ÀLGEBRES ASSOCIADES A UN BUIRAC

Donat un buirac (graf finit orientat) E i un cos K podem considerar diverses K-àlgebres associades a E. Per exemple, l'àlgebra de camins, $P(E)$, que és la K-àlgebra amb una K-base donada pel conjunt de tots els camins (orientats) en el buirac E, amb el producte induït per la concatenació de camins. L'àlgebra de camins de Leavitt, $L(E)$, es pot obtenir com una localització universal de l'àlgebra de camins. Aquesta tesi tracta de la construcció d'embolcalls regulars de von Neumann de les àlgebres de camins de Leavitt, que podem pensar com a "àlgebres de fraccions totals (generalitzades)" d'aquestes. La construcció d'aquesta embolcall regular, en símbols $Q(E)$, és de tal manera que podem calcular $\mathcal{V}(Q(E))$, el monoide de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats. De fet, $\mathcal{V}(Q(E))$ resulta ser isomorf a $\mathcal{V}(L(E))$ que recentment ha estat identificat amb un monoide associat al buirac E en [P. Ara, M. A. Moreno, E. Pardo, Nonstable K-theory for graph algebras, *Algebras Repr. Theory*, 10:157–158, 2007]. La nostra construcció resulta rellevant per al següent problema proposat per Goodearl en [von Neumann regular rings and direct sum decomposition problems, *Abelian groups and modules (Padova, 1994)*, volume 343 of *Math. Appl.*, pages 249–255. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995].

Problema Obert: Quins monoides abelians s'obtenen com a $\mathcal{V}(R)$ per a un anell regular R?

També desenvolupem tècniques per a calcular el K_1 dels anells involucrats, que ens permeten obtenir càlculs explícits de $K_1(L(E))$ i $K_1(Q(E))$. En particular, donem una fórmula per al càlcul del K_1 d'anells de polinomis de Laurent córner-guerxos i demostrem que les àlgebres de camins de Leavitt són Morita equivalents a anells d'aquesta forma. Posteriorment, el valor de $K_1(L(E))$ junt amb la successió exacta de localització universal de Schofield en teoria K ens permet estudiar els mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de camins de Leavitt de E. Per aconseguir aquest propòsit ens ha calgut generalitzar alguns resultats coneguts per al cas de l'àlgebra lliure a l'àlgebra de camins que tenen importància per si mateixos. Com a resultat digne de menció, veiem que l'àlgebra de camins admet una versió de l'algoritme feble de Cohn (amb definicions lleugerament diferents). Utilitzant l'algoritme feble podem provar el següent resultat: tot $P(E)$-mòdul dreta finitament relacionat P conté un submòdul projectiu Q tal que P/Q té K-dimensió finita, que és una generalització d'un Teorema de Lewin sobre l'àlgebra lliure. Aquest resultat juga un paper clau en l'estudi posterior dels mòduls finitament presentats sobre $L(E)$. També veiem que $Q(E)$ és la localització perfecta dreta maximal de $P(\overline{E})$, on $\overline{E}$ denota el *buirac invers* de E, és a dir, el buirac amb els mateixos vèrtexs que E però amb les fletxes en sentit contrari.

QUIVER ALGEBRAS

Given a quiver (finite oriented graph) E and a field K we can consider several K-algebras associated to E. For instance, the path algebra $P(E)$ is the K-algebra with a K-basis consisting of all the (oriented) paths in the quiver E, the product being induced by concatenation of paths. The, so called, Leavitt path algebra, $L(E)$, can be obtained as a universal localization of the path algebra. This thesis deals with the construction of von Neumann regular envelopes of Leavitt path algebras, which can be thought of profitably as "total (generalized) algebras of fractions" of them. This regular envelope, in symbols $Q(E)$, is constructed in such a way that we are able to compute $\mathcal{V}(Q(E))$, the monoid of isomorphism classes of finitely generated projective modules. In fact, $\mathcal{V}(Q(E))$ turns out to be isomorphic to $\mathcal{V}(L(E))$ which recently had been identified with a monoid attached to the quiver E in [P. Ara, M. A. Moreno, E. Pardo, Nonstable K-theory for graph algebras, *Algebras Repr. Theory*, 10:157–158, 2007.] Our construction is relevant to the following problem posed by Goodearl in [von Neumann regular rings and direct sum decomposition problems, *Abelian groups and modules (Padova, 1994)*, volume 343 of *Math. Appl.*, pages 249–255. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.]

Open Problem: Which abelian monoids arise as $\mathcal{V}(R)$'s for regular rings R?

We also develop techniques to compute the K_1 of the rings being involved, which lead us to obtain explicit computations of $K_1(L(E))$ and $K_1(Q(E))$. In particular, we give a formula for the computation of K_1 of corner skew Laurent polynomial rings and show that Leavitt path algebras are Morita equivalent to rings of this shape. Using the value of $K_1(L(E))$ and Schofield's universal localization exact sequence in K-theory we are able to study finitely presented modules over the Leavitt path algebra of E. In order to achieve this aim we have needed to generalize several results from the free algebra to the path algebra which have relevance in their own. Notably, we have seen that the path algebra admits a version of Cohn's weak algorithm (with slightly different definitions). Using the weak algorithm we are able to proof the following result: every finitely related right $P(E)$-module P contains a projective submodule Q such that P/Q has finite K-dimension, which is a generalization of a Lewin's Theorem over the free algebra. This result plays a key role in the later study of finitely presented modules over $L(E)$. We also have shown that $Q(E)$ is the maximal flat epimorphic right ring of quotients of $P(\overline{E})$, where $\overline{E}$ denotes the *inverse quiver*, that is, the quiver with the same vertices than E but with reversed arrows.