Ideals finitament generats i decreixement de funcions analítiques i acotades.

Jordi Pau Plana

Memòria presentada per aspirar al grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Abril de 2001.

Índex

Introducció.

Aquest treball està estructurat en dues parts. La primera tracta sobre problemes d'ideals finitament generats de l'àlgebra H^∞ de funcions analítiques i acotades en el disc unitat $\mathbb{D}$ relacionats amb el Teorema de la Corona. La segona part és un estudi sobre el decreixement d'aquest tipus de funcions. Encara que els dos temes són essencialment independents, hi ha molta similitud en les tècniques que s'utilitzen en les proves dels resultats.

Capítol 1

El Teorema de la Corona ens diu que el disc unitat és dens en l'espai dels ideals maximals M_{H^∞} de H^∞ amb la topologia feble, és a dir, que la corona $M_{H^\infty} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ és buida. Un enunciat equivalent és que l'ideal generat per funcions que no es fan petites simultàneament és tota l'àlgebra de funcions H^∞, és a dir, si tenim funcions $f_1, \ldots, f_N \in H^\infty$ tals que existeix $\delta > 0$ amb

$$\inf_{z\in\mathbb{D}}(|f_1(z)| + \cdots + |f_N(z)|) \geq \delta,$$

aleshores existeixen funcions $g_1, g_2, \ldots, g_N \in H^\infty$ que compleixen

$$f_1g_1 + \cdots + f_Ng_N = 1.$$

Aquest teorema va ser provat l'any 1962 per L. Carleson (veure [4]) desenvolupant unes tècniques noves que serien de gran importància en anys posteriors. Al 1979, T. Wolff (veure [11]) va donar una prova més simple d'aquest teorema, basant-se en el bon coneixement de les mesures de Carleson i la dualitat $H^1 - BMO$. En els dos casos, la prova es redueix a resoldre certs problemes $\bar{\partial}$ amb estimacions uniformes de les solucions.

De forma natural, en intentar generalitzar aquest resultat, es pot preguntar si és possible canviar la funció 1 per una funció arbitrària $g \in H^\infty$. És a dir, un es pregunta si la condició

$$|g(z)| \leq C \sum_{j=1}^{N} |f_j(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{1}$$

implica que la funció g pertany a l'ideal I generat per $f_1, \ldots, f_n$, és a dir si existeixen funcions $g_1, g_2, \ldots, g_n \in H^\infty$ de forma que

$$f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_ng_n \equiv g.$$

Observem que la condició (1) és clarament necessària. Ara bé, un exemple donat per K. Rao (veure [31]) prova que la resposta és en general negativa. Així, donades funcions

$f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ podem considerar els següents dos ideals de H^∞: l'ideal $I = I(f_1, \dots, f_n)$ generat per les funcions $f_1, \dots, f_n$; i l'ideal $J = J(f_1, \dots, f_n)$ format per les funcions $g \in H^\infty$ que compleixen (1) per una certa constant $C = C(g) > 0$. Sabem que $I \subset J$, però l'exemple de K. Rao prova que en general aquests dos ideals són diferents. Llavors tota una sèrie de problemes relacionats apareixen:

Problema A. Quina és la millor condició de tamany per a què una funció g pertanyi a l'ideal I?

Sabem que en general la condició $g \in J(f_1, \dots, f_n)$ no implica que $g \in I(f_1, \dots, f_n)$, però i les seves potències? L'any 1980, T. Wolff va provar que si una funció $g \in H^\infty$ compleix (1), llavors la funció $g^3 \in I(f_1, \dots, f_n)$. Així apareix la següent qüestió:

Per quins $\alpha \geq 1$, la condició $g \in J(f_1, \dots, f_n)$ implica $g^\alpha \in I(f_1, \dots, f_n)$?

Observem que si la funció g no té zeros al disc unitat, llavors l'exponent α no té perquè ser enter. Per $\alpha < 2$, una variació de l'exemple de K. Rao dóna una resposta negativa al problema, en canvi, per $\alpha > 2$ treballs de T. Wolff i U. Cegrell ([5]) entre d'altres, donen una resposta positiva al problema. Així $\alpha = 2$ és el cas crític, i el problema corresponent s'anomena el problema g^2 de T. Wolff. Concretament, si $g \in J(f_1, \dots, f_n)$, és cert que $g^2 \in I(f_1, \dots, f_n)$?

Els resultats i problemes que hem descrit poden emmarcar-se en el següent problema més general:

Problema A'. Sigui h una funció definida en $[0, \infty)$ contínua, positiva i creixent en un entorn de l'origen. Considerem funcions $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$. Per quines funcions h, la condició

$$|g(z)| \leq h(|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

implica que la funció g pertany a l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$?

En [22], K. Lin va donar una resposta afirmativa per la funció $h(s) = \dfrac{s^2}{(-\log s)^{(3/2)+\varepsilon}}$, amb $\varepsilon > 0$. Basant-se en la prova de K. Lin, U. Cegrell ([6]) va millorar aquest resultat, donant la millor condició coneguda fins ara per a què una funció g estigui a l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$.

Teorema (Cegrell). *Siguin $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $|f(z)|^2 = \sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2 > 0$, per tot $z \in \mathbb{D}$. Llavors el problema A' té resposta afirmativa per*

$$h(s) = \frac{s^2}{(-\log s)^{3/2} (\log(-\log s))^{3/2} \log\, \log(-\log s)}.$$

En aquest treball donem una millora d'aquest resultat provant el següent:

Teorema A. *Sigui $k:(0,1)\to[0,\infty)$ una funció contínua, acotada, creixent amb $k(x)/x$ decreixent en un entorn de l'origen tal que*

$$\int_0^1 \frac{k(x)}{x}|\log x|\,dx < +\infty.$$

Sigui $H(x)=\sqrt{k(x)\int_0^x \frac{k(s)}{s}\,ds}$. Siguin $g, f_1,\dots,f_n\in H^\infty$ amb $0<|f|^2:=\sum_{j=1}^n |f_j|^2<1$. Aleshores la condició

$$|g|\le C|f|^2\,H(|f|^2),$$

implica l'existència de solucions $g_1,\dots,g_n$ de l'equació $g=f_1g_1+\cdots+f_ng_n$.

Per exemple, si es pren la funció $k(x)=|\log x|^{-2}(\log|\log x|)^{-3/2}$, obtenim que per $|f|^2<e^{-1}$, el Problema A' té resposta afirmativa per la funció

$$h(s)=s^2(-\log s)^{-3/2}(\log(-\log s))^{-1},$$

que millora clarament el resultat de U. Cegrell. No obstant, el problema g^2 de T. Wolff, que correspon a $h(s)=s^2$, continua obert.

No obstant, utilitzant una idea de Z. Slodkowsky (veure [34]), hem trobat una relació entre el problema g^2 de T. Wolff i les estimacions òptimes del Teorema de la Corona. A continuació, describim aquest problema que també es troba obert. Donades funcions $f_1,\dots,f_n\in H^\infty$ amb

$$0<\delta\le\Big(\sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2\Big)^{1/2}\le 1,\qquad \forall z\in\mathbb{D},$$

el Teorema de la Corona ens diu que existeixen funcions $g_1,\dots,g_n\in H^\infty$ tals que $f_1g_1+\cdots+f_ng_n=1$. Denotem per

$$K(\delta,f_1,\dots,f_n)=\inf\Big\{\sup_{z\in\mathbb{D}}\Big(\sum_{j=1}^n|g_j(z)|^2\Big)^{1/2}: f_1g_1+\cdots+f_ng_n=1\Big\},$$

i per

$$K(\delta)=\sup\{K(\delta,f_1,\dots,f_n): 1\ge\Big(\sum_{j=1}^n|f_j(z)|^2\Big)^{1/2}\ge\delta\ \ \forall z\in\mathbb{D}\}.$$

En el cas en què δ sigui proper a 1, P. Jones (veure [20]) va trobar el millor ordre de magnitud de $K(\delta)$, mentre que per δ petit aquesta qüestió encara no està resolta. Veurem que

$$K(\delta) \leq C\delta^{-2}\log(1/\delta), \quad 0 < \delta < 1/3,$$

on C és una constant absoluta independent de n, i que $K(\delta) \geq \sqrt{2}\delta^{-2}$. No obstant, no sabem quin és l'ordre exacte de magnitud de $K(\delta)$ quan δ tendeix a 0.

La relació entre trobar bones estimacions per $K(\delta)$ i el problema g^2 de T. Wolff ve donat pel següent fet: si $K(\delta) >> \delta^{-2}$, és a dir, si $\lim_{\delta\to 0}\delta^2 K(\delta) = \infty$, aleshores existeixen funcions $g, f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$|g(z)| \leq C(|f_1(z)| + |f_2(z)|) \quad , \, z \in \mathbb{D},$$

però de manera que la funció g^2 no es troba en l'ideal generat per f_1 i f_2. És a dir, si $\lim_{\delta\to 0}\delta^2 K(\delta) = \infty$, la resposta al problema g^2 de T. Wolff és negativa.

Problema B. Generalitzacions al cas H^p, $1 \leq p < \infty$.

Un altre tema relacionat és l'equació de Bezout en l'espai de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. És a dir, donades funcions $f_1, f_2 \in H^\infty$ amb $|f|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 > 0$, buscar condicions suficients per a què existeixin funcions $g_1, g_2 \in H^p(\mathbb{D})$ de manera que $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$. Recordem que, donat $0 < p < \infty$, una funció holomorfa f al disc unitat és de l'espai de Hardy $H^p = H^p(\mathbb{D})$ si

$$\|f\|_p^p = \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < \infty.$$

És ben conegut que $f \in H^p(\mathbb{D})$ si i només si $Mf \in L^p(\mathbb{T})$, on Mf denota la funció maximal no tangencial de f i $\mathbb{T}$ és el cercle unitat. Com $1 \leq |f||g|$, una condició clarament necessària és que $M(|f|^{-1}) \in L^p(\mathbb{T})$. Ara bé, aquesta condició no és suficient. De fet, en [1], E. Amar, J. Bruna i A. Nicolau donen un exemple que prova que la condició

$$M(|f|^{-\alpha}) \in L^p(\mathbb{T}), \tag{2}$$

per $1 \leq \alpha < 2$, no implica l'existència de solucions $g_1, g_2 \in H^p$ de l'equació $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$. També proven que en el cas $\alpha > 2$, la condició (2) és suficient per trobar solucions de l'equació de Bezout en H^p. Així, com al problema A, $\alpha = 2$ és un cas crític i també està sense resoldre. També ens podem plantejar l'anàleg del problema A', és a dir,

Problema B'. Sigui h una funció definida en $[0,\infty)$ contínua, positiva i creixent en un entorn de l'origen. Considerem funcions $f_1,\dots,f_n \in H^\infty$. Per quines funcions h, la condició

$$M\left(\frac{1}{h(|f|)}\right) \in L^p(\mathbb{T}),$$

implica l'existència de solucions $g_1,\dots,g_n \in H^p$ de l'equació $f_1g_1+\cdots+f_ng_n=1$?

A [1], es dóna una resposta afirmativa a aquest problema per la funció

$$h(s)=s^2/(-\log s)^{2+\varepsilon}, \quad \varepsilon>0.$$

Aquí, primer donem una petita millora d'aquest resultat, canviant el 2 del logaritme per un 3/2. De fet, donarem una millora més substancial en els termes del Teorema A. Més concretament, provem el següent:

Teorema B. *Sigui k com en el Teorema A. Sigui $H(x)=\sqrt{k(x)\int_0^x \frac{k(s)}{s}\,ds}$. Aleshores, donades funcions $g, f_1,\dots,f_n \in H^\infty$, la condició*

$$M\left(\frac{g}{|f|^2 H(|f|^2)}\right) \in L^p(\mathbb{T})$$

implica l'existència de solucions $g_1,\dots,g_n \in H^p$ de l'equació $f_1g_1+\cdots+f_ng_n=g$.

Com abans, prenent $k(x)=|\log x|^{-2}(\log|\log x|)^{-3/2}$, obtenim

$$H(x)=(-\log x)^{-3/2}(\log(-\log x))^{-1},$$

i el Teorema B millora el resultat de E. Amar, J. Bruna i A. Nicolau. No obstant, el problema de la suficiència de la condició $M(g|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ continua obert. La prova dels Teoremes A i B segueix el mètode tradicional de resolució d'equacions $\bar\partial$. El punt que dóna la millora en front dels resultats anteriors és que amb la notació de l'enunciat, les mesures

$$\frac{|\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4}\,k(|f|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$$

$$\frac{|f|^2|f'|^2-|\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4}\left(\int_0^{|f|^2}\frac{k(s)}{s}\,ds\right)(1-|z|^2)\,dx\,dy,$$

són de Carleson. Recordem que una mesura positiva μ al disc unitat es diu que és una mesura de Carleson si existeix $C=C(\mu)>0$ tal que

$$\mu(Q)\le Cl(Q),$$

per tot Q de la forma $Q = \{re^{i\theta} : 0 < 1 - r < l(Q),\ |\theta - \theta_0| < l(Q)\}$. Definim $N(\mu)$ com l'ínfim dels nombres $C > 0$ que compleixen l'estimació anterior.

Problema C. Clausures d'ideals.

De forma semblant al Problema A on es busquen condicions suficients per a què una funció $g \in H^\infty$ pertanyi a l'ideal I, ens interessem per condicions que impliquin que la funció g es trobi a la clausura en norma de l'ideal I, és a dir, que $dist_{H^\infty}(g, I) = 0$. És a dir, busquem condicions suficients per a què una funció $g \in H^\infty$ es pugui aproximar uniformement per funcions de l'ideal I.

Una primera condició que es pot esperar que sigui suficient, és que g sigui de l'ideal $J(f_1, \ldots, f_n)$, és a dir, un es pregunta si l'ideal J està contingut en la clausura de l'ideal I. Ara bé, l'any 1985, J. Bourgain (veure [2]) va construir un exemple que prova que això no és cert en general i va donar una condició suficient.

Teorema (Bourgain). *(a) Existeixen funcions $g, f_1, f_2 \in H^\infty$ tal que*

$$|g(z)| \leq |f_1(z)| + |f_2(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

de forma que g no està en la clausura de l'ideal $I(f_1, f_2)$.

(b) Sigui $I = I(f_1, \ldots, f_n)$ l'ideal generat per $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$. Sigui α una funció contínua tal que $\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0$. Sigui $g \in H^\infty$ tal que

$$|g(z)| \leq \alpha(|f(z)|) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Llavors $dist_{H^\infty}(g, I) = 0$.

Ara bé, imposant unes condicions adicionals sobre les funcions $f_1, \ldots, f_n$, obtenim que la condició $g \in J$, és suficient per assegurar que g pertany a la clausura de l'ideal I. Per enunciar el nostre resultat, necessitem donar la següent definició. Un producte de Blaschke B amb zeros $\{z_n\}$ es diu de Carleson-Newman si la mesura $\mu = \sum_n (1 - |z_n|)\delta_{z_n}$ és una mesura de Carleson.

Teorema C. *Siguin $f_1, \ldots, f_n$ funcions de H^∞. Si l'ideal $I = I(f_1, \ldots, f_n)$ conté un producte de Blaschke de Carleson-Newman, llavors la condició $g \in J = J(f_1, \ldots, f_n)$ implica que $dist_{H^\infty}(g, I) = 0$.*

Aquest resultat ha estat provat independentment per P. Gorkin i R. Mortini (veure [16]). Ara bé, els mètodes utilitzats son totalment diferents. La nostra prova es basa en la resolució d'equacions del tipus $\bar{\partial} f = g$, i s'aprofita fortament que la mesura $\mu = \sum(1-|z_j|)\delta_{z_j}$ és de Carleson, on $\{z_j\}$ són els zeros d'un producte de Blaschke de Carleson-Newman. La prova de P. Gorkin i R. Mortini fa servir propietats fines de l'espectre de H^∞.

La hipòtesis sobre l'ideal $I(f_1, \ldots, f_N)$ pot no semblar molt natural. Ara bé, és realment una condició sobre l'estructura de l'ideal. Per explicar aquest fet, recordem que $M(H^\infty)$ denota l'espai dels ideals maximals de H^∞. Si $x, m \in M(H^\infty)$, la distància pseudohiperbòlica de x a m es defineix com

$$\rho(x, m) = \sup\{|m(f)| : f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1, x(f) = 0\}.$$

Pel Lema de Schwarz, això no és més que l'extensió a $M(H^\infty)$ de la funció

$$\rho(z, w) = \left|\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}\right|,$$

per $z, w \in \mathbb{D}$. És ben conegut que l'espai dels ideals maximals $M(H^\infty)$ es pot partir en classes d'equivalència definides mitjançant la relació $x \sim m$ si i només si $\rho(x, m) < 1$. Les classes d'equivalència s'anomenen parts de Gleason. En l'important treball [18], K. Hoffman va provar que les parts de Gleason no trivials, és a dir, aquelles que contenen més d'un punt, contenen un disc analític.

Donada una funció $f \in H^\infty$, el seu conjunt de zeros $Z(f)$ es defineix com

$$Z(f) = \{m \in M(H^\infty) : m(f) = 0\}$$

Ara, es defineix el conjunt de zeros $Z(I)$ d'un ideal I en H^∞ com

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f)$$

El següent resultat va ser provat per V. Tolokonnikov (veure [39]). La condició (b) ens diu que la condició imposada en el teorema anterior és una condició d'estructura de l'ideal, mentre que la condició (c) permet expressar-la explícitament en termes dels generadors.

Teorema (Tolokonnikov). *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$. Llavors, les següents propietats són equivalents:*
(a) L'ideal $I = I(f_1, \ldots, f_n)$ conté un producte de Blaschke de Carleson-Newman.
(b) El conjunt de zeros $Z(I)$ està contingut en el conjunt de punts de $M(H^\infty)$ amb part de Gleason no trivial.
(c) Existeix un nombre natural $s \geq 0$ tal que

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} \sum_{k=0}^{s} (1 - |z|)^k \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j^{k)}(z)|\right) > 0.$$

Un altre qüestió interessant, és estudiar l'anàleg d'aquest problema d'aproximació en els espais de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. En aquest treball, obtenim un resultat del tipus del teorema de J. Bourgain enunciat anteriorment.

Teorema D. *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$. Sigui $g \in H^p$, $1 \leq p < \infty$ tal que*

$$M(g/|f|) \in L^p(\mathbb{T}).$$

Llavors, donat $\varepsilon > 0$, existeixen funcions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ tals que

$$\|g - (f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n)\|_p < \varepsilon.$$

A destacar el fet que quan $p = \infty$, aquesta condició correspon a que la funció g estigui a l'ideal $J(f_1, \ldots, f_n)$. Per tant en el cas H^p amb $1 \leq p < \infty$, un exemple com el de J. Bourgain no es pot construir. La prova del Teorema D es basa en el mètode de l'apartat (b) del Teorema de [2] i en una versió per espais L^p del criteri de Carleson sobre l'existència de solucions acotades de l'equació $\bar{\partial} b = h$.

Problema D. Quan els ideals I i J coincideixen?

Aquest problema va ser proposat per L. Rubel, i en aquesta direcció P. Gorkin, R. Mortini i A. Nicolau (veure [14]) van donar una resposta parcial, caracteritzant els ideals $I(f_1, f_2)$ que satisfan $I(f_1, f_2) = J(f_1, f_2)$ com els ideals que contenen un producte de Blaschke d'interpolació. Recordem que un producte de Blaschke és d'interpolació si

$$\inf_{z \in Z(B)} (1 - |z|^2)|B'(z)| > 0,$$

o equivalentment, si la successió $\{z_n\}$ dels seus zeros és una successió d'interpolació de H^∞. Aquestes successions van ser caracteritzades per Carleson com les successions de punts del disc unitat que compleixen que $\inf_{n \neq m} |\frac{z_n - z_m}{1 - \bar{z_m} z_n}| > 0$ i que la mesura $\sum (1 - |z_n|)\delta_{z_n}$ és de Carleson. Aquí δ_z denota la delta de Dirac al punt z.

Ara bé, aquesta caracterització només és vàlida pel cas de dos generadors. Així sembla interessant buscar una generalització d'aquest resultat pel cas de n generadors. En aquesta direcció, un concepte relevant és l'ordre de l'ideal en un punt $m \in M(H^\infty)$, que definim tot seguit (veure [14]). Donada una funció $f \in H^\infty$, i un punt $m \in Z(f)$, es defineix l'ordre de f en el punt m, com

$$\operatorname{ord}(f, m) = \max\{k : f = \prod_{j=1}^{k} f_j \text{ amb } f_j \in H^\infty ; m(f_j) = 0\}$$

Llavors, donat un punt $m \in Z(I)$, definim l'ordre de l'ideal I en m com

$$\min\{\text{ord}(f, m) : f \in I\}.$$

El resultat anterior es pot reformular dient que els ideals $I(f_1, f_2)$ i $J(f_1, f_2)$ són iguals si i només si $\text{ord}(I, m) = 1$ per tot $m \in Z(I)$. Així apareix de forma natural la següent conjectura que generalitzaria el resultat anterior.

Conjectura. Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$. Llavors

$$I(f_1, \ldots, f_n) = J(f_1, \ldots, f_n) \text{ si i només si } \text{ord}(I, m) \leq N - 1 \quad \forall m \in Z(I),$$

on N és el nombre mínim de generadors de l'ideal $I(f_1, \ldots, f_n)$.

Alguns resultats parcials de R. Mortini en el cas de més de dos generadors fan pensar en la validesa d'aquesta conjectura, però no hem sabut provar cap de les dos implicacions.

Com ja hem vist en l'apartat de clausures d'ideals, la hipòtesis que l'ideal I contingui un producte de Blaschke de Carleson-Newman, o equivalentment que l'ordre de l'ideal sigui finit, permet donar respostes positives a certs problemes. De fet, en [14], es prova que sota aquesta condició, el problema g^2 de T. Wolff té resposta afirmativa. De fet, si l'ordre de l'ideal és finit i tenim una funció $g \in J$ sense zeros, llavors existeix un $\alpha < 2$ depenent de l'ordre de l'ideal de forma que la funció $g^\alpha \in I$. Enunciem aquest resultat tot seguit.

Teorema E. *Considerem funcions $g, f_1, \ldots, f_N \in H^\infty$, i sigui $I = I(f_1, \ldots, f_N)$ l'ideal generat per $f_1, \ldots, f_N$. Suposem que ord$(I, m) \leq k$, per tot $m \in Z(I)$. Llavors per $0 < \alpha < 1/k$, la condició*

$$|g(z)| \leq C|f(z)|^{2-\alpha} \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

implica $g \in I$.

Sembla interessant estudiar també el cas $\alpha = 1/k$, doncs per $k = 1$ el resultat és cert. Ara bé, els nostres mètodes no permeten considerar aquest cas, i deixem com un problema obert la validesa d'aquest resultat per $\alpha = 1/k$.

Així mateix, imposant aquesta condició d'estructura en l'ideal I, també podem resoldre el cas crític $\alpha = 2$ en l'estudi de l'equació de Bezout a H^p.

Teorema F. *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$, i considerem l'ideal $I = I(f_1, \ldots, f_n)$. Suposem que ord$(I, m) < \infty$ per tot $m \in Z(I)$. Llavors, per $1 \leq p < \infty$, la condició $M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ implica l'existència de solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ de l'equació $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.*

Les proves dels Teoremes E i F segueixen el mètode tradicional de resolució d'equacions $\bar{\partial}$ amb estimacions apropiades. En els dos casos, la hipòtesis sobre l'ordre dels zeros de l'ideal s'utilitza per tenir un bon control sobre el tamany de les dades dels corresponents problemes $\bar{\partial}$.

Finalment, volem esmentar que un cop acabada una primera versió d'aquesta memòria ens ha arribat una prepublicació de S. Treil (veure [42]), on es dóna un exemple de dues funcions $f_1, f_2 \in H^\infty$ complint la condició de la corona

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| \geq \delta, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

de forma que $K(\delta, f_1, f_2) \geq C\delta^{-2}\log(-\log\delta)$. Aquest exemple millora les estimacions conegudes fins ara, i com ja hem comentat dóna una resposta negativa al problema g^2 de T. Wolff. S. Treil en la seva prepublicació, i amb arguments diferents dels nostres, també dedueix l'existència d'un contraexemple al problema g^2 de T. Wolff. No obstant, el problema de trobar l'ordre exacte de magnitud de $K(\delta)$ continua obert.

Capítol 2.

En aquest segon capítol estudiarem diversos problemes sobre decreixement de funcions analítiques i acotades en el disc unitat. En particular estem interessats en saber les condicions que ha de complir una successió discreta de punts $\{a_k\}$ en el disc unitat de forma que existeixi una funció analítica i acotada en $\mathbb{D}$ que decreixi cap a zero en aquests punts amb una velocitat determinada. Enunciem això de forma precisa.

Problema E. *Sigui $g : (0,1) \to (0,1)$ una funció no creixent tal que $\lim_{r\to 1} g(r) = 0$. Quines condicions ha de complir una successió $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ per a què existeixi una funció $f \in H^\infty$, $f \neq 0$ complint que $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$?*

Com un primer pas per aquest problema, voldríem saber què ha de complir la successió per a què, almenys existeixi una funció analítica i acotada que decreixi cap a zero en els punts de la successió. La resposta a aquesta qüestió ha estat donada per Hayman (veure [17]).

Teorema (Hayman). *Donada una successió discreta $a = \{a_k\}$ de punts en el disc unitat, existeix una funció no idènticament nul.la $f \in H^\infty$ tal que $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = 0$ si i només si $|NT(a)| = 0$.*

En l'enunciat anterior, donada una successió $a = \{a_k\} \subset \mathbb{D}$, $NT(a)$ denota el *conjunt de punts d'acumulació no-tangencials*, és a dir, el conjunt de punts $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ que són punts límits de la intersecció de $\{a_k\}$ amb un angle de Stolz de qualsevol obertura amb vèrtex en el punt ζ, i $|\cdot|$ denota la mesura de Lebesgue 1-dimensional en el cercle unitat $\partial\mathbb{D}$.

Tornant al problema anterior, com que la funció $\log|f|$ és subharmònica, podriem donar una versió més general del problema en termes de funcions subharmòniques en el disc unitat. Així també sorgeix el problema anàleg pel cas de funcions harmòniques i positives en el disc unitat.

Problema F. *Sigui $h:(0,1)\to(0,\infty)$ una funció no decreixent tal que $\lim_{r\to 1} h(r)=\infty$. Quines condicions ha de complir una successió $\{a_k\}\subset\mathbb{D}$ per a què existeixi una funció u harmònica i positiva en el disc unitat complint que $u(a_k)\geq h(|a_k|)$?*

No hem sabut respondre aquesta pregunta. No obstant, la situació és molt més senzilla si tractem amb funcions harmòniques de l'espai de Hardy h^p, $1<p<\infty$, on tenim l'ajut de les tècniques relacionades amb la funció maximal. Recordem que una funció harmònica u està a l'espai de Hardy h^p si

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|^p\,d\theta<\infty,$$

o equivalentment si $M(u)\in L^p(\mathbb{T})$. El nostre resultat és el següent:

Teorema G. *Sigui $h:(0,1)\to(0,\infty)$ una funció no decreixent tal que $\lim_{r\to 1} h(r)=\infty$. Sigui $a=\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ una successió separada tal que $|NT(a)|=0$. Sigui $1<p<\infty$. Llavors existeix una funció positiva $u\in h^p(\mathbb{D})$ tal que $u(a_n)\geq h(|a_n|)$ si i només si*

$$\sum_n (h(|a_n|))^p\,|I_n\setminus\bigcup_{j:I_j\subset I_n} I_j|<+\infty,$$

on I_n denota la base del sector diàdic S tal que a_n està a la part superior de S.

En [37], motivat per problemes de mostreig en els espais de Hardy H^p, P. Thomas va introduïr el concepte de successió *thin* per H^∞. Diem que una successió $\{a_n\}$ de punts del disc unitat $\mathbb{D}$ és *thin* per H^∞ si existeix una funció no idènticament nul.la $f\in H^\infty$ de forma que

$$\sum_n(1-|a_n|)|f(a_n)|<\infty.$$

És a dir, una successió és *thin* si hi ha una funció $f\in H^\infty$ que hi decreix amb una certa velocitat. És clar que les successions de Blaschke són *thin*, però la classe de successions *thins* és molt més gran. Una successió de punts del disc unitat que no és *thin* es diu que és *thick*. Una qüestió interessant és el donar una caracterització geomètrica de les successions *thins*. Nosaltres ens restringirem al cas de successions separades en la distància pseudohiperbòlica, és a dir, considerarem successions $\{a_n\}$ de forma que

$$\inf_{j \neq k} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_k a_j} \right| := \delta > 0.$$

Donat $\gamma > 0$ i un punt $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, denotem per $I_\gamma(a)$ l'arc del centre unitat $\mathbb{T}$ centrat en el punt $a/|a|$ de longitud $\gamma(1 - |a|)$. Donada una successió $\{a_k\}$ de punts en el disc unitat, considerem la funció $\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma(\{a_k\})$, donada per

$$\Gamma_\gamma(\xi) = \#\{k : \xi \in I_\gamma(a_k)\} = \sum \chi_k(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}, \tag{3}$$

on χ_k denota la funció característica de l'arc $I_\gamma(a_k)$. De fet, $\Gamma_\gamma(\xi)$ és el nombre de punts de la successió $\{a_k\}$ que es troben en un cert angle de Stolz d'obertura depenent de γ amb vèrtex en $\xi \in \mathbb{T}$. Observem que la funció Γ_γ apareix de forma natural en aquest tipus de problemes, així la condició de Blaschke es pot expressar en termes de la funció Γ_γ ja que

$$\gamma \sum_k (1 - |a_k|) = \int_{\mathbb{T}} \Gamma_\gamma \, .$$

També, el conjunt de punts d'acumulació no-tangencials $NT(\{a_k\})$ de la successió $\{a_k\}$ i el conjunt $\{\xi \in \mathbb{T} \colon \Gamma_\gamma(\xi) = \infty\}$ només difereixen en un conjunt de mesura zero. Per tant, el Teorema de Hayman també es pot expressar en termes de la funció Γ_γ. El nostre resultat sobre successions *thins* també està enunciat en aquests termes.

Teorema H. *Sigui $\{a_k\}$ una successió separada de punts en el disc unitat. Sigui $\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma(\{a_k\})$ la funció donada per* (3).

(a) Si existeix $\gamma > 0$ tal que $\log_+ \Gamma_\gamma \in L^1(\mathbb{T})$, llavors $\{a_k\}$ és thin.

(b) Si $\{a_k\}$ és thin, llavors per tot $\gamma > 0$, la funció $\log_+ \Gamma_\gamma$ està a l'espai L^1_d, és a dir, existeix una constant $C = C(\gamma) > 0$ tal que

$$|\{\theta \in [0, 2\pi) : \log_+ \Gamma_\gamma(e^{i\theta}) \geq \lambda\}| \leq C/\lambda, \quad \textit{per tot} \;\; \lambda > 0.$$

Així, no tenim una caracterització completa de les successions *thins* i separades. Ara bé, ni la condició suficient (a) ni la condició necessària (b), poden ser millorades si només raonem en termes del tamany de la funció $\Gamma = \Gamma_\gamma$. A més, la condició (a) no és necessària ni la condició (b) és suficient. Podem pensar les condicions del Teorema anterior com una versió logarítmica de la condició de Blaschke $\Gamma \in L^1(\mathbb{T})$.

Una altra noció sobre decreixement de funcions analítiques és el dels minorants essencials. Donada una classe de successions, un minorant essencial sobre aquesta classe és una funció que decreix cap a zero massa ràpid per a què existeixi una funció analítica i acotada no nul.la que decreixi amb la mateixa velocitat en alguna successió de la classe. De forma més precisa, si S denota una classe de successions en el disc unitat, diem que una funció no creixent g de $[0,1)$ a $(0,\infty)$, que tendeix a 0 quan x tendeix a 1, és un *minorant essencial* per la classe S si i només si donada qualsevol successió separada $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ de la classe S, tota funció $f \in H^\infty$ verificant que $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$ és idènticament nul.la.

La noció de minorants essencials ha estat introduïda per Lyubarskii i Seip per la classe de les successions no-Blaschke (veure [24]), donant la següent caracterització:

Teorema (Lyubarskii-Seip). *Una funció g és un minorant essencial per les successions no-Blaschke si i només si*

$$\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)\log\frac{1}{g(r)}} < \infty.$$

Per la classe de successions *thick*, s'obté el següent resultat:

Teorema I. *Una funció no creixent g de $[0,1)$ a $(0,\infty)$ és un minorant essencial en conjunts thicks si i només si*

$$\liminf_{r\to 1} \frac{|\log g(r)|}{\log|\log(1-r)|} > 0.$$

Estructura del treball.

La memòria està estructurada en dos capítols, i cada capítol està dividit en 7 seccions.

Anem tot seguit a fer un breu comentari de les seccions del capítol 1. La primera secció és una introducció als temes que es tracten en aquest capítol. La secció 1.2, està dedicada als criteris de resolució d'equacions $\bar\partial$ amb estimacions L^∞, com el criteri de Carleson, el criteri de Wolff, i les seves versions L^p. La secció 1.3 està dedicada a les estimacions de les solucions del Teorema de la Corona, i es donen exemples que donen les millors cotes conegudes fins ara. Així mateix, també es prova que $\lim \delta^2 K(\delta) = \infty$ implica que el problema g^2 de T. Wolff (el Problema A' amb $h(s) = s^2$) té resposta negativa. La secció 1.4 està dedicada a l'estudi del Problemes B i B', i també es dóna una prova del Teorema F. En la secció 1.5 s'estudien problemes sobre clausures d'ideals (Problema C), i es proven els Teoremes C i D. En la secció 1.6 es proven els Teoremes A, B i E, resultats obtinguts després de tenir una versió preliminar d'aquest treball. Finalment, a l'apèndix d'aquest capítol, es dóna una prova del Teorema de la Corona amb les millors estimacions superiors conegudes per les solucions.

El capítol 2 comença amb una primera secció on s'introdueix la noció de les generacions associades a una successió de punts del disc unitat, eina clau per a la prova dels resultats d'aquest capítol. En la segona secció es prova el Teorema G i també es dóna un anàleg d'aquest Teorema per funcions no radials. En la tercera secció s'introdueixen les successions *thicks* i *thins* i es dóna una reformulació del Teorema H en termes de generacions. La secció 2.4 està dedicada a la prova d'aquest Teorema, i a la construcció dels exemples que proven que ni la condició suficient ni la condició necessària es poden millorar en termes de la funció Γ. En la secció 2.5, s'estudien quines són les successions *thins* conforment invariants caracteritzant-les com les successions d'interpolació per H^∞. Finalment, la secció 2.6 està dedicada a la prova del Teorema I, que caracteritza els minorants essencials sobre la classe de successions *thicks*. A la secció 2.7 es fan algunes observacions.

Una part dels resultats nous que apareixen en aquesta memòria es troben en els articles:

[NP] Nicolau, A.; Pau, J.: *Closures of finitely generated ideals on Hardy spaces*, Arkiv fôr Matematik, 39 (2001), per aparèixer

[NPT] Nicolau, A.; Pau, J.; Thomas, P.: *Smallness sets for bounded holomorphic functions*, Journal d'Analyse Mathématique, Vol. 82 (2000), 119-148

Capítol 1

Problemes d'ideals de H^∞

1.1 Introducció.

El Teorema de la Corona.

Sigui $M(H^\infty)$ l'espai dels ideals maximals de H^∞, és a dir, l'espai dels funcionals lineals multiplicatius de H^∞. Podem pensar els punts del disc unitat $\mathbb{D}$ com elements de $M(H^\infty)$, fent correspondre a cada punt $z \in \mathbb{D}$ el funcional $\phi_z(f) = f(z), f \in H^\infty$. El Teorema de la Corona ens diu que el disc $\mathbb{D}$ és dens en $M(H^\infty)$ en la topologia de Gelfand, és a dir, la "corona" $M(H^\infty)\backslash\bar{\mathbb{D}}$ és el buit. Aquest fet es pot enunciar de diferent forma:

Considerem funcions $f_j \in H^\infty(\mathbb{D})$ amb $\|f_j\|_\infty \leq 1$ per $j = 1, \ldots, n$ de forma que compleixen

$$\inf_{z\in\mathbb{D}} \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \geq \delta > 0,$$

aleshores el Teorema de la Corona diu que l'ideal generat per $f_1, \ldots, f_n$ és tota l'àlgebra H^∞ o equivalentment, conté la funció constant igual a 1, és a dir, existeixen funcions $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty$ tal que $\sum f_j g_j = 1$.

Cal comentar que la prova d'aquest Teorema seria senzilla si la mesura lineal als conjunts de nivell $\{z : |f_j(z)| = \varepsilon\}$ definissin una mesura de Carleson, però malauradament aquest fet és fals (veure [19]). Degut a això, en la prova original, L. Carleson (veure [4]) va construir un conjunt $\Gamma = \Gamma_j$ que fa el paper de conjunt de nivell en el sentit que $\varepsilon \leq |f_j(z)| < \delta(\varepsilon)$ per $z \in \Gamma$, i que a més la mesura lineal sobre ell és una mesura de Carleson. Aquest conjunt s'ha anomenat Contorn de Carleson.

En la prova original del teorema de la Corona, L. Carleson va obtenir una estimació per la solució de l'estil $\|g\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}(\sum |g_j(z)|^2)^{1/2} \leq \delta^{-A}$ on $(A = A(n))$ depèn de n. L'any

1979, T. Wolff va donar una nova prova del teorema de la Corona, amb una estimació per la solució de la forma $\|g\|_\infty \leq 2n\delta^{-4}$. Basant-se en la prova de T. Wolff (millorada per T. Gamelin, veure [10]), la primera estimació de la solució no depenent de n va ser obtinguda de forma independent i simultàneament per V. Tolokonnikov [40] ($\|g\|_\infty \leq 25\delta^{-4}$) i M. Rosenblum ($\|g\|_\infty \leq 65\delta^{-4}$), veure [32]. Aquestes estimacions independents del nombre de generadors permeten plantejar i provar el Teorema de la Corona per funcions $f = \{f_i\}$ holomorfes en $\mathbb{D}$ a valors en l^2, és a dir,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(z)|^2 < \infty.$$

Gairebé al mateix temps, V. Tolokonnikov (veure [40], [41]) també va donar una estimació del tipus $\|g\|_\infty \leq C\delta^{-2}(\log(1/\delta)^{3/2}$ quan $\delta \to 0$. Una estimació per la solució d'ordre $\delta^{-2}\log(1/\delta)$ per $\delta \to 0$ va ser obtinguda per A. Uchiyama en [43]. Resumim aquests resultats en el següent enunciat.

Teorema 1.1.1. *Siguin $f_1, f_2, \ldots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ amb $\|f_j\|_\infty \leq 1$ tal que*

$$0 < \delta \leq \inf_{z\in\mathbb{D}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2\Big)^{1/2} \leq 1.$$

Suposem $\delta < 1/3$. Aleshores existeixen solucions $g_1, g_2, \ldots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ de l'equació

$$f_1g_1 + \cdots + f_ng_n = 1,$$

amb $\sup_{z\in\mathbb{D}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |g_j(z)|^2\Big)^{1/2} \leq \frac{C}{\delta^2}\log(1/\delta)$. Aquí, C és una constant absoluta (independent de n i de δ).

Una prova d'aquest resultat i en particular de l'estimació de les solucions, es dóna a la secció 1.6.

El problema g^2 de T. Wolff.

Siguin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcions analítiques i acotades en $\mathbb{D}$. Denotem per

$$I := I(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \Big\{f \in H^\infty(\mathbb{D}) : \exists g_j \in H^\infty; f = \sum_{j=1}^{n} f_jg_j\Big\},$$

l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$, i per $J = J(f_1, \dots, f_n)$ l'ideal de les funcions $f \in H^\infty$ de forma que existeix una constant $C = C(f) > 0$ tal que $|f(z)| \leq C \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|$ per tot $z \in \mathbb{D}$.

Clarament l'ideal I està contingut dins l'ideal J. El Teorema de la Corona ens diu que si la funció constant igual a 1 pertany a l'ideal J (és a dir, si $J = H^\infty$), aleshores l'ideal I és tota l'àlgebra de funcions. Així, de manera natural apareix el següent problema: donada una funció de l'ideal J, sota quines condicions aquesta funció pertany a l'ideal I?

Primer cal comentar que K. Rao (veure [31]) va donar un exemple de dues funcions f_1, f_2 de manera que $I(f_1, f_2) \neq J(f_1, f_2)$, per tant, en general, aquests dos ideals son diferents. De fet, com veurem més endavant, en el cas de dos generadors, són iguals si i només si contenen un producte de Blaschke d'interpolació. K. Rao va donar un exemple de dos productes de Blaschke B_1, B_2 amb

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} (|B_1(z)| + |B_2(z)|) = 0$$

de manera que $B_1 B_2 \notin I(B_1^2, B_2^2)$. Un refinament d'aquest exemple ens permet veure el següent:

Proposició 1.1.2. *Donat $\varepsilon > 0$ hi ha funcions $f, f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ tals que $|f| \leq (|f_1| + |f_2|)^{2-\varepsilon}$ i $f \notin I(f_1, f_2)$.*

Demostració. Considerem productes de Blaschke B_1, B_2 sense zeros comuns de forma que

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} (|B_1(z)| + |B_2(z)|) = 0.$$

Definim $f_1 = B_1^{n+1}, f_2 = B_2^{n+1}$ i $f = B_1^n B_2^n$, on $n = n(\varepsilon)$ és un nombre natural a escollir. Clarament tenim

$$|B_1|^n |B_2|^n = (|B_1|^{(n+1)/2} |B_2|^{(n+1)/2})^{2n/(n+1)} \leq C_n (|B_1|^{n+1} + |B_2|^{n+1})^{2n/(n+1)}.$$

Així doncs, escollim $n = n(\varepsilon)$ de forma que $2n/(n+1) > 2 - \varepsilon$. Suposem ara que existeixen funcions $g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ tals que

$$B_1^n B_2^n = g_1 B_1^{n+1} + g_2 B_2^{n+1}.$$

Siguin $\{z_k\}$ els zeros del producte de Blaschke B_1, aleshores $g_2(z_k) B_2^{n+1}(z_k) = 0$. Donat que B_1 i B_2 no tenen zeros comuns tenim que existeix una funció $k_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $g_2 = k_2 B_1^n$. Així

$$B_2^n = g_1 B_1 + k_2 B_2^{n+1}.$$

Anàlogament obtenim que existeix una funció $k_1 \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $g_1 = k_1 B_2^n$. Per tant

$$1 = k_1 B_1 + k_2 B_2$$

fet absurd ja que $\inf(|B_1(z)| + |B_2(z)|) = 0$. $\square$

Encara que en general, si la funció g pertany a l'ideal J, aleshores no té perquè estar a l'ideal I, T. Wolff va provar que la funció g^3 pertany a l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$, veure per exemple [11]. Més encara, si la funció g no té zeros, aleshores $g^{2+\varepsilon}$ està a l'ideal I. Per altra banda, existeixen exemples de funcions $g, f_1, f_2 \in H^\infty$ amb $g \in J(f_1, f_2)$ de manera que $g^{2-\varepsilon}$ no està a l'ideal $I(f_1, f_2)$. El cas límit de saber si la funció g^2 pertany a l'ideal I està sense resoldre.

Va ser T. Wolff qui va plantejar aquest problema, encara obert, conegut com el problema g^2 de T. Wolff.

Problema 1. *Siguin $g, f_1, f_2, \dots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ de manera que existeix $C > 0$ tal que $|g(z)| \leq C\Big(|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|\Big)$. Aleshores existeixen funcions $g_1, g_2, \dots, g_n \in H^\infty$ de forma que $g^2 = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n$?*

També hi ha una altra qüestió natural a resoldre:

Problema 2. *Siguin $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$. És cert que la condició*

$$|g(z)| \leq \Big(|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|\Big)^2 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

implica que la funció g pertany a l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$?

Clarament, una resposta afirmativa al Problema 2 per algun n, implica una resposta afirmativa al Problema 1 (pel mateix n). De fet, el Problema 2 és un cas particular del següent problema més general.

Problema 3. *Sigui h una funció definida en $[0, \infty)$ contínua, positiva i creixent en un entorn de l'origen. Suposem que les funcions $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ compleixen*

$$|g(z)| \leq h(|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Per quines funcions h aquesta condició implica que la funció g pertany a l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$?

El següent resultat donat per K.C. Lin (veure [22]), respon afirmativament el Problema 3 per la funció $h(s) = \dfrac{s^2}{(\log(-s))^{(3/2)+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$.

Proposició 1.1.3 (Lin). *Siguin $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $0 < |f| = (\sum_{j=1}^n |f_j|^2)^{1/2} < e^{-1}$. Si existeix $\varepsilon > 0$ tal que*

$$|g| \le C \frac{|f|^2}{|\log|f||^{(3/2)+\varepsilon}},$$

aleshores $g \in I(f_1, \dots, f_n)$.

Basant-se en la prova de K.C. Lin, U. Cegrell (veure [6]) va millorar aquest resultat, donant la millor condició coneguda fins ara per a què una funció g estigui a l'ideal generat per $f_1, \dots, f_n$.

Proposició 1.1.4 (Cegrell). *Siguin $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $0 < |f| < (e^e)^{-e}$. Llavors el problema 3 té resposta afirmativa per*

$$h(s) = \frac{s^2}{(-\log s)^{3/2}(\log(-\log s))^{3/2}\log(\log(-\log s))}.$$

Els ideals I i J.

Sigui $M(H^\infty)$ l'espai dels ideals maximals de H^∞. El teorema de la corona de Carleson implica que quan l'ideal $J = H^\infty$, aleshores $I = J = H^\infty$.

Llavors és natural preguntar-se per quines son les condicions necessàries i suficients que han de complir els generadors $f_1, \dots, f_n$ per a què $I = J$.

Problema 4. *Quines son les condicions necessàries i suficients per a què*

$$I(f_1, \dots, f_n) = J(f_1, \dots, f_n)\ ?$$

Abans de continuar, necessitem una sèrie de definicions i alguns resultats en aquesta direcció. Un producte de Blaschke es diu d'interpolació si

$$\inf_{z \in Z(B)} (1 - |z|^2)|B'(z)| > 0,$$

o equivalentment, si la successió $\{z_n\}$ dels seus zeros és una successió d'interpolació de H^∞. Aquestes successions van ser caracteritzades per Carleson com les successions de punts del disc unitat que compleixen $\inf_{n\neq m} |\frac{z_n - z_m}{1 - \bar{z_m} z_n}| > 0$ de forma que la mesura $\sum (1 - |z_n|)\delta_{z_n}$ és de Carleson. Un producte de Blaschke es diu que és de Carleson-Newman (o CN-producte de Blaschke), si és un producte finit de productes de Blaschke d'interpolació.

Sigui $M(H^\infty)$ l'espai dels ideals maximals de H^∞. Recordem que donats dos punts $z, w \in \mathbb{D}$, la distància pseudo-hiperbòlica de z a w ve donada per

$$\rho(z, w) = |\frac{z - w}{1 - \bar{w}z}|.$$

Definim l'extensió de ρ a $M(H^\infty)$ per

$$\rho(x, y) = \sup\{|\hat{f}(x)| : f \in H^\infty, \|f\|_\infty \leq 1, \hat{f}(y) = 0\}.$$

on $\hat{f}$ denota la transformada de Gelfand de f definida per $\hat{f}(m) = m(f)$ on $m \in M(H^\infty)$. A partir d'ara identificarem $\hat{f}$ amb f.

Si $f \in H^\infty$, aleshores $Z(f) = \{m \in M(H^\infty) : f(m) = 0\}$ denota el seu conjunt de zeros; denotem per $Z_{\mathbb{D}}(f) = Z(f) \cap \mathbb{D}$. Si I és un ideal, llavors el conjunt de zeros de l'ideal I ve definit per

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f).$$

Per tot $m \in M(H^\infty)$ i $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ amb $f(m) = 0$, definim l'ordre del zero m de f per

$$\mathrm{ord}(f, m) = \sup\{n \in \mathbb{N} : f = f_1 \cdot \dots \cdot f_n \,;\, f_j \in H^\infty, f_j(m) = 0 \;\; (j = 1, \dots, n)\}.$$

Si $f(m) \neq 0$, aleshores diem que $\mathrm{ord}(f, m) = 0$. K. Hoffman (veure [18]) va provar que per tot $m \in M(H^\infty)$ existeix una aplicació analítica $L_m : \mathbb{D} \longrightarrow P(m) = \{x \in M(H^\infty) : \rho(m, x) < 1\}$ amb $L_m(0) = m$, i que $\mathrm{ord}(f, m)$ és la multiplicitat usual del zero de $f \circ L_m$ en l'origen.

Si I és un ideal i $m \in Z(I)$, llavors definim l'ordre de l'ideal I en el zero m com

$$\mathrm{ord}(I, m) = \min_{f \in I} \mathrm{ord}(f, m).$$

En [14], es dóna una resposta al Problema 4 en el cas en què l'ideal I tingui dos generadors. Enunciem aquest resultat tot seguit:

Teorema 1.1.5 (Gorkin-Mortini-Nicolau). *Siguin $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ sense factors comuns. Denotem per $I = I(f_1, f_2)$ i $J = J(f_1, f_2)$. Son equivalents:*

(1) $I = J$.

(2) $ord(I, m) = 1$ per tot $m \in Z(I)$.

(3) I conté un producte de Blaschke d'interpolació.

(4) J conté un producte de Blaschke d'interpolació.

(5) $|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 + (1 - |z|^2)(|f_1'(z)| + |f_2'(z)|) \geq \delta > 0$ per tot $z \in \mathbb{D}$.

Les equivalències de (2) a (5) també són certes per més generadors, (veure [38] per les equivalències de (3) a (5), i [27] per l'equivalència entre (2) i (3)), i a més impliquen que $I = J$. En vista d'aquest resultat, i buscant una generalització per a més generadors, és natural preguntar-se el següent:

Si $I = I(f_1, \ldots, f_n) = J(f_1, \ldots, f_n)$ llavors l'ideal I conté un producte de Blaschke d'interpolació?

Per $n > 2$, la resposta és en general negativa. En [14], es prova que si B, C són productes de Blaschke d'interpolació, aleshores $I(B^2, C^2, BC) = J(B^2, C^2, BC)$. Com els zeros de B i C poden ser hiperbòlicament pròxims, l'ideal $I(B^2, C^2, BC)$ no conté cap producte de Blaschke d'interpolació.

Ara interessaria generalitzar el resultat del teorema anterior, buscant la relació que tinguin els productes de Blaschke de Carleson-Newman amb l'ideal I. En l'exemple anterior, que prova que $I(B^2, BC, C^2) = J(B^2, BC, C^2)$, l'ordre de l'ideal és dos, i tenim tres generadors. Això dóna peu a la següent conjectura que generalitzaria el resultat anterior:

Conjectura. Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$. Llavors $I = I(f_1, \ldots, f_n) = J(f_1, \ldots, f_n)$ si i només si $\mathrm{ord}(I, m) \leq N - 1$, per tot $m \in Z(I)$, on N és el nombre mínim de generadors de l'ideal I.

No hem sabut demostrar la conjectura. No obstant, mencionem que la condició sobre els zeros de I és equivalent al fet que l'ideal I contingui un producte de k productes de Blaschke d'interpolació, amb $k \leq N - 1$, com podem veure en el següent resultat de V. Tolokonnikov (veure [39]):

Proposició 1.1.6 (Tolokonnikov). *Són equivalents:*

(a) $I(f_1, \ldots, f_n)$ *conté un producte de* k *productes de Blaschke d'interpolació.*

(b) $ord(I, m) \leq k$ *per tot* $m \in Z(I)$.

(c) Existeix un $\delta > 0$ *tal que*

$$\sum_{j=0}^{k}(1-|z|^2)^j(|f_1^{j)}(z)| + \cdots + |f_n^{j)}(z)|) \geq \delta > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

El fet que un ideal tingui ordre finit per tot $m \in Z(I)$ permet contestar algunes de les qüestions ja considerades, com podem veure en el següent resultat de P. Gorkin, R. Mortini i A. Nicolau.

Teorema 1.1.7 ([14]). *Siguin funcions* $g, f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$*, i considerem l'ideal* $I = I(f_1, \ldots, f_n)$*. Suposem que* $ord(I, m) < \infty$ *per tot* $m \in Z(I)$*. Si* $|g| \leq C \sum_{j=1}^n |f_j|$*, llavors existeixen funcions* $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty$ *tals que*

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = g^2.$$

De gran importància per la prova de tots aquests resultats han estat els criteris de resolució d'equacions $\bar{\partial}$, com els que enunciem en la següent secció.

1.2 Criteris de resolució d'equacions $\bar{\partial}$

Lema 1.2.1 ([29]). *Sigui* $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\mathbb{D}})$ *subharmònica i acotada. Aleshores la mesura donada per*

$$d\lambda(z) = \Delta u(z)\,(1-|z|)\,dx\,dy$$

és una mesura de Carleson amb $N(\lambda) \leq 2\pi e \|u\|_\infty$

Demostració. Considerant la funció $b(z) = u(z) + \|u\|_\infty$ podem suposar que la funció u és positiva. Sigui $h \in H^2(\mathbb{D})$, aleshores per $t > 0$ es compleix

$$\Delta(|h|^2 e^{tu}) = 4|h'|^2 e^{tu} + |h|^2 \Delta e^{tu} + 8\mathrm{Re}\,(\bar{\partial}(|h|^2)\partial e^{tu})$$

$$= 4|h'|^2 e^{tu} + |h|^2(4t^2|\partial u|^2 + t\Delta u)e^{tu} + 8te^{tu}\mathrm{Re}\,(h\bar{\partial}\bar{h}\partial u)$$

$$= t|h|^2 e^{tu}\Delta u + e^{tu}|2\partial h + 2th\partial u|^2 \geq t|h|^2 e^{tu}\Delta u \geq t|h|^2 \Delta u.$$

Llavors obtenim

$$\int_{\mathbb{D}} |h(z)|^2 \Delta u(z)\,(1-|z|)\,dx\,dy \leq \inf_{t>0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{D}} \Delta(|h(z)|^2 e^{tu(z)})\,(1-|z|)\,dx\,dy,$$

que per la fórmula de Green, està acotat per

$$\inf_{t>0} \frac{1}{t} \int_{\partial\mathbb{D}} |h|^2 e^{tu} \leq \inf_{t>0} \frac{2\pi}{t} \|e^{tu}\|_\infty \|h\|_2^2 = 2\pi e \|u\|_\infty \|h\|_2^2,$$

on l'última identitat s'obté calculant el mínim de l'expressió anterior, que s'assoleix en el punt $t = 1/\|u\|_\infty$. Llavors la mesura λ és de Carleson amb $N(\lambda) \leq 2\pi e \|u\|_\infty$. □

Proposició 1.2.2 (Carleson). *Sigui G una funció contínua i acotada en el disc unitat tal que la mesura donada per $d\mu = |G|\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson en $\mathbb{D}$. Aleshores l'equació $\bar\partial h = G$ té una solució $h \in \mathcal{C}(\bar{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ amb $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq C$ on C només depèn de la norma de Carleson de la mesura μ.*

Demostració. Per dualitat tenim

$$\inf\{\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} : \bar\partial b = G\} = \sup\Big\{\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fk\,d\theta\Big| : k \in H^1; \|k\|_1 \leq 1, k(0) = 0\Big\},$$

on F és la solució de l'equació $\bar\partial b = G$ donada per la integral de Cauchy de G. Per la fórmula de Green

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})k(e^{i\theta})\,d\theta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\leq 1} G(z)\frac{k(z)}{z}\,dz\,d\bar z.$$

Per tant

$$\inf\{\|b\|_\infty : \bar\partial b = G\} \leq \sup\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |G(z)||k(z)|\,dx\,dy : k \in H^1; \|k\|_1 \leq 1\Big\}.$$

Com que la mesura donada per $d\mu = |G|\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson, i $k \in H^1$, obtenim

$$\int_{\mathbb{D}} |G(z)||k(z)|\,dx\,dy \leq AN(\mu)\|k\|_1 \leq AN(\mu),$$

fet que acaba la prova. □

Proposició 1.2.3 (Wolff). *Sigui $G(z) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ i acotada. Suposem que les mesures donades per $d\mu = |G|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy$ i $d\sigma = |\partial G|\,(1-|z|)\,dx\,dy$ són mesures de Carleson. Aleshores existeix $b \in \mathcal{C}(\bar{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ tal que $\bar\partial b = G$ amb*

$$\|b\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq C_1 N(\mu)^{1/2} + C_2 N(\sigma).$$

Demostració. Tenim

$$\inf\Big\{\|b\|_\infty : \bar\partial b = G\Big\} = \sup\Big\{\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fk\,d\theta\Big| : k\in H^1; \|k\|_1\le 1, k(0)=0\Big\},$$

on F és la solució de l'equació $\bar\partial b = G$ donada per la integral de Cauchy de G. Com que $G\in\mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ i és acotada, llavors $F\in\mathcal{C}^2(\mathbb{D})$ i F és contínua en $\bar{\mathbb{D}}$.
Canviant $F(z), k(z)$ per $F(rz), k(rz)$ on $0<r<1$ podem suposar que $F, k\in\mathcal{C}^\infty$ en un entorn de $\mathbb{D}$. Aplicant la fórmula de Green a les funcions $u(z)=F(z)k(z)$ i $v(z)=\log\frac{1}{|z|}$ obtenim

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})k(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \triangle(F(z)k(z))\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} k(z)\partial G(z)\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy + \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} k'(z)G(z)\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy = I_1 + I_2.$$

Com que la mesura donada per $d\sigma = |\partial G|\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és de Carleson obtenim

$$|I_1|\le C_2 N(\sigma)\|k\|_1 \le C_2 N(\sigma).$$

Passem ara a trobar una estimació per I_2. Posem $k=\frac{k_1+k_2}{2}$ on $k_j\in H^1(\mathbb{D})$ sense zeros i $\|k_j\|_1\le 2$. En efecte, sabem que $k=Bh$ on $B(z)$ és un producte de Blaschke i $h(z)\in H^1(\mathbb{D})$ sense zeros, aleshores definint $k_1 := (B-1)h$ i $k_2 := (B+1)h$ obtenim la descomposició.
Aleshores existeixen funcions $g_j\in H^2(\mathbb{D})$ amb $\|g_j\|_2^2\le 2$ tal que $k_j(z)=g_j^2(z)$, $j=1,2$. Així

$$\Big|\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} k_j'(z)G(z)\,(1-|z|)\,dx\,dy\Big| = \Big|\frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{D}} g_j(z)g_j'(z)G(z)\,(1-|z|)\,dx\,dy\Big|$$

$$\le \Big(\frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |g_j'(z)|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy\Big)^{1/2}\Big(\frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |g_j(z)|^2|G(z)|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy\Big)^{1/2} = I_3\,I_4.$$

Com que la mesura donada per $d\mu = |G|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson i les funcions $g_j\in H^2(\mathbb{D})$, llavors es compleix

$$I_4\le (CN(\mu)\|g_j\|_2^2)^{1/2}\le \sqrt{2}C\,N(\mu)^{1/2}.$$

Per la identitat de Paley-Littlewood

$$I_3 = \Big(\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |\nabla g_j(z)|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy\Big)^{1/2} = \Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |g_j(e^{i\theta})-g_j(0)|^2\,d\theta\Big)^{1/2}$$

que està acotat per $\sqrt{2}\|g_j\|_2$. Per tant $|I_2|\le C_1 N(\mu)^{1/2}$, fet que acaba la prova. $\square$

A les següents seccions necessitarem també les versions L^p d'aquests resultats. Recordem que donada una funció φ al disc unitat, definim la funció maximal no tangencial

$$(M\varphi)(e^{i\theta}) = \sup_{z\in\Gamma(e^{i\theta})} |\varphi(z)|,$$

on $\Gamma(e^{i\theta}) = \{z \in \mathbb{D} : |e^{i\theta} - z| < \alpha(1 - |z|)\}$ és el sector d'obertura $\alpha > 1$ amb vèrtex en el punt $e^{i\theta}$.

Proposició 1.2.4 ([1]). *Sigui $1 \leq p < \infty$, i sigui G una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en $\bar{\mathbb{D}}$ tal que (a) $G = \varphi_1\psi_1$, on $M(\varphi_1) \in L^p(\mathbb{T})$, i la mesura*

$$|\psi_1|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy \text{ és de Carleson.}$$

(b) $\partial G = \varphi_2\psi_2$, on $M(\varphi_2) \in L^p(\mathbb{T})$ i la mesura

$$|\psi_2| \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy \text{ és de Carleson.}$$

Aleshores existeix una funció u de classe $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{D}$, contínua en $\bar{\mathbb{D}}$ tal que $\bar{\partial}u = G$ i

$$\int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})|^p \, d\theta \leq C,$$

on C només depèn de $\|M\varphi_1\|_p, \|M\varphi_2\|_p$ i les normes de Carleson de les mesures de (a) i de (b).

La prova d'aquest resultat donada en [1] és una variació de l'anterior i no la detallem. El següent Lema és la versió per L^p del criteri de Carleson d'existència de solucions de l'equació $\bar{\partial}b = g$.

Lema 1.2.5. *Sigui $1 \leq p < \infty$. Sigui G una funció contínua en $\mathbb{D}$ tal que $G = \varphi\psi$, on $M\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ i a més la mesura $d\sigma = |\psi|\, dx\, dy$ és una mesura de Carleson. Aleshores existeix una solució $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\bar{\mathbb{D}})$ de l'equació $\bar{\partial}b = G$ tal que*

$$\int_0^{2\pi} |b(e^{i\theta})|^p d\theta \leq N(\sigma) \int_A (M\varphi(e^{i\theta}))^p \, d\theta,$$

on $A = \{e^{i\theta} : \psi(z) \neq 0$ per algun $z \in \Gamma(\theta)\}$. Aquí, el sector $\Gamma(\theta)$ és el mateix que apareix a la definició de la funció maximal $M\varphi$.

Demostració. Sigui q l'exponent conjugat de p, és a dir, $1 < q \leq \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$. Per dualitat, es compleix que

$$\inf\{\|b\|_p : \bar{\partial} b = G\} = \sup\Big\{\Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fk\, d\theta\Big| : k \in H_0^q; \|k\|_q \leq 1\Big\},$$

on F és una solució de l'equació $\bar{\partial} F = G$ i H_0^q denota el subespai de funcions $f \in H^q$ tals que $f(0) = 0$. Aplicant la fórmula de Green, obtenim

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fk\, d\theta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|\leq 1} G(z)\frac{k(z)}{z}\, dz\, d\bar{z}.$$

Aleshores

$$\inf\{\|b\|_p : \bar{\partial} b = G\} \leq \sup\Big\{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |G(z)||k(z)|\, dx\, dy \ : k \in H^q; \|k\|_q \leq 1\Big\}.$$

Donat que $G = \varphi\,\psi$, la desigualtat de Hölder implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)||k(z)||\psi(z)|\, dx\, dy &\leq \Big(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p\, d\sigma\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{D}} |k(z)|^q\, d\sigma\Big)^{1/q} \\ &\leq C\|k\|_q N(\sigma)^{1/q}\Big(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p\, d\sigma\Big)^{1/p},\end{aligned}$$

ja que la mesura σ és de Carleson. Ara, aplicant el següent fet, s'acaba la prova.

Fet.

$$\sigma(\{z \in \mathbb{D} : |\varphi(z)| > \lambda\}) \leq N(\sigma)|\{e^{i\theta} \in A : M\varphi(e^{i\theta}) > \lambda\}|. \tag{1.1}$$

Seguirem la prova habitual d'aquest tipus de resultats en el semiplà superior $\mathbb{H}$. Denotem per

$$R = \{z \in \mathbb{H} : |\varphi(z)| > \lambda\} \cap \{z : \psi(z) \neq 0\}$$

i per

$$S = \{t : M\varphi(t) > \lambda\} \cap \{t : \psi(z) \neq 0 \text{ per algun } z \in \Gamma(t)\}.$$

Aquí $\Gamma(t)$ denota el con $\{z = x + iy \in \mathbb{H} : |x - t| < (\alpha - 1)y\}$.

Sigui z de forma que $\psi(z) \neq 0$ i a més $|\varphi(z)| > \lambda$. Llavors $M\varphi(t) > \lambda$ en l'interval $I_z = \{t \in \mathbb{R} : |t - \mathrm{Re}\, z| < (\alpha - 1)\mathrm{Im}\, z\}$. D'aquest fet es segueix que

$$\bigcup_{z\in R} I_z \subset S.$$

Donat que S és un conjunt obert, es pot posar com unió d'una successió d'intervals dos a dos disjunts $\{I_j\}$, i denotem per $c(I_j)$ el centre de I_j. Considerem les tendes T_j definides per

$$T_j = \{z = x + iy \in \mathbb{H} : |x - c(I_j)| + y < \frac{|I_j|}{2}\}.$$

És clar que $R \subset \bigcup_j T_j$, i donat que la mesura σ és de Carleson, deduïm que

$$\sigma(R) \leq \sum_j \sigma(T_j) \leq N(\sigma) \sum_j |I_j| = N(\sigma)|S|.$$

Això acaba la prova de (1.1), i per tant el Lema 1.2.5 queda demostrat. □

1.3 Estimacions en el Teorema de la Corona.

El Teorema 1.1.1 assegura que donades funcions $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $\|f_j\|_\infty \leq 1$ per $j = 1, \dots, n$ tals que $\inf_{z\in\mathbb{D}} \sum_{j=1}^n |f_j(z)| > \delta > 0$, es poden trobar solucions $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$ de forma que

$$\max_j \|g_j\|_\infty \leq C\delta^{-2} \log(1/\delta),$$

amb C independent de n. Ara bé, no sabem que aquesta sigui la millor cota superior. En particular, el següent problema és obert.

Problema 5. *Donades funcions $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $\|f_j\|_\infty \leq 1$ per $j = 1, \dots, n$ tals que $\inf_{z\in\mathbb{D}} \big(\sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2\big)^{1/2} := \delta > 0$ petit, quina és la millor costant $K(\delta)$ de forma que es poden trobar les solucions de la corona $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$ que compleixin $\sup_{z\in\mathbb{D}} \big(\sum_{j=1}^n |g_j(z)|^2\big)^{1/2} \leq K(\delta)$?*

El Teorema 1.1.1 dóna la cota superior $K(\delta) \leq C\delta^{-2} \log(1/\delta)$. En aquesta secció donarem una cota inferior per la constant de la corona $K(\delta)$ i mitjançant un argument de Z. Slodkowsky (veure [34]), relacionarem aquestes constants amb el problema de T. Wolff.

Anem ara a donar un exemple que prova que $K(\delta) \geq C\delta^{-2}$.

Proposició 1.3.1 ([34]). $K(\delta) \geq (2\sqrt{2}\delta^2)^{-1}$.

Demostració. Per tot $M \in (1, \infty)$ i tot $n \in \mathbb{N}$, considerem les dades de la corona en el disc unitat

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z^{n+1}, \qquad f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z^n - r^n}{1 - r^n z^n} \qquad |z| < 1$$

on $r = r(n, M)$ és tal que $r^n = 1/M$. Clarament $|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 \leq 1$. Sigui $\delta_n^2 = \inf_{z\in\mathbb{D}}(|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2)$. Anem a veure que per n prou gran, $\delta_n \geq 2\sqrt{2}r^n$. Primerament, provem que si $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ en $\mathbb{D}$, aleshores $\|g_1\|_\infty \geq \sqrt{2}M^2$.

Denotem per $rw_0, rw_1, \ldots, rw_{n-1}$ els zeros del producte de Blaschke $\sqrt{2}f_2$, on w_i son les arrels n-èssimes de la unitat. Si $1 = g_1 f_1 + g_2 f_2$, aleshores

$$1 = g_1(rw_i)f_1(rw_i) = (1/\sqrt{2})r^{n+1}w_i g_1(rw_i)$$

Per tant la funció $h(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}r^{n+1}g_1(z), z \in \mathbb{D}$ resol el problema d'interpolació $h(rw_i) = w_i^{-1}$, per $i = 0, 1, \ldots, n-1$. És conegut que tota solució d'aquest problema d'interpolació compleix $\|h\|_\infty \geq r^{1-n}$, és a dir $\|g_1\|_\infty \geq \sqrt{2}r^{-2n}$ (veure [11]).

Donem un altre mètode que també prova que $\inf(\|g_1\|_\infty + \|g_2\|_\infty) \geq C(r^{-n})^2$. Siguin $g_1, g_2 \in H^\infty$ tals que $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$. Com que f_1 té un zero d'ordre $n+1$ en $z = 0$, es compleix que

$$(g_2)^{n)}(0) = (\frac{1}{f_2})^{n)}(0).$$

Per la fórmula de Cauchy, $|(g_2)^{n)}(0)| \leq n!\|g_2\|_\infty$, així cal buscar una cota inferior per $|(1/f_2)^{n)}(0)|$. Desenvolupant $1/f_2$ en sèrie de potències, és fàcil comprovar que

$$|g_2^{n)}(0)| \geq C_1 \frac{n!}{r^{2n}},$$

i d'aquí deduïm que $\|g_2\|_\infty \geq Cr^{-2n}$.

Passem ara a fer una estimació de les constants δ_n, concretament que $\delta_n \geq 2\sqrt{2}r^n$. Clarament

$$\delta_n \geq \varepsilon_n := \inf_{|z|\leq 1} \max(|f_1(z)|, |f_2(z)|).$$

Com que $\min_{|z|=t} |f_2(z)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{|t^n - r^n|}{|1 - r^n t^n|}$ i $|z^{n+1}| = t^{n+1}$ en $|z| = t$, substituint $s = t^n$ obtenim que $\varepsilon_n = \min_{s\in[0,1]} f_n(s)$, on

$$f_n(s) = (1/\sqrt{2}) \max(s^{1+1/n}, |s - 1/M|/|1 - s/M|) \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Tenim que $\lim \varepsilon_n = \inf f(s)$ on

$$f(s) = (1/\sqrt{2}) \max(s, |s - 1/M|/|1 - s/M|) \quad ,0 \leq s \leq 1.$$

Consideracions geomètriques senzilles mostren que f té un únic mínim al punt $s_0 = 1/(M + \sqrt{M^2 - 1})$. Per tant

$$\min f(s) \geq (2\sqrt{2}M)^{-1}.$$

Aleshores $\liminf_n \delta_n \geq \lim_n \varepsilon_n \geq (2\sqrt{2}M)^{-1}$. Per acabar, fixem $\delta \in (0, 1)$, i escollim M de manera que $(2\sqrt{2}M)^{-1} = \delta$. Així obtenim $K(\delta) \geq (\sqrt{2}\delta^2)^{-1}$. $\square$

El següent resultat, basat en una idea de Z. Slodkowsky (veure [34]), ens permet veure que hi ha una relació entre les constants òptimes del teorema de la corona i el problema g^2 de T. Wolff introduït anteriorment.

Teorema 1.3.2. *Si* $\lim_{\delta\to 0} \delta^2 K(\delta) = \infty$, *aleshores existeixen funcions* $g, f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ *de manera que* $0 < |g(z)| < |f_1(z)| + |f_2(z)| < 1$ *i* $g^2 \notin I(f_1, f_2)$.

Demostració. Per $N = 1, 2, \ldots$, considerem els discos disjunts

$$D_N = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3N| < 1\}$$

Escollim nombres $\delta_N \in (0,1)$ de manera que $\lim_{N\to\infty} \delta_N = 0$. Aleshores, per hipòtesis, podem trobar funcions $f_{1N}, f_{2N} \in H^\infty(D_N)$ tal que

$$4\delta_N^2 < (|f_{1N}(z)| + |f_{2N}(z)|)^2 < 1/4$$

de forma que totes les solucions $g_1, g_2 \in H^\infty(D_N)$ de l'equació $g_1 f_{1N} + g_2 f_{2N} = 1$ compleixen $\max_j \|g_j\|_\infty \geq K(\delta_N)$. Així, les solucions holomorfes g_1, g_2 de l'equació

$$\delta_N^2 = f_{1N}(z) g_1(z) + f_{2N}(z) g_2(z)\ , \quad z \in D_N$$

satisfan $\max_j \|g_j\|_\infty \geq (\delta_N)^2 K(\delta_N)$.

Fet. *Existeix* $\eta_N > 0$ *suficientment petit de manera que si tenim funcions* $g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in H^\infty(D_N)$ *que satisfan*

(a) $\|g - \delta_N\|_\infty \leq \delta_N \eta_N$,

(b) $\|f_j - f_{jN}\|_\infty \leq \eta_N$, $j = 1, 2$,

(c) $g^2 = f_1 g_1 + f_2 g_2$,

llavors $\max_j \|g_j\|_\infty \geq C_1 \delta_N^2\, K(\delta_N)$.

En efecte, si $\eta_N < 1$, la condició (a) implica que g no té zeros. Per tant

$$1 = f_1 g_1 g^{-2} + f_2 g_2 g^{-2} = f_1 h_1 + f_2 h_2,$$

on $h_i = g_i g^{-2}$, $i = 1, 2$. Així, les funcions definides per

$$h_{jN} = \frac{h_j}{1 + h_1(f_{1N} - f_1) + h_2(f_{2N} - f_2)},$$

satisfan l'equació $h_{1N} f_{1N} + h_{2N} f_{2N} = 1$. Per tant $\max_j \|h_{jN}\|_\infty \geq K(\delta_N)$. Com que $\|f_j - f_{jN}\|_\infty \leq \eta_N$, aleshores, si η_N és prou petit, per $j = 1, 2$ es compleix que $\|h_{jN}\|_\infty \leq 2\|h_j\|_\infty$. A més, com $|g(z)| \geq \delta_N(1 - \eta_N)$, si per exemple $\eta_N < 1/2$, obtenim que $K(\delta_N) \leq 8 \max_j \|g_j\|_\infty \delta_N^{-2}$, que prova el fet anterior.

Considerem ara el conjunt tancat i connex $X \subset \mathbb{C}$ obtingut connectant els discos tancats $\bar{D}_N$ per segments tancats $[3N+1, 3(N+1)-1]$. Definim funcions continues $\eta : X \longrightarrow (0,\infty)$ i $g* : X \longrightarrow \mathbb{C}$ de forma que $\eta_{|\bar{D}_N} = \eta_N$, $g^*|_{\bar{D}_N} = 2\delta_N$ i interpolant linealment en els segments de connexió. Definim també funcions $f_1^*, f_2^* : X \to \mathbb{C}$, de manera que $f_j^*|_{\bar{D}_N} = f_{jN}$ i les estenem linealment al llarg dels segments de connexió. Aleshores

$$2|g^*(z)| < |f_1^*(z)| + |f_2^*(z)| < 1/2.$$

Considerem una banda B que contingui a X. Llavors, per una versió del teorema d'aproximació de Carleman donada per Nersesyan (veure [30], o també [12]), existeixen funcions holomorfes $f_1, f_2, g \in H^\infty(B)$ tals que per $j = 1, 2$

$$|g(z) - g^*(z)| < \eta(z)|g^*(z)|, \ \ |f_j(z) - f_j^*(z)| < \eta(z), \ \ z \in X.$$

Si escollim els η_N de forma que $0 < \eta_N < \frac{1}{4}\delta_N$, aleshores $\eta_N < \frac{1}{8}(|f_{1N}(z)| + |f_{2N}(z)|)$ per $z \in X$, és a dir

$$\eta(z) < \frac{1}{8}(|f_1^*(z)| + |f_2^*(z)|).$$

Com que

$$|f_1^*(z)| + |f_2^*(z)| < \frac{4}{3}(|f_1(z)| + |f_2(z)|),$$

obtenim que per $z \in X$ es compleix

$$|g(z)| < (1 + \eta(z))|g^*(z)| < 2/3(|f_1(z)| + |f_2(z)|)$$

Llavors podem considerar un subdomini B_1 simplement connex de la banda que contingui a X de forma que per $z \in B_1$ es compleixi

$$0 < |g(z)| < |f_1(z)| + |f_2(z)| < 1.$$

Aleshores, si existeixen funcions $g_1, g_2 \in H(B_1)$ tals que $g^2 = g_1 f_1 + g_2 f_2$ en B_1, tenim $\max_j \|g_j|_{D_N}\|_\infty \geq C\delta_N^2 K(\delta_N)$. Aleshores, per hipòtesis, o bé g_1, o bé g_2 no estan acotades. Com que B_1 és conformement equivalent al disc unitat, la prova acaba. $\square$

1.4 L'equació de Bezout en H^p

Per $1 \leq p < \infty$, considerem l'espai de Hardy H^p, és a dir l'espai de les funcions analítiques f en el disc unitat que compleixen

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_p^p < \infty.$$

És ben conegut que una funció analítica f pertany a l'espai de Hardy H^p si i només si la funció maximal no tangencial

$$Mf(e^{i\theta}) = \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma(\theta)\},$$

on $\Gamma(\theta)$ és l'angle de Stolz amb vèrtex en el punt $e^{i\theta}$, pertany a l'espai de Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$. Aqui, $\mathbb{T}$ denota el cercle unitat. Recentment, diverses versions per H^p del Teorema de la Corona s'han considerat. Donat $1 \leq p < +\infty$ podem estudiar l'existència de solucions a l'espai de Hardy H^p. És a dir, donades funcions $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$, volem conèixer la condició precisa que han de complir les funcions f_j per tal que existeixin solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ de l'equació de Bezout

$$1 = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n. \tag{1.2}$$

Si denotem per $|f|^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2$, i per $|g|^2 = \sum_{j=1}^{n} |g_j|^2$, llavors de l'equació (1.2) es dedueix que $1 \leq |f||g|$. Per tant, la condició $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ implica la condició necessària

$$M(|f|^{-1}) \in L^p(\mathbb{T}). \tag{1.3}$$

Observem que per $p = \infty$, aquesta és la condició de la Corona. Ara bé, com es pot veure en [1], per $1 \leq p < \infty$, aquesta condició no és suficient en general. De fet, en [1], E. Amar, J. Bruna i A. Nicolau donen per cada $\varepsilon > 0$, funcions $f_1 = f_1(\varepsilon), f_2 = f_2(\varepsilon) \in H^\infty$ amb $M(|f|^{-2+\varepsilon}) \in L^p(\mathbb{T})$ però de forma que l'equació (1.2) no té solucions g_1, g_2 en H^p.

Ara bé, no es coneixen exemples de funcions $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ complint la condició $M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ sense solucions de l'equació de Bezout en H^p. Aquesta és la qüestió que plantejem a continuació i que no hem sabut resoldre.

Problema 6. *Donat* $1 \leq p < \infty$ *i funcions* $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$*, la condició*

$$M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$$

implica l'existència de solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ *de l'equació*

$$1 = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n \ ?$$

Observar que aquest problema també té una generalització molt natural que donem tot seguit.

Problema 7. *Donat* $1 \leq p < \infty$, $h \in H^p$, $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$*, és cert llavors que la condició*

$$M(h|f|^{-2}) \in L^p$$

implica l'existència de solucions en H^p *de l'equació* $h = f_1 + \cdots + f_n g_n$ *?*

De fet, per $p=\infty$, la formulació anterior no és res més que el problema f^2 de T. Wolff.

Tot seguit anem a donar una sèrie de resultats coneguts sobre aquest problema.

1. *En el cas $n=2$, si un dels dos generadors f_1, f_2 és un producte de Blaschke d'interpolació, llavors la condició $M(|f|^{-1}) \in L^p(\mathbb{T})$ ja és suficient.*

En efecte, si f_1 és un producte de Blaschke amb zeros $(z_n)_n$, la qüestió és equivalent al problema d'interpolació de trobar $g_2 \in H^p$ tal que

$$g_2(z_n) = \frac{1}{f_2(z_n)}. \tag{1.4}$$

En efecte, $1-f_2g_2$ pertany a H^p i s'anul.la en els punts z_n. Per tant $1-f_2g_2 = f_1g_1$ amb $g_1 \in H^p$ i això resol l'equació (1.2). Així doncs, és suficient resoldre el problema d'interpolació (1.4). Ara bé, si f_1 és un producte de Blaschke d'interpolació, el problema d'interpolació té solució si i només si

$$\sum_n \frac{1}{|f_2(z_n)|^p}(1-|z_n|) < +\infty$$

(veure [7] o [33]). Sigui δ_n la Delta de Dirac en el punt z_n. Donat que $\sum(1-|z_n|)\delta_n$ és una mesura de Carleson, llavors la hipòtesis $M(|f|^{-1}) \in L^p$ implica la condició anterior.

El següent resultat, ja mencionat anteriorment, és un exemple de E. Amar, J. Bruna i A. Nicolau.

2. *Per $1 \le p < \infty$ i $\varepsilon > 0$, existeixen funcions holomorfes acotades f_1, f_2, amb $M(|f|^{-2+\varepsilon}) \in L^p(\mathbb{T})$ de forma que no existeixen funcions $g_1, g_2 \in H^p$ que compleixin $f_1g_1 + f_2g_2 = 1$.*

3 (K.C. Lin, [23]). *Per tot $\varepsilon > 0$, la condició $M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ implica l'existència de solucions en $H^{p-\varepsilon}$.*

Si tenim una mesura positiva μ en $[0,1)$ que compleix la condició $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\mu(\alpha)}{\alpha^2} < +\infty$, recordem que llavors hem definit la funció

$$\tilde{\mu}(x) = \int_0^1 x^\alpha \, d\mu(\alpha) \ , \ x > 0.$$

En [1], E. Amar, J. Bruna i A. Nicolau proven el següent resultat

4. *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ tals que $|f|^2 > 0$. Siguin μ , $\tilde{\mu}$ com abans. Si es compleix la condició*

$$M\Big(\frac{1}{|f|^2}\frac{1}{\tilde{\mu}(|f|^2)}\Big) \in L^p(\mathbb{T}).$$

Llavors existeixen solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ de l'equació $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.

En particular, donat $\varepsilon > 0$, si prenem com a μ la Delta de Dirac en el punt $\varepsilon \in \mathbb{R}$, obtenim que la condició $M(|f|^{-2-\varepsilon}) \in L^p(\mathbb{T})$ és suficient. Prenent com a $d\mu(\alpha) = \alpha^{1+\varepsilon} d\alpha$, obtenim la següent condició més fina.

Corol.lari 1.4.1. *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ amb $|f|^2 > 0$. Si hi ha $\varepsilon > 0$ tal que*

$$M\Big(\frac{|\log|f||^{2+\varepsilon}}{|f|^2}\Big) \in L^p(\mathbb{T})$$

Aleshores existeixen $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ tals que $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.

La prova d'aquest últim resultat, està basada en la versió per L^p del criteri de Wolff de resolució de l'equació $\bar{\partial}$ donada en la secció anterior, i en un resultat que ajuda a verificar que certes mesures són de Carleson. Com que en farem ús més endavant, l'enunciem tot seguit.

Lema 1.4.2 ([1]). *Siguin μ , $\tilde{\mu}$ com abans. Si $g \in BMOA$, llavors*

$$\frac{|g'|^2}{|g|^2}\tilde{\mu}(|g|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy$$

és una mesura de Carleson amb norma de Carleson acotada per $K\|g\|_*$, K depenent de μ.

Aqui, l'espai $BMOA$ consisteix en les funcions $g \in H^2(\mathbb{D})$ de forma que $|g'(z)|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson.

Donat $\varepsilon > 0$, prenent $d\mu = \alpha^{1+\varepsilon}\,d\alpha$ obtenim el següent resultat:

Corol.lari 1.4.3. *Sigui $g \in BMOA$. Llavors, per tot $\varepsilon > 0$, la mesura*

$$\frac{|g'|^2}{|g|^2\,|\log|g||^{2+\varepsilon}}\,(1-|z|^2)\,dx\,dy$$

és de Carleson amb norma acotada per $K_\varepsilon\|g\|_*$.

Veurem ara que la condició suficient del Corol.lari 1.4.1 per a l'equació de Bezout en H^p es pot millorar.

Teorema 1.4.4. *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ tals que $0 < |f| < e^{-1}$. Si hi ha $\varepsilon > 0$ tal que*

$$M\Big(\frac{|\log|f||^{3/2+\varepsilon}}{|f|^2}\Big) \in L^p(\mathbb{T})$$

Aleshores existeixen solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ de l'equació $f_1g_1 + \cdots + f_ng_n = 1$.

Abans de donar la prova d'aquest Teorema, necessitarem uns resultats previs.

Lema 1.4.5. *Sigui $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\mathbb{D}})$ subharmònica i negativa. Aleshores per tot $t > 0$, la mesura donada per*

$$d\lambda(z) = e^{tu}\Delta u(z)\,(1-|z|)\,dx\,dy$$

és una mesura de Carleson amb norma de Carleson acotada per Ct^{-1}.

Demostració. Sigui $h \in H^2(\mathbb{D})$, aleshores per $t > 0$ es compleix

$$\Delta(|h|^2e^{tu}) = 4|h'|^2e^{tu} + |h|^2\Delta e^{tu} + 8\mathrm{Re}\,(\bar{\partial}(|h|^2)\partial e^{tu})$$

$$= 4|h'|^2 e^{tu} + |h|^2(4t^2|\partial u|^2 + t\Delta u)e^{tu} + 8te^{tu}\mathrm{Re}\,(h\bar{\partial}h\partial u)$$
$$= t|h|^2 e^{tu}\Delta u + e^{tu}|2\partial h + 2th\partial u|^2 \geq t|h|^2 e^{tu}\Delta u.$$

Llavors obtenim

$$\int_{\mathbb{D}} |h(z)|^2 e^{tu}\Delta u(z)\,(1-|z|)\,dx\,dy \leq \frac{1}{t}\int_{\mathbb{D}} \Delta(|h(z)|^2 e^{tu(z)})\,(1-|z|)\,dx\,dy,$$

que per la fórmula de Green, està acotat per

$$\frac{1}{t}\int_{\partial\mathbb{D}} |h|^2 e^{tu} \leq \frac{2\pi}{t}\|e^{tu}\|_\infty \|h\|_2^2,$$

que està acotat superiorment per $2\pi t^{-1}\|h\|_2^2$, ja que al ser u negativa, llavors $\|e^{tu}\|_\infty \leq 1$. Això últim prova el resultat. □

Aplicant aquest darrer lema a la funció $u = -\log|\log|f||$, obtenim el següent resultat.

Lema 1.4.6. *Si $0 < |f| < e^{-1}$, llavors per tot $\varepsilon > 0$, la mesura*

$$\frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4\,|\log|f||^{1+\varepsilon}}\,(1-|z|)\,dx\,dy$$

és una mesura de Carleson amb norma acotada per $C\varepsilon^{-1}$, on C és una constant absoluta.

Lema 1.4.7. *Per $1 \leq k \leq n$, es compleix*

$$\sum_{j=1;j\neq k}^{n} |f_k' f_j - f_k f_j'|^2 \leq |f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2.$$

Demostració. Com que $\partial(|f|^2) = \sum_{j=1}^n f_j'\bar{f}_j$, un càlcul simple, separant l'índex k dels altres, mostra que

$$|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2 = \sum_{j\neq k}\Big(|f_k|^2|f_j'|^2 + |f_k'|^2|f_j|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\bar{f}_k f_k' f_j \bar{f}_j')\Big)$$
$$+\big(\sum_{j\neq k}|f_j|^2\big)\big(\sum_{j\neq k}|f_j'|^2\big) - |\sum_{j\neq k} f_j\bar{f}_j'|^2.$$

Com que

$$|f_k' f_j - f_k f_j'|^2 = |f_k'|^2|f_j|^2 + |f_k|^2|f_j'|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\bar{f}_k f_k' f_j \bar{f}_j'),$$

i per la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$\big(\sum_{j\neq k}|f_j|^2\big)\big(\sum_{j\neq k}|f_j'|^2\big)-|\sum_{j\neq k}f_j\bar{f}_j'|^2\geq 0,$$

obtenim la desigualtat desitjada.

$\square$

Prova del Teorema 1.4.4. Sigui

$$\varphi_j=\frac{\bar{f}_j}{|f|^2}\quad,\ G_{jk}=\varphi_j\bar{\partial}\varphi_k\quad j,k=1,\ldots,n.$$

Un càlcul dóna que

$$G_{jk}=\frac{\bar{f}_j}{|f|^6}\sum_{l\neq k}f_l(f_lf_k'\,\bar{-}\,f_kf_l').$$

Ens interessarà el tamany de G_{jk}, que estimarem utilitzant el Lema 1.4.7.

$$|G_{jk}|\leq|f|^{-4}\big(\sum_{l\neq k}|f_k'f_l-f_kf_l'|^2\big)^{1/2}\leq\frac{\big(|f|^2|f'|^2-|\partial(|f|^2)|^2\big)^{1/2}}{|f|^4}. \tag{1.5}$$

Com és usual, farem ús d'un argument de famílies normals considerant dilatacions, i suposarem que les funcions f_j són regulars en un entorn del disc tancat. Per raons tècniques, denotarem les funcions i les seves dilatacions pel mateix símbol. Suposem que per $j,k=1,\ldots,n$ podem resoldre les equacions $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial}h_{jk}=G_{jk}, \tag{1.6}$$

amb $\|h_{jk}\|_{L^p(\mathbb{T})}\leq M$. Aleshores les funcions $g_j=\varphi_j+\sum_{k=1}^n(h_{jk}-h_{kj})f_k$ compleixen $\bar{\partial}g_j=0$ per $j=1,\ldots,n$ i a més satisfan l'equació

$$\sum_{j=1}^n g_jf_j=1.$$

Per tant, només cal provar que les equacions (1.6) tenen solucions en $L^p(\mathbb{T})$. Hem de comprovar que G_{jk} compleix les hipòtesis de la versió L^p del criteri de Wolff. Per comprovar la condició (a), posem $G_{jk}=\phi_1\psi_1$, on

$$\phi_1=\frac{C_\varepsilon(|f|)}{|f|^2}\quad,\qquad\psi_1=(C_\varepsilon(|f|)^{-1}|f|^2G_{jk}$$

Aquí, $C_\varepsilon(f) = |\log|f||^{3/2+\varepsilon}$. Per hipòtesis, es compleix que $M(\phi_1) \in L^p(\mathbb{T})$, i per (1.5) obtenim

$$|\psi_1|^2 \leq \frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4\,|\log|f||^{3+2\varepsilon}}$$

Llavors, pel Lema 1.4.6 , la mesura $|\psi_1|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson.

Per comprovar la condició (b), tenim $\partial G_{jk} = \phi_2\psi_2$, on $\phi_2 = |f|^{-2}C_\varepsilon(f)$ i

$$\psi_2 = 2\frac{\partial(|f|^2)G_{jk}}{C_\varepsilon(f)} + \bar{f}_j\bar{f}_k\frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^6\,C_\varepsilon(f)}.$$

Per hipòtesis, $M(\phi_2) \in L^p(\mathbb{T})$, i hem de comprovar que la mesura $|\psi_2|\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és de Carleson. Però

$$|\psi_2| \leq 2\frac{|\partial(|f|^2)|G_{jk}|}{C_\varepsilon(f)} + \frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4\,C_\varepsilon(f)}.$$

Per tant, pel Lema 1.4.6, només cal comprovar que la mesura

$$2\frac{|\partial(|f|^2)|\,|G_{jk}|}{|\log|f||^{3/2+\varepsilon}}\,(1-|z|)\,dx\,dy$$

és de Carleson. Ara bé, aplicant la desigualtat (1.5) i el Lema 1.4.7 obtenim

$$2(C_\varepsilon(f))^{-1}|\partial(|f|^2)|\,|G_{jk}| \leq 2\frac{|f||f'|\left(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2\right)^{1/2}}{|f|^4\,|\log|f||^{3/2+\varepsilon}}$$

$$\leq \frac{|f'|^2}{|f|^2\,|\log|f||^{2+\varepsilon}} + \frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4\,|\log|f||^{1+\varepsilon}}.$$

Així, aplicant el Corol.lari 1.4.3 i el Lema 1.4.6 obtenim que la mesura $|\psi_2|\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és de Carleson. Això acaba la prova del Teorema. □

El següent resultat és una generalització de l'anterior, i també del resultat de K.C. Lin donat en la introducció d'aquest capítol (Teorema 1.1.3).

Teorema 1.4.8. *Per $1 \leq p \leq \infty$, sigui $g \in H^\infty$. Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ tals que $0 < |f| < e^{-1}$. Si hi ha $\varepsilon > 0$ tal que*

$$M\Big(\frac{g}{|f|^2}|\log|f|\,|^{3/2+\varepsilon}\Big) \in L^p(\mathbb{T}),$$

llavors existeixen funcions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ tals que

$$g = f_1g_1 + \cdots + f_ng_n.$$

Demostració. Seguint la prova anterior, definim $\varphi_j = \bar{f}_j |f|^{-2}$ i $H_{jk} = g\varphi_j \bar{\partial}\varphi_k$, per $j, k = 1, \ldots, n$. Observem que $H_{jk} = gG_{jk}$, on la funció G_{jk} està definida igual que en la prova del Teorema anterior.

Si resolem les equacions $\bar{\partial} h_{jk} = H_{jk}$ amb estimacions en $L^p(\mathbb{T})$, llavors les funcions $g_j = g\varphi_j + \sum_{k=1}^n (h_{jk} - h_{kj}) f_k$ resolen el problema. A efectes de notació, denotem G_{jk} per G, i H_{jk} per H. Per resoldre les equacions $\bar{\partial}$, aplicarem la versió L^p del criteri de Wolff de resolució d'equacions $\bar{\partial}$ (Lema 1.2.4). Si seguim la prova del Lema 1.2.4 (veure [1]), és suficient provar que $H = \varphi\psi$, amb $M(\varphi) \in L^p(\mathbb{T})$, de forma que la mesura

$$|\psi|^2 (1 - |z|)^2 \, dx \, dy$$

sigui de Carleson, i que a més, per tota funció $k \in H^q$, on q és l'exponent conjugat de p, es compleixi

$$\int_{\mathbb{D}} |k(z)| |\partial H(z)| (1 - |z|^2) \, dx \, dy \leq C \, \|k\|_{H^q}. \tag{1.7}$$

Sigui $H_\varepsilon(|f|) = \frac{|f|^2}{|\log |f|\,|^{3/2+\varepsilon}}$. El mètode utilitzat en la prova del Teorema anterior prova que les mesures

$$|H_\varepsilon(|f|) G|^2 \, (1 - |z|) \, dx \, dy \quad \text{i} \quad |H_\varepsilon(|f|) \partial G| \, (1 - |z|) \, dx \, dy$$

són mesures de Carleson. Per tant, podem escriure $H = \varphi\psi$ amb φ i ψ complint les condicions demanades. Així només queda provar que es compleix la condició (1.7). Ara bé, $\partial H = g' G + g \partial G$. Sigui $d\mu = H_\varepsilon(|f|) |\partial G| \, (1 - |z|^2) \, dx \, dy$. Com que $|g \partial G| = \varphi_2 H_\varepsilon(|f|) |\partial G|$, on $\varphi_2 = |g| / H_\varepsilon(|f|)$ té funció maximal a $L^p(\mathbb{T})$, es compleix

$$\int_{\mathbb{D}} |k(z)| |g \partial G(z)| (1 - |z|^2) \, dx \, dy \leq \Big(\int_{\mathbb{D}} |k|^q \, d\mu \Big)^{1/q} \Big(\int_{\mathbb{D}} |\varphi_2|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \leq C \|M(\varphi_2)\|_{L^p} \, \|k\|_{H^q},$$

ja que $M(k) \in L^q(\mathbb{T})$, i $M(\varphi_2) \in L^p(\mathbb{T})$, i μ és de Carleson. Així, només ens queda provar que

$$\int_{\mathbb{D}} |k(z)| |g'(z) G(z)| (1 - |z|^2) \, dx \, dy \leq C \|k\|_{H^q}.$$

Sigui $A = \{z \in \mathbb{D} : |g(z)| \leq |f(z)|^5\}$. Com que

$$|G|^2 \leq \frac{\big(|f'|^2 |f|^2 - |\partial(|f|^2)|^2 \big)}{|f|^8},$$

llavors, per $z \in A$ obtenim que

$$|g'(z) G(z)| \leq C \Big(\frac{|g'(z)|^2}{|g(z)|} + \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|} \Big).$$

Per tant, com que tota funció $k \in H^q$, és de H^1, i les mesures de Carleson operen sobre les funcions de H^1, obtenim

$$\int_A |k(z)|\,|g'(z)G(z)|\,(1-|z|^2)\,dx\,dy \leq C\|k\|_{H^1} \leq C\|k\|_{H^q},$$

ja que com que $g \in H^\infty$, la mesura $\dfrac{|g'|^2}{|g|}\,(1-|z|)\,dx\,dy$ és de Carleson.

Sigui $\varphi(z) = |g(z)|(H_\varepsilon(|f(z)|))^{-1}$, llavors obtenim que

$$\int_{\mathbb{D}\setminus A} |k(z)||g'(z)G(z)|\,(1-|z|^2)\,dx\,dy$$

està acotat superiorment per un múltiple fix de

$$\int_{\mathbb{D}\setminus A} |k(z)|\varphi(z)\big(\frac{|g'(z)|^2}{|g(z)|^2}\frac{1}{|\log|f(z)|\,|^{2+\varepsilon}} + \frac{|f(z)|^4|G(z)|^2}{|\log|f(z)|\,|^{1+\varepsilon}}\big)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy$$

que, com que per $z \in \mathbb{D}\setminus A$ es compleix que $|\log|g(z)|\,| \leq 5|\log|f(z)|\,|$, està acotat superiorment per

$$\int_{\mathbb{D}} |k(z)|\varphi(z)d\mu_1(z) + \int_{\mathbb{D}} |k(z)|\varphi(z)d\mu_2(z),$$

on les mesures

$$d\mu_1(z) = \frac{|g'(z)|^2}{|g(z)|^2\,|\log|g(z)|\,|^{2+\varepsilon}}\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$$

$$d\mu_2(z) = \frac{(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)\,|^2)}{|f|^4\,|\log|f|\,|^{1+\varepsilon}}\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$$

són mesures de Carleson. Com que $k \in H^q$ i $\varphi(z)$ té funció maximal a $L^p(\mathbb{T})$ per hipòtesis, obtenim el resultat desitjat. $\square$

En la secció anterior, en l'estudi del problema f^2 de T. Wolff, hem vist que sabíem resoldre el problema sota alguna hipòtesi suplementària en l'ideal generat per $f_1,\ldots,f_n$, com per exemple, que l'ordre de l'ideal sigui finit per tot zero de l'ideal, condició equivalent al fet que l'ideal generat per $f_1,\ldots,f_n$ contingui un producte de Blaschke de Carleson-Newman. En el cas de l'equació de Bezout en H^p, es dóna un fenomen similar i es té el següent resultat.

Teorema 1.4.9. *Siguin $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$, i considerem l'ideal $I = I(f_1, \dots, f_n)$. Suposem que ord$(I, m) < \infty$ per tot $m \in Z(I)$. Llavors, per $1 \le p < \infty$, la condició $M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ implica l'existència de solucions $g_1, \dots, g_n \in H^p$ de l'equació $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.*

El següent Lema, degut a R. Mortini, P. Gorkin i A. Nicolau, veure [14], és un punt important per a la prova.

Lema 1.4.10. *Sigui (z_n) una successió de Carleson-Newman. Fix $0 < \eta < 1$, sigui*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(z_n, \eta).$$

Denotem per Ψ_U la funció característica de U. Aleshores, per tot producte de Blaschke d'interpolació B, la mesura

$$\frac{|B'|}{|B|} \Psi_U \, dx \, dy$$

és de Carleson.

*Prova del Teorema 1.4.9. Pas*1. Podem suposar que tots els generadors són productes de Blaschke de Carleson-Newman.
En efecte, la hipòtesis ord$(I, m) < \infty$ per tot $m \in Z(I)$, és equivalent al fet que I conté un producte de Blaschke de Carleson-Newman, veure per exemple [38]. Denotem per b_0 aquest producte de Blaschke. Siguin $h_j = b_0 + \varepsilon f_j$. Sigui S el conjunt de parts de Gleason trivials de H^∞. Com que els productes de Blaschke d'interpolació no s'anul.len en S, tenim que si $\varepsilon > 0$ és prou petit, existeix $\delta > 0$ tal que $|h_j| \ge \delta > 0$. Ara bé, V. Tolokonnikov ([38]) va provar que les funcions de H^∞ que estan acotades inferiorment a S són necessàriament un producte de Blaschke de Carleson-Newman per una funció invertible. Per tant, existeixen productes de Blaschke de Carleson-Newman b_j i funcions $F_j \in (H^\infty)^{-1}$ tals que $h_j = b_j F_j$, $(j = 1, \dots, n)$. Per tant

$$I(f_1, \dots, f_n) = I(b_0, b_1, \dots, b_n).$$

Sigui $|b|^2 = \sum_{j=0}^{n} |b_j|^2$. Observem que

$$M(|b|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T}). \tag{1.8}$$

En efecte, com que $|f_j|^2 \leq C\,(|h_j|^2 + |b_0|^2)$, del fet que $h_j = b_j F_j$ amb $F_j \in (H^\infty)^{-1}$ deduïm que
$$|f|^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \leq C\,|b|^2.$$
Així $M(|b|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ ja que $M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$, i (1.8) queda provat.

*Pas*2. Per $j, k = 0, \ldots, n$, siguin
$$\varphi_j = \frac{\bar{b_j}}{|b|^2} \quad , \quad G_{jk} = \varphi_j \bar{\partial} \varphi_k.$$
Com ja hem vist anteriorment, és suficient provar que per $j, k = 0, \ldots, n$, les equacions $\bar{\partial} h_{jk} = G_{jk}$, tenen solucions amb $\|h_{jk}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M$. Fixem j, k i posem $G = G_{jk}$. Denotem per (z_n) els zeros del producte de Blaschke de Carleson-Newman b_0 del Pas 1. Fix $0 < \varepsilon < 1$, prenem una funció $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D})$ amb $0 \leq a \leq 1$ de forma que $a \equiv 1$ en els discs $D(z_n, \varepsilon) = \{z : \rho(z, z_n) < \varepsilon\}$, $a \equiv 0$ en $\{z : \rho(z, z_n) \geq 2\varepsilon\}$, i a més que $(1 - |z|)|\nabla a(z)|$ sigui acotat. Observar, que en general, els discs $D(z_n, \varepsilon)$ no són dos a dos disjunts.
Sigui $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(z_n, 2\varepsilon)$. Ara, posem $G = G_1 + G_2$, on $G_1 = Ga$, $G_2 = G(1 - a)$.

Per resoldre l'equació $\bar{\partial} h = G$, és suficient resoldre les equacions $\bar{\partial} h = G_1$ i $\bar{\partial} h = G_2$. Per resoldre aquestes equacions, farem ús de la versió per L^p del criteri de Carleson (Lema 1.2.5) en el primer cas, i la versió L^p del criteri de Wolff (Lema 1.2.4) en el segon.

Per resoldre l'equació $\bar{\partial} h = G_1$, posem $G_1 = \phi\,\psi$, on $\phi = |f|^{-2}$ i $\psi = |f|^2 G_1$. La condició $M(\phi) \in L^p(\mathbb{T})$ es compleix per hipòtesis. Un càlcul elemental (veure [11], pg. 330), o també aplicant la desigualtat (1.5) i el Lema 1.4.7 dóna
$$|\psi|^2 \leq c_0 a^2 \frac{\sum_{l=0}^{n} |b_l'|^2}{\sum_{l=0}^{n} |b_l|^2}$$
Llavors,
$$|\psi| \leq c_1 a \frac{\sum_{l=0}^{n} |b_l'|}{\sum_{l=0}^{n} |b_l|} \leq c_1 a \sum_{l=o}^{n} \frac{|b_l'|}{|b_l|}.$$
Donat que els b_j són productes de Blaschke de Carleson-Newman, existeix un nombre finit de productes de Blaschke d'interpolació B_l $(l = 0, \ldots L)$ tals que
$$|\psi| \leq c_1 a \sum_{l=0}^{L} \Big|\frac{B_l'}{B_l}\Big|.$$

Com que la funció a s'anul.la fora de U, del Lema 1.4.10 obtenim que

$$|\psi|\,dx\,dy$$

és una mesura de Carleson. Així doncs, aplicant el Lema 1.2.5 s'obté una solució de l'equació $\bar{\partial}h = G_1$ amb $M(h) \in L^p(\mathbb{T})$.

Per resoldre l'equació $\bar{\partial}h = G_2$, posem $G_2 = |b|^{-2}\psi_1$. Com que b_0 és un producte de Blaschke de Carleson-Newman amb zeros (z_n), es compleix que $|b_0(z)| \geq c(\varepsilon)$ si $\rho(z, \{z_n\}) \geq \varepsilon$. Llavors

$$|\psi_1|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy \leq \frac{c_0}{c(\varepsilon)^2}\sum_{l=0}^{n}|b_l'(z)|^2\,(1-|z|)\,dx\,dy,$$

que és una mesura de Carleson.

Anàlogament, podem posar $\partial G_2 = |b|^{-2}\psi_2$, i fent servir el fet que $(1-|z|)|\nabla a(z)|$ és acotat, obtenim que

$$|\psi_2|\,(1-|z|)\,dx\,dy$$

és una mesura de Carleson. Com que $M(|b|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$, es compleixen les hipòtesis de la versió L^p del criteri de Wolff (Lema 1.2.4), i per tant podem resoldre l'equació $\bar{\partial}h = G_2$ amb estimacions L^p. Això acaba la prova. $\square$

Acabarem aquesta secció donant una condició analítica sobre els generadors que garanteixin una resposta positiva al Problema 6. Per això, sigui

$$D^k(f)(z) = \frac{d^k}{(d\xi)^k} f\Big(\frac{z+\xi}{1+\xi\bar{z}}\Big)\Big|_{\xi=0}$$

la k-èssima derivada pseudohiperbòlica d'una funció $f \in H^\infty$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Per exemple, per $k = 1$, obtenim $D^1(f)(z) = (1-|z|^2)f'(z)$. Si $f = (f_1, \dots, f_n) \in (H^\infty)^n$, llavors denotem per

$$|D^k f| := \Big(\sum_{j=1}^{n}|D^k f_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Com ja hem comentat diverses vegades, V. Tolokonnikov va provar que la hipòtesis $\sum_{l=0}^{k}|D^l f| \geq \delta > 0$ per algun $k \in \mathbb{N}$, és equivalent al fet que l'ideal $I = I(f_1, \dots, f_n)$ contingui un producte de Blaschke de Carleson-Newman. Llavors $\mathrm{ord}(I, m) < \infty$ per tot $m \in Z(I)$. Així obtenim el següent resultat

Corol.lari 1.4.11. *Sigui $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (H^\infty)^n$. Suposem que per algun $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es compleix $\sum_{l=0}^{k} |D^l f(z)| \geq \delta > 0$, per tot $z \in \mathbb{D}$. Aleshores, la condició $M(|f|^{-2}) \in L^p(\mathbb{T})$ implica l'existència de solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ de l'equació*

$$f_1 g_1 + \ldots f_n g_n = 1.$$

1.5 Clausures d'ideals

J. Bourgain, veure [2], va construir productes de Blaschke B_1, B_2 en l'exemple de K. Rao de forma que la funció $B_1 B_2$ no pertany a la clausura en norma de l'ideal generat per B_1^2, B_2^2 denotat per $I(B_1^2, B_2^2)$. Per tant, la condició

$$|g| \leq C \sum_{j=1}^{n} |f_j| \tag{1.9}$$

encara no és suficient per assegurar que la funció g estigui a la clausura en norma de l'ideal I generat per $f_1, \ldots, f_n$. Per altra banda, també prova que si enlloc de la condició (1.9), imposem la condició

$$|g(z)| \leq \alpha(|f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|),$$

per tot $z \in \mathbb{D}$, on α és una funció positiva que compleix

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0,$$

llavors podem concloure que la funció g pertany a la clausura en norma de l'ideal I.

La corba de nivell d'una funció analítica i acotada és, en general, no rectificable. Ara bé, donada una funció analítica i acotada f, L. Carleson va construir un sistema de corbes rectificables de forma que la mesura lineal sobre el sistema és una mesura de Carleson, i que actuen com a conjunts de nivell, en el sentit que separen els conjunts on $|f|$ és petit dels conjunts on és gran.
Per a la prova del resultat citat anteriorment, J. Bourgain utilitza un refinament de la construcció de Carleson, que enunciem tot seguit, i que ens serà d'utilitat més endavant.

Proposició 1.5.1 (Bourgain). *Sigui B un producte de Blaschke. Donat $\varepsilon > 0$ existeix un conjunt obert R en el disc $\mathbb{D}$ tal que ∂R és unió de corbes rectificables i a més*
(i) $|B(z)| < \varepsilon$ *si* $z \in R$,
(ii) $|B(z)| > \delta(\varepsilon)$ *si* $z \in \mathbb{D} \setminus R$,
(iii) $N(\lambda_{\partial R}) < C$,
on $\delta(\varepsilon)$ només depèn de ε (no de B), $\lambda_{\partial R}$ és la mesura lineal en la vora de R, i C denota una constant universal.

L'aportació de J. Bourgain a la construcció de Carleson es troba a la part (iii), ja que la construcció original únicament permetia trobar cotes de l'estil $N(\lambda_{\partial R}) < \varepsilon^{-A}$, on $A > 0$.

De forma anàloga a problemes anteriors, és interessant estudiar condicions sobre l'ideal I que impliquin la suficiència de la condició (1.9). El nostre següent resultat ens diu que la condició (1.9) és suficient si l'ideal I conté un producte de Blaschke de Carleson-Newman.

Recordem que un producte de Blaschke amb zeros $\{z_n\}$ és un producte de Blaschke de Carleson-Newman si la mesura

$$\sum_n (1 - |z_n|)\delta_n$$

és una mesura de Carleson. Aquí δ_n denota la Delta de Dirac en el punt z_n.
Equivalentment, un producte de Blaschke B amb zeros $\{z_n\}$ és un producte de Blaschke de Carleson-Newman si i només si per tot $\varepsilon > 0$, existeix $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ de forma que $|B(z)| > \eta$ per tot z tal que $\inf_n |\frac{z - z_n}{1 - \bar{z_n} z}| > \varepsilon$.

Teorema 1.5.2. *Siguin $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$. Suposem que l'ideal $I(f_1, \ldots, f_n)$ conté un producte de Blaschke de Carleson-Newman. Aleshores, l'ideal $J(f_1, \ldots, f_n)$ està contingut en la clausura en norma de $I(f_1, \ldots, f_n)$.*

Aquest resultat ha estat també provat per P. Gorkin i R. Mortini (veure [15]). Ara bé, les tècniques utilitzades són completament diferents. El seu mètode està basat en propietats subtils de l'espai dels ideals maximals de H^∞, mentre que nosaltres fem ús d'una variació deguda a J. Bourgain de les tècniques $\bar{\partial}$ utilitzades en la prova del Teorema clàssic de la Corona.

Per a la prova d'aquest Teorema necessitarem fer ús d'un resultat d'aproximació degut a J. Garnett i B. Dahlberg (veure [8]).

Proposició 1.5.3 (Garnett,Dahlberg). *Sigui u una funció harmònica i acotada en el disc unitat $\mathbb{D}$. Per cada $\varepsilon > 0$, existeix una funció $\varphi(z)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{D}$ de forma que $|\varphi(z) - u(z)| < \varepsilon$ i tal que $\nu = |\nabla\varphi|\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson amb norma $N(\nu) < C_2\varepsilon^{-1}$, on C_2 és una constant absoluta.*

Prova del Teorema 1.5.2.

Com ja hem vist altres vegades, podem suposar que l'ideal $I = I(f_1, \ldots, f_n)$ està generat per $n+1$ productes de Blaschke de Carleson-Newman $b_0, \ldots, b_n$. Per tant, suposem que $f, b_0, \ldots, b_n \in H^\infty$ satisfan

$$|f(z)| \leq C \sum_{j=0}^{n} |b_j(z)|$$

per tot $z \in \mathbb{D}$. Fixem $\varepsilon > 0$ i denotem per $D_H(z,r) = \{w : \rho(z,w) < r\}$. Donat que $b_0, \ldots, b_n$ són productes de Blaschke de Carleson-Newman, per $j = 0, \ldots, n$, es compleix

$$|b_j(z)| \geq c_j(\varepsilon) \quad \text{si} \quad z \notin \bigcup_l D_H(z_{l,j}, \varepsilon) := R_j, \tag{1.10}$$

$$|b_j(z)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad z \in R_j. \tag{1.11}$$

Aquí, la successió $\{z_{n,j} : n = 1, 2, \ldots\}$ denota la successió de zeros de b_j. Sigui $\delta = \delta(\varepsilon) = \min_{0 \leq j \leq n} c_j(\varepsilon)$, i denotem per $R = \bigcap_{j=0}^{n} R_j$. Aleshores, de (1.10), (1.11) obtenim

$$\sum_{j=0}^{n} |b_j(z)| \geq \delta \quad \text{per} \quad z \in \mathbb{D} \setminus R, \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=0}^{n} |b_j(z)| < (n+1)\,\varepsilon \quad \text{per} \quad z \in R. \tag{1.13}$$

Sigui $\tau > 0$ un nombre petit que precisarem posteriorment, i apliquem la Proposició 1.5.3 a cada una de les funcions b_j. Així, obtenim funcions v_j de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{D}$ tals que, per tot $j = 0, \ldots, n$, es compleix

$$|b_j(z) - v_j(z)| < \tau \;\; , \; z \in \mathbb{D}, \tag{1.14}$$

$$N(|\nabla v_j| dxdy) < C\tau^{-1}.$$

Per $0 \leq j \leq n$ definim

$$g_j = \bar{v}_j \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j \bar{v}_j \Big)^{-1} \chi_{\mathbb{D} \setminus R},$$

on χ_E denota la funció característica del conjunt E. Llavors

$$1 - \sum_{j=0}^{n} g_j b_j = \chi_R \quad \text{i a més} \quad \sum_{j=0}^{n} b_j \bar{\partial} g_j = -\bar{\partial} \chi_R. \tag{1.15}$$

Considerem solucions h_{jk} $(j,k=0,\dots,n)$ de les respectives equacions $\bar\partial$

$$\bar\partial h_{jk} = f g_j \bar\partial g_k \tag{1.16}$$

i solucions a_j $(j=0,\dots,n)$ de les equacions $\bar\partial$

$$\bar\partial a_j = f\bar{v}_j\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\bar{v}_k\Big)^{-1}\bar\partial\chi_R \tag{1.17}$$

i suposem, momentàneament, que $\sum_{j,k}\|h_{jk}\|_{L^\infty}\le C$ i que $\sum_j\|a_j\|_{L^\infty}$ és petit. Definim, per $j=0,\dots,n$, les funcions

$$h_j = fg_j + \sum_{k=0}^{n}(h_{jk}-h_{kj})b_k + a_j. \tag{1.18}$$

Per construcció

$$f-\sum_{j=0}^{n} h_jb_j = f\chi_R - \sum_{j=0}^{n} a_jb_j.$$

Llavors

$$\|f-\sum_{j=0}^{n} h_jb_j\|_{L^\infty} \le C\varepsilon(n+1) + \sum_{j=0}^{n}\|a_j\|_{L^\infty}. \tag{1.19}$$

Ara comprovarem que les funcions h_j són analítiques. Per (1.15),(1.16), (1.17) i (1.18), es compleix

$$\begin{aligned}\bar\partial h_j &= f\bar\partial g_j + f\sum_{k=0}^{n}(g_j\bar\partial g_k - g_k\bar\partial g_j)b_k + \bar\partial a_j\\ &= f\bar\partial g_j\chi_R + fg_j\sum_{k=0}^{n} b_k\bar\partial g_k + \bar\partial a_j\\ &= -fg_j\bar\partial\chi_R + \bar\partial a_j = 0.\end{aligned}$$

Aquest és l'esquema que J. Bourgain utilitza a [2]. Escollim $\tau\le\frac{1}{2(n+1)^2}\delta^2$. Ara, trobarem solucions de les equacions (1.16) i (1.17) amb normes L^∞ convenients. Donat que per (1.14), es compleix

$$|fg_j|\le C(\sum_k|b_k|)(|b_j|+\tau)(\sum_k|b_k|^2-(N+1)\tau)^{-1}\chi_{\mathbb{D}\setminus R}$$

i com que $\delta\le\displaystyle\sum_k|b_k|$ fora de la regió R, deduïm que $\sum_k|b_k|^2-(n+1)\tau\ge\frac12\sum_k|b_k|^2$, i per tant

$$\|fg_j\|_{L^\infty}\le C,\quad 0\le j\le n,$$

amb C independent de δ. Un càlcul dóna

$$\bar\partial g_j = \bar\partial v_j\Big(\sum_k b_k v_k\Big)^{-1}\chi_{\mathbb{D}\setminus R} - \bar v_j\Big(\sum_k b_k\bar\partial v_k\Big)\Big(\sum_k b_k\bar v_k\Big)^{-2}\chi_{\mathbb{D}\setminus R}$$

$$-\bar v_j\Big(\sum_k b_k\bar v_k\Big)^{-1}\bar\partial\chi_R,$$

d'on deduïm que la mesura $|fg_j\bar\partial g_k|\,dx\,dy$ és una mesura de Carleson amb norma de Carleson

$$N(|fg_j\bar\partial g_k|dxdy) \le \delta^{-2}N(\sum_k|\nabla v_k|dxdy) + \delta^{-1}N(\lambda_{\partial R}).$$

Ara, com $R = \bigcap_j\bigcup_l D_H(z_{l,j},\varepsilon)$ i com que les mesures $\mu_j = \sum_l(1-|z_{l,j}|^2)\delta_l$ són mesures de Carleson, deduïm que

$$N(\lambda_{\partial R}) \le C(n,\varepsilon).$$

Així, aplicant el criteri de Carleson de resolució d'equacions $\bar\partial$ (Proposició 1.2.2), podem concloure l'existència de solucions h_{jk} de les equacions (1.16) que satisfan

$$\|h_{jk}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le C\tau^{-1}\delta^{-2}.$$

Estudiem a continuació les equacions (1.17). Donat que $\bar\partial\chi_R$ està suportat en ∂R, i tenim que a ∂R es compleix que $|f\bar v_j(\sum b_k\bar v_k)^{-1}| \le C$, obtenim

$$N(f\bar v_j(\sum b_k\bar v_k)^{-1}\bar\partial\chi_R) \le CN(\lambda_{\partial R}) \le C(n,\varepsilon)$$

on $C(n,\varepsilon)$ tendeix a zero quan ε tendeix a zero. Aplicant una vegada més la Proposició 1.2.2, obtenim solucions a_j de les equacions (1.17) amb $\|a_j\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ tant petita com es desitji. En particular, tenim

$$\|h_j\|_\infty \le C(n)\delta^{-4},$$

i $\|f - \sum_{j=0}^n h_jf_j\|_\infty$ pot ser arbitràriament petit. Aleshores

$$\mathrm{dist}_{H^\infty}(f,I) = 0,$$

acabant la prova.

El nostre següent resultat ens diu que per $1 \le p < \infty$, la condició (1.3) és suficient per concloure que la funció 1 es troba en la clausura en H^p de l'ideal $I(f_1,\dots,f_n)$. Per tant, en el context dels espais de Hardy H^p no es pot trobar un anàleg de l'exemple de Bourgain.

Teorema 1.5.4. *Siguin $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$. Sigui $g \in H^p$, $1 \le p < \infty$ tal que*

$$M(g/|f|) \in L^p(\mathbb{T}).$$

Llavors, donat $\gamma > 0$, existeixen funcions $g_1, \dots, g_n \in H^p$ tals que

$$\|g - (f_1 g_1 + \dots + f_n g_n)\|_p < \gamma.$$

El següent Lema (veure [9]) és ben conegut, i permet veure que és suficient provar el Teorema en el cas que els generadors f_j siguin productes de Blaschke finits amb zeros simples, sempre que les estimacions obtingudes no depenguin del nombre de zeros.

Lema 1.5.5 (Carathèodory). *Sigui f una funció analítica en el disc unitat $\mathbb{D}$ i contínua en el disc unitat tancat $\bar{\mathbb{D}}$. Suposem que $0 < |f(z)| \le 1$ si $|z| = 1$. Considerem el conjunt $E = \{z \in \mathbb{T} : |f(z)| < 1\}$. Llavors existeix una successió de productes de Blaschke finits $\{B_n\}$ amb zeros simples tals que $|B_n(z)|$ convergeix uniformement a $|f(z)|$ sobre compactes de $(\bar{\mathbb{D}} \setminus \bar{E})$, i a més $B_n(z)$ convergeix uniformement a $f(z)$ sobre compactes de $\mathbb{D}$.*

Prova del Teorema 1.5.4.

Mitjançant un argument estandard de famílies normals, podem suposar que les funcions g, f_1, f_2 són analítiques en un entorn del disc unitat tancat. Per simplicitat, suposarem que $n = 2$ i que $\|f_j\|_\infty \le 1$, $j = 1, 2$. L'argument de famílies normals permet posar $f_j \in H^\infty$ com un producte $f_j = B_j F_j$ on B_j és un producte de Blaschke i F_j és una funció invertible de H^∞ amb $|F_j| \le 1$. El resultat d'aproximació del Lema 1.5.5 ens permet obtenir la Proposició 1.5.1 per funcions de la bola unitat de H^∞. Aplicant la Proposició 1.5.1, donat $\varepsilon > 0$ obtenim regions R_1, R_2 i números $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0$ tals que $|f_j(z)| < \varepsilon$ si $z \in R_j$, $|f_j(z)| > \delta_i(\varepsilon)$ si $z \in \bar{\mathbb{D}} \setminus R_j$ i a més $N(\lambda_{\partial R_j}) < C_j$, per $j = 1, 2$. Sigui $\delta = \delta(\varepsilon) := \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ i considerem la regió $R = R_1 \cap R_2$. Llavors es compleix

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| < 2\varepsilon \quad \text{si } z \in R, \tag{1.20}$$

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| > \delta \quad \text{si } z \in \bar{\mathbb{D}} \setminus R, \tag{1.21}$$

$$N(\lambda_{\partial R}) < C. \tag{1.22}$$

Per la Proposició 1.5.3 existeixen funcions $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D})$ tals que

$$|v_j(z) - f_j(z)| < \frac{1}{10}\delta^2 \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.23}$$

$$N(|\nabla v_j| dxdy) < c_0\delta^{-2}. \tag{1.24}$$

Per $j = 1, 2$, definim

$$h_j = \bar{v}_j(f_1\bar{v}_1 + f_2\bar{v}_2)^{-1}\chi_{\mathbb{D}\setminus R},$$

llavors $1 - (h_1 f_1 + h_2 f_2) = \chi_R$ i també $f_1\bar{\partial}h_1 + f_2\bar{\partial}h_2 = -\bar{\partial}\chi_R$. Considerarem funcions a_{12}, a_{21}, b_1, b_2 que verifiquin les equacions $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial}a_{jk} = gh_j\bar{\partial}h_k \quad , \quad \bar{\partial}b_j = \frac{g\bar{v}_j}{f_1\bar{v}_1 + f_2\bar{v}_2}\bar{\partial}\chi_R \quad , \quad j, k = 1, 2. \tag{1.25}$$

amb $\|a_{jk}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ acotada, per $j, k = 1, 2$, i $\|b_j\|_{L^p(\mathbb{T})}$ petit. Llavors, les funcions

$$\begin{cases} g_1 = gh_1 + (a_{12} - a_{21})f_2 + b_1 \\ g_2 = gh_2 + (a_{21} - a_{12})f_1 + b_2 \end{cases}$$

són analítiques. Per tant, la funció $F = g - (f_1 g_1 + f_2 g_2)$ és analítica i compleix que $F = g\chi_R - b_1 f_1 - b_2 f_2$. Ara, es compleix

$$\|M(g\chi_R)\|_{L^p(\mathbb{T})} \longrightarrow 0 \quad \text{quan } \varepsilon \to 0$$

ja que $|g|\chi_R \leq 2\varepsilon\frac{|g|}{|f|}\chi_R$, i per hipòtesis $M(\frac{g}{|f|}) \in L^p(\mathbb{T})$. Aleshores

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|M(g\chi_R)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|b_1\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|b_2\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Per tant, només cal provar que existeixen solucions a_{jk}, b_j de les equacions (1.25) amb $\|a_{ij}\|_{L^p(\mathbb{T})}$ acotada i amb $\|b_j\|_{L^p(\mathbb{T})}$ tant petit com es desitgi. Per provar que les solucions a_{jk} existeixen, posem $gh_j\bar{\partial}h_k = \Phi\Psi$, on $\Phi = g|f|^{-1}$, $\Psi = |f|h_i\bar{\partial}h_j$. Ara, aplicant el Lema 1.2.5, podem deduïr l'existència d'aquestes solucions, ja que per hipòtesis $M\Phi \in L^p$, i per provar que la mesura $|\Psi|\, dx\, dy$ és una mesura de Carleson, podem repetir l'argument donat en la prova del Teorema 1.5.2. Fixem $j = 1, 2$, i considerem

$$G_j = \frac{g\bar{v}_j}{f_1\bar{v}_1 + f_2\bar{v}_2}\bar{\partial}\chi_R.$$

Podem posar la funció G_j com $G_j = \varphi\psi$, on

$$\varphi = \frac{g}{|f|} \quad \text{i} \quad \psi = \frac{|f|\bar{v}_j}{f_1\bar{v}_1 + f_2\bar{v}_2}\bar{\partial}\chi_R := \psi_1\bar{\partial}\chi_R.$$

Donat que $\bar{\partial}\chi_R$ està suportat en ∂R, i en ∂R es compleix

$$|\psi_1| \leq |f|(|f_j| + c_1\delta^2)|f|^{-2} \leq 1 + c_1\delta,$$

obtenim que $N(|\psi|\, dx\, dy) \leq C_1 N(\lambda_{\partial R}) \leq C_2$. Aplicant el Lema 1.4.10, obtenim una solució b_j de l'equació $\bar{\partial} b_j = G$ que compleix

$$\int_0^{2\pi} |b_j(e^{i\theta})|^p d\theta \leq C \int_A (M\varphi)^p d\theta,$$

on $A = \{e^{i\theta} : \Gamma(\theta) \cap \partial R \neq \emptyset\}$. Llavors, quan ε tendeix a zero, el conjunt A tendeix al conjunt $Z(f_1) \cap Z(f_2) \cap \mathbb{T}$, que té mesura de Lebesgue zero. Així, per la continuïtat absoluta de la integral, obtenim que $\|b_j\|_p \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$ i aquest fet acaba la prova.

L'Exemple de J. Bourgain.

Per acabar aquesta secció, explicarem ara l'exemple ja comentat anteriorment donat per J. Bourgain en [2] de funcions $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ de manera que l'ideal $J(f_1, f_2)$ no està a la clausura en norma de l'ideal $I(f_1, f_2)$.

Construirem productes de Blaschke B_1, B_2 de manera que la funció $f = B_1 B_2$ no es trobi a la clausura de l'ideal $I(B_1^2, B_2^2)$. El teorema de Douglas-Rudin ens diu que tota funció unimodular σ, $|\sigma| = 1$ en $\mathbb{T}$ es pot aproximar uniformement per un quocient de productes de Blaschke. Considerem la funció $\sigma(\theta) = sign(\sin\theta)$.

Repassant la prova d'aquest teorema donada per P. Jones (veure [11], pàg.428), es pot veure que es poden construir productes de Blaschke B_1, B_2 de forma que $|\sigma(\theta) - B_1(e^{i\theta})\bar{B}_2(e^{i\theta})| < 1/2$ gairebé per tot $\theta \in [0, 2\pi]$, i a més

$$\lim_{|\theta| \to 0} |\sigma(\theta) - B_1(e^{i\theta})\bar{B}_2(e^{i\theta})| = 0. \tag{1.26}$$

Suposem que existeixen funcions $g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ tals que per algun $\gamma > 0$

$$|B_1 B_2 - g_1 B_1^2 - g_2 B_2^2| < 1 - \gamma. \tag{1.27}$$

Per (1.26), donat $\varepsilon << \gamma$ podem escollir $\delta > 0$ de manera que quan $|\theta| < \delta$, aleshores $|\sigma(\theta) - B_1\bar{B}_2(e^{i\theta})| < \varepsilon$. Restringint (1.27) a $\mathbb{T}$, això implica que a $(e^{-i\delta}, e^{i\delta})$ es té

$$|\sigma - g_1 - g_2| \leq |\sigma - B_1\bar{B}_2| + |B_1 B_2 - g_1 B_1^2 - g_2 B_2^2| + |g_1||(B_1\bar{B}_2)^2 - \sigma^2|$$

$$< \varepsilon + 1 - \gamma + 2\|g_1\|_\infty |B_1\bar{B}_2 - \sigma| < \varepsilon + 1 - \gamma + 2\|g_1\|_\infty \varepsilon.$$

Per $0 < r < 1$, sigui $Q_r(\theta)$ el nucli de Poisson conjugat

$$Q_r(\theta) = \frac{2r\sin(\theta)}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Ara usarem el següent lema:

Lema 1.5.6. *Sigui $f \in H^1(\mathbb{D})$ i sigui $\gamma \in (0,1)$. Si existeix $\delta > 0$ de forma que si $|\theta| < \delta$ es satisfà*

$$|f(e^{i\theta}) - sign(\sin\theta)| < 1 - \gamma$$

Llavors f no és acotada.

Demostració. Suposem que f és acotada, i denotem per $\sigma(\theta) = sign(\sin\theta)$. Llavors

$$|f(re^{i\theta})| \geq |\mathrm{Im}\, f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(e^{i\theta})Q_r(\theta)d\theta\Big| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{|\theta|<\delta}(\mathrm{Re}\, f - \sigma)Q_r d\theta + \int_{|\theta|<\delta}\sigma Q_r d\theta + \int_{|\theta|>\delta}(\mathrm{Re}\, f)Q_r d\theta\Big|$$

$$\geq \Big|\int_{|\theta|<\delta}\sigma Q_r \frac{d\theta}{2\pi}\Big| - \int_{|\theta|<\delta}|\mathrm{Re}\, f - \sigma||Q_r|\frac{d\theta}{2\pi} - \|f\|_\infty \int_{|\theta|>\delta}|Q_r|\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\geq \int_{|\theta|<\delta}|Q_r|\frac{d\theta}{2\pi} - (1-\gamma)\int_{|\theta|<\delta}|Q_r|\frac{d\theta}{2\pi} - \|f\|_\infty \int_{|\theta|>\delta}|Q_r|\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \gamma A_r - \|f\|_\infty B_r,$$

on

$$A_r = \int_{|\theta|<\delta}|Q_r(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi} \;\; ; \quad B_r = \int_{|\theta|>\delta}|Q_r(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Això implica que

$$\|f\|_\infty \geq \frac{\gamma A_r}{1 + B_r}.$$

Com B_r és acotat i $\|Q_r\|_1 \longrightarrow \infty$ quan $r \to 1$, llavors $A_r \longrightarrow \infty$ quan $r \to 1$ i per tant f no pot estar acotada. □

Sigui $\tilde{\gamma} = \gamma - \varepsilon - 2\|g_1\|_\infty\varepsilon$. Escollint ε suficientment petit, podem suposar que $0 < \tilde{\gamma} < 1$. Ara, aplicant el Lema anterior a la funció $F = g_1 + g_2$ obtenim que $F \notin H^\infty(\mathbb{D})$, fet impossible ja que $g_1, g_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$. Per tant $B_1B_2 \notin \bar{I}(B_1^2, B_2^2)$.

1.6 Algunes millores

Lema 1.6.1. *Sigui (X,μ) un espai de mesura. Per $j = 1, \dots, n$, considerem funcions $f_j \in L^1(X,\mu)$. Llavors*

$$\Big(\int_X \prod_{j=1}^n |f_j|^{1/n}\, d\mu\Big)^n \leq \prod_{j=1}^n \int_X |f_j|\, d\mu.$$

Demostració. Per $n = 1$, això és una igualtat. Per $n > 1$, la desigualtat de Hölder dóna

$$\int_X \prod_{j=1}^{n} |f_j|^{1/n}\, d\mu \leq \Big(\int_X |f_n|\, d\mu\Big)^{1/n} \Big(\int_X \prod_{j=1}^{n-1} |f_j|^{1/(n-1)}\, d\mu\Big)^{(n-1)/n},$$

que per inducció, està acotat per

$$\Big(\int_X |f_n|\, d\mu\Big)^{1/n} \Big(\prod_{j=1}^{n-1} \int_X |f_j|\, d\mu\Big)^{1/n}.$$

□

Lema 1.6.2. *Sigui b un producte de Blaschke de Carleson-Newman d'ordre k, és a dir, b és un producte de k productes de Blaschke d'interpolació. Sigui $\{z_n\}$ una successió de Carleson-Newman tal que $Z_{\mathbb{D}}(b) \subset \{z_n\}$, i sigui $U = \cup_n D(z_n, \eta)$, $0 < \eta < 1$ petit. Si Ψ_U denota la funció característica de U, llavors la mesura*

$$d\mu = \frac{|b'|}{|b|^{1+\alpha}} \Psi_U\, dx\, dy,$$

és una mesura de Carleson per tot $\alpha < 1/k$.

Demostració. Hem de veure que per tota funció $h \in H^1(\mathbb{D})$, es compleix

$$\int_{\mathbb{D}} |h|\, d\mu \leq C\|h\|_{H^1}.$$

Siguin $b_1, \ldots, b_k$ productes de Blaschke d'interpolació amb $b = \prod_{l=1}^{k} b_l$. Tenim que $b'/b = \sum_{j=1}^{k} b_j'/b_j$. Llavors

$$\int_{\mathbb{D}} |h|\, d\mu \leq \sum_{j=1}^{k} \int_U |h| \frac{|b_j'|}{|b_j||b|^{\alpha}}\, dx\, dy.$$

Així només ens cal provar que

$$\int_U |h| \frac{|b_j'|}{|b_j||b|^{\alpha}}\, dx\, dy \leq C\|h\|_{H^1}.$$

A efectes de notació, denotem b_j per b_k, així $|b| = |b_k| \prod_{l=1}^{k-1} |b_l|$. Per $i = 1, \dots, k$, sigui $A_i = \bigcup_{z_n \in Z_{\mathbb{D}}(b_i)} D(z_n, \eta)$. Llavors

$$\int_U \leq \int_{A_k} + \int_{\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i} + \int_{U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i} .$$

Per $z \notin \cup_{i=1}^{k} A_i$, tenim que $|b(z)| \geq c(\eta)$, així

$$\int_{U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i} |h| \frac{|b_k'|}{|b_k|} \frac{1}{|b|^{\alpha}}\, dx\, dy \leq c(\eta)^{-\alpha} \int_U |h| \frac{|b_k'|}{|b_k|}\, dx\, dy \leq c_2(\eta) \|h\|_{H^1},$$

ja que pel Lema 1.4.10, la mesura $\dfrac{|b_k'|}{|b_k|} \Psi_U\, dx\, dy$ és de Carleson.

Sigui M el nombre d'índexs l tals que $Z_{\mathbb{D}}(b_l) \cap A_k \neq \emptyset$. Clarament, el cas més desfavorable es produeix quan tots els discs de A_k contenen un zero de b_l. Tenim $M \leq k$, i per aquests productes de Blaschke d'interpolació es compleix que $(1 - |z|^2)|b_l'(z)| \geq \delta_l$, per $z \in A_k$, $(l = 1, \dots, M)$. Llavors

$$\int_{A_k} = \int_{A_k} |h| \frac{|b_k'|}{|b_k|^{1+\alpha}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{|b_l|^{\alpha}}\, dx\, dy \leq \frac{C}{\min \delta_j} \int_{A_k} |h| \frac{|b_k'|^{1+1/M}}{|b_k|^{1+\alpha}} \prod_{l=1}^{M-1} \frac{|b_l'|^{1/M}}{|b_l|^{\alpha}} (1 - |z|^2)\, dx\, dy.$$

Per la desigualtat de Hölder (amb exponents $p = 2M/(M+1)$ i $q = 2M/(M-1)$), la darrera integral està acotada per

$$\Big(\int_{\mathbb{D}} \frac{|b_k'|^2}{|b_k|^{\frac{2M}{M+1}(1+\alpha)}} |h| (1 - |z|^2)\, dx\, dy \Big)^{\frac{M+1}{2M}} \Big(\int_{\mathbb{D}} \prod_{l=1}^{M-1} \big(\frac{|b_l'|^2}{|b_l|^{2M\alpha}} \big)^{\frac{1}{M-1}} |h| (1 - |z|^2)\, dx\, dy \Big)^{\frac{M-1}{2M}}.$$

Així, aplicant el Lema 1.6.1 a les funcions $h_l = \frac{|b_l'|^2}{|b_l|^{2M\alpha}}$, obtenim que

$$\int_{A_k} \leq \Big(\int_{\mathbb{D}} \frac{|b_k'|^2}{|b_k|^{\frac{2M}{M+1}(1+\alpha)}} |h| (1 - |z|^2)\, dx\, dy \Big)^{\frac{M+1}{2M}} \Big(\prod_{l=1}^{M-1} \int_{\mathbb{D}} \frac{|b_l'|^2}{|b_l|^{2M\alpha}} |h| (1 - |z|^2)\, dx\, dy \Big)^{\frac{1}{2M}}$$

que està acotat superiorment per $C\|h\|_{H^1}$. En efecte, com $\alpha < 1/k$, llavors tenim que $2M\alpha < 2$, i també $\frac{2M}{M+1}(1+\alpha) < 2$. Per tant, les mesures

$$\frac{|b_l'|^2}{|b_l|^{2M\alpha}} (1 - |z|^2)\, dx\, dy \quad \text{i} \quad \frac{|b_k'|^2}{|b_k|^{\frac{2M}{M+1}(1+\alpha)}} (1 - |z|^2)\, dx\, dy$$

són mesures de Carleson (aplicant el Lema 1.4.2 prenent com a μ la Delta de Dirac en el punt $\varepsilon \in \mathbb{R}$). De forma semblant es prova que

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i} |h| \frac{|b_k'|}{|b_k|} \frac{1}{|b|^\alpha} \, dx \, dy \leq C \|h\|_{H^1},$$

fet que acaba la prova. $\square$

Teorema 1.6.3. *Siguin $g, f_1, \dots, f_N \in H^\infty$, i sigui $I = I(f_1, \dots, f_N)$ l'ideal generat per $f_1, \dots, f_N$. Si ord$(I, m) \leq k$, per tot $m \in Z(I)$, llavors per $0 < \alpha < 1/k$, la condició*

$$|g(z)| \leq C|f(z)|^{2-\alpha} \quad \forall z \in D$$

implica $g \in I$.

Demostració. La condició $\operatorname{ord}(I, m) \leq k$ per tot $m \in Z(I)$ és equivalent a dir que l'ideal I conté un producte de Blaschke de Carleson-Newman $C = \prod_{j=1}^{k} c_j$, on els c_j són productes de Blaschke d'interpolació (veure [38]). Llavors podem suposar que els generadors f_j són productes de Blaschke de Carleson-Newman

$$f_j = \prod_{i=1}^{k} b_{ij}, \quad (j = 1, \dots, N),$$

on b_{ij} són productes de Blaschke d'interpolació.

Considerem les funcions $\varphi_j = \bar{f}_j |f|^{-2}$ i $G_{ij} = \varphi_i \bar{\partial} \varphi_j$ $(i, j = 1, \dots, N)$. Si podem resoldre les equacions $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial} h_{ij} = g G_{ij} (i, j = 1, \dots, N),$$

amb $\|h_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq M$, llavors les funcions

$$g_j = g\varphi_j + \sum_{i=1}^{N} (h_{ji} - h_{ij}) f_i,$$

són acotades i compleixen $\sum_{i=1}^{N} f_j g_j = g$ i $\bar{\partial} g_j = 0$, i per tant resolen el problema.

Fixem j, i, i denotem G_{ij} per G. Sigui $\{z_n\} = \cup_{j=1}^{N} Z_{\mathbb{D}}(f_j)$, que és una successió de Carleson-Newman. Escollim una funció $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{D})$, $0 \leq a \leq 1$ tal que $a \equiv 1$ en $\{z : \rho(z, \{z_n\}) < \varepsilon\}$, $a \equiv 0$ en $\{z : \rho(z, \{z_n\}) \geq 2\varepsilon\}$, i de forma que $(1 - |z|)|\nabla a(z)|$ sigui acotat.

Sigui $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(z_n, 2\varepsilon)$, on $D(z_n, \varepsilon)$ denota el disc pseudohiperbòlic de centre z i radi ε. Ara, posem $G = G_1 + G_2$, on $G_1 = Ga$, $G_2 = G(1-a)$. Un càlcul elemental prova que

$$|gG_1|^2 \leq c_0 a^2 \frac{\sum_{l=1}^N |f_l'|^2}{\left(\sum_{l=1}^N |f_l|^2\right)^{1+\alpha}}. \tag{1.28}$$

Per resoldre l'equació $\bar{\partial} h = G$, és suficient resoldre les equacions $\bar{\partial} h = G_1$ i $\bar{\partial} h = G_2$. Per resoldre aquestes equacions, farem ús del criteri de Carleson (Lema 1.2.2) en el primer cas, i el criteri de Wolff (Lema 1.2.3) en el segon.

Per resoldre l'equació $\bar{\partial} h = gG_1$, necessitem provar que $|gG_1|\, dx\, dy$ és una mesura de Carleson. Però per (1.28), es compleix

$$|gG_1| \leq c_1 a \sum_{l=1}^N \frac{|f_l'|}{|f_l|^{1+\alpha}}.$$

Com que la funció a s'anul.la fora de U, aplicant el Lema 1.6.2 obtenim que $|gG_1|\, dx\, dy$ és una mesura de Carleson, ja que $\alpha < 1/k$.

Per resoldre l'equació $\bar{\partial} h = G_2$, observem que es compleix que $\prod_{j=1}^N |f_j(z)| \geq c(\varepsilon)$ si $\rho(z, \{z_n\}) \geq \varepsilon$. Llavors

$$|g(z)G_2(z)|^2\,(1-|z|)\, dx\, dy \leq \frac{c_0}{c(\varepsilon)^{2+\alpha}} \sum_{l=1}^N |f_l'(z)|^2\,(1-|z|)\, dx\, dy,$$

que és una mesura de Carleson. De forma similar es pot veure que

$$|\partial(gG_2)(z)|\,(1-|z|)\, dx\, dy$$

és una mesura de Carleson. Això acaba la prova.

$\square$

El següent resultat millora el resultat de Cegrell respecte al Problema 3.

Teorema 1.6.4. *Sigui k una funció contínua, acotada, creixent amb $k(x)/x$ decreixent (en un entorn de l'origen) tal que*

$$\int_0^1 \frac{k(x)}{x} |\log x|\, dx < +\infty.$$

Siguin $g, f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $|f|^2 < 1$. Aleshores la condició

$$|g| \le C|f|^2\big(k(|f|^2)\int_0^{|f|^2} \frac{k(x)}{x}\,dx\big)^{1/2},$$

implica l'existència de solucions $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$ de l'equació

$$g = f_1 g_1 + \dots f_n g_n.$$

Lema 1.6.5. *Sigui $k : (0,1) \to [0,\infty)$ contínua tal que $\displaystyle\int_0^1 \frac{k(x)}{x}|\log x\,|\,dx < \infty$. Siguin $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ amb $|f|^2 = \sum_{i=1}^n |f_i|^2 < 1$. Llavors les mesures*

(a) $\displaystyle\frac{|\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4}\,k(|f|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$

(b) $\displaystyle\frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4}\Big(\int_0^{|f|^2}\frac{k(s)}{s}\,ds\Big)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$

són mesures de Carleson amb norma acotada per $C\int_0^1 \frac{k(s)}{s}|\log s|\,ds$.

Demostració. Considerem la funció

$$U(z) = \log|f(z)|\int_0^{|f(z)|^2}\frac{k(s)}{s}\,ds + \int_0^{|f(z)|^2}\frac{k(s)}{s}|\log s|\,ds.$$

Es compleix

$$0 \le U(z) \le 2\int_0^{|f(z)|^2}\frac{k(s)}{s}|\log s|\,ds,$$

i un càlcul ens dóna

$$\frac{1}{4}\Delta\,U(z) = S(z),$$

on

$$S = \frac{|\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4}\,k(|f|^2) + \frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4}\Big(\int_0^{|f|^2}\frac{k(s)}{s}\,ds\Big).$$

Ara, aplicant el Lema 1.2.1 acabem la prova. □

Prova del Teorema 1.6.4. Com ja hem vist anteriorment, només cal trobar solucions acotades de les equacions $\bar\partial b_{jk} = gG_{jk}$, $(j,k = 1,\dots,n)$. Fixem j,k, i denotem G_{jk} per G. Per un càlcul anterior (veure la prova del Teorema 1.4.4),

$$|G| \le \frac{(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2)^{1/2}}{|f|^4}. \tag{1.29}$$

Llavors

$$|gG|^2 \leq C \frac{(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2)}{|f|^4} \Big(\int_0^{|f|^2} \frac{k(s)}{s}\, ds \Big)\, k(|f|^2),$$

i com que k és acotada, la mesura

$$|g(z)G(z)|^2 \, (1-|z|^2)\, dx\, dy$$

és de Carleson pel Lema 1.6.5.

Tenim que $\partial(gG) = g'G + g\partial G$, i

$$|\partial G| \leq 2|G| \frac{|\partial(|f|^2)|}{|f|^2} + \frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^6}.$$

Així

$$|g\partial G| \leq 2|g||G| \frac{|\partial(|f|^2)|}{|f|^2} + C \frac{(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2)}{|f|^4} \Big(\int_0^{|f|^2} \frac{k(s)}{s}\, ds \Big)^{1/2} k(|f|^2)^{1/2} = A + B.$$

Com que la funció $k(x)/x$ és decreixent, llavors $k(|f|^2) \leq \int_0^{|f|^2} \frac{k(s)}{s}\, ds$, i per tant la mesura $B\,(1-|z|^2)\, dx\, dy$ és de Carleson pel Lema 1.6.5. També, utilitzant (1.29), tenim

$$A \leq \frac{|\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4} k(|f|^2) + \frac{|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4} \Big(\int_0^{|f|^2} \frac{k(s)}{s}\, ds \Big),$$

i així, pel Lema 1.6.5, la mesura

$$|g(z)\partial G(z)|(1-|z|^2)\, dx\, dy$$

és de Carleson. Ara només queda provar que la mesura $|g'(z)G(z)|(1-|z|^2)\, dx\, dy$ és de Carleson. Sigui $h \in H^2$. Llavors

$$\int_{\mathbb{D}} |h|^2 |g'G| \, (1-|z|^2)\, dx\, dy = \int_{\{z: |g(z)| \leq |f(z)|^5\}} + \int_{\{z: |g(z)| > |f(z)|^5\}} = I_1 + I_2.$$

Ara bé,

$$I_1 \leq \int_{\mathbb{D}} |h|^2 \frac{|g'|^2}{|g|} \, (1-|z|^2)\, dx\, dy + \int_{\mathbb{D}} |h|^2 \frac{|f'|^2}{|f|} \, (1-|z|^2)\, dx\, dy \leq C_1 \|h\|_{H^2}^2,$$

ja que la mesura $\frac{|g'|^2}{|g|}\,(1-|z|^2)\, dx\, dy$ és de Carleson. Denotem per

$$B(|f|^2) = \frac{(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2)}{|f|^4} \Big(\int_0^{|f|^2} \frac{k(s)}{s}\, ds \Big).$$

Llavors I_2 està acotat per

$$\int_{\{z:|g(z)|>|f(z)|^5\}} |h|^2 \frac{|g'|^2}{|g|^2} k(|f|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{D}} |h|^2 B(|f|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$$

que al ser k creixent, està acotat per

$$\int_{\mathbb{D}} |h|^2 \frac{|g'|^2}{|g|^2} s(|g|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy + \int_{\mathbb{D}} |h|^2 B(|f|^2)\,(1-|z|^2)\,dx\,dy,$$

on $s(x) = k(x^{1/5})$, que satisfà la condició $\int_0^1 \frac{s(x)}{x}\,|\log x|\,dx < \infty$. Ara aplicant el Lema 1.6.5 s'acaba la prova. $\square$

Així mateix, també podem obtenir l'anàleg d'aquest Teorema pel cas H^p, $1 \leq p < \infty$. La prova és l'adaptació de la prova anterior al cas H^p, com en el Teorema 1.4.8, i no la donem aquí.

Teorema 1.6.6. *Sigui k com en el Teorema 1.6.4. Sigui $H(x) = \sqrt{k(x)\int_0^x \frac{k(s)}{s}\,ds}$. Aleshores, donades funcions $g, f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$, la condició*

$$M\big(\frac{g}{|f|^2 H(|f|^2)}\big) \in L^p(\mathbb{T})$$

implica l'existència de solucions $g_1, \ldots, g_n \in H^p$ de l'equació $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = g$.

1.7 Apèndix: una prova del Teorema de la Corona.

Teorema 1.7.1. *Siguin $f_1, f_2, \ldots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ amb $\|f_j\|_\infty \leq 1$ tal que*

$$0 < \delta \leq \inf_{z\in\mathbb{D}} \big(\sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2\big)^{1/2} \leq 1.$$

Suposem $\delta < 1/3$. Aleshores existeixen solucions $g_1, g_2, \ldots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ de l'equació

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1.$$

amb $\|g\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} \big(\sum_{j=1}^n |g_j(z)|^2\big)^{1/2} \leq \frac{C}{\delta^2}\log(1/\delta)$. Aquí, C és una constant absoluta (independent de n).

Demostració. La prova del teorema donada aquí, és essencialment deguda a V. Tolokonnikov (veure [41]), diferint-hi només en l'estimació de l'integral I_2, que és deguda a A. Uchiyama (veure [43]).

Per un argument de famílies normals podem suposar que $f_1, \dots, f_n$ són holomorfes en un entorn del disc unitat tancat. Per $j = 1, \dots, n$ definim les funcions

$$\varphi_j(z) = \frac{\overline{f_j}(z)}{\sum_{l=1}^n |f_l(z)|^2}.$$

Les funcions φ_j són de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{D}$, són acotades i són solució de l'equació $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$, però no son holomorfes. Arreglem aquestes solucions de forma que siguin holomorfes. Per $j, k = 1, \dots, n$, definim les funcions

$$u_{jk} = \varphi_j \bar\partial \varphi_k - \varphi_k \bar\partial \varphi_j = |f|^{-4}(\bar f_j \bar f_k' - \bar f_k \bar f_j').$$

Suposem que per $j, k = 1, \dots, n$, podem trobar funcions v_{jk} que resolen les equacions $\bar\partial v_{jk} = u_{jk}$ (per tant, per les corresponents matrius $v = (v_{jk})$, $u = (u_{jk})$ es compleix que $\bar\partial v = u$), llavors les funcions

$$g_j = \varphi_j + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(v_{jk} - v_{kj}) f_k, \ \ 1 \le j \le n,$$

compleixen $\bar\partial g_j = 0$, per tant són analítiques en $\mathbb{D}$, i a més són solució de l'equació

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1.$$

A més, per tot $z \in \mathbb{D}$ es compleix que

$$\Big(\sum_{j=1}^n |g_j(z)|^2 \Big)^{1/2} \le |\varphi_(z)| + \|v(z)\| \, |f(z)|,$$

on per una funció vectorial $f = (f_1, \dots, f_n)$, denotem $|f(z)| = \big(\sum_{i=1}^n |f_j(z)|^2 \big)^{1/2}$, i per una matriu $v = (v_{jk})$, denotem $\|v(z)\| = \big(\sum_{j,k=1}^n |v_{jk}(z)|^2 \big)^{1/2}$. És a dir, es compleix que

$$\|g\|_{H^\infty} := \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z)| \le \delta^{-1} + \|v\|_\infty.$$

Per fer una estimació de $\|v\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} \|v(\zeta)\|$, farem ús de les tècniques utilitzades en la prova del criteri de Wolff de resolució d'equacions $\bar\partial$ (Proposició 1.2.3). Considerem els espais

$$H^\infty_{n \times n} = \big\{ f = \{f_{jk}\} : f_{jk} \in H(\mathbb{D}) \text{ i } \sup_{z \in \mathbb{D}} \|f(z)\| < \infty \big\},$$

i

$$H^1_{n\times n} = \big\{f = \{f_{jk}\} : f_{jk} \in H(\mathbb{D}) \text{ i } \sup_{0<r<1} \int \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\big\},$$

amb normes donades per

$$\|f\|_{H^1_{n\times n}} = \sup_{0<r<1} \int \|f(re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} \quad i \quad \|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} \|f(z)\|.$$

De forma semblant als casos dels espais $H^\infty(\mathbb{D})$ i $H^1(\mathbb{D})$, aplicant el teorema de Hahn-Banach, s'obté

$$\inf\big\{\|v\|_\infty : \bar\partial v = u\big\} = \sup\big\{\big|\int_{\mathbb{T}} \langle F, v_0\rangle\, dm\big| : F \in H^1_{n\times n}, \|F\|_{H^1_{n\times n}} \le 1, F(0) = 0\big\}.$$

on dm és la mesura de Lebesgue a $\mathbb{T}$, $\langle \alpha, \beta\rangle = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}\bar{\beta_{jk}}$, i v_0 és la matriu solució de l'equació $\bar\partial v = u$ donada per la integral de Cauchy de cada una de les components de u. Aplicant la fórmula de Green a les funcions $w = \langle F, v_0\rangle$ i $\log(1/|z|)$, obtenim que

$$\int_{\mathbb{T}} w\, dm = \int_{\mathbb{D}} \log(1/|z|)\Delta w(z)\, dx\, dy. \tag{1.30}$$

Com que $\Delta w = 4\partial\bar\partial\langle F, v_0\rangle = 4\partial\langle F, \bar\partial v_0\rangle = 4\partial\langle F, u\rangle = 4\langle F', u\rangle + 4\langle F, \partial u\rangle$, és suficient fer estimacions de les integrals

$$I_1 = \int_{\mathbb{D}} |\langle F', u\rangle|\, \log(1/|z|)\, dx\, dy, \quad \text{i de } I_2 = \int_{\mathbb{D}} |\langle F, \partial u\rangle|\, \log(1/|z|)\, dx\, dy.$$

Per això, definim la funció externa k per la fórmula $|k(\zeta)|^2 = \|F(\zeta)\|, \zeta \in \mathbb{T}$. Llavors

$$I_1 \le \Big(\int_{\mathbb{D}} \frac{\|F'(z)\|^2}{|k(z)|^2} \log(1/|z|)\, dx\, dy\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{D}} |k(z)|^2\|u(z)\|^2 \log(1/|z|)\, dx\, dy\Big)^{1/2} := I_3\, I_4.$$

Considerem la funció $r = Fk^{-1}$. Aleshores $\|r(\zeta)\| = |k(\zeta)|$ gairebé per tot $\zeta \in \mathbb{T}$, i a més $\|r(z)\| \le |k(z)|$, per $z \in \mathbb{D}$. Així, es compleix que

$$\|F'(z)\|^2 = \|r'(z)k(z) + r(z)k'(z)\|^2 \le 2(\|r'(z)\|^2|k(z)|^2 + \|r(z)\|^2|k'(z)|^2),$$

per tant obtenim que

$$(I_3)^2 \le 2\int_{\mathbb{D}} (\|r'(z)\|^2 + |k'(z)|^2)\log(1/|z|)\, dx\, dy \le 2\pi,$$

ja que per la fórmula de Green (1.30) (aplicada a la funció $w = |k|^2$) es compleix

$$4\int_{\mathbb{D}} |k'|^2 \log(1/|z|) = 2\pi \int_{\mathbb{T}} |k|^2 \, dm - 2\pi |k(0)|^2 \leq 2\pi,$$

i de forma similar per la segona integral.

Per fer una estimació del segon factor, és a dir, la integral $(I_4)^2$, observem que

$$\|u\|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} |u_{jk}|^2 = |f|^{-8} \sum_{j,k=1}^{n} |f_j f_k - f_k f_j|^2 = 2|f|^{-8}(|f|^2|f'|^2 - |\partial(|f|^2)|^2),$$

on l'última identitat es segueix d'un càlcul. Aplicant el Lema 1.2.1 a la funció $b = \log(|f|^2\delta^{-2})$ obtenim que la mesura donada per

$$\frac{|f'|^2|f|^2 - |\partial(|f|^2)|^2}{|f|^4} (1 - |z|) \, dx \, dy$$

és una mesura de Carleson amb norma de Carleson acotada per $C \log(1/\delta)$. De fet, $\Delta b = 2\|u\|^2 \, |f|^4$. Per tant,

$$(I_4)^2 \leq C\delta^{-4} \log(1/\delta). \tag{1.31}$$

Anem ara a fer una estimació de la integral I_2. Per això, observem que

$$\partial u = -2u|f|^{-2}\partial(|f|^2),$$

i per tant $\|\partial u\| = 2\|u\||f|^{-2}|\partial(|f|^2)|$. Provarem que la mesura

$$\|u\||f|^{-2}|\partial(|f|^2)| \, \log(1/|z|) \, dx \, dy \tag{1.32}$$

és de Carleson amb norma de Carleson acotada superiorment per $C\delta^{-2} \log(1/\delta)$. Ara bé, es compleix que

$$\|u\||f|^{-2}|\partial(|f|^2)| \leq C(\delta^{-2}\Delta b + |f'|^2|f|^{-4}).$$

Considerem la funció

$$a(z) = \log\Big(\frac{2|f(z)|^2 + \delta^2}{3\delta^2}\Big).$$

La funció $a(z)$ és subharmònica, positiva i acotada amb $\|a\|_\infty \leq 2\log(1/\delta)$. Per tant, pel Lema 1.2.1, la mesura donada per $d\lambda(z) = \Delta a(z) \, (1 - |z|) \, dx \, dy$ és de Carleson amb $N(\lambda) \leq C \log(1/\delta)$. Un càlcul elemental ens dóna

$$\frac{1}{8}\Delta a = \frac{2(|f'|^2|f|^2 - |\partial(|f|^2)|^2) + |f'|^2\delta^2}{|f|^4(2 + \delta^2/|f|^2)^2} \geq C|f'|^2\delta^2|f|^{-4}.$$

Aleshores
$$\|u\||f|^{-2}|\partial(|f|^2)| \leq C\delta^{-2}(\Delta b + \Delta a),$$
Així, pel Lema 1.2.1, la mesura donada per (1.32) és de Carleson amb norma acotada per $C\delta^{-2}\log(1/\delta)$. Així doncs,
$$|I_2| \leq C\delta^{-2}\log(1/\delta).$$
Així obtenim que
$$\|v\|_\infty \leq C\delta^{-2}(\log(1/\delta))^{1/2}(1 + (\log(1/\delta)^{1/2}),$$
fet que acaba la prova del Teorema. □

Capítol 2

Decreixement de funcions analítiques i acotades.

En aquest capítol estudiarem diversos tipus de decreixement de funcions analítiques i acotades en el disc unitat. En particular estem interessats en saber les condicions que ha de complir una successió discreta de punts $\{a_k\}$ en el disc unitat de forma que existeixi una funció analítica i acotada en $\mathbb{D}$ que decreixi cap a zero en aquests punts amb una velocitat determinada. Enunciem això de forma precisa.

Problema 8. *Sigui $g : (0,1) \to (0,1)$ una funció no creixent tal que $\lim_{r\to 1} g(r) = 0$. Quines condicions ha de complir una successió $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ per a què existeixi una funció $f \in H^\infty$, $f \neq 0$ complint que $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$?*

Com un primer pas per aquest problema, voldríem saber què ha de complir la successió per a què, almenys existeixi una funció analítica i acotada que decreixi cap a zero en els punts de la successió. La resposta a aquest problema va ser donada per Hayman en [17].

Teorema (Hayman). *Donada una successió discreta $a = \{a_k\}$ de punts en el disc unitat, existeix una funció no-identicament zero $f \in H^\infty$ tal que $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = 0$ si i només si $|NT(a)| = 0$.*

En l'enunciat anterior, donada una successió $a = \{a_k\} \subset \mathbb{D}$, $NT(a)$ denota el *conjunt de punts d'acumulació no-tangencials*, és a dir, el conjunt de punts $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ que són punts límits de la intersecció de $\{a_k\}$ amb un angle de Stolz de qualsevol obertura amb vèrtex en el punt ζ, i $|\cdot|$ denota la mesura de Lebesgue 1-dimensional en el cercle unitat $\partial\mathbb{D}$.

Tornant al problema anterior, com que la funció $\log|f|$ és subharmònica, podríem donar una versió més general del problema en termes de funcions subharmòniques en el disc unitat. Així, també sorgeix el problema anàleg pel cas de funcions harmòniques i positives en el disc unitat.

Problema 9. *Sigui* $h : (0,1) \to (0,\infty)$ *una funció no decreixent tal que* $\lim_{r\to 1} h(r) = \infty$. *Quines condicions ha de complir una successió* $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ *per a què existeixi una funció* u *harmònica i positiva en el disc unitat complint que* $u(a_k) \geq h(|a_k|)$ *?*

Un altre tema sobre decreixement de funcions analítiques és el dels minorants essencials. Donada una classe de successions, un minorant essencial sobre aquesta classe és una funció que decreix cap a zero massa ràpid per a què existeixi una funció analítica i acotada no nul.la que decreixi amb la mateixa velocitat en alguna successió de la classe. De forma més precisa, si S denota una classe de successions en el disc unitat, diem que una funció no creixent g de $[0,1)$ a $(0,\infty)$, que tendeix a 0 quan x tendeix a 1, és un *minorant essencial* per la classe S si i només si donada qualsevol successió separada $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$ de la classe S, tota funció $f \in H^\infty$ verificant que $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$ és idènticament nul.la.

La noció de minorants essencials va ser introduïda en [24] per Lyubarskii i Seip per la classe de les successions no-Blaschke, donant la següent caracterització:

Teorema (Lyubarskii-Seip). *Una funció* g *és un minorant essencial per les successions no-Blaschke si i només si*

$$\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)\log\frac{1}{g(r)}} < \infty.$$

2.1 Generacions

En aquesta secció descrivim una forma de descomposar successions separades. És més simple treballar en el semiplà superior. Considerem ara la següent partició estàndard diàdica del semiplà superior: per $n \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$,

$$Q_{n,j} := \{z \in \mathbb{C} : 2^{-n-1} < \operatorname{Im} z \leq 2^{-n}\,, \quad j2^{-n} \leq \operatorname{Re} z < (j+1)2^{-n}\}.$$

Obervem que $Q_{n,j}$ és la part superior de la "finestra de Carleson" amb base la projecció $I_{n,j}$ de $Q_{n,j}$ sobre l'eix real, és a dir

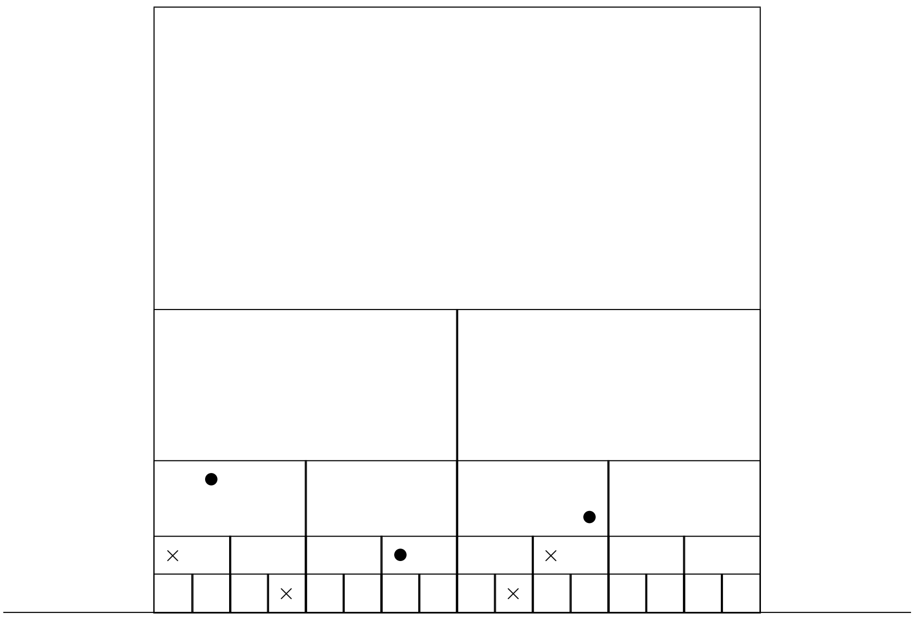
$$I_{n,j} := [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}).$$

Per tot n fix, els intervals $\{I_{n,j} : j \in \mathbb{Z}\}$ formen una partició de $\mathbb{R}$.

Com que una successió separada admet com a molt un nombre uniformement acotat de punts en cada $Q_{n,j}$, serà suficient considerar successions en el semiplà superior que tinguin com a molt un punt en cada $Q_{n,j}$.

Donada una successió $\{a_k\}$ en el semiplà superior, seguint per exemple [11, §7.3, p. 299], podem definir les *generacions* de la següent forma. Denotem per Q_k la única caixa diàdica $Q_{n,j}$ tal que $a_k \in Q_{n,j}$, i per I_k el corresponent interval diàdic $I_{n,j} \subset \mathbb{R}$. La primera generació $\mathcal{G}_1$ està formada pels índexs tals que els corresponents punts de la successió no en tenen cap altre a sobre seu, és a dir, un índex k està en la primera generació si no existeix cap I_j, $j \neq k$, tal que $I_k \subset I_j$. Llavors definim la segona generació $\mathcal{G}_2$ com la primera generació de la successió restant $\{a_j : j \notin \mathcal{G}_1\}$. Les següents generacions $\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4, \ldots$ es defineixen recursivament,

$$\mathcal{G}_{k+1} = \mathcal{G}_1(\{a_j : j \notin \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{G}_l\}) .$$



Els termes de la successió marcats amb punts corresponen als índexs de la primera generació $\mathcal{G}_1$, mentre que les creus corresponen a índexs de la segona generació $\mathcal{G}_2$.

Equivalentment, $k \in \mathcal{G}_n$ si i només si $n = \#\{k' \colon I_k \subset I_{k'}\}$. Llavors, cada generació donada defineix una família disjunta d'intervals diàdics en la recta, i si denotem per

$$G_n := \bigcup_{k \in \mathcal{G}_n} I_k,$$

llavors

$$|G_n| = \sum_{k \in \mathcal{G}_n} |I_k|.$$

Observar que de forma anàloga es poden definir generacions que formin una partició del disc, que no són exactament l'antiimatge per l'aplicació Ψ anterior. Les notacions són més simples en el cas del semiplà.

Sigui $\{a_k\}$ una successió acotada i separada en el semiplà superior. Llavors $\{a_k\}$ és una successió de Blaschke, és a dir,

$$\sum_k \operatorname{Im} a_k < \infty,$$

si i només si $\Gamma_\gamma(\{a_k\}) \in L^1(\mathbb{R})$ on

$$\Gamma_\gamma(\{a_k\})(x) := \#\{a_k : x \in I_\gamma(a_k)\}, \qquad \text{amb } I_\gamma(z) := (x - \gamma y, x + \gamma y).$$

En termes de generacions, $\{a_k\}$ és de Blaschke si i només si $\sum |G_n| < \infty$.

També, $|NT\{a_k\}| = 0$ o equivalentment, la funció $\Gamma_\gamma(\{a_k\})$ és finita gairebé per tot, si i només si $|G_n| \to 0$, quan $n \to \infty$. Aquí $NT(\{a_k\}) \subset \mathbb{R}$ és el conjunt de punts d'acumulació notangencials de la successió $\{a_k\}$.

2.2 Creixement de funcions harmòniques

Començem aquesta secció amb l'estudi del Problema 9 pel cas de funcions de $h^p(\mathbb{D})$ amb $1 < p < \infty$. Per aquest cas hem aconseguit una caracterització completa. Recordem que $h^p(\mathbb{D})$ denota l'espai de les funcions harmòniques en el disc unitat amb valors reals tals que

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty.$$

Teorema 2.2.1. *Sigui $h : (0,1) \to (0,\infty)$ una funció no decreixent tal que $\lim_{r\to 1} h(r) = \infty$. Sigui $a = \{a_n\} \subset \mathbb{D}$ una successió separada tal que $|NT(a)| = 0$. Llavors existeix una funció positiva $u \in h^p(\mathbb{D})$ tal que $u(a_n) \geq h(|a_n|)$ si i només si*

$$\sum_n (h(|a_n|))^p \, |I_n \setminus \bigcup_{j: I_j \subset I_n} I_j| < +\infty.$$

Aquí I_n denota la base del sector diàdic S tal que a_n està a la seva part superior.

Demostració. Suposem primer que existeix una funció positiva $u \in h^p(\mathbb{D})$ tal que $u(a_n) \geq h(|a_n|)$. Recordem que la funció maximal no-tangencial ve definida per

$$M_\alpha u(e^{i\theta}) = \sup_{z\in\Gamma_\alpha(e^{i\theta})} |u(z)|,$$

on $\Gamma_\alpha(e^{i\theta}) = \{z = re^{it} \in \mathbb{D} : |t-\theta| < \alpha(1-r)\}$. Prenent un α_0 suficientment gran, obtenim que si $e^{i\theta} \in I_n$, aleshores $a_n \in \Gamma_{\alpha_0}(e^{i\theta})$, i per tant $M_{\alpha_0}u(e^{i\theta}) \geq h(|a_n|)$. Llavors per $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ es compleix

$$M_{\alpha_0}u(e^{i\theta}) \geq \sum_n h(|a_n|)\chi_{J_n}(e^{i\theta}) := v(e^{i\theta}),$$

on $J_n = I_n \setminus \bigcup_{j:I_j\subset I_n} I_j$. Com que la successió $\{a_n\}$ és separada, donat un I_n hi ha com a molt $c(\delta)$ punts a_{n_k} de la successió tals que $I_{n_k} = I_n$. Aquí δ és la constant de separació. Denotem per $\{J_l\}$ la successió dels conjunts J_n agafats de forma que no hi hagi cap repetició de conjunts. Com que $u \in h^p(\mathbb{D})$, llavors $M_{\alpha_0}u \in L^p(\mathbb{T})$, i per tant la funció $v \in L^p(\mathbb{T})$. Aleshores, com que els J_l són disjunts, obtenim

$$\sum_n h(|a_n|)^p |I_n \setminus \bigcup_{j:I_j\subset I_n} I_j| = \sum_l \big(\sum_{n:I_n=I_l} h(|a_n|)^p\big)|J_l|$$

$$\sum_l \big(\sum_{n:I_n=I_l} h(|a_n|)\big)^p |J_l| = \sum_l \int_{J_l} v(e^{i\theta})^p \, d\theta < +\infty.$$

Per provar el recíproc, definim $u(z)$ com la integral de Poisson de la funció

$$c_0 \sum_n h(|a_n|)\chi_{J_n},$$

on c_0 és una constant a escollir, que defineix una funció harmònica i positiva en el disc unitat ja que $\sum_n h(|a_n|)\chi_{J_n} \in L^1(\mathbb{T})$. Denotem per P_z el nucli de Poisson associat al punt $z \in \mathbb{D}$,

$$P_z(\theta) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$

Anem a veure que $u(a_n) \geq h(|a_n|)$. Igual que abans, denotem $J_n = I_n \setminus \bigcup_{j:I_j\subset I_n} I_j$. Tenim que

$$u(a_n) \geq c_0 \int_{I_n} P_{a_n}(t) \sum_k h(|a_k|)\chi_{J_k}(e^{it})\, dt = c_0 \sum_{k:J_k\subset I_n} h(|a_k|) \int_{J_k} P_{a_n}(t)\, dt.$$

Com que $\int_{J_k} P_{a_n}(t)\, dt \geq \dfrac{C}{1-|a_n|}|J_k|$ si $J_k \subset I_n$ i $h(|a_k|) \geq h(|a_n|)$ si $J_k \subset I_n$, ja que h és una funció creixent, obtenim

$$u(a_n) \geq c_0 \frac{C}{1-|a_n|} h(|a_n|) \sum_{J_k\subset I_n} |J_k|,$$

que pel següent Fet està acotat inferiorment per $\frac{C}{2}c_0 h(|a_n|)$. Per tant, si escollim c_0 prou gran, llavors per tot n es compleix que $u(a_n) \geq h(|a_n|)$.

Fet. $\sum_{J_k\subset I_n} |J_k| = |I_n|$

Prova del Fet. El fet que $|NT(a)| = 0$ és equivalent al fet que $\lim_{n\to\infty} |G_n| = 0$, on G_n són les generacions corresponents a la successió $\{a_k\}$. Llavors, considerant les generacions associades a la successió $\{a_k\} \cap Q(I_n)$, que les denotem per $\mathcal{G}_l^n$, obtenim que $\lim_{l\to\infty} |\mathcal{G}_l^n| = 0$. Aleshores

$$\begin{aligned}
\sum_{k:J_k\subset I_n} |J_k| &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathcal{G}_l^n} |I_k \setminus \bigcup_{j:I_j\subset I_k} I_j| \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} |G_l^n \setminus G_{l+1}^n| = |G_1^n| = |I_n|.
\end{aligned}$$

□

Així doncs, només queda provar que $u \in h^p(\mathbb{D})$. Es compleix que $u \in h^p(\mathbb{D})$ si i només si $\sum_n h(|a_n|)\chi_{J_n} \in L^p(\mathbb{T})$. Ara bé,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \big(\sum_n h(|a_n|)\chi_{J_n}(e^{i\theta})\big)^p\, d\theta = \sum_l \int_{J_l} \big(\sum_n h(|a_n|)\chi_{J_n}(e^{i\theta})\big)^p\, d\theta \\
&= \sum_l \big(\sum_{n:I_n=I_l} h(|a_n|)\big)^p |J_l| \leq c(\delta)^p \sum_l \big(\max\{h(|a_n|) : I_n = I_l\}\big)^p |J_l|
\end{aligned}$$

que està acotat superiorment per $c(\delta)^p \sum_n (h(|a_n|))^p\, |J_n|$, que és finit per hipòtesis. □

Observació. Podem veure a la prova que només fem ús del fet que h és una funció radial creixent per assegurar que $h(|a_k|) \geq h(|a_n|)$ si $I_k \subset I_n$. Així, podem reformular el teorema anterior per funcions no radials.

Teorema 2.2.2. *Sigui $h : \mathbb{D} \to (0, \infty)$ tal que $\lim_{|z| \to 1} h(z) = \infty$. Sigui $a = \{a_n\} \subset \mathbb{D}$ una successió separada tal que $|NT(a)| = 0$. Si existeix una funció positiva $u \in h^p(\mathbb{D})$ amb $u(a_n) \geq h(a_n)$, llavors*

$$\sum_n (h(|a_n|))^p \, |I_n \setminus \bigcup_{j : I_j \subset I_n} I_j| < +\infty. \tag{2.1}$$

Reciprocament, si la funció compleix que $h(a_k) \geq h(a_n)$ per $I_k \subset I_n$, llavors la condició (2.1) implica l'existència d'una funció $u \in h^p(\mathbb{D})$ amb $u(a_n) \geq h(a_n)$.

Recordem que I_n denota la base del sector diàdic S tal que a_n està a la part superior de S.

2.3 Successions thins

Sigui $\{a_k\}$ una successió discreta de punts en el disc unitat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. La següent noció va ser introduida en [37], motivada per problemes de mostreig en els espais de Hardy usuals H^p, $0 < p < \infty$, i també en l'espai H^∞ de funcions analítiques i acotades en el disc unitat $\mathbb{D}$.

Definició. $\{a_k\}$ és (H^∞)-*thin* si i només si existeix una funció $f \in H^\infty$, $f \neq 0$ que compleix

$$\sum_k (1 - |a_k|) |f(a_k)| < \infty.$$

Una successió que no és thin es diu que és *thick*.

Una successió thin és una successió on els valors d'una funció analítica acotada no-trivial poden decréixer suficientment ràpid. Aquest fet és un anàleg feble de la propietat de Blaschke $\sum (1 - |a_k|) < \infty$, en el sentit que les successions per les quals existeix una funció de H^∞ que s'anul.la en els punts de la successió són clarament thins. Ara bé, la classe de successions thins és molt més gran. Restringirem el nostre estudi a les successions $\{a_k\}$ que són separades respecte la distància pseudo-hiperbòlica

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w} z} \right|, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

és a dir, aquelles succesions que satisfan $\inf_{k \neq j} \rho(a_k, a_j) > 0$.

Donat un punt $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ i $\gamma > 0$, denotem per $I_\gamma(a)$ l'arc del cercle unitat centrat en el punt $a/|a|$, de longitud $\gamma(1 - |a|)$. Donada una successió $\{a_k\}$ de punts en el disc unitat, considerem la funció $\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma(\{a_k\})$ donada per

$$\Gamma_\gamma(\xi) = \#\{k\colon \xi \in I_\gamma(a_k)\} = \sum \chi_k(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{T}, \tag{2.2}$$

on χ_k denota la funció característica de l'arc $I_\gamma(a_k)$. També, la funció $\Gamma_\gamma(\xi)$ es pot pensar com el nombre de punts de la successió $\{a_k\}$ en l'angle de Stolz amb vèrtex en $\xi \in \mathbb{T}$, on l'obertura depèn de γ. Observem que la condició de Blaschke es pot expressar en termes de la funció Γ_γ ja que

$$\gamma \sum_k (1 - |a_k|) = \int_{\mathbb{T}} \Gamma_\gamma\,.$$

També, el conjunt de punts d'acumulació no-tangencials $NT(\{a_k\})$ de la successió $\{a_k\}$ i el conjunt $\{\xi \in \mathbb{T}\colon \Gamma_\gamma(\xi) = \infty\}$ només difereixen en un conjunt de mesura zero. Per tant, el Teorema de Hayman també es pot expressar en termes de la funció Γ_γ. El nostre resultat sobre successions thins també està enunciat en aquests termes.

Teorema 2.3.1. *Sigui $\{a_k\}$ una successió separada de punts en el disc unitat. Sigui $\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma(\{a_k\})$ la funció donada per* (2.2).

(a) Si existeix $\gamma > 0$ tal que $\log_+ \Gamma_\gamma \in L^1(\mathbb{T})$, llavors $\{a_k\}$ és thin.

(b) Si $\{a_k\}$ és thin, llavors la funció $\log_+ \Gamma_\gamma$ està a l'espai L^1_d, és a dir, existeix una constant $C = C(\gamma) > 0$ tal que

$$|\{\theta \in [0, 2\pi) : \log_+ \Gamma_\gamma(e^{i\theta}) \geq \lambda\}| \leq C/\lambda, \quad \textit{per tot } \lambda > 0,$$

per tot $\gamma > 0$.

Així, no tenim una caracterització completa de les successions thins i separades. Ara bé, ni la condició suficient (a) ni la condició necessària (b), poden ser millorades si només raonem en termes del tamany de la funció $\Gamma = \Gamma_\gamma$. A més, es compleix que la condició (a) no és necessaria ni la condició (b) és suficient. Un enunciat precís es donarà en el Teorema 2.3.4. Les condicions en el Teorema 2.3.1 poden ser enteses com una versió logarítmica de la condició de Blaschke $\Gamma \in L^1(\mathbb{T})$.

El següent Lema prova que l'estudi de les successions thins i separades es pot reduir al cas de funcions holomorfes i acotades sense zeros, i per tant, és realment un problema sobre funcions harmòniques i positives en el disc unitat. Denotem per P_z el nucli de Poisson associat al punt $z \in \mathbb{D}$,

$$P_z(\theta) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$

Lema 2.3.2. *Si la successió $\{a_k\}$ és thin i separada, llavors existeix una funció holomorfa g en $\mathbb{D}$ prenent valors en el semiplà dret tal que*

$$\sum_k (1 - |a_k|)|e^{-g(a_k)}| < \infty.$$

Demostració. Sigui $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $\|f\|_\infty \leq 1$ i $\sum_k (1 - |a_k|)|f(a_k)| < \infty$. Llavors $f = Bh$, on h no té zeros i B és un producte de Blaschke,

$$B(z) = z^m \prod_k \frac{|b_k|}{b_k} \frac{b_k - z}{1 - \bar{b}_k z},$$

on $b_k \in \mathbb{D}$, $\sum_k (1 - |b_k|) < \infty$. Sigui $\delta = \inf\{\rho(a_k, a_j) \colon k \neq j\} > 0$. Observem primer que per tot k, hi ha com a molt un punt a_j tal que $\rho(b_k, a_j) < \delta/2$. Llavors, per tota funció $f_1 \in H^\infty$,

$$\sum (1 - |a_j|)|f_1(a_j)| \leq C\|f_1\|_\infty \sum_k (1 - |b_k|)\,,$$

on la suma del costat dret es pren sobre els índexs j que compleixen $\rho(a_j, B^{-1}(0)) < \delta/2$ i C és una constant que depèn de δ.

Anem ara a definir una funció holomorfa h_1 en el disc unitat que compleixi $|e^{h_1}(z)| \leq |B(z)|$ per tot punt z tal que $\rho(z, B^{-1}(0)) \geq \delta/2$. Sigui h_1 la única funció holomorfa que compleix $\operatorname{Im} h_1(0) = 0$ i

$$\operatorname{Re} h_1(z) = -c_0 \int_0^{2\pi} P_z(\theta) \sum_k \chi_{J_k}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

on $J_k := (\arg b_k - (1 - |b_k|), \arg b_k + (1 - |b_k|))$, i c_0 és una constant a determinar. Llavors, fent ús de l'estimació $\log x^{-2} \leq C_\delta(1 - x^2)$ si $1 \geq x \geq \delta$, obtenim

$$\begin{aligned} -\log |B(z)|^2 &= -\sum_k \log \left| \frac{b_k - z}{1 - \bar{b}_k z} \right|^2 \\ &\leq C_\delta \sum_k \frac{(1 - |b_k|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{b}_k z|^2}. \end{aligned}$$

Observem que existeix una constant absoluta $c_1 > 0$ tal que per tot $\theta \in J_k$, es compleix

$$|1 - \bar{b}_k z| \geq c_1 |e^{i\theta} - z|.$$

Aleshores l'última suma es pot acotar per

$$c_2 C_\delta \sum_k \int_{J_k} \frac{(1-|z|^2)}{|1-\bar{z}e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{C_\delta c_2}{c_0} \mathrm{Re}\, h_1(z)\,,$$

on $c_2 := 2\pi/c_1^2$. Així podem escollir c_0 prou gran per obtenir la desigualtat desitjada. Separant la suma $\sum(1-|a_j|)|f_1(a_j)|$ en els casos $\rho(a_j, B^{-1}(0)) < \delta/2$ i $\rho(a_j, B^{-1}(0)) \geq \delta/2$, és fàcil veure que la funció $f_1 := he^{h_1} = e^{-g}$ compleix els nostres requeriments. □

Corol.lari 2.3.3. *Sigui $\{z_n\}$ una successió thin i separada. Sigui $0 < m < 1$, i sigui $\{w_n\} \subset \mathbb{D}$ una successió tal que $\rho(z_n, w_n) \leq m$ per tot n. Llavors la successió $\{w_n\}$ és thin.*

Demostració. Sigui g la funció donada pel Lema 2.3.2. La desigualtat de Härnack implica que

$$\mathrm{Re}\, g(w_n) \geq c(m) \mathrm{Re}\, g(z_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Donat que $\rho(z_n, w_n) \leq m$, podem deduïr que $(1 - |w_n|) \leq C(m)(1 - |z_n|)$ per tot n. Llavors

$$\sum_n (1 - |w_n|)|e^{-g(w_n)/c(m)}| \leq C(m) \sum_n (1 - |z_n|)|e^{-g(z_n)}|.$$

□

En aquesta secció pretenem reformular el Teorema 2.3.1 en termes discrets, fent ús de la noció de generacions introduïda anteriorment que també es pot trobar per exemple a [11], pàg. 299. Serà convenient portar el problema de descriure les successions thins al semiplà superior fent ús de l'aplicació de Cayley

$$\Psi(z) := i\,\frac{1-z}{1+z}.$$

La distància pseudo-hiperbòlica en el semiplà superior la seguirem denotant per

$$\rho(z, w) := \left|\frac{z - w}{z - \bar{w}}\right|, \;\; \mathrm{Im}\, z > 0, \;\; \mathrm{Im}\, w > 0.$$

Sigui $\{a_k\}$ una successió de punts en el disc unitat. Donat que la unió finita de successions thins és una successió thin, no perdem generalitat en suposar que $|\arg a_k| \leq \pi/2$. Denotem la successió $\Psi(a_k)$ per a'_k, i observem que la successió $\{a'_k\}$ està continguda en un entorn acotat de l'origen en el semiplà superior. A més, la successió $\{a_k\}$ és thin si i només si la successió $\{a'_k\}$ és thin en el semiplà superior, és a dir, existeix una funció holomorfa i acotada f en el semiplà superior tal que $\sum_k \operatorname{Im} a'_k |f(a'_k)| < \infty$. Per tant, no hi haurà pèrdua de generalitat en considerar successions acotades en el semiplà superior. També, quan no hi hagi confusió possible, i per simplificar la notació, la successió $\{a'_k\}$ també la denotarem per $\{a_k\}$.

Considerem la funció

$$\widetilde{\Gamma} = \sum \chi_{G_n}.$$

No hem aconseguit provar l'equivalència entre les condicions $\log_+ \Gamma(\{a_k\}) \in L^1(\mathbb{R})$ i $\log_+ \widetilde{\Gamma} \in L^1(\mathbb{R})$. Ara bé, la funció $\widetilde{\Gamma}$ és l'eina precisa per provar el Teorema 2.3.1. Una sumació per parts prova que $\log_+ \widetilde{\Gamma} \in L^1(\mathbb{R})$ si i només si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G_n|}{n} < \infty\,.$$

També, la funció $\log_+ \widetilde{\Gamma}$ és de L^1 dèbil si i només si $|G_n| = |\{\log_+ \widetilde{\Gamma} \geq \log n\}| \leq C/\log n$, per tot $n \geq 2$. Llavors el Teorema 2.3.1 serà una conseqüència de

Teorema 2.3.4. *(a) Sigui $\{a_k\}$ una successió separada de punts en el semiplà superior, i siguin $\{G_n\}$ les generacions corresponents. Si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}|G_n| < \infty$, llavors $\{a_k\}$ és thin.*

(b) Donada qualsevol successió no creixent $\gamma_n > 0$ tal que $\sum_{n\geq 1} \frac{\gamma_n}{n} = \infty$, existeix una successió thick i separada $\{a_k\}$ en el semiplà superior tal que $\gamma_n \leq |G_n| \leq \gamma_n + 2^{-n}$, per n prou gran. Aquí $\{G_n\}$ son les generacions corresponents a la successió $\{a_k\}$.

(c) Si $\{a_k\}$ és una successió acotada que és thin i separada, i $\{G_n\}$ són les seves generacions corresponents, llavors existeix una constant $C > 0$ tal que

$$|G_n| \leq C/\log n.$$

(d) Existeix una successió thin i separada $\{a_k\}$ tal que

$$\frac{C^{-1}}{\log n} \leq |G_n| \leq \frac{C}{\log n}$$

on $\{G_n\}$ són les generacions corresponents a la successió $\{a_k\}$ i $C > 1$ és una constant numèrica.

Així, tenim una condició suficient (a) i una condició necessària (c). La part (b) ens diu que la condició suficient no pot ser millorada si només raonem en termes de les quantitats $|G_n|$. Similarment, la part (d) ens diu que la condició necessària en (c) no es pot millorar fent ús de les quantitats $|G_n|$. A més, (d) prova que la condició en (a) no és necessària, i (b) aplicat amb $\gamma_n = (\log n)^{-1}$, prova que la donada en (c) no és suficient.

Acceptant el Teorema 2.3.4 momentàneament, podem provar el Teorema 2.3.1.

Prova del Teorema 2.3.1. Recordem la notació $a'_k = \Psi(a_k)$, on Ψ és l'aplicació de Cayley del disc unitat al semiplà superior. Recordem també que podem suposar que la successió $\{a'_k\}$ és acotada, i que $\{a_k\}$ és thin si i només si també ho és $\{a'_k\}$.

Donat un punt $z = x + iy$ del semiplà superior, recordem la notació

$$I_\gamma(z) := (x - \gamma y, x + \gamma y).$$

Donat $\gamma > 0$, existeixen $0 < \gamma' < \gamma''$ tal que, per tots el punts a_k, es compleix

$$I_{\gamma'}(a'_k) \subset \Psi(I_\gamma(a_k)) \subset I_{\gamma''}(a'_k).$$

Per tant, enlloc de la funció original $\Gamma_\gamma(\{a_k\})$, podem considerar la seva anàloga definida a partir dels intervals $I_{\gamma'}(a'_k)$, que denotem per $\Gamma_{\gamma'}(\{a'_k\})$. Com que la successió $\{a'_k\}$ és acotada, la funció $\Gamma_{\gamma'}(\{a'_k\})$ està suportada en un interval acotat de la recta real.

Anem ara a provar (a). Per tot punt a_k, escollint el n més petit tal que $2^{-n} < \gamma' \mathrm{Im}\, a'_k$, podem assegurar que existeix un $j = j(k)$ tal que $\mathrm{Re}\, a'_k \in I_{n,j} \subset I_{\gamma'}(a'_k) \subset \Psi(I_\gamma(a_k))$. Sigui

$$b'_k := (j + \frac{1}{2})2^{-n} + 2^{-n}i.$$

És fàcil provar que $\rho(b'_k, a'_k) \le m < 1$, on m només depèn de γ. Denotem per I_k l'interval $I_{n,j}$ determinat anteriorment. Clarament

$$\widetilde{\Gamma}(\{b'_k\}) = \sum_k \chi_{I_k} \le \Gamma_{\gamma'}(\{a'_k\}) \le \Gamma_\gamma(\{a_k\}) \circ \Psi^{-1}.$$

Aleshores la hipòtesis implica que $\log_+ \widetilde{\Gamma}(\{b'_k\}) \in L^1(\mathbb{R})$ i la part (a) del Teorema 2.3.4 implica que la successió $\{b'_k\}$ és thin. Donat que $\rho(b'_k, a'_k) \le m$, el Corol.lari 2.3.3 implica que la successió $\{a_k\}$ també és thin.

Provem ara (b). Anem a construir una nova successió thin $\{b'_k\}$ de forma que la corresponent funció $\widetilde{\Gamma}(\{b'_k\})$ domini a $\Gamma_\gamma(\{a_k\}) \circ \Psi^{-1}$.

Primer de tot veiem que ens podem reduïr al cas que per tot $j \in \mathbb{Z}$, la successió $\{a'_k\}$ tingui com a molt un punt en el conjunt $\widetilde{Q}_{n,j} := Q_{n,j-1} \cup Q_{n,j} \cup Q_{n,j+1}$. Donat que existeix $m \in (0,1)$ tal que per tot $a \in Q_{n,j}$, $\widetilde{Q}_{n,j} \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0,\ \rho(z,a) \le m\}$, això es pot aconseguir partint la successió en una unió finita de successions per fer créixer la constant de separació. Observar que el resultat que estem provant és estable per unions finites donat que $\Gamma(\{a_k\} \cup \{b_k\}) = \Gamma(\{a_k\}) + \Gamma(\{b_k\})$.

Ara, per tot $a'_k \in Q_{n,j}$, definim $a_k^{(1)}$ que sigui el "centre" de $Q_{n,j-1}$, és a dir,

$$a_k^{(1)} := \left(j - \frac{1}{2}\right) 2^{-n} + \frac{3}{4}\, 2^{-n} i,$$

i de forma semblant $a_k^{(2)}$ com el "centre" de $Q_{n,j+1}$,

$$a_k^{(2)} := \left(j + \frac{3}{2}\right) 2^{-n} + \frac{3}{4}\, 2^{-n} i.$$

Denotem per $\{b'_k\}_{k\geq 1} = \{a_k\}_{k\geq 1} \cup \{a_k^{(1)}\}_{k\geq 1} \cup \{a_k^{(2)}\}_{k\geq 1}$. La successió $\{b'_k\}$ és separada, i té com a molt un punt en cada $Q_{n,j}$. Tant la successió $\{a_k^{(1)}\}$ com $\{a_k^{(2)}\}$ són thin pel Corol.lari 2.3.3 (ja que $\rho(a'_k, a_k^{(i)}) \leq m$, $i = 1, 2$, per l'observació anterior). Aleshores la successió $\{b'_k\}$ és thin, i per la part (c) del Teorema 2.3.4, la funció $\log_+ \widetilde{\Gamma}(\{b'_k\})$ és de L^1 dèbil.

Per tot γ suficientment petit, podem escollir $\gamma'' < 1$ tal que

$$\begin{aligned} \Psi(I_\gamma(a_k)) \subset I_{\gamma''}(a'_k) &= [\mathrm{Re}\, a'_k - \gamma'' \mathrm{Im}\, a'_k, \mathrm{Re}\, a'_k + \gamma'' \mathrm{Im}\, a'_k) \\ &\subset I_{n,j-1} \cup I_{n,j} \cup I_{n,j+1}. \end{aligned}$$

Aleshores

$$\Gamma_\gamma(\{a_k\}) \circ \Psi^{-1} \leq \Gamma_{\gamma''}(\{b'_k\}) \leq \widetilde{\Gamma}(\{a'_k\}) + \widetilde{\Gamma}(\{a_k^{(1)}\}) + \widetilde{\Gamma}(\{a_k^{(2)}\}) = \widetilde{\Gamma}(\{b'_k\}).$$

Per tractar valors més grans de γ, hauríem d'afegir més successions acompanyants a cada costat de $\{a_k\}$. Els detalls els deixem al lector. $\square$

Finalment, per veure que el Teorema 2.3.1 és òptim, observar que les successions dels exemples (b) i (d) s'han escollit de forma que $\Gamma_{1/2} = \widetilde{\Gamma}$ (i modificacions fàcils d'aquests exemples serviran per obertures diferents).

2.4 Prova del Teorema 2.3.4

Prova de (a). Considerem la funció $\widetilde{\Gamma} = \sum_n \chi_{G_n}$ i l'extensió harmònica en el semiplà superior de $c_0 \log_+ \widetilde{\Gamma}$,

$$H(z) = c_0 \int_{\mathbb{R}} P_z(t) \log_+ \widetilde{\Gamma}(t)\, dt,$$

on c_0 és una constant a escollir, i $P_z(t)$ denota el nucli de Poisson pel semiplà superior,

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}, \quad \text{per } z = x + iy.$$

La hipòtesis ens diu que $\log_+ \widetilde{\Gamma} \in L^1(\mathbb{R})$ i assegura que la funció H està ben definida. Sigui h la funció holomorfa en el semiplà superior tal que $\operatorname{Im} h(i) = 0$ i $\operatorname{Re} h = -H$, i considerem la funció $f = e^h$. Per fer una estimació de $|f(a_k)|$, observem que si $k \in \mathcal{G}_n$, llavors $\widetilde{\Gamma}(t) \geq n$ per tot $t \in I_k := I_{n,j}(a_k)$, i per aquest t es compleix que $P_{a_k}(t) \geq c/|I_k|$, on c és una constant numèrica. Per tant,

$$H(a_k) \geq c_0 \int_{I_k} P_{a_k}(t) \log_+ \widetilde{\Gamma}(t)\, dt \geq 2 \log n,$$

si escollim c_0 prou gran. Aleshores

$$\sum_k \operatorname{Im} a_k |f(a_k)| \leq \sum_n \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{G}_n} \operatorname{Im} a_k \leq \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

□

Prova de (b). Definim una successió en el semiplà superior per

$$a_{n,j} := 2^{-n}(j + 1/2) + 2^{-n} i, \quad 1 \leq j \leq J_n := [2^n \gamma_n], \quad n = 1, 2, \ldots$$

on, només en aquesta prova, $[x]$ denota l'enter més petit que és més gran o igual que el nombre real x. Observar que no hi ha pèrdua de generalitat en suposar que $\gamma_n \leq 1$ per tot n.

Tenim que $a_{n,j} \in Q_{n,j}$ i també

$$\sum_{j=1}^{j=J_n} |I_{n,j}| = 2^{-n} J_n \leq 2^{-(n-1)} J_{(n-1)},$$

que assegura que la generació $\mathcal{G}_n$ està formada exactament pels índexs (n,j) amb $1 \leq j \leq J_n$, i que $|G_n| = 2^{-n} J_n$. Llavors aquesta construcció implica que $\gamma_n \leq |G_n| \leq \gamma_n + 2^{-n}$.

Procedirem per reducció a l'absurd. Pel Lema 2.3.2 sabem que si la successió $\{a_k\}$ fos thin, llavors existiria una funció harmònica i positiva H en el semiplà superior tal que

$$\sum_n \sum_{j=1}^{J_n} 2^{-n} e^{-H(a_{n,j})} < \infty.$$

Ara bé, H es pot escriure com

$$H(z) = cy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \, d\mu(t), \quad z = x + iy \, ,$$

on c és una constant positiva i μ és una mesura positiva de Borel en la recta real tal que

$$\int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^{-1} d\mu(t) < \infty,$$

veure ([11], pàg. 18). Considerem ara la mesura $d\mu_1(t) = \chi_{[-2,+2]}(t) d\mu(t)$, i la funció

$$H_1(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \, d\mu_1(t).$$

Donat que $|\mathrm{Re}\, a_{n,j}| \leq 1$ i $\mathrm{Im}\, a_{n,j} \leq 1$, llavors per tot $t \geq 2$ es compleix

$$P_{a_{n,j}}(t) \leq \frac{9}{\pi} \frac{1}{1+t^2},$$

aleshores, per tots els punts $a_{n,j}$ de la successió,

$$|H_1(a_{n,j}) - H(a_{n,j})| \leq |c| + \frac{9}{\pi} \int \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) \leq C.$$

Per tant, podem canviar H per H_1, que tindrà les mateixes propietats respecte la nostra successió, és a dir,

$$\sum_{n \geq 0} g_n < \infty \, ,$$

on

$$g_n = \sum_{j=1}^{J_n} 2^{-n} e^{-H_1(a_{n,j})}.$$

Així doncs, podem suposar que H ve donada per la integral de Poisson d'una mesura μ amb massa finita suportada en un interval compacte de la recta real.

Observació. *Existeix una constant $C > 0$ tal que, per tots els enters $n \geq 0$ que compleixen $|G_n| \geq 8 \cdot 2^{-n/2}$ i $g_n \leq \frac{1}{n}|G_n|$, es té*

$$\int_{|G_n|/2}^{|G_n|} d\mu(t) \geq C |G_n| \log n.$$

Acceptant aquesta observació, que serà provada més endavant, trobarem una cota per $\sum |G_n|/n$ que acabarà la prova per contradicció. En primer lloc, volem veure que els índexs n que no satisfan les hipòtesis de l'observació, no contribueixen molt en la suma. Definim els següents conjunts d'índexs:

$$E = \{n \geq 0 : |G_n| \geq ng_n\}, \quad F = \{n \geq 0 : |G_n| \geq 8 \cdot 2^{-n/2}\}.$$

Llavors

$$\sum_{n \notin F} \frac{|G_n|}{n} \leq 8 \sum_{n \geq 1} \frac{2^{-n/2}}{n}$$

que és clarament convergent, i

$$\sum_{n \notin E} |G_n|/n \leq \sum_n g_n \,,$$

que convergeix per hipòtesis. Per tant, només cal acotar el terme

$$\sum_{n \in E \cap F} |G_n|/n.$$

Per fer això, reagruparem els termes de forma que el tamany de les generacions decaigui per un factor de com a mínim la meitat d'un grup d'índexs a l'altre. Fixat $N > 0$, definim per inducció decreixent els índexs

$$\begin{aligned} n_1 &:= \max E \cap F \cap \{1, \ldots, N\} \\ n_{k+1} &:= \max \{n \in E \cap F \cap \{1, \ldots, n_k - 1\} : |G_n| > 2|G_{n_k}|\} \,, \end{aligned}$$

on la inducció es para i posem $n_{k+1} = 0$ quan el conjunt on prenem el "màxim" esdevé buit. Llavors, l'Observació ens dóna

$$\begin{aligned} \sum_{n \in E \cap F} \frac{|G_n|}{n} &= \sum_k \sum_{n_{k+1} < n \leq n_k} \frac{|G_n|}{n} \leq 2 \sum_k |G_{n_k}| \log n_k \\ &\leq C^{-1} \sum_k \int_{|G_{n_k}|/2}^{|G_{n_k}|} d\mu(t) \leq C^{-1} \mu(\mathbb{R}) < \infty, \end{aligned}$$

donat que la nostra definició dels índexs n_k's implica que $\frac{1}{2}|G_{n_{k+1}}| > |G_{n_k}|$, i per tant els dominis d'integració donats abans són disjunts. $\square$

Prova de l'Observació. Parlant vagament, la idea d'aquesta prova és que quan el valor de H és gran en un punt, com que ve donat per una integral de Poisson, ha d'haver-hi suficient massa que prové de la mesura μ "a sota"del punt. Donat que la massa total de μ és finita, això ens donarà una restricció en el nombre de punts en una generació donada.

Anem a precisar aquest fet. Per contolar els "efectes frontera" en la convolució amb el nucli de Poisson, volem considerar punts $a_{n,j}$ de forma que la seva part real estigui ben endins de l'interval $(\frac{1}{2}|G_n|, |G_n|)$. Sigui

$$R_n := \{\, j \geq 0 \colon 2^{n-1}|G_n| + 2^{n/2} < j < 2^n|G_n| - 2^{n/2}\}.$$

Recordem que $J_n = 2^n|G_n|$. El fet que $|G_n| \geq 8 \cdot 2^{-n/2}$ ens assegura que $\# R_n \geq J_n/4$. Per $j \in R_n$, es compleix

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}|G_n|}^{|G_n|} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\, d\mu(t) &\geq \int_{j2^{-n}-2^{-n/2}}^{j2^{-n}+2^{-n/2}} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\, d\mu(t) \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\, d\mu(t) - \frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R}) \\ &= H(2^{-n}(i+j)) - \frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Aquí, en la segona desigualtat, hem fet ús de l'estimació

$$P_{2^{-n}(i+j)}(t) \leq \frac{1}{\pi} \quad \text{per} \quad t \notin [j2^{-n} - 2^{-n/2}, j2^{-n} + 2^{-n/2}].$$

Ara volem restringir la nostra atenció als índexs corresponents als punts on els valors de H són suficientment grans, per obtenir el resultat de (2.3) per sumació sobre j (i.e. sobre els punts d'una única generació). La hipòtesis que $|G_n| \geq n g_n$ ens diu que

$$\sum_{j=1}^{J_n} \exp(-H(2^{-n}(i+j))) \leq \frac{J_n}{n}. \tag{2.4}$$

Sigui

$$S_n := \{j \in R_n : e^{-H(2^{-n}(i+j))} \leq \frac{8}{n}\}.$$

La desigualtat de Txebixev aplicada a (2.4) dóna

$$\#\,(R_n \setminus S_n) \leq \frac{J_n/n}{8/n} = J_n/8,$$

i per tant $\# S_n \geq J_n/8$. Llavors per (2.4) obtenim

$$\begin{aligned}\left(\log \frac{n}{8} - \frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R})\right) \frac{J_n}{8} &\leq \sum_{j \in S_n} \int_{\frac{1}{2}|G_n|}^{|G_n|} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\, d\mu(t) \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}|G_n|}^{|G_n|} \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\, d\mu(t) \leq C2^n \int_{\frac{1}{2}|G_n|}^{|G_n|} d\mu(t),\end{aligned}$$

per una estimació explícita de la darrera sèrie. Recordant que $|G_n| = 2^{-n}J_n$, obtenim el resultat desitjat. $\square$

Fet. *Si* $\{a_k\}$ *és una successió acotada que és thin i separada,* $\{G_n\}$ *les seves corresponents generacions i* ϕ *és una funció no creixent de* $[2,\infty)$ *a* $(0,\infty)$ *tal que*

$$\int_2^\infty \frac{\phi(x)}{\log x}\,dx < \infty,$$

llavors $\sum_{n\geq 1} \phi(n)|G_n| < \infty$.

Prova de (c) a partir del fet. Raonarem per reducció a l'absurd i suposarem que la successió de nombres positius $\gamma_n := |G_n|$ no satisfà la conclusió desitjada. Serà suficient provar que, donada una successió no creixent de nombres positius $\{\gamma_n\}$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n \log n = \infty,$$

existeix una funció no creixent ϕ de $[2,\infty)$ a $(0,\infty)$ tal que

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\phi(n)}{\log n} < \infty \quad i \quad \sum_{n\geq 2} \phi(n)\gamma_n = \infty.$$

Definim $\phi(n) = \sum_{k\geq n} \varepsilon_k$, on $\varepsilon_k \geq 0$ són els termes d'una sèrie convergent a determinar. Siguin

$$L(n) := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log k}, \quad i \quad \Gamma(n) := \sum_{k=2}^{n} \gamma_k.$$

Una sumació per parts prova que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\phi(k)}{\log k} = \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k L(k) + \phi(n+1)L(n),$$

i que

$$\sum_{k=2}^{n} \phi(k)\gamma_k = \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k \Gamma(k) + \phi(n+1)\Gamma(n).$$

Donat que $\{\gamma_n\}$ és no creixent, es compleix que $\Gamma(n) \geq n\gamma_n$ i llavors un argument elemental prova que $L(n) \leq Cn/\log n$. Aleshores,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{L(n)} = \infty.$$

Així podem escollir una successió creixent d'enters $\{k_j, j \geq 1\}$ que compleixin $\Gamma(k_j) \geq jL(k_j)$. Considerem ara la successió donada per

$$\varepsilon_{k_j} := \frac{1}{j^2 L(k_j)}, \quad \varepsilon_k = 0 \ \text{ per } k \notin \{k_j, j \geq 1\}.$$

Llavors la sèrie $\sum_k \varepsilon_k$ és convergent,

$$\sum_2^\infty \phi(k)\gamma_k \geq \sum_2^\infty \varepsilon_k \Gamma_k = \infty,$$

i a més

$$\sum_{k=2}^n \frac{\phi(k)}{\log k} \leq \sum_{j:k_j \leq n} \frac{1}{j^2} + L(n) \sum_{j:k_j > n} \frac{1}{j^2 L(k_j} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{j^2} \leq 2.$$

□

Prova del Fet. Tornarem a reagrupar els termes de forma que el tamany de les generacions decaigui per un factor de com a mínim la meitat d'un grup d'índexs a l'altre. Definim per inducció els índexs

$$n_1 := 2,$$
$$n_{k+1} := \min\{n \colon 2|G_n| \leq |G_{n_k}|\}\,.$$

Per tant, $|G_n| \geq |G_{n_k}|/2$ per $n_k \leq n < n_{k+1}$ i $|G_{n_{k+1}}| \leq |G_{n_k}|/2$. Considerem els següents conjunts d'índexs:

$$E_1 = \{k \colon |G_{n_k}| \leq \frac{1}{\log n_{k+1}}\}$$
$$E_2 = \{k \notin E_1 \colon n_{k+1} - n_k \leq \sqrt{n_k}\,\}\,.$$

Aquests corresponen respectivament als índexs on les generacions són molt petites i als que decreixen molt ràpid. Anem a acotar la part de la suma corresponent als índexs $k \in E_1$:

$$\sum_{k \in E_1} \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} |G_n|\phi(n) \leq \sum_{n \geq 2} \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{\phi(n)}{\log n_{k+1}} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{\phi(n)}{\log n} < +\infty\,.$$

Només portarà una mica més de feina acotar la suma pels índexs $k \in E_2$, és a dir, els que $n_{k+1} - n_k \leq \sqrt{n_k}$ and $|G_{n_k}| \geq 1/(\log n_{k+1})$. Del fet que la funció ϕ és no creixent i que

$$\int_2^\infty \frac{\phi(x)}{\log x} dx < \infty\,,$$

podem deduïr que $\phi(x) \leq C(\log x)/x$ per alguna constant C si x és prou gran. Llavors si $k \in E_2$, obtenim

$$\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} |G_n|\phi(n) \leq C|G_{n_k}|\frac{\log n_k}{\sqrt{n_k}}\,.$$

Ara, donat que $(\log n_{k+1})^{-1} \leq |G_{n_k}| \leq 2^{-k}$ i la funció $\log x/\sqrt{x}$ és decreixent per x gran, tenim

$$\sum_{k\in E_2} |G_{n_k}|\frac{\log n_k}{\sqrt{n_k}} \leq C\sum_{k\geq 1}\exp(-C_1 2^{k-1}) < \infty\,,$$

on $C_1 > 0$ és una constant absoluta.

Ara suposem que $k \notin E_1 \cup E_2$. Pel Lema 2.3.2, existeix una funció harmònica i positiva H en el semiplà superior tal que $\sum_n \operatorname{Im} a_n e^{-H(a_n)} < \infty$. Denotem per

$$g_m := \sum_{n\in\mathcal{G}_m} \operatorname{Im} a_n e^{-H(a_n)}\,.$$

Podem suposar que

$$\sum_{n_k}^{n_{k+1}} g_m < 1.$$

Aleshores existeix $l = l(k) \in [n_k, n_{k+1})$ tal que $g_l \leq (n_{k+1} - n_k)^{-1}$. Sigui

$$\mathcal{F}_k := \left\{ n \in \mathcal{G}_l \colon H(a_n) \geq \log\left(\frac{|G_l|}{2}(n_{k+1} - n_k)\right)\right\}\,.$$

Per la desigualtat de Txebixev es compleix

$$\sum_{n\in\mathcal{G}_l, n\notin\mathcal{F}_k} \operatorname{Im} a_n \leq \frac{(n_{k+1} - n_k)}{2}|G_l|g_l \leq \frac{|G_l|}{2}\,.$$

Llavors,

$$\sum_{n\in\mathcal{F}_k} \operatorname{Im} a_n \geq \frac{1}{2}|G_l| \geq \frac{1}{4}|G_{n_k}|.$$

Definirem una subsuccessió de la successió original considerant primer punts corresponents només a les generacions $G_{l(k)}$, llavors ens restringirem a aquells que tenen els índexs en els conjunts $\mathcal{F}_k$, i finalment als dels conjunts

$$\mathcal{S}_k := \{n \in \mathcal{F}_k : \sum_{a_j\in Q(a_n)} \operatorname{Im} a_j \leq N \operatorname{Im} a_n\},$$

on $N > 0$ és una constant que escollirem més endavant. Aquí la suma es pren sobre els punts a_j amb $j \in \mathcal{F}_m$, per algun $m \geq k$; i

$$Q(a_n) := \{x + iy : 0 < y < \operatorname{Im} a_n, |x - \operatorname{Re} a_n| < \operatorname{Im} a_n\} .$$

Aquesta darrera elecció fa que la mesura

$$\mu := \sum_k \sum_{n \in \mathcal{S}_k} \operatorname{Im} a_n \delta_{a_n} ,$$

sigui una mesura de Carleson [11, pàg. 31].

Necessitem veure que, mentre trèiem punts dels conjunts $\mathcal{F}_k$ per assegurar que obteníem una mesura de Carleson, han quedat suficients punts per contar la successió total. La definició de $\mathcal{S}_k$ implica que

$$\sum_{n \in \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{S}_k} \operatorname{Im} a_n \leq \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{S}_k} \sum_{a_j \in Q(a_n)} \operatorname{Im} a_j,$$

que està acotat per

$$\frac{1}{N} \sum_{r > k} \sum_{j \in \mathcal{F}_r} \operatorname{Im} a_j.$$

Com que $|G_{l(k+2)}| \leq |G_{l(k)}|/2$, i a més $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{G}_{l(k)}$, la suma anterior convergeix i està acotada per $\frac{C}{N}|G_{l(k)}|$, on C és una constant absoluta. Prenent $N > 4C$, obtenim

$$\sum_{n \in \mathcal{S}_k} \operatorname{Im} a_n \geq \sum_{n \in \mathcal{F}_k} \operatorname{Im} a_n - \frac{1}{4}|G_{l(k)}| \geq \frac{1}{4}|G_{l(k)}|.$$

Llavors la successió $\{a_n : n \in \mathcal{S}_k\}$ compleix

$$\sum_{n \in \mathcal{S}_k} \operatorname{Im} a_n \geq \frac{1}{8}|G_{n_k}|, \tag{2.5}$$

$$H(a_n) \geq \log\left(|G_l|(n_{k+1} - n_k)/2\right) \quad \text{si} \quad n \in \mathcal{S}_k. \tag{2.6}$$

Donat que $k \notin E_1 \cup E_2$ llavors també $n_{k+1} - n_k \geq \sqrt{n_{k+1}}$. Així si $n \in \mathcal{F}_k$, amb k prou gran, obtenim també

$$H(a_n) \geq C_2 \log n_{k+1}, \tag{2.7}$$

on C_2 és una constant numèrica.

Recordem que $Mf(t)$ denota la funció maximal notangencial de f, és a dir

$$Mf(t) := \sup_{z\in\Gamma_\alpha(t)} |f(z)| ,$$

on $\Gamma_\alpha(t)$ és l'angle de Stolz amb vèrtex t d'obertura α. Ara necessitarem fer ús del següent lema.

Lema 2.4.1. *Sigui h una funció harmònica i positiva en el semiplà superior i sigui ψ : $[0,+\infty) \to (0,+\infty)$ una funció creixent tal que*

$$\int_1^\infty \frac{\psi'(x)}{x} dx < \infty .$$

Llavors $M(\psi \circ h)$ és localment integrable .

Abans de provar el lema acabarem la prova de (c). Recordem que si μ és una mesura de Carleson i $Mf \in L^1(\mathbb{R})$ llavors $f \in L^1(\mu)$ [11, pàg. 32]. Així, per (2.5), (2.7) i el fet que μ és una mesura de Carleson, obtenim

$$\sum_{k\notin E_1\cup E_2} |G_{n_k}|\psi(\log n_{k+1}) \leq 8 \sum_{k\notin E_1\cup E_2} \sum_{n\in\mathcal{S}_k} \operatorname{Im} a_n \psi(H(a_n)/C') < \infty ,$$

per tota funció ψ que compleixi les condicions del Lema 2.4.1. Si prenem

$$\psi(x) = \int_1^{e^x} \phi(t)dt ,$$

per $x \geq 1$, i a més $\psi(x)$ es defineix en $[0, 1)$ de forma que ψ sigui creixent, podem deduïr que

$$\sum_{k\notin E_1\cup E_2} \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} |G_n|\phi(n) < \infty ,$$

que acaba la prova de (c). $\square$

Prova del Lema 2.4.1. Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Observem que

$$\{t \in I : M(\psi \circ h)(t) > \lambda\} = \{t \in I : Mh(t) > \psi^{-1}(\lambda)\} .$$

Llavors

$$\int_I M(\psi \circ h)(t)dt \leq \int_{\psi(1)}^\infty |\{t : Mh(t) > \psi^{-1}(\lambda)\}| d\lambda + \psi(1)|I| .$$

Donat que Mh és de L^1 dèbil [11, pàg. 28], la darrera integral està acotada per un múltiple de

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\psi^{-1}(\lambda)} = \int_0^\infty \frac{\psi'(t)}{t} dt < \infty$$

que prova el Lema. $\square$

Prova de (d). Sigui

$$I_{n,j} := [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}), \quad S_0 := \{a_{n,j}\} := \{\, 2^{-n}(j - \frac{1}{2} + i), 1 \leq j \leq 2^n, n \geq 0 \,\}.$$

Per tant $\operatorname{Re} a_{n,j}$ és el centre de l'interval $I_{n,j}$ i $\operatorname{Im} a_{n,j} = |I_{n,j}| = 2^{-n}$. Observem que els intervals que formen la generació n-èssima de S_0 són $\{I_{n,j}, 1 \leq j \leq 2^n\}$, que formen una partició diàdica de l'interval $[0,1)$. Definim $n_0 := 1$ i

$$n_k := 2^{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tot seguit definirem una subsuccessió S de S_0 juntament amb les seves generacions de forma recursiva. El punt $a_{0,1} \in S$. Això defineix G_1. Per $n_k \leq n < n_{k+1}$, $a_{n,j} \in S$ si i només si $I_{n,j} \subset G_{n_k}$. Així, per $n_k \leq n < n_{k+1}$, es compleix que $|G_n| = |G_{n_k}|$. Per altra banda, les generacions decauen la meitat de la seva longitud total en els índexs n_k. De forma més precisa, si $n = n_{k+1}$, llavors $a_{n,j} \in S$ si i només si $I_{n,j} \subset G_{n_k}$ i j és parell. Per tant $|G_{n_{k+1}}| = |G_{n_k}|/2$, i a més $G_{n_{k+1}}$ està uniformement distribuït en cada interval de l'anterior G_n, és a dir, per $n_k \leq n < n_{k+1}$,

$$|G_{n_{k+1}} \cap I_{n,j}| = \frac{1}{2}|I_{n,j}|.$$

Observem que també

$$|G_{n_k}| = 2^{-k} = \frac{\log 2}{\log n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

i que per $n_k \leq n < n_{k+1}$, es compleix

$$\frac{\log 2}{\log n} \leq |G_n| \leq |G_{n_k}| \leq \frac{2 \log 2}{\log n}.$$

El fet que la successió S és thin s'obtindrà a partir de la següent construcció.

Fet. *Existeix una mesura de probabilitat μ en $[0,1)$ tal que per tot n, i tot interval $I_{n,j}$ de G_n es compleix*

$$\mu(I_{n,j}) = \frac{|I_{n,j}|}{|G_n|}.$$

Prova del Fet. La mesura μ es construeix com a límit feble de les mesures μ_n que definirem tot seguit. Això és anàleg a la construcció clàssica d'una mesura en el conjunt de Cantor: aquí concentrarem la massa uniformement en els intervals de cada generació. Aquest mètode és una versió simplificada de l'utilitzat per provar la necessitat del Teorema sobre minorants essencials de [24]. Sigui

$$\mu_n := \frac{1}{|G_n|} \sum_{j:(n,j)\in\mathcal{G}_n} \chi_{I_{n,j}} m,$$

on m és la mesura de Lebesgue i χ_I és la funció característica de l'interval I. Clarament es veu que μ_n és una mesura de probabilitat i $\mu_n(I_{n,j}) = |I_{n,j}|/|G_n|$ per tot interval $I_{n,j}$ de G_n. El Fet quedarà provat un cop veiem que

$$\mu_n(I_{k,j}) = \frac{|I_{k,j}|}{|G_k|},$$

per tot interval $I_{k,j}$ de G_k, $k \leq n$. La construcció anterior dóna que G_n està uniformement distribuït en tot interval de G_k, $k \leq n$, llavors

$$|G_n \cap I_{k,j}| = \frac{|G_n|}{|G_k|}|I_{k,j}|.$$

Per tant

$$\mu_n(I_{k,j}) = \frac{1}{|G_n|}|G_n \cap I_{k,j}| = \frac{|I_{k,j}|}{|G_k|},$$

i el Fet queda provat. □

Per veure que la successió S és thin, considerem una funció holomorfa f en el semiplà superior tal que

$$\log |f(z)| = -c \int_{\mathbb{R}} P_z(t) d\mu(t).$$

on c és una constant a escollir més endavant. Per $t \in [x-y, x+y]$, es compleix

$$P_{x+iy}(t) \geq \frac{c_0}{y},$$

on c_0 és una constant absoluta. Prenem $c = (2\log 2)/c_0$. Llavors, si $a_{n,j} \in G_n$, aplicant l'estimació anterior a $x + iy = a_{n,j}$, obtenim

$$|f(a_{n,j})| \leq \exp\left(-c\frac{c_0}{|I_{n,j}|}\mu(I_{n,j})\right) = 2^{-\frac{2}{|G_n|}}.$$

Aleshores

$$\sum_{(n,j)} \operatorname{Im} a_{n,j} \, |f(a_{n,j})| \leq \sum_{n} |G_n| \, 2^{-\frac{2}{|G_n|}} = \sum_{k} |G_{n_k}|(n_{k+1} - n_k) \, 2^{-\frac{2}{|G_{n_k}|}} .$$

Com que $|G_{n_k}| = 2^{-k}$ i $n_k = 2^{2^k}$, aquesta última suma convergeix. $\square$

Una altra prova de la condició (c).

Aquesta nova prova està basada en estimacions de mesura harmònica, i és molt més curta que l'anterior. Aquí farem la prova en el disc unitat, on les generacions corresponents es defineixen de forma similar i el paper dels rectangles el fan els sectors amb base un arc diàdic del cercle unitat.

Sigui $\{a_k\}$ una successió separada de punts del disc unitat amb constant de separació $\delta = \inf_{j \neq k} \rho(a_j, a_k)$. Sigui $\Delta_k = \{z : \rho(z, a_k) < \delta/4\}$.

Lema 2.4.2. *Sigui h una funció harmònica i positiva al disc unitat. Llavors*

$$\sum_{k} h(a_{n_k}) \omega(0, \partial\Delta_{n_k}, \mathbb{D} \setminus \cup\Delta_{n_j}) \leq C h(0),$$

per tota subsuccessió $\{a_{n_k}\}$ de la successió separada $\{a_k\}$. Aquí C és una constant absoluta independent de h i de la successió $\{a_k\}$.

Demostració. És una consequència immediata del principi del màxim i de la desigualtat de Härnack. $\square$

Denotem per $S_n = \bigcup_{j \in \mathcal{G}_n} \Delta_j$. Una estimació trivial sobre mesura harmònica ens dóna que $\omega(0, \partial\Delta_j, \mathbb{D} \setminus S_n) \leq C_1(1 - |a_j|)$.

Lema 2.4.3. *Existeix una constant $C_2 > 0$ tal que*

$$\omega(0, \partial S_n, \mathbb{D} \setminus S_n) \geq C_2 |G_n|.$$

Demostració. Pel Lema de Hall (veure [25]), es compleix que

$$\omega(0, \partial S_n, \mathbb{D} \setminus S_n) \geq 2/3 \, \omega(0, (\partial S_n)^{rad}, \mathbb{D}),$$

on A^{rad} denota la projecció radial sobre $\partial\mathbb{D}$ del conjunt $A \subset \mathbb{D}$. Ara bé, com que $\partial S_n = \bigcup_{j \in \mathcal{G}_n} \partial\Delta_j$, i com que tots els Δ_j corresponen a índexs de la mateixa generació, llavors les seves projeccions radials són disjuntes. Així

$$(\partial S_n)^{rad} = \bigcup_{j \in \mathcal{G}_n} (\partial\Delta_j)^{rad},$$

i per tant

$$\omega(0,(\partial S_n)^{rad},\mathbb{D}) = c_0|(\partial S_n)^{rad}| = C_2|G_n|,$$

ja que $|(\partial\Delta_j)^{rad}| \sim (1-|a_j|)$. □

El següent Lema és el resultat clau per a la prova de la part (c) del Teorema.

Lema 2.4.4. *Sigui $\{a_k\}$ una successió separada de punts en el disc unitat $\mathbb{D}$. Aleshores existeix un subconjunt d'índexs $\mathcal{A}_n$ de $\mathcal{G}_n$ tal que*

(a) $\displaystyle\sum_{j\in\mathcal{A}_n}(1-|a_j|) \geq C_3|G_n|$.

(b) $\omega(0,\partial\Delta_j,\mathbb{D}\setminus S_n) \geq C_4(1-|a_j|), \ \ \forall j \in \mathcal{A}_n$.

Demostració. Definim

$$\mathcal{A}_n = \big\{j \in \mathcal{G}_n : \omega(0,\partial\Delta_j,\mathbb{D}\setminus S_n) \geq \frac{C_2}{2}(1-|a_j|)\big\},$$

on C_2 és la constant obtinguda en el Lema 2.4.3. Així, pel Lema 2.4.3 tenim

$$C_2|G_n| \leq \omega(0,S_n,\mathbb{D}\setminus S_n) = \sum_{j\in\mathcal{A}_n}\omega(0,\partial\Delta_j,\mathbb{D}\setminus S_n) + \sum_{j\in\mathcal{G}_n\setminus\mathcal{A}_n}\omega(0,\partial\Delta_j,\mathbb{D}\setminus S_n)$$

que està acotat superiorment per

$$\frac{2C_1-C_2}{2}\sum_{j\in\mathcal{A}_n}(1-|a_j|) + \frac{C_2}{2}|G_n|.$$

Així obtenim el resultat amb $C_3 = \frac{C_2}{2C_1-C_2} > 0$ ja que $C_1 > C_2$. □

Com que la successió $\{a_k\}$ és thin i separada, pel Lema 2.3.2, existeix una funció u harmònica i positiva en el disc unitat tal que $\displaystyle\sum_j(1-|a_j|)e^{-u(a_j)} < \infty$. Denotem per $g_n := \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{G}_n}(1-|a_j|)e^{-u(a_j)}$. És suficient provar el resultat pels n tals que $g_n \leq 2/n$, ja que per $n \geq 3$, existeix $k = k(n)$ amb $[n/2] \leq k \leq n$ tal que $g_k \leq 2/k$, i llavors si $(\log k)|G_k| \leq M_1$, deduïm que

$$(\log n)|G_n| \leq 3(\log(n/2))|G_k| \leq 3(\log k)|G_k| \leq 3M_1.$$

Podem suposar a més que $|G_n| \geq 1/\sqrt{n}$. Definim el conjunt d'índexs

$$\mathcal{F}_n = \{j \in \mathcal{A}_n : u(a_j) \geq \log(n|G_n|C/4)\}.$$

Per la desigualtat de Txebixev, obtenim que

$$\sum_{j\in\mathcal{F}_n}(1-|a_j|)\geq\frac{C}{2}|G_n|.$$

Aleshores,

$$(\log n)\,|G_n|\leq\frac{2}{C}\sum_{j\in\mathcal{F}_n}(\log n)\,(1-|a_j|)\leq C_5\sum_{j\in\mathcal{F}_n\subset\mathcal{A}_n}u(a_j)(1-|a_j|),$$

que pel Lema 2.4.4, està acotat per

$$C_6\sum_{j\in\mathcal{F}_n}u(a_j)\omega(0,\partial\Delta_j,\mathbb{D}\setminus S_n).$$

Aplicant el Lema 2.4.2, la darrera suma està acotada per $M_2\,u(0)$, i per tant $(\log n)|G_n|\leq M_2\,u(0)$.

2.5 Conjunts invariantment thin

Recordem que, per un cèlebre resultat de L. Carleson (veure [3]), una successió $\{a_k\}$ és separada i ïnvariantment Blaschke", és a dir,

$$\sup\sum_k\left(1-|\phi(a_k)|^2\right)<\infty,$$

(on el suprem es pren sobre tots els automorfismes ϕ del disc unitat en ell mateix), si i només si és una successió d'interpolació per H^∞, és a dir, si per tota successió acotada $\{w_k\}$ de nombres complexos, existeix una funció $f\in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que $f(a_k)=w_k$, $k=1,2,\ldots$.

Fent ús de la identitat

$$1-|\phi_\alpha(a_k)|^2=\frac{(1-|a_k|^2)(1-|\alpha|^2)}{|1-\bar{a}_k\alpha|^2},$$

on ϕ_α és l'automorfisme del disc unitat en ell mateix que intercanvia el 0 i el punt $\alpha\in\mathbb{D}$, el fet geomètric que $\{a_k\}$ és separada i invariantment Blaschke es pot reformular dient que

$$\inf_k\prod_{j:j\neq k}|\phi_{a_k}(a_j)|>0,$$

que és la formulació usual del teorema de Carleson (veure [11, pàg. 284-287] per condicions equivalents).

La condició que una successió $\{a_k\}$ sigui invariantment Blaschke també es pot expresar en termes de que la mesura

$$\mu = \sum (1 - |a_k|)\delta_k$$

(on δ_k denota la Delta de Dirac en el punt a_k) sigui una mesura de Carleson , és a dir, que

$$\mu(Q) < C\, l(Q)$$

per tot Q de la forma

$$Q = \{re^{i\theta} \colon 0 < 1 - r < l(Q)\,, \quad |\theta - \theta_0| < l(Q)\}\,.$$

Una caracterització equivalent és que per tot $p \in (0, \infty)$ i per tota funció $f \in H^p(\mathbb{D})$,

$$\sum (1 - |a_k|)|f(a_k)|^p = \int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu \leq C(\mu)\|f\|^p_{H^p}.$$

Aquesta condició es pot comparar amb el fet que quan una successió $\{a_k\}$ és thin, *existeix* una funció $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $\sum (1 - |a_k|)|f(a_k)|^p < \infty$ (veure [11, pàg. 33] i [11, pàg. 239]).

Aleshores és natural preguntar-se què passa si demanem a una successió de punts que sigui invariantment thin. L'expressió per $1 - |\phi_\alpha(a_k)|^2$ donada anteriorment, implica que la imatge sota qualsevol automorfisme d'una successió thin, encara seguirà essent una successió thin; llavors podem definir ïnvariantment thin"per la propietat més forta de demanar que existeixi una funció analítica i acotada no-trivial $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$\sup \sum (1 - |\phi(a_k)|)|f(\phi(a_k))| < \infty\,,$$

on el suprem es pren sobre tots els automorfismes ϕ que van del disc unitat en ell mateix.

Un fet sorprenent és que, mentre que les successions invariantment Blaschke tenen el mateix comportament quantitatiu que les successions de Blaschke i només estan més ben uniformement distribuides, i mentre que les successions thins és una classe de successions molt més gran que les successions de Blaschke, el nostre pas de "thin"a ïnvariannment thin", en el cas de successions separades, ens redueix a la mateixa classe que les successions invariantment Blaschke.

Teorema 2.5.1. *Tota successió invariantment thin i separada és d'interpolació.*

Prova. Sigui $\{a_k\}$ una successió separada invariantment thin. Sigui $f \in H^\infty$, $||f||_\infty < 1$, $f(0) \neq 0$ que compleixi

$$\sup \sum (1 - |\phi(a_k)|)\, |f(\phi(a_k))| < 1\,,$$

on el suprem es pren sobre tots els automorfismes ϕ del disc unitat en ell mateix. Suposem que la successió $\{a_k\}$ no és d'interpolació, és a dir, la mesura $\sum(1-|a_k|)\delta_k$ no és de Carleson. Aquestes successions també es poden descriure en termes de generacions (veure [11, pàg. 200]).

Donat un punt a_k de la successió amb $k \in \mathcal{G}_j$, denotarem per $\mathcal{G}_1(a_k)$ els índexs $l \in \mathcal{G}_{j+1}$ tals que $I_l \subset I_k$. Donat un punt a_l amb $l \in \mathcal{G}_1(a_k)$, considerem $\mathcal{G}_1(a_l)$ i definim

$$\mathcal{G}_2(a_k) = \bigcup_{l \in \mathcal{G}_1(a_k)} \mathcal{G}_1(a_l)\,.$$

Les següents generacions es defineixen de forma recursiva,

$$\mathcal{G}_{n+1}(a_k) = \bigcup_{l \in \mathcal{G}_n(a_k)} \mathcal{G}_1(a_l)\,.$$

Llavors, si la mesura μ no és de Carleson, existeix un número positiu $\eta > 0$, una subsuccessió $\{b_j\}$ de la successió $\{a_k\}$ i una successió $\{m(j)\}$ de números positius, amb $m(j) \to \infty$ quan $j \to \infty$, tal que

$$\sum_{a_k \in \mathcal{G}_n(b_j)} (1-|a_k|) \geq \eta(1-|b_j|)\,, \quad n = 1, \ldots, m(j)\,, \tag{2.8}$$

per tot j. En particular, es compleix que

$$\frac{1}{1-|b_j|} \sum_{a_k \in Q(b_j)} (1-|a_k|) \to \infty \quad \text{as} \quad j \to \infty\,.$$

Aquí $Q(b_j) = \{re^{i\theta} \colon 0 < 1-r < 2(1-|b_j|)\,, |\theta - \arg b_j| < 2(1-|b_j|)\}$.

Ara, considerant l'automorfisme ϕ que envia b_j a l'origen, podem veure que per un $\varepsilon > 0$ fix es compleix, si j és prou gran,

$$\sum_{a_k \in \mathcal{F}} (1-|a_k|) \geq \frac{1}{2} \sum_{a_k \in Q(b_j)} (1-|a_k|)\,.$$

Aquí $\mathcal{F} = \mathcal{F}(b_j, \varepsilon)$ és la família de punts $a_k \in Q(b_j)$, $a_k \neq b_j$, tal que $|f(\phi(a_k))| < \varepsilon$. Considerem ara la subfamília $\mathcal{G} = \mathcal{G}(b_j, \varepsilon)$ de $\mathcal{F}$ formada pels punts $a_k \in \mathcal{F}$ tals que

$$|f(\phi(z))| < \varepsilon\,,$$

per tot z del disc $D_k = \{z \in \mathbb{D} \colon d(z, a_k) < 1/2\}$. Per $\varepsilon > 0$ fix, es compleix

$$\frac{1}{1-|b_j|} \sum_{\mathcal{G}} (1-|a_k|) \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty \tag{2.9}$$

Aquesta estimació es segueix de

$$\frac{1}{1-|b_j|}\sum_{a_k\in\mathcal{F}}(1-|a_k|)\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\infty\,,$$

el fet que si $a_k\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}$ i $g=f\circ\phi$, llavors existeix z_k amb $d(z_k,a_k)\le\frac{1}{2}$ tal que

$$|g'(z_k)|(1-|z_k|)>\varepsilon.$$

i del següent lema, que és una petita variació d'un resultat de [36].

Lema 2.5.2. *Sigui f una funció de BMOA, és a dir, una funció analítica f en el disc unitat $\mathbb{D}$ complint que*

$$\mu=|f'(w)|^2(1-|w|)dm(w)$$

és una mesura de Carleson, i sigui $||f||_*^2$ l'ínfim dels números positius $C>0$ tals que $\mu(Q)\le C\,l(Q)$, per tot rectangle de Carleson Q. Donat $\eta>0$, sigui $A=A(f,\eta)$ el conjunt dels punts $z\in\mathbb{D}$ de forma que existeix w amb $d(w,z)\le 1/2$ tal que

$$|f'(w)|(1-|w|)\ge\eta\,.$$

Llavors la mesura $\sigma=(1-|z|)^{-1}\chi_A(z)dm(z)$ és una mesura de Carleson i

$$\sigma(Q)\le C\frac{||f||_*^2}{\eta^2}l(Q)\,,$$

per tot "rectangle" $Q:=\{re^{i\theta}:0<1-r<l(Q),|\theta-\theta_0|<l(Q)\}$. Aquí C és una constant numèrica.

Acceptem el Lema 2.5.2 (i per tant, també (2.9)) temporalment. El Lema 2.5.2 i (2.8) també ens donen que per j prou gran, existeix $n(j)$ amb $1\le n(j)\le m(j)$, tal que

$$\sum_{\alpha(j)}(1-|a_k|)\ge\frac{\eta}{2}(1-|b_j|)\,,$$

on $\alpha(j)$ és el conjut de punts $a_k\in\mathcal{G}_{n(j)}(b_j)$ que també estan en la família $\mathcal{G}$. Ara, denotant per $\mathcal{M}=\mathcal{M}(j)$ el conjunt d'índexs k corresponents als punts $a_k\in\alpha(j)$, obtenim

$$\omega(b_j,\bigcup_{\mathcal{M}}\partial D_k\,,\mathbb{D}\setminus\bigcup_{\mathcal{M}}D_k)\ge C(\eta)>0\,,$$

on $C(\eta)$ és una constant que només depèn de η. Aquí $\omega(z,E,\Omega)$, $E\subset\partial\Omega$, denota la mesura harmònica des del punt $z\in\Omega$ del conjunt E en el domini Ω. Donat que

$|f(\phi(z))| < \varepsilon$ per tot punt $z \in D_k$ si $a_k \in \mathcal{G}$, i a més $\log|f \circ \phi|$ és una funció subharmònica negativa , deduïm que

$$\log|f(\phi(z))| < (\log\varepsilon)\omega(z, \bigcup_{\mathcal{M}} \partial D_k, \mathbb{D} \setminus \bigcup_{\mathcal{M}} D_k)$$

per tot punt $z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{\mathcal{M}} D_k$. Prenent $z = b_j$, obtenim

$$|f(0)| < \varepsilon^{C(\eta)}\,,$$

que porta a contradicció. $\square$

Prova del Lema 2.5.2. Per tot punt $z \in A$, considerem $D(z) = \{w \in \mathbb{D} \colon d(w,z) \leq 3/4\}$. Observem que per $z \in A$, per subharmonicitat obtenim que

$$\frac{C\eta^2}{(1-|z|)^2} \leq \frac{1}{m(D(z))} \int_{D(z)} |f'(w)|^2 \, dm(w)\,,$$

on C és una constant numèrica. Per tant, per tot $z \in A$, es compleix

$$C\eta^2(1-|z|) \leq \int_{D(z)} |f'(w)|^2 (1-|w|)\, dm(w)\,. \tag{2.10}$$

Ara, aplicant el Lema de recobriment de Besicovich obtenim una família de discos $D(z_j)$, $z_j \in A$, amb $A \subset \bigcup_j D(z_j)$ tal que

$$\sum_j \chi_{D(z_j)} \leq N\,,$$

on N és una constant fixa. Llavors si Q és un "rectangle", obtenim

$$\sigma(Q) \leq C_1 \sum_{z_j \in 4Q} (1-|z_j|)\,.$$

Sigui $\mathcal{A}$ la família dels punts $z_j \in 4Q$. Llavors, fent ús de (2.10), s'obté

$$\begin{aligned}\sigma(Q) &\leq \frac{C_1}{C\eta^2} \sum_{\mathcal{A}} \int_{D(z_j)} |f'(w)|^2 (1-|w|) dm(w) \\ &\leq \frac{C_1 N}{C\eta^2} \int_{4Q} |f'(w)|^2 (1-|w|) dm(w)\end{aligned}$$

i això acaba la prova. $\square$

2.6 Minorants essencials

Lyubarskii i Seip ([24]) diuen que una funció no creixent g de $[0,1)$ a $(0,\infty)$, que tendeix a 0 quan x tendeix a 1, és un *minorant essencial* per H^∞ si i només si donada qualsevol successió separada no-Blaschke $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$, tota funció $f \in H^\infty$ verificant que $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$ és idènticament nul.la. Lyubarskii i Seip van provar que aquestes funcions g vénen caracteritzades per la condició

$$\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)\log\frac{1}{g(r)}} < \infty.$$

Similarment, una funció no creixent g de $[0,1)$ a $(0,\infty)$ és un *minorant essencial en conjunts thicks* per H^∞ si i només si donada qualsevol successió thick i separada $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$, tota funció $f \in H^\infty$ verificant que $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$ és idènticament nul.la.

La següent caracterització dels minorants essencials en conjunts thicks ha estat donada per A. Borichev, completant un argument de P. Thomas i J. Pau.

Teorema 2.6.1. *(Borichev)*
Una funció no creixent g de $[0,1)$ a $(0,\infty)$ és un minorant essencial en conjunts thicks si i només si

$$\liminf_{r\to 1} \frac{|\log g(r)|}{\log|\log(1-r)|} > 0.$$

Abans de provar aquest Teorema, donem una observació senzilla que serà de gran ajuda per la prova de la suficiència de la condició del Teorema.

Lema 2.6.2. *Suposem que existeix $\alpha > 0$ tal que*

$$\int_0^1 \frac{g(r)^\alpha dr}{1-r} < \infty. \tag{2.11}$$

Llavors g és un minorant essencial en conjunts thicks.

Prova del Lema 2.6.2. Primer de tot, observem que si g és un minorant essencial en conjunts thicks i $\alpha > 0$, llavors g^α també ho és. En efecte, quan $\alpha \geq 1$, es compleix que $g(r)^\alpha \leq g(r)$ per r prou proper a 1, i per tant, la propietat és immediata. Suposem que $\alpha < 1$ i que $|f(z)| \leq g(|z|)^\alpha$ per tot z en algun conjunt thick, on $f \in H^\infty$. Llavors, per tot enter $m \geq 1/\alpha$, $f^m \in H^\infty$, $|f(z)|^m \leq g(|z|)$, per tant $f^m \equiv 0$. Així doncs, $f \equiv 0$. Això ens diu que podem suposar que

$$\int_0^1 \frac{g(r)dr}{1-r} < \infty.$$

Sigui ara $\{a_k\}$ una successió thick i separada i $f \in H^\infty$ de forma que $|f(a_k)| \le g(|a_k|)$ per $k = 1, 2, \ldots$. Llavors

$$\sum_k (1-|a_k|)|f(a_k)| \le \sum_k (1-|a_k|)\, g(|a_k|)\,.$$

Sigui D_k el disc hiperbòlic de centre a_k i radi $\delta > 0$. Prenent $\delta > 0$ prou petit, podem suposar que els discos $\{D_k\}$ són dos a dos disjunts. Llavors, la darrera suma es pot acotar per un múltiple de

$$\sum_k \int_{D_k} \frac{g(|z|)}{1-|z|}\, dm(z) \le \int_{\mathbb{D}} \frac{g(|z|)}{1-|z|}\, dm(z)\,.$$

Per tant, la condició integral de g ens dóna que f ha de ser idènticament nul.la. Això prova el Lema. $\square$

Prova del Teorema 2.6.1. Ara, donada una funció g que compleixi la condició del teorema, és elemental veure que compleix la condició del Lema per $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} < \liminf_{r\to 1} \frac{|\log g(r)|}{\log|\log(1-r)|}.$$

Així doncs, g és un minorant essencial en conjunts thicks.

Per provar el recíproc, treballarem en el semiplà superior, amb la partició diàdica donada en la Secció 2. Suposem que la funció g compleix

$$\liminf_{r\to 1} \frac{|\log g(r)|}{\log|\log(1-r)|} = 0\,.$$

Serà convenient suposar que la funció g que mesura el decreixement de f depèn de $y = \operatorname{Im} z$ i que és constant en quadrats de Whitney. Especifiquem això, definim

$$\beta_n := -\inf\{\log g(\Psi^{-1}(x+iy)) : -1 \le x \le 1, 2^{-n-1} < y \le 2^{-n}\},$$

on Ψ és l'aplicació de Cayley (veure Secció 2). Llavors tenim que β_n creix cap a ∞, i que per algun $C_1 > C_2 > 0$,

$$g(1 - C_1 2^{-n}) \ge e^{-\beta_n} \ge g(1 - C_2 2^{-n})\,,$$

i aleshores

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\log n} = 0\,.$$

Si podem trobar una funció f holomorfa i acotada en el semiplà superior i una successió thick de punts $a_{n,j}$, amb $\operatorname{Im} a_{n,j} = 2^{-n}$, de forma que $|f(a_{n,j})| \leq \exp(-\beta_n)$, llavors g no serà un minorant essencial.

La successió $a_{n,j}$ es construirà (i es provarà que és thick) seguint les línees generals de la prova de la part (b) del Teorema 2.3.4. Escollim una successió creixent d'enters n_k tals que

$$n_{k+1} > n_k^3 \quad \text{i} \quad \frac{\beta_{n_k}}{\log n_k} \leq 2^{-k}\,.$$

Definirem les longituds l_k com múltiples de $2^{-[\sqrt{n_k}]-1}$ que siguin propers a $(\log n_k)^{-1}$, és a dir,

$$l_k := 2^{-[\sqrt{n_k}]-1} \left[\frac{2^{[\sqrt{n_k}]+1}}{\log n_k} \right].$$

Aquí, $[\cdot]$ denota la part entera d'un nombre real. Observem que, per k prou gran, es compleix que $0 < l_{k+1} < l_k/2$. Sigui

$$a_{n,j} = 2^{-n}j + 2^{-n}i, \quad 0 \leq j < 2^n l_k, \quad \text{per} \quad n \in \mathcal{J}_k := \{[\sqrt{n_k}] + 1, \ldots, n_k\}\,;$$

això garanteix que la unió dels intervals diàdics $I_{n,j}$ corresponents a un "nivell"$n \in \mathcal{J}_k$ serà l'interval $[0, l_k)$. Observem que aquí, els punts del nivell n, és a dir, els que tenen part imaginària igual a 2^{-n}, no constitueixen la generació n-èssima, degut als canvis que hem introduït. Per tant, haurem d'adaptar la prova de la part (b) del Teorema 2.3.4 per provar que la successió és thick.

Escollim ara una funció holomorfa f que estarà acotada en mòdul per $g \circ \Psi^{-1}$ en els punts de la successió $a_{n,j}$ demanant que $f(i) > 0$ i que $|f| = e^{-H}$, on H és la integral de Poisson dels valors frontera

$$H^*(x) := c_0 \sum_k \beta_{n_k} \chi_{(l_{k+1}, l_k]}(x)\,,$$

on $c_0 > 0$ és una constant a escollir. La funció H^* és integrable en la recta real ja que

$$\sum_k \beta_{n_k}(l_k - l_{k+1}) \leq \sum_k \beta_{n_k} l_k \leq \sum_k \frac{\beta_{n_k}}{\log n_k} < \infty\,,$$

per l'el.lecció dels n_k. Donat que $H^*(x) \geq c_0 \beta_{n_k}$ per $x \in (0, l_k]$, i que per $n \in \mathcal{J}_k$ tenim $\operatorname{Im} a_{n,j} = 2^{-n} \leq l_k$, una estimació fàcil de mesura harmònica ens dóna que, per $0 \leq j < 2^n l_k$,

$$H(a_{n,j}) \geq c c_0 \beta_{n_k} > \beta_{n_k} \geq \beta_n\,,$$

per c_0 ben triat. Llavors $|f(a_{n,j})| \leq e^{-\beta_n}$, tal com es demanava.

Per provar que la successió $\{a_{n,j}\}$ és thick, com en la prova de la part (b) del Teorema 2.3.4, serà suficient veure que no hi ha cap mesura positiva finita μ en la recta real tal que si

$$S(z) := \int_{\mathbb{R}} P_z(t)d\mu(t)\,,$$

llavors

$$\sum_n 2^{-n} \sum_j \exp\left(-S(a_{n,j})\right) < \infty\,.$$

Suposem que S satisfà aquestes propietats. Per $n \in \mathcal{J}_k$, sigui

$$\sigma_n := \sum_{j=0}^{2^n l_k - 1} \exp\left(-S(a_{n,j})\right)\,.$$

Considerem el conjunt d'índexs

$$K := \{k : \forall n \in \mathcal{J}_k, \sigma_n \geq \frac{l_k}{n}\}\,.$$

Fet. *Existeix una constant* $C > 0$ *tal que, per tot* $k \notin K$ *prou gran, es compleix*

$$\int_{l_k/2}^{l_k} d\mu(t) \geq C l_k \log n_k.$$

Acceptant el fet, podem acabar la prova. En efecte, per les nostres hipòtesis i la definició del conjunt K,

$$\infty > \sum_n \sigma_n \geq \sum_{k \in K} \sum_{n \in \mathcal{J}_k} \frac{l_k}{n} \geq c \sum_{k \in K} l_k \log n_k\,.$$

Donat que la sèrie $\sum_k l_k \log n_k$ és divergent, s'ha de complir que

$$\infty = C \sum_{k \notin K} l_k \log n_k \leq \int_0^1 d\mu(t)\,,$$

que és una contradicció. $\square$

Prova del Fet. El fet que $k \notin K$ ens diu que podem fixar algun $n \in \mathcal{J}_k$ tal que $\sigma_n < l_k/n$. Sigui

$$S_n := \left\{ j \in \{0, \ldots, 2^n l_k - 1\} : \exp\left(-S(a_{n,j})\right) \leq \frac{4}{n} \right\}\,.$$

Llavors, per la desigualtat de Txebixev,

$$\#\left(\{0,\ldots,2^n l_k-1\}\setminus S_n\right)\le \frac{l_k/n}{2^{-n}4/n}=\frac{2^n l_k}{4}\,,$$

i llavors $\#S_n \ge (3/4)2^n l_k$. A més a més, per k prou gran, i tot $n\in\mathcal{J}_k$, es compleix

$$l_k \ge 8\cdot 2^{-\frac{1}{2}[\sqrt{n_k}]}\ge 8\cdot 2^{-\frac{n}{2}}\,.$$

Així doncs, els "efectes fronterers" no porten molts problemes:

$$\#S'_n := \#\left(S_n\cap[\frac{1}{2}2^n l_k; 2^n l_k - 2^{\frac{n}{2}}]\right)\ge \frac{1}{8}2^n l_k\,.$$

Ara acabarem la prova del Fet com en la seva contrapartida en la prova de la part (b) del Teorema 2.3.4. Per $j\in S'_n$, es compleix

$$\int_{l_k/2}^{l_k} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\,d\mu(t)\ge \int_{j2^{-n}-2^{-n/2}}^{j2^{-n}+2^{-n/2}} P_{2^{-n}(i+j)}(t)\,d\mu(t)\ge S(2^{-n}(i+j))-\frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R})\,.$$

Sumant sobre tots els $j\in S'_n$, i recordant que per $j\in S_n$, es compleix que $S(2^{-n}(i+j))\ge \log(n/4)$, obtenim

$$C2^n\int_{l_k/2}^{l_k} d\mu(t)\ge \frac{1}{8}2^n l_k\left(\log\frac{n}{4}-\frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R})\right)\,.$$

Llavors

$$\int_{l_k/2}^{l_k} d\mu(t)\ge C_1 l_k\log n\ge \frac{C}{2}l_k\log\sqrt{n_k}\ge C' l_k\log n_k\,,$$

on C_1 és una constant numèrica. □

2.7 Observacions

Encara queda obert el problema d'obtenir una caracterització geomètrica de les successions thins i separades. El Teorema 2.3.4 ens diu que aquesta descripció no es pot obtenir en termes de longituds de generacions. Ara bé, els arguments donats, aplicats a la següent subàlgebra de H^∞, donen un resultat satisfactori.

Sigui A el conjunt de funcions analítiques i acotades en el disc unitat $\mathbb{D}$ que es poden posar com $f=Bh$, on B és un producte de Blaschke, h no té zeros i $M(\log h)\in L^1(\partial\mathbb{D})$, on M és la funció maximal notangencial.

Teorema 2.7.1. *Sigui $\{a_k\}$ una successió separada de punts en el disc unitat i siguin $\{G_n\}$ les corresponents generacions. Llavors, existeix una funció $f \in A$, $f \neq 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)|f(a_k)| < \infty$$

si i només si

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|G_n|}{n} < \infty\,.$$

La suficiència es segueix de la condició (a) del Teorema 2.3.4 i la prova de (c) (amb $\psi(x) = x$) dóna la necessitat.

Bibliografia

[1] Amar, E., Bruna, J., Nicolau, A.: *On H^p-solutions of the Bezout equation*, Pacific J. Math., 171 (1995), 297-307

[2] Bourgain, J.: *On finitely generated closed ideals in $H^\infty(\mathbb{D})$*, Ann. Inst. Fourier, 35 (1985), 163-174

[3] Carleson, L.: *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. 80 (1958), 912-930

[4] Carleson, L.: *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. 76 (1962), 547-559

[5] Cegrell, U.: *A Generalization of the Corona Theorem in the unit disc*, Math. Z. 203 (1990), 255-261

[6] Cegrell, U.: *Generalisations of the Corona Theorem in the unit disc*, Proc. Roy. Irish Acad. 94 (1994), 25-30

[7] Cima, J.A., Taylor, G.: *On the equation $f_1g_1 + f_2g_2 = 1$ in H^p*, Illinois J.Math, 11 (1967), 431-438.

[8] Dahlberg, B.: *Approximation by harmonic functions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30-2 (1980), 97-101

[9] Duren, P.: *Theory of H^p-spaces*, Academic Press, New York, 1970

[10] Gamelin, T.W.: *Wolff's proof of the corona theorem*, Israel J. Math. 37 (1980), 113-119

[11] Garnett, J.B.: *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, 1981

[12] Gardiner, S.J.: *Harmonic Approximation*, London Math. Soc. Lecture Note Series 221 (1995)

[13] Gorkin, P.: *Functions not vanishing on trivial Gleason parts of Douglas algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 1086-1090

[14] Gorkin, P., Mortini, R., Nicolau, A.: *The generalized corona theorem*, Math. Ann. 301 (1995), 135-154

[15] Gorkin, P., Mortini, R.: *Higher order hulls in H^∞*, manuscrit no publicat

[16] Gorkin, P., Izuchi, K., Mortini, R.: *Higher order hulls in H^∞ II*, J. Funct. Anal. 177 (2000), n1, 107-129

[17] Hayman, W.: *Identity theorems for functions of bounded characteristic*, J. London Math. Soc. (2) 58 (1998), 127-140

[18] Hoffman, K.: *Bounded analytic functions and Gleason parts*, Ann. of Math. 86 (1967), 74-111

[19] Jones, P.: *Bounded holomorphic functions with all level sets of infinite lenght*, Michigan Math. J. 27 (1980), 75-79

[20] Jones, P.: *Estimates for the corona problem*, J. Funct. Anal. 39 (1980), n2, 162-181

[21] Lin, K.C.: *The corona theorem and interpolating Blaschke products*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 851-859

[22] Lin, K.C.: *On the constants in the corona theorem and ideals of H^∞*, Houston J. Math. 19 (1993), 97-106

[23] Lin, K.C.: *On the H^p solutions to the Corona equation*, Bull. Sci. Math. 118 (1994), n3, 271-286

[24] Lyubarskii, Y., Seip, K.: *A uniqueness theorem for bounded analytic functions*, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 49-52

[25] Marshall, D., Sundberg, C.: *Harmonic measure of curves in the disk*, J. Anal. Math. 70 (1996), 175-224

[26] McKenna, P.J.: *Discrete Carleson measures and some interpolating problems*, Michigan Math. J. 24 (1977), 311-319

[27] Mortini, R.: *Ideals generated by interpolating Blaschke products*, Analysis 14 (1994), 67-73

[28] Mortini, R.: *On an example of J.Bourgain on closures of finitely generated ideals*, Math Z. 224 (1997), 655-663

[29] Nikol'skii, N.K.: *Treatrise on the Shift Operator*, Grund. der math. Wissens. , 273 (1986)

[30] Nersesyan, A.: *On Carleman Sets*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 122 (1984), 99-104, Translation of Izv. Akad. Nauk Armyan SSR Ser. Mat. 6 (1981), 465-471

[31] Rao, K.V.R.: *On a generalized corona problem*, J. Anal. Math. 18 (1967), 277-278

[32] Rosenblum, M.: *A corona theorem for countably many functions*, Integral Equations Operator Theory 3 (1980), 125-137

[33] Shapiro, H.S., Shields, A.L.: *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math, 83 (1961), 513-532

[34] Slodkowski, Z.: *On bounded analytic functions on finitely connected domains*, Trans. Amer. Math., 300 (1987), 721-736

[35] Stein, E.M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, 1970

[36] Sundberg, C.: *Truncations of BMO functions*, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 749-771

[37] Thomas, P.J.: *Sampling sets for Hardy spaces of the disk*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 2927-2932

[38] Tolokonnikov, V.: *Interpolating Blaschke products and ideals of the algebra H^∞*, J. Soviet. Math. 27 (1984), 2549-2553

[39] Tolokonnikov, V.: *Blaschke products satisfying the Carleson-Newman condition and ideals of the algebra H^∞*, J. Soviet. Math. 42 (1988), 1603-1610

[40] Tolokonnikov, V.: *Estimates in Carleson's Corona theorem and finitely generated ideals in the algebra H^∞* (Russian) Funttsional. Anal. Prilozhen. 14 (1980), n4, 85-86

[41] Tolokonnikov, V.: *Estimates in the Carleson's Corona theorem. Ideals of the algebra H^∞, the problem of Sz.-Nagy* (Russian) Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 113 (1981), 178-198

[42] Treil, S.: *Estimates in the Corona Theorem and ideals of H^∞: a problem of T. Wolff*, Preprint

[43] Uchiyama, A.: *Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions* Manuscrit no publicat (1980)

[44] Uchiyama, A.: *The construction of certain BMO functions and the Corona problem*, Pacific J. Math. 99 (1982), n1, 183-204