Localitzacions i complecions d'espais anesfèrics

Gemma Bastardas i Ferrer

Les localitzacions i complecions d'espais topològics simplement connexos estan àmpliament documentades a la literatura matemàtica. Per contra, l'efecte d'aquestes construccions sobre espais topològics amb grup fonamental no trivial és menys conegut. Alguns dels resultats que s'han obtingut en aquesta direcció al llarg dels anys són difícils d'entendre i encara queden molts problemes sense resoldre. Per exemple, no se sap si la localització homològica entera d'una unió puntual de circumferències té grups d'homotopia superiors no nuls. Malgrat això, les complecions d'espais classificadors de grups i d'altres espais amb grup fonamental no trivial ocupen un lloc molt destacat a la teoria d'homotopia, i és important saber descriure-les tan clarament com sigui possible.

En aquesta memòria s'estudien localitzacions i complecions de diversos espais que tenen la característica comuna de ser de tipus $K(G,1)$ amb G un grup no necessàriament nilpotent; és a dir, espais amb tots els grups d'homotopia nuls, llevat del grup fonamental. (Els espais d'aquest tipus s'anomenen *espais anesfèrics*.) Es dedica especial atenció a la preservació d'algunes propietats sota l'efecte de les localitzacions i les complecions. Per exemple, demostrem que les localitzacions en conjunts de primers preserven la nilpotència virtual dels espais, i que si localitzem un espai amb tots els grups d'homotopia finits en un conjunt de primers P, aleshores obtenim un espai que té tots els grups d'homotopia finits, els quals són de P-torsió.

Els resultats més interessants s'han obtingut per a un cert tipus de varietats topològiques compactes relacionades amb els grups cristal·logràfics: les infra-nilvarietats. Aquestes varietats són espais anesfèrics amb grup fonamental virtualment nilpotent finitament generat i lliure de torsió. En aquest treball demostrem que la compleció d'una infra-nilvarietat en un primer p és o bé un espai anesfèric o bé un espai amb un nombre infinit de grups d'homotopia no nuls, que són finitament generats com a $\mathbb{Z}_p^\wedge$-mòduls. Més generalment, demostrem que aquest resultat és cert per a espais de tipus $K(G,1)$ amb G un grup virtualment nilpotent finitament generat no necessàriament lliure de torsió. Com a conseqüència obtenim el mateix resultat per a la localització en un conjunt no buit de primers P, canviant $\mathbb{Z}_p^\wedge$ per $\mathbb{Z}_P$. Si P és el conjunt buit, és a dir, si racionalitzem, aleshores aquest resultat deixa de ser cert: existeixen infra-nilvarietats que en racionalitzarles no són anesfèriques i només tenen un nombre finit de grups d'homotopia no nuls. Aleshores establim un criteri que ens permet determinar quan la racionalització d'una infra-nilvarietat de dimensió menor o igual que 4 només té un nombre finit de grups d'homotopia no nuls.

El nostre estudi parteix, però, d'un marc molt més ampli que les localitzacions i complecions clàssiques en nombres primers. En diverses parts de la memòria es descriuen propietats generals dels functors idempotents a la categoria homotòpica dels espais topològics i a la categoria dels grups. Per exemple, caracteritzem els functors idempotents a la categoria dels grups que preserven l'exhaustivitat dels morfismes de grups, i estudiem els efectes dels functors idempotents a la categoria dels grups sobre els grups nilpotents i sobre els grups lliures. L'efecte d'aquestes transformacions idempotents sobre els grups dóna informació útil per a esbrinar com es comporten sobre els espais. Així, els resultats obtinguts sobre l'efecte dels functors idempotents sobre els grups lliures ens han permès obtenir resultats sobre les transformacions idempotents d'espais anesfèrics amb grup fonamental lliure, és a dir, d'unions puntuals de circumferències.

Amb aquesta memòria contribuïm a una millor comprensió de les localitzacions i les complecions d'alguns tipus d'espais no nilpotents. És evident, però, que encara queden molts problemes pendents per a resoldre en aquesta direcció.

Localizations and completions of aspherical spaces

Gemma Bastardas Ferrer

Localizations and completions of simply-connected spaces are very well-documented in the mathematical literature. But the effect of these constructions on topological spaces with a nontrivial fundamental group is not as well-known. Some of the results obtained during these years in this direction are difficult to understand and there are still a lot of problems to be solved. For example, it is not known whether the integer homological localization of a wedge of circles has trivial higher homotopy groups. However, completions of classifying spaces of groups and of other spaces with nontrivial fundamental group are of relevance in homotopy theory, and it is important to know how to describe them as clearly as possible.

In this work we study localizations and completions of different kind of spaces, all of which are $K(G,1)$-spaces with G a not necessarily nilpotent group; i.e., spaces with trivial higher homotopy groups. (This kind of spaces are called *aspherical spaces*.) We devote special attention to the preservation of certain properties under the effect of localizations and completions. For instance, we prove that localizations at primes preserve the virtual nilpotence of the spaces, and that the localization of a space with finite homotopy groups at a set of primes P is a space with finite homotopy groups, which are all P-torsion. Both results are true for not necessarily aspherical spaces.

The most interesting results that we have obtained concern a type of compact topological manifolds related to the crystallographic groups: the infra-nilmanifolds. These manifolds are aspherical spaces with a torsion-free finitely generated virtually nilpotent group. In this work we prove that the completion of an infra-nilmanifold at a prime p is either an aspherical space or a space with infinitely many nonzero homotopy groups, which are finitely generated as $\mathbb{Z}_p^\wedge$-modules. More generally, we prove that this result is true for $K(G,1)$-spaces with G a finitely generated virtually nilpotent group (not necessarily torsion-free). As a consequence of this we obtain the same result for the localization at a nonempty set of primes P, changing $\mathbb{Z}_p^\wedge$ by $\mathbb{Z}_P$. If P is the empty set, i.e., if we rationalize, then this result is no longer true: There are infra-nilmanifolds such that their rationalization is not aspherical, and has only a finite number of nonzero homotopy groups. But there are also infra-nilmanifolds whose rationalization has infinitely many nonzero homotopy groups. We then establish a criterion to determine when the rationalization of an infra-nilmanifold of dimension less or equal to 4 has only a finite number of nonzero homotopy groups.

But our study starts off from a more general point of view than the classical localizations and completions at primes. In various parts of the thesis we describe general properties of idempotent functors in the homotopy category of spaces and in the category of groups. For example, we characterize the idempotent functors in the category of groups which preserve the surjectivity of the group homomorphisms, and study the effect of idempotent functors in the category of groups on nilpotent groups and on free groups. The effect of these idempotent transformations on groups gives useful information to know their behaviour on spaces. In this way, results on the effect of idempotent functors on free groups allow us to obtain results on the effect of idempotent functors on aspherical spaces with a free fundamental group, i.e., on wedges of circles.

This work is a contribution towards a better understanding of localizations and completions of different kinds of non-nilpotent spaces. However, it is obvious that there are still a lot of problems to be solved in this direction.