Generadors de $L^p(\mathbb{R})$ amb translacions en temps i frqüència.

Aquesta memòria està estructurada en dues parts. La primera estudia els sistemes de generadors per translacions, els quals tenen sentit en qualsevol $L^p(\mathbb{R})$. Ens centrem sobretot en el cas $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, encara que també donem resultats en la resta d'espais. La segona part estudia els marcs (una generalització de les bases) en $L^2(\mathbb{R})$ que provenen d'agafar traslladades i modulades d'una funció (Gabor), o traslladades i dilatades (ondetes).

La primera part estudiarà els generadors per translacions. Prenem conjunts de funcions de la forma $T(\varphi, \Lambda) = \{\varphi(t-\lambda) \ : \ \lambda \in \Lambda\}$, on φ és una funció de $L^p(\mathbb{R})$ i Λ un conjunt discret de la recta. El que ens preguntem és quan un d'aquests conjunts serà un sistema de generadors per a $L^p(\mathbb{R})$, entenent per sistema de generadors un conjunt tal que les combinacions lineals dels seus elements són denses en l'espai corresponent.

Una de les preguntes típiques que ens podem fer sobre aquesta classe de sistemes són per a quines funcions φ existeix un conjunt de translacions Λ tal que $T(\varphi, \Lambda)$ és un sistema de generadors. De moment aquest continua sent un problema obert. Estudiem un xic l'estat de la qüestió i ens dediquem a dos subconjunts concrets de generadors, els quasi-analítics i els analítics. Per aquests donem condicions necessàries i suficients molt properes per caracteritzar-los i estudiem una mica com poden ser els conjunts de punts que després donaran lloc a sistemes de generadors.

Una altra pregunta habitual és, fixada una funció φ per a la qual existeix conjunts Λ tals que $T(\varphi, \Lambda)$ genera un cert espai $L^p(\mathbb{R})$, intentar descriure tots els conjunts Λ amb aquesta propietat. Estudiem aquest problema per a dues funcions concretes, la funció de Poisson i la gaussiana respectivament. En el cas de Poisson existia una caracterització d'aquests conjunts, i el que fem és generalitzar-la a casos similars. En els cas de la gaussiana l'únic que podem fer és millorar les condicions que ja es coneixien, ja que sembla difícil una caracterització completa.

En la segona part estudiem un problema anàleg, però en lloc de fer servir tan sols translacions hi afegim modulacions (Gabor) i dilatacions (ondetes). Aquesta classe de sistemes poden donar lloc a bases i marcs (sistemes de generadors amb molta més estructura), encara que només té sentit en $L^2(\mathbb{R})$.

L'estudi que fem és similar en els dos casos que tractem, Gabor i ondetes. Primer expliquem com discretitzar la transformada contínua. Després donem dos exemples concrets en casos molt particulars on l'espai de transformades està composat per funcions holomorfes. En aquests casos el problema es simplifica i ja havia estat resolt. En tots dos casos veiem que és pràcticament un accident que hi hagi un espai de fase enterament composat per funcions holomorfes.

Per a la resta de casos aconseguim donar alguns resultats de mostreig que ens permeten donar condicions suficients per obtenir un marc. També aconseguim algun resultat d'interpolació (el problema dual).

Finalment, en el cas de Gabor, inaugurem una nova via d'estudi, restringint-nos a una classe especial de funcions. Aconseguim veure que l'espai de fase té una extensió a funcions enteres en dues variables. Donem cotes sobre la varietat de zeros que sembla que poden donar lloc a resultats de mostreig millors dels que es coneixen fins ara.

Generators of $L^p(\mathbb{R})$ by translations in time and frequency.

This memory is structured in two parts. The first one studies the systems of generators by translations, which have sense in any $L^p(\mathbb{R})$. We will center especially in the cases $L^1(\mathbb{R})$ and $L^2(\mathbb{R})$, although we give results in the rest of spaces. The second part studies the frames (a generalization of the bases) in $L^2(\mathbb{R})$ that come from translations and modulations of a function (Gabor), or translations and dilatations (wavelets).

The first part will study the generators by translations. We take sets of functions in the way $T(\varphi, \Lambda) = \{\varphi(t - \lambda) \ : \ \lambda \in \Lambda\}$, where φ is a function of $L^p(\mathbb{R})$ and Λ a discreet set of the straight line. What we ask to ourselves is when one of these sets is a system of generators for $L^p(\mathbb{R})$, understanding for system of generators a set such that the linear combinations of its elements are dense in the corresponding space.

One of the typical questions that we can make about this class of systems is for which functions φ there is a set of translations Λ such that $T(\varphi, \Lambda)$ is a system of generators. For the time being this continues being an open problem. We study a bit the state of the question and we focus to two concrete subsets of generators, the almost–analytical ones and the analytical ones. For these we give very next necessary and sufficient conditions for characterizing them and we study a little how its can be the sets of points that afterwards will causes systems of generators.

Another usual question is, fixed a function φ for which exists sets Λ such that $T(\varphi, \Lambda)$ generates a certain space $L^p(\mathbb{R})$, to attempt to describe all the sets Λ with this property. We study this problem for two concrete functions, the function of Poisson and the Gaussian one respectively. In the case of Poisson there was a characterization of these sets, and what we generalize it to similar cases. In the case of the Gaussian the only thing that we can make is to improve the conditions that were already known, since a complete characterization seems difficult.

In the second part we study an analogous problem, but instead of using just translations we add modulations (Gabor) and dilatations (wavelets). This class of systems can give place to bases and frames (systems of generators with much more structure), only although it has sense in $L^2(\mathbb{R})$.

The study that we make is similar in the two cases that we treat, Gabor and wavelets. First we explain how to discretize the continuous transform. Afterwards we give two concrete examples in very particular cases where the transformed space is composed by holomorfic functions. In these cases the problem is simplified and already had been solved. In both cases we see that it is practically an accident that there is a phase space of this class.

For the rest of cases we achieve to give some results of sampling that allow us to give sufficient conditions for obtaining a frame. Also we achieve some result of interpolation (the dual problem).

Finally, in the case of Gabor, we open a new way of study, restricting us to a special class of functions. We achieve to see that the phase space has an extension to entire functions in two variables. We give heights about the variety of zeros which it seems can give results of sampling better of those that are known until now.