Capítol 5

Aplicacions de BT a BK

Fixem a i b enters positius i la notació $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, $a = a'd$ i $b = b'd$. Considerem la inclusió de BT a BK i el generador q de $H^4(BK; \mathbb{Z})$ que es pot escriure en funció dels generadors de grau 2 de la cohomologia del tor maximal com:

$$q = a'u^2 - a'b'duv + b'v^2 \; . \tag{5.1}$$

Es pot pensar com una forma quadràtica en dues variables i imposant la condició que $ab > 4$ obtenim que aquesta forma quadràtica és hiperbòlica.

Per tal de poder continuar necessitem alguns resultats sobre formes quadràtiques. Aquests resultats utilitzaran equivalències enteres i p-àdiques, i precisament la relació entre aquestes ens donarà l'existència d'aplicacions de BT a BK que no provenen de representacions.

5.1 Gènere d'una forma quadràtica

A aquest apartat recordarem els resultats de [13] i [12] sobre formes quadràtiques racionals i enteres.

A una forma quadràtica $q = au^2 + buv + cv^2$ se li assigna el seu discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

En el nostre cas les formes quadràtiques que utilitzarem tenen discriminant positiu, anomenades *indefinides* i per tant ens reduirem a estudiar aquest cas.

Suposem que tenim $q = au^2 + buv + cv^2$ i $q' = a'u^2 + b'uv + c'v^2$ dues formes quadràtiques sobre $\mathbb{Z}$, amb discriminants Δ i Δ'.

Diem que dues formes quadràtiques són $\mathbb{Z}$-*equivalents* si existeix un canvi de base a $\mathbb{Z}$ que transforma q en q'. Si utilitzem les notacions matricials aquesta condició és equivalent a que existeixi una matriu $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ complint que:

$$M^T q M = q' \; .$$

Diem que una forma quadràtica $q = au^2 + buv + cv^2$ és *reduïda* si es compleix:

$$0 < b < \sqrt{\Delta} \quad \text{i} \quad \sqrt{\Delta} - b < 2|a| < \sqrt{\Delta} + b\,.$$

Proposició 5.1.1 ([12])

- *El nombre de formes quadràtiques reduïdes de discriminant Δ és finit.*
- *Tota forma indefinida és $\mathbb{Z}$-equivalent a una forma reduïda amb el mateix discriminant.*

Fixat un discriminant Δ, les formes quadràtiques reduïdes que es poden escriure com $q = u^2 + buv + cv^2$ s'anomenen *formes principals.*

Considerem a partir d'ara les classes de formes quadràtiques de discriminant Δ fixat, amb la relació de $\mathbb{Z}$-equivalència.

Definició 5.1.2 *Direm que dues formes quadràtiques q i q' amb coeficients enters pertanyen al mateix* gènere *si són equivalents sobre $\mathbb{R}$ i sobre $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ per a tot p primer.*

Ràpidament es dedueix que dues formes quadràtiques del mateix gènere tenen el mateix discriminant: el número Δ'/Δ és $\det(M_p)^2$ per a tot p i ha de ser invertible, per tant $\Delta'/\Delta = \pm 1$. Finalment imposant que siguin equivalents sobre $\mathbb{R}$, obtenim que $\Delta = \Delta'$.

El fet que dues formes quadràtiques pertanyin al mateix gènere no implica que siguin equivalents sobre $\mathbb{Z}$: pot passar que una forma quadràtica q sigui $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-equivalent a una altra q' per a tot p i sobre $\mathbb{R}$, però que no siguin $\mathbb{Z}$-equivalents. En aquest cas direm que el gènere de la forma quadràtica q té més d'una *classe.*

Per tant, si fixem un discriminant Δ, les formes quadràtiques que tenen aquest discriminant s'agrupen per $\mathbb{Z}$-equivalència, dins de cada $\mathbb{Z}$-equivalència per gèneres, i dins de cada gènere, per classes. Aquest problema ja va ser estudiat per Gauss, a *Disquisitiones Arithmeticae*, on va donar una estructura de grup abelià G a les classes de $\mathbb{Z}$-equivalència de les formes quadràtiques de discriminant fixat. El gènere no és res més que classes laterals dins d'aquest grup abelià i per això tenim que el número de classes diferents que hi ha dins de cada gènere depèn únicament del discriminant de la forma quadràtica. A més, també sabem que el quocient del grup G per la relació d'equivalència del gènere té cardinal una potència de 2.

Existeixen taules que, a partir del discriminant, donen el número de classes de $\mathbb{Z}$-equivalència que hi ha. Si trobem un discriminant Δ tal que un nombre de classes que no és potència de 2, obtindrem que els gèneres de cada forma quadràtica amb aquest discriminant tenen més d'una classe, o sigui, que existeixen altres formes quadràtiques que són $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-equivalents a aquesta per a tot p, però que no són $\mathbb{Z}$-equivalents.

5.2 Automorfs d'una forma quadràtica sobre $\mathbb{Z}$

Recordem uns quants resultats de formes quadràtiques, que es poden trobar al llibre de D.A. Buell [12]:

Definim un automorf d'una forma quadràtica donada $au^2 + buv + cv^2$ com una aplicació lineal de canvi de base sobre $\mathbb{Z}$ de determinant 1 que la deixa invariant, o sigui, una matriu $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ que compleix l'equació $M^T Q M = Q$.

Considerarem formes quadràtiques $au^2 + buv + cv^2$ i el seu discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Teorema 5.2.1 ([12]) *Hi ha una bijecció entre els automorfs de la forma quadràtica $au^2 + buv + cv^2$ i les solucions de l'equació de Pell:*

$$X^2 - \Delta Y^2 = 4 \quad \text{on } \Delta = b^2 - 4ac\,.$$

Aquesta bijecció, si tenim un automorf, ve donada per:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto (\alpha + \delta, \gamma/a)\,.$$

I si tenim una solució de l'equació de Pell:

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x-by}{2} & -cy \\ ay & \frac{x+by}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Per tant el problema queda ara en trobar les solucions de l'equació de Pell.

Aquest problema està resolt en el cas de discriminant positiu, $\Delta > 0$ que correspon a les formes quadràtiques indefinides.

Teorema 5.2.2 ([12]) *Sigui (X, Y) una solució entera, amb $X, Y > 0$ i tal que $X + Y\sqrt{\Delta}$ sigui mínima dins de les solucions enteres positives.*

Totes les parelles (X_n, Y_n) generades per

$$\left(\frac{X_n + Y_n\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 = \left(\frac{X + Y\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1\,, \tag{5.2}$$

són solució de l'equació de Pell. A més, totes les solucions de l'equació de Pell amb coeficients enters positius es poden obtenir de (5.2).

Observació 5.2.3 Cada solució positiva de l'equació de Pell ens dóna 4 automorfs, corresponents a les solucions $(\pm X, \pm Y)$ segons la correspondència d'abans.

Observació 5.2.4 Si Δ no és lliure de quadrats a $\mathbb{Z}$, aquesta recurrència donaria varies solucions per a la parella (X_n, Y_n). Tot i això, només una és solució de l'equació de Pell i a més correspon amb el següent:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{X+Y\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n &= \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^{n-i}Y^i(\sqrt{\Delta})^i\right) = \\ &= \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2i}X^{n-2i}Y^{2i}\Delta^i\right) + \\ &+ \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\binom{n}{2i-1}X^{n-2i+1}Y^{2i-1}\Delta^{i-1}\right)\sqrt{\Delta}\,,\end{aligned}$$

obtenint que:

$$\begin{aligned}X_n = &\ \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2i}X^{n-2i}Y^{2i}\Delta^i\right)\\ Y_n = &\ \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\binom{n}{2i-1}X^{n-2i+1}Y^{2i-1}\Delta^{i-1}\right)\,.\end{aligned}$$

Siguin a i b enters positius tals que $ab \geq 4$. Considerem les notacions següents: $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, $a = a'd$ i $b = b'd$.

Considerem la forma quadràtica: $a'u^2 + a'b'duv + b'v^2$, amb discriminant $\Delta = a'b'(a'b'd^2 - 4) > 0$.

Lema 5.2.5 *Si $a = b$, el grup d'automorfs està generat per les matrius:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Si $a \neq b$, el grup d'automorfs està generat per:

$$\left\langle \begin{pmatrix} ab-1 & -b \\ a & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Demostració: Observem primer que demanar una solució de l'equació de Pell (x, y) de mòdul mínim coincideix amb demanar que x o y siguin mínimes i utilitzant la correspondència amb els automorfs obtenim que és equivalent a que el coeficient γ sigui mínim.

Volem un automorf, per tant, una matriu de determinant 1 que compleixi l'equació:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -\frac{a'b'd}{2} \\ -\frac{a'b'd}{2} & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -\frac{a'b'd}{2} \\ -\frac{a'b'd}{2} & b' \end{pmatrix} .$$

Aplicant que el determinant ha de ser 1, l'equació queda:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -\frac{a'b'd}{2} \\ -\frac{a'b'd}{2} & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -\frac{a'b'd}{2} \\ -\frac{a'b'd}{2} & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} .$$

O sigui les equacions:

$$\alpha - b'd\gamma - \delta = 0 \quad \text{i} \quad a'\beta + b'\gamma = 0 \, .$$

Com que a' i b' són coprimers obtenim que β és múltiple de a' i per tant podem escriure $\beta = b'\beta'$, quedant que la matriu de l'automorf té la forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'b'd\beta' + \delta & b'\beta' \\ -a'\beta' & \delta \end{pmatrix} .$$

Imposem ara que el determinant sigui 1, obtenim l'equació:

$$1 = \delta^2 - a'b'd\beta'\delta + a'b'(\beta')^2 \, .$$

I hem d'estudiar els punts de coordenades enteres d'aquesta hipèrbola, amb eixos δ i β'. Volem que $\gamma = -b'\beta'$ sigui mínima i per tant volem β' negativa i de mòdul mínim.

Observem que els punts següents són de la hipèrbola: $\pm(1, d)$ i $\pm(0, 1/\sqrt{a'b'})$. Un estudi d'aquesta hipèrbola ens fa veure que el punt amb coordenada entera β' més petita en mòdul i negativa és $(0, -1)$ si $a' = b' = 1$ i $(-1, -d')$ altrament: en efecte, aquesta hipèrbola té dues branques separades per la recta:

$$\delta = \frac{a'b'd}{2}\beta' \, .$$

Per tant, coneixent els punts per on passa, ja podem fer un dibuix aproximat. Ara veiem que una de les branques té els punts amb coordenades enteres i negatives $(0, -1)$ si $a' = b' = 1$ i $(-1, -d)$. El cas $a' = b' = 1$ ja queda resolt.

Només cal considerar ara el cas $a' \neq b'$. Suposem que hi ha un punt $(r, -s)$ tal que té coordenades enteres i que $0 > s > d$. Llavors la recta horitzontal que passa per aquest punt, tallarà la branca que conté el $(-1, -d)$ en un punt de coordenades enteres (el coeficient en δ^2 de la hipèrbola és 1) i per tant ja tenim que el punt més petit és el $(-1, -d)$.

En el primer cas obtenim que si $a = b$ el punt de coordenades enteres més petit ens dóna la matriu:

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

I en el segon cas que si $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} ab-1 & -b \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

Observem a més que la recurrència de les solucions de l'equació de Pell coincideix amb la del producte de matrius i per tant tenim que en els dos casos les solucions positives estan generades per aquestes matrius.

Finalment cal veure que passa quan canviem de signe les (X, Y) que són solució de l'equació de Pell, i obtenim que es canvia de signe les matrius que ja tenim o bé ens dóna la seva inversa.

$\square$

Corol·lari 5.2.6 *Les aplicacions lineals de $GL_2(\mathbb{Z})$ que deixen invariant la forma quadràtica $b'u^2 + a'b'duv + a'v^2$ són les generades per les matrius:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

si $a' = b' = 1$ i per tant $a = b = d$. Si $a \neq b$ són les generades per:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab-1 & -b \\ a & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Demostració: Si M deixa invariant la forma quadràtica, aplicant determinats a la igualtat $M^T QM = Q$ obtenim que M té determinant ± 1. Al lema anterior ja hem trobat totes les de determinant 1, per tant, n'hi ha prou amb trobar-ne una de determinant -1, i això és el que hi ha de més.

$\square$

Corol·lari 5.2.7 *El grup de Weyl és un subgrup d'índex 4 del subgrup de $GL_2(\mathbb{Z})$ que deixa invariant la forma quadràtica si $a = b$ i si $a \neq b$ és un subgrup normal d'índex 2.*

Demostració: Estudiem primer el cas $a = b$. En aquest cas sabem que el grup de Weyl esta generat per:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

Observem ara que també podem pensar el grup de Weyl W com el generat per $\langle w_1, w_1w_2\rangle$, i tenim la igualtat:

$$w_1w_2 = r^2 \quad \text{on } r = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A més, observem també que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$$

i per tant podem pensar que hem d'estudiar la inclusió: $\langle w_1, r^2\rangle \subset \langle w_1, r, -1\rangle$ i ens dóna un subgrup no normal d'índex 4 amb el quocient amb classes laterals: Id, $-$Id, r i $-r$.

En el cas $a \neq b$ tenim:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix},$$

i per tant, tenim que el subgrup de $GL_2(\mathbb{Z})$ que deixa invariant la forma quadràtica q és el grup $\langle W, -\mathrm{Id}\rangle$, on W és el grup de Weyl. Per tant, és subgrup normal ja que és d'índex 2 i a més observem que el quocient està representat per les classes Id i $-$Id.

$\square$

5.3 Automorfs d'una forma quadràtica sobre $\widehat{\mathbb{Z}}_p$

Considerem com sempre a i b dos enters positius tal que $ab > 4$. Utilitzarem la notació habitual: $d = \mathrm{mcd}(a, b)$, $a' = a/d$ i $b' = b/d$.

Llavors tenim la forma quadràtica primitiva: $q = a'x^2 - a'b'dxy + b'y^2$, que correspon a la matriu:

$$\begin{pmatrix} a' & -\frac{a'b'd}{2} \\ -\frac{a'b'd}{2} & b' \end{pmatrix}.$$

Finalment definim $\Delta = a'b'(a'b'd^2 - 4) > 0$ el discriminant de la forma quadràtica.

Volem calcular l'estructura de grup de les matrius amb coeficients a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ que deixen invariant la forma quadràtica q, i que denotarem per $\mathrm{Aut}_p(q)$.

Sense cap restricció podem considerar que p no divideix a': si p divideix a' llavors p no dividirà b', llavors podem intercanviar b' i a' ja que tenen un paper simètric.

També sabem que si M és una matriu que deixa invariant q, llavors el determinant de M serà ± 1 i tindrem l'extensió:

$$\mathrm{Aut}_p^+(q) \rightarrowtail \mathrm{Aut}_p(q) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

on $\mathrm{Aut}_p^+(q)$ són les matrius de determinant 1 que deixen invariant q, i això serà el que estudiarem a aquesta secció.

Si és necessari, considerem els coeficients a $\widehat{\mathbb{Q}}_p[\sqrt{\Delta}]$ de tal manera que puguem fer el següent canvi de base:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}-a'b'd}{2} & \frac{\sqrt{\Delta}+a'b'd}{2} \\ -a' & a' \end{pmatrix} . \tag{5.3}$$

En aquesta nova base la nostra forma quadràtica és:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{a'\Delta}{2} \\ \frac{a'\Delta}{2} & 0 \end{pmatrix} ,$$

i si ara calculem les matrius de determinant 1 que la deixen invariant obtenim que són les matrius de la forma:

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} . \tag{5.4}$$

Com a grup, són les unitats de l'anell on estigui definida la forma quadràtica, per tant, ja obtenim el primer resultat:

Si Δ *és un quadrat invertible a* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ *i* p *és senar* llavors $\mathrm{Aut}_p^+(q)$ és isomorf a les unitats de $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i per tant:

$$\mathrm{Aut}_p^+(q) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} .$$

Això és conseqüència de que tot el que hem fet té sentit a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i l'estructura de grup de les unitats dels enters p-àdics la podem trobar a [43].

De la mateixa manera es podria fer el cas $p = 2$ i obtindríem:

Si Δ *és un quadrat invertible a* $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ llavors $\mathrm{Aut}_2^+(q)$ és isomorf a les unitats de $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ i per tant:

$$\mathrm{Aut}_2^+(q) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} .$$

Apliquem ara el canvi de base (5.3) a la matriu (5.4) i obtenim:

$$\begin{pmatrix} \frac{\zeta^2+1}{2\zeta} - \frac{a'b'd(\zeta^2-1)}{2\zeta\sqrt{\Delta}} & b'\frac{\zeta^2-1}{\zeta\sqrt{\Delta}} \\ -a'\frac{\zeta^2-1}{\zeta\sqrt{\Delta}} & \frac{\zeta^2+1}{2\zeta} + \frac{a'b'd(\zeta^2-1)}{2\zeta\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix} . \tag{5.5}$$

Ara el problema queda reduït a trobar per a quins $\zeta \in \widehat{\mathbb{Q}}_p[\sqrt{\Delta}]$ aquesta matriu té coeficients enters p-àdics.

Considerem ara el cas on Δ *és un quadrat a* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ *però no és invertible.* Això vol dir que podem escriure Δ com u^2p^{2n}, amb u invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i $n > 0$. Hem de demanar al coeficient:

$$b'\frac{\zeta^2-1}{\zeta\sqrt{\Delta}}$$

que visqui a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i si pensem que $\zeta = p^m v$ amb v una unitat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ obtenim que m ha de ser zero i que $\zeta \in \pm 1 + p^{2n}\widehat{\mathbb{Z}}_p$. I això ja és tot, ja que si tenim un element de $\pm 1 + p^{2n}\widehat{\mathbb{Z}}_p$ Llavors aquest ens donarà una matriu entera. Això vol dir que hem d'estudiar el subgrup multiplicatiu d'elements a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ de la forma $\pm 1 + p^{2n}\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Aquest càlcul està fet a [43] i és isomorf a:

$$\widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

D'ara en endavant podem considerar que Δ no és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i per tant els elements ζ de $\mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}]$ es poden escriure de manera única com $\zeta = r + s\sqrt{\Delta}$ per a r i s a $\widehat{\mathbb{Q}}_p$.

Si imposem que el coeficient $-b'\frac{\zeta^2-1}{\zeta\sqrt{\Delta}}$ sigui enter obtenim que la condició necessària i suficient és que r i s siguin de $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i que la norma de ζ:

$$N(\zeta) = (r + s\sqrt{\Delta})(r - s\sqrt{\Delta}) = r^2 - s^2\Delta$$

sigui igual a 1. A més, amb aquesta condició tenim que la nostra matriu (5.5) és de la forma:

$$\begin{pmatrix} r - a'b'ds & 2b's \\ -2a's & r + a'b'ds \end{pmatrix}\,. \tag{5.6}$$

Llavors el problema es redueix a trobar l'estructura de grup de les unitats de norma 1 a $\widehat{\mathbb{Z}}_p[\sqrt{\Delta}]$. Per a fer això distingirem varis casos:

Δ és una unitat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i p is senar: En aquest cas considerarem $\Delta \in \mathbb{F}_p$ un no quadrat, ho podem fer ja que el fet de ser un quadrat o no a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ només depèn de la reducció mòdul p. Llavors utilitzarem la següent filtració: U seran els elements de norma 1 de $\widehat{\mathbb{Z}}_p[\sqrt{\Delta}]$, i $U_i = (1 + p^i\widehat{\mathbb{Z}}_p[\sqrt{\Delta}]) \cap U$. Les classes del quocient U/U_1 estaran representades per $r + s\sqrt{\Delta}$ amb r i s a $\mathbb{F}_p$ i podem pensar que són elements de norma 1 de $\mathbb{F}_{p^2}$. Si el podem trobar llavors obtindrem que genera un $\mathbb{Z}/(p+1)\mathbb{Z}$. Finalment hem d'estudiar $U_1 = \varprojlim U_1/U_i$.

Calculem ara U_1/U_2. Per a això considerem un element de $U_1 \setminus U_2$, per exemple $\zeta = 1 + p\sqrt{\Delta} + p^2 u$, on u és un element de $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ tal que ζ tingui norma 1 (es pot comprovar que aquest element existeix). Llavors podem veure que si demanem a un element de la forma $1 + p(r + s\sqrt{\Delta}) + p^2 u$, amb $r, s \in \mathbb{F}_p$ i $u \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, que tingui norma 1 obtenim que $r = 0$. Finalment podem veure que ζ genera tots els elements de la forma $1 + ps\sqrt{\Delta} + p^2 u$, mòdul p^2 i obtenim que $U_1/U_2 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Per tal d'acabar aquest cas tan sols hauríem de comentar que $\zeta^{p^i} \in U_i \setminus U_{i-1}$ i que U_i/U_{i+1} té p elements. Llavors obtenim que $U_1/U_n \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ i que $U_1 \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$ i per tant:

$$U \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/(p+1)\mathbb{Z}\,.$$

Δ és una unitat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i p és 2: Aquest cas és una mica diferent per que ser un quadrat o no a $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ no depèn de la reducció mòdul 2. Llavors l'estudi s'ha de fer en tots els residus quadràtics: 3, 5 i 7.

Considerem doncs el cas $\Delta = 3$. Definim U com les unitats a $\widehat{\mathbb{Z}}_2[\sqrt{3}]$ amb norma 1. Considerem la filtració:

$$U_i = 1 + 2^i \widehat{\mathbb{Z}}_2[\sqrt{3}] \, .$$

Si comencem l'estudi a U_1/U_2 obtenim que el podem identificar amb el subgrup multiplicatiu $\{\pm 1\}$, i per tant tenim que és isomorf a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ara necessitem un element de norma 1 de $U_2 \setminus U_3$. El podem calcular i veiem que ha de ser de la forma:

$$\zeta = 1 + 4\sqrt{3} + 8u \, ,$$

amb u un element $\widehat{\mathbb{Z}}_2$. Ara es pot comprovar que aquest element ζ té la propietat que $\zeta^i \in U_{i+2} \setminus U_{i+3}$. A més, $U_i/U_{i-1} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i obtenim els resultats que volem: $U_2/U_i \cong \mathbb{Z}/2^{i-2}\mathbb{Z}$. D'aquí podem deduir:

$$U = \widehat{\mathbb{Z}}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \, .$$

Els altres dos casos, $\Delta = 5$ i $\Delta = 7$ es poden fer utilitzant el mateix argument i obtenim el mateix resultat.

Δ és de la forma up^{2n} amb u una unitat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, tal que no és un quadrat i p senar: Aquest cas és molt semblant als anteriors. Veiem que hem d'estudiar el elements de la forma:

$$U = \{r + sp^n\sqrt{u} \mid r^2 - s^2p^{2n}u = 1\} \, .$$

Això vol dir que $r = \pm(1 + \frac{s^2}{2}p^{2n}u + \cdots)$. Llavors podem fer el mateix que als casos anteriors, canviant Δ per u i començant per U_n i obtenim el resultat:

$$U \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \, .$$

Aquest $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ apareix per que U/U_1 es pot identificar com el grup multiplicatiu $\{\pm 1\}$.

Δ és de la forma up^{2n+1} amb u una unitat i un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i p senar: No hi ha cap restricció si considerem $u = 1$ i per tant hem d'estudiar:

$$U = \{r + sp^n\sqrt{p} \mid r^2 - s^2p^{2n+1} = 1\} \, .$$

Si utilitzem la mateixa notació: $U_i = 1 + p^i\sqrt{p}$, obtenim que $U_1 = U_2 = \cdots = U_n$ i que $U_n/U_{n+l} \cong \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$ i el resultat és:

$$U \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \, .$$

Δ és de la forma up^{2n+1} amb u una unitat, no quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i p és senar: És tornar a fer els mateixos càlculs i obtenim:

$$U \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \, .$$

Per acabar, tan sols comentar que aquests últims casos, per a $p = 2$ és fan de la mateixa manera, i obtenim:

$$U \cong \widehat{\mathbb{Z}}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

Proposició 5.3.1 *Sigui* $q = a'x^2 - a'b'dxy + b'y^2$ *una forma quadràtica primitiva amb discriminant* $\Delta = a'b'(a'b'd^2 - 4)$. *L'estructura dels automorfs de* q *sobre* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ *és*

$p > 2$:	$\widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$	*si* Δ *es un quadrat i una unitat a* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.
	$\widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/(p+1)\mathbb{Z}$	*si* Δ *no és un quadrat, però si una unitat a* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.
	$\widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	*altrament.*
$p = 2$:	$\widehat{\mathbb{Z}}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.	

□

5.4 El grup de Weyl p-completat

Considerem W el grup de Weyl i p primer fixat. Pensem els elements del grup de Weyl com matrius enteres, per l'acció sobre l'àlgebra de Lie del tor maximal, per tant $W \subset GL_2(\mathbb{Z})$.

Per a cada $n \geq 1$, considerem la projecció $\pi_n\colon GL_2(\mathbb{Z}) \to GL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ i $W_n = \pi_n(W)$.

Considerem també la projecció $\varrho_n\colon GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p) \to GL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Definició 5.4.1 *Definim el* p-completat del grup de Weyl *com el grup:*

$$\widehat{W}_p = \left\{ A \in GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p) \,\middle|\, \varrho_n(A) \in W_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\} = \varprojlim W_n\,.$$

Considerem $\widehat{W}_p^+ = \widehat{W}_p \cap SL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$. Tenim l'extensió:

$$\widehat{W}_p^+ \rightarrowtail \widehat{W}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

Tenim també la inclusió $W \subset \widehat{W}_p$. Considerem l'element $\tau = w_1 w_2 \in W$, que genera un subgrup cíclic d'ordre infinit. Sigui $N(n)$ l'ordre de $\pi_n(\tau)$.

En el cas p senar, sabem que $N(1) = k$, on k és la que hem definit al lema 4.7.1. D'altra banda, com que el nucli de la projecció $GL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to GL_2(\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})$ és un p grup, tenim que

$$N(n) = kp^{\alpha(n)}\,.$$

On $\alpha(n)$ és creixent i no acotada (ja que τ té ordre infinit). Sigui $G = \varprojlim \mathbb{Z}/N(n)\mathbb{Z}$. Clarament $G \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Volem veure que $G \cong \widehat{W}_p^+$, i per això considerem el morfisme $\varphi\colon G \to \widehat{W}_p^+$, si $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau^{\beta_n} \in GL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Amb això tenim un element: $\varphi(\tau) \in \varprojlim GL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ i que a més, és de $\widehat{W}_p^+$. Per la definició de G i $\widehat{W}_p^+$, tenim que φ és un isomorfisme.

En el cas $p = 2$, el raonament és el mateix, i k pren valors 2, 3 i 4, segons la paritat de a i b . Els valors parells de k construeixen $\widehat{\mathbb{Z}}_2$, mentre que 3 sobreviu:

Proposició 5.4.2 *Tenim l'extensió:*

$$\widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{W}_p \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

on: si $p = 2$, $l = 1$ si a o b són parelles i $l = 3$ si a i b són senars; si $p > 2$, $l = 2$ si $p \mid ab$, $l = 1$ si $p \mid (ab-4)$ i $l = k$ altrament, on k és l'ordre de les arrels del polinomi $x^2 - (ab-2)x + 1$ al seu cos de descomposició de característica p.

Demostració: Considerem l'odre de la reducció mòdul p del producte w_1w_2 i obtenim la k del lema 4.7.1. D'aquesta k, la part divisible per p passa a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i queda $l = k/p^{\nu_p(k)}$. Si p és senar i $p \nmid ab(ab-4)$ k és l'ordre de les arrels del polinomi característic de w_1w_2 (reduït mòdul p) al seu cos de descomposició de característica p. Aquest ordre divideix a $p-1$ si $ab(ab-4)$ és un quadrat mòdul p i divideix a $p+1$ altrament. En els dos casos $p \nmid k$ i per tant $l = k$.

□

Finalment, acabarem aquesta secció amb l'estudi dels elements del grup de Weyl completat que tenen una forma molt particular:

$$\lambda\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad d_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Observem que aquestes matrius formen un subgrup de $\widehat{W}_p$ que anomenarem $\widehat{W}_p^{\mathrm{admis}}$.

Lema 5.4.3 *Considerem $K(a,b)$ grup de Kac-Moody, p primer fixat, $\widehat{W}_p$ el grup de Weyl completat, i l com a la proposició 5.4.2. Llavors*

1. *Si $p = 2$: $\widehat{W}_p^{\mathrm{admis}} = \{\mathrm{Id}\}$.*
2. *Si $p > 2$ i l és senar: $\widehat{W}_p^{\mathrm{admis}} = \{\mathrm{Id}, d_{y,1/y}\}$ amb $y \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ un únic element que compleix $ay^2 = b$.*
3. *Si $p > 2$ i l és parella: $\widehat{W}_p^{\mathrm{admis}} = \{\pm\mathrm{Id}\}$.*

Demostració: Suposem primer que $\lambda\mathrm{Id} \in \widehat{W}_p \subset \mathrm{Aut}_p(q)$, llavors, aquesta aplicació envia $q \mapsto \lambda^2 q$, i per tant $\lambda = \pm 1$, i per tant, en cas de ser una matriu de $\widehat{W}_p$, seria de $\widehat{W}_p^+$.

Suposem ara que $d_{\alpha,\beta} \in \widehat{W}_p$, llavors $d^2_{\alpha,\beta} = \alpha\beta\mathrm{Id}$, i per tant $\alpha\beta = \pm 1$.

Si $\alpha\beta = -1$, llavors $d_{\alpha,\beta} \in \widehat{W}_p^+$ i $d^2_{\alpha,\beta} = -\mathrm{Id}$. Utilitzant l'estructura de $\widehat{W}_p^+$ estudiada a la proposició 5.4.2, $-\mathrm{Id} \in \widehat{W}_p^+$ només quan l és parella i correspon a l'element:

$$(0, l/2) \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \cong \widehat{W}_p^+ ,$$

per tant correspondria a l'element $(0, l/4)$ (que només existiria si l és múltiple de 4), però aquest element, segons l'estudi dels automorfs de la forma quadràtica ($\mathrm{Aut}_p(q)$) fet a la secció 5.2, i més concretament per l'equació (5.5), correspon a una matriu diagonal, per tant, en cap cas seria de la forma $d_{\alpha,\beta}$ i per tant $\alpha\beta = 1$.

Suposem doncs $\alpha\beta = 1$. En quest cas considerem la matriu

$$(d_{\alpha,\beta} w_2)^2 w_2 w_1 = \begin{pmatrix} 1 & a\alpha^2 - b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widehat{W}_p^+ ,$$

i per tant, com que la única matriu de $\widehat{W}_p^+$ amb els dos valors propis 1 és la identitat tenim que:

$$(d_{\alpha,\beta} w_2)^2 = w_1 w_2 , \quad \text{amb } d_{\alpha,\beta} w_2 \in \widehat{W}_p^+ \tag{5.7}$$

i $a\alpha^2 = b$.

Si $p = 2$, $\widehat{W}_2^+ \cong \widehat{\mathbb{Z}}_2$ i per tant no hi ha cap element de 2-torsió i $-\mathrm{Id} \notin \widehat{W}_p^+$. Tampoc hi pot haver cap matriu de la forma $d_{\alpha,\beta}$, ja que això voldria dir que $w_1 w_2$, que correspon amb $1 \in \widehat{\mathbb{Z}}_2$, és 2 divisible (equació (5.7)).

Si p és senar, observem primer que el lema 3.2.5, on vam estudiar la reducció mòdul p de W, que és la mateixa que la de $\widehat{W}_p$, per tant, ens diu que per a que $-\mathrm{Id} \in \widehat{W}_p$, l ha de ser parella. Per altra banda, si l és senar, no trobem cap element de $\widehat{W}_p^+ \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/l$ de 2 torsió.

Llavors suposem que existeixen α i β tals que $d_{\alpha,\beta} \in \widehat{W}_p$, llavors, $\alpha\beta = -1$. Utilitzant que $d^2_{\alpha,\beta} = -\mathrm{Id}$, ja tenim que l ha de ser senar. En aquest cas sí que tenim que $w_1 w_2 \in \widehat{W}_p^+$ és 2 divisible, per tant existeix $w \in SL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ tal que $w^2 = w_1 w_2$. A més, com que $w_1 w_2$ és l'element $(1, 1) \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/l \cong \widehat{W}_p^+$, aquest element és únic.

Suposem que $w = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ i que $w^2 = w_1 w_2$, per tant:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - 1 & -b \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix} ,$$

i aquesta equació ens diu que la matriu ha de ser de la forma

$$w = \begin{pmatrix} ay & -y \\ 1/y & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{amb } y^2 = b/a .$$

Com que aquest element és únic, només una de les dues posibles arrels de b/a fan que $w \in \widehat{W}_p^+$.

Si ara considerem ww_2, obtenim $d_{y,1/y}$, per tant això acaba la demostració del lema.

$\square$

5.5 Inclusió del grup de Weyl al grup d'automorfs

Considerem W el grup de Weyl i p primer senar fixat. Sigui W_n tal i com l'hem definit a la secció 5.4, tal que $\widehat{W}_p = \varprojlim W_n$.

Observem que $W_1 \cong \mathbb{Z}/k$, on k és la que havíem definit al lema 4.7.1 i que per a p senar tenim:

$$2k = |W_1| = |W_2| = \cdots = |W_r| < |W_{r+1}| \,.$$

Llavors, en aquest cas:

Lema 5.5.1 *Sigui p primer senar fixat i k, r tal i com els hem definit al lema 3.2.3. Tenim les successions exactes dels grups:*

$$
\begin{array}{ll}
0 \longrightarrow \widehat{W}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}_p(q) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{r-1} \longrightarrow 0 & \textit{si } p \textit{ divideix } d. \\
0 \longrightarrow \widehat{W}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}_p(q) \longrightarrow 0 & \textit{si } p \textit{ divideix } \Delta. \\
0 \longrightarrow \widehat{W}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}_p(q) \longrightarrow \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/p^{r-1} \longrightarrow 0 & \textit{altrament.}
\end{array}
$$

On r és la que hem definit abans i m és $(p+1)/k$ o $(p-1)/k$, depenent de si Δ és un quadrat o no mòdul p.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix a partir de la definició de la compleció del grup de Weyl i del càlcul dels automorfs de la forma quadràtica.

$\square$

5.6 Aplicacions que provenen de representacions

Sigui $q\colon BK \longrightarrow K(\mathbb{Z},4)$ un representant d'$H^4(BK;\mathbb{Z})$ que indueixi una equivalència racional. Podem, a més, fixar q com el de l'equació (5.1). Considerem ara la proposició 4.2.1 en el cas del tor BT:

Proposició 5.6.1 *L'aplicació $l\colon [BT, BK] \to \prod_p [BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p]$ és injectiva. La imatge consisteix en aquelles famílies d'aplicacions $\{f_p\colon BT_{p^\infty} \to \widehat{BK}_p\}_p$ tal que $f_p^*(q)$ viu a $H^4(BT;\mathbb{Z}) \subset H^4(BT_{p^\infty};\mathbb{Z})$ i és independent de p.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem $X = BT$ i apliquem la proposició 4.2.1. Utilitzant que $H^3(BT;\mathbb{Q}) = 0$ tenim una aplicació injectiva:

$$[BT, BK] \longrightarrow \prod_p [BT, \widehat{BK}_p] \,,$$

però com que $\widehat{BK}_p$ és p-complet i BT és equivalent mòdul p a BT_{p^∞}, tenim l'aplicació injectiva de l'enunciat.

Suposem que tenim una família d'aplicacions $\{f_p\colon BT_{p^\infty} \to \widehat{BK}_p\}_p$ tal que és de la imatge de l, o sigui, existeix $f\colon BT \to BK$ tal que $l(f) = \prod_p f_p$. Això vol dir, segons la proposició 4.2.1, que existeix un element $x \in H^4(BT;\mathbb{Q})$ tal que $f_p^*(q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p) = x \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p$ per a tot p. En el nostre cas q viu a la cohomologia entera de BK i per tant podem considerar $x := f^*(q) \in H^*(BT;\mathbb{Z})$. Si aquest element $x \in H^4(BT;\mathbb{Q})$ existeix, llavors $f_p^*(q)$ ha de ser independent del primer p. Si, en canvi, tenim que $f_p^*(q) \in H^4(BT;\mathbb{Z})$ per a tot p i és independent de p, considerem $x := f_p^*(q)$ i tenim l'element que necessitem.

□

Considerem ara $f\colon BT \longrightarrow BK(a,b)$ una aplicació tal que existeixi $\rho\colon T \longrightarrow K(a,b)$ amb $B\rho \simeq f$. Això vol dir que aquesta aplicació ρ factoritza pel tor maximal i per tant, a nivell d'àlgebres de Lie, existeix una matriu $M_f\colon BT \longrightarrow BT$ amb coeficients enters que fa el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} & BT \arrow[d, "Bi"] \\ BT \arrow[ur, "M_f"] \arrow[r, "f"'] & BK(a,b) \end{tikzcd}$$

i si mirem com funciona a cohomologia, veiem que q va a parar a $q' = M_f^T q M_f$, on estem utilitzant la forma quadràtica q definida a l'equació (5.1) amb notació matricial.

Si es compleixen totes aquestes condicions direm que aquesta aplicació *prové de la representació ρ.*

En el cas de grups de Lie compactes, l'article de D. Notbohm [37] ens diu que totes les aplicacions de BT al grup de Lie provenen de representacions. En canvi, veurem que als grups de Kac-Moody això és fals.

Considerem el gènere d'una forma quadràtica, que hem estudiat a la secció 5.1. Per a aplicar aquells resultats necessitem trobar una forma quadràtica de la forma:

$$q = a'u^2 - a'b'duv + b'v^2$$

amb a' i b' coprimers i discriminant $\Delta = a'b'(a'b'd^2 - 4)$ que tingui un nombre de classes mòdul $\mathbb{Z}$-equivalència que no sigui una potència de 2.

Si mirem les taules de [12], obtenim que per a $\Delta = 1509$, les classes que hi ha són 6, que no és potència de 2. Aquest discriminant correspon al cas $a' = 1$, $b' = 3$ i $d = 13$, i per tant, si $a = 13$ i $b = 39$ tenim que existeixen formes quadràtiques q' que són $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-equivalents a la forma quadràtica q, però no $\mathbb{Z}$-equivalents. Considerem doncs per a cada p una $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-equivalència de q a q', pensada com a aplicació de $BT_{p^\infty} \longrightarrow BT_{p^\infty}$. Composem aquesta aplicació amb la inclusió a BK i obtindrem una família d'aplicacions compatible que ens donarà una de BT a BK. Suposem ara que aquesta aplicació provenia d'una $\rho\colon T \longrightarrow K$, llavors aquesta aplicació factoritza pel tor maximal T_K i per tant tenim una matriu amb coeficients enters tal que $M^T qM = q'$. Com que q i q' tenen el mateix determinant aquesta matriu M és invertible sobre $\mathbb{Z}$ i per tant ens dóna una equivalència entera entre q i q', cosa que no pot passar.

Així queda demostrat:

Teorema A *Existeixen aplicacions a $[BT, BK]$ que no provenen de representacions $\rho\colon T \longrightarrow K$.*

□

5.7 Aplicacions de BT a $\widehat{BK}_p$

Per a fer aquest estudi necessitarem passar del cas local al global i per tant necessitem l'estudi de les aplicacions mòdul compleció.

Denotem per T_{p^∞} els elements d'ordre alguna potència de p del tor maximal. La inclusió $T_{p^\infty} \hookrightarrow T$ indueix una equivalència mòdul p a $BT_{p^\infty} \longrightarrow BT$. Tenim doncs $[BT, \widehat{BK}_p] \cong [BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p]$.

Considerem ara π un p-grup finit i $\rho\colon \pi \longrightarrow L$ un morfisme. Sigui $C_L(\rho)$ el centralitzador de la imatge de ρ a L. Podem construir el morfisme de grups:

$$\begin{array}{ccc} \pi \times C_L(\rho) & \longrightarrow & L \\ (g, h) & \mapsto & gh\,. \end{array}$$

Apliquem el functor espai classificador i obtenim una aplicació

$$B\pi \times BC_L(\rho) \longrightarrow BL$$

i passant ara a l'adjunt, obtenim una aplicació que venia induïda per ρ:

$$BC_L(\rho) \longrightarrow \mathrm{Map}(B\pi, BL)\,.$$

En el cas de grups de Lie compactes, B. Dwyer i A. Zabrodsky van veure que era una equivalència homotòpica mòdul p [18] i en el cas de grups de Kac-Moody el resultat va ser demostrat per C. Broto i N. Kitchloo a [10] i [11]:

Teorema 5.7.1 ([10] [11]) *Si L és un grup de Kac-Moody i π és un p-grup finit, llavors:*

1. *Tenim una equivalència homotòpica:*

$$\coprod_{\rho\in \mathrm{Rep}(\pi,L)} \widehat{BC_L(\rho)}_p \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}(B\pi, \widehat{BL}_p)\ .$$

   En particular, $[B\pi, \widehat{BL}_p] \cong \mathrm{Rep}(\pi, L)$.

2. *Si $\{P_I\}$ és el conjunt parcialment ordenat de subgrups parabòlics de L que són grups de Lie, llavors hi ha una equivalència homotòpica:*

$$\mathrm{hocolim}_I \mathrm{Map}(B\pi, \widehat{(BP_I)}_p) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}(B\pi, \widehat{BL}_p)\ .$$

Volem aplicar aquests resultats a $T_{p^n} \subset T$, els subgrup del tor maximal format els $t \in T$ tals que $t^{p^n} = 1$. Observem que $T_{p^n} \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Considerem ara els subespais de $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)$ següents:

$$\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$$

format per aquelles aplicacions que són homotopes a una $B\rho$, on $\rho: T_{p^n} \longrightarrow K$ és un homomorfisme de grups amb nucli d'ordre menor o igual a p^s. Notem per $\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$ els endomorfismes de T_{p^n} que compleixen que el nucli té ordre menor o igual a p^s. La inclusió $T_{p^n} \subset T_K$, on T_K és el tor maximal del grup de Kac-Moody, ens dóna una acció del grup de Weyl W en T_{p^n}. Llavors W actua per l'esquerra sobre els conjunts $\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$.

Utilitzant les idees de B. Dwyer i N. Kitchloo podem estudiar $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$:

Teorema B *Si $n \gg s$ llavors cada component connexa de* $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$ *és homòtopament equivalent a* $\widehat{(BT_K)}_p \times K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1)$.

Demostració: Utilitzant el teorema 5.7.1, obtenim el següent diagrama push-out, mòdul compleció:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{(BT_K)}_p)_{(s)} & \longrightarrow & \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{(BH_1)}_p)_{(s)} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{(BH_2)}_p)_{(s)} & \longrightarrow & \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{(BK)}_p)_{(s)}
\end{array}$$

Cada un dels espais d'aquest push-out, com que estem en el cas de grups de Lie compactes, es pot calcular utilitzant el teorema de Dwyer i Zabordsky [18], que ens diu que és l'espai classificador del centralitzador de la imatge dels morfismes. Tenim que per a n prou gran, les imatges estan contingudes al tor maximal del subgrup parabòlic i el centralitzador és ell mateix, que coincideix amb el tor maximal del grup de Kac-Moody i per tant obtenim $\widehat{(BT_K)}_p$.

Cal veure què passa amb les components connexes de cada element del push-out, i això equival a calcular el push-out homotòpic de conjunts finits:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n}) \arrow[r] \arrow[d] & \langle w_1\rangle\backslash\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n}) \\ \langle w_2\rangle\backslash\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n}) & \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

Les matrius w_1 i w_2 són les matrius d'ordre 2 que estan definides a (3.2). A partir d'aquesta definició, vegem que l'acció de w_1 a $\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$ no té punts fixos si la n és prou gran. Abans, considerem el següent lema que demostrarem més endavant:

Lema 5.7.2 *Sigui M una matriu amb coeficients a $\mathbb{Z}$, de tamany $m \times m$ i determinant no nul. Sigui $\varphi\colon T \to T$ l'aplicació induïda per la matriu en T, un tor de dimensió m. Si la matriu té determinant zero mòdul p^r llavors, per a $n \geq r$, hi ha com a mínim p^r elements al nucli de l'aplicació induïda al subgrup $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^m$ de T.*

Sigui $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ una matriu de $\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$. Podem considerar que aquesta matriu té coeficients enters i determinant no nul sobre $\mathbb{Z}$. Aplicant el lema 5.7.2 i que $n \gg s$ tenim que aquesta matriu tindrà determinant no nul mòdul p^n. Suposem que és un punt fix per a w_1, o sigui,

$$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{mòdul } p^n\,,$$

i tenim que, mòdul p^n: $2x = bz$ i $2y = bt$, per tant, per a que sigui un punt fix, el determinant ha de ser zero mòdul p^n, cosa que no pot ser certa si considerem $n \gg s$.

El mateix raonament és vàlid quan diem que per a $n \gg s$, l'acció de w_2 a $\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$ no té punts fixos.

Per tant, el push-out homotòpic, que en el cas d'aplicacions entre conjunts discrets és el graf que resulta d'unir els punts de $\mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$ amb les imatges a cada un dels quocients i per tant d'identificar-los dos a dos. Per tant, el graf tindrà el mateix nombre de vèrtexs que d'arestes, o sigui, característica d'Euler-Poincaré igual a zero i tots els vèrtexs tindran dues arestes, per tant, quedarà la unió disjunta de circumferències. Si completem ara les circumferències obtindrem $K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1)$.

$\square$

Demostració del lema 5.7.2: Sigui M amb coeficients enters i determinant no nul, com a matriu que indueix l'aplicació φ de T en ell mateix. El seu nucli estarà format per un subgrup abelià, que s'aixecarà a una xarxa de dimensió m a nivell de l'àlgebra de Lie del tor T. El nucli que ens interessa calcular és la intersecció de la projecció d'aquesta xarxa amb el subgrup $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^m \subset T$. Considerem la PAQ reducció de M i composem l'aplicació M del tor en ell mateix per les aplicacions invertibles P per l'esquerra i Q per la dreta. Tant P com Q envien $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^m \subset T$ en ell mateix. La nova aplicació tindrà el nucli del mateix cardinal i, com a matriu M', serà diagonal amb coeficients $d_1, \ldots, d_m$, amb $d_1 \cdots d_m = \det M$. El nucli estarà format pel subgrup abelià $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_m\mathbb{Z}$ i la seva intersecció amb $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\dim T} \subset T$ és $\mathbb{Z}/p^{i_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{i_m}$, amb $i_j = \min\{n, \nu_p(d_j)\}$, $j = 1, \ldots, m$. Per tant el cardinal del nucli de φ intersecció $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^m$ és $p^{i_1} \cdots p^{i_m} = p^{i_1+\cdots+i_m}$. Si existeix j tal que $i_j = p^n$, tenim que hi ha un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ al nucli i com que $r \leq n$, ja està. Si $i_j < n$ per a tot $j = 1, \ldots, n$, llavors el cardinal del nucli intersecció $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^m$ és $p^{\det M} \geq p^r$ i també tenim el resultat que volem.

□

Corol·lari 5.7.3 *Sigui $\rho\colon T_{p^\infty} \longrightarrow K$ un homomorfisme amb nucli finit. Llavors $\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)_{B\rho}$ és homotòpament equivalent a $\widehat{(BT_K)}_p$.*

Demostració: Tenim que el límit directe $\varinjlim BT_{p^n}$ és homotòpament equivalent a $\widehat{BT}_p$ (mòdul p) i com que l'espai d'arribada és p-complet, podem considerar $\mathrm{Map}(\varinjlim BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{B\rho}$, i el límit surt fora com a límit invers. Apliquem ara el teorema B:

$$\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)_{B\rho} \simeq \underleftarrow{\mathrm{holim}}\, \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{B\rho} \simeq \underleftarrow{\mathrm{holim}} \left\{ \widehat{(BT_K)}_p \times K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1) \right\} .$$

Per tant hem de veure que el límit invers d'aquests cercles p-complets és contràctil. Per a això tornem a estudiar el push-out homotòpic (5.8). Un cercle apareix quan tenim una matriu M i un enter m tal que $(w_1w_2)^m M \equiv M$ mòdul p^n. Fixem la nostra M, que és una matriu amb nucli finit, per tant, amb menys de p^s elements per a certa s i definim $m(n)$ el mínim enter positiu tal que $(w_1w_2)^{m(n)}M \equiv M$ mòdul p^n. Si veiem que les valoracions p-àdiques $\nu_p(m(n))$ són creixents llavors el límit invers $\underleftarrow{\mathrm{holim}}\{K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1)\}$ serà contràctil. Si multipliquem la congruència $(w_1w_2)^{m(n)}M \equiv M$ mòdul p^n per la matriu adjunta de M, veiem que $m(n)$ ha de ser un múltiple de l'ordre de w_1w_2 a $GL_2(\mathbb{Z}/p^{n-s})$. Com que la valoració p-àdica d'aquest ordre tendeix a infinit quan n creix, també ho farà $m(n)$.

□

Considerem ara la inclusió $W \subset GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ (ens ho podem pensar directament ja que les matrius de W tenen coeficients enters). També es pot pensar que aquesta inclusió prové d'aplicar el functor $\mathrm{Hom}(-;\mathbb{Z}_{p^\infty})$ a l'espai T_{p^∞} i aprofitar l'acció de W que ja teníem sobre T_{p^∞}.

Proposició 5.7.4 *Sigui A un subgrup propi de T_{p^∞} tal que $WA \subset A$. Llavors A és finit.*

Demostració: Estem en el cas $ab > 4$, i l'acció de $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ ve donada per les matrius de l'equació (3.2). Considerem aquesta acció sobre $(\widehat{\mathbb{Z}}_p)^2$ i suposem primer que hi ha un $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-submòdul W-invariant de dimensió 1. Això voldria dir un vector de $(\widehat{\mathbb{Z}}_p)^2$ que és vector propi de w_1 i w_2 alhora, i això només pot passar si $ab = 4$, que no és el nostre cas.

Apliquem ara el functor $\mathrm{Hom}(-;\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ a la successió exacta de grups abelians

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow T_{p^\infty} \longrightarrow T_{p^\infty}/A \longrightarrow 0\,,$$

on W actua a cada peça.

Obtenim la successió exacta de caràcters:

$$0 \longrightarrow (T_{p^\infty}/A)^* \longrightarrow (\widehat{\mathbb{Z}}_p)^2 \longrightarrow A^* \longrightarrow 0\,,$$

i obtenim que $(T_{p^\infty}/A)^*$ és un $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-submòdul W-invariant i no trivial. Pel raonament anterior no pot tenir rang 1, per tant té rang 2, llavors A^* és finit i A també.

$\square$

La següent proposició s'utilitzarà també per a l'estudi d'aplicacions entre grups de Kac-Moody no isomorfs, per tant, considerem K un grup de Kac-Moody com fins ara i K' un altre (tots dos de rang dos, i cap de tipus Lie).

Proposició 5.7.5 *Sigui $f\colon BK \longrightarrow \widehat{BK'}_p$. Existeix un homomorfisme $\rho\colon T_{p^\infty} \longrightarrow K'$ tal que $f|_{BT_{p^\infty}} \simeq B\rho$. Si $\rho \neq 1$ llavors ρ té nucli finit.*

Demostració: Per a cada n el teorema 5.7.1 ens diu que $f|_{BT_{p^n}} \simeq B\rho_n$, on $\rho_n\colon T_{p_n} \longrightarrow K'$ és un homomorfisme determinat de manera única, mòdul un automorfisme intern de K'. Podem obtenir una successió compatible $\{\rho_n\}$, i això ens donarà un homomorfisme $\rho\colon T_{p^\infty} \longrightarrow K'$ amb la propietat que $B\rho|_{T_{p^n}} \simeq f|_{T_{p^n}}$. Per trobar el resultat a T_{p^∞} tenim la successió exacta:

$$0 \to \varprojlim{}^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK'}_p)_{B\rho_n} \to \pi_0 \mathrm{Map}(BT_{p^\infty}, \widehat{BK'}_p) \to \varprojlim{}^0 \pi_0 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK'}_p) \to 0\,.$$

Per tant, hem de comprovar que el terme $\varprojlim{}^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK'}_p)_{B\rho_n}$ s'anul·la.

Si $\rho = 1$, llavors $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK'}_p) \simeq \widehat{BK'}_p$ i en particular és simplement connex i aquest límit és zero.

Si $\rho \neq 1$ volem utilitzar el teorema B, per tant, hem de veure que el nucli de ρ_n està acotat, o sigui, que $\mathrm{Ker}(\rho)$ és finit.

Observem que si $w \in W$, $\overline{w} \in NT_K$ és un representant de $w \in NT_K/T_K$, $c_{\overline{w}}$ la conjugació dels elements de T_K per $\overline{w}$ i $i_n\colon T_{p^n} \hookrightarrow K$, llavors

$$\begin{tikzcd}
BT_{p^n} \arrow[r, "Bc_{\overline{w}}"] \arrow[d, "Bi_n"'] & BT_{p^n} \arrow[d, "Bi_n"'] \arrow[dr, "f|_{BT_{p^n}} \simeq B\rho_n"] & \\
\widehat{BK}_p \arrow[r, "B\mathrm{Id}"'] & \widehat{BK}_p \arrow[r, "f"'] & \widehat{BK'}_p
\end{tikzcd}$$

per tant $B\rho_n \simeq B(\rho_n \cdot w)$ i això vol dir que existeix $g_n \in K'$ tal que:

$$\rho_n \cdot w|_{T_{p^n}} = c_{g_n} \cdot \rho|_{T_{p^n}} \ .$$

Com que c_{g_n} és una conjugació, obtenim que $\mathrm{Ker}(\rho)$ és W-invariant, i aplicant la proposició 5.7.4 tenim que $\mathrm{Ker}(\rho)$ és finit

$\square$

Considerem ara la definició de $\widehat{W}_p$, el completat del grup de Weyl, feta a la secció 5.4, que conté a W i actua sobre T_{p^∞}.

Teorema C *Siguin $\rho, \rho'\colon T_{p^\infty} \longrightarrow T_{p^\infty}$ homomorfismes amb nucli finit. Llavors $B\rho \simeq B\rho'$ a $\mathrm{Map}(BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p)$ si i només si existeix $\alpha \in \widehat{W}_p$ tal que $\rho = \alpha\rho'$.*

DEMOSTRACIÓ:

Com que el nucli és finit, triem s prou gran tal que $B\rho, B\rho' \in \mathrm{Map}(BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$.

Mirem primer el cas a $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$ per a n prou gran, tal que puguem aplicar les eines del teorema B. En aquest cas tenim que hi ha una aplicació bijectiva entre les components connexes de $\mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$ i els conjunts $W_{p^n} \backslash \mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n})$ (on W_{p^n} és la reducció de les matrius del grup de Weyl mòdul p^n).

Utilitzant que $BT_{p^\infty} = \mathrm{hocolim} BT_{p^n}$ tenim la successió exacta de conjunts:

$$0 \to \varprojlim{}^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)} \to [BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p]_{(s)} \to \varprojlim{}^0 [BT_{p^n}, \widehat{BK}_p]_{(s)} \to 0 \ ,$$

on $[BT_{p^n}, \widehat{BK}_p]_{(s)} = \pi_0 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$.

Això vol dir que si tenim una família compatible d'aplicacions $f_n\colon T_{p^n} \to BK$ que donen un element de $\varprojlim{}^0 \pi_0 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{(s)}$, aquesta prové d'alguna aplicació de $BT_{p^\infty} \to \widehat{BK}_p$. Que la primera aplicació sigui injectiva vol dir que, fixada família compatible, el nombre d'antiimatges està controlat per $\varprojlim{}^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{f_n}$.

Aplicant altre cop el teorema B obtenim que $\lim\limits_{\longleftarrow}{}^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BT_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{f_n}$ s'anul·la i per tant:

$$\pi_0 \mathrm{Map}(BT_{p^\infty}, \widehat{BK}_p)_{(s)} \cong \lim_{\longleftarrow} W_{p^n} \Big\backslash \mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n}) \cong \widehat{W}_p \Big\backslash \mathrm{End}^{(s)}(T_{p^n}) ,$$

i obtenim el resultat que volem.

$\square$

Observació 5.7.6 Aquest teorema ens permet veure una altra demostració de l'existència d'aplicacions que no provenen de representacions.

Considerem $q \in H^4(BK;\mathbb{Z})$, com el definit a l'equació (5.1). Considerem ara el subconjunt de les aplicacions $[BT, BK]$ format per les f tals que a cohomologia compleixen que $f^*(q) = a'u^2 - a'b'duv + b'v^2$. Les matrius corresponents serien les matrius amb coeficients enters que compleixen l'equació:

$$M_f^T q M_f = q \,.$$

Si estudiem les possibles M_f obtenim que són les del grup de Weyl i a més apareixen:

$$\begin{array}{ll} -\mathrm{Id} & \text{si } a \text{ i } b \text{ són diferents.} \\ -\mathrm{Id} \text{ i } \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } a = b. \end{array}$$

Per tant, si totes les aplicacions vinguessin de representacions, tindríem que hi ha dues aplicacions que conserven la forma quadràtica si $a \neq b$ i quatre si $a = b$.

Considerem ara la proposició 5.6.1, tenim quina condició ha de complir una família d'aplicacions

$$\prod_p f_p \quad \text{amb} \quad f_p \colon BT \longrightarrow \widehat{BK}_p$$

per a que defineixi una aplicació de BT a BK. Hem de comprovar que la forma quadràtica q, que està definida sobre $\mathbb{Z}$ i per tant podem pensar-la sobre $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i sobre $\mathbb{Q}$, vagi a parar a la mateixa forma quadràtica sobre $\hat{\mathbb{Q}}$, independentment del primer p.

Si ens fixem ara en aquelles aplicacions f_p tals que envien q a $a'u^2 - a'b'duv + b'v^2$ (o sigui, aplicacions que deixen invariant la forma quadràtica), veiem que per a cada primer p n'hi ha tantes com el quocient $\mathrm{Aut}_p(q)/\widehat{W}_p$. Aquest quocient havíem vist que era de la forma $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ i en general $r > 1$ i $l > 1$ i per tant ens apareixen moltes aplicacions que deixen invariant la forma quadràtica.

Com a exemple, considerem $a = b = 5^2 = 25$, obtenim que per a $p = 5$ la inclusió del grup de Weyl completat al grup $\mathrm{Aut}_5(q)$ és:

$$\widehat{W}_5 \rightarrowtail \mathrm{Aut}_5(q) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \,.$$

Per tant, el nombre d'aplicacions $f \in [BT, BK]$ que compleixen que $f^*(q) = a'u^2 - a'b'duv + b'v^2$ serà com a mínim 5, en particular més de 4, que és el nombre d'aplicacions màxim que poden provenir de representacions i per tant tenim una altra demostració de l'existència d'aplicacions que no provenen de representacions.

Corol·lari 5.7.7 *Sigui $f: BK \longrightarrow \widehat{BK'}_p$. Existeix un endomorfisme $\rho: T_{p^\infty} \longrightarrow T'_{p^\infty}$ tal que $f|_{BT_{p^\infty}} \simeq Bi' \cdot B\rho$, amb $i: T_{p^\infty} \hookrightarrow K$. A més, ρ és únic mòdul l'acció per l'esquerra de $\widehat{W'}_p$ a* $\mathrm{End}(T'_{p^\infty})$.

DEMOSTRACIÓ: La proposició 5.7.5 ens diu que existeix un homomorfisme $\varrho: T_{p^\infty} \to K'$ complint que $f|_{BT_{p^\infty}} \simeq B\varrho$. Si $\varrho = 1$ el resultat es dedueix directament de l'enunciat, per tant, podem suposar que $\varrho \neq 1$. Llavors ϱ té nucli finit i per tant:

$$f|_{BT_{p^\infty}} \in \mathrm{Map}(BT_{p^\infty}, \widehat{BK'}_p)_{(s)} \cong \widehat{W'}_p \backslash \mathrm{End}^{(s)}(T'_{p^\infty})\,,$$

per a alguna s prou gran. Per tant podem canviar ϱ per ρ, tal que $\rho: T_{p^\infty} \longrightarrow T'_{p^\infty}$. Llavors, si ρ' és un endomorfisme de T_{p^∞} tal que $B\rho \circ Bi \simeq B\rho' \circ Bi$ tenim que $\rho|_{T_{p^n}}$ i $\rho'|_{T_{p^n}}$ són conjugats per a qualsevol n. Agafant n prou gran deduïm que ρ i ρ' tenen nuclis finits, amb el mateix cardinal. Ara podem aplicar el teorema C i tenim que ρ i ρ' difereixen d'un element de $\widehat{W'}_p$.

$\square$

Capítol 6

Grups de Kac-Moody amb el mateix espai classificador

En el cas de grups de Lie compactes connexos i simples, sabem que dos grups G_1 i G_2 són homotops (com a espais topològics) si i només si són isomorfs com a grups de Lie.

A [7] és dóna un contraexemple si traiem la condició de "*simple*": els grups $SO(4)$ i $SO(3) \times SU(2)$ són homotops com a espais topològics i no són grups de Lie isomorfs.

Més endavant D. Notbohm, a [38], va demostrar que dos grups de Lie són isomorfs si i només si el seus espais classificadors són homotops. Per tant, el functor "*espai classificador*" és fidel i resol completament el problema.

Veurem que aquest resultat és fals per a grups de Kac-Moody. El tipus d'isomorfisme dels grups de Kac-Moody de rang 2, com a grups topològics ja l'hem estudiat a la proposició 3.7.1 i sabem que $K(a, b) \cong K(a', b') \Leftrightarrow \{a, b\} = \{a', b'\}$. En canvi, veurem que el tipus d'homotopia dels espais classificadors segueix una condició més feble i obtindrem grups de Kac-Moody no isomorfs amb espai classificador homotop.

Sigui doncs:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$$

una matriu de Cartan generalitzada de rang 2. En el cas finit, quan $ab \leq 3$ tenim la taula:

a	b	G
0	0	$SU(2) \times SU(2)$
1	1	$SU(3)$
1	2	$Spin(5)$
1	3	G_2

i sabem que dos a dos són no isomorfs i els seus espais classificadors no són homotops (excepte quan intercanviem a i b), per tant, quan $ab \leq 3$, $BK(a,b) \simeq BK(a',b')$ si i només si $\{a,b\} = \{a',b'\}$.

6.1 Aplicacions p-admissibles

Al capítol anterior hem vist que hi ha aplicacions de BT_K a BK que no provenen de representacions. Això vol dir que no podem continuar amb l'estudi tal i com es fa a [26]: allà es considerava una aplicació de BG en ell mateix, amb G un grup de Lie compacte, i llavors, quan la restringien al tor maximal, podien pensar l'aplicació de BT a BG com una matriu amb coeficients enters.

En el nostre cas, hem vist que això no és cert, però en canvi, sí que apareix una matriu quan completem l'espai BK i, per tant, la matriu agafa coeficients p-àdics.

Sigui K el grup de Kac-Moody, T_K el tor maximal, NT_K el normalitzador i $W = NT_K/T_K$. Considerem $\widehat{W}_p$ el p-completat del grup de Weyl. Els seus elements es poden pensar com matrius amb coeficients p-àdics. Considerem $\widehat{W}_p^+ = \widehat{W}_p \cap SL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$.

Considerem doncs a, b, a', b' enters positius tal que $ab > 4$ i $a'b' > 4$. Siguin $T = T_K$ i $T' = T_{K'}$ els corresponents tors maximals, i W, W' els grups de Weyl que hi actuen.

Definició 6.1.1 *Direm que una aplicació $\phi\colon T_{p^\infty} \longrightarrow T'_{p^\infty}$ és* p-admissible *si i només si per a tot $w \in W$ existeix $w' \in \widehat{W}'_p$ tal que $\phi w = w'\phi$.*

Observació 6.1.2 Hauríem de dir matrius W-W'-p-admissibles, ja que el concepte depèn dels grups W i W' i del primer p, però per a simplificar la notació i com que els grups estan fixats, utilitzarem *p-admissible*.

Com sempre, podem pensar que ϕ és una matriu A amb coeficients p-àdics.

Proposició 6.1.3 *Suposem que $ab = a'b'$, Les aplicacions p-admissibles són aquelles de la forma $w'A$ amb $w' \in \widehat{W'}_p$ i amb A d'una de les formes:*

$$\textit{Cas 1:} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad\qquad \textit{Cas 2:} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textit{amb } a'\lambda = a\mu \ . \qquad\qquad \textit{amb } a\lambda = b'\mu \ .$$

Amb λ i μ a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Demostració: Sigui A una matriu p-admissible. Per la definició tenim que $AW \subset \widehat{W}'_p A$ i per tant el nucli d'A és un sub-$\widehat{\mathbb{Z}}_p$-mòdul invariant per l'acció de W de $(\widehat{\mathbb{Z}}_p)^2$. Utilitzant la proposició 5.7.4, si $A \neq 0$, llavors, pensada com a aplicació entre T_{p^∞} i ell mateix, té nucli finit, o sigui, A, com a matriu, té determinant no nul i passant per $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ si fa falta, podem calcular A^{-1}.

Considerem ara les matrius del grup de Weyl definides a l'equació (3.2). La matriu w_1w_2 té valors propis τ i τ^{-1}, on τ no és una arrel de la unitat, i només depèn del producte ab. Com que $ab = a'b'$ tenim que les quatre matrius $(w_1w_2)^{\pm 1}$ i $(w_1'w_2')^{\pm 1}$ tenen els mateixos valors propis i cap altre matriu de $\widehat{W}_p$ ni de $\widehat{W}_p'$ té aquests valors propis:

En efecte, si alguna altra matriu de $\widehat{W}_p'$ té aquests valors propis, haurà de ser una matriu de determinant 1. A la secció 5.3 hem vist que el grup $\widehat{W'}_p^+$ estava inclòs al grup d'automorfs d'una forma quadràtica q. Al càlcul d'aquests automorfs passa per diagonalitzar les matrius en una mateixa base i veure que els valors propis, considerats com a conjunts ordenats (τ, τ^{-1}), són diferents. En particular, com a molt hi ha dues matrius a $\widehat{W'}_p^+$ amb els mateixos valors propis.

Amb tot això tenim que $Aw_1w_2A^{-1} = (w_1'w_2')^{\pm 1}$.

Considerem ara l'estructura de grup $\widehat{W'}_p^+ \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ que hem vist a la proposició 5.4.2. Llavors, es dedueix que donat $w \in \widehat{W'}_p^+$, o bé és 2-divisible, o bé, ww_1w_2 és 2-divisible.

Si ara conjuguem Aw_1A^{-1} tenim $\overline{w}'w_1'$, amb $\overline{w}' \in \widehat{W'}_p^+$. Aplicant el raonament que acabem de fer, estem en una de les dues situacions següents:

Cas 1: existeix $\tilde{w}' \in \widehat{W}_p'^+$ tal que $\tilde{w}'^2 = \overline{w}$.

Cas 2: existeix $\tilde{w}' \in \widehat{W}_p'^+$ tal que $\tilde{w}'^2 = \overline{w}w_1'w_2'$.

Estudiem primer el *Cas 1*. Utilitzant que $w_1'\tilde{w}'^{-1} = \tilde{w}'w_1'$, tenim que si substituïm A per $B = \tilde{w}'^{-1}A$, aquesta matriu compleix:

$$Bw_1B^{-1} = w_1' \qquad Bw_2B^{-1} = w_2'$$

llavors, $Bw_1 = w_1'B$ i $Bw_2 = w_2'B$ i obtenim:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

amb $a'\lambda = a\mu$.

En el *Cas 2*, fem un raonament anàleg: considerem $B = w_1'(\tilde{w}')^{-1}A$. Aquesta matriu compleix

$$Bw_1B^{-1} = w_2' \qquad Bw_2B^{-1} = w_1'$$

llavors, $Bw_1 = w_2'B$ i $Bw_2 = w_1'B$, obtenint que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$

amb $a\lambda = b'\mu$. □

Proposició 6.1.4 *Sigui* $f: \widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK'}_p$*. Llavors existeix una aplicació* p*-admissible* $\rho: T_{p^\infty} \longrightarrow T'_{p^\infty}$ *tal que* $f|_{BT_{p^\infty}} \simeq Bi' \cdot B\rho$*, on* $i': T'_{p^\infty} \longrightarrow K'$ *és la inclusió del tor maximal a* K'*.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem $f|_{BT_{p^\infty}}$, aplicant el corol·lari 5.7.7, obtenim un morfisme $\rho: T_{p^\infty} \longrightarrow T'_{p^\infty}$, únic mòdul l'acció per l'esquerra de $\widehat{W'}_p$. Si escollim $\rho \cdot w$ en lloc de ρ obtenim també que $f|_{BT_{p^\infty}} \simeq Bi' \cdot B\rho \cdot Bw$, per tant, existeix $w' \in \widehat{W'}_p$ tal que $\rho \cdot w = w' \cdot \rho$ i per tant ρ és p-admissible.

□

6.2 Dependència de a i de b

Considerem a, b, a', b' enters, amb $ab > 4$ i $a'b' > 4$ i $K(a,b)$, $K(a',b')$ els corresponents grups de Kac-Moody. Fixem $q: K(a,b) \longrightarrow K(\mathbb{Z},4)$ i $q': K(a',b') \longrightarrow K(\mathbb{Z},4)$ i les classes de cohomologia que indueixen una equivalència racional (secció 4.2) i per tal de fixar la notació, podem considerar que en cada cas són els de l'equació (5.1). Llavors:

Teorema D *Siguin* a*,* b *,* a'*,* b' *enters positius. Llavors,* $BK(a,b) \simeq BK(a',b')$ *si i només si:*

1. $ab = a'b'$ *i* $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a',b')$*.*

2. *Existeix* $u \in \{a', b'\}$ *tal que* $au = A^2$*,* $A \in \mathbb{Z}$ *i per tot* p *tal que* $\nu_p(a) \neq \nu_p(u)$*, tenim que* bu *és un quadrat a* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$*.*

Abans de la demostració necessitem adaptar la proposició 4.2.1 al nostre cas:

Proposició 6.2.1 *L'aplicació*

$$l: [BK, BK'] \longrightarrow \prod_p [\widehat{BK}_p, \widehat{BK'}_p]$$

és injectiva.

La seva imatge està formada per aquelles famílies d'aplicacions $\{f_p: \widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK'}_p\}$ *complint que* $f_p^*(q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p) = \lambda(q' \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p)$ *per a tot* p*, on* λ *és un enter que no depèn de* p*.*

□

Demostració del teorema D Fixem les notacions $BK = BK(a,b)$ i $BK' = BK(a',b')$ i sigui $f\colon BK \longrightarrow BK'$ una equivalència homotòpica. Considerem a més BT el tor maximal de BK, BT' el de BK' i les notacions W i W' pels grups de Weyl.

Si $BK \simeq BK'$ llavors, agafant espais de llaços obtenim que $K \simeq K'$. Si considerem la cohomologia entera, tenim que $H^4(K;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\mathrm{mcd}(a,b)$ i $H^6(K;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(ab-1)$, per tant tenim que $ab = a'b'$ i que $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a',b')$.

Sigui ara p un primer fixat i sigui T_{p^∞} els elements d'ordre alguna potència de p dins del tor maximal. La restricció $f|_{BT_{p^\infty}}$, tal i com hem vist a la proposició 6.1.4, ve induïda per un homomorfisme $\rho\colon T_{p^\infty} \longrightarrow T'_{p^\infty}$, és a dir, existeix una matriu p-àdica M tal que, mitjançant conjugació, dóna un isomorfisme entre les representacions dels grups de Weyl: W i W'.

Aquestes matrius les hem estudiat a la secció 6.1, i havíem distingit dos casos:

$$\text{Cas a:}\quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{Cas b:}\quad M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda b' = b\mu \quad \text{i} \quad \mu a' = \lambda a. \qquad\qquad \mu b' = a\lambda \quad \text{i} \quad \lambda b = \mu a'.$$

Considerem ara la cohomologia entera de BK. Tenim que $H^4(BK;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, considerem q un generador (i sigui $q' \in H^4(BK';\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ l'anàleg a BK'). A cohomologia p-àdica veiem que $f^*(q') = \lambda\mu q$, però a cohomologia entera $f^*(q') = \pm q$, per tant, $\lambda\mu = \pm 1$. Aquesta condició implica, en el cas 1, que $\pm\frac{a}{a'}$ és un quadrat invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, i en el cas 2, que $\pm\frac{a}{b'}$ és un quadrat invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Observem que si x, y són racionals i cap dels dos no és un quadrat, existeixen infinits primers tals que ni x ni y són quadrats a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$: considerem $x = p_1/q_1$ i $y = p_2/q_2$. El fet que x sigui un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ o no es pot determinar pel símbol de Legendre $\left(\frac{p_1q_1}{p}\right)$ (quan p és senar). Llavors sabem que, si ni p_1q_1 ni p_2q_2 són quadrats, fixat r, existeix $p > r$ tal que $\left(\frac{p_1q_1}{p}\right) = \left(\frac{p_2q_2}{p}\right) = -1$ (veure, per exemple, [43]), per tant, en particular ni x ni y no seran quadrats a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. D'aquesta manera, podrem trobar infinits primers tals que ni x ni y siguin quadrats a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

En particular, això ens diu que el signe negatiu no es pot donar, és a dir $f^*(q') = q$. A més, també ens diu que un dels dos nombres, $\frac{a}{a'}$ o $\frac{a}{b'}$ ha de ser un quadrat racional. Suposem que $\frac{a}{a'} = B^2$, amb $B \in \mathbb{Q}$. Llavors $aa' = (Ba')^2$ serà un quadrat enter. Sigui p tal que $\nu_p(a) \neq \nu_p(a')$, o sigui, $\frac{a}{a'}$ no és invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, llavors, el que ha de passar és que per a aquest primer $\frac{a}{b'}$ ha de ser un quadrat invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i per tant ab' és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, per tant, les condicions *1.* i *2.* són necessàries.

Per a veure que són suficients, construirem una aplicació concreta. Suposem, doncs, que estem en els condicions *1.* i *2.*. Observem que aquestes condicions són equivalents a que per a tot p, o bé $\frac{a}{a'}$ o bé $\frac{a}{b'}$ és un quadrat invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Recordem que BK es pot obtenir com el colímit homotòpic:

$$BK = \mathrm{hocolim}(BH_2 \longleftarrow BT \longrightarrow BH_1)\ ,$$

i que si el completem, obtenim una espai X:

$$X = \mathrm{hocolim}(\widehat{(BH_2)}_p \longleftarrow \widehat{BT}_p \longrightarrow \widehat{(BH_1)}_p)$$

que és mòdul p equivalent a BK.

Per a escriure les aplicacions considerarem el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{(BG_2)}_p \arrow[ddd, dotted] & & \widehat{BT}_p \arrow[ll] \arrow[ddd, "M_2"'] & & \widehat{BT}_p \arrow[rr] \arrow[ddd, "M_1"] & & \widehat{(BG_1)}_p \arrow[ddd, dotted] \\
& \widehat{(BH_2)}_p \arrow[ul] \arrow[d, dotted] & & \widehat{BT}_p \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[ul, "\varphi_2"'] \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[d, "M"'] & & \widehat{(BH_1)}_p \arrow[ur] \arrow[d, dotted] & \\
& \widehat{(BH'_{\sigma(2)})}_p \arrow[dl] & & \widehat{BT'}_p \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dl, "\varphi'_{\sigma(2)}"] \arrow[dr, "\varphi'_{\sigma(1)}"'] & & \widehat{(BH'_{\sigma(1)})}_p \arrow[dr] & \\
\widehat{(BG'_{\sigma(2)})}_p & & \widehat{BT'}_p \arrow[ll] & & \widehat{BT'}_p \arrow[rr] & & \widehat{(BG'_{\sigma(1)})}_p
\end{tikzcd}$$

on:

- G_i i G'_i representen $S^3 \times S^1$ o bé $U(2)$, depenent de la paritat dels coeficients a, b, a' i b'.

- Les aplicacions φ_i i φ'_i són les aplicacions a nivell del tor, i que donarem com matrius 2×2 que donen l'equivalència homotòpica de BH_i amb BG_i i BH'_i amb BG'_i. Aquestes aplicacions ja les hem definit a la proposició 3.3.1.

- Les aplicacions horitzontals són les inclusions dels tors maximals en cada cas, tenint en compte que si l'espai d'arribada és BH_i (respectivament BH'_i) estem parlant del tor maximal del grup de Kac-Moody BK (respectivament BK').

- Les aplicacions M, M_1 i M_2 són aplicacions a nivell dels tors maximals, amb M_i (per a $i \in \{1, 2\}$) aplicacions admissibles (en el sentit de grups de Lie compactes), de BH_i a $BH'_{\sigma(i)}$, que donaran l'existència i unicitat de les aplicacions puntejades entre els BG_i i $BG_{\sigma(i)}$, tal i com hem vist a la secció 4.5. Utilitzarem la notació matricial per a denotar les aplicacions entre els BG_i i $BG_{\sigma(i)}$.

- La commutativitat de la part del diagrama dels tors maximals ens assegura l'existència de les aplicacions entre els push-outs corresponents, per tant, entre els completats dels espais classificadors dels grups de Kac-Moody BK i BK'. Les obstruccions a la unicitat de les aplicacions, segons hem vist a la secció 4.4, viuran a un quocient del grup:

  $$\pi_1(\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK'}_p), f) .$$

  Hem vist, que en el cas d'aplicacions no homotopes a constant, utilitzant els corol·laris 5.7.7 i 5.7.3, tenim que

  $$\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK'}_p)_f \simeq \widehat{BT}_p ,$$

  i per tant el grup fonamental és zero.

Per tal de simplificar la notació, escriurem en cada cas la part del diagrama que ens interessa, per tant:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{(BG_2)}_p \arrow[d, "M_2"] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "M"'] & \widehat{(BG_1)}_p \arrow[d, "M_1"'] \\
\widehat{(BG'_{\sigma(2)})}_p & \widehat{BT'}_p \arrow[l, "\varphi'_{\sigma(2)}"] \arrow[r, "\varphi'_{\sigma(1)}"'] & \widehat{(BG'_{\sigma(1)})}_p
\end{tikzcd}$$

Cas 1: Considerem primer el cas a i b parelles (el que implica a' i b' parelles). En aquest cas tenim que $BH_i \simeq B(S^3 \times S^1)$, i l'equivalència homotòpica l'hem vista a la proposició 3.3.1.

Suposem també que aa' és un quadrat enter, per tant, $\frac{a}{a'} = \lambda^2$, amb $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Sigui p un primer tal que $\nu_p(a) = \nu_p(a')$. Llavors λ és un invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Considerem doncs el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
B\widehat{(S^3 \times S^1)}_p \arrow[d, "\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} \frac{-a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{-b}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}"'] & B\widehat{(S^3 \times S^1)}_p \arrow[d, "\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}"] \\
B\widehat{(S^3 \times S^1)}_p & \widehat{BT'}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} \frac{-a'}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{-b'}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & B\widehat{(S^3 \times S^1)}_p
\end{tikzcd}$$

Tal i com ja hem comentat tan sols cal comprovar que aquests diagrama és commutatiu i això consisteix en veure que les multiplicacions de les matrius coincideix.

Sigui ara p primer tal que $\nu_p(\lambda) \neq 0$. Per hipòtesis, ab' és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, per tant, com que $ab' = \frac{a'(b')^2}{b}$ i $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a',b')$, llavors $\frac{b}{a'} = \mu^2$, amb μ una unitat de $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. En aquest cas el diagrama queda:

$$\begin{tikzcd}
B(\widehat{S^3 \times S^1})_p \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} \frac{-a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{-b}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}"'] & B(\widehat{S^3 \times S^1})_p \arrow[d, "\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}"] \\
B(\widehat{S^3 \times S^1})_p & \widehat{BT'}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{-b'}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} \frac{-a'}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & B(\widehat{S^3 \times S^1})_p
\end{tikzcd}$$

i també els diagrames són commutatius i ens dóna aplicacions entre els subgrups parabòlics i aquestes aplicacions també estenen a una aplicació de $\widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK'}_p$.

Amb això ja acabem el cas a i b parells, ja que si el quadrat a $\mathbb{Z}$ és ab', llavors sortirien els mateixos diagrames, però intercanviant BH_1' per BH_2' als espais d'arribada.

Cas 2: Considerem ara el cas en que a i b són senars (per tant, a' i b' també són senars).

Suposem també que aa' és un quadrat enter i per tant, $\frac{a}{a'} = \lambda^2$, amb $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Sigui p un primer tal que $\nu_p(\lambda) = 0$, llavors λ és invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Considerem el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{BU(2)}_p \arrow[d, "\begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} & \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} \\ \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} & \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \end{pmatrix}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} \frac{1-a}{2} & 1 \\ \frac{1+a}{2} & -1 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b}{2} \\ -1 & \frac{1+b}{2} \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}"'] & \widehat{BU(2)}_p \arrow[d, "\begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} & \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} \\ \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} & \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \end{pmatrix}"] \\
\widehat{BU(2)}_p & \widehat{BT'}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} \frac{1-a'}{2} & 1 \\ \frac{1+a'}{2} & -1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b'}{2} \\ -1 & \frac{1+b'}{2} \end{pmatrix}"'] & \widehat{BU(2)}_p
\end{tikzcd}$$

També tenim les aplicacions entre subgrups parabòlics i que l'aplicació estén a una de $\widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK'}_p$.

Sigui ara p un primer tal que $\nu_p(\lambda) \neq 0$, per tant, $\frac{b}{a'} = \mu^2$, on μ és invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Considerem el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\widehat{BU(2)}_p \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \frac{1+\mu^2}{2\mu} & \frac{1-\mu^2}{2\mu} \\ \frac{1-\mu^2}{2\mu} & \frac{1+\mu^2}{2\mu} \end{pmatrix}}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "{\begin{pmatrix} \frac{1-a}{2} & 1 \\ \frac{1+a}{2} & -1 \end{pmatrix}}"'] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b}{2} \\ -1 & \frac{1+b}{2} \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}}"'] & \widehat{BU(2)}_p \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \frac{1+\mu^2}{2\mu} & \frac{\mu^2-1}{2\mu} \\ \frac{\mu^2-1}{2\mu} & \frac{1+\mu^2}{2\mu} \end{pmatrix}}"] \\
\widehat{BU(2)}_p & \widehat{BT}'_p \arrow[l, "{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b'}{2} \\ -1 & \frac{1+b'}{2} \end{pmatrix}}"] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} \frac{1-a'}{2} & 1 \\ \frac{1+a'}{2} & -1 \end{pmatrix}}"'] & \widehat{BU(2)}_p
\end{tikzcd}
$$

i obtenim exactament els mateixos resultats que fins ara.
Cas 3: Suposem que un dels dos és parell. Per tal de fixar els diagrames, considerarem a parella, b senar, a' parella i b' senar.

Com fins ara, treballem amb els primers tals que $\frac{a}{a'} = \lambda^2$, on λ és invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. En aquests primers, el diagrama que ens dóna l'aplicació de BK a BK' és:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
B(\widehat{S^3 \times S^1})_p \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "{\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}"'] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b}{2} \\ -1 & \frac{1+b}{2} \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}}"'] & \widehat{BU(2)}_p \arrow[d, "{\begin{pmatrix} \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} & \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} \\ \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} & \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} \end{pmatrix}}"] \\
B(\widehat{S^3 \times S^1})_p & \widehat{BT}'_p \arrow[l, "{\begin{pmatrix} -\frac{a'}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}"] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b'}{2} \\ -1 & \frac{1+b'}{2} \end{pmatrix}}"'] & \widehat{BU(2)}_p
\end{tikzcd}
$$

Finalment considerem el cas en que $\frac{a}{a'}$ no és un quadrat invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Llavors $\frac{b}{a'}$ ha de ser un quadrat invertible a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, per tant, p ha de ser senar i escrivim $\frac{b}{a'} = \mu^2$. Per a als primers senars p tenim la següent equivalència homotòpica γ:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\widehat{BT}_p \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}"] \arrow[d] & \widehat{BT}_p \arrow[d] \\
(\widehat{BS^3 \times BS^1})_p \arrow[r, "\gamma"] & \widehat{BU(2)}_p
\end{tikzcd}
$$

que farà que el diagrama següent sigui commutatiu:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & B\widehat{(S^1\times S^3)}_p \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, dotted] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b}{2} \\ -1 & \frac{1+b}{2} \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}"'] & B\widehat{(U_2)}_p \arrow[dr, "\begin{pmatrix} \frac{1+\mu^2}{2\mu} & \frac{\mu^2-1}{2\mu} \\ \frac{\mu^2-1}{2\mu} & \frac{1+\mu^2}{2\mu} \end{pmatrix}"] \arrow[d, dotted] & \\
\widehat{BU(2)}_p \arrow[r, "\begin{pmatrix} \frac{1+\mu^2}{2\mu} & \frac{1-\mu^2}{2\mu} \\ \frac{1-\mu^2}{2\mu} & \frac{1+\mu^2}{2\mu} \end{pmatrix}"'] & \widehat{BU(2)}_p & \widehat{BT'}_p \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-b'}{2} \\ -1 & \frac{1+b'}{2} \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} -\frac{a'}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & B\widehat{(S^3\times S^1)}_p & \widehat{BU(2)}_p \arrow[l, "\gamma^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

on les fletxes puntejades són la composició de les aplicacions exteriors.

Per tant, fins ara, hem construït una equivalència homotòpica $f_p\colon \widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK'}_p$ per a tot p.

Llavors una aplicació $f_p\colon \widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK'}_p$ em donarà una aplicació, que anomenem igual, $f_p\colon BK \longrightarrow \widehat{BK'}_p$. Llavors cal veure quines condicions de compatibilitat s'han de complir per a que aquesta aplicació pugi a $f\colon BK \longrightarrow BK'$, però aquestes condicions són les de la proposició 6.2.1, i hem de calcular l'enter λ corresponent, en el nostre cas. Com que hem utilitzat q i q' tal i com estan definits a l'equació (5.1), tenim:

$$f_p^*(q') = q$$

per a tots els primers, per tant, $\lambda_p = 1$.

A més, l'aplicació estén a una equivalència homotòpica: podem definir les inverses homotòpiques a cada peça del push-out i així tindrem, per a cada primer p, una aplicació de $\widehat{BK}_p$ en ell mateix que a cada un dels elements del push-out és homotopa a la identitat. Per a estendre l'homotopia necessitem comprovar que, tal i com hem vist a la secció 4.4 i ja hem fet servir al principi d'aquesta demostració:

$$\pi_1(\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK'}_p), f) = 0\,.$$

i com que estem en el cas d'aplicacions no homotopes a constant, utilitzant els corol·laris 5.7.7 i 5.7.3 obtenim que

$$\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK'}_p)_f \simeq \widehat{BT}_p$$

i per tant el grup fonamental és zero.

$\square$

Corol·lari 6.2.2 *Existeixen grups de Kac-Moody no isomorfs amb espais classificadors homotops.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem els grups de Kac-Moody $K = K(1, 225)$ i $K' = K(9, 25)$. Per la proposició 3.7.1 tenim que no són isomorfs, però en canvi, es compleixen les condicions del teorema D: el màxim comú divisor i el producte dels coeficients són el mateix i com que tot són quadrats sobre $\mathbb{Z}$, la segona condició es verifica automàticament.

$\square$

Capítol 7

Aplicacions de BK a BK

Considerem $K = K(a,b)$ un grup de Kac-Moody, amb $ab > 4$ i BK el seu espai classificador. A l'estudi de les aplicacions és natural considerar com es llegeix a cohomologia entera. Sigui doncs $f\colon BK \longrightarrow BK$ una aplicació contínua. Considerem

$$f^*\colon H^*(BK;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(BK;\mathbb{Z}) ,$$

l'aplicació induïda a cohomologia. Observem que el primer grup de cohomologia no trivial és $H^4(BK;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, generat per un element que anomenem x_4. Això ens porta a la següent definició:

Definició 7.0.3 *Sigui $f\colon BK \longrightarrow BK$, definim el* grau de f *com l'enter g tal que $f^*(x_4) = gx_4$*

Al llarg d'aquest capítol estudiarem quins són els possibles graus, i veurem que, en general, el grau no caracteritza el tipus d'homotopia de l'aplicació.

7.1 Aplicacions nulhomotopes

A aquest apartat estudiarem les aplicacions homotopes a constant.

Considerem P un grup p-toral, o sigui, P és l'extensió:

$$T \rightarrowtail P \twoheadrightarrow \pi ,$$

amb T un tor i π un p-grup finit.

Utilitzarem les notacions T_{p^n} per al subgrup del tor format pels elements d'ordre un divisor de p^n, P_{p^n} l'extensió:

$$T_{p^n} \rightarrowtail P_{p^n} \twoheadrightarrow \pi ,$$

i T_{p^∞}, P_{p^∞} els límits d'aquests subgrups quan n tendeix a infinit.

Proposició 7.1.1 *Sigui $f\colon BK \longrightarrow \widehat{BK}_p$ una aplicació contínua tal que $f|_{BT_{p^\infty}}$ és homotopa a constant. Llavors $f|_{BP_{p^\infty}}$ és homotopa a constant per a tot P subgrup p-toral de K.*

Demostració: Sigui $x \in K$. Considerem $xT_{p^\infty}x^{-1}$ els conjugats del tor maximal.

Vegem primer que f és homotopa a constant quan restringim a P_{p^n} per a tot n: aplicant el teorema 5.7.1 existeix una representació $\rho_n\colon P_{p^n} \longrightarrow K$ tal que $f|_{BP_{p^n}} \simeq B\rho$. Considerem el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
B(xT_{p^n}x^{-1} \cap P_{p^n}) \arrow[r] \arrow[ddr] & BP_{p^n} \arrow[r, "B\rho_n"] \arrow[d] & \widehat{BK}_p \\
 & BK \arrow[r, "BC_x \simeq \mathrm{Id}"'] & BK \arrow[u, "f"'] \\
 & B(xT_{p^n}x^{-1}) \arrow[r, "BC_x"'] \arrow[u] & BT_{p^n} \arrow[u] \arrow[uu, bend right, "*"']
\end{tikzcd}$$

on tots els morfismes que no tenen etiqueta són les aplicacions induïdes per les inclusions i C_x és la conjugació per x. Per tant, si $i\colon xT_{p^n}x^{-1} \cap P_{p^n} \rightarrowtail P_{p^n}$ és la inclusió, $B(\rho_n \cdot i)$ és homotopa a constant, i per tant $\rho_n \cdot i = 1$.

Si ara fem variar les $x \in K$ i apliquem el corol·lari 2.9.3, que ens diu que tot element d'un subgrup p-toral es pot conjugar al tor maximal, tenim que $\rho_n = 1$.

D'aquesta manera podrem construir un element del límit invers: $\rho\colon P_{p^\infty} \longrightarrow K$, que serà l'aplicació trivial. Si volem veure que $B\rho \simeq f|_{BP_{p^\infty}}$ hem de comprovar que el següent límit invers s'anul·la:

$$\varprojlim{}^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BP_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{B\rho_n}\,.$$

Però utilitzant altre com el teorema 5.7.1 tenim que $\mathrm{Map}(BP_{p^n}, \widehat{BK}_p)_{B\rho_n} \simeq \widehat{BK}_p$ i és simplement connex, per tant el límit invers és zero.

$\square$

Lema 7.1.2 *Sigui p senar i $\mathcal{M}$ un $\mathbb{Z}_{(p)}[W]$-mòdul. Llavors $H^j(W;\mathcal{M}) = 0$ per a $j \geq 2$. Si l'acció de W sobre $\mathcal{M}$ és trivial, llavors $H^j(W;\mathcal{M}) = 0$ per a $j \geq 1$.*

Demostració: El grup de Weyl $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ també es pot pensar com $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per tant, com l'extensió de $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}/2$ amb acció no trivial:

$$\mathbb{Z} \rightarrowtail W \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Com que $\mathcal{M}$ és un $\mathbb{Z}_{(p)}$-mòdul amb p senar, la successió espectral de Serre estaciona a E_2 i tenim l'isomorfisme

$$H^*(W;\mathcal{M}) = H^*(\mathbb{Z};\mathcal{M})^{\mathbb{Z}/2}\,.$$

Considerem ara G un grup isomorf a $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ amb t una variable i tenim la resolució $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ projectiva:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Per tant, independentment de l'acció de W sobre $\mathcal{M}$, tenim que $H^j(W;\mathcal{M}) = 0$ per a $j \geq 2$. Per a l'acció de W sobre $\mathcal{M}$ trivial, tenim que hem de calcular l'homologia del complex de cadenes:

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M} \to 0$$

i per tant $H^j(\mathcal{M}) = 0$ per a $j \geq 1$.

$\square$

Els següent resultat és vàlid per a grups de Kac-Moody en general, per tant, utilitzarem la notació L en lloc de K:

Proposició 7.1.3 *Sigui P un grup p-toral i L un grup de Kac-Moody. Tenim l'equivalència homotòpica:*

$$\mathrm{Map}(BP, \widehat{BL}_p)_* \simeq \widehat{BL}_p\,,$$

on $\mathrm{Map}(BP, \widehat{BL}_p)_*$ *és la component de l'aplicació constant.*

Demostració: Observem que si P és un p-grup finit es dedueix directament del teorema 5.7.1, per tant, només cal estendre aquest resultat al cas P no finit. Considerem P_{p^n}, tal que $\widehat{BP}_p \simeq_p BP_{p^\infty} = \mathrm{hocolim} BP_{p^n}$.

Per a cada n, aplicant altre cop el teorema 5.7.1, tenim l'equivalència homotòpica:

$$\widehat{BL}_p \simeq \mathrm{Map}(BP_{p^n}, \widehat{BL}_p)_*$$

induïda per l'aplicació que a cada punt x de $\widehat{BL}_p$ li assignem l'aplicació constant $y \mapsto x$ per a tot y de BP_{p^n}.

Això ens donarà el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, equal] & \vdots \\
\widehat{BL}_p \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Map}(BP_{p^n}, \widehat{BL}_p)_* \arrow[u] \\
\widehat{BL}_p \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Map}(BP_{p^{n+1}}, \widehat{BL}_p)_* \arrow[u] \\
\vdots & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Com que tot són equivalències homotòpiques, aquest diagrama ens donarà una equivalència homotòpica de $\widehat{BL}_p$ a $\mathrm{Map}(BP, \widehat{BL}_p)_*$.

$\square$

Tornem ara a considerar K un grup de Kac-Moody de rang 2.

Proposició 7.1.4 *Sigui $f\colon BK \longrightarrow \widehat{BK}_p$ una aplicació tal que $f|_{BP_{p^\infty}}$ és homotopa a constant per a tot P subgrup p-toral. Llavors f és homotopa a constant.*

Demostració: Considerem dos casos molt diferents: quan $p > 2$ i quan $p = 2$.
Cas 1: En el cas p senar podem utilitzar l'equivalència homotòpica induïda per la inclusió del normalitzador del tor maximal i que hem vist als teoremes de la secció 4.1:

$$\widehat{BK}_p \simeq \widehat{BNT}_p \simeq B(\widehat{T \rtimes W})_p \simeq (\widehat{BT_{hW}})_p \,.$$

Considerem l'espai

$$\mathrm{Map}(BK, \widehat{BK}_p)_{\overline{0}} = \left\{ g\colon BK \longrightarrow \widehat{BK}_p \,\middle|\, g|_{BT_{p^\infty}} \simeq * \right\} \,,$$

i l'objectiu és veure que és connex.

Tenim les equivalències següents:

$$\mathrm{Map}(BK, \widehat{BK}_p)_{\overline{0}} \simeq \mathrm{Map}(BT_{hW}, \widehat{BK}_p)_{\overline{0}} \simeq \mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)^{hW}_{\overline{0}} \,.$$

Considerem l'aplicació de $\widehat{BK}_p \longrightarrow \mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)$ que a cada $x \in \widehat{BK}_p$ li correspon l'aplicació constant x. Aquesta indueix una equivalència homotòpica equivariant respecte l'acció de W, per tant, tenim:

$$\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p)^{hW}_{\overline{0}} \simeq (\widehat{BK}_p)^{hW} \simeq \mathrm{Map}(BW, \widehat{BK}_p) \,,$$

on a l'última igualtat hem utilitzat que l'acció de W a $\widehat{BK}_p$ és trivial.

Utilitzem ara que $BW \cong B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \vee B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per tant, les aplicacions puntejades:

$$\mathrm{Map}_*(BW, \widehat{BK}_p) \simeq \mathrm{Map}_*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{BK}_p)^2 \simeq * \,.$$

Amb tot això tenim que $\mathrm{Map}(BK, \widehat{BK}_p)_{\overline{0}} \simeq \mathrm{Map}(BW, \widehat{BK}_p) \simeq \widehat{BK}_p$ i en particular és connex.

Cas 2: En el cas $p = 2$, considerem H_i els dos subgrups parabòlics de K, que ja sabem que són isomorfs a $S^3 \times S^1$ o bé a $U(2)$. En els dos casos considerem la projecció $f_i\colon H_i \longrightarrow SO(3)$.

Jackowski i McClure van descriure la descomposició mòdul 2 de $BSO(3)$ i a la secció 4.6 hem vist com estendre-la a una de BH_i, per a cada i. Denotem per P_i^1 i P_i^2 els grups 2-torals que hi intervenen, obtenint el colímit homotòpic:

$$\Sigma_3 \circlearrowleft BP_i^1 \overset{\mathbb{Z}/2\backslash\Sigma_3}{\Longrightarrow} BP_i^2 \;.$$

Considerem ara $f|_{BP_i^j}\colon BP_i^j \longrightarrow \widehat{BK}_2$, on $i, j \in \{1, 2\}$. Com que BP_i^j són 2-torals tenim que $f|_{BP_i^j}$ són homotopes a constant. Com que BH_i és un colímit homotòpic d'aquests espais, per a veure que $f|_{BH_i}$ també són homotopes a constant, només cal comprovar que uns límits superiors s'anul·len. Aquesta categoria ja l'hem estudiada al lema 4.6.2 i hem vist que l'únic límit superior possible és el $\varprojlim^1$ i que aquest és un quocient de:

$$\pi_1\mathrm{Map}(BP_i^1, \widehat{BK}_2)_*^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \Big/ \pi_1\mathrm{Map}(BP_i^1, \widehat{BK}_2)_*^{\Sigma_3} \,.$$

Però, segons la proposició 7.1.3, $\mathrm{Map}(BP_i^1, \widehat{BK}_p)_*$ és homotop a $\widehat{BK}_p$ i en particular, és simplement connex.

Per tant de moment tenim que $f|_{BH_i}$ és homotopa a constant.

Per a veure que f és homotopa a constant tornem a tenir la mateixa dificultat d'abans, però ara la categoria és la corresponent a un push-out homotòpic, i en aquest cas l'obstrucció és a $\varprojlim^1 \pi_1(\mathrm{Map}(BH_i, \widehat{BK}_2), *)$ i només hem de veure que és zero. Aquest problema ja l'hem estudiat a la secció 4.4, i hem vist que aquest límit invers és un quocient de $\pi_1(\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_p), *)$. Aquest espai l'hem estudiat a 7.1.3 i és homotop a $\widehat{BK}_p$, per tant, en particular, és simplement connex.

□

Teorema E *Sigui $f\colon BK \longrightarrow BK$ una aplicació. Les tres afirmacions següents són equivalents:*

1. *f és homotopa a l'aplicació constant.*
2. *$f|_{BT}$ és homotopa a l'aplicació constant.*
3. *f és una aplicació de grau 0.*

Demostració: Clarament 1. $\Longrightarrow$ 2. $\Longrightarrow$ 3., per tant, falten les implicacions contràries.

Per a veure 3. $\Longrightarrow$ 2. observem que per a cada p, $f|_{BT_{p^\infty}}$ tal i com hem vist a la proposició 6.1.4, correspon a una matriu p-admissible, per tant de la forma $A \cdot w$, on w és del grup de Weyl i A és de la forma:

$$\text{cas 1:} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{cas 2:} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{amb } a'\lambda = a\mu \ , \qquad \text{amb } a\lambda = b'\mu \ ,$$

amb λ i μ a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. En els dos casos el grau de l'aplicació és $\lambda\mu$, i per tant, si és 0, tenim que $f|_{BT_{p^\infty}}$ és homòtopa a constant per a tots els primers p i, utilitzant la proposició 4.2.1 ($H^3(BT;\mathbb{Q}) = 0$), tenim el resultat que volem.

Finalment, demostrem 2. $\Longrightarrow$ 1.:

Si $f|_{BT}$ és homotopa a constant, llavors $f_p|_{BT_{p^\infty}}\colon BT_{p^\infty} \longrightarrow \widehat{BK}_p$ també és homotopa a constant per a tot p. Utilitzant les proposicions 7.1.1 i 7.1.4, obtenim que $f_p\colon BK \longrightarrow \widehat{BK}_p$ ha de ser homotopa a constant.

Observem que $H^3(BK;\mathbb{Q}) = 0$, per tant podem aplicar altre cop la proposició 4.2.1, que diu que l'aplicació:

$$l\colon [BK, BK] \longrightarrow \prod_p [BK, \widehat{BK}_p]$$

és injectiva, i obtenim que f és homotopa a constant.

□

7.2 Aplicacions d'Adams ordinàries

En aquest cas volem estudiar l'existència de les aplicacions d'Adams per a grups de Kac-Moody.

Recordem que si G és un grup de Lie i BG el seu espai classificador, una *operació d'Adams* de tipus λ, és una aplicació $\varphi^\lambda\colon BG \longrightarrow BG$ complint que indueix una multiplicació per λ^n a nivell de $H^{2n}(BG;\mathbb{Q})$.

Sullivan va construir aquestes aplicacions per a $G = U(n)$ i λ coprimer amb $n!$ a [44], llavors Friedlander [19] i Wilkerson [46] van construir-les per la resta dels grups de Lie compactes i connexes, amb la condició que λ fos coprimer amb $|W|$.

La unicitat de les aplicacions d'Adams va ser demostrada per Mislin en el cas S^3 a [34], i en el cas general per Jackowski, McClure i Oliver a [23].

Finalment la no existència de les aplicacions d'Adams per a λ no coprimer amb $|W|$ va ser demostrada per K. Ishiguro a [21].

En el cas dels grups de Kac-Moody de rang 2, demostrarem el resultat anàleg, que és l'existència de les aplicacions d'Adams per a λ coprimer amb 2, que és l'únic primer que apareix a la torsió de W.

Per a donar la definició d'aplicació d'Adams ordinària, utilitzarem la notació L per al grup de Kac-Moody, ja que la definició és també vàlida per a rangs superiors.

Definició 7.2.1 *Direm que* $\varphi^\lambda : BL \longrightarrow BL$ *és una* aplicació d'Adams ordinària *si* φ^λ *estén, mòdul homotopia, l'aplicació* $B\rho : BT_L \longrightarrow BT_L$*, on* T_L *és el tor maximal de* L *i* $\rho : T_L \longrightarrow T_L$ *és l'homomorfisme* $t \mapsto t^\lambda$*.*

Observem que no diem que les aplicacions siguin úniques, ni que existeixin, sinó que tan sols donem una definició per a que una aplicació sigui considerada una aplicació d'Adams ordinària.

Les aplicacions d'Adams ordinàries, igual que al cas de grups de Lie compactes formen un monoid amb la composició isomorf al monoid dels enters amb la multiplicació, ja que $\varphi^\lambda \varphi^\mu = \varphi^{\lambda\mu}$.

7.2.1 Existència d'aplicacions d'Adams ordinàries φ^λ amb λ senar

Considerem $K(a, b)$ un grup de Kac-Moody de rang 2 i els subgrups parabòlics compactes, que poden ser $B(S^3 \times S^1)$ o bé $BU(2)$. En els dos casos tenim que el grup de Weyl és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per tant, existeixen les aplicacions d'Adams (són grups de Lie compactes) amb λ positiu i senar a nivell de grups parabòlics. De fet, tenim el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
BH_1 \arrow[d, "\varphi_1^\lambda"'] & BT \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0^\lambda"] & BH_2 \arrow[d, "\varphi_2^\lambda"] \\
BH_1 & BT \arrow[l] \arrow[r] & BH_2
\end{tikzcd}$$

i per tant podem estendre l'aplicació a una aplicació $\varphi^\lambda : BK \longrightarrow BK$

Proposició 7.2.2 *Sigui* λ *un nombre senar. Llavors existeix una aplicació d'Adams ordinària:*

$$\varphi^\lambda : BK \longrightarrow BK$$

Demostració: El raonament que acabem de fer és la demostració per a $\lambda > 0$, per tant, tan sols cal veure que existeix φ^{-1}, i això ens ho dóna l'estudi dels automorfismes externs que van fer Kac i Wang a [30] i que ja hem comentat a la secció 3.5.

□

7.2.2 No existència d'aplicacions d'Adams ordinàries φ^λ amb λ parell

Aquest apartat és vàlid per a qualsevol grup de Kac-Moody, no només els de rang 2.

Sigui doncs L un grup de Kac-Moody, BL el seu espai classificador i W el seu grup de Weyl.

Teorema F *Suposem que tenim una aplicació d'Adams ordinària: $\varphi^\lambda\colon BL \longrightarrow BL$. Suposem també que el grup de Weyl té algun element d'ordre p, o sigui, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset W$. Llavors p no divideix a λ.*

Demostració: Considerem $g \in L$ un element d'ordre una potència de p, o sigui $|\langle g\rangle| = p^k$ per a certa k. Conjuguem aquest element per tal de portar-lo al tor maximal (ho podem fer pel corol·lari 2.9.3) i considerem la composició:

$$\begin{tikzcd} B\langle g\rangle \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "*"'] & BK \arrow[r, "(\varphi^\lambda)^k"] & BL \end{tikzcd} .$$

Considerem $w \in W$ un element d'ordre p. Sigui $\tilde{w}$ un representant de w a $N_L(T)$. Agafem $\tilde{w}$ d'ordre p si $p > 2$ i d'ordre 4 per a $p = 2$ (segons la notació del teorema 2.8.5 considerem, per exemple, $z_s(0)$ que tindrà ordre 4). Veiem que $(\varphi^\lambda)^2|_{B\langle\tilde{w}\rangle}$ és homotopa a constant.

Sigui ara n prou gran tal que w actuï no trivialment sobre els elements d'ordre p^n del tor maximal, i sigui N el subgrup de L generat per aquests elements i $\tilde{w}$. És un p-grup finit, per tant, $(\varphi^\lambda)^2|_{BN} \simeq B\rho$, on $\rho\colon N \to K$ és una representació.

Tenim la igualtat:

$$\tilde{w}t^{\lambda^2}\tilde{w}^{-1} = \rho(\tilde{w}t\tilde{w}^{-1}) = \rho(\tilde{w})\rho(t)\rho(\tilde{w})^{-1} = \rho(t) = t^{\lambda^2} .$$

Podem agafar n prou gran tal que w actuï no trivialment sobre algun element de la forma t^{λ^2} i per tant tenim una contradicció.

$\square$

Corol·lari 7.2.3 *Si K és un grup de Kac-Moody de rang 2, no hi ha aplicacions d'Adams φ^λ, amb λ parell.*

Demostració: Si el grup de Kac-Moody és de rang 2, tenim que $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, per tant, els únics subgrups finits de W són isomorfs a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, i per tant 2 és l'únic primer que no pot dividir l'ordre d'una aplicació d'Adams.

$\square$

7.3 Aplicacions d'Adams parabòliques

Recordem que podem obtenir el grup de Kac-Moody de rang 2 com un push-out de subgrups parabòlics compactes:

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & BH_1 \arrow[d] \\ BH_2 \arrow[r] & BK \end{tikzcd}$$

Amb φ_1 i φ_2 tal i com estan definides a la proposició 3.3.1.

Considerem ara aplicacions no homotopes a constant entre els dos push-outs de tal manera que les aplicacions creuin BH_1 i BH_2:

$$\begin{tikzcd} BT \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] \arrow[drr] & BH_1 \arrow[drrr] & & \\ BH_2 \arrow[drr] & & BT \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & BH_2 \\ & & BH_1 & \end{tikzcd}$$

Per tant, s'han de fer commutatius dos diagrames on hi apareixen la a i la b. Per això haurem de distingir els dos casos possibles:

a) Cas en que a i b són parelles:

En aquest cas tenim que $BH_i \cong B(S^3 \times S^1)$ i les equivalències les podem llegir a nivell de tor maximal a les matrius de la proposició 3.3.1. Denotem per BT_1 i BT_2 els tors maximals de BH_1 i BH_2 respectivament. El problema queda reduït a trobar les matrius M que compleixen el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] BT_2 \arrow[d, "\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}"'] & BT \arrow[l, "\begin{pmatrix} -a/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & -b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "M"] & BT_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}"] \\ BT_1 & BT \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1 & -b/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} -a/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & BT_2 \end{tikzcd}$$

On tots els coeficients són enters i a més γ i λ han de ser senars.

Si fems els càlculs necessaris obtenim que $\gamma = \mu$, $\lambda = \delta$ i la matriu M queda de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

amb λ i μ senars i tals que $a\mu = b\lambda$.

b) Cas en que a i b són senars:

En aquest cas tenim que $BH_i \cong BU(2)$ i si fem el mateix que al cas anterior tenim que l'aplicació M a nivell del tor maximal la tenim al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
BT_2 \arrow[d, "\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}"'] & BT \arrow[l, "\begin{pmatrix} (1-a)/2 & 1 \\ (1+a)/2 & -1 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & (1-b)/2 \\ -1 & (1+b)/2 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "M"] & BT_1 \arrow[d, "\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}"] \\
BT_1 & BT \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1 & (1-b)/2 \\ -1 & (1+b)/2 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} (1-a)/2 & 1 \\ (1+a)/2 & -1 \end{pmatrix}"'] & BT_2
\end{tikzcd}$$

On γ i δ han de tenir paritat diferent i també λ i μ. Si ara estudiem les equacions que fan commutatiu aquest diagrama, obtenim que $\lambda = \gamma$ i $\mu = -\delta$ queda que la matriu M ha de ser de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma - \delta \\ \gamma + \delta & 0 \end{pmatrix},$$

amb $\gamma - \delta$ i $\gamma + \delta$ senars i tals que $a(\gamma - \delta) = b(\gamma + \delta)$.

Observació 7.3.1 Veurem més endavant, a la demostració de la proposició 7.3.3, que els casos amb a i b de paritat diferent no cal considerar-los.

Definició 7.3.2 *Anomenem* aplicació d'Adams parabòlica *a una aplicació*

$$\varphi^{\alpha,\beta} \colon BK \to BK,$$

que estengui l'aplicació definida a nivell del tor maximal per la matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

amb α i β enters.

Proposició 7.3.3 *Existeix una aplicació d'Adams parabòlica $\varphi^{\alpha,\beta}$ si i només si α i β són senars i $a\alpha = b\beta$.*

DEMOSTRACIÓ: Els diagrames que acabem de veure demostren l'existència de les aplicacions sota les condicions α i β senars i $a\alpha = b\beta$. Observem que en particular, si es compleixen aquestes condicions, a i b tenen la mateixa paritat.

Suposem ara que l'aplicació a nivell del tor maximal $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ estén a una aplicació de $\psi^{\alpha,\beta}\colon BK \longrightarrow BK$, es compleix que la composició $\psi^{\alpha,\beta} \cdot \psi^{\alpha,\beta} = \psi^{\alpha\beta}$, o sigui, una aplicació d'Adams ordinària de tipus $\alpha\beta$, per tant α i β han de ser senars.

Finalment la condició $a\alpha = b\beta$ es dedueix del fet que l'aplicació $\psi^{\alpha,\beta}$ ha de ser p-admissible, en el sentit de la secció 6.1, per a qualsevol p.

□

Observem que tan sols hem definit l'aplicació a partir d'un colímit homotòpic, per tant, les obstruccions a l'existència viuen a $H^i(\mathcal{C}; \pi_{i-1})$, $i \geq 2$. Hem estudiat aquestes obstruccions a la secció 4.4 i sabem que són zero.

De moment, igual que amb les aplicacions d'Adams ordinàries, no podem afirmar la unicitat d'aquestes.

7.4 Aplicacions d'Adams genèriques

Totes les aplicacions de BK a BK que hem construït fins ara utilitzen només l'existència de certes aplicacions entre els grups parabòlics. Igual que passava a l'estudi de les aplicacions de BT a BK, poden aparèixer noves aplicacions que es construeixen primer a nivell dels p-completats i després es poden estendre a BK.

Comencem veient el cas local de les dues seccions anteriors, o sigui, quines possibles aplicacions d'Adams ordinàries i parabòliques tenim entre els p-completats.

Definició 7.4.1 *Direm que $\varphi^\lambda\colon \widehat{BK}_p \to \widehat{BK}_p$ és una* aplicació d'Adams ordinària *si estén l'aplicació de $\widehat{(BT_K)}_p$ en ell mateix donada per la matriu $\lambda\mathrm{Id}$, on λ és un enter p-àdic.*

Direm que $\varphi^{\alpha,\beta}\colon \widehat{BK}_p \to \widehat{BK}_p$ és una aplicació d'Adams parabòlica *si estén l'aplicació de $\widehat{(BT_K)}_p$ en ell mateix donada per la matriu $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, on α i β són enters p-àdics.*

Proposició 7.4.2 *Sigui p primer fixat, α, β i λ enters p-àdics.*

Les aplicacions d'Adams ordinàries φ^λ existeixen per a tot λ si p és senar i per a $\lambda \not\equiv 0$ mòdul 2 quan $p = 2$.

Les aplicacions d'Adams parabòliques $\varphi^{\alpha,\beta}$ existeixen per a tot α i β complint que $a\alpha = b\beta$ quan p es senar i per a tot α i β complint que $a\alpha = b\beta$ i $\alpha, \beta \not\equiv 0$ mòdul 2 quan $p = 2$.

Demostració: La demostració és la mateixa que en els casos no completats: s'utilitza el push-out homotòpic (que quan completem ens dóna un espai equivalent mòdul p a BK) per a demostrar l'existència de les aplicacions.

Comencem amb les aplicacions d'Adams ordinàries φ^{λ}. Sabem que l'aplicació $\lambda\mathrm{Id}$ estén a cada un dels parabòlics (són grups de Lie compactes) per a qualsevol λ quan p és senar i per a λ invertible quan $p = 2$ (el grup de Weyl dels parabòlics és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), obtenint aplicacions:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{(BH_2)}_p \arrow[d, dotted, "\Phi_2^{\lambda}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\lambda\mathrm{Id}"] & \widehat{(BH_1)}_p \arrow[d, dotted, "\Phi_1^{\lambda}"] \\
\widehat{(BH_2)}_p & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\varphi_2"] \arrow[r, "\varphi_1"'] & \widehat{(BH_1)}_p
\end{tikzcd}$$

i aquestes aplicacions estenen a una aplicació del push-out, que quan completem ens dóna una aplicació de $\widehat{BK}_p$ en ell mateix.

Per a les aplicacions d'Adams parabòliques, considerem l'aplicació $M_{\alpha,\beta}$ a nivell del tor maximal. Aquesta aplicació, amb la restricció $a\alpha = b\beta$ donarà una aplicació admissible (en el sentit de grups de Lie) entre els grups parabòlics, de la següent manera:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{(BH_2)}_p \arrow[d, dotted, "\Phi_2^{\alpha,\beta}"'] & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\varphi_2"'] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "M_{\alpha,\beta}"] & \widehat{(BH_1)}_p \arrow[d, dotted, "\Phi_1^{\alpha,\beta}"] \\
\widehat{(BH_1)}_p & \widehat{BT}_p \arrow[l, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_2"'] & \widehat{(BH_2)}_p
\end{tikzcd}$$

i per tant tenim les aplicacions puntejades, que ens definiran una aplicació al push-out, que quan completem tindrem una aplicació de $\widehat{BK}_p$ en ell mateix.

$\square$

Per a cada primer p considerem una aplicació $f_p \colon \widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK}_p$ que pot ser una aplicació d'Adams ordinària o bé una parabòlica. Utilitzant el quadrat aritmètic que hem estudiat a la proposició 4.2.1, tenim que una família d'aplicacions $\{f_p\}_p$ estén a una aplicació $f \colon BK \longrightarrow BK$ si són racionalment compatibles.

Definició 7.4.3 *Les aplicacions construïdes d'aquesta manera les anomenarem* aplicacions d'Adams genèriques.

La condició que es demana, ser racionalment compatibles, es redueix a l'existència d'un enter g (que hem definit com a grau) tal que $f_p^*(x_4) = gx_4$, on x_4 és l'element que s'identifica amb el generador de $H^*(BK;\mathbb{Z})$ per la compleció a $H^*(\widehat{BK}_p;\widehat{\mathbb{Z}}_p)$.

Per tant, per a descriure una aplicació d'Adams genèrica necessitem saber el *tipus*, que serà una família:

$$\Big((\epsilon_p,\lambda_p)\Big)_p \in \prod_p \Big(\{0,1\}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p\Big) \ ,$$

que interpretarem com: $\epsilon_p = 0$ vol dir que f_p és una aplicació d'Adams ordinària φ^{λ_p}, mentre que $\epsilon_p = 1$ l'utilitzarem per a les aplicacions d'Adams parabòliques $\varphi^{\lambda_p,\mu_p}$, amb $\mu_p = a\lambda_p/b \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Observem que no estem dient (encara) que les aplicacions d'Adams genèriques estiguin caracteritzades per aquests coeficients, però en canvi, sí que tenim les condicions necessàries per a l'existència, i a més:

Teorema G *Sigui $f\colon BK \longrightarrow BK$ una aplicació. Llavors f és una aplicació d'Adams genèrica.*

DEMOSTRACIÓ: Fixem p i considerem $f|_{BT_p^\infty}\colon BT_{p^\infty} \longrightarrow \widehat{BK}_p$. Per la proposició 6.1.4, existeix una aplicació p-admissible i per la proposició 6.1.3 obtindrem uns coeficients (ϵ_p,λ_p).

□

7.5 Grau de les aplicacions

Considerem les dades que fan referència a les aplicacions d'Adams genèriques per a descriure els possibles graus de les aplicacions.

Considerem $K = K(a,b)$ un grup de Kac-Moody de rang 2 i tornem a utilitzar les notacions $d = \mathrm{mcd}(a,b)$, $a' = a/d$ i $b' = b/d$.

Considerem ara $g \in \mathbb{Z}$. El problema que estudiarem a aquesta secció és per a quins g existeix una aplicació d'Adams genèrica $f\colon BK \longrightarrow BK$ de grau g, segons la definició 7.0.3.

Proposició 7.5.1 *Sigui $g \neq 0$ un enter.*

1. *Si g és un quadrat, llavors g és el grau d'alguna aplicació d'Adams genèrica si i només si g és senar.*

2. *Si g no és un quadrat, llavors g és el grau d'alguna aplicació d'Adams genèrica si g és senar i existeixen enters A, B i r tals que:*

   (a) $g = A^2r$, $a'b' = B^2r$.

(b) Si B és parell llavors $r \equiv 1$ mòdul 8.

(c) Si p és senar i $\nu_p B > \nu_p A$ llavors r és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Demostració: Si g és el grau d'una aplicació d'Adams genèrica tenim que, per a tot p, $f_p(x_4) = gx_4$, on x_4 és la classe a $H^*(\widehat{BK}_p; \widehat{\mathbb{Z}}_p)$ que s'identifica amb el generador d'$H^4(BK; \widehat{\mathbb{Z}}_p)$. Per la definició d'aplicació d'Adams genèrica ha d'existir, per a cada p, un λ_p tal que $\lambda_p^2 = g$ si l'aplicació a $\widehat{BK}_p$ és d'Adams ordinària , o bé, λ_p i μ_p complint que $\lambda_p\mu_p = g$ i $a'\lambda_p = b'\mu_p$ si és d'Adams parabòlica. L'única restricció que cal afegir és la que dóna la proposició 7.4.2, o sigui, $\lambda_2, \mu_2 \equiv 1$ mòdul 2, per tant g és senar.

Per a acabar la demostració del primer apartat tan sols considerar la proposició 7.2.2, que ja ens dóna una aplicació d'Adams ordinària que, en particular, és genèrica.

Per a la demostració del segon apartat, suposem que g no és un quadrat, i que tenim A, B i r complint *(a)*, *(b)* i *(c)*.

Triem un primer p. Si g es un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, considerem l'aplicació d'Adams ordinària de tipus λ_p, on $\lambda_p^2 = g$.

Si g no és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, necessitarem construir una aplicació parabòlica, per tant, necessitem λ_p i μ_p tals que:

$$\lambda_p\mu_p = g \ , \ a'\lambda_p = b'\mu_p \ ,$$

i si $p = 2$, a més s'ha de complir la condició:

$$\lambda_2, \mu_2 \equiv 1 \quad \text{mòdul } 2 \ .$$

Considerem $\lambda_p = b'A/B$ i $\mu_p = a'A/B$. En el cas p senar i que $\nu_p(B) \leq \nu_p(A)$, aquests nombres serien de $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ i ja hauríem acabat. Si p es senar i $\nu_p(B) > \nu_p(A)$, llavors *(c)* ens diu que r és un quadrat, i per tant $g = A^2r$ també, contradicció, ja que havíem suposat que g no era quadrat. En el cas $p = 2$, cal veure que λ_2 i μ_2 són de $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ i no són múltiples de 2: els problemes per a definir λ_2 i μ_2 els tindríem si B fos parella, però llavors, per *(b)*, r seria un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_2$, per tant $g = A^2r$ també i tenim contradicció. Un cop sabem que estan definits, com A i r són senars, i B també, a' i b' són senars, per tant λ_2 i μ_2 no són múltiples de 2.

Anem a veure ara que totes aquestes condicions són necessàries, per això, enunciem el següent lema de teoria de nombres que demostrarem més endavant:

Lema 7.5.2 *Siguin $x, y \in \mathbb{Z}$, x senar i no quadrat, $y > 0$. Les condicions següents són equivalents:*

1. $\left(\frac{y}{p}\right) = -1$ *per a tots els primers p que no divideixen y i tals que* $\left(\frac{x}{p}\right) = -1$.
2. *Existeix $r \in \mathbb{Z}$ tal que $x = A^2r$ i $y = B^2r$.*

Apliquem aquest lema a $x = g$ i $y = a'b'$. Si g no és un quadrat mòdul p per alguns primers p que no divideixen $a'b'$, llavors g no és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, i per tant, si és el grau d'una aplicació, estem en el cas d'una aplicació d'Adams parabòlica i per tant $g = \lambda\mu$, amb $a\lambda = b\mu$, per tant $a'b'\lambda^2 = b'^2 g$ i si g no és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, $a'b'$ tampoc. Per tant la condició 1 del lema es compleix, i per tant, podem escriure $g = A^2 r$ i $a'b' = B^2 r$ amb A i B enters. Si B és parella, $a'b'$ també ho és, i per tant g ha de ser un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ (necessitem una aplicació d'Adams ordinària, ja que una parabòlica portaria grau parell), i per tant, $r \equiv 1$ mòdul 8. Si r no és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, llavors g no és un quadrat a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, llavors $g = \lambda\mu$, amb $a'\lambda = b'\mu$. Per tant $a/a'b' = (\mu/a')^2 = A/B \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ i tenim que $\nu_p(B) \le \nu_p(A)$.

$\square$

Demostració del lema 7.5.2: recordem alguns fets sobre residus quadràtics, que podem trobar, per exemple, al llibre de Serre [43]:

- $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ si i només si $p \equiv 1$ mòdul 4.
- $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ si i només si $p \equiv \pm 1$ mòdul 8.
- Donat un nombre primer senar p existeix un enter $u = u(p)$ primer amb p tal que $u \equiv 1$ mòdul 4 i $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$.
- *Llei de reciprocitat quadràtica:* Siguin p i q primers senars diferents, llavors:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} .$$

La implicació *2.* $\Longrightarrow$ *1.* és directa: si $x = A^2 r$ no és un quadrat mòdul p llavors r no és un quadrat mòdul p i $y = B^2 r$ tampoc ho és.

Suposem que es compleix *1.*. Escrivim $x = \pm p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ amb p_i senars i a_1 també (x no és un quadrat), i $y = 2^k p_1^{b^1} \cdots p_m^{b_m} \cdots p_n^{b_n}$ amb $b_i \ge 0$.

Si $x < 0$, considerem q un primer gran complint que:

$$\begin{array}{ll} q \equiv -1 \text{ mòdul } 8. & \\ q \equiv 1 \text{ mòdul } p_j & \text{per als } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tals que } p_j \equiv 1 \text{ mòdul } 4. \\ q \equiv u(p_j) \text{ mòdul } p_j & \text{per als } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tals que } p_j \equiv -1 \text{ mòdul } 4. \end{array}$$

Llavors, aplicant la llei de reciprocitat quadràtica, tenim que, per als j tals que $p_j \equiv -1$ mòdul 4,

$$\left(\frac{p_j}{q}\right) = \left(\frac{q}{p_j}\right)(-1)^{\frac{p_j-1}{2}\frac{q-1}{2}} = \left(\frac{u(p_j)}{p_j}\right)(-1) = 1 .$$

Llavors, podem calcular

$$\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{p_1}{q}\right)^{a_1}\cdots\left(\frac{p_m}{q}\right)^{a_m} = -1\,,$$

i en canvi,

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)^{k}\left(\frac{p_1}{q}\right)^{b_1}\cdots\left(\frac{p_n}{q}\right)^{b_n} = 1\,,$$

i contradiu la condició *1.* Per tant x ha de ser positiva.

Sigui ara q un primer prou gran i tal que:

$$\begin{array}{lll} q \equiv 1 & \text{mòdul } p_i & ,\ i = 2,\dots,n\ . \\ q \equiv u(p_1) & \text{mòdul } p_1. & \\ q \equiv 1 & \text{mòdul } 8. & \end{array}$$

Llavors $\left(\frac{x}{q}\right) = -1$ i $\left(\frac{y}{q}\right) = (-1)^{b_1}$, per tant b_1 és senar. El mateix podem fer per als b_i tals que a_i siguin senars.

Suposem ara que a_i és parella, considerem q un primer prou gran complint:

$$\begin{array}{lll} q \equiv u(p_j) & \text{mòdul } p_j & j = 1, i. \\ q \equiv 1 & \text{mòdul } p_j & j = 2,3,\dots,i-1,i+1,\dots,n. \\ q \equiv 1 & \text{mòdul } 8. & \end{array}$$

Llavors, $\left(\frac{y}{p_i}\right) = -(-1)^{b_i}$ i $\left(\frac{x}{p_i}\right) = -1$, per tant b_i ha de ser parella.

Dins aquest últim raonament podem incloure el cas $a_j = 0$ per a $j = m+1,\dots,n$ i obtenim que $b_{m+1},\dots,b_n$ són parells.

Considerem ara, per a $i = 1,\dots,m$ els coeficients $c_j = \min\{a_j, b_j\}$, i considerem $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$. Observem que, fixat j, els coeficients a_j, b_j i c_j tenen la mateixa paritat. Podem escriure x i y com:

$$\begin{aligned} x =&\ (p_1^{c_1}\cdots p_m^{c_m})(p_1^{a_1-c_1}\cdots p_m^{a_m-c_m})\,, \\ y =&\ 2^k(p_1^{c_1}\cdots p_m^{c_m})(p_1^{b_1-c_1}\cdots p_n^{b_n-c_n})\,. \end{aligned}$$

Amb tot això tenim: $x = A^2 r$, on $r = p_1^{c_1}\cdots p_m^{c_m}$, i A queda definit com el producte $A = p_1^{\frac{a_1-c_1}{2}}\cdots p_m^{\frac{a_m-c_m}{2}}$. També deduïm que $y = 2^k C^2 r$, amb $C = p_1^{\frac{b_1-c_1}{2}}\cdots p_n^{\frac{b_n-c_n}{2}}$. Com que r no és un quadrat, sigui p un primer tal que $\left(\frac{r}{p}\right) = -1$ i $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, llavors $\left(\frac{x}{p}\right) = -1$ i per hipòtesi $-1 = \left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^k$, per tant, k és parella i $y = B^2 r$, amb $B = 2^{\frac{k}{2}}C$.

$\square$

7.6 Restricció al tor maximal

Considerem $K(a,b)$ el grup de Kac-Moody, W el grup de Weyl i per a cada p, $\widehat{W}_p$ el seu completat a p. A aquest apartat volem estudiar les classe d'homotopia de les restriccions de les aplicacions d'Adams genèriques al tor maximal.

Al teorema C hem vist que aquestes classes d'homotopia quedaven determinades mòdul l'acció de $\widehat{W}_p$, definim doncs, fixats p, un nombre primer, i g un nombre senar, els conjunts:

$$S_{g,p} = \left\{ M \in GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}_p) \;\middle|\; M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda^2 = g \text{ o } M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \alpha\beta = g,\, a\alpha = b\beta \right\},$$

i definim la relació d'equivalència

$$M \sim M' \Leftrightarrow M = wM', \quad w \in \widehat{W}_p\,,$$

obtenint $S_{g,p}/\sim$. A la descripció d'aquest quocient intervé l'estudi de $\widehat{W}_p$ que hem fet a la proposició 5.4.2, on podíem incloure $\widehat{W}_p$ a:

$$\widehat{\mathbb{Z}}_p \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrowtail \widehat{W}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

on l depenia de a, b i p.

Lema 7.6.1 *Siguin M, $M' \in S_{g,p}$. Llavors*

1. *Si $p = 2$ llavors $M \sim M'$ si i només si $M = M'$.*
2. *Si $p > 2$ i l és senar, $M \sim M'$ si i només si $M = M'$ o $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ i $\lambda = \beta y$, amb y la definida al lema 5.4.3.*
3. *Si $p > 2$ i l és parella, $M \sim M'$ si i només si $M = \pm M'$.*

Demostració: Suposem $M \sim M'$, o sigui, exiteix $w \in \widehat{W}_p$ tal que $M = M'w$, per tant $M(M')^{-1} \in \widehat{W}_p$ i aquest problema ja l'hem estudiat al lema 5.4.3. Considerem tots els casos:

Si M i M' són del mateix tipus, o sigui, o bé totes dues diagonals o be cap de les dues o és, llavors $M(M')^{-1}$ és diagonal i per tant, aplicant el lema 5.4.3, o bé $M = M'$, o bé $M = -M'$ quan p és senar i l és parella.

Si M i M' no són del mateix tipus,

$$M(M')^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

per a certes z i t de $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Aplicant altre cop el lema 5.4.3 sabem que aquestes matrius són de $\widehat{W}_p$ només per a p i l senars. A més, són úniques i compleixen que $z = -y$ i $t = 1/y$, on y és la definida al lema 5.4.3. Suposem ara que $z = \alpha\lambda^{-1}$ i que $t = \beta\lambda^{-1}$ i obtenim $\lambda = \beta y$.

$\square$

Amb aquest lema ja podem decidir si dues aplicacions de $BK \longrightarrow BK$ coincideixen quan les restringim al tor maximal:

Proposició 7.6.2 *Siguin $f, f' \colon BK \longrightarrow BK$ dues aplicacions d'Adams genèriques de tipus $\Big((\epsilon_p, \lambda_p)\Big)_p$, $\Big((\epsilon'_p, \lambda'_p)\Big)_p$ i graus g i g' respectivament. Llavors $f|_{BT_K} \simeq f'|_{BT_K}$ si i només si:*

1. *$g = g'$.*

2. *$\epsilon_p = \epsilon'_p$ per a $p = 2$ i qualsevol $p > 2$ tal que $l(p)$ és parella.*

3. *$\lambda_p = y(p)^{\epsilon_p - \epsilon'_p}\lambda'_p$ per a qualsevol $p > 2$ tal que $l(p)$ és senar.*

Demostració: Utilitzem primer la proposició 5.6.1 per a veure que són aplicacions homotopes restringides a BT si i només si ho són quan les restringim a aplicacions de BT_{p^∞} per a tot p primer.

De manera immediata es dedueix que $g = g'$ i aplicant el teorema C, veiem que, un cop considerem les restriccions, cal veure que les aplicacions difereixen d'un element del grup de Weyl completat $\widehat{W}_p$.

Això és precisament el que hem estudiat al lema 7.6.1, per tant hem de veure que les condicions *2.* i *3.* coincideixen amb les del lema.

Donats un primer p i un nombre senar g, existeixen (com a molt) 4 possibles matrius a $S_{g,p}$:

$$\pm M_\lambda = \pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \pm M_{\alpha,\beta} = \pm \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a $p = 2$, $(\epsilon_2, \lambda_2) = (\epsilon'_2, \lambda'_2)$ ja que a $S_{g,2}/\sim$ no hi cap relació d'equivalència i això es dedueix de les condicions *2.* i *3.*.

Per a $p > 2$, i l parella, s'ha de complir $\epsilon_p = \epsilon'_p$ i com que fixat el grau g només hi ha dues possibilitats que difereixen del signe, també ho tenim.

Per a $p > 2$ l senar, o bé $(\epsilon'_p, \lambda'_p) = (\epsilon_p, \lambda_p)$ o bé $\epsilon_p \neq \epsilon'_p$, considerant els 2 casos possibles:

ϵ_p	ϵ'_p	λ_p	λ'_p
0	1	λ_p	$y\lambda_p$
1	0	λ_p	$y^{-1}\lambda_p$

que és equivalent a dir $\lambda_p = y^{\epsilon_p - \epsilon'_p} \lambda'_p$ $\square$

Observació 7.6.3 Acabarem aquesta secció comentant que el teorema G ens diu que tot l'estudi que hem fet per a aplicacions d'Adams genèriques ja serveix per a totes les aplicacions de $BK \longrightarrow BK$.

7.7 Detecció al tor maximal

Aquest apartat contindrà el resultat final d'aquest treball, que juntament amb les altres seccions d'aquest capítol ens donarà una descripció de les autoaplicacions entre grups de Kac-Moody de rang 2.

Teorema H *Siguin $f, f'\colon BK \longrightarrow BK$. Les afirmacions següents són equivalents:*

1. *f i f' són homotopes.*
2. *$f|_{BT_K}$ i $f'|_{BT_K}$ són homotopes.*

Abans d'escriure la demostració adaptarem la proposició 4.2.1 al cas de $X = BK$. Considerem $q\colon BK \longrightarrow K(\mathbb{Q}, 4)$ una aplicació que indueixi una equivalència racional. Per tal de fixar la notació i els càlculs, considerem q com el definit a l'equació (5.1).

Proposició 7.7.1 *L'aplicació $l\colon [BK, BK] \to \prod_p [\widehat{BK}_p, \widehat{BK}_p]$ és injectiva. La imatge està formada per aquelles famílies $(f_p)_p$ tals que $f_p^*(q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p) = \lambda q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p$, amb λ independent del primer p.*

DEMOSTRACIÓ: L'aplicació l és injectiva ja que $H^3(BK; \mathbb{Q}) = 0$ i podem aplicar directament la proposició 4.2.1.

Per a aplicar la proposició 4.2.1 per a veure quina és la imatge necessitem trobar $x \in H^4(BK; \mathbb{Q})$ complint que per a tot p primer, $f_p^*(q \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p) = x \otimes \widehat{\mathbb{Q}}_p$. Agafem $x = \lambda q$.

$\square$

Abans d'escriure la demostració necessitem uns lemes: considerem H_i els subgrups parabòlics i N_iT els normalitzadors del tor maximal T_K a cada uns dels H_i per a $i = 1, 2$. Observem que tenim l'extensió:

$$T \rightarrowtail N_iT \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

Sigui $(N_iT)_{2^n}$ el subgrup de N_iT corresponent a l'extensió

$$T_{2^n} \rightarrowtail (N_iT)_{2^n} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,,$$

on T_{2^n} el subgrup format pels elements de T_K d'ordre algun divisor de 2^n.

Lema 7.7.2 *Sigui* $f\colon BK \longrightarrow BK$ *una aplicació tal que* $f|_{BT} \simeq \mathrm{Id}|_{BT}$*, llavors existeix un morfisme* $\rho\colon (N_iT)_{2^\infty} \longrightarrow K$ *tal que* $\rho|_{(N_iT)_{2^\infty}} = \mathrm{Id}|_{(N_iT)_{2^\infty}}$ *i* $f|_{B(N_iT)_{2^\infty}} \simeq B\rho$.

DEMOSTRACIÓ: Per a cada n, considerem $\rho_n\colon (N_iT)_{2^n} \longrightarrow K$ complint que $B\rho_n \simeq f|_{(N_iT)_{2^n}}$ i $\rho_n(t) = t$ per als elements del tor maximal (utilitzant el teorema 5.7.1, obtenim una aplicació que podem conjugar per a que sigui la identitat al tor maximal, ja que $f|_{BT} \simeq \mathrm{Id}|_{BT}$).

Aquestes aplicacions donaran una aplicació $\rho_\infty : (N_iT)_{2^\infty} \longrightarrow K$, que hem de veure que és homotopa a $f|_{(N_iT)_{2^n}}$. Per a això caldrà comprovar que uns certs límits inversos s'anul·len:

$$\varprojlim{}^1 \pi_1(\mathrm{Map}(B(N_iT)_{2^n}, \widehat{BK}_p)_{B\rho_n})\,.$$

Per a veure-ho, necessitem estudiar abans l'aplicació $\rho_\infty\colon (N_iT)_{2^\infty} \longrightarrow K$, que restringeix a ρ_n, per a cada n. Considerem l'estructura del grup de Kac-Moody que hem vist a la secció 3.2, on vèiem que $(N_iT)_{2^\infty} = \langle (T_K)_{2^\infty}, z_i(0)\rangle$ i el normalitzador del tor maximal $NT_K = \langle T_K, z_1(0), z_2(0)\rangle$. Com que els elements de $(N_iT)_{2^\infty}$ normalitzen T_K i ρ és la identitat a T_{2^∞}, tenim que $\rho(z_i(0))$ normalitza T_{2^∞}. Llavors, $\rho(z_i(0))$ conjugarà el tor a un altre tor T' complint que $T_{2^\infty} \subset T' \cap T_K$. Per tant, $T' = T_K$ i tenim que $\rho(z_i(0))$ normalitza el tor maximal i, per tant, utilitzant el lema 2.8.4 i la forma del normalitzador, $\rho(z_i(0))$ es pot escriure de la forma:

$$\rho(z_i(0)) = z_{l_1}(0) z_{l_2}(0) z_{l_3}(0) \cdots z_{l_s}(0) h_1(t_1) h_2(t_2)$$

amb $l_j \in \{1, 2\}$ i $l_j \neq l_{j+1}$ per tot $j = 1, \ldots, s-1$.

Per a cada $t \in T_{2^\infty}$ i per a cada $g \in (N_iT)_{2^\infty}$ considerem la igualtat:

$$\rho(g) \cdot g^{-1} t g \cdot \rho(g)^{-1} = \rho(g) \cdot \rho(g^{-1} t g) \cdot \rho(g)^{-1} = \rho(t) = t$$

i per tant $\rho(g) \cdot g^{-1}$ centralitza T_{2^∞}. Vegem ara que T_K és el centralitzador de T_{2^∞}: en efecte, si g' centralitza T_{2^∞}, llavors és del normalitzador de T_{2^∞}, que ja sabem que és el normalitzador de T_K. Sabem que T_K és autocentralitzador, per tant $T_K \subset C_{T_{2^\infty}}(K) \subset NT_K$. Si un element de NT_K/T_K no és l'element neutre, actua de manera no trivial a T_{2^n} per a $n \gg 0$ (utilitzant les equacions (3.2)), per tant $C_{T_{2^\infty}}(K) = T_K$.

Per tant $\rho(g) \cdot g^{-1}$ és del tor maximal per a tot $g \in (N_iT)_{2^\infty}$. En particular $\rho(z_i(0)) \cdot z_i(0)^{-1} \in T_K$ i obtenim que:

$$\rho(z_i(0)) = z_i(0) h_1(t_1) h_2(t_2)\,.$$

Amb tot això, tenim un isomorfisme de grups $\rho\colon (N_iT)_{2^\infty} \to (N_iT)_{2^\infty}$ tal que al tor maximal és la identitat.

Per tal de continuar amb uns càlculs explícits, considerem $i = 1$. El cas $i = 2$ es fa anàlogament, canviant el paper del coeficient a per b:

Observem que tenim: $z_1(0)^2 = h_1(-1) \in T$, per tant, $\rho(z_1(0))^2 = h_1(-1) \in T$. Si el calculem:

$$\rho(z_1(0))^2 = h_1(-1)h_1(t_2^a)h_2(t_2^2)$$

per tant, s'ha de complir que $t_2^2 = t_2^a = 1$.

Si a és senar, tenim que $t_2 = 1$ i per tant $\rho(z_i(0)) = z_i(0)h_1(t_1)$. Tant sols cal observar que per a t i t' de S^1,

$$h_1(t)h_2(t')z_1(0)h_2(t')^{-1}h_1(t)^{-1} = z_1(0)h_1(t^a(t')^2)\,.$$

D'aquí deduïm que, conjugant ρ per $h_1(t_1^{-\frac{1}{a}})$, obtenim una aplicació que anomenem ρ', que és la identitat de $(N_1T)_{2^\infty}$ i tal que $B\rho \simeq B\rho'$, que és el que volem.

Si a és parella, pot passar que, fent la mateixa conjugació del pas anterior, ens quedem amb:

$$\rho(z_1(0)) = z_1(0)h_2(-1)\,.$$

Si veiem que això no pot passar, ja haurem vist que ρ ha de ser la identitat (mòdul conjugació per un element de $(N_1T)_{2^\infty}$):

Suposem que tenim $\rho\colon (N_1T)_{2^\infty} \to (N_1T)_{2^\infty}$, amb $\rho|_{T_{2^\infty}} = \mathrm{Id}|_{T_{2^\infty}}$ i $\rho(z_1(0)) = z_1(0)h_2(-1)$. Considerem la categoria $\mathcal{C}$ i els subgrups P_1 i P_2 que hem fet servir a la secció 4.5 per a aproximar homotòpament a $\widehat{(BH_1)}_2$. Considerem també la categoria $\mathcal{C}'$ indexada pels naturals $\mathbb{N}$ i que aproxima els subgrups 2-torals P_1 i P_2, segons les notacions de l'equació (4.8), mitjançant els subgrups P_1^n i P_2^n respectivament. Observem que $\rho|_{P_j^n}$ indueix un isomorfisme de grups entre P_j^n i ell mateix, per tant, els centralitzadors de la imatge seran els mateixos que hem calculat al lema 4.6.1.

Suposem que $B\rho\colon B(N_1T)_{2^\infty} \to B(N_1T)_{2^\infty}$ estén a una aplicació de $\widehat{(BH_1)}_2 \to \widehat{BK}_2$. Això vol dir que el diagrama sobre la categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ és compatible i que no hi ha obstruccions. Aquestes obstruccions, segons l'article [47], són elements de:

$$\lim_{\longleftarrow (j,n)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}'} {}^{k+1} \pi_k(\mathrm{Map}(BP_j^n, \widehat{BK}_2)_{B(\rho|_{P_j^n})})$$

Aplicant altre cop el teorema 5.7.1, tenim que $\mathrm{Map}(BP_j^n, \widehat{BK}_2)_{B(\rho|_{P_j^n})}$ el podem trobar al push-out homotòpic:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(BP_j^n, \widehat{(BT_K)}_p)_{B\rho} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}(BP_j^n, \widehat{(BH_1)}_p)_{B\rho} \arrow[d] \\
\mathrm{Map}(BP_j^n, \widehat{(BH_2)}_p)_{B\rho} \arrow[r] & \mathrm{Map}(BP_j^n, \widehat{(BK)}_p)_{B(\rho|_{P_i^n})}
\end{tikzcd}$$

Aplicant el teorema de Dwyer i Zabrodsky [18], com que estem a grups de Lie compactes, cada aplicació vindrà d'una representació que, mòdul conjugació, serà la restricció de ρ. Com que P_j^n, per a $n \geq 2$ no és commutatiu, no el podem incloure al tor maximal i per tant, tenim una equivalència homotòpica, induïda per la inclusió $H_1 \subset K$:

$$\mathrm{Map}(P_j^n, \widehat{(BH_1)}_2)_{B(\rho|_{P_j^n})} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Map}(P_j^n, \widehat{BK}_2)_{B(\rho|_{P_j^n})}$$

per tant, si no hi ha obstruccions per a estendre l'aplicació a una de BH_1 a $\widehat{BK}_2$, no hi ha obstruccions per a estendre-la a una de BH_1 a $\widehat{(BH_1)}_2$.

Aquesta aplicació no seria homotopa a la identitat restringida a $\widehat{(BN_1T)}_p$ i això contradiu la proposició 3.5 de l'article [23].

Per tant, si $B\rho$ no es pot estendre a BH_1, no pot ser la restricció de f a $B(N_1T)_{2^\infty}$.

Falta veure que:

$$\underleftarrow{\lim}^1 \pi_1(\mathrm{Map}(B(N_iT)_{2^n}, \widehat{BK}_p)_{B\rho_n}) = 0\,.$$

Utilitzem altre cop el teorema 5.7.1. En aquest cas per a $n \gg 0$, no podem tenir la inclusió $N_iT_{2^n}$ al tor maximal, per tant, al push-out d'espais d'aplicacions, la component connexa que ens interessa, no té antiimatge a $\mathrm{Map}(B(N_iT)_{2^n}, BT)$ i per tant el tipus d'homotopia serà el de $\mathrm{Map}(B(N_iT)_{2^n}, \widehat{BH}_{ip})_{B\rho_n}$ (en realitat, no seria ρ_n, sinó que l'hauríem de conjugar per a que la seva imatge estigui a H_i), amb H_i un dels subgrups parabòlics, que és un subgrup compacte. Els grups $N_i(T)_{2^n}$ ens han sortit quan consideràvem l'aproximació mòdul 2 de BH_i, a la secció 4.6. Allà utilitzàvem la notació P_2 per a $N_i(T)$ en cada cas i estan definits a les equacions (4.5) i (4.7). Allà també calculàvem aquests centralitzadors i tenien grup fonamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i 0, depenent de cada cas. Amb tot això ja tenim que el límit invers s'anul·la.

$\square$

Lema 7.7.3 *Sigui P_1 el grup 2-toral que de la secció 4.6, $i_s\colon P_1 \longrightarrow K$ la composició de les inclusions $P_1 \subset H_s \subset K$ per a $s = 1, 2$. Llavors:*

$$\begin{array}{ll}
\pi_1(\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)_{Bi_s}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } s=1 \textit{ i } b \textit{ és parella.}\\
\pi_1(\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)_{Bi_s}) \cong 0 & \textit{si } s=1 \textit{ i } b \textit{ és senar.}\\
\pi_1(\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)_{Bi_s}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \textit{si } s=2 \textit{ i } a \textit{ és parella.}\\
\pi_1(\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)_{Bi_s}) \cong 0 & \textit{si } s=2 \textit{ i } a \textit{ és senar.}
\end{array}$$

Demostració: Donat P un grup 2 toral, o sigui, que es pot escriure com una extensió:

$$T \longrightarrow P \longrightarrow \pi\,,$$

amb T un tor i π un 2-grup finit. Considerem T_{2^n} el subgrup del tor format pels elements d'ordre un divisor de 2^n i notem per P^n el subgrup de P:

$$T_{2^n} \longrightarrow P^n \longrightarrow \pi\,. \tag{7.1}$$

Apliquem aquesta notació als grups P_1 definits a les equacions (4.4) i (4.6).

Tenim que P_1 és equivalent mòdul 2 a $\varinjlim P_1^n$. Podem utilitzar el teorema 5.7.1 per a calcular $\mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{BK}_2)$ i tenim el push-out:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BT_K)}_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BH_1)}_p) \arrow[d] \\
\mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BH_2)}_p) \arrow[r] & \mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BK)}_p)
\end{tikzcd}$$

cada peça del push-out la podem calcular utilitzant el teorema de B. Dwyer i A. Zabrodsky [18] (estem a grups de Lie compactes). Com que hem d'estudiar les aplicacions que restringeixen a la inclusió $P_1^n \subset P_1 \subset H_s \subset K$, aquesta viurà a, per a n prou gran a $\mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BH_s)}_p)_{Bi_s}$, però no tindrà antiimatge a $\mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BT_K)}_p)$, per tant el push-out és el mateix $\mathrm{Map}(BP_1^n, \widehat{(BH_s)}_p)_{Bi_s}$, i per tant és homotop a l'espai classificador del centralitzador 2-completat. Aquests centralitzadors els hem calculat al lema 4.6.1 i hem vist que són $S^1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ o bé S^1 depenent de la paritat de a i b i per tant, quan considerem els espais classificadors i els 2-completem, obtindrem el resultat de l'enunciat.

□

Lema 7.7.4 *Sigui $f\colon \widehat{BK}_2 \longrightarrow \widehat{BK}_2$ una aplicació tal que $f|_{\widehat{BN_iT}_2} \simeq \mathrm{Id}|_{\widehat{BN_iT}_2}$, llavors $f|_{\widehat{(BH_i)}_2} \simeq \mathrm{Id}|_{\widehat{(BH_i)}_2}$, per a $i = 1, 2$.*

Demostració: En aquest cas hem de tornar a considerar l'aproximació mòdul 2 de BH_i feta a la secció 4.6. A aquesta aproximació apareixien dos subgrups 2-torals $P_1 \subset P_2 = N_iT$ i BH_i es construïa com:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_3 \circlearrowright BP_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathbb{Z}/2\wr\Sigma_3"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & BP_2\,.
\end{tikzcd}$$

Hem de veure, doncs que $\varprojlim^j \pi_j \mathrm{Map}(BP_s, \widehat{BK}_2)_{B\mathrm{Id}} = 0$ per a tot $j \geq 1$.

L'espai $\mathrm{Map}(BP_s, \widehat{BK}_2)_{B\mathrm{Id}}$ el podem calcular a partir de l'aproximació mòdul 2 de P_s. Com que volem calcular la component de la identitat, tenim que P_s^n, utilitzant la notació de la fórmula (7.1), no es pot incloure a BT, per tant, el push-out homotòpic d'espais d'aplicacions només tindrà imatge a un dels dos vèrtexs i tindrem que per a $i = 1$ o $i = 2$,

$$\mathrm{Map}(BP_s, \widehat{BK}_2)_{B\mathrm{Id}} \simeq \mathrm{Map}(BP_s, \widehat{(BH_i)}_2)_{B\mathrm{Id}}$$

i per tant és, mòdul compleció és BS^1 o bé $B(S^1 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Tal i com ja hem dit a la secció 4.6, els límits sobre aquesta categoria s'anul·len per a $j \geq 2$, per tant tan sols cal comprovar que $\varprojlim^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BP_s, \widehat{BK}_2)_{B\mathrm{Id}} = 0$.

Al lema 7.7.3 hem calculat aquests grups fonamentals i els resultats que hem obtingut són $\pi_1\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)_{B\mathrm{Id}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, o bé $\pi_1\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)_{B\mathrm{Id}} = 0$. Tan sols cal considerar el cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'acció de Σ_3 a $\mathrm{Map}(BP_1, \widehat{BK}_2)$ és per equivalències homotòpiques, o sigui, que al grup fonamental $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'acció és trivial, per tant, podem aplicar el lema 4.6.3 i obtenim el resultat que necessitem.

□

Lema 7.7.5 *Sigui* $f\colon \widehat{BK}_2 \longrightarrow \widehat{BK}_2$ *una aplicació tal que* $f|_{\widehat{(BH_i)}_2} \simeq \mathrm{Id}_{\widehat{(BH_i)}_2}$ *per a* $i = 1, 2$*, llavors* $f \simeq \mathrm{Id}$.

Demostració: Tenim una homotopia definida sobre cada element del push-out i que volem veure que estén a tot BK. Per això necessitem que les obstruccions a la unicitat d'aplicacions siguin zero, però aquestes obstruccions viuen a:

$$\varprojlim^1 \pi_1 \mathrm{Map}(BH_i, \widehat{BK}_2)_{f|_{BH_i}},$$

i tal i com hem vist a la secció 4.4 són un quocient de $\pi_1\mathrm{Map}(BT, \widehat{BK}_2)_{f|_{BT_K}}$, però l'aplicació f és una equivalència homotòpica i per tant, tal i com hem vist al corol·lari 5.7.3, és homotop a $\widehat{BT}_2$ i per tant simplement connex.

□

Demostració del teorema H: Només cal demostrar *2.* $\Rightarrow$ *1.*, i aquest teorema ja l'hem demostrat pel cas homotop a constant, per tant, podem suposar que $f|_{BT} \not\simeq *$. Utilitzant altre cop la proposició 7.7.1, veiem que n'hi ha prou amb comprovar que f i f' són homotopes a cada primer. Igual que en el cas de les aplicacions nulhomotopes distingirem els casos $p = 2$ i $p > 2$.

Cas p senar: Aquest torna a ser el cas fàcil, ja que tenim el teorema 4.1.1:

$$\widehat{BK}_p \simeq \widehat{BN}_p \simeq \left(\widehat{(BT_K)_{hW}}\right)_p,$$

on N és el normalitzador del tor maximal T_K a K. Com que f i f' coincideixen sobre BT_K, per a veure que coincideixen a $[\widehat{(BT_K)_{hW}}]_p$, cal veure que les obstruccions per a la unicitat d'aplicacions són zero. Aquest problema està detallat a l'article de Wojtkowiak [48] i les obstruccions viuen a:

$$H^j(W;\pi_j\mathrm{Map}(BT_K,\widehat{BK}_p)_{f|_{BT_K}}) \qquad j\geq 1\,.$$

Per la proposició 5.7.5, $f|_{BT_{p^\infty}}$ ve induïda per una representació $\rho\colon T_{p^\infty}\longrightarrow K$ amb nucli finit, i utilitzant el corol·lari 5.7.3, tenim que $\mathrm{Map}(BT_K,\widehat{BK}_p)_{f|_{BT_K}}\simeq\widehat{(BT_K)}_p$, utilitzem ara el lema 7.1.2 tenim que les obstruccions són zero.

Cas $p = 2$: Considerem $f, f'\colon BK\longrightarrow\widehat{BK}_2$. Com que $f|_{BT}\not\simeq *$ i aplicant que és la restricció d'una aplicació d'Adams genèrica i en particular, de grau senar tenim que tant f com $f'\colon\widehat{BK}_2\longrightarrow\widehat{BK}_2$ són equivalències homotòpiques: en efecte, com que estem en espais 2-complets, n'hi ha prou amb veure que a cohomologia amb coeficients a $\mathbb{F}_2$ és un isomorfisme. Considerem ara la cohomologia mòdul 2, que, tal i com hem vist a la proposició 4.7.2, és $\mathbb{F}_2[x_4,y_{2k}]\otimes E[z_{2k+1}]$, amb un Bockstein $\beta_r(y_{2k})=z_{2k+1}$. Si estem en una aplicació d'Adams ordinària entre $\widehat{BK}_2$, tindrem que $x_4\mapsto\lambda_2^2x_4$, $y_{2k}\mapsto\lambda_2^ky_{2k}$ i $z_{2k+1}\mapsto\lambda_2^kz_{2k+1}$ amb λ_k senar i per tant és isomorfisme. Si és una aplicació d'Adams parabòlica, elevada al quadrat és una ordinària, i tenim que també és una equivalència homotòpica.

Podem considerar, doncs, $\overline{f}=f'\circ f^{-1}\colon\widehat{BK}_2\longrightarrow\widehat{BK}_2$ i obtenim una aplicació homotopa a la identitat que a nivell del tor maximal es correspondrà amb una aplicació admissible i homotopa a la inclusió. El problema queda reduït doncs a considerar $\overline{f}$ una autoaplicació de $\widehat{BK}_2$ tal que $\overline{f}|_{BT}\simeq\mathrm{Id}|_{BT}$ llavors $\overline{f}\simeq\mathrm{Id}$. Un cop tenim això tan sols cal aplicar els lemes 7.7.2, 7.7.4 i 7.7.5.

□

7.8 Aplicacions de BK a BK

Fixat un grup de Kac-Moody de rang 2, o sigui, fixats a i b, tals que $ab>4$, recordem el següent invariant, que només depèn del producte ab i que hem definit a la proposició 5.4.2: per a cada primer p senar definim un enter positiu $l(p)$ com $l(p)=2$ si $p\mid ab$, $l(p)=1$ si $p\mid(ab-4)$; altrament $l(p)$ és l'ordre de les arrels del polinomi $x^2-(ab-2)x+1$ al seu cos de descomposició de característica p.

Donada una aplicació $f\colon BK(a,b)\longrightarrow BK(a,b)$ tenim definit el grau g, que és un enter i per tant ens el podem pensar a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ per a tot p.

Si $g=0$, considerem, $(\varepsilon_p,\gamma_p)=(0,0)\in\{0,1\}\times\widehat{\mathbb{Z}}_p$ per a cada p.

Si $g\neq 0$. Per a $p=2$, definim dos invariants (ε_2,γ_2), on

. $\varepsilon_2=0$ o $\varepsilon_2=1$ depenent de si, completant l'aplicació f al primer 2, es tracta d'una aplicació d'Adams ordinària o parabòlica.

. Si $\varepsilon_2 = 0$, γ_2 és l'única arrel de g a $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ tal que $\widehat{f}_2$ és homotopa a l'aplicació d'Adams ordinària φ^{γ_2}.

Si $\varepsilon_2 = 1$, γ_2 és l'única solució de l'equació $\gamma_p^2 a = gb$ a $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ tal que $\widehat{f}_2$ és homotopa a l'aplicació d'Adams parabòlica $\varepsilon^{\gamma_2,\mu_2}$, on $\mu_2 = a\gamma_2/b \in \widehat{\mathbb{Z}}_2$.

Per a p senar tal que $l(p)$ és parella, considerem ε_p prenent valors 0 o 1 depenent de si la compleció de l'aplicació $\widehat{f}_p$ és una aplicació d'Adams ordinària o parabòlica i considerem com a invariant la parella $(\varepsilon_p, \gamma_p) \in \{0,1\} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p$, on γ_p compleix que $\gamma_p/p^{\nu_p(\gamma_p)} \equiv m$ mòdul p, amb $m \in \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ i que $\gamma_p^2 = g$ (respectivament $\gamma_p^2 a = gb$) si $\varepsilon_p = 0$ (respectivament $\varepsilon_p = 1$).

Per a p senar tal que $l(p)$ és també senar, considerem γ_p com l'única arrel de g a $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ tal que $\widehat{f}_p$ és homotopa a l'aplicació d'Adams ordinària φ^{γ_p} i considerem com a invariant la parella $(0, \gamma_p) \in \{0,1\} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Teorema I *Fixats a, b tals que $ab > 4$, la família d'invariants $(\varepsilon_p, \gamma_p)$ per a cada primer p classifica el tipus d'homotopia de les aplicacions de $BK(a,b)$ a $BK(a,b)$.*

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix directament de la definició dels invariants $(\varepsilon_p, \gamma_p)$, de la proposició 7.6.2 i del teorema H.

□

A més, suposem que tenim una família:

$$\Big((\varepsilon_p, \gamma_p)\Big)_p \in \prod_p \Big(\{0,1\} \times \widehat{\mathbb{Z}}_p\Big)$$

complint que:

- Existeix $g \in \mathbb{Z}$ senar (independent de p) tal que $\gamma_p^2 = g \in \mathbb{Z} \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p$ per a tot p tal que $\varepsilon_p = 0$ i $\gamma_p^2 a = gb \in \mathbb{Z} \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p$ per a tot p tal que $\varepsilon_p = 1$.
- Per als $p > 2$ tals que $l(p)$ és parell, fixem γ_p tal que $\gamma_p/p^{\nu_p(\gamma_p)} \equiv m$ mòdul p, amb $m \in \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.
- Per als $p > 2$ tals que $l(p)$ és senar, $\varepsilon_p = 0$.

Teorema J *En aquestes condicions, existeix una única aplicació $f\colon BK(a,b) \longrightarrow BK(a,b)$ amb aquests invariants.*

DEMOSTRACIÓ: Segons la proposició 7.4.2, com que g és senar, per a cada primer p existeix $\widehat{f}_p\colon \widehat{BK}_p \longrightarrow \widehat{BK}_p$. Com que totes són del mateix grau, són aplicacions racionalment equivalents i per tant tenim l'existència de $f : BK \longrightarrow BK$.

La unicitat de les aplicacions es dedueix del teorema I. □

Observació 7.8.1 En el cas de G un grup de Lie compacte connex, sabem que la cohomologia racional classifica les autoaplicacions de BG [26]. En el cas de grups de Kac-Moody, aquest resultat no és cert: de la cohomologia racional tan sols se'n dedueix el grau de l'aplicació, per tant, ens demanem si, fixada una aplicació f de BK en ell mateix, podem trobar altres aplicacions d'aquest grau? Bé, ja hem vist que l'aplicació f està caracteritzada per uns coeficients $(\varepsilon_p, \gamma_p)$ per a cada primer p i que, fixat un primer p podem variar la f en aquest primer fins un total de quatre aplicacions si $p = 2$ i a dues aplicacions si $p > 2$. Això ens donarà una família no numerable d'aplicacions de $BK \longrightarrow BK$ no homotopes i del mateix grau, i que, per tant, induiran la mateixa aplicació de $H^*(BK;\mathbb{Q})$ a $H^*(BK;\mathbb{Q})$.

Llavors ens podríem qüestionar si n'hi ha prou considerant la cohomologia entera. La resposta torna a ser no: recordem que la cohomologia a coeficients a $\mathbb{F}_p$ és, segons hem vist a la secció 4.7, $H^*(BK;\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[x_4, y_{2k}] \otimes E[z_{2k+1}]$ amb un Bockstein $\beta_r(y_{2k}) = z_{2k+1}$ i x_4 la reducció a $\mathbb{F}_p$ d'un element q que genera un grups cíclic infinit a $H^4(BK;\mathbb{Z})$. Llavors, la cohomologia parella $H^{\text{parell}}(BK;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}[q]$, mentre que la part senar $H^{\text{senar}}(BK;\mathbb{Z}_{(p)})$ és de torsió. La part parella, no ens dóna més informació que el grau de l'aplicació, i per tant, no millorem respecte la cohomologia racional. La part senar, en canvi, ens dóna més informació. Més concretament, $H^{2k+1}(BK;\mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, on k i r són els coeficients que apareixen a la cohomologia a $\mathbb{F}_p$, i que estan definits al lema 3.2.3. L'acció d'una aplicació d'Adams genèrica $f\colon BK \longrightarrow BK$ a $H^{2k+1}(BK,\mathbb{Z}_{(p)})$ es pot llegir a la transgressió quan considerem la fibració:

$$K/T \longrightarrow BT \longrightarrow BK\,,$$

i la transgressió ens donarà una aplicació:

$$\tau\colon H^{2k}(K/T;\mathbb{Z}_{(p)}) \twoheadrightarrow H^{2k+1}(BK;\mathbb{Z}_{(p)})\,.$$

Aprofitant els càlculs de N. Kitchloo [32] de la descomposició em cel·les de Schubert de K/T podem entendre l'aplicació a $H^*(K/T)$: $H^*(K/T)$ té la cohomologia entera acumulada als graus parells. Per a cada n, tenim que $H^{2n}(K/T;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{\sigma_n} \oplus \mathbb{Z}_{\delta_n}$ i que l'estructura d'anell es dedueix de les identitats:

$$\begin{aligned} \delta \cup \delta_n &= d_{n+1}\delta_{n+1}\,, & \delta \cup \sigma_n &= \delta_{n+1} + d_n\sigma_{n+1}\,,\\ \sigma \cup \sigma_n &= c_{n+1}\sigma_{n+1}\,, & \delta \cup \delta_n &= \sigma_{n+1} + c_n\delta_{n+1}\,, \end{aligned}$$

on els coeficients c_n i d_n són els de les fórmules (3.5) i (3.6).

Fixem a i b. Triem $\ell > 2$ un primer tal que $l(\ell)$ sigui senar. Considerem f l'aplicació d'Adams ordinària φ^{ℓ^n} (com que ℓ és senar, l'aplicació existeix, utilitzant el corol·lari 7.2.3). Sigui f' l'aplicació d'Adams genèrica definida per $f'_p = \varphi^{\ell^n}$ per als primers $p \neq \ell$ i $f'_\ell = -\varphi^{\ell^n}$ (com que hem triat ℓ tal que $l(\ell)$ és senar, f i f' no són homotopes). Si triem n prou gran, tant f com f' seran zero a $H^{\text{senar}}(BK;\mathbb{Z}_{(\ell)})$: considerant les fórmules en la base de Schubert, tenim que, amb la transgressió, el que passi a $H^{2k+1}(BK;\mathbb{Z}_{(\ell)})$ és el mateix que passarà a $H^{2k}(K/T;\mathbb{Z}_{(\ell)})$ (la transgressió és un aplicació lineal), i és multiplicar per ℓ^{kn}, i per tant, per a n prou gran, serà l'aplicació zero.

Amb tot això, hem trobat dues aplicacions f i f' no homotopes i tals que indueixen la mateixa aplicació a la cohomologia senar. Com que les dues aplicacions tenen grau ℓ^{2n} també induiran el mateix a la cohomologia parella.

$\square$

Bibliografia

[1] J.F.Adams, Z. Mahmud: *Maps between Classifying Spaces*, Inventiones mathematicae, 35, pp 1-41. (1.976)

[2] J.F.Adams, C.W.Wilkerson: *Finit H-spaces and algebras over the Steenrod algebra*, Annals of Mathematics, 111, pp 95-143. (1.980)

[3] J. Aguadé: *Constructing modular classifying spaces*, Israel J. Math. 66 no 1-3, pp 23-40. (1.989)

[4] J. Aguadé, C. Broto, D. Notbohm: *Homotopy classification of spaces with interesting cohomology and a conjecture of Cooke part I*, Topology 31, pp 455-492. (1.994)

[5] J. Aguadé, C. Broto, L. Saumell: *Homotopy Type of Classifying Spaces of Rank Two Kac-Moody Groups*, Preprint (1.999)

[6] R. Baeza: *Quadratic Forms Over Semilocal Rings*, Springer-Verlag LNM 655. (1.978)

[7] P.F. Baum, W. Browder: *The cohomology of quotients of classical groups*, Topology 3, pp 305-336. (1.965)

[8] D.J. Benson: *Polynomial Invariants of Finite Groups,* London M.S. LNS 190 Cambridge University Press (1.993)

[9] A.K. Bousfield, D.M. Kan: *Homotopy limits, Completions and Localizations*, LNM 304, Springer Verlag (1.972)

[10] C. Broto, N. Kitchloo: *Classifying spaces of Kac-Moody groups,* preprint.

[11] C. Broto, N. Kitchloo: *Homotopy Kac-Moody groups,* preprint.

[12] D.A. Buell: *Binary Quadratic Forms*, Springer Verlag (1.989)

[13] J.W.S. Cassels: *Rational Quadratic Forms*, Academic Press (1.978)

[14] E. Dror Farjoun, J. Smith: *A geometric Interpretation of Lannes' Functor T*, Asterisque 191, pp 87-95. (1.990)

[15] W.G. Dwyer: *Strong Convergence of the Eilenberg Moore spectral sequence*, Topology 13, pp 255-265. (1.974)

[16] W.G. Dwyer, H.R. Miller, C.W. Wilkerson: *The Homotopic Uniqueness of BS^3*, Proceedings of the 1986 Barcelona Conference on Algebraic Topology, Springer Verlag LNM 1298, pp 90-105. (1.987)

[17] W.G. Dwyer, C.W. Wilkerson: *Spaces of Null Homotopic Maps* Asterisque 191, pp 97-108. (1.990)

[18] W.G. Dwyer, A. Zabrodsky: *Maps between classifying spaces*, Proceedings of the 1986 Barcelona Conference on Algebraic Topology, Springer Verlag LNM 1298, pp 105-119. (1.987)

[19] E.M. Friedlander: *Excepcional isogenies and the classifying spaces of simple Lie groups*, Annals of Mathematics 101, pp 510-520. (1.975)

[20] E.M. Friedlander, G. Mislin: *Locally finite aproximation of compact Lie groups I*, Invent. Math. 83, pp 425-436 (1.986)

[21] K. Ishiguro: *Unstable Adams operations on Classifying Spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc 102, pp 71-75, (1.987)

[22] S. Jackowski, J. McClure: *Homotopy decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups.* Topology 31, pp 113-132. (1.992)

[23] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver: *Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions.* Annals of Mathematics 135, pp 183-226. (1.992)

[24] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver: *Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions.* Annals of Mathematics 135, pp 227-270. (1.992)

[25] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver: *Homotopy theory of classifying spaces of compact Lie groups,* Algebraic topology and its applicacions, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 27, pp 81-123. (1.994)

[26] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver: *Maps between classifying spaces revisited,* Contemp. Math. 181, pp 263-298. (1.995)

[27] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver: *Self homotopy equivalences of classifying spaces of compact connected Lie groups,* Fund. Math. 147, no. 2, pp 99-126. (1.995)

[28] V.G. KAC: *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press (1.995)

[29] V.G. KAC, D.H. PETERSON: *Defining reations of certain infinite dimensional groups*, Astérisque, hors série 1.985, pp 165-208. (1.985)

[30] V.G. KAC, S.P. WANG: *On automorphisms of Kac-Moody algebras and groups*, Adv. Math. 92 no 2, pp 129-195. (1.992)

[31] V.G. KAC, D.H. PETERSON: *On geometric invariant theory of infinite dimensional groups*, Algebraic groups Utrecht 1986, Springer-Verlag LNM 1271, pp 109-142. (1.986)

[32] N. KITCHLOO: *Topology of Kac-Moody groups*, Thesis (1.998)

[33] J. LANNES: *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire*, Publ. I.H.E.S 75, pp. 135-244. (1.992)

[34] G. MISLIN: *Homotopy Classification of self-maps of infinite quaternionic projective space*, Quart. J. Math. Oxford 38, pp 245-257, (1.987)

[35] G. MØLLER: $PU(p)$ *as a p-compact group*, Preprint.

[36] G. MØLLER: *The* 3*-compact group* $DI(2)$, Preprint.

[37] D. NOTBOHM: *Maps between classifying spaces ans applications*, Journal of Pure and Applied Algebra 89, pp 273-294, (1.993)

[38] D. NOTBOHM: *On the "classifying space" for compact Lie groups*, J. of London Math. Soc. (2) 52, pp 185-198, (1.995)

[39] D. NOTBOHM, L. SMITH: *Rational Homotopy of the space of homotopy equivalences of flag manifolds*, Proceedings of the 1990 Barcelona Conference on Algebraic Topology, Springer Verlag LNM 1509, pp 301-312. (1.992)

[40] D.L. RECTOR: *Loop Structures on the Homotopy Type of* S^3, Symposium on Algebraic Topology (Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., 1.971), Springer Verlag LNM 249, pp 99-105. (1.971)

[41] L. SCHWARTZ: *Unestable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture*, Chicago Lectures In Mathematics Chicago Press (1.994)

[42] G.B. SEGAL: *Categories and Cohomology Theories*, Topology 13, pp 293-312. (1.964)

[43] J.P. SERRE: *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag GTM 7. (1.973)

[44] D. Sullivan: *Localization, Periodicity, and Galois Symmetry*, Geometric Topology I Notes, M.I.T.. (1.970)

[45] R. Thom: *L'homologie des spaces fonctionels*, Colloque de Topologie Algébrique, Louvain, 1.956, pp 29-39. (1.957)

[46] C.W. Wilkerson: *Self-maps of classifying spaces,* Localization in group theory and homotopy theory, and related topics (Sympos., Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., 1974), Springer-Verlag LNM 418, pp 150-157. (1.974)

[47] Z. Wojtkowiak: *On maps from* $\underrightarrow{\mathrm{holim}}(F)$ *to* Z, Proceedings of the 1986 Barcelona Conference on Algebraic Topology, Springer Verlag LNM 1298, pp 227-236. (1.987)

[48] Z. Wojtkowiak: *Maps from* $B\pi$ *into* X, Quart. J. Oxford (2), 39, pp 117-127. (1.988)