Continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de les lleis d'alguns funcionals del moviment Brownià fraccionari

Noèlia Viles i Cuadros

Memòria presentada per aspirar
al grau de Doctora en Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Directora:
Dra. Maria Jolis i Giménez

CERTIFICO que la present Memòria ha estat
realitzada per na Noèlia Viles i Cuadros,
sota la direcció de la Dra. Maria Jolis i Giménez.

Bellaterra, maig del 2009

Signat: Dra. Maria Jolis i Giménez

千里之行，始于足下。

老子,《道德经》

Un viatge de mil milles es comença fent el primer pas.

Lao-Tsé, *Dào Dé Jing*

Índex

Introducció

El moviment Brownià fraccionari és un procés Gaussià introduït per Kolmogorov al 1940 en [Kol40] i estudiat amb més detall per Mandelbrot i Van Ness al 1968 en [MVN68]. Aquest procés estocàstic que és una generalització del moviment Brownià estàndard s'ha utilitzat en la modelització de determinats fenòmens en diferents camps que van des de la física, l'enginyeria o la hidrologia fins a la biologia i l'economia, entre d'altres.

Aquesta família de processos depèn d'un paràmetre H que pren valors a l'interval $(0,1)$ i és anomenat paràmetre de Hurst degut al treball de l'hidròleg anglès Hurst sobre el cabal del riu Nil (veure [Hur51]). En el cas particular que $H=\frac{1}{2}$ tenim el moviment Brownià estàndard i en funció de si H és major o bé menor que $\frac{1}{2}$ presenta propietats molt diferents. Si $H>\frac{1}{2}$ les seves trajectòries són més regulars que les del moviment Brownià estàndard i s'utilitza com a model en situacions de dependència a llarg termini (en anglès, *long-range dependence*). En canvi, si $H<\frac{1}{2}$ les trajectòries són més irregulars que les del moviment Brownià estàndard.

Una de les eines més importants per tractar aquests problemes ha estat la construcció d'un càlcul estocàstic associat a aquests processos que necessita, en general, idees diferents a les usades en el càlcul estocàstic ordinari, ja que els moviments Brownians fraccionaris no són semimartingales per a cap valor del paràmetre $H\neq\frac{1}{2}$.

A partir del desenvolupament del càlcul estocàstic respecte el moviment Brownià fraccionari, s'ha estudiat diversos funcionals d'aquest procés com per exemple el temps local (veure [Kah85] i [CNT01]) i diferents tipus d'integrals estocàstiques, entre d'altres.

Sovint en estadística es necessita estimar el valor real del paràmetre H d'un moviment Brownià fraccionari ja que a la pràctica, en general, aquest valor és desconegut. Per altra banda, és fàcil comprovar que la família de moviments Brownians fraccionaris convergeix en llei, en l'espai de les funcions contínues, cap a B^{H_0} quan $H\to H_0$.

Teorema. *(veure Teorema 1.2.1) La família de moviments Brownians fraccionaris* $\{B^H,\ H\in(0,1)\}$ *convergeix en llei cap a* B^{H_0} *en l'espai* $\mathscr{C}([0,T])$ *quan* H *tendeix a* H_0.

Tenint en compte aquest teorema és interessant considerar alguns funcionals del moviment Brownià fraccionari i estudiar si conserven aquesta propietat, és a dir, ens podem preguntar si la seva llei es manté a prop de la del funcional corresponent per B^{H_0}, quan H tendeix a H_0. A més, aquest tipus de resultats justifiquen d'alguna manera que s'usi com a model un moviment Brownià fraccionari $B^{\hat{H}}$ on $\hat{H}$ és l'estimació del valor real del paràmetre de Hurst H.

En aquest treball hem considerat els funcionals donats pel temps local, les integrals mútiples tipus Itô i tipus Stratonovich de funcions deterministes i la integral simètrica tipus Russo-Vallois de processos estocàstics no adaptats. Tots aquests funcionals donen lloc a processos amb trajectòries contínues i per tant hem estudiat la continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de les lleis d'aquests funcionals dins l'espai de les funcions contínues.

Per demostrar la convergència en llei dels diferents funcionals en l'espai de les funcions contínues hem seguit el procediment habitual, primer provar l'ajustament de la família de lleis i després la convergència de les distribucions en dimensió finita.

El primer funcional del moviment Brownià fraccionari que estudiarem és el temps local i el nostre resultat principal és el següent:

Teorema. *(veure Corol·lari 2.3.3) Donat* $H_0 \in (0,1)$*, la família* $\{L^H\}_{H\in(0,1)}$ *de temps locals dels moviments Brownians fraccionaris convergeix en llei al temps local* L^{H_0} *de* B^{H_0} *en* $\mathscr{C}([-D,D]\times[0,T])$*, per a qualsevol* D, $T>0$ *, quan* H *tendeix a* H_0.

La resta de funcionals que tractarem en aquesta memòria són diferents tipus d'integrals estocàstiques.

Al Capítol 3 provem la continuïtat respecte el paràmetre H de les lleis de les integrals múltiples estocàstiques tipus Itô i Stratonovich de funcions deterministes quan H tendeix a $H_0 \in \left[\frac{1}{2},1\right)$ amb $H > \frac{1}{2}$. Per a la integral múltiple estocàstica tipus Itô, la classe d'integrands que prenem és un subconjunt del seu domini, l'espai de funcions de $L^2([0,T]^n)$. Per aquest tipus d'integral el resultat principal obtingut és:

Teorema. *(veure Teorema 3.2.7) Sigui* $f \in L^2([0,T]^n)$ *una funció simètrica. Aleshores, la família de lleis en* $\mathscr{C}([0,T])$ *dels processos* $\{\mathcal{I}_n^H(f),\ H\in(\frac{1}{2},1)\}$ *convergeix feblement cap a la llei de* $\mathcal{I}_n^{H_0}(f)$*, quan* H *tendeix a* $H_0 \in [\frac{1}{2},1)$*, on* $\mathcal{I}_n^H(f)$ *denota la integral múltiple tipus Itô de* f *respecte* B^H *entesa com a procés.*

Tal i com veurem en el proper teorema, també per a la integral múltiple tipus Stratonovich ens hem hagut de restringir a un subconjunt del domini, en aquest cas la classe d'integrands és l'espai de funcions contínues $\mathscr{C}([0,T]^n)$. Aquestes restriccions es deuen a que no es coneixen gaires conjunts de funcions integrables Stratonovich respecte el procés de Wiener (i un d'aquests és precisament $\mathscr{C}([0,T]^n)$) i també a les dificultats que hem tingut a l'hora de provar l'ajustament usant el Criteri de Billingsley (veure Teorema 1.1.14).

El nostre resultat principal per a la integral múltiple tipus Stratonovich és el teorema següent:

Teorema. *(veure Teorema 3.3.8) Sigui* $f \in \mathscr{C}([0,T]^n)$ *una funció simètrica. Aleshores, la família de processos* $\{\mathcal{I}_n^{S,H}(f), H \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ *convergeix en llei a* $\mathcal{I}_n^{S,H_0}(f)$ *en l'espai* $\mathscr{C}([0,T])$*, quan* H *tendeix a* $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$*, on* $\mathcal{I}_n^{S,H}(f)$ *denota la integral múltiple tipus Stratonovich de* f *respecte* B^H*, entesa com a procés.*

Un cop provada l'estabilitat en llei de les integrals múltiples tipus Itô i Stratonovich amb $H > \frac{1}{2}$, ens hem plantejat estudiar resultats similars per $H < \frac{1}{2}$. Degut a la complexitat del propi domini de la integral estocàstica per $H < \frac{1}{2}$ i a la dificultat que suposa provar l'ajustament, només veiem la continuïtat respecte el paràmetre H de les lleis de la integral estocàstica de primer ordre.

El resultat principal per a la integral estocàstica de primer ordre respecte B^H amb $H < \frac{1}{2}$ és el següent:

Teorema. *(veure Teorema 4.2.4) Sigui* $f \in \mathcal{L}_T^{H'}$ *amb* $H' < H_0$ *i* $H_0 \in (0, \frac{1}{2}]$*, on* $\mathcal{L}_T^{H'}$ *és el domini de la integral estocàstica de primer ordre respecte* $B^{H'}$*. Aleshores, la família d'integrals de primer ordre* $\{\mathcal{I}_1^H(f)\}_{H \in (H', \frac{1}{2}]}$ *convergeix en llei cap a* $\mathcal{I}_1^{H_0}(f)$*, en l'espai* $\mathscr{C}([0,T])$*, quan* $H \to H_0$*.*

El darrer funcional que tractem al Capítol 5 és la integral simètrica tipus Russo-Vallois (introduïda en un context general a [RV93]) respecte el moviment Brownià fraccionari (amb $H \in V_0$ on V_0 és un cert interval contingut en $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$) per a processos estocàstics no adaptats u^H. En aquest cas hem hagut d'imposar una sèrie d'hipòtesis que tot seguit descriurem breument (Bloc A, Bloc B i Condició C).

El Bloc A (veure pàg. 72) conté cotes uniformes en H dels moments d'ordre p del procés i de la derivada de Malliavin. En canvi, les hipòtesis del Bloc B (veure pàg. 76) són condicions de regularitat, uniformes en H, de les trajectòries del procés i de la seva derivada de Malliavin. Finalment, la Condició C (veure pàg. 79) és una hipòtesi sobre la derivada de Malliavin necessària per definir la traça del procés en un entorn d'$H_0 = \frac{1}{2}$. Aquesta última condició implica que el procés $u^{1|2}$ és integrable Stratonovich.

El resultat principal obtingut per a la integral estocàstica tipus Russo-Vallois és el següent:

Teorema. *(veure Teorema 5.2.14) Sigui* $\{u^H\}_{H \in V_0}$ *una família de processos estocàstics amb trajectòries contínues tals que satisfan els blocs d'hipòtesis A i B i en el cas que* $H_0 = \frac{1}{2}$ *també la Condició C i a més,*

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}),$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$ *quan* $H \to H_0$. *Aleshores, la família de les lleis de les integrals estocàstiques tipus Russo-Vallois* $\{\int_0^t u_s^H dB_s^H,\ t \in [0,T]\}_{H \in V_0}$ *convergeix feblement cap a la llei de* $\{\int_0^t u_s^{H_0} dB_s^{H_0},\ t \in [0,T]\}$ *en* $\mathscr{C}([0,T])$ *quan* $H \to H_0$.

Els resultats del Capítol 2 i del Capítol 3 estan publicats als articles següents:

- **M. Jolis, N. Viles** *Continuity in law with respect to the Hurst parameter of the local time of the fractional Brownian motion.* J. Theoret. Probab. 20 (2007), no. 2, 133–152.
- **M. Jolis, N. Viles** *Continuity with respect to the Hurst parameter of the laws of the multiple fractional integrals.* Stochastic Process. Appl. 117 (2007), no. 9, 1189–1207.

Estructura de la memòria

Aquesta memòria consta de cinc capítols autocontinguts, de manera que cada capítol es pot llegir de forma independent (només es necessiten alguns resultats del capítol de Preliminars) i s'encapçala amb una introducció i una secció de preliminars.

En el primer capítol es donen algunes definicions i resultats de convergència feble de probabilitats i de convergència en llei de variables aleatòries i processos estocàstics, tant en el cas uniparamètric com en el cas biparamètric que s'usaran en diversos capítols d'aquest treball. També es fa una breu introducció del *moviment Brownià fraccionari*, comentant algunes de les seves propietats característiques i les aplicacions que motiven. En aquest capítol es troba el resultat essencial de convergència en llei que ha motivat la realització d'aquesta memòria.

Al segon capítol s'estudia la continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de les lleis d'una família de temps locals respecte el moviment Brownià fraccionari.

En el tercer capítol es prova la convergència en llei de les integrals estocàstiques múltiples tipus Itô i Stratonovich de funcions deterministes respecte el moviment Brownià fraccionari amb $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

En el quart capítol s'estudia la convergència en llei de la integral simple d'una funció determinista però respecte el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in (0, \frac{1}{2})$.

En el darrer capítol de la memòria s'usa el càlcul estocàstic de variacions, conegut amb el nom de càlcul de Malliavin i es prova la continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de les lleis de la integral simètrica tipus Russo-Vallois per H en un cert interval contingut en $[\frac{1}{2}, 1)$ quan H està a prop d'H_0.

Agraïments

Le premier thé est amer comme la vie,
le second est fort comme l'amour
et le dernier est doux comme la mort.
Cérémonie du thé, Les Touaregs

Vint-i-set minuts després d'arribar al C1/212 em preparo un te a la cuina del departament. Ja és hora de dipositar la tesi i encara em falta escriure *els agraïments*, així que sense més preàmbuls poso fil a l'agulla i faig un esbós mentalment.

Primer de tot voldria agrair d'una forma molt especial a la Maria, *la meva mare matemàtica*, pel fet de donar-me l'oportunitat de començar aquest viatge pel món de la recerca, acompanyar-m'hi i contagiar-me la passió per l'anàlisi estocàstica. Gràcies per escoltar-me i oferir-me l'ajuda i la dosi de confiança suficients per poder seguir endavant.

Als meus pares a qui dedico aquest treball per donar-me el millor que tinc, estar sempre al meu costat oferint-me la seva ajuda incondicional i respectant les meves decisions. Amb vosaltres he gaudit de moltes coses bones de la vida i no me n'oblidaré mai: *Us estimo*! També el dedico a la meva àvia, la responsable d'ensenyar-me alguns dels secrets de la natura i la cuina catalana i que he perdut mentre feia aquest viatge. Gràcies per donar-me força i optimisme quan més ho necessito.

L'aigua comença a bullir i el te ja està a punt. Amb la tassa de Publicacions Matemàtiques a la mà, em dirigeixo al despatx. Allà, al costat de les escales em trobo a l'Ignasi, el Lluís, el Jaume i la Laia i em desitgen un bon dia. Aquest ambient tan càlid que es respira al departament fa que et sentis com a casa i comencis la jornada amb molta energia i un somriure d'orella a orella. I què cal dir de secretaria, sens dubte la més atent, eficient i amb més *salero* de tot el campus. I quan sembla que l'ordinador no s'engega, truques als informàtics i de seguida, se't planta la Meri al despatx, fent-li un diagnòstic: *S'haurà de canviar la placa base!* El meu agraïment al Departament de Matemàtiques de la UAB, a la meva Àrea, al Grup de Probabilitat de la UB i als meus companys d'Economia de l'Empresa de Sabadell.

Dins del meu cap, passa una a una, com si fossin diapositives, les cares de tots els que he conegut al llarg d'aquest viatge apassionant i ple d'aventures. Rostres que no es rendeixen davant el primer obstacle, lluiten pels seus somnis i ideologies i actuen davant una alarma de crisi. Alguns es mostren tal com són, altres prefereixen dissimular entre la multitud però tots ells amb quelcom que els fa especials i entranyables. *Potser som només unes gotes d'aigua, però si no hi fóssim, l'oceà les trobaria a faltar.*

Als meus companys de doctorat, és tant el que he après de tots vosaltres i els moments que hem compartit que necessitaria omplir moltes pàgines i encara em quedaria curta. Els divendres a la gespa, els tions, les discussions lingüístiques, els semanaris, les excursions, les tesis i tesines, la simbiosi del C1/212, les converses de cafè i pissarra, els jeroglífics, les festes i concerts amb poc seny i molta Rauxa, els Sant Jordi des de l'exili...fets que es converteixen en *petits tresors* que es mereixen un sincer agraïment. També, a la resta de matemàtics escampats per tot el món (Brasil, Norge, Italia, México, Россия, Asturies, Marbella, Madrid, Deutschland, *Ελλάδα*, Portugal...) i amb qui he pogut degustar diferents cultures. Potser el viatge ens condueixi per altres camins, però sempre que vulgueu podeu comptar amb mi. Gràcies per ser com sou, no us canviaria per res del món!

A les meves companyes de pis per tot el que hem viscut juntes, pels nostres calendaris i les hores que hem estat xerrant, ja sigui a la cuina esperant que es fessin els macarrons o al sofà del menjador amb la televisió de fons.

Als companys de llicenciatura i a les meves noietes, l'Àngels, la Montse, l'Ester, la Sònia, espero veure-us ben aviat i fem una *xerradeta*. A l'Emi perquè sempre estiguem unides pel pensament. A la Meritxell per compartir la fase inicial d'aquest viatge que com vam dir un dia potser ens porta fins a Ítaca. Als malalts de Llach i del Martí i Pol. *Que tinguem sort!*

A la meva família, especialment a la meva padrina Maria quasi centenària, als meus tiets i als meus cosins de Biosca i Coll de Nargó per tot el que hem celebrat i viscut junts. A la Júlia pel teu somriure juganer i dolç com la mel que em roba el cor en un tres i no res. Al Roger i al Marcel per totes les peces que hem muntat i desmuntat. Al Joan, la Carme i la Montserrat de Ca la Florinda, pel pa i les excel·lents coques i mones. A la Montse i a la Nuriona, les *Cuadros* de Manresa que tant ens trobem ballant en un concert de Rauxa com fent corrandes o parlant pel fèissbuc. Gràcies, sou els millors!

Després de donar-hi voltes, finalment em vaig apuntar als camps de solidaritat de Setem. Recordo que al tríptic hi posava:*No ho oblidaràs mai* i efectivament no ho oblidaré mai. Sens dubte, una de les millors experiències de la meva vida, d'aquelles que et canvien, t'enriqueixen per dins i es nota per fora. Durant aquell mes a Columbe i Riobamba, vaig aprendre moltíssim, em vaig adonar del munt de coses prescindibles que ens envolten i actuen com a murs que no deixen veure els autèntics valors, imprescindibles per conviure i sobreviure. Als monitors de Quito i Riobamba, a la mama Gladys, per tot el *carinyo* i *las agüitas* i als nens i nenes de Columbe, sempre estareu amb mi. Al millor equip, *les refresh*: a l'Anna per ser la coordi nº1, a la Judith per fer-me de germaneta a Columbe, a la Sandra per ser tan positiva (quan fem el *barranquillo*?), a la Susana per estar al meu costat a la selva i mentre sobrevolàvem l'huracà (*¿Te imaginas que ahora el avión se cae y nos morimos?*), a la petita Irene per la seva espontaneïtat (*juguem a la pinça*), a l'Eli per encomanar la seva alegria i també al Rubén, l'únic noi del grup, potser per això ha desaparegut. Espero poder compartir amb vosaltres més viatges i nous projectes.

Als meus alumnes de veterinària, d'empresarials i d'informàtica per la vostra paciència i tots els maldecaps que us he ocasionat amb tantes fórmules, taules i el fantàstic T.C.L.

A la meva llengua i al meu país, espero que ben aviat el somni de molts catalans es faci realitat. A Biosca, el meu poble que m'enamora cada dia i em transmet un sentiment indescriptible del que n'estic orgullosa. *Ja tinc ganes de tornar a baixar pel tobogan!*

A la Sofia Kovalevskaya una gran matemàtica russa que sempre he admirat perquè tot i que les circumstàncies de la seva època no li van posar gens fàcil va demostrar que difícil no significa impossible. *It is impossible to be a mathematician without having the soul of a poet.*

Després d'escriure això, m'alegro d'haver escollit l'opció de fer el doctorat i valoro molt positivament haver dedicat aquests anys de la meva vida al món de les matemàtiques, malgrat que les perspectives de futur per a una doctorant i falsa associada no eren gaire esperançadores. *Sense la vostra ajuda això no hauria estat possible!*

Em sembla que ja ha arribat l'hora de dipositar la tesi, però abans m'agradaria copiar unes línies que vaig escriure i les dedico a tots els que *l'atzar* us condueixi fins aquí:

Una successió encadenada de somriures latents
teixeix amb imatges una motxilla de sac.
Dissimulats, transparents, generosos,
cooperen i regalen mirades confidents,
alimenten amb fets palpables les arrels de l'amistat.

Embriagats d'esperança i encesos per la il·lusió
convergeixen a la terra dels somnis, lliures d'incerteses
bescanvien dinàmiques de grup i iniciatives
segellen amb tinta el compromís de nous reptes.

De tant en tant, s'endinsen al bosc dels teoremes,
i malgrat la boira descobreixen noves dreceres
fondegen la vall de la tendresa, neta d'injustícies,
viatgen amb optimisme, sense paranys ni mentides.

Alumnes de l'atzar dicten les regles del joc,
acoten l'efervescència dels moments que comparteixen
trencant les cadenes d'un silenci pausat
esbossant amb guix camins de llibertat.

Obre els ulls, mira al teu voltant,
escolta el so juganer d'aquests mots diatònics,
apa, dóna'm la mà:
"Tot està per fer i tot és possible."

Biosca, abril 2009

Capítol 1

Preliminars

En aquest capítol presentem algunes de les definicions i resultats que utilitzarem al llarg d'aquest treball. A la primera secció introduïm els resultats sobre convergència en llei. Dediquem la segona secció al moviment Brownià fraccionari esmentant algunes de les seves principals propietats i demostrant un resultat de convergència en llei. Finalment, a la tercera secció presentem un resultat general que serà l'eina principal per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita dels processos estocàstics considerats.

1.1 Resultats principals sobre convergència en llei

Començarem veient la convergència feble per a mesures de probabilitat i després ho particularitzem a les lleis de variables aleatòries i processos estocàstics.

1.1.1 Convergència feble de mesures de probabilitat

Considerem un espai mètric G dotat amb la σ-àlgebra de Borel, $\mathcal{E}$. Denotem per $\mathscr{P}(G)$ l'espai de les mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$.

El següent resultat, conegut com Teorema de Portmanteau, mostra diferents definicions equivalents sobre la convergència feble d'una successió de mesures de probabilitat $\{P_n\}$ en $(G, \mathcal{E})$ cap a una certa mesura de probabilitat P.

Teorema 1.1.1. *(Theorem 2.1, [Bil68]) Siguin P_n i P mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$. Les següents condicions són equivalents:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \int f\, dP_n = \int f\, dP$, *per a tota $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i acotada.*

(ii) $\limsup_{n\to\infty} P_n(A) \leqslant P(A)$, *per a tot A tancat.*

(iii) $\liminf_{n\to\infty} P_n(A) \geqslant P(A)$, *per a tot A obert.*

(iv) $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$, *per a tot $A \in \mathcal{E}$ tal que $P(\partial A) = 0$.*

D'aquestes condicions, la més utilitzada i la que establirem com a definició és la condició (i).

Definició 1.1.2. *Direm que una successió de mesures de probabilitat* $\{P_n,\, n \geqslant 0\}$ *definides en* $(G, \mathcal{E})$ *convergeix feblement cap a una altra mesura de probabilitat* P *i ho denotem per*

$$P_n \xrightarrow{w} P,$$

si

$$\int_G f(x) P_n(dx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_G f(x) P(dx),$$

per a tota funció $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua i acotada.*

Tot seguit introduïm les definicions de conjunt relativament compacte i ajustat que més endavant usarem per provar la convergència feble.

Definició 1.1.3. *Es diu que un conjunt* $A \subset \mathscr{P}(G)$ *és relativament compacte si tota successió d'elements d'aquest conjunt té una subsuccessió feblement convergent.*

Definició 1.1.4. *Un conjunt* $A \subset \mathscr{P}(G)$ *és ajustat si per a tot* $\varepsilon > 0$ *existeix un compacte* K *en* G *tal que* $\mu(G \setminus K) \leqslant \varepsilon$, *per a tota* $\mu \in A$.

1.1.2 Convergència en llei de variables aleatòries.

Associada a la convergència feble de mesures, tenim la convergència en llei d'una successió de variables aleatòries a valors en G.

Sigui $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espai de probabilitat i X una variable aleatòria que pren valors en un espai mètric G. Anomenarem *llei* o *distribució* de X, a la mesura imatge $P \circ X^{-1}$. Aquesta mesura de probabilitat la denotarem per $\mathscr{L}(X)$ i pertany a $\mathscr{P}(G)$.

Definició 1.1.5. *(veure pàg. 24, [Bil68]) Considerem una successió de variables aleatòries* $\{X_n,\, n \geqslant 0\}$ *que prenen valors en* G, *definides en espais de probabilitat* $(\Omega_n,\, \mathscr{F}_n,\, P_n)$, *amb lleis* $\mathscr{L}(X_n)$. *Direm que* $\{X_n,\, n \geqslant 0\}$ *convergeix en llei a* X *en* G *i escriurem*

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

si $\mathscr{L}(X_n) \xrightarrow{w} \mathscr{L}(X)$.

Si denotem per E_Q l'esperança matemàtica sota la probabilitat Q, aquesta definició és equivalent a la següent:

Definició 1.1.6. *Direm que* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, *si per a tota funció* $f : G \to \mathbb{R}$, *contínua i acotada tenim que*

$$E_{P_n}(f(X_n)) \to E_P(f(X)).$$

Sovint, al llarg d'aquesta memòria, ens interessarà estudiar la convergència en llei de funcions contínues de variables aleatòries i per aquest motiu enunciem la següent proposició:

Proposició 1.1.7. *(Corollary 1, [Bil68]) Sigui h una funció contínua, $h : G \to G'$, on G i G' espais mètrics, i*

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$$

en G. Aleshores,

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} h(X)$$

en G'.

Vegem una aplicació d'aquesta proposició a l'exemple següent :

Exemple 1.1.8. *Considerem els espais mètrics $G = \mathscr{C}([0,1])$, $G' = \mathbb{R}$ i la funció*

$$h(x) = \sup_{t \in [0,1]} x(t).$$

Com que la funció h és contínua, per la Proposició 1.1.7 tenim que si $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ en $\mathscr{C}([0,1])$ aleshores

$$\sup_{t \in [0,1]} X_n(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \sup_{t \in [0,1]} X(t)$$

en $\mathbb{R}$.

Si $G = \mathscr{C}([0,T]^m)$, tot i que les distribucions en dimensió finita determinen la llei de la variable aleatòria, per tenir convergència en llei no és suficient veure la convergència feble de les distribucions en dimensió finita (per a les quals podem usar les funcions característiques, ja que són probabilitats en $\mathbb{R}^k$). En canvi, si afegim que la successió de les lleis $\{P_n,\ n \geqslant 0\}$ és relativament feblement compacte aleshores sí que s'obté la convergència en llei.

De fet, en el cas d'un espai mètric arbitrari, el mètode que seguirem per provar la convergència feble d'una successió de mesures de probabilitat es pot resumir en dos passos: primer es demostra que la successió és relativament compacte i després, es veu que tota parcial convergent convergeix cap al mateix límit.

Amb tot això, observem la necessitat d'obtenir criteris que ens assegurin la compacitat relativa. El criteri principal el dóna el Teorema de Prohorov ja que proporciona una condició suficient en el cas d'espais mètrics arbitraris i una condició necessària per a espais separables i complets. Vegem-ho en els teoremes següents:

Teorema 1.1.9. *Si un subconjunt A de $\mathscr{P}(G)$ és ajustat, aleshores és relativament compacte.*

Teorema 1.1.10. *Suposem que G és un espai mètric separable i complet. Si un subconjunt A de $\mathscr{P}(G)$ és relativament compacte aleshores és ajustat.*

Així, en el cas de tenir espais mètrics separables i complets podem caracteritzar els subconjunts relativament compactes de $\mathscr{P}(G)$:

Teorema 1.1.11. *Sigui G un espai mètric separable i complet. Un subconjunt A de $\mathscr{P}(G)$ és relativament compacte si i només si és ajustat.*

1.1.3 Convergència en llei de processos estocàstics continus

Considerem ara que tenim una successió de processos estocàstics $\{X_n(t) : \ t \in \mathcal{T}, \ n \geqslant 0\}$ a valors en $\mathbb{R}$, parametritzats per un espai mètric compacte $\mathcal{T}$ i amb trajectòries contínues. Podem pensar que els processos X_n són variables aleatòries a valors en l'espai de Banach de les funcions contínues $G = \mathscr{C}(\mathcal{T})$.

Per demostrar la convergència en llei dels processos X_n cap a un cert procés X en l'espai $G = \mathscr{C}(\mathcal{T})$, seguirem els passos següents:

(i) Demostrar que la successió de lleis $\{\mathscr{L}(X_n), \ n \geqslant 0\}$ és relativament compacte en $\mathscr{P}(\mathscr{C}(\mathcal{T}))$. Pel Teorema de Prohorov, sabem que en un espai mètric separable i complet és suficient provar que la família de lleis és ajustada.

(ii) Demostrar que tota parcial $\{\mathscr{L}(X_{n_k}), \ k \geqslant 0\}$ feblement convergent ho és cap al mateix límit $\mathscr{L}(X)$.

La condició *(ii)* es pot canviar per aquesta altra condició, sovint més fàcil de comprovar: (ii') Per a tot $k \geqslant 1$ i per a tot conjunt d'índexs $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$,

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X(t_1), \dots, X(t_k)), \tag{1.1.1}$$

en $\mathbb{R}^k$.

Per veure l'ajustament, s'utilitzen criteris basats en la caracterització dels conjunts relativament compactes (per a la topologia de la convergència uniforme) que ens dóna el Teorema d'Ascoli-Arzelà.

Considerem l'espai de funcions contínues $\mathscr{C}([0,T])$ i prenem la topologia de la convergència uniforme donada per la distància

$$\rho(x,y) = \sup_{t \in [0,T]} |x(t) - y(t)|.$$

Es defineix el *mòdul de continuïtat* $w_x(\delta)$ d'un element x de $\mathscr{C}([0,T])$ com

$$w_x(\delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |x(s) - x(t)|, \qquad 0 < \delta < T.$$

El Teorema d'Ascoli-Arzelà ens diu que:

Teorema 1.1.12. *Un subconjunt A de l'espai $\mathscr{C}([0,T])$ té clausura compacta si i només si*

$$\sup_{x \in A} |x(0)| < \infty$$

i

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w_x(\delta) = 0.$$

Com a corol·lari del Teorema d'Arzelà-Ascoli per al cas $G = \mathscr{C}([0,T])$ tenim el resultat següent:

Teorema 1.1.13. *(Theorem 8.2, [Bil68]) Una família de mesures de probabilitat* $\{P_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *en* $\mathscr{C}([0,T])$ *és ajustada si i només si*

(i) Per a cada $\eta > 0$ *existeix un* α *tal que*

$$P_\lambda\{x : \ |x(0)| > \alpha\} \leqslant \eta, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

(ii) Per a cada $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, *existeix un* $\delta \in (0,T)$, *tal que*

$$P_\lambda \left\{ x : \sup_{|s-t|<\delta} |x(s) - x(t)| \geqslant \varepsilon \right\} < \eta, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

A la pràctica s'usen altres resultats que tenen com a base aquest darrer. Un exemple n'és el *Criteri de Billingsley* que dóna una condició suficient per provar l'ajustament d'una família de variables aleatòries a valors en $\mathscr{C}([0,T])$ i que presentem a continuació:

Teorema 1.1.14. *(Theorem 12.3, [Bil68]) La família de lleis de* $\{X_n;\ n \geqslant 0\}$ *en* $\mathscr{C}([0,T])$ *és ajustada si satisfà les dues condicions següents:*

(i) La successió $\{X_n(0)\}$ *és ajustada.*

(ii) Existeixen constants $\gamma \geqslant 0$ *i* $\alpha > 1$ *i* F *funció contínua i creixent en* $[0,T]$ *tal que*

$$P\{|X_n(t_2) - X_n(t_1)| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t_2) - F(t_1)|^\alpha, \tag{1.1.2}$$

per a tot $t_1,\ t_2 \in [0,T]$ *i* n *i* λ *positius.*

Sovint s'utilitza la següent condició sobre els moments dels increments de X_n

$$E|X_n(t_2) - X_n(t_1)|^\gamma \leqslant |F(t_2) - F(t_1)|^\alpha, \tag{1.1.3}$$

que implica la condició (ii).

Fins aquí hem vist criteris que donen l'ajustament en el cas d'una família de processos uniparamètrics. En el nostre treball, més precisament en el Capítol 2, necessitarem introduir resultats que ens permetin provar l'ajustament de famílies de processos biparamètrics.

En aquest sentit, cal citar el Criteri de Chentsov (veure [Cen71]), i el de Bickel i Wichura (veure [BW71]), per a processos multiparamètrics.

En aquest treball, usarem una generalització del Criteri de Billingsley (veure Teorema 1.1.14) per a processos continus i amb paràmetre bidimensional.

Teorema 1.1.15. *(veure [Yor83]) Considerem $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una família de processos en $\mathscr{C}([0,T]\times[-D,D])$. Sigui P_n la llei imatge del procés X_n definida en $\mathscr{C}([0,T]\times[-D,D])$. La família de lleis $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associada a la família de processos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és ajustada si existeixen $p_i>0$, $i=1,2,3,4$, α, β, $\gamma>1$, F, G funcions contínues i creixents tals que:*

(i) $E|X_n(0,0)|^{p_1}<\infty$.

(ii) $E|X_n(0,t_2)-X_n(0,t_1)|^{p_2}<(F(t_2)-F(t_1))^{\alpha}$.

(iii) $\sup_n E(|X_n(s_2,0)-X_n(s_1,0)|^{p_3})<(G(s_2)-G(s_1))^{\beta}$, *per a tot* $s_1\leqslant s_2$.

(iv) $\sup_n E|X([s_1,s_2]\times[t_1,t_2])|^{p_4}<(|s_2-s_1||t_2-t_1|)^{\gamma}$, *per a tot* $(s_1,t_1)\leqslant(s_2,t_2)$, *on* $X([s_1,s_2]\times[t_1,t_2])=X(s_1,t_1)+X(s_2,t_2)-X(s_1,t_2)-X(s_2,t_1)$.

1.2 El moviment Brownià fraccionari

Un procés Gaussià centrat $B^H=\{B^H_t,\ t\in[0,T]\}$, definit en un espai de probabilitat $(\Omega,\mathscr{F},P)$, s'anomena *moviment Brownià fraccionari* amb paràmetre de Hurst $H\in(0,1)$ si té funció de covariància

$$R_H(t,s)=E(B^H_tB^H_s)=\frac{1}{2}(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}). \tag{1.2.1}$$

Quan $H=\frac{1}{2}$ aquest procés és el moviment Brownià estàndard.

Gràcies a la representació integral del moviment Brownià fraccionari en termes del moviment Brownià estàndard proporcionada per Mandelbrot i Van Ness (veure també Samorodnitsky i Taqqu [ST94]) que presentem a continuació, es pot veure que la funció de covariància R_H és realment una funció de covariància, és a dir, és una funció simètrica i definida positiva,

$$B^H_t=\frac{1}{C_1(H)}\int_{\mathbb{R}}[((t-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}-((-s)^+)^{H-\frac{1}{2}}]dB^{1|2}_s, \tag{1.2.2}$$

on $\{B^{1|2}(A)$, A subconjunt de Borel acotat de $\mathbb{R}\}$ és una mesura Browniana i

$$C_1(H)=\left(\int_0^{\infty}((1+s)^{H-\frac{1}{2}}-s^{H-\frac{1}{2}})^2ds+\frac{1}{2H}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aquesta representació tot i ser força senzilla té l'inconvenient que el seu domini d'integració és no acotat. També tenim la representació com a integral d'un nucli determinista respecte el moviment Brownià estàndard (veure [AMN01], [DÜ99] i [NVV99]):

$$B^H_t=\int_0^t K_H(t,s)dB^{1|2}_s. \tag{1.2.3}$$

Aquest resultat és molt útil per la construcció del càlcul estocàstic respecte el moviment Brownià fraccionari. El nucli $K_H(t,s)$ està definit en el conjunt $\{0 < s < t\}$ i donat per

$$\begin{aligned} K_H(t,s) &= d_H(t-s)^{H-1/2} + d_H\left(\frac{1}{2} - H\right) \\ &\times \int_s^t (u-s)^{H-3/2}\left(1 - \left(\frac{s}{u}\right)^{1/2-H}\right) du, \end{aligned}$$

on d_H és la següent constant:

$$d_H = \left(\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)}\right)^{1/2}.$$

Tenint en compte aquesta última representació integral (1.2.3) del moviment Brownià fraccionari en termes del moviment Brownià estàndard podem assegurar l'existència d'un espai de probabilitat $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ suficientment gran, de forma que tots els moviments Brownians fraccionaris hi estan definits i per tant també tots els temps locals corresponents i les diferents integrals estocàstiques que estudiem. Això farà que tots els moments que considerem seran calculats respecte la mateixa probabilitat P, independentment del paràmetre H.

Una de les propietats importants que caracteritza el moviment Brownià fraccionari és la propietat d'*autosimilitud*: Per a tota constant positiva a, els processos $\{a^{-H}B^H_{at},\ t \in [0,T]\}$ i $\{B^H_t,\ t \in [0,T]\}$ tenen la mateixa llei. Aquesta propietat és conseqüència immediata del fet que la funció de covariància és una funció homogènia d'ordre $2H$.

La variància dels increments del procés B^H en un interval $[s,t]$ és

$$E(|B^H_t - B^H_s|^2) = |t-s|^{2H}. \tag{1.2.4}$$

Això implica que el procés té *increments estacionaris.*

Pel Criteri de continuïtat de Kolmogorov i la funció de variància (1.2.4) es pot veure fàcilment que el moviment Brownià fraccionari té una versió amb trajectòries contínues. A més, aplicant la desigualtat de Garsia-Rodemich-Rumsey, es pot provar el següent mòdul de continuïtat de les seves trajectòries: Per a tot $\varepsilon > 0$ i $T > 0$, existeix una variable aleatòria no negativa $G_{\varepsilon,T}$ tal que $E(|G_{\varepsilon,T}|^p) < \infty$ per a tot $p \geqslant 1$, i

$$|B^H_t - B^H_s| \leqslant G_{\varepsilon,T}|t-s|^{H-\varepsilon}, \tag{1.2.5}$$

per a tot $s,t \in [0,T]$. Això significa que el paràmetre H controla la regularitat de les trajectòries, que són Hölder contínues d'ordre $H - \varepsilon$, amb $\varepsilon > 0$.

Usant la següent representació integral de la funció de variància per $H > \frac{1}{2}$ (veure [Nua03])

$$Cov(B^H_t - B^H_s, B^H_v - B^H_w) = H(2H-1)\int_v^w \int_s^t |r-u|^{2H-2} du dr, \tag{1.2.6}$$

es pot veure fàcilment que la covariància de dos increments qualssevol és positiva si $H > \frac{1}{2}$. Notem que per $H < \frac{1}{2}$, l'expressió (1.2.6) per a la covariància no és correcta a no ser que els intervals no tinguin intersecció ja que si els intervals s'intersecten la integral que obtenim és divergent. Tot i amb això es té que la covariància dels increments corresponents a intervals disjunts, $Cov(B_t^H - B_s^H, B_v^H - B_w^H)$, és negativa per $H < \frac{1}{2}$.

Una diferència molt important d'aquest procés respecte el moviment Brownià estàndard és que per $H \neq \frac{1}{2}$ no és una semimartingala (per al cas $H > \frac{1}{2}$, veure exemple 4.9.2, [Lin95] i [LS89]) i per tant, això implica que no es pot usar el càlcul estocàstic clàssic desenvolupat per Itô.

Finalment, vegem el resultat següent de convergència feble que ha motivat aquest treball i que usarem més endavant per provar la convergència feble de funcionals d'aquest procés:

Teorema 1.2.1. *La família de moviments Brownians fraccionaris* $\{B^H,\ \ H \in (0,1)\}$ *convergeix en llei cap a* B^{H_0} *en l'espai* $\mathscr{C}([0,T])$ *quan* H *tendeix a* H_0.

Demostració. Començarem veient l'ajustament. Pel Criteri de Billingsley (veure Teorema 1.1.14) és suficient provar que

$$\sup_{H \in (0,1)} E[|B_t^H - B_s^H|^{\beta}] \leqslant K(F(t) - F(s))^{1+\alpha}, \tag{1.2.7}$$

on $\alpha, \beta > 0$ i F una funció contínua i creixent.

Com que B^H és un procés Gaussià i centrat sabem que els moments d'ordre $2k$ es poden expressar en termes del moment d'ordre 2, de la forma següent,

$$E[|B_t^H - B_s^H|^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}[E(B_t^H - B_s^H)^2]^k. \tag{1.2.8}$$

En aquest cas tenim que

$$E[|B_t^H - B_s^H|^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^{2Hk}. \tag{1.2.9}$$

A partir de l'expressió anterior, observem que no és possible trobar una k de forma que l'exponent $2Hk$ sigui major que 1, per a tot $H \in (0,1)$. Per tant, ens hem de restringir a un entorn d'H_0. En efecte, per H en un entorn d' H_0, $(H_0 - \eta, H_0 + \eta) \subset (0,1)$, podem trobar k de forma que $2Hk > 1$. Així, prenent com a funció contínua i creixent $F(t) = t$ obtenim l'ajustament en un entorn $(H_0 - \eta, H_0 + \eta)$.

Donat que el procés B^H és un procés Gaussià centrat amb funció de covariància

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H})$$

que convergeix a $R_{H_0}(t,s) = \frac{1}{2}(s^{2H_0} + t^{2H_0} - |t-s|^{2H_0})$ per a tot s, t, quan H tendeix a H_0, tenim que les distribucions en dimensió finita de B^H convergeixen cap a les de B^{H_0}. Tot això implica que la família de processos $\{B^H,\ H \in (0,1)\}$ convergeix en llei cap a B^{H_0} en $\mathscr{C}([0,T])$, quan H tendeix a H_0. $\square$

1.3 Resultat per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita

Tot seguit, enunciem un lema general que serà una eina important per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita dels processos considerats.

Lema 1.3.1. *Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai normat, i sigui $\{\mathcal{J}^H\}_{H\in V_0}$ una família d'aplicacions lineals definides en E (on V_0 és un interval que conté H_0) i que prenen valors en $(L^0(\Omega))^m$, l'espai dels vectors aleatoris m-dimensionals i q.s. finits. Denotem per $|\cdot|$ la norma euclidiana de $\mathbb{R}^m$. Suposem que existeix una constant positiva C tal que, per a qualsevol $f \in E$,*

$$\sup_{H\in V_0} E|\mathcal{J}^H(f)| \leqslant C\|f\|. \tag{C}$$

Suposem també que, per algun subconjunt dens $D \subset E$, tenim

$$\mathcal{J}^H(f) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{J}^{H_0}(f), \qquad \text{per a tota } f \in D, \text{ quan } H \to H_0.$$

Aleshores, $\mathcal{J}^H(f) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{J}^{H_0}(f)$, quan $H \to H_0$, per a tota $f \in E$.

Demostració. Hem de veure que per a tot $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^m)$ amb derivades acotades es compleix que

$$|E[h(\mathcal{J}^H(f))] - E[h(\mathcal{J}^{H_0}(f))]|$$

tendeix a zero quan $H \to H_0$.

Donat que $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^m)$ i té derivades acotades, existeix una constant C_h tal que

$$|h(x) - h(y)| < C_h|x - y|, \qquad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Com $D \subset E$ és dens en E, tenim que per a tota $f \in E$ i per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una funció $g \in D$ de forma que $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3CC_h}$, on C és la constant que apareix a la hipòtesi (C). Per tant, escrivim:

$$|E[h(\mathcal{J}^H(f))] - E[h(\mathcal{J}^{H_0}(f))]| \leqslant A_1 + A_2 + A_3,$$

amb

$$A_1 = C_h E(|\mathcal{J}^H(f) - \mathcal{J}^H(g)|),$$
$$A_2 = |E[h(\mathcal{J}^H(g))] - E[h(\mathcal{J}^{H_0}(g))]|,$$

i

$$A_3 = C_h E(|\mathcal{J}^{H_0}(g) - \mathcal{J}^{H_0}(f)|).$$

Per la condició (C) el terme A_1 es pot acotar superiorment de la forma següent:

$$\begin{aligned} A_1 &\leqslant C_h \sup_{H\in V_0} E(|\mathcal{J}^H(f) - \mathcal{J}^H(g)|) \leqslant C_h \sup_{H\in V_0} E(|\mathcal{J}^H(f - g)|) \\ &\leqslant C_h C\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

De forma similar i novament aplicant la condició (C) es pot veure que el terme A_3 també es pot acotar superiorment per $\frac{\varepsilon}{3}$.

Així doncs, ja només ens resta estudiar el terme A_2. Usant que per a $g \in D$ tenim la convergència en llei següent:

$$\mathcal{J}^{H}(g) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{J}^{H_0}(g),$$

i obtenim que el terme A_2 també es pot acotar superiorment per $\frac{\varepsilon}{3}$ si H està suficientment a prop d'H_0.

$\square$

Capítol 2

Continuïtat en llei del temps local del moviment Brownià fraccionari

En aquest capítol provarem la continuïtat en llei respecte el paràmetre de Hurst de la família de lleis dels temps locals de moviments Brownians fraccionaris.

S. Berman a finals dels anys 60, principis dels 70 va estudiar en diferents articles (veure [Ber69b], [Ber69a], [Ber70], [Ber72] i [Ber74]) l'existència i continuïtat del temps local per a diverses classes de processos Gaussians.

En el primer dels articles de S. Berman (veure [Ber69b]) trobem una de les condicions principals que ha de satisfer un procés Gaussià amb increments estacionaris per tal de poder garantir l'existència i la continuïtat del seu temps local. Aquesta condició consisteix en què existeixi una cota inferior estrictament positiva per al determinant de la matriu de covariàncies dels increments estandarditzats del procés. Més tard en [Ber70] prova l'existència del temps local del moviment Brownià fraccionari com a cas particular dels seus resultats.

En aquest treball nosaltres necessitarem usar algunes de les eines desenvolupades per aquest autor. Concretament, per la prova de l'ajustament usarem les seves tècniques basades principalment en la transformada de Fourier juntament amb un estudi de la correlació dels increments de B^H quan H pertany a un entorn d'H_0.

Aquest capítol s'organitza de la manera següent. La primera secció de preliminars conté les principals definicions i resultats relacionats amb l'existència i continuïtat del temps local per a processos Gaussians amb increments estacionaris. A la segona secció, provem l'ajustament de les lleis de $\{L^H\}$ amb H pertanyent a un cert entorn d'H_0. A la tercera secció provem alguns resultats generals de la convergència en llei de temps locals i obtindrem com a corol·lari la convergència de les lleis dels temps locals dels moviments Brownians fraccionaris. Dediquem l'última secció a la prova del Teorema 2.1.9 utilitzat per assegurar l'existència del temps local com a límit en mitjana quadràtica.

Volem comentar finalment que a partir del nostre treball publicat a Journal of Theoretical Probability, W. Donghseng i Y. Xiao (veure [WX08]) generalitzen el nostre resultat sobre continuïtat en llei pels temps locals respecte el paràmetre de Hurst a una classe més àmplia de processos (camps aleatoris anisotròpics que compleixen certes condicions de no determinisme local i sectorial, és a dir, la *Condition A* de [WX08]) i usant tècniques diferents a les nostres per provar l'ajustament de les lleis.

2.1 Preliminars

Definició 2.1.1. *Donat un procés estocàstic $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ mesurable es defineix la mesura d'ocupació de X fins l'instant $t \in [0,T]$ com la mesura finita següent*

$$\mu^t(A) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \in A\}} ds, \qquad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Observem que degut a la mesurabilitat del procés X, aquesta integral té sentit. De fet, fix $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ i $t \geqslant 0$, $\mu^t(A)$ és una variable aleatòria. Podem pensar que $\mu^t(A)$ és la quantitat de temps que el procés X està en el conjunt A fins a l'instant t.

Definició 2.1.2. *Anomenarem temps local del procés X a un procés estocàstic biparamètric $L = \{L_x^t,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]\}$ tal que per a tot $t \in [0,T]$ ω-q.s. $L_{\cdot}^t(\omega)$ és una versió de la densitat de la mesura d'ocupació μ^t (respecte la mesura de Lebesgue), en cas que aquesta densitat existeixi.*

Observació 2.1.3. *Notem que $L_{\cdot}^0$ es pot prendre idènticament 0 i que l'existència d'una densitat de μ^T implica l'existència d'una densitat de μ^t per a tot $t \in [0,T]$.*

Tot seguit, recordem la definició de la transformada de Fourier d'una mesura finita:

Definició 2.1.4. *Donada una mesura finita μ sobre $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ es defineix la funció característica o transformada de Fourier ϕ de μ com*

$$\phi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iur} d\mu(r).$$

Enunciem un teorema molt conegut d'anàlisi de Fourier:

Teorema 2.1.5. *Sigui μ una mesura finita i ϕ la seva transformada de Fourier. Si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, aleshores existeix una densitat per a μ que denotem per f i té una versió contínua. Aquesta densitat es pot calcular mitjançant la següent fórmula d'inversió:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \phi(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iur} d\mu(r) \right) du.$$

Traduint el teorema anterior en termes de la mesura d'ocupació μ^t tenim que si

$$\phi^t(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iur} d\mu^t(r) \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \forall \omega \in \Omega - q.s.,$$

és a dir,

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi^t(u)| du = \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{iur} d\mu^t(r) \Big| du < \infty \ \ q.s.,$$

llavors, pel Teorema 2.1.5 existeix una densitat per a μ^t, que anomenarem L_x^t, que és contínua com a funció de x i admet la següent representació

$$L_x^t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iur} d\mu^t(r) \right) du. \tag{2.1.1}$$

Una de les principals propietats de la mesura d'ocupació és que satisfà la següent *fórmula d'ocupació*:

Proposició 2.1.6. *(pàgina 268, [Ber69b]) Sigui $X = \{X_t,\ t \in [0,T]\}$ un procés mesurable. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable Borel, aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}} g(u) d\mu^t(u) = \int_0^t g(X_s) ds, \tag{2.1.2}$$

i les integrals estan ben definides o no ambdues alhora.

Aquest resultat es pot generalitzar trivialment a funcions g amb valors complexos.

Utilitzant la igualtat (2.1.2) per al cas $g(r) = e^{iur}$ obtenim una nova condició en termes del procés X per tal de comprovar que $\phi^t \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi^t(u)| du = \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{iur} d\mu^t(r) \Big| du = \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_0^t e^{iuX_s} ds \Big| du < +\infty \quad q.s. \tag{2.1.3}$$

Notem que si es satisfà aquesta condició, aleshores aplicant la Proposició 2.1.6 a l'expressió (2.1.1) tenim que

$$L_x^t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \left(\int_0^t e^{iuX_s} ds \right) du.$$

Una manera de verificar la condició (2.1.3) seria calcular l'esperança i si dóna finita

$$E \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^t e^{iuX_s} ds \right| du \right) < +\infty,$$

aleshores ja sabem que la integral és finita q.s.

Observem que podem entrar l'esperança dins de la primera integral

$$E \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^t e^{iuX_s} ds \right| du \right) = \int_{\mathbb{R}} E \left(\left| \int_0^t e^{iuX_s} ds \right| \right) du.$$

De tota manera, afitar aquesta integral no sembla fàcil ja que si entrem el mòdul dins de la integral, com $|e^{iuX_s}| = 1$, tenim que la integral està acotada superiorment per una altra de divergent:

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^t e^{iuX_s} ds \right| du \right) &\leqslant \int_{\mathbb{R}} E \left(\int_0^t |e^{iuX_s}| ds \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t ds du = \int_{\mathbb{R}} t du = +\infty. \end{aligned}$$

Una condició més fàcil de verificar seria veure que la transformada de la mesura d'ocupació $\phi^t \in L^2(\mathbb{R})$ quasi segurament. Usant la fórmula d'ocupació (Proposició 2.1.6) tenim que $\phi^t \in L^2(\mathbb{R})$ quasi segurament, si i només si

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \int_0^t e^{iuX_s} ds \Big|^2 du < +\infty \;\; q.s.,$$

o equivalentment, si

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_0^t e^{iuX_s} ds \Big|^2 du &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{iuX_s} ds \right) \left(\int_0^t e^{-iuX_r} dr \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t \int_0^t e^{iu(X_s - X_r)} dr ds \right) du < +\infty \;\; q.s. \end{aligned}$$

Si això darrer es compleix, aleshores podem usar el següent resultat d'anàlisi de Fourier, també conegut com a Teorema de Plancherel.

Teorema 2.1.7. *(Teorema 9.3.1, [Rud87]) Si la transformada de Fourier ϕ d'una mesura μ pertany a $L^2(\mathbb{R})$ aleshores μ és absolutament contínua i la seva densitat també és de quadrat integrable. A més, la seva densitat, f, és el límit en $L^2(\mathbb{R})$ de*

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-iux} \phi(u) du, \tag{2.1.4}$$

quan $N \to \infty$.

El fet que el límit de (2.1.4) sigui en $L^2(\mathbb{R})$ té l'inconvenient que, en aquest cas, la densitat $f(x)$ està definida q.p.t. x. Per aquest motiu necessitarem alguns resultats previs que ens permetin assegurar l'existència de $L = \{L_x^t,\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]\}$ com a procés estocàstic.

Teorema 2.1.8. *(Theorem 4.1, [Ber69b]) Suposem que*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_0^T |E[e^{iuX_s + ivX_r}]| ds\, dr\, du\, dv < +\infty.$$

Definim

$$\psi_N(x,t,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-iux} \int_0^t e^{iuX_r(\omega)} dr du.$$

Aleshores, per a cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ existeix una variable aleatòria L_x^t tal que

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} E|\psi_N(x,t) - L_x^t|^2 = 0. \tag{2.1.5}$$

El següent teorema ens permetrà provar que per a cada (x,t) existeix el temps local com a límit en mitjana quadràtica.

Teorema 2.1.9. *Sigui $X = \{X_t,\ t \in [0,T]\}$ un procés mesurable tal que satisfà les condicions següents:*

(i)
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\int_0^T |E[e^{iuX_s+ivX_r}]|dsdrdudv < +\infty.$$

(ii) Per a cada $t \in [0,T]$, $\phi^t \in L^2(\mathbb{R})$, és a dir:
$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_0^t e^{iu(X_s-X_r)}drdsdu < +\infty,\ q.s.$$

Considerem $L = \{L_x^t,\ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]\}$ el procés definit per a cada (x,t) com la variable aleatòria L_x^t que apareix al Teorema 2.1.8. Aleshores, aquest procés L és un temps local del procés X.

Demostració. Per facilitar la lectura d'aquest treball, hem inclòs la demostració d'aquest resultat a la Secció 2.4. □

Tot seguit enunciarem una sèrie de resultats que utilitzarem més endavant en la demostració del resultat principal d'aquesta secció que és el Teorema 2.1.15.

Comencem amb un parell de resultats tècnics. El primer resultat usa una propietat ben coneguda de les formes quadràtiques definides positives.

Lema 2.1.10. *(Lemma 8.1, [Ber74]) Siguin $Y_1,\dots,Y_m$ variables aleatòries de quadrat integrable i no constants. La següent desigualtat es satisfà per a tot $v_1,\dots,v_m$:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^m v_iY_i\right) \geqslant \frac{\det\Gamma}{\prod_{i=1}^m \Gamma_{ii}}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m v_i^2\Gamma_{ii},$$

on Γ és la matriu de covariàncies de $Y_1,\dots,Y_m$.

Lema 2.1.11. *El quocient entre el determinant d'una matriu de covariàncies $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{1\le i,j\le n}$ i el producte de les variàncies és igual al determinant de la matriu de correlació:*

$$\frac{\det\Gamma}{\prod_{j=1}^n \Gamma_{jj}} = \det\left(\frac{\Gamma_{ij}}{\sqrt{\Gamma_{ii}}\sqrt{\Gamma_{jj}}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Demostració. La prova d'aquest lema està feta en detall a [VC06]. □

Els dos lemes següents ens donen condicions suficients per a que els processos Gaussians amb increments estacionaris satisfacin la hipòtesi (ii) del Teorema 2.1.9.

Lema 2.1.12. *Sigui $X = \{X_t,\ t\in[0,T]\}$ un procés Gaussià mesurable centrat nul en 0 i amb increments estacionaris. Denotem per $\sigma^2(t)$ la funció de variància de X. Si*

$$\int_0^T\int_0^t \sigma(t-s)^{-1}ds\,dt < \infty, \tag{2.1.6}$$

aleshores, per a tot $t\in[0,T]$,

$$E\left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_0^t e^{iu(X_s-X_r)}dr\,ds\,du\right) < \infty.$$

Demostració. En efecte, donat que $X_r - X_s$ i $X_s - X_r$ tenen la mateixa distribució

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_0^t e^{iu(X_s-X_r)}dr\, ds\, du\right) &= E\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_0^t e^{iuX_s}ds\right|^2 du\right) = \int_{\mathbb{R}} E\left|\int_0^t e^{iuX_s}ds\right|^2 du \\
&= \int_{\mathbb{R}} E\left[\int_0^t e^{iuX_s}ds \int_0^t e^{-iuX_r}dr\right] du \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_0^t E[e^{iu(X_s-X_r)}]dsdrdu \\
&\leqslant 2\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_0^s e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2(s-r)}drdsdu.
\end{aligned}
$$

Fent el canvi de variables $u = \frac{v}{\sigma(s-r)}$ i usant la condició (2.1.6) tenim que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_0^s e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2(s-r)}drdsdu &= \int_0^t\int_0^s\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2}}\frac{1}{\sigma(s-r)}dvdrds \\
&= \int_0^t\int_0^s \frac{1}{\sigma(s-r)}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)}_{=\sqrt{2\pi}}drds \\
&= \sqrt{2\pi}\int_0^t\int_0^s\frac{1}{\sigma(s-r)}drds \\
&\leqslant \sqrt{2\pi}\int_0^T\int_0^s\frac{1}{\sigma(s-r)}drds < +\infty.
\end{aligned}
$$

□

El lema següent dóna condicions suficients per tal que es compleixi la condició (i) del Teorema 2.1.9.

Lema 2.1.13. *Sigui $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ un procés Gaussià mesurable centrat nul en 0 amb increments estacionaris i funció de variància $\sigma^2(t)$ tal que satisfà les dues condicions següents:*

(i) El determinant de la matriu de covariàncies dels increments normalitzats

$$\frac{X_{t_1}}{\sigma(t_1)},\ \frac{X_{t_2}-X_{t_1}}{\sigma(t_2-t_1)},$$

està acotat inferiorment per una constant $A_2 > 0$ en el conjunt $\{(t_1,t_2) \in [0,T]^2 : 0 < t_1 < t_2 < T\}$.

(ii)

$$\int_0^T\int_0^t [\sigma(s)\sigma(t-s)]^{-1}dsdt < +\infty.$$

Aleshores, la integral següent és finita

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |E[e^{iuX_s+ivX_t}]|dudvdsdt < +\infty. \tag{2.1.7}$$

Demostració. Fem el canvi de variables següent:

$$\begin{cases} u = \tilde{u} - \tilde{v}, \\ v = \tilde{v}. \end{cases}$$

Observem que el determinant del jacobià d'aquest canvi de variables és 1. Amb les noves variables, obtenim la següent condició equivalent a (2.1.7)

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_0^T |E[e^{i\tilde{u}X_s + i\tilde{v}(X_t - X_s)}]| d\tilde{u} d\tilde{v} ds dt < +\infty.$$

D'altra banda, sabem que

$$E[e^{i\tilde{u}X_s + i\tilde{v}(X_t - X_s)}] = e^{-\frac{1}{2}Var(\tilde{u}X_s + \tilde{v}(X_t - X_s))}.$$

Apliquem el Lema 2.1.10, prenent $Y_1 = X_s$, $Y_2 = X_t - X_s$ i trobem una cota inferior per a la variància

$$Var(\tilde{u}Y_1 + \tilde{v}Y_2) \geqslant \frac{1}{2} \frac{R}{\sigma^2(s)\sigma^2(t-s)} (\tilde{u}^2\sigma^2(s) + \tilde{v}^2\sigma^2(t-s)),$$

on R és el determinant de la matriu de covariàncies, $R = \det[E(Y_i Y_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$. Per tant,

$$\exp\left(-\frac{1}{2} Var(\tilde{u}Y_1 + \tilde{v}Y_2)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{R}{\sigma^2(s)\sigma^2(t-s)} (\tilde{u}^2\sigma^2(s) + \tilde{v}^2\sigma^2(t-s))\right).$$

Pel Lema 2.1.11 tenim que $\frac{R}{\sigma^2(s)\sigma^2(t-s)}$ és igual al determinant de la matriu de correlacions de les Y_i i per la condició (i) sabem que aquest determinant és més gran que una constant positiva que denotem per A_2. Així, doncs, tenim que

$$E[e^{i\tilde{u}X_s + i\tilde{v}(X_t - X_s)}] \leqslant e^{-\frac{1}{4}A_2[\tilde{u}^2\sigma^2(s) + \tilde{v}^2\sigma^2(t-s)]}.$$

Finalment, usant la condició (ii) obtenim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_0^T & |E[e^{iuX_s + ivX_t}]| ds dt du dv \\ & \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_0^T e^{-\frac{1}{4}A_2[\tilde{u}^2\sigma^2(s) + \tilde{v}^2\sigma^2(t-s)]} ds dt d\tilde{u}\tilde{v} \\ & = \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}A_2[\tilde{u}^2\sigma^2(s) + \tilde{v}^2\sigma^2(t-s)]} d\tilde{u} d\tilde{v} ds dt \\ & = \frac{4\pi}{A_2} \int_0^T \int_0^t \frac{1}{\sigma(s)\sigma(t-s)} ds dt < +\infty. \end{aligned}$$

que és el que volíem. □

També usarem la següent igualtat, molt senzilla de provar.

Lema 2.1.14. *Per a qualsevol $a > 0$ i $0 < \alpha < 2$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha e^{-ax^2} dx = a^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Donada una funció F, definida en $\mathbb{R}^2$, i (s,t), $(s',t') \in \mathbb{R}^2$ tal que $s \leq s'$ i $t \leq t'$, denotarem per $\Delta_{s,t}F(s',t')$ l'increment de F sobre el rectangle $((s,t),(s',t')]$, és a dir,

$$\Delta_{s,t}F(s',t') = F(s',t') - F(s',t) - F(s,t') + F(s,t).$$

En el teorema següent que és el resultat principal d'aquesta secció es donen condicions suficients per tal que un procés Gaussià amb increments estacionaris tingui temps local amb una versió contínua. Aquest resultat és una adaptació del Teorema 8.1 de [Ber74]. En donarem la demostració ja que necessitarem el valor de les constants que hi apareixen.

Teorema 2.1.15. *Sigui $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ un procés Gaussià mesurable, centrat, nul en zero, amb increments estacionaris i tal que la seva funció de variància $\sigma^2(t)$ està acotada per C_σ. Suposem que*

(i) Per a qualsevol m parell, el determinant de les covariàncies dels increments normalitzats

$$\frac{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}}{\sigma(t_j - t_{j-1})}, \qquad j = 1,\dots,m,$$

està acotat inferiorment per una constant $A_m > 0$ en el conjunt $\{(t_1,\dots,t_m) \in [0,T]^m : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < T\}$.

(ii) Existeixen $\delta > 0$ i $\alpha > 0$ tals que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_t^{t+h} [\sigma(s)]^{-(1+2\delta)} ds \leqslant C_{\alpha,\delta}\, h^\alpha. \tag{2.1.8}$$

Aleshores,

(a) Per a cada (x,t), existeix el temps local L_x^t com a límit (uniforme en (x,t)) en mitjana quadràtica.

(b) Per a qualsevol m parell, existeix una constant positiva C_1 que depèn d'm, A_m, α i δ tal que

$$E|\Delta_{0,t}L(0,t+h)|^m \leqslant C_1|h|^{m\alpha}.$$

Podem prendre $C_1 = C_m A_m^{-m/2}(C_{\alpha,\delta})^m$, amb C_m que només depèn d'm.

(c) Si m és parell, existeix una constant positiva C_2 que depèn d'm, A_m, δ, α i σ tal que

$$E|\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)|^m \leqslant C_2|h|^{m\alpha}|k|^{m\delta}.$$

Podem prendre

$$C_2 = C_m \max(1, A_m^{-m/2})(\max(1, C_\sigma^{2\delta}))^m C_{\alpha,\delta}^m,$$

amb C_m que només depèn d'm.

Com a conseqüència dels apartats *b*) i *c*) i usant el Criteri de Kolmogorov-Chentsov obtenim l'existència d'una versió del temps local de X, $L = \{L_x^t,\ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]\}$ que és conjuntament contínua en (x,t).

Demostració. Primer de tot, comprovem que les hipòtesis d'aquest teorema impliquen les del Teorema 2.1.9. Això provarà (a).

En efecte, pel Lema 2.1.13 sabem que per veure la condició (i) del Teorema 2.1.9,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\int_0^T |E[e^{iuX_s+ivX_r}]|dsdrdudv < +\infty,$$

n'hi ha prou amb veure que:

1. El determinant de la matriu de covariàncies dels increments normalitzats,
$$\frac{X_{t_1}}{\sigma(t_1)},\ \frac{X_{t_2}-X_{t_1}}{\sigma(t_2-t_1)},$$
està acotat inferiorment per una constant $A_2 > 0$ en el conjunt $\{(t_1,t_2)\in[0,T]^2:\ 0<t_1<t_2<T\}$.

2. $$\int_0^T\int_0^t [\sigma(s)\sigma(t-s)]^{-1}dsdt < +\infty.$$

La primera condició 1) es satisfà per hipòtesi.

Vegem la condició 2). Fem el canvi de variables següent:

$$\begin{cases} u = t-s \\ s = s, \end{cases}$$

i canviem pertinentment els límits d'integració. D'aquesta manera ens queda,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^t [\sigma(s)\sigma(t-s)]^{-1}dsdt &= \int_0^T\int_0^{T-u} [\sigma(s)\sigma(u)]^{-1}dsdu \\ &\leqslant \left(\int_0^T [\sigma(s)]^{-1}ds\right)^2 < +\infty,\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

degut a (2.1.8).

Comprovem que també es satisfà

$$E\left(\int_{\mathbb{R}}\int_0^T\int_0^T e^{iu(X_s-X_r)}drdsdu\right) < +\infty.$$

Observem que la desigualtat (2.1.6) del Lema 2.1.12 és suficient.

Fent el canvi de variables,

$$\begin{cases} u = t-s \\ t = t, \end{cases}$$

i usant (2.1.8) tenim que

$$\int_0^T\int_0^t [\sigma(t-s)]^{-1}dsdt = \int_0^T\int_0^t [\sigma(u)]^{-1}dudt \leqslant T\int_0^T \sigma(u)^{-1}du < +\infty,$$

que és el que volíem veure. Com a conseqüència tenim que es satisfà la hipòtesi (ii) del Teorema 2.1.9.

Per tant, donat que es satisfan les hipòtesis del Teorema 2.1.9, podem afirmar que per a cada (x,t), existeix el temps local L_x^t com a límit en mitjana quadràtica.

Els apartats (b) i (c) es proven de forma similar. Comencem provant (b).

Expressem el moment d'ordre m, per m parell, de l'increment en t del temps local de X com

$$\begin{aligned} E|\Delta_{0,t}L(0,t+h)|^m &= E[\Delta_{0,t}L(0,t+h)]^m \\ &= (2\pi)^{-m} E\left(\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \int_t^{t+h} \cdots \int_t^{t+h} \prod_{j=1}^m e^{iu_j X_{s_j}} \prod_{j=1}^m ds_j \prod_{j=1}^m du_j \right). \end{aligned}$$

De fet el límit $\lim_{N\to\infty}$ és en principi un límit per a una successió parcial de N's tendint a $+\infty$. Per cada j, la integral

$$z = \int_{-N}^{N} \int_t^{t+h} e^{iu_j X_{s_j}} ds_j du_j,$$

és un nombre real, ja que $\overline{z} = z$. Per tant, la integral múltiple anterior, que és igual a z^m, és positiva per a tot $\omega \in \Omega$.

Pel Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} E&\left(\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \int_t^{t+h} \cdots \int_t^{t+h} \prod_{j=1}^m e^{iu_j X_{s_j}} \prod_{j=1}^m ds_j \prod_{j=1}^m du_j \right) \\ &\leqslant \liminf_{N\to\infty} E\left(\int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \int_t^{t+h} \cdots \int_t^{t+h} \prod_{j=1}^m e^{iu_j X_{s_j}} \prod_{j=1}^m ds_j \prod_{j=1}^m du_j \right). \end{aligned}$$

A més pel Teorema de Fubini podem entrar l'esperança dins de la integral. Com que X és Gaussià i centrat, $E[e^{\sum_{j=1}^m iu_j X_{s_j}}] > 0$ i tenim

$$\begin{aligned} E(\Delta_{0,t}L(0,t+h))^m &\leqslant (2\pi)^{-m} \liminf_{N\to\infty} E\left(\int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \int_t^{t+h} \cdots \int_t^{t+h} e^{\sum_{j=1}^m iu_j X_{s_j}} \prod_{j=1}^m ds_j \prod_{j=1}^m du_j \right) \\ &\leqslant (2\pi)^{-m} \liminf_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} \int_t^{t+h} \cdots \int_t^{t+h} E[e^{\sum_{j=1}^m iu_j X_{s_j}}] \prod_{j=1}^m ds_j \prod_{j=1}^m du_j. \end{aligned}$$

Considerem la següent successió de funcions

$$f_N := \int_{-N}^{N} \cdots \int_{-N}^{N} E[e^{\sum_{j=1}^m iu_j X_{s_j}}] \prod_{j=1}^m du_j.$$

Les funcions f_N satisfan que:

- $f_N \geqslant 0$.
- $f_N \uparrow f$, quan $N \to \infty$, on

$$f := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} E[e^{\sum_{j=1}^m iu_j X_{s_j}}] \prod_{j=1}^m du_j.$$

Tenint en compte aquestes propietats podem aplicar el Teorema de la Convergència Monòtona i tenim que

$$\lim_{N\to\infty}\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-N}^{N}\cdots\int_{-N}^{N}E[e^{\sum_{j=1}^m iu_jX_{s_j}}]\prod_{j=1}^m du_j\prod_{j=1}^m ds_j$$
$$=\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}E[e^{\sum_{j=1}^m iu_jX_{s_j}}]\prod_{j=1}^m du_j\prod_{j=1}^m ds_j.$$

Donat que l'integrand és simètric en $s_1,\dots,s_m$, podem canviar el domini d'integració $[t,t+h]^m$ pel subconjunt

$$\{(s_1,\dots,s_m): t<s_1<\cdots<s_m<t+h\}.$$

Si fem el canvi de variables següent:

$$\begin{cases} u_j=v_j-v_{j+1}, & \forall j=1,\dots,m-1,\\ u_m=v_m, \end{cases}$$

aleshores el determinant del jacobià d'aquest canvi és 1.

Si definim $X_{s_0}=0$, tenim que

$$\sum_{j=1}^m u_jX_{s_j}=\sum_{j=1}^m v_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}}),$$

i amb això,

$$E[e^{\sum_{j=1}^m iv_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})}]=e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Var}[\sum_{j=1}^m v_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})]}.$$

Pel Lema 2.1.10, podem acotar-ho superiorment per

$$E[e^{\sum_{j=1}^m iv_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})}]\leqslant\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{\prod_{j=1}^m\sigma^2(s_j-s_{j-1})}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m v_j^2\sigma^2(s_j-s_{j-1})\right),$$

on R és el determinant de la matriu de covariàncies i $\sigma^2(s_j-s_{j-1})$ la variància dels increments $X_{s_j}-X_{s_{j-1}}$.

Pel Lema 2.1.11 i donat que la constant A_m acota inferiorment el determinant de la matriu de correlació dels increments de X tenim que

$$E[e^{i\sum_{j=1}^m v_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})}]\leqslant e^{-B_m\sum_{j=1}^m v_j^2\sigma^2(s_j-s_{j-1})},$$

amb $B_m=\frac{A_m}{2m}$.

Usant les desigualtats que hem vist fins ara i aplicant novament el Teorema de Fubini tenim que

$$\begin{aligned}
&E|\Delta_{0,t}L(0,t+h)|^m\\
&\leqslant (2\pi)^{-m}m!\int\cdots\int_{\{t=s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_m=t+h\}\times\mathbb{R}^m} e^{-B_m\sum_{j=1}^m v_j^2\sigma^2(s_j-s_{j-1})}\prod_{j=1}^m dv_j\prod_{j=1}^m ds_j\\
&\leqslant 2^{-m}\pi^{-m/2}m!\int\cdots\int_{\{t=s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_m=t+h\}}\prod_{j=1}^m[B_m\sigma^2(s_j-s_{j-1})]^{-\frac{1}{2}}ds_1\dots ds_m\\
&= 2^{-m}(B_m\pi)^{-m/2}m!\int\cdots\int_{\{t=s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_m=t+h\}}\prod_{j=1}^m[\sigma^2(s_j-s_{j-1})]^{-\frac{1}{2}}ds_1\dots ds_m.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Fem el canvi de variables

$$\begin{cases} u_1 = s_1 - t,\\ u_j = s_j - s_{j-1}, \quad j=2,\dots,m,\end{cases}$$

i així acotem superiorment la integral anterior de la forma següent:

$$\begin{aligned}
\int\cdots\int_{\{t=s_0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_m=t+h\}}&\prod_{j=1}^m[\sigma(s_j-s_{j-1})]^{-1}ds_1\dots ds_m\\
&\leqslant \int_0^h\cdots\int_0^h[\sigma(u_1)\sigma(u_2)\cdots\sigma(u_m)]^{-1}du_1\dots du_m\\
&= \left(\int_0^h\sigma(x)^{-1}dx\right)^m.
\end{aligned}$$

Finalment, usant aquesta desigualtat i la condició (2.1.8) en (2.1.10) tenim que

$$E|\Delta_{0,t}L(0,t+h)|^m \leqslant 2^{-m}(B_m\pi)^{-m/2}m!(C_\alpha)^m h^{m\alpha}.$$

Fent un abús de la notació prendrem com a C_m les constants que només depenguin de m i obtenim

$$E|\Delta_{0,t}L(0,t+h)|^m \leqslant C_m A_m^{-m/2}(C_\alpha)^m h^{m\alpha}.$$

que és el que volíem provar a l'apartat (b).

Finalment, vegem (c). Tenint en compte (a), per m parell, podem expressar el moment d'ordre m de l'increment 2-dimensional del temps local de X com

$$\begin{aligned}
E|\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)|^m &= E[\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)]^m\\
&= (2\pi)^{-m}E\Bigg(\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N\cdots\int_{-N}^N\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\prod_{j=1}^m(e^{-iu_j(x+k)}-e^{-iu_jx})\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^m e^{iu_jX_{s_j}}\prod_{j=1}^m ds_j\prod_{j=1}^m du_j\Bigg).
\end{aligned}$$

Es pot comprovar que l'expressió anterior està acotada per

$$(2\pi)^{-m}\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(|e^{-iu_j(x+k)}-e^{-iu_jx}|\right)$$
$$\times E[e^{\sum_{j=1}^m iu_jX_{s_j}}]\prod_{j=1}^m du_j\prod_{j=1}^m ds_j.$$

Usant que $|e^{ix}-e^{iy}|\leq 2\,|x-y|^{\delta}$, per a qualsevol x, $y\in\mathbb{R}$ i tot $\delta\in(0,1)$, tenim que

$$\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}|e^{-iu_j(x+k)}-e^{-iu_jx}|E[e^{\sum_{j=1}^m iu_jX_{s_j}}]\prod_{j=1}^m du_j\prod_{j=1}^m ds_j$$
$$\leqslant 2^m|k|^{m\delta}\int_t^{t+h}\cdots\int_t^{t+h}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}|u_j|^{\delta}E[e^{\sum_{j=1}^m iu_jX_{s_j}}]\prod_{j=1}^m du_j\prod_{j=1}^m ds_j.$$

Donat que l'integrand de l'expressió anterior és simètric respecte $s_1,\dots,s_m$, podem canviar el domini d'integració, $[t,t+h]^m$, pel subconjunt

$$\{(s_1,\dots,s_m): t\leq s_1<\cdots<s_m\leq t+h\}.$$

Fent el següent canvi de variables

$$\begin{cases} u_j=v_j-v_{j+1}, & \forall j=1,\dots,m-1,\\ u_m=v_m, \end{cases}$$

i definint $s_0=0$, tenim que

$$\sum_{j=1}^m u_jX_{s_j}=\sum_{j=1}^m v_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}}).$$

Això implica que

$$E[e^{\sum_{j=1}^m i\,u_j\,X_{s_j}}]=e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Var}[\sum_{j=1}^m v_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})]}.$$

Pel Lema 2.1.10, podem acotar superiorment aquesta expressió de la manera següent

$$E[e^{\sum_{j=1}^m iv_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})}]\leqslant\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{\prod_{j=1}^m\sigma^2(s_j-s_{j-1})}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m v_j^2\sigma^2(s_j-s_{j-1})\right),$$

on R és el determinant de la matriu de covariància dels increments $X_{s_j}-X_{s_{j-1}}$ per $j=1,\dots,m-1$.

Com que la constant A_m és una cota inferior del determinant de la matriu de correlació dels increments de X que coincideix amb $\frac{R}{\prod_{j=1}^m\sigma^2(s_j-s_{j-1})}$, tenim que

$$E[e^{i\sum_{j=1}^m v_j(X_{s_j}-X_{s_{j-1}})}]\leqslant e^{-B_m\sum_{j=1}^m v_j^2\sigma^2(s_j-s_{j-1})},$$

amb $B_m=\frac{A_m}{2m}$.

D'altra banda,

$$\prod_{j=1}^m|u_j|^{\delta}=\left(\prod_{j=1}^{m-1}|v_j-v_{j+1}|^{\delta}\right)|v_m|^{\delta}\leqslant\left(\prod_{j=1}^{m-1}(|v_j|^{\delta}+|v_{j+1}|^{\delta})\right)|v_m|^{\delta}.$$

Aquest últim producte és igual a la suma de 2^{m-1} termes, cada un dels quals conté almenys m factors $|v_1|^\delta, \dots, |v_m|^\delta$ amb exponents 0, 1 o 2.
Usant aquest fet, obtenim que

$$E|\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)|^m \leqslant |k|^{m\delta}\pi^{-m}m! \sum_{\theta_i\in\{0,1,2\}} \int_{\{t\leqslant s_1<\dots<s_m\leq t+h\}\times\mathbb{R}^m} |v_1^{\theta_1}\dots v_m^{\theta_m}|^\delta \times e^{-B_m\sum_{j=1}^m v_j^2\sigma^2(s_j-s_{j-1})} \prod_{j=1}^m dv_j \prod_{j=1}^m ds_j.$$

Pel Teorema de Fubini i el Lema 2.1.14,

$$\begin{aligned} &E|\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)|^m \\ &\leqslant |k|^{m\delta}\pi^{-m}m! \sum_{\theta_i\in\{0,1,2\}} \int\cdots\int_{\{t\leqslant s_1<\dots<s_m\leq t+h\}} \prod_{j=1}^m (B_m\sigma^2(s_j-s_{j-1}))^{-\frac{(\theta_j\delta+1)}{2}} \\ &\times \prod_{j=1}^m \Gamma\left(\frac{\theta_j\delta+1}{2}\right) ds_1\dots ds_m. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Tenint en compte que $\max_{r\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}\Gamma(r) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, podem acotar l'expressió (2.1.11) de la forma següent

$$\begin{aligned} E|\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)|^m &\leqslant |k|^{m\delta}\pi^{-m/2}\, m!\, \max(1, B_m^{-m/2}) \\ &\times \sum_{\theta_j\in\{0,1,2\}} \int\cdots\int_{\{t\leqslant s_1<\dots<s_m\leq t+h\}} \prod_{j=1}^m [\sigma(s_j-s_{j-1})]^{-(\theta_j\delta+1)} ds_1\dots ds_m \\ &\leqslant |k|^{m\delta}\pi^{-m/2}\, m!\, \max(1, B_m^{-m/2}) \left(\max(1, C_\sigma^{2\delta})\right)^m \\ &\times \int\cdots\int_{\{t\leqslant s_1<\dots<s_m\leq t+h\}} \prod_{j=1}^m [\sigma(s_j-s_{j-1})]^{-(1+2\delta)} ds_1\dots ds_m. \end{aligned}$$

Finalment, usant que

$$\int\cdots\int_{\{t\leqslant s_1<\dots<s_m\leq t+h\}} \prod_{j=1}^m [\sigma(s_j-s_{j-1})]^{-(1+2\delta)} ds_1\dots ds_m$$

$$\leq \left(\int_t^{t+h} \sigma(x)^{-(1+2\delta)}dx\right) \left(\int_0^h \sigma(x)^{-(1+2\delta)}dx\right)^{m-1}$$

i (2.1.8), tenim que

$$E|\Delta_{x,t}L(x+k,t+h)|^m \leqslant C_m \max(1, A_m^{-m/2}) \left(\max(1, C_\sigma^{2\delta})\right)^m (C_{\alpha,\delta})^m h^{m\alpha} |k|^{m\delta}$$

que és el que volíem provar. □

2.2 Existència i Continuïtat del Temps Local per al moviment Brownià fraccionari. Ajustament de la família de les seves lleis

Recordem que el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in (0,1)$, que denotem per B^H, és un procés Gaussià, centrat amb increments estacionaris i prenent una versió contínua podem afirmar que també és mesurable.

Al llarg d'aquesta secció, comprovarem que el moviment Brownià fraccionari satisfà les condicions del Teorema 2.1.15 i veurem que les constants que apareixen en aquestes condicions es poden prendre independents del paràmetre de Hurst H, almenys en un entorn d'H_0, per a qualsevol $H_0 \in (0,1)$.

Primer de tot, notem que la funció de variància del moviment Brownià fraccionari de paràmetre H, $\sigma^2(t) = t^{2H}$ està acotada per $C_T = \max(1, T^2)$ per a $t \in [0,T]$. Aleshores, la constant C_σ que apareix al Teorema 2.1.15 és igual a C_T.

Enunciem en el lema següent que la funció de variància σ_H^2 també satisfà la condició (2.1.8) del Teorema 2.1.15.

Lema 2.2.1. *Sigui $H \in (H_0 - \eta, H_0 + \eta) \subset (0,1)$. Aleshores, per a qualsevol $\delta > 0$ tal que $(H_0 + \eta)(1 + 2\delta) < 1$,*

$$\int_t^{t+h} [\sigma(s)]^{-(1+2\delta)} ds \leqslant C_{T,H_0,\eta,\delta}\ h^{1-(H_0+\eta)(1+2\delta)},$$

on

$$C_{T,H_0,\eta,\delta} = \frac{\max(1, T^{2\eta(1+2\delta)})}{1 - (H_0 + \eta)(1 + 2\delta)}.$$

Demostració.

$$\int_0^h [\sigma(s)]^{-(1+2\delta)} ds = \int_0^h s^{-H(1+2\delta)} ds = \frac{h^{-H(1+2\delta)+1}}{-H(1+2\delta)+1} = T^{-H(1+2\delta)+1} \frac{\left(\frac{h}{T}\right)^{-H(1+2\delta)+1}}{-H(1+2\delta)+1}.$$

Per $H \in (H_0 - \eta, H_0 + \eta)$ i $\delta > 0$ tal que $(H_0 + \eta)(1 + 2\delta) < 1$, aquest darrer terme està afitat superiorment per

$$\frac{\max(1, T^{2\eta(1+2\delta)})}{(1 - (H_0 + \eta)(1 + 2\delta))} h^{1-(H_0+\eta)(1+2\delta)},$$

que és el que volíem provar. □

Ara provarem que per a tot $m \geqslant 2$, el determinant de la matriu de covariàncies dels increments normalitzats del procés està acotat inferiorment per una constant positiva A_m^H en el conjunt $\{(t_1, \dots, t_m) \in [0,T]^m : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < T\}$. A més, veurem que aquesta constant es pot prendre independent d'H, almenys en un entorn d'un punt $H_0 \in (0,1)$.

Caldrà distingir els casos $H_0 < \frac{1}{2}$ i $H_0 \geqslant \frac{1}{2}$. Per $H_0 \in (0, \frac{1}{2})$, usarem uns resultats del treball de S. Berman (veure [Ber70]). El lema següent és una adaptació d'un resultat de M.

Marcus (vegi's [Mar68]) que va fer S. Berman en [Ber70] per al cas d'un procés amb increments estacionaris.

Lema 2.2.2. *Sigui $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ un procés Gaussià centrat amb increments estacionaris i funció de variància $\sigma^2(t) = E(X_t - X_0)^2$ còncava per $t \in [0,\delta]$, $\delta > 0$. Siguin $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ tals que $(t_n - t_0) \leqslant \delta$.*
Aleshores,

$$P\Big\{ \max_{i=1,..,n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \leqslant x \Big\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sqrt{2/\pi} \int_0^{\sqrt{2}x/\sigma(t_i - t_{i-1})} e^{-y^2/2} dy, \qquad x > 0.$$

A continuació enunciem un lema inspirat en el Teorema 6.1 de [Ber70], ens dóna una cota inferior del quocient entre el determinant de la matriu de covariàncies i el producte de les variàncies dels increments d'un procés Gaussià amb increments estacionaris i funció de variància còncava.

Lema 2.2.3. *(Teorema 6.1, [Ber70]) Sigui $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ un procés Gaussià amb increments estacionaris i funció de variància còncava. Sigui $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Aleshores, es satisfà la desigualtat següent*

$$\frac{\det(E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})])_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}{\prod_{j=1}^{n} \sigma^2(t_i - t_{i-1})} \geqslant 2^{-n},$$

per n enter positiu.

Demostració. Pel Lema 2.2.2 sabem que

$$P\{|X_{t_j} - X_{t_{j-1}}| \leqslant x\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sqrt{2/\pi} \int_0^{\sqrt{2}x/\sigma(t_i - t_{i-1})} e^{-y^2/2} dy, \qquad x > 0.$$

Dividim per $(2x)^n$ ambdós costats de la desigualtat,

$$\frac{1}{(2x)^n} P\Big\{|X_{t_j} - X_{t_{j-1}}| \leqslant x,\ j = 1, \ldots, n\Big\} \leqslant \frac{1}{(2x)^n} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\sqrt{2}x/\sigma(t_i - t_{i-1})} e^{-y^2/2}\, dy,$$

i fem tendir $x \to 0$.
Obtenim d'una banda, la densitat conjunta del vector $(X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ en el punt 0

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{1}{(2x)^n} P\{|X_{t_j} - X_{t_{j-1}}| \leqslant x,\ j = 1, \ldots, n\} \\ &\quad = (2\pi)^{-n/2} (\det(E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})])_{1 \leqslant i,j \leqslant n})^{-1/2}, \end{aligned}$$

i de l'altra

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{(2x)^n} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \int_0^{\frac{\sqrt{2}x}{\sigma(t_j - t_{j-1})}} e^{-y^2/2} dy = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} \sigma(t_j - t_{j-1})}.$$

Per tant, tenim que

$$(\det(E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})])_{1 \leqslant i,j \leqslant n})^{-1} \leqslant \left(\frac{2^n}{\prod_{j=1}^{n} \sigma^2(t_j - t_{j-1})} \right),$$

i d'aquí deduïm

$$\frac{\det(E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})])_{1\leqslant i,j\leqslant n}}{\prod_{j=1}^{n} \sigma^2(t_j - t_{j-1})} \geqslant 2^{-n}.$$

□

Com que la funció de variància del moviment Brownià fraccionari amb paràmetre $H \in (0, \frac{1}{2}]$ és còncava, podem aplicar aquest lema i obtenir que la constant A_m^H és igual a 2^{-m} (notem que, de fet, per $H = \frac{1}{2}$ podem prendre $A_m^H = 1$).

Quan $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, el resultat anterior no es pot aplicar. De fet, necessitarem estudiar el comportament dels elements de la matriu de covariància dels increments normalitzats de B^H en un entorn petit d'$H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.

La correlació de dos increments disjunts de B^H ve donada per

$$\mathrm{Corr}(B_t^H - B_s^H, B_v^H - B_u^H) = \frac{1}{2} \frac{(u-t)^{2H} - (u-s)^{2H} - (v-t)^{2H} + (v-s)^{2H}}{(t-s)^H (v-u)^H},$$

amb $0 \leqslant s < t \leqslant u < v \leqslant T$.

Si escrivim

$$v - u = \gamma(t-s),$$
$$u - t = \beta(t-s),$$

obtenim

$$\mathrm{Corr}(B_t^H - B_s^H, B_v^H - B_u^H) = \frac{1}{2} \frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H}.$$

Si considerem increments consecutius $B_t^H - B_s^H$ i $B_w^H - B_t^H$, aleshores $u = t$ (això implica que $\beta = 0$) i tenim que

$$\mathrm{Corr}(B_t^H - B_s^H, B_w^H - B_t^H) = \frac{1}{2} \frac{(1+\gamma)^{2H} - \gamma^{2H} - 1}{\gamma^H}.$$

Lema 2.2.4. *Sigui $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Per a qualssevol γ, β nombres reals positius, es satisfà la següent desigualtat*

$$\frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H} \leqslant \frac{(1+\gamma)^{2H} - \gamma^{2H} - 1}{\gamma^H}.$$

Demostració. La prova és un simple argument de convexitat.

Considerem

$$f(\beta) = \beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}.$$

D'una banda tenim que $f(\beta)$ és una funció positiva i a més,

$$f(0) = (1+\gamma)^{2H} - \gamma^{2H} - 1.$$

Notem que per provar la desigualtat, és suficient veure que la funció $f(\beta)$ pren el seu valor màxim en $\beta = 0$ (i.e. $f(\beta) \leqslant f(0)$).

Primer considerem el cas $\gamma \geqslant 1$.

Calculem la primera derivada de $f(\beta)$,

$$f'(\beta) = 2H[\beta^{2H-1} - (1+\beta)^{2H-1} - (\beta+\gamma)^{2H-1} + (1+\beta+\gamma)^{2H-1}].$$

Reordenem convenientment els termes de $f'(\beta)$,

$$f'(\beta) = 2H[(1+\beta+\gamma)^{2H-1} - (\beta+\gamma)^{2H-1} - ((1+\beta)^{2H-1} - \beta^{2H-1})].$$

Pel Teorema del Valor Mig, sabem que existeixen $\xi \in (\beta+\gamma, 1+\beta+\gamma)$ i $\eta \in (\beta, 1+\beta)$ tals que

$$(1+\beta+\gamma)^{2H-1} - (\beta+\gamma)^{2H-1} = (2H-1)\xi^{2H-2},$$

i

$$(1+\beta)^{2H-1} - \beta^{2H-1} = (2H-1)\eta^{2H-2},$$

i observem a més que $\xi > \eta$.

Usant aquestes dues igualtats, obtenim que

$$f'(\beta) = (2H-1)(\xi^{2H-2} - \eta^{2H-2}),$$

d'on deduïm que $f'(\beta) \leqslant 0$, per a tot $\beta \geqslant 0$, ja que $2H - 2 < 0$ i $\xi > \eta$.

Suposem ara que $\gamma < 1$. En aquest cas, expressem $f'(\beta)$ de la manera següent,

$$f'(\beta) = 2H[(1+\beta+\gamma)^{2H-1} - (1+\beta)^{2H-1} - ((\beta+\gamma)^{2H-1} - \beta^{2H-1})].$$

Pel Teorema del Valor Mig, sabem que existeixen $\xi \in (\beta+1, \beta+\gamma+1)$ i $\eta \in (\beta, \beta+\gamma)$ tals que

$$(1+\beta+\gamma)^{2H-1} - (1+\beta)^{2H-1} = (2H-1)\xi^{2H-2}\gamma,$$

i

$$(\beta+\gamma)^{2H-1} - \beta^{2H-1} = (2H-1)\eta^{2H-2}\gamma.$$

En aquest cas també $\xi > \eta$. Per tant, tenint en compte això i les desigualtats anteriors, podem acotar superiorment $f'(\beta)$ per

$$(2H-1)(\xi^{2H-2} - \eta^{2H-2})\gamma.$$

Anàlogament al cas $\gamma \geqslant 1$ deduïm que $f'(\beta) \leqslant 0$.

Amb tot això hem vist que la funció $f(\beta)$ és decreixent per a tot $\beta \geqslant 0$, és a dir,

$$f(\beta) \leqslant f(0), \qquad \forall \beta \geqslant 0.$$

□

En la següent proposició, comprovem que es satisfà la condició (i) del Teorema 2.1.15 i la constant A_m^H es pot prendre independentment d'H, amb H pertanyent a un entorn d'$H_0 \geqslant \frac{1}{2}$.

Proposició 2.2.5. *Sigui $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$. Per a qualsevol $m \geqslant 2$, existeix un nombre real $\eta > 0$ i una constant $A_{m,\eta,H_0} > 0$ que només depèn de m, η i H_0, tal que el determinant de la matriu de correlacions dels increments $B_{t_j}^H - B_{t_{j-1}}^H$, $j = 1, \ldots, m$, en el conjunt $\{(t_1, \ldots, t_m) \in [0,T]^m : 0 = t_0 < \ldots < t_m < T\}$, és major o igual que A_{m,η,H_0}, per a tot $H \in (H_0 - \eta, H_0 + \eta)$.*

Demostració. Al Teorema 6.2 de [Ber70] es prova l'existència d'una constant $A_{m,H} > 0$ que acota inferiorment el determinant de la matriu de correlacions dels increments de B^H, per a qualsevol $H \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Per provar el resultat de la proposició, veurem que en un entorn suficientment petit d'H_0, el determinant de la matriu de correlacions corresponent a B^H està a prop del determinant de la matriu de correlacions corresponent a B^{H_0}.

Cal notar que si $H_0 = \frac{1}{2}$, el Lema 2.2.3 ens diu que el determinant de la matriu de correlacions dels increments de B^H està acotat inferiorment per 2^{-m} amb $H \in (H_0 - \eta, H_0)$, per a qualsevol $\eta < \frac{1}{2}$. Els arguments que usarem a partir d'aquí ens proporcionaran un entorn del tipus $(H_0, H_0 + \eta)$ en el qual la cota inferior uniforme del determinant també existeix.

Com que el determinant d'una matriu és la suma de productes de les seves components, i donat que, per a tot $H \in (0, 1)$,

$$\sup_{0 \leqslant < t \leqslant u < v \leqslant T} |\mathrm{Corr}(B_t^{H_0} - B_s^{H_0}, B_v^{H_0} - B_u^{H_0})| \leqslant 1,$$

és suficient veure que per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix $\rho > 0$ tal que per a tot $H \in (H_0 - \rho, H_0 + \rho)$,

$$\sup_{0 \leqslant < t \leqslant u < v \leqslant T} |\mathrm{Corr}(B_t^H - B_s^H, B_v^H - B_u^H) - \mathrm{Corr}(B_t^{H_0} - B_s^{H_0}, B_v^{H_0} - B_u^{H_0})| < \varepsilon. \tag{2.2.1}$$

Com ja hem vist anteriorment, podem expressar la correlació entre dos increments disjunts $B_t^H - B_s^H$ i $B_v^H - B_u^H$ en termes dels paràmetres β i γ, on

$$\begin{aligned} v - u &= \gamma(t - s), \\ u - t &= \beta(t - s), \end{aligned}$$

i $0 \leqslant s < t \leqslant u < v \leqslant T$. Per tant, (2.2.1) és equivalent a

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{0<\gamma<+\infty \\ 0\leq\beta<+\infty}} \Bigg| & \frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H} \\ & - \frac{\beta^{2H_0} - (1+\beta)^{2H_0} - (\beta+\gamma)^{2H_0} + (1+\beta+\gamma)^{2H_0}}{\gamma^{H_0}} \Bigg| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

per $|H - H_0|$ suficientment petit.

Ara, veurem (2.2.2). Tenint en compte els diferents valors possibles dels paràmetres γ i β, provarem les afirmacions següents:

(i) Per a qualsevol $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < M$ i $L > 0$, existeix ρ_1 (que depèn de ε, M, δ i L) tal que, per $|H - H_0| < \rho_1$, tenim

$$\sup_{\substack{\delta \leqslant \gamma \leqslant M \\ 0 \leqslant \beta \leqslant L}} \Big| \frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H} - \frac{\beta^{2H_0} - (1+\beta)^{2H_0} - (\beta+\gamma)^{2H_0} + (1+\beta+\gamma)^{2H_0}}{\gamma^{H_0}} \Big| < \varepsilon.$$

Això és conseqüència de la continuïtat uniforme de la funció $f(x,y) = x^y$ sobre conjunts compactes que no contenen el punt $(0,0)$.

(ii) Donat $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ i $\rho_2 > 0$ tal que per a qualsevol $|H - H_0| < \rho_2$, tenim

$$\sup_{\substack{0 < \gamma < \delta \\ 0 \leqslant \beta < +\infty}} \Big| \frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H} \Big| < \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

Notem que (2.2.3) ens proporciona (2.2.2) quan prenem el suprem en $0 < \gamma < \delta$, $0 \leqslant \beta < \infty$, perquè (2.2.3) és cert per $H = H_0$.

Pel Lema 2.2.4 sabem que

$$\frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H} \leqslant \frac{(1+\gamma)^{2H} - \gamma^{2H} - 1}{\gamma^H}. \tag{2.2.4}$$

A més, els dos numeradors de les expressions anteriors són positius.

Pel Teorema del Valor Mig, tenim que

$$(1+\gamma)^{2H} - \gamma^{2H} - 1 = 2H((1+\xi)^{2H-1} - \xi^{2H-1})\gamma, \qquad \xi \in (0,\gamma).$$

Usant aquesta desigualtat i tenint en compte que $0 < 2H - 1 < 1$, podem acotar la banda dreta de la desigualtat (2.2.4) de la forma següent

$$\Big| \frac{(1+\gamma)^{2H} - \gamma^{2H} - 1}{\gamma^H} \Big| \leqslant 2\,(H_0 + \rho_2)\, \delta^{1-H_0-\rho_2} < \varepsilon, \tag{2.2.5}$$

prenent ρ_2 tal que $1 - H_0 - \rho_2 > 0$ i

$$0 < \delta < \left(\frac{\varepsilon}{2(H_0 + \rho_2)} \right)^{\frac{1}{1-H_0-\rho_2}}.$$

Amb això obtenim (2.2.3).

(iii) Donat $\varepsilon > 0$, existeix $M > 0$ i $\rho_3 > 0$ tal que per $|H - H_0| < \rho_3$, tenim

$$\sup_{\substack{\gamma > M \\ 0 \leqslant \beta < +\infty}} \frac{\beta^{2H} - (1+\beta)^{2H} - (\beta+\gamma)^{2H} + (1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H} < \varepsilon. \tag{2.2.6}$$

Usant novament el Lema 2.2.4,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\gamma>M\\0\leqslant\beta<+\infty}} \frac{\beta^{2H}-(1+\beta)^{2H}-(\beta+\gamma)^{2H}+(1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H}\\
&\leqslant \sup_{\gamma>M} \frac{(1+\gamma)^{2H}-\gamma^{2H}-1}{\gamma^H}\\
&= \sup_{0<y<\frac{1}{M}} \frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2H}-\left(\frac{1}{y}\right)^{2H}-1}{\frac{1}{y^H}}\\
&= \sup_{0<y<\frac{1}{M}} \frac{(1+y)^{2H}-(1+y^{2H})}{y^H}.
\end{aligned}$$

Per tant, (2.2.6) és conseqüència de (2.2.5).

(iv) Finalment, donat $\varepsilon>0$ i $0<\delta<M$, existeix $L>0$ i $\rho_4>0$ tal que per $|H-H_0|<\rho_4$, tenim

$$\sup_{\substack{\delta\leqslant\gamma\leqslant M\\ \beta>L}} \frac{\beta^{2H}-(1+\beta)^{2H}-(\beta+\gamma)^{2H}+(1+\beta+\gamma)^{2H}}{\gamma^H}<\varepsilon.$$

D'una banda γ pertany al compacte, $[\delta,M]$ que està lluny de 0. Per tant, és suficient estudiar el numerador de l'expressió anterior. Aplicant dues vegades el Teorema del Valor Mig obtenim

$$\begin{aligned}
0&\leqslant (1+\beta+\gamma)^{2H}-(\beta+\gamma)^{2H}-((1+\beta)^{2H}-\beta^{2H})\\
&=2H(\xi^{2H-1}-\eta^{2H-1})\\
&=2H(2H-1)\upsilon^{2H-2}(\xi-\eta),
\end{aligned}$$

on $\xi\in(\beta+\gamma,\beta+\gamma+1)$, $\eta\in(\beta,\beta+1)$, $\upsilon\in\langle\eta,\xi\rangle$, del qual deduïm que $\xi\geqslant\eta$.

Tenint en compte que $\xi\in(\beta+\gamma,\beta+\gamma+1)$, $\eta\in(\beta,\beta+1)$ i $\delta\leqslant\gamma\leqslant M$, tenim que $0\leqslant\xi-\eta<M+1$.

D'altra banda, com que $L<\upsilon<\beta+M+1$ i $2H-2<0$, obtenim que

$$\begin{aligned}
&(1+\beta+\gamma)^{2H}-(\beta+\gamma)^{2H}-((1+\beta)^{2H}-\beta^{2H})\\
&\leqslant 2H(2H-1)\left(\frac{1}{L}\right)^{2-2H}(M+1).
\end{aligned}$$

Finalment, com que podem prendre $L>1$, obtenim

$$\begin{aligned}
&(1+\beta+\gamma)^{2H}-(\beta+\gamma)^{2H}-((1+\beta)^{2H}-\beta^{2H})\\
&\leqslant 2(H_0+\rho_4)(2(H_0+\rho_4)-1)\left(\frac{1}{L}\right)^{2-2(H_0+\rho_4)}(M+1)<\varepsilon,
\end{aligned}$$

si $|H-H_0|<\rho_4$, amb $\rho_4>0$ tal que $2-2(H_0+\rho_4)>0$ (o equivalentment, $0<\rho_4<1-H_0$) i L suficientment gran.

Això finalitza la prova de (2.2.2). □

Com a conseqüència dels resultats anteriors i el Teorema 2.1.15, podem enunciar la proposició següent.

Proposició 2.2.6. *Sigui $H_0 \in (0,1)$. Aleshores, existeix $\eta > 0$ tal que la família de processos estocàstics $\{B^H,\ H \in (H_0 - \eta, H_0 + \eta)\}$ satisfà:*

(i) Per a cada (x,t) i cada $H \in (H_0 - \eta, H_0 + \eta)$, existeix el temps local $L_x^{t,H}$ com a límit (uniforme en (x,t)) en mitjana quadràtica.

(ii) Existeix una constant positiva C_1 (que depèn de m, η i H_0) i α (que depèn d'η i H_0), tal que

$$E|\Delta_{0,t} L^H(0, t+h)|^m \leqslant C_1 |h|^{m\alpha}.$$

(iii) Per a cada $m \geqslant 2$ parell, existeix $\delta > 0$ i $\alpha > 0$ que depenen d'H_0 i η i també una constant positiva C_2 que depèn de m, η i H_0 tal que

$$E|\Delta_{x,t} L^H(x+k, t+h)|^m \leqslant C_2 |h|^{m\alpha} |k|^{m\delta}.$$

Com a conseqüència de (ii) i (iii), pel criteri d'ajustament (veure Teorema 1.1.15 del capítol de Preliminars), obtenim l'ajustament de la família de lleis de $\{L^H,\ H \in (H_0 - \eta, H_0 + \eta)\}$ en $\mathscr{C}([-D, D] \times [0, T])$, per a qualsevol $D > 0$ i $T > 0$.

2.3 Identificació de la llei límit

Tot seguit veurem la identificació del límit d'una successió qualsevol feblement convergent de les lleis dels temps locals d'una família de processos estocàstics $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i després aplicarem els resultats generals al cas particular de moviments Brownians fraccionaris. El primer resultat està inspirat en la fórmula d'ocupació.

Proposició 2.3.1. *Sigui $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una família de processos estocàstics que verifica*

(a) $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix en llei a X en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $n \to +\infty$.

(b) La família $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i X tenen temps locals L^n i L respectivament, conjuntament continus en x i t.

(c) La família de temps locals $\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix en llei cap al procés Y en $\mathscr{C}([-D, D] \times [0, T])$, quan $n \to \infty$.

Sigui $g : \mathbb{R} \times [-D, D] \to \mathbb{R}$ contínua amb suport compacte tal que existeix $\alpha \in (0, 1]$ i $C > 0$ pels quals

$$\sup_{\substack{x\in[-D,D]\\ y,z\in\mathbb{R}}} \frac{|g(y,x) - g(z,x)|}{|y-z|^\alpha} < C. \tag{2.3.1}$$

Aleshores,

$$\int_{\mathbb{R}} g(u,x) Y(u,t) du \stackrel{\mathscr{L}}{=} \int_0^t g(X_s, x) ds,$$

en $\mathscr{C}([-D, D] \times [0, T])$.

Demostració. Fixem g contínua amb suport compacte i tal que satisfà la condició (2.3.1). Considerem les aplicacions T_g i U_g, definides com

$$\begin{aligned} T_g : \mathscr{C}(\mathbb{R} \times [0,T]) &\longrightarrow \mathscr{C}([-D,D] \times [0,T]) \\ y &\longmapsto T_g(y)(x,t) = \int_{\mathbb{R}} g(u,x)y(u,t)du, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} U_g : \mathscr{C}([0,T]) &\longrightarrow \mathscr{C}([-D,D] \times [0,T]) \\ f &\longmapsto U_g(f)(x,t) = \int_0^t g(f(s),x)ds. \end{aligned}$$

Es pot comprovar fàcilment que T_g i U_g són aplicacions contínues respecte les topologies usuals.

La Proposició 2.1.6 implica que, per a qualsevol (x,t) i $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(u,x)L_u^{t,n}du = \int_0^t g(X_s^n,x)ds. \tag{2.3.2}$$

Degut a la continuïtat de T_g i U_g i la convergència en llei de les famílies $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cap a X i Y en els espais $\mathscr{C}([0,T])$ i $\mathscr{C}([-D,D] \times [0,T])$, respectivament, tenim que

$$\int_{\mathbb{R}} g(u,x)L_x^{t,n}du \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_{\mathbb{R}} g(u,x)Y(u,t)du$$

i

$$\int_0^t g(X_s^n,x)ds \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_0^t g(X_s,x)ds,$$

en $\mathscr{C}([-D,D] \times [0,T])$, quan $n \to \infty$.

Tenint en compte aquesta convergència i usant (2.3.2) obtenim

$$\int_{\mathbb{R}} g(u,x)Y(u,t)du \stackrel{\mathscr{L}}{=} \int_0^t g(X_s,x)ds.$$

Això conclou la prova. □

A la proposició següent, provarem que, sota les hipòtesis de l'últim resultat, les distribucions en dimensió finita de Y coincideixen amb les de L.

Proposició 2.3.2. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una família de processos que satisfà els apartats (a), (b) i (c) de la proposició anterior. Aleshores, per a qualsevol (x_1,t_1),..., $(x_k,t_k) \in [-D,D] \times [0,T]$*

$$(Y(x_1,t_1),\ldots,Y(x_k,t_k)) \stackrel{\mathscr{L}}{=} (L_{x_1}^{t_1},\ldots,L_{x_k}^{t_k}).$$

Demostració. Sigui $\varphi \in \mathscr{C}^1$ amb suport compacte continguda en $[-1,1]$ i tal que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$. Definim, per a $\varepsilon > 0$ i $(u,x) \in \mathbb{R} \times [-D,D]$, $g_\varepsilon(u,x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{u-x}{\varepsilon}\right)$.

Per la Proposició 2.3.1, tenim que els següents vectors aleatoris són iguals en llei en $\mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x_1)Y(t_1,u)du,\ldots,\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x_k)Y(t_k,u)du\right) \\ &\stackrel{\mathscr{L}}{=} \left(\int_0^{t_1} g_\varepsilon(X_s,x_1)ds,\ldots,\int_0^{t_k} g_\varepsilon(X_s,x_k)ds\right). \end{aligned}$$

Com que $\{g_\varepsilon\}$ és una aproximació de la identitat, per $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ fixats i qualsevol $\omega \in \Omega$ tenim que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x) Y(u,t) du = Y(x,t),$$

i això implica que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x_1) Y(t_1,u) du, \ldots, \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x_k) Y(t_k,u) du \right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \left(Y(x_1,t_1) \ldots, Y(x_k,t_k) \right),$$

quan ε tendeix a 0.

Usant novament que g_ε és una aproximació de la identitat, obtenim que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x_1) L_u^{t_1} du, \ldots, \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(u,x_k) L_u^{t_k} du \right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \left(L_{x_1}^{t_1}, \ldots, L_{x_k}^{t_k} \right),$$

o equivalentment, usant la Proposició 2.1.6

$$\left(\int_0^{t_1} g_\varepsilon(X_s,x_1) ds, \ldots, \int_0^{t_k} g_\varepsilon(X_s,x_k) ds \right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \left(L_{x_1}^{t_1}, \ldots, L_{x_k}^{t_k} \right),$$

quan $\varepsilon \to 0$.

Amb això, concloem

$$(Y(x_1,t_1), \ldots, Y(x_k,t_k)) \stackrel{\mathscr{L}}{=} (L_{x_1}^{t_1}, \ldots, L_{x_k}^{t_k}).$$

□

Usant aquesta proposició i els resultats de les seccions anteriors obtenim la convergència en llei de la família de temps locals dels moviments Brownians fraccionaris.

Corol·lari 2.3.3. *Donat $H_0 \in (0,1)$, la família $\{L^H\}_{H \in (0,1)}$ de temps locals dels moviments Brownians fraccionaris convergeix en llei al temps local L^{H_0} de B^{H_0} en $\mathscr{C}([-D,D] \times [0,T])$, per a qualsevol D, $T > 0$, quan H tendeix a H_0.*

Demostració. Per la Proposició 2.2.6 tenim l'ajustament de les lleis de la família $\{L^H\}_{H \in (H_0-\eta, H_0+\eta)}$, per un cert $\eta > 0$, en $\mathscr{C}([-D,D] \times [0,T])$.

Prenem una successió $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que tendeixi a H_0 quan $n \to \infty$ tal que

$$L_x^{t,H_n} \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(x,t), \tag{2.3.3}$$

en $\mathscr{C}([-D,D] \times [0,T])$, quan $n \to \infty$.

La Proposició 2.3.2 ens diu que per a qualssevol (x_1,t_1), ..., (x_k,t_k) fixats tenim que

$$(Y(x_1,t_1), \ldots, Y(x_k,t_k)) \stackrel{\mathscr{L}}{=} (L_{x_1}^{H_0,\,t_1}, \ldots, L_{x_k}^{H_0,\,t_k}).$$

Per tant, $\mathscr{L}(Y) = \mathscr{L}(L^{H_0})$ en $\mathscr{C}([-D,D] \times [0,T])$. □

2.4 Prova del Teorema 2.1.9

Demostració. Fixat $t \in [0, T]$. Per la condició (ii), la transformada de Fourier de la mesura d'ocupació pertany a $L^2(\mathbb{R})$, ω-q.s.

Pel Teorema 2.1.7, tenim que ω-q.s. la mesura μ^t és absolutament contínua i la seva densitat $f^t \in L^2(\mathbb{R})$ és de quadrat integrable en x. A més, definint

$$f_N^t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-iux} \phi^t(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \int_0^t e^{-iux} e^{iuX_r} dr du,$$

tenim

$$f_N^t \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} f^t, \qquad \omega - q.s. \tag{2.4.1}$$

Pel Teorema 2.1.8, per a qualsevol (x, t) existeix una variable aleatòria, L_x^t, tal que

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]} E|\psi_N(x, t) - L_x^t|^2 \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

on $\psi_N(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-iux} \int_0^t e^{iuX_r} dr du = f_N^t(x)$.

Veurem que ω-q.s. $L_\cdot^t$ és una versió de la densitat f^t de μ^t. Segons la convergència uniforme anterior, en $[-A, A]$, amb $A > 0$, es dedueix que

$$E\left(\int_{-A}^{A} |\psi_N(x, t) - L_x^t|^2 dx \right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

És a dir,

$$\int_{-A}^{A} |\psi_N(x, t) - L_x^t|^2 dx \xrightarrow{L^1(\Omega)} 0,$$

quan $N \to \infty$. Per tant, existeix una subsuccessió $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ i $\Omega' \subset \Omega$ amb $P(\Omega') = 1$ tal que per a tot $\omega \in \Omega'$, la integral

$$\int_{-A}^{A} |\psi_{N_k}(x, t) - L_x^t|^2 dx \longrightarrow 0, \tag{2.4.2}$$

quan $N_k \to \infty$.

D'altra banda, per (2.4.1) tenim, amb probabilitat 1, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_N(x, t) - f^t(x)|^2 dx \longrightarrow 0, \tag{2.4.3}$$

quan $N \to \infty$.

Finalment, de (2.4.2) i (2.4.3), deduïm que $L_x^t = f^t(x)$ x-q.p.t., amb probabilitat 1. Per tant, $\{L_x^t\}$ és un temps local per X. $\square$

Els continguts d'aquest capítol constitueixen essencialment l'article titulat *Continuity in law with respect to the Hurst parameter of the local time of the fractional Brownian motion*, d'autors M. Jolis i N. Viles i publicat a Journal of Theoretical Probability (veure [JV07a]).

Abstract. We give a result of stability in law of the local time of the fractional Brownian motion with respect to small perturbations of the Hurst parameter. Concretely, we prove that the law (in the space of continuous functions) of the local time of the fractional Brownian motion with Hurst parameter H converges weakly to that of the local time of B^{H_0}, when H tends to H_0.

Capítol 3

Continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de les lleis de les integrals fraccionals múltiples. Cas $H > \frac{1}{2}$

En aquest capítol considerarem els funcionals del moviment Brownià fraccionari B^H donats per les integrals estocàstiques múltiples respecte B^H d'una funció determinista. Estudiarem les integrals tipus Itô i Stratonovich i provarem resultats d'estabilitat en llei respecte petites variacions del paràmetre per una àmplia classe d'integrands.

El nostre estudi se centra en el cas en què el paràmetre de Hurst dels moviments Brownians fraccionaris és major que $\frac{1}{2}$. El motiu és que el càlcul de moments de les integrals quan $H < \frac{1}{2}$ és molt més complex, i per altra banda els dominis també són més complicats.

La primera noció d'integral estocàstica múltiple d'una funció determinista f (respecte el moviment Brownià) va ser introduïda per Wiener [Wie38]. Més tard, Itô [Itô48] va modificar la definició de Wiener i va construir una integral múltiple amb la propietat d'ortogonalitat de les integrals d'ordres diferents. Huang i Cambanis [HC78] van generalitzar aquesta última construcció per a qualsevol procés Gaussià.

Hu i Meyer [HM88] van introduir una integral múltiple respecte el procés de Wiener, anomenada integral múltiple tipus Stratonovich, per intentar donar un enfocament matemàtic a les integrals de Feynmann. També van obtenir una fórmula (anomenada fórmula de Hu-Meyer) que expressa la integral tipus Stratonovich d'una funció en termes d'integrals d'Itô d'ordre igual o menor.

Altres autors com per exemple Solé i Utzet [SU90] i Johnson i Kallianpur [JK93] formalitzen de maneres diferents la definició de la integral tipus Stratonovich i proven la respectiva fórmula de Hu-Meyer.

Més recentment, Dasgupta i Kallianpur [DK99b] han construït una integral múltiple tipus Stratonovich respecte el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$ i han provat la corresponent fórmula de Hu-Meyer en [DK99a]. Per altra banda, Duncan et al. [DHPD00] han definit la integral tipus Itô en termes de productes de Wick i també han introduït la integral tipus Stratonovich.

En aquest capítol considerarem la integral de Stratonovich en el sentit de Solé i Utzet [SU90] i utilitzarem el treball de Jolis [Jol06] en el qual la integral tipus Stratonovich es construeix per a processos Gaussians generals que tenen funció de covariància de variació acotada (això inclou el cas del moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$).

Els resultats que obtenim per a la integral múltiple tipus Itô poden ser un primer pas per provar la continuïtat en llei de funcionals molt més complicats, pels quals puguem trobar una descomposició en caos de Wiener on els nuclis de les integrals múltiples siguin funcions prou bones.

Hem organitzat el capítol de la forma següent. A la Secció 2 expliquem breument la construcció, donem algunes de les propietats de la integral de primer ordre $I_1^H(f)$ a l'espai $L^2([0,T])$ i provem que per a $f_1, \ldots, f_k \in L^2([0,T])$ les lleis en $(\mathscr{C}([0,T]))^k$ dels processos k-dimensionals $(I_1^H(f_1\mathbf{1}_{[0,t]}), \ldots, I_1^H(f_k\mathbf{1}_{[0,t]})))$ convergeixen feblement cap a les de $(I_1^{H_0}(f_1\mathbf{1}_{[0,t]}), \ldots, I_1^{H_0}(f_k\mathbf{1}_{[0,t]}))$, quan $H \to H_0$ (veure Teorema 3.1.3).

A la Secció 3 donem les principals propietats de la integral múltiple tipus Itô $I_n^H(f)$ i provem la convergència en llei de $\{I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}), t \in [0,T])\}_{H\in(\frac{1}{2},1)}$ cap a $\{I_n^{H_0}(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}), t \in [0,T]\}$ per $f \in L^2([0,T]^n)$ (veure Teorema 3.2.7). Com a pas previ, demostrem el resultat anàleg (veure Proposició 3.2.4) per a f funció elemental (és a dir, $f = \sum_{i=1}^m b_i g_1^i \otimes \cdots \otimes g_n^i$, amb $g_k^i \in L^2([0,T])$ per a tot $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$).

Finalment, a la Secció 4, introduïm la integral múltiple tipus Stratonovich, $I_n^{S,H}(f)$, i provem que la llei de $\{I_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}),\ t \in [0,T]\}_{H\in(\frac{1}{2},1)}$ convergeix cap a la de $\{I_n^{S,H_0}(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}),\ t \in [0,T]\}$, quan f és una funció o bé elemental o bé contínua, veure la Proposició 3.3.6 i el Teorema 3.3.8.

3.1 Convergència en llei de la integral de primer ordre

Definim la integral de primer ordre d'una funció determinista respecte B^H seguint el procediment habitual. Primer de tot, considerem el conjunt $\mathcal{S}_T$ de totes les funcions simples en $[0,T]$ de la forma

$$f = \sum_{j=1}^N f_j \mathbf{1}_{[a_j,b_j)},$$

on $[a_j, b_j) \subset [0,T]$ i $f_j \in \mathbb{R}$. Observem que $\mathcal{S}_T$ és un espai vectorial. La integral de primer ordre de f respecte B^H es defineix com

$$I_1^H(f) = \sum_{j=1}^N f_j (B_{b_j}^H - B_{a_j}^H).$$

Es pot veure fàcilment que aquesta integral està ben definida i que I_1^H és lineal.

Considerem el producte escalar definit a $\mathcal{S}_T$ per

$$\langle f, g\rangle_H = E(I_1^H(f)I_1^H(g)) = \iint_{[0,T]^2} f(s)g(t)d^2R_H(s,t),$$

on $d^2R_H(s,t) = H(2H-1)|t-s|^{2H-2}dsdt$. Podem estendre la integral a l'espai de Hilbert que denotem per $\Lambda_2(R_H)$ (veure Huang i Cambanis [HC78]) i que és la compleció de $\mathcal{S}_T$ respecte el producte escalar $\langle\ ,\ \rangle_H$. Notem que aquest espai conté distribucions (veure per exemple [Jol07]).

Denotem per $\|\ \|_H$ la norma en $\Lambda_2(R_H)$, és a dir,

$$\|f\|_H = \langle f, f\rangle_H^{1/2}.$$

En el treball de Pipiras i Taqqu [PT01] es pot veure que l'espai de funcions

$$\mathcal{L}_T^H = \{f : \iint_{[0,T]^2} f(s)f(t)d^2R_H(s,t) < +\infty\}$$

és un subespai dens de $\Lambda^2(R_H)$ i per $f,\ g \in \mathcal{L}_T^H$, tenim que

$$\langle f, g\rangle_H = \iint_{[0,T]^2} f(s)g(t)\, d^2R_H(s,t)dsdt.$$

El lema següent ens proporciona una cota superior del moment de segon ordre de $I_1^H(f)$ per a tota funció $f \in L^2([0,T])$.

Lema 3.1.1. *Per a tota $f \in L^2([0,T])$ i $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, es compleix*

$$\iint_{[0,T]^2} |f(x)||f(y)|d^2R_H(x,y) \leqslant C_T\|f\|^2_{L^2([0,T])}. \tag{3.1.1}$$

Com a conseqüència $L^2([0,T]) \subset \mathcal{L}_T^H \subset \Lambda_2(R_H)$ per a qualsevol $H > \frac{1}{2}$, i a més, per a tota $f \in L^2([0,T])$ tenim que

$$E(I_1^H(f))^2 \leqslant C_T\|f\|^2_{L^2([0,T])}.$$

Demostració. Usant la desigualtat de Cauchy-Schwarz, obtenim la desigualtat que volíem provar:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^T |f(x)||f(y)|d^2R_H(x,y)\\
&\quad\leqslant \left(\int_0^T\int_0^T |f(x)|^2d^2R_H(x,y)\right)^{1/2} \times \left(\int_0^T\int_0^T |f(y)|^2d^2R_H(x,y)\right)^{1/2}\\
&\quad= \int_0^T |f(x)|^2H(x^{2H-1} + (T-x)^{2H-1})\, dx\\
&\quad\leqslant 2HT^{2H-1}\int_0^T |f(x)|^2dx\\
&\quad\leqslant 2\max(1,T)\|f\|^2_{L^2([0,T])}.
\end{aligned}$$

$\square$

Denotarem per

$$\mathcal{I}_1^H(f) = \{I_1^H(f\mathbf{1}_{[0,t]}),\ t \in [0,T]\}$$

la integral de primer ordre de f respecte B^H, considerada com a procés.

Observació 3.1.2. *Usant el treball de Nualart i Ouknine [NO03] sabem que, per $f \in L^2([0,T])$, el procés $\mathcal{I}_1^H(f)$ té trajectòries contínues quasi segurament. De fet, prenent $p = 2$ al Teorema 4 d'aquest article, tenim que les trajectòries de $\mathcal{I}_1^H(f)$ pertanyen (q.s) als espais de Besov $\mathcal{B}_{2,q}^{\alpha}$ per a $\alpha \in (1/2, H)$ i $q \in [1,\infty]$, que estan inclosos en $\mathscr{C}([0,T])$.*

En el teorema següent obtenim la convergència en llei de la família de processos k-dimensionals $\{(\mathcal{I}_1^H(f_1),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_k)), H \in \left(\frac{1}{2},1\right)\}$, en $\mathscr{C}([0,T])^k$, quan $H \to H_0 \in \left[\frac{1}{2},1\right)$, per a f_1,..., $f_k \in L^2([0,T])$.

Teorema 3.1.3. *Siguin $f_j \in L^2([0,T])$, amb $j = 1,\dots,k$ i $H_0 \in [\frac{1}{2},1)$. Aleshores,*

$$(\mathcal{I}_1^H(f_1),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_k)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\mathcal{I}_1^{H_0}(f_1),\dots,\mathcal{I}_1^{H_0}(f_k)),$$

en $\mathscr{C}([0,T])^k$, quan $H > \frac{1}{2}$ tendeix a H_0.

Demostració. Començarem provant l'ajustament de la família de lleis de $\{(\mathcal{I}_1^H(f_1),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_k)), H \in \left(\frac{1}{2},1\right)\}$.

Atès que $\mathcal{I}_1^H(f)$ és Gaussià i centrat, pel Lema 3.1.1 tenim que

$$\begin{aligned}
E|(I_1^H(f_1\mathbf{1}_{[0,t]}),\dots,I_1^H(f_k\mathbf{1}_{[0,t]})) - (I_1^H(f_1\mathbf{1}_{[0,s]}),\dots,I_1^H(f_k\mathbf{1}_{[0,s]}))|^4 \\
&\leqslant C_k \sum_{i=1}^k E|I_1^H(f_i\mathbf{1}_{[0,t]}) - I_1^H(f_i\mathbf{1}_{[0,s]})|^4 \\
&= 3C_k \sum_{i=1}^k (E|I_1^H(f_i\mathbf{1}_{[0,t]}) - I_1^H(f_i\mathbf{1}_{[0,s]})|^2)^2 \\
&\leqslant 3C_{k,T}\left(\int_s^t g(x)dx\right)^2,
\end{aligned}$$

on $C_{k,T} = C_k \max(1,T^2)$ i $g(x) := \max_{i=1,\dots,k}|f_i(x)|^2$.

Per tant, pel Criteri de Billingsley (veure Teorema 1.1.14) obtenim l'ajustament.

Ara provarem que les distribucions en dimensió finita del vector $(\mathcal{I}_1^H(f_1),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_k))$ convergeixen feblement cap a $(\mathcal{I}_1^{H_0}(f_1),\dots,\mathcal{I}_1^{H_0}(f_k))$. Primer de tot, apliquem el Lema 1.3.1 prenent l'espai $E = (L^2([0,T]))^k$ dotat de la norma usual i

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^H :\quad & E \longrightarrow (L^0(\Omega))^{km} \\
& (f_1,\dots,f_k) \mapsto (\mathcal{I}_1^H(f_1\mathbf{1}_{[0,t_1]}),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_1\mathbf{1}_{[0,t_m]}),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_k\mathbf{1}_{[0,t_1]}),\dots,\mathcal{I}_1^H(f_k\mathbf{1}_{[0,t_m]})).
\end{aligned}$$

Pel Lema 3.1.1, veiem que $\mathcal{J}^H$ satisfà la condició (C) del Lema 1.3.1. A més, per a $(f_1,\dots,f_k) \in (\mathcal{S}_T)^k$ (que és un subespai dens d'E) tenim que $\mathcal{J}^H(f_1,\dots,f_k)$ convergeix en llei a $\mathcal{J}^{H_0}(f_1,\dots,f_k)$ perquè, en aquest cas, les integrals $I_1^H(f_i\mathbf{1}_{[0,t_j]})$ són combinacions lineals d'increments de B^H i sabem que B^H convergeix feblement cap a B^{H_0}. Amb això finalitza la prova. □

3.2 Convergència en llei de la integral múltiple tipus Itô

3.2.1 Definició i propietats de la integral múltiple tipus Itô

Sigui $\mathcal{S}_T^n$ el conjunt de totes les funcions simples en $[0,T]^n$. Considerem la forma bilineal, simètrica i definida positiva en $\mathcal{S}_T^n \times \mathcal{S}_T^n$ donada per

$$\langle f, g\rangle_{H,n} = \int_{[0,T]^{2n}} f(s_1,\dots,s_n)g(t_1,\dots,t_n)d^{2n}R_H(s_1,t_1,\dots,s_n,t_n),$$

on $d^{2n}R_H(s_1,t_1,\dots,s_n,t_n) = d^2R_H(s_1,t_1)\dots d^2R_H(s_n,t_n)$.

Denotem per $\Lambda_2(\otimes^n R_H)$ la compleció de $\mathcal{S}_T^n$ respecte el producte interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H,n}$. A Huang i Cambanis [HC78], la integral múltiple tipus Itô, denotada per I_n^H, es construeix a l'espai $\Lambda_2(\otimes^n R_H)$.

Anàlogament al cas $n = 1$, l'espai $(\mathcal{L}_T^H)^{\otimes n}$ està contingut en el domini de la integral, $\Lambda_2(\otimes^n R_H)$, per a tot $H > \frac{1}{2}$, i per a $f,\ g \in (\mathcal{L}_T^H)^{\otimes n}$ tenim que

$$\langle f, g\rangle_{H,n} = \iint_{[0,T]^{2n}} f(s_1,\dots,s_n)g(t_1,\dots,t_n)d^{2n}R_H(s_1,t_1,\dots,s_n,t_n).$$

Com a conseqüència, $L^2([0,T]^n) \subset \Lambda_2(\otimes^n R_H)$.

En el teorema següent, resumirem algunes de les propietats més importants de la integral múltiple tipus Itô $I_n^H(f)$.

Teorema 3.2.1. *(Theorem 2.1,[HC78]). Les integrals múltiples tipus Itô satisfan les propietats següents:*

(i) *Per a cada n, I_n^H és un operador lineal de $\Lambda_2(\otimes^n R_H)$ en un subespai de $L^2(\Omega)$.*

(ii) *$I_n^H(f) = I_n^H(\widetilde{f})$, on $\tilde{f}$ denota la simetrització de $f \in \Lambda_2(\otimes^n R_H)$.*

(iii) *$E(I_n^H(f)I_n^H(g)) = n!\langle\tilde{f},\tilde{g}\rangle_{\Lambda_2(\otimes^n R_H)}$.*

(iv) *$E(I_n^H(f)I_m^H(g)) = 0$, si $n \neq m$.*

(v) *Si $h \in \Lambda_2(R_H)$ amb $\|h\|_H = 1$ aleshores*

$$I_n^H(h^{\otimes n}) = n!H_n(I_1^H(h)),$$

on H_n denota el polinomi d'Hermite de grau n normalitzat. Recordem que aquest polinomi es defineix com

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}), \qquad n \geqslant 1,$$

i $H_0(x) = 1$.

(vi) Si $h \in \Lambda_2(R_H)$, aleshores

$$I_n^H(h^{\otimes n}) = n! H_n(\|h\|_H, I_1^H(h)), \tag{3.2.1}$$

on $H_n(\lambda, x)$ denota el polinomi d'Hermite de grau n en dues variables i normalitzat:

$$H_n(\lambda, x) = \lambda^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad x \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

Per a cada $n \geqslant 1$ denotarem per

$$\mathcal{I}_n^H(f) = \{I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}),\ t \in [0,T]\}$$

la integral múltiple tipus Itô de f respecte B^H, entesa com a procés.

3.2.2 Convergència en llei de $\mathcal{I}_n^H(f)$ per a $f \in \mathcal{E}_n$

Sigui $\mathcal{E}_n$ l'espai de funcions elementals de la forma

$$f = \sum_{i=1}^m b_i g_1^i \otimes \cdots \otimes g_n^i,$$

amb $g_k^i \in L^2([0,T])$ per a tot $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$.

Observació 3.2.2. *Si $H = \frac{1}{2}$, el moviment Brownià fraccionari és un procés de Wiener amb funció de covariància, donada per*

$$R_{1|2}(s,t) = s \wedge t,$$

que té variació acotada. Aleshores, aquesta funció defineix una mesura en $\mathscr{B}([0,T]^2)$ que és singular respecte a la mesura de Lebesgue. De fet, és la mesura uniforme concentrada a la diagonal, que formalment es denota com δ_{t-s} a la teoria de distribucions.
Observem que es pot expressar la norma $\|f\|_{L^2([0,T])}$ com

$$\|f\|^2_{L^2([0,T])} = \int_0^T f(s)^2 ds = \int_0^T \int_0^T f(s)f(t) d^2 R_{1|2}(s,t) = \|f\|^2_{1|2}.$$

La proposició següent la utilitzarem, més endavant, per provar la convergència en llei de les integrals múltiples tipus Itô.

Proposició 3.2.3. *Donada $f \in L^2([0,T])$, definim la família $\{g_H,\ H \in [\frac{1}{2},1)\}$ de funcions contínues donades per*

$$g_H(t) = \|f\boldsymbol{1}_{[0,t]}\|_H^2 = \int_0^t \int_0^t f(x)f(y)d^2R_H(x,y).$$

Aleshores, $\{g_H\}_{H\geqslant\frac{1}{2}}$ convergeix uniformement en $t \in [0,T]$ cap a g_{H_0}, quan $H \to H_0 \in \left[\frac{1}{2},1\right)$.

Demostració. Si $H_0 > \frac{1}{2}$, es pot obtenir de forma senzilla el resultat usant arguments de convergència dominada. Per tant, suposarem que $H_0 = \frac{1}{2}$.

Donada $f \in L^2([0,T])$ i $0 < \varepsilon < 1$, existeix una funció $\varphi \in C^1([0,T])$ nul·la en zero tal que

$$\|f-\varphi\|_{L^2([0,T])} < \varepsilon. \tag{3.2.2}$$

Podem suposar també que

$$\|\varphi\|_{L^2([0,T])} \leqslant \|f\|_{L^2([0,T])}. \tag{3.2.3}$$

Observem que

$$\left|\|f\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H^2 - \|f\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{1|2}^2\right| \leqslant A_1 + A_2 + A_3,$$

amb

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left|\int_0^t \int_0^t f(x)f(y)d^2R_H(x,y) - \int_0^t \int_0^t \varphi(x)\varphi(y)d^2R_H(x,y)\right|,\\
A_2 &= \left|\int_0^t \int_0^t \varphi(x)\varphi(y)d^2R_H(x,y) - \int_0^t \varphi(x)^2dx\right|,\\
A_3 &= \left|\int_0^t \varphi(x)^2dx - \int_0^t f(x)^2dx\right|.
\end{aligned}$$

Usant les desigualtats (3.1.1), (3.2.2) i (3.2.3), podem acotar el terme A_1 de la forma següent:

$$\begin{aligned}
A_1 = \left|\|(f-\varphi+\varphi)\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H^2 - \|\varphi\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H^2\right| &= \left|\|(f-\varphi)\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H^2 + 2\langle(f-\varphi)\mathbf{1}_{[0,t]},\varphi\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle_H\right|\\
&\leqslant C_T\|f-\varphi\|_{L^2([0,T])}^2 + 2\|(f-\varphi)\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H\|\varphi\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H\\
&\leqslant C_T\varepsilon^2 + 2C_T\varepsilon\|f\|_{L^2([0,T])} < C_{f,T}\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fent càlculs similars, podem provar que, per a tot $\varepsilon > 0$, el terme A_3 està acotat per $C_{f,T}\ \varepsilon$. Finalment, veurem que

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \int_0^t \varphi(x)\varphi(y)d^2R_H(x,y) - \int_0^t \varphi(x)^2dx\right| \longrightarrow 0, \tag{3.2.4}$$

quan $H \to 1/2$.

Per provar això, usarem dues igualtats obtingudes a partir de la fórmula d'integració per parts. Per $H > \frac{1}{2}$ tenim que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^t \varphi(x)\varphi(y)H(2H-1)|x-y|^{2H-2}dxdy\\
&\qquad = \int_0^t \int_0^t R_H(x,y)\varphi'(x)\varphi'(y)dxdy - t^{2H}\varphi(t)^2\\
&\qquad\quad + 2H\varphi(t)\int_0^t (x^{2H-1} + (t-x)^{2H-1})\varphi(x)dx,
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

i
$$\int_0^t \varphi(x)^2 dx = \int_0^t \int_0^t (x \wedge y)\varphi'(x)\varphi'(y)dxdy - t\varphi(t)^2 + 2\varphi(t)\int_0^t \varphi(x)dx. \tag{3.2.6}$$
La idea darrera l'ús d'aquestes expressions ve del fet que les mesures definides per $d^2R_H(x,y)$ i $d^2R_{1|2}(x,y)$ són derivades, en el sentit de les distribucions, de R_H i $R_{1|2}$, respectivament.

Ara, provarem la convergència uniforme cap a zero de les diferències dels corresponents termes de la banda dreta de (3.2.5) i (3.2.6), quan $H \to \frac{1}{2}$. Es pot veure molt fàcilment que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| t^{2H}\varphi^2(t) - t\varphi^2(t) \right| \underset{H\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} 0.$$

Usant un argument de convergència dominada es pot provar de forma senzilla que l'expressió:

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \int_0^t R_H(x,y)\varphi'(x)\varphi'(y)dxdy - \int_0^t \int_0^t (x\wedge y)\ \varphi'(x)\varphi'(y) \right| dxdy$$

convergeix a zero quan $H \to \frac{1}{2}$.
Finalment, tenim que

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t 2H(x^{2H-1} + (t-x)^{2H-1})\varphi(x)dx - \int_0^t 2\varphi(x)dx \right| \\ &\quad \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (2Hx^{2H-1} - 1)\varphi(x)dx \right| + \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (2H(t-x)^{2H-1} - 1)\varphi(x)dx \right| \\ &\quad \leqslant 2\|\varphi\|_\infty \int_0^T |2Hx^{2H-1} - 1|dx. \end{aligned}$$

Novament, utilitzant arguments de convergència dominada es pot veure que aquest terme convergeix a zero quan $H \to \frac{1}{2}$. □

La proposició següent prova la convergència en llei de la família $\{\mathcal{I}_n^H(f),\ H > \frac{1}{2}\}$ cap a $\mathcal{I}_n^{H_0}(f)$ per a tot $f \in \mathcal{E}_n$, quan H tendeix a H_0.

Proposició 3.2.4. *Sigui $f \in \mathcal{E}_n$. Aleshores, la família de processos $\{\mathcal{I}_n^H(f),\ H > \frac{1}{2}\}$ convergeix en llei cap a $\mathcal{I}_n^{H_0}(f)$, en l'espai $\mathscr{C}([0,T])$, quan H tendeix a $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.*

Demostració. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que f és una funció simètrica. Sabem que tota funció simètrica $f \in \mathcal{E}_n$ es pot expressar com

$$f = \sum_{i=1}^m b_i\, g^i \otimes \cdots \otimes g^i,$$

per unes certes funcions $g^i \in L^2([0,T])$.
Per (3.2.1), tenim que

$$I_n^H(f\,\mathbf{1}_{[0,t]^n}) = \sum_{i=1}^m b_i\, n! H_n(\|g^i\mathbf{1}_{[0,t]}\|_H, I_1^H(g^i\mathbf{1}_{[0,t]})).$$

Per tant, $\mathcal{I}_n^H(f)$ té una versió contínua.

Usant la Proposició 3.2.3 i el Teorema 3.1.3, tenim que

$$(\|g^1\mathbf{1}_{[0,\cdot]}\|_H, \ldots, \|g^m\mathbf{1}_{[0,\cdot]}\|_H, \mathcal{I}_1^H(g^1), \ldots, \mathcal{I}_1^H(g^m)),$$

convergeix en llei cap a

$$(\|g^1\mathbf{1}_{[0,\cdot]}\|_{H_0}, \ldots, \|g^m\mathbf{1}_{[0,\cdot]}\|_{H_0}, \mathcal{I}_1^{H_0}(g^1), \ldots, \mathcal{I}_1^{H_0}(g^m)),$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^{2m}$, quan $H \to H_0$.

Per aquest motiu i tenint en compte que els polinomis d'Hermite en dues variables són funcions contínues, deduïm el resultat que volíem provar.

□

3.2.3 Convergència en llei de $\mathcal{I}_n^H(f)$ per a $f \in L^2([0,T]^n)$

Tot seguit provarem la convergència en llei en $\mathscr{C}([0,T])$ de la família de processos $\{\mathcal{I}_n^H(f)\}_{H\in(\frac{1}{2},1)}$ quan H tendeix a H_0, per a tota $f \in L^2([0,T]^n)$. Per demostrar l'existència d'una versió contínua de la integral i l'ajustament de la família de lleis, necessitarem el lema que enunciem a continuació:

Lema 3.2.5. *Sigui $f \in L^2([0,T]^n)$ i siguin $0 \leqslant s < t \leqslant T$. Aleshores, per a tot $H \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ tenim que*

$$E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^2 \leqslant C_{n,T}\|f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}\|^2_{L^2([0,T]^n)}(t-s)^{2H-1}. \tag{3.2.7}$$

Com a conseqüència s'obté que

$$E[I_n^H(f)]^2 \leqslant C_{n,T}\|f\|^2_{L^2([0,T]^n)}. \tag{3.2.8}$$

Demostració. El cas $H = \frac{1}{2}$ ja és conegut. Suposem $H > \frac{1}{2}$. Podem suposar també sense pèrdua de generalitat que f és simètrica ja que si tenim provada la desigualtat per aquest tipus de funcions aleshores obtindrem (atès que els conjunts $[0,t]^n$ i $[0,s]^n$ són simètrics):

$$\begin{aligned}
E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^2 &= E[I_n^H(\widetilde{f\mathbf{1}}_{[0,t]^n}) - I_n^H(\widetilde{f\mathbf{1}}_{[0,s]^n})]^2 \\
&\leqslant C_{n,T}\|\widetilde{f\mathbf{1}}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}\|^2_{L^2([0,T]^n)}(t-s)^{2H-1} \\
&\leqslant C_{n,T}\|f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}\|^2_{L^2([0,T]^n)}(t-s)^{2H-1}
\end{aligned}$$

Suposem doncs que f és simètrica. D'una banda, usant la propietat (iii) del Teorema 3.2.1 tenim que

$$\begin{aligned}
&E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^2 = n!\langle f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}, f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}\rangle_{H,n} \\
&\quad = C_n\left(\int_{[0,T]^{2n}}(f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n})(s_1,\ldots,s_n)(f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n})(t_1,\ldots,t_n)d^{2n}R_H(s_1,t_1,\ldots,s_n,t_n)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

A més aplicant la desigualtat

$$f(s_1,\dots,s_n)f(t_1,\dots,t_n) \leqslant \frac{f(s_1,\dots,s_n)^2 + f(t_1,\dots,t_n)^2}{2}$$

a (3.2.9) tenim que

$$E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^2$$
$$\leqslant C_n\left(\int_{[0,T]^{2n}} f^2(s_1,\dots,s_n)\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}(s_1,\dots,s_n)\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}(t_1,\dots,t_n)d^{2n}R_H(s_1,t_1,\dots,s_n,t_n)\right). \tag{3.2.10}$$

Ara, integrarem aquesta expressió respecte les variables $t_1,\dots,t_n$. Abans però, observem que el conjunt $[0,t]^n \setminus [0,s]^n$ està contingut en el conjunt de punts de $[0,t]^n$ tals que almenys una de les n coordenades pertany a $[s,t]$, i això significa que ens apareixerà almenys una integral del tipus:

$$\int_s^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2}dy.$$

Per $H \in (\frac{1}{2},1)$, estudiem, en funció de x, aquesta integral. Per a això, distingirem els tres casos que presentem a continuació:

(i) Si $0 < x < s$,

$$\begin{aligned}\int_s^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2}dy &= H(2H-1)\int_s^t (y-x)^{2H-2}dy \\ &= H[(t-x)^{2H-1} - (s-x)^{2H-1}] \leqslant H(t-s)^{2H-1}.\end{aligned}$$

(ii) Si $x \in [s,t]$,

$$\begin{aligned}\int_s^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2}dy &= H(2H-1)\int_s^x (x-y)^{2H-2}dy + H(2H-1)\int_x^t (y-x)^{2H-2}dy \\ &= H[(x-s)^{2H-1} + (t-x)^{2H-1}] \leqslant 2H(t-s)^{2H-1}.\end{aligned}$$

(iii) Si $T > x > t$,

$$\begin{aligned}\int_s^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2}dy &= H(2H-1)\int_s^t (x-y)^{2H-2}dy \\ &= H[(x-s)^{2H-1} - (x-t)^{2H-1}] \leqslant H(t-s)^{2H-1}.\end{aligned}$$

Per la resta d'integrals obtenim la cota superior següent

$$\int_0^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2}dy \leqslant C_T.$$

Així doncs, usant aquestes desigualtats que acabem de veure i integrant (3.2.10) respecte les variables $t_1,\dots,t_n$ tenim que

$$\begin{aligned}&E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^2 \\ &\quad\leqslant C_{n,T}\left(\int_{[0,T]^{2n}} f^2(s_1,\dots,s_n)\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}(s_1,\dots,s_n)ds_1\dots,ds_n\right)(t-s)^{2H-1} \\ &\quad= C_{n,T}\|f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}\|^2_{L^2([0,T]^n)}(t-s)^{2H-1},\end{aligned}$$

que és el que volíem provar. □

En el lema següent enunciem la *propietat d'hipercontractivitat* en el context de caos de Wiener. Per a tota variable aleatòria de quadrat integrable $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f)$ denotem per J_n la projecció en el caos de Wiener d'ordre n i tenim que la seva projecció coincideix amb la integral múltiple d'ordre n: $J_n(F) = I_n(f_n)$.

Considerem el semigrup d'Ornstein-Uhlenbeck $\{T_t,\ t \geqslant 0\}$ d'operadors lineals i acotats T_t en $L^1(\Omega)$ que per a $F \in L^2(\Omega)$ ve donat per

$$T_t(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} J_n(F).$$

Aquests operadors verifiquen la propietat d'hipercontractivitat següent:

Lema 3.2.6. *(veure per exemple, pàg.65 de [LT91], o Theorem 1.4.1.,[Nua06]) Sigui $p > 1$ i $t > 0$ i prenem $q(t) = e^{2t}(p-1) + 1 > p$. Suposem que $F \in L^p(\Omega)$. Aleshores,*

$$\|T_t(F)\|_{q(t)} \leqslant \|F\|_p.$$

Com a conseqüència d'aquesta propietat, es pot veure de forma senzilla que per a tot $1 < p < q < +\infty$ les normes $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_q$ són equivalents en el caos de Wiener d'ordre n.

En efecte, sigui $t > 0$ tal que $q = 1 + e^{2t}(p-1)$. Aleshores, per a tota variable aleatòria $F \in L^2(\Omega)$ que pertanyi al caos de Wiener d'ordre n, tenim que

$$e^{-nt}\|F\|_q = \|T_t F\|_q \leqslant \|F\|_p.$$

Usant aquest fet i prenent $p = 2$ i $t > 0$ de forma que $q = e^{2t} + 1 > 2$, obtenim que

$$\|J_n(F)\|_q \leqslant (q-1)^{n/2}\|J_n(F)\|_2. \tag{3.2.11}$$

Aquest resultat l'aplicarem a la integral estocàstica múltiple tipus Itô d'una funció determinista ja que aquesta pertany al caos de Wiener d'ordre n i d'aquesta manera podrem estimar els moments de qualsevol ordre superior a dos a partir del moment de segon ordre.

Teorema 3.2.7. *Sigui $f \in L^2([0,T]^n)$ una funció simètrica. Aleshores, la família de lleis en $\mathscr{C}([0,T])$ dels processos $\{\mathcal{I}_n^H(f),\ H \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ convergeix feblement cap a la llei de $\mathcal{I}_n^{H_0}(f)$, quan H tendeix a $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.*

Demostració. Com a conseqüència del Lema 3.2.5 i la propietat d'hipercontractivitat (3.2.11) tenim que per a tot $p > 2$

$$E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^p \leqslant C_{n,T}\|f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}\|_{L^2([0,T]^n)}^{\frac{p}{2}}(t-s)^{\frac{p}{2}(2H-1)} \leqslant C_{n,T}(t-s)^{\frac{p}{2}(2H-1)}.$$

Per tant, aplicant el Criteri de continuïtat de Kolmogorov obtenim que $\mathcal{I}_n^H(f)$ té una versió contínua.

D'altra banda, si considerem el moment de quart ordre, és a dir, $p = 4$ a la primera part de la desigualtat anterior tenim

$$E[I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^4 \leqslant C_{n,T}\left(\int_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n} f^2(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\right)^2$$

i usant el Criteri de Billingsley obtenim l'ajustament de les lleis de $\{\mathcal{I}_n^H(f),\ H \in (\frac{1}{2},1)\}$ en $\mathscr{C}([0,T])$, prenent com a $F(x) = \int_{[0,x]^n} f^2(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$.
Ara provarem que $(I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t_1]^n}),\ldots,I_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t_m]^n}))$ convergeix en llei cap a $(I_n^{H_0}(f\mathbf{1}_{[0,t_1]^n}),\ldots,I_n^{H_0}(f\mathbf{1}_{[0,t_m]^n}))$, per a tot $t_1,\ldots,t_m \in [0,T]$. Per aquest motiu, apliquem el Lema 1.3.1 amb $E = L^2([0,T]^n)$ dotat de la norma L^2 i

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^H : E &\longrightarrow (L^0(\Omega))^m \\ f &\longmapsto (\mathcal{I}_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t_1]}),\ldots,\mathcal{I}_n^H(f\mathbf{1}_{[0,t_m]})). \end{aligned}$$

Pel Lema 3.2.5, sabem que la condició (C) del Lema 1.3.1 es satisfà. Aleshores, tenint en compte que $\mathcal{E}_n$ és un subespai dens d'E i usant la Proposició 3.2.4 s'obté el resultat desitjat.

$\square$

3.3 Convergència en llei de la integral múltiple tipus Stratonovich

3.3.1 Definició de la integral tipus Stratonovich i convergència en llei per a $f \in \mathcal{E}_n$

Introduirem la integral múltiple tipus Stratonovich en el sentit de Solé i Utzet [SU90].

Definició 3.3.1. *(Proposition 2.3, [BJT03a]) Donada una funció integrable $f : [0,T]^n \longrightarrow \mathbb{R}$, direm que existeix la integral fraccional tipus Stratonovich de f si existeix el límit en $L^2(\Omega)$, quan $|\pi| \to 0$, de*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \frac{1}{|\Delta_{i_1}^\pi|\ldots|\Delta_{i_n}^\pi|}\left(\int_{\Delta_{i_1}^\pi\times\cdots\times\Delta_{i_n}^\pi} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n\right) B^H(\Delta_{i_1}^\pi)\ldots B^H(\Delta_{i_n}^\pi),$$

on $\{\Delta_{i_j}^\pi\}$ són els intervals definits per una partició π de l'interval $[0,T]$. A més, donat un interval Δ, $B^H(\Delta)$ denota l'increment del procés B^H en Δ i $|\Delta|$ és la seva longitud. Quan aquest límit existeix el denotarem per $I_n^{S,H}(f)$.

Dasgupta i Kallianpur [DK99b] van construir una integral múltiple respecte el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in (\frac{1}{2},1)$ per funcions $f \in L^2(\mu_n^H)$ on μ_n^H és la mesura definida a l'expressió (48) d'aquest darrer article. Aquesta integral satisfà que per a qualsevol funció f de la forma

$$f = \sum_m a_m \mathbf{1}_{\Delta_1^m\times\cdots\times\Delta_n^m}, \qquad \text{amb } a_m \in \mathbb{R}, \text{ per a tot } m,$$

sense cap restricció en els intervals Δ_i^m, és igual a

$$\sum_m a_m B^H(\Delta_1^m) \dots B^H(\Delta_n^m).$$

Observació 3.3.2. *Bardina et al. [BJT03b] (veure Proposition 2.3 d'aquest últim article) proven que per $f \in L^2(\mu_n^H)$ la integral de Dasgupta i Kallianpur [DK99b] és el límit en $L^2(\Omega)$ de les sumes de Riemann considerades per Solé i Utzet [SU90] (veure la Definició 3.3.1). Notem que $L^\infty([0,T]^n) \subset L^2(\mu_n^H)$ i també $\mathcal{E}_n \subset L^2(\mu_n^H)$.*

A continuació expliquem breument una altra construcció de la integral múltiple tipus Stratonovich respecte el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H \in (1/2, 1)$ (veure [Jol06], on es consideren processos Gaussians generals amb funció de covariància de variació acotada). Si $f \in \mathcal{E}_n$ és de la forma següent

$$f = \sum_{i=1}^m a_i (h_1^i \otimes \cdots \otimes h_n^i), \tag{3.3.1}$$

on $h_1^i, \dots, h_n^i \in L^2([0,T])$ i $a_i \in \mathbb{R}$, per a tot $i = 1, \dots, m$, definim la integral tipus Stratonovich com

$$I_n^{S,H}(f) := \sum_{i=1}^m a_i I_1^H(h_1^i) \cdots I_1^H(h_n^i). \tag{3.3.2}$$

D'aquesta definició, es dedueix que $I_n^{S,H}$ és una aplicació lineal en $\mathcal{E}_n$ i que $I_n^{S,H}(f) = I_n^{S,H}(\tilde{f})$, on $\tilde{f}$ és la simetrització de f.

Un cop vista aquesta definició, enunciarem la corresponent fórmula de Hu-Meyer per a funcions elementals (en el cas particular del moviment Brownià fraccionari amb $H \in (1/2, 1)$).

Teorema 3.3.3. *(Theorem 3.2, [Jol06]) Sigui $H \in (1/2, 1)$ i sigui f una funció elemental en $[0,T]^n$, amb $n \geqslant 1$. Aleshores,*

$$I_n^{S,H}(f) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k} I_{n-2k} \left(\int_{[0,T]^{2k}} \widetilde{f}(t_1, \dots, t_{2k}, \cdot) d^{2k} R_H(t_1, \dots, t_{2k}) \right), \tag{3.3.3}$$

amb el conveni que si $k = 0$, el corresponent terme és igual a $I_n^H(\widetilde{f})$.

Ara, considerem $\mathcal{E}_n^s$ l'espai de les funcions elementals simètriques en $[0,T]^n$. Usant el Teorema 3.3.3 i les propietats de les integrals tipus Itô tenim que, per $f \in \mathcal{E}_n^s$,

$$E(I_n^{S,H}(f))^2 \leqslant C_n \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \int_{[0,T]^{n-2k}} \left(\int_{[0,T]^{2k}} |f| d^{2k} R_H \right)^2 d^{n-2k} \lambda_H, \tag{3.3.4}$$

on λ_H és la mesura definida per

$$\lambda_H(A) = \int_0^T \int_A d^2 R_H(x,y),$$

per a qualsevol conjunt de Borel $A \subset [0,T]$. Es pot veure fàcilment que, per a qualsevol $p \in [1,\infty]$, tenim $L^p(\lambda_{_H}) = L^p([0,T])$.

Usant la desigualtat (3.3.4), es pot estendre la integral a un espai de Banach, denotat per $L_n^{s,H}$, seguint els passos que descrivim a continuació. Primer de tot, prenem

$$d\nu_n := \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (d^{2k} R_{_H} \otimes d^{n-2k} \lambda_{_H}),$$

amb el conveni $d^0 R_{_H} \otimes d^n \lambda_{_H} = d^n \lambda_{_H}$ i que si n és parell $d^n R_{_H} \otimes d^0 \lambda_{_H} = d^n R_{_H}$ i denotem

$$\|f\|_* = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \int_{[0,T]^{n-2k}} \left(\int_{[0,T]^{2k}} |f| d^{2k} R_{_H} \right)^2 d^{n-2k} \lambda_{_H}.$$

Aleshores, $L_n^{s,H}$ és l'espai de totes les funcions $f \in L^1(\nu_n)$ simètriques i tals que $\|f\|_* < \infty$.

Es pot veure que les funcions simètriques de $L^2(\mu_n^{^H})$ estan incloses en $L_n^{s,H}$, i com a conseqüència les funcions simètriques de $L^\infty([0,T]^n)$ estan incloses en $L_n^{s,H}$. A més, les integrals de Dasgupta i Kallianpur [DK99b] i Jolis [Jol06] coincideixen en $L^2(\mu_n^{^H})$.

També es pot provar que la fórmula de Hu-Meyer es satisfà en $L_n^{s,H}$. És a dir, la igualtat (3.3.3) es satisfà per a qualsevol $f \in L_n^{s,H}$ (veure Theorem 3.5, [Jol06]).

Donada $f \in L^2([0,T]^n)$ i una partició π de $[0,T]$, definim

$$\begin{aligned} f^\pi(t_1,\dots,t_n) = &\sum_{i_1,\dots,i_n} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\dots|\Delta_{i_n}|} \left(\int_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}} f(s_1,\dots,s_n) ds_1 \dots ds_n \right) \\ &\times 1_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}}(t_1,\dots,t_n), \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

on Δ_i són els intervals de la partició π i $|\Delta_i|$ les seves longituds.

Sabem que, quan $f \in L^2([0,T]^n)$, f^π convergeix a f en $L^2([0,T]^n)$, si $|\pi| \to 0$.

Tots els resultats de la integral múltiple tipus Stratonovich enunciats fins ara fan referència només al cas $H \in (1/2,1)$. Quan $H = 1/2$, la mesura definida per la funció de covariància és singular respecte la mesura de Lebesgue i això implica que la integral tipus Stratonovich respecte el procés de Wiener sigui més complicada. Per exemple, si definim la integral en el sentit de Solé i Utzet [SU90], les funcions integrables han de satisfer que existeixin unes altres funcions anomenades "traces" definides per un procediment límit (veure Solé i Utzet [SU90]) i, en general, és difícil trobar classes de funcions amb aquesta propietat. No obstant això, es pot demostrar el resultat següent:

Teorema 3.3.4. *Sigui f una funció tal que $f = f_1 + f_2$ amb $f_1 \in \mathcal{E}_n$ i $f_2 \in \mathscr{C}([0,T]^n)$ i simètriques. Aleshores, $f\, \mathbf{1}_{[0,t]^n}$ és integrable Stratonovich respecte $B^{1|2}$ per a tot $t \in [0,T]$ i es satisfà la fórmula de Hu-Meyer següent:*

$$I_n^{S,1|2}(f\, \mathbf{1}_{[0,t]^n}) = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!}{(n-2j)!j!2^j} \times I_n^{1|2}\left(\int_{[0,t]^j} f(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_j, x_j, \cdot)\, \mathbf{1}_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot) dx_1 \cdots dx_j \right).$$

Demostració. Pel sumand $f_1 \in \mathcal{E}_n$, el resultat és conseqüència directa de la definició de les traces i la fórmula de Hu-Meyer de Solé i Utzet [SU90]. Pel terme $f_2 \in \mathscr{C}([0,T]^n)$, podem aplicar el Lemma A1 de Bardina i Jolis [BJ00]. □

Com a conseqüència d'aquest teorema, podem enunciar el següent corol·lari.

Corol·lari 3.3.5. *Si $f = f_1 + f_2$ amb $f_1 \in \mathcal{E}_n \cap L^\infty([0,T]^n)$ i $f_2 \in \mathscr{C}([0,T]^n)$ simètriques, aleshores existeix una constant $C_{n,T}$ que només depèn de n i T tal que*

$$E[I_n^{S,1|2}(f\, \mathbf{1}_{[0,t]^n})]^2 \leqslant C_{n,T}\, \|f\|_\infty^2.$$

Per a tot $n \geqslant 1$, denotem per

$$\mathcal{I}_n^{S,H}(f) = \{I_n^{S,H}(f \mathbf{1}_{[0,t]^n}),\ t \in [0,T]\}$$

la integral múltiple tipus Stratonovich respecte B^H associada a f, com a procés.

Proposició 3.3.6. *Sigui $f \in \mathcal{E}_n$. Aleshores, la família de processos $\{\mathcal{I}_n^{S,H}(f),\ H \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ convergeix en llei a $\mathcal{I}_n^{S,H_0}(f)$, en $\mathscr{C}([0,T])$, quan H tendeix a $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.*

Demostració. Per a $f \in \mathcal{E}_n$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^m a_i h_i^1 \otimes \cdots \otimes h_i^n,$$

on $h_i^k \in L^2([0,T])$, tenim que el procés $\mathcal{I}_n^{S,H}(f)$ donat per

$$I_n^{S,H}(f \mathbf{1}_{[0,t]^n}) = \sum_{i=1}^m a_i I_1^H(h_i^1 \mathbf{1}_{[0,t]}) \cdots I_1^H(h_i^n \mathbf{1}_{[0,t]}), \qquad \forall t \in [0,T],$$

té una versió contínua i és un funcional continu del següent procés multidimensional

$$(\mathcal{I}_1^H(h_1^1), \ldots, \mathcal{I}_1^H(h_n^1), \ldots, \mathcal{I}_1^H(h_1^m), \ldots, \mathcal{I}_1^H(h_n^m)).$$

Aleshores, el resultat s'obté del Teorema 3.1.3.

□

El següent lema tècnic ens serà útil per provar la convergència de $\mathcal{I}_n^{S,H}(f)$ per a f contínua.

Lema 3.3.7. *Per a tot $k = 0, \dots, n$, existeix una constant positiva $C_{n,T}$ que no depèn del paràmetre H tal que*

$$\int_{[0,T]^{n-2k}} \left(\int_{[0,T]^{2k}} \mathbf{1}_{[0,t]^n \setminus [0,s]^n} (\underline{x}, x_{2k+1}, \dots, x_n)) d^{2k} R_H(\underline{x}) \right)^2 dx_{2k+1} \dots dx_n \quad \leqslant C_{n,T}(t-s), \tag{3.3.6}$$

per a tot $s \leqslant t$, amb s, $t \in [0,T]$. En aquest cas, $\underline{x}$ denota el vector $2k$-dimensional, $(x_1, \dots, x_{2k})$.

Demostració. Per provar la desigualtat (3.3.6), necessitarem les cotes superiors següents

a)
$$\int_0^t \int_0^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2} dxdy = t^{2H} \leqslant \max(1, T^2). \tag{3.3.7}$$

b)
$$\int_0^t \int_s^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2} dxdy = \frac{(t-s)^{2H}}{2} + \frac{t^{2H} - s^{2H}}{2} \leqslant C_T(t-s). \tag{3.3.8}$$

El conjunt $([0,t]^n \setminus [0,s]^n)$ està contingut en el conjunt de punts de $[0,t]^n$ tals que almenys una de les coordenades pertany a $[s,t]$. Tenint en compte aquest fet, estudiarem els casos següents:

- A la integral del membre esquerre de (3.3.6) sobre el conjunt de punts tals que almenys una de les primeres $2k$ (en el cas $k \neq 0$) coordenades està en $[s,t]$ hi tenim un terme del tipus
$$\left(\int_0^T \int_s^t H(2H-1)|x-y|^{2H-2} dxdy \right)^2 \leqslant C_T(t-s)^2,$$
usant la desigualtat (3.3.8).

- Sobre el conjunt de punts en què una de les $n-2k$ últimes coordenades pertany a $[s,t]$ tenim un terme com
$$\int_0^t \int_s^t dxdy = C_T(t-s).$$

Usant això i aplicant la desigualtat (3.3.7), es pot provar de forma senzilla (3.3.6). □

3.3.2 Convergència en llei de la integral tipus Stratonovich per a $f \in \mathscr{C}([0,T]^n)$

Teorema 3.3.8. *Sigui $f \in \mathscr{C}([0,T]^n)$ una funció simètrica. Aleshores, la família de processos $\{\mathcal{I}_n^{S,H}(f), H \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ convergeix en llei a $\mathcal{I}_n^{S,H_0}(f)$ en l'espai $\mathscr{C}([0,T])$, quan H tendeix a $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.*

Demostració. Començarem provant l'ajustament.
Per simplificar la notació, denotarem per g la funció $g = f\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}$.
Usant la fórmula de Hu-Meyer, l'ortogonalitat d'integrals tipus Itô d'ordres diferents tenim que

$$\begin{aligned} E[I_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,t]^n}) - I_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,s]^n})]^p &= E[I_n^{S,H}(g)]^p \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k} I_{n-2k}^H\left(\int_{[0,T]^{2k}} \tilde{g}(t_1,\dots,t_{2k},\cdot)d^{2k}R_H(t_1,\dots,t_{2k})\right)\right]^p \\ &\leqslant C_p \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^p E\left[I_{n-2k}^H\left(\int_{[0,T]^{2k}} \tilde{g}(t_1,\dots,t_{2k},\cdot)d^{2k}R_H(t_1,\dots,t_{2k})\right)\right]^p, \end{aligned}$$

on $c_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k} > 0$ i $\underline{x}$ denota el vector $2k$-dimensional $(x_1,\dots,x_{2k})$.

Aplicant la propietat d'hipercontractivitat (3.3.6) i l'expressió del moment de segon ordre de la integral tipus Itô, tenim que

$$\begin{aligned} E[I_n^{S,H}(g)]^p &\leqslant C_{p,T} \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^p \left[E\left(I_{n-2k}^H\left(\int_{[0,T]^{2k}} \tilde{g}(t_1,\dots,t_{2k},\cdot)d^{2k}R_H(t_1,\dots,t_{2k})\right)\right)^2\right]^{p/2} \\ &= C_{p,T} \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^p \Big[(n-2k)! \int_{[0,T]^{2(n-2k)}} \left(\int_{[0,T]^{2k}} \tilde{g}(\underline{x}, x_{2k+1},\dots,x_n)d^{2k}R_H(\underline{x})\right. \\ &\quad \times \left.\int_{[0,T]^{2k}} \tilde{g}(\underline{y}, y_{2k+1},\dots,y_n)d^{2k}R_H(\underline{y})\right) d^{2(n-2k)}R_H(x_{2k+1},y_{2k+1},\dots,x_n,y_n)\Big]^{p/2}. \end{aligned}$$

Finalment, usant la desigualtat de Cauchy-Schwarz i aplicant el Lema 3.3.7 tenim que

$$\begin{aligned} E[I_n^{S,H}(g)]^p &\leqslant C_{p,T} \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{n,k}^p \Big[(n-2k)! \int_{[0,T]^{2(n-2k)}} \left(\int_{[0,T]^{2k}} \tilde{g}(\underline{x}, x_{2k+1},\dots,x_n)d^{2k}R_H(\underline{x})\right)^2 \\ &\quad \times d^{2(n-2k)}R_H(x_{2k+1},y_{2k+1},\dots,x_n,y_n)\Big]^{p/2} \\ &\leqslant C_{n,p,T} \|f\|_\infty^p \Big[\int_{[0,T]^{2(n-2k)}} \left(\int_{[0,T]^{2k}} (\mathbf{1}_{[0,t]^n\setminus[0,s]^n}(\underline{x}, x_{2k+1},\dots,x_n))^\sim d^{2k}R_H(\underline{x})\right)^2 \\ &\quad \times d^{2(2n-2k)}R_H(x_{2k+1},y_{2k+1},\dots,x_{2n},y_{2n})\Big]^{p/2} \\ &\leqslant C_{n,p,T} \|f\|_\infty^p (t-s)^{p/2}. \end{aligned}$$

Com a conseqüència d'aquesta última cota obtenim , prenent $p > 2$, l'existència d'una versió contínua de $\mathcal{I}_n^{S,H}(f)$ i l'ajustament de les lleis de $\{\mathcal{I}_n^{S,H}(f),\ H \in (\frac{1}{2},1)\}$ en $\mathscr{C}([0,T])$.
Ara comprovarem que el vector aleatori $(I_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,t_1]^n}),\dots,I_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,t_m]^n}))$ convergeix en llei cap a $(I_n^{S,H_0}(f\mathbf{1}_{[0,t_1]^n}),\dots,I_n^{S,H_0}(f\mathbf{1}_{[0,t_m]^n}))$, per a qualsevol $t_1,\dots,t_m \in [0,T]$. Usarem el Lema 1.3.1 prenent

$$E = \{f : f = f_1 + f_2,\ amb\ f_1 \in \mathcal{E}_n^s \cap L^\infty([0,T]^n),\ f_2 \in \mathscr{C}([0,T]^n)\ i\ simètrica\},$$

dotat de la norma L^∞. Considerem

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^H : E &\longrightarrow (L^0(\Omega))^m \\ f &\longmapsto (\mathcal{I}_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,t_1]}), \dots, \mathcal{I}_n^{S,H}(f\mathbf{1}_{[0,t_m]})). \end{aligned}$$

La Condició (C) del Lema 1.3.1 es satisfà. En efecte, per la mateixa desigualtat que hem obtingut l'ajustament, tenim que per a $g \in L^\infty([0,T]^n)$, i $H > \frac{1}{2}$

$$E[I_n^{S,H}(g)]^4 \leqslant C_{n,T} \|g\|_\infty^4.$$

A més, pel Corol·lari 3.3.5 tenim la mateixa cota per $H = \frac{1}{2}$ (en aquest cas necessitarem prendre $g \in E$).

Finalment, el resultat s'obté aplicant la Proposició 3.3.6 ja que les funcions simètriques de $\mathcal{E}_n \cap L^\infty([0,T]^n)$ formen un subconjunt dens de E. □

Els continguts d'aquest capítol estan inclosos essencialment a l'article titulat *Continuity with respect to the Hurst parameter of the laws of the multiple fractional integrals*, d'autors M. Jolis i N. Viles i publicat a Stochastic Processes and their Applications (veure [JV07b]).

Abstract. We prove the weak convergence in $\mathscr{C}([0,T])$ of the laws of the Itô and Stratonovich multiple integrals of some classes of deterministic functions with respect to the fractional Brownian motion, B^H, with Hurst parameter $H > 1/2$, to the law of the corresponding multiple integral with respect to B^{H_0}, when H tends to $H_0 \in [1/2, 1)$.

Capítol 4

Continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de les lleis de la integral fraccional simple. Cas $H < \frac{1}{2}$

A la Secció 3.1 del Capítol 3 hem provat la convergència en llei de la família d'integrals estocàstiques de primer ordre d'una funció determinista respecte B^H amb $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$. De fet, hem provat el cas k-dimensional i l'hem usat com a pas previ per la convergència en llei de la integral estocàstica múltiple.

En aquest capítol estudiarem la convergència en llei de la família d'integrals estocàstiques de primer ordre però quan $H \in (0, \frac{1}{2})$. Hem considerat el cas 1-dimensional ja que l'extensió al cas multidimensional no implica cap dificultat addicional.

Tot i que existeixen diferents caracteritzacions del domini de la integral estocàstica simple respecte B^H per $H \in (0, \frac{1}{2})$ (veure per exemple [AMN00]), nosaltres utilitzarem la caracterització de Bardina i Jolis en [BJ06] relacionada amb els espais de Sobolev ordinaris ja que per a la integral d'una funció determinista s'obté una expressió més senzilla i còmode per treballar.

Pel que fa a la prova de la convergència en llei, es farà de la manera habitual. Primer provarem l'ajustament de la família de lleis usant el Criteri de Billingsley (veure Teorema 1.1.14) i després la convergència de les distribucions en dimensió finita, aplicant el Lema 1.3.1. Cal dir que en aquest cas, l'ajustament de la família de lleis de les integrals estocàstiques de primer ordre respecte B^H només l'hem provat per H en un entorn d'H_0.

Hem estructurat el capítol en dues seccions. A la primera introduïm la definició de la integral estocàstica de primer ordre d'una funció determinista respecte el moviment Brownià fraccionari B^H quan $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ i enunciem el resultat de [BJ06] que proporciona la caracterització del domini d'aquesta integral.
Usant aquesta caracterització a la segona secció es demostra el resultat principal d'aquest capítol, la convergència en llei de la família d'integrals estocàstiques de primer ordre d'una funció determinista respecte B^H, en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$.

4.1 Preliminars

Considerem el conjunt de les funcions simples $\mathcal{S}_T$ en [0,T] de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i \mathbf{1}_{[a_i,b_i)}, \quad on \quad [a_i, b_i) \subset [0,T].$$

Es pot definir de manera natural la integral de primer ordre de f respecte el moviment Brownià fraccionari B^H com

$$I_1^H(f) = \sum_{i=1}^{N} f_i (B_{b_i}^H - B_{a_i}^H).$$

Es pot veure de forma senzilla que la integral de primer ordre $I_1^H(f)$ és lineal i està ben definida ja que no depèn de la representació de f.

Per a tota $f,\ g \in \mathcal{S}_T$ es pot definir el producte escalar següent:

$$\Psi_H(f,g) = E(I_1^H(f) I_1^H(g)).$$

Aquest producte escalar és definit positiu ja que la covariància és definida positiva. Això proporciona condicions necessàries per estendre, seguint els passos habituals, la integral de primer ordre a un conjunt més ampli d'integrands, l'espai $\mathcal{L}_T^H$ que és la compleció de $\mathcal{S}_T$ respecte el producte escalar $\Psi_H(f,g)$. Aquest espai és ben conegut i es pot caracteritzar en termes de les derivades fraccionals (veure, per exemple, [DÜ99], [AMN01] o [PT01]).
De totes formes, al llarg d'aquest catítol usarem la caracterització de $\mathcal{L}_T^H$ introduïda per Bardina i Jolis en [BJ06] i que es basa en el següent resultat:

Lema 4.1.1. *(Lemma 2.1., [BJ06]) Per a tota $f,\ g \in \mathcal{S}_T$, tenim que*

$$\Psi_H(f,g) = \frac{1}{2}H(1-2H)\int_0^T\int_0^T \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^{2-2H}}dxdy + H\int_0^T f(x)g(x)\left[\frac{1}{x^{1-2H}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H}}\right]dx.$$

La prova d'aquest lema es pot veure a [Jol07].
Per a tota $f, g \in \mathcal{S}_T$, també es pot obtenir una expressió més compacta de $\Psi_H(f,g)$ (veure [BJ06]):

$$\Psi_H(f,g) = \frac{1}{2}H(1-2H)\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\bar{f}(x)-\bar{f}(y))(\bar{g}(x)-\bar{g}(y))}{|x-y|^{2-2H}}dxdy, \tag{4.1.1}$$

on

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,T] \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Donada una funció localment integrable $f : I \to \mathbb{R}$ (on I pot ser un interval finit o tot $\mathbb{R}$), i una partició π de l'interval I es defineix

$$f^\pi = \sum_i \frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\Delta_i} f(x)dx \mathbf{1}_{\Delta_i}. \tag{4.1.2}$$

Per a tota $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ mesurable, es pot introduir la quantitat següent, possiblement infinita:

$$\|f\|_{H} = \left[\frac{1}{2}H(1-2H)\int_0^T\int_0^T \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{2-2H}}dxdy \right.$$
$$\left. + H\int_0^T f(x)^2\left(\frac{1}{x^{1-2H}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H}}\right)dx\right]^{1/2}. \qquad (4.1.3)$$

En el teorema següent (veure Theorem 2.5 de [BJ06]) es dóna una caracterització de l'espai $\mathcal{L}_T^H$ que està relacionada amb els espais de Sobolev ordinaris.

Teorema 4.1.2. *(Theorem 2.5, [BJ06]) El domini de la integral de primer ordre I_1^H ve donat per*

$$\mathcal{L}_T^H = \{f \in L^2([0,T]) : \|f\|_H < +\infty\}.$$

Si dotem aquest espai amb el producte escalar definit per

$$\Psi_H(f,g) = \frac{1}{2}H(1-2H)\int_0^T\int_0^T \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^{2-2H}}dxdy$$
$$+ H\int_0^T f(x)g(x)\left[\frac{1}{x^{1-2H}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H}}\right]dx, \qquad (4.1.4)$$

aleshores la integral de primer ordre I_1^H és una isometria entre $\mathcal{L}_T^H$ i un subespai de $L^2(\Omega)$.

A més per a tota $f \in \mathcal{L}_T^H$ i tota successió $\Pi = (\pi^m)_m$ de particions de $[0,T]$ tals que satisfan la condició següent:

$$C_\Pi := \left(\sup_{m\in\mathbb{N}}\sup_{i,j}\frac{|\Delta_i^m|}{|\Delta_j^m|}\right) < +\infty,$$

i tals que la norma $|\pi^m| \to 0$, tenim que

$$\|f^{\pi^m} - f\|_H \longrightarrow 0, \quad m \to \infty,$$

amb f^π definida en (4.1.2).

Com a conseqüència,

$$I_1^H(f) = L^2(\Omega) - \lim_{m\to\infty}\sum_i \left(\frac{1}{|\Delta_i^m|}\int_{\Delta_i^m} f(x)dx\right)B^H(\Delta_i^m).$$

Incloem també en aquesta secció de Preliminars el Teorema d'Immersió de Sobolev que necessitarem aplicar en la propera secció per provar l'ajustament.

Primer de tot introduïm els espais de Sobolev d'ordre fraccionari sobre $[0,T]$.
Per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$ i tot $p \in (1,+\infty)$, considerem la seminorma següent

$$\|f\|_{\alpha,p} = \left(\iint_{[0,T]^2}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+\alpha p}}dxdy\right)^{1/p}. \qquad (4.1.5)$$

Per $\alpha > 0$, es defineix l'espai de Sobolev $W^{\alpha,p}([0,T])$ com

$$W^{\alpha,p}([0,T]) = \{f : \|f\|_{L^p([0,T]} + \|f\|_{\alpha,p} < +\infty\}. \tag{4.1.6}$$

Aquest espai dotat amb la norma definida per $\|f\|_{L^p([0,T]} + \|f\|_{\alpha,p}$ és un espai de Banach. Per a $p = 2$, es té que $W^{\alpha,2}([0,T])$ és un espai de Hilbert amb el producte escalar definit per

$$\langle f, g \rangle_{W^{\alpha,2}([0,T])} = \iint_{[0,T]^2} \frac{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}{|x - y|^{1+2\alpha}} dxdy + \langle f, g \rangle_{L^2([0,T])}.$$

A continuació, enunciem el Teorema d'Immersió de Sobolev (veure Theorem 5.4, [Ada75]). Tot i que en aquest darrer treball que citem, el teorema està enunciat per $\mathbb{R}^n$ i per a dominis amb suficient regularitat (veure Teorema 7.14 de [Ada75]), nosaltres presentarem una versió adaptada al context dels nostres resultats.

Teorema 4.1.3. *(Teorema d'Immersió de Sobolev) Suposem que* $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ *amb* $p \in (1, +\infty)$. *Aleshores,*

$$W^{\alpha,p}([0,T]) \hookrightarrow L^q([0,T]),$$

on $p \leqslant q \leqslant \frac{p}{1-\alpha p}$.

A la propera secció treballarem amb espais de Sobolev fraccionaris $W^{1/2-H,2}([0,T])$ d'ordre $\alpha = \frac{1}{2} - H$, és a dir,

$$W^{1/2-H,2}([0,T]) = \Big\{f \in L^2([0,T]) : \iint_{[0,T]^2} \frac{(f(x) - f(y))^2}{|x - y|^{2-2H}} dxdy < +\infty\Big\}. \tag{4.1.7}$$

Aplicant el Teorema 4.1.3 amb $p = 2$, $\alpha = \frac{1}{2} - H$ i $q = \frac{p}{1-\alpha p} = \frac{2}{1-2(\frac{1}{2}-H)} = \frac{1}{H}$, tenim que

$$W^{1/2-H,2}([0,T]) \hookrightarrow L^{1/H}([0,T]).$$

Acabem aquesta secció mostrant una altra caracterització de l'espai $\mathcal{L}_T^H$:

$$\mathcal{L}_T^H = \{f \in L^2([0,T]) : \bar{f} \in W^{1/2-H,2}(\mathbb{R})\},$$

on $W^{1/2-H,2}(\mathbb{R})$ és l'espai de Sobolev definit per

$$W^{1/2-H,2}(\mathbb{R}) = \Big\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(f(x) - f(y))^2}{|x - y|^{2-2H}} dxdy < +\infty\Big\}.$$

4.2 Convergència en llei de la integral fraccional simple d'una funció determinista

4.2.1 Resultats per provar l'ajustament

Tot seguit enunciem i demostrem una sèrie de resultats tècnics, necessaris per provar l'ajustament de la família de lleis de $\{\mathcal{I}_1^H(f)\}_H$ per H en un entorn d'H_0.

Lema 4.2.1. *Siguin T, $k > 0$ nombres reals positius. Aleshores, per a tot $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leqslant T$ i $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant k$, existeix una constant $C_{T,k}$ (que només depèn de T i de k)*

$$|x|^{\alpha_2} \leqslant C_{T,k} |x|^{\alpha_1}.$$

Demostració.

$$|x|^{\alpha_2} = \left(\frac{|x|}{T}\right)^{\alpha_2} T^{\alpha_2} \leqslant |x|^{\alpha_1} T^{\alpha_2 - \alpha_1} \leqslant |x|^{\alpha_1} \max(1, T^k).$$

□

La següent proposició és el resultat més important d'aquesta secció, ja que ens proporciona una estimació del moment de segon ordre de la integral $\mathcal{I}_1^H(f)$ que no depèn del paràmetre H. Més endavant, utilitzarem aquesta acotació per demostrar l'existència d'una versió contínua de $\mathcal{I}_1^H(f)$ i l'ajustament de la família de lleis de $\{\mathcal{I}_1^H(f)\}_H$, per H en un entorn d'H_0.

Proposició 4.2.2. *Sigui $f \in \mathcal{L}_T^{H'}$ amb $H' \in (0, \frac{1}{2})$. Aleshores, per a $H_1 \in (H', \frac{1}{2})$ existeix una constant positiva $C = C_{H', H_1, f, T}$, que només depèn de H', H_1, f i T, tal que*

$$\sup_{H \in [H_1, \frac{1}{2})} E|I_1^H(f\mathbf{1}_{[s,t]})|^2 \leqslant C(t-s)^{2(H_1 - H')}, \tag{4.2.1}$$

per a tot $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Demostració. Sigui $H \in [H_1, \frac{1}{2})$. Per tal de facilitar la lectura d'aquesta demostració i tenint en compte que de les constants només ens interessa estudiar la seva dependència en H, farem un abús de la notació i a partir d'ara usarem C per denotar indistintament a totes les constants d'aquesta demostració tret d'aquelles, si es dóna el cas, que depenguin d'H.
Per a tot $s \leqslant t$ i usant l'expressió (4.1.3) tenim que

$$\begin{aligned}
E|I_1^H(f\mathbf{1}_{[s,t]})|^2 &= \|f\mathbf{1}_{[s,t]}\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}H(1-2H)\left(\int_s^t\int_s^t \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{2-2H}}dxdy + \int_s^t\int_{[0,T]\setminus[s,t]} \frac{f(y)^2}{|x-y|^{2-2H}}dxdy\right. \\
&\quad \left. + \int_{[0,T]\setminus[s,t]}\int_s^t \frac{f(x)^2}{|x-y|^{2-2H}}dxdy\right) + H\int_s^t f(x)^2\left[\frac{1}{x^{1-2H}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H}}\right]dx.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Aplicant la desigualtat de Hölder prenent $p = \frac{1-H'}{1-H} > 1$ i q el seu conjugat, acotem el primer terme de la manera següent:

$$\begin{aligned}
\int_s^t\int_s^t \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{2-2H}}dxdy &\leqslant \left(\int_s^t\int_s^t \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{2-2H'}}dxdy\right)^{1-H/1-H'} \\
&\quad \times \left(\int_s^t\int_s^t (f(x)-f(y))^2 dxdy\right)^{H-H'/1-H'}.
\end{aligned}$$

Com $H \geqslant H_1$, tenim que

$$\left(\int_s^t \int_s^t \frac{(f(x)-f(y))^2}{|x-y|^{2-2H'}} dxdy\right)^{1-H/1-H'} \leqslant \max(1, \|f\|^2_{W^{1/2-H',2}([0,T])})^{\frac{(1-H_1)}{1-H'}}.$$

Donat que pel Teorema d'Immersió de Sobolev, $f \in L^{1/H'}([0,T])$ i aplicant novament la desigualtat de Hölder tenim que

$$\begin{aligned}\left(\int_s^t \int_s^t f(x)^2 dxdy\right)^{\frac{H-H'}{1-H'}} &\leqslant \left(\int_s^t \left(\int_s^t |f(x)|^{1/H'} dx\right)^{2H'} (t-s)^{1-2H'} dy\right)^{\frac{H-H'}{1-H'}} \\ &= \left(\int_s^t |f(x)|^{1/H'} dx\right)^{2H'\left(\frac{H-H'}{1-H'}\right)} (t-s)^{2(H-H')} \\ &\leqslant C(t-s)^{2(H-H')}.\end{aligned}$$

D'aquesta manera hem aconseguit acotar superiorment el primer sumand de (4.2.2) per $C(t-s)^{2(H-H')}$.

La resta de termes es poden acotar de forma senzilla. De fet, el segon i el tercer sumands de (4.2.2) s'acoten de forma anàloga. A continuació veiem els passos que se segueixen per acotar el segon sumand.

Calculant la integral respecte x del segon terme i acotant-ho convenientment tenim que

$$\begin{aligned}&\int_s^t \int_{[0,T]\setminus[s,t]} \frac{f(y)^2}{|x-y|^{2-2H}} dxdy \\ &\quad = \frac{1}{1-2H}\left[\int_s^t f(y)^2((y-s)^{2H-1} - y^{2H-1})dy + \int_s^t f(y)^2((t-y)^{2H-1} - (T-y)^{2H-1})dy\right] \\ &\quad \leqslant \frac{1}{1-2H}\left(\int_s^t f(y)^2 (y-s)^{2H-1} dy + \int_s^t f(y)^2 (t-y)^{2H-1} dy\right).\end{aligned}$$

Altra vegada usant que $f \in L^{1/H'}([0,T])$, aplicant la desigualtat de Hölder a cada un dels sumands de la banda dreta de la desigualtat anterior i usant que l'exponent $\frac{2H-1}{1-2H'} > -1$ per ser $H \geqslant H_1 > H'$ tenim que:

- $$\begin{aligned}\int_s^t f(y)^2 (y-s)^{2H-1} dy &\leqslant \left(\int_s^t |f(y)|^{1/H'} dy\right)^{2H'} \left(\int_s^t (y-s)^{2H-1/1-2H'} dy\right)^{1-2H'} \\ &\leqslant C\left(\frac{1-2H'}{2(H-H')}\right)^{1-2H'} (t-s)^{2(H-H')}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_s^t f(y)^2 (t-y)^{2H-1} dy &\leqslant \left(\int_s^t |f(y)|^{1/H'} dy\right)^{2H'} \left(\int_s^t (t-y)^{2H-1/1-2H'} dy\right)^{1-2H'} \\ &\leqslant C\left(\frac{1-2H'}{2(H-H')}\right)^{1-2H'} (t-s)^{2(H-H')}.\end{aligned}$$

Per tant, tenint en compte aquestes desigualtats i degut a que $H - H' > H_1 - H' > 0$, obtenim que

$$\frac{1}{2}H(1-2H)\int_{[0,T]\setminus[s,t]}\int_s^t \frac{f(x)^2}{|x-y|^{2-2H}}dxdy \leqslant C(t-s)^{2(H-H')}.$$

De manera similar tractem el terme següent, és a dir, primer utilitzant que $f \in L^{1/H'}([0,T])$ pel Teorema d'Immersió de Sobolev i després aplicant convenientment la desigualtat de Hölder tenim que

$$\begin{aligned}\int_s^t f(x)^2 \left[\frac{1}{x^{1-2H}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H}}\right] dx &= \int_s^t f(x)^2 x^{2H-1} dx + \int_s^t f(x)^2 (T-x)^{2H-1} dx \\ &\leqslant \left(\int_s^t |f(x)|^{1/H'} dx\right)^{2H'} \left(\int_s^t x^{2H-1/1-2H'} dx\right)^{1-2H'} \\ &\quad + \left(\int_s^t |f(x)|^{1/H'} dx\right)^{2H'} \left(\int_s^t (T-x)^{2H-1/1-2H'} dx\right)^{1-2H'} \\ &\leqslant C[t^{2(H-H')} - s^{2(H-H')} + (T-s)^{2(H-H')} - (T-t)^{2(H-H')}]. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Com que per $0 < \alpha < 1$,

$$x^\alpha - y^\alpha \leqslant (x-y)^\alpha,$$

tenim:

- $t^{2(H-H')} - s^{2(H-H')} \leqslant (t-s)^{2(H-H')}$.
- $(T-s)^{2(H-H')} - (T-t)^{2(H-H')} \leqslant (t-s)^{2(H-H')}$.

Així doncs, el terme (4.2.3) es pot acotar superiorment per

$$C(t-s)^{2(H-H')}.$$

Finalment, usant les desigualtats anteriors i aplicant el Lema 4.2.1, deduïm que

$$\sup_{H\in[H_1,\frac{1}{2})} E|I_1^H(f\mathbf{1}_{[s,t]})|^2 \leqslant C(t-s)^{2(H-H')} \leqslant C(t-s)^{2(H_1-H')},$$

amb C una constant positiva. □

4.2.2 Resultats per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita

Tal com hem comentat al Capítol 1, el Lema 1.3.1 serà cabdal per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita de la família de processos $\{\mathcal{I}_1^H(f)\}_H$, amb H en un entorn d'H_0.

Per comprovar que la nostra família de processos satisfà la condició (C) del Lema 1.3.1 necessitem provar la desigualtat que enunciem en el lema següent:

Lema 4.2.3. *Per a tota* $f \in \mathcal{L}_T^{H'}$ *i* $H \in [H', \frac{1}{2}]$*, existeix una constant* $C_{T,H'}$ *tal que*

$$\|f\|_H^2 \leqslant C_{T,H'} \|f\|_{H'}^2.$$

Demostració. Per provar aquesta desigualtat distingirem els casos $0 < H < \frac{1}{2}$ i $H = \frac{1}{2}$.

1. Cas $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

   Com $1 - 2H \leqslant 1 - 2H'$ per $H \in \left[H', \frac{1}{2}\right)$ i aplicant el Lema 4.2.1 obtenim que:

   - $|x - y|^{2-2H} \geqslant C_{T,H'} |x - y|^{2-2H'}$,
   - $x^{1-2H} \geqslant C_{T,H'} x^{1-2H'}$,
   - $(T - x)^{1-2H} \geqslant C_{T,H'} x^{1-2H'}$.

   Aplicant convenientment aquesta desigualtat i el Lema 4.2.1 a cada un dels sumands de l'expressió de $\|f\|_H$ tenim que:

   $$\begin{aligned}\|f\|_H^2 &= \Psi_H(f, f)\\ &= \frac{1}{2} H(1-2H) \int_0^T \int_0^T \frac{(f(x) - f(y))^2}{|x-y|^{2-2H}} dxdy + H \int_0^T f^2(x) \left[\frac{1}{x^{1-2H}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H}}\right] dx\\ &\leqslant C_{T,H'} \int_0^T \int_0^T \frac{(f(x) - f(y))^2}{|x-y|^{2-2H'}} dxdy + \frac{1}{2} C_{T,H'} \int_0^T f^2(x) \left[\frac{1}{x^{1-2H'}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H'}}\right] dx\end{aligned}$$

   D'aquí es dedueix que

   $$\|f\|_H^2 \leqslant C_{H',T} \|f\|_{H'}^2.$$

2. Cas $H = \frac{1}{2}$:

   Donat que $x = \frac{T}{2}$ és el mínim de la funció

   $$g(x) = \frac{1}{x^{1-2H'}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H'}}, \quad x \in [0, T],$$

   aleshores

   $$\int_0^T f^2(x) \left[\frac{2}{\left(\frac{T}{2}\right)^{1-2H'}}\right] dx \leqslant \int_0^T f^2(x) \left[\frac{1}{x^{1-2H'}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H'}}\right] dx$$

   o equivalentment,

   $$\int_0^T f^2(x) dx \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2}\right)^{1-2H'} \int_0^T f^2(x) \left[\frac{1}{x^{1-2H'}} + \frac{1}{(T-x)^{1-2H'}}\right] dx$$

   Així doncs, tenint en compte aquesta última desigualtat podem veure de forma molt senzilla el que volíem provar:

   $$\|f\|_{1|2}^2 \leqslant C_{T,H'} \|f\|_{H'}^2.$$

□

4.2.3 Resultat principal

Finalment, demostrarem la convergència en llei de la família de processos $\{\mathcal{I}_1^H(f)\}_H$ amb H en un entorn d'H_0, en l'espai $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0 \in (0, \frac{1}{2}]$, per a tota $f \in \mathcal{L}_T^{H'}$.

Teorema 4.2.4. *Sigui $f \in \mathcal{L}_T^{H'}$ amb $H' < H_0$ i $H_0 \in (0, \frac{1}{2}]$. Aleshores, la família de processos $\{\mathcal{I}_1^H(f)\}_{H \in (H', \frac{1}{2}]}$ convergeix en llei cap a $\mathcal{I}_1^{H_0}(f)$, en l'espai $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$.*

Demostració. El primer pas és demostrar l'existència d'una versió contínua de la integral de primer ordre $\mathcal{I}_1^H(f)$. Per fer-ho, simplement apliquem la Proposició 4.2.2 i el Criteri de continuïtat de Kolmogorov, tenint en compte que $\mathcal{I}_1^H(f)$ és un procés Gaussià i centrat.

Usant també que els processos $\mathcal{I}_1^H(f)$ són Gaussians i centrats, per la Proposició 4.2.2 i el Criteri de Billingsley (veure Teorema 1.1.14) s'obté l'ajustament de la família de lleis de $\{\mathcal{I}_1^H(f),\ H \in [H_1, \frac{1}{2})\}$ en $\mathscr{C}([0,T])$, per a tot $0 < H' < H_1 < \frac{1}{2}$.

Un cop vista l'existència d'una versió contínua i l'ajustament ja només ens queda provar la convergència de les distribucions en dimensió finita dels processos $\mathcal{I}_1^H(f)$. Per veure-ho només cal aplicar el Lema 1.3.1 prenent $E = \mathcal{L}_T^{H'}$ dotat de la norma $\|\cdot\|_{H'}$, i

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^H : & E \longrightarrow (L^0(\Omega))^m \\ & f \mapsto (I_1^H(f\mathbf{1}_{[0,t_1]}), \dots, I_1^H(f\mathbf{1}_{[0,t_m]})). \end{aligned}$$

Pel Lema 4.2.3, $\mathcal{J}^H$ satisfà la condició (C) del Lema 1.3.1. A més, per a $f \in \mathcal{S}_T$ (que és un subespai dens de E), la convergència en llei de $\mathcal{I}_1^H(f)$ cap a $\mathcal{I}_1^{H_0}(f)$ s'obté del fet que les integrals $I_1^H(f\mathbf{1}_{[0,t_j]})$ no són més que combinacions lineals d'increments de B^H, i B^H convergeix en llei cap a B^{H_0}, quan $H \to H_0$. $\square$

Capítol 5

Continuïtat en llei respecte el paràmetre de Hurst de la integral simètrica tipus Russo-Vallois. Cas $H > \frac{1}{2}$

Al 1993, F. Russo i P. Vallois [RV93] van introduir uns nous tipus d'integrals estocàstiques usant una tècnica de regularització, entre elles la integral simètrica o tipus Stratonovich.

En aquest treball considerarem la família d'integrals simètriques tipus Russo-Vallois respecte el moviment Brownià fraccionari B^H (amb $H \in V_0$ on V_0 és un interval contingut en $\left[\frac{1}{2}, 1\right))$ i com a integrands, uns processos estocàstics no necessàriament adaptats que anomenarem u^H però que satisfan unes certes condicions, bàsicament de continuïtat uniformes en H per u^H i la seva derivada de Malliavin.

El nostre objectiu serà estudiar la convergència en llei d'aquesta família d'integrals simètriques tipus Russo-Vallois en l'espai de funcions contínues $\mathscr{C}([0,T])$ quan el paràmetre de Hurst $H \to H_0$ amb $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$. Concretament es provarà la convergència en llei de $\int_0^t u_s^H dB_s^H$ cap a $\int_0^t u_s^{H_0} dB_s^{H_0}$, quan $H \to H_0$.

Per provar aquesta convergència en llei hem seguit els passos habituals. Primer, comprovar l'ajustament de la família de lleis i després, la convergència de les distribucions en dimensió finita. Per veure l'ajustament hem hagut d'imposar cotes uniformes en H d'integrals dels moments tant per al procés u^H com per a la seva derivada de Malliavin. En canvi, per la convergència de les distribucions ens dimensió finita hem necessitat suposar condicions de regularitat, uniformes en H, de les trajectòries del procés u^H i de la seva derivada de Malliavin i també que

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}),$$

conjuntament quan $H \to H_0$ en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$.

A més, per garantir l'existència de la integral tipus Russo-Vallois i l'expressió en termes de la integral de Skorohod i la traça en el cas $H_0 = \frac{1}{2}$ així com la convergència en llei en aquest cas, ens ha calgut imposar condicions de regularitat addicionals per a la derivada de Malliavin del procés, però similars a les que s'imposa per a la integral de Stratonovich introduïda per Nualart i Pardoux en [NP88].

Aquest capítol s'organitza en tres seccions. A la Secció 1 introduïm alguns conceptes bàsics i els resultats preliminars sobre la integral simètrica tipus Russo-Vallois respecte el moviment Brownià fraccionari. A la Secció 2 enunciem i provem el resultat principal sobre la convergència en llei de la família d'integrals simètriques tipus Russo-Vallois en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$. A la Secció 3 veiem una aplicació d'aquest resultat. Finalment, a la darrera secció es troba la demostració de la Proposició 5.1.4 que no s'ha inclòs a la secció de Preliminars per facilitar-ne la lectura.

5.1 Preliminars

En aquest capítol considerem un moviment Brownià fraccionari $B^H = \{B_t^H,\ t \in [0,T]\}$ amb paràmetre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Sigui $\mathscr{S}^H$ el conjunt de les funcions simples en l'interval $[0,T]$. Considerem l'espai de Hilbert $\mathscr{H}^H$ definit com la clausura de $\mathscr{S}^H$ respecte el producte escalar donat per

$$\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathscr{H}^H} = R_H(t,s).$$

Aquest espai de Hilbert conté elements que no són funcions però sí distribucions (veure [Jol07]). A més, l'aplicació $\mathbf{1}_{[0,t]} \longrightarrow B_t$ es pot estendre a una isometria entre l'espai de Hilbert $\mathscr{H}^H$ i l'espai Gaussià $\mathscr{H}_1(B^H)$ associat a B^H i que en aquest capítol denotem per $\varphi \longrightarrow B^H(\varphi)$.

Cal dir que la notació que usarem al llarg d'aquest capítol serà l'habitual en els treballs sobre càlcul de Malliavin i diferent a la que hem utilitzat en el Capítol 3, on per exemple aquesta aplicació és la integral de primer ordre i l'espai $\mathscr{H}^H$ es denota per $\mathcal{L}^H$.

Sigui $|\mathscr{H}^H|$ l'espai lineal de funcions mesurables φ en $[0,T]$ tals que

$$\|\varphi\|^2_{|\mathscr{H}^H|} = \alpha_H \int_0^T \int_0^T |\varphi_r||\varphi_u||r-u|^{2H-2} dr du < +\infty.$$

Aquest espai amb la norma $\|\cdot\|_{|\mathscr{H}^H|}$ és un espai de Banach i $\mathscr{S}^H$ és dens en $|\mathscr{H}^H|$. A més aquest espai dotat del producte escalar $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathscr{H}^H}$ no és complet però sí isomètric a un subespai de $\mathscr{H}^H$. Identifiquem $|\mathscr{H}^H|$ amb aquest subespai.

Donat que B^H és un procés Gaussià es pot desenvolupar el càlcul de Malliavin o càlcul estocàstic de variacions respecte B^H. Sigui $\mathcal{S}^H$ el conjunt de les variables aleatòries cilíndriques i suaus donades per

$$F = f(B^H(\varphi_1), \ldots, B^H(\varphi_n)),$$

on $n \geqslant 1$, $\varphi_i \in \mathscr{H}^H$ i $f \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (és a dir, f i les seves derivades parcials de tots els ordres estan acotades) .

Per aquest tipus de variables aleatòries es defineix l'*operador diferencial* de F respecte B^H com la variable aleatòria amb valors a $\mathscr{H}^H$ donada per

$$D^H F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B^H(\varphi_1), \ldots, B^H(\varphi_n))\varphi_i.$$

Per a tot $p \geqslant 1$, aquest operador és un operador tancat de $L^p(\Omega)$ en $L^p(\Omega, \mathscr{H}^H)$.

Per a tot $p \geqslant 1$, l'espai de Sobolev $\mathbb{D}^{1,p}_{B^H}$ es pot definir com la clausura de $\mathcal{S}^H$ respecte la norma següent:

$$\|F\|^p_{B^H,1,p} = \|F\|^p_{L^p(\Omega)} + E\|D^H F\|^p_{L^p(\Omega, \mathscr{H}^H)}.$$

Si tenim un espai de Hilbert V, aleshores $\mathbb{D}^{1,p}_{B^H}(V)$ denota l'espai de Sobolev associat a les variables aleatòries amb valors a V.

L'altre operador important del càlcul estocàstic de variacions és l'operador divergència δ^H que és l'adjunt de l'operador diferencial, definit en termes de la relació de dualitat següent:

$$E(F\delta^H(u)) = E\langle D^H F, u\rangle_{\mathscr{H}^H}, \tag{5.1.1}$$

amb u és una variable aleatòria de $L^2(\Omega, \mathscr{H})$. Aquest operador també es coneix amb el nom d'integral de Skorohod.

Els elements del domini de δ^H són els processos u pels quals l'expressió de (5.1.1) és contínua en la norma L^2 de F. A més, és ben conegut que l'espai $\mathbb{D}^{1,2}_{B^H}(\mathscr{H}^H)$ està inclòs al domini de δ^H.

Tot això que acabem de dir, ho enunciem en la proposició següent:

Proposició 5.1.1. *El domini de δ^H, que denotarem per Dom δ^H, és el conjunt d'elements $u \in L^2(\Omega, \mathscr{H}^H)$ pels quals existeix una constant C tal que*

$$E\big(\langle D^H F, u\rangle_{\mathscr{H}^H}\big) \leqslant C\|F\|_{L^2(\Omega)},$$

per a tot $F \in \mathcal{S}^H$. Si $u \in$ Dom δ^H, aleshores $\delta^H(u)$ és l'element de $L^2(\Omega)$ caracteritzat per la següent fórmula d'integració per parts*:*

$$E\big(F\delta^H(u)\big) = E\big(\langle D^H F, u\rangle_{\mathscr{H}^H}\big), \qquad F \in \mathbb{D}^{1,2}_{B^H}.$$

La integral de Skorohod satisfà les propietats següents:

(a) Per a tot $u \in \mathbb{D}^{1,2}_{B^H}(\mathscr{H}^H)$ tenim que

$$E(\delta^H(u))^2 = E\|u\|^2_{\mathscr{H}^H} + E\langle D^H u,\ (D^H u)^*\rangle_{\mathscr{H}^H \otimes \mathscr{H}^H},$$

on $(D^H u)^*$ és l'adjunt de $D^H u$ a l'espai de Hilbert $\mathscr{H}^H \otimes \mathscr{H}^H$.

(b) Per a tot F en $\mathbb{D}^{1,2}_{B^H}$ i $u \in Dom\ \delta^H$ tal que Fu i $F\delta^H(u) - \langle D^H F,\ u\rangle_{\mathscr{H}^H}$ són de quadrat integrable, tenim que $Fu \in Dom\ \delta^H$ i

$$\delta^H(Fu) = F\delta^H(u) - \langle D^H F,\ u\rangle_{\mathscr{H}^H}. \tag{5.1.2}$$

Considerem $|\mathscr{H}^H| \otimes |\mathscr{H}^H|$ l'espai de funcions φ mesurables en $[0,T]^2$ tals que

$$\|\varphi\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|} = \alpha_H \int_{[0,T]^4} |\varphi_{r,\theta}||\varphi_{u,\eta}||r-u|^{2H-2}|\theta-\eta|^{2H-2} dr du d\theta d\eta < +\infty.$$

L'espai $|\mathscr{H}^H| \otimes |\mathscr{H}^H|$ dotat de la norma $\|\varphi\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|}$ és un espai de Banach. Aquest espai dotat del producte escalar següent:

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{|\mathscr{H}^H\otimes|\mathscr{H}^H|} = \alpha_H \int_{[0,T]^4} \varphi_{r,\theta}\varphi_{u,\eta}|r-u|^{2H-2}|\theta-\eta|^{2H-2} dr du d\theta d\eta$$

és isomètric a un subespai de $\mathscr{H}^H \otimes \mathscr{H}^H$. Identifiquem $|\mathscr{H}^H| \otimes |\mathscr{H}^H|$ amb aquest subespai.

Per a tot $p \geqslant 1$, es denota per $\mathbb{D}^{1,p}(|\mathscr{H}^H|)$ el subespai de $\mathbb{D}^{1,p}(\mathscr{H}^H)$ format pels elements u tals que $u \in |\mathscr{H}^H|$ q.s., $Du \in |\mathscr{H}^H| \otimes |\mathscr{H}^H|$ q.s. i

$$E\|u\|^p_{|\mathscr{H}^H|} + E\|Du\|^p_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|} < +\infty.$$

Observem que l'espai de Sobolev $\mathbb{D}^{1,2}(|\mathscr{H}^H|) \subset \mathbb{D}^{1,2}(\mathscr{H}^H)$ està inclòs en el domini de la integral de Skorohod δ^H i per tant, per les propietats que hem vist tenim que

$$E(\delta^H(u))^2 \leqslant E\|u\|^2_{|\mathscr{H}^H|} + E\|Du\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|}.$$

Per a tot $p > 1$, els processos $u \in \mathbb{D}^{1,p}(|\mathscr{H}^H|)$ que pertanyen al domini de δ^H, satisfan la següent desigualtat de Meyer:

$$E(|\delta^H(u)^p|) \leqslant C_p \left(E(\|u\|^p_{\mathscr{H}^H}) + E(\|D^H u\|^p_{\mathscr{H}^H\otimes\mathscr{H}^H}) \right). \tag{5.1.3}$$

A continuació definim la integral simètrica introduïda per Russo i Vallois:

Definició 5.1.2. *([RV93]) Sigui $u = \{u_t,\ t \in [0,T]\}$ un procés estocàstic amb trajectòries integrables. La integral simètrica del procés u respecte el moviment Brownià fraccionari B^H es defineix com el límit en probabilitat quan ε tendeix a zero de*

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T u_s(B^H_{s+\varepsilon} - B^H_{s-\varepsilon})ds,$$

quan el límit existeix i es denota per $\int_0^T u_t dB^H_t$.

Aquesta integral és la que considerarem al llarg d'aquest treball. Abans, però anem a veure la següent proposició que dóna condicions suficients per a l'existència de la integral simètrica i proporciona una representació en termes de la integral de Skorohod.

Proposició 5.1.3. *(Proposition 3, [AN03]) Sigui $u = \{u_t,\ t \in [0,T]\}$ un procés estocàstic en $\mathbb{D}^{1,2}(|\mathscr{H}^H|)$. Suposem també que*

$$\int_0^T \int_0^T |D_s^H u_t||t-s|^{2H-2} ds dt < +\infty, \quad q.s. \tag{5.1.4}$$

Aleshores, la integral simètrica de Stratonovich existeix i es pot expressar com

$$\int_0^T u_t dB_t^H = \delta^H(u) + \alpha_H \int_0^T \int_0^T D_s^H u_t |t-s|^{2H-2} ds dt,$$

on $\alpha_H = H(2H-1)$.

Una condició suficient per a que es satisfaci la condició (5.1.4) és

$$\int_0^T \left(\int_s^T |D_s^H u_t|^p dt \right)^{1/p} ds < \infty,$$

per algun $p > \frac{1}{2H-1}$.

La integral simètrica indefinida $\int_0^t u_s dB_s^H = \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s^H$ es pot expressar com

$$\int_0^t u_s dB_s^H = \delta^H(u\mathbf{1}_{[0,t]}) + \alpha_H \int_0^t \int_0^T D_r^H u_s |s-r|^{2H-2} dr ds.$$

A partir d'ara usarem una notació similar per a la integral indefinida de Skorohod

$$\int_0^t u_s \delta^H B_s^H = \delta^H(u\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

En el cas del moviment Brownià estàndard, per a que un procés $u \in \mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$ sigui integrable Stratonovich en el sentit de Nualart-Pardoux (veure Theorem 7.3, [NP88]) és suficient veure que existeixen $D^{1|2,+}u$ i $D^{1|2,-}u$ elements de $L^1([0,T] \times \Omega)$ satisfent:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^T \sup_{0<y<\delta} E|D_r^{1|2,-} u_r - D_r^{1|2} u_{r-y}| dr = 0, \tag{5.1.5}$$

(resp.

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^T \sup_{-\delta<y<0} E|D_r^{1|2,+} u_r - D_r^{1|2} u_{r-y}| dr = 0.) \tag{5.1.6}$$

Per aquesta classe de processos es pot definir la traça com

$$\nabla_t^{1|2} u_t = D_t^{1|2,-} u_t + D_t^{1|2,+} u_t.$$

Tal i com veurem en la proposició següent, aquestes condicions impliquen l'existència de la integral tipus Russo-Vallois i aquesta integral admet la mateixa representació en termes de la integral de Skorohod i de la traça:

Proposició 5.1.4. *Sigui $u \in \mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$ un procés estocàstic que satisfà les condicions (5.1.5) i (5.1.6). Aleshores, existeix la integral tipus Russo-Vallois del procés estocàstic u respecte el moviment Brownià estàndard i a més, admet la següent representació:*

$$\int_0^t u_s dB_s^{1|2} = \delta^{1|2}(u\mathbf{1}_{[0,t]}) + \int_0^t \frac{1}{2}\nabla_r^{1|2} u_r dr. \tag{5.1.7}$$

Demostració. Per facilitar la lectura d'aquest treball, hem inclòs la demostració d'aquest resultat a la Secció 5.4. □

Acabarem la secció de Preliminars, recordant el Lema 3.1.1 i el Lema 3.2.5 del Capítol 3 i enunciant-ho en un únic lema que ens proporciona una cota superior independent d'H i ens serà útil per provar la convergència en llei de la família d'integrals simètriques respecte B^H.

Lema 5.1.5. *Per a tota $f \in L^2([0,T])$ i tot $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, es compleix*

$$\|f\|^2_{|\mathscr{H}^H|} \leqslant C_T \|f\|^2_{L^2([0,T])}.$$

A més, per a tota $g \in L^2([0,T]^2)$ i tot $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, es compleix

$$\|g\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|} \leqslant C_T \|g\|^2_{L^2([0,T]^2)}.$$

5.2 Convergència en llei de la integral tipus Russo-Vallois de processos estocàstics respecte B^H. Cas $H > \frac{1}{2}$

Fixat $H_0 \geqslant \frac{1}{2}$. Considerem la família de processos estocàstics $\{X^H,\ H \in V_0\}$ definits per integrals estocàstiques simètriques tipus Russo-Vallois respecte el moviment Brownià fraccionari amb $H \in V_0$ de la forma

$$X^H := \left\{X_t^H = \int_0^t u_s^H dB_s^H,\ t \in [0,T]\right\}, \tag{5.2.1}$$

on

$$V_0 = \begin{cases} [\frac{1}{2}, H_2], & \text{si } H_0 = \frac{1}{2}, \text{ amb } \frac{1}{2} < H_2 < 1; \\ \\ [H_1, H_2], & \text{si } H_0 > \frac{1}{2}, \text{ amb } \frac{1}{2} < H_1 < H_0 < H_2 < 1. \end{cases}$$

Suposem que els processos estocàstics u^H satisfan el Bloc A d'hipòtesis:

Bloc A :

Existeix $p > 2$ tal que

(A1)

$$\int_0^T \sup_{H\in V_0} E|u_s^H|^p ds < +\infty.$$

(A2)

$$\sup_{H\in V_0} \int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H|^p dr = K_D < +\infty.$$

Observació 5.2.1. *La condició (A2) implica l'existència de la integral tipus Russo-Vallois per al procés u^H, quan $H > \frac{1}{2}$. Degut a la Proposició 5.1.3, aquesta integral existeix si $u^H \in \mathbb{D}^{1,2}(|\mathscr{H}^H|)$ i*

$$E\left(\int_0^T \int_0^T |D_s^H u_t^H||t-s|^{2H-2}dsdt\right) < +\infty.$$

En el nostre cas tenim que per $H > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T \int_0^T |D_s^H u_t^H||t-s|^{2H-2}dsdt\right) &= \int_0^T \int_0^T E|D_s^H u_t^H||t-s|^{2H-2}dsdt \\ &\leqslant \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} E|D_s^H u_t^H| \left(\int_0^T |t-s|^{2H-2}dt\right) ds \\ &\leqslant \frac{C_T}{2H-1} \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} E|D_s^H u_t^H| ds < +\infty. \end{aligned}$$

Aquestes hipòtesis també garanteixen l'existència d'una versió contínua de la integral tipus Russo-Vallois, gràcies al següent resultat:

Teorema 5.2.2. *(Theorem 5, [AN03]) Sigui $u^H = \{u_t^H,\ t \in [0,T]\}$ un procés estocàstic de $\mathbb{D}^{1,p}(|\mathscr{H}^H|)$, on $pH > 1$ i suposem que*

$$\int_0^T |Eu_r^H|^p dr + \int_0^T E\left(\int_0^T |D_s^H u_r^H|^{1/H} ds\right)^{pH} dr < +\infty. \tag{5.2.2}$$

Aleshores, la integral $X^H = \{\int_0^t u_s^H dB_s^H,\ t \in [0,T]\}$ té una versió amb trajectòries contínues. A més, per a tot $\gamma < H - \frac{1}{p}$ existeix una constant aleatòria C_γ q.s. finita tal que

$$|X_t^H - X_s^H| \leqslant C_\gamma |t-s|^\gamma.$$

Comprovem que el procés u^H satisfà les hipòtesis del Teorema 5.2.2.
Per (A1) sabem que el terme

$$\int_0^T |Eu_r^H|^p dr < +\infty.$$

D'altra banda, si $p > 2$ i $H > \frac{1}{2}$, tenim $pH > 1$ i aplicant la desigualtat de Hölder i la condició (A2)

$$\int_0^T E\left(\int_0^T |D_s^H u_r^H|^{\frac{1}{H}} ds\right)^{pH} dr \leqslant T^{pH-1} \int_0^T \int_0^T E|D_s^H u_r^H|^p dsdr < +\infty.$$

Per provar la convergència en llei de la família de processos $\{X^H,\ H \in V_0\}$ necessitarem provar l'ajustament de la família de lleis i la convergència de les distribucions en dimensió finita. Vegem-ho a les següents seccions.

5.2.1 Prova de l'ajustament

En la següent proposició provarem l'ajustament de la família de lleis dels processos estocàstics $\{X^H,\ H \in V_0\}$ en $\mathscr{C}([0,T])$ i per això usarem el criteri donat per Billingsley (veure Teorema 1.1.14 del Capítol 1).

Proposició 5.2.3. *Considerem la família de processos estocàstics* $\{X^H\}_{H\in V_0}$ *definits en (5.2.1) a partir d'una família de processos estocàstics* $\{u^H\}_{H\in V_0}$ *que satisfan les hipòtesis del Bloc A. Aleshores, la família de lleis de* $\{X^H\}_{H\in V_0}$ *és ajustada en* $\mathscr{C}([0,T])$.

Demostració. Per a cada $t\in[0,T]$, escrivim

$$X_t^H = \int_0^t u_s^H \delta^H B_s^H + \alpha_H \int_0^t \int_0^T D_r^H u_s^H |s-r|^{2H-2} dr ds.$$

Com que $X_0^H = 0$ és suficient veure, per $s<t$, que

$$E|X_t^H - X_s^H|^\beta \leqslant C(F(t)-F(s))^{1+\alpha},$$

amb $\alpha,\ \beta,\ C>0$ constants positives i F una funció contínua i creixent.
En el nostre cas, per $s<t$ tenim que

$$E|X_t^H - X_s^H|^p \leqslant 2^{p-1}\left(E\left|\int_s^t u_r^H \delta^H B_r^H\right|^p + \alpha_H^p E\left|\int_s^t\int_0^T D_r^H u_x^H |x-r|^{2H-2} dr dx\right|^p\right). \quad (5.2.3)$$

Donat que la integral de Skorohod satisfà la desigualtat de Meyer (5.1.3) tenim que

$$E\left|\int_s^t u_r^H \delta^H B_r^H\right|^p \leqslant C_p(E\|u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{|\mathscr{H}^H|} + E\|D^H u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|}).$$

Estudiem per separat cadascun dels sumands de l'acotació anterior. Aplicant el Lema 5.1.5 i la desigualtat de Hölder al primer sumand tenim que

$$\begin{aligned} E\|u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{|\mathscr{H}^H|} &\leqslant C_T E\|u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{L^2([0,T])} \\ &\leqslant C_T\ (t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t E|u_r^H|^p dr. \end{aligned}$$

Ara, si tenim en compte la següent desigualtat

$$cd \leqslant \frac{1}{p'}\, c^{p'} + \frac{1}{q'}\, d^{q'}, \forall\, c,\ d>0 \quad i \quad \forall\, p',\ q'>1, \quad tals\ que\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1, \quad (5.2.4)$$

obtenim que

$$E\|u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{|\mathscr{H}^H|} \leqslant C_T\left(\frac{1}{p'}(t-s)^{(\frac{p}{2}-1)p'} + \frac{1}{q'}\left(\int_s^t E|u_r^H|^p dr\right)^{q'}\right).$$

Seguint els mateixos passos podem acotar el moment d'ordre p de la derivada:

$$\begin{aligned} E\|D^H u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|} &\leqslant C_T\ E\|D^H u^H \mathbf{1}_{[s,t]}\|^p_{L^2([0,T]^2)} \\ &\leqslant C_T T^{\frac{p}{2}-1} E\left(\int_s^t\left(\int_0^T |D_r^H u_x^H|^2 dr\right)^{p/2} dx\right) \\ &\leqslant C_T T^{\frac{p}{2}-1}(t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t\int_0^T E|D_r^H u_x^H|^p dr dx. \end{aligned}$$

Si apliquem novament la desigualtat (5.2.4) tenim que

$$E\|D^{H}u^{H}\mathbf{1}_{[s,t]}\|^{p}_{|\mathscr{H}^{H}|\otimes|\mathscr{H}^{H}|} \leqslant C_{T,p}\left(\frac{1}{p'}(t-s)^{(\frac{p}{2}-1)p'}+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t\int_0^T E|D_r^{H}u_x^{H}|^p drdx\right)^{q'}\right).$$

Amb això obtenim que

$$E\left|\int_s^t u_r^{H}\delta^{H}B_r^{H}\right|^p \leqslant C_{T,\,p}\left(\frac{1}{p'}(t-s)^{(\frac{p}{2}-1)p'}+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t \sup_{H\in V_0} E|u_r^{H}|^p dr\right)^{q'}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t \sup_{H\in V_0}\int_0^T E|D_r^{H}u_x^{H}|^p drdx\right)^{q'}\right).$$

Fins aquí hem estudiat el moment d'ordre p de la integral de Skorohod. Per tant, ja només ens queda estudiar el segon terme de (5.2.3). Per això, apliquem primer la desigualtat de Hölder i després el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&\alpha_H^p E\left|\int_s^t\int_0^T D_r^{H}u_x^{H}|x-r|^{2H-2}drdx\right|^p\\
&\leqslant \alpha_H^p\left(\int_s^t\int_0^T E|D_r^{H}u_x^{H}|^p|x-r|^{2H-2}drdx\right)\left(\int_s^t\int_0^T |x-r|^{2H-2}drdx\right)^{p-1}\\
&\leqslant C_T(t-s)^{p-1}\alpha_H\int_s^t\int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^{H}u_x^{H}|^p|x-r|^{2H-2}drdx\\
&= C_T(t-s)^{p-1}\alpha_H\int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^{H}u_x^{H}|^p\left(\int_s^t |x-r|^{2H-2}dx\right)dr\\
&\leqslant C_T(t-s)^{p-1}\sup_{H\in V_0}\int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^{H}u_x^{H}|^p dr\\
&\leqslant C_T K_D(t-s)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Resumint, per $s<t$ tenim que

$$\begin{aligned}
E|X_t^{H}-X_s^{H}|^p &\leqslant C_{p,T}\left(\frac{1}{p'}(t-s)^{(\frac{p}{2}-1)p'}+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t \sup_{H\in V_0} E|u_r^{H}|^p dr\right)^{q'}\right.\\
&\left.+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t \sup_{H\in V_0}\int_0^T E|D_r^{H}u_x^{H}|^p drdx\right)^{q'}\right)+C_T K_D(t-s)^{p-1}\\
&\leqslant C_{p,T}\left(\frac{1}{p'}(t-s)^{(\frac{p}{2}-1)p'\wedge(p-1)}+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t \sup_{H\in V_0} E|u_r^{H}|^p dr\right)^{q'}\right.\\
&\left.+\frac{1}{q'}\left(\int_s^t \sup_{H\in V_0}\int_0^T E|D_r^{H}u_x^{H}|^p drdx\right)^{q'}\right)
\end{aligned}$$

Amb això hem vist que existeix F una funció creixent i contínua, definida per

$$F(x)=x+\int_0^x \sup_{H\in V_0} E|u_r^{H}|^p dr+\int_0^x \sup_{H\in V_0}\int_0^T E|D_r^{H}u_y^{H}|^p drdy.$$

tal que

$$E|X_t^{H}-X_s^{H}|^p \leqslant C_{p,T}(F(t)-F(s))^{(\frac{p}{2}-1)p'\wedge(p-1)\wedge q'},$$

A més, per a tot $p>2$ existeixen p' i q' conjugats tals que l'exponent $(\frac{p}{2}-1)p'\wedge(p-1)\wedge q'$ és major que 1. $\square$

5.2.2 Prova de la convergència de les distribucions en dimensió finita

Per a tot $\varepsilon > 0$, definim el procés estocàstic

$$X^{H,\varepsilon} = \left\{ X_t^{H,\varepsilon} := \int_0^t u_s^{H,\varepsilon} dB_s^H ,\ t \in [0,T] \right\}, \tag{5.2.5}$$

on $u_s^{H,\varepsilon}$ es defineix de la manera següent.

Per a tot $\varepsilon > 0$ i tot procés estocàstic $u = \{u_t,\ t \in [0,T]\}$ amb trajectòries integrables, es pot definir

$$u_t^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} u_s ds. \tag{5.2.6}$$

D'ara endavant, usarem el conveni que $u_s = 0$, per $s \notin [0,T]$.

De fet, es pot escriure

$$u_s^\varepsilon = (u * \varphi_\varepsilon)(s) \tag{5.2.7}$$

on $\varphi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$ denota l'aproximació de la identitat quan $\varepsilon \to 0$ definida a partir de la funció $\varphi(s) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(s)$.

Observació 5.2.4. *A partir de la funció $\psi(s) = \alpha_H |s|^{2H-2} \mathbf{1}_{[-T,T]}(s)$ es pot definir una aproximació de la identitat quan $H \downarrow \frac{1}{2}$ donada per*

$$\psi_H(s) = c_H |s|^{2H-2} \mathbf{1}_{[-T,T]}(s)$$

amb

$$c_H = \frac{2H-1}{2T^{2H-1}}. \tag{5.2.8}$$

Observació 5.2.5. *Es pot veure fàcilment que el procés $u^{H,\varepsilon}$ definit en (5.2.6) té integral simètrica usant que $u^{H,\varepsilon}$ és absolutament continu i aplicant la fórmula d'integració per parts provada a [RV93].*

Per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita haurem de distingir els casos següents en funció del paràmetre H_0: $H_0 = \frac{1}{2}$ i $H_0 > \frac{1}{2}$.

Cas $H_0 > \frac{1}{2}$

Considerem el cas $H_0 > \frac{1}{2}$ i suposem que la família de processos $\{u^H\}_{H\in V_0}$ també satisfà les següents hipòtesis (juntament amb les del Bloc A):

Bloc B :

(B1)

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T E|u_s^H - u_{s-y}^H|^2 ds = 0.$$

(B2) Existeix $p \geqslant 2$ i $p > \frac{1}{2H_1 - 1}$ tal que

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H|^p drds = 0.$$

Provem el següent resultat tècnic que usarem més endavant per demostrar la convergència de les distribucions en dimensió finita de X^H.

Proposició 5.2.6. *Fixat $H_0 > \frac{1}{2}$. Siguin X^H i $X^{H,\varepsilon}$ les famílies de processos estocàstics definides en (5.2.1) i (5.2.5). Suposem que $\{u^H\}_{H\in V_0}$ satisfà les hipòtesis del Bloc A i el Bloc B. Aleshores,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{H\in V_0} E|X_t^H - X_t^{H,\varepsilon}| = 0. \tag{5.2.9}$$

Demostració. Sabem que

$$\begin{aligned} E|X_t^H - X_t^{H,\varepsilon}| &= E\Big|\int_0^t (u_s^H - u_s^{H,\varepsilon})dB_s^H\Big| \\ &\leqslant E\Big|\int_0^t (u_s^H - u_s^{H,\varepsilon})\delta^H B_s^H\Big| + E\Big|\alpha_H \int_0^t \int_0^T (D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon})|s-r|^{2H-2}drds\Big| \end{aligned}$$

Per provar (5.2.9), veurem que cadascun dels termes de la banda dreta de la desigualtat anterior tendeix a zero uniformement en H quan $\varepsilon \to 0$.

Per les desigualtats de Meyer:

$$E\Big|\int_0^t (u_s^H - u_s^{H,\varepsilon})\delta^H B_s^H\Big| \leqslant C_{T,p}\left(E\|u^H - u^{H,\varepsilon}\|^2_{|\mathscr{H}^H|} + E\|D^H u^H - D^H u^{H,\varepsilon}\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|}\right)^{1/2}.$$

Aplicant el Lema 5.1.5 tenim que

$$E\|u^H - u^{H,\varepsilon}\|^2_{|\mathscr{H}^H|} \leqslant C_T E\|u^H - u^{H,\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T])}$$

i

$$E\|D^H u^H - D^H u^{H,\varepsilon}\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|} \leqslant C_T E\|D^H u^H - D^H u^{H,\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T]^2)}.$$

Tenint en compte les condicions que satisfà el procés u^H es pot veure fàcilment que tant $E\|u^H - u^{H,\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T])}$ com $E\|D^H u^H - D^H u^{H,\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T]^2)}$ convergeixen a zero uniformement en H quan $\varepsilon \to 0$.

Anem a estudiar el primer terme. Per això, usarem l'expressió (5.2.7) i farem un senzill canvi de variables:

$$\begin{aligned} |u_s^H - (u^H * \varphi_\varepsilon)(s)| &= \left|u_s^H - \int_{\mathbb{R}} u_x^H \varphi_\varepsilon(s-x)dx\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)|u_s^H - u_{s-y}^H|dy. \end{aligned}$$

Ara aplicant convenientment la desigualtat de Cauchy-Schwarz, el Teorema de Fubini i usant que φ_ε defineix una probabilitat obtenim que

$$\begin{aligned} E\|u^H - u^{H,\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T])} &\leqslant E\left(\int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)|u_s^H - u_{s-y}^H|dy\right|^2 ds\right) \\ &\leqslant E\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_s^H - u_{s-y}^H|^2 \varphi_\varepsilon(y)dyds\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)\left(\int_0^T E|u_s^H - u_{s-y}^H|^2 ds\right)dy \\ &\leqslant \sup_{H\in V_0}\sup_{|y|<\varepsilon}\int_0^T E|u_s^H - u_{s-y}^H|^2 ds. \end{aligned}$$

Per tant, per la condició (B1) obtenim la convergència que volíem provar.

Anàlogament, per provar que

$$E\|D^H u^H - D^H u^{H,\varepsilon}\|^2_{|\mathscr{H}^H|\otimes|\mathscr{H}^H|} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

uniformement en H, usarem arguments similars als anteriors i la condició (B2).

Així, doncs, ja només ens queda tractar el terme següent:

$$E\Big|\alpha_H \int_0^t \int_0^T (D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon})|s-r|^{2H-2} drds\Big|. \tag{5.2.10}$$

Suposem que el paràmetre $H \in V_0$.

Treballant de forma similar aquest terme i aplicant el Teorema de Fubini tenim que

$$\begin{aligned} E\Big|\alpha_H \int_0^T \int_0^T (D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon})|s-r|^{2H-2} drds\Big| \\ &\leqslant \alpha_H \int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon}||s-r|^{2H-2} drds \\ &\leqslant \alpha_H \int_0^T \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H|\varphi_\varepsilon(y)dy\right)|s-r|^{2H-2} drds \\ &= \alpha_H \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H||s-r|^{2H-2} drds\right)\varphi_\varepsilon(y)dy. \end{aligned}$$

Si $H > H_1$, aleshores existeix una constant $C_{T,H_1} > 0$ tal que

$$|s-r|^{2H-2} \leqslant C_{T,H_1}|s-r|^{2H_1-2}$$

i per tant, el terme (5.2.10) està acotat superiorment per

$$C_{T,H_1} \int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H||s-r|^{2H_1-2} drds.$$

Si apliquem la desigualtat de Hölder, prenent l'exponent $p > \frac{1}{2H_1-1}$ que apareix a la condició $(B2)$, i per tant l'exponent conjugat $q = \frac{p}{p-1} > 1$ satisfà $q(2-2H_1) < 1$, llavors

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H||s-r|^{2H_1-2} drds \\ &\leqslant \left(\int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H|^p drds\right)^{1/p} \left(\int_0^T \int_0^T |s-r|^{(2H_1-2)q} drds\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Així tenim que

$$\alpha_H C_{T,H_1}\left(\int_0^T \int_0^T |s-r|^{(2H_1-2)q} drds\right)^{1/q} \left(\sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\varepsilon} \int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H|^p drds\right)^{1/p}$$

és una cota superior de (5.2.10) que convergeix a zero uniformement en $H \in V_0$ quan $\varepsilon \to 0$, gràcies a la condició (B2) i que $\alpha_H \int_0^T \int_0^T |s-r|^{(2H_1-2)q} drds < \widetilde{C}_{T,H_1}$.

□

Observació 5.2.7. *Cal notar que en aquesta prova, l'únic punt on usem que el paràmetre $H_0 > \frac{1}{2}$ és quan estudiem el terme (5.2.10). Per tant, aquest és el terme que haurem d'estudiar amb especial interès quan $H_0 = \frac{1}{2}$.*

Cas $H_0 = \frac{1}{2}$

En aquest cas per garantir l'existència de la integral de Stratonovich del procés u^{H_0} no n'hi ha prou amb suposar les hipòtesis que havíem considerat als Blocs A i B.

Suposem que la família de processos estocàstics $\{u^H\}_{H\in V_0}$ satisfà la següent condició:

Condició C :

(C) Existeixen $D^{H,-}u^H$ i $D^{H,+}u^H$ elements de $L^1([0,T]\times\Omega)$ satisfent,

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{H\in V_0}\int_0^T \sup_{0<y<\delta} E|D_r^{H,-}u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H|dr = 0, \tag{5.2.11}$$

(resp.

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{H\in V_0}\int_0^T \sup_{-\delta<y<0} E|D_r^{H,+}u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H|dr = 0.) \tag{5.2.12}$$

Si u^H satisfà la condició (C) aleshores es defineix la traça de u^H com

$$\nabla_t^H u_t^H = D_t^{H,+}u_t^H + D_t^{H,-}u_t^H.$$

Observació 5.2.8. *Observem que la condició (C) per $H_0 = \frac{1}{2}$, implica que el procés u^{H_0} és integrable Stratonovich (veure la Proposició 5.1.4).*
A més, les condicions (C) i (A2) impliquen que

$$\sup_{H\in V_0}\int_0^T E(|D_r^{H,+}u_r^H|)dr < +\infty \tag{5.2.13}$$

(resp.

$$\sup_{H\in V_0}\int_0^T E(|D_r^{H,-}u_r^H|)dr < +\infty.) \tag{5.2.14}$$

El resultat tècnic següent l'usarem per provar un resultat anàleg a la Proposició 5.2.6 però per al cas $H_0 = \frac{1}{2}$ (veure l'Observació 5.2.7).

Proposició 5.2.9. *Sigui $B^{1|2}$ un moviment Brownià estàndard. Suposem que el procés estocàstic $u^{1|2} = \{u_t^{1|2},\ t\in[0,T]\}$ satisfà les condicions (5.1.5) i (5.1.6). Aleshores,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left|\int_0^t u_s^{1|2,\varepsilon}dB_s^{1|2} - \int_0^t u_s^{1|2}dB_s^{1|2}\right| = 0. \tag{5.2.15}$$

Demostració. Per a tot $\varepsilon > 0$, la integral de Stratonovich de $u^{1|2,\varepsilon}$ es pot expressar com

$$\int_0^t u_s^{1|2,\varepsilon}dB_s^{1|2} = \delta^{1|2}((u^{1|2}\mathbf{1}_{[0,t]})^\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^T D_r^{1|2}u_s^{1|2}\mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(r)drds, \tag{5.2.16}$$

on hem usat que el terme traça de $(u^{1|2}\mathbf{1}_{[0,t]})^\varepsilon$ és igual a

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^T D_r^{1|2}u_s^{1|2}\mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(r)drds.$$

Anàlogament, per $u^{1|2}$:

$$\int_0^t u_s^{1|2} dB_s^{1|2} = \delta^{1|2}(u^{1|2}\mathbf{1}_{[0,t]}) + \int_0^t \frac{1}{2}\nabla_r^{1|2} u_r^{1|2} dr. \tag{5.2.17}$$

Usant l'expressió (5.2.16) i la prova de la Proposició 5.1.4, obtenim la convergència en $L^2(\Omega)$ del primer sumand de (5.2.16) cap al primer sumand de (5.2.17) i la convergència en $L^1(\Omega)$ del segon sumand de (5.2.16) cap al segon sumand de (5.2.17). Amb això finalitza la prova d'aquest resultat.

□

Proposició 5.2.10. *Suposem que $\{u^H\}_{H\in V_0}$ satisfà els blocs A i B d'hipòtesis i la condició (C). Aleshores, donat $\rho > 0$, existeixen $\varepsilon > 0$ i $\eta > 0$ tals que*

$$\sup_{H\in(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\eta)} E|X_t^H - X_t^{H,\varepsilon}| < \rho \tag{5.2.18}$$

i

$$E|X_t^{1|2} - X_t^{1|2,\varepsilon}| < \rho. \tag{5.2.19}$$

Demostració. Per provar aquest resultat, veurem que cadascun dels termes de la següent acotació superior tendeix a zero, quan $H \to \frac{1}{2}$:

$$E|X_t^H - X_t^{H,\varepsilon}| \leqslant E\Big|\int_0^t (u_s^H - u_s^{H,\varepsilon})\delta^H B_s^H\Big| + E\Big|\alpha_H \int_0^t \int_0^T (D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon})|s-r|^{2H-2} dr ds\Big|$$

En la demostració de la Proposició 5.2.6 ja vam veure que el primer terme tendia a zero uniformement en H quan $\varepsilon \to 0$.

Recordem que (veure Observació 5.2.7) l'únic terme que cal tractar de forma diferent pel cas $H_0 = \frac{1}{2}$ és:

$$E\Big|\alpha_H \int_0^t \int_0^T (D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon})|s-r|^{2H-2} dr ds\Big|.$$

Vegem doncs que donat $\rho > 0$ existeixen $\varepsilon > 0$ i $\eta > 0$ tals que satisfan (5.2.18) i (5.2.19).

Aquesta darrera desigualtat es satisfà per a ε prou petit degut a la Proposició 5.1.4.

Vegem que es pot trobar $\eta > 0$, i $\varepsilon > 0$ de forma que es satisfà també la condició (5.2.18).

Escrivim

$$E\left|\alpha_H \int_0^T\int_0^T (D_r^H u_s^H - D_r^H u_s^{H,\varepsilon})|r-s|^{2H-2} dr ds\right| \leqslant A_1(H) + A_2(H) + A_3(H,\varepsilon) + A_4(H,\varepsilon) + A_5(H,\varepsilon),$$

on

$$A_1(H) = E\left|\alpha_H \int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^H |r-s|^{2H-2} dr ds - c_H \int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^H |r-s|^{2H-2} dr ds\right|,$$

$$A_2(H) = E\left|c_H \int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^H |r-s|^{2H-2} dr ds - \int_0^T \frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H dr\right|,$$

$$A_3(H,\varepsilon) = E\left|\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H dr - \int_0^T \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^H u_x^H dx\right) dr\right|,$$

$$A_4(H,\varepsilon) = E\left|\int_0^T \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^H u_x^H dx\right) dr - c_H \int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^{H,\varepsilon} |r-s|^{2H-2} dr ds\right|,$$

$$A_5(H,\varepsilon) = E\left|c_H \int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^{H,\varepsilon} |r-s|^{2H-2} dr ds - \alpha_H \int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^{H,\varepsilon} |r-s|^{2H-2} dr ds\right|,$$

amb c_H definida a (5.2.8).

Notem que en $A_3(H,\varepsilon)$ i $A_4(H,\varepsilon)$ apareix el terme $\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^H u_x^H dx$ que fa el paper de la traça $\nabla^H u^{H,\varepsilon}$.

A continuació veurem que cadascun d'aquests termes es fa petit quan H és proper a $\frac{1}{2}$, com a mínim per algun $\varepsilon > 0$:

- Pel primer terme

$$\begin{aligned}
A_1(H) &= |\alpha_H - c_H| E\left|\int_0^T \int_0^T D_r^H u_s^H |r-s|^{2H-2} dr ds\right| \\
&\leqslant |\alpha_H - c_H| \int_0^T \sup_{s\in[0,T]} E|D_r^H u_s^H| \left(\int_0^T |r-s|^{2H-2} ds\right) dr \\
&\leqslant |\alpha_H - c_H| \frac{2T^{2H-1}}{2H-1} K_D^{1/p} \\
&= |2HT^{2H-1} - 1| K_D^{1/p}.
\end{aligned}$$

  Si H està a prop d'$\frac{1}{2}$, el terme $|2HT^{2H-1} - 1|$ es fa petit i a més per la condició (A2), $K_D < +\infty$. Per tant, $A_1(H)$ també es farà petit.

- Anàlogament, podem acotar el terme $A_5(H,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
A_5(H,\varepsilon) &= |\alpha_H - c_H| E\left|\int_0^T \int_0^T \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} D_r^H u_x^H dx\right) |r-s|^{2H-2} dr ds\right| \\
&\leqslant |\alpha_H - c_H| \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \int_0^T \left(\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H| dx\right) |r-s|^{2H-2} dr ds \\
&\leqslant |\alpha_H - c_H| \int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H| \left(\int_0^T |r-s|^{2H-2} ds\right) dr \\
&\leqslant |2HT^{2H-1} - 1| K_D^{1/p}.
\end{aligned}$$

  Observem que pels mateixos arguments que en el cas d'$A_1(H)$, aquest terme es fa petit quan H està a prop d'$\frac{1}{2}$.

- Estudiem ara el terme $A_2(H)$. Aquest es pot expressar com

$$E\left|\int_0^T \left(\frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - (D_r^H u_\cdot^H * \psi_H)(r)\right) dr\right|$$

  i a més,

$$\frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - (D_r^H u_\cdot^H * \psi_H)(r) = \int_{-T}^T \psi_H(y) \left(\frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H\right) dy.$$

  Aplicant el Teorema de Fubini, obtenim la següent igualtat

$$E\left|\int_0^T \left(\frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - (D_r^H u_\cdot^H * \psi_H)(r)\right) dr\right| = E\left|\int_{-T}^T \psi_H(y) \left(\int_0^T (\frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H) dr\right) dy\right|.$$

Per a tot $\delta \in (0, T)$, es pot acotar superiorment $A_2(H)$:

$$\begin{aligned} A_2(H) \leqslant E & \left| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \frac{1}{2} \nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H dr \right) dy \right| \\ + E & \left| \int_{|y|>\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \frac{1}{2} \nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H dr \right) dy \right|. \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

Comencem estudiant el primer sumand. Per això, intercalem a la seva expressió

$$D_r^{H,-} u_r^H \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant\delta\}} + D_r^{H,+} u_r^H \mathbf{1}_{\{-\delta\leqslant y<0\}}$$

i llavors ens queda

$$\begin{aligned} & E\Big| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2} \nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H \right) dr \right) dy \Big| \\ & \leqslant E\Big| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2} \nabla_r^H u_r^H - (D_r^{H,-} u_r^H \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant\delta\}} + D_r^{H,+} u_r^H \mathbf{1}_{\{-\delta\leqslant y<0\}}) \right) dr \right) dy \Big| \\ & + E\Big| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \left((D_r^{H,-} u_r^H \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant\delta\}} + D_r^{H,+} u_r^H \mathbf{1}_{\{-\delta\leqslant y<0\}}) - D_r^H u_{r-y}^H \right) dr \right) dy \Big|. \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

El primer sumand és igual a zero, ja que aplicant el Teorema de Fubini i usant la simetria de la funció ψ_H:

$$\begin{aligned} & \Big| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2} \nabla_r^H u_r^H - (D_r^{H,-} u_r^H \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant\delta\}} + D_r^{H,+} u_r^H \mathbf{1}_{\{-\delta\leqslant y<0\}}) \right) dr \right) dy \Big| \\ & = \Big| \int_0^T \left(\frac{1}{2} \nabla_r^H u_r^H \left(\int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) dy \right) \right. \\ & \qquad \left. - D_r^{H,-} u_r^H \left(\int_0^\delta \psi_H(y) dy \right) - D_r^{H,+} u_r^H \left(\int_{-\delta}^0 \psi_H(y) dy \right) \right) dr \Big| \\ & = \Big| \int_0^T \left(D_r^{H,-} u_r^H \left(\frac{1}{2} \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) dy - \int_0^\delta \psi_H(y) dy \right) \right. \\ & \qquad \left. + D_r^{H,+} u_r^H \left(\frac{1}{2} \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) dy - \int_{-\delta}^0 \psi_H(y) dy \right) \right) dr \Big| = 0. \end{aligned}$$

Notem que el segon sumand de (5.2.21) es pot acotar superiorment per la suma dels següents termes que tendeixen a zero quan δ es suficientment petit

$$\begin{aligned} & E\Big| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \int_0^T (D_r^{H,-} u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H) \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant\delta\}} dr dy \Big| \\ & + E\Big| \int_{|y|\leqslant\delta} \psi_H(y) \int_0^T (D_r^{H,+} u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H) \mathbf{1}_{\{-\delta\leqslant y<0\}} dr dy \Big|. \end{aligned}$$

Això es pot veure, per exemple amb el primer terme, prenent primer suprems en H i en y

$$
\begin{aligned}
E\Big| \int_{|y|\leqslant \delta} \psi_H(y) \int_0^T (D_r^{H,-} u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H) \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant \delta\}} dr dy \Big| & \\
\leqslant \int_{-T}^{T} \psi_H(y) \left(\sup_{H\in V_0} \sup_{0<y\leqslant\delta} \int_0^T E|D_r^{H,-} u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H| dr \right) dy &
\end{aligned}
$$

i després escollint δ de forma convenient per tal que el terme

$$
\sup_{H\in V_0} \sup_{0<y\leqslant\delta} \int_0^T E|D_r^{H,-} u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H| dr
$$

sigui petit i usant la condició (5.2.11). Procedint forma anàloga es pot veure el mateix resultat per a $D_r^{H,+} u_r^H$.

Ara estudiem el segon terme de (5.2.20). D'una banda tenim que

$$
\begin{aligned}
E\Big| \int_{|y|>\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H dr \right) dy \Big| & \\
\leqslant \int_{|y|>\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T E\left| \frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H \right| dr \right) dy. &
\end{aligned}
$$

Per les condicions (A2), (5.2.13) i (5.2.14) tenim que

$$
\sup_{H\in(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\eta)} \sup_{y\in[0,T]} \int_0^T E\left| \frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H \right| dr < +\infty.
$$

A més, tenint en compte el δ que hem escollit abans i el fet que ψ_H sigui una aproximació de la identitat quan $H \downarrow \frac{1}{2}$:

$$
\int_{|y|>\delta} \psi_H(y) dy \xrightarrow{H\downarrow\frac{1}{2}} 0
$$

tenim que

$$
E\Big| \int_{|y|>\delta} \psi_H(y) \left(\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_r^H u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H dr \right) \Big|
$$

es fa petit quan H és a prop d'$\frac{1}{2}$. Així doncs, hem vist que el terme $A_2(H)$ es fa petit quan H és a prop d'$\frac{1}{2}$.

- El terme $A_3(H,\varepsilon)$ es pot acotar de la següent manera:

$$
\begin{aligned}
A_3(H,\varepsilon) &\leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \left(\int_r^{r+\varepsilon} E|D_r^{H,+} u_r^H - D_r^H u_x^H|\, dx \right) dr \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \left(\int_{r-\varepsilon}^{r} E|D_r^{H,-} u_r^H - D_r^H u_x^H|\, dx \right) dr \\
&\leqslant \frac{1}{2} \sup_{H\in V_0} \int_0^T \sup_{x\in[r,r+\varepsilon]} E|D_r^{H,+} u_r^H - D_r^H u_x^H|\, dr \\
&\quad + \frac{1}{2} \sup_{H\in V_0} \int_0^T \sup_{x\in[r-\varepsilon,r]} E|D_r^{H,-} u_r^H - D_r^H u_x^H|\, dr.
\end{aligned}
$$

Amb això sabem, usant la condició (5.2.11), que donat $\rho > 0$ existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que per a tot $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\sup_{H \in V_0} A_3(H,\varepsilon) < \frac{\rho}{2}.$$

A partir d'aquí, fixarem un $\varepsilon < \varepsilon_0$ de manera que també per aquest $\varepsilon > 0$ se satisfà (5.2.19).

- Finalment, estudiem el terme $A_4(H,\varepsilon)$. Aplicant arguments similars als usats anteriorment tenim que

$$\begin{aligned}
A_4(H,\varepsilon) &= E\left|\int_{-T}^{T} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^H u_x^H\,dx - D_r^H u_{r-y}^{H,\varepsilon}\right)dr\right)dy\right| \\
&\leqslant E\left|\int_{|y|\leqslant\varepsilon} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^H u_x^H\,dx - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-y-\varepsilon}^{r-y+\varepsilon} D_r^H u_x^H dx\right)dr\right)dy\right| \\
&\quad + E\left|\int_{|y|>\varepsilon} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^H u_x^H\,dx - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{r-y-\varepsilon}^{r-y+\varepsilon} D_r^H u_x^H dx\right)dr\right)dy\right|.
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

Estudiarem per separat cadascun dels termes anteriors.

El primer sumand de (5.2.22) es pot acotar superiorment per

$$\begin{aligned}
&E\left|\int_{|y|\leqslant\varepsilon} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{(r-\varepsilon)\wedge(r-y-\varepsilon)}^{(r-\varepsilon)\vee(r-y-\varepsilon)} D_r^H u_x^H dx\right)dr\right)dy\right| \\
&\quad + E\left|\int_{|y|\leqslant\varepsilon} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{(r+\varepsilon)\wedge(r-y+\varepsilon)}^{(r+\varepsilon)\vee(r-y+\varepsilon)} D_r^H u_x^H dx\right)dr\right)dy\right|.
\end{aligned}$$

Tractem, per exemple, el primer terme ja que el segon es faria de forma anàloga.

Aplicant el Teorema de Fubini, tenim que

$$\begin{aligned}
&E\left|\int_{|y|\leqslant\varepsilon} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{(r-\varepsilon)\wedge(r-y-\varepsilon)}^{(r-\varepsilon)\vee(r-y-\varepsilon)} D_r^H u_x^H dx\right)dr\right)dy\right| \\
&\leqslant \int_{|y|\leqslant\varepsilon} \psi_H(y)\left(\int_0^T\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{(r-\varepsilon)\wedge(r-y-\varepsilon)}^{(r-\varepsilon)\vee(r-y-\varepsilon)} \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H| dx\right)dr\right)dy \\
&\leqslant \int_0^T\left(\sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H|\left(\int_{|y|\leqslant\varepsilon} \frac{c_H|y|^{2H-1}}{2\varepsilon}dy\right)dr\right) \\
&= \frac{(2H-1)\varepsilon^{2H-1}}{8HT^{2H-1}}\int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H|dr.
\end{aligned}$$

Per $H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\eta\right)$ observem que aquest terme es fa petit si $\eta > 0$ és prou petit.

Per acabar la prova ja només ens queda estudiar el segon sumand de (5.2.22) i veure que es fa petit quan $H \downarrow \frac{1}{2}$.

Aquest es pot acotar superiorment per

$$\int_{|y|>\varepsilon} \psi_H(y) \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} E|D_r^H u_x^H| \, dx \right) dr \right) dy$$
$$+ \int_{|y|>\varepsilon} \psi_H(y) \left(\int_0^T \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-y-\varepsilon}^{r-y+\varepsilon} E|D_r^H u_x^H| dx \right) dr \right) dy.$$

Prenent suprems en x, obtenim una cota superior per a cada un d'aquests termes:

$$\int_{|y|>\varepsilon} \psi_H(y) \left(\int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H| \, dr \right) dy.$$

Per tant, per la condició (A2) i el següent càlcul:

$$\int_{|y|>\varepsilon} \psi_H(y) dy = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{T}\right)^{2H-1},$$

que tendeix a zero quan $H \to \frac{1}{2}$. Per $H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \eta\right)$ tenim que aquest terme es fa petit si $\eta > 0$ és prou petit.

□

Un resultat que ens serà útil per provar la convergència de les distribucions en dimensió finita de $\{X^H\}_{H\in V_0}$ és el fet que $X^{H,\varepsilon}$ és un funcional continu de (u^H, B^H).

De fet, aplicant la fórmula d'integració per parts (veure [RV93]) tenim que :

$$\begin{aligned} X_t^{H,\varepsilon} &= \int_0^t u_s^{H,\varepsilon} dB_s^H = u_t^{H,\varepsilon} B_t^H - u_0^{H,\varepsilon} B_0^H - \int_0^t (u_s^{H,\varepsilon})' B_s^H ds \\ &= \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} u_s^H ds \right) B_t^H - \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} u_r^H dr \right)' B_s^H ds. \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Donat que $t \in [0, T]$, cal que estudiem el terme $\int_0^t (u_s^{H,\varepsilon})' B_s^H ds$ distingint els casos següents (suposem que $0 < \varepsilon < \frac{T}{3}$):

(i) Si $0 \leqslant t < \varepsilon$, aleshores
$$\int_0^t (u_s^{H,\varepsilon})' B_s^H ds = \int_0^t \frac{u_{s+\varepsilon}}{2\varepsilon} B_s^H ds.$$

(ii) Si $\varepsilon \leqslant t < T - \varepsilon$, aleshores
$$\int_0^t (u_s^{H,\varepsilon})' B_s^H ds = \int_0^\varepsilon \frac{u_{s+\varepsilon}}{2\varepsilon} B_s^H ds + \int_\varepsilon^t \frac{u_{s+\varepsilon} - u_{s-\varepsilon}}{2\varepsilon} B_s^H ds.$$

(iii) Si $T - \varepsilon \leqslant t < T$, tenim
$$\int_0^t (u_s^{H,\varepsilon})' B_s^H ds = \int_0^\varepsilon \frac{u_{s+\varepsilon}}{2\varepsilon} B_s^H ds + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \frac{u_{s+\varepsilon} - u_{s-\varepsilon}}{2\varepsilon} B_s^H ds + \int_{T-\varepsilon}^t \frac{0 - u_{s-\varepsilon}}{2\varepsilon} B_s^H ds.$$

En el lema següent veiem que el funcional d'u^H i B^H involucrat en (5.2.23) és continu.

Lema 5.2.11. *Fixat* $0 < \varepsilon < \frac{T}{3}$, *definim el funcional:*

$$\begin{array}{rccl}\Psi: & (\mathscr{C}([0,T]))^2 & \longrightarrow & \mathscr{C}([0,T]) \\ & (x,y) & \mapsto & \Psi(x,y)(t) := \quad \Psi_1(x)(t)y(t) - \int_0^t y(s)\Psi_2(x(s))ds,\end{array}$$

amb

$$\Psi_1(x)(t) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_{(t-\varepsilon)\vee 0}^{(t+\varepsilon)\wedge T} x(s)ds,$$

i

$$\Psi_2(x)(t) := \begin{cases} \frac{x(t+\varepsilon)}{2\varepsilon}, \text{ si } 0 \leqslant t < \varepsilon, \\ \\ \frac{x(t+\varepsilon)-x(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \text{ si } \varepsilon \leqslant t < T-\varepsilon, \\ \\ \frac{-x(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \text{ si } T-\varepsilon \leqslant t < T. \end{cases}$$

Aleshores, Ψ *és continu.*

Demostració. Tenim que

$$\Psi(x,y)(t) = \begin{cases} \Psi_1(x)(t)y(t) - \int_0^t y(s)\ \frac{x(s+\varepsilon)}{2\varepsilon}\ ds,\ 0 \leqslant t < \varepsilon, \\ \\ \Psi_1(x)(t)y(t) - \int_0^\varepsilon y(s)\ \frac{x(s+\varepsilon)}{2\varepsilon}\ ds - \int_\varepsilon^t y(s)\ \frac{x(s+\varepsilon)-x(s-\varepsilon)}{2\varepsilon}\ ds,\ \varepsilon \leqslant t < T-\varepsilon, \\ \\ \Psi_1(x)(t)y(t) - \int_0^\varepsilon y(s)\ \frac{x(s+\varepsilon)}{2\varepsilon}\ ds - \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} y(s)\ \frac{x(s+\varepsilon)-x(s-\varepsilon)}{2\varepsilon}\ ds \\ \qquad\qquad - \int_{T-\varepsilon}^t y(s)\ \frac{-x(s-\varepsilon)}{2\varepsilon}\ ds,\ T-\varepsilon \leqslant t < T. \end{cases}$$

Així Ψ realment pren valors en $\mathscr{C}([0,T])$ i es pot comprovar fàcilment que és una aplicació contínua de $\mathscr{C}([0,T])^2$ en $\mathscr{C}([0,T])$. □

En el lema següent provem la convergència en llei de $\{X^{H,\varepsilon}\}_{H\in V_0}$ cap a $X^{H_0,\varepsilon}$ en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$, per a tot $\varepsilon > 0$ i prou petit.

Lema 5.2.12. *Sigui* $\{u^H\}_{H\in V_0}$ *una família de processos amb trajectòries contínues tals que*

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}),$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$ *quan* $H \to H_0$. *Aleshores, per a tot* $H_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, *la família de processos* $\{X^{H,\varepsilon}\}_{H\in V_0}$ *definits en (5.2.5) convergeix en llei cap a* $X^{H_0,\varepsilon}$ *en* $\mathscr{C}([0,T])$, *quan* $H \to H_0$.

Demostració. Degut a (5.2.23) i usant el Lema 5.2.11 tenim que $X^{H,\varepsilon} = \Psi(u^H, B^H)$ és un funcional continu de (u^H, B^H) i com que

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}),$$

quan $H \to H_0$ en $\mathscr{C}([0,T])$ obtenim el resultat que volíem provar. □

Finalment, ja tenim tots els resultats necessaris per veure la convergència de les distribucions en dimensió finita de la família de processos $\{X^H\}_{H\in V_0}$.

Proposició 5.2.13. *Sigui $\{X^H\}_{H\in V_0}$ la família d'integrals estocàstiques tipus Russo-Vallois definides en (5.2.1). Suposem que la família de processos estocàstics $\{u^H\}_{H\in V_0}$ satisfan els blocs A i B d'hipòtesis i en el cas que $H_0 = \frac{1}{2}$ també la condició (C) i a més,*

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}),$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$ quan $H \to H_0$. Aleshores, les distribucions en dimensió finita de X^H convergeixen cap a les de X^{H_0} quan $H \to H_0$.

Demostració. Distingim els casos següents:

- Cas $H_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$:

  Per a tot $t_1, \ldots, t_m \in [0,T]$ i $g \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^m)$, escrivim

$$|E[g(X_{t_1}^H, \ldots, X_{t_m}^H)] - E[g(X_{t_1}^{H_0}, \ldots, X_{t_m}^{H_0})]| \leqslant T_1(\varepsilon, H) + T_2(\varepsilon, H) + T_3(\varepsilon),$$

  on

$$T_1(\varepsilon, H) = |E[g(X_{t_1}^H, \ldots, X_{t_m}^H)] - E[g(X_{t_1}^{H,\varepsilon}, \ldots, X_{t_m}^{H,\varepsilon})]|,$$
$$T_2(\varepsilon, H) = |E[g(X_{t_1}^{H,\varepsilon}, \ldots, X_{t_m}^{H,\varepsilon})] - E[g(X_{t_1}^{H_0,\varepsilon}, \ldots, X_{t_m}^{H_0,\varepsilon})]|$$

  i

$$T_3(\varepsilon) = |E[g(X_{t_1}^{H_0,\varepsilon}, \ldots, X_{t_m}^{H_0,\varepsilon})] - E[g(X_{t_1}^{H_0}, \ldots, X_{t_m}^{H_0})]|.$$

  D'una banda tenim que $T_1(\varepsilon, H)$ està acotat superiorment per

$$C_g \max_{j=1,\ldots,m} \sup_{H\in V_0} E|X_{t_j}^H - X_{t_j}^{H,\varepsilon}|.$$

  Usant la Proposició 5.2.6, veiem que el terme $T_1(\varepsilon, H)$ tendeix a zero quan $\varepsilon \to 0$.

  Anàlogament es pot veure que $T_3(\varepsilon)$ està acotat superiorment per

$$C_g \max_{j=1,\ldots,m} \sup_{H\in V_0} E|X_{t_j}^{H_0} - X_{t_j}^{H_0,\varepsilon}|$$

  i usant de nou la Proposició 5.2.6, tenim que el terme $T_3(\varepsilon)$ tendeix a zero quan $\varepsilon \to 0$.

  Això significa que donat $\eta > 0$, podem prendre ε suficientment petit tal que $T_1(\varepsilon, H) < \frac{\eta}{3}$ i $T_3(\varepsilon) < \frac{\eta}{3}$.

  Finalment, per veure que el terme $T_2(\varepsilon, H)$ convergeix a zero quan $H \to H_0$ usem el Lema 5.2.12 que ens proporciona la següent convergència en llei:

$$\mathscr{L}(X_{t_1}^{H,\varepsilon}, \ldots, X_{t_m}^{H,\varepsilon}) \longrightarrow \mathscr{L}(X_{t_1}^{H_0,\varepsilon}, \ldots, X_{t_m}^{H_0,\varepsilon}),$$

  quan $H \to H_0$ en $\mathscr{C}([0,T])$ per a l'$\varepsilon > 0$ pres anteriorment. Amb això queda provada la convergència de les distribucions en dimensió finita.

- Cas $H_0 = \frac{1}{2}$:

  Per a tot $t_1, \dots, t_m \in [0,T]$ i $g \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^m)$, escrivim

$$|E[g(X_{t_1}^{H}, \dots, X_{t_m}^{H})] - E[g(X_{t_1}^{1|2}, \dots, X_{t_m}^{1|2})]| \leqslant T_1(\varepsilon, H) + T_2(\varepsilon, H) + T_3(\varepsilon),$$

  on

$$T_1(\varepsilon, H) = |E[g(X_{t_1}^{H}, \dots, X_{t_m}^{H})] - E[g(X_{t_1}^{H,\varepsilon}, \dots, X_{t_m}^{H,\varepsilon})]|,$$
$$T_2(\varepsilon, H) = |E[g(X_{t_1}^{H,\varepsilon}, \dots, X_{t_m}^{H,\varepsilon})] - E[g(X_{t_1}^{1|2,\varepsilon}, \dots, X_{t_m}^{1|2,\varepsilon})]|$$

  i

$$T_3(\varepsilon) = |E[g(X_{t_1}^{1|2,\varepsilon}, \dots, X_{t_m}^{1|2,\varepsilon})] - E[g(X_{t_1}^{1|2}, \dots, X_{t_m}^{1|2})]|.$$

  D'una banda tenim que $T_1(\varepsilon, H)$ està acotat superiorment per

$$C_g \max_{j=1,\dots,m} E|X_{t_j}^{H} - X_{t_j}^{H,\varepsilon}|$$

  i el terme $T_3(\varepsilon)$ està acotat superiorment per

$$C_g \max_{j=1,\dots,m} E|X_{t_j}^{1|2} - X_{t_j}^{1|2,\varepsilon}|.$$

  Usant la Proposició 5.2.10, tenim que donat $\rho > 0$ existeix $\varepsilon > 0$ i $\eta > 0$ tal que si $H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \eta\right)$, aleshores $T_1(\varepsilon, H) < \rho$ i també $T_3(\varepsilon) < \rho$.

  Fixat l'ε que hem obtingut, tenim que el terme $T_2(\varepsilon, H)$ convergeix a zero quan $H \to H_0$ aplicant també el Lema 5.2.12.

$\square$

Com a conseqüència de la Proposició 5.2.3 i la Proposició 5.2.13, obtenim el teorema següent que és el resultat principal d'aquest treball.

Teorema 5.2.14. *Sigui $\{u^{H}\}_{H \in V_0}$ una família de processos estocàstics amb trajectòries contínues tals que satisfan els blocs d'hipòtesis A i B i en el cas que $H_0 = \frac{1}{2}$ també la condició (C) i a més,*

$$(u^{H}, B^{H}) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}), \tag{5.2.24}$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$ quan $H \to H_0$. Aleshores, la família de les lleis de les integrals estocàstiques tipus Russo-Vallois $\{X^{H}\}_{H \in V_0}$ definides en (5.2.1) convergeix feblement cap a la llei de X^{H_0} en $\mathscr{C}([0,T])$ quan $H \to H_0$.

5.3 Exemple d'aplicació

En aquesta secció donem un exemple, d'una família molt senzilla de processos estocàstics $\{u^{H}\}_{H \in V_0}$ on ara $V_0 = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ amb trajectòries contínues tals que satisfan els blocs d'hipòtesis A i B i en el cas $H_0 = \frac{1}{2}$ també la condició (C) i per tant podem aplicar el Teorema 5.2.14.

Exemple 5.3.1. *Considerem la família de processos estocàstics* $\{u^H\}_{H\in V_0}$ *definits per* $u^H = \{u_t^H := B_{f(t)}^H,\ t \in [0,T]\}$ *on* $f : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ *és una funció contínua en* $[0,T]$. *Sigui* $\{X^H, H \in V_0\}$, *la família d'integrals estocàstiques tipus Russo-Vallois definides en (5.2.1). Aleshores,*

$$X^H \xrightarrow{\mathscr{L}} X^{H_0},$$

quan $H \to H_0$ *en* $\mathscr{C}([0,T])$.

Demostració. Primer de tot comprovem que el procés estocàstic u^H satisfà els blocs d'hipòtesis A, B i per $H = \frac{1}{2}$ també satisfà la condició (C).

- Condició (A1): Existeix $p > 2$ tal que

$$\int_0^T \sup_{H\in V_0} E|u_s^H|^p ds < +\infty.$$

  En efecte, de fet per a tot $p > 0$,

$$\int_0^T \sup_{H\in V_0} E|B_{f(s)}^H|^p ds \leqslant C_p \int_0^T \sup_{H\in V_0} |f(s)|^{pH} ds < +\infty,$$

  ja que f és contínua en $[0,T]$.

- Condició (A2): Existeix $p > 2$ tal que

$$\sup_{H\in V_0} \int_0^T \sup_{x\in[0,T]} E|D_r^H u_x^H|^p dr = K_D < +\infty.$$

  Sabem que $D_r^H B_{f(s)}^H = 1_{[0,f(s)]}(r)$. Per tant,

$$\sup_{H\in V_0} \int_0^T \sup_{s\in[0,T]} E|D_r^H B_{f(s)}^H|^p dr = \sup_{H\in V_0} \int_0^T \sup_{s\in[0,T]} 1_{[0,f(s)]}(r) dr \leqslant T < +\infty,$$

- Condició (B1)

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T E|u_s^H - u_{s-y}^H|^2 ds = 0.$$

  En efecte, se satisfà que

$$\begin{aligned}\sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T E|u_s^H - u_{s-y}^H|^2 ds &= \sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T |f(s) - f(s-y)|^{2H} ds \\ &\leqslant C_{f,T} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T |f(s) - f(s-y)| ds\end{aligned}$$

  i donat que f és uniformement contínua, això tendeix a 0 quan $\delta \to 0$.

- Condició (B2): Existeix $p \geqslant 2$ i $p > \frac{1}{2H_1 - 1}$ tal que

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{H\in V_0} \sup_{|y|<\delta} \int_0^T \int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H|^p dr ds = 0.$$

En efecte, tenim que

$$\begin{aligned}\sup_{H\in V_0}\sup_{|y|<\delta}\int_0^T\int_0^T E|D_r^H u_s^H - D_r^H u_{s-y}^H|^p drds\\ &= \sup_{|y|<\delta}\int_0^T\int_0^T |\mathbf{1}_{[0,f(s)]}(r)-\mathbf{1}_{[0,f(s-y)]}(r)|^p drds\\ &= \sup_{|y|<\delta}\int_0^T\int_0^T \mathbf{1}_{[f(s)\wedge f(s-y),f(s)\vee f(s-y)]}(r)drds\\ &\leqslant \sup_{|y|<\delta}\int_0^T |f(s)-f(s-y)|ds,\end{aligned}$$

i aquest darrer terme tendeix a 0 quan $\delta \to 0$, per ser f uniformement contínua, per a tot $p > 0$ i en particular, per a tot $p \geqslant 2$.

- Finalment, comprovem la condició (C).

  Els candidats a les derivades $D^{H,+}$ i $D^{H,-}$ són, respectivament:

$$\lim_{h\to 0^+} D_r^H u_{r+h}^H = \lim_{h\to 0^+} \mathbf{1}_{[0,f(r+h)]}(r) = \mathbf{1}_{[0,f(r)]}(r)$$

  i

$$\lim_{h\to 0^-} D_r^H u_{r+h}^H = \lim_{h\to 0^-} \mathbf{1}_{[0,f(r+h)]}(r) = \mathbf{1}_{[0,f(r))}(r).$$

  Definim, doncs,

$$D_r^{H,+} u_r^H := \mathbf{1}_{[0,f(r)]}(r)$$

  i

$$D_r^{H,-} u_r^H := \mathbf{1}_{[0,f(r))}(r)$$

  i comprovem que se satisfà la condició (C).

  Siguin $m_{r,\delta} := \min_{y\in(0,\delta)}\{f(r-y),f(r)\}$ i $M_{r,\delta} := \max_{y\in(0,\delta)}\{f(r-y),f(r)\}$. Aleshores, tenim que

$$\begin{aligned}\sup_{H\in V_0}\int_0^T \sup_{0<y<\delta} E|D_r^{H,-}u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H|^p dr &\leqslant \int_0^T \sup_{0<y<\delta}\mathbf{1}_{[f(r-y)\wedge f(r),f(r-y)\vee f(r)]}(r)dr\\ &\leqslant \int_0^T \mathbf{1}_{[m_{r,\delta},M_{r,\delta}]}(r)dr \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

  quan $\delta \to 0$, pel Teorema de la Convergència Dominada.

  Ara considerem $\widetilde{m}_{r,\delta} := \min_{y\in(0,\delta)}\{f(r-y),f(r)\}$ i $\widetilde{M}_{r,\delta} := \max_{y\in(0,\delta)}\{f(r-y),f(r)\}$. De forma similar es pot provar que

$$\begin{aligned}\sup_{H\in V_0}\int_0^T \sup_{-\delta<y<0} E|D_r^{H,+}u_r^H - D_r^H u_{r-y}^H|^p dr &\leqslant \int_0^T \sup_{-\delta<y<0}\mathbf{1}_{[f(r-y)\wedge f(r),f(r-y)\vee f(r)]}(r)dr\\ &\leqslant \int_0^T \mathbf{1}_{[\widetilde{m}_{r,\delta},\widetilde{M}_{r,\delta}]}(r)dr \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

  quan $\delta \to 0$.

Fins aquí hem vist que se satisfan les hipòtesis dels Blocs A, B i per $H = \frac{1}{2}$, la condició (C). Ens falta comprovar la convergència en llei conjunta

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0})$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$, quan $H \to H_0$.

Com la funció $f : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ és contínua, pren valors en un cert interval $[0,T']$ tal que podem suposar $[0,T] \subset [0,T']$. Definim el funcional següent:

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathscr{C}([0,T']) & \longrightarrow & (\mathscr{C}([0,T]))^2 \\ & x & \mapsto & \Psi(x) := \quad (x \circ f,\ x_{|[0,T]}), \end{array}$$

on $x_{|[0,T]}$ denota la restricció de x a l'interval $[0,T]$.

Comprovem que aquest funcional Ψ és continu. En efecte, donat $\eta > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $x,\, y \in \mathscr{C}([0,T'])$ tals que $\sup_{t\in[0,T']} |x(t) - y(t)| < \delta$, aleshores:

$$\sup_{t\in[0,T]} |x(f(t)) - y(f(t))| \leqslant \sup_{v\in[0,T']} |x(v) - y(v)| < \delta.$$

Tenim que

$$(u^H, B^H) = (B_f^H, B^H) = \Psi(B^H).$$

Com $\{B^H\}$ convergeix en llei cap a B^{H_0} en $\mathscr{C}([0,T'])$ i Ψ és contínua tenim que

$$(u^H, B^H) \xrightarrow{\mathscr{L}} (u^{H_0}, B^{H_0}),$$

en $(\mathscr{C}([0,T]))^2$

Hem comprovat doncs que es compleixen les hipòtesis del Teorema 5.2.14 i per tant, aplicant aquest resultat obtenim la convergència en llei que volíem provar. $\square$

5.4 Prova de la Proposició 5.1.4

Demostració. Per provar l'existència de la integral tipus Russo-Vallois i la igualtat (5.1.7) ho farem en dos passos.

Usant la propietat (5.1.2) de la integral de Skorohod tenim que per a tot $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t u_s(B^{1|2}_{s+\varepsilon} - B^{1|2}_{s-\varepsilon})ds &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t u_s \delta^{1|2}(\mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(\cdot))ds \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \delta^{1|2}(u_s \mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(\cdot))ds + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \langle D^{1|2}_{\boldsymbol{\cdot}} u_s, \mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(\cdot)\rangle_{L^2([0,T])}ds \\ &= \delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \langle D^{1|2}_{\boldsymbol{\cdot}} u_s, \mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(\cdot)\rangle_{L^2([0,T])}ds \\ &= \delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} D^{1|2}_r u_s dr ds \qquad (5.4.1) \end{aligned}$$

on estem usant la notació

$$v_s^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} v_x dx.$$

- PAS 1:

Per a $u \in \mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$, el procés u^ε aproxima el procés u en $\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$ i com a conseqüència tenim la convergència en $L^2(\Omega)$ de la integral indefinida de Skorohod:

$$\delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^\varepsilon) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \delta^{1|2}(u\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

Començarem veient que aquest procés u^ε satisfà les següents desigualtats:

(i)

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2([0,T])} \leqslant \|u\|_{L^2([0,T])}. \tag{5.4.2}$$

(ii)

$$\|Du^\varepsilon\|_{L^2([0,T]^2)} \leqslant \|Du\|_{L^2([0,T]^2)}. \tag{5.4.3}$$

En efecte, usant l'expressió (5.2.7) de u_s^ε i les propietats de la convolució tenim la desigualtat següent:

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon\|^2_{L^2([0,T])} &= \int_0^T |u_s^\varepsilon|^2 ds = \int_0^T \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)|u_{s-y}dy\Big|^2 ds\\ &\leqslant \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_{s-y}|^2 \varphi_\varepsilon(y)dyds\\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y) \int_0^T |u_{s-y}|^2 dsdy\\ &\leqslant \|u\|^2_{L^2([0,T])}.\end{aligned}$$

De forma similar també es pot acotar superiorment $\|D^{1|2}u^\varepsilon\|^2_{L^2([0,T]^2)}$:

$$\begin{aligned}\|D^{1|2}u^\varepsilon\|^2_{L^2([0,T]^2)} &= \int_0^T\int_0^T |D_r^{1|2}u_s^\varepsilon|^2 drds\\ &\leqslant \int_0^T\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} |D_r^{1|2}u_{s-y}|^2\varphi_\varepsilon(y)dy\right) drds\\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T\int_0^T |D_r^{1|2}u_{s-y}|^2 drds\right)\varphi_\varepsilon(y)dy\\ &= \|D^{1|2}u\|^2_{L^2([0,T]^2)}.\end{aligned}$$

Sigui $\mathcal{S}_T$ l'espai de processos simples u de la forma

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} F_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}$$

on $F_j \in \mathbb{D}^{1,2}_{B^H}$ acotat, $DF_j \in L^2(\Omega, L^2([0,T]))$ i $0 = t_1 < \cdots < t_m = T$.

Com que $\mathcal{S}_T$ és dens en $\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$ respecte la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))}$ aleshores sabem que existeix una successió $\{u^n\} \subset \mathcal{S}_T$ de processos simples tal que $u^n \longrightarrow u$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))}$, quan $n \to \infty$.

Tenint en compte aquest fet i usant les desigualtats (5.4.2) i (5.4.3) que hem provat anteriorment, obtenim que

$$\begin{aligned}\|u^{n,\varepsilon} - u^{\varepsilon}\|_{\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))} &= E\|u^{n,\varepsilon} - u^{\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T])} + E\|Du^{n,\varepsilon} - Du^{\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T]^2)} \\ &\leqslant \|u^n - u\|_{\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Com a conseqüència d'aquesta convergència, tenim que $\delta^{1|2}(u^{n,\varepsilon}) \longrightarrow \delta^{1|2}(u^{\varepsilon})$, en $L^2(\Omega)$, quan $n \to \infty$. Es pot veure de forma senzilla aplicant aquesta convergència i la propietat (5.1.2) de la integral de Skorohod:

$$\begin{aligned}E(\delta^{1|2}(u^{n,\varepsilon}) - \delta^{1|2}(u^{\varepsilon}))^2 &\leqslant E\|u^{n,\varepsilon} - u^{\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T])} + E\|Du^{n,\varepsilon} - Du^{\varepsilon}\|^2_{L^2([0,T]^2)} \\ &\leqslant \|u^{n,\varepsilon} - u^{\varepsilon}\|_{\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Així doncs, prenem una successió de processos simples $\{u^n\}$ de $\mathcal{S}_T$ tals que $u^n \longrightarrow u$ en la norma de l'espai $\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$ quan $n \to \infty$. Aleshores, intercalem aquests processos i escrivim

$$\begin{aligned}E|\delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon}) - \delta^{1|2}(u\mathbf{1}_{[0,t]})|^2 \leqslant 3\Big(&E|\delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon}) - \delta^{1|2}((u^n\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon})|^2 \\ &+E|\delta^{1|2}((u^n\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon}) - \delta^{1|2}(u^n\mathbf{1}_{[0,t]})|^2 + E|\delta^{1|2}(u^n\mathbf{1}_{[0,t]}) - \delta^{1|2}(u\mathbf{1}_{[0,t]})|^2\Big).\end{aligned}$$

Pel que hem vist a (5.4.4), sabem que per a tot $\xi > 0$ hi ha un enter n_ξ tal que per a tot $n \geqslant n_\xi$, tenim que

$$E|\delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon}) - \delta^{1|2}((u^n\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon})|^2 < \xi$$

i

$$E|\delta^{1|2}(u^n\mathbf{1}_{[0,t]}) - \delta^{1|2}(u\mathbf{1}_{[0,t]})|^2 < \xi.$$

Per tant, podem afirmar que per a tot $\xi > 0$, existeix n_ξ tal que per a tot $n \geqslant n_\xi$,

$$E|\delta^{1|2}((u\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon}) - \delta^{1|2}(u\mathbf{1}_{[0,t]})|^2 \leqslant 3\left(E|\delta^{1|2}((u^n\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon}) - \delta^{1|2}(u^n\mathbf{1}_{[0,t]})|^2 + \xi\right).$$

La prova s'acaba tenint en compte que per a cada n,

$$(u^n\mathbf{1}_{[0,t]})^{\varepsilon} \longrightarrow u\mathbf{1}_{[0,t]},$$

en $\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T])$ quan $\varepsilon \to 0$.

- PAS 2:

Tractem el segon sumand de (5.4.1), és a dir, la convergència en $L^1(\Omega)$ d'aquest cap al terme traça:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \langle D^{1|2}_{\cdot} u, \mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}\rangle_{L^2([0,T])} ds = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^T D^{1|2}_r u_s \mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]}(r)drds \longrightarrow \int_0^t \frac{1}{2}\nabla^{1|2}_r u_r dr,$$

quan $\varepsilon \to 0$. Recordem que

$$\nabla_r^{1|2} u_r = D_r^{1|2,-} u_r + D_r^{1|2,+} u_r.$$

Tenint en compte aquesta igualtat, intercalem el terme

$$D_r^{1|2,-} u_r \mathbf{1}_{\{r<s<r+\varepsilon\}} + D_r^{1|2,+} u_r \mathbf{1}_{\{r-\varepsilon<s<r\}}$$

en

$$\begin{aligned}
E\Big| \int_0^t \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^{1|2} u_s ds \right) dr - \int_0^t \frac{1}{2} \nabla_r^{1|2} u_r dr \Big| \\
\leqslant E\Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} (D_r^{1|2} u_s - D_r^{1|2,-} u_r \mathbf{1}_{\{r<s<r+\varepsilon\}} - D_r^{1|2,+} u_r \mathbf{1}_{\{r-\varepsilon<s<r\}}) ds \right) dr \Big| \\
+ E\Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} (D_r^{1|2,-} u_r \mathbf{1}_{\{r<s<r+\varepsilon\}} + D_r^{1|2,+} u_r \mathbf{1}_{\{r-\varepsilon<s<r\}} - \frac{1}{2} \nabla_r^{1|2} u_r) ds \right) dr \Big|.
\end{aligned}$$

El primer terme de la banda dreta de la desigualtat tendeix a zero quan $\varepsilon \to 0$.

En efecte, si l'escrivim de la forma següent:

$$\begin{aligned}
E\Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} (D_r^{1|2} u_s^{1|2} - D_r^{1|2,-} u_r^{1|2} \mathbf{1}_{\{r<s<r+\varepsilon\}} - D_r^{1|2,+} u_r^{1|2} \mathbf{1}_{\{r-\varepsilon<s<r\}}) ds \right) dr \Big| \\
\leqslant E\Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r} (D_r^{1|2} u_s^{1|2} - D_r^{1|2,-} u_r^{1|2}) ds \right) dr \Big| \\
+ E\Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r}^{r+\varepsilon} (D_r^{1|2} u_s^{1|2} - D_r^{1|2,+} u_r^{1|2}) ds \right) dr \Big|,
\end{aligned}$$

es pot veure que està acotat superiorment per

$$\int_0^t \sup_{r-\varepsilon<s<r} E|D_r^{1|2} u_s^{1|2} - D_r^{1|2,-} u_r^{1|2}| dr + \int_0^t \sup_{r<s<r+\varepsilon} E|D_r^{1|2} u_s^{1|2} - D_r^{1|2,+} u_r^{1|2}| dr$$

Així doncs, aplicant les condicions (5.1.5) i (5.1.6), provem que aquest terme tendeix a zero quan $\varepsilon \to 0$.

Pel que fa al segon terme, si l'expressem de forma adient tenim que és igual a zero:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} (D_r^{1|2,-} u_r \mathbf{1}_{\{r<s<r+\varepsilon\}} + D_r^{1|2,+} u_r \mathbf{1}_{\{r-\varepsilon<s<r\}} - \frac{1}{2} \nabla_r u_r) ds \right) dr \Big| \\
= \Big| \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^{1|2,-} u_r \mathbf{1}_{\{r<s<r+\varepsilon\}} ds \right) dr - \frac{1}{2} \int_0^t D_r^{1|2,-} u_r dr \\
+ \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon} D_r^{1|2,+} u_r \mathbf{1}_{\{r-\varepsilon<s<r\}} ds \right) dr - \frac{1}{2} \int_0^t D_r^{1|2,+} u_r dr \Big| \\
= 0.
\end{aligned}$$

Per tant, tenim la convergència en $L^1(\Omega)$ del terme traça:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \langle D_{\cdot}^{1|2} u, \mathbf{1}_{[s-\varepsilon,s+\varepsilon]} \rangle_{L^2([0,T])} ds \longrightarrow \int_0^t \frac{1}{2} \nabla_r^{1|2} u_r dr,$$

quan $\varepsilon \to 0$.

$\square$

Bibliografia

[Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[AMN00] Elisa Alòs, Olivier Mazet, and David Nualart. Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$. *Stochastic Process. Appl.*, 86(1):121–139, 2000.

[AMN01] Elisa Alòs, Olivier Mazet, and David Nualart. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *Ann. Probab.*, 29(2):766–801, 2001.

[AN03] Elisa Alòs and David Nualart. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. *Stoch. Stoch. Rep.*, 75(3):129–152, 2003.

[Ber69a] Simeon M. Berman. Harmonic analysis of local times and sample functions of Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 143:269–281, 1969.

[Ber69b] Simeon M. Berman. Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 137:277–299, 1969.

[Ber70] Simeon M. Berman. Gaussian processes with stationary increments: Local times and sample function properties. *Ann. Math. Statist.*, 41:1260–1272, 1970.

[Ber72] Simeon M. Berman. Gaussian sample functions: Uniform dimension and Hölder conditions nowhere. *Nagoya Math. J.*, 46:63–86, 1972.

[Ber74] Simeon M. Berman. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. *Indiana Univ. Math. J.*, 23:69–94, 1973/74.

[Bil68] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[BJ00] Xavier Bardina and Maria Jolis. Weak convergence to the multiple Stratonovich integral. *Stochastic Process. Appl.*, 90(2):277–300, 2000.

[BJ06] Xavier Bardina and Maria Jolis. Multiple fractional integral with Hurst parameter less than $\frac{1}{2}$. *Stochastic Process. Appl.*, 116(3):463–479, 2006.

[BJT03a] Xavier Bardina, Maria Jolis, and Ciprian A. Tudor. Convergence in law to the multiple fractional integral. *Stochastic Process. Appl.*, 105(2):315–344, 2003.

[BJT03b] Xavier Bardina, Maria Jolis, and Ciprian A. Tudor. Convergence in law to the multiple fractional integral. *Stochastic Process. Appl.*, 105(2):315–344, 2003.

[BW71] P. J. Bickel and M. J. Wichura. Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *Ann. Math. Statist.*, 42:1656–1670, 1971.

[Cen71] Nikolai N. Centsov. Limit theorems for some classes of random functions. *Selected Translations in Math. Statistics and Probability*, 9:37–42 (1971), 1971.

[CNT01] Laure Coutin, David Nualart, and Ciprian A. Tudor. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. *Stochastic Process. Appl.*, 94(2):301–315, 2001.

[DHPD00] Tyrone E. Duncan, Yaozhong Hu, and Bozenna Pasik-Duncan. Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory. *SIAM J. Control Optim.*, 38(2):582–612 (electronic), 2000.

[DK99a] A. Dasgupta and G. Kallianpur. Chaos decomposition of multiple fractional integrals and applications. *Probab. Theory Related Fields*, 115(4):527–548, 1999.

[DK99b] A. Dasgupta and G. Kallianpur. Multiple fractional integrals. *Probab. Theory Related Fields*, 115(4):505–525, 1999.

[DÜ99] L. Decreusefond and A. S. Üstünel. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal.*, 10(2):177–214, 1999.

[HC78] Steel T. Huang and Stamatis Cambanis. Stochastic and multiple Wiener integrals for Gaussian processes. *Ann. Probab.*, 6(4):585–614, 1978.

[HM88] Y. Z. Hu and P.-A. Meyer. Sur les intégrales multiples de Stratonovitch. In *Séminaire de Probabilités, XXII*, volume 1321 of *Lecture Notes in Math.*, pages 72–81. Springer, Berlin, 1988.

[Hur51] H.E. Hurst. Long-term storage capacity in reservoirs. *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.*, 116:400–410 (1951), 1951.

[Itô48] Kiyosi Itô. On the stochastic integral. *Sûgaku*, 1:172–177, 1948.

[JK93] G. W. Johnson and G. Kallianpur. Homogeneous chaos, p-forms, scaling and the Feynman integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 340(2):503–548, 1993.

[Jol06] Maria Jolis. On a multiple Stratonovich-type integral for some Gaussian processes. *J. Theoret. Probab.*, 19(1):121–133, 2006.

[Jol07] Maria Jolis. On the Wiener integral with respect to the fractional Brownian motion on an interval. *J. Math. Anal. Appl.*, 330(2):1115–1127, 2007.

[JV07a] Maria Jolis and Noèlia Viles. Continuity in law with respect to the Hurst parameter of the local time of the fractional Brownian motion. *J. Theoret. Probab.*, 20(2):133–152, 2007.

[JV07b] Maria Jolis and Noèlia Viles. Continuity with respect to the Hurst parameter of the laws of the multiple fractional integrals. *Stochastic Process. Appl.*, 117(9):1189–1207, 2007.

[Kah85] Jean-Pierre Kahane. Sur les mouvements browniens fractionnaires: images, graphes, niveaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(14):501–503, 1985.

[Kol40] A. N. Kolmogoroff. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 26:115–118, 1940.

[Lin95] S. J. Lin. Stochastic analysis of fractional Brownian motions. *Stochastics Stochastics Rep.*, 55(1-2):121–140, 1995.

[LS89] R. Sh. Liptser and A. N. Shiryayev. *Theory of martingales*, volume 49 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Russian by K. Dzjaparidze [Kacha Dzhaparidze].

[LT91] Michel Ledoux and Michel Talagrand. *Probability in Banach spaces*, volume 23 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. Isoperimetry and processes.

[Mar68] Michael B. Marcus. Gaussian processes with stationary increments possessing discontinuous sample paths. *Pacific J. Math.*, 26:149–157, 1968.

[MVN68] Benoit B. Mandelbrot and John W. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10:422–437, 1968.

[NO03] David Nualart and Youssef Ouknine. Besov regularity of stochastic integrals with respect to the fractional Brownian motion with parameter $H > 1/2$. *J. Theoret. Probab.*, 16(2):451–470, 2003.

[NP88] D. Nualart and É. Pardoux. Stochastic calculus with anticipating integrands. *Probab. Theory Related Fields*, 78(4):535–581, 1988.

[Nua03] David Nualart. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. In *Stochastic models (Mexico City, 2002)*, volume 336 of *Contemp. Math.*, pages 3–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Nua06] David Nualart. *The Malliavin calculus and related topics.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[NVV99] Ilkka Norros, Esko Valkeila, and Jorma Virtamo. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. *Bernoulli*, 5(4):571–587, 1999.

[PT01] Vladas Pipiras and Murad S. Taqqu. Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete? *Bernoulli*, 7(6):873–897, 2001.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[RV93] Francesco Russo and Pierre Vallois. Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Related Fields*, 97(3):403–421, 1993.

[ST94] Gennady Samorodnitsky and Murad S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes.* Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York, 1994. Stochastic models with infinite variance.

[SU90] J. Ll. Solé and F. Utzet. Stratonovich integral and trace. *Stochastics Stochastics Rep.*, 29(2):203–220, 1990.

[VC06] Noèlia Viles Cuadros. Continuïtat en llei respecte el paràmetre de hurst de certs funcionals del moviment brownià fraccionari. *Treball de Recerca (directora Maria Jolis Giménez)*, IX:119 p., 2006.

[Wie38] Norbert Wiener. The Homogeneous Chaos. *Amer. J. Math.*, 60(4):897–936, 1938.

[WX08] Dongsheng Wu and Yimin Xiao. Continuity in the hurst index of the local times of anisotropic gaussian random fields. *Stochastic Process. Appl.*, (doi:10.1016/j.spa.2008.09.001), 2008.

[Yor83] Marc Yor. Le drap brownien comme limite en loi de temps locaux linéaires. In *Seminar on probability, XVII*, volume 986 of *Lecture Notes in Math.*, pages 89–105. Springer, Berlin, 1983.

Índex alfabètic