Resumen

Esta tesis ha tenido dos objectivos: el objectivo práctico de escribir explícitamente generalizaciones de las construcciones de Atiyah, Patodi, Singer y Donnelly para sumas formales de operadores en variedades, y el objectivo más filosófico de volver a abrir las investigaciones de Hirzebruch–Zagier[HZ74] sobre algunas importantes interacciones de la topología algebraica con la teoría de números y la geometría algebraica. Hemos necesitado también ingredientes de la geometría diferencial y de análisis, y nuestras indagaciones nos han conducido a considerar además las ideas de Segal sobre la teoría de campos conformes.

Nuestras definiciones permiten definir una nueva invariante $\eta_\varepsilon(q)$ de variedades con referencias (N^{4k-1}, f) que sale cuando se considera el operador formal dado por torcer el operador de la signatura habitual por un cierto fibrado graduado considerado por Witten como una representación del fibrado tangente en el espacio de lazos libres en una variedad. De esta manera obtenimos una invariente que toma como valores las series de potencias en la variable formal q, cuyo término constante es la invariante eta espectral de [ADS84]. El resultado que esta invariante coincide con la Signaturdefekt (la diferencia $\varphi_L(M,N) - \mathrm{sign}(M,N)$ entre el L-género relativo y la signatura para una variedad M^{4k} con borde N) generaliza para nuestra nueva invariante:

$$\eta_{\mathcal{E}}(q) \quad = \quad \overline{\varphi}_{\mathcal{E}}(M,N) - \mathrm{sign}^{S^1}(M,N)\,.$$

Aquí sign^{S^1} es la signatura S^1-invariante en el espacio de lazos y $\overline{\varphi}_\varepsilon$ es el género elíptico (normalizado) de Landweber-Stong y Ochanine; por tanto la serie de potèncias η_ε se puede considerar como una función *modular*, por lo menos módulo los enteros. Como ejemplo importante investigamos referencias en las esferas $S^{4k-1} \subset D^{4k}$ para las cuales se expresa fácilmente las invariantes η_ε en términos de las series de Eisenstein $\tilde{G}_{2k}$.

Consideramos invariantes eta modulares que surgen no sólo del operador de signatura torcido sino también de los correspondientes operadores de Dirac. Definimos además versiones equivariantes de estas invariantes asociadas a representaciones del grupo fundamental $G = \pi_1 Y$ de la variedad. Damos ejemplos de esta construcción para espacios lenticulares y, por lo menos en el caso de grupos G finitos de orden impar, demostramos que toma valores en el anillo de cohomología elíptica equivariante introducida por Devoto.

Summary

This thesis has had two aims: the practical aim of writing out explicit generalisations of the constructions of Atiyah, Patodi, Singer and Donnelly for 'formal sums' of operators on manifolds, and the more philosophical aim of re-opening the investigations of Hirzebruch–Zagier [HZ74] on some important interactions of algebraic topology with number theory and algebraic geometry. We have needed also ingredients from differential geometry and from analysis, and our investigations lead also to consideration of ideas of Segal on conformal field theory [Seg88].

In particular our definitions lead to a new invariant $\eta_{\mathcal{E}}(q)$ of framed manifolds N^{4k-1}, which arises on considering the 'formal operator' given by twisting the classical signature operator by a certain graded bundle considered by Witten [Wit87] as representing the tangent bundle of the free loop space on a manifold. In this way we obtain an invariant, taking power series in the formal variable q as values, whose constant term is the spectral eta invariant of [ADS84]. The result that this eta invariant coincides with the *signature defect*, the difference $\varphi_L(M,N) - \mathrm{sign}(M,N)$ between the relative L-genus and signature for a closed manifold M^{4k} with $\partial M = N$, generalises to our new invariant to give

$$\eta_{\mathcal{E}}(q) \;=\; \overline{\varphi}_{\mathcal{E}}(M,N) - \mathrm{sign}^{S^1}(M,N)\,.$$

Here sign^{S^1} is the S^1-equivariant signature on the loop space and $\overline{\varphi}_{\mathcal{E}}$ is the (normalised) elliptic genus of [LS88,Och87]; hence the power series $\eta_{\mathcal{E}}$ can also be regarded as *modular* functions, at least modulo the integers. As an illustrative example we note that there are framings of the spheres $S^{4k-1} \subset D^{4k}$ for which $\eta_{\mathcal{E}}$ is easily expressed in terms of an Eisenstein series $\widetilde{G}_{2k}$.

We consider eta invariants arising not only from twisted signature operators, but also from the corresponding Dirac operators. Moreover we define equivariant versions of these invariants, associated to representations of the fundamental group $G = \pi_1 Y$ of the manifold. We give examples of this construction for lens spaces and, at least in the case that G is finite of odd order, show that it takes values in the equivariant elliptic cohomology ring introduced by Devoto [Dev96b].