

Ideals finitament generats i decreixement de funcions analítiques i acotades

Jordi Pau

Aquest treball està estructurat en dues parts. En la primera part s'estudien algunes propietats d'ideals de l'àlgebra $H^\infty(\mathbb{D})$ de les funcions analítiques i acotades en el disc unitat, en particular s'estudien diversos problemes relacionats amb el Teorema de la Corona per H^∞ . En aquest context, es dona una nova condició de tamany per una funció $g \in H^\infty$ que assegura que aquesta funció es troba a l'ideal generat per n funcions de H^∞ , millorant les condicions conegudes anteriorment. També s'estudia el problema de les clausures d'ideals finitament generats, així com diverses propietats dels ideals d'ordre finit, on la situació esdevé més favorable. Així mateix, també es donen les versions adaptades a l'espai de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$ d'aquests resultats, com per exemple la versió pels espais de Hardy del Teorema de Bourgain sobre clausures d'ideals.

En la segona part s'estudien diversos problemes sobre decreixement de funcions analítiques i acotades en el disc unitat, així com de creixement de funcions harmòniques. També es busca una caracterització per les successions primes i separades en el disc unitat, donant una condició necessària i una de suficient, i veient que son òptimes en un cert sentit. Una successió de punts $\{a_k\}$ del disc unitat es diu que és prima si existeix una funció no idènticament nul·la $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ de forma que $\sum_n (1 - |a_n|)|f(a_n)| < \infty$. Finalment es dona una caracterització dels minorants essencials per la classe de successions no primes. Donada una classe de successions S del disc unitat, es diu que una funció radial g és un H^∞ -minorant essencial per la classe S si per tota successió $\{a_k\}$ de la classe S la condició $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$ per tot k , implica $f \equiv 0$.

Finitely generated ideals and decrease of bounded analytic functions

Jordi Pau

This work has two different parts. The first one is devoted to finitely generated ideals of the algebra $H^\infty(\mathbb{D})$ of bounded analytic functions in the unit disc. Several problems related to the Corona Theorem are studied. A new size condition on a function $g \in H^\infty$ which assures that belongs to a given finitely generated ideal is introduced. This improves several known results. Closures of finitely generated ideals and ideals of finite order are also considered, as well a versions of these problems in the setting of Hardy spaces $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$, for example H^p -version of Bourgain's theorem about closures of ideals.

In the second part, several problems on decrease of bounded analytic functions and increase of harmonic functions are studied. A necessary condition and a sufficient one for thinness are presented, and they are shown to be optimal. A sequence $\{a_k\}$ of points in the unit disc is thin if there exists a non trivial $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ such that $\sum_n (1-|a_n|)|f(a_n)| < \infty$. Finally, a characterization of essential minorants for thick sequences is presented. Given a class of sequences S on the unit disc, a radial function g is an H^∞ -essential minorant for S iff for every sequence $\{a_k\}$ of S , condition $|f(a_k)| \leq g(|a_k|)$ for all k , implies $f \equiv 0$.