Àlgebres associades a un buirac

Miquel Brustenga i Bort

Núm. 2/2007
Juny 2007

Àlgebres associades a un buirac

Miquel Brustenga i Bort

Memòria presentada per a
aspirar al grau de doctor
en Matemàtiques.

Certifico que la present Memòria ha estat realitzada per en Miquel Brustenga i Bort, sota la direcció del Dr. Pere Ara Bertran.

Bellaterra, Juny de 2007.

Firmat: Dr. Pere Ara Bertran.

Un camí!
Quina cosa més curta de dir!
Quina cosa més llarga de seguir!
Quin so vulgar i estrany!
Un camí!. . .
Quina sentida de pena i patir,
quina promesa de calma i de guany!
Un camí!. . .

Josep Maria de Sagarra

Índex

Introduction xi
Leavitt algebras and Leavitt path algebras xii
The realization problem for von Neumann regular rings xiv
K-Theory xv
Summary xvi

Agraïments xix

Capítol 1. Preliminars 1
1.1. Elements de Teoria K estable i no estable 1
1.2. Algunes àlgebres associades a un buirac 3
1.3. L'àlgebra de Leavitt d'un buirac 7
1.4. Localització universal 9
1.5. El Teorema de Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang i Siebenmann 13
1.6. Anells amb unitat local 16
1.7. El K_1 d'anells de polinomis de Laurent guerxos sobre anells sense unitat 23
1.8. Localitzacions i quocients de categories 30

Capítol 2. L'àlgebra regular d'un buirac 33
2.1. Una localització universal de l'àlgebra de camins d'un buirac 33
2.2. Construcció de les àlgebres 46
2.3. Estructura dels mòduls finitament generats i projectius 57
2.4. L'àlgebra regular d'un buirac 60

Capítol 3. El K_1 de les àlgebres associades a un buirac 63
3.1. El K_1 de l'àlgebra de camins 63
3.2. L'anell de polinomis de Laurent córner-guerxo 64
3.3. El K_1 dels anells de polinomis de Laurent córner-guerxos 65
3.4. El K_1 de l'àlgebra de Leavitt d'un buirac 70
3.5. El K_1 de l'àlgebra regular d'un buirac 76

Capítol 4. Mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt d'un buirac 79
4.1. Mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de camins 79
4.2. L'algoritme feble en l'àlgebra de camins 81
4.3. L'àlgebra regular d'un buirac com a àlgebra de quocients de $P(\overline{E})$ 89
4.4. Mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt d'un buirac 95
4.5. Les categories de mòduls finitament presentats com a quocients 104

Alguns problemes oberts 113

Bibliografia 115

Índex alfabètic 119

Introduction

Graphs are combinatorial objects that sit at the core of mathematical intuition. They have many uses in Algebra, and their representation theory is very rich. Given a quiver (finite oriented graph) $E = (E^0, E^1, r, s)$ and a field K, a representation of E consists of the assignment of a K-vector space $M(v)$ to each vertex $v \in E^0$ and a linear map

$$M(e)\colon M\big(s(e)\big) \longrightarrow M\big(r(e)\big)$$

for each arrow $e \in E^1$, where $s(e)$ and $r(e)$ denote the source and range vertex of e respectively. The path algebra $P_K(E)$ has a K-basis consisting of all the (oriented) paths in the quiver E, the product being induced by concatenation of paths. It has the property that its representation theory is the same as the representation theory of the quiver E.

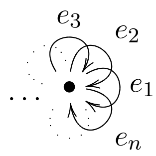
The algebra $P_K(E)$ has many pleasant properties, in particular it is a *quasi-free* algebra in the sense of [**26**] (some other authors use the terms *smooth* or *formally smooth* algebra). In particular, it is a hereditary algebra. If the field K is algebraically closed then every basic finite dimensional hereditary K-algebra is isomorphic to $P_K(E)$ for some quiver E without oriented cycles, and moreover every basic finite dimensional algebra is the path algebra of a quiver with relations, that is, a quotient of a path algebra $P_K(E)$. Related to this, it is worth mentioning a result of Neeman, Ranicki and Schofield [**52**] stating that every finitely presented algebra is Morita equivalent to a universal localization of a finite dimensional algebra obtained as a path algebra of a quiver with relations. Also, the path algebra $P_{\mathbb{C}}(E)$ plays a crucial role in some versions of Noncommutative Algebraic Geometry like the one developed by Le Bruyn [**40, 41, 42**], where the space of finite dimensional representations over a quiver E is considered as the noncommutative analogue of affine space.

A traditional source of noncommutative life is the theory of operator algebras, a subject closely related to Quantum Physics and Noncommutative Geometry [**23**]. A *Cuntz-Krieger representation* of a quiver E on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is given by a family of orthogonal projections $\{P_v \mid v \in E^0\}$ on $\mathcal{H}$, with $\sum P_v = \mathbf{1}$, and a family of partial isometries $\{S_e \mid e \in E^1\}$ such that

(i) $S_e S_e^* = P_{s(e)}$.
(ii) $\sum_{e \in r^{-1}(v)} S_e^* S_e = P_v$ for all $v \in E^0$ such that $r^{-1}(v) \neq \emptyset$.

These are the, so called, Cuntz-Krieger relations. The Cuntz-Krieger graph C^*-algebra, in symbols $C^*(E)$, is the universal C^*-algebra generated by a Cuntz-Krieger family as above, see [**56**] for details.

These relations were designed to provide a wide generalization of the Cuntz algebras $\mathcal{O}_n$, introduced by Cuntz in [**24**]. For each $n \geqslant 1$, the algebra $\mathcal{O}_n$ corresponds to the n-rose quiver R_n, which has only one vertex and n arrows:



The algebra $\mathcal{O}_n$ is generated by n isometries $S_1^*, \dots, S_n^*$ with orthogonal ranges and such that $\sum_{i=1}^n S_i^* S_i = \mathbf{1}$. Cuntz showed in [**24**] that for $n \geqslant 2$, the algebra $\mathcal{O}_n$ is simple.

The topological K-theory of $\mathcal{O}_n$ $(n \geqslant 2)$ was computed in [**25**], as follows:

$$K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}/(n-1) \quad \text{and} \quad K_1(\mathcal{O}_n) = 0.$$

This was the first example of an infinite simple C^*-algebra with torsion in K_0. Observe that since the generator of $K_0(\mathcal{O}_n)$ is $[\mathcal{O}_n]$ we get $\mathcal{O}_n \cong (\mathcal{O}_n)^n$ but $\mathcal{O}_n \ncong (\mathcal{O}_n)^k$ for $1 < k < n$. It turns out that similar algebras were constructed from a purely algebraic perspective twenty years before by William Leavitt [**43**]. *Leavitt path algebras* [**1, 10**] associated to any quiver and any field K provide wide generalizations of the algebras constructed by Leavitt, in much the same way as Cuntz-Krieger graph C^*-algebras generalize Cuntz algebras.

This thesis deals with the construction of von Neumann regular envelopes of Leavitt path algebras, which can be thought of profitably as "total (generalized) algebras of fractions" of them. In the following subsections we describe in some detail Leavitt algebras and Leavitt path algebras, and we sketch some of the motivations of our work, in particular a fundamental representability open problem in nonstable K-theory.

Leavitt algebras and Leavitt path algebras

We say that a ring R has *invariant basis number* (IBN) provided that $R_R^n \cong R_R^m \Rightarrow n = m$. For instance, every (nonzero) commutative ring has IBN. However, in the context of noncommutative rings it is possible to find examples for which IBN fails to hold. Indeed, let n be a positive integer and fix a field K. The *Leavitt K-algebra* $V_{1,n}$ of type $(1, n-1)$, first considered in [**43**], is the algebra with generators x_i, y_j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, and defining relations which, in matrix form, can be written as

$$(\dagger) \qquad (x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)^t = 1, \quad (y_1, \dots, y_n)^t (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{1}_n,$$

where $\mathbf{1}_r$ denotes the identity matrix of size $r \times r$. For $n > 1$ these are examples of rings without IBN since we have $V_{1,n} \cong V_{1,n}^n$. In fact, $V_{1,n}$ is the K-algebra having a universal right $V_{1,n}$-module isomorphism $V_{1,n} \to V_{1,n}^n$. Several properties of the algebra $V_{1,n}$ have been studied in recent years. For instance, in [**9**] it was proved that $V_{1,n}$ is a purely infinite simple ring [**9**, Theorem 4.2] (recall that a simple ring R is called *purely infinite* in case R is not a division ring and for each nonzero $a \in R$ there are $z, t \in R$ such that $zat = 1$) and the structure of the finitely presented modules over the Leavitt algebras $V_{1,n}$ has been computed in [**4**].

In general, the Leavitt type [**44**] of a nonzero ring R is the pair of numbers (r, s) which is defined as follows. If R has IBN then we set $(r, s) = (1, 0)$. If R does not have IBN, then r is the least positive integer such that $R_R^r \cong R_R^{r+i}$ for some positive integer

i, and then s is the least positive integer with $R_R^r \cong R_R^{r+s}$. For each Leavitt type (r,s), Leavitt constructed [**43, 44**] K-algebras $V_{r,r+s}$ having a universal isomorphism

$$i\colon (V_{r,r+s})^r \longrightarrow (V_{r,r+s})^{r+s}.$$

These universal rings constructed by Leavitt can be thought of as particular cases of a very general setting presented in an outstanding article by Bergman [**16**]. From Bergman's results, we can construct a ring with a universal module isomorphism between finitely generated projective modules, so the Leavitt ring $V_{m,n}$ can be obtained in this way. An important advantage of Bergman's construction is that his general results give us automatically some properties of the rings. For instance, he showed in [**16**, Theorem 6.1] that $V_{m,n}$ is a hereditary ring and computed the monoid $\mathcal{V}(V_{m,n})$. Here, for a ring R, $\mathcal{V}(R)$ denotes the monoid of isomorphism classes of finitely generated projective right R-modules with the operation induced by $\oplus$.

The path algebra can also be obtained by using Bergman's constructions. As an easy consequence of this fact it is possible to compute the monoid $\mathcal{V}(P(E))$ and get that $P(E)$ is hereditary (see Proposició 1.2.8).

Let R be a ring and let Σ be a set of homomorphisms between finitely generated projective right R-modules. We recall that the universal localization of R with respect to Σ is a ring R_Σ together with a ring homomorphism $R \to R_\Sigma$ universal with respect to the property that every element $\alpha \otimes_R \mathbf{1}_{R_\Sigma}$ for $\alpha \in \Sigma$ has an inverse (see Secció 1.4). It is clear from the relations (†) that the algebra $V_{1,n}$ is a universal localization of the free algebra $K\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ inverting $\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n)\}$.

Let E be a finite quiver. For every vertex $v \in E^0$ such that $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ we put $r^{-1}(v) = \{e_1^v, \dots, e_{n_v}^v\}$ and consider the following homomorphisms of right $P(E)$-modules

$$\begin{aligned} \mu_v\colon p_v P(E) &\longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n_v} p_{s(e_j^v)} P(E) \\ r &\longmapsto \left(e_1^v r, \dots, e_{n_v}^v r\right), \end{aligned}$$

where p_w denotes the canonical idempotent associated to $w \in E^0$. We set $\Sigma_1 = \{\mu_v \mid v \in E^0,\ r^{-1}(v) \neq \emptyset\}$ and consider the universal localization $L(E) = P(E)_{\Sigma_1}$. We will refer to $L(E)$ as the *Leavitt path algebra* of the quiver E. We observe that the Leavitt path algebra of the n-rose, $L(R_n)$, coincides with the Leavitt algebra $V_{1,n}$. We remark that it is also possible to define the Leavitt path algebra for an infinite graph provided that it is a column-finite graph, that is, if for every $v \in E^0$ we have $|r^{-1}(v)| < \infty$ (see Secció 1.3).

Leavitt path algebras are becoming a subject of much current interest. Characterizations of the column-finite graphs E such that $L(E)$ is simple or purely infinite simple or is an exchange ring are given in [**1, 2**] and [**12**] respectively. Moreover, by using Bergman's machinery the monoid $\mathcal{V}(L(E))$ has been identified in [**10**] with a certain monoid M_E naturally attached to the graph E (see Secció 1.3). Papers [**53, 66**] contain important information on certain localizations of the path algebra $P(E)$. We recommend the book [**13**] for an overview on the state-of-the-art of the subject.

The realization problem for von Neumann regular rings

Let E be a column-finite graph. We will show in Capítol 2 that the algebra $L(E)$ can be embedded in a von Neumann regular algebra $Q(E)$ in such a way that the embedding induces a monoid isomorphism $\mathcal{V}(L(E)) \cong \mathcal{V}(Q(E))$. Moreover, the von Neumann regular algebra $Q(E)$ is obtained from $P(E)$ and also from $L(E)$ by universal localization, so that it is a (generalized) algebra of fractions of both algebras. Using this we prove that the construction $Q(E)$ is functorial with respect to *complete* graph homomorphisms (see Secció 1.3 for the definition). This enables us to extend many results from the case of a finite quiver to the case of an arbitrary column-finite graph.

Let $\overline{E}$ denote the inverse quiver of E, that is, the quiver with the same set of vertices and reversed arrows. We will see in Secció 2.4 and Secció 4.5 that for a (finite) quiver E with $|E^0| = d$, $Q(E)$ fits in the following commutative diagram of inclusions

$$\begin{tikzcd} K^d \arrow[r] \arrow[d] & P(E) \arrow[r, "i_\Sigma"] \arrow[d, "i_{\Sigma_1}"'] & P_{\mathrm{rat}}(E) \arrow[r] \arrow[d, "i_{\Sigma_1}"'] & P((E)) \arrow[d, "i_{\Sigma_1}"'] \\ P(\overline{E}) \arrow[r, "i_{\Sigma_1'}"] & L(E) \arrow[r, "i_\Sigma"] & Q(E) \arrow[r] & P((E))_{\Sigma_1}, \end{tikzcd}$$

where the labeled arrows are universal localizations. Here, $P((E))$ and $P_{\mathrm{rat}}(E)$ are respectively the formal power series and the rational power series of the quiver E (see Definició 1.2.5 and Definició 2.1.16). As an enlightening example we can consider the case of the 1-rose in which the above diagram reduces to the commutative diagram:

$$(\ddagger)\qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & K[x] \arrow[r] \arrow[d] & K_{\mathrm{rat}}[x] \arrow[r] \arrow[d] & K[\![x]\!] \arrow[d] \\ K[x^{-1}] \arrow[r] & K[x, x^{-1}] \arrow[r] & K(x) = K(x^{-1}) \arrow[r] & K((x)), \end{tikzcd}$$

where $K[\![x]\!]$ is the power series algebra, $K_{\mathrm{rat}}[x]$ is the algebra of rational series, $K(x) = K(x^{-1})$ is the algebra of rational functions (the quotient field of $K[x]$) and $K((x))$ is the Laurent power series field.

Our construction is relevant to the following realization problem for von Neumann regular rings, which is a variant of a problem posed by Goodearl in [**33**, Fundamental Open Problem]. Recall that an abelian monoid M is *conical* in case $x + y = 0$ implies $x = y = 0$ and that it is a *refinement monoid* in case any equality $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ admits a refinement, that is, there are x_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$ such that $x_i = x_{i1} + x_{i2}$ and $y_j = x_{1j} + x_{2j}$ for all i, j.

Realization Problem for von Neumann Regular Rings Let M be a countable conical abelian refinement monoid. Is there a von Neumann regular ring R such that $\mathcal{V}(R) \cong M$?

For every von Neumann regular ring R, it is known that $\mathcal{V}(R)$ is a conical refinement abelian monoid. Indeed this is the case for the larger class of exchange rings, by [**8**, Corollary 1.3].

The countability condition is important here. Friedrich Wehrung [**75**] proved that there are (even cancellative) refinement conical abelian monoids of size $\aleph_2$ that cannot be realized as $\mathcal{V}(R)$ for any von Neumann regular ring R. Note that, by the results in [**74**], an affirmative answer to the above realization problem would give a negative answer to the Fundamental Separativity Problem for von Neumann regular rings [**8**].

As we said before the monoid $\mathcal{V}(L(E))$ corresponding to a column-finite graph E was computed in [**10**], and its properties are fairly well understood (see [**10**, Section 6]), so the results in Capítol 2 represent a significant contribution to the realization problem. In particular, we demonstrate in Teorema 2.4.2 that there exists a unital von Neumann regular hereditary ring $Q(E)$ such that $\mathcal{V}(Q(E)) \cong M_E$, for every finite quiver E. Furthermore, if E is a column-finite graph, then there exists a (not necessarily unital) von Neumann regular ring $Q(E)$ such that $\mathcal{V}(Q(E)) \cong M_E$ (Teorema 2.4.4). It is well worth mentioning that, very recently, the antisymmetric graph monoids have been completely characterized in monoid-theoretical terms (see [**11**, Theorem 5.1]).

The only systematic approaches to the realization problem known to the author are the well-known realization theorem for dimension monoids ([**32**, Theorem 15.24(b)]), and the realization theorem given in [**9**, Theorem 8.4], saying that every countable abelian group G can be obtained as $K_0(R)$ for some purely infinite simple regular ring R. Since $\mathcal{V}(R) = \{0\} \sqcup K_0(R)$ for every purely infinite simple ring R, we get that all the monoids of the form $\{0\} \sqcup G$, for G a countable abelian group, can be realized as monoids associated to a purely infinite simple regular ring. It can be shown that these monoids are of the form M_E for suitable quivers E, so Teorema 2.4.4 incorporates the above-mentioned results. Indeed, taking into account [**10**, Theorem 3.5 and Theorem 7.1], we see that the case of dimension monoids follows from [**56**, Proposition 2.12] and the case of monoids of the form $\{0\} \sqcup G$, with G a countable abelian group, follows from [**71**, Theorem 1.2].

Our results in Capítol 2 are a generalization of the ones obtained in [**9**], where a von Neumann regular envelope of the Leavitt algebra of type $(1, n)$ was constructed. In order to extend this construction to the more general setting of Leavitt path algebras we need to generalize some properties of the free algebra and of the (rational) formal power series to their quiver analogs; this is a large part of the work performed there.

K-Theory

Algebraic K-Theory consists in assigning functorially a family of abelian groups to a ring in such a way that they enclose some "interesting" information on the ring. We can think of it as a "generalized homology theory" for rings, in the sense that it enables us to use homological algebra to obtain relevant information on the K-groups which ultimately will provide information on the rings. In general, computation of K-groups is a rather difficult task, so the development of computational tools for some classes of rings is the first step to be able to apply K-theoretical machinery to the study of rings.

Several years ago, George Elliott proposed his celebrated classification program for separable C^*-algebras through (topological) K-theory (see [**28**]). Since then, important advances have been attained in the Classification Problem of Separable C^*-Algebras. For instance, Kirchberg [**37**] and Phillips [**55**] showed that nuclear separable unital purely infinite simple C^*-algebras are classified by K-theoretical invariants. We recall that the algebraic K_0 and the topological K_0 of a C^*-algebra are the same object while the topological K_1 is just a quotient of the algebraic one. The topological K-theory of $C^*(E)$, where E is a column-finite graph, was computed in [**57**, Theorem 3.2]. It is not so surprising that, in the case of graph algebras, the K_0 in the purely algebraic setting is analogous to the C^*-algebra result. Even more, for a column-finite graph E the monoids $\mathcal{V}(L_{\mathbb{C}}(E))$ and $\mathcal{V}(C^*(E))$ are isomorphic, with isomorphism induced by the natural inclusion $L_{\mathbb{C}}(E) \hookrightarrow C^*(E)$ as was proved in [**10**, Theorem 7.1]. One of our results is the computation of $K_1(L(E))$ for a finite quiver E (see Teorema 3.4.6). If we compare it to [**57**, Theorem 3.2] we realize that there is a difference: $K_1(L(E))$ is a direct sum of some kernel and some cokernel while in $K_1^{\mathrm{top}}(C^*(E))$ only the kernel term appears. We remark that the K-theory computation in [**57**] rests on the existence of the (dual) Pimsner-Voiculescu exact sequence of a crossed product, which has not got an equivalent in the algebraic context. To fill this gap we need to develop a tool to compute the K_1 of corner-skew Laurent polynomial rings (see Teorema 3.3.3). We also get that $K_1(L(E))$ is a direct summand of $K_1(Q(E))$ (Proposició 3.5.3), and moreover we determine the complement in Teorema 4.5.9, obtaining the formula

$$K_1(Q(E)) \cong K_1(L(E)) \oplus K_0(\mathcal{S}),$$

for a certain abelian category $\mathcal{S}$.

Summary

We now summarize the content of the Dissertation. In Capítol 1 we present some of the definitions, notations and results that we will use throughout the work. In Secció 1.2 and Secció 1.3 we introduce the main notions that we will use and some preliminary results. Among other things we define, for a quiver E, the quiver path algebra, $P(E)$, the Leavitt path algebra, $L(E)$, and state the computation of the monoids $\mathcal{V}(P(E))$ and $\mathcal{V}(L(E))$. It is important to keep the notations and definitions from these two sections in mind to be able to read the memoir. In Secció 1.5 we present a well-known theorem due to Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang and Siebenmann, which gives a formula for K_1 of the skew Laurent polynomial ring (Teorema 1.5.7). We will need this result later in Secció 1.7. In Secció 1.6 we introduce the concept of ring with local unit and the definitions and some results on the K-Theory of rings without unit or with local unit; we will need the results in this section exclusively in Secció 1.7 and Secció 3.3. In Secció 1.7 we compute K_1 of a skew Laurent polynomial ring over a nonunital ring, extending Teorema 1.5.7 to the nonunital case. We will use this computation later (exclusively) in Secció 3.3 to achieve the computation of K_1 of a corner skew Laurent polynomial ring. Concerning the remaining sections of the first chapter, they are just intended as a source for internal references on several topics: K-Theory, universal localization of rings and localizations of categories. It is enough to have a look at them when needed.

In Capítol 2 we construct the regular enveloping algebra $Q(E)$ of the Leavitt path algebra, $L(E)$, of a quiver E. This generalizes the construction from [**9**] of a regular enveloping algebra of the Leavitt algebra $V_{1,n}$ to the setting of Leavitt path algebras. In Secció 2.1 we generalize some results known for the free algebra to the context of path algebras. In particular we study the algebra of formal power series on the quiver E and the algebra $P_{\mathrm{rat}}(E)$ of rational series over E, which is defined as the division closure of $P(E)$ in $P((E))$.

Secció 2.2 contains the basic constructions of our algebras of Leavitt type, associated with an algebra R which is a subalgebra of the algebra $P((E))$ of formal power series on a finite quiver E containing the path algebra $P(E)$. We show that if the algebra R is closed under inversion in $P((E))$ then the resulting ring of Leavitt type is von Neumann regular. When we take $R = P(E)$ (which is not closed under inversion in $P((E))$ in general) we recover the usual Leavitt path algebra $L(E)$ (which is not von Neumann regular in general). When we take $R = P_{\mathrm{rat}}(E)$, the algebra of rational power series on E (which is closed under inversion in $P((E))$), we get the regular algebra $Q(E)$ associated with E, which by Teorema 2.4.2, is both von Neumann regular and hereditary.

Secció 2.3 contains the computation of the monoid of finitely generated projective modules over the von Neumann regular algebras T of Leavitt type constructed in Secció 2.2. In particular we get that the inclusion $L(E) \to Q(E)$ induces a monoid isomorphism $\mathcal{V}(L(E)) \cong \mathcal{V}(Q(E))$. Secció 2.4 gives the functoriality of the construction with respect to complete graph homomorphisms, which enables us to extend the construction and the computations from finite to column-finite graphs.

In Capítol 3 we deal with the computation of the Whitehead group (K_1) of several quiver algebras. In Secció 3.1 we will see (Teorema 3.1.2) that $K_1(P(E)) \cong (K^\times)^d$, extending the result for the free algebra (see [**20**, p. 451]). In Secció 3.2 and Secció 3.3 we will present the definitions and results needed to face the computation of $K_1(L(E))$ later in Secció 3.4, notably, Teorema 3.3.3 gives us a formula for the Whitehead group of a corner skew Laurent polynomial ring suitable to our needs. As we pointed out before, the Whitehead group of the Leavitt path algebra turns out to be a direct sum of a kernel and a cokernel obtained from the incidence matrix of the quiver E (see Teorema 3.4.6). This computation plays an important role later, in the study of finitely presented $L(E)$-modules. Finally in Secció 3.5 we will see that the inclusion $L(E) \to Q(E)$ induces a split monomorphism at the K_1 level. The complement of $L(E)$ in $Q(E)$ is computed later in Teorema 4.5.9.

In Capítol 4 we study the finitely presented modules over the Leavitt path algebra of a quiver. In the first two sections we extend some results known for the free algebra to the more general setting of Leavitt path algebras. Indeed, in Secció 4.1 we check that, given a right $P(E)$-module M of finite K-dimension, there exist a Lewin-Schreier formula relating the Euler characteristic of M as a $P(E)$-module and as a K^d-module (Teorema 4.1.4); this extends a Lewin's result ([**45**, Theorem 4]). We obtain this formula from a general result due to Bergman and Dicks [**17**]. In Secció 4.2

we see that the path algebra admits a version of Cohn's weak algorithm (with slightly different definitions). Using this weak algorithm we are able to generalize another theorem by Lewin ([**45**, Theorem 2]) to our setting. This result plays a crucial role in the study of the structure of finitely presented right $L(E)$-modules later in Secció 4.4. In Secció 4.3, on the one hand, we show that $Q(E)$ is the maximal flat epimorphic right ring of quotients of $P(\overline{E})$. On the other hand, we present $Q(E)$ as universal localization of $P(\overline{E})$ in a different way than that previously considered. Concretely, we show that $Q(E)$ is the universal localization of $P(\overline{E})$ with respect to the family of injective module homomorphisms between finitely generated projective right $P(\overline{E})$-modules whose cokernel is finite dimensional as K-vector space and does not contain nonzero projective $P(\overline{E})$-submodules. This generalizes a construction due to Schofield for the free algebra to arbitrary path algebras, see [**9**, Section 6] (see also [**61**] for a construction related to Schofield's). In Secció 4.4 we give a first approach to the understanding of the structure of finitely presented modules over the Leavitt path algebra. In Secció 4.5 we see that the categories of finitely presented right $L(E)$-modules and of finitely presented right $L(E)$-modules of finite length are quotients of their corresponding categories over $P(\overline{E})$. We finish the section and the chapter by computing the complement of $K_1(L(E))$ in $K_1(Q(E))$, which in turn gives a concrete formula for $K_1(Q(E))$.

The results of chapters 2 and 3 are the basis of the papers [**6**] and [**5**] respectively.

Agraïments

Abans de res vull agrair molt sincerament a en Pere Ara, el meu director, la seva abnegada dedicació i infinita paciència, així com tot el temps que m'ha prestat ja que, sense ell, aquest treball no hauria estat possible.

Igualment, vull agrair a l'Enric Pardo que s'ha llegit aquesta memòria en un temps rècord per tal de fer-me'n l'informe de valoració de qualitat. A més, els seus comentaris i observacions m'han ajudat a millorar la llegibilitat de la tesi i m'han permès corregir alguns errors.

També vull fer extensiu el meu agraïment al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. D'una banda per haver-me atorgat una beca i de l'altra per la formació rebuda durant tots aquests anys, des que vaig començar la carrera i, en especial al Grup de Teoria d'Anells, des que vaig començar el doctorat. Així mateix, vull tenir unes paraules d'agraïment per al personal de secretaria. Sobretot per a la Cristina, que fins ara s'ocupava de nosaltres (i al final s'ha acabat passant al nostre bàndol) i per l'Elena que n'ha pres el relleu.

Així mateix, vull agrair als meus pares: Salvador i Ramona; a l'àvia Enriqueta; i als meus germans: Maria, Enric, Rosa, Jaume i a les seves respectives famílies tot el seu amor i càlid suport.

Com molt bé diu el meu ilustre predecessor en el noble art de l'escriptura d'agraïments de tesis (noteu l'homenatge implícit en la (hetero)grafia del mot *il·lustre*) el fet de fer una tesi suposa adquirir certes *competències transversals*. En particular, se suposa que jo ara hauria de ser capaç de fer un escrit d'agraïment raonablement decent i tenint en compte, a més, els següents condicionants: hi ha de sortir tothom (de manera explícita o implícita) a qui tingui alguna cosa per agrair, ha de ser ~~original~~, ~~enginyós~~, ~~fer riure~~, ser admissible com a escrit d'agraïment (?), entretenir, ha de ser friqui (almenys en el meu cas)... Com veieu no és del tot trivial. Afortunadament l'estil literari és lliure (prosa, vers, teatre, guió de pel·lícula de cacauets animats...). Bé, he de confessar que a aquestes alçades i després de l'esprint final per acabar la tesi ja estic força cansat i el meu, ja de per si limitat enginy, es troba en les seves hores més baixes. Així que he decidit (com haureu observat) reduir una mica les especificacions anteriors. Això em permet optar pel reciclatge, que és una cosa que està molt de moda. En efecte, he optat per recuperar un escrit de fa un cert temps. En aquell moment no va poder lluir prou degut a un execrable sabotatge (acte de fabricar *sabots*) perpetrat per un contuberni nachilo-imperial amb la decisiva intervenció d'aquell sistema operatiu que no hem d'anomenar i que no és capaç de distingir els salts de línia que usen els sistemes operatius civilitzats.

L'ambientació és la següent, imagineu-vos que he llegit la tesi i decidim anar a celebrar-ho tots junts. L'escena seria una cosa així com el que relata la següent versió (entenguis plagi) d'una coneguda cançó d'en Jaume Sisa. Convé remarcar que aquesta versió meva té l'incontestable mèrit de rimar tan com la original. He de dir, però, que degut a consideracions mètriques el nom d'un de vosaltres no ha pogut entrar en el text de la cançó. No és pas que m'hagi oblidat de tu: la darrera estrofa et va dedicada. Ara bé, t'agrairia que el pròxim cop que t'hagis de posar un sobrenom procuris que rimi amb Jerry (com Tedi o periheli) o amb Pasqual (com equinoderm o narcolèpsic). Bé, com que els interessats ja l'han vist (i interpretat amb un notable èxit) no la repetirem aquí, per qüestions de drets d'autor.

Miquel Brustenga i Bort
Juny de 2007

CAPíTOL 1

Preliminars

En aquest capítol presentem algunes de les definicions, notacions i resultats que usarem al llarg de tot el treball. En les Seccions 1.2 i 1.3 introduïm les nocions (i notacions) principals amb que treballarem a més d'alguns resultats preliminars sobre aquestes. Convé tenir-les presents per a poder llegir la resta de la memòria. En la Secció 1.5 presentem un conegut teorema degut a Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang i Siebenmann, resultat que necessitarem en la Secció 1.7. En la Secció 1.6 introduïm el concepte d'anell amb unitat local i les definicions i alguns resultats de Teoria K d'anells sense unitat o amb unitat local; els resultats d'aquesta secció els necessitarem exclusivament per a les Seccions 1.7 i 3.3. En la Secció 1.7 calculem el K_1 d'un anell de polinomis de Laurent guerxo (*skew*) sobre un anell sense unitat, cosa que utilitzarem (exclusivament) més endavant en la Secció 3.3. Pel que fa a la resta de seccions d'aquest capítol estan previstes com a referència interna de definicions i resultats diversos sobre Teoria K, localització universal d'anells i localització i quocients de categories. N'hi ha prou amb ullar-les quan així es necessiti.

Introduïm primer una mica de notació i convenis que usarem al llarg de tota la memòria. Donat un anell R, **Mod-**R denotarà la categoria dels R-mòduls dreta i **proj-**R la subcategoria plena dels R-mòduls dreta projectius finitament generats. Tret que s'indiqui el contrari tractarem amb anells i R-mòduls unitals i els mòduls que considerarem seran mòduls per la dreta. Denotarem per $U(R)$ el grup d'unitats de R i posarem $R^\times = R \setminus \{0\}$. En cas que R sigui un cos usarem preferentment la segona notació. L'anell K serà un cos fixat. Al llarg d'aquest capítol usarem esporàdicament **Ring** per denotar la categoria dels anells amb unitat amb morfismes unitals i **Group** per a la categoria dels grups amb morfismes de grups.

1.1. Elements de Teoria K estable i no estable

En aquesta secció recordarem algunes de les definicions i resultats bàsics de Teoria K (algebraica) "clàssica" que necessitarem més endavant. Seguim sobretot [**60**].

Donat un anell R, és ben conegut que el conjunt de classes d'isomorfia d'R-mòduls projectius finitament generats forma un semigrup abelià, que denotarem per $\mathcal{V}(R)$, amb l'operació induïda per la suma directa, $\oplus$. De fet $\mathcal{V}(R)$ és un monoide amb la classe del zero com a element neutre. Tot i que $\mathcal{V}(R)$ no és, en general, un grup sempre podem considerar el seu grup de Grothendieck malgrat que això pugui suposar perdre part de la informació que conté. En efecte, tenim el següent:

Teorema 1.1.1. *Donat un semigrup abelià S existeix un grup abelià G (anomenat el* grup de Grothendieck *de S) junt amb un morfisme de semigrups $\varphi\colon S \to G$ tal que* *per a tot grup H i morfisme de semigrups $\psi\colon S \to H$ existeix un únic morfisme de grups $\theta\colon G \to H$ complint $\psi = \theta\varphi$.*

A més, donats un altre grup G' i morfisme $\varphi'\colon S \to G'$ complint la mateixa propietat existeix un únic isomorfisme $\alpha\colon G \to G'$ tal que $\varphi' = \alpha\varphi$.

Per exemple, podem trobar la demostració d'aquest resultat en [**60**, Theorem 1.1.3]. El resultat anterior ens permet donar una definició del K_0 d'un anell:

DEFINICIÓ 1.1.2. Donat un anell R definim $K_0(R)$ com el grup de Grothendieck del monoide $\mathcal{V}(R)$.

És fàcil veure que K_0 defineix un functor dels anells amb unitat als grups abelians. La següent observació, que es desprèn de la demostració del Teorema 1.1.1, ens resultarà útil més endavant:

OBSERVACIÓ 1.1.3. Si G és el grup de Grothendieck de S i $\varphi\colon S \to G$ és el morfisme del Teorema 1.1.1, tot element de G és de la forma $\varphi(x) - \varphi(y)$ per a alguns $x,\, y \in S$.

Podem definir el K_1 d'un anell en termes de matrius invertibles. En efecte, sigui R un anell i considerem $GL_n(R)$ el grup de matrius $n \times n$ invertibles. Donats $a \in R$ i $i \neq j$, $1 \leqslant i,\, j \leqslant n$ definim la matriu elemental $e_{ij}(a)$ com la matriu quadrada $n \times n$ amb 1's a la diagonal, a en la posició (i, j) i zeros a la resta. Denotem per $E_n(R)$ el subgrup de $GL_n(R)$ generat per les matrius elementals. Posem $GL(R) = \varinjlim GL_n(R)$ i $E(R) = \varinjlim E_n(R)$, on els límits els fem respecte a la immersió usual $X \mapsto X \oplus \mathbf{1}$. Observem que GL defineix un functor **Ring** $\to$ **Group**. Podem, doncs, definir:

DEFINICIÓ 1.1.4. Per a un anell R definim el *grup de Whitehead* de R, en símbols $K_1(R)$, com l'abelianitzat de $GL(R)$, és a dir $K_1(R) = GL(R)/[GL(R), GL(R)]$.

Observem que K_1 defineix un functor dels anells als grups abelians. Hom pot veure que el commutador $[GL(R), GL(R)]$ coincideix amb $E(R)$, resultat que es coneix com a Lema de Whitehead (*cf.* [**60**, Proposition 2.1.4]). Podem, doncs, interpretar $K_1(R)$ com el grup de les formes canòniques de les matrius invertibles de R mòdul transformacions elementals per files i columnes.

També necessitarem la noció de K_0 i K_1 d'una categoria. Recordem, doncs, les següents definicions:

DEFINICIÓ 1.1.5. Una *categoria amb successions exactes* és una subcategoria additiva plena $\mathcal{P}$ d'una categoria abeliana $\mathcal{A}$ complint:

(i) $\mathcal{P}$ és tancada per extensions, és a dir, si
$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$$
és una successió exacta en $\mathcal{A}$ i $P_1,\, P_2 \in \mathcal{O}bj\,\mathcal{P}$ aleshores $P \in \mathcal{O}bj\,\mathcal{P}$.

(ii) $\mathcal{P}$ té un esquelet petit, és a dir, $\mathcal{P}$ té una subcategoria plena $\mathcal{P}_0$ petita (*i.e.* tal que $\mathcal{O}bj\,\mathcal{P}_0$ és un conjunt) tal que la inclusió $\mathcal{P}_0 \hookrightarrow \mathcal{P}$ és una equivalència.

Les successions exactes en aquesta categoria $\mathcal{P}$ són les successions exactes en la categoria ambient $\mathcal{A}$ que només contenen objectes (i aplicacions) de $\mathcal{P}$.

DEFINICIONS 1.1.6. Sigui $\mathcal{P}$ una categoria amb successions exactes amb esquelet petit $\mathcal{P}_0$. Definim $K_0(\mathcal{P})$ com el grup abelià lliure generat per $\mathcal{O}bj\,\mathcal{P}_0$ mòdul les relacions següents:

0-(i) $[P] = [P']$ si $P \cong P'$ en $\mathcal{P}$.

0-(ii) $[P] = [P_1] + [P_2]$ si tenim una successió exacta curta (en $\mathcal{P}$):

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$$

on $[P]$ denota la classe corresponent en $K_0(\mathcal{P})$. (Observem que, per (i), la notació $[P]$ té sentit per a tot $P \in \mathcal{O}bj\,\mathcal{P}$ i que (i) és un cas particular de (ii) prenent $P_1 = 0$).

Definim $K_1(\mathcal{P})$ com el grup abelià lliure generat pels parells (P, α) on $P \in \mathcal{O}bj\,\mathcal{P}_0$ i $\alpha \colon P \to P$ és un automorfisme, mòdul les relacions següents:

1-(i) $[(P, \alpha)] + [(P, \beta)] = [(P, \alpha\beta)]$.

1-(ii) Si existeix un diagrama commutatiu en $\mathcal{P}$ amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_2}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & P_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

on α, α_1 i α_2 són automorfismes, aleshores

$$[(P, \alpha)] = [(P_1, \alpha_1)] + [(P_2, \alpha_2)].$$

Tenim que, donat un functor exacte $F \colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ entre categories exactes indueix homomorfismes de grups abelians $F_* \colon K_0(\mathcal{P}) \to K_0(\mathcal{Q})$ i $F_* \colon K_1(\mathcal{P}) \to K_1(\mathcal{Q})$ (*cf.* [**60**, Proposition 3.1.9]). Aplicant aquestes definicions a la categoria de mòduls projectius finitament generats sobre una anell R obtenim noves definicions de $K_0(R)$ i $K_1(R)$:

DEFINICIONS 1.1.7. Donat un anell R definim

$$K_0(R) = K_0(\textbf{proj-}R) \quad \text{i} \quad K_1(R) = K_1(\textbf{proj-}R).$$

Evidentment, aquestes definicions coincideixen amb les anteriors. Per exemple en trobem la demostració a [**60**, Theorem 3.1.7]. Farem servir una o l'altra definició de K_0 i K_1 segons ens convingui.

OBSERVACIÓ 1.1.8. Siguin R i S anells (amb unitat) i $f \colon R \to S$ un morfisme no unital. De les definicions de K_0 i K_1 a partir de les categories de mòduls projectius en deduïm que f indueix $f_* \colon K_0(R) \to K_0(S)$ i $f_* \colon K_1(R) \to K_1(S)$. En efecte, tenim que $f(1)$ és un idempotent de S. Així, tenim que $R \otimes_f S \cong f(1)S$ és un S-mòdul projectiu cíclic i, per tant, si P és un R-mòdul projectiu finitament generat $P \otimes_f S$ és un S-mòdul projectiu finitament generat i l'anterior té sentit.

1.2. Algunes àlgebres associades a un buirac

En aquesta secció introduirem algunes de les notacions i definicions que s'usaran al llarg de tota la memòria. Concretament, donarem la definició de buirac, d'àlgebra de camins sobre un buirac i d'àlgebra de sèries formals sobre un buirac. A més, mostrarem alguns resultats sobre l'estructura de l'àlgebra de camins; entre aquests resultats farem el càlcul (ben conegut) del monoide de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats de l'àlgebra de camins d'un buirac.

Siguin A un anell i M un A-bimòdul, definim

$$T_A^0(M) = A, \quad T_A^n(M) = M \otimes_A \cdots \otimes_A M \quad (n \text{ factors}, n \geqslant 1),$$

com a A-bimòduls. Considerem la suma directa

$$T_A(M) = T_A^0(M) \oplus T_A^1(M) \oplus \cdots$$

Les aplicacions biadditives A-equilibrades $T_A^n(M) \times T_A^m(M) \to T_A^{n+m}(M)$, donades per $(a, b) \mapsto a \otimes b$, ens permeten definir un producte en $T_A(M)$ de manera que té estructura d'anell. De fet, com que A s'inclou en $T_A(M)$ és un A-anell, l'*A-anell tensorial* en M, i compleix la següent propietat universal [**14**, Lema III.1.2]:

LEMA 1.2.1. *Donats un A-anell R i un morfisme d'A-bimòduls $f\colon M \to R$ existeix un únic morfisme d'A-anells $\hat{f}\colon T_A(M) \to R$ tal que $\hat{f}_{|M} = f$.*

Un *buirac* (*quiver*) o *graf orientat* E és una quaterna (E^0, E^1, r_E, s_E) formada per dos conjunts E^0 i E^1, respectivament els *vèrtexs* i les *arestes* (o fletxes), i aplicacions d'*incidència* $r_E, s_E\colon E^1 \to E^0$. Normalment, quan sigui clar a quin graf es refereixen les aplicacions d'incidència, les denotarem simplement per r, s. Donada una fletxa $e \in E^1$, $s(e)$ és el seu origen i $r(e)$ és el seu destí. Un camí finit en E és una seqüència ordenada d'arestes $\alpha = e_1 \cdots e_n$ amb $r(e_t) = s(e_{t+1})$ per $1 \leqslant t < n$, o bé un camí de longitud zero corresponent a un vèrtex $i \in E^0$, que denotarem per p_i. En aquesta memòria, el mot camí voldrà dir **sempre** camí finit. Els camins de longitud zero s'anomenen camins trivials. Un camí no trivial $\alpha = e_1 \cdots e_n$ té longitud n. Denotarem la longitud del camí α per $|\alpha|$, el conjunt de tots els camins de longitud n per E^n (on $n > 1$) i el conjunt de tots els camins per E^*. Podem estendre r i s a tot E^* definint $s(e_1 \cdots e_n) = s(e_1)$, $r(e_1 \cdots e_n) = r(e_n)$ i $s(p_i) = r(p_i) = i$. De vegades denotarem aquestes extensions al conjunt de tots els camins amb un subíndex: $r_{E^*}, s_{E^*}\colon E^* \to E^0$. Un *subgraf* F del buirac E ve donat per subconjunts $F^0 \subseteq E^0$ i $F^1 \subseteq E^1$ amb les aplicacions donades per restricció.

DEFINICIONS 1.2.2. Els vèrtexs que només emeten o reben arestes tindran certa rellevància i mereixen un nom especial:

- Un vèrtex $i \in E^0$ és una *font* si $r^{-1}(i) = \emptyset$. Denotarem per $F(E)$ el conjunt de totes les fonts en E.
- Un vèrtex $i \in E^0$ és una *pica* (o *desguàs*) si $s^{-1}(i) = \emptyset$. Denotarem per $D(E)$ el conjunt de totes les piques en E.

Recordem que K denota un cos fixat. Sigui $P(E)$ el K-espai vectorial amb base E^*. És fàcil veure que $P(E)$ té estructura de K-àlgebra (vegeu per exemple [**14**, Section III.1]), l'anomenem la *K-àlgebra de camins* del buirac E. Si ens convingués recalcar-ne el cos base usarem la notació $P_K(E)$. Tenim que $P(E)$ és la K-àlgebra lliure generada per $\{p_i \mid i \in E^0\} \cup E^1$ mòdul les relacions:

(i) $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$ per a tot $i, j \in E^0$.
(ii) $p_{s(e)} e = e p_{r(e)} = e$ per a tot $e \in E^1$.

Si E té un nombre finit de vèrtexs tenim que $P(E)$ és una àlgebra unital amb $1 = \sum_{i\in E^0} p_i$ (el recíproc també és cert). Si E^0 és infinit aleshores $P(E)$ és un anell sense unitat, no obstant és un anell amb unitat local (vegeu Secció 1.6). Normalment suposarem que els nostres grafs són finits:

NOTACIÓ 1.2.3. Al llarg de tota la memòria, tret que s'indiqui una altra cosa, E denotarà un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ (on $d = |E^0|$).

Observem que $A = \oplus_{i\in E^0} Kp_i$ és un subanell de $P(E)$ isomorf a l'anell K^d. Sovint identificarem $A \subseteq P(E)$ amb K^d. Considerem el grup abelià $M = \oplus_{e\in E^1} Ke \subseteq P(E)$ i els morfismes d'anells:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & \mathrm{End}(M) & \qquad & A & \longrightarrow & \mathrm{End}(M)^{\mathrm{op}} \\ a & \longmapsto & \mathcal{L}_a\colon M \to M & \qquad & a & \longmapsto & \mathcal{R}_a\colon M \to M \end{array}$$

on $\mathcal{L}_a$ i $\mathcal{R}_a$ denoten, respectivament, el producte per l'esquerra i per la dreta per l'element a. És clar que aquests morfismes doten M d'estructura d'A-bimòdul. La K-àlgebra de camins té estructura d'anell tensorial [**14**, Proposition III.1.3]:

PROPOSICIÓ 1.2.4. *Amb les notacions anteriors,* $P(E) \cong T_A(M)$.

Amb el mateix M, posem $R_n = \bigoplus_{i\geqslant n} T_A^i(M)$. Tenim una filtració inversa:

$$P(E) = R_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots, \quad R_i R_j \subseteq R_{i+j}, \bigcap R_n = 0.$$

DEFINICIÓ 1.2.5. Definim la *K-àlgebra de sèries formals* del buirac E, denotada per $P(\!(E)\!)$, com la completació de $P(E)$ respecte a la filtració inversa anterior.

Posem $R = P(E)$ o $P(\!(E)\!)$. Un element de R s'escriu de manera única com una suma, possiblement infinita, $\sum_{\gamma\in E^*} \lambda_\gamma \gamma$ amb $\lambda_\gamma \in K$; per similitud amb l'àlgebra lliure sovint ens referirem als camins que apareguin en una descomposició d'aquesta forma com a *monomis*. Denotarem per ε el morfisme augmentació, que és el morfisme d'anells $\varepsilon\colon R \to K^d \subseteq R$, definit per $\varepsilon(\sum_{\gamma\in E^*} \lambda_\gamma \gamma) = \sum_{i\in E^0} \lambda_{p_i} p_i$. La inclusió $\iota\colon K^d \hookrightarrow P(E)$ és una secció de ε. Observem que els elements de $M_n(R)$ (o de R^n) s'escriuen també com a sumes, possiblement infinites, $\sum_{\gamma\in E^*} \lambda_\gamma \gamma$ amb $\lambda_\gamma \in M_n(K^d)$ (respectivament amb $\lambda_\gamma \in (K^d)^n$) de manera que, sobre aquests, també podem definir morfismes (d'anells) augmentació que denotarem igualment per ε. Donat $r = \sum_{\gamma\in E^*} \lambda_\gamma \gamma \in R, M_n(R)$ o R^n definim el seu *suport* com $\mathrm{supp}(r) = \{\gamma \in E^* \mid \lambda_\gamma \neq 0\}$. Per a $r \neq 0$ definim l'*ordre* de r, en símbols $o(r)$, com la longitud mínima dels camins de $\mathrm{supp}(r)$; per conveni posarem $o(0) = \infty$. En cas que $r \in P(E) \setminus \{0\}$ denotarem per $\deg(r)$ la longitud màxima dels camins de $\mathrm{supp}(r)$, el *grau* de r; per conveni posarem $\deg(0) = -\infty$.

A continuació ens convé recordar alguns resultats de [**16**], per fer-ho introduïm primer algunes notacions d'aquest article; en principi, aquestes notacions no les usarem enlloc més de la memòria. Si R és un anell, un anell S junt amb un homomorfisme d'anells $R \to S$ s'anomena un *R-anell*. Sigui k un anell commutatiu. En el cas que R sigui una k-àlgebra, una k-àlgebra S amb un homomorfisme de k-àlgebres $R \to S$ l'anomenarem un *R-anell$_k$*. Si S és un R-anell i M un R-mòdul escriurem $\overline{M} = M \otimes_R S$ quan no hi hagi risc de confusió. De la mateixa manera, si $f\colon M \to N$

és un homomorfisme de R-mòduls denotarem $f \otimes \mathbf{1}_S$ per $\overline{f}$. El següent resultat és [**16**, Theorem 3.1]:

Teorema 1.2.6 (Bergman). *Siguin R una k-àlgebra, M un R-mòdul i P un R-mòdul projectiu finitament generat. Aleshores existeix un R-anell$_k$, S, amb un homomorfisme de mòduls universal $f\colon M \otimes_R S \to P \otimes_R S$. És a dir, que té un homomorfisme de S-mòduls f tal que, donats T un R-anell$_k$ i $g\colon M \otimes_R T \to P \otimes_R T$ un homomorfisme de T-mòduls, existeix un únic homomorfisme de R-anells$_k$ $S \to T$ tal que $g = f \otimes_S T$.*

Més en general, donada una família de parells de R-mòduls d'aquest tipus, M_i, P_i (amb $i \in I$ un conjunt) existeix un R-anell$_k$ S amb una família d'homomorfismes universals $\{f_i\colon M_i \otimes_R S \to P_i \otimes_R S \mid i \in I\}$ complint la mateixa propietat universal.

Denotarem l'anell S constuït en el teorema anterior per $R\left\langle f_i\colon \overline{M}_i \to \overline{P}_i \mid i \in I\right\rangle$. Està ben definit tret d'isomorfisme natural. Observem que l'àlgebra de camins $P(E)$ es pot obtenir a usant la construcció anterior. En efecte, si denotem per p_i els idempotents bàsics de K^d tenim:

$$P(E) = K^d\left\langle f_e\colon \overline{p_{r(e)}K^d} \to \overline{p_{s(e)}K^d} \mid e \in E^1\right\rangle.$$

Donat un anell R denotem per **mod-**R la categoria dels R-mòduls dreta finitament generats. Denotarem per $\mathcal{V}(\textbf{mod-}S)$ el monoide (abelià) de classes d'isomorfia, $[M]$, amb l'operació induïda per la suma directa: $[M] + [N] = [M \oplus N]$. Sigui S un R-anell. Escriurem $\textbf{fund-}S \subseteq \textbf{mod-}S$ per la subcategoria plena dels S-mòduls finitament generats induïts, és a dir, de la forma $M \otimes_R S$ (M un R-mòdul). Posarem també $\mathcal{V}(\textbf{fund-}S) \subseteq \mathcal{V}(\textbf{mod-}S)$ el monoide (abelià) de classes d'isomorfia de S-mòduls induïts amb l'operació donada per $\oplus$. Amb aquestes notacions podem enunciar el següent resultat [**16**, Theorem 5.3]:

Teorema 1.2.7 (Bergman). *Siguin P i Q mòduls projectius finitament generats i no nuls sobre la k-àlgebra R. En l'anell $S = R\left\langle f\colon \overline{P} \to \overline{Q}\right\rangle$, tot submòdul d'un mòdul induït és isomorf a un mòdul induït. $\mathcal{V}(\textbf{mod-}R) \cong \mathcal{V}(\textbf{fund-}S)$ via $[M] \mapsto [\overline{M}]$ i aquest morfisme preserva les dimensions homològiques. A més,*

$$\text{r.gl.dim}\, S = \max(\text{r.gl.dim}\, R, 1).$$

Recordem que un anell R és *hereditari dreta* (respectivament, *esquerra*) si tot ideal dreta (respectivament, esquerra) de R és projectiu com a R-mòdul dreta (respectivament, esquerra). És ben conegut el Teorema de Kaplansky, que ens assegura que en un anell hereditari dreta tot submòdul d'un mòdul lliure (dreta) és isomorf a una suma directa d'ideals dreta i, per tant, projectiu (vegeu [**39**, §2E]). El següent resultat, que obtenim com a conseqüència del Teorema de Bergman, és ben conegut:

Proposició 1.2.8. *Sigui E un buirac (finit). L'àlgebra de camins $P(E)$ és un anell hereditari dreta. A més, $\varepsilon\colon P(E) \to K^d$ indueix un isomorfisme de monoides:*

$$\mathcal{V}(P(E)) \overset{\varepsilon_*}{\cong} \mathcal{V}(K^d) \cong \mathbb{N}^d.$$

Demostració. En efecte, procedim per inducció sobre el nombre d'arestes. Sigui E un buirac finit i considerem X_1 un subgraf de E amb el mateix conjunt de vèrtexs però només una aresta, diguem-li e, aleshores

$$P(X_1) = K^d \big\langle f_e \colon \overline{p_{r(e)} K^d} \to \overline{p_{s(e)} K^d} \big\rangle.$$

Ara, pel Teorema 1.2.7 tenim que la dimensió global dreta de $P(X_1)$ és igual 1, cosa que vol dir que és hereditari dreta (*cf.* [**39**, Proposition 5.14]). A més, la inclusió $\iota \colon K^d \to P(X_1)$ indueix un isomorfisme

$$\mathbb{N}^d \cong \mathcal{V}(K^d) \overset{\iota_*}{\cong} \mathcal{V}(P(X_1))$$

amb inversa donada per ε_*.

Suposem-ho cert ara per a $n \geqslant 1$ i vegem-ho per a $n+1$. Considerem E un graf amb $|E^1| > n$ i sigui X_n un subgraf de E amb els mateixos vèrtexs i n arestes. Per hipòtesi d'inducció tenim que X_n compleix el resultat. Prenem $e \in E^1 \setminus X_n^1$ i considerem X_{n+1} el subgraf de E donat per $X_{n+1}^0 = E^0$ i $X_{n+1}^1 = X_n^1 \cup \{e\}$. Ara,

$$P(X_{n+1}) = P(X_n) \big\langle f_e \colon \overline{p_{r(e)} P(X_n)} \to \overline{p_{s(e)} P(X_n)} \big\rangle$$

i aplicant novament el Teorema 1.2.7 obtenim el resultat. □

Observació 1.2.9. De fet $P(E)$ és un anell hereditari per tots dos costats, ja que podem construir-lo anàlogament usant mòduls per l'esquerra i usar el dual del Teorema 1.2.7.

1.3. L'àlgebra de Leavitt d'un buirac

En aquesta secció introduirem la noció d'àlgebra de Leavitt d'un buirac (no necessàriament finit) i donarem alguns resultats sobre aquesta, deguts a Ara, Moreno i Pardo, que trobem en [**10**]. Entre aquests resultats el més rellevant per al que seguirà és la descripció del monoide de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats de l'àlgebra de Leavitt d'un buirac.

Definició 1.3.1. Sigui E un buirac finit. Definim la *K-àlgebra de Leavitt* del buirac E, en símbols $L(E)$, com la K-àlgebra lliure generada pel conjunt $\{p_i \mid i \in E^0\} \cup \{e, \overline{e} \mid e \in E^1\}$ mòdul les següents relacions:

(i) $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$ per a tot $i, j \in E^0$.
(ii) $p_{s(e)} e = e p_{r(e)} = e$ per a tot $e \in E^1$.
(iii) $p_{r(e)} \overline{e} = \overline{e} p_{s(e)} = \overline{e}$ per a tot $e \in E^1$.
(iv) $e \overline{f} = \delta_{ef} p_{s(e)}$ per a tot $e, f \in E^1$.
(v) $p_i = \sum_{e \in r^{-1}(i)} \overline{e} e$ per a tot $i \in E^0 \setminus F(E)$.

Convé remarcar que la definició d'àlgebra de Leavitt que usem nosaltres és la dual de la que sovint s'usa (per exemple en [**10**]). Això vol dir que les nostres relacions definitòries són les contràries respecte a les usades en l'article i, per exemple, s'intercanvien els rols de fonts i piques.

Definim el grau de e com a 1 i el grau de $\overline{e}$ com a -1 per a tot $e \in E^1$ i definim també el grau de p_i com a 0 per a tot $i \in E^0$. D'aquesta manera obtenim un grau ben definit en l'àlgebra $L(E)$, ja que les seves relacions definitòries són homogènies. Per tant, $L(E)$ és una àlgebra $\mathbb{Z}$-graduada:

$$L(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L(E)_n; \qquad L(E)_n L(E)_m \subseteq L(E)_{n+m}, \quad \text{per a tot } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Per un subconjunt X d'un anell $\mathbb{Z}$-graduat $R = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_n$, posem $X_n = X \cap R_n$. Un ideal I de R és un *ideal graduat* si $I = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n$.

Per tal que l'assignació $E \mapsto L(E)$ ens defineixi un functor entre les categories dels grafs i dels anells necessitem una condició sobre els morfismes de grafs. Recordem que un *morfisme de grafs* $f\colon E = (E^0, E^1) \to F = (F^0, F^1)$ ve donat per dues aplicacions $f^0\colon E^0 \to F^0$ i $f^1\colon E^1 \to F^1$ tals que $r_F(f^1(e)) = f^0(r_E(e))$ i $s_F(f^1(e)) = f^0(s_E(e))$ per a tot $e \in E^1$. Diem que un morfisme de grafs és *complet* si f^0 és injectiva i f^1 restringeix a una bijecció de $r_E^{-1}(i)$ sobre $r_F^{-1}(f^0(i))$ per a tot $i \in E^0 \setminus F(E)$. De vegades direm que un subgraf E de F és un *subgraf complet* si la inclusió $E \hookrightarrow F$ és un homomorfisme de grafs complet.

Observació 1.3.2. L'assignació $E \mapsto L(E)$ defineix un functor entre la categoria dels buiracs (finits) amb homomorfismes complets de grafs i la categoria dels anells $\mathbb{Z}$-graduats unitals amb homomorfismes d'anells graduats no necessàriament unitals.

Observació 1.3.3. Siguin E i F buiracs finits. Si $f\colon F \to E$ és un morfisme complet de grafs aleshores el morfisme d'anells induït $f_*\colon L(F) \to L(E)$ és injectiu. En efecte, com que f_* és un morfisme d'anells graduat tenim que $\ker f_*$ és un ideal graduat. De [**10**, Theorem 5.3] en deduïm que qualsevol ideal graduat I en $L(F)$ està generat com a ideal pels idempotents $p_i \in I$ (on $i \in F^0$). Com que $\ker f_*$ no conté idempotents del tipus p_i $(i \in F^0)$ veiem que $\ker f_* = 0$.

Observem que les definicions anteriors tenen sentit també per a un graf E no necessàriament finit sempre i quan les sumes de la relació (v) en la Definició 1.3.1 siguin finites. Diem que un graf (orientat) E té *columnes finites* si per a tot $i \in E^0$ tenim $|r^{-1}(i)| < \infty$.

Posem $\mathcal{G}$ la categoria dels grafs de columnes finites amb els homomorfismes complets de grafs. Ara recordarem alguns resultats de [**10**]. Com hem dit abans, la nostra definició de Leavitt és la dual de la que apareix a l'article. Per tant, quan a l'article es requereix la hipòtesi de "files finites" nosaltres necessitem la condició dual, és a dir, columnes finites. Els següents resultats són [**10**, Lemma 3.1, Lemma 3.2]:

Lema 1.3.4 (Ara, Moreno, Pardo). *Tot graf E amb columnes finites és un límit directe dins de la categoria $\mathcal{G}$ d'un sistema dirigit de grafs finits.*

Lema 1.3.5 (Ara, Moreno, Pardo). *L'assignació $E \mapsto L(E)$ estén a un functor L entre la categoria $\mathcal{G}$ dels grafs de columnes finites amb homomorfismes complets de grafs i la categoria de les K-àlgebres (potser) sense unitat i homomorfismes de K-àlgebres no unitals. A més, el functor L és continu, és a dir, commuta amb els límits directes. Tenim, doncs, que tota àlgebra $L(E)$ és un límit directe d'àlgebres corresponents a grafs finits.*

El monoide $\mathcal{V}(L(E))$ de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats de l'àlgebra de Leavitt d'un buirac E ha estat calculat en [**10**], resultat que mostrem a continuació.

Sigui E un graf (orientat) amb columnes finites. Posem F_E el monoide abelià lliure generat pel conjunt E^0. Els elements no nuls de F_E s'escriuen de manera única, tret de permutacions, com a una suma $\sum_{i=1}^n v_i$, on $v_i \in E^0$. Per a $v \in E^0 \setminus F(E)$, posem

$$\mathbf{s}(v) := \sum_{e\in r^{-1}(i)} s(e)$$

Definim el monoide M_E com $M_E = F_E/\sim$, on $\sim$ és la congruència en F_E generada pels parells $(v, \mathbf{s}(v))$ amb $v \in E^0 \setminus F(E)$. Per [**10**, Lemma 3.4] tenim un functor continu:

LEMA 1.3.6 (Ara, Moreno, Pardo). *L'assignació $E \mapsto M_E$ estén a un functor continu de la categoria $\mathcal{G}$ dels grafs de columnes finites amb homomorfismes complets de grafs cap a la categoria dels monoides abelians.*

El Teorema és el següent *cf.* [**10**, Theorem 3.5]:

TEOREMA 1.3.7 (Ara, Moreno, Pardo). *Sigui E un graf (orientat) amb columnes finites. Aleshores existeix un isomorfisme de monoides natural $M_E \cong \mathcal{V}(L(E))$ definit per $[v] \mapsto [p_v L(E)]$. A més, si E és finit aleshores la dimensió global de $L(E)$ és $\leqslant 1$.*

1.4. Localització universal

En aquesta secció introduirem la localització universal de Cohn i presentarem la successió exacta en Teoria K "clàssica" induïda per una localització universal, resultat degut a A.H. Schofield (vegeu Teorema 1.4.11). Seguim principalment [**63**, Chapter 4].

Siguin R un anell i Σ un conjunt de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats. Donat un altre anell S i un morfisme $f\colon R \to S$ diem que f és Σ-*inversor* si els morfismes $\gamma \otimes \mathbf{1}_S$ són invertibles en S per a tot $\gamma \in \Sigma$. Diem que el morfisme f és Σ-*inversor universal* si tot morfisme Σ-inversor $g\colon R \to T$ factoritza de manera única a través seu. Anomenem a aquest S la *localització universal* (de R respecte a Σ) i el denotem per R_Σ. Denotarem per $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ l'aplicació Σ-inversora universal. La localització universal existeix per a qualssevol anell R i conjunt de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats Σ. Podem considerar-ne dues construccions diferents, vegeu [**20**, Chapter 7], [**48**] i [**63**, Chapter 4]. Les següents notacions ens seran d'utilitat per als resultats en aquesta secció:

NOTACIÓ 1.4.1. $\widehat{P} = P \otimes_R R_\Sigma$ i $\widehat{\gamma} = \gamma \otimes \mathbf{1}\colon P \otimes_R R_\Sigma \to Q \otimes_R R_\Sigma$.

Sigui $f\colon R \to S$. Observem que donats R-mòduls projectius $\{P_i\}_{i\in I} \subseteq$ **proj-**R, amb I un conjunt finit, el morfisme $\phi_I\colon (\oplus_i P_i) \otimes_R S \to \oplus_i (P_i \otimes_R S)$ definit via $(p_i) \otimes r \mapsto (p_i \otimes r)$ és un isomorfisme. Donats un altre conjunt de R-mòduls projectius $\{P'_j\}_{j\in J} \subseteq$ **proj-**R (J finit) i morfismes $\gamma_{i,j} \in \mathrm{Hom}_S(P_i \otimes_R S, P'_j \otimes_R S)$ tenim que

$$\Gamma = (\gamma_{i,j}) \in \mathrm{Hom}_S(\oplus_i(P_i \otimes_R S), \oplus_j(P'_j \otimes_R S)).$$

Per a un morfisme d'aquestes característiques usarem la següent notació:

Notació 1.4.2. $\overline{\Gamma} = \phi_J^{-1}\Gamma\phi_I \in \mathrm{Hom}_S((\oplus_i P_i)\otimes_R S, (\oplus_i P_i')\otimes_R S)$.

Els dos resultats que enunciem a continuació ens donen representacions dels morfismes entre R_Σ-mòduls projectius finitament generats induïts (*i.e.* projectius finitament generats de la forma $\widehat{P}$) i ens permeten fer càlculs. El criteri de Malcolmson [**63**, Theorem 4.2] el trobem demostrat per al cas de matrius en [**48**] i la Regla de Cramer la trobem en [**63**, Theorem 4.3]:

Teorema 1.4.3 (Criteri de Malcolmson). *Siguin R un anell i Σ un conjunt de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats. Aleshores, tot morfisme entre R_Σ-mòduls projectius finitament generats i induïts és de la forma $\widehat{\mu}\widehat{\lambda}^{-1}\widehat{\nu}$ per a morfismes μ, ν i λ definits en R i de manera que*

$$\lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_n \end{pmatrix} \text{ per a alguns } \kappa_i \in \Sigma.$$

A més, $\widehat{\mu}_1\widehat{\lambda}_1^{-1}\widehat{\nu}_1 = \widehat{\mu}_2\widehat{\lambda}_2^{-1}\widehat{\nu}_2$ si i només si tenim una igualtat, en la categoria dels R-mòduls projectius finitament generats, de la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & -\nu_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \nu_4 \\ \hline \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \pi \\ \hline \sigma \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \rho & \tau \end{array}\right)$$

on λ_3, λ_4, π i ρ són de la forma

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_n \end{pmatrix} \text{ per a alguns } \kappa_i \in \Sigma.$$

Teorema 1.4.4 (Regla de Cramer). *Siguin R un anell i Σ un conjunt de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats. Llavors, en la categoria dels R_Σ-mòduls projectius finitament generats i induïts, cada morfisme $\gamma\colon \widehat{P} \to \widehat{Q}$ satisfà una equació de la forma*

$$\widehat{\beta}\overline{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \gamma' \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} = \widehat{\beta}'$$

on β i β' són morfismes definits en R, γ' és un morfisme definit en R_Σ i tenim

$$\beta = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \kappa_n \end{pmatrix} \text{ per a alguns } \kappa_i \in \Sigma.$$

Tenim les següents conseqüències de la Regla de Cramer:

Corol·lari 1.4.5 ([**63**, Corollary 4.4]). *Tot morfisme entre R_Σ-mòduls projectius finitament generats és establement associat a un morfisme induït.*

Corol·lari 1.4.6 ([**63**, Corollary 4.5]). *Tot R_Σ-mòdul finitament presentat és induït per un R-mòdul finitament presentat.*

OBSERVACIÓ 1.4.7. El morfisme Σ-inversor universal $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ és un epimorfisme d'anells (vegeu [**63**, Chapter 4]). Aquí entenem epimorfisme en el sentit categorial, és a dir, un morfisme d'anells $f\colon R \to S$ és un *epimorfisme* si donats dos morfismes d'anells $g, h\colon S \to T$ tals que $g \circ f = h \circ f$ aleshores $g = h$.

Per tal d'enunciar la successió de localització universal necessitarem la següent definició [**63**, Definició prèvia a Theorem 4.12]:

DEFINICIÓ 1.4.8. Considerem R un anell i Σ un conjunt d'aplicacions entre R-mòduls projectius finitament generats de manera que $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ sigui injectiva. Sigui $\overline{\Sigma}$ un conjunt d'aplicacions entre R-mòduls projectius finitament generats que esdevinguin invertibles en R_Σ i de manera que tot morfisme entre R-mòduls projectius finitament generats que esdevingui invertible en R_Σ sigui associat a algun element de $\overline{\Sigma}$. Denotem per $\mathbf{T}_\Sigma(R)$ la subcategoria plena de la categoria dels R-mòduls finitament presentats, els objectes de la qual són els mòduls isomorfs a conuclis d'elements de $\overline{\Sigma}$.

Observem que aquesta definició és independent de l'elecció de $\overline{\Sigma}$, ja que morfismes associats tenen conuclis isomorfs. La categoria anterior admet una subcategoria petita equivalent a l'original, per exemple la determinada pels conuclis (fixats) de morfismes en $\overline{\Sigma}$. A més, pel Lema que veurem a continuació, és una categoria tancada per extensions de manera que té sentit considerar el seu K_0. Observem que per tal que i_Σ sigui injectiu cal que tots els morfismes en Σ siguin monomorfismes.

LEMA 1.4.9. *La categoria $\mathbf{T}_\Sigma(R)$ és tancada per extensions.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin M_1, $M_2 \in \mathbf{T}_\Sigma(R)$, de manera que tenim una successió exacta de R-mòduls:

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0.$$

Per definició, tenim resolucions projectives

$$0 \to P_1 \xrightarrow{\gamma_1} Q_1 \to M_1 \to 0$$

$$0 \to P_2 \xrightarrow{\gamma_2} Q_2 \to M_2 \to 0$$

on γ_1 i γ_2 són morfismes associats a elements de $\overline{\Sigma}$. El Lema de la Ferradura (*cf.* [**62**, Horseshoe Lemma 6.20]) ens assegura que M té una resolució projectiva de la forma:

$$0 \to P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & * \\ 0 & \gamma_2 \end{smallmatrix}\right)} Q_1 \oplus Q_2 \to M \to 0,$$

ara, com que $\left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 & * \\ 0 & \gamma_2 \end{smallmatrix}\right)$ és associat a un element de $\overline{\Sigma}$ obtenim que $M \in \mathbf{T}_\Sigma(R)$, com volíem. $\square$

OBSERVACIÓ 1.4.10. Observem que $M \in \mathbf{T}_\Sigma(R)$ si i només si

(i) M és finitament presentat i de dimensió projectiva $\leqslant 1$.
(ii) $M \otimes_R R_\Sigma = 0 = \mathrm{Tor}_1^R(M, R_\Sigma)$.

Tenim el següent resultat [**63**, Theorem 4.12]:

TEOREMA 1.4.11 (Schofield). *Sigui R un anell, Σ un conjunt de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats i suposem que $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ és injectiva. Aleshores tenim una successió exacta natural*

$$K_1(R) \xrightarrow{i_{\Sigma *}} K_1(R_\Sigma) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathbf{T}_\Sigma(R)) \xrightarrow{\delta} K_0(R) \xrightarrow{i_{\Sigma *}} K_0(R_\Sigma)$$

En l'enunciat, δ ve donat per l'assignació $[M_\alpha] \mapsto [Q] - [P]$ on

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow 0$$

és una successió exacta amb $\alpha \in \overline{\Sigma}$. Per a la definició de ∂, considerem $\gamma\colon \widehat{P} \to \widehat{Q}$ un isomorfisme entre R_Σ-mòduls projectius finitament generats induïts. Aleshores, per la Regla de Cramer, tenim una equació

$$\widehat{\beta}\overline{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \gamma' \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} = \widehat{\beta}', \tag{1.4.1}$$

amb els morfismes involucrats com al Teorema 1.4.4. Com que $\widehat{\beta}$ i $\overline{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \gamma' \\ 0 & \gamma \end{smallmatrix}\right)}$ són invertibles sobre R_Σ també ho és $\widehat{\beta}'$ i, per tant, és associat a un element de $\overline{\Sigma}$. Es pot comprovar que l'assignació $\partial([\gamma]) = [\operatorname{coker}(\beta')] - [\operatorname{coker}(\beta)]$ ens dóna un morfisme ben definit.

En [**51**] Neeman i Ranicki demostren que la successió exacta del Teorema 1.4.11 es pot estendre a una successió exacta llarga natural en Teoria K superior si la localització universal és establement llisa. Seguint [**51**], diem que una localització universal $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ és *establement llisa* si $\operatorname{Tor}_n^R(R_\Sigma, R_\Sigma) = 0$ per a tot $n \geqslant 1$. Observem que la condició $\operatorname{Tor}_1^R(R_\Sigma, R_\Sigma) = 0$ es compleix sempre (vegeu [**63**, Theorems 4.7, 4.8]).

OBSERVACIÓ 1.4.12. Una condició suficient per a que la localització $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ sigui establement llisa és que l'anell R sigui hereditari dreta ja que, en aquest cas, per a $n \geqslant 2$ obtenim $\operatorname{Tor}_n^R(R_\Sigma, R_\Sigma) = 0$ com a conseqüència del fet que tot R-mòdul té dimensió projectiva $\leqslant 1$.

Tot i que Schofield no ho demostra es pot veure que la successió de Schofield és natural, en el següent sentit:

LEMA 1.4.13. *Siguin R, R' anells i $f\colon R \to R'$ un morfisme d'anells no necessàriament unital. Siguin Σ un conjunt de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats i Σ' un conjunt de morfismes entre R'-mòduls projectius finitament generats i tal que $f(\Sigma) \subseteq \Sigma'$ (és a dir, els morfismes induïts per morfismes de Σ són de Σ'). Suposem que $i_\Sigma\colon R \to R_\Sigma$ i $i_{\Sigma'}\colon R' \to R'_{\Sigma'}$ són injectius. Aleshores la successió de Schofield és exacta natural, en el sentit que tenim un diagrama commutatiu amb files exactes:*

(1.4.2)

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_1(R) & \xrightarrow{i_{\Sigma *}} & K_1(R_\Sigma) & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathbf{T}_\Sigma(R)) & \xrightarrow{\delta} & K_0(R) & \xrightarrow{i_{\Sigma *}} & K_0(R_\Sigma) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow & & \downarrow \\
K_1(R') & \xrightarrow{i_{\Sigma' *}} & K_1(R'_{\Sigma'}) & \xrightarrow{\partial'} & K_0(\mathbf{T}_{\Sigma'}(R')) & \xrightarrow{\delta'} & K_0(R') & \xrightarrow{i_{\Sigma *}} & K_0(R'_{\Sigma'}),
\end{array}$$

on, si $M \in \mathbf{T}_\Sigma(R)$ aleshores $\sigma([M]) = [M \otimes_f R']$.

DEMOSTRACIÓ. Només indicarem la demostració. Considerem una successió exacta amb $\alpha \in \Sigma$:

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

de manera que $M \in \mathbf{T}_\Sigma(R)$. Ara, com que $\alpha \otimes \mathbf{1}_{R'} \in \Sigma'$ i els morfismes de Σ' són injectius (ja que $R' \to R'_{\Sigma'}$ ho és) tenim que la següent successió és exacta:

$$0 \longrightarrow P \otimes_f R' \xrightarrow{\alpha\otimes\mathbf{1}_{R'}} Q \otimes_f R' \longrightarrow M \otimes_f R' \longrightarrow 0$$

i $M \otimes_f R' \in \mathbf{T}_{\Sigma'}(R')$. A més, usant el Lema de la Serp [**18**, Snake Lemma, Exercise 2.3.13] és fàcil veure que σ envia successions exactes a successions exactes, de manera que defineix un morfisme de grups abelians $K_0(\mathbf{T}_\Sigma(R)) \to K_0(\mathbf{T}_{\Sigma'}(R'))$. La commutativitat en el primer i quart quadrats de (1.4.2) es desprèn de la Observació 1.1.8. La del segon del fet que, amb les definicions que tenim, una equació del tipus (1.4.1) va a una equació del mateix tipus al fer producte tensorial i la del tercer és clara de les definicions. $\square$

1.5. El Teorema de Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang i Siebenmann

Donat un anell R és possible calcular la Teoria K de l'anell de polinomis $R[t]$ i de l'anell de polinomis de Laurent $R[t, t^{-1}]$ en funció de la Teoria K de R. En [**15**] Bass, Heller i Swan demostren que per a un anell regular R hom té $K_1(R[t]) \cong K_1(R)$ i $K_1(R[t, t^{-1}]) \cong K_1(R) \oplus K_0(R)$. Per a un anell R qualsevol, si posem $NK_1(R) = \ker(K_1(R[t]) \to K_1(R))$ on el morfisme és l'induït per l'augmentació tenim el següent resultat (*cf.* [**60**, Theorem 3.2.22] o [**77**, Theorem III.3.6]):

TEOREMA 1.5.1 (Bass, Heller, Swan). *Donat un anell R tenim un epimorfisme escindit $\partial\colon K_1(R[t, t^{-1}]) \to K_0(R)$ que encaixa en una successió exacta natural, escindida de manera natural:*

$$0 \to K_1(R) \xrightarrow{\Delta} K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_1(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \to 0.$$

En conseqüència, tenim una descomposició natural en suma directa:

$$K_1(R[t, t^{-1}]) \cong K_1(R) \oplus K_0(R) \oplus NK_1(R) \oplus NK_1(R).$$

El resultat anterior sovint es coneix com a Teorema Fonamental del K_1. Bona part de la importància d'aquest teorema radica en el fet que, en ésser $K_0(R)$ un sumand directe natural de $K_1(R[t, t^{-1}])$, sovint ens permet demostrar resultats sobre el K_0 a partir de resultats anàlegs en el K_1. El teorema anterior admet una generalització per al cas d'anells de polinomis de Laurent guerxo (*skew*) deguda a Farrell, Hsiang [**30**] i Siebenmann [**65**] (vegeu també [**54**]). Presentar aquest resultat i alguns altres de relacionats és l'objectiu d'aquesta secció. Per tal d'enunciar-lo necessitarem algunes definicions, notacions i resultats previs.

Per a un anell R amb un automorfisme ρ denotem per $R[t, t^{-1}; \rho]$ l'anell de polinomis de Laurent guerxo (*skew*), on el producte ve donat per la regla $rt^k = t^k \rho^k(r)$ ($k \in \mathbb{Z}$). $R[t; \rho]$ i $R[t^{-1}; \rho]$ són els subanells de polinomis guerxos en la variable t i t^{-1} respectivament. Observem que això suposa una certa inconsistència en la notació, ja que el paper que juga ρ en la regla del producte de $R[t; \rho]$, en $R[t^{-1}; \rho]$, el juga ρ^{-1}.

Definició 1.5.2. Un ρ-*homomorfisme* de R-mòduls M i N és un homomorfisme de grups abelians $f\colon M \to N$ tal que $f(mr) = f(m)\rho(r)$ per a tot $m \in M$ i tot $r \in R$.

Observem que la composició d'un ρ^k-homomorfisme amb un ρ^ℓ-homomorfisme dóna un $\rho^{k+\ell}$-homomorfisme ($k, \ell \in \mathbb{Z}$). La inversa d'un ρ^k-isomorfisme és un ρ^{-k}-isomorfisme. Denotarem per $\mathrm{Hom}_\rho(M, N)$ el conjunt de tots els ρ-homomorfismes de M a N (usarem la notació anàloga per al conjunt d'endomorfismes).

Donada una categoria $\mathcal{C}$ definim la categoria d'endomorfismes sobre $\mathcal{C}$, $\mathbf{End}\,\mathcal{C}$, com la categoria formada pels parells (M, f) on $M \in \mathcal{O}bj\,\mathcal{C}$ i f és un endomorfisme de M. Un morfisme $g\colon (M, f) \to (M', f')$ ve donat per un morfisme entre els objectes corresponents $g\colon M \to M'$ complint

$$gf = f'g \tag{1.5.1}$$

En cas que $\mathcal{C}$ sigui una categoria de R-mòduls i ρ un automorfisme de R podem considerar la categoria ρ-$\mathbf{End}\,\mathcal{C}$, definida com abans, però on els objectes són parells (M, f) amb f un ρ-endomorfisme de M enlloc d'un endomorfisme. També considerarem les subcategories plenes ρ-$\mathbf{Aut}\,\mathcal{C}$ i ρ-$\mathbf{Nil}\,\mathcal{C}$ on els objectes són parells (M, f) amb f un ρ-automorfisme o un ρ-endomorfisme nilpotent, respectivament.

Anàlogament al que passa per als anell de polinomis i de polinomis de Laurent usuals, les categories de ρ-endomorfismes i ρ-automorfismes de R-mòduls estan estretament relacionades amb les categories de mòduls sobre anells adequats. És fàcil veure que la categoria ρ-**EndMod**-R és equivalent a la categoria **Mod**-$R[t;\rho]$ i la categoria ρ-**AutMod**-R és equivalent a la categoria **Mod**-$R[t, t^{-1};\rho]$. En particular són categories abelianes. Tenim el següent resultat:

Lema 1.5.3. *ρ-**Autproj**-R i ρ-**Nilproj**-R són categories amb successions exactes i, per tant, podem considerar el seu K_0.*

Demostració. En efecte, ρ-**Autproj**-R i ρ-**Nilproj**-R són subcategories additives plenes de ρ-**EndMod**-R que sabem que és una categoria abeliana. Sigui $e \in M_n(R)$ una matriu idempotent. És fàcil veure que hi ha una isomorfisme $\mathrm{End}_{\rho^k}(eR^n) \cong \mathrm{Hom}(eR^n, \rho^{-k}(e)R^n)$, diguem-li φ. Per tant, si denotem per ℓ_M l'aplicació multiplicar per l'esquerra per M tenim que els ρ^k-endomorfismes de eR^n són de la forma $\varphi^{-1}(\ell_M)$ on $M \in \rho^{-k}(e)M_n(R)e$. Un esquelet petit seria, doncs, el format pels parells $(eR^n, \varphi^{-1}(\ell_M))$ on $e \in M_n(R)$ és una matriu idempotent i $M \in \rho^{-k}(e)M_n(R)e$ és invertible o nilpotent segons el cas.

Una successió exacta en la categoria d'endomorfismes serà un diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on les files són successions exactes en la categoria de mòduls corresponent. Per tant, si M_1 i M_2 són mòduls projectius és clar que M també ho és. Si f_1 i f_2 són automorfismes, pel Lema dels Cinc ([**62**, Five Lemma 3.32]), f també ho serà; d'on $(M, f) \in \rho$-**Autproj**-R. Igualment, si $f_1^n = 0$ i $f_2^m = 0$ aleshores $f^{n+m} = 0$. $\square$

En conseqüència, les següents definicions tenen sentit:

DEFINICIONS 1.5.4. Per a un anell R amb un automorfisme ρ

(i) Definim el *grup de classes de nilpotència* com
$$Nil_0(R,\rho) = K_0(\rho\textbf{-Nilproj-}R).$$

(ii) Definim el *grup reduït de classes de nilpotència* com
$$\widetilde{Nil}_0(R,\rho) = \operatorname{coker}(K_0(R) \to Nil_0(R,\rho)),$$
on $K_0(R) \to Nil_0(R,\rho)$ és $[P] \mapsto [P,0]$.

(iii) Definim el *grup de classes d'automorfismes* com
$$Aut_0(R,\rho) = K_0(\rho\textbf{-Autproj-}R).$$

(iv) Definim el *grup de classes de torsió* $K_1(R,\rho)$ com el quocient de $Aut_0(R,\rho)$ pel subgrup generat per les diferències $[P,\gamma]-[P',\gamma']$ amb un isomorfisme $\lambda\colon P \to P'$ tal que $[\lambda^{-1}\gamma'^{-1}\lambda\gamma] = 0 \in K_1(R)$.

Observem que si tenim un parell d'anells amb automorfisme associat (R,ρ) i (S,σ), aleshores un morfisme d'anells $f\colon R \to S$ (unital) tal que $f\rho = \sigma f$ indueix un functor exacte
$$\begin{aligned} f_*\colon \rho\textbf{-Autproj-}R &\longrightarrow \sigma\textbf{-Autproj-}S \\ (P,\gamma) &\longmapsto (P \otimes_f S, \gamma \otimes \sigma) \\ \lambda &\longmapsto \lambda \otimes \mathbf{1} \end{aligned}$$
per tant, també indueix un morfisme de grups $f_*\colon Aut_0(R,\rho) \to Aut_0(S,\sigma)$. Hom pot deduir fàcilment d'aquí que $K_1(-,-)$ defineix un functor de la categoria dels anells amb automorfisme a la categoria dels grups abelians. El mateix és cert per a $Nil_0(-,-)$ i $\widetilde{Nil}_0(-,-)$.

OBSERVACIÓ 1.5.5. En el cas que $f\colon R \to S$ sigui un morfisme no unital aquest ens indueix un morfisme de grups $f_*\colon K_1(R,\rho) \to K_1(S,\sigma)$. En efecte, en aquest supòsit tenim que $f(1)$ és un idempotent de S. Així, tenim que $R \otimes_f S \cong f(1)S$ és un S-mòdul projectiu cíclic i, per tant, si P és un R-mòdul projectiu finitament generat $P \otimes_f S$ és un S-mòdul projectiu finitament generat i l'anterior té sentit.

NOTACIÓ 1.5.6. Donats G un grup abelià i $\rho\colon G \to G$ un endomorfisme de G, usarem les notacions següents $I(\rho) = \{g - \rho(g) \mid g \in G\}$ i $G^\rho = \{g \in G \mid \rho(g) = g\}$.

Ara estem en condicions d'enunciar el Teorema de Farrell, Hsiang [**30**, Theorem 19] i Siebenmann [**65**, Theorem 10.1]:

TEOREMA 1.5.7 (Farrell, Hsiang, Siebenmann). *Siguin R un anell i ρ un automorfisme de R. Llavors, tenim una successió exacta*
$$\begin{aligned} 0 \to K_1(R)/I(\rho_*) \to K_1(R[t;\rho])/I(\rho_*) \oplus K_1(R[t^{-1};\rho])/I(\rho_*) \\ \to K_1(R[t,t^{-1};\rho]) \to K_0(R)^{\rho_*} \to 0 \end{aligned} \tag{1.5.2}$$
A més, tenim una descomposició natural en suma directa
$$K_1(R[t,t^{-1};\rho]) \cong K_1(R,\rho) \oplus \widetilde{Nil}_0(R,\rho) \oplus \widetilde{Nil}_0(R,\rho^{-1}).$$

Necessitarem també el següents resultats:

Teorema 1.5.8 ([**65**, Theorem 9.2]). *Siguin R un anell i ρ un automorfisme de R. Aleshores, la següent successió és exacta:*

$$0 \to K_1(R)/I(\rho_*) \to K_1(R,\rho) \to K_0(R)^{\rho_*} \to 0$$

Teorema 1.5.9 ([**30**, Theorem 13]). *Siguin R un anell i ρ un automorfisme de R. Llavors, la següent successió és exacta escindida:*

$$0 \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow K_1(R[t^{-1};\rho]) \longrightarrow \widetilde{Nil}_0(R,\rho) \longrightarrow 0.$$

Per tant,

$$K_1(R[t^{-1};\rho]) \cong K_1(R) \oplus \widetilde{Nil}_0(R,\rho).$$

Igualment tenim que

$$K_1(R[t;\rho]) \cong K_1(R) \oplus \widetilde{Nil}_0(R,\rho^{-1}).$$

1.6. Anells amb unitat local

En aquesta secció introduirem el concepte d'anell amb unitat local que necessitarem més endavant i veurem algunes definicions i resultats d'anells sense unitat i amb unitat local. En particular definirem el K_0 i K_1 relatius, és a dir, per a un anell sense unitat. Essencialment, els resultats d'aquesta secció només els necessitarem per a les Seccions 1.7 i 3.3.

Introduïm primer una mica de notació. En aquesta secció k denotarà un domini d'ideals principals (DIP) fixat. Usarem preferentment les lletres majúscules del principi de l'alfabet $A, B, \dots$ per a denotar els anells amb unitat i les lletres $R, S, \dots$ per als anells (potser) sense unitat. En aquesta secció treballarem principalment sobre R un anell amb unitat local, és a dir, un anell tal que per a tot subconjunt finit d'elements $r_1, \dots, r_n \in R$ existeix un idempotent $e \in R$ tal que $r_i e = e r_i = r_i$ per a tot i. A continuació en donarem una definició equivalent que s'ajusta millor a les nostres necessitats.

Donat un anell R denotarem per $\mathrm{Idem}(R) = \{e \in R \mid e = e^2\}$ el conjunt dels idempotents de R. Recordem que podem definir un ordre en $\mathrm{Idem}(R)$ de la següent manera: $e \leqslant f$ si i només si $ef = fe = e$. Tenim les definicions següents:

Definició 1.6.1. Sigui R un anell (potser) sense unitat i sigui $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Idem}(R)$ un conjunt dirigit (*i.e.* donats e_i, e_j amb $i, j \in I$ existeix $\ell \in I$ tal que $e_i \leqslant e_\ell$ i $e_j \leqslant e_\ell$). Diem que $\{e_i\}$ és una *unitat local* de R si $R = \cup_{i\in I} e_i R e_i$.

Per a un anell R amb unitat local $\{e_i\}$, escriurem $R_i = e_i R e_i$, el córner corresponent a l'idempotent e_i, que és un anell amb unitat e_i.

Definició 1.6.2. Siguin R, S anells amb unitat local. Donat $f\colon R \to S$ un morfisme d'anells (sense unitat), diem que f és un *morfisme d'anells amb unitat local* si, donada una unitat local $\{e_i\}$ de R, aleshores $\{f(e_i)\}$ és una unitat local de S.

Donat un anell sense unitat, encara que tingui unitat local, sovint ens convindrà considerar un anell unital més gran que el contingui com a ideal. Una possible manera de fer això és la següent:

DEFINICIÓ 1.6.3. Sigui R una k-àlgebra, potser sense unitat. Definim la *unitificació* de R, denotada per R_+, com el grup abelià $R \oplus k$ amb el producte definit per

$$(x, \lambda) \cdot (y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$$

on $x, y \in R$ i $\lambda, \mu \in k$.

Usualment identificarem els elements de R amb la seva imatge en R_+ i igualment per als anells de matrius respectius. Com que tot anell té estructura de $\mathbb{Z}$-àlgebra sempre podem considerar la seva unitificació. Observem que R_+ té estructura d'anell amb unitat $(0, 1)$ i que R és un ideal (bilàter) en R_+. Per al cas que R ja tingués unitat, diguem-li e, tenim un isomorfisme unital $f\colon R_+ \to R \times k$ definit per $f(r, \lambda) = (r + \lambda e, \lambda)$.

Tenim la següent successió exacta d'anells sense unitat. A més, és escindida (en el sentit que tenim una secció $k \to R_+$):

$$0 \to R \to R_+ \to k \to 0 \tag{1.6.1}$$

Denotem per $p : R_+ \to R$ i $q : R_+ \to k$, les projeccions respectives. Observem que q és morfisme d'anells, mentre que p només és morfisme de grups abelians. Si $(M, \Lambda) \in M_n(R_+)$, de vegades usarem $p(M, \Lambda)$ per a referir-nos a M, la part de la matriu (M, Λ) que té les entrades en R.

La unitificació ens defineix, de fet, un functor de la categoria de les k-àlgebres sense unitat a la categoria de les k-àlgebres amb unitat, estenent un morfisme $f\colon R \to S$ a un morfisme $f\colon R_+ \to S_+$ (el denotarem amb la mateixa lletra) de manera que sigui la identitat sobre els elements de la forma $(0, \lambda)$ per a tot $\lambda \in k$.

Per a un anell R, potser sense unitat, definim **proj-**R com la subcategoria plena de **proj-**R_+ donada pels objectes $P \in$ **proj-**R_+ tals que $PR = P$. Observem que en el cas que R tingui unitat, com $R_+ \cong R \times k$, la definició anterior dóna una categoria naturalment equivalent a la categoria de mòduls projectius finitament generats sobre R; per tant, és coherent amb la nostra notació anterior. És fàcil veure que **proj-**R és una categoria amb successions exactes i podem, doncs, considerar el seu K_0 que denotarem per $G(R)$; en el cas que R fos unital tindríem $G(R) \cong K_0(R)$.

Donat un morfisme d'anells $f\colon R \to S$ indueix un functor exacte **proj-**$R \to$ **proj-**S via $P \mapsto P \otimes_f S_+$. En efecte, com que P és un R_+-mòdul projectiu finitament generat existeix un Q tal que $P \oplus Q \cong R_+^n$, d'on tenim

$$(P \otimes_f S_+) \oplus (Q \otimes_f S_+) \cong (P \oplus Q) \otimes_f S_+ \cong R_+^n \otimes_f S_+ \cong S_+^n$$

i veiem que $P \otimes_f S_+ \in$ **proj-**S_+. Ara, sigui $p \otimes s \in P \otimes_f S_+$. Com que $P = PR$ tenim que $p = \sum_i p_i r_i \in PR$. Així, $p \otimes s = (\sum_i p_i r_i) \otimes s = \sum_i (p_i \otimes (f(r_i), 0)s) \in (P \otimes_f S_+)S$ i veiem que $P \otimes_f S_+ \in$ **proj-**S.

Com que aquest functor indueix un morfisme $f_*\colon G(R) \to G(S)$ hem vist que G defineix un functor dels anells sense unitat cap a la categoria dels grups abelians.

Dins d'aquesta secció usarem el següent conveni de notació que ens resultarà força útil:

NOTACIÓ 1.6.4. Quan vulguem explicitar que les entrades d'una matriu es troben en R_+, en R_ℓ (que denota el córner $e_\ell R e_\ell$ en un anell amb unitat local $(R, \{e_\ell\})$), en A o en k ho farem amb el superíndex corresponent, per exemple $\mathbf{1}^+ \in GL(R_+)$ i $\mathbf{1}^k \in GL(k)$ per a la identitat o $e_{ij}^{\ell}(a) \in E(R_\ell)$ i $e_{ij}^{A}(a) \in E(A)$ per a matrius elementals. En canvi, quan vulguem explicitar que una matriu té mida $n \times n$ ho farem amb un subíndex, per exemple $\mathbf{1}_n^+ \in GL_n(R_+)$.

A continuació, recordarem la definició del K_0 d'un anell a partir de matrius idempotents. Donat un anell unital A considerem els morfismes no unitals $M_n(A) \to M_{n+1}(A)$ donats per $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ i denotem per $M(A)$ el seu límit directe (per a A un anell amb unitat aquest és un exemple d'anell amb unitat local). Donades matrius idempotents $p \in \operatorname{Idem}(M_m(A))$ i $q \in \operatorname{Idem}(M_n(A))$ posem $p \oplus q = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Idem}(M_{m+n}(A))$. Observem que $GL(A)$ actua per conjugació en el conjunt de matrius idempotents $\operatorname{Idem}(M(A))$ i que aquesta acció respecta l'operació $\oplus$. Ara,

$$(\operatorname{Idem}(M(A))/GL(A), \oplus),$$

el conjunt d'òrbites de conjugació de $GL(A)$ en $\operatorname{Idem}(M(A))$ amb l'operació induïda per $\oplus$, és un semigrup abelià (de fet un monoide). Seguint [**60**, Section 1.2] veiem que aquest semigrup coincideix amb $\mathcal{V}(A)$, el semigrup de classes d'isomorfia d'A-mòduls projectius finitament generats:

Teorema 1.6.5. *Per a un anell unital A, donades dues matrius idempotents $E, F \in \operatorname{Idem}(M(A))$, els seus A-mòduls projectius corresponents són isomorfs si i només si les matrius són conjugades per un element de $GL(A)$. En particular, podem identificar el semigrup $(\mathcal{V}(A), \oplus)$ amb $(\operatorname{Idem}(M(A))/GL(A), \oplus)$ i tenim que $K_0(A)$ coincideix amb el grup de Grothendieck d'aquest darrer.*

Aquesta descripció del K_0 també ens resulta útil per al functor G. En efecte, qualsevol $P \in \mathbf{proj}\text{-}R_+$ és isomorf a un mòdul de la forma ER_+^n per a alguna matriu idempotent $E \in \operatorname{Idem}(M_n(R_+))$. Si a més $P \in \mathbf{proj}\text{-}R$ veiem que, forçosament, $E \in M_n(R)$. Ara, si $E, F \in \operatorname{Idem}(M(R))$ el teorema anterior ens assegura que E i F són matrius conjugades per un element de $GL(R_+)$ si i només si $ER_+^n \cong FR_+^n$. Si denotem per $[E]$ la classe d'una matriu en $G(R)$ i $f\colon R \to S$ és un morfisme, el morfisme induït $f_*\colon G(R) \to G(S)$ ve definit per $f_*[E] = [f(E)]$, ja que $ER_+^n \otimes_f S_+ \cong f(E)S_+^n$. Usarem la següent notació per a la conjugació en els diferents anells involucrats:

Notació 1.6.6. Donades matrius E i F escriurem $E \sim_+ F$ o $E \sim_i F$ si $E = T^{-1}FT$ amb $T \in GL(R_+)$ o $T \in GL(R_i)$, respectivament.

Lema 1.6.7. *Siguin R un anell amb unitat local $\{e_i\}$, $E, F \in \operatorname{Idem}(M_n(R_i))$ i $m \in \mathbb{N}$. Aleshores $E \oplus \mathbf{1}_m^+ \sim_+ F \oplus \mathbf{1}_m^+$ si i només si $E \oplus \mathbf{1}_m^j \sim_j F \oplus \mathbf{1}_m^j$ per a algun $j \geqslant i$.*

Demostració. En efecte, siguin $E, F \in \operatorname{Idem}(M_n(R_i))$ i suposem que existeixen $m \in \mathbb{N}$ i $T \in GL(R_j)$ amb $j \geqslant i$ tals que $E \oplus \mathbf{1}_m^j = T^{-1}(F \oplus \mathbf{1}_m^j)T$. Observem que $(T + \mathbf{1}^+ - \mathbf{1}^j), (T^{-1} + \mathbf{1}^+ - \mathbf{1}^j) \in GL(R_+)$, ja que són inverses una de l'altra, i que $(F \oplus \mathbf{1}_m^j)(\mathbf{1}^+ - \mathbf{1}^j) = (\mathbf{1}^+ - \mathbf{1}^j)(F \oplus \mathbf{1}_m^j) = 0$. Conjugant, tenim:

$$(T^{-1} + \mathbf{1}^+ - \mathbf{1}^j)(F \oplus \mathbf{1}_m^j)(T + \mathbf{1}^+ - \mathbf{1}^j) = T^{-1}(F \oplus \mathbf{1}_m^j)T = E \oplus \mathbf{1}_m^j,$$

és a dir, $F \oplus \mathbf{1}^j_m \sim_+ E \oplus \mathbf{1}^j_m$. Com que $\mathbf{1}^+_m \sim_+ \mathbf{1}^j_m \oplus (\mathbf{1}^+_m - \mathbf{1}^j_m)$, ja que indueixen projectius isomorfs, tenim

$$F \oplus \mathbf{1}^+_m \sim_+ F \oplus \mathbf{1}^j_m \oplus (\mathbf{1}^+_m - \mathbf{1}^j_m) \sim_+ E \oplus \mathbf{1}^j_m \oplus (\mathbf{1}^+_m - \mathbf{1}^j_m) \sim_+ E \oplus \mathbf{1}^+_m,$$

com volíem.

Recíprocament, siguin $E, F \in \mathrm{Idem}(M_n(R_i))$ tals que $E \oplus \mathbf{1}^+_m = T^{-1}(F \oplus \mathbf{1}^+_m)T$ amb $T \in GL(R_+)$. Sigui $j \geqslant i$ tal que $p(T), p(T^{-1}) \in M(R_j)$. Aleshores T i T^{-1} commuten amb $\mathbf{1}^j$, de manera que $T\mathbf{1}^j, T^{-1}\mathbf{1}^j \in GL(R_j)$ són inverses una de l'altra. Tenim:

$$E \oplus \mathbf{1}^j_m = (E \oplus \mathbf{1}^+_m)\mathbf{1}^j = T^{-1}(F \oplus \mathbf{1}^+_m)T\mathbf{1}^j = T^{-1}\mathbf{1}^j(F \oplus \mathbf{1}^j_m)T\mathbf{1}^j$$

i tenim $E \oplus \mathbf{1}^j_m \sim_j F \oplus \mathbf{1}^j_m$ com volíem. □

Teorema 1.6.8. *Sigui R un anell amb unitat local. Aleshores $\varinjlim G(R_i) \cong G(R)$.*

Demostració. Com R_i amb la inclusió és un sistema dirigit d'anells, $G(R_i)$ amb les aplicacions induïdes per la inclusió és un sistema dirigit de grups abelians i les inclusions $f_i : R_i \hookrightarrow R \subseteq R_+$ indueixen morfismes compatibles $f_{i*} : G(R_i) \to G(R)$. Per la propietat universal del límit directe tenim un morfisme $\varphi : \varinjlim G(R_i) \to G(R)$.

Ara, usant la descripció del K_0 a partir de matrius idempotents, prenem $E \in M_n(R_+)$ una matriu idempotent tal que $(ER^n_+)R = ER^n_+$, és a dir tal que $p(E) = 0$. Sabem que tot element de $G(R)$ té un representant d'aquesta forma. Ara, identificant E amb $q(E)$ tenim que $E \in \mathrm{Idem}(R_i)$ per a algun i, per tant, té sentit considerar $[E] \in K_0(R_i) \cong G(R_i)$. Si tornem a identificar $f_{i*}[E] = [f_i(E)]$ amb $[E] \in G(R)$ veiem que φ és epimorfisme.

Suposem $x \in \varinjlim G(R_i)$ tal que $\varphi(x) = 0$. Sigui $y \in G(R_i)$ un representant de x. Com hem comentat abans (Observació 1.1.3) tot element del grup de Grothendieck d'un semigrup és una diferència d'elements del semigrup, d'on tenim que $y = [E] - [F]$ amb $E, F \in \mathrm{Idem}(M_n(R_i))$. Com que $f_{i*}[E] = [f_i(E)] = [f_i(F)] = f_{i*}[F]$ en $G(R)$, estabilitzant podem suposar que $f_i(E) \sim_+ f_i(F)$ (potser augmentant i). Ara, pel Lema 1.6.7 tenim que $E \sim_j F$ per a algun $j \geqslant i$. Això ens diu que $x = 0$ en $G(R_j)$ i, per tant, en el límit. □

Definició 1.6.9. Siguin A un anell unital i $I \subseteq A$ un ideal bilàter. L'*anell doble de A sobre I* és el subanell del producte cartesià $A \times A$ donat per

$$D(A, I) = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y \in I\}.$$

Observem que si p_1 denota la projecció respecte a la primera coordenada, tenim la següent successió exacta escindida d'anells sense unitat:

$$0 \to I \to D(A, I) \xrightarrow{p_1} A \to 0,$$

en el sentit que p_1 és un epimorfisme escindit (la secció de p_1 ve donada per la inclusió diagonal de A en $D(A, I)$) i podem identificar $\ker p_1$ amb I. Ara, definim els K grups relatius:

Definició 1.6.10. Siguin A un anell unital i I un ideal bilàter en A. Definim el K_0 relatiu de l'anell A i l'ideal I com

$$K_0(A,I) = \ker((p_1)_* : K_0(D(A,I)) \to K_0(A)).$$

Definició 1.6.11. Siguin A un anell unital i I un ideal bilàter en A. Definim el K_1 relatiu de l'anell A i l'ideal I com

$$K_1(A,I) = \ker((p_1)_* : K_1(D(A,I)) \to K_1(A)).$$

Un dels resultats importants en teoria K és la successió exacta associada a un ideal [**60**, Theorem 2.5.4.] que recordem a continuació:

Teorema 1.6.12. *Siguin A un anell unital i $I \subseteq A$ un ideal (bilàter). Tenim una successió exacta natural*

$$K_1(A,I) \to K_1(A) \xrightarrow{p_*} K_1(A/I) \to K_0(A,I) \to K_0(A) \xrightarrow{p_*} K_0(A/I)$$

on p_* ve induïda per la projecció natural $p : A \to A/I$ i els morfismes $K_i(A,I) \to K_i(A)$ vénen induïts per $p_2 : D(A,I) \to A$.

En general, $K_0(A,I)$ depèn únicament de l'estructura de I com a anell sense unitat (*cf.* [**60**, Theorem 1.5.9 (Excision)]) i sovint el denotarem simplement per $K_0(I)$. A més, per al cas que I tingui unitat local coincideix amb el $G(I)$ abans definit, de manera que en tenim una definició en termes categorials. Vegem-ho:

Proposició 1.6.13. *Sigui R un anell amb unitat local $\{e_\ell\}_{\ell\in L}$, aleshores tenim un isomorfisme $K_0(R) \cong G(R)$.*

Demostració. De la successió exacta associada a un ideal (Teorema 1.6.12) aplicada a l'epimorfisme escindit $q : R_+ \to k$ n'obtenim la següent successió exacta

$$0 \to K_0(R) \to K_0(R_+) \xrightarrow{p_*} K_0(k) \to 0.$$

Observem que el functor inclusió $\iota : \mathbf{proj}\text{-}R \to \mathbf{proj}\text{-}R_+$ ens indueix un morfisme $\iota_* : G(R) \to K_0(R_+)$. Sigui $x \in G(R)$ tal que $\iota_*(x) = 0$. Per la Observació 1.1.3 tenim que $x = [E] - [F]$ per a alguns $E, F \in \mathrm{Idem}(M(R))$. Podem, a més, suposar que $E, F \in M(R_\ell)$ per a algun $\ell \in L$. Ara, com que $[E]-[F] = 0$ en $K_0(R_+)$, existeix un $m \in \mathbb{N}$ tal que $E \oplus \mathbf{1}_m^+ \sim_+ F \oplus \mathbf{1}_m^+$ i pel Lema 1.6.7 tenim que $E \oplus \mathbf{1}_m^j \sim_j F \oplus \mathbf{1}_m^j$ per a algun $j \geqslant \ell$, $j \in L$. Per tant, ι_* és monomorfisme.

Com que, si $P = PR$, tenim $p_*\iota_*[P] = [P \otimes_p k] = 0$; per tal de veure que $G(R) \cong \ker p_*$ (i, per tant, isomorf a $K_0(R)$) només ens resta veure que $\operatorname{im} \iota_* \supseteq \ker p_*$. Vegem-ho, sigui $[P] \in K_0(R_+)$ tal que $[P \otimes_p k] = 0$. Com que k és un DIP, tot k-mòdul projectiu finitament generat és isomorf a k^n per a un únic n, d'on tenim que $P \otimes_p k = 0$. Podem suposar, sense pèrdua de la generalitat, que $P \subseteq R_+^n$. Així, tot $p \in P$ és de la forma $p = ((r_1,0),\dots,(r_n,0))$ i com que R té unitat local és clar que $PR = P$. Això acaba la demostració. ☐

Ara, del Teorema 1.6.8 junt amb la Proposició 1.6.13 n'obtenim:

Corol·lari 1.6.14. *Sigui R un anell amb unitat local. Llavors $\varinjlim K_0(R_i) \cong K_0(R)$.*

En canvi, $K_1(A, I)$ no només depèn de l'estructura de I sinó que també depèn de A. En trobem un exemple degut a Swan en [**70**] (també el trobem indicat en [**60**, Exercise 2.5.20]). Per al cas d'un ideal que tingui estructura d'anell amb unitat local tenim que el K_1 relatiu només depèn de l'ideal. Per tal de veure-ho necessitarem el següent Lema:

LEMA 1.6.15. *Siguin A un anell unital i R un ideal bilàter seu amb unitat local $\{u_\ell\}_{\ell\in L}$. Denotem per $E(R)$ el subgrup de $E(A)$ generat per les matrius elementals de la forma $\{e^A_{ij}(r) \mid r \in R\}$. Aleshores $E(R) \lhd E(A)$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin $T \in E(R)$ i $S \in E(A)$, volem veure que $STS^{-1} \in E(R)$. Com que els elements de $E(R)$ i de $E(A)$ són productes de matrius elementals ens podem reduir al cas que T i S siguin matrius elementals. Suposem, doncs, $T = e^A_{ij}(r)$ i $S = e^A_{k\ell}(a)$ on $a \in A$ i $r \in R$.

Recordem (*cf.* [**60**, Lemma 2.1.2]) que les matrius elementals compleixen les següents relacions:

- $e_{ij}(a)e_{k\ell}(b) = e_{k\ell}(b)e_{ij}(a)$, $j \neq k$ i $i \neq \ell$;
- $[e_{ij}(a), e_{jk}(b)] = e_{ij}(a)e_{jk}(b)e_{ij}(-a)e_{jk}(-b) = e_{ik}(ab)$, i, j, k diferents;
- $[e_{ij}(a), e_{ki}(b)] = e_{ij}(a)e_{ki}(b)e_{ij}(-a)e_{ki}(-b) = e_{kj}(-ba)$, i, j, k diferents.

Usarem, ara, aquestes relacions. Tenim diversos casos:

Si $j \neq k$ i $i \neq \ell$ les matrius commuten i, per tant,

$$e^A_{k\ell}(a)e^A_{ij}(r)e^A_{k\ell}(-a) = e^A_{ij}(r) \in E(R);$$

si $j = k$ i $i \neq \ell$ tenim que

$$e^A_{j\ell}(a)e^A_{ij}(r)e^A_{j\ell}(-a) = [e^A_{j\ell}(a), e^A_{ij}(r)]e^A_{ij}(r) = e^A_{i\ell}(-ra)e^A_{ij}(r) \in E(R);$$

si $j \neq k$ i $i = \ell$ obtenim

$$e^A_{ki}(a)e^A_{ij}(r)e^A_{ki}(-a) = [e^A_{ki}(a), e^A_{ij}(r)]e^A_{ij}(r) = e^A_{kj}(ar)e^A_{ij}(r) \in E(R);$$

finalment, si $j = k$ i $i = \ell$ prenem $m \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq m \neq j$, $n \in L$ tal que $r \in R_n$ i veiem que

$$\begin{aligned} e^A_{ji}(a)e^A_{ij}(r)e^A_{ji}(-a) &= e^A_{ji}(a)[e^A_{im}(r), e^A_{mj}(u_n)]e^A_{ji}(-a) = e^A_{ji}(a)e^A_{im}(r)e^A_{ji}(-a) \\ &\cdot e^A_{ji}(a)e^A_{mj}(u_n)e^A_{ji}(-a) \cdot e^A_{ji}(a)e^A_{im}(-r)e^A_{ji}(-a) \cdot e^A_{ji}(a)e^A_{mj}(-u_n)e^A_{ji}(-a) \in E(R), \end{aligned}$$

pels casos anteriors. □

TEOREMA 1.6.16. *Siguin A un anell unital i R un ideal bilàter seu amb unitat local $\{u_\ell\}_{\ell\in L}$. Aleshores $\varinjlim K_1(R_\ell) \cong K_1(A, R)$*

DEMOSTRACIÓ. Definim els morfismes de grups

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_\ell} : GL(R_\ell) &\longrightarrow GL(D(A, R)) \subseteq GL(A) \times GL(A) \\ T &\longmapsto (\mathbf{1}^A, T + \mathbf{1}^A - \mathbf{1}^\ell) \end{aligned}$$

i la definició té sentit, ja que $(T + \mathbf{1}^A - \mathbf{1}^\ell)$ té per inversa $(T^{-1} + \mathbf{1}^A - \mathbf{1}^\ell)$.

Com que $\overline{\varphi_\ell}(e^\ell_{ij}(a)) = (\mathbf{1}^A, e^\ell_{ij}(a) - \mathbf{1}^\ell + \mathbf{1}^A) = (\mathbf{1}^A, e^A_{ij}(a)) \in E(D(A,R))$ veiem que els morfismes factoritzen a través del K_1, de manera que ens indueixen morfismes $\varphi_\ell : K_1(R_\ell) \to K_1(A,R)$. Igualment, per a $\ell \leqslant m$ podem definir

$$\begin{aligned}\overline{\psi^m_\ell} : GL(R_\ell) &\longrightarrow GL(R_m)\\ T &\longmapsto T + \mathbf{1}^m - \mathbf{1}^\ell\end{aligned}$$

de manera que indueixen morfismes $\psi^m_\ell : K_1(R_\ell) \to K_1(R_m)$. Tenim, doncs, un sistema dirigit de grups abelians $\{K_1(R_\ell), \psi^m_\ell\}$. Per tant, tenim un morfisme $\varphi : \varinjlim K_1(R_\ell) \to K_1(A,R)$.

Vegem ara que φ és epimorfisme. Els elements de $K_1(A,R)$ són classes d'elements de la forma $(T_1,T_2) \in GL(D(A,R)) \subseteq GL(A) \times GL(A)$ amb $T_1 \in E(A)$. Sense pèrdua de la generalitat podem suposar que $T_1 = \mathbf{1}^A$, ja que $(T_1,T_1) \in E(D(A,R))$ i tenim que $[T_1,T_2] = [\mathbf{1}^A, T_1^{-1}T_2]$ en $K_1(D(A,R))$. Així, tot element de $K_1(A,R)$ té un representant de la forma $(\mathbf{1}^A, T) \in GL(D(A,R))$; a més, $T - \mathbf{1}^A \in M(R)$. Observem que $(\mathbf{1}^A,T)^{-1} = (\mathbf{1}^A, T^{-1}) \in GL(D(A,R))$. Prenem, doncs, ℓ prou gran per a que $\overline{T} = T - \mathbf{1}^A$ i $\overline{T}^{-1} = T^{-1} - \mathbf{1}^A \in M(R_\ell)$. Tenim que $\overline{T} + \mathbf{1}^\ell \in GL(R_\ell)$ (té inversa $\overline{T}^{-1} + \mathbf{1}^\ell$) i $\varphi_\ell[\overline{T} + \mathbf{1}^\ell] = [\mathbf{1}^A, T]$ com volíem.

Vegem ara que φ és monomorfisme. Sigui $T \in GL(R_\ell)$ complint

$$\varphi_\ell[T] = [\mathbf{1}^A, T + \mathbf{1}^A - \mathbf{1}^\ell] = 0;$$

tenim, doncs, que $(\mathbf{1}^A, T + \mathbf{1}^A - \mathbf{1}^\ell) \in E(D(A,R))$, d'on deduïm que

$$(\mathbf{1}^A, T + \mathbf{1}^A - \mathbf{1}^\ell) = \prod_{t=1}^n e^A_{i_tj_t}(a_t,b_t) = (\prod_{t=1}^n e^A_{i_tj_t}(a_t), \prod_{t=1}^n e^A_{i_tj_t}(b_t)).$$

per a alguns $a_t, b_t \in A$ complint $b_t - a_t \in R$. Tenim que $\prod_{t=1}^n e^A_{i_tj_t}(a_t) = \mathbf{1}^A$. Usant aquesta relació podem escriure:

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^n e^A_{i_tj_t}(b_t) &= e^A_{i_1j_1}(b_1 - a_1)e^A_{i_1j_1}(a_1)\left(\prod_{t=2}^n e^A_{i_tj_t}(b_t)\right)\\
&= e^A_{i_1j_1}(b_1 - a_1)\left(\prod_{t=n}^2 e^A_{i_tj_t}(-a_t)\right)\left(\prod_{t=2}^n e^A_{i_tj_t}(b_t)\right)\\
&= e^A_{i_1j_1}(b_1 - a_1)\\
&\cdot \left(\prod_{t=n}^3 e^A_{i_tj_t}(-a_t)\right) e^A_{i_2j_2}(b_2 - a_2)\left(\prod_{t=3}^n e^A_{i_tj_t}(a_t)\right)\\
&\cdot \left(\prod_{t=n}^4 e^A_{i_tj_t}(-a_t)\right) e^A_{i_3j_3}(b_3 - a_3)\left(\prod_{t=4}^n e^A_{i_tj_t}(a_t)\right)\\
&\cdots\\
&\cdot e^A_{i_nj_n}(-a_n)e^A_{i_{n-1}j_{n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1})e_{i_nj_n}(a_n)\\
&\cdot e^A_{i_nj_n}(b_n - a_n)\end{aligned}$$

i veiem que anem obtenint conjugats d'elements de $E(R)$ per elements de $E(A)$. Pel Lema 1.6.15 deduïm que tot el producte és, doncs, de $E(R)$. En particular, tenim una altra descomposició: $\prod_{t=1}^{n} e^{A}_{i_tj_t}(b_t) = \prod_{t=1}^{p} e^{A}_{i_tj_t}(r_t)$ amb $r_t \in R$ per a tot t. Si prenem ara un $m \geqslant \ell$ tal que $r_t \in R_m$ per a tot t obtenim que

$$\psi_\ell^m[T] = [\prod_{t=1}^{p} e^{m}_{i_tj_t}(r_t)] = 0 \text{ en } K_1(R_m)$$

com volíem. □

En particular, si A té unitat tenim el següent

COROL·LARI 1.6.17. *Sigui A un anell amb unitat, aleshores $K_1(A) \cong K_1(A_+, A)$.*

De fet, per a una k-àlgebra A amb unitat, com que $A_+ \cong A \times k$ tenim $K_1(A_+) \cong K_1(A_+, A) \oplus K_1(k)$ i així obtenim també que $K_1(A) \cong K_1(A_+, A)$.

1.7. El K_1 d'anells de polinomis de Laurent guerxos sobre anells sense unitat

A continuació veurem una versió no unital del Teorema de Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang i Siebenmann. Usarem aquest teorema més endavant en la Secció 3.3 per a calcular el K_1 d'un anell de polinomis de Laurent córner-guerxo cosa que ens permetrà calcular el grup $K_1(L(E))$. Els resultats d'aquesta secció els trobem publicats en [**5**, Section 3].

En aquesta secció mantindrem la preferència de l'anterior respecte als noms dels anells amb unitat $(A, B, \dots)$ i els anells (potser) sense unitat $(R, S, \dots)$. També com abans, k denotarà un DIP fixat.

El grup relatiu $K_1(A, I)$ admet una altra definició més propera a l'esperit de la Definició 1.1.4:

DEFINICIÓ 1.7.1. Sigui A un anell amb unitat i I un ideal bilàter de A. Definim $GL(A, I) = \ker(\pi_*\colon GL(A) \to GL(A/I))$ i $E(A, I)$ com el subgrup normal més petit de $E(A)$ que conté les matrius elementals $\{e_{ij}(a), a \in I\}$. Observem que, com que aquestes matrius són congruents a la identitat mòdul I, $E(A, I) \subseteq GL(A, I)$. Definim ara $K_1(A, I) = GL(A, I)/E(A, I)$.

Es pot demostrar una versió relativa del Lema de Whitehead [**60**, Theorem 2.5.3], que demostra que les dues definicions que hem donat del grup $K_1(A, I)$ coincideixen.

El resultat següent es pot deduir trivialment de la successió exacta llarga de teoria K relativa [**60**, Theorem 4.3.1], no obstant n'adjuntem una demostració directa que no requereix l'ús del K_2.

LEMA 1.7.2. *Sigui A un anell amb unitat i $I \lhd A$ un ideal bilàter de manera que*

$$0 \to I \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$$

és un successió exacta escindida d'anells sense unitat (és a dir, tenim una secció $\iota\colon A/I \to A$). Aleshores

$$1 \to K_1(A, I) \to K_1(A) \to K_1(A/I) \to 1$$

és exacta escindida.[1]

[1][**60**, Exercise 2.5.19]

Demostració. De la successió exacta associada a un ideal (Teorema 1.6.12) i usant que π té una secció n'obtenim la successió exacta

$$K_1(A,I) \to K_1(A) \xrightarrow{\pi_*} K_1(A/I) \to 1$$

Per tant, només ens resta veure que el morfisme $K_1(A,I) \to K_1(A)$ és monomorfisme. Com $GL\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Group}$ defineix un functor tenim que $\pi_*\iota_* = \mathbf{1}$ i, per tant, $\pi_*\colon GL(A) \to GL(A/I)$ és epimorfisme. Com $\ker \pi_* = GL(A,I)$ tenim la següent successió exacta

$$1 \to GL(A,I) \to GL(A) \to GL(A/I) \to 1$$

Igualment $E\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Group}$ també defineix un functor i tenim la següent successió exacta

$$1 \to \ker \pi_* \to E(A) \xrightarrow{\pi_*} E(A/I) \to 1$$

Com $\ker \pi_* \lhd E(A)$ i $E(I) \subseteq \ker \pi_*$ tenim que $E(A,I) \subseteq \ker \pi_*$. Vegem que, de fet, $\ker \pi_* = E(A,I)$. En efecte, sigui $H \in \ker \pi_*$. Aleshores $H = E_1 \cdots E_n$ és un producte de matrius elementals. Posem $\overline{E}_i := \iota_*\pi_*(E_i^{-1})E_i \in E(A,I)$. Ara H és un producte de conjugats de les matrius $\overline{E}_i$ i deduïm que $H \in E(A,I)$:

$$H = \iota_*\pi_*(E_1)\overline{E}_1\iota_*\pi_*(E_1)^{-1} \cdots \iota_*\pi_*(E_1 \cdots E_n)\overline{E}_n\iota_*\pi_*(E_1 \cdots E_n)^{-1}$$

Tenim el següent diagrama commutatiu, on les columnes i les dues primeres files són exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & E(A,I) & \xrightarrow{\rho_*} & E(A) & \xrightarrow{\pi_*} & E(A/I) & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle i'}\downarrow & & {\scriptstyle i''}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & GL(A,I) & \xrightarrow{\rho_*} & GL(A) & \xrightarrow{\pi_*} & GL(A/I) & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & {\scriptstyle p''}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & K_1(A,I) & \xrightarrow{\rho_*} & K_1(A) & \xrightarrow{\pi_*} & K_1(A/I) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Vegem la injectivitat de $\rho_*\colon K_1(A,I) \to K_1(A)$. Per *diagram chasing*, sigui $a \in K_1(A,I)$ tal que $\rho_*(a) = 1$. Prenem $b \in GL(A,I)$ tal que $p(b) = a$, aleshores $p'\rho_*(b) = 1$ i tenim $c \in E(A)$ tal que $i'(c) = \rho_*(b)$. Com $\pi_*\rho_*(b) = 1$ i i'' és injectiva tenim que $\pi_*(c) = 1$ i, per tant, c té una antiimatge $d \in E(A,I)$. Per la injectivitat de $\rho_*\colon GL(A,I) \to GL(A)$ tenim que $b = i(d)$ i, per tant, $a = p \circ i(d) = 1$ com volíem. □

Observació 1.7.3. Del fet que π tingui una secció, junt amb la successió exacta associada a un ideal (Teorema 1.6.12) en deduïm que $0 \to K_0(I) \to K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/I) \to 0$ és exacta escindida.

LEMA 1.7.4. *Per a una k-àlgebra R amb automorfisme ρ tenim que les successions següents*

$$0 \to K_1(R_+[t;\rho], R[t;\rho]) \to K_1(R_+[t;\rho]) \to K_1(k[t]) \to 0$$
$$0 \to K_1(R_+[t^{-1};\rho], R[t^{-1};\rho]) \to K_1(R_+[t^{-1};\rho]) \to K_1(k[t^{-1}]) \to 0$$
$$0 \to K_1(R_+[t,t^{-1};\rho], R[t,t^{-1};\rho]) \to K_1(R_+[t,t^{-1};\rho]) \to K_1(k[t,t^{-1}]) \to 0$$

són exactes escindides.

DEMOSTRACIÓ. En efecte, com que la successió següent

$$0 \to R[t;\rho] \to R_+[t;\rho] \to k[t] \to 0$$

és exacta escindida, podem aplicar el Lema 1.7.2 i tenim el resultat. Igualment per a les altres dues successions. □

Recordem la definició següent:

DEFINICIÓ 1.7.5. Un anell unital A diem que és *semihereditari dreta* si tot ideal dreta finitament generat és projectiu com a A-mòdul dreta.

El següent Lema és un cas especial d'un resultat de Waldhausen *cf.* [**73**, Theorem 4]:

LEMA 1.7.6. *Sigui A un anell (unital) semihereditari dreta. Aleshores* $\widetilde{Nil}_0(A,\alpha) = 0$.

Per a una demostració directa en el nostre cas particular vegeu [**5**, Lemma 3.3].

PROPOSICIÓ 1.7.7. *Tenim*

$$K_1(R_+[t;\rho], R[t;\rho]) \cong K_1(R_+, R) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1})$$
$$K_1(R_+[t^{-1};\rho], R[t^{-1};\rho]) \cong K_1(R_+, R) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho)$$

DEMOSTRACIÓ. Per al primer isomorfisme tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1(R_+, R) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R_+[t;\rho], R[t;\rho]) \arrow[r, "p\circ i"] \arrow[d, "i"'] & \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(R_+) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R_+[t;\rho]) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(k) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(k[t]) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Nil}_0(k, \mathbf{1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

on la commutativitat dels quadrats de l'esquerra ve donada per la naturalitat de la successió exacta associada a un ideal (Teorema 1.6.12) i pel Lema 1.7.6 tenim que

$\widetilde{Nil}_0(k, \mathbf{1}) = 0$. Les columnes són exactes (escindides) i les dues darreres files també pel Teorema 1.5.9. Així, pel Lema 3×3 [**62**, Exercise 6.16] tenim que la primera fila és exacta. Com que la primera columna i la fila del mig són escindides podem construir una secció a l'aplicació $K_1(R_+, R) \to K_1(R_+[t;\rho], R[t;\rho])$ i, per tant, la successió escindeix i tenim el resultat. Anàlogament tenim el segon isomorfisme. $\square$

Suposem donats (A, α) i (B, β) anells unitals amb un automorfisme associat i $f\colon A \to B$ un morfisme d'anells *no necessàriament unital* tal que $f\alpha = \beta f$. Hem comentat abans (Observació 1.5.5) que f indueix un morfisme $f_*\colon K_1(A, \alpha) \to K_1(B, \beta)$. Recordem que un morfisme f no necessàriament unital indueix també morfismes $f_*\colon K_i(A) \to K_i(B)$ per a $i = 0, 1$. En efecte, n'hi ha prou considerant les definicions de K_0 i K_1 a partir de la categoria de mòduls projectius i la categoria d'automorfismes sobre mòduls projectius (respectivament); com que $\_ \otimes_f B$ defineix un functor exacte entre les categories corresponents (com hem comentat en la Observació 1.5.5, aquest producte tensorial envia A-mòduls projectius a B-mòduls projectius) indueix el morfisme desitjat entre els K-grups. En vista d'això podem veure la naturalitat de la successió exacta del Teorema 1.5.8 (convé recordar la Notació 1.5.6):

Lema 1.7.8. *Siguin (A, α) i (B, β) anells (unitals) amb automorfisme associat i $f\colon A \to B$ un morfisme d'anells no necessàriament unital tal que $f\alpha = \beta f$. Tenim que el diagrama següent és commutatiu amb files exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_1(A)/I(\alpha_*) & \longrightarrow & K_1(A, \alpha) & \longrightarrow & K_0(A)^{\alpha_*} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1(B)/I(\beta_*) & \longrightarrow & K_1(B, \beta) & \longrightarrow & K_0(B)^{\beta_*} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on les fletxes verticals vénen induïdes per f.

Demostració. Pel Teorema 1.5.8 tenim que la següent successió és exacta

$$K_1(A) \xrightarrow{\mathbf{1}-\alpha_*} K_1(A) \xrightarrow{j} K_1(A, \alpha) \xrightarrow{p} K_0(A) \xrightarrow{\mathbf{1}-\alpha_*} K_0(A)$$

on $p\colon K_1(A, \alpha) \to K_0(A)$ ve definit per $p[P, \gamma] = [P]$. Per a la definició de j; suposem que tenim una matriu idempotent $E \in \mathrm{Idem}(M_n(A))$ tal que $\alpha(E) = E$, aleshores tenim el següent automorfisme $\theta_n\colon EA^n \to EA^n$ on $\theta_n(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$. Definim ara $j[EA^n, \gamma] = [EA^n, \theta_n\gamma] - [EA^n, \theta_n]$.

Cal, doncs, veure la commutativitat del diagrama següent:

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_1(A) & \xrightarrow{\mathbf{1}-\alpha_*} & K_1(A) & \xrightarrow{j} & K_1(A, \alpha) & \xrightarrow{p} & K_0(A) & \xrightarrow{\mathbf{1}-\alpha_*} & K_0(A) \\
{\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow \\
K_1(B) & \xrightarrow{\mathbf{1}-\beta_*} & K_1(B) & \xrightarrow{j} & K_1(B, \beta) & \xrightarrow{p} & K_0(B) & \xrightarrow{\mathbf{1}-\beta_*} & K_0(B)
\end{array}$$

A part del segon quadrat és clar que el diagrama commuta. Posarem $e = f(1)$. Com que $f\alpha = \beta f$ tenim que $\beta(e) = e$, de manera que tenim un automorfisme $\theta'_n\colon (eB)^n \to (eB)^n$ donat per $\theta'_n(b_1, \ldots, b_n) = (\beta(b_1), \ldots, \beta(b_n))$. Per a la commutativitat del segon quadrat cal veure que si $H \in GL_n(A)$ es compleix

$$[(eB)^n, \theta'_n \ell_{f(H)}] - [(eB)^n, \theta'_n] = [A^n \otimes B, (\theta_n \ell_H) \otimes \beta] - [A^n \otimes B, \theta_n \otimes \beta],$$

En efecte, el quadrat següent dóna un isomorfisme en la categoria β-**AutMod**-B

$$\begin{array}{ccc} A^n \otimes_f B & \xrightarrow{(\theta_n \ell_H)\otimes\beta} & A^n \otimes_f B \\ \varphi \downarrow \cong & & \cong \downarrow \varphi \\ (eB)^n & \xrightarrow{\theta'_n \ell_{f(H)}} & (eB)^n \end{array}$$

ja que és commutatiu:

$$\theta'_n \ell_{f(H)} \varphi(\sum m \otimes b) = \sum \theta'_n \ell_{f(H)}(f(m)b) = \sum \theta'_n(f(Hm)b) =$$
$$\sum f\theta_n(Hm)\beta(b) = \sum \varphi(\theta_n(Hm) \otimes \beta(b)) = \varphi((\theta_n \ell_H \otimes \beta)(\sum m \otimes b))$$

d'on tenim que $((eB)^n, \theta'_n \ell_{f(H)}) \cong (A^n \otimes B, (\theta_n \ell_H) \otimes \beta)$ en β-**AutMod**-B i aplicant-ho a $H = \mathbf{1}_n^A$ ens acaba de donar la igualtat que volíem.

Ara, com $\operatorname{im}(\mathbf{1} - \alpha_*) = I(\alpha_*)$, $\ker(\mathbf{1} - \alpha_*) = K_0(A)^{\alpha_*}$ i $f_*(\mathbf{1} - \alpha_*) = (\mathbf{1} - \beta_*)f_*$ tenim el resultat. □

Definició 1.7.9. Per a una k-àlgebra R amb automorfisme k-lineal ρ definim

$$K_1(R, \rho) = \ker(K_1(R_+, \rho) \to K_1(k, \mathbf{1})).$$

Observació 1.7.10. De la functorialitat de $K_1(\ ,\ )$ junt amb el fet que el morfisme $(R_+, \rho) \to (k, \mathbf{1})$ té una secció en deduïm que la següent successió és exacta escindida

$$0 \to K_1(R, \rho) \to K_1(R_+, \rho) \to K_1(k, \mathbf{1}) \to 0.$$

Vegem que, per al cas unital, és coherent amb la definició prèvia:

Lema 1.7.11. *Sigui A una k-àlgebra amb unitat i α un automorfisme, aleshores les dues definicions de $K_1(A, \alpha)$ coincideixen.*

Demostració. En efecte, aplicant el Lema 1.7.8 a la successió

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A_+ \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} k \to 0$$

obtenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1(A)/I(\alpha_*) & \longrightarrow & K_1(A_+)/I(\alpha_*) & \longrightarrow & K_1(k) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1(A, \alpha) & \xrightarrow{\iota_*} & K_1(A_+, \alpha) & \xrightarrow{\pi_*} & K_1(k, \mathbf{1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_0(A)^{\alpha_*} & \longrightarrow & K_0(A_+)^{\alpha_*} & \longrightarrow & K_0(k) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

on les columnes són exactes.

Aplicant el Lema 1.7.2 a la mateixa successió tenim que la successió

$$0 \to K_1(A_+, A) \to K_1(A_+) \to K_1(k) \to 0$$

és exacta escindida. Pel Corol·lari 1.6.17 tenim que $K_1(A_+, A) \cong K_1(A)$ i com $\pi\alpha = \pi$ podem factoritzar mòdul $I(\alpha_*)$ i tenim que la primera fila és exacta escindida.

Per la Observació 1.7.3 tenim que $0 \to K_0(A) \to K_0(A_+) \to K_0(k) \to 0$ és exacta escindida, d'on deduïm que la tercera fila és, també, exacta escindida. A més, la fila del mig és un complex ja que:

$$\pi_*\iota_*[P, \gamma] = \pi_*[P \otimes_\iota A_+, \gamma \otimes \alpha] = [P \otimes_\iota A_+ \otimes_\pi k, \gamma \otimes \alpha \otimes \mathbf{1}] = 0.$$

Tenim, doncs, que $\sigma_*(K_1(k, \mathbf{1})) \cap \iota_*(K_1(A, \alpha)) = 0$. Ara, fent quocient en la segona columna per la tercera obtenim el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_1(A)/I(\alpha_*) & \longrightarrow & K_1(A, \alpha) & \longrightarrow & K_0(A)^{\alpha_*} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & K_1(A)/I(\alpha_*) & \longrightarrow & K_1(A_+, \alpha)/K_1(k, \mathbf{1}) & \longrightarrow & K_0(A)^{\alpha_*} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

i pel Lema dels 5 ([**62**, Lemma 3.32]) tenim que la fletxa del mig és un isomorfisme, d'on deduïm que $K_1(A, \alpha) = \ker(K_1(A_+, \alpha) \to K_1(k, \mathbf{1}))$. □

Finalment estem en disposició de demostrar la versió no unital del Teorema de Bass, Heller, Swan, Farrell i Hsiang:

TEOREMA 1.7.12. *Siguin R un anell (potser) sense unitat i $\rho\colon R \to R$ un automorfisme. Tenim que la successió*

$$0 \to K_1(R, \rho) \to K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho], R[t, t^{-1}; \rho]) \to \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho) \to 0$$

és exacta escindida. A més, la successió

$$0 \to K_1(R_+, R)/I(\rho_*) \to K_1(R, \rho) \to K_0(R)^{\rho_*} \to 0$$

és exacta.

DEMOSTRACIÓ. Pel Lema 1.7.4 tenim la següent successió exacta escindida

$$0 \to K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho], R[t, t^{-1}; \rho]) \to K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho]) \to K_1(k[t, t^{-1}]) \to 0$$

i pel Teorema 1.5.7 tenim una descomposició natural en suma directa:

$$K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho]) \cong K_1(R_+, \rho) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}).$$

D'aquesta descomposició natural, junt amb la Observació 1.7.10 n'obtenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1(R,\rho) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R_+[t,t^{-1};\rho], R[t,t^{-1};\rho]) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Nil}_0(R_+,\rho) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+,\rho^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(R_+,\rho) \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & K_1(R_+[t,t^{-1};\rho]) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Nil}_0(R_+,\rho) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+,\rho^{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(k,\mathbf{1}) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(k[t,t^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Nil}_0(k,\mathbf{1}) \oplus \widetilde{Nil}_0(k,\mathbf{1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

on els morfismes de la fila de dalt vénen induïts per la propietat universal del nucli i pel Lema 1.7.6 tenim que $\widetilde{Nil}_0(k,\mathbf{1}) \oplus \widetilde{Nil}_0(k,\mathbf{1}) = 0$.

Com que les dues darreres files i les columnes són exactes, pel Lema 3×3 ([**62**, Exercise 6.16]), tenim que la primera fila del diagrama és exacta. Com en la demostració de la Proposició 1.7.7 podem construir una secció de manera que també és escindida.

Aplicant el Lema 1.7.2 a $0 \to R \to R_+ \xrightarrow{\pi} k \to 0$ tenim que la successió

$$0 \to K_1(R_+, R) \to K_1(R_+) \to K_1(k) \to 0$$

és exacta. Com $\pi\rho = \pi$ podem factoritzar mòdul $I(\rho_*)$ i tenim la successió exacta $0 \to K_1(R_+, R)/I(\rho_*) \to K_1(R_+)/I(\rho_*) \to K_1(k) \to 0$.

Per la Observació 1.7.3 tenim que $0 \to K_0(R) \to K_0(R_+) \to K_0(k) \to 0$ és exacta, d'on deduïm que la successió $0 \to K_0(R)^{\rho_*} \to K_0(R_+)^{\rho_*} \to K_0(k) \to 0$ ho és, al seu torn. Tenim, doncs, el següent diagrama commutatiu on la segona i la tercera columnes són exactes (de manera natural) pel Lema 1.7.8 i els corresponents diagrames són, en efecte, commutatius. Les aplicacions de la columna de l'esquerra són les induïdes per la propietat universal del nucli.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_1(R_+,R)/I(\rho_*) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R_+)/I(\rho_*) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(R,\rho) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R_+,\rho) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(k,\mathbf{1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(R)^{\rho_*} \arrow[r] \arrow[d] & K_0(R_+)^{\rho_*} \arrow[r] \arrow[d] & K_0(k) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Pel Lema 3×3 ([**62**, Exercise 6.16]) la columna de l'esquerra també és exacta i tenim el que volíem. $\square$

1.8. Localitzacions i quocients de categories

En aquesta secció introduirem les nocions de localització de categories i quocient de categories que necessitarem més endavant. Bàsicament seguim [**31, 76, 77**].

Siguin $\mathcal{C}$ una categoria i Σ una col·lecció de morfismes en $\mathcal{C}$ llavors la *localització de* $\mathcal{C}$ *respecte* Σ és una categoria $\mathcal{C}_\Sigma$ junt amb un functor $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Sigma$ tal que

(i) Per a tot $s \in \Sigma$, $L(s)$ és un isomorfisme.
(ii) Si $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és un functor que envia els elements de Σ a isomorfismes en $\mathcal{D}$, aleshores F factoritza de manera única a través de $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Sigma$.

Observem que la localització universal de Cohn d'un anell R en un conjunt Σ de morfismes entre R-mòduls projectius finitament generats (vegeu Secció 1.4) es pot obtenir a partir de la localització de la categoria **proj-**R en el conjunt Σ. En aquesta situació la categoria localitzada $(\mathbf{proj}\text{-}R)_\Sigma$ és una categoria additiva i obtenim la localització universal R_Σ com l'anell d'endomorfismes de R en la categoria localitzada (vegeu [**63**, Theorem 4.1]).

Per tal que puguem treballar amb la categoria localitzada haurem d'imposar algun tipus de condició sobre la col·lecció de morfismes. Tenim les següent definicions:

Definició 1.8.1. Una col·lecció de morfismes Σ en la categoria $\mathcal{C}$ es diu que és un *sistema multiplicatiu dreta* si satisfà els següents axiomes:

(i) Σ és tancat per composicions, és a dir, si $f, g \in \Sigma$ i fg està definida aleshores $fg \in \Sigma$. A més, per a tot objecte $X \in \mathcal{C}$ tenim $\mathbf{1}_X \in \Sigma$.
(ii) Σ satisfà la condició d'Ore dreta en $\mathcal{C}$: Si $f\colon Z \to Y$ és de Σ, per a tot morfisme $g\colon X \to Y$ de $\mathcal{C}$ existeixen $f'\colon W \to X$ de Σ i $g'\colon W \to Z$ en $\mathcal{C}$ tals que el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

(iii) Siguin $f, g\colon X \to Y$ morfismes en $\mathcal{C}$; si tenim $s \in \Sigma$ amb $sf = sg$ aleshores existeix $t \in \Sigma$ tal que $ft = gt$.

Diem que Σ és un *sistema multiplicatiu esquerra* si compleix (i) i els duals de (ii) i (iii). Anomenem Σ *sistema multiplicatiu* si és un sistema multiplicatiu dreta i esquerra simultàniament.

Per tal d'evitar problemes de Teoria de Conjunts demanarem als sistemes multiplicatius que compleixin la següent condició:

Definició 1.8.2. Direm que un sistema multiplicatiu Σ és *localment petit* (per l'esquerra) si per a tot $X \in \mathcal{C}$ existeix un conjunt Σ_X de morfismes de Σ, tots amb codomini X, tal que per a tot morfisme $Y \to X$ en Σ existeix un morfisme $Z \to Y$ en $\mathcal{C}$ tal que la composició $Z \to Y \to X$ és de Σ_X.

Les condicions anteriors són suficients per a poder considerar la localització de categories. A més, els morfismes de la categoria localitzada tenen una forma suficientment manejable. Tenim el següent:

TEOREMA 1.8.3 (*cf.* [**31**, Lemma III.2.8] i [**76**, Theorem 10.3.7, Corollary 10.3.11]). *Sigui Σ un sistema multiplicatiu dreta localment petit (per l'esquerra) en una categoria $\mathcal{C}$. Aleshores la categoria $\mathcal{C}_\Sigma$ es pot descriure com segueix:*

$$\mathcal{O}bj\,\mathcal{C}_\Sigma = \mathcal{O}bj\,\mathcal{C}.$$

Un morfisme $X \to Y$ en $\mathcal{C}_\Sigma$ és una classe d'equivalència de "teulades", és a dir, de diagrames (s, f) en $\mathcal{C}$ de la forma

$$X \xleftarrow{\ s\ } X' \xrightarrow{\ f\ } Y \quad \text{amb } s \in \Sigma.$$

Dues teulades són equivalents, $(s, f) \sim (t, g)$, si i només si existeix una tercera teulada (r, h) de manera que tinguem un diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X''' \arrow[l, "r"'] \arrow[r, "h"] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\
 & X'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

A més, en cas que la categoria $\mathcal{C}$ sigui additiva, la categoria localitzada $\mathcal{C}_\Sigma$ també ho és i el functor $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Sigma$ és un functor additiu.

Si Σ és un sistema multiplicatiu, de fet, podem fer servir classes de la forma (s, f) o (f, s) $(s \in \Sigma)$ indistintament. En canvi, si Σ només és sistema multiplicatiu per la dreta o per l'esquerra només podrem escriure els denominadors a un dels dos costats.

A continuació considerarem el quocient de categories. Per a això necessitem el concepte de subcategoria de Serre:

DEFINICIÓ 1.8.4. Sigui $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Una *subcategoria de Serre* d'$\mathcal{A}$ és una subcategoria additiva plena $\mathcal{C}$ tal que, donada una successió exacta curta en $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

tenim que $M \in \mathcal{C}$ si i només si $M', M'' \in \mathcal{C}$.

DEFINICIÓ 1.8.5. Siguin $\mathcal{A}$ una categoria abeliana i $\mathcal{C}$ una subcategoria de Serre, aleshores la *categoria quocient de $\mathcal{A}$ respecte a $\mathcal{C}$* és una categoria abeliana $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ junt amb un functor exacte $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ amb la següent propietat universal: donat un functor exacte $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ des de $\mathcal{A}$ cap a la categoria abeliana $\mathcal{B}$ tal que $S(C) \cong 0$ per a tot objecte C de $\mathcal{C}$ existeix un únic functor exacte $\overline{S}\colon \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ tal que $S = \overline{S}T$.

Una condició suficient per a l'existència de la categoria quocient $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ és que els subobjectes de qualsevol objecte en $\mathcal{A}$ formin un conjunt (vegeu [**69**, Theorem I.2.1]). Observem que aquesta condició es compleix automàticament per a una categoria de mòduls. Com que nosaltres només considerarem quocients de categories de mòduls sempre podrem assegurar l'existència de la categoria quocient.

La categoria quocient $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ és un cas particular de la localització de categories. En efecte, si prenem com a Σ la col·lecció de tots els $\mathcal{C}$-*isomorfismes*, és a dir, aquells morfismes f de $\mathcal{A}$ tals que $\ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{C}$ aleshores Σ és un sistema multiplicatiu (*cf.* [**77**, Example A.3.1 (Gabriel)]).

El següent Lema ens resultarà útil per a veure quan una subcategoria és de Serre; de fet, tota subcategoria de Serre es pot obtenir d'aquesta manera:

Lema 1.8.6 ([**18**, Exercise 6.3.5]). *Sigui $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor exacte entre categories abelianes. Aleshores, la subcategoria plena d'$\mathcal{A}$ donada pels objectes M tals que $F(M)$ és zero en $\mathcal{B}$ és una subcategoria de Serre d'$\mathcal{A}$.*

Demostració. Denotem per $\mathcal{C}$ la subcategoria plena d'$\mathcal{A}$ donada pels objectes tals que $F(M) = 0$. Com que $\mathcal{C}$ és una subcategoria plena d'una categoria abeliana i conté l'objecte zero és clar que és una subcategoria preadditiva. Donats $M, M' \in \mathcal{C}$ podem considerar en $\mathcal{A}$ la següent successió exacta escindida:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus M' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

i com que F és un functor exacte tenim que $M \oplus M' \in \mathcal{C}$ cosa que vol dir que és una subcategoria additiva. A més, donada una successió exacta curta en $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

és clar que $M \in \mathcal{C}$ si i només si $M', M'' \in \mathcal{C}$. $\square$

CAPíTOL 2

L'àlgebra regular d'un buirac

En aquest capítol generalitzem alguns dels resultats de [**9**] al context de les àlgebres associades a un buirac. Entre aquests resultats, estenem la construcció de l'envolcall regular de von Neumann de les àlgebres de Leavitt de tipus $(1, n)$ al cas de les àlgebres de Leavitt associada a un buirac $L(E)$. Per a aquesta àlgebra regular, que denotem per $Q(E)$, es compleix (com passa en el cas de l'àlgebra lliure) que el seu monoide de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats coincideix amb el de l'àlgebra de Leavitt corresponent, $L(E)$. El monoide $\mathcal{V}(L(E))$ ha estat calculat recentment en [**10**] per als grafs amb columnes finites com un cert monoide M_E, associat al graf, donat amb generadors i relacions (vegeu Secció 1.3). D'aquesta manera tenim que tot monoide del tipus M_E es pot realitzar com a monoide de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats de l'anell regular de von Neumann $Q(E)$. Això suposa una contribució parcial al Problema de realització per a anells regulars de von Neumann. Bona part de la feina d'aquest capítol consisteix a estendre resultats ja coneguts en el cas de l'àlgebra lliure a l'àlgebra de camins d'un buirac, com per exemple el Teorema d'Inèrcia Estable (Teorema 2.1.9). Els resultats d'aquest capítol els trobem publicats en [**6**].

En aquest capítol, per a un anell R, usarem la notació R^n (respectivament, ${}^nR$) per a l'R-mòdul lliure esquerra (respectivament, dreta) de les files (respectivament, columnes) amb n components en R. Recordem que usem la Notació 1.2.3: tret que s'indiqui el contrari E denotarà un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ (on $d = |E^0|$).

2.1. Una localització universal de l'àlgebra de camins d'un buirac

En aquesta secció veurem que, com passa en el cas de l'àlgebra lliure, la clausura de divisió de $P(E)$ en $P((E))$ és una localització universal de $P(E)$. Per tal de veure-ho necessitem estendre alguns dels resultats de l'àlgebra lliure a l'àlgebra de camins. Entre aquests, veurem una generalització del Teorema d'Inèrcia de l'àlgebra lliure (vegeu [**22**, Inertia Theorem]) a l'àlgebra de camins (Teorema 2.1.9).

Posem $R = P(E)$ o $P((E))$ i definim les aplicacions additives següents:

$$\begin{array}{cccc} \delta_e\colon & R & \longrightarrow & R \\ & \displaystyle\sum_{\alpha\in E^*} \lambda_\alpha \alpha & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{\alpha\in E^* \\ r(\alpha)=s(e)}} \lambda_{\alpha e}\alpha \end{array}$$

Escriurem δ_e a la dreta del seu argument; així mateix, les composicions les escriurem mantenint la coherència amb aquesta notació. De vegades ens referirem a les aplicacions δ_e com a transduccions (esquerra). Existeixen també les corresponents aplicacions definides sobre $M_n(R)$ i R^n, definides component a component, que denotarem igualment per δ_e.

Les transduccions dreta $\tilde{\delta}_e \colon R \to R$ es defineixen similarment per

$$\tilde{\delta}_e\left(\sum_{\alpha\in E^*}\lambda_\alpha\alpha\right) = \sum_{\substack{\alpha\in E^*\\ s(\alpha)=r(e)}}\lambda_{e\alpha}\alpha.$$

DEFINICIÓ 2.1.1. Sigui R una subàlgebra de $P((E))$ tancada per les transduccions esquerra δ_e i sigui B un R-submòdul dreta de ${}^nR$. Diem que B és *regular* si per a tot $b \in B$ amb $o(b) > 0$, aleshores $(b)\,\delta_e \in B$ per a tota aresta $e \in E^1$.

Per a un R-submòdul esquerra de R^n podem definir el concepte anàleg usant les transduccions dreta. La regularitat s'hereta per a sumands directes:

LEMA 2.1.2. *Donat un mòdul regular $B = B_1 \oplus B_2$ tenim que B_1, B_2 són, també, mòduls regulars.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, donat $b \in B_1$ amb $o(b) > 0$, per regularitat de B tenim que $(b)\,\delta_e \in B$ per a cada aresta $e \in E^1$. Per tant, $(b)\,\delta_e = b_1^e + b_2^e$ per a alguns $b_i^e \in B_i$ únics tals que $b_i^e p_{s(e)} = b_i^e$. Així, $b = \sum_e (b\delta_e)\cdot e = \sum_e b_1^e e + \sum_e b_2^e e$ i tenim que $\sum_e b_2^e e = 0$. D'on deduïm que $b_2^e = 0$ per a tot $e \in E^1$ i que $(b)\,\delta_e = b_1^e \in B_1$. $\square$

TEOREMA 2.1.3 (Caracterització dels mòduls regulars). *Sigui $B \subseteq {}^nP(E)$ un $P(E)$-mòdul dreta. Aleshores B és regular si i només si $B = \bigoplus_{i=1}^t B_i$ on cada B_i és un $P(E)$-mòdul projectiu cíclic, $t \leqslant n$ i $\mathrm{rang}_{P(E)}(B) = \mathrm{rang}_{K^d}(\varepsilon(B))$.*

DEMOSTRACIÓ. Denotarem per ε_j la composició ${}^nP(E) \to {}^n(K^d) \cong ({}^nK)^d \to {}^nK$, on el darrer morfisme és la projecció sobre la j-èsima component de K^d.

Veurem primer que existeixen $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{N}$ i $v_1^{(j)}, \dots, v_{t_j}^{(j)} \in Bp_j$, on $j = 1, 2, \dots, d$ tals que

(i) $\deg(v_1^{(j)}) \leqslant \cdots \leqslant \deg(v_{t_j}^{(j)})$.
(ii) Els vectors $\{\varepsilon_j(v_i^{(j)})\}_{i=1,\dots,t_j}$ formen una K-base de $\varepsilon_j(Bp_j)$.
(iii) Si $v \in Bp_j$ i $\deg(v) < \deg(v_i^{(j)})$, aleshores $\varepsilon_j(v)$ és una combinació K-lineal de $\varepsilon_j(v_1^{(j)}), \dots, \varepsilon_j(v_{i-1}^{(j)})$.

En efecte, fixats j i $r = -1, 0, 1, 2, \dots$ escriurem

$$F(r) = \{\varepsilon_j(v) \in {}^nK \mid v \in Bp_j,\, \deg(v) \leqslant r\}.$$

Observem que són K-espais vectorials. Tenim inclusions $0 = F(-1) \subseteq F(0) \subseteq \cdots \subseteq F(r) \subseteq \cdots$ Prenem nombres enters $0 \leqslant r_1 < \cdots < r_q$ tals que $F(r_i - 1) \subset F(r_i)$ i que, per a tot r, $F(r) = F(r_i)$ per a algun i. En particular, $F(r_q) = \varepsilon_j(Bp_j)$.

Escollim ara $\mathcal{B}_1$ una K-base de $F(r_1)$, $\mathcal{B}_2$ una K-base de $F(r_2)$ mòdul $F(r_1)$ i així successivament fins a escollir $\mathcal{B}_q$ una K-base de $F(r_q)$ mòdul $F(r_{q-1})$. Ara, per definició de les F's, per a cada $i = 1, \dots, q$ podem trobar elements $w_{i,1}, \dots, w_{i,k_i} \in B$ de grau menor o igual que r_i tals que $\{\varepsilon_j(w_{i,1}), \dots, \varepsilon_j(w_{i,k_i})\} = \mathcal{B}_i$. De fet, el grau de cada $w_{i,j}$ és exactament r_i, altrament tindríem que $\varepsilon_j(w_{i,j})$ pertanyeria a

$F(r_i - 1) = F(r_{i-1})$ en contradicció amb que $\mathcal{B}_i$ és una base mòdul $F(r_{i-1})$. Posem ara $t_j = k_1 + k_2 + \cdots + k_q$ i definim els $v_1^{(j)}, \ldots, v_{t_j}^{(j)}$ per

$$(v_1^{(j)}, \ldots, v_{t_j}^{(j)}) = (w_{i,1}, \ldots, w_{i,k_1}, w_{2,1}, \ldots, w_{2,k_2}, \ldots, w_{q,k_q}).$$

Amb aquesta definició és clar que es compleix la condició (i). A més, com que $F(r_q) = \varepsilon_j(Bp_j)$, veiem que també es compleix la condició (ii). Sigui $v \in Bp_j$ amb $\deg(v) < \deg(v_i^{(j)})$. Llavors $v_i^{(j)} = w_{\ell,m}$ per a alguns ℓ, m, de manera que $\deg(v) < r_\ell = \deg(w_{\ell,m})$, d'on deduïm que $\varepsilon_j(v) \in F(r_\ell - 1) = F(r_{\ell-1})$ i que $\varepsilon_j(v)$ és una combinació K-lineal de $\varepsilon_j(w_{1,1}), \ldots, \varepsilon_j(w_{\ell-1,k_{\ell-1}})$ i, per tant, de $\varepsilon_j(v_1^{(j)}), \ldots, \varepsilon_j(v_{i-1}^{(j)})$. Això demostra (iii).

Posem $t = \max\{t_1, \ldots, t_d\}$. Com que $t_i = \dim_K \varepsilon_j(Bp_j) \leqslant n$ tenim que $t \leqslant n$. Per a $i = 1, \ldots, t$, prenem els següents submòduls de B

$$B_i = v_i^{(1)} P(E) + v_i^{(2)} P(E) + \cdots + v_i^{(d)} P(E) \subseteq B$$

on $v_i^{(j)} = 0$ si $i > t_j$. Veurem ara que aquests B_i són mòduls projectius cíclics.

Per a $i = 1, \ldots, t$ i $j = 1, \ldots, d$ posem

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > t_j \\ 1 \text{ si } i \leqslant t_j. \end{cases}$$

Amb aquesta notació, per a $i = 1, \ldots t$, tenim isomorfismes $B_i \cong a_{i1}(p_1 P(E)) \oplus a_{i2}(p_2 P(E)) \oplus \cdots \oplus a_{id}(p_d P(E))$. En efecte, definim

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i\colon & a_{i1}(p_1 P(E)) \oplus \cdots \oplus a_{id}(p_d P(E)) & \longrightarrow & B_i \\ & (a_{i1} p_1 a_1, \ldots, a_{id} p_d a_d) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{d} v_i^{(j)} p_j a_j. \end{array}$$

És clar que les φ_i són exhaustives, ja que $a_{ij} = 0$ si i només si $v_i^{(j)} = 0$. Afirmem que

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{t_j} v_i^{(j)} (p_j b_{ij}) = 0$$

implica $p_i b_{ij} = 0$ per a tot i, j. Veient això demostrarem simultàniament que cada φ_i és injectiu i que la suma $B_1 + \ldots + B_t$ és directa.

Per a veure l'afirmació procedirem per reducció a l'absurd, prenem doncs

$$\sum_{i,j} v_i^{(j)} (p_j b_{ij}) = 0 \quad \text{amb } 0 \leqslant \max_{i,j}\{\deg(p_j b_{ij})\} \text{ mínim possible.} \tag{2.1.1}$$

Per a tot j tenim que $\sum_{i=1}^{t_j} \varepsilon_j(v_i^{(j)}) \varepsilon_j(p_j b_{ij}) = 0$ i deduïm de (ii) que, per a tot parell i, j, $\varepsilon_j(p_j b_{ij})$. Per tant, $\varepsilon(p_j b_{ij}) = 0$ ja que $\varepsilon_k(p_j) = 0$ si $k \neq j$. Com que aquests elements tenen ordre positiu podem aplicar-los les transduccions reduint-ne el grau:

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{t_j} v_i^{(j)} \cdot \big((p_j b_{ij})\, \delta_e \big) = 0.$$

Observem que $(p_j b_{ij})\, \delta_e = p_j((p_j b_{ij})\, \delta_e)$ per a tot e i que $(p_j b_{ij})\, \delta_e \neq 0$ per a alguns i, j i algun $e \in E^1$. Això ens porta a contradicció amb la minimalitat de (2.1.1).

Posem ara $B' = \bigoplus_{i=1}^{t} B_i \subseteq B$. Volem veure que $B' = B$. Suposem que existeix $v \in B \setminus B'$, que prendrem de grau mínim. Podem escriure $v = vp_1 + \cdots + vp_r$. Denotarem $\deg(v)$ per d_v. Sigui j un enter tal que $\deg(vp_j) = d_v$ i prenem i l'enter més petit tal que $\deg(vp_j) < \deg(v_i^{(j)})$ ($i = t_j + 1$ si no existeix tal enter). Per (ii) o (iii), segons el cas, tenim que $\varepsilon_j(vp_j) = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \varepsilon_j(v_k^{(j)})$ i, per tant, $v' = vp_j - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k v_k^{(j)} \in B$ satisfà que $\deg(v') \leqslant \deg(v)$ i $v' \in Bp_j$ amb $\varepsilon_j(v') = 0$. Per tant $\varepsilon(v') = 0$. Com que B és regular tenim que $(v')\,\delta_e \in B$ per a tota $e \in E^1$. Per la minimalitat del grau tenim que $(v')\,\delta_e \in B'$ i, llavors, $v' = \sum_{e \in E^1} ((v')\,\delta_e)e \in B'$. D'aquí n'obtenim que $vp_j \in B'$ per a tot j tal que $\deg(vp_j) = d_v$. Com que

$$v - \sum_{\deg(vp_j) = d_v} vp_j = \sum_{\deg(vp_k) < d_v} vp_k,$$

tenim que

$$\deg\left(v - \sum_{\deg(vp_j) = d_v} vp_j \right) < d_v$$

i, novament per la minimalitat del grau, obtenim que $v \in B'$.

Vegem ara el recíproc. Suposem que $B = \bigoplus_{i=1}^{t} B_i$ on cada B_i és cíclic projectiu, $t \leqslant n$ i $\operatorname{rang}_{P(E)}(B) = \operatorname{rang}_{K^d}(\varepsilon(B))$. Observem que tenim una descomposició en suma directa

$$B = \bigoplus_{j=1}^{d} \bigoplus_{i=1}^{t_j} x_i^{(j)} P(E)$$

amb $x_i^{(j)} = x_i^{(j)} p_j$ per a tot i, j, on $\operatorname{rang}_{P(E)}(B) = (t_1, \ldots, t_d) = \operatorname{rang}_{K^d}(\varepsilon(B))$. De la darrera igualtat se'n desprèn que $\{\varepsilon_j(x_i^{(j)}) \mid i = 1, \ldots, t_j\}$ és una família linealment independent de vectors en ${}^nK$.

Sigui $v \in B$ tal que $\varepsilon(v) = 0$. Aleshores per a tot j tenim

$$0 = \varepsilon_j(v) = \sum_{i=1}^{t_j} \varepsilon_j(x_i^{(j)}) \varepsilon_j(z_j^i),$$

on $v = \sum_{i,j} x_i^{(j)} z_j^i$, amb $z_j^i \in p_j P(E)$. De la K-independència lineal de $\{\varepsilon_j(x_i^{(j)}) \mid i = 1, \ldots, t_j\}$ n'obtenim que $\varepsilon_j(z_j^i) = 0$ per a tot i, j. Com que $z_j^i = p_j z_j^i$ tenim que $\varepsilon(z_j^i) = 0$ i, per tant, $(v)\,\delta_e = \sum_{i,j} x_i^{(j)} \cdot ((z_j^i)\delta_e) \in B$. □

COROL·LARI 2.1.4. *Si $B \subseteq {}^nP(E)$ és regular, aleshores existeix $u \in M_n(P(E))$ tal que $B = u\,{}^nP(E)$.*

El següent Lema és anàleg al Truc de Higman usual, vegeu per exemple [**21**, pàg. 284–285].

LEMA 2.1.5 (Truc de Higman). *Donada una matriu $M \in M_{n \times m}(P(E))$, existeixen $\ell \in \mathbb{N}$, $P \in E_{n+\ell}(P(E))$ i $Q \in E_{m+\ell}(P(E))$ tals que $P \left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_\ell \end{smallmatrix}\right) Q$ és una matriu lineal, és a dir, una matriu amb entrades de grau $\leqslant 1$.*

DEMOSTRACIÓ. Donat $r \in P(E)$ amb $\deg(r) > 0$, $r = \sum_{\alpha \in E^*} \lambda_\alpha \alpha$ definim

$$\mathrm{dm}(r) = \prod_{\substack{\lambda_\alpha \neq 0 \\ \deg(\alpha) > 0}} \deg(\alpha)$$

i per a r amb $\deg(r) \leqslant 0$ posem $\mathrm{dm}(r) = 1$. Donada una matriu $M = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(P(E))$ posem $\mathrm{D}(M) = \prod_{i,j} \mathrm{dm}(a_{ij})$.

Demostrarem el resultat per inducció sobre $\mathrm{D}(M)$. Si $\mathrm{D}(M) = 1$ vol dir que per a tot i, j tenim $\mathrm{dm}(a_{ij}) = 1$ i, per tant, $\deg(a_{ij}) \leqslant 1$.

Suposem que el resultat és cert per a tota matriu M tal que $\mathrm{D}(M) \leqslant n$ amb $n \geqslant 1$ i prenem una matriu $M = (a_{ij})$ tal que $\mathrm{D}(M) = n+1$. Com que $\mathrm{D}(M) > 1$ existeix alguna entrada de M que té algun monomi no lineal. Multiplicant a dreta i esquerra per matrius elementals podem suposar que aquesta entrada és la a_{11}. Tenim que $a_{11} = \sum_{\alpha \in E^*} \lambda_\alpha \alpha$. Prenem $\alpha \in \mathrm{supp}(a_{11})$ tal que $|\alpha| = k > 1$. Aleshores $\alpha = e\alpha'$ per a certs $e \in E^1$ i $\alpha' \in E^{k-1}$. Escrivim M com una matriu de blocs $M = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a \\ b & M' \end{smallmatrix}\right)$. Augmentant la mida de la matriu M i multiplicant a banda i banda per matrius elementals

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_\alpha e \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a & 0 \\ b & M' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -\alpha' & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_\alpha \alpha & a & \lambda_\alpha e \\ b & M' & 0 \\ -\alpha' & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenim una matriu N establement associada a M tal que $\mathrm{D}(N) = \frac{k-1}{k}\mathrm{D}(M) \leqslant n$. Ara, per hipòtesi d'inducció obtenim el resultat. $\square$

LEMA 2.1.6. *Tenim que* $GL_n(P((E))) = \{M \in M_n(P((E))) \mid \varepsilon(M) \in GL_n(K^d)\}$.

DEMOSTRACIÓ. En efecte, si $M \in GL_n(P((E)))$ és clar que $\varepsilon(M) \in GL_n(K^d)$. Sigui ara $M \in M_n(P((E)))$ tal que $\varepsilon(M) \in GL_n(K^d)$. Podem escriure $M = \varepsilon(M) - D$ per a alguna matriu $D \in M_n(P((E)))$ amb $o(D) > 0$. Tenim que

$$M^{-1} = \varepsilon(M)^{-1}(\mathbf{1}_n + D\varepsilon(M)^{-1} + (D\varepsilon(M)^{-1})^2 + \cdots). \qquad \square$$

Diem que un anell R és *Dedekind-finit* si per a tot parell d'elements $a, b \in R$ tals que $ab = 1$ tenim que $ba = 1$. Com a conseqüència del lema anterior tenim:

COROL·LARI 2.1.7. *Sigui* $R \subseteq P((E))$ *una subàlgebra. Aleshores* R *és Dedekind-finit.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, siguin $a, b \in R$ tals que $ab = 1$. Aleshores $\varepsilon(ab) = 1$ i, pel lema anterior, tenim que $a \in U(P((E)))$. Per tant, $a^{-1} = b$. $\square$

LEMA 2.1.8. *Sigui* $u_0 = p - D \in M_n(P(E))$, *on* $p \in \mathrm{Idem}(M_n(K^d))$ *és idempotent i* D *és homogènia de grau* 1. *Suposem, a més, que* $B = u_0{}^n P(E)$ *és un* $P(E)$*-mòdul regular. Aleshores existeixen* $u \in M_n(P(E))$ *i* $v \in M_n(P((E)))$ *tals que* $uvu = u$, $vuv = v$ *amb* $B = u^n P(E)$ *i* $vu \in M_n(P(E))$.

DEMOSTRACIÓ. En efecte, tenim $u_0(1-p) = -D(1-p)$ que, si és no nul·la, és una matriu homogènia de grau 1. Les seves columnes són elements de B, és a dir, si denotem els elements de la base canònica de ${}^nP(E)$ per E_i, tenim que $u_0(1-p)E_i \in B$

per a tot $i = 1, \dots, n$. Com que són elements d'ordre positiu descomponen de la manera següent:

$$u_0(1-p)E_i = \sum_{e \in E^1} u^i_{0e} e \quad \text{amb } u^i_{0e} \in {}^n\big(P(E)p_{s(e)}\big) \text{ únics,}$$

de fet, com que B és regular tenim que $u^i_{0e} \in B$. Tenim, també, que $\deg(u^i_{0e}) < 1$, és a dir, són elements de $\varepsilon(B) \cap B$. Com que $\varepsilon(B) = p^n(K^d)$ es compleix que $pu^i_{0e} = u^i_{0e}$ per a tot i i e. En particular, $(1-p)D(1-p) = 0$. Considerem V_1 el K^d-submòdul de $\varepsilon(B)$ generat per $\{u^i_{0e} \mid e \in E^1, i = 1, \dots, n\}$. Com que K^d és un anell semisimple existeix $q_1 \in \mathrm{Idem}(M_n(K^d))$, $q_1 \leqslant p$, tal que $V_1 = {q_1}^n(K^d)$. Per l'anterior tenim, doncs, que ${q_1}^n P(E) \subseteq B$ i, en definitiva, hem vist que

$$u_0 = p - pDp - q_1 D(1-p) - (1-p)Dp.$$

Si posem $u_1 = (1-q_1)u_0 = (p-q_1) - (p-q_1)Dp - (1-p)Dp$, per la llei modular obtenim que:

$$B = {q_1}^n P(E) \oplus {u_1}^n P(E).$$

Fixem-nos que, pel Lema 2.1.2, ${u_1}^n P(E)$ torna a ser un $P(E)$-mòdul regular, de manera que podem repetir el procés anterior amb u_1. Tenim que $u_1 q_1 = -(p-q_1)Dq_1 - (1-p)Dq_1$. Com abans, per $i = 1, \dots, n$, obtenim $u_1 q_1 E_i = \sum_{e \in E^1} u^i_{1e} e$ amb $u^i_{1e} \in B$ i com que, per qüestions de grau, $u^i_{1e} \in \varepsilon(B)$ tenim que $(1-p)Dq_1 = 0$.

Considerem V_2 el K^d-submòdul de $\varepsilon(B)$ generat per $\{u^i_{1e} \mid e \in E^1, i = 1, \dots, n\}$. Veiem que existeix una matriu idempotent $q_2 \in M_n(P(E))$, $q_2 \leqslant (p - q_1)$, tal que $V_2 = {q_2}^n(K^d) \leqslant \varepsilon(B)$. Igual que abans tenim que ${q_2}^n P(E) \subseteq B$ ja que $u^i_{1e} \in B$. Si posem

$$\begin{aligned} u_2 &= (1-(q_1+q_2))u_1 = (1-(q_1+q_2))u_0 \\ &= (p-(q_1+q_2)) - (p-(q_1+q_2))D(p-q_1) - (1-p)D(p-q_1) \end{aligned}$$

tenim que $B = (q_1+q_2)^n P(E) \oplus {u_2}^n P(E)$.

Iterant aquest procés obtenim una successió de matrius idempotents $q_1, \dots, q_\ell \in \mathrm{Idem}(M_n(P(E)))$, ortogonals 2 a 2, amb $q_i \leqslant p$ per a tot i i de manera que ${q_i}^n P(E) \subseteq B$; també tenim K^d-mòduls $V_i = {q_i}^n(K^d)$, amb intersecció nul·la 2 a 2, i $u_1, \dots, u_\ell \in M_n(P(E))$,

$$\begin{aligned} u_i = (p-(q_1+\cdots+q_i)) - (p-(q_1+\cdots+q_i))D(p-(q_1+\cdots+q_{i-1})) \\ - (1-p)D(p-(q_1+\cdots+q_{i-1})) \end{aligned}$$

de manera que $B = {q_i}^n P(E) \oplus {u_i}^n P(E)$ per a tot i.

Com que tenim una cadena ascendent de submòduls d'un mòdul noetherià:

$$V_1 \subseteq V_1 \oplus V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_1 \oplus \cdots \oplus V_i \subseteq \cdots \subseteq \varepsilon(B)$$

veiem que el procés anterior acaba en un nombre finit de passos, posem que siguin ℓ. Escrivim $q = q_1 + \cdots + q_\ell$. En principi,tenim que

$$u_\ell = (p-q) - (p-q)D(p-(q_1+\cdots+q_{\ell-1})) - (1-p)D(p-(q_1+\cdots+q_{\ell-1})),$$

però com que el procés finalitza en aquest pas cal que $u_\ell q_\ell = 0$, és a dir,

$$u_\ell = (p-q) - (p-q)D(p-q) - (1-p)D(p-q)$$

amb $B = q^n P(E) \oplus u_\ell{}^n P(E)$. Posem ara

$$u = q + u_\ell = p - (p-q)D(p-q) - (1-p)D(p-q),$$

i tenim que $B = u^n P(E)$. Si prenem

$$v = p + (p-q)D(p-q) + ((p-q)D(p-q))^2 + \cdots \in M_n(P((E)))$$

aleshores $vu = p \in M_n(P(E))$, $uvu = u$ i $vuv = v$. $\square$

El següent resultat és ben conegut per al cas de l'àlgebra lliure; vegeu [**19**, Corollary VII.3.4] i [**22**, Appendix].

TEOREMA 2.1.9 (Inèrcia estable). *Siguin* ${}_{P(E)}A \subseteq P((E))^n$ *i* $B_{P(E)} \subseteq {}^nP((E))$ *$P(E)$-submòduls esquerra i dreta, respectivament, tals que per a tot $a \in A$ i per a tot $b \in B$ es compleix que $ab \in P(E)$. Aleshores existeixen $m \in \mathbb{N}$ i u, $v \in M_{n+m}(P((E)))$ tals que per a tot $a \in A \oplus P(E)^m$ i tot $b \in B \oplus {}^mP(E)$ tenim*

$$au \in P(E)^{n+m}, \quad vb \in {}^{n+m}P(E) \text{ i } ab = (au)(vb).$$

DEMOSTRACIÓ. Vegem-ho primer en el cas que $B \subseteq {}^nP(E)$. Prenent, potser, un B més gran podem suposar que

$$B = \{b \in {}^nP(E) \mid \forall a \in A,\, ab \in P(E)\}.$$

En aquest cas tenim que B és un $P(E)$-mòdul dreta regular. En efecte, si prenem $b \in B$ amb $o(b) > 0$ sabem que $b = \sum_{e \in E^1} b_e e$ per a alguns $b_e \in {}^n(P(E)p_{s(e)})$ únics. Per a tot $a \in A$ tenim que

$$ab = a\left(\sum_{e \in E^1} b_e e\right) = \sum_{e \in E^1} (ab_e)e \in P(E),$$

d'on $ab_e \in P(E)$ per a tot $e \in E^1$ i per a tot $a \in A$, cosa que ens diu que $b_e \in B$ per a tot $e \in E^1$.

Pel Corol·lari 2.1.4 tenim que existeix $u_0 \in M_n(P(E))$ tal que $B = u_0{}^n P(E)$. Tindrem $\varepsilon(B) = \varepsilon(u_0)^n(K^d)$.

Pel truc de Higman (Lema 2.1.5) existeixen $m \in \mathbb{N}$ i P, $Q \in E_{n+m}(P(E))$ tals que la matriu

$$u_1 = P\begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix} Q,$$

és lineal. Posem ara $A' = (A \oplus P(E)^m)P^{-1}$ i $B' = u_1{}^{n+m}P(E) = P(B \oplus {}^mP(E))$. Per tant, estabilitzant, obtenim B' regular i tal que la matriu u_1 generadora de B' és lineal.

Com que $M_{n+m}(K^d)$ és regular per unitats existeix $x \in GL_{n+m}(K^d)$ tal que $\varepsilon(u_1)x\varepsilon(u_1) = \varepsilon(u_1)$. De manera que la matriu idempotent $p := \varepsilon(u_1)x \in M_{n+m}(K^d)$ compleix $\varepsilon(B) = p^{n+m}(K^d)$. Si usem $u_1 x$ enlloc de u_1 com a generador de B', podem suposar que $u_1 = p - D$ amb $p \in \mathrm{Idem}(M_{n+m}(K^d))$ i, per l'anterior, $D \in M_{n+m}(P(E))$ és homogènia de grau 1.

Ara ens trobem en les hipòtesis del Lema 2.1.8, de manera que existeixen $u_2 \in M_{n+m}(P(E))$ i $v_0 \in M_{n+m}(P((E)))$ tals que $u_2 v_0 u_2 = u_2$, $v_0 u_2 v_0 = v_0$ amb $B' = u_2{}^{n+m}P(E)$ i $v_0 u_2 \in M_{n+m}(P(E))$.

Posem $u = P^{-1}u_2$ i $v = v_0P$. Donats $a \in A \oplus P(E)^m$ i $b \in B \oplus {}^mP(E)$ tenim que $aP^{-1} \in A'$ i $Pb \in B'$. Així $Pb = u_2b'$ per a algun $b' \in {}^{n+m}P(E)$. Es compleixen les identitats següents:

$$\begin{aligned}(au)(vb) &= ((aP^{-1})u_2)(v_0(Pb)) = (aP^{-1})((u_2v_0u_2)b') \\ &= (aP^{-1})(u_2b') = (aP^{-1})(Pb) = ab, \\ vb &= v_0(Pb) = (v_0u_2)b' \in {}^{n+m}P(E).\end{aligned}$$

A més, usant que $u_2 = u_1y$ per a cert $y \in M_{n+m}(P(E))$ tenim que

$$au = (aP^{-1})u_2 = (aP^{-1})u_1y = a\begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix}Qy \in P(E)^{n+m}.$$

Hem demostrat el teorema per al cas que $B \subseteq {}^nP(E)$.

Vegem ara que en el cas general ens podem reduir a l'anterior. Prenent, potser, un conjunt A més gran podem suposar que

$$A = \{a \in P((E))^n \mid \forall b \in B,\, ab \in P(E)\}$$

de manera que, com abans, A té estructura de $P(E)$-mòdul esquerra. A més, donat $a \in A$ amb $o(a) > 0$ tenim que per a tot $e \in E^1$, $\tilde{\delta}_e(a) \in A$.

Per a cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ posem

$$J_i = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid \forall b = (b_1, \ldots, b_n)^t \in B,\, p_ib_j \in P(E)\}.$$

Aquests conjunts ens donen una mesura de la distància a que ens trobem del cas anterior. En el supòsit que per a tot i amb $1 \leqslant i \leqslant d$, per a tot $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ i per a tot $j \notin J_i$ tinguem que $a_jp_i = 0$, considerem la següent matriu diagonal:

$$q = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \text{ on } d_j = \sum_{i \in \{i \mid j \in J_i\}} p_i.$$

Per a tot $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ i tot $b = (b_1, \ldots, b_n)^t \in B$ tenim

$$ab = \sum_i a_ib_i = \sum_i a_id_ib_i + \sum_i a_i(1 - d_i)b_i = \sum_i a_id_ib_i = a(qb)$$

amb $qb \in {}^nP(E)$ de manera que si considerem qB enlloc de B ens podem reduir al cas anterior.

Altrament, suposem que existeixen $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ i $j_0 \notin J_{i_0}$ de manera que $a_{j_0}p_{i_0} \neq 0$. En particular, podem prendre $\alpha \in \operatorname{supp}(a_{j_0})$ tal que $\alpha p_{i_0} \neq 0$. Posem que $\alpha = e_1 \cdots e_m$ per a certes arestes $e_1, \ldots, e_m \in E^1$ amb $r(e_m) = i_0$. Considerem ara el següent conjunt:

$$S_a := \bigcup_{i=1}^{d}\left(\left(\bigcup_{j \notin J_i} \operatorname{supp}(\varepsilon(a_j))\right) \cap \{p_i\}\right)$$

Observem que, si denotem els elements de la base canònica de $P(E)^n$ per E_j, per la definició de J_i tenim que $p_iE_j \in A$ si i només si $j \in J_i$. Així, en el cas que $S_a = \emptyset$ tenim que $\varepsilon(a) \in A$ i podem suposar que $o(a) > 0$. Considerem ara la següent subparaula de α, $\alpha_1 = e_1 \cdots e_{m_1}$ amb $m_1 = o(a)$. Per assumpció sobre A tenim que

$a' = \tilde{\delta}_{e_{m_1}} \cdots \tilde{\delta}_{e_2}\tilde{\delta}_{e_1}(a) \in A$ i és un element no nul amb $\alpha' = e_{m_1+1} \cdots e_m \in \operatorname{supp}(a'_{j_0})$. Podem, ara, repetir el mateix argument amb a' i α'. Com que $\alpha p_{i_0} \neq 0$ i el procés anterior ens disminueix la longitud de la paraula, en algun moment obtindrem un $a^{(k)} \in A$ tal que $S_{a^{(k)}} \neq \emptyset$ i, per tant, sempre ens podem reduir a aquest cas.

Si $S_a \neq \emptyset$ podem prendre $p_\ell \in S_a$ de manera que per a algun $j_0 \notin J_\ell$ tenim que $p_\ell \in \operatorname{supp}(\varepsilon(a_{j_0}))$. Posem ara

$$a'' = (p_\ell a_1, \ldots, p_\ell a_{j_0-1}, p_\ell a_{j_0} + p_1 + \cdots + p_{\ell-1} + p_{\ell+1} + \cdots + p_d, p_\ell a_{j_0+1}, \ldots, p_\ell a_n).$$

Pel Lema 2.1.6 tenim que la j_0-èsima component de a'' és invertible en $P(\!(E)\!)$, de manera que podem considerar la següent matriu invertible:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ a''_1 & .. & a''_{j_0} & .. & a''_n \\ & & & \ddots & \\ 0 & \ldots\ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(P(\!(E)\!))$$

obtinguda substituint la j_0-èsima fila de la matriu identitat per a''.

Ara, per a tot $b = (b_1, \ldots, b_n)^t \in B$ tenim que

$$Mb = (b_1, \ldots, b_{j_0-1}, b'_{j_0}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)^t,$$

on $b'_{j_0} = p_\ell ab + (p_1 + \cdots + p_{\ell-1} + p_{\ell+1} + \cdots + p_d)b_{j_0}$. Per tant, si substituïm A per AM^{-1} i B per MB, això no altera els conjunts J_i per a $i \neq \ell$ però augmenta $|J_\ell|$ en un (hi hem afegit j_0). Repetint, doncs, el procés anterior tantes vegades com calgui podrem reduir-nos al cas que $B \subseteq {}^nP(E)$. □

Sigui R un anell. Recordem que un R-mòdul P és *establement lliure* si $P \oplus R^m \cong R^n$ per a alguns $m, n \in \mathbb{N}$. Tenim la següent definició:

DEFINICIÓ 2.1.10. Un anell R és d'*Hermite* si té IBN (*invariant basis number*) i els mòduls establement lliures són lliures.

Recordem que una *matriu plena* sobre un anell R és una matriu quadrada $M \in M_n(R)$ tal que no es pot descomposar com a producte $M = LN$, on $L \in M_{n\times(n-1)}(R)$ i $N \in M_{(n-1)\times n}(R)$, vegeu [**20**, pàg. 159]. Necessitarem el següent Lema:

LEMA 2.1.11. *Donada una matriu plena $M \in M_n(P(E))$ tenim que, per a tot $m \in \mathbb{N}$, $M \oplus \mathbf{1}_m$ també és plena.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, de la Proposició 1.2.8 és clar que $P(E)$ és un anell d'Hermite. Ara, el resultat és conseqüència de [**20**, Proposition 5.6.2]. □

DEFINICIÓ 2.1.12 ([**20**, pàg. 250]). Un homomorfisme d'anells $f\colon R \to S$ diem que és *honest* si envia matrius plenes de R a matrius plenes de S.

COROL·LARI 2.1.13. *La inclusió $P(E) \hookrightarrow P(\!(E)\!)$ és honesta.*

Demostració. Sigui $C \in M_n(P(E))$ una matriu plena i suposem que no fos plena en $P(\!(E)\!)$. Posem que $C = AB$ on $A \in M_{n\times\ell}(P(\!(E)\!))$ i $B \in M_{\ell\times n}(P(\!(E)\!))$ amb $\ell < n$. Pel Teorema 2.1.9 tenim que existeixen $m \in \mathbb{N}$ i u, $v \in M_{\ell+m}(P(\!(E)\!))$ tals que

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix} u\right)\left(v\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix}\right),$$

de manera que obtenim una descomposició de la matriu de l'esquerra en $P(E)$ que, per tant, no és plena. Però pel Lema 2.1.11 tenim que si $C \in M_n(P(E))$ és plena aleshores també ho és $C \oplus \mathbf{1}_m$, cosa que ens porta a contradicció. □

Recordem les següents notació i definicions; vegeu per exemple [**46**, Section 10.2.2].

Notació 2.1.14. Donats un anell S i un subanell $R \subseteq S$ denotem per $T(R \subseteq S)$ el conjunt dels elements de R que esdevenen invertibles en S i per $\Sigma(R \subseteq S)$ el conjunt de les matrius quadrades sobre R que esdevenen invertibles en S.

Definicions 2.1.15. Sigui S un anell.

(i) Un subanell $R \subseteq S$ diem que és *tancat per inversions* en S si $T(R \subseteq S) = U(R)$, és a dir, si $U(R) = R \cap U(S)$.
(ii) Un subanell $R \subseteq S$ diem que és *racionalment tancat* en S si $\Sigma(R \subseteq S) = GL(R)$, és a dir, si $GL(R) = M(R) \cap GL(S)$.
(iii) Donat un subanell $R \subseteq S$ la *clausura de divisió* de R en S, denotada per $\mathcal{D}(R \subseteq S)$, és el subanell més petit de S tancat per inversions i que conté R.
(iv) Donat un subanell $R \subseteq S$ la *clausura racional* de R en S, denotada per $\mathcal{R}(R \subseteq S)$, és el subanell més petit de S racionalment tancat i que conté R.

Observem que la clausura de divisió i la clausura racional sempre existeixen, ja que les propietats pertinents s'hereten per interseccions. Anàlogament al cas de l'àlgebra lliure podem considerar les sèries racionals sobre una àlgebra de camins:

Definició 2.1.16. Definim la *K-àlgebra de sèries racionals* del buirac E, denotada per $P_{\mathrm{rat}}(E)$, com la clausura de divisió de $P(E)$ en $P(\!(E)\!)$.

En [**20**, Section 7.1] trobem les següents definicions:

Definició 2.1.17. Donats Σ un conjunt de matrius sobre un anell R i un morfisme d'anells Σ-inversor $f\colon R \to S$ definim la *Σ-clausura racional* de R en S com el conjunt $R_\Sigma(S)$ de totes les entrades de les inverses de les matrius de $f(\Sigma)$.

Definició 2.1.18. Un conjunt de matrius Σ sobre un anell R diem que és *multiplicativament tancat per dalt* si $1 \in \Sigma$ i quan A, $B \in \Sigma$ aleshores $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in \Sigma$ per a tota matriu C de mida adequada. Definim conjunt multiplicativament tancat *per baix* de manera anàloga. Un conjunt Σ diem que és *multiplicatiu* si és multiplicativament tancat per dalt i compleix que tota matriu de Σ hi roman després de qualsevol permutació de files i columnes. Obviament, un conjunt multiplicatiu també és multiplicativament tancat per baix.

En el cas que Σ sigui multiplicativament tancat per dalt, la Σ-clausura racional és un anell. Tenim el següent resultat [**20**, Theorem 7.1.2]:

TEOREMA 2.1.19 (Cohn). *Siguin R un anell i Σ un conjunt multiplicativament tancat per dalt. Donat un morfisme Σ-inversor $f\colon R \to S$, la Σ-clausura racional $R_\Sigma(S)$ és un subanell de S que conté $\operatorname{im} f$ i per a tot $s \in S$ les següents condicions són equivalents:*

(a) $s \in R_\Sigma(S)$,

(b) s és una component de la solució u del sistema de l'equació matricial

$$Au - E_j = 0, \quad \text{on } A \in f(\Sigma),$$

(c) s és una component de la solució u del sistema de l'equació matricial

$$Au + a = 0, \quad \text{on } A \in f(\Sigma),$$

i a és una columna amb entrades en $\operatorname{im} f$.

(d) $s = bA^{-1}c$, on $A \in f(\Sigma)$ i b, c són, respectivament, una fila i una columna amb entrades en $\operatorname{im} f$.

També hi trobem [**20**, Proposition 7.1.4]:

PROPOSICIÓ 2.1.20 (Cohn). *Siguin R un anell, Σ un conjunt multiplicativament tancat per baix de matrius sobre R i $f\colon R \to S$ un homomorfisme Σ-inversor. Aleshores, per a tota matriu $P \in M_{m\times n}(R_\Sigma(S))$ existeixen un $\ell \geqslant 0$ i matrius $a \in M_{(\ell+m)\times n}(\operatorname{im} f)$, $u = {}^t(U, P) \in M_{(\ell+m)\times n}(R_\Sigma(S))$, $A \in f(\Sigma)$ quadrada de mida $\ell + m$, tals que*

$$Au + a = 0.$$

Una conseqüència senzilla de l'anterior és el següent resultat anàleg a la Regla de Cramer (*cf.* [**20**, Proposition 7.1.3]):

COROL·LARI 2.1.21 (Regla de Cramer). *Sigui $f\colon R \to S$ un morfisme d'anells. Donada una matriu $P \in M_{m\times n}(R_\Sigma(S))$ tenim*

$$A\begin{pmatrix} \mathbf{1} & U \\ 0 & P \end{pmatrix} = A'$$

on $A \in f(\Sigma)$, A' és una matriu amb entrades en $\operatorname{im} f$ i U és una matriu en $R_\Sigma(S)$ de mida adequada. En particular, la matriu P és establement associada en $R_\Sigma(S)$ a una matriu amb entrades a la $\operatorname{im} f$.

DEMOSTRACIÓ. En efecte, sigui $P \in M_{m\times n}(R_\Sigma(S))$ per la Proposició 2.1.20 tenim que existeixen $\ell \geqslant 0$ i matrius $a \in M_{(\ell+m)\times n}(\operatorname{im} f)$, $u = {}^t(U, P) \in M_{(\ell+m)\times n}(R_\Sigma(S))$, $A \in f(\Sigma)$ matriu quadrada de mida $\ell + m$, tals que $Au + a = 0$. Ara, si denotem per A_ℓ la matriu formada per les ℓ primeres columnes de A tenim:

$$A\begin{pmatrix} \mathbf{1}_\ell & U \\ 0 & P \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \mathbf{1}_\ell & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1}_\ell & U \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} = (A_\ell,\, a)$$

com volíem. □

Usant el resultat anterior és fàcil veure que, en el cas que $\Sigma = \Sigma(R \subseteq S)$, la Σ-clausura racional coincideix amb la clausura racional:

Proposició 2.1.22. *Siguin S un anell, $R \subseteq S$ un subanell i posem $\Sigma = \Sigma(R \subseteq S)$. Aleshores $R_\Sigma(S) = \mathcal{R}(R \subseteq S)$.*

Demostració. Denotarem $R_\Sigma(S)$ per T. Pel Teorema 2.1.19 tenim que T és un subanell de S, a més, és clar que està contingut en $\mathcal{R}(R \subseteq S)$; per tant, per veure que coincideixen en tenim prou veient que T és racionalment tancat en S.

Sigui $P \in \Sigma(T \subseteq S)$. Pel Corol·lari 2.1.21 tenim que existeixen matrius $A \in \Sigma$, $A' \in M(R)$ i $U \in M(T)$ de manera que:

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & U \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = A'.$$

Com que les tres matrius de l'esquerra són invertibles en S veiem que A' també ho és i com que $A' \in M(R)$ tenim que $A' \in \Sigma$. Per la definició de T tenim que $A' \in GL(T)$, per tant, aïllant obtenim que $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right) \in GL(T)$, d'on deduïm que $P \in GL(T)$. Per tant $T = \mathcal{R}(R \subseteq S)$. □

En vista d'aquest resultat, quan $\Sigma = \Sigma(R \subseteq S)$, ens referirem a la Σ-clausura racional simplement com la clausura racional i usarem la notació d'aquesta segona.

Definició 2.1.23. Un conjunt de matrius Σ és *tancat per factors* si per a tot parell de matrius quadrades A, B tals que $AB \in \Sigma$ tenim A, $B \in \Sigma$.

Amb aquesta definició tenim el següent resultat [**20**, Proposition 7.5.2(ii)]:

Proposició 2.1.24. *Siguin R un anell, Σ un conjunt de matrius de R multiplicatiu i tancat per factors i $f\colon R \to S$ un morfisme honest i Σ-inversor, de manera que f factoritza a través de $f'\colon R_\Sigma \to S$, aleshores f' és injectiu.*

Lema 2.1.25. *Sigui $R \subseteq P(\!(E)\!)$ una K-subàlgebra. Si posem $\Sigma = \Sigma(R \subseteq P(\!(E)\!))$, aleshores Σ és multiplicatiu i tancat per factors.*

Demostració. És clar que $1 \in \Sigma$ i si A, $B \in \Sigma$, per a tota matriu C de mida adequada, tenim que

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ té per inversa } \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

Com que les permutacions de files i columnes no afecten la condició d'invertible obtenim que Σ és multiplicatiu.

D'altra banda, si A i B són matrius quadrades de mida n tals que $AB \in \Sigma$, pel Lema 2.1.6, tenim que $\varepsilon(AB) \in GL_n(K^d)$. Com que K^d és un anell commutatiu podem prendre determinants, d'on deduïm que $\varepsilon(A)$ i $\varepsilon(B)$ són invertibles en K^d i, pel Lema 2.1.6, A, $B \in \Sigma$. □

Proposició 2.1.26. *Sigui $R \subseteq P(\!(E)\!)$ una K-subàlgebra tancada per inversions. Aleshores R és racionalment tancada. En particular, $P_{\mathrm{rat}}(E)$ coincideix amb la clausura racional de $P(E)$ en $P(\!(E)\!)$.*

Demostració. Hem de veure que $\mathcal{R}(R \subseteq P(\!(E)\!)) \subseteq R$. Prenem una matriu $M \in \Sigma(R \subseteq P(\!(E)\!))$, posem que sigui de mida n, i volem veure que $M \in GL_n(R)$. Pel Lema 2.1.6 tenim que $\varepsilon(M) \in GL_n(K^d)$. Així, prenent $M\varepsilon(M)^{-1}$ enlloc de M, ens podem reduir al cas que $\varepsilon(M) = \mathbf{1}$ de manera que tenim una matriu amb les entrades de la diagonal invertibles i la resta no invertibles (novament pel Lema 2.1.6).

Vegem ara el resultat per inducció sobre n. Si $n = 1$ és clar, ja que R és tancat per inversions. Sigui $n > 1$ i suposem que el resultat és cert per a $n - 1$. Fent operacions per files (en R) a la matriu M podem obtenir una matriu de la forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & M' \end{smallmatrix}\right)$ on M' té les entrades de la diagonal invertibles i la resta no invertibles. Com que $M' \in GL_{n-1}(P(\!(E)\!))$, per hipòtesi d'inducció, tenim que $M' \in GL_{n-1}(R)$ de manera que $M \in GL_n(R)$ i hem vist que R és racionalment tancat, com volíem.

Per al cas de $P_{\mathrm{rat}}(E)$, com que és la clausura de divisió de $P(E)$ en $P(\!(E)\!)$ tenim que és el subanell de $P(\!(E)\!)$ més petit tancat per inversions. Per l'anterior hem vist que també és racionalment tancat i, per tant, és la clausura racional. $\square$

De la forma de les matrius invertibles en $P(\!(E)\!)$ n'obtenim el següent Corol·lari:

COROL·LARI 2.1.27. *Sigui $R \subseteq P(\!(E)\!)$ una K-subàlgebra tancada per inversions. Aleshores*

$$GL_n(R) = \{M \in M_n(R) \mid \varepsilon(M) \in GL_n(K^d)\}.$$

DEMOSTRACIÓ. En efecte, es conseqüència directa del Lema 2.1.6 i de la Proposició 2.1.26. $\square$

TEOREMA 2.1.28. *Sigui $\Sigma = \Sigma(P(E) \subseteq P(\!(E)\!))$. Aleshores $P_{\mathrm{rat}}(E)$ coincideix amb la localització universal de $P(E)$ respecte Σ.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem $\iota\colon P(E) \to P(E)_\Sigma$, la localització universal de l'àlgebra de camins respecte al conjunt Σ. Per la Proposició 2.1.26 tenim que les matrius de Σ esdevenen invertibles en $P_{\mathrm{rat}}(E)$ de manera que la inclusió $i\colon P(E) \hookrightarrow P_{\mathrm{rat}}(E)$ és un morfisme Σ-inversor. Per tant, per la propietat universal de la localització, existeix un morfisme $f\colon P(E)_\Sigma \to P_{\mathrm{rat}}(E)$ tal que $i = f\iota$.

Per la Proposició 2.1.26 tenim que $P_{\mathrm{rat}}(E)$ coincideix amb la (Σ-)clausura racional de $P(E)$ en $P(\!(E)\!)$ i pel Lema 2.1.25 tenim que Σ és multiplicatiu. Així, pel Teorema 2.1.19, obtenim que per a tot $s \in P_{\mathrm{rat}}(E)$, $s = bA^{-1}c$ on $A \in i(\Sigma)$ i b, c són, respectivament, una fila i una columna amb entrades en $P(E)$. Ara, pel Criteri de Malcolmson (Teorema 1.4.3) tenim que tot element de la localització universal és també d'aquesta forma i, per tant, f és exhaustiva.

Pel Corol·lari 2.1.13 tenim que la inclusió $P(E) \hookrightarrow P(\!(E)\!)$ és honesta. A més, és Σ-inversora i com que, pel Lema 2.1.25, Σ és multiplicatiu i tancat per factors podem aplicar la Proposició 2.1.24 obtenint que f també és injectiva. En definitiva, hem vist $P_{\mathrm{rat}}(E) \cong P(E)_\Sigma$. $\square$

OBSERVACIÓ 2.1.29. Com que $P(E)$ és hereditari per la Proposició 1.2.8 i $P(E) \to P_{\mathrm{rat}}(E)$ és una localització universal pel Teorema 2.1.28, de la Observació 1.4.12 n'obtenim que és establement llisa. A més, en general $P_{\mathrm{rat}}(E)$ no és llis com a $P(E)$-mòdul esquerra (tampoc com a $P(E)$-mòdul dreta). En efecte, posem que E sigui el buirac amb un sol vèrtex i dos llaços, de manera que $R := K\langle x, y\rangle \cong P(E)$. Podem usar el mateix argument que en [**50**, Section 1]. Posem $\overline{x} = 1 + x$, $\overline{y} = 1 + y$ i observem que

$R = K\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$. Tenim una successió exacta de R-mòduls (pensem per la dreta)

$$0 \longrightarrow R \oplus R \xrightarrow{(\overline{x},\overline{y})} R \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Tensoritzant per la dreta per R_Σ obtenim una successió exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K, R_\Sigma) \longrightarrow R_\Sigma \oplus R_\Sigma \xrightarrow{(\overline{x},\overline{y})} R_\Sigma \longrightarrow K \otimes_R R_\Sigma \longrightarrow 0.$$

Com que $\overline{x}$, $\overline{y} \in \Sigma$, veiem que esdevenen isomorfismes sobre R_Σ, d'on deduïm que el nucli de l'aplicació $(\overline{x}, \overline{y})\colon R_\Sigma \oplus R_\Sigma \to R_\Sigma$ es pot identificar amb R_Σ. Per tant,

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, R_\Sigma) = R_\Sigma,$$

d'on deduïm que R_Σ no és llis com a R-mòdul esquerra (i per simetria tampoc ho és per la dreta).

2.2. Construcció de les àlgebres

En aquesta secció construirem algunes àlgebres associades a un buirac finit i n'estudiarem les seves propietats. Essencialment mostrem una versió de la construcció de [**9**, Section 3] que resulta apta per al cas de l'àlgebra de camins. Utilitzant aquesta construcció podem estendre alguns dels resultats d'aquest article al context de les àlgebres de camins.

DEFINICIÓ 2.2.1. Donat un buirac $E = (E^0, E^1, r, s)$, considerem els conjunts $\overline{E}^0 = E^0$, $\overline{E}^1 = \{\overline{e} \mid e \in E^1\}$ i les aplicacions $\overline{r}, \overline{s}\colon \overline{E}^1 \to \overline{E}^0$ definides via $\overline{r}(\overline{e}) = s(e)$ i $\overline{s}(\overline{e}) = r(e)$. Definim el *buirac invers* de E com el buirac $\overline{E} = (\overline{E}^0, \overline{E}^1, \overline{r}, \overline{s})$.

NOTACIÓ 2.2.2. Donat un camí $\alpha = e_1 \cdots e_n \in E^*$ denotarem per $\overline{\alpha} = \overline{e}_n \cdots \overline{e}_1$ el camí corresponent en el buirac invers; amb el benentès que si $\alpha \in E^0$, $\overline{\alpha} = \alpha$.

Posem $R = P(E)$ o $P((E))$. Per $e \in E^1$ definim el següent endomorfisme de K-àlgebres,

$$\begin{array}{cccccl} \tau_e\colon & R & \longrightarrow & R & & \\ & p_{s(e)} & \longmapsto & p_{r(e)} & & \\ & p_{r(e)} & \longmapsto & p_{s(e)} & & \\ & p_i & \longmapsto & p_i & & i \neq s(e), r(e) \\ & f & \longmapsto & 0 & & \forall f \in E^1. \end{array}$$

És clar que són morfismes de K-àlgebres, ja que vénen donats per la composició de l'augmentació amb un automorfisme de $\varepsilon(R)$ i amb la inclusió d'aquest en R. Escriurem τ_e a la dreta del seu argument (i les composicions actuaran d'acord amb aquest conveni).

DEFINICIÓ 2.2.3. Siguin R un anell i $\tau\colon R \to R$ un endomorfisme d'anells. Una aplicació additiva $\delta\colon R \to R$ diem que és una *τ-derivació* per la dreta si satisfà la regla $(rs)\delta = (r)\delta(s)\tau + r(s)\delta$.

LEMA 2.2.4. *Per a tot $e \in E^1$, δ_e és una τ_e-derivació per la dreta.*

Demostració. En efecte, posem que $r = \sum_{\alpha\in E^*} \lambda_\alpha \alpha$ i $s = \sum_{\beta\in E^*} \mu_\beta \beta$. El seu producte és $rs = \sum_{\gamma\in E^*} \nu_\gamma \gamma$ on $\nu_\gamma = \sum_{\gamma=\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta$. D'una banda tenim que, si $s(e) \neq r(e)$,

$$\begin{aligned}(r)\,\delta_e\,(s)\,\tau_e &= \left(\sum_{\substack{\alpha\in E^* \\ r(\alpha)=s(e)}} \lambda_{\alpha e}\alpha \right) \left(\mu_{r(e)} p_{s(e)} + \mu_{s(e)} p_{r(e)} + \sum_{\substack{i\in E^0 \\ i\neq r(e),s(e)}} \mu_i p_i \right) \\ &= \sum_{\substack{\alpha\in E^* \\ r(\alpha)=s(e)}} \left(\lambda_{\alpha e} \mu_{r(e)} \right) \alpha\end{aligned}$$

i notem que, en el cas que $s(e) = r(e)$, obtenim la mateixa expressió. També,

$$r\,(s)\,\delta_e = \left(\sum_{\alpha\in E^*} \lambda_\alpha \alpha \right) \left(\sum_{\substack{\beta\in E^* \\ r(\beta)=s(e)}} \mu_{\beta e} \beta \right) = \sum_{\substack{\gamma\in E^* \\ r(\gamma)=s(e)}} \left(\sum_{\gamma=\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_{\beta e} \right) \gamma.$$

D'altra banda, veiem que

$$\begin{aligned}(rs)\,\delta_e &= \left(\sum_{\gamma\in E^*} \nu_\gamma \gamma \right) \delta_e = \sum_{\substack{\gamma\in E^* \\ r(\gamma)=s(e)}} \nu_{\gamma e} \gamma = \sum_{\substack{\gamma\in E^* \\ r(\gamma)=s(e)}} \left(\sum_{\gamma e=\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta \right) \gamma \\ &= \sum_{\substack{\gamma\in E^* \\ r(\gamma)=s(e)}} \left(\sum_{\gamma=\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_{\beta e} \right) \gamma + \sum_{\substack{\gamma\in E^* \\ r(\gamma)=s(e)}} (\lambda_{\gamma e} \mu_{r(e)}) \gamma.\end{aligned}$$

Per tant, $(rs)\,\delta_e = (r)\,\delta_e\,(s)\,\tau_e + r\,(s)\,\delta_e$. □

Proposició 2.2.5. *Donats E un buirac i R una K-subàlgebra de $P((E))$, contenint $P(E)$ i tancada per les transduccions esquerra δ_e, existeix un anell S tal que:*

(i) *Existeixen monomorfismes d'anells*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\colon R &\to S & \quad \text{i} \quad z\colon\ P(\overline{E}) &\to S \\ r &\mapsto \mathcal{R}_r & \overline{\alpha} &\mapsto z_{\overline{\alpha}} \end{aligned}$$

tals que, per a tot i, $z_{p_i} = \mathcal{R}_{p_i}$ i

$$\mathcal{R}_r \cdot z_{\overline{e}} = z_{\overline{e}} \cdot \mathcal{R}_{(r)\tau_e} + \mathcal{R}_{(r)\delta_e} \tag{2.2.1}$$

per a tot $e \in E^1$ i tot $r \in R$.

(ii) *S és projectiu com a R-mòdul dreta. De fet, $S = \oplus_{\gamma\in E^*} S_\gamma$ amb $S_\gamma \cong p_{s(\gamma)}R$ com a R-mòduls. A més, tot element de S s'escriu de manera única com una suma finita $\sum_{\gamma\in E^*} z_{\overline{\gamma}} \mathcal{R}_{a_\gamma}$, on $a_\gamma \in p_{s(\gamma)}R$ per a tot $\gamma \in E^*$.*

Demostració. Posem $T = \mathrm{End}_K(R)$. Pensarem els elements de T actuant a la dreta del seu argument. Donat $r \in R$ denotem per $\mathcal{R}_r$ l'operador en T donat per multiplicació per la dreta per r. És clar que l'aplicació $\mathcal{R}\colon R \to T$ és un morfisme injectiu de K-àlgebres.

Per a tot $\overline{e} \in \overline{E}^1$ considerem els elements $z_{\overline{e}} \in T$ definits per

$$(r)z_{\overline{e}} = (r)\,\delta_e.$$

Sigui S el subanell de T generat per R i per tots els elements $z_{\overline{e}}$ prèviament definits. Donat $\overline{e} \in \overline{E}^1$, tenim

$$z_{\overline{e}} = z_{\overline{e}}\mathcal{R}_{p_{s(e)}} = \mathcal{R}_{p_{r(e)}} z_{\overline{e}},$$

per tant, existeix un únic morfisme de K-àlgebres $z\colon P(\overline{E}) \to S$ tal que $z(\overline{e}) = z_{\overline{e}}$ per a tot $e \in E^1$ i $z(p_i) = \mathcal{R}_{p_i}$ per a tot $i \in E^0$.

Donats $r, s \in R$ i $e \in E^1$, tenim

$$\begin{aligned}(s)(\mathcal{R}_r z_{\overline{e}}) &= (sr)z_{\overline{e}} = (sr)\,\delta_e = (s)\,\delta_e \cdot (r)\,\tau_e + s \cdot (r)\,\delta_e \\ &= (s)[z_{\overline{e}}\mathcal{R}_{(r)\tau_e} + \mathcal{R}_{(r)\delta_e}].\end{aligned}$$

Per tant,

$$\mathcal{R}_r \cdot z_{\overline{e}} = z_{\overline{e}} \cdot \mathcal{R}_{(r)\tau_e} + \mathcal{R}_{(r)\delta_e}$$

per a tot $\overline{e} \in \overline{E}^1$ i tot $r \in R$, cosa que demostra la fórmula (2.2.1). D'on deduïm que S està generat com a R-mòdul dreta pels monomis $z_{\overline{\gamma}}$, on $\gamma \in E^*$, i tenim que tot element de S s'escriu com una suma finita $\sum_{\gamma \in E^*} z_{\overline{\gamma}}\mathcal{R}_{a_\gamma}$, on $a_\gamma \in p_{s(\gamma)}R$ per a tot $\gamma \in E^*$. Resta veure la unicitat de l'expressió. Suposem que tenim $\sum_{\gamma \in E^*} z_{\overline{\gamma}}\mathcal{R}_{a_\gamma} = 0$, on els $a_\gamma \in p_{s(\gamma)}R$ no són tots zero. Sigui $\gamma_0 \in E^*$ un camí de longitud mínima en el suport d'aquesta expressió, és a dir, que $a_{\gamma_0} \neq 0$. Observem que

$$0 = (\gamma_0)(\sum_{\gamma \in E^*} z_{\overline{\gamma}}\mathcal{R}_{a_\gamma}) = p_{s(\gamma_0)}a_{\gamma_0} = a_{\gamma_0},$$

cosa que ens porta a contradicció. Hem vist, doncs, que tot element de S es pot escriure de manera única com una suma finita $\sum_{\gamma \in E^*} z_{\overline{\gamma}}\mathcal{R}_{a_\gamma}$, amb $a_\gamma \in p_{s(\gamma)}R$ per a tot $\gamma \in E^*$, cosa que demostra (ii) i també ens dóna la injectivitat del morfisme $z\colon P(\overline{E}) \to S$. Amb això acabem la demostració. $\square$

Notació 2.2.6. Denotarem l'anell S en la proposició anterior per $R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle$ on τ i δ són abreviatures per $(\tau_e)_{e \in E^1}$ i $(\delta_e)_{e \in E^1}$, respectivament. A més, com que els morfismes $\mathcal{R}\colon R \to S$ i $z\colon P(\overline{E}) \to S$ són injectius, identificarem els elements de R i de $P(\overline{E})$ amb les seves imatges a través d'aquestes aplicacions. Observem que la regla del producte (2.2.1) de la Proposició 2.2.5 esdevé ara $r\overline{e} = \overline{e}\,(r)\,\tau_e + (r)\,\delta_e$ per a tot $e \in E^1$ i $r \in R$. Com que, per les definicions de δ_e i τ_e, per a tot parell d'arestes $e, f \in E^1$ tenim que $(e)\,\tau_f = 0$ i $(e)\,\delta_f = \delta_{ef}p_{s(e)}$, de l'anterior n'obtenim que

$$e\overline{f} = \delta_{ef}p_{s(e)} \qquad \text{en } R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle. \tag{2.2.2}$$

També, amb aquestes identificacions tenim que (ii) de la Proposició 2.2.5 ens diu que tot element $s \in R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle$ s'escriu de manera única com una suma

$$s = \sum_{\gamma \in E^*} \overline{\gamma} a_\gamma \tag{2.2.3}$$

on $a_\gamma \in p_{s(\gamma)}R$ per a tot $\gamma \in E^*$.

En endavant R denotarà una K-subàlgebra de $P((E))$ contenint $P(E)$, tancada per inversions (en $P((E))$) i per les transduccions esquerra δ_e. Això inclou per exemple l'àlgebra de les sèries formals $P((E))$ i l'àlgebra de les sèries racionals $P_{\mathrm{rat}}(E)$. Que $P_{\mathrm{rat}}(E)$ és tancada per les transduccions esquerra δ_e es dedueix del fet que tot element $a \in P(E)_\Sigma$ es pot escriure (pel Criteri de Malcolmson, Teorema 1.4.3) com $a = bA^{-1}c$ on b, c son un vector fila i un vector columna de mida adequada i entrades en $P(E)$ i $A \in \Sigma$ és una matriu quadrada. Deduïm, doncs, del Teorema 2.1.28 que els elements de $P_{\mathrm{rat}}(E)$ tenen una expressió d'aquesta forma. Observem que, per $A \in \Sigma$ tenim que

$$\left(A^{-1}\right)\delta_e = -A^{-1} \cdot (A\delta_e) \cdot (A\tau_e)^{-1} \in M_n(P_{\mathrm{rat}}(E))$$

i $\left(A^{-1}\right)\tau_e = (A\tau_e)^{-1} \in M_n(P_{\mathrm{rat}}(E))$ (per a algun $n \geqslant 0$). Ara, si $a = bA^{-1}c \in P_{\mathrm{rat}}(E)$ és clar que $(a)\,\delta_e \in P_{\mathrm{rat}}(E)$.

L'àlgebra $R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle$ compleix la següent propietat universal:

Proposició 2.2.7. *Sigui $\phi\colon R \to B$ un homomorfisme de K-àlgebres i suposem que per tot $f \in E^1$ existeix $t_{\overline{f}} \in \phi(p_{r(f)})B\phi(p_{s(f)})$ tal que $\phi(e)t_{\overline{f}} = \delta_{ef}\phi(p_{s(e)})$. Aleshores ϕ estén de manera única a un morfisme de K-àlgebres $\overline{\phi}\colon R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle \to B$ tal que $\overline{\phi}(\overline{e}) = t_{\overline{e}}$ per a tot $e \in E^1$.*

Demostració. Aquesta demostració és similar a [**9**, Proposition 3.3]. Posem $S = R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle$. En tenim prou construint un anell amb aquesta propietat universal i demostrant que és isomorf a S. En efecte, posem $F = \mathbb{Z}\langle z_{\overline{e}} \mid e \in E^1\rangle$ l'anell lliure en $|E^1|$ indeterminades i $S_0 = F *_{\mathbb{Z}} R$ el coproducte dels anells F i R. Sigui S_1 l'anell S_0 mòdul l'ideal generat pels elements de la forma $(1 * e)(z_{\overline{e}} * 1) - (1 * p_{s(e)})$ per a tot $e \in E^1$, pels $(1*f)(z_{\overline{e}}*1)$ per a tot $e, f \in E^1$ amb $e \neq f$ i pels $(z_{\overline{e}}*1)(1*p_{s(e)}) - (z_{\overline{e}}*1)$, $(1 * p_{r(e)})(z_{\overline{e}} * 1) - (z_{\overline{e}} * 1)$ per a tot $e \in E^1$. Denotarem la classe en S_1 d'un element $s \in S_0$ per $[s]$. Considerem ara $\psi\colon R \to S_1$ l'homomorfisme de K-àlgebres definit per $\psi(r) = [1 * r]$ i posem $w_{\overline{e}} := [z_{\overline{e}} * 1]$.

Ara, per a tot $e \in E^1$, tenim que $w_{\overline{e}} \in \psi(p_{r(e)})S_1\psi(p_{s(e)})$ i, per a qualssevol $e, f \in E^1$, que $\psi(e)w_{\overline{f}} = \delta_{ef}\psi(p_{s(e)})$. Per construcció, tenim que $(S_1, \psi, \{w_{\overline{e}} \mid e \in E^1\})$ és universal complint aquestes propietats. En particular, existeix un únic homomorfisme de K-àlgebres $\theta\colon S_1 \to S$ tal que $\theta \circ \psi$ és la inclusió $R \hookrightarrow S$ i $\theta(w_{\overline{e}}) = \overline{e}$ per a tot $e \in E^1$.

En tenim prou veient que θ és un isomorfisme. De les relacions que hem imposat en S_1 en deduïm que $S_1 = \sum_{\alpha \in E^*} w_{\overline{\alpha}}\psi(p_{s(\alpha)}R)$. Observem que $\theta\left(\sum_{\alpha\in E^*} w_{\overline{\alpha}}\psi(r_{\overline{\alpha}})\right) = \sum_{\alpha \in E^*} \overline{\alpha} r_{\overline{\alpha}}$ per a qualsevol suma amb els $r_{\overline{\alpha}} \in p_{s(\alpha)}R$, zero quasi per a tot. Per tant, de la Proposició 2.2.5 en deduïm que θ és un isomorfisme. $\square$

Posem $X = E^0 \setminus F(E)$, el conjunt dels vèrtexs que no són fonts. Donat un vèrtex $i \in X$, considerem els següents elements:

$$q_i = p_i - \sum_{e \in r^{-1}(i)} \overline{e}e \in R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle.$$

La suma anterior té sentit ja que estem en el cas de E un buirac finit (de fet, n'hi hauria prou amb que E fos un graf amb columnes finites).

LEMA 2.2.8. *Els q_i així definits són idempotents no nuls, ortogonals dos a dos i $q_i \leqslant p_i$ per a tot $i \in X$.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, usant (2.2.2) i les relacions de $P(E)$ i $P(\overline{E})$ tenim que

$$q_i^2 = p_i^2 - \sum_{e \in r^{-1}(i)} \overline{e} e p_i - \sum_{e \in r^{-1}(i)} p_i \overline{e} e + \left(\sum_{e \in r^{-1}(i)} \overline{e} e \right)^2 = q_i,$$

a més, $q_i p_i = p_i q_i = q_i$ de manera que els q_i són idempotents tals que $q_i \leqslant p_i$. Com que els p_i són ortogonals dos a dos és clar que els q_i també ho són. A més, de l'apartat (ii) de la Proposició 2.2.5 es desprèn que són no nuls. □

NOTACIÓ 2.2.9. Posarem $q = \sum_{i \in X} q_i = \sum_{i \in X} p_i - \sum_{e \in E^1} \overline{e} e$ que, pel Lema anterior, és un idempotent.

LEMA 2.2.10. *Sigui R una K-subàlgebra de $P((E))$ contenint $P(E)$, tancada per inversions i per les transduccions esquerra δ_e. Posem $S = R\langle \overline{E}; \tau, \delta \rangle$ i $I = SqS$, l'ideal bilàter generat per l'idempotent q. Tenim les següents propietats:*

(i) *Si $r \in R^{\times}$ aleshores existeix un $y \in S$ tal que $p_i r y = p_i$ per a algun $i \in E^0$.*
(ii) *Si $s \in S \setminus I$ llavors existeixen $s_1, s_2 \in S$ tals que $s_1 s s_2 = p_i$ per a algun $i \in E^0$.*
(iii) *Si $s \in I^{\times}$ aleshores existeixen $s_1, s_2 \in S$ tals que $s_1 s s_2 = q_i$ per a algun $i \in X$.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Prenem $r \in R^{\times}$, d'ordre k. Sigui $\alpha \in \operatorname{supp}(r)$ un camí de longitud k en el suport de r i posem $i = s(\alpha)$. Aleshores $r\overline{\alpha} = \lambda p_i + r'$ on $\lambda \in K^{\times}$ i r' és un element en R d'ordre no nul. Pel Corol·lari 2.1.27, deduïm que $r\overline{\alpha} + (1 - p_i)$ és un element invertible en R. Sigui t l'invers de $r\overline{\alpha} + (1 - p_i)$, i observem que

$$p_i r(\overline{\alpha} t) = p_i,$$

com volíem.

(ii) Sigui $s \in S \setminus I$. De la Proposició 2.2.5 sabem que s es pot escriure com una combinació R-lineal dreta (finita) $s = \sum_{\gamma \in E^*} \overline{\gamma} a_\gamma$, amb $a_\gamma \in p_{s(\gamma)} R$. Observem que $p_j \overline{e} = 0$ per a tot $e \in E^1$ i tot $j \in E^0 \setminus X$, per tant, $p_j s \in R$ per a tot vèrtex $j \in E^0 \setminus X$. Ara, si existeix algun $j \in E^0 \setminus X$ tal que $p_j s \neq 0$ el resultat es dedueix de (i).

Podem, doncs, suposar que $s = p_X s$, on $p_X = \sum_{i \in X} p_i$. Vegem primer que existeix una aresta $e \in E^1$ tal que $es \notin I$. En efecte, si $es \in I$ per a tota aresta $e \in E^1$ tenim

$$s = qs + (p_X - q)s = qs + \sum_{e \in E^1} \overline{e} e s \in I,$$

cosa que contradiu les nostres hipòtesis. Repetint aquest procés un nombre finit de vegades veiem que existeix un camí $\alpha \in E^*$ tal que $\alpha s \notin I$ i $\alpha s \in R$. Novament pel cas (i) tenim el que volíem.

(iii) Observem que per a tot parell de vèrtex $i, j \in X$, tota aresta $e \in E^1$ i tot $r \in R$ tenim que $q_i \overline{e} = 0$ i $r q_j = \varepsilon_j(r) q_j \in K q_j$, d'on deduïm que $q_i S q_j = \delta_{ij} q_i K \cong K$. En particular, tenim que $I = \sum_{i \in X} S q_i S$ i usant les relacions anteriors i la Proposició 2.2.5 veiem que tot element $s \in I$ s'escriu de manera única com una suma finita

$$s = \sum_{i \in X} \sum_{\{\gamma \in E^* \mid s(\gamma) = i\}} \overline{\gamma} q_i a_\gamma, \tag{2.2.4}$$

on $a_\gamma \in p_{s(\gamma)}R$.

Ara, si $a_\gamma = 0$ per a tot camí $\gamma \in E^*$ de longitud positiva, aleshores el resultat es dedueix de l'apartat (i). Suposem, doncs, que $a_\gamma \neq 0$ per a algun $\gamma \in E^*$ de longitud positiva. Veurem que existeix una aresta $e \in E^1$ tal que $es \neq 0$. Sigui $\alpha \in E^*$ un camí de longitud màxima en el suport de s (respecte a l'expressió anterior) i prenem e la darrera aresta en α, de manera que $\overline{\alpha} = \overline{e} \cdot \overline{\alpha}'$ per a un cert α'. Llavors

$$es = \sum_{i \in X} \sum_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} \overline{(\gamma\delta_e)} \cdot q_i \cdot a_\gamma$$

és un element no nul de I. De fet, tenim que $\alpha s = q_i a_\alpha \in I^\times$ i per l'apartat (i) obtenim el resultat. □

Recordem les definicions següents:

Definicions 2.2.11. Un ideal bilàter I en un anell A diem que és *semiprimer* si, per a tot J ideal bilàter de A, $J^2 \subseteq I$ implica que $J \subseteq I$. Un anell A és *semiprimer* si l'ideal zero és un ideal semiprimer.

Definició 2.2.12. Un ideal dreta (esquerra) I en un anell A és *minimal* si és simple com a A-mòdul dreta (esquerra).

Sigui A un anell. Recordem que el *sòcol dreta* de A, en símbols $\mathrm{Soc}(A_A)$, es defineix com la suma de tots els ideals dreta minimals. Anàlogament podem definir el *sòcol esquerra* de A, denotat per $\mathrm{Soc}({}_AA)$. En cas que A sigui un anell semiprimer, donat $a \in A$ tenim que si aA és un ideal dreta minimal aleshores Aa és un ideal esquerra minimal (*cf.* [**38**, Lemma 11.9]). Per tant en un anell semiprimer els sòcols dreta i esquerra coincideixen. En aquest cas posarem $\mathrm{Soc}(A) = \mathrm{Soc}(A_A) = \mathrm{Soc}({}_AA)$ i parlarem simplement del *sòcol* de A.

Definicions 2.2.13. Un anell A és *regular de von Neumann* si per a tot $x \in A$ existeix $y \in A$ tal que $xyx = x$. Un ideal bilàter I en un anell A és *regular de von Neumann* si per a tot $x \in I$ existeix $y \in I$ tal que $xyx = x$.

Proposició 2.2.14. *Sigui R una K-subàlgebra de $P(\!(E)\!)$ contenint $P(E)$, tancada per inversions i per les transduccions esquerra δ_e. Aleshores l'anell $S = R\langle \overline{E}; \tau, \delta \rangle$ és un anell semiprimer i SqS és un sumand directe de* $\mathrm{Soc}(S)$. *A més, SqS i* $\mathrm{Soc}(S)$ *són ideals regulars de von Neumann de S.*

Demostració. Posem $q_i = p_i$ per $i \in E^0 \setminus X$. Donat $s \in S^\times$ tenim, pel Lema 2.2.10, que $q_i \in SsS$ per a algun $i \in E^0$. Com que els elements q_i són idempotents no nuls veiem que $(SsS)^2 \neq \{0\}$, cosa que demostra que S és un anell semiprimer.

Hem vist en la demostració del Lema 2.2.10 que $q_i S q_j = \delta_{ij} q_i K \cong \delta_{ij} K$ per a tot $i, j \in X$. A més, és clar que si $i, j \in F(E)$ són fonts es compleix el mateix. En particular tenim que $q_i S q_i$ és un anell de divisió (de fet un cos) i per [**38**, Proposition 21.16(2)] els ideals $q_i S$ són minimals. Hem vist que $Sq_iS \subseteq \mathrm{Soc}(S)$ per a tot $i \in E^0$.

Vegem ara que $\mathrm{Soc}(S) \subseteq \oplus_{i \in E^0} Sq_iS$. Per definició $\mathrm{Soc}(S)$ és la suma de tots els ideals dreta (o esquerra) minimals. Com que S és semiprimer, tot ideal dreta minimal de S és de la forma eS on e és un idempotent no nul de S (*cf.* [**38**, Corollary 10.23]). Si e és un idempotent tal que eS és a un ideal dreta minimal aleshores pel Lema 2.2.10 existeixen $s_1, s_2 \in S$ tals que $s_1 e s_2 = q_i$ per a algun $i \in E^0$. Com que eS és un ideal dreta minimal tenim que $(es_2)S = eS$ i, per tant, existeix algun $s_3 \in S$ tal que $es_2s_3 = e$. A més, per [**38**, Lemma 11.9] tenim que $S(es_2)$ és un ideal esquerra minimal i, com que $q_i \in S(es_2)$, veiem que $S(es_2) = Sq_i$. Per tant, existeix $s_4 \in S$ tal que $s_4 q_i = es_2$. Finalment tenim que $e = es_2s_3 = s_4q_is_3 \in Sq_iS$, cosa que demostra el que volíem. També hem vist que SqS és un sumand directe de $\mathrm{Soc}(S)$.

Vegem ara que $\mathrm{Soc}(S)$ i SqS són ideals regular (de von Neumann). Hem vist que $\mathrm{Soc}(S) = \oplus_{i\in E^0} Sq_iS$ i, per a tot $i \in E^0$, Sq_iS és simple com a anell sense unitat i conté un ideal minimal per un costat. Per [**29**, Lemma 1] tenim que Sq_iS és un ideal regular. Usant [**32**, Lemma 1.3] obtenim que la suma d'ideals regulars amb intersecció nul·la és un ideal regular, de manera que $\mathrm{Soc}(S)$ és un ideal regular. Tenim el mateix per a SqS. □

Sigui R una K-subàlgebra de $P((E))$ contenint $P(E)$. Com abans, posem $X = E^0 \setminus F(E)$, el conjunt dels vèrtexs que no són fonts en E. Per $i \in X$ posem $r^{-1}(i) = \{e_1^i, \dots, e_{n_i}^i\}$ i considerem els morfismes de R-mòduls dreta

$$\begin{aligned} \mu_i \colon p_iR &\longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)}R \\ r &\longmapsto \left(e_1^i r, \dots, e_{n_i}^i r\right). \end{aligned}$$

Escrivim $\Sigma_1 = \{\mu_i \mid i \in X\}$. Observem que els elements de Σ_1 són morfismes entre R-mòduls dreta projectius finitament generats i, per tant, té sentit considerar la localització universal R_{Σ_1}.

Proposició 2.2.15. *Sigui R una K-subàlgebra de $P((E))$ contenint $P(E)$ i tancada per les transduccions esquerra δ_e. Posem $S = R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle$, $I = SqS$ i Σ_1 definit com abans. Aleshores $R_{\Sigma_1} \cong S/I$.*

Demostració. Posem $T := S/I$. Donat $s \in S$ denotarem per $\tilde{s}$ la seva classe en T. Com abans, identificarem els elements de R amb la seva imatge en S. Sigui $f \colon R \to T$ la composició de la inclusió $\iota \colon R \hookrightarrow S$ amb la projecció canònica $\pi \colon S \to T$. Per la identificació anterior podem escriure $f(r) = \tilde{r}$.

Volem veure que f és un morfisme Σ_1-inversor universal. Definim, per a tot $i \in X$, els següents morfismes de T-mòduls dreta

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i \colon \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)}R\right) \otimes_f T &\longrightarrow p_iR \otimes_f T \\ (r_1, \dots, r_{n_i}) \otimes t &\longmapsto p_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n_i} \widetilde{\overline{e}_j^i r_j} t\right). \end{aligned}$$

Ara, $\tilde{\mu}_i = (\mu_i \otimes \mathbf{1}_T)^{-1}$. En efecte, per a qualssevol $r \in p_i R$ i $t \in T$ tenim que

$$\tilde{\mu}_i \circ (\mu_i \otimes \mathbf{1}_T)(r \otimes t) = \tilde{\mu}_i\left(\left(e_1^i r, \dots, e_{n_i}^i r\right) \otimes t\right) = p_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n_i} \widetilde{\overline{e}_j^i e_j^i r t}\right) = r \otimes t$$

on hem usat que $\tilde{p}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \widetilde{\overline{e}_j^i e_j^i}$ en T. D'altra banda, per a qualssevol $(r_1, \dots, r_{n_i}) \in \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)} R\right)$ i $t \in T$ tenim que

$$\begin{aligned}(\mu_i \otimes \mathbf{1}_T) \circ \tilde{\mu}_i\left((r_1, \dots, r_{n_i}) \otimes t\right) &= (\mu_i \otimes \mathbf{1}_T)\left(p_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n_i} \widetilde{\overline{e}_j^i r_j}\right) t\right) \\ &= \left(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n_i} \widetilde{\overline{e}_j^i r_j}\right) t \\ &= (r_1, \dots, r_{n_i}) \otimes t\end{aligned}$$

on hem usat que $\widetilde{e\overline{f}} = \delta_{ef} \tilde{p}_{s(e)}$ en T. Per tant, f és Σ_1-inversor.

Per a veure que f és Σ_1-inversor universal, considerem A una K-àlgebra i $g\colon R \to A$ un morfisme de K-àlgebres Σ_1-inversor. Per a tot $i \in X$ tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)} R\right) \otimes_g A & \xrightarrow{(\mu_i \otimes \mathbf{1}_A)^{-1}} & p_i R \otimes_g A \\ \cong \big\downarrow & & \big\downarrow \cong \\ \bigoplus_{j=1}^{n_i} g(p_{s(e_j^i)}) A & \xrightarrow{(a_1^i, \dots, a_{n_i}^i)\cdot} & g(p_i) A \end{array}$$

per a certs $a_j^i \in g(p_i) A g(p_{s(e_j^i)})$. D'aquí en deduïm que les composicions

$$\left(a_1^i, \dots, a_{n_i}^i\right) \begin{pmatrix} g(e_1^i) \\ \vdots \\ g(e_{n_i}^i) \end{pmatrix} = g(p_i) \quad \text{i} \tag{2.2.5}$$

$$\begin{pmatrix} g(e_1^i) \\ \vdots \\ g(e_{n_i}^i) \end{pmatrix} \left(a_1^i, \dots, a_{n_i}^i\right) = \operatorname{diag}\left(p_{s(e_1^i)}, \dots, p_{s(e_{n_i}^i)}\right), \tag{2.2.6}$$

ens donen les identitats en $g(p_i)A$ i $\bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)} A$, respectivament.

Sigui $e \in E^1$; tenim que $e = e_j^i$ per a algun $e_j^i \in r(i)^{-1}$, on $i = r(e)$. Posem, doncs, $t_{\overline{e}} = a_j^i$ i de (2.2.6) en deduïm que $g(e) t_{\overline{e}} = g(p_{s(e)})$ i $g(e_k^i) t_{\overline{e}} = 0$ per a $k \neq j$. A més, si prenem $f \in E^1$ tal que $r(f) \neq i$ tenim que $g(f) t_{\overline{e}} = g(f) g(p_{r(f)}) g(p_i) t_{\overline{e}} = 0$. Per tant, ens trobem en les hipòtesis de la Proposició 2.2.7 i existeix un homomorfisme de K-àlgebres $\overline{g}\colon S \to A$ estenent g i tal que $\overline{g}(\overline{e}) = t_{\overline{e}}$ per a tot $e \in E^1$. De (2.2.5), n'obtenim que $g(p_i) = \sum_{j=1}^{n_i} a_j^i g(e_j^i)$ en A, cosa que vol dir que $p_i - \sum_{j=1}^{n_i} \overline{e}_j^i e_j^i \in \ker(\overline{g})$. Per tant $\overline{g}$ factoritza a través de T i tenim $h\colon T \to A$ tal que $h \circ \pi = \overline{g}$. Ara, $g = \overline{g} \circ \iota = h \circ \pi \circ \iota = h \circ f$ i h és únic per la unicitat dels inversos i el fet que T està generat per R i $\overline{E}^1$. Hem vist que f és Σ_1-inversor universal. Per tant $R_{\Sigma_1} \cong T$. $\square$

OBSERVACIÓ 2.2.16. La unicitat de l'expressió en (2.2.3) per als elements de $S = R\langle\overline{E};\tau,\delta\rangle$ i la unicitat de l'expressió en (2.2.4) per als elements de $I = SqS$ ens asseguren que els morfismes naturals $R \to T$ i $P(\overline{E}) \to T$ són injectius, on $T = S/I = R_{\Sigma_1}$. És més, també ens asseguren que per a qualssevol K-àlgebres R_1 i R_2 tancades per les transduccions esquerra δ_e i tals que $P(E) \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq P((E))$, tenim que $I_1 = I_2 \cap S_1$, on $S_i = R_i\langle\overline{E};\tau\delta\rangle$ i $I_i = S_iqS_i$ per a $i = 1, 2$. En deduïm que el morfisme natural $T_1 = S_1/I_1 \to T_2 = S_2/I_2$ és injectiu.

OBSERVACIÓ 2.2.17. En el cas $R = P(E)$ tenim que S/I coincideix amb la K-àlgebra de Leavitt del buirac E (Definició 1.3.1) i, per la Proposició 2.2.15, amb $P(E)_{\Sigma_1}$. Això ens permet fer la identificació $L(E) = S/I = P(E)_{\Sigma_1}$.

OBSERVACIÓ 2.2.18. Sigui $i \in X$ i considerem els morfismes de $P(\overline{E})$-mòduls dreta

$$\begin{aligned} \nu_i^E \colon \bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)}P(\overline{E}) &\longrightarrow p_iP(\overline{E}) \\ (r_1, \dots, r_{n_i}) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n_i} \overline{e}_j^i r_j. \end{aligned}$$

Quan sigui clar en quin buirac estem treballant denotarem aquests morfismes simplement per ν_i. Escrivim $\Sigma_1' = \{\nu_i \mid i \in X\}$. De l'anterior és clar que la inclusió $P(\overline{E}) \hookrightarrow L(E)$ és un morfisme Σ_1'-inversor universal. De fet, tenim que per a tot $i \in X$

$$\left(\nu_i \otimes_{P(\overline{E})} \mathbf{1}_{L(E)}\right) = \left(\mu_i \otimes_{P(E)} \mathbf{1}_{L(E)}\right)^{-1}.$$

OBSERVACIÓ 2.2.19. Com que l'àlgebra de camins és hereditària (Proposició 1.2.8), de la Observació 1.4.12, n'obtenim que les localitzacions universals $P(E) \to L(E)$ i $P(\overline{E}) \to L(E)$ són establement llises. Més endavant veurem que, de fet, $L(E)$ és llis com a $P(\overline{E})$-mòdul esquerra (Proposició 4.3.1).

Usant la definició següent tenim una caracterització ben coneguda dels anells semihereditaris (esquerra).

DEFINICIÓ 2.2.20. Un anell A és de *Rickart esquerra* si l'anul·lador per l'esquerra de qualsevol element de A és de la forma Ae on e és un element idempotent de A. Anàlogament definim anell de *Rickart dreta*.

Tenim el següent resultat degut a Small, [**67**] (també, [**39**, Proposition 7.63]):

PROPOSICIÓ 2.2.21 (Small). *Un anell A és semihereditari esquerra si i només si per a cada $n \geqslant 1$, $M_n(A)$ és de Rickart esquerra.*

Recordem el següent resultat de [**9**], que ens serà d'utilitat més endavant.

LEMA 2.2.22 ([**9**, Lemma 5.3]). *Sigui A un anell semihereditari esquerra i sigui $B = A_\Sigma$ una localització universal de A. Suposem que per a tot A-mòdul dreta finitament presentat M tal que $\mathrm{Hom}_A(M, A) = 0$, hom té que $M \otimes_A B = 0$. Aleshores B és un anell regular de von Neumann i tot B-mòdul dreta finitament generat i projectiu és induït per un A-mòdul dreta finitament generat i projectiu.*

PROPOSICIÓ 2.2.23. *Sigui R una K-subàlgebra de $P(\!(E)\!)$ contenint $P(E)$ i tancada per inversions i per les transduccions dreta $\tilde{\delta}_e$. Aleshores R és semihereditària per l'esquerra.*

DEMOSTRACIÓ. Per la Proposició 2.2.21, en tenim prou veient que per a tot $n \geqslant 1$, $M_n(R)$ és de Rickart esquerra. Sigui $A \in M_n(R)$. Usarem la notació següent per a l'anulador: $I_A = \ell.\mathrm{ann}_{M_n(R)}(A)$. Donada una matriu invertible $U \in GL_n(R)$ tenim que $I_{UA} = \{XU^{-1} \mid X \in I_A\}$.

Observem que I_A és un submòdul regular de $M_n(R)$ en el sentit de la Secció 2.1, és a dir, si $X \in I_A$ i $o(X) > 0$ aleshores $\tilde{\delta}_e(X) \in I_A$ per a tot $e \in E^1$. Usarem aquest fet més endavant en la prova.

Com que $\varepsilon(I_A)$ és un ideal esquerra de $M_n(K^d)$, que és un anell semisimple, existeix un idempotent $D \in \mathrm{Idem}(M_n(K^d))$ tal que $\varepsilon(I_A) = M_n(K^d)D$. Podem, doncs, prendre $B \in I_A$ tal que $\varepsilon(B) = D$ de manera que $B = D - B'$ per a alguna $B' \in M_n(R)$ tal que $o(B') > 0$. A més, podem suposar que $DB' = B'$. Si posem $U = \mathbf{1}_n - B'$, com que R és tancat per inversions, pel Corol·lari 2.1.27 tenim que $U \in GL_n(R)$. Ara, veiem que $BU^{-1} = D$, de manera que $D \in I_{UA}$. Com que $\varepsilon(U) = \mathbf{1}_n$ tenim també que $\varepsilon(I_{UA}) = M_n(K^d)D$.

Vegem ara que $I_{UA} = M_n(R)D$. En efecte, per construcció $M_n(R)D \subseteq I_{UA}$. Suposem que existeix $X \in I_{UA} \setminus M_n(R)D$. Substituint X per $X - XD$ podem suposar que $X = X(\mathbf{1}_n - D)$. Ara, si posem $X = \sum_{\alpha \in E^*} \alpha\lambda_\alpha$ per a alguns $\lambda_\alpha \in p_{r(\alpha)}M_n(K^d)$, aquests compleixen que $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\mathbf{1}_n - D)$. D'altra banda, si $o(X) = m$ tenim que $X = \sum_{\alpha \in E^m} \alpha \cdot \tilde{\delta}_\alpha(X)$. Per la regularitat de I_{UA} tenim que $\tilde{\delta}_\alpha(X) \in I_{UA}$. Prenem, doncs, $\alpha \in E^m$ tal que $\lambda_\alpha \neq 0$. Tenim que $\varepsilon(\tilde{\delta}_\alpha(X)) = \lambda_\alpha$ però, com que $\lambda_\alpha(\mathbf{1}_n - D) = \lambda_\alpha$, això ens porta a contradicció amb $\varepsilon(I_{UA}) = M_n(K^d)D$. Per tant, hem vist que $I_{UA} = M_n(R)D$ i en deduïm que $I_A = M_n(R)H$ on $H = U^{-1}DU \in \mathrm{Idem}(M_n(R))$. Per tant, $M_n(R)$ és de Rickart esquerra, com volíem. ☐

TEOREMA 2.2.24. *Siguin E un buirac (finit) i R una K-subàlgebra de $P(\!(E)\!)$ contenint $P(E)$, tancada per inversions i per totes les transduccions δ_e i $\tilde{\delta}_e$. Posem $S = R\langle\overline{E}; \tau, \delta\rangle$, $I = SqS$ i $T = S/I$. Aleshores T i S són anells regulars de von Neumann.*

DEMOSTRACIÓ. Per la Proposició 2.2.15 tenim que T és una localització universal de R i, a més, per la Proposició 2.2.23 R és semihereditària per l'esquerra. Sigui M un R-mòdul dreta finitament presentat tal que $\mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$. Volem veure que $M \otimes_R T = 0$ per tal de poder aplicar el Lema 2.2.22. Considerem la següent presentació de M:

$$ {}^sR \xrightarrow{\mathcal{L}_A} {}^tR \longrightarrow M \longrightarrow 0, \tag{2.2.7}$$

on $A \in M_{t\times s}(R)$. Afegint, si cal, columnes de zeros a A podem suposar que $t \leqslant s$. Aplicant el functor $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ a (2.2.7) obtenim la successió exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, R) \longrightarrow R^t \xrightarrow{\mathcal{R}_A} R^s$$

i, com que $\mathrm{Hom}_R(M,R)=0$, tenim que $\mathcal{R}_A$ és monomorfisme. Per l'exactitud dreta del functor $-\otimes_R T$, aplicant-lo a (2.2.7), obtenim la successió exacta:

$$ {}^sT \xrightarrow{\mathcal{L}_A} {}^tT \longrightarrow M\otimes_R T \longrightarrow 0. $$

Volem veure que $A\,{}^sT = {}^tT$, és a dir, que les columnes de A generen ${}^tT$ com a T-mòdul dreta.

Per un argument estàndard d'àlgebra lineal (PAQ-reducció) sabem que existeixen matrius $P\in GL_t(K^d)$ i $Q\in GL_s(K^d)$ tals que $P\varepsilon(A)Q=D$, on

$$ D=\sum_{i=1}^{d} p_i \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{amb } r_1,\ldots,r_d\leqslant t. \tag{2.2.8} $$

Per tant, $PAQ=D-X$, on $X\in M_{t\times s}(R)$ amb $o(X)>0$. Com que $t\leqslant s$, tenim que $D=(D'\,0)$ amb $D'\in M_t(R)$. Observem que, en el cas que $D'=\mathbf{1}_t$, del Corol·lari 2.1.27 en deduïm que PAQ és invertible dreta sobre R de manera que $(PAQ)T^s=T^t$ i, per tant, ja hem acabat.

Altrament, considerem la matriu $\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0\end{smallmatrix}\right)\in M_s(R)$. Pel Corol·lari 2.1.27 sabem que $Q'=\mathbf{1}_s-\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0\end{smallmatrix}\right)\in GL_s(R)$. Així,

$$ PAQ(Q')^{-1}=(D-X)\Big(\mathbf{1}_s+\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0\end{smallmatrix}\right)^2+\cdots\Big)=D-(X_1\,X_2), $$

on $X_1\in M_t(R)$ compleix que $(\mathbf{1}_t-D')X_1=X_1$.

Novament pel Corol·lari 2.1.27 tenim que $\mathbf{1}_t-X_1\in GL_t(R)$. Ara, si posem

$$ A'=(\mathbf{1}_t-X_1)^{-1}PAQ(Q')^{-1}=D-(X_3\,X_4), $$

tenim que $X_3(\mathbf{1}_t-D')=(\mathbf{1}_t-D')X_3=X_3$.

Distingim dos casos, depenent de si X_3 és zero o no. Si $X_3\neq 0$ prenem α de longitud mínima entre els monomis del suport de les entrades de X_3. Posem que aquest α el trobem en la columna i-èsima de X_3. Considerem la columna $v=(0,\ldots,0,\overline{\alpha},0,\ldots,0)^t\in{}^sS$, on $\overline{\alpha}$ es troba en la posició i-èsima. De la condició $X_3(\mathbf{1}_t-D')=X_3$ en deduïm que $Dv=0$ i, per tant, $A'v\in{}^tR$. A més, tenim que $(\mathbf{1}_t-D')A'v=A'v$ i $p_{s(\alpha)}\in\mathrm{supp}(A'v)$.

Per al cas que $X_3=0$, multiplicant A' per la dreta per la matriu $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_t & -X_4 \\ 0 & \mathbf{1}_{s-t}\end{smallmatrix}\right)\in GL_s(R)$ podem suposar que X_4 compleix $(\mathbf{1}_t-D')X_4=X_4$. Com que $\mathcal{R}_A$ és injectiu tenim que $X_4\neq 0$. Ara, com abans, prenem α de longitud mínima entre els monomis del suport de les entrades de X_4 i obtenim una columna $v=(0,\ldots,0,\overline{\alpha},0,\ldots,0)^t\in{}^sS$ complint que $A'v\in{}^tR$, $(\mathbf{1}_t-D')A'v=A'v$ i $p_{s(\alpha)}\in\mathrm{supp}(A'v)$.

En qualssevol dels dos casos considerem la matriu $A''=(A'\,A'v)\in M_{t\times(s+1)}(R)$. Tenim

$$ \varepsilon(A'')=\begin{pmatrix} D' & 0 & \varepsilon(A'v)\end{pmatrix}, $$

per tant, de les condicions $(\mathbf{1}_t-D')A'v=A'v$ i $p_{s(\alpha)}\in\mathrm{supp}(A'v)$, en deduïm que $\mathrm{rang}_{K^d}(\varepsilon(A''))>\mathrm{rang}_{K^d}(\varepsilon(A))$. Tenim el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
{}^sR & \xrightarrow{\mathcal{L}_A} & {}^tR & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
\cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong & & \big\| & & \\
{}^sR & \xrightarrow{\mathcal{L}_{A'}} & {}^tR & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
i\big\downarrow & & \big\| & & \big\downarrow f & & \\
{}^sR\oplus R & \xrightarrow{\mathcal{L}_{A''}} & {}^tR & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

on i denota la inclusió en la primera component i f existeix per la propietat universal del conucli. Si apliquem el functor $-\otimes_R T$ al diagrama anterior n'obtenim el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
{}^sT & \xrightarrow{\mathcal{L}_A} & {}^tT & \longrightarrow & M\otimes_R T & \longrightarrow & 0\\
\cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong & & \big\| & & \\
{}^sT & \xrightarrow{\mathcal{L}_{A'}} & {}^tT & \longrightarrow & M\otimes_R T & \longrightarrow & 0\\
\big\downarrow & & \big\| & & \big\downarrow & & \\
{}^{s+1}T & \xrightarrow{\mathcal{L}_{A''}} & {}^tT & \longrightarrow & M'\otimes_R T & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Com que $A'\,{}^sT = A''\,{}^{s+1}T$ tenim que $M\otimes_R T \cong M'\otimes_R T$. A més, és clar que $\mathcal{R}_{A''}\colon R^t \to R^{s+1}$ és injectiu, de manera que podem repetir l'argument anterior. Repetint-lo tantes vegades com calgui obtindrem una matriu $B \in M_{t\times(s+\ell)}(R)$ tal que $\varepsilon(B) = (\mathbf{1}_t\, 0)$ i veiem que $M\otimes_R T \cong \operatorname{coker}\mathcal{L}_B = 0$.

Per tant, pel Lema 2.2.22 tenim que $T \cong S/I \cong R_{\Sigma_1}$ és un anell regular de von Neumann. Com que, per la Proposició 2.2.14, I és un ideal regular de von Neumann de [**32**, Lemma 1.3] en deduïm que S és, al seu torn, un anell regular de von Neumann. $\square$

2.3. Estructura dels mòduls finitament generats i projectius

Siguin E un buirac finit i R una K-subàlgebra de $P((E))$ contenint $P(E)$, tancada per inversions i per totes les transduccions δ_e i $\tilde{\delta}_e$. Posem $S = R\left\langle \overline{E};\tau,\delta\right\rangle$, $I = SqS$ i $T = S/I \cong R_{\Sigma_1}$ (vegeu Secció 2.2).

Tenim el següent diagrama commutatiu on els morfismes són inclusions:

$$\begin{array}{ccccccc}
K^d & \longrightarrow & P(E) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & P((E))\\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow\\
P(\overline{E}) & \longrightarrow & L(E) & \longrightarrow & T & \longrightarrow & U
\end{array}$$

on $U = P((E))_{\Sigma_1}$, $T = R_{\Sigma_1}$ i $L(E)$ és l'àlgebra de Leavitt del buirac E que, per l'Observació 2.2.17, coincideix amb $P(E)_{\Sigma_1}$. En cada cas Σ_1 denota el conjunt, corresponent a l'anell $P((E))$, R o $P(E)$, de morfismes entre mòduls projectius finitament generats definit en la secció anterior. En aquesta secció calcularem l'estructura del monoide $\mathcal{V}(T)$, de fet, veurem que els morfismes en la segona fila del diagrama indueixen isomorfismes $\mathcal{V}(L(E)) \cong \mathcal{V}(T) \cong \mathcal{V}(U)$.

Recordem que un anell R és *semilocal* si $R/J(R)$ és semisimple, on $J(R)$ denota el radical de Jacobson de R. Un anell R és *semiperfecte* si R és semilocal i els idempotents de $R/J(R)$ es poden pujar a idempotents de R. Del Teorema 1.3.7 tenim un isomorfisme natural $M_E \cong \mathcal{V}(L(E))$ enviant la classe de $v \in E^0$ en M_E a la classe de $p_vL(E)$ en $\mathcal{V}(L(E))$ (vegeu Secció 1.3). Es compleix el següent:

TEOREMA 2.3.1. *Existeix un isomorfisme de monoides canònic $M_E \cong \mathcal{V}(T)$.*

DEMOSTRACIÓ. Tenim un morfisme de monoides natural $\varphi\colon M_E \cong \mathcal{V}(L(E)) \to \mathcal{V}(T)$. Hem vist en la demostració del Teorema 2.2.24 i en la Proposició 2.2.23 que l'anell R satisfà les hipòtesis del Lema 2.2.22, per tant, tot T-mòdul projectiu finitament generat ve induït per un R-mòdul projectiu finitament generat. Observem que $J(R) = \ker\varepsilon$, per tant, $R/J(R) \cong K^d$ i R és un anell semiperfecte. Això es dedueix de la caracterització del radical de Jacobson $J(R)$ com el conjunt d'elements x de R tals que $1 - yxz \in U(R)$ per a tot $y, z \in R$ (vegeu per exemple [**38**, Lemma 4.3]). Com que R és tancat per inversions a $P((E))$, tots els elements de la forma $1 - x$ amb $x \in \ker\varepsilon$ són invertibles en R (Corol·lari 2.1.27). Ara, per [**20**, Theorem 0.5.3] tenim que $\mathcal{V}(R) \to \mathcal{V}(R/J(R))$ és un morfisme injectiu. Obtenim, doncs, un isomorfisme

$$\mathcal{V}(R) \cong \mathcal{V}(K^d).$$

Deduïm que tot T-mòdul projectiu finitament generat és isomorf a una suma directa finita de mòduls de la forma p_iT, on els p_i són els idempotents bàsics de K^d. Per tant, el morfisme $\varphi\colon M_E \to \mathcal{V}(T)$ és exhaustiu.

Vegem ara que φ és injectiu. Suposem que $\oplus_{i=1}^n p_{v(i)}T \cong \oplus_{j=1}^m p_{w(j)}T$ per a alguns $v(i), w(j) \in E^0$. Volem veure que $\sum_{i=1}^n v(i) \sim \sum_{j=1}^m w(j)$ en F_E. Com que T és regular de von Neumann, els mòduls projectius finitament generats compleixen la propietat de refinament [**32**, Theorem 2.8], per tant, ens podem reduir al cas $n = 1$. Considerem $\alpha\colon p_vT \to \oplus_{j=1}^m p_{v(j)}T$ un isomorfisme. Posem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ on $\alpha_j \in p_{v(j)}Tp_v$. Cada α_j es pot escriure com $\alpha_j = \sum_k w_{jk}\gamma_{jk}$, on $w_{jk} \in \overline{E}^*$ i $\gamma_{jk} \in R$, per a tot j, k. Com que $\alpha_j \in p_{v(j)}T$ podem suposar que $\overline{s}(w_{jk}) = v(j)$ per a tot j, k.

Procedim per inducció sobre el màxim de les longituds dels camins w_{jk} que apareixen en aquestes descomposicions. Si aquest màxim és zero, aleshores l'isomorfisme α ve induït per un morfisme $p_vR \to \oplus_{j=1}^m p_{v(j)}R$. Veurem aquest cas després, en el Lema 2.3.2. Prosseguim amb la inducció: suposem que el màxim N_0 de les longituds dels camins w_{jk} és estrictament positiu. Prenem un camí $w_{j_0k_0}$ de longitud N_0. Com que $\overline{s}(w_{j_0k_0}) = v(j_0)$ veiem que $v(j_0)$ no és una font en E (ja que no és una pica en $\overline{E}$) i, per tant, podem prendre el següent isomorfisme de T-mòduls dreta

$$\big((e)_{e\in r^{-1}(v(j_0))}\big)^t\colon p_{v(j_0)}T \longrightarrow \bigoplus_{e\in r^{-1}(v(j_0))} p_{s(e)}T, \tag{2.3.1}$$

que ve donat pel producte per l'esquerra per la columna $\big((e)_{e\in r^{-1}(v(j_0))}\big)^t$ amb invers donat pel producte per l'esquerra per la fila $(\overline{e})_{e\in r^{-1}(v(j_0))}$. Observem que els morfismes $\big((e)_{e\in r^{-1}(v(j_0))}\big)^t$ són els morfismes $\mu_{v(j_0)}\otimes\mathbf{1}_T$ de la Proposició 2.2.15. Els mòduls $p_{v(j)}T$ en la imatge de α els podem substituir per la seva imatge a través dels isomorfisme anteriors. Apliquem aquestes substitucions a tots els mòduls $p_{v(j)}T$ de la imatge de

α tals que hi ha un camí w_{jk} de longitud N_0 en la representació corresponent de α_j. Obtenim, doncs, un nou isomorfisme $\alpha'\colon p_vT \to \oplus_{j=1}^{m'} p_{w(j)}T$ tal que la longitud màxima dels camins en $\overline{E}$ que apareixen en la representació dels elements $\alpha'_j \in T$ és menor que N_0. Observem que, per a tot isomorfisme (2.3.1), tenim que $v(j_0) \sim \sum_{e\in r^{-1}(v(j_0))} s(e)$ i, per tant, $\sum_{j=1}^{m} v(j) \sim \sum_{j=1}^{m'} w(j)$ en F_E. Per inducció obtenim $v \sim \sum_{j=1}^{m'} w(j)$ d'on veiem que $v \sim \sum_{j=1}^{m} v(j)$, com volíem veure. $\square$

Amb el següent Lema acabem la demostració del Teorema 2.3.1. En la seva demostració seguim les idees de la prova de [**9**, Lemma 5.5].

LEMA 2.3.2. *Posem $p = p_v$ per a $v \in E^0$ fixat. Sigui $\alpha\colon pR \to \oplus_{i=1}^{s} p_{v(i)}R$ tal que indueix un isomorfisme sobre T. Aleshores $v \sim \sum_{i=1}^{s} v(i)$ en F_E.*

DEMOSTRACIÓ. Posem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)^t$, on cada $\alpha_i \in p_{v(i)}Rp$. Volem construir, per inducció sobre i, camins $w_i \in \overline{E}^*$ i elements invertibles $g_i \in p_{v(i)}Rp_{v(i)}$ tals que es compleixi el següent:

(A_i) Existeix un morfisme invertible $\alpha^{(i)}\colon pT \to \oplus_{i=1}^{s} p_{v(i)}T$ satisfent les propietats següents:

(i) $\alpha_{i+1}^{(i)}, \dots, \alpha_s^{(i)} \in R$.

(ii) L'invers de $\alpha^{(i)}$ és la fila $(w_1g_1, \dots, w_ig_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_s)$ per a certs elements $\beta_\ell \in pTp_{v(\ell)}$, $\ell = i+1, \dots, s$.

El cas $i = 0$ és obvi. Suposem ara que es compleix (A_i) (per a $0 \leqslant i < s$) i vegem (A_{i+1}). Sense pèrdua de la generalitat, podem suposar que l'ordre de $\alpha_{i+1}^{(i)}$ és menor o igual que l'ordre de $\alpha_{i+t}^{(i)}$ per a tot $t \geqslant 2$. Prenem un camí $w_{i+1} \in \overline{E}^*$ de longitud $o(\alpha_{i+1}^{(i)})$ complint $w_{i+1} = pw_{i+1}p_{v(i+1)}$ i tal que $\alpha_{i+1}^{(i)}w_{i+1}$ és invertible en $p_{v(i+1)}Rp_{v(i+1)}$. Posem $g_{i+1} \in p_{v(i+1)}Rp_{v(i+1)}$ l'invers de $\alpha_{i+1}^{(i)}w_{i+1}$ i observem que

$$p_{v(i+1)} = \alpha_{i+1}^{(i)}w_{i+1}g_{i+1} = \alpha_{i+1}^{(i)}\beta_{i+1}.$$

Ara, l'element

$$u := \beta_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)} + (p - w_{i+1}g_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)})$$

és invertible en pTp amb invers

$$u^{-1} = w_{i+1}g_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)} + (p - \beta_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)}).$$

Per tant, $\alpha^{(i+1)} := \alpha^{(i)}u$ és invertible amb inversa

$$u^{-1}(w_1g_1, \dots, w_ig_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_s).$$

Observem que, per a $t > 1$, tenim

$$\alpha_{i+t}^{(i)}u = \alpha_{i+t}^{(i)}(p - w_{i+1}g_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)}).$$

Com que l'ordre de $\alpha_{i+t}^{(i)}$ és major o igual que la longitud de w_{i+1}, en deduïm que $\alpha_{i+t}^{(i+1)} \in R$ i, per tant, es compleix la condició (i) de (A_{i+1}). D'altra banda, per a $m \leqslant i$ tenim que $\alpha_{i+1}^{(i)}w_m = 0$ i, per tant, $u^{-1}w_mg_m = w_mg_m$. També tenim

$$u^{-1}\beta_{i+1} = w_{i+1}g_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)}\beta_{i+1} + (p - \beta_{i+1}\alpha_{i+1}^{(i)})\beta_{i+1} = w_{i+1}g_{i+1},$$

cosa que ens diu que es satisfà la condició (ii) de (A_{i+1}). Per tant, la inducció funciona.

Prenem $h_i = g_i\alpha_i^{(s)} \in p_{v(i)}Tp$ per a $i = 1, \dots, s$. Aleshores

$$\sum_{i=1}^{s} w_i h_i = p, \tag{2.3.2}$$

$h_i w_i \neq 0$ per a tot i i $h_i w_j = 0$ per a $i \neq j$. Afirmem ara que aquestes condicions impliquen $v \sim \sum_{i=1}^{s} v(i)$ en F_E. Ho veurem per inducció sobre el màxim de les longituds dels w_i. Si aquest màxim és zero aleshores $s = 1$ i $h_1 = p$. Suposarem, doncs, que o bé $s > 1$ o bé $s = 1$ i la longitud de w_1 és $\geqslant 1$. En qualsevol dels dos casos, tots els w_i són diferents de p. Observem que $w_i = \overline{\gamma_i}$ per algun camí no trivial γ_i en E tal que $s(\gamma_i) = v(i)$ i $r(\gamma_i) = v$. Sigui $e(i) \in E^1$ la darrera aresta del camí γ_i, de manera que $r(e(i)) = v$. Per a tot $e \in r^{-1}(v)$, definim

$$A_e := \{i \in \{1, \dots, s\} \mid e(i) = e\} = \{i \in \{1, \dots, s\} \mid ew_i \neq 0\}.$$

Ara, el conjunt $\{1, \dots, s\}$ és unió disjunta dels conjunts A_e, per a $e \in r^{-1}(v)$.

Fixem una aresta $e \in r^{-1}(v)$. Multiplicant (2.3.2) per l'esquerra per e i per la dreta per $\overline{e}$, obtenim

$$\sum_{i \in A_e} (ew_i)(h_i\overline{e}) = ep\overline{e} = p_{s(e)}.$$

Observem també que per a tot $i, j \in A_e$ tenim $(h_i\overline{e})(ew_j) = h_i w_j$. Per tant, aquest terme és zero si $i \neq j$ i no nul si $i = j$. Per hipòtesi d'inducció, $s(e) \sim \sum_{i \in A_e} v(i)$. Per tant,

$$v \sim \sum_{e \in r^{-1}(v)} s(e) \sim \sum_{e \in r^{-1}(v)} \sum_{i \in A_e} v(i) = \sum_{i=1}^{s} v(i).$$

Cosa que demostra el resultat. $\square$

2.4. L'àlgebra regular d'un buirac

En aquesta secció veurem que la nostra construcció esdevé functorial en E si ens restringim als morfismes complets de grafs i que podem estendre el resultat de la secció anterior a un graf E amb columnes finites. Com que en aquesta secció treballem amb grafs no necessàriament finits, no seguirem la Notació 1.2.3 i, quan així s'indiqui, E denotarà un graf no necessàriament finit.

DEFINICIÓ 2.4.1. Sigui E un buirac finit. Definim la *K-àlgebra regular* del buirac E com la K-àlgebra $Q(E)$ obtinguda per la construcció de la Secció 2.2 prenent $R = P_{\mathrm{rat}}(E)$ com a coeficients. Tenim

$$Q(E) = S/SqS = P_{\mathrm{rat}}(E)_{\Sigma_1},$$

on $S = (P_{\mathrm{rat}}(E)) \langle \overline{E}; \tau, \delta \rangle$.

L'àlgebra regular $Q(E)$ encaixa en un diagrama commutatiu d'homomorfismes injectius d'àlgebres:

$$\begin{array}{ccccccc}
K^d & \longrightarrow & P(E) & \xrightarrow{i_\Sigma} & P_{\mathrm{rat}}(E) & \longrightarrow & P((E)) \\
\big\downarrow & & {\scriptstyle i_{\Sigma_1}}\big\downarrow & & {\scriptstyle i_{\Sigma_1}}\big\downarrow & & {\scriptstyle i_{\Sigma_1}}\big\downarrow \\
P(\overline{E}) & \longrightarrow & L(E) & \xrightarrow{i_\Sigma} & Q(E) & \longrightarrow & U(E)
\end{array}$$

En el diagrama hem posat $U(E) = P((E))_{\Sigma_1}$, $Q(E) = P_{\mathrm{rat}}(E)_{\Sigma_1}$ i $L(E) = P(E)_{\Sigma_1}$ on Σ_1 és, en cada cas, el conjunt d'homomorfismes entre mòduls projectius finitament generats definit en la Secció 2.2. Resumim les propietats de l'àlgebra $Q(E)$ en el següent Teorema:

TEOREMA 2.4.2. *Sigui E un buirac finit. Aleshores la K-àlgebra regular $Q(E)$ és un anell unital, regular de von Neumann, hereditari i $Q(E) = P(E)_{\Sigma\cup\Sigma_1}$ és una localització universal de l'àlgebra de camins.*

DEMOSTRACIÓ. Pel Teorema 2.2.24 tenim que $Q(E)$ és un anell regular de von Neumann i pel Teorema 2.3.1 tenim que $\mathcal{V}(Q(E)) \cong M_E$ canònicament. Pel Teorema 2.1.28 tenim que $Q(E) = P(E)_{\Sigma\cup\Sigma_1}$ i, com que $P(E)$ és un anell hereditari (Proposició 1.2.8), per un resultat de Bergman i Dicks [**17**] tenim que $Q(E)$ també és hereditari. □

OBSERVACIÓ 2.4.3. Com en el cas de l'àlgebra de Leavitt (Observació 2.2.19) tenim que les localitzacions universals $P(E) \to Q(E)$ i $P(\overline{E}) \to Q(E)$ són establement llises. A més, usant el mateix argument que en la Observació 2.1.29 es pot veure que, en general, $Q(E)$ no és llis com a $P(E)$-mòdul esquerra (ni dreta). En canvi, més endavant veurem (Lema 4.3.4) que, de fet, $Q(E)$ és llis com a $P(\overline{E})$-mòdul esquerra.

Observem que l'àlgebra $U(E)$ també és unital i regular de von Neumann amb $\mathcal{V}(U(E)) \cong M_E$ (usant la mateixa demostració que en el Teorema 2.4.2). No obstant, és improbable que $U(E)$ sigui hereditari en general ja que, per exemple, l'àlgebra $K\langle\langle X\rangle\rangle$ de les sèries formals amb $|X| > 1$ no és hereditària (*cf.* [**20**, Exercise 3.4.7]).

És fàcil estendre (la major part) del Teorema 2.4.2 al cas que E sigui un graf amb columnes finites. De la Secció 1.3 sabem que les definicions de $L(E)$ i M_E tenen sentit per a un graf E amb columnes finites i són functorials (Lemes 1.3.5 i 1.3.6). Siguin E i F buiracs finits, si $f\colon E \to F$ és un homomorfisme complet de grafs aleshores f indueix un homomorfisme d'àlgebres no unital $P(f)\colon P(E) \to P(F)$ entre les corresponents àlgebres de camins. Denotem per $L(f)\colon L(E) \to L(F)$ l'homomorfisme d'àlgebres no unital induït per f entre les àlgebres de Leavitt de buirac corresponents. Observem que la imatge de la identitat a través d'aquests homomorfismes és l'idempotent

$$p_E := \sum_{v\in E^0} p_{f^0(v)} \in P(F).$$

Tenim un morfisme $P(E) \to P(F) \to L(F) \to Q(F)$ tal que tota aplicació en Σ_1^E esdevé invertible sobre $Q(F)$.

Observem que tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} P(E) & \longrightarrow & P(F) \\ {\scriptstyle \varepsilon_E}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_F}\Big\downarrow \\ K^{d_E} & \longrightarrow & K^{d_F}, \end{array}$$

per tant, una matriu $A \in M_n(P(E))$ tal que $\varepsilon_E(A)$ és invertible té per imatge una matriu $P(f)(A) \in M_n(p_E P(F) p_E)$ tal que $\varepsilon_F(P(f)(A))$ és invertible sobre $p_E K^{d_F} p_E$. Deduïm que l'homomorfisme d'àlgebres unital $P(E) \to p_E Q(F) p_E$ factoritza de manera única a través de $Q(E) = P(E)_{(\Sigma\cup\Sigma_1)^{-1}}$. Tenim, doncs, un homomorfisme d'àlgebres unital $Q(E) \to p_E Q(F) p_E$ i, en conseqüència, un homomorfisme d'àlgebres no unital $Q(f)\colon Q(E) \to Q(F)$ tal que $Q(f)(1) = p_E$.

Tenim, doncs, que la construcció de l'àlgebra regular és functorial per a buiracs finits. Pel Lema 1.3.4 tenim que tot graf de columnes finites E és el límit directe, en la categoria dels grafs amb homomorfismes complets de grafs, de la família dirigida $\{E_\lambda\}$ de tots els seus subgrafs finits complets. Per tant, tenim un sistema dirigit $\{Q(E_\lambda)\}$ d'àlgebres regulars de von Neumann i homomorfismes d'àlgebres no unitals. Definim l'*àlgebra regular* del buirac E com:

$$Q(E) = \varinjlim Q(E_\lambda).$$

Com que el functor $\mathcal{V}$ commuta amb els límits directes i, pel Lema 1.3.6, $M_E \cong \varinjlim M_{E_\lambda}$ obtenim:

TEOREMA 2.4.4. *Sigui E un graf de columnes finites. Aleshores existeix una K-àlgebra regular de von Neumann (possiblement no unital) $Q(E)$ tal que*

$$\mathcal{V}(Q(E)) \cong M_E.$$

Això resol el problema de realització per a monoides associats a grafs amb columnes finites. És clar que la functorialitat de Q s'estén a la categoria dels grafs amb columnes finites i homomorfismes complets de grafs.

CAPíTOL 3

El K_1 de les àlgebres associades a un buirac

En aquest capítol ens dedicarem al càlcul del grup de Whitehead (K_1) d'algunes de les àlgebres associades a un buirac. En la Secció 3.1 veurem (Teorema 3.1.2) que $K_1(P(E)) \cong (K^{\times})^d$, cosa que estén el resultat de l'àlgebra lliure (vegeu [**20**, pàg. 451]). En les seccions 3.2 i 3.3 presentarem les definicions i resultats necessaris per tal de poder afrontar el càlcul del $K_1(L(E))$ en la Secció 3.4. El grup de Whitehead de l'àlgebra de Leavitt resultarà ser, com en el cas de (la versió algebraica de) les àlgebres de Cuntz-Krieger associades a una matriu (vegeu [**5**, Theorem 5.3]), la suma directa d'un nucli i un conucli relacionats amb la matriu d'incidència del buirac. Usarem aquests resultats després, en el Capítol 4, per al càlcul dels mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt d'un buirac. Finalment, en la Secció 3.5 veurem que $K_1(L(E))$ és un sumand directe de $K_1(Q(E))$. El càlcul d'aquest darrer grup de Whitehead l'acabarem més endavant, en el Capítol 4, on calcularem explícitament el valor del complement de $K_1(L(E))$ en $K_1(Q(E))$. Recordem que usem la Notació 1.2.3: tret que s'indiqui el contrari E denotarà un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ (on $d = |E^0|$).

3.1. El K_1 de l'àlgebra de camins

En aquesta secció calcularem el K_1 de l'àlgebra de camins d'un buirac finit E. En el cas que E no tingui cicles orientats Guo i Li calculen $K_1(P_K(E))$ en [**36**], tot i que convé remarcar que el seu resultat és erroni per al cas de K el cos de dos elements. Per exemple, en el cas que E sigui el buirac amb dos vèrtexs i una única aresta que els uneix i $K = \mathbb{Z}/(2)$ tenim que $P(E) = \left(\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right)$ és un anell de matrius triangular. Per un càlcul directe (vegeu també [**72**]) tenim que $K_1(P(E)) = \{0\}$ en contra del que s'afirma en [**36**, Theorem 4.3].

Sigui R un anell. Es ben conegut que si $1 + ab \in U(R)$ aleshores $1 + ba \in U(R)$. Definim $V(R) \subseteq U(R)$, el *subgrup de Vaserstein*, com el subgrup de $U(R)$ generat per

$$\{(1 + ab)(1 + ba)^{-1} \mid 1 + ab \in U(R)\},$$

vegeu per exemple [**49**].

PROPOSICIÓ 3.1.1. *Sigui R un anell de Rickart dreta. Aleshores*

$$\{1 + \gamma \in R \mid \gamma^n = 0\} \subseteq V(R).$$

DEMOSTRACIÓ. En efecte, si $\gamma^n = 0$ veurem per inducció sobre n que $1+\gamma \in V(R)$. Si $n = 1$ és clar. Suposem-ho cert per a $n = k \geqslant 1$ i vegem-ho per a $n = k+1$. Prenem γ tal que $\gamma^{k+1} = 0$. Com que R és de Rickart dreta, $\mathrm{r.ann}(\gamma^k) = eR$ per a un cert idempotent $e \in R$. Posem $f = 1 - e$. Com que $\gamma \in \mathrm{r.ann}(\gamma^k)$ tenim que $e\gamma = \gamma$ i $f\gamma = 0$.

Sigui $g = -\gamma + \gamma^2 + \cdots + (-1)^k\gamma^k$. Tenim que $fg = 0$, per tant, $(1 + gf) = (1 + gf)(1 + fg)^{-1} \in V(R)$. D'altra banda, $(1 + \gamma)(1 + gf) = (1 + \gamma e)$. Com que $(\gamma e)^k = \gamma^k e = 0$ per hipòtesi d'inducció tenim que $(1 + \gamma e) \in V(R)$. Per tant, $(1 + \gamma) \in V(R)$ com volíem. □

TEOREMA 3.1.2. $K_1(P(E)) = K_1(K^d) = (K^\times)^d$.

DEMOSTRACIÓ. Observem que l'augmentació $\varepsilon\colon P(E) \to K^d$ és un epimorfisme escindit, ja que la inclusió $\iota\colon K^d \hookrightarrow P(E)$ ens dóna una secció. Volem veure que $\varepsilon_*\colon K_1(P(E)) \to K_1(K^d)$ és un isomorfisme, és a dir, que $\iota_*\varepsilon_* = \mathbf{1}_{K_1(P(E))}$.

Prenem $N \in GL_\ell(P(E))$. Pel Truc de Higman (Lema 2.1.5) sabem que existeixen $n \geqslant \ell$ i una matriu lineal $M \in GL_n(P(E))$ de manera que $[N] = [M]$ en $K_1(P(E))$. Com que $M \in GL_n(P(E))$ tenim que $\varepsilon(M) \in GL_n(K^d)$. Per tant, $M = \varepsilon(M)(\mathbf{1}_n + X)$ per a una certa matriu $X \in M_n(P(E))$ homogènia de grau 1. Pel Lema 2.1.6 tenim que la inversa de $U = \mathbf{1}_n + X$ és de la forma

$$U^{-1} = \mathbf{1}_n - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n + \cdots$$

Sabem que $X = \sum_{e\in E^1} \lambda_e e$ per a certes matrius $\lambda_e \in M_n(K)$ i, per tant, (per a $m \geqslant 1$) tenim que $X^m = \sum_{\gamma\in E^m} \lambda_\gamma \gamma$. Com que $U^{-1} \in M_n(P(E))$ i els termes de grau diferent no es poden cancelar entre ells cal $X^m = 0$ per a algun $m \in \mathbb{N}$.

Com que $P(E)$ és (semi)hereditari dreta (Proposició 1.2.8), per la Proposició 2.2.21 tenim que $M_n(P(E))$ és de Rickart dreta i de la Proposició 3.1.1 n'obtenim que $U \in V(M_n(P(E)))$. Ara, per [**49**, Lemma 1.1] tenim que

$$V\big(M_n(P(E))\big) \subseteq \ker\big(GL_n(P(E)) \to K_1(M_n(P(E)))\big).$$

Com que el functor K_1 és Morita invariant (vegeu [**60**, Exercise 2.1.8]) obtenim que

$$[N] = [M] = [\varepsilon(M)] + [U] = [\varepsilon(M)] = \iota_*\varepsilon_*[M] = \iota_*\varepsilon_*[N] \quad \text{en } K_1(P(E)).$$ □

3.2. L'anell de polinomis de Laurent córner-guerxo

En aquesta secció introduïm la noció d'anell de polinomis de Laurent córner-guerxo. Veurem, a més, que l'àlgebra de Leavitt d'un buirac finit sense piques es pot dotar d'estructura d'anell de polinomis de Laurent córner-guerxo. Aquest fet ens permetrà calcular el K_1 de les àlgebres de Leavitt d'un buirac en la Secció 3.4. Fixem k un anell commutatiu.

DEFINICIÓ 3.2.1. Sigui B una k-àlgebra unital. Un *isomorfisme de córner* de B és un isomorfisme de k-àlgebres $\beta\colon B \to pBp$ de B sobre la k-àlgebra pBp on $p = p^2$ és un idempotent en B.

Un isomorfisme de córner existeix, per exemple, en el cas d'una k-àlgebra B complint $B \cong M_n(B)$. En efecte, si prenem p l'idempotent corresponent a la matriu $e_{11} \in M_n(B)$ a través d'aquest isomorfisme tenim un isomorfisme de córner $B \cong pBp$.

Considerem l'anell $\mathbb{Z}$-graduat

$$C = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i \quad \text{on} \quad C_i = \begin{cases} t_+^i B & \text{si } i > 0 \\ B & \text{si } i = 0 \\ B t_-^{-i} & \text{si } i < 0 \end{cases}$$

on $t_+t_- = 1$, $t_-t_+ = p$ i el producte ve induït per la regla $t_-bt_+ = \beta(b)$ per a tot $b \in B$. Denotarem l'anell C per $B[t_+, t_-; \beta]$. Ens referirem a un anell d'aquesta forma com a un *anell de polinomis de Laurent córner-guerxo*.

Observem que en l'anell $B[t_+, t_-; \beta]$ tenim un isomorfisme de mòduls $B[t_+, t_-; \beta] \cong pB[t_+, t_-; \beta]$ mentre que en l'anell B, en principi, només teníem un isomorfisme d'anells $B \cong pBp$.

Per a $m \geqslant 1$ escriurem $p_m = \beta^m(1)$. Els anul·ladors de t_+^m i t_-^m són de la forma següent:

Observació 3.2.2. $\mathrm{r.ann}_B(t_+^m) = (1 - p_m)B$ i $\ell.\mathrm{ann}_B(t_-^m) = B(1 - p_m)$.

D'on en deduïm que, de fet, $t_+^m B = t_+^m p_m B$ i $Bt_-^m = Bp_m t_-^m$. La següent caracterització dels anells de polinomis de Laurent córner-guerxos resulta útil en les aplicacions:

Lema 3.2.3 ([**7**, Lemma 2.4]). *Sigui $C = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ un anell $\mathbb{Z}$-graduat contenint un parell d'elements $t_+ \in C_1$ i $t_- \in C_{-1}$ tals que $t_+t_- = 1$. Aleshores existeix un isomorfisme de córner $\beta\colon C_0 \to t_-t_+C_0t_-t_+$, donat per $\beta(c) = t_-ct_+$, i $C = C_0[t_+, t_-; \beta]$.*

Convé remarcar que en l'article [**7**] s'usa una notació diferent a la nostra, ja que els coeficients de t_+^m i t_-^m apareixen en el costat contrari que en el nostre cas. Com a conseqüència d'aquest lema tenim el següent:

Corol·lari 3.2.4. *Sigui E un buirac finit sense piques. Aleshores $L(E)$ és un anell de polinomis de Laurent córner-guerxo.*

Demostració. Recordem que $L(E)$ té estructura d'àlgebra $\mathbb{Z}$-graduada posant $\deg(e) = 1$, $\deg(\overline{e}) = -1$ per a tot $e \in E^1$ i $\deg(p_i) = 0$ per a tot $i \in E^0$ (vegeu Secció 1.3). Com que E no té piques, per a cada vèrtex $i \in E^0$ podem prendre $e_i \in E^1$ tal que $s(e_i) = i$. Posem $t_+ = \sum_{i=1}^d e_i$, $t_- = \sum_{i=1}^d \overline{e}_i$. De les relacions en l'àlgebra de Leavitt

$$t_+t_- = \left(\sum_{i=1}^d e_i\right)\left(\sum_{i=1}^d \overline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^d e_i\overline{e}_i = \sum_{i=1}^d p_i = 1.$$

Ara, pel Lema 3.2.3 obtenim que $L(E) = L(E)_0[t_+, t_-; \tau]$ on $\tau(b) = t_-bt_+$ és un isomorfisme de córner $\tau\colon L(E)_0 \to t_-t_+L(E)_0t_-t_+$. □

3.3. El K_1 dels anells de polinomis de Laurent córner-guerxos

En aquesta secció continuarem usant part de la notació de la secció anterior, però k denotarà un domini d'ideals principals commutatiu. Ens disposem a calcular el K_1 d'un anell de polinomis de Laurent córner-guerxo $B[t_+, t_-; \beta]$ on B és una k-àlgebra (unital). Per tal de fer-ho usarem els resultats de les Seccions 1.6 i 1.7. Els resultats d'aquesta secció els trobem publicats en [**5**, Section 4].

Sigui $B[t_+, t_-; \beta]$ un anell de polinomis de Laurent córner-guerxo. Posem $C_i = B$ per a tot $i \in \mathbb{N}$. Observem que $\beta\colon C_i \to C_{i+1}$ defineix un morfisme d'anells no unital. Considerem el sistema dirigit

$$C_0 \xrightarrow{\beta} C_1 \xrightarrow{\beta} C_2 \xrightarrow{\beta} \cdots$$

i prenem el seu límit directe en la categoria dels anells sense unitat

$$R = \varinjlim_i C_i \tag{3.3.1}$$

amb $g_i\colon C_i \to R$ les aplicacions canòniques.

Tot i que R és un anell sense unitat, si posem $u_i = g_i(1)$ tenim que $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ és una unitat local de R. Considerem ara el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta"] & C_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta"] & \cdots \arrow[r] & R \arrow[d, dashed, "\rho"] \\ C_0 \arrow[r, "\beta"] & C_1 \arrow[r, "\beta"] & C_2 \arrow[r, "\beta"] & \cdots \arrow[r] & R \end{tikzcd} \tag{3.3.2}$$

que per la propietat universal del límit directe indueix un morfisme $\rho\colon R \to R$. Com que $\rho(u_i) = u_{i-1}$ (on $u_{-1} = g_0\beta(1)$) veiem que ρ és, a més, morfisme d'anells amb unitat local. De fet, ρ és un automorfisme. En efecte, les aplicacions $h_i\colon C_i \to C_{i+1}$ definides per $h_i(c) = c$ ens indueixen un morfisme $\rho^{-1}\colon R \to R$ que és l'invers de ρ. Podem considerar $R[t,t^{-1};\rho]$ l'anell de polinomis de Laurent guerxo sobre l'anell sense unitat R (format per tots els polinomis de Laurent en la variable t que tenen els coeficients a R). Observem que $R[t,t^{-1};\rho]$ també és un anell amb unitat local $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. En efecte, si $rt^k \in R[t,t^{-1};\rho]$ llavors $r \in u_iRu_i \cap \rho^{-k}(u_i)R\rho^{-k}(u_i)$ per a algun i. Així, $rt^k = u_ir\rho^{-k}(u_i)t^k = u_irt^ku_i \in u_iR[t,t^{-1};\rho]u_i$ i tenim $R[t,t^{-1};\rho] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} u_iR[t,t^{-1};\rho]u_i$, com volíem.

Proposició 3.3.1. *Sigui B una k-àlgebra unital i $\beta\colon B \to pBp \subseteq B$ un isomorfisme sobre un córner propi, sigui R l'anell amb unitat local $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definit en* (3.3.1) *(a partir d'aquests B i β) i $\rho\colon R \to R$ l'automorfisme d'anells amb unitat local definit en* (3.3.2). *Per a tot $\ell \in \mathbb{N}$ tenim isomorfismes: $B[t_+,t_-;\beta] \cong u_\ell R[t,t^{-1};\rho]u_\ell$.*

Demostració. En efecte, definim el següent morfisme d'anells graduats no unital

$$\begin{aligned} B[t_+,t_-;\rho] &\xrightarrow{\varphi_\ell} R[t,t^{-1};\rho] \\ t_+^i b &\longmapsto u_\ell t^i g_\ell(b) \\ bt_-^i &\longmapsto g_\ell(b)t^{-i}u_\ell \end{aligned}$$

és clar que $\operatorname{im}\varphi_\ell \subseteq u_\ell R[t,t^{-1};\rho]u_\ell$. A més, $\ker\varphi_\ell = 0$. En efecte, com que g_ℓ és injectiu tenim que si $0 = \varphi_\ell(t_+^ib) = u_\ell t^i g_\ell(b) = t^i\rho^i(u_\ell)g_\ell(b) = t^ig_\ell(\beta^i(1)b)$ llavors $\beta^i(1)b = 0$. Ara, per la Observació 3.2.2, $\mathrm{r.ann}_B(t_+^i) = (1-\beta^i(1))B$ i veiem que $t_+^ib = 0$. Per als elements de la forma bt_-^i procedim de manera anàloga.

Vegem que $\operatorname{im}\varphi_\ell = u_\ell R[t,t^{-1};\rho]u_\ell$. Qualsevol element de $u_\ell R[t,t^{-1};\rho]u_\ell$ és suma d'elements de la forma $u_\ell t^i g_j(b)u_\ell$ on, per fixar idees, suposem que $i \geqslant 0$. Com que $u_\ell u_{i+\ell} = u_\ell$ i $u_{i+\ell}t^i = t^iu_\ell$ per a tot $i \geqslant 0$ tenim que

$$u_\ell t^i g_j(b)u_\ell = u_\ell t^i u_\ell g_j(b)u_\ell = u_\ell t^i g_{\ell+j}(\beta^j(1)\beta^\ell(b)\beta^j(1)) = u_\ell t^i g_{\ell+j}(\beta^j(c)) = u_\ell t^i g_\ell(c)$$

té antiimatge per φ_ℓ (on hem usat que $\beta^j(1)\beta^\ell(b)\beta^j(1) = \beta^j(c)$ per a algun $c \in B$). Per als elements amb $i < 0$ procedim anàlogament. □

De la Proposició anterior en deduïm que $K_1(B[t_+, t_-; \beta]) \cong K_1(u_0 R[t, t^{-1}; \rho] u_0)$. Per tal de calcular aquest darrer grup ens resultarà útil la versió no unital del Teorema de Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang i Siebenmann aplicada a l'anell $R[t, t^{-1}; \rho]$.

Definició 3.3.2. Donat B un anell amb un isomorfisme de córner $\beta\colon B \to pBp$. Posem R l'anell amb unitat local definit en (3.3.1) i $\rho\colon R \to R$ l'automorfisme de R definit en (3.3.2). Definim el *grup de classes de torsió* de (B, β) per $K_1(B, \beta) := K_1(R, \rho)$.

Observem que R és una àlgebra unital si i només si $p = 1$. En aquest cas, β és un automorfisme i la definició anterior coincideix amb la que hem donat prèviament de grup de classes de torsió.

Teorema 3.3.3. *Siguin B una k-àlgebra unital i $\beta\colon B \to pBp$ un isomorfisme de córner. Posem R l'anell amb unitat local definit en* (3.3.1) *i $\rho\colon R \to R$ l'automorfisme de R definit en* (3.3.2). *Aleshores existeix una successió exacta escindida*

$$0 \to K_1(B, \beta) \to K_1(B[t_+, t_-; \beta]) \to \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho) \to 0.$$

A més, $K_1(B, \beta)$ encaixa en una successió exacta

$$K_1(B) \xrightarrow{\mathbf{1}-\beta'_*} K_1(B) \longrightarrow K_1(B, \beta) \longrightarrow K_0(B) \xrightarrow{\mathbf{1}-\beta'_*} K_0(B),$$

on $\beta'\colon B \to B$ denota la composició de $\beta\colon B \to pBp$ amb la inclusió $pBp \hookrightarrow B$.

Demostració. Pel Teorema 1.7.12 tenim una successió exacta escindida

$$0 \to K_1(R, \rho) \to K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho], R[t, t^{-1}; \rho]) \to \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho) \to 0.$$

Per la Definició 3.3.2 tenim que $K_1(B, \beta) = K_1(R, \rho)$. Ara, pel Teorema 1.6.16 junt amb la Proposició 3.3.1 obtenim:

$$K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho], R[t, t^{-1}; \rho]) \cong \varinjlim K_1(u_\ell R[t, t^{-1}; \rho] u_\ell) \cong \varinjlim K_1(B[t_+, t_-; \beta]),$$

on el darrer límit el prenem respecte a les aplicacions

$$\beta'_*\colon K_1(B[t_+, t_-; \beta]) \longrightarrow K_1(B[t_+, t_-; \beta]).$$

Com que p és un idempotent ple en $B[t_+, t_-; \beta]$ (ja que $1 = t_+ t_-$ i $p = t_- t_+$), en deduïm que el morfisme anterior és un isomorfisme i, per tant $\varinjlim K_1(B[t_+, t_-; \beta]) = K_1(B[t_+, t_-; \beta])$. Obtenim, doncs, la següent successió exacta

$$0 \to K_1(B, \beta) \to K_1(B[t_+, t_-; \beta]) \to \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) \oplus \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho) \to 0.$$

Només resta estudiar el terme $K_1(B, \beta) = K_1(R, \rho)$. Pel Teorema 1.7.12 sabem que aquest terme encaixa en la següent successió exacta

$$0 \to K_1(R_+, R)/I(\rho_*) \to K_1(B, \beta) \to K_0(R)^{\rho_*} \to 0.$$

Ara, pel Corol·lari 1.6.14 tenim que $K_0(R) \cong \varinjlim K_0(R_\ell)$ i pel Teorema 1.6.16 veiem que $K_1(R_+, R) \cong \varinjlim K_1(R_\ell)$. Com que els isomorfismes $\varphi_\ell\colon B[t_+, t_-; \beta] \to u_\ell R[t, t^{-1}; \rho] u_\ell$ de la Proposició 3.3.1 ens donen isomorfismes $\varphi_\ell : B \to R_\ell$ tenim també que $K_0(R) \cong \varinjlim K_0(B)$ i $K_1(R_+, R) \cong \varinjlim K_1(B)$, on els límits directes els fem respecte als morfismes induïts per $\beta'\colon B \to B$.

Com que els conuclis commuten amb els colímits tenim que

$$\operatorname{coker}(\mathbf{1}-\rho_*) = K_1(R_+,R)/I(\rho_*) = \varinjlim(K_1(B)/I(\beta'_*) = \operatorname{coker}(\mathbf{1}-\beta'_*))$$

i com que $\beta'_*\colon K_1(B)/I(\beta'_*) \to K_1(B)/I(\beta'_*)$ és la identitat tenim $K_1(R_+,R)/I(\rho_*) \cong K_1(B)/I(\beta'_*)$.

D'altra banda, si tenim $[P] \in K_0(R)$ tal que $[P]-\rho_*[P]=0$ veiem que existeix $[Q] \in K_0(B)^{\beta'_*}$ tal que $[P]=g_{i*}[Q]$ (com abans, $g_i\colon C_i = B \to R$ denota les inclusions canòniques). Ara, com que $\beta_*\colon K_0(B)^{\beta'_*} \to K_0(B)^{\beta'_*}$ és la identitat tenim que $K_0(R)^{\rho_*} \cong K_0(B)^{\beta'_*}$. En definitiva, hem obtingut la successió exacta

$$0 \longrightarrow K_1(B)/I(\beta'_*) \longrightarrow K_1(B[t_+,t_-;\beta]) \longrightarrow K_0(B)^{\beta'_*} \longrightarrow 0,$$

com volíem. □

En cas que l'anell R_+ sigui semihereditari, pel Lema 1.7.6 tindrem que

$$\widetilde{Nil}_0(R_+,\rho) = \widetilde{Nil}_0(R_+,\rho^{-1}) = 0,$$

donant-nos una fórmula més senzilla per a $K_1(B[t_+,t_-;\beta])$. En general, el límit directe d'anells semihereditaris pot no ésser semihereditari. En trobem un exemple, en [**17**, Remark 4.3]. En el nostre cas particular tenim unes hipòtesis *ad hoc* que ens permeten assegurar que obtenim un anell semihereditari. Per a veure-ho ens caldrà la següent observació:

OBSERVACIÓ 3.3.4. Sigui R un anell, $h \in \operatorname{Idem}(R)$ tal que $hR = aR \oplus bR$. Aleshores $h = e+f$ amb $e \in aR$, $f \in bR$ idempotents ortogonals.

En efecte, $h=e+f$ per a certs $e \in aR$ i $f \in bR$. Com $e, f \in hR$ i h és idempotent tenim que $he = e$ i $hf = f$. També, com $h^2 = eh + fh = e + f$ i per ser $aR \cap bR = 0$ tenim que $eh = e$ i $fh = f$. Ara, com $e^2 + ef = eh = e = he = e^2 + fe$ tenim que $ef = fe = 0$ i $e^2 = e$. Igualment, tenim que $f^2 = f$.

LEMA 3.3.5. *Sigui B una k-àlgebra (unital) semihereditària per la dreta amb un isomorfisme sobre un córner, $\beta\colon B \to pBp$, $p = p^2 \neq 0, 1$. Sabem que per a tot $\lambda \in k$ es compleix que* $\operatorname{r.ann}_B(\lambda) = e(\lambda)B$ *per a algun idempotent $e(\lambda) \in B$. Suposem que per a tot $\lambda \in k$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim que $e(\lambda) \in \operatorname{im}\beta^n$. Considerem el límit directe*

$$B \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\beta} \cdots$$

i sigui $R = \varinjlim B$. Aleshores R_+ és semihereditari dreta.

DEMOSTRACIÓ. Denotem per $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la unitat local de R donada per les imatges de la unitat de B en cada pas. Per la Proposició 2.2.21 (el seu dual, de fet) n'hi ha prou de veure que per a tot $a \in M_i(R_+)$, l'anul·lador $\operatorname{r.ann}_{M_i(R_+)}(a)$ està generat per un idempotent. Identificarem els elements de R_+ amb la seva imatge en $M_i(R_+)$ a través del morfisme $a \mapsto \operatorname{diag}(a,\dots,a)$. Amb aquesta identificació tenim que $e_nM_i(R)e_n = M_i(R_n)$, on $R_n = e_nRe_n$. Així $M_i(R) = \bigcup_n e_nM_i(R)e_n$ i, per tant, $\{e_n\}$ és una unitat local de $M_i(R)$. Tenim que $M_i(k) \cong M_i(R_+)/M_i(R)$. Escriurem S_n per $M_i(R_n)$. Com que B és semihereditari i $R_n \cong B$ per a tot n tenim que S_n és de Rickart dreta (per la Proposició 2.2.21). Denotem per $\psi_n\colon M_i(B) \to S_n \subseteq M_i(R)$, les aplicacions canòniques i posem $S_n \oplus M_i(k) = \{x + X \in M_i(R_+) \mid x \in M_i(R_n),\ X \in M_i(k)\}$.

Sigui ara $a \in M_i(R_+)$, podem escriure $a = x + X \in S_n \oplus M_i(k)$ per a algun n. Com que S_n té unitat sabem que $S_n \oplus M_i(k) \cong S_n \times M_i(k)$, via $x+X \mapsto (x+e_nX, X)$.

Sense pèrdua de la generalitat podem suposar que la matriu X és diagonal de la forma $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ amb $\lambda_j \mid \lambda_{j+1}$. En efecte, tenim que per a certes matrius invertibles $P, Q \in GL_i(k)$ la matriu $D = PXQ$ és diagonal de la forma desitjada. Ara, si $\mathrm{r.ann}_{M_i(R_+)}(d + D) = gM_i(R_+)$ per a cert idempotent g, aleshores $\mathrm{r.ann}_{M_i(R_+)}(P^{-1}dQ^{-1} + X) = QgQ^{-1}M_i(R_+)$ està generat per un idempotent.

Observem que, si $m \geqslant n$, per a qualsevol $y \in S_n$ tenim que

$$\mathrm{r.ann}_{S_m}(y) = \mathrm{r.ann}_{S_n}(y)S_m \oplus (e_m - e_n)S_m \tag{3.3.3}$$

Vegem-ho. Posem que $\mathrm{r.ann}_{S_m}(y) = hS_m$ amb h un idempotent (l'anul·lador és d'aquesta forma perque S_m és de Rickart dreta). Tenim que $hS_m \supseteq (e_m - e_n)S_m$. Així, per la Llei Modular, veiem que $hS_m = (hS_m \cap e_nS_m) \oplus (e_m - e_n)S_m$. D'aquesta descomposició n'obtenim que $h = g + (e_m - e_n)s$ amb $g \in e_nS_m$ i, per la Observació 3.3.4, és una descomposició en idempotents ortogonals. Substituint g per ge_n podem suposar que $g \in S_n$ i tenim que $\mathrm{r.ann}_{S_n}(y) = gS_n$ d'on obtenim (3.3.3).

Observem que, per a una matriu diagonal $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0) \in M_i(k)$, tenim que $\mathrm{r.ann}_{M_i(B)}(X) = fM_i(B) \oplus EM_i(B)$ on $f = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$ amb $\mathrm{r.ann}_B(\lambda_i) = f_iB$, $f_i = f_i^2$ i $E = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ on hi ha r zeros. Ara, tenim

$$\mathrm{r.ann}_{S_m}(e_mX) = \psi_1(f)S_m \oplus ES_m \tag{3.3.4}$$

En efecte, sigui $y \in \mathrm{r.ann}_{S_m}(e_mX)$, tenim que $y = \psi_m(b)$ amb $b \in B$. Com que $0 = e_mX\psi_m(b) = \psi_m(Xb)$ i ψ_m és injectiva tenim que $b \in fM_i(B) \oplus EM_i(B)$. Posem que $b = fc + Ec'$. Com que $\mathrm{r.ann}_B(\lambda_i) = f_iB$ amb $f_i^2 = f_i$, per hipòtesi, té sentit considerar $\beta^{-m+1}(f_i)$. Així, tenim que $y = \psi_m(b) = \psi_1(\beta^{-m+1}(f))\psi_m(c) + E\psi_m(c')$. Ara, com que $X\psi_1(\beta^{-m+1}(f)) = 0$ tenim que $\beta^{-m+1}(f) \in fM_i(B)$ d'on veiem que $\mathrm{r.ann}_{S_m}(e_mX) \subseteq \psi_1(f)S_m \oplus ES_m$. L'altra inclusió és clara.

Com que S_n és de Rickart dreta, $S_n \times M_i(k)$ també ho és. Per tant,

$$\mathrm{r.ann}_{S_n \times M_i(k)}(x + e_nX, X) = (e, E)(S_n \times M_i(k))$$

on (e, E) és un idempotent. Ara, com $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ podem suposar $E = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ on hi ha r zeros. Sigui $t \in \mathrm{r.ann}_{M_i(R_+)}(a)$, aleshores $t \in S_m \oplus M_i(k)$ per a algun $m \geqslant n$. Sigui $(s, S) \in S_m \times M_i(k)$ l'element corresponent a t per l'isomorfisme. Tenim, doncs, que

$$s \in \mathrm{r.ann}_{S_m}(x + e_nX + (e_m - e_n)X)$$

i que $S \in \mathrm{r.ann}_{M_i(k)}(X) = EM_i(k)$. Tenim la descomposició $s = e_ns + (e_m - e_n)s$ on $e_ns \in eS_m$ per (3.3.3) i $(e_m - e_n)s \in \mathrm{r.ann}_{S_m}(e_mX)$. Per tant, $(e_m - e_n)s = E(e_m - e_n)s$ per (3.3.4). Tenim, doncs:

$$t = s + (1 - e_m)S = e_ns + (e_m - e_n)s + (1 - e_m)S \in eM_i(R_+) \oplus (1 - e_n)EM_i(R_+)$$

Això demostra que $\mathrm{r.ann}_{M_i(R_+)}(a) = (e + E(1 - e_n))M_i(R_+)$ amb $e + E(1 - e_n) \in \mathrm{Idem}(M_i(R_+))$, com volíem. □

L'anterior es compleix, per exemple, si B no té *k-torsió*, és a dir, si per a tot $\lambda \in k$ tenim que $\mathrm{r.ann}_B(\lambda) = 0$:

COROL·LARI 3.3.6. *Sigui B una k-àlgebra (unital) semihereditària per la dreta, amb un isomorfisme sobre un córner, $\beta : B \to pBp$, $p = p^2 \neq 0, 1$ i sense k-torsió. Aleshores R_+ (amb la notació anterior) és semihereditària per la dreta.*

DEMOSTRACIÓ. És clar que ens trobem en les hipòtesis del resultat anterior ja que, com que B no té k-torsió, l'anul·lador en B d'un element de k és zero. □

COROL·LARI 3.3.7. *Siguin B una k-àlgebra (unital) semihereditària dreta sense k-torsió, $p \in B$ un idempotent no trivial i $\beta\colon B \to pBp$ un isomorfisme. Aleshores $K_1(B[t_+, t_-; \beta])$ encaixa en una successió exacta*

$$K_1(B) \xrightarrow{\mathbf{1}-\beta'_*} K_1(B) \to K_1(B[t_+, t_-; \beta]) \to K_0(B) \xrightarrow{\mathbf{1}-\beta'_*} K_0(B).$$

on $\beta'\colon B \to B$ denota la composició de $\beta\colon B \to pBp$ amb la inclusió $pBp \hookrightarrow B$.

DEMOSTRACIÓ. Si, com abans, posem R l'anell definit en (3.3.1) a partir d'aquest B i del seu isomorfisme de córner β i $\rho\colon R \to R$ l'automorfisme definit en (3.3.2) tenim, pel Corol·lari 3.3.6 i el Lema 1.7.6 que

$$\widetilde{Nil}_0(R_+, \rho) = \widetilde{Nil}_0(R_+, \rho^{-1}) = 0$$

i obtenim el resultat pel Teorema 3.3.3. □

Aquest resultat ens permet, per exemple, calcular el K_1 de l'àlgebra de Leavitt d'un buirac (finit) sense piques, cosa que farem en la següent secció. Ens convindrà disposar d'una descripció explícita del morfisme $K_1(B) \to K_1(B[t_+, t_-; \beta])$.

PROPOSICIÓ 3.3.8. *Sigui (B, β) un anell amb un isomorfisme de córner. Aleshores el morfisme $K_1(B) \to K_1(B[t_+, t_-; \beta])$ del Teorema 3.3.3 és el morfisme induït per la inclusió $B \to B[t_+, t_-; \beta]$.*

DEMOSTRACIÓ. Posem R i ρ definits com en (3.3.1) i (3.3.2) respectivament. De les definicions dels morfismes

$$j\colon K_1(R_+) \to K_1(R_+, \rho) \quad \text{(donada en el Lema 1.7.8)}$$

$$i\colon K_1(R_+, \rho) \to K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho]) \quad \text{(donada en [\textbf{65}, §10])}$$

en deduïm que la composició $i \circ j\colon K_1(R_+) \to K_1(R_+[t, t^{-1}; \rho])$ és l'aplicació induïda per la inclusió $R_+ \to R_+[t, t^{-1}; \rho]$. Ara, resseguint la cadena de morfismes de la prova del Teorema 3.3.3 obtenim el resultat fàcilment. □

3.4. El K_1 de l'àlgebra de Leavitt d'un buirac

En aquesta secció farem ús dels resultats de la secció anterior per a calcular el K_1 de l'àlgebra de Leavitt d'un buirac finit sense piques. Veurem també que podem estendre aquest càlcul a un buirac finit qualsevol.

DEFINICIÓ 3.4.1. Donat un buirac E amb conjunt de vèrtexs $E^0 = \{1, \ldots, d\}$ definim la seva *matriu d'incidència*, $A_E = (a^E_{ij}) \in M_d(\mathbb{Z})$, per

$$a^E_{ij} = |\{e \in E^1 \mid s(e) = i, \, r(e) = j\}|.$$

Recordem que $F(E)$ denota el conjunt de totes les fonts en E. Sigui E un buirac (finit) amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ i $d' = |F(E)|$. Reordenant, si cal, E^0 podem suposar que les fonts de E són els d' primers vèrtexs, de manera que les d' primeres columnes de la matriu d'incidència A_E són zero. Posarem $A'_E \in M_{d\times(d-d')}(\mathbb{Z})$ la matriu resultant de treure aquestes d' primeres columnes. La següent proposició generalitza [**5**, Theorem 5.3]:

PROPOSICIÓ 3.4.2. *Sigui E un buirac (finit), sense piques. Aleshores:*

$$K_1(L(E)) \cong \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{d-d'} \to \left(K^\times\right)^d\right) \oplus \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{d-d'} \to \mathbb{Z}^d\right).$$

DEMOSTRACIÓ. Pel Corol·lari 3.2.4 tenim que $L(E) = L(E)_0[t_+, t_-; \tau]$ on $t_+ = \sum_{i=1}^d e_i$, $t_- = \sum_{i=1}^d \overline{e}_i$ per a uns certs $e_i \in s_E^{-1}(i)$ fixats i $\tau(b) = t_- b t_+$ és un isomorfisme de córner sobre $t_-t_+L(E)_0t_-t_+$. Observem que

$$L(E)_0 = K\left\langle \overline{\alpha}\beta \mid \alpha,\, \beta \in E^n, s(\alpha) = s(\beta)\right\rangle$$

és una K-àlgebra sense K-torsió. A més, per [**10**, Demostració del Teorema 5.3] tenim que és ultramatricial; en particular és semihereditària. Denotem per τ' la composició de τ amb la inclusió $t_-t_+L(E)_0t_-t_+ \to L(E)_0$.

Ara, pel Corol·lari 3.3.7 tenim que la següent successió és exacta:

$$K_1(L(E)_0) \xrightarrow{\mathbf{1}-\tau'_*} K_1(L(E)_0) \to K_1(L(E)) \to K_0(L(E)_0) \xrightarrow{\mathbf{1}-\tau'_*} K_0(L(E)_0). \tag{3.4.1}$$

Per tant, tenim la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\mathbf{1} - \tau'_*) \longrightarrow K_1(L(E)) \longrightarrow \ker(\mathbf{1} - \tau'_*) \longrightarrow 0 \tag{3.4.2}$$

De l'estructura de $L(E)_0 \cong \varinjlim L_{0,n}$ com a àlgebra ultramatricial descrita en [**10**, Demostració del Teorema 5.3] i de la continuïtat del functor K_0 n'obtenim que $K_0(L(E)_0)$ és isomorf al límit directe:

$$\mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^{d'} \oplus \mathbb{Z}^d \longrightarrow \left(\mathbb{Z}^{d'}\right)^2 \oplus \mathbb{Z}^d \longrightarrow \cdots$$

on els morfismes de transició $\left(\mathbb{Z}^{d'}\right)^n \oplus \mathbb{Z}^d \longrightarrow \left(\mathbb{Z}^{d'}\right)^{n+1} \oplus \mathbb{Z}^d$ vénen donats pel producte (esquerra) per les matrius:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(n+1)d'} & 0 \\ 0 & A'_E \end{pmatrix} \in M_{((n+1)d'+d)\times(nd'+d)}(\mathbb{Z}).$$

Anàlogament tenim que $K_1(L(E)_0)$ és isomorf al límit directe

$$\left(K^\times\right)^d \longrightarrow \left(K^\times\right)^{d'} \oplus \left(K^\times\right)^d \longrightarrow \left(\left(K^\times\right)^{d'}\right)^2 \oplus \left(K^\times\right)^d \longrightarrow \cdots$$

amb les aplicacions de transició donades també pel producte per la matriu Δ_n.

Observem ara que $\tau'_*\colon K_i(L(E)_0)\to K_i(L(E)_0)$, per a $i=0,1$, ve induït pel següent límit directe:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_i(L_{0,n}) \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[d, "\Omega_n"'] & K_i(L_{0,n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & K_i(L(E)_0) \arrow[d, "\tau'_*"] \\
\cdots \arrow[r] & K_i(L_{0,n+1}) \arrow[r, "\Delta_{n+1}"] & K_i(L_{0,n+2}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_i(L(E)_0)
\end{tikzcd}$$

on $\Omega_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{nd'+d}\end{pmatrix} \in M_{((n+1)d'+d)\times(nd'+d)}(\mathbb{Z})$. Per tant, tenim que el morfisme

$$\mathbf{1}-\tau'_*\colon K_i(L(E)_0)\to K_i(L(E)_0)$$

ve induït pel límit directe:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_i(L_{0,n}) \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[d, "\Delta_n-\Omega_n"'] & K_i(L_{0,n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{n+1}-\Omega_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & K_i(L(E)_0) \arrow[d, "\mathbf{1}-\tau'_*"] \\
\cdots \arrow[r] & K_i(L_{0,n+1}) \arrow[r, "\Delta_{n+1}"] & K_i(L_{0,n+2}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_i(L(E)_0)
\end{tikzcd}$$

Per a $i=0,1$ i $n\in\mathbb{N}$ tenim que

$$\begin{aligned}
\ker(\Delta_n-\Omega_n) &= \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix}\right)\\
\operatorname{coker}(\Delta_n-\Omega_n) &= \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

A més, els morfismes induïts $\ker(\Delta_n-\Omega_n)\to\ker(\Delta_{n+1}-\Omega_{n+1})$ i $\operatorname{coker}(\Delta_n-\Omega_n)\to\operatorname{coker}(\Delta_{n+1}-\Omega_{n+1})$ són la identitat, cosa que ens permet identificar els nuli i el conucli que apareixen en la successió (3.4.2):

$$\ker\left(\mathbf{1}-\tau'_*\colon K_0(L(E)_0)\to K_0(L(E)_0)\right) = \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix}\right)$$

$$\operatorname{coker}\left(\mathbf{1}-\tau'_*\colon K_1(L(E)_0)\to K_1(L(E)_0)\right) = \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix}\right).$$

Com que $\ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{d-d'}\to\mathbb{Z}^d\right)$ és un grup abelià lliure, la successió (3.4.2) és escindida, d'on n'obtenim que

$$\begin{aligned}
K_1(L(E)) \cong \operatorname{coker}&\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix} :\ \left(K^\times\right)^{d-d'}\to\left(K^\times\right)^d\right)\oplus\\
&\ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{d-d'}\to\mathbb{Z}^d\right). \quad\square
\end{aligned}$$

Refinant una mica l'anterior podem donar una descripció més precisa de la imatge del morfisme $K_1(L(E)_0)\to K_1(L(E))$ en (3.4.1). Tenim el següent:

PROPOSICIÓ 3.4.3. *Sigui E un buirac finit sense piques. La imatge del morfisme $\varphi\colon K_1(L(E)_0)\to K_1(L(E))$ en la successió exacta* (3.4.1) *és el subgrup de $K_1(L(E))$ generat per les classes dels elements $(K^\times)^d\subseteq U(L(E))$.*

Demostració. En efecte, per l'exactitud de (3.4.1) tenim que φ factoritza a través de $\operatorname{coker}(\mathbf{1}-\tau'_*)$. Tenim el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{tikzcd}
(K^\times)^{d-d'} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0\\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{smallmatrix}\right)-A'_E"] \arrow[d, "\alpha"'] & (K^\times)^d \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \operatorname{coker}\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{smallmatrix}\right)-A'_E\right) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma", "\cong"'] & 0 \\
K_1(L(E)_0) \arrow[r, "\mathbf{1}-\tau'_*"] & K_1(L(E)_0) \arrow[r] & \operatorname{coker}(\mathbf{1}-\tau'_*) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

on $\alpha(\lambda_{d'+1},\dots,\lambda_d)$ és la classe de l'element

$$(1,\dots,1,\lambda_{d'+1},\dots,\lambda_d)\in (K^\times)^d\subseteq U(L(E)_0)\quad \text{en } K_1(L(E)_0),$$

$\beta(\lambda_1,\dots,\lambda_d)=[\lambda_1,\dots,\lambda_d]$, la seva classe en $K_1(L(E)_0)$, i γ ve induït per la propietat universal del conucli.

Per la Proposició 3.3.8 tenim que φ ve induït per la inclusió. Per tant, de la commutativitat del diagrama, en deduïm que $\operatorname{im}\varphi$ coincideix amb el subgrup de $K_1(L(E))$ generat per les classes de $(K^\times)^d$. $\square$

Donar la descripció dels elements del complement de $\operatorname{im}\varphi$ en $K_1(L(E))$ és una mica més complicat. Ho veurem més endavant, en la Secció 4.4. A continuació volem estendre la Proposició 3.4.2 a buiracs finits generals. Tenim el següent lema:

Lema 3.4.4. *Sigui E' un buirac finit i considerem F un subgraf de E' amb $d=|F^0|$ i d' el nombre de fonts de F. Suposem que existeix un vèrtex $v\in E'^0\setminus F^0$ tal que $r_{E'}^{-1}(v)\neq\emptyset$ i $s_{E'}(r_{E'}^{-1}(v))\subseteq F^0$. Prenem el buirac $E=(E^0,E^1,r_E,s_E)$ on $E^0=F^0\cup\{v\}$, $E^1=F^1\cup r_{E'}^{-1}(v)$ i amb les aplicacions d'incidència definides per restricció de les de E'. Aleshores es compleix:*

(i) *$L(E)$ i $L(F)$ són Morita equivalents.*
(ii) $\ker\left(A'_F-\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix}:\mathbb{Z}^{d-d'}\to\mathbb{Z}^d\right)\cong\ker\left(A'_E-\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{1}_{d+1-d'}\end{pmatrix}:\mathbb{Z}^{d+1-d'}\to\mathbb{Z}^{d+1}\right).$
(iii)

$$\operatorname{coker}\left(A'_F-\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{1}_{d-d'}\end{pmatrix}:\ (K^\times)^{d-d'}\to (K^\times)^d\right)\cong \operatorname{coker}\left(A'_E-\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{1}_{d+1-d'}\end{pmatrix}:\ (K^\times)^{d+1-d'}\to (K^\times)^{d+1}\right).$$

Demostració. (i) Observem que F és un subgraf complet de E (és a dir, la inclusió $\iota\colon F\hookrightarrow E$ és un morfisme de grafs complet) per tant, per la Observació 1.3.3, podem pensar $L(F)$ com un subanell de $L(E)$. Posem $p=\sum_{i\in F^0}p_i\in L(E)$ i vegem que $L(F)=pL(E)p$. En efecte, és clar que $L(F)\subseteq pL(E)p$. Per a veure la inclusió contrària, prenem $\alpha,\beta\in E^*$ amb $s(\alpha)=s(\beta)$ i $r(\alpha),r(\beta)\in F^0$. Tenim que $\overline{\alpha}\beta\in pL(E)p$, a més, tot element de $pL(E)p$ s'expressa com una combinació lineal d'elements d'aquesta forma. Com que v és una pica en E veiem que $\alpha,\beta\in F^*$.

Observem que p és un idempotent ple en $L(E)$, ja que $1_E=\sum_{i\in F^0}p_i+p_v=p+\sum_{e\in r_E^{-1}(v)}\overline{e}p_{s(e)}e\in L(E)pL(E)$. Per [**39**, (18.33)] tenim que $L(E)$ i $L(F)$ són Morita equivalents.

(ii) i (iii) En efecte, recordem que a_{ij}^E denota les entrades de la matriu A'_E (on $i\in E^0$ i $j\in E^0\setminus F(E)$). Tenim que, per a tot $j\in E^0\setminus F(E)$, $a_{vj}^E=0$. Ara, és clar que les matrius següents són equivalents per transformacions elementals

$$A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d+1-d'} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A'_F - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cosa que demostra el resultat. $\square$

Donat un camí $\alpha \in E^n$, $n \geqslant 1$, denotarem per $v(\alpha)$ el conjunt de tots els vèrtexs que apareixen com a origen o final de les arestes de α. En el cas d'un camí trivial $i \in E^0$ posarem $v(i) = \{i\}$. Escriurem $L_E = \{\alpha \in E^* \mid |v(\alpha)| = |\alpha| + 1\}$, el conjunt dels camins de E sense repeticions de vèrtexs. Recordem que r_{E^*}, s_{E^*} denota l'extensió de les aplicacions d'incidència r_E, s_E sobre el conjunt de tots els camins, és a dir $r_{E^*}, s_{E^*} \colon E^* \to E^0$.

Donat un buirac finit E amb cicles orientats definim el seu subgraf sense piques $\tilde{E}$ com el buirac donat pels conjunts $\tilde{E}^0 = \{v \in E^0 \mid s_{E^*}^{-1}(v) \not\subseteq L_E\}$, $\tilde{E}^1 = \{e \in E^1 \mid r_E(e) \in \tilde{E}^0\}$ i amb les aplicacions d'incidència donades per la restricció de r_E, s_E a $\tilde{E}^1$. Observem que aquest és un subgraf ben definit, ja que, si $v \in \tilde{E}^0$ i $e \in r_E^{-1}(v)$ aleshores $s_E(e) \in \tilde{E}^0$. En el cas que E no tingui cicles orientats $\tilde{E}$ denotarà el buirac buit.

Lema 3.4.5. *Sigui E un buirac finit. Aleshores $\tilde{E}$ és un subgraf complet de E sense piques i tal que si $\alpha \in E^*$ és un camí tancat no trivial aleshores $\alpha \in \tilde{E}^*$.*

Demostració. En el cas que E no tingui cicles orientats és clar que el subgraf buit compleix el resultat. Suposem que E té cicles orientats, per definició tenim que $\tilde{E}$ és un subgraf complet. Observem que si $v \in \tilde{E}^0$ aleshores $r_{E^*}^{-1}(v) \subseteq \tilde{E}^*$. Ara, si $\alpha \in E^*$ és un camí tancat no trivial tenim que $r(\alpha) \in \tilde{E}^0$ i, per tant, $\alpha \in \tilde{E}^*$.

Prenem ara $v \in \tilde{E}^0$. Per construcció existeix algun $\alpha = e_1 \cdots e_n \in s_{E^*}^{-1}(v)$ tal que $|v(\alpha)| \leqslant n$. Per tant, d'entre els vèrtexs del conjunt $\{r(e_1), \dots, r(e_n)\}$ n'existirà algun, posem que sigui $r(e_i)$, tal que existeix un camí tancat no trivial basat en $r(e_i)$ (en principi un subcamí de α). De l'anterior en deduïm que $r(e_i) \in \tilde{E}^0$ i $e_1 \cdots e_i \in \tilde{E}^*$, cosa que ens diu que v no és una pica en $\tilde{E}$. $\square$

Teorema 3.4.6. *Sigui E un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ i $d' = |F(E)|$. Llavors:*

$$K_1(L(E)) \cong \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} \colon \left(K^\times\right)^{d-d'} \to \left(K^\times\right)^d\right) \oplus \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} \colon \mathbb{Z}^{d-d'} \to \mathbb{Z}^d\right).$$

Demostració. Considerem F el subgraf de E donat per $F^0 = \tilde{E}^0 \cup F(E)$ i $F^1 = \tilde{E}^1$ amb les aplicacions d'incidència donades per restricció. Usant el Lema 3.4.5 veiem que F és un subgraf complet de E tal que tot camí tancat no trivial (de E) té totes les arestes en F^1. A més, les fonts de E coincideixen amb les de F.

Posem $t = |F^0|$ i $k = d - t$. Suposem que $k > 0$. En aquest supòsit construirem inductivament una cadena de subgrafs complets de E, $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = E$ amb $|F_{i+1}^0 \setminus F_i^0| = 1$, de manera que per a tot i es compleixi el següent:

(i) $F(F_i) = F(E)$.

(ii) $L(F_i)$ i $L(F_{i+1})$ són Morita equivalents.

(iii)

$$\ker\left(A'_{F_i} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t+i-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{t+i-d'} \to \mathbb{Z}^{t+i}\right) \cong \ker\left(A'_{F_{i+1}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t+i+1-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{t+i+1-d'} \to \mathbb{Z}^{t+i+1}\right).$$

(iv)

$$\operatorname{coker}\left(A'_{F_i} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t+i-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{t+i-d'} \to \left(K^\times\right)^{t+i}\right) \cong \operatorname{coker}\left(A'_{F_{i+1}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t+i+1-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{t+i+1-d'} \to \left(K^\times\right)^{t+i+1}\right).$$

Posem $F_0 = F$. Suposem definit F_i ($k > i \geqslant 0$) i definim inductivament F_{i+1}. Vegem primer que existeix un vèrtex $v \in E^0 \setminus F_i^0$ tal que $s_E(r_E^{-1}(v)) \subseteq F_i^0$. En efecte, prenem $v_1 \in E^0 \setminus F_i^0$. Com que $F(F_i) = F(E)$ tenim que $r_E^{-1}(v_1) \neq \emptyset$. Si existeix $e_1 \in r_E^{-1}(v_1)$ tal que $s_E(e_1) \notin F_i^0$ prenem $v_2 = s_E(e_1)$. Com que el nombre de vèrtex en $E^0 \setminus F_i^0$ és finit, si procedim d'aquesta manera obtenim o bé un vèrtex $v \in E^0 \setminus F_i^0$ (i, per tant, amb $r_E^{-1}(v) \neq \emptyset$) tal que $s_E(r_E^{-1}(v)) \subseteq F_i^0$ o bé una successió d'arestes $e_1, \ldots, e_m \in E^1 \setminus F_i^1$ de tal manera que $s_E(e_m) \in \{r_E(e_1), \ldots, r_E(e_{m-1})\}$. Però aquest segon cas no es pot donar: altrament, el camí $\alpha = e_m \cdots e_1 \notin L_E$ i, en conseqüència, $s_E(e_m) \in \tilde{E}^0 \subseteq F_i^0$ cosa que es contradiu amb la manera d'escollir les arestes e_i. Posem, doncs, $F_{i+1}^0 = F_i^0 \cup \{v\}$ i $F_{i+1}^1 = F_i^1 \cup r_E^{-1}(v)$. Per construcció obtenim (i) i que F_i és un subgraf complet de E per a tot i. (ii), (iii) i (iv) es deriven del Lema 3.4.4.

Deduïm, doncs, que $L(E)$ i $L(F)$ són Morita equivalents i, en conseqüència, $K_1(L(E)) \cong K_1(L(F))$. Posem $\ell = |\{v \in F(E) \mid s_{E^*}^{-1}(v) \subseteq L_E\}|$. És clar que $K_1(L(F)) \cong K_1(L(\tilde{E})) \oplus \prod_{i=1}^{\ell} K^\times$. Pel Lema 3.4.5 tenim que $\tilde{E}$ no té piques, per tant, de la Proposició 3.4.2 n'obtenim que

$$K_1(L(\tilde{E})) \cong \operatorname{coker}\left(A'_{\tilde{E}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{t-d'} \to \left(K^\times\right)^{t-\ell}\right) \oplus \ker\left(A'_{\tilde{E}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{t-d'} \to \mathbb{Z}^{t-\ell}\right).$$

Ara, dels isomorfismes

$$\ker\left(A'_{\tilde{E}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{t-d'} \to \mathbb{Z}^{t-\ell}\right) \cong \ker\left(A'_{F} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{t-d'} \to \mathbb{Z}^{t}\right)$$

$$\operatorname{coker}\left(A'_{\tilde{E}} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{t-d'} \to \left(K^\times\right)^{t-\ell}\right) \oplus \prod_{i=1}^{\ell} K^\times \cong \operatorname{coker}\left(A'_{F} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{t-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{t-d'} \to \left(K^\times\right)^{t}\right)$$

en deduïm el resultat per al cas $k = 0$, és a dir, quan $E = F$. I usant també els isomorfismes de (iii) i (iv) per a tota la cadena de subgrafs $F = F_0 \subset \cdots \subset F_k = E$ n'obtenim el resultat per a $k > 0$. $\square$

3.5. El K_1 de l'àlgebra regular d'un buirac

En aquesta secció donarem una primera descripció del K_1 de l'àlgebra regular $Q(E)$. Completarem aquest càlcul més endavant, en el Capítol 4.

Sigui M un monoide abelià. Un *ideal d'ordre* és un conjunt I no buit tal que per a tot $x, y \in M$, $x+y \in I$ si i només si $x, y \in I$. Necessitarem el següent resultat d'anells regulars de von Neumann:

PROPOSICIÓ 3.5.1 ([**34**, Propositions 7.3 i 7.4]). *Sigui R un anell regular. Aleshores hi ha una correspondència bijectiva entre els ideals bilàters de R i els ideals d'ordre de $\mathcal{V}(R)$. De fet, un ideal d'ordre J de $\mathcal{V}(R)$ es correspon amb l'ideal I de R generat per tots els idempotents $e \in R$ tals que $[eR] \in J$.*

De manera anàloga a les sèries formals en una variable, podem considerar una versió de les sèries formals per a anells de Laurent córner-guerxos:

DEFINICIÓ 3.5.2. Siguin B un anell i $\beta\colon B \to pBp$ un isomorfisme sobre un córner. L'*anell de sèries formals de Laurent córner-guerxo*, en símbols $B(\!(t_+;\beta)\!)$, ve donat per les expressions formals
$$\sum_{i=j}^{1} b_{-i}t_-^i + \sum_{i=0}^{+\infty} t_+^i b_i,$$
amb $b_{-i} \in Bp_i$ i $b_i \in p_iB$ per a $i \geqslant 0$.

Ara estem en condicions de veure que el grup $K_1(L(E))$ és un sumand directe de $K_1(Q(E))$.

PROPOSICIÓ 3.5.3. *Sigui E un buirac (finit). Aleshores, el morfisme*
$$K_1(L(E)) \to K_1(Q(E)),$$
induït per la inclusió, és injectiu escindit.

DEMOSTRACIÓ. Suposem primer que E no té piques. En la secció 3.4 hem vist que, en aquest supòsit, $L(E) = L(E)_0[t_+, t_-;\beta]$ on $t_+ = \sum_{i=1}^d e_i$ i $t_- = \sum_{i=1}^d \overline{e}_i$ per a uns certs $e_i \in s^{-1}(i)$ fixats. Com que E no té piques tenim que, per a tot $j \geqslant 1$, $E^j \cap s_{E^*}^{-1}(i) \neq \emptyset$. Donat $i \in E^0$ posem $\eta_i^0 = p_i$ i $\eta_i^1 = e_i$. Per a $j > 1$ definim inductivament $\eta_i^j = \eta_i^{j-1}e_{r(\eta_i^{j-1})}$. Fixats aquests elements definim el morfisme $\phi\colon P_{\mathrm{rat}}(E) \to L(E)_0(\!(t_+;\beta)\!)$ via $\sum_{\gamma\in E^*}\lambda_\gamma\gamma \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} t_+^i\left(\sum_{|\gamma|=i}\lambda_\gamma\overline{\eta}^i_{s(\gamma)}\gamma\right)$. Donat $f \in E^1$ posem $t_{\overline{f}} = \overline{f}\eta^1_{s(f)}t_-$. Tenim que
$$\phi(e)t_{\overline{f}} = t_+\overline{\eta}^1_{s(e)}e\overline{f}\eta^1_{s(f)}t_- = \delta_{ef}t_+\overline{\eta}^1_{s(e)}\eta^1_{s(f)}t_- = \delta_{ef}p_{s(e)}.$$
Ara, per la Proposició 2.2.7 existeix un únic morfisme de K-àlgebres
$$\overline{\phi}\colon P_{\mathrm{rat}}(E)\left\langle \overline{E};\tau,\delta\right\rangle \to L(E)_0(\!(t_+;\beta)\!)$$
tal que $\overline{\phi}(\overline{f}) = \overline{f}\eta^1_{s(f)}t_-$ i $\overline{\phi}_{|P_{\mathrm{rat}}(E)} = \phi$. Com que, per $i \in E^0$,
$$\overline{\phi}\left(p_i - \sum_{e\in r^{-1}(i)}\overline{e}e\right) = p_i - \sum_{e\in r^{-1}(i)}\overline{e}\eta^1_{s(e)}t_-t_+\overline{\eta}^1_{s(e)}e = p_i - \sum_{e\in r^{-1}(i)}\overline{e}e = 0$$

obtenim un morfisme $\psi\colon Q(E) \to L(E)_0(\!(t_+;\beta)\!)$ estenent ϕ.

Vegem que ψ és injectiu. Pel Teorema 2.4.2 sabem que $Q(E)$ és un anell regular de von Neumann i que $\mathcal{V}(Q(E))$ està generat per $[p_1Q(E)], \dots, [p_dQ(E)]$. Ara, de la Proposició 3.5.1 en deduïm que tot ideal no nul de $Q(E)$ conté algun dels idempotents $p_1, \dots, p_d$. Com que per a tot $i \in E^0$ tenim $\psi(p_i) = p_i$, forçosament $\ker \psi = 0$.

Per tant, podem suposar que tenim inclusions $L(E) \subseteq Q(E) \subseteq L(E)_0(\!(t_+;\beta)\!)$. De [**5**, Corollary 6.2] tenim que la inclusió indueix un monomorfisme escindit

$$K_1(L(E)) \to K_1\big(L(E)_0(\!(t_+;\beta)\!)\big).$$

En conseqüència, el morfisme $K_1(L(E)) \to K_1(Q(E))$, induït per la inclusió, és un monomorfisme escindit.

En el cas que E tingui piques, sabem de la secció 3.4 que existeixen un subgraf F amb $F^0 = \tilde{E}^0 \cup$ i $F^1 = \tilde{E}^1$ (on $\tilde{E}$ és el subgraf maximal sense piques) de forma que tenim el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K_1(L(\tilde{E})) \oplus (K^\times)^\ell \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & K_1(Q(\tilde{E})) \oplus (K^\times)^\ell \arrow[d, "\cong"] \\
K_1(L(F)) \arrow[r] & K_1(Q(F))
\end{tikzcd}$$

A més, existeix un idempotent ple $p \in L(E)$ tal que

$$pL(E)p = L(F) = L(\tilde{E})_0[t_+, t_-;\beta] \times (K)^\ell,$$

de manera que $L(E)$ i $L(F)$ són anells Morita equivalents. Com que els elements de $Q(E)$ són combinacions K-lineals (potser infinites) d'elements en $L(E)$, és clar que $Q(F) = pQ(E)p$. Per tant, $Q(E)$ i $Q(F)$ són Morita equivalents. Ara, de la commutativitat del quadrat següent:

$$\begin{tikzcd}
K_1(L(F)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & K_1(Q(F)) \arrow[d, "\cong"] \\
K_1(pL(E)p) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & K_1(pQ(E)p) \arrow[d, "\cong"] \\
K_1(L(E)) \arrow[r] & K_1(Q(E)),
\end{tikzcd}$$

on els morfismes horitzontals vénen induïts per la inclusió. Deduïm, doncs, que $K_1(L(E)) \longrightarrow K_1(Q(E))$ és un monomorfisme escindit, com volíem veure. $\square$

COROL·LARI 3.5.4. *Sigui E un buirac (finit) amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ i $d' = |F(E)|$. Llavors:*

$$K_1(Q(E)) \cong \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} :\ \left(K^\times\right)^{d-d'} \to \left(K^\times\right)^{d}\right) \oplus$$
$$\ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{d-d'} \to \mathbb{Z}^d\right) \oplus G.$$

on G és un grup abelià a determinar.

DEMOSTRACIÓ. En efecte, és conseqüència de la Proposició 3.5.3 junt amb el Teorema 3.4.6. $\square$

Calcularem explícitament el grup G en el Teorema 4.5.9.

CAPíTOL 4

Mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt d'un buirac

En aquest capítol estudiem els mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt d'un buirac. En les dues primeres seccions generalitzem alguns resultats de l'àlgebra lliure al cas de l'àlgebra de camins d'un buirac. Concretament, en la Secció 4.1 veiem que existeix una fórmula de Lewin-Schreier (anàloga a la de l'àlgebra lliure) en el cas de $P(E)$. En la Secció 4.2 veiem que la Teoria de Cohn de l'algoritme feble admet també una versió (amb unes definicions adaptades) al nostre cas, cosa que ens permet estendre un resultat de Lewin sobre l'àlgebra lliure a $P(E)$ (Teorema 4.2.18). Aquest resultat és la clau per a obtenir la forma dels $L(E)$-mòduls finitament presentats en la Secció 4.4. En la Secció 4.3 veiem d'una banda que, com a aplicació senzilla dels resultats que tenim, l'àlgebra $Q(E)$ és la localització perfecta dreta maximal de $P(\overline{E})$. D'altra banda veiem també que $Q(E)$ és una certa localització universal de $P(\overline{E})$ que, en la darrera secció, ens permetrà calcular explícitament el complement de $K_1(L(E))$ en $K_1(Q(E))$. En la Secció 4.5 veiem que la categoria dels $L(E)$-mòduls fintament presentats, $\mathbf{fp}(L(E))$, i la categoria dels $L(E)$-mòduls finitament presentats de longitud finita, $\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}$, es poden obtenir com un quocient de les categories corresponents sobre $P(\overline{E})$. Recordem que usem la Notació 1.2.3: tret que s'indiqui el contrari E denotarà un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ (on $d = |E^0|$).

4.1. Mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de camins

Recordem que per al cas que $R = K\langle X\rangle$ sigui l'àlgebra lliure en n variables, per a tot R-mòdul M de K-dimensió finita tenim una fórmula de Lewin-Schreier que ens relaciona $\chi_R(M)$, la característica d'Euler de M, amb la K-dimensió de M:

$$\chi_R(M) = (1-n)\dim_K(M)$$

(vegeu [**45**, Theorem 4] o [**20**, Theorem 2.5.3]). En aquesta secció veurem, usant un resultat general de Bergman i Dicks [**17**], que tenim una fórmula anàloga per al cas de l'àlgebra de camins d'un buirac.

Denotarem per **Mod-**R la categoria dels R-mòduls dreta i per $\mathbf{fp}(R)$ la subcategoria plena dels R-mòduls dreta finitament presentats. Donat un R-mòdul M amb una resolució per mòduls projectius finitament generats,

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

definim la seva *característica d'Euler* com $\chi_R(M) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i[P_i] \in K_0(R)$. És ben sabut que aquesta no depèn de la resolució de M (vegeu per exemple [**47**, (3.50)]). De vegades, per a un A-anell R podem relacionar la característica d'Euler d'un R-mòdul M com a R-mòdul i com a A-mòdul:

Definició 4.1.1 ([**17**, (64)]). Direm que un A-anell R és un *A-anell de Lewin-Schreier per la dreta* si

(i) Tot R-mòdul dreta M que té una resolució finita per projectius finitament generats sobre A té també una R-resolució d'aquest tipus.
(ii) Existeix un homomorfisme $\lambda_{R,A}\colon K_0(A) \to K_0(R)$ tal que per a un M amb una resolució d'aquest tipus, $\chi_R(M) = \lambda_{R,A}\chi_A(M)$.

Lema 4.1.2. *Siguin R un A-anell de Lewin-Schreier per la dreta i S un B-anell de Lewin-Schreier per la dreta. Aleshores $R \times S$ és un $A \times B$ anell de Lewin-Schreier per la dreta.*

Notació 4.1.3. Donat un R-anell S denotarem per $\tau_{S,R}\colon K_0(R) \to K_0(S)$ l'homomorfisme induït pel functor $- \otimes_R S$.

Recordem que A_E denota la matriu d'incidència del buirac E (Definició 3.4.1).

Proposició 4.1.4. *Sigui E un buirac finit amb $|E^0| = d$. Aleshores $P(E)$ és un K^d-anell de Lewin-Schreier per la dreta amb $\lambda_{P(E),K^d} = (\mathbf{1} - A_E)\tau_{P(E),K^d}$.*

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre $n = |E^1|$. Prenem E un buirac amb una única aresta i d vèrtexs. Distingim dos casos, si l'aresta és un cicle tenim que $P(E) \cong K[x] \times K^{d-1}$ i si no ho és tenim que $P(E) \cong \left(\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right) \times K^{d-2}$. En el cas de $K[x]$ per [**45**, Theorem 4] tenim que és un K-anell de Lewin-Schreier dreta amb $\lambda_{K[x],K} = 0$ i, per tant, $P(E)$ és un K^d-anell de Lewin-Schreier dreta amb

$$\lambda_{P(E),K^d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{d-1} \end{pmatrix} \tau_{P(E),K^d} = (\mathbf{1} - A_E)\tau_{P(E),K^d},$$

com volíem. Per a l'altre cas, posem $R = \left(\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right)$ i $A = K^2$. Tenim que R és un A-anell amb la inclusió diagonal. Identificarem A com a subanell de R a través d'aquesta inclusió. Posarem també $p_1 = (1,0)$, $p_2 = (0,1) \in A$. Tant en R com en A el grup de Grothendieck és abelià lliure de rang dos, $K_0(R) \cong K_0(A) \cong \mathbb{Z}^2$ generat respectivament per $[p_1R]$, $[p_2R] \in K_0(R)$ i per $[p_1A]$, $[p_2A] \in K_0(A)$. Si considerem l'A-bimòdul $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tenim que $R \cong T_A(M)$ és una àlgebra tensorial de manera que, per [**17**, (63)], obtenim la següent successió exacta de R-bimòduls, que és escindida com a successió de R-mòduls dreta o esquerra:

$$0 \longrightarrow R \otimes_A M \otimes_A R \longrightarrow R \otimes_A R \longrightarrow R \longrightarrow 0. \tag{4.1.1}$$

Donat un R-mòdul dreta N que tingui una resolució per A-mòduls projectius finitament generats tindrem que, com a A-mòdul, és projectiu finitament generat; de fet, és de la forma $N_A \cong (p_1A)^{\alpha_1} \oplus (p_2A)^{\alpha_2}$. Aplicant el functor $N \otimes_R -$ a la successió (4.1.1) obtenim una resolució de N per R-mòduls dreta projectius finitament generats:

$$0 \longrightarrow N \otimes_A M \otimes_A R \longrightarrow N \otimes_A R \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Per tant, per a l'A-anell R es compleix la condició (i) de la definició. Ara, dels isomorfismes següents:

$$p_1 A \otimes_A R \cong p_1 R, \quad p_2 A \otimes_A R \cong p_2 R, \quad p_1 A \otimes_A M \otimes_A R = 0, \quad p_2 A \otimes_A M \otimes_A R \cong p_1 R$$

en deduïm que

$$\chi_R(N) = [N \otimes_A R] - [N \otimes_A M \otimes_A R] = \alpha_1[p_1 R] + \alpha_2[p_2 R] - \alpha_2[p_1 R] = (\mathbf{1} - A_E)\tau_{R,A}\chi_A(N)$$

i tenim la condició (ii) de la definició.

Suposem-ho cert ara per a tot buirac amb n o menys arestes ($n \geqslant 1$) i sigui E un buirac tal que $|E^1| = n + 1$. Prenem $e \in E^1$ una aresta i considerem els buiracs $E' = (E^0, \{e\})$ i $E'' = (E^0, E^1 \setminus \{e\})$ on, en cada cas, les aplicacions d'incidència vénen donades per restricció de les de E. Per hipòtesi d'inducció tenim que $P(E')$ i $P(E'')$ són K^d-anells de Lewin-Schreier per la dreta amb $\lambda_{P(E'),K^d} = (\mathbf{1} - A_{E'})\tau_{P(E'),K^d}$ i $\lambda_{P(E''),K^d} = (\mathbf{1} - A_{E''})\tau_{P(E''),K^d}$. Usant la propietat universal de l'àlgebra de camins (*cf.* Lema 1.2.1 i Proposició 1.2.4) és fàcil veure que $P(E) \cong P(E') *_{K^d} P(E'')$. Ara, per [**17**, (67)] tenim que $P(E)$ és un K^d-anell de Lewin-Schreier per la dreta amb

$$\lambda_{P(E),K^d} = (\tau_{P(E),P(E')}\lambda_{P(E'),K^d} + \tau_{P(E),P(E'')}\lambda_{P(E''),K^d} - \tau_{P(E),K^d}),$$

on, si identifiquem en cada cas els functors naturalment equivalents

$$(- \otimes_S T) \circ (- \otimes_R S) \cong (- \otimes_R T),$$

obtenim

$$\lambda_{P(E),K^d} = ((\mathbf{1} - A_{E'})\tau_{P(E),K^d} + (\mathbf{1} - A_{E''})\tau_{P(E),K^d} - \tau_{P(E),K^d}) = (\mathbf{1} - A_E)\tau_{P(E),K^d}$$

com volíem veure. □

4.2. L'algoritme feble en l'àlgebra de camins

Com hem anat veient al llarg de tot el treball, l'àlgebra de camins d'un buirac és una generalització de l'àlgebra lliure i, sovint, les propietats d'aquesta darrera es poden generalitzar a la primera. En aquesta secció introduirem les definicions necessàries per a generalitzar l'algoritme feble de Cohn (vegeu [**20**, Chapter 2]) a les àlgebres de camins, així com les versions d'alguns dels seus resultats bàsics adaptades al nostre context. Convé remarcar que, tot i que les nostre definicions són lleugerament diferents a les de Cohn, fem servir els mateixos noms per a conceptes anàlegs. Com a resultat principal en aquesta secció demostrarem una versió del Teorema de Lewin [**45**, Theorem 2] per a l'àlgebra de camins.

Sigui R un anell no nul. Una *filtració* sobre R és una aplicació $\nu\colon R \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ complint les propietats següents:

(1) $\nu(r) \geqslant 0$ per a tot $r \neq 0$, $\nu(0) = -\infty$,
(2) $\nu(r - s) \leqslant \max\{\nu(r), \nu(s)\}$,
(3) $\nu(rs) \leqslant \nu(r) + \nu(s)$,
(4) $\nu(1) = 0$.

Sovint ens referirem a $\nu(r)$ com al grau de r. Donada una filtració ν sobre R, denotarem per R_h el conjunt d'elements de grau com a molt h; tenim que els R_h són subgrups del grup additiu de R complint:

(i) $0 = R_{-\infty} \subset R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots,$
(ii) $\cup R_h = R,$
(iii) $R_i R_j \subseteq R_{i+j},$
(iv) $1 \in R_0.$

Recíprocament, donat un conjunt de subgrups R_h del grup additiu de R satisfent (i)-(iv) obtenim una filtració ν donada per $\nu(r) = \min\{h \mid r \in R_h\}$.

També podem considerar filtracions en un R-mòdul M i els seus corresponents grups additius. En efecte, siguin R un anell amb una filtració ν i M un R-mòdul dreta. Una *filtració* sobre M és una aplicació $\mu\colon M \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ complint les propietats següents:

(1) $\mu(m) \geqslant 0$ per a tot $m \neq 0$, $\mu(0) = -\infty$,
(2) $\mu(m - n) \leqslant \max\{\mu(m), \mu(n)\}$,
(3) $\mu(mr) \leqslant \mu(m) + \nu(r)$.

Com en el cas d'un anell denotarem per M_h el conjunt d'elements de grau com a molt h; aquests M_h són subgrups del grup additiu de M complint:

(i) $0 = M_{-\infty} \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots,$
(ii) $\cup M_h = M,$
(iii) $M_i R_j \subseteq M_{i+j}.$

També, recíprocament, donat un conjunt de subgrups M_h del grup additiu de M satisfent (i)-(iii) obtenim una filtració μ donada per $\mu(m) = \min\{h \mid m \in M_h\}$.

En el que segueix R serà un K-anell amb una filtració ν tal que $R_0 \cong K^d$ i M un R-mòdul dreta amb una filtració μ. Denotarem per $p_1, \dots, p_d \in R_0$ els idempotents ortogonals que es corresponen amb $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in K^d$ a través d'un isomorfisme $R_0 \cong K^d$ fixat. En aquesta situació tenim les definicions següents:

Definicions 4.2.1. Una família $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M p_{n_i}$ diem que és *μ-dependent per la dreta* si existeix un element $(r_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} p_{n_i} R$ tal que

$$\mu\left(\sum_{i \in I} m_i r_i\right) < \max_{i \in I}\{\mu(m_i) + \nu(r_i)\}$$

o bé, si $m_i = 0$ per a algun $i \in I$. En cas contrari diem que la família $(m_i)_{i \in I}$ és *μ-independent per la dreta*.

Definicions 4.2.2. Un element $m \in M$ diem que és *μ-dependent per la dreta* amb la família $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M p_{n_i}$ si $m = 0$ o bé, si existeix $(r_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} p_{n_i} R$ tal que

$$\mu\left(m - \sum_{i \in I} m_i r_i\right) < \mu(m) \quad \text{i} \quad \forall i \in I,\ \mu(m_i) + \nu(r_i) \leqslant \mu(m).$$

En cas contrari diem que m és *μ-independent per la dreta* amb la família $(m_i)_{i \in I}$.

Definicions 4.2.3. Un element $m \in M$ diem que és *μ-dependent per la dreta* amb el conjunt $S \subseteq M$ si existeix alguna família $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} S p_{n_i}$ tal que m sigui μ-dependent per la dreta amb aquesta. En cas contrari direm que m és *μ-independent per la dreta* amb S.

Definició 4.2.4. Diem que M satisfà *l'algoritme feble* respecte μ si per a tota família μ-dependent dreta $(m_i)_{i=1,\dots,\ell} \in \prod_{i=1}^{\ell} Mp_{n_i}$ amb $\mu(m_1) \leqslant \cdots \leqslant \mu(m_\ell)$ algun m_i és μ-dependent dreta amb $m_1, \dots, m_{i-1}$.

Definició 4.2.5. Sigui M un R-mòdul dreta. Un subconjunt $\mathcal{B}$ de $\cup_{i=1}^{d} Mp_i$ direm que és una *μ-base feble* de M si es compleix que

(i) Tot element de M és μ-dependent dreta amb $\mathcal{B}$.
(ii) Cap element de $\mathcal{B}$ és μ-dependent dreta amb la resta de $\mathcal{B}$.

Observació 4.2.6. Si M satisfà l'algoritme feble respecte a μ aleshores tota μ-base feble de M és μ-independent per la dreta, per la condició (ii) de la definició.

Observació 4.2.7. Tota μ-base feble d'un mòdul M és un conjunt generador de M.

Observació 4.2.8. Si apliquem les definicions anteriors al mòdul regular $M = R_R$ amb la filtració $\mu = \nu$ tenim també definits aquests conceptes per a l'anell R.

Observació 4.2.9. En el cas de l'algebra de camins $P(E)$, $\nu = \deg$ defineix una filtració.

Notació 4.2.10. En endavant, quan treballem amb l'àlgebra de camins com a anell amb una filtració posarem $\nu = \deg$.

Proposició 4.2.11. *$P(E)$ satisfà l'algoritme feble respecte a ν.*

Demostració. Posem $R = P(E)$. Sigui $(r_i)_{i=1,\dots,\ell} \in \prod_{i=1}^{\ell}(Rp_{n_i} \backslash \{0\})$ una família ν-dependent per la dreta amb $\nu(r_1) \leqslant \cdots \leqslant \nu(r_\ell)$ i sigui $(s_i)_{i=1,\dots,\ell} \in \bigoplus_{i=1}^{\ell} p_{n_i} R$ tal que

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i s_i\right) < t = \max_i \{\nu(r_i) + \nu(s_i)\}.$$

Suprimint, si cal, alguns termes podem suposar que $\nu(r_i) + \nu(s_i) = t$ per a tot i, de manera que $\nu(s_1) \geqslant \cdots \geqslant \nu(s_\ell)$. Sigui $\gamma \in \operatorname{supp}(s_\ell)$ de longitud màxima, diguem-li t_0. Observem que, donats $r, s \in R$, tenim

$$(rs)\delta_\gamma \equiv r(s)\delta_\gamma \pmod{R_{\nu(r)-1}}. \tag{4.2.1}$$

En efecte, si s és un monomi de longitud major o igual que t_0, de fet, tenim igualtat. Si s és un monomi de longitud menor que t_0, la part dreta de (4.2.1) és zero i, per tant, es compleix la congruència. El cas general l'obtenim per linealitat.

Tenim, doncs, que per a tot i, $r_i(s_i)\delta_\gamma$ difereix de $(r_i s_i)\delta_\gamma$ en un terme de grau menor que $\nu(r_i) \leqslant \nu(r_\ell)$. Per tant,

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i(s_i)\delta_\gamma - \left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i s_i\right)\delta_\gamma\right) < \nu(r_\ell).$$

Ara, com que $\nu\left(\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i s_i\right)\delta_\gamma\right) \leqslant \nu\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i s_i\right) - t_0 < t - t_0 = \nu(r_\ell)$, tenim que $\nu\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_i(s_i)\delta_\gamma\right) < \nu(r_\ell)$. Com que $(s_\ell)\delta_\gamma \in p_{n_\ell}K^\times$, obtenim que r_ℓ és ν-dependent per la dreta amb $r_1, \dots, r_{\ell-1}$, com volíem. $\square$

En la situació següent podem assegurar l'existència de μ-bases febles:

PROPOSICIÓ 4.2.12. *Sigui M un $P(E)$-mòdul amb una filtració μ. Aleshores, per a tot $i = 1, \dots, d$ i $h \geqslant 0$ existeixen conjunts $\mathcal{B}_h^i \subseteq M_h p_i \setminus M_{h-1}$ tals que $\mathcal{B} = \cup_{i,h}\mathcal{B}_h^i$ és una μ-base feble de M. A més, tenim que el cardinal dels conjunts $\mathcal{B}_h^i$ no depèn de la μ-base feble de M.*

DEMOSTRACIÓ. Per $h \in \mathbb{N}$ tenim que $M_h = \{m \in M \mid \mu(m) \leqslant h\}$ és un K^d-mòdul. Donat $h > 0$ denotem per M'_h el conjunt dels elements de M_h tals que són μ-dependents per la dreta amb el conjunt M_{h-1} i posem $M'_0 = \{0\}$. Tenim que M'_h també és un K^d-mòdul. En efecte, és clar que M'_h és tancat pel producte dreta per elements de K^d; la clausura respecte a la suma és clara si la suma té grau h i, en altre cas, tenim que pertany a M_{h-1}. Considerem el K^d-mòdul M_h/M'_h. Per a cada i tenim que $(M_h/M'_h)p_i$ és un K-espai vectorial. Ara, per a cada $h \geqslant 0$ i $i = 1, \dots, d$ prenem $\mathcal{B}_h^i \subseteq M_h$ un conjunt de representants d'una K-base de $(M_h/M'_h)p_i$. Sense pèrdua de la generalitat podem suposar que $\mathcal{B}_h^i \subseteq M_h p_i$. Posem $\mathcal{B} = \cup_{i,h}\mathcal{B}_h^i$.

Vegem ara que $\mathcal{B}$ és una μ-base feble de M. Tenim que $\mathcal{B} \subseteq \cup_{i=1}^d Mp_i$. Veurem per inducció sobre h que tot element de M és μ-dependent amb $\mathcal{B}$. En efecte, per a $h = 0$: per construcció de $\mathcal{B}$ tot element de M_0 és una combinació K^d-lineal dels elements de $\mathcal{B}$ (de grau zero) i, per tant, és μ-dependent amb $\mathcal{B}$. Suposem-ho cert per a $h \geqslant 0$ i vegem-ho per a $h+1$. Per la construcció de $\mathcal{B}$ és clar que tot element de M_{h+1} difereix en un element de M'_{h+1} d'una combinació K^d-lineal d'elements de $\mathcal{B}$ de grau $h+1$. Com que tot element de M'_{h+1} és μ-dependent amb M_h i tot element de M_h és μ-dependent amb $\mathcal{B}$ en deduïm que tot element de M_{h+1} és μ-dependent amb $\mathcal{B}$. Com $M = \cup_h M_h$ obtenim el que volíem.

Suposem ara que $b \in \mathcal{B}$ és μ-dependent amb $\mathcal{B} \setminus \{b\}$. Posem $h = \mu(b)$ i, per fixar idees, suposem que $b \in Mp_{n_b}$. És clar que $b \neq 0$; per la μ-dependència existeixen $(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(\mathcal{B}p_{n_i} \setminus \{b\})$ i $(r_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} p_{n_i}R$ tals que

$$\mu\left(b - \sum_{i\in I} b_i r_i\right) < h \quad \text{i} \quad \forall i \in I,\, \mu(b_i) + \nu(r_i) \leqslant h.$$

És clar que $\mu(b_i) \leqslant h$ per a tot i i, si $\mu(b_i) = h$, tenim que $\nu(r_i) = 0$ i $p_{n_i} = p_{n_b}$; de manera que b difereix en un element de M'_h d'una combinació K-lineal d'elements de $\mathcal{B}_h^i$. Això ens porta a contradicció amb el fet que els elements de $\mathcal{B}_h^i$ formen una K-base de $(M_h/M'_h)p_i$. Per tant, la nostra suposició era falsa i en deduïm que $\mathcal{B}$ és una μ-base feble de M.

D'altra banda, donada $\mathcal{C}$ una μ-base feble qualsevol de M és clar que les classes dels elements del conjunt $\{c \in \mathcal{C} \mid cp_i = c,\, \mu(c) = h\}$ mòdul M'_h formen una K-base del K-espai vectorial $(M_h/M'_h)p_i$ i, per tant, el seu cardinal no depèn de la μ-base feble. $\square$

NOTACIÓ 4.2.13. En la situació del lema anterior denotarem per $r_h^i(M)$ el cardinal dels conjunts $\mathcal{B}_h^i$ i per $r^i(M)$ el cardinal de $\cup_h \mathcal{B}_h^i$.

PROPOSICIÓ 4.2.14. *Sigui M un $P(E)$-mòdul dreta amb una filtració μ i suposem que M té una μ-base feble μ-independent. Aleshores $M \cong (p_1P(E))^{(r^1(M))} \oplus \cdots \oplus (p_dP(E))^{(r^d(M))}$.*

DEMOSTRACIÓ. Per a cada $b \in \mathcal{B}$ denotem per $n_b \in E^0$ el vèrtex tal que $bp_{n_b} = b$. Com que tot element de M és μ-dependent amb $\mathcal{B}$ tenim que $M = \sum_{b \in \mathcal{B}} bP(E)$. A més, com que $\mathcal{B}$ és μ-independent aquesta suma és directa. Tenim també que els epimorfismes $\mathcal{L}_b \colon p_{n_b}P(E) \to bP(E)$ són isomorfismes, ja que, si $bp_{n_b}r = 0$ per la μ-independència de $\mathcal{B}$ tenim que $p_{n_b}r = 0$. Això demostra el resultat. $\square$

COROL·LARI 4.2.15. *Sigui M un $P(E)$-mòdul amb una filtració μ tal que satisfaci l'algoritme feble. Aleshores $M \cong (p_1P(E))^{(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus (p_dP(E))^{(\alpha_d)}$. En particular és projectiu.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, per la Proposició 4.2.12 tenim que M té una μ-base feble i com que μ satisfà l'algoritme feble tenim que aquesta és μ-independent. Per la Proposició 4.2.14 tenim el que volíem. $\square$

LEMA 4.2.16. *Siguin M un $P(E)$-mòdul dreta amb una filtració μ tal que M satisfà l'algoritme feble respecte a aquesta i N un submòdul de M. Aleshores N satisfà l'algoritme feble respecte a la filtració $\mu' = \mu_{|N}$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $(m_i)_{i=1,\dots,\ell} \in \prod_{i=1}^{\ell}(Np_{n_i} \setminus \{0\})$ una família μ'-dependent dreta amb $\mu'(m_1) \leqslant \cdots \leqslant \mu'(m_\ell)$. Com que μ' és la restricció de μ a N, es compleix el mateix per a μ i com que M satisfà l'algoritme feble respecte a μ, tenim que algun m_k és μ-dependent amb $m_1, \dots, m_{k-1}$. Existeix, doncs, un element $(r_i)_{i=1,\dots,k-1} \in \bigoplus_{i=1}^{k-1} p_{n_i}R$ tal que

$$\mu\left(m_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_i r_i\right) < \mu(m_k) \quad \text{i per } i = 1, \dots, k-1,\ \mu(m_i) + \nu(r_i) \leqslant \mu(m_k).$$

Com que la desigualtat anterior només conté elements de N podem substituir μ per μ' i tenim el que N satisfà l'algoritme feble respecte a μ'. $\square$

Donada una expressió del tipus $\sum_{i \in I} m_i r_i \in M$ amb $m_i \in Mp_{n_i}$ i $r_i \in p_{n_i}R$ ens referirem a $\max_i\{\mu(m_i) + \nu(r_i)\}$ com al seu *grau formal*. Així, per exemple, la condició de μ-dependència dreta d'una família $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Mp_{n_i}$ consisteix en l'existència d'un element $(r_i)_{i \in I} \in \oplus_{i \in I} p_{n_i}R$ tal que el grau de l'expressió $\sum_{i \in I} m_i r_i$ sigui menor que el seu grau formal. En el cas d'una expressió $\sum_{i \in I} m_i r_i$ amb $m_i \in M$ i $r_i \in R$ arbitraris parlarem del seu grau formal per referir-nos al grau formal de l'expressió $\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{d} (m_i p_j)(p_j r_i)$.

DEFINICIÓ 4.2.17. Siguin R un anell i M_R un R-mòdul dreta. Diem que M_R és *finitament relacionat* si existeix una successió exacta de R-mòduls dreta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

amb F lliure (de rang arbitrari) i K finitament generat.

El següent resultat és una generalització d'un Teorema de Lewin [**45**, Theorem 2]. Per a demostrar-lo usem les idees d'una demostració del Teorema de Lewin, no publicada, deguda a Warren Dicks [**27**]. Li estem molt agraïts per haver-nos facilitat la seva demostració.

TEOREMA 4.2.18. *Tot $P(E)$-mòdul dreta finitament relacionat P conté un submòdul projectiu Q tal que P/Q té K-dimensió finita.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui P un $P(E)$-mòdul dreta finitament relacionat. Com que $P(E)$ és hereditari, tenim una successió exacta de $P(E)$-mòduls dreta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} P \longrightarrow 0,$$

on N és lliure amb base $\mathcal{E}$ i M és un projectiu finitament generat que suposem contingut en N. De la Proposició 1.2.8 tenim que M és isomorf a una suma directa de còpies dels mòduls $p_iP(E)$. Per tant, existeixen $(f_1, \dots, f_m) \in \prod_{i=1}^m Np_{n_i}$ tals que $M = \bigoplus_{i=1}^m f_iP(E)$ amb $f_iP(E) \cong p_{n_i}P(E)$. Posem $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$.

Els elements de $\mathcal{F}$ s'expressen com a combinacions K-lineals d'elements de $\mathcal{E}$ multiplicats per elements de E^*. Prenem, doncs, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ subconjunt finit suficient per expressar tots els elements de $\mathcal{F}$ com a combinacions K-lineals de productes d'aquest tipus. Definim $\mu(\mathcal{E}') = 1$ i estenem μ a $\mathcal{F}$ com el grau formal determinat per μ i $\nu = \deg$. Posem $n = \max\{\mu(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$. Definim ara $\mu(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}') = n + 1$ i estenem també a tot N com al grau formal. Observem que, com que els elements de N s'expressen de manera única com combinació $P(E)$-lineal dels elements de $\mathcal{E}$, el grau formal ens dóna una filtració ben definida en N.

Per la Proposició 4.2.11 tenim que $P(E)$ satisfà l'algoritme feble respecte a ν. Vegem que N satisfà l'algoritme feble respecte a μ. Sigui $(m_i)_{i=1,\dots,\ell} \in \prod_{i=1}^{\ell}(Np_{n_i} \setminus \{0\})$ una família μ-dependent dreta amb $\mu(m_1) \leqslant \cdots \leqslant \mu(m_\ell)$. Llavors, existeix una família $(r_i)_{i=1,\dots,\ell} \in \bigoplus_{i=1}^{\ell} p_{n_i}P(E)$ tal que

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i r_i\right) < t = \max_i\{\mu(m_i) + \nu(r_i)\}. \tag{4.2.2}$$

Suprimint, potser, alguns termes podem suposar que, per a tot i, $\mu(m_i) + \nu(r_i) = t$ de manera que $\nu(r_\ell) \leqslant \cdots \leqslant \nu(r_1)$. Prenem $\gamma \in \operatorname{supp}(r_\ell)$ de longitud màxima, posem que sigui t_0.

Com que $\mathcal{E}$ és una base de N, per a tot i tenim que m_i s'expressa de manera única com una suma $\sum_{b\in\mathcal{E}} br_b^i$; a més, de $m_ip_{n_i} = m_i$ en deduïm que $r_b^ip_{n_i} = r_b^i$. Així,

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i r_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\ell}\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} br_b^i\right) r_i\right) = \mu\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} b\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i r_i\right)\right).$$

De (4.2.1) en deduïm que, per a tot i i tot b, $\nu\left(r_b^i(r_i)\delta_\gamma - (r_b^ir_i)\delta_\gamma\right) < \nu(r_b^i)$. Per tant, per a tot $b \in \mathcal{E}$ tenim

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{\ell}\left(r_b^i(r_i)\delta_\gamma - (r_b^ir_i)\delta_\gamma\right)\right) \leqslant \max_i\{\nu(r_b^i(r_i)\delta_\gamma - (r_b^ir_i)\delta_\gamma)\} < \max_i\{\nu(r_b^i)\}.$$

Usant ara aquesta desigualtat obtenim

$$\mu\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} b\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i r_i\right)\delta_\gamma - \sum_{b\in\mathcal{E}} b\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i(r_i)\delta_\gamma\right)\right) = \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} b\left(\sum_{i=1}^{\ell}\left(r_b^i(r_i)\delta_\gamma - \left(r_b^i r_i\right)\delta_\gamma\right)\right)\right)\\
&= \max_{b\in\mathcal{E}}\left\{\mu(b) + \nu\left(\sum_{i=1}^{\ell}\left(r_b^i(r_i)\delta_\gamma - \left(r_b^i r_i\right)\delta_\gamma\right)\right)\right\}\\
&< \max_{b\in\mathcal{E}}\left\{\mu(b) + \max_i\{\nu(r_b^i)\}\right\}\\
&= \max_{b\in\mathcal{E}}\left\{\max_i\{\mu(br_b^i)\}\right\} = \max_i\left\{\max_{b\in\mathcal{E}}\{\mu(br_b^i)\}\right\}\\
&= \max_i\left\{\mu\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} br_b^i\right)\right\} = \max_i\{\mu(m_i)\} = \mu(m_\ell).
\end{aligned}$$

D'altra banda, tenim

$$\begin{aligned}
\mu\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} b\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i r_i\right)\delta_\gamma\right) &= \max_{b\in\mathcal{E}}\left\{\mu(b) + \nu\left(\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i r_i\right)\delta_\gamma\right)\right\}\\
&\leqslant \max_{b\in\mathcal{E}}\left\{\mu(b) + \nu\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i r_i\right)\right\} - t_0\\
&= \mu\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i r_i\right) - t_0\\
&< t - t_0 = \mu(m_\ell).
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Per tant, de (4.2.3) i (4.2.4) en deduïm que

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i(r_i)\delta_\gamma\right) = \mu\left(\sum_{b\in\mathcal{E}} b\left(\sum_{i=1}^{\ell} r_b^i(r_i)\delta_\gamma\right)\right) < \mu(m_\ell)$$

i, com que $(r_\ell)\delta_\gamma \in p_{n_\ell}K^\times$ tenim que m_ℓ és μ-dependent amb $m_1, \ldots, m_{\ell-1}$, com volíem veure.

A més, pel Lema 4.2.16, M amb la filtració μ' definida per la restricció de μ també compleix l'algoritme feble. Per la Proposició 4.2.12 existeix una μ'-base feble $\mathcal{F}'$ de M i, com que M és finitament generat, per la Proposició 4.2.14 $\mathcal{F}'$ tindrà una quantitat finita d'elements. Com que $\mathcal{F}$ és un conjunt generador de M tenim que tot element de M és μ'-dependent de $\mathcal{F}$ i com que $\mathcal{F} \subseteq M_n$ tenim, de fet, que tot element de M és μ'-dependent de M_n. De la demostració de la Proposició 4.2.12 en deduïm, doncs, que $\mathcal{F}' \subseteq M_n$. Per l'algoritme feble els elements de $\mathcal{F}'$ són μ'-independents i, per tant, μ-independents. Per a cada $f \in \mathcal{F}'$ denotem per $n_f \in E^0$ el vèrtex tal que $fp_{n_f} = f$.

Identifiquem P amb N/M i considerem la filtració μ'' determinada per $P_h = (N_h + M)/M$. Denotarem un element de P com a una classe $\overline{n}$ per a $n \in N$. Considerem el K^d-mòdul $P'_{n+1} := P_n$; per a cada i tenim que $(P_{n+1}/P'_{n+1})p_i$ és un K-espai vectorial. Prenem $\overline{\mathcal{B}}^i_{n+1} \subseteq P_{n+1}p_i$ un conjunt de representants d'una K-base de $(P_{n+1}/P'_{n+1})p_i$ i posem $\overline{\mathcal{B}}_{n+1} = \cup_{i=1}^d \overline{\mathcal{B}}^i_{n+1}$. Ara, per a $t > n+1$ definim inductivament els K^d-mòduls P'_t i els conjunts $\overline{\mathcal{B}}_t$ de la manera següent: P'_t ve donat pels elements $p \in P_t$ tals que, o bé $\mu''(p) < t$ o bé p és μ''-dependent amb $\cup_{t>h>n}\overline{\mathcal{B}}_h$ i $\overline{\mathcal{B}}_t = \cup_{i=1}^d \overline{\mathcal{B}}^i_t$ on $\overline{\mathcal{B}}^i_t \subseteq P_t p_i$ és un conjunt de representants d'una K-base de $(P_t/P'_t)p_i$. Per a tot $i \in E^0$, $t > n$ i tot $\overline{b} \in \overline{\mathcal{B}}^i_t$ escollim un representant $b \in N_t p_i$ tal que $\varphi(b) = \overline{b}$. Denotem per $\mathcal{B}$ el conjunt de tots aquests elements i per $n_b \in E^0$ el vèrtex tal que $bp_{n_b} = b$ per a cada $b \in \mathcal{B}$.

Ara, la suma $Q = \sum_{b\in\mathcal{B}} \varphi(b)P(E) \subseteq P$ és directa. En efecte, suposem que no. Aleshores existeixen $r_b \in p_{n_b}P(E)$, no tots nuls, tals que $\sum_{b\in\mathcal{B}} br_b \in M$, és a dir, tenim que $\sum_{b\in\mathcal{B}} br_b = \sum_{f\in\mathcal{F}'} fr_f$ per a certs $r_f \in p_{n_f}P(E)$. Ara, com que $\mathcal{F}' \subseteq N_n$, $\mathcal{B} \cap N_n = \emptyset$ i $\mathcal{F}'$ és μ-independent tenim que, per l'algoritme feble, existeix un $b' \in \mathcal{B}$ que és μ-dependent amb $(\mathcal{B} \setminus \{b'\}) \cup \mathcal{F}'$. És a dir, existeixen $r'_b \in p_{n_b}P(E)$ zero quasi per a tot i $r'_f \in p_{n_f}P(E)$ tals que

$$\mu\left(b' - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{b'\}} br'_b - \sum_{f\in\mathcal{F}'} fr'_f\right) < \mu(b')$$

amb $\mu(b) + \nu(r'_b) \leqslant \mu(b')$ i $\mu(f) + \nu(r'_f) \leqslant \mu(b')$, és a dir,

$$\mu''\left(\overline{b' - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{b'\}} br'_b}\right) < \mu''(\overline{b'}) \quad \text{amb} \quad \mu''(\overline{b}) + \nu(r'_b) \leqslant \mu''(\overline{b'}).$$

Per tant, $\overline{\mathcal{B}}_{\mu''(\overline{b'})}$ és K-linealment dependent mòdul $P'_{\mu''(\overline{b'})}$, cosa que ens porta a contradicció. Pel mateix argument veiem que per a tot $b \in \mathcal{B}$ els epimorfismes $\mathcal{L}_{\varphi(b)} \colon p_{n_b}P(E) \to \varphi(b)P(E)$ són isomorfismes, per tant, Q és un submòdul projectiu de P. Com que N_n és de dimensió finita sobre K i $Q + \varphi(N_n) = P$ veiem que P/Q té K-dimensió finita. $\square$

Observació 4.2.19. Observem que si en el Teorema 4.2.18 P és finitament presentat aleshores Q és finitament generat. En efecte, tenim la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \longrightarrow P/Q \longrightarrow 0. \tag{4.2.5}$$

Com que P/Q és un $P(E)$-mòdul de K-dimensió finita és clar que és un K^d-mòdul finitament presentat i per la Proposició 4.1.4 tenim que P/Q és finitament presentat com a $P(E)$-mòdul. Observem ara que la categoria del $P(E)$-mòduls dreta finitament presentats, $\mathbf{fp}(P(E))$ és abeliana. De fet això es compleix per a tot anell S semihereditari (dreta). En efecte, $\mathbf{fp}(S)$ és una subcategoria plena de $\mathbf{Mod}\text{-}S$ i per ser S semihereditari tenim que el nucli, el conucli i la imatge d'un morfisme entre mòduls finitament presentats és també finitament presentat. En particular, de la successió exacta (4.2.5) en deduïm que el mòdul projectiu Q és finitament generat.

4.3. L'àlgebra regular d'un buirac com a àlgebra de quocients de $P(\overline{E})$

En aquesta secció veurem, d'una banda, que l'àlgebra regular $Q(E)$ d'un buirac és la localització perfecta dreta maximal de l'àlgebra de camins $P(\overline{E})$. De l'altra, donarem una nova construcció de $Q(E)$ com a localització universal de $P(\overline{E})$ que estén una construcció de Schofield al nostre cas (vegeu [**9**, Section 6]). Aquesta construcció ens permetrà, més endavant, completar el càlcul de $K_1(Q(E))$ (vegeu Teorema 4.5.9).

Sigui E un buirac (finit). Denotem per $X \subseteq E^0$ el conjunt de tots els vèrtexs que no són fonts. Recordem que usem la notació r_{E^*}, s_{E^*} per a l'extensió de les aplicacions d'incidència r_E, s_E sobre el conjunt de tots els camins, és a dir, $r_{E^*}, s_{E^*} \colon E^* \to E^0$.

Proposició 4.3.1. *$L(E)$ és llis com a $P(\overline{E})$-mòdul esquerra.*

Demostració. Posem $R = P(\overline{E})$ i $L = L(E)$. Per a veure que ${}_RL$ és llis cal veure que $\mathrm{Tor}_1^R(M, L) = 0$ per a tot R-mòdul dreta M. Per la Proposició 2.2.5 tenim que tot element de $S = (P(E))\left\langle \overline{E}; \tau, \delta \right\rangle$ s'escriu com una suma finita $\sum_{\alpha \in E^*} \overline{\alpha} r_\alpha$, on $r_\alpha \in p_{s(\alpha)} P(E)$. D'altra banda, tot element de $P(E)$ s'expressa com una suma finita $\sum_{\beta \in E^*} \beta \lambda_\beta$ amb $\lambda_\beta \in K$. Per tant, tenim

$$S = \bigoplus_{\alpha \in E^*} \overline{\alpha} P(E) = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \in E^* \\ s(\alpha) = s(\beta)}} K \overline{\alpha} \beta = \bigoplus_{\beta \in E^*} \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in E^* \\ s(\alpha) = s(\beta)}} K \overline{\alpha} \right) \beta = \bigoplus_{\beta \in E^*} R\beta, \tag{4.3.1}$$

és una suma directa de R-mòduls esquerra cíclics projectius, per tant, ${}_RS$ és projectiu. De la Proposició 2.2.15 tenim la següent successió exacta curta de R-mòduls esquerra:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow S \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{4.3.2}$$

on $I = \sum_{i \in X} S q_i S$. A més, de la demostració de (iii) en el Lema 2.2.10 en deduïm que

$$I = \bigoplus_{i \in X} \bigoplus_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} \overline{\gamma} q_i P(E)$$

i fent com en (4.3.1) obtenim que

$$I = \bigoplus_{i \in X} \bigoplus_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} R q_i \gamma,$$

és un R-mòdul esquerra projectiu. Per tant, la successió (4.3.2) ens dóna una resolució projectiva de L com a R-mòdul esquerra. Ara, per a veure que $\mathrm{Tor}_1^R(M, L) = 0$ per a un R-mòdul dreta M donat en tenim prou de veure que l'homomorfisme induït

$$\varphi \colon \bigoplus_{i \in X} \bigoplus_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} M \otimes_R R q_i \gamma \cong M \otimes_R I \longrightarrow M \otimes_R S \cong \bigoplus_{\gamma \in E^*} M \otimes_R R\gamma$$

és injectiu. Observem que

$$\varphi \left(\sum_{i \in X} \sum_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} m_\gamma \otimes q_i \gamma \right) = \sum_{i \in X} \sum_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} \left(m_\gamma \otimes \gamma - \sum_{e \in r^{-1}(i)} m_\gamma \overline{e} \otimes e\gamma \right)$$

Donat $x = \sum_{i \in X} \sum_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} m_\gamma \otimes q_i \gamma \in \bigoplus_{i \in X} \bigoplus_{\{\gamma \in E^* | s(\gamma) = i\}} M \otimes_R R q_i \gamma$ diferent de zero, prenem γ_0 un camí de longitud mínima tal que $m_{\gamma_0} p_i \neq 0$, on $i = s(\gamma_0)$.

De l'isomorfisme $M \otimes_R R\gamma_0 \cong Mp_i$ en deduïm que $m_{\gamma_0} \otimes \gamma_0 \neq 0$. Ara, tenim que aquest terme, que apareix en $\varphi(x)$ no es pot cancel·lar amb ningú, ja que per als termes no nuls de la forma $m_\gamma \overline{e} \otimes e\gamma$ que apareixen en el sumatori, la longitud de $e\gamma$ és estrictament més gran que la longitud de γ_0 i la suma $\bigoplus_{\gamma \in E^*} M \otimes_R R\gamma$ és directa. D'aquí en deduïm que φ és injectiu i, per tant, $\mathrm{Tor}_1^R(M, L) = 0$, com volíem. □

DEFINICIÓ 4.3.2. Si $f\colon R \to S$ un epimorfisme d'anells (en el sentit categorial del terme) tal que ${}_RS$ és llis com a R-mòdul esquerra diem que S és una *localització perfecta dreta* de R.

En vista del resultat anterior tenim:

PROPOSICIÓ 4.3.3. *L'àlgebra $L(E)$ és una localització perfecta dreta de $P(\overline{E})$.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, per la Observació 2.2.18 sabem que la inclusió $P(\overline{E}) \hookrightarrow L(E)$ és un morfisme Σ_1'-inversor universal. En particular és un epimorfisme d'anells per la Observació 1.4.7. Ara, per la Proposició 4.3.1 tenim que ${}_{P(\overline{E})}L(E)$ és llis com a mòdul per l'esquerra. □

LEMA 4.3.4. *$Q(E)$ és llis com a $P(\overline{E})$-mòdul esquerra.*

DEMOSTRACIÓ. Vegem primer que $S = P_{\mathrm{rat}}(E) \left\langle \overline{E}; \tau, \delta \right\rangle$ és projectiu com a mòdul esquerra sobre $R = P(\overline{E})$. Considerem $\{b_\beta\}_{\beta \in B}$ una K-base de $P_{\mathrm{rat}}(E)$ tal que per a tot $\beta \in B$ existeix $i_\beta \in \{1, \ldots, d\}$ complint que $p_{i_\beta} b_\beta = b_\beta$. Per tant, tot element de S es pot escriure de manera única com una suma $\sum_{\alpha \in s_{E^*}^{-1}(i_\beta), \beta \in B} \lambda_{\alpha,\beta} \overline{\alpha} b_\beta$. Tenim que

$$S = \bigoplus_{\alpha \in E^*} \overline{\alpha} P_{\mathrm{rat}}(E) = \bigoplus_{\alpha,\beta} K\overline{\alpha} b_\beta = \bigoplus_{\beta \in B} \left(\bigoplus_{\alpha \in s_{E^*}^{-1}(i_\beta)} K\overline{\alpha} \right) b_\beta = \bigoplus_{\beta \in B} Rb_\beta.$$

Com que $Rb_\beta \cong Rp_{i_\beta}$ deduïm que ${}_RS$ és projectiu. Com que S és regular pel Teorema 2.2.24, ${}_ST$ és llis [**32**, Corollary 1.13] on $T = Q(E)$ per definició. En conseqüència, ${}_RQ(E)$ també és llis. □

Com a conseqüència d'aquest Lema, l'àlgebra regular $Q(E)$ és (com $L(E)$) una localització perfecta dreta de $P(\overline{E})$. De fet és la seva localització perfecta maximal.

DEFINICIÓ 4.3.5. Sigui R un anell. La *localització perfecta dreta maximal* de R és un anell $Q^r_{\mathrm{tot}}(R)$ i un morfisme $\varphi\colon R \to Q^r_{\mathrm{tot}}(R)$ tals que:

(i) φ és monomorfisme, epimorfisme i $Q^r_{\mathrm{tot}}(R)$ és llis com a R-mòdul esquerra.
(ii) Per a tot morfisme d'anells $f\colon R \to S$ tal que f sigui monomorfisme, epimorfisme i ${}_RS$ sigui llis existeix un únic morfisme $\overline{f}\colon S \to Q^r_{\mathrm{tot}}(R)$ tal que $\overline{f} f = \varphi$. ($\overline{f}$ és, necessàriament, un monomorfisme).

TEOREMA 4.3.6. *$Q(E)$ és la localització perfecta maximal dreta de $P(\overline{E})$.*

DEMOSTRACIÓ. En efecte, sabem que la inclusió $P(\overline{E}) \hookrightarrow L(E)$ és un morfisme Σ_1'-inversor universal per la Observació 2.2.18 i la inclusió $L(E) \hookrightarrow Q(E)$ és un morfisme Σ-inversor universal pel Teorema 2.4.2 (podem pensar que aquests morfismes són inclusions per la Observació 2.2.16). En particular són epimorfismes d'anells (Observació 1.4.7) i, per tant, la inclusió $P(\overline{E}) \hookrightarrow Q(E)$ també ho és. Ara, pel Lema 4.3.4,

${}_{P(\overline{E})}Q(E)$ és llis com a mòdul per l'esquerra i, per tant, $Q(E)$ és una localització perfecta dreta de $P(\overline{E})$. A més, pel Teorema 2.4.2, $Q(E)$ és un anell regular de von Neumann i de [**68**, Proposition 1.4] tenim que $Q(E)$ no té extensions epimòrfiques pròpies. Per tant és la localització perfecta dreta maximal de $P(\overline{E})$. $\square$

Observació 4.3.7. De fet, ${}_{L(E)}Q(E)$ també és llis (i, pertant, $Q(E)$ és la localització perfecta maximal dreta de $L(E)$), ja que la inclusió $L(E) \hookrightarrow Q(E)$ és un epimorfisme d'anells i ${}_{P(\overline{E})}Q(E)$ és llis com a mòdul per l'esquerra.

A continuació veurem que $Q(E)$ és, també, una localització universal de $P(\overline{E})$ respecte d'una família de morfismes entre mòduls projectius finitament generats ben diferent de la considerada en el Capítol 2. Aquesta construcció és una generalització d'una de Schofield (*cf.* [**9**, pàg. 87–89]) i és un dels ingredients clau per al càlcul de $K_1(Q(E))$ que completarem més endavant, en el Teorema 4.5.9. Posem $R = P(\overline{E})$ i considerem **proj-**R la subcategoria plena de **Mod-**R donada pels R-mòduls projectius finitament generats. Denotem per $\Phi = \mathrm{Mor}(\mathbf{proj}\text{-}R)$ la col·lecció de tots els homomorfismes entre elements de **proj-**R. Sigui Υ la col·lecció de tots els monomorfismes $f \in \Phi$ tals que $\dim_K(\operatorname{coker} f) < \infty$ i $\operatorname{coker} f$ no té submòduls projectius no nuls.

Proposició 4.3.8. *Amb les notacions anteriors tenim el següent:*

(i) Υ *és tancat per composicions: Si $f, g \in \Upsilon$ i fg està definida aleshores $fg \in \Upsilon$.*
(ii) Υ *satisfà la condició d'Ore dreta relativa a Φ: Si $f \in \Upsilon$ i $g \in \Phi$ amb el mateix codomini, existeixen $f' \in \Upsilon$ i $g' \in \Phi$ tal que $gf' = fg'$ (amb condicions adequades sobre dominis i codominis).*
(iii) *Tot $f \in \Upsilon$ és no-divisor de zero en Φ: Si $g \in \Phi$ i la composició fg està definida (respectivament, gf està definida), aleshores $fg = 0$ (respectivament $gf = 0$) implica $g = 0$.*

Demostració. (i) Donats $f\colon P' \to P''$ i $g\colon P \to P'$ de Υ és clar que fg és monomorfisme. Tenim la següent successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \frac{fP'}{fgP} \longrightarrow \frac{P''}{fgP} \xrightarrow{\pi} \frac{P''}{fP'} \longrightarrow 0$$

i, com que $fP'/fgP \cong P'/gP = \operatorname{coker} g$, en deduïm que $\dim_K(\operatorname{coker} fg) < \infty$. A més, si $Q \subseteq \frac{P''}{fgP}$ és un submòdul projectiu aleshores $Q \cap (fP'/fgP) = 0$, ja que és un R-mòdul projectiu i $g \in \Upsilon$. Per tant, $\pi(Q) \cong Q$ és un R-mòdul projectiu i, com que $f \in \Upsilon$, veiem que $Q = 0$. Hem vist que $fg \in \Upsilon$.

(ii) Siguin $f\colon X \to Y$ de Υ i $g\colon Z \to Y$ de Φ. Considerem el *pull-back*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f'} & Z \\ {\scriptstyle g'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Tenim que $gf' = fg'$. En tenim prou veient que P és un R-mòdul projectiu i que $f' \in \Upsilon$. Com que f és monomorfisme, f' també ho és (per exemple per [**62**, Exercise 2.47]). Com que R és hereditari (dreta), P és projectiu. Per la definició de *pull-back* tenim que $f'(P) = g^{-1}(f(X))$. Per tant, $\operatorname{coker} f' = Z/f'(P)$ s'aplica injectivament en $\operatorname{coker} f = Y/f(X)$ i com que $f \in \Upsilon$ en deduïm que f' també.

(iii) Siguin $f\colon P \to Q$ en Υ i $g \in \Phi$. Com que f és monomorfisme és clar que si $fg = 0$ aleshores $g = 0$. Suposem que $gf = 0$. Pels Teoremes d'isomorfia tenim que $(Q/\operatorname{im} f)/(\ker g/\operatorname{im} f) \cong Q/\ker g \cong \operatorname{im} g$ i aquest és un R-mòdul projectiu (ja que el codomini de g ho és). Per tant, la successió següent és escindida

$$0 \longrightarrow \frac{\ker g}{\operatorname{im} f} \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow \frac{Q}{\ker g} \longrightarrow 0.$$

Com que $f \in \Upsilon$ en deduïm que $\ker g = Q$ i $g = 0$. □

Per la proposició anterior tenim que Υ és un sistema multiplicatiu dreta en **proj-**R, ja que la condició (iii) en la Proposició implica la condició (iii) en la Definició 1.8.1. Per tant, té sentit considerar la categoria localitzada $\mathcal{L} = (\textbf{proj-}R)_\Upsilon$ i, a més, aquesta és una categoria additiva (vegeu Teorema 1.8.3). Podem, doncs, considerar l'anell $Q = \operatorname{End}_{\mathcal{L}}(R)$, on $\operatorname{End}_{\mathcal{L}}(R)$ denota el conjunt d'endomorfismes de l'objecte R en la categoria $\mathcal{L}$. Com s'ha comentat en la Secció 1.8 el Q així definit coincideix amb la localització universal R_Υ.

LEMA 4.3.9. *Amb les notacions anteriors tenim que la localització universal $Q = R_\Upsilon$ és llis com a R-mòdul esquerra.*

DEMOSTRACIÓ. Denotem per $\iota\colon R \to Q$ el morfisme Υ-inversor universal. Vegem que ι és injectiu. Per [**48**, Corollary] tenim que $\iota(r) = 0$ si i només si existeixen $\gamma_1, \gamma_2, \mu, \nu \in \Upsilon$ i $f, g \in \Phi$ amb condicions adequades sobre els dominis i codominis complint

$$\left(\begin{array}{cc|c} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & g \\ \hline f & 0 & r \end{array}\right) = \left(\frac{\mu}{u}\right) \cdot \left(\ \nu \mid v\ \right). \tag{4.3.3}$$

Per (ii) de la Proposició 4.3.8 existeixen $\nu' \in \Upsilon$ i $v' \in \Phi$ tals que $v\nu' = \nu v'$. Escrivim $v' = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix}^t$, la descomposició en blocs corresponent a la del codomini de ν en l'equació (4.3.3). Ara, tenim que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g\nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \nu' = \mu v \nu' = \mu \nu v' = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$$

i, com que $\gamma_1 v_1' = 0$, de l'apartat (iii) de la Proposició 4.3.8 en deduïm que $v_1' = 0$. Tenim, doncs,

$$r\nu' = uv\nu' = u\nu v' = \begin{pmatrix} f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2' \end{pmatrix} = 0.$$

Novament per la Proposició 4.3.8 tenim que $r = 0$ i, per tant, ι és injectiu.

Ara, per [**68**, Theorem XI.2.1] n'hi ha prou de veure que per a tot $q \in Q$ existeixen $r_1, \dots, r_n \in R$ i $q_1, \dots, q_n \in Q$ tals que, per a tot i, $q\iota(r_i) \in \iota(R)$ i $\sum_i \iota(r_i) q_i = 1$. Pel criteri de Malcolmson (Teorema 1.4.3) tenim que tot element de Q és de la forma $\iota(f)\iota(\lambda)^{-1}\iota(g)$ amb $f, g \in \Phi$ i $\lambda \in \Upsilon$. De l'apartat (ii) de la Proposició 4.3.8 n'obtenim que existeixen $\gamma \in \Upsilon$ i $h \in \Phi$ complint $g\gamma = \lambda h$, de manera que

$$\iota(f)\iota(\lambda)^{-1}\iota(g) = \iota(f)\iota(\lambda)^{-1}\iota(g)\iota(\gamma)\iota(\gamma)^{-1} = \iota(f)\iota(\lambda)^{-1}\iota(\lambda)\iota(h)\iota(\gamma)^{-1} = \iota(fh)\iota(\gamma)^{-1}.$$

Prenem $\mathcal{P}$ la subcategoria (plena) petita de **proj-**R donada pels subsumands directes de mòduls de la forma R^n. Per la definició de $\mathcal{P}$ tenim, doncs, que per a tot $q \in Q$ existeix una matriu idempotent $e \in M_n(R)$ i homomorfismes $f : eR^n \to R \in \Phi$ i $\lambda\colon eR^n \to R \in \Upsilon$ de manera que $q = \iota(f)\iota(\lambda)^{-1}$. Ara, existeixen $r_1, \dots, r_n \in R$ i $q_1, \dots, q_n \in Q$ de manera que els morfismes λ i $\iota(\lambda)^{-1}$ vénen donats, respectivament, pel producte per l'esquerra per la fila $(r_1, \dots, r_n)$ i la columna $(q_1, \dots, q_n)^t$. Per tant, per a tot i, tenim que $q\iota(r_i) \in \iota(R)$ i $\sum_i \iota(r_i)q_i = 1$ com volíem. □

Proposició 4.3.10. *Amb les notacions anteriors, la localització universal $Q = R_\Upsilon$ és regular de von Neumann. A més, tot Q-mòdul dreta projectiu finitament generat és induït per un R-mòdul dreta projectiu finitament generat.*

Demostració. Sigui $M \in \mathbf{fp}(R)$. Pel Corol·lari 1.4.6 tenim que tot Q-mòdul finitament presentat és isomorf a $M \otimes_R Q$ per a algun $M \in \mathbf{fp}(R)$. Pel Teorema 4.2.18 (junt amb la Observació 4.2.19) existeix un submòdul projectiu $P' \subseteq M$ finitament generat i de codimensió finita. Tenim que M/P' és un R-mòdul finitament presentat. Observem que si M/P' té algun submòdul projectiu no nul P/P' aleshores $P \subseteq M$ és un submòdul projectiu de codimensió finita. Com que M/P' té K-dimensió finita podem prendre P maximal entre els submòduls projectius de M contenint P', de manera que M/P és un R-mòdul finitament presentat de K-dimensió finita i sense submòduls projectius no nuls.

Tenim una resolució per R-mòduls projectius finitament generats

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{g} P_0 \longrightarrow \frac{M}{P} \longrightarrow 0,$$

de manera que $g \in \Upsilon$. Per tant, $(M/P) \otimes_R Q = 0$. Pel Lema 4.3.9 obtenim que la següent successió és exacta

$$0 \longrightarrow P \otimes_R Q \longrightarrow M \otimes_R Q \longrightarrow \left(\frac{M}{P}\right) \otimes_R Q \longrightarrow 0.$$

Com que $(M/P) \otimes_R Q = 0$ en deduïm que $M \otimes_R Q$ és un Q-mòdul projectiu isomorf a un mòdul induït per un R-mòdul projectiu i, per tant, tot Q-mòdul finitament presentat és d'aquesta forma.

Ara, sigui $x \in Q$. Considerem l'homomorfisme de Q-mòduls dreta $f\colon Q \to Q$ donat per $f(r) = xr$. Com que $\operatorname{coker} f = Q/xQ$ és finitament presentat, de l'anterior en deduïm que és projectiu. Per tant, $\operatorname{im} f = xQ$ és un summand directe de Q, cosa que demostra que Q és regular. □

Proposició 4.3.11. *Amb les notacions anteriors, tot morfisme de Υ és invertible sobre $Q(E)$. Per tant, existeix un únic homomorfisme de K-àlgebres $\psi\colon Q \to Q(E)$ que és la identitat sobre R.*

Demostració. Considerem una successió exacta curta

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{g} P' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

amb $g \in \Upsilon$. Pel Lema 4.3.4 tenim que ${}_RQ(E)$ és llis i, per tant, la següent successió és exacta

$$0 \longrightarrow P \otimes_R Q(E) \xrightarrow{g} P' \otimes_R Q(E) \longrightarrow M \otimes_R Q(E) \longrightarrow 0. \tag{4.3.4}$$

Per a demostrar el resultat en tenim prou veient que $M \otimes_R Q(E) = 0$. Observem primer que si $i \in E^0$ és una font a E aleshores $p_i \in \operatorname{ann}_R(M)$. En efecte, prenem $m \in M$. Si $mp_i \neq 0$ aleshores $mp_iR \subseteq M$, però $mp_iR = mp_iK \cong p_iR$ és projectiu. Com que $M = \operatorname{coker} g$ i $g \in \Upsilon$, per definició de Υ tenim que M no té submòduls projectius no nuls, cosa que ens porta a contradicció.

Considerem el conjunt de vèrtex $F = \{i \in E^0 \mid |r_{E^*}^{-1}(i)| < \infty\}$. Vegem ara que, per a tot $m \in M$, si $i \in F$ aleshores $Rp_i \subseteq \operatorname{r.ann}_R(m \otimes 1)$. Ho veurem per inducció sobre $\ell = \max\{|\alpha| \mid \alpha \in r_{E^*}^{-1}(i)\}$. Si $\ell = 0$ tenim que i és una font i es dedueix de l'anterior. Suposem-ho cert per a ℓ i vegem-ho per a $\ell + 1$. Considerem el conjunt d'arestes $\overline{s}^{-1}(i) = \{\overline{e}_1^i, \dots, \overline{e}_{n_i}^i\}$. Per als vèrtexs $\overline{r}(\overline{e}_j^i)$ podem aplicar la hipòtesi d'inducció i n'obtenim que, per a tot $m \in M$, $R\overline{r}(\overline{e}_j^i) \subseteq \operatorname{r.ann}_R(m \otimes 1)$. Tenim que $(m \otimes 1)\overline{e}_j^i = 0$ i per les relacions de l'àlgebra de Leavitt veiem que $0 = \sum_{j=1}^{n_i} (m \otimes 1)\overline{e}_j^i e_j^i = (m \otimes 1)p_i$. Per tant $p_i \in \operatorname{r.ann}_R(m \otimes 1)$ i com que això és cert per a tot $m \in M$ tenim que $Rp_i \subseteq \operatorname{r.ann}_R(m \otimes 1)$, com volíem.

Suposem ara que $M \otimes Q(E) \neq 0$. Podem, doncs, prendre un element no nul $m \otimes 1 \in M \otimes Q(E)$. Com que M té K-dimensió finita $(m \otimes 1)R$ també. Del fet que $Q(E)$ és regular n'obtenim que la successió (4.3.4) és escindida (per [**32**, Theorem 1.11]) i, per tant, $M \otimes_R Q(E)$ és projectiu. En particular, existeix un monomorfisme $M \otimes_R Q(E) \to Q(E)^n$ i projectant sobre la component adequada obtenim un morfisme $f \colon M \otimes_R Q(E) \to Q(E)$ tal que $f(m \otimes 1) \neq 0$. De l'anterior tenim que, per a tot $i \in F$, $Rp_i \subseteq \operatorname{r.ann}_R(f(m \otimes 1))$. En tenim prou, doncs, veient que si $t \in Q(E)$ és no nul complint aquesta condició aleshores tR té K-dimensió infinita.

Vegem-ho. Posem $S = P_{\mathrm{rat}}(E)\left\langle \overline{E}; \tau, \delta \right\rangle$. Pel Teorema 2.2.24 tenim que $Q(E) = S/I$. Sigui, doncs, $s \in S \setminus I$ tal que, per a tot $i \in F$, $sRp_i \subseteq I$ i posem $t = \tilde{s}$, la classe de s en $Q(E)$. Sabem que

$$s = \sum_{\alpha \in E^*} \overline{\alpha} r_\alpha \text{ amb } r_\alpha \in P_{\mathrm{rat}}(E). \tag{4.3.5}$$

Ara, existeix un $\alpha \in E^*$ tal que $\alpha s \in P_{\mathrm{rat}}(E) \setminus \{0\}$. En efecte, si per a tot $e \in E^1$ tenim que $es = 0$ aleshores $s = \left(1 - \sum_{e \in E^1} \overline{e} e\right) s \in I$ i obtenim el resultat per inducció sobre el grau de l'expressió (4.3.5). Com que $P_{\mathrm{rat}}(E) \cap I = \{0\}$ tenim que $\alpha s \in S \setminus I$. Sabem que existeix $\gamma \in E^*$ tal que $\alpha s \overline{\gamma} \neq 0$ té ordre zero. Podem suposar, multiplicant si cal s per un element de $K^\times$, que $\alpha s \overline{\gamma} = p_i - r$ amb $r \in P_{\mathrm{rat}}(E)p_i$ d'ordre positiu. Observem que $i = s(\gamma) \notin F$ i posem $p = 1 + r + r^2 + \cdots$ de manera que $p\alpha s \overline{\gamma} = p_i$. Ara, el conjunt $s_{\overline{E}^*}^{-1}(i) = \{\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \dots\}$ és infinit. Tenim que els elements de $s_{\overline{E}^*}^{-1}(i)$ són K-linealment independents mòdul I, ja que $R \cap I = \{0\}$. És a dir, els elements $p\alpha s \overline{\gamma}\overline{\alpha}_0, p\alpha s \overline{\gamma}\overline{\alpha}_1, \dots$ són linealment independents mòdul I i, per tant, els $s\overline{\gamma}\overline{\alpha}_0, s\overline{\gamma}\overline{\alpha}_1, \dots$ també ho són. Deduïm que tR té K-dimensió infinita.

En conseqüència, tots els morfismes en Υ indueixen isomorfismes en $Q(E)$ i per la propietat universal de la localització obtenim un homomorfisme de K-àlgebres $\psi \colon Q \to Q(E)$ que és la identitat sobre R. $\square$

Teorema 4.3.12. *Amb les notacions anteriors, existeix un únic isomorfisme de K-àlgebres, $\psi \colon Q = R_\Upsilon \to Q(E)$, que és la identitat sobre R.*

Demostració. Per la Proposició 4.3.11 existeix un únic homomorfisme de K-àlgebres $\psi\colon Q \to Q(E)$ que és la identitat sobre R. De la Proposició 4.3.10 n'obtenim que l'homomorfisme de monoides $\mathcal{V}(R) \to \mathcal{V}(Q)$ induït per la localització universal és exhaustiu i de la Proposició 1.2.8 tenim que $\mathcal{V}(R)$ és el monoide abelià lliure generat per $[p_1R], \dots, [p_dR]$. Per tant, $\mathcal{V}(Q)$ està generat per $[p_1Q], \dots, [p_dQ]$ i, junt amb la Proposició 3.5.1, en deduïm que tot ideal no nul de Q conté algun dels idempotents $p_1, \dots, p_d$. Com que el morfisme ψ és la identitat sobre R veiem que és injectiu.

Considerem $i \in E^0 \setminus F(E)$ un vèrtex que no sigui una font i enumerem les arestes que arriben a aquest $r^{-1}(i) = \{e_1^i, \dots, e_{n_i}^i\}$. Tenim que ψ envia la fila $(\overline{e}_1^i, \dots, \overline{e}_{n_i}^i)$ sobre Q a ella mateixa sobre $Q(E)$ i aquesta defineix un isomorfisme

$$\bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)} Q(E) \to p_i Q(E)$$

amb inversa donada per la columna $(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)^t$. La fila $(\overline{e}_1^i, \dots, \overline{e}_{n_i}^i)$ és invertible sobre Q, per tant, té una inversa donada per una columna

$$(x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)^t \colon p_i Q \to \bigoplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)} Q$$

complint $x_j^i p_i = x_j^i = p_{s(e_j^i)} x_j^i$ per a tot i, j. Ara, per a cada $e \in E^1$ existeixen i, j únics (amb $i \in E^0 \setminus F(E)$ i $1 \leqslant j \leqslant n_i$) tals que $e = e_j^i$. Posem $X = \{x_j^i \mid i \in E^0 \setminus F(E), j = 1, \dots, n_i\}$ i considerem l'aplicació $f\colon E^1 \to X$ definida per $e_j^i \mapsto x_j^i$. Considerem $M = \oplus_{e \in E^1} Ke \subseteq P(E)$ el K^d-bimòdul definit en la Secció 1.2. Com que $p_{s(e_j^i)} x_j^i = x_j^i = x_j^i p_{r(e_j^i)}$ tenim que f estén a un morfisme de K^d-bimòduls $f'\colon M \to Q$. Per la Proposició 1.2.4 sabem que $P(E) \cong T_{K^d}(M)$, un anell tensorial, i per la propietat universal de l'anell tensorial (Lema 1.2.1) tenim que existeix un únic morfisme de K^d-anells $\varphi\colon P(E) \to Q$ estenent f'. Observem que $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_{P(E)}$. Sigui Σ el conjunt de matrius amb entrades en $P(E)$ de la forma $A_0 + B$ on A_0 és una matriu invertible sobre K^d i B té ordre positiu (observem que és el mateix Σ definit al final de la Secció 2.1). Ara tenim que φ és un morfisme Σ-inversor. En efecte, si $A \in \Sigma$ aleshores $A = \psi(\varphi(A))$ és invertible a $P_{\mathrm{rat}}(E) \subseteq Q(E)$ (pel Corol·lari 2.1.27). Per tant, $\varphi(A)$ és no divisor de zero ja que ψ és un morfisme injectiu. Com que Q és regular de von Neumann (per la Proposició 4.3.10) tenim que $\varphi(A)$ és invertible a Q. Hem vist, doncs, que φ és un morfisme $(\Sigma \cup \Sigma_1)$-inversor (Σ_1 definit com en la Secció 2.2). Com que $Q(E)$ és precisament la localització universal de $P(E)$ en $\Sigma \cup \Sigma_1$ (Teorema 2.4.2) existeix un morfisme d'anells $\overline{\varphi}\colon Q(E) \to Q$ estenent φ i fixant $\overline{e}$ per a tot $e \in E^1$. Ara, de les propietats universals se'n dedueix que $\psi \circ \overline{\varphi} = \mathbf{1}_{Q(E)}$ i que $\overline{\varphi} \circ \psi = \mathbf{1}_Q$. $\square$

4.4. Mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt d'un buirac

En aquesta secció donarem una primera aproximació a com són els mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de Leavitt $L(E)$. Essencialment el que fem és generalitzar els resultats de [**4**, Section 3].

Recordem que per a un anell semihereditari S, la categoria dels S-mòduls dreta finitament presentats $\mathbf{fp}(S)$ és abeliana. Denotarem per $\mathcal{T}$ la subcategoria plena de $\mathbf{Mod}$-$P(\overline{E})$ formada pels $P(\overline{E})$-mòduls dreta de K-dimensió finita.

PROPOSICIÓ 4.4.1. *La categoria $\mathcal{T}$ dels $P(\overline{E})$-mòduls dreta de K-dimensió finita coincideix amb la categoria $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ dels mòduls de longitud finita en $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))$.*

DEMOSTRACIÓ. Posem $R = P(\overline{E})$. Observem primer que els R-mòduls de K-dimensió finita són finitament presentats per la Proposició 4.1.4. És clar que els objectes de $\mathcal{T}$ són objectes de longitud finita en $\mathbf{fp}(R)$. Per a veure la inclusió contrària en tenim prou de veure que els objectes simples en $\mathbf{fp}(R)_{\mathrm{fl}}$ tenen K-dimensió finita. Sigui $M \in \mathbf{fp}(R)_{\mathrm{fl}}$ simple. Pel Teorema 4.2.18 M té un submòdul projectiu Q de K-codimensió finita. Com que M és simple en $\mathbf{fp}(R)_{\mathrm{fl}}$ tenim que $Q = 0$ o $Q = M$. Si $Q = 0$ en deduïm que M té K-dimensió finita. Altrament, M és un R-mòdul dreta simple i projectiu. Per tant $M \cong p_iR$ per a i una pica en $\overline{E}$, de manera que M té K-dimensió finita (de fet té dimensió 1). □

PROPOSICIÓ 4.4.2. *Posem $R = P(\overline{E})$ i sigui $\mathcal{T}(= \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}})$ la categoria dels R-mòduls dreta de K-dimensió finita. Aleshores es compleix:*

(i) *$K_0(\mathcal{T})$ és un grup abelià lliure sobre el conjunt de classes d'isomorfia de R-mòduls simples de K-dimensió finita.*
(ii) *El morfisme canònic $\iota\colon K_0(R) \to K_0(\mathbf{fp}(R))$ és un isomorfisme, de manera que $K_0(\mathbf{fp}(R))$ és abelià lliure de rang d generat per $[p_1R], \dots, [p_dR]$.*
(iii) *El morfisme $K_0(\mathcal{T}) \to K_0(\mathbf{fp}(R))$ té per imatge el subgrup de $K_0(\mathbf{fp}(R))$ generat per les columnes de la matriu $(\mathbf{1} - A_E)$.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Com que, per la Proposició 4.4.1, la categoria $\mathcal{T}$ coincideix amb la categoria $\mathbf{fp}(R)_{\mathrm{fl}}$ el resultat ve donat pel Teorema de *Devissage* [**60**, Theorem 3.1.8(1)].

(ii) És conseqüència del Teorema de Resolució [**60**, Theorem 3.1.13].

(iii) Denotarem la classe, en $K_0(R)$, d'un R-mòdul projectiu P per $[P]$ i la classe, en $K_0(\mathbf{fp}(R))$, d'un R-mòdul finitament presentat M per $\langle M\rangle$. Sigui M un R-mòdul finitament presentat de K-dimensió finita i considerem una resolució per R-mòduls projectius finitament generats

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Tenim que $\langle M\rangle = \langle Q\rangle - \langle P\rangle$ en $K_0(\mathbf{fp}(R))$. Identificarem $K_0(K^d)$ amb $K_0(R)$ a través de l'isomorfisme induït per la inclusió $K^d \hookrightarrow R$. Com que M té K-dimensió finita és un K^d-mòdul (projectiu) finitament generat i té sentit $\chi_{K^d}(M) \in K_0(K^d)$. A més, per la identificació anterior, podem pensar $\chi_{K^d}(M) \in K_0(R)$. Amb aquesta identificació, la Proposició 4.1.4 ens dóna la igualtat $\chi_R(M) = (\mathbf{1} - A_E)\chi_{K^d}(M)$ en $K_0(R)$. Com que $\chi_R(M) = [Q] - [P]$ tenim que $\langle M\rangle = \langle Q\rangle - \langle P\rangle = \iota(\chi_R(M)) = (\mathbf{1} - A_E)\iota(\chi_{K^d}(M))$. Amb això veiem que la imatge de $K_0(\mathcal{T})$ en $K_0(\mathbf{fp}(R))$ està continguda en el subgrup generat per les columnes de $(\mathbf{1} - A_E)$.

Per a veure la inclusió contrària, posem $r^{-1}(i) = \{e_1^i, \dots, e_{n_i}^i\}$ per a cada $i \in \{1, \dots, d\}$ i considerem els morfismes de R-mòduls dreta $\nu_i\colon \oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e_j^i)}R \to p_iR$

definits per $\nu_i(r_1,\ldots,r_{n_i}) = \overline{e}^i_1 r_1 + \ldots + \overline{e}^i_{n_i} r_{n_i}$ amb el benentès que, en cas que i sigui una font, ν_i és el morfisme zero $0 \to p_i R$. Tenim el següent isomorfisme de R-mòduls $\operatorname{coker}(\nu_i) \cong p_i K$, de manera que $\langle \operatorname{coker}(\nu_i)\rangle$ en $K_0(\mathbf{fp}(R))$ coincideix amb la i-èsima columna de $(\mathbf{1} - A_E)$. $\square$

Denotem per $\mathcal{M}_\infty$ la subcategoria plena de $\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$ dels mòduls M tals que $M \otimes_{P(\overline{E})} L(E) = 0$. Considerem la subcategoria plena de $\mathcal{M}_\infty$ formada pels seus mòduls finitament presentats, és a dir, $\mathcal{M}_{\overline{E}} = \mathcal{M}_\infty \cap \mathbf{fp}(P(\overline{E}))$. En cas que sigui clar el buirac en el que estiguem treballant la denotarem simplement per $\mathcal{M}$. Com abans posem $X = E^0 \setminus F(E)$. Recordem que donat $i \in X$ hem definit en la Observació 2.2.18 uns morfismes ν_i i un conjunt $\Sigma'_1 = \{\nu_i \mid i \in X\}$ de manera que $L(E) \cong P(\overline{E})_{\Sigma'_1}$. Tenim que $\operatorname{coker}\nu_i \in \mathcal{M}$ $(i \in X)$.

Observació 4.4.3. Com que ${}_{P(\overline{E})}L(E)$ és llis (Proposició 4.3.1) i $P(\overline{E})$ és hereditari dreta (Proposició 1.2.8), per la Observació 1.4.10, tenim que $\mathcal{M}_{\overline{E}}$ coincideix amb la categoria $\mathbf{T}_{\Sigma'_1}(P(\overline{E}))$ de la Definició 1.4.8.

Lema 4.4.4. *Tenim una inclusió de categories $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$. De fet $\mathcal{M}$ és una subcategoria de Serre de $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ i tenim una inclusió $K_0(\mathcal{M}) \to K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}})$ de forma que $K_0(\mathcal{M})$ és el subgrup de $K_0(\mathbf{fp}(\overline{E})_{\mathrm{fl}})$ generat per les classes $[N]$ dels $P(\overline{E})$-mòduls simples N tals que $N \in \mathcal{M}$.*

Demostració. En efecte, sigui $M \in \mathcal{M}$. Pel Teorema 4.2.18 (junt amb la Observació 4.2.19) M té un submòdul projectiu P, finitament generat i de codimensió finita. Com que ${}_{P(\overline{E})}L(E)$ és llis (Proposició 4.3.1), tensoritzant la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow M/P \longrightarrow 0$$

veiem que $P \otimes_{P(\overline{E})} L(E) = 0$. Per tant $P = 0$ i tenim que M té K-dimensió finita. Per la Proposició 4.4.1 tenim que la categoria $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ coincideix amb la categoria $\mathcal{T}$ dels $P(\overline{E})$-mòduls dreta de K-dimensió finita.

És clar que $\mathcal{M}$ és una subcategoria de Serre de $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ pel Lema 1.8.6, per tant, pel Teorema de *Devissage* ([**60**, Theorem 3.1.8(1)]) obtenim la resta de l'enunciat. $\square$

Del Teorema 1.4.11 tenim que la següent successió és exacta:
(4.4.1)

$$K_1(P(\overline{E})) \xrightarrow{i_{\Sigma'_1 *}} K_1(L(E)) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}}) \xrightarrow{\delta} K_0(P(\overline{E})) \xrightarrow{i_{\Sigma'_1 *}} K_0(L(E)).$$

Ara anem a estudiar amb deteniment aquesta successió, relacionant-la amb els càlculs efectuats al Capítol 3. Situem-nos primer en el cas de E un buirac sense piques i posem $\varphi\colon K_1(L(E)_0) \to K_1(L(E))$ el morfisme de la Proposició 3.4.3. De la Proposició 3.4.2 se'n dedueix que $\operatorname{im}\varphi$ té un complement en $K_1(L(E))$, complement que denotarem per $\widetilde{K}_1(L(E))$. Del Teorema 3.1.2 en deduïm que $\operatorname{im} i_{\Sigma'_1 *}$ en $K_1(L(E))$ està generat per les classes dels elements de $(K^\times)^d$, per la Proposició 3.4.3 tenim, doncs, que coincideix amb $\operatorname{im}\varphi$ i per l'exactitud de (4.4.1) veiem que $\widetilde{K}_1(L(E)) \cong \ker\delta$.

Observem que, per a tot $i \in X$, $\operatorname{coker}\nu_i \in \mathcal{M}_{\overline{E}}$. Si denotem per $E_1,\ldots,E_n$ els elements de la base canònica de $\mathbb{Z}^n$ podem definir $\sigma\colon \mathbb{Z}^{d-d'} \to K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}})$ via $\sigma(E_i) =$

$[\operatorname{coker}\nu_{i+d'}]$ i $\rho\colon \mathbb{Z}^d \to K_0(P(\overline{E}))$ per $\rho(E_i) = [p_i P(\overline{E})]$. Posem $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} - A'_E \in M_{d\times(d-d')}(\mathbb{Z})$ i considerem el següent diagrama de grups abelians amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker\varphi_0 & \xrightarrow{\iota_0} & \mathbb{Z}^{d-d'} & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{Z}^d \\
 & & & & \sigma\big\downarrow & & \cong\big\downarrow\rho \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{K}_1(L(E)) & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}}) & \xrightarrow{\delta} & K_0(P(\overline{E}))
\end{array} \tag{4.4.2}$$

on el quadrat és commutatiu:

$$\delta\circ\sigma(E_i) = \delta([\operatorname{coker}\nu_{i+d'}]) = [p_{i+d'}P(\overline{E})] - \left[\oplus_{j=1}^{n_{i+d'}} p_{s\left(e_j^{i+d'}\right)} P(\overline{E})\right]$$

$$\rho\circ\varphi_0(E_i) = \rho\left(E_{i+d'} - \sum_{j=1}^{d} a^E_{j,i+d'}E_j\right) = [p_{i+d'}P(\overline{E})] - \sum_{j=1}^{d} a^E_{j,i+d'}[p_jP(\overline{E})]$$

i, per les definicions dels a^E_{ij} i dels e^i_j, ambdues equacions coincideixen.

Per la propietat universal del nucli sabem que existeix un únic homomorfisme de grups abelians $\psi\colon \ker\varphi_0 \to K_1(L(E))$ que tanca el diagrama (4.4.2). Anem a construir-lo explícitament. Per comoditat pensarem que $\ker\varphi_0 \subseteq \mathbb{Z}^d$ de tal manera que les d' primeres components dels elements de $\ker\varphi_0$ seran zero. Prenem $b_1 = (b^1_1,\dots,b^1_d),\dots,b_k = (b^k_1,\dots,b^k_d) \in \ker\varphi_0$ una base del grup abelià lliure $\ker\varphi_0$.

Sigui $a = (a_1,\dots,a_d) \in \ker\varphi_0$ i definim $C^+_a = \{i \in E^0 \mid a_i > 0\}$ i $C^-_a = \{i \in E^0 \mid a_i < 0\}$, tenim que

$$\begin{aligned}
\delta\circ\sigma\circ\iota_0(a) &= \sum_{i=d'+1}^{d} a_i\delta[\operatorname{coker}\nu_i] = \sum_{i\in C^+_a} a_i\delta[\operatorname{coker}\nu_i] + \sum_{i\in C^-_a} a_i\delta[\operatorname{coker}\nu_i] \\
&= \sum_{i\in C^+_a} a_i\left(\left[p_iP(\overline{E})\right] - \left[\oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e^i_j)}P(\overline{E})\right]\right) \\
&\quad + \sum_{i\in C^-_a} a_i\left(\left[p_iP(\overline{E})\right] - \left[\oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e^i_j)}P(\overline{E})\right]\right).
\end{aligned}$$

Considerem els següents $P(\overline{E})$-mòduls

$$P_a = \left(\oplus_{i\in C^-_a}\left(p_iP(\overline{E})\right)^{-a_i}\right) \oplus \left(\oplus_{i\in C^+_a}\left(\oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e^i_j)}P(\overline{E})\right)^{a_i}\right)$$

$$Q_a = \left(\oplus_{i\in C^-_a}\left(\oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e^i_j)}P(\overline{E})\right)^{-a_i}\right) \oplus \left(\oplus_{i\in C^+_a}\left(p_iP(\overline{E})\right)^{a_i}\right).$$

Com que $\varphi_0\circ\iota_0 = 0$ tenim que $\delta\circ\sigma\circ\iota_0(a) = 0$, d'on deduïm que $[Q_a] = [P_a]$ en $K_0(P(\overline{E}))$ i, en ésser $\mathcal{V}(P(\overline{E}))$ cancel·latiu (*cf.* Proposició 1.2.8), tenim $P_a \cong Q_a$. Posem

$$P^0_a = \left(\oplus_{i\in C^-_a}\left(p_iK^d\right)^{-a_i}\right) \oplus \left(\oplus_{i\in C^+_a}\left(\oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e^i_j)}K^d\right)^{a_i}\right),$$

$$Q^0_a = \left(\oplus_{i\in C^-_a}\left(\oplus_{j=1}^{n_i} p_{s(e^i_j)}K^d\right)^{-a_i}\right) \oplus \left(\oplus_{i\in C^+_a}\left(p_iK^d\right)^{a_i}\right),$$

K^d-mòduls projectius finitament generats corresponents a P_a i Q_a respectivament. Identifiquem $P_a = P_a^0 \otimes_{K^d} P(\overline{E})$ i $Q_a = Q_a^0 \otimes_{K^d} P(\overline{E})$, fixem $\varphi_a^0\colon Q_a^0 \to P_a^0$ un isomorfisme i denotem per $\varphi_a = \varphi_a^0 \otimes \mathbf{1}_{P(\overline{E})}$ l'isomorfisme induït.

Donats un morfisme f i $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la següent notació ens resultarà útil:

$$f^{(n)} = \begin{cases} \overbrace{f \oplus \cdots \oplus f}^{n} \text{si } n > 0 \\ \overbrace{f^{-1} \oplus \cdots \oplus f^{-1}}^{-n} \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Definim l'isomorfisme de $L(E)$-mòduls $\nu_a\colon P_a \otimes_{P(\overline{E})} L(E) \to Q_a \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$ per:

$$\nu_a = \left(\oplus_{i \in C_a^-} \left(\nu_i \otimes \mathbf{1}_{L(E)}\right)^{(a_i)}\right) \oplus \left(\oplus_{i \in C_a^+} \left(\nu_i \otimes \mathbf{1}_{L(E)}\right)^{(a_i)}\right).$$

Ara, $\tilde{\nu}_a = \nu_a \circ \left(\varphi_a \otimes \mathbf{1}_{L(E)}\right)$ defineix un automorfisme de $L(E)$-mòduls de $Q_a \otimes L(E)$. Finalment, definim

$$\psi(b_i) = [Q_{b_i} \otimes L(E), \tilde{\nu}_{b_i}]. \tag{4.4.3}$$

Vegem ara que ψ tanca el diagrama (4.4.2). Prenem $a \in \ker \varphi_0$, observem que tenim la següent descomposició tipus Cramer (vegeu Teorema 1.4.4):

$$\left(\left(\oplus_{i \in C_a^-} (\nu_i \otimes \mathbf{1}_{L(E)})^{(-a_i)}\right) \oplus \mathbf{1}\right)\tilde{\nu}_a = \left(\mathbf{1} \oplus \left(\oplus_{i \in C_a^+} (\nu_i \otimes \mathbf{1}_{L(E)})^{(a_i)}\right)\right)(\varphi_a \otimes \mathbf{1}_{L(E)})$$

de manera que

$$\partial \circ \psi(a) = \partial[Q_a \otimes L(E), \tilde{\nu}_a] = \sum_{i \in C_a^+} a_i[\operatorname{coker} \nu_i] + \sum_{i \in C_a^-} a_i[\operatorname{coker} \nu_i]$$

que coincideix amb $\sigma \circ \iota_0(a)$. En la demostració de la Proposició següent veiem que, de fet, ψ és un isomorfisme.

Proposició 4.4.5. *Sigui E un buirac finit sense piques amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$, $d' = |F(E)|$ i de manera que les fonts són els d' primers vèrtexs. Aleshores $K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}})$ és el grup abelià lliure de rang $d - d'$ amb base* $[\operatorname{coker} \nu_{d'+1}], \dots, [\operatorname{coker} \nu_d]$.

Demostració. Posem $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} - A_E' \in M_{d \times (d-d')}(\mathbb{Z})$. Tenim la següent successió exacta:

$$0 \to \ker \varphi_0 \xrightarrow{\iota_0} \mathbb{Z}^{d-d'} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{Z}^d \xrightarrow{\pi_0} \operatorname{coker} \varphi_0 \to 0$$

Recordem el diagrama (4.4.2). El podem estendre per la dreta de manera que obtenim el següent diagrama de grups abelians amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \varphi_0 & \xrightarrow{\iota_0 \circ p_2} & \mathbb{Z}^{d-d'} & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\pi_0} & \operatorname{coker} \varphi_0 \\ & & \psi \big\downarrow & & \sigma \big\downarrow & & \rho \big\downarrow \cong & & \tau \big\downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{K}_1(L(E)) & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}}) & \xrightarrow{\delta} & K_0(P(\overline{E})) & \xrightarrow{i_{\Sigma_1' *}} & K_0(L(E)). \end{array} \tag{4.4.4}$$

En el diagrama anterior ψ és el morfisme induït per la propietat universal del nucli, que hem descrit explícitament en (4.4.3). Recordem que σ l'hem definit enviant els elements de la base canònica de $\mathbb{Z}^{d-d'}$ a les classes $[\operatorname{coker} \nu_{d'+1}], \dots, [\operatorname{coker} \nu_d]$. Observem que podem identificar $\operatorname{coker} \varphi_0$ amb el grup de Grothendieck del monoide M_E de manera que la imatge per π_0 dels vectors de la base canònica siguin els generadors de M_E, és a dir, els vèrtexs $v_i \in E^0$. Amb aquesta identificació τ és l'isomorfisme de grups induït per l'isomorfisme de monoides $M_E \to \mathcal{V}(L(E))$ descrit en el Teorema 1.3.7.

Com a conseqüència del Lema 4.4.4 tenim que $K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}}) \subseteq K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}})$ i per la Proposició 4.4.2 aquest darrer és abelià lliure generat per les classes d'isomorfia dels mòduls simples. Com que (per a $i \in E^0 \setminus F(E)$) els mòduls $\operatorname{coker} \nu_i$ són simples (tenen K dimensió 1) i no isomorfs entre ells (la seva característica d'Euler és diferent) veiem que σ és un monomorfisme escindit. Ara, usant el Lema de la Serp ([**18**, Snake Lemma, Exercise 2.3.13]) en el diagrama (4.4.4) deduïm que ψ és un monomorfisme i que $\operatorname{coker} \psi$ és isomorf a un submòdul del grup abelià lliure $\operatorname{coker} \sigma$. En particular $\operatorname{coker} \psi$ és abelià lliure i, com que $\ker \varphi_0$ i $\widetilde{K}_1(L(E))$ són grups abelians lliures del mateix rang (com a conseqüència de la Proposició 3.4.2), obtenim que $\operatorname{coker} \psi = 0$ i ψ és un isomorfisme. Ara, aplicant el Lema dels Cinc ([**62**, Five Lemma 3.32]) al diagrama (4.4.4) tenim que σ és un isomorfisme, cosa que demostra el resultat. $\square$

TEOREMA 4.4.6. *Sigui E un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d_E\}$, $d'_E = |F(E)|$. Aleshores $K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}})$ és el grup abelià lliure de rang $d_E - d'_E$ amb base*

$$\{[\operatorname{coker} \nu_i^E] \mid i \in E^0 \setminus F(E)\}.$$

DEMOSTRACIÓ. Com en la demostració del Teorema 3.4.6 considerem $\tilde{E}$ el subgraf complet sense piques del Lema 3.4.5 i F el subgraf de E donat per $F^0 = \tilde{E}^0 \cup F(E)$ i $F^1 = \tilde{E}^1$ amb les aplicacions d'incidència donades per restricció. De la demostració del Teorema 3.4.6 se'n desprèn que $L(F)$ i $L(E)$ són Morita equivalents, que les fonts de E i de F coincideixen i que $K_1(L(F)) \cong K_1(L(\tilde{E})) \oplus \prod_{i=1}^{\ell} K^\times$ on $\ell = |\{v \in F(E) \mid s_{E^*}^{-1}(v) \subseteq L_E\}|$ és el número de vèrtex aïllats de F (és a dir, vèrtexs que són fonts i piques a la vegada). Pel Teorema 1.4.11 tenim que la següent successió és exacta:

$$K_1(P(\overline{\tilde{E}})) \longrightarrow K_1(L(\tilde{E})) \longrightarrow K_0(\mathcal{M}_{\overline{\tilde{E}}}) \longrightarrow K_0(P(\overline{\tilde{E}})) \longrightarrow K_0(L(\tilde{E})).$$

La inclusió $i\colon \tilde{E} \hookrightarrow F$ indueix (mono)morfismes no unitals $P(i)\colon P(\overline{\tilde{E}}) \to P(\overline{F})$ i $L(i)\colon L(\tilde{E}) \to L(F)$ (*cf.* Observació 1.3.3). Per la Observació 1.1.8 tenim que els morfismes no unitals entre anells unitals indueixen morfismes en el K_0 i K_1. Considerem ara el següent diagrama commutatiu amb files exactes (Teorema 1.4.11):

$$\begin{tikzcd}
K_1(P(\overline{\tilde{E}})) \arrow[r] \arrow[d, "P(i)_*"'] & K_1(L(\tilde{E})) \arrow[r] \arrow[d, "L(i)_*"'] & K_0(\mathcal{M}_{\overline{\tilde{E}}}) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(P(\overline{\tilde{E}})) \arrow[r] \arrow[d, "P(i)_*"] & K_0(L(\tilde{E})) \arrow[d, "L(i)_*"] \\
K_1(P(\overline{F})) \arrow[r] & K_1(L(F)) \arrow[r] & K_0(\mathcal{M}_{\overline{F}}) \arrow[r] & K_0(P(\overline{F})) \arrow[r] & K_0(L(F)).
\end{tikzcd}$$

Com que $\tilde{E}$ i F només difereixen en vèrtexs aïllats tenim que els morfismes

$$P(i)_*\colon K_n(P(\overline{\tilde{E}})) \to K_n(P(\overline{F})) \quad \text{i} \quad L(i)_*\colon K_n(L(\overline{\tilde{E}})) \to K_n(L(\overline{F}))$$

per a $n = 0, 1$ són monomorfismes escindits. Obtenim el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{tikzcd}
K_1(P(\overline{\tilde{E}})) \oplus G_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & K_1(L(\tilde{E})) \oplus G_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & K_0(\mathcal{M}_{\overline{\tilde{E}}}) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(P(\overline{\tilde{E}})) \oplus G_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & K_0(L(\tilde{E})) \oplus G_0 \arrow[d, "\cong"] \\
K_1(P(\overline{F})) \arrow[r] & K_1(L(F)) \arrow[r] & K_0(\mathcal{M}_{\overline{F}}) \arrow[r] & K_0(P(\overline{F})) \arrow[r] & K_0(L(F)),
\end{tikzcd}$$

on $G_0 = \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}$ i $G_1 = \prod_{i=1}^{\ell} K^{\times}$. Pel Lema dels Cinc ([**62**, Five Lemma 3.32]) tenim que $K_0(\mathcal{M}_{\overline{\tilde{E}}}) \cong K_0(\mathcal{M}_{\overline{F}})$. A més, de la Proposició 4.4.5, tenim que $K_0(\mathcal{M}_{\overline{\tilde{E}}})$ és abelià lliure de rang $d_{\tilde{E}} - d'_{\tilde{E}}$. Com que $F^0 = \tilde{E}^0 \cup F(E)$ (els vèrtexs que hem afegit són tots fonts) tenim que $d_{\tilde{E}} - d'_{\tilde{E}} = d_F - d'_F$. Per tant, hem vist el resultat per al buirac F.

Observem ara que la inclusió $j\colon F \hookrightarrow E$ indueix (mono)morfismes no unitals d'anells $P(j)\colon P(\overline{F}) \to P(\overline{E})$ i $L(j)\colon L(F) \to L(E)$. Per la Demostració del Teorema 3.4.6, tenim que $L(j)(L(F)) = pL(E)p$ per a un cert idempotent ple p. En particular, per a $n = 0, 1$ veiem que $L(j)_*\colon K_n(L(F)) \to K_n(L(E))$ són isomorfismes (per la invariància de Morita dels functors K_0 i K_1). Novament del Teorema 1.4.11 obtenim un diagrama commutatiu amb files exactes

(4.4.5)

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_1(P(\overline{F})) & \longrightarrow & K_1(L(F)) & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathcal{M}_{\overline{F}}) & \xrightarrow{\delta} & K_0(P(\overline{F})) & \xrightarrow{f} & K_0(L(F)) \\
\downarrow{\scriptstyle P(j)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle P(j)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
K_1(P(\overline{E})) & \longrightarrow & K_1(L(E)) & \xrightarrow{\partial'} & K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}}) & \xrightarrow{\delta'} & K_0(P(\overline{E})) & \xrightarrow{g} & K_0(L(E)).
\end{array}$$

A més, f i g són epimorfismes com a conseqüència del Teorema 1.3.7. Podem, doncs, considerar el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K_0(P(\overline{F})) & \xrightarrow{f} & K_0(L(F)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle P(j)_{*|M}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(j)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & K_0(P(\overline{E})) & \xrightarrow{g} & K_0(L(E)) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

on $M = \ker f = \operatorname{im} \delta$ i $M' = \ker g = \operatorname{im} \delta'$. Pel Lema de la Serp ([**18**, Snake Lemma, Exercise 2.3.13]) obtenim que

$$\operatorname{coker}\left(P(j)_{*|M}\right) \cong \operatorname{coker}\left(P(j)_*\right) = \mathbb{Z}^{d_E - d_F}.$$

De (4.4.5), junt amb la Proposició 3.4.3 i la Demostració del Teorema 3.4.6 n'obtenim un diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker\left(A'_F - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d_F - d'_F} \end{pmatrix}\right) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{M}_{\overline{F}}) & \xrightarrow{\delta} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle P(j)_{*|M}} & & \\
 & & \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d_E - d'_E} \end{pmatrix}\right) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}}) & \xrightarrow{\delta'} & M' & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

A més, ρ és un monomorfisme escindit, ja que envia els elements $[\operatorname{coker} \nu_i^F]$ a els elements $[\operatorname{coker} \nu_i^E]$, que formen part d'una base de $K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}})$. Ara, és clar que el morfisme de baix a l'esquerra és injectiu. Novament pel Lema de la Serp, obtenim que

$$\operatorname{coker}(\rho) \cong \operatorname{coker}\left(P(j)_{*|M}\right) \cong \mathbb{Z}^{d_E - d_F}.$$

Per tant, el rang de $K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}})$ és $d_F - d'_F + d_E - d_F = d_E - d'_E$ (ja que $d'_F = d'_E$). A més, com que els elements del conjunt $\{\operatorname{coker} \nu_i^E \mid i \in E^0 \setminus F(E)\}$ són mòduls simples no isomorfs, les seves classes formen una base de $K_0(\mathcal{M}_{\overline{E}})$. $\square$

Usant un molt recent resultat de Neeman [**50**] podem veure l'anterior d'una altra manera. Tenim la següent definició:

DEFINICIÓ 4.4.7 ([**50**, Definition 0.4]). Siguin R un anell i Σ un conjunt de monomorfismes entre R-mòduls projectius finitament generats. Definim una certa categoria exacta $\mathcal{E}$ com la subcategoria plena de tots els R-mòduls de manera que: Tots els objectes de $\mathcal{E}$ són mòduls finitament presentats i de dimensió projectiva $\leqslant 1$. La categoria $\mathcal{E}$ és unívocament determinada per

(i) Per a tot $s_i \colon P_i \to Q_i$ en Σ, tenim $\operatorname{coker} s_i \in \mathcal{E}$.
(ii) Donada una successió exacta curta de R-mòduls finitament presentats de dimensió projectiva $\leqslant 1$:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

si dos dels objectes M', M i M'' són de $\mathcal{E}$ el tercer també ho és.
(iii) $\mathcal{E}$ conté tots els sumands directes dels seus objectes.
(iv) $\mathcal{E}$ és minimal complint (i)–(iii).

Una caracterització alternativa d'aquesta categoria és la següent:

PROPOSICIÓ 4.4.8 ([**50**, Proposition 0.7]). *Un R-mòdul M és de $\mathcal{E}$ si i només si*

(i) *M és finitament presentat i de dimensió projectiva $\leqslant 1$.*
(ii) $M \otimes_R R_\Sigma = 0 = \operatorname{Tor}_1^R(M, R_\Sigma)$.

TEOREMA 4.4.9. *La categoria $\mathcal{M}_{\overline{E}}$ és la subcategoria plena de $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ formada pels mòduls tals que la seva sèrie de composició només conté els mòduls de la forma* $\operatorname{coker} \nu_i$ *(on $i \in X = E^0 \setminus F(E)$).*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\mathcal{E}$ la categoria de la Definició 4.4.7 per a $R = P(\overline{E})$ i el conjunt $\Sigma = \Sigma_1'$. Per la Proposició 4.4.8 i la Observació 1.4.10 tenim que la categoria $\mathcal{E}$ coincideix amb la categoria $\mathbf{T}_{\Sigma_1'}(P(\overline{E}))$. Per tant, per la Observació 4.4.3, tenim que la categoria $\mathcal{E}$ coincideix amb la categoria $\mathcal{M}_{\overline{E}}$. Ara, per la definició de $\mathcal{E}$ tenim el resultat. $\square$

Donat $i \in X$, escrivim $M_i = \operatorname{coker} \nu_i$. Per tal d'obtenir una descripció dels $L(E)$-mòduls finitament presentats necessitarem els següents lemes (*cf.* [**64**, Lemma 6.1]):

LEMA 4.4.10. *Sigui N un $P(\overline{E})$-mòdul simple i de dimensió finita. Tenim la següent dicotomia:*

(i) *Si existeix $i \in X$ tal que $N \cong M_i$ aleshores $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E) = 0$.*
(ii) *Si per a tot $i \in X$ tenim $N \ncong M_i$ llavors $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$ és simple.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Si $N \cong M_i$ tenim que $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E) = 0$, ja que $M_i \in \mathcal{M}_{\overline{E}}$.

(ii) Sigui N un $P(\overline{E})$-mòdul dreta simple i de dimensió finita. Suposem que $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E) = 0$ i $N \ncong M_i$ per a tot $i \in X$. Observem que per $i \neq j$ tenim que $M_i \ncong M_j$ ja que la seva característica d'Euler és diferent. Per tant, els elements de $B = \{[M_i] \mid i \in X\}$ són $\mathbb{Z}$-linealment independents en $K_0(\mathcal{M}) \subseteq K_0(\mathcal{T})$. Ara, en el nostre supòsit tenim que $[N]$ és $\mathbb{Z}$-linealment independent de $B = \{[M_i] \mid i \in X\}$, cosa que entra en contradicció amb el Teorema 4.4.6 que ens assegura que $K_0(\mathcal{M})$ és abelià lliure de rang $d - d'$ (on $d' = |F(E)|$). Vegem ara que $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$ és simple.

Sigui $n = \sum_{\gamma \in E^*} n_\gamma \otimes \gamma$ un element no nul de $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$, on $n_\gamma \in N$. Considerem la següent descomposició de la unitat

$$1 = \sum_{i \in E^0} p_i = \sum_{i \in X} \sum_{e \in r^{-1}(i)} \overline{e}e + \sum_{i \in F(E)} p_i.$$

Si per a algun $i \in F(E)$ tenim que $n' = np_i \neq 0$ aleshores $n' \in Np_i \otimes p_i \subseteq N \otimes 1$. Altrament, de la descomposició de la unitat anterior veiem que existeix algun $e \in E^1$ tal que $n\overline{e} \neq 0$ i inductivament podem trobar $\gamma \in E^*$ tal que $n' = n\overline{\gamma} \neq 0$ i $n' \in Np_{s(\gamma)} \otimes p_{s(\gamma)} \subseteq N \otimes 1$. En ambdós casos, de la simplicitat de N n'obtenim que $N \otimes 1 = n'P(\overline{E})$ cosa que demostra la simplicitat de $N \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$. □

LEMA 4.4.11. *Sigui $i \in E^0$, les següents condicions són equivalents:*

(i) *$p_iP(\overline{E})$ té K-dimensió finita.*
(ii) *$p_iL(E)$ és suma directa finita de simples.*
(iii) *$p_iL(E)$ té longitud finita.*
(iv) *El subgraf $r_{E^*}^{-1}(i)$ és acíclic.*

DEMOSTRACIÓ. (i)⇒(ii) Posem $M = \{\overline{\gamma} \in \overline{s}_{\overline{E}^*}^{-1}(i) \mid \overline{r}(\overline{\gamma}) \in D(\overline{E})\} \subseteq p_iP(\overline{E})$. Observem que, com que $p_iP(\overline{E})$ té K-dimensió finita, M és finit. Usant les relacions $p_j = \sum_{e \in r^{-1}(j)} \overline{e}e$ iterativament i que tot camí de $\overline{s}_{\overline{E}^*}^{-1}(i)$ es pot prolongar fins a un camí de M obtenim que $p_i = \sum_{\overline{\gamma} \in M} \overline{\gamma}\gamma$, per tant, $p_iL(E) = \sum_{\overline{\gamma} \in M} \overline{\gamma}\gamma L(E)$. A més, donats $\overline{\gamma}, \overline{\gamma}' \in M$ no pot passar que $\overline{\gamma}$ sigui un subcamí de $\overline{\gamma}'$, ja que tots els camins de M uneixen el vèrtex i amb una pica de $\overline{E}$. Per tant, els elements del conjunt $\{\overline{\gamma}\gamma \mid \overline{\gamma} \in M\}$ són idempotents ortogonals i hem vist que $p_iL(E) = \oplus_{\overline{\gamma} \in M} \overline{\gamma}\gamma L(E)$. Com que $\overline{\gamma}\gamma L(E) \cong \gamma\overline{\gamma} L(E) = p_{s(\gamma)}L(E) \cong p_{s(\gamma)}P(\overline{E}) \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$ i $p_{s(\gamma)}P(\overline{E})$ és simple (ja que $s(\gamma)$ és una pica en $\overline{E}$), pel Lema 4.4.10 tenim que $p_iL(E)$ és suma de simples, com volíem.

(ii)⇒(iii) És clar.

(iii)⇒(iv) Veurem que si $r_{E^*}^{-1}(i)$ té algun cicle, aleshores $p_iL(E)$ no té longitud finita. Sigui $\alpha \in E^*$ un cicle basat en un vèrtex k tal que existeixi algun camí de k a i. Prenem $\gamma \in r_{E^*}^{-1}(i)$ amb $s(\gamma) = k$. Posem $x = p_i + \overline{\gamma}\alpha\gamma$. Ara, si $n > m \geqslant 0$ tenim que $x^nL(E) \subset x^mL(E)$ (amb el benentès que $x^0 = p_i$). En efecte, suposem que per a cert $y \in L(E)$ tenim que $x^ny = x^m$. Com que $p_iL(E)p_i \subseteq p_iQ(E)p_i$ operant en aquest darrer tenim que $y = x^{m-n}$, però $m - n < 0$ i $y \notin p_iL(E)p_i$. Per tant, hem vist que tenim una cadena infinita de submòduls amb inclusions pròpies:

$$p_iL(E) \supset xL(E) \supset \cdots \supset x^nL(E) \supset \cdots$$

(iv)⇒(i) És clar. □

El pròxim resultat ens dóna una primera descripció de l'estructura dels $L(E)$-mòduls de longitud finita.

PROPOSICIÓ 4.4.12. *Sigui E un buirac finit i posem $R = P(\overline{E})$, $L = L(E)$. Tenim:*

(i) *Sigui N un R-mòdul dreta de K-dimensió finita amb una sèrie de composició de longitud k:*

$$0 < N_1 < N_2 < \cdots < N_k = N$$

Assumim que exactament r dels factors de la sèrie anterior són isomorfs a algun M_i, per $i \notin F(E)$. Aleshores $N \otimes_R L$ és un L-mòdul de longitud finita i la seva longitud és exactament $k - r$.

(ii) *Sigui M un L-mòdul dreta finitament presentat. Aleshores existeix un L-mòdul dreta projectiu finitament generat P tal que $P \leqslant M$ i M/P és un mòdul de longitud finita.*

(iii) *Tot L-mòdul dreta M finitament presentat, de longitud finita és isomorf a un mòdul de la forma $N \otimes_R L$, on N és un R-mòdul dreta de K-dimensió finita.*

DEMOSTRACIÓ. (i) És conseqüència directa del Lema 4.4.10 junt amb el fet que L és un R-mòdul esquerra llis (Proposició 4.3.1).

(ii) Sigui M un L-mòdul dreta finitament presentat. Pel Corol·lari 1.4.6, existeix un R-mòdul dreta N finitament presentat tal que $N \otimes_R L \cong M$. Ara, del Teorema 4.2.18 (junt amb la Observació 4.2.19) tenim que existeix $Q \leqslant N$ un R-mòdul dreta projectiu finitament generat tal que N/Q té K-dimensió finita. Com que ${}_RL$ és llis, tenim que $M \cong N \otimes_R L$ conté un L-mòdul dreta projectiu finitament generat $P \cong Q \otimes_R L$. Ara, per la Proposició 4.4.1 tenim que N/Q és un R-mòdul finitament presentat de longitud finita i, per l'apartat (i), $(N \otimes_R L)/(Q \otimes_R L) \cong (N/Q) \otimes_R L$ és un L-mòdul de longitud finita.

(iii) Procedint com en el cas anterior tenim que $M \cong N \otimes_R L$ per a un cert R-mòdul dreta N finitament presentat i obtenim (pel Teorema 4.2.18) Q un R-mòdul projectiu tal que N/Q té K-dimensió finita. De la següent successió exacta

$$0 \longrightarrow Q \otimes_R L \longrightarrow M \longrightarrow (N/Q) \otimes_R L \longrightarrow 0$$

en deduïm que l'L-mòdul projectiu $Q \otimes_R L$ és de longitud finita. Com que $Q \cong \oplus_{i=1}^{k} p_{j_i} R$ i cada $p_{j_i} R \otimes_R L \cong p_{j_i} L$ és de longitud finita, pel Lema 4.4.11 tenim que cada $p_{i_j} R$ és de K-dimensió finita i, per tant, Q té K-dimensió finita. De la successió exacta

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow (N/Q) \longrightarrow 0$$

en deduïm que N té K-dimensió finita. $\square$

4.5. Les categories de mòduls finitament presentats com a quocients

En aquesta secció veurem que les categories $\mathbf{Mod}\text{-}L(E)$, $\mathbf{fp}(L(E))$ i $\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}$ són equivalents, respectivament, a les categories quocients $\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})/\mathcal{M}_\infty$, $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}$ i $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}$. Els resultats que veurem a continuació essencialment generalitzen [**4**, Section 5] al cas de l'àlgebra de camins d'un buirac. No obstant, per a les demostracions seguim les idees que es troben en [**64**], on es tracta el cas de l'àlgebra sobre el grup lliure, que és força similar. D'altra banda, interpretant correctament les categories i functors podem simplificar notablement una part de la demostració dels resultats de [**64**] referits anteriorment. Concretament, el fet que els functors B i U (definits a continuació) són, respectivament, el functor extensió i restricció d'escalars ens assegura que són functors adjunts com a conseqüència d'un resultat general. Finalitzarem la secció calculant explícitament el complement de $K_1(L(E))$ en $K_1(Q(E))$ que hem vist a la Proposició 3.5.3 que era un sumand directe. Per a aquesta secció convindrà tenir presents les definicions i resultats sobre categories quocients de la Secció 1.8.

Posem $B = - \otimes_{P(\overline{E})} L(E)\colon \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E}) \to \mathbf{Mod}\text{-}L(E)$ el functor extensió d'escalars i $U\colon \mathbf{Mod}\text{-}L(E) \to \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$ el functor restricció d'escalars. Sabem que B restringeix a un functor entre les categories de mòduls finitament presentats i, per (i) en la Proposició 4.4.12, el mateix és cert per als mòduls finitament presentats de longitud finita. Denotarem també per B aquestes restriccions. Per la Proposició 4.3.1 tenim que el functor B és exacte i, del Lema 1.8.6, en deduïm que $\mathcal{M}_\infty$ és una subcategoria de Serre de $\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$ i que $\mathcal{M}$ és subcategoria de Serre de la categoria de mòduls finitament presentats i (en vista del Lema 4.4.4) de la dels mòduls finitament presentats de longitud finita. Per tant, té sentit considerar les categories quocients $\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})/\mathcal{M}_\infty$, $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}$ i $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}$. Tenim les següents propietats

Proposició 4.5.1. *Siguin $M \in \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$ i $N \in \mathbf{Mod}\text{-}L(E)$. Aleshores*
(i) *Existeix un isomorfisme natural $\eta_N\colon BU(N) \longrightarrow N$.*
(ii) *Existeix una transformació natural $\theta_M\colon M \longrightarrow UB(M)$.*
(iii) *Les següents composicions són la identitat:*

$$U(N) \xrightarrow{\theta_{U(N)}} UBU(N) \xrightarrow{U(\eta_N)} U(N)$$

$$B(M) \xrightarrow{B(\theta_M)} BUB(M) \xrightarrow{\eta_{B(M)}} B(M)$$

Demostració. (i) Per (el dual de) la Proposició 2.2.15 tenim que $L(E)$ és una localització universal de $P(\overline{E})$, per tant, la inclusió de $P(\overline{E})$ en $L(E)$ és un epimorfisme d'anells. De [**68**, Proposition XI.1.2] en deduïm que la transformació natural definida per $\eta_N(n \otimes s) = ns$ defineix un isomorfisme natural.

(ii) És fàcil veure que el morfisme $\theta_M\colon M \to UB(M)$ definit per $\theta_M(m) = m \otimes 1$ és natural.

(iii) És clar de les definicions anteriors. □

Proposició 4.5.2. *El functor B és adjunt esquerra del functor U. En particular, donats $M \in \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$ i $N \in \mathbf{Mod}\text{-}L(E)$ tenim un isomorfisme natural*

$$\mathrm{Hom}_{L(E)}\left(B(M), N\right) \cong \mathrm{Hom}_{P(\overline{E})}\left(M, U(N)\right).$$

Demostració. És conseqüència d'un resultat general dels functors extensió i restricció d'escalars vegeu [**18**, Proposition 3.3.15]. □

Proposició 4.5.3. *Si $S\colon \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E}) \to \mathcal{B}$ és un functor que envia tot morfisme $f \in \mathrm{Hom}_{P(\overline{E})}(M, N)$ complint $\ker(f), \mathrm{coker}(f) \in \mathcal{M}_\infty$ a un isomorfisme, llavors hi ha un functor $S'\colon \mathbf{Mod}\text{-}L(E) \to \mathcal{B}$ tal que $S'B$ és naturalment isomorf a S. A més, el functor S' és únic tret d'isomorfisme natural.*

Demostració. Vegem primer la unicitat. Si hi ha un isomorfisme natural $S \simeq S'B$ aleshores $SU \simeq S'BU \simeq S'$, per (i) de la Proposició 4.5.1.

Per a veure'n l'existència cal veure que $S' = SU$ compleix $S'B \simeq S$. En efecte, de l'apartat (iii) de la Proposició 4.5.1 en deduïm que $B(\theta_M)\colon B(M) \to BUB(M)$ defineix un isomorfisme per a tot $M \in \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$. Com que B és un functor exacte (Proposició 4.3.1) tenim que $\ker(\theta_M), \mathrm{coker}(\theta_M) \in \mathcal{M}$. Per tant, $S(\theta_M)\colon S(M) \to SUB(M) = S'B(M)$ defineix un isomorfisme natural. □

Considerem el functor localització:

$$T\colon \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E}) \longrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})/\mathcal{M}_\infty.$$

Per la propietat universal de T existeix el següent functor:

$$\overline{B}\colon \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})/\mathcal{M}_\infty \longrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}L(E),$$

únic functor complint $B = \overline{B}T$. Denotem per $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\text{fl}}/\mathcal{M}_\infty$ i $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}_\infty$ les subcategories plenes de $\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})/\mathcal{M}_\infty$ donades, respectivament, pels mòduls finitament presentats de longitud finita i pels mòduls finitament presentats.

Com que B restringeix a un functor entre les categories de mòduls finitament presentats i a un functor entre les categories dels mòduls finitament presentats de longitud finita, el mateix és cert per a $\overline{B}$ de manera que tenim els functors

$$\overline{B}_{\text{fl}}\colon \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\text{fl}}/\mathcal{M}_\infty \longrightarrow \mathbf{fp}(L(E))_{\text{fl}}$$
$$\overline{B}_{\text{fp}}\colon \mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}_\infty \longrightarrow \mathbf{fp}(L(E)).$$

Tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\text{fl}} \arrow[r, "T_{\text{fl}}"] \arrow[d] & \frac{\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\text{fl}}}{\mathcal{M}_\infty} \arrow[r, "\overline{B}_{\text{fl}}"] \arrow[d] & \mathbf{fp}(L(E))_{\text{fl}} \arrow[d] \\
\mathbf{fp}(P(\overline{E})) \arrow[r, "T_{\text{fp}}"] \arrow[d] & \frac{\mathbf{fp}(P(\overline{E}))}{\mathcal{M}_\infty} \arrow[r, "\overline{B}_{\text{fp}}"] \arrow[d] & \mathbf{fp}(L(E)) \arrow[d] \\
\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E}) \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "B"'] & \frac{\mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})}{\mathcal{M}_\infty} \arrow[r, "\overline{B}"] & \mathbf{Mod}\text{-}L(E)
\end{tikzcd}$$

on les fletxes verticals són inclusions de subcategories plenes i T_{fl}, T_{fp} vénen donats per restricció de T.

TEOREMA 4.5.4. *Els functors $\overline{B}$, $\overline{B}_{\text{fp}}$ i $\overline{B}_{\text{fl}}$ són equivalències de categories.*

Necessitarem algunes definicions. Diem que un functor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ és *fidel* si l'aplicació

$$F\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$$

és injectiva per a tot parell d'objectes en $\mathcal{A}$; F és *ple* si l'aplicació anterior és exhaustiva i F és *dens* si per a tot objecte B en $\mathcal{B}$ existeix un objecte A en $\mathcal{A}$ tal que $F(A) \cong B$. Per tal de demostrar el Teorema usarem el següent resultat general [**18**, Proposition 1.3.14].

PROPOSICIÓ 4.5.5. *Les categories $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són equivalents si i només si existeix un functor fidel, ple i dens de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.*

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 4.5.4. En efecte, per la Proposició 4.5.3 tenim que B compleix la mateixa propietat universal que T tret d'isomorfisme natural, per tant $\overline{B}$ defineix una equivalència de categories. Ara, és clar que els functors $\overline{B}_{\text{fl}}$ i $\overline{B}_{\text{fp}}$, donats per restricció de $\overline{B}$, són fidels i plens. De (iii) en la Proposició 4.4.12 tenim que per a tot $M \in \mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}$ existeix $N \in \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ tal que $B(N) = M$. Per tant, el functor $\overline{B}_{\mathrm{fl}}$ és dens i, per 4.5.5, defineix una equivalència de categories. Anàlogament, pel Corol·lari 1.4.6 tenim que $\overline{B}_{\mathrm{fp}}$ és dens i defineix una equivalència de categories. □

Proposició 4.5.6. *Tenim el següent:*

(i) *La categoria* $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}_\infty$ *és equivalent a la categoria quocient* $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}$.

(ii) *La categoria* $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}_\infty$ *és equivalent a la categoria quocient* $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}$.

Demostració. Considerem en cada cas el functor localització:

$$S_{\mathrm{fl}} \colon \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}} \longrightarrow \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}$$
$$S_{\mathrm{fp}} \colon \mathbf{fp}(P(\overline{E})) \longrightarrow \mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}.$$

Per la propietat universal de la localització existeixen functors

$$\overline{T}_{\mathrm{fl}} \colon \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}_\infty$$
$$\overline{T}_{\mathrm{fp}} \colon \mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}_\infty$$

complint, respectivament, $T_{\mathrm{fl}} = \overline{T}_{\mathrm{fl}} S_{\mathrm{fl}}$ i $T_{\mathrm{fp}} = \overline{T}_{\mathrm{fp}} S_{\mathrm{fp}}$. Volem veure que $\overline{T}_{\mathrm{fl}}$ i $\overline{T}_{\mathrm{fp}}$ són equivalències de categories. En virtut de la Proposició 4.5.5 en tenim prou veient que són functors fidels, plens i densos.

Com que $\overline{T}_{\mathrm{fl}}$ i $\overline{T}_{\mathrm{fp}}$ són la identitat sobre els objectes, ambdós són functors densos de manera trivial. La demostració que són functors fidels és anàloga en ambdós casos. Ho veurem només per al cas de $\overline{T}_{\mathrm{fp}}$. Posem $F = \overline{B}_{\mathrm{fp}} \circ \overline{T}_{\mathrm{fp}}$. Recordem que els morfismes en $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}$ són classes d'equivalència $[(f,g)]$ de diagrames en $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))$ (vegeu Secció 1.8),

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

on $\ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{M}$. Tenim que $F([(f,g)]) = (g \otimes \mathbf{1}) \circ (f \otimes \mathbf{1})^{-1}$. Suposem ara que $(g \otimes \mathbf{1}) \circ (f \otimes \mathbf{1})^{-1} = 0$, llavors $g \otimes \mathbf{1} = 0$. D'on deduïm que $\operatorname{im}(g) \in \mathcal{M}_\infty$; com que $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))$ és una categoria abeliana i $\operatorname{im}(g) = \ker(\operatorname{coker}(g))$, de fet $\operatorname{im}(g) \in \mathcal{M}$. Considerem el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M_1 & \ker(g) \arrow[l, "f'"'] \arrow[r, "0"] \arrow[u, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"'] & M_2 \\ & M \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

on f' denota la restricció de f a $\ker(g)$ i i és la inclusió. Com que $M/\ker(g) \cong \operatorname{im}(g) \in \mathcal{M}$, el diagrama anterior ens diu que $[(f,g)] = [(f,0)] = 0$ i F és un functor fidel. Per tant $\overline{T}_{\mathrm{fp}}$ també ho és.

Per tal de veure que $\overline{T}_{\mathrm{fp}}$ és un functor ple, prenem $M_1, M_2 \in \mathbf{fp}(P(\overline{E}))$. Un morfisme en $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}_\infty$ consisteix en una classe d'equivalència $[(f,g)]$ donada per un diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

on $M \in \mathbf{Mod}\text{-}P(\overline{E})$ i $\ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{M}_\infty$. En tenim prou de veure que podem prendre un representant amb $M \in \mathbf{fp}(P(\overline{E}))$. Posem $N' = (\ker f) \cap (\ker g)$ i considerem el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dr, "g"] & \\ M_1 & M/N' \arrow[l, "\overline{f}"'] \arrow[r, "\overline{g}"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Com que $N' \subseteq \ker(f)$ i $\mathcal{M}_\infty$ és tancada per subobjectes tenim que $N' \in \mathcal{M}_\infty$. A més, $\operatorname{coker}(\overline{f}) = \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{M}_\infty$ i $\ker(\overline{f}) = \ker(f)/N' \in \mathcal{M}_\infty$. Hem vist que $[(f,g)] = [(\overline{f}, \overline{g})]$ i podem, doncs, suposar que $f \oplus g \colon M \to M_1 \oplus M_2$ és monomorfisme.

Vegem ara que per a l'M complint aquesta condició tenim $M \in \mathbf{fp}(P(\overline{E}))$. Pel Teorema 4.2.18 (junt amb la Observació 4.2.19) existeixen $P_1 \subseteq M_1$, $P_2 \subseteq M_2$ submòduls projectius finitament generats tals que M_1/P_1, M_2/P_2 són de dimensió finita. Posem $\pi_1 \colon M_1 \to M_1/P_1$ i $\pi_2 \colon M_2 \to M_2/P_2$ les projeccions naturals i

$$N = (\ker \pi_1 f) \cap (\ker \pi_2 g).$$

Tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ P_1 \arrow[d, "i_1"'] & N \arrow[l, "f'"'] \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "i"'] & P_2 \arrow[d, "i_2"] \\ M_1 \arrow[d, "\pi_1"'] & M \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & M_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1/P_1 \arrow[d] & M/N \arrow[l, "f''"'] \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & M_2/P_2 \arrow[d] \\ 0 & 0 & 0 \end{tikzcd}$$

on i_1, i_2, i denoten inclusions, π denota la projecció natural, f', g' vénen induïdes per la propietat universal del nucli i f'', g'' per la propietat universal del conucli. Com que $f'' \oplus g'' \colon M/N \to M_1/P_1 \oplus M_2/P_2$ és monomorfisme tenim que M/N és de dimensió finita i, en particular, per la Proposició 4.4.1 és finitament presentat.

Tenim el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "f'\oplus g'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f\oplus g"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "f''\oplus g''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r] & M_1/P_1 \oplus M_2/P_2 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}
\tag{4.5.1}
$$

és clar que $f' \oplus g'$ és monomorfisme i, com que $P(\overline{E})$ és hereditari, en deduïm que N és projectiu. Considerem una resolució projectiva de M/N per $P(\overline{E})$-mòduls projectius finitament generats:

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \longrightarrow M/N \longrightarrow 0.$$

Aplicant el Lema de Schanuel [**39**, (5.1)] a la successió anterior junt amb la primera fila de (4.5.1) obtenim la següent resolució projectiva de M:

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow N \oplus P \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

En un anell semihereditari, tot mòdul projectiu és isomorf a una suma directa d'ideals finitament generats [**3**, Theorem]. Com que Q és finitament generat podem, doncs, considerar una descomposició en suma directa $N \oplus P = Q_1 \oplus Q_2$ amb $Q \subseteq Q_1$, un projectiu finitament generat. Ara, $M \cong (Q_1 \oplus Q_2)/Q \cong Q_1/Q \oplus Q_2$, descomposa com a suma directa d'un mòdul projectiu i un mòdul finitament presentat. Tenim que

$$M_1 \otimes_{P(\overline{E})} L(E) \cong M \otimes_{P(\overline{E})} L(E) \cong \Big((Q_1/Q) \otimes_{P(\overline{E})} L(E)\Big) \oplus \Big(Q_2 \otimes_{P(\overline{E})} L(E)\Big).$$

Com que $M_1 \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$ és finitament presentat i $Q_2 \otimes_{P(\overline{E})} L(E)$ és un sumand directe seu també és finitament presentat (*cf.* [**39**, Lemma 4.54]). Ara, com que Q_2 és projectiu (no té torsió) deduïm que Q_2 és finitament generat i, per tant, M és finitament presentat. A més, $\ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{M}$ i hem vist que el functor $\overline{T}_{\mathrm{fp}}$ és ple.

Per tal de demostrar-ho per al functor $\overline{T}_{\mathrm{fl}}$ es procedeix anàlogament però usant que la categoria $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}$ és tancada per subobjectes. □

Ara, de la proposició anterior junt amb el Teorema 4.5.4 n'obtenim:

COROL·LARI 4.5.7. *Tenim el següent:*

(i) *Les categories* $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}$ *i* $\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}$ *són equivalents.*
(ii) *Les categories* $\mathbf{fp}(P(\overline{E}))/\mathcal{M}$ *i* $\mathbf{fp}(L(E))$ *són equivalents.*

Aquest resultat ens permet fer alguns càlculs de Teoria K:

PROPOSICIÓ 4.5.8. *Tenim les següents propietats:*

(i) $K_0(\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}})$ *és abelià lliure sobre el conjunt de classes d'isomorfia dels* $P(\overline{E})$*-mòduls dreta simples de* K*-dimensió finita no isomorfs a cap dels*

$$\{M_i(=\operatorname{coker}\nu_i) \mid i \in E^0 \setminus F(E)\}.$$

(ii) *L'aplicació canònica* $\iota\colon K_0(L(E)) \to K_0(\mathbf{fp}(L(E)))$ *defineix un isomorfisme.*
(iii) *El morfisme* $K_0(\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}) \to K_0(\mathbf{fp}(L(E)))$ *és zero.*

DEMOSTRACIÓ. (i) Del Corol·lari 4.5.7 en deduïm que

$$K_0(\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}) \cong K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}/\mathcal{M}).$$

Pel Teorema de Localització de Heller (vegeu per exemple [**77**, Theorem II.6.4]) tenim que aquest darrer grup és isomorf a $K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}})/K_0(\mathcal{M})$ i de la Proposició 4.4.2 junt amb el Lema 4.4.10 en deduïm el que volíem.

(ii) És conseqüència del Corol·lari 4.5.7 junt amb la Proposició 4.4.2.

(iii) Considerem el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))) \\ {\scriptstyle B_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle B_*} \\ K_0(\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathbf{fp}(L(E))) \end{array}$$

on les fletxes horitzontals vénen induïdes per la inclusió de categories i les verticals pel functor B. De (iii) en la Proposició 4.4.2 en deduïm que $\iota_*(K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}})) \subseteq K_0(\mathcal{M})$ i del Corol·lari 4.5.7 junt amb el Teorema de Localització de Heller n'obtenim que

$$K_0(\mathcal{M}) = \ker\left(B_*\colon K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))) \to K_0(\mathbf{fp}(L(E)))\right).$$

Com que $B_*\colon K_0(\mathbf{fp}(P(\overline{E}))_{\mathrm{fl}}) \to K_0(\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}})$ és un morfisme exhaustiu, tenim el resultat. □

Ara estem en condicions de calcular el grup G en el Corol·lari 3.5.4. Sigui $\mathcal{S}$ la categoria abeliana dels $L(E)$-mòduls dreta finitament presentats i de longitud finita tals que els seus factors en una sèrie de composició no són projectius. Observem que la condició $M \in \mathcal{S}$ és equivalent a que M no tingui submòduls projectius. En efecte, si M té submòduls projectius, com que $L(E)$ és hereditari M tindrà algun factor de composició projectiu. Recíprocament, donada una sèrie de composició de M

$$0 < N_1 < \ldots < N_k = M$$

si, posem per cas, N_i/N_{i-1} és projectiu aleshores $N_i \cong N_{i-1} \oplus N_i/N_{i-1}$ i M té submòduls projectius.

Recordem la col·lecció de morfismes Υ definida en la Secció 4.3 i denotem per Υ' la col·lecció de morfismes entre $L(E)$-mòduls projectius finitament generats induïts pels elements de Υ. Com que $Q(E) \cong P(\overline{E})_\Upsilon$ (pel Teorema 4.3.12), $L(E) \cong P(\overline{E})_{\Sigma_1'}$ (Observació 2.2.18) i $\Sigma_1' \subseteq \Upsilon$ és clar que $Q(E) \cong L(E)_{\Upsilon'}$. Ara, per la Proposició 4.4.8 junt amb la Observació 1.4.10, veiem que la categoria $\mathcal{S}$ coincideix amb la categoria $\mathbf{T}_{\Upsilon'}(L(E))$. És clar, pel Teorema de *Devissage* ([**60**, Theorem 3.1.8(1)]), que $K_0(\mathcal{S}) \subseteq K_0(\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}})$ és el grup abelià lliure generat per les classes d'isomorfia dels $L(E)$-mòduls dreta finitament presentats, simples i no projectius. Observem que aquests $L(E)$-mòduls simples es corresponen, pel Lema 4.4.10 junt amb la Proposició 4.4.12, amb els $P(\overline{E})$-mòduls simples, de K-dimensió finita, no projectius i no isomorfs als mòduls simples M_i $(i \in E^0 \setminus F(E))$.

TEOREMA 4.5.9. *Sigui E un buirac finit amb $E^0 = \{1, \dots, d\}$ i $d' = |F(E)|$. Llavors:*

$$K_1(Q(E)) \cong \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{d-d'} \to \left(K^\times\right)^d\right) \oplus \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{d-d'} \to \mathbb{Z}^d\right) \oplus K_0(\mathcal{S}).$$

A més, $K_0(\mathcal{S})$ és el grup abelià lliure generat per les classes d'isomorfia dels $L(E)$-mòduls dreta finitament presentats, simples i no projectius.

DEMOSTRACIÓ. En efecte, de l'anterior tenim que $Q(E) \cong L(E)_{\Upsilon'}$ és una localització universal i $\mathcal{S}$ coincideix amb $\mathbf{T}_{\Upsilon'}(L(E))$. Pel Teorema 1.4.11 tenim la següent successió exacta

$$K_1(L(E)) \longrightarrow K_1(Q(E)) \longrightarrow K_0(\mathcal{S}) \longrightarrow K_0(L(E)) \longrightarrow K_0(Q(E)).$$

Per la Proposició 4.5.8 tenim que $K_0(\mathcal{S}) \longrightarrow K_0(L(E))$ és zero; de fet, $K_0(L(E)) \longrightarrow K_0(Q(E))$ és un isomorfisme com a conseqüència del Teorema 2.4.2 junt amb Teorema 1.3.7.

Per la Proposició 3.5.3 tenim que la successió exacta curta següent és escindida

$$0 \longrightarrow K_1(L(E)) \longrightarrow K_1(Q(E)) \longrightarrow K_0(\mathcal{S}) \longrightarrow 0.$$

Tenim, doncs, que $K_1(Q(E)) \cong K_1(L(E)) \oplus K_0(\mathcal{S})$. Ara, pel Teorema 3.4.6 obtenim

$$K_1(Q(E)) \cong \operatorname{coker}\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \left(K^\times\right)^{d-d'} \to \left(K^\times\right)^d\right) \oplus \ker\left(A'_E - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{d-d'} \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{d-d'} \to \mathbb{Z}^d\right) \oplus K_0(\mathcal{S}),$$

com volíem veure. $\square$

Alguns problemes oberts

Durant l'elaboració d'aquest treball han aparegut diverses qüestions que, creiem, mereixen ésser estudiades posteriorment. A continuació en presentem algunes:

- Una qüestió obvia seria estendre el càlcul de $K_1(L(E))$ al cas que E sigui un graf amb columnes finites. Creiem que, en principi, els nostres resultats s'haurien de poder estendre sense massa problemes a aquest cas.
- Un altre problema obvi és tractar d'estendre els nostres resultats a coeficients més generals que al d'un cos. No tenim una idea clara de com de lluny es pot anar en aquesta direcció. D'una banda, [**20**, Theorem 2.4.1] sembla restringir l'extensió dels resultats que depenen de l'algoritme feble. D'altra banda, Ranicki i Sheiham han demostrat resultats relacionats amb els nostres en [**59**] i [**64**] on admeten coeficients en un anell arbitrari.
- Així mateix, seria interessant relacionar els conceptes tractats en el darrer capítol amb la noció de mòdul de Blanchfield (vegeu [**59, 64**]) i treballar el concepte anàleg al de mòduls de torsió de Cohn (vegeu [**20**, Section 3.3]) sobre l'àlgebra de camins d'un buirac. En particular, seria útil poder donar altres possibles descripcions de la categoria $\mathbf{fp}(L(E))_{\mathrm{fl}}$ (i el seu K_0) en l'esperit de [**4**, Section 6].
- Un altre problema interessant seria estendre les fórmules del càlcul del K_1 a teoria K superior. Concretament, generalitzar el Teorema 3.3.3 i usar-lo per a calcular la teoria K superior de $L(E)$. Almenys una part de les eines necessàries per a poder afrontar aquest problema ja han estat desenvolupades. Per exemple, Grayson va demostrar en [**35**] una generalització del Teorema de Bass, Heller, Swan, Farrell, Hsiang i Siebenmann a teoria K superior (vegeu també [**58**, pàg. 427–428] i [**78**]).
- En la Secció 4.4 hem utilitzat el valor explícit de $K_1(L(E))$, junt amb la successió exacta

$$K_1(P(\overline{E})) \longrightarrow K_1(L(E)) \longrightarrow K_0\big(\mathbf{T}_{\Sigma_1'}(P(\overline{E}))\big) \longrightarrow K_0(P(\overline{E})) \longrightarrow K_0(L(E)),$$

per a calcular $K_0\big(\mathbf{T}_{\Sigma_1'}(P(\overline{E}))\big)$. No obstant, després ens hem adonat que també podem calcular aquest grup fent servir un molt recent resultat de Neeman (vegeu Teorema 4.4.9). Observem que el càlcul de $K_0\big(\mathbf{T}_{\Sigma_1'}(P(\overline{E}))\big)$ juga, després, un rol important en l'estudi dels mòduls finitament presentats sobre $L(E)$. Ara, considerem l'àlgebra de Leavitt $V_{m,n}$ per a $m, n > 1$. En aquest cas, en principi, $V_{m,n}$ no té estructura d'anell de polinomis de Laurent córner-guerxo, de manera que no podem aplicar el Teorema 3.3.3 per a calcular $K_1(V_{m,n})$. Observem que $V_{m,n}$ és una localització universal d'una certa àlgebra lliure $K\langle X\rangle$ respecte algun conjunt Σ. Pel Teorema de

Schofield (Teorema 1.4.11) obtenim la següent successió exacta:

$$K_1(K\langle X\rangle) \longrightarrow K_1(V_{m,n}) \longrightarrow K_0\big(\mathbf{T}_\Sigma(K\langle X\rangle)\big) \longrightarrow K_0(K\langle X\rangle) \longrightarrow K_0(V_{m,n}),$$

on els únics termes no coneguts són $K_1(V_{m,n})$ i $K_0(\mathbf{T}_\Sigma(K\langle X\rangle))$. És possible calcular $K_0(\mathbf{T}_\Sigma(K\langle X\rangle))$ a partir del resultat de Neeman? En cas de resposta afirmativa, potser això ens permetrà calcular $K_1(V_{m,n})$ o, fins i tot, abordar l'estudi dels $V_{m,n}$-mòduls finitament presentats.

Bibliografia

[1] G. Abrams and G. Aranda Pino. The Leavitt path algebra of a graph. *J. Algebra*, 293(2):319–334, 2005.

[2] G. Abrams and G. Aranda Pino. Purely infinite simple Leavitt path algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 207(3):553–563, 2006.

[3] F. Albrecht. On projective modules over semi-hereditary rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:638–639, 1961.

[4] P. Ara. Finitely presented modules over Leavitt algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 191(1-2):1–21, 2004.

[5] P. Ara and M. Brustenga. K_1 of corner skew Laurent polynomial rings and applications. *Comm. Algebra*, 33(7):2231–2252, 2005.

[6] P. Ara and M. Brustenga. The regular algebra of a quiver. *J. Algebra*, 309(1):207–235, 2007.

[7] P. Ara, M. A. González-Barroso, K. R. Goodearl, and E. Pardo. Fractional skew monoid rings. *J. Algebra*, 278(1):104–126, 2004.

[8] P. Ara, K. R. Goodearl, K. C. O'Meara, and E. Pardo. Separative cancellation for projective modules over exchange rings. *Israel J. Math.*, 105:105–137, 1998.

[9] P. Ara, K. R. Goodearl, and E. Pardo. K_0 of purely infinite simple regular rings. *K-Theory*, 26(1):69–100, 2002.

[10] P. Ara, M. A. Moreno, and E. Pardo. Nonstable K-theory for graph algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 10:157–178, 2007.

[11] P. Ara, F. Perera, and F. Wehrung. Finitely generated antisymmetric graph monoids. 2007. Prepint.

[12] G. Aranda Pino, E. Pardo, and M. Siles Molina. Exchange Leavitt path algebras and stable rank. *J. Algebra*, 305(2):912–936, 2006.

[13] G. Aranda Pino, F. Perera, and M. Siles Molina, editors. *Graph algebras. Bridging the gap beetween analysis and algebra.* Servicio de Publicaciones e Intercanvio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga, 2007.

[14] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.

[15] H. Bass, A. Heller, and R. G. Swan. The Whitehead group of a polynomial extension. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (22):61–79, 1964.

[16] G. M. Bergman. Coproducts and some universal ring constructions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 200:33–88, 1974.

[17] G. M. Bergman and W. Dicks. Universal derivations and universal ring constructions. *Pacific J. Math.*, 79(2):293–337, 1978.

[18] A. J. Berrick and M. E. Keating. *Categories and modules with K-theory in view*, volume 67 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[19] J. Berstel and C. Reutenauer. *Rational series and their languages*, volume 12 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[20] P. M. Cohn. *Free rings and their relations*, volume 19 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, second edition, 1985.

[21] P. M. Cohn. *Skew fields*, volume 57 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Theory of general division rings.

[22] P. M. Cohn and W. Dicks. Localization in semifirs. II. *J. London Math. Soc. (2)*, 13(3):411–418, 1976.

[23] A. Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[24] J. Cuntz. Simple C^*-algebras generated by isometries. *Comm. Math. Phys.*, 57(2):173–185, 1977.

[25] J. Cuntz. K-theory for certain C^*-algebras. *Ann. of Math. (2)*, 113(1):181–197, 1981.

[26] J. Cuntz and D. Quillen. Algebra extensions and nonsingularity. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(2):251–289, 1995.

[27] W. Dicks. Comunicació privada. Novembre 2002.

[28] G. A. Elliott. The classification problem for amenable C^*-algebras. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 922–932, Basel, 1995. Birkhäuser.

[29] C. Faith and Y. Utumi. On a new proof of Litoff's theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 14:369–371, 1963.

[30] F. T. Farrell and W.-C. Hsiang. A formula for $K_1 R_\alpha [T]$. In *Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968)*, pages 192–218. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[31] S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[32] K. R. Goodearl. *von Neumann regular rings*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, second edition, 1991.

[33] K. R. Goodearl. von Neumann regular rings and direct sum decomposition problems. In *Abelian groups and modules (Padova, 1994)*, volume 343 of *Math. Appl.*, pages 249–255. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[34] K. R. Goodearl and F. Wehrung. Representations of distributive semilattices in ideal lattices of various algebraic structures. *Algebra Universalis*, 45(1):71–102, 2001.

[35] D. R. Grayson. The K-theory of semilinear endomorphisms. *J. Algebra*, 113(2):358–372, 1988.

[36] X. J. Guo and L. B. Li. K_1 group of finite-dimensional path algebra. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 17(2):273–276, 2001.

[37] E. Kirchberg. The classification of purely infinite C^*-algebras using kasparov's theory. Preprint.

[38] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings*, volume 131 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[39] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[40] L. Le Bruyn. Granada NAG : Examples in noncommutative geometry, 2005. Talks given in Granada, April 2005, see `www.math.ua.ac.be/~lebruyn/paper/lebruyn2005g.pdf`.

[41] L. Le Bruyn. *Noncommutative Geometry@n, Volume 1 : The Tools*. neverendingbooks, 2005.

[42] L. Le Bruyn. *Noncommutative Geometry@n, Volume 2 : The Trade*. neverendingbooks, 2005.

[43] W. G. Leavitt. Modules without invariant basis number. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8:322–328, 1957.

[44] W. G. Leavitt. The module type of a ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103:113–130, 1962.

[45] J. Lewin. Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 145:455–465, 1969.

[46] W. Lück. *L^2-invariants: theory and applications to geometry and K-theory*, volume 44 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[47] B. A. Magurn. *An algebraic introduction to K-theory*, volume 87 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[48] P. Malcolmson. Construction of universal matrix localizations. In Patrick J. Fleury, editor, *Advances in noncommutative ring theory (Plattsburgh, 1981)*, volume 951 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 117–131. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[49] P. Menal and J. Moncasi. K_1 of von Neumann regular rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 33(3):295–312, 1984.

[50] A. Neeman. Nonconmutative localisation in algebraic K-theory. II. *Adv. Math.*, 213(1):785–819, 2007.

[51] A. Neeman and A. Ranicki. Noncommutative localisation in algebraic K-theory. I. *Geom. Topol.*, 8:1385–1425 (electronic), 2004.

[52] A. Neeman, A. Ranicki, and A. Schofield. Representations of algebras as universal localizations. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 136(1):105–117, 2004.

[53] E. Ortega. Rings of quotients of incidence algebras and path algebras. *J. Algebra*, 303(1):225–243, 2006.

[54] A. V. Pajitnov and A. A. Ranicki. The Whitehead group of the Novikov ring. *K-Theory*, 21(4):325–365, 2000. Special issues dedicated to Daniel Quillen on the occasion of his sixtieth birthday, Part V.

[55] N. C. Phillips. A classification theorem for nuclear purely infinite simple C^*-algebras. *Doc. Math.*, 5:49–114 (electronic), 2000.

[56] I. Raeburn. *Graph algebras*, volume 103 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2005.

[57] I. Raeburn and W. Szymański. Cuntz-Krieger algebras of infinite graphs and matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(1):39–59 (electronic), 2004.

[58] A. Ranicki. *Exact sequences in the algebraic theory of surgery*, volume 26 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.

[59] A. Ranicki and D. Sheiham. Blanchfield and Seifert algebra in high-dimensional boundary link theory. I. Algebraic K-theory. *Geom. Topol.*, 10:1761–1853 (electronic), 2006.

[60] J. Rosenberg. *Algebraic K-theory and its applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[61] A. Rosenmann and S. Rosset. Ideals of finite codimension in free algebras and the fc-localization. *Pacific J. Math.*, 162(2):351–371, 1994.

[62] J. J. Rotman. *An introduction to homological algebra*, volume 85 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.

[63] A. H. Schofield. *Representation of rings over skew fields*, volume 92 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[64] D. Sheiham. Invariants of boundary link cobordism. II. The Blanchfield-Duval form. In *Noncommutative localization in algebra and topology*, volume 330 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 143–219. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[65] L. C. Siebenmann. A total Whitehead torsion obstruction to fibering over the circle. *Comment. Math. Helv.*, 45:1–48, 1970.

[66] M. Siles Molina. Algebras of quotients of leavitt path algebras. 2007. Preprint.

[67] L. W. Small. Semihereditary rings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:656–658, 1967.

[68] B. Stenström. *Rings of quotients*. Springer-Verlag, New York, 1975. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 217, An introduction to methods of ring theory.

[69] R. G. Swan. *Algebraic K-theory*. Lecture Notes in Mathematics, No. 76. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[70] R. G. Swan. Excision in algebraic K-theory. *J. Pure Appl. Algebra*, 1(3):221–252, 1971.

[71] W. Szymański. The range of K-invariants for C^*-algebras of infinite graphs. *Indiana Univ. Math. J.*, 51(1):239–249, 2002.

[72] L. N. Vaserstein. On the Whitehead determinant for semi-local rings. *J. Algebra*, 283(2):690–699, 2005.

[73] F. Waldhausen. Algebraic K-theory of generalized free products. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 108(1):135–204, 1978.

[74] F. Wehrung. Embedding simple commutative monoids into simple refinement monoids. *Semigroup Forum*, 56(1):104–129, 1998.

[75] F. Wehrung. Non-measurability properties of interpolation vector spaces. *Israel J. Math.*, 103:177–206, 1998.

[76] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[77] C.A. Weibel. *An introduction to algebraic K-theory.* A forthcoming graduate textbook, see `http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html`.

[78] D. Yao. A note on the K-theory of twisted projective lines and twisted Laurent polynomial rings. *J. Algebra*, 173(2):424–435, 1995.

Índex alfabètic

A_E, 70
A'_E, 71
àlgebra
  de camins d'un buirac, 4
  de Leavitt d'un buirac, 7
  de sèries formals d'un buirac, 5
  de sèries racionals d'un buirac, 42
  regular d'un buirac, 60, 62
algoritme feble, 83
anell
  d'Hermite, 41
  de Lewin-Schreier per la dreta, 80
  de polinomis de Laurent
    córner-guerxo, 65
    guerxo, 13
  de Rickart dreta, 54
  de sèries formals de Laurent córner-guerxo, 76
  Dedekind-finit, 37
  doble de R sobre I, 19
  hereditari dreta, 6
  racionalment tancat, 42
  regular de von Neumann, 51
  semihereditari dreta, 25
  semilocal, 57
  semiperfecte, 57
  semiprimer, 51
  tancat per inversions, 42
  tensorial, 4
aresta, 4
$Aut_0(R, \rho)$, 15

$B(\!(t_+; \beta)\!)$, 76
$B[t_+, t_-; \beta]$, 65
buirac, 4
  invers, 46

característica d'Euler, 79
categoria
  amb successions exactes, 2
  localització d'una, 30
  quocient, 31
$\mathcal{C}$-isomorfisme, 31
clausura de divisió, 42
clausura racional, 42
conjunt
  multiplicatiu, 42
  multiplicativament tancat per dalt, 42
  tancat per factors, 44

$D(E)$, 4
$\deg(r)$, 5
$D(R, I)$, 19
$\mathcal{D}(R \subseteq S)$, 42

epimorfisme, 11
$E(R)$, 2
$E(R, I)$, 23
establement llisa, 12

$F(E)$, 4
filtració
  sobre un R-mòdul, 82
  sobre un anell, 81
font, 4
$\mathbf{fp}(R)$, 79
$\mathbf{fp}(R)_{\mathrm{fl}}$, 79
functor
  dens, 106
  fidel, 106
  ple, 106

$GL(R)$, 2
$GL(R, I)$, 23
graf, 4
  amb columnes finites, 8
grau, 5, 81
  formal, 85
Group, 1
grup
  de classes d'automorfismes, 15
  de classes de nilpotència, 15

de Grothendieck, 1
reduït de classes de nilpotència, 15
de classes de torsió, 15, 67
de Whitehead, 2

IBN, xii
ideal
d'ordre, 76
dreta minimal, 51
graduat, 8
regular de von Neumann, 51
semiprimer, 51
incidència
aplicació d', 4
matriu d', 70
isomorfisme de córner, 64

$J(R)$, 57

$K_0(\mathcal{P})$, 3
$K_0(R)$, 2
$K_0(R, I)$, 20
$K_1(B, \beta)$, 67
$K_1(\mathcal{P})$, 3
$K_1(R)$, 2
$K_1(R, I)$, 20, 23
$K_1(R, \rho)$, 15, 27
k-torsió, 69
$K^\times$, 1

$L(E)$, 7
localització
perfecta dreta, 90
maximal, 90
universal, 9

mòdul
establement lliure, 41
finitament relacionat, 85
matriu plena, 41
$\mathcal{M}_{\overline{E}}$, 97
$\mathcal{M}_\infty$, 97
M_E, 9
$\mu(m)$, 82
Mod-R, 1
monomi, 5
morfisme
d'anells amb unitat local, 16
d'anells honest, 41
de grafs, 8
de grafs complet, 8
Σ-inversor, 9
Σ-inversor universal, 9

μ-base feble, 83
μ-dependent per la dreta, 82
μ-independent per la dreta, 82

$Nil_0(R, \rho)$, 15
$\widetilde{Nil}_0(R, \rho)$, 15
$\nu(r)$, 81

ordre, 5
$o(r)$, 5

$P(E)$, 4
$P(\!(E)\!)$, 5
pica, 4
$P_{\mathrm{rat}}(E)$, 42
proj-R, 1

$Q(E)$, 60, 62
$Q^r_{\mathrm{tot}}(R)$, 90

R-anell, 5
R-anell$_k$, 5
Regla de Cramer, 10, 43
$R\langle \overline{E}; \tau, \delta\rangle$, 48
ρ-homomorfisme, 14
Ring, 1
$\mathcal{R}(R \subseteq S)$, 42
$R[t, t^{-1}; \rho]$, 13

Σ-clausura, 42
$\Sigma(R \subseteq S)$, 42
sistema multiplicatiu, 30
localment petit, 30
sòcol, 51
$\mathrm{Soc}(R)$, 51
subcategoria de Serre, 31
subgraf, 4
complet, 8
subgrup de Vaserstein, 63
submòdul regular, 34
suport, 5
$\mathrm{supp}(r)$, 5

τ-derivació, 46
Teorema d'Inèrcia estable, 39
$T(R \subseteq S)$, 42
$\mathbf{T}_\Sigma(R)$, 11

unitat local, 16
unitificació, 17
$U(R)$, 1

vèrtex, 4
$V(R)$, 63
$\mathcal{V}(R)$, 1

$\chi_R(M)$, 79