}_2)^{\frac{p-1}{2}}\overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b/2 \\ a/2 & 0 \end{pmatrix} \in W_p$.

(d) *Si $p \nmid ab(ab - 4)$, llavors $-\mathrm{Id} \in W_p$ si i només si k és parella i si i només si no hi ha matrius amb la diagonal zeros a W_p.*

Demostració: Considerem la forma de la matriu w_1w_2:

$$w_1w_2 = \begin{pmatrix} ab-1 & -b \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

El cas (a) és dedueix directament de reduir mòdul p.

El cas (b), reduint mòdul p, tenim:

$$\overline{w}_1\overline{w}_2 = -\begin{pmatrix} 1 & \overline{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i per tant també es pot deduir directament el mateix resultat.

El cas (c) es pot fer per inducció: tenim que

$$\overline{w}_1\overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -b \\ a & -1 \end{pmatrix},$$

i coincideix amb l'expressió per a $n = 1$. La resta del resultat es dedueix de fer el pas d'inducció.

El cas (d): suposem que $-\mathrm{Id} \in W_p$, llavors, com que té determinant 1, existeix l tal que $(\overline{w}_1\overline{w}_2)^l = -\mathrm{Id}$, i per tant k ha de ser parella. Per altra banda, si k és parella, tenim que $(w_1w_2)^{\frac{k}{2}}$ és una matriu d'ordre 2 i tal i com hem vist a la demostració del lema 3.2.3, $(w_1w_2)^{\frac{k}{2}} = -\mathrm{Id}$.

Si k és parella, llavors, pel lema 3.2.3 no hi ha coeficients c_l i d_l congruents amb zero mòdul p, amb l senar, i per tant, veient les equacions (3.2) no hi ha matrius amb diagonal nul·la. Si en canvi, k és senar, $(w_1w_2)^{\frac{k-1}{2}}$ té diagonal nul·la (utilitzant altre cop el lema 3.2.3).

□

3.3 Subgrups parabòlics

En el cas de rang 2 el conjunt d'índexs té dos elements $S = \{1, 2\}$, per tant tenim només tres subgrups propis parabòlics:

1. Considerem el conjunt buit $\emptyset$ i obtenim que el subgrup parabòlic és el tor maximal: T_K.

2. Considerem un conjunt format per un sol element, que aportarà els elements de $K(a, b)$ de la forma Bw_iB. Tindrem un grup tal que el seu grup de Weyl associat és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per tant, finit i llavors ha de ser un grup de Lie compacte, que anomenarem H_i. D'aquest grup de Lie també sabem que té un tor maximal T de rang 2 i a més coneixem l'acció del grup de Weyl a T, que ve donada per una de les matrius definides a l'equació (3.2).

   Amb totes aquestes dades ja sabem que el grup H_i serà isomorf a $U(2)$ o bé a $S^3 \times S^1$, depenent de l'acció de w_i sobre T.

   Aquest estudi ja està fet a [5], i obtenim el següent resultat:

Proposició 3.3.1 ([5]) *Sigui $G \cong U(2)$ o bé $S^3 \times S^1$. Escrivim l'isomorfisme $\varphi_i \colon H_i \longrightarrow G$ com una matriu, que correspondria a l'isomorfisme a nivell del tor maximal. Els valors de φ_i i G són:*

$a \equiv 0\,(2)$	$H_2 \cong S^3 \times S^1$	$\varphi_2 = \begin{pmatrix} -a/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$a \equiv 1\,(2)$	$H_2 \cong U(2)$	$\varphi_2 = \begin{pmatrix} (1-a)/2 & 1 \\ (1+a)/2 & -1 \end{pmatrix}$
$b \equiv 0\,(2)$	$H_1 \cong S^3 \times S^1$	$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$b \equiv 1\,(2)$	$H_1 \cong U(2)$	$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & (1-b)/2 \\ -1 & (1+b)/2 \end{pmatrix}$

3.4 Centre de $K(a,b)$

Calculem el centre en aquest cas:

Lema 3.4.1 *Sigui u una arrel $(ab-4)$-èssima primitiva de la unitat o bé un generador de S^1 si $ab=4$. El centre del grup de Kac-Moody de rang dos ve donat per:*

$$C = \begin{cases} \langle u^2 \rangle \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } a \textit{ i } b \textit{ són parelles,} \\ \langle u \rangle & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Demostració: Es dedueix directament del lema 2.8.6.

□

3.5 Automorfismes externs

Tan sols volem comentar un resultat que es troba a l'article de Kac i Wang [30], on es calculen els automorfismes externs dels grups de Kac-Moody, i en el cas de rang dos obtenim el resultat:

Proposició 3.5.1 ([30]) *Sigui $K = K(a,b)$ un grup de Kac-Moody de rang dos. El grup d'automorfismes externs* $\mathrm{Out}(K)$ *és:*

$$\mathrm{Out}(K) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 \cdot \psi^{-1} & \textit{si } a \neq b\,, \\ \mathbb{Z}/2 \cdot \psi^{-1} \times \mathbb{Z}/2 \cdot \psi^{1,1} & \textit{si } a = b\,, \end{cases}$$

on ψ^{-1} i $\psi^{1,1}\colon K \longrightarrow K$ són automorfismes que indueixen les aplicacions $-\mathrm{Id}$ *i* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *a l'àlgebra de Lie del tor maximal T_K respectivament.*

3.6 Elements en forma reduïda

Si apliquem el lema 2.8.4 al cas de $K(a,b)$ tenim que les formes reduïdes per als elements de $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ són: $w = (w_1w_2)^n$ i $w = (w_2w_1)^{n+1}$ si la longitud de w és parella i $w = (w_1w_2)^n w_1$ i $w = (w_2w_1)^n w_2$ si la longitud de w és senar. A més, si considerem $n \geq 0$, la intersecció d'aquestes 4 famílies d'elements de W és buida.

Això dóna les condicions necessàries i suficients per a que la longitud del producte de dos elements de K sigui la suma de les longituds:

Lema 3.6.1 *Siguin*

$$w = w_{i_1} \cdots w_{i_l} \ , \ w' = w_{i'_1} \cdots w_{i'_{l'}} \in W$$

expressions en forma reduïda i siguin $g \in L(A) \cap BwB$ i $g' \in L(A) \cap Bw'B$. Llavors $l(gg') = l(g) + l(g')$ si i només si $i_l \neq i'_1$.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix directament del lema 2.8.4.

□

3.7 Grups de Kac-Moody isomorfs

A aquest apartat volem veure quan, donats a, b, a', b' enters positius, amb $ab > 4$ i $a'b' > 4$ tenim un isomorfisme de grups topològics entre els corresponents grups de Kac-Moody $K(a,b)$ i $K(a',b')$.

Proposició 3.7.1 *Fixats a, b, a', b' enters positius amb $ab > 4$ i $a'b' > 4$, llavors $K(a,b)$ és isomorf a $K(a',b')$, com a grups topològics, si i només si $\{a,b\} = \{a',b'\}$.*

DEMOSTRACIÓ: Notem per $K = K(a,b)$ i $K' = K(a',b')$. Sigui $\rho: K \longrightarrow K'$ un isomorfisme. En particular serà un homeomorfisme d'espais topològics i un isomorfisme a cohomologia. Tenint en compte que $H^6(K;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(ab-1)\mathbb{Z}$, tenim que $ab = a'b'$.

La imatge del tor maximal de K serà un tor maximal de K': serà un subgrup de K isomorf a un tor de dimensió 2, connex i autocentralitzador, per tant, un tor maximal. Els normalitzadors aniran als normalitzadors i tindrem accions del grup de Weyl sobre el tor isomorfes. Si restringim $\rho|_{T_K}$ tindrem una matriu de $GL_2(\mathbb{Z})$, que anomenem M. Per tant, sigui W el grup de Weyl de K i W' el de K', tenim que $MWM^{-1} \subset W'$.

Considerem ara la forma de les matrius de $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ i $W' = \langle w'_1, w'_2 \rangle$, que podem trobar a l'equació (3.2). Tenim que w_1w_2 té valors propis τ i τ^{-1}, que no són arrels de la unitat, i que només depenen del producte $ab = a'b'$. A més, no hi ha cap altre matriu de W amb els mateixos valors propis, a part de $(w_1w_2)^{-1}$. Fent el mateix anàlisi a $w_1'w_2'$ i que conjugar conserva els valors propis, obtenim que $Mw_1w_2M^{-1} = (w_1'w_2')^{\pm 1}$.

Per altra banda $Mw_1M^{-1} = (w_1'w_2')^n w_1'$. Si n és parella, considerem $N = (w_1'w_2')^{-\frac{n}{2}}M$ i obtenim $Nw_1N^{-1} = w_1'$. En cas que n fos senar, considerem $N = (w_1'w_2')^{\frac{n-1}{2}}M$ i obtenim $Nw_1N^{-1} = w_2'$. Aquesta matriu N també compleix que $Nw_1w_2N^{-1} = (w_1'w_2')^{\pm 1}$. Considerant els possibles coeficients de la matriu N surt que estem en un dels casos següents:

$$\begin{array}{llcll} \textit{Cas 1:} & Nw_1N^{-1} = w_1' & \qquad & \textit{Cas 2:} & Nw_1N^{-1} = w_2' \\ & Nw_2N^{-1} = w_2' \ , & & & Nw_2N^{-1} = w_1' \ , \end{array}$$

amb N una matriu de determinant ± 1.

En el primer cas obtenim que $N = \pm\mathrm{Id}$, i per tant, $a = a'$ i $b = b'$, i en el segon cas $N = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a = b'$ i $b = a'$, obtenint els resultat que volíem.

$\square$

Capítol 4

Espais classificadors de grups de Kac-Moody

4.1 Normalitzador del tor maximal

Sigui $L(A)$ la forma unitària d'un grup de Kac-Moody (no té per que ser de rang 2), T_L un tor maximal, NT_L el normalitzador del tor i $W_L \cong NT_L/T_L$ el grup de Weyl.

En el cas de grups de Lie compactes, sabem que si p és un nombre primer que no divideix l'ordre del grup de Weyl, llavors la inclusió del normalitzador del tor maximal dins del grup de Lie és una equivalència mòdul p.

En el cas de grups de Kac-Moody, el grup de Weyl és infinit, però obtenim resultats anàlegs que es resumeixen en els teoremes següents i corol·lari de la tesi de N. Kitchloo [32]:

Teorema 4.1.1 ([32]) *Sigui p un primer tal que W_L no tingui p-torsió. Llavors tenim una equivalència homotòpica:*

$$(\widehat{BNT_L})_p \simeq \widehat{BL}_p \, .$$

Teorema 4.1.2 ([32]) *L'espai BW és acíclic a tots els primers que no apareixen a la torsió de W.*

Corol·lari 4.1.3 ([32]) *Tenim l'equivalència homotòpica:*

$$B(T_L \rtimes W_L) \simeq_p BL$$

per a tots els primers que no apareixen a la torsió del grup de Weyl.

4.2 El quadrat aritmètic

Tenim que BK és simplement connex, per tant, nilpotent i tenim el quadrat aritmètic de Sullivan:

$$\begin{tikzcd} BK \arrow[r] \arrow[d] & \prod_p \widehat{BK}_p \arrow[d] \\ BK_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \left(\prod_p \widehat{BK}_p\right)_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

A més sabem que $BK_{\mathbb{Q}} \simeq K(\mathbb{Q},4)$ i per tant hi ha una classe a cohomologia: $q\colon BK \longrightarrow K(\mathbb{Z},4)$ que indueix una equivalència racional. Si racionalitzem el p-completat tenim que $(\widehat{BK}_p)_{\mathbb{Q}} \simeq K(\widehat{\mathbb{Q}}_p,4)$. Denotem per $q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p$ la classe: $\widehat{BK}_p \longrightarrow K(\widehat{\mathbb{Z}}_p,4) \longrightarrow K(\widehat{\mathbb{Q}}_p,4)$ que fa commutatiu el diagrama:

$$\begin{tikzcd} BK \arrow[r] \arrow[d, "q"] & \widehat{BK}_p \arrow[r] \arrow[dr, "q\otimes\widehat{\mathbb{Q}}_p"] & K(\widehat{\mathbb{Z}}_p,4) \arrow[d] \\ K(\mathbb{Z},4) \arrow[r] & K(\mathbb{Q},4) \arrow[r] & K(\widehat{\mathbb{Q}}_p,4) \end{tikzcd}$$

on les aplicacions que no tenen etiqueta són les naturals en cada cas: compleció d'un espai o bé extensió d'escalars.

Considerem $\widehat{\mathbb{Q}} = \left(\prod_p \widehat{\mathbb{Z}}_p\right) \otimes \mathbb{Q}$. El pull-back es pot escriure com:

$$\begin{tikzcd} BK \arrow[r] \arrow[d] & \prod_p \widehat{BK}_p \arrow[d] \\ K(\mathbb{Q},4) \arrow[r] & K(\widehat{\mathbb{Q}},4) \end{tikzcd}$$

El resultat que farem servir per analitzar els espais d'aplicacions és:

Proposició 4.2.1 *Sigui X un espai tal que $H^3(X;\mathbb{Q}) = 0$. Llavors l'aplicació $l\colon [X,BK] \longrightarrow \prod_p [X,\widehat{BK}_p]$ és injectiva. La seva imatge consisteix en aquelles famílies d'aplicacions $\{f_p\colon X \longrightarrow \widehat{BK}_p\}$ complint que existeix $x \in H^4(X;\mathbb{Q})$ tal que $f_p^*(q\otimes\widehat{\mathbb{Q}}_p) = x \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p$ per a tot p.*

$$\mathrm{Map}(X,BK)_f \longrightarrow \prod_p \mathrm{Map}(X,\widehat{BK}_p)_{f_p} \tag{4.1}$$

indueix un isomorfisme a $H^*(\quad;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ per a qualsevol $n>0$.

Demostració: Considerem el pull-back:

$$\begin{tikzcd} BK \arrow[r] \arrow[d] & \prod_p \widehat{BK}_p \arrow[d] \\ K(\mathbb{Q},4) \arrow[r] & K(\widehat{\mathbb{Q}},4) \end{tikzcd}$$

que indueix un pull-back d'espais d'aplicacions:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(X,BK) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_p \mathrm{Map}(X,\widehat{BK}_p) \arrow[d] \\ \mathrm{Map}(X,K(\mathbb{Q},4)) \arrow[r] & \mathrm{Map}(X,K(\widehat{\mathbb{Q}},4)) \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Sigui ara $f \in \mathrm{Map}(X,BK)$ i considerem les seves imatges a $\prod_p \mathrm{Map}(X,\widehat{BK}_p)$ i a $\mathrm{Map}(X,K(\widehat{\mathbb{Q}},4))$. Considerem ara F la fibra homotòpica d'aquests dos punts per les fletxes horitzontals, obtenim el següent diagrama de successions exactes llargues d'homotopia:

$$\begin{tikzcd} \cdots\pi_1(\mathrm{Map}(X,BK)) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(F) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & {[X,BK]} \arrow[r, "l"] \arrow[d] & \prod_p[X,\widehat{BK}_p] \arrow[d] \\ \cdots\pi_1(\mathrm{Map}(X,K(\widehat{\mathbb{Q}},4))) \arrow[r] & \pi_0(F) \arrow[r] & {[X,K(\mathbb{Q},4)]} \arrow[r, "r"] & {[X,K(\widehat{\mathbb{Q}},4)]} \end{tikzcd}$$

on l'aplicació r és injectiva: tant $\mathbb{Q}$ com $\widehat{\mathbb{Q}}$ són divisibles, per tant, tenim els isomorfismes $H^4(X;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Hom}(H_4(X);\mathbb{Q})$ i $H^4(X;\widehat{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{Hom}(H_4(X);\widehat{\mathbb{Q}})$, i l'aplicació

$$\mathrm{Hom}(H_4(X);\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_4(X);\widehat{\mathbb{Q}})$$

és injectiva.

Calculem ara el grup fonamental

$$\pi_1(\mathrm{Map}(X,K(\widehat{\mathbb{Q}},4))) \cong \pi_0(\mathrm{Map}(X,K(\widehat{\mathbb{Q}},3))) = 0$$

i per tant, com que la línea inferior és exacta, F és connex i deduïm que l'aplicació l és injectiva.

Suposem ara que tenim una família $\{f_p\colon X \longrightarrow \widehat{BK}_p\}$ complint que existeix $x \in H^4(X;\mathbb{Q})$ tal que $f_p^*(q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p) = x \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p$ per a tot p.

Aquesta igualtat es tradueix en la commutativitat (mòdul homotopia) del quadrat exterior del diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\prod_p f_p"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "x"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \prod_p \widehat{BK}_p \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, "(2)", near start] \arrow[ddr, bend left=60, "\prod_p q\otimes\widehat{\mathbb{Q}}_p"] & \\
BK_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & (\prod_p \widehat{BK}_p)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \prod_p (\widehat{BK}_p)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\simeq"'] \\
K(\mathbb{Q},4) \arrow[r] & K(\widehat{\mathbb{Q}},4) \arrow[r, "r_2"] & K(\prod_p \widehat{\mathbb{Q}}_p, 4)
\end{tikzcd}
$$

El triangle (2) és homotòpament commutatiu per construcció. Els quadrats (3) i (4) són homotòpament commutatius per que les equivalències homotòpiques amb els espais d'Eilenberg-Mac Lane venen determinades per l'aplicació q. Les aplicacions r_1 i r_2 compleixen que, fixat Y un espai, indueixen aplicacions injectives

$$[Y, (\prod_p \widehat{BK}_p)_{\mathbb{Q}}] \to [Y, \prod_p (\widehat{BK}_p)_{\mathbb{Q}}] \quad \text{i} \quad [Y, K(\widehat{\mathbb{Q}},4)] \to [Y, K(\prod_p \widehat{\mathbb{Q}}_p, 4)]$$

respectivament (tant $\mathbb{Q}$ com $\prod_p \widehat{\mathbb{Q}}_p$ són divisibles).

Per tant, això implica que el quadrat (1) és homotòpament commutatiu i la imatge de l'aplicació $\prod_p f_p\colon X \longrightarrow \prod_p \widehat{BK}_p$ a $\mathrm{Map}(X, K(\widehat{\mathbb{Q}},4))$ coincideix amb la imatge de l'aplicació $x\colon X \longrightarrow K(\mathbb{Q},4)$. L'aplicació queda definida al pull-back (4.2) i tenim una aplicació $f\colon X \longrightarrow BK$.

Finalment volem veure que si tenim $f\colon X \longrightarrow BK$, l'aplicació

$$\mathrm{Map}(X, BK)_f \longrightarrow \prod_p \mathrm{Map}(X, \widehat{BK}_p)_{f_p}$$

indueix un isomorfisme a $H^*(\quad; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ per a qualsevol $n > 0$: considerem la fila inferior del pull-back (4.2), i els dos espais són $\mathbb{Z}/n$-acíclics, i per tant la fibra homotòpica també ho serà. Com és un diagrama pull-back, les fibres de les dues fletxes horitzontals són $\mathbb{Z}/n$-equivalents i per tant obtenim que l'aplicació (4.1) és una $\mathbb{Z}/n$-equivalència.

□

4.3 Subgrups parabòlics i colímits homotòpics

Sigui $J \subset S$, considerem P_J els *subgrups parabòlics de* $L(A)$, tal i com els hem definit a la secció 3.3.

Observem que si $I \subset J \subset S$ tenim les inclusions naturals $P_I \subset P_J \subset L$ i aquestes inclusions passen a aplicacions entre espais classificadors.

Considerem ara $\mathcal{C}$ la categoria que té per objectes els subconjunts propis de S (incloent el conjunt buit $\emptyset$) i per morfismes les inclusions.

Lema 4.3.1 ([32])

$$BL = \mathrm{hocolim}_{I \in \mathcal{C}} BP_I$$

A la secció 2.9 hem estudiat els subgrups compactes de L i hem vist que P_I és compacte si i només si la matriu de Cartan $A_I = (a_{s,t})_{s,t \in I}$ és definida positiva. Sigui ara $\mathcal{C}'$ la categoria que té per objectes els subconjunts propis I de S tals que P_I és compacte (incloent $I = \emptyset$, que ens dóna el tor maximal) i per morfismes les inclusions.

Lema 4.3.2 ([32])

$$BL = \mathrm{hocolim}_{I \in \mathcal{C}'} BP_I \ .$$

Observació 4.3.3 En el cas de rang 2, els dos lemes anteriors són equivalents, ja que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ i obtenim tres subgrups parabòlics, que ja hem estudiat a la secció 3.3. Per tant obtenim $BK(a,b)$ com el push-out homotòpic:

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & BH_1 \arrow[d] \\ BH_2 \arrow[r] & BK \end{tikzcd}$$

on φ_1, φ_2, H_1, H_2 són els definits a la secció 3.3, i depenen de a i de b.

Aquest push-out és d'espais sense completar. Com que els espais BT i BH_i són simplement connexos tenim que si considerem el push-out d'espais completats a un primer p fixat:

$$\begin{tikzcd} \widehat{BT}_p \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \widehat{(BH_1)}_p \\ \widehat{(BH_2)}_p & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

obtindrem un espai X que, en general, no és homotop a $\widehat{BK}_p$, ja que no té per que ser complet. Tot i això, el que sí que tenim és una aplicació $X \longrightarrow \widehat{BK}_p$ que és una equivalència mòdul p, per tant direm que el push-out (4.3) ens dóna BK mòdul compleció.

4.4 Obstruccions d'un push-out homotòpic

Per a estudiar les aplicacions entre els grups de Kac-Moody de rang 2 utilitzarem el colímit homotòpic que hem definit a l'apartat anterior.

Sigui $F: \mathcal{C} \longrightarrow Top$ un functor d'una categoria $\mathcal{C}$ petita a la categoria d'espais topològics. A.K. Bousfield i D.M. Kan defineixen a [9] l'espai hocolim$F$ i posteriorment Z. Wojtkowiak a [47] va estudiar els espais:

$$\mathrm{Map}(\mathrm{hocolim}F, Z) .$$

A l'estudi considera els functors $\Pi_n: \mathcal{C} \longrightarrow Gr$ com el functor contravariant que a cada objecte c de $\mathcal{C}$ i a cada aplicació contínua $f_c: F(C) \longrightarrow Z$ li assigna el n-èssim grup d'homotopia $\pi_n(\mathrm{Map}(F(c), Z), f_c)$.

En el mateix article defineix l'homologia d'una categoria $\mathcal{C}$ amb coeficients a un functor F: $H^*(\mathcal{C}; F)$ i demostra la següent proposició:

Proposició 4.4.1 ([47]) *Suposem que tenim dues aplicacions $f, g: \mathrm{hocolim}F \longrightarrow Z$ tals que per a cada c objecte de $\mathcal{C}$, f_c és homotopa a g_c. L'obstrucció per a construir una família compatible d'homotopies entre f_c i g_c viu a $H^1(\mathcal{C}; \Pi_1)$. Les obstruccions per a construir una homotopia entre f i g viuen als grups $H^n(\mathcal{C}; \Pi_n)$ i al conjunt $H^1(\mathcal{C}; \Pi_1)$.*

En el nostre cas l'espai BK es construeix a partir d'un push-out homotòpic, per tant, quan considerem Z un espais i el functor $\mathrm{Map}(-, Z)$ i calculem els grups d'homotopia, tenim que pren valors a la categoria:

$$1 \xrightarrow{f} 0 \xleftarrow{g} 2 \ .$$

Considerem Π un functor $\Pi: \mathcal{C} \longrightarrow Ab$. Com que a la nostra categoria no podem composar dues aplicacions (sense tenir en compte la composició amb la identitat) obtenim directament que la cohomologia $H^*(\mathcal{C}; \Pi) = 0$ per a $* \geq 2$ i per tant, per a aplicar la proposició 4.4.1 només cal comprovar:

$$H^1(\mathcal{C}; \Pi_1) = 0 .$$

Si ara estudiem la definició d'aquest grup, obtenim que hi intervenen els grups $\pi_1(\mathrm{Map}(F(c), Z), f_c)$, però com que la categoria és un push-out homotòpic, veiem que $\underleftarrow{\lim}^1 \pi_1(\mathrm{Map}(F(c), Z), f_c)$ és un quocient de $\pi_1(\mathrm{Map}(F(0), Z), f_0)$. La majoria de les vegades $\mathrm{Map}(F(0), Z)_{f_0}$ serà simplement connex i per tant no hi haurà obstruccions a estendre l'homotopia.

4.5 Aplicacions de BH_i

Abans d'estudiar les aplicacions entre els grups de Kac-Moody de rang dos necessitem veure com són les aplicacions entre els parabòlics.

Considerem doncs BH_i, que recordem que poden ser $B(S^3 \times S^1)$ o bé $BU(2)$. En els dos casos el grup de Weyl és $W_i \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i l'acció al tor maximal ve donada per les matrius $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivament. Com que estem en el cas de grups de Lie compactes recordarem els resultats següents, que es poden trobar a [1] i a [26]:

Teorema 4.5.1 ([1]) *Siguin G i G' grups de Lie compactes, T i T' els tors maximals, NT i NT' els normalitzadors dels tors maximals i W, W' els respectius grups de Weyl. Fixada $f\colon BG \longrightarrow BG'$, existeix una aplicació $\phi\colon BT \longrightarrow BT'$ tal que fa el següent diagrama homotòpament commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "Bi"'] & BT' \arrow[d, "Bi'"] \\ BG \arrow[r, "f"'] & BG' \end{tikzcd}$$

A més, hi ha un morfisme de grups $\alpha\colon W \longrightarrow W'$ tal que $\phi w = \alpha(w)\phi$. Una aplicació ϕ complint aquesta condició direm que és admissible.

En el nostre cas el càlcul de les aplicacions admissibles és molt senzill, ja que $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i per tant, $\alpha = \mathrm{Id}$. D'aquí obtenim el següent lema:

Lema 4.5.2 *Les aplicacions admissibles $\phi\colon BT \longrightarrow BT$, on BT és el tor maximal de $B(S^3 \times S^1)$, venen donades per les aplicacions diagonals.*

En els cas de $BU(2)$, les aplicacions admissibles venen donades per les matrius de la forma:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

□

La qüestió que hem de resoldre ara és, fixada una aplicació admissible $\phi\colon BT \longrightarrow BT'$, a quantes aplicacions diferents de $BG \longrightarrow BG'$ estén?

En el cas $B(S^3 \times S^1)$, la solució ens la dóna el treball de Rector [40], on ens diu que una aplicació de $BS^1 \longrightarrow BS^1$ s'estén a BS^3 si i només si és de grau senar, i a més, ho fa de manera única. Per tant tenim:

Proposició 4.5.3 *Les aplicacions admissibles de BT, el tor maximal de $B(S^3 \times S^1)$, que són de la forma*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

estenen a una aplicació de $B(S^3 \times S^1)$ si i només si x és senar. A més, en aquest cas, ho fa de manera única. □

En el cas de $U(2)$, hem d'utilitzar resultats de Jackowski, McClure i Oliver [26], per a respondre a aquesta pregunta:

Sigui $\phi\colon BT \longrightarrow BT'$ una aplicació admissible. Definim $[BG, BG']_\phi$ les classes d'homotopia d'aplicacions de BG a BG' que estenen l'aplicació ϕ.

Tenim una correspondència bijectiva entre els conjunts:

$$[BG, BG']_\phi \cong \prod_{p \,\big|\, |W|} [BG, \widehat{BG'}_p]_\phi \,.$$

Això ens diu que en el nostre cas només cal estudiar el primer $p = 2$.

Definim una *representació $\mathcal{R}_p$-invariant* d'un grup G connex a $U(n)$ com una representació $\rho\colon N_p(T) \longrightarrow U(n)$ complint que per a tot g i $g' \in N_p(T)$ conjugats per G, les seves imatges han de ser conjugades per G'.

Aquesta definició és més simple que la que trobem a [26], però equivalent en el cas G connex i $G' = U(n)$.

A la proposició 1.13 de [26] tenim que si $p^2 \nmid |W|$ qualsevol aplicació $\mathcal{R}_p$-invariant estén a una aplicació de $BG \longrightarrow \widehat{BG'}_p$.

En el nostre cas, tenim que només ens hem de preocupar per a $p = 2$ i:

$$N_2(T) = \{D_{\lambda_1,\lambda_2}, A_{\mu_1,\mu_2}\}_{\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}} \ ,$$

on

$$D_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A_{\mu_1,\mu_2} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\mu_1} \\ e^{i\mu_2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Finalment també tenim que en el nostre cas $N_2(T)$ és un grup 2-toral, i per tant, tota aplicació $f\colon BU(2) \longrightarrow BU(2)$, restringida a $N_2(T)$ és una representació, que a més, per [26], podem considerar que és $\mathcal{R}_2$-invariant.

Amb tots aquests resultats hem reduït el problema d'estudiar l'espai d'aplicacions $[BU(2), BU(2)]$ a estudiar les aplicacions admissibles del tor maximal que estenen a una representació $\mathcal{R}_p$-invariant. Sigui doncs $\phi = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ una aplicació admissible. Tenim doncs les imatges fixades:

$$\rho(D_{\lambda_1,\lambda_2}) = D_{\lambda_1 x + \lambda_2 y, \lambda_1 y + \lambda_2 x} \,.$$

Observem a més la igualtat

$$A_{0,0} A_{\mu_1,\mu_2} = D_{\mu_1,\mu_2} \,.$$

Per tant, només cal fixar la imatge de $A_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La seva imatge haurà de ser una matriu d'ordre 2, i a més, observem que

$$A_{0,0} D_{\lambda_1,\lambda_2} A_{0,0} = D_{\lambda_2,\lambda_1} \,.$$

Siguin doncs λ_1 i λ_2 reals tals que $e^{i\lambda_1} \neq e^{i\lambda_2}$ i a més $e^{i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} \neq e^{i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)}$ Tenim que $\rho(A_{0,0})$ haurà de ser una matriu tal que elevada al quadrat sigui la identitat i que conjugui una matriu diagonal a una altra matriu diagonal, aquesta haurà de ser $A_{0,0}$. Per tant, més concretament, tenim que l'aplicació que hem definit és la següent:

$$\begin{aligned} \rho(D_{\lambda_1,\lambda_2}) = &\quad D_{\lambda_1 x + \lambda_2 y, \lambda_1 y + \lambda_2 x} \, , \\ \rho(A_{\lambda_1,\lambda_2}) = &\quad A_{\lambda_1 x + \lambda_2 y, \lambda_1 y + \lambda_2 x} \, . \end{aligned}$$

Per a continuar ens cal estudiar les possibles conjugacions per elements de $U(2)$ entre els elements de $N_2(T)$:

Lema 4.5.4 *Les possibles conjugacions d'elements de $N_2(T)$ per elements d'$U(2)$ són:*

- D_{λ_1,λ_2} *és conjugada de* D_{λ_2,λ_1} *i de cap altre si* $e^{i\lambda_1} \neq e^{i(\lambda_2+\pi)}$.
- A_{μ_1,μ_2} *és conjugada de* A_{μ_2,μ_1} *i de cap altre si* $e^{i\mu_1} \neq e^{i\mu_2}$.
- $D_{\lambda_1,\lambda_1+\pi}$ *és conjugada de* $A_{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\pi}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2+\pi}{2}}$.

Demostració: Si volem obtenir una matriu diagonal conjugant una altra matriu diagonal l'únic que podem fer és permutar els valors propis, i en el nostre cas, la matriu de permutació és la matriu $A_{0,0}$, i per tant, unitària.

Si volem passar per conjugació d'una matriu de la forma D_{λ_1,λ_2} a una matriu de la forma A_{μ_1,μ_2}, aquesta haurà de complir que la seva traça sigui zero, i per tant, $\lambda_2 = \lambda_1 + \pi$, i conjugant per la matriu

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Obtenim $A_{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\pi}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2+\pi}{2}}$.

Finalment només cal considerar les conjugacions de matrius del tipus A_{μ_1,μ_2} que tornen a donar matrius del tipus A. Tan sols observem que només podem conjugar per matrius de $U(2)$, i per tant obtenim el resultat de l'enunciat.

□

Ara només cal considerar les conjugacions del lema per tal de buscar restriccions entre els coeficients x i y de la matriu ϕ, i l'única restricció l'obtenim quan imposem que la imatge $\rho(D_{\lambda_1,\lambda_1+\pi}) = D_{\lambda_1(x+y)+y\pi,\lambda_1(x+y)+x\pi}$ sigui conjugada de la $\rho(A_{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\pi}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2+\pi}{2}})$ i per tant tingui traça zero, d'on obtenim que $x+y$ ha de ser senar. Tot això es pot resumir en el següent resultat:

Proposició 4.5.5 *Les aplicacions de $BU(2)$ a $BU(2)$ estan classificades per les matrius admissibles* $\phi = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, *amb x i y de paritat diferent.* □

4.6 Aproximació mòdul 2 de $B(S^3 \times S^1)$ i $BU(2)$

Considerem els resultats de [22] on ens dóna la descomposició de $G' = BSO(3)$ en subgrups 2-torals. Aquest es pot pensar com el colímit homotòpic d'un functor contravariant d'una categoria amb dos objectes $\{0,1\}$, amb grup d'automorfismes de l'objecte 1 el simètric de tres elements i tres morfismes entre 1 i 0, de manera que l'acció de Σ_3 permuta els tres morfismes:

$$0 \overset{\Sigma_3/\mathbb{Z}/2}{\Rrightarrow} 1 \circlearrowright \Sigma_3$$

Ara apliquem el functor contravariant $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow Top$ de tal manera que $F(1) = B(C_2 \times C_2)$, $F(0) = BO(2)$ i l'acció del grup simètric de tres elements ve donada per l'isomorfisme $N(C_2 \times C_2)/(C_2 \times C_2) \cong \Sigma_3$.

El mateix article [22] diu que el mateix functor es pot construir per a aproximar altres grups G sempre i quan tinguem un morfisme exhaustiu $q\colon G \longrightarrow G'$ i considerem $F(1) = q^{-1}(C_2 \times C_2)$ i $F(0) = q^{-1}(O(2))$.

Si considerem $G = S^3 \times S^1$ o bé $G = U(2)$ aquest morfisme exhaustiu existeix i a més els grups $q^{-1}(C_2 \times C_2)$ i $q^{-1}(O(2))$ són 2-torals, obtenint així una descomposició homotòpica de $S^3 \times S^1$ i de $U(2)$ en subgrups 2-torals.

Més concretament, aquests grups dos torals són, en el cas de $S^3 \times S^1$:

$$P_1 = P_1' \times S^1 \text{ on } P_1' = \left\{ \pm\mathrm{Id}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{4.4}$$

i

$$P_2 = N_{S^3}(S^1) \times S^1 \,. \tag{4.5}$$

En el cas $U(2)$ podem considerar $S^1 \subset U(2)$ el seu centre i tenim l'extensió:

$$S^1 \rightarrowtail U(2) \twoheadrightarrow SO(3)\,.$$

Si considerem $C_2 \times C_2 \in SO(3)$ obtenim l'extensió:

$$S^1 \rightarrowtail P_1 \twoheadrightarrow C_2 \times C_2$$

i tenim que P_1 està format per les matrius:

$$P_1 = \left\{ \lambda\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in S^1} . \tag{4.6}$$

El càlcul de P_2 ens dóna el normalitzador del tor maximal:

$$P_2 = N_{U(2)}(T)\,. \tag{4.7}$$

En tots els casos, els grups són 2-torals, per tant, es poden escriure com una extensió:

$$T \longrightarrow P \longrightarrow \pi$$

amb T un tor i π un 2-grup finit. Considerem T_{2^n} el subgrup del tor format pels elements d'ordre un divisor de 2^n i notem per P^n el subgrup de P:

$$T_{2^n} \longrightarrow P^n \longrightarrow \pi \,. \tag{4.8}$$

Lema 4.6.1 *Per a $n \geq 4$, els centralitzadors següents són:*

$$\begin{array}{lcl} C_{S^3\times S^1}(P_1^n) & = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S^1 \,. \\ C_{S^3\times S^1}(P_2^n) & = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S^1 \,. \\ C_{U(2)}(P_1^n) & = & S^1 \,. \\ C_{U(2)}(P_2^n) & = & S^1 \,. \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ: Suposem que un element de $S^3 \times S^1$ centralitza el subgrup P_1^n, definit entre (4.4) i (4.8). La condició $n \geq 4$ la utilitzem per a assegurar que les matrius que estem fent servir són a P_1^n.

Com que és un producte, n'hi ha prou amb calcular $C_{P_1'^n}(S^3)$ i per a fer-ho, podem considerar la notació matricial de l'isomorfisme $S^3 \cong SU_2$. Imposem doncs:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix}$$

i obtenim que $y = 0$. Si ara imposem que:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \overline{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \overline{x} \end{pmatrix} .$$

obtenim que $x = \overline{x}$ i per tant $x = \pm 1$. Amb tot això tenim que el centralitzador $C_{S^3\times S^1}(P_1^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S^1$. A més, aquest subgrup és el centre de $S^3 \times S^1$, per tant, també tenim:

$$C_{S^3\times S^1}(P_2^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S^1 \,.$$

Fem ara el cas $U(2)$. Utilitzem els P_1^n definits entre (4.6) i (4.8). Imposem la relació de commutació:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

i obtenim que $y = 0$ i $z = 0$. Afegim ara:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} ,$$

i obtenim que $x = t$. En aquest cas també ens hem reduït al centre de $U(2)$ i obtenim el resultat que necessitem. $\square$

També haurem d'estudiar els límits superiors de functors aplicats sobre aquesta categoria. Això va ser estudiat per J. Aguadé a [3] i posteriorment per J.M. Møller a [35] i [36]. Utilitzarem el següent resultat que es pot trobar a aquesta última referència:

Sigui G un grup i H un subgrup. Suposem que tenim la categoria següent $\mathbb{I} = \mathbb{I}(G, H)$, amb dos objectes, 0 i 1, i les aplicacions següents:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop left, "N_G(H)/H"] \arrow[r, "G/H"] & 1 \arrow[loop right, "G"]
\end{tikzcd}
$$

Lema 4.6.2 ([36]) *Sigui R un cos o l'anell $\mathbb{Z}_{(p)}$. Considerem Π un functor de $\mathbb{I}$ a la categoria de R-mòduls complint:*

- *$|N_G(H)/H|$ és invertible a l'anell R.*
- *El p-subgrup de Sylow S_p de G és cíclic d'ordre p i $|G : S_p|$ és invertible a R.*
- *$N_{N_G(H)}(S_p) = N_G(S_p)$.*

Llavors tenim la successió exacta:

$$0 \to \lim_{\overleftarrow{\mathbb{I}}}{}^0 \Pi \to \Pi(0)^{N_G(H)/H} \to \Pi(1)^{N_G(H)}/\Pi(1)^G \longrightarrow \lim_{\overleftarrow{\mathbb{I}}}{}^1 \Pi \to 0\,,$$

i els límits superiors $\lim_{\overleftarrow{\mathbb{I}(G,H)}}{}^j \Pi$ són zero per a $j > 1$.

En el nostre cas $G = \Sigma_3$, H és una transposició $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i el nostre anell és $\mathbb{Z}_{(2)}$. El normalitzador de H en G és el mateix H i per tant $|N_{\Sigma_3}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})| = 1$ i és invertible a $\mathbb{Z}_{(2)}$. El 2-subgrup de Sylow és Σ_3, que és cíclic d'ordre 2 i $|\Sigma_3 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 3$, que és invertible a $\mathbb{Z}_{(2)}$. A més $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = N_{N_{\Sigma_3}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}(S_p) = N_{\Sigma_3}(S_p)$ i podem aplicar el lema 4.6.2. Per tant $\lim_{\overleftarrow{\mathbb{I}(\Sigma_3,\mathbb{Z}/2)}}{}^1 \Pi$ és un quocient de $\Pi(1)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}/\Pi(1)^{\Sigma_3}$.

Per tant, el problema queda reduït a calcular $\Pi(1)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}/\Pi(1)^{\Sigma_3}$, que en el cas que ens fa falta és evident:

Lema 4.6.3 *Si l'acció de Σ_3 sobre Π és trivial,*

$$\Pi(1)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \Big/ \Pi(1)^{\Sigma_3} = 0\,.$$

$\square$

4.7 Cohomologia i acció de l'Àlgebra d'Steenrod

Recordem que BK es pot escriure com el push-out [5]:

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & BH_1 \arrow[d] \\ BH_2 \arrow[r] & BK \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Recordem també qui són BH_i i qui són φ_1 i φ_2. Considerem BT_1 i BT_2 les inclusions naturals dels tors maximals a BH_1 i BH_2. Expressem φ_j com aplicacions de $BT \longrightarrow BT_j$ per tal de poder treballar en forma matricial. Tenim les expressions següents:

$a \equiv 0\,(2)$	$BH_2 = B(S^3 \times S^1)$	$\varphi_2 = \begin{pmatrix} -a/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$a \equiv 1\,(2)$	$BH_2 = BU(2)$	$\varphi_2 = \begin{pmatrix} (1-a)/2 & 1 \\ (1+a)/2 & -1 \end{pmatrix}$
$b \equiv 0\,(2)$	$BH_1 = B(S^3 \times S^1)$	$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$b \equiv 1\,(2)$	$BH_1 = BU(2)$	$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & (1-b)/2 \\ -1 & (1+b)/2 \end{pmatrix}$

Considerem p primer senar i $H^*(X)$ voldrà dir la cohomologia amb coeficients a $\mathbb{F}_p$ mentre no es digui el contrari.

Recordem que $K(a,b)$ té un tor maximal T_K de dimensió 2, un normalitzador N i un grup de Weyl $W \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.

Considerem $H^*(BT) = \mathbb{F}_p[u,v]$, on u i v tenen grau 2. Fixem també les notacions $d = \mathrm{mcd}(a,b)$, $a' = a/d$ i $b' = b/d$. Utilitzarem els subíndexs per a dir el grau de cada generador.

Lema 4.7.1 ([5],[32]) *Els invariants de $\mathbb{F}_p[u,v]$ per l'acció del grup W és una àlgebra de polinomis $\mathbb{F}_p[x_4, y_{2k}]$ amb generadors de graus 4 i $2k$ respectivament, amb*

$$x_4 = \begin{cases} v^2 & \text{si } p \mid a, \\ u^2 & \text{si } p \mid b \text{ i } p \nmid a, \\ a'u^2 - a'b'duv + b'v^2 & \text{si } p \nmid ab. \end{cases}$$

On $k = p$ si $p \mid (ab-4)$, $k = 2p$ si p divideix a o b, però no a tots dos o bé k és l'ordre d'una arrel del polinomi:

$$x^2 - (ab-2)x + 1$$

en el seu cos de descomposició de característica p.

Estudiem ara l'acció de l'Àlgebra d'Steenrod per a cada primer p.

Per a $p = 2$ l'estudi el podem trobar a [5] i és:

Proposició 4.7.2 ([5]) *La cohomologia mòdul 2 de l'espai classificador del grup de Kac-Moody $BK(a, b)$ és:*

- $\mathbb{F}_2[x_4, y_4] \otimes E[z_5]$ *si a i b són parells i hi ha un Bockstein superior β_r tal que $\beta_r(y_4) = z_5$, on r és el màxim enter tal que $2^r \mid \mathrm{mcd}(a, b)$.*
- $\mathbb{F}_2[x_4, y_8] \otimes E[z_9]$ *si a i b són de paritat diferent i en aquest cas el Bockstein superior compleix $\beta_r(y_8) = z_9$, amb r el màxim enter tal que $2^r \mid (ab - 2)$.*
- $\mathbb{F}_2[x_4, y_6] \otimes E[z_7]$ *si a i b són senars i tenim $\beta_r(y_6) = z_7$, on r és el màxim enter tal que $2^r \mid (ab - 1)$.*

En els tres casos, si $r = 1$ tenim que $z = \mathrm{Sq}^1(y)$.

Estudiem ara el cas p senar. Recordem que la cohomologia és:

Lema 4.7.3 ([5],[32]) *La cohomologia a coeficients $\mathbb{F}_p$ de l'espai classificador BK és $\mathbb{F}_p[x_4, y_{2k}] \otimes E[z_{2k+1}]$ amb $\beta_r(y_{2k}) = z_{2k+1}$, on els enters r i k depenen de a, b i p i coincideixen amb els de la definició 3.2.4.*

Volem estudiar l'acció de l'àlgebra d'Steenrod sobre aquests generadors i per això utilitzarem l'expressió de x_4 en funció dels generadors de la cohomologia del tor maximal u i v. Per tal de simplificar la notació, utilitzarem x, y, z, sense els subíndexs.

Per a estudiar l'acció haurem de distingir les possibilitats per a a i b:

- **Cas 1:** a i b són múltiples de p: en aquest cas ens quedaran les matrius:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  En aquest cas els generadors són: $x = u^2$ i $y = v^2$ i l'acció de l'àlgebra d'Steenrod és:

$$P^1(x) = 2x^{\frac{p+1}{2}} \qquad \text{i} \qquad P^1(y) = 2y^{\frac{p+1}{2}}.$$

- **Cas 2:** a no és múltiple de p i b sí: Tindrem les matrius:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

I obtenim que $x = u^2$, $k = 2p$ i $y = (u^{p-1}v - v^p)^2$, amb l'acció de l'Àlgebra de Steenrod:

$$P^1(x) = 2x^{\frac{p+1}{2}} \ \text{ i } \ P^1(y) = -2x^{\frac{p-1}{2}} y \,. \tag{4.10}$$

- **Cas 3:** Quan $ab \equiv 4$ mòdul p:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ i } \ w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{b} & -1 \end{pmatrix} .$$

I veiem que $x = (u - \frac{b}{2}v)^2$, per tant, fent el canvi de variable

$$\tilde{u} = u - \frac{b}{2}v \ \text{ i } \ \tilde{v} = v \,, \tag{4.11}$$

tenim que les matrius del grup de Weyl ens queden:

$$\tilde{w_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ i } \ \tilde{w_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} .$$

I calculant els invariants en aquests nous generadors ens queden:

$$x = \tilde{u}^2 \ \text{ i } \ y = \tilde{u}^{p-1}v - \tilde{v}^p \,.$$

A més, l'acció de l'àlgebra de Steenrod sobre aquests generadors és:

$$P^1x = 2x^{\frac{p+1}{2}} \ \text{ i } \ P^1y = x^{\frac{p-1}{2}} y \,.$$

- **Cas 4:** Cas més general, quan p no divideix $ab(ab-4)$. En aquest cas podem considerar:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ i } \ w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} .$$

I el generador:

$$x = au^2 - abuv + bv^2 \,.$$

Si calculem l'acció de P^1 ens queda:

$$P^1(x) = 2au^{p+1} - ab(uv^p + u^pv) + 2bv^{p+1} \,.$$

I aplicant el criteri del Jacobià [8] tenim que x i $P^1(x)$ són algebraicament independents.

Per tant, el que veiem és que hem de distingir dos casos diferenciats:

- Quan p divideix $ab(ab-4)$ llavors existeix un generador x de grau 4 tal que $P^1(x) = 2x^{\frac{p+1}{2}}$.

- Quan p no divideix $ab(ab-4)$ llavors existeix un generador x de grau 4 tal que x i $P^1(x)$ són algebraicament independents.