Continuïtat en llei respecte el paràmetre de Hurst d'alguns funcionals del moviment Brownià fraccionari

Noèlia Viles i Cuadros

Considerem les lleis en $\mathscr{C}([0,T])$ de la família de processos $\{B^H,\ H \in (0,1)\}$, on cada $B^H = \{B_t^H,\ t \in [0,T]\}$ és un moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst H. Es pot veure fàcilment que aquestes lleis convergeixen feblement cap a les de B^{H_0}, quan H tendeix cap a $H_0 \in (0,1)$.

Una qüestió interessant seria estudiar si alguns dels funcionals importants del moviment Brownià fraccionari conserven aquesta propietat. És a dir, ens podem preguntar si la llei del funcional de B^H es manté a prop cap a la del mateix funcional de B^{H_0}, per H propera a H_0. Aquest tipus de resultats justifiquen l'ús de $B^{\hat{H}}$ com a model en situacions aplicades on es desconeix el valor del paràmetre de Hurst i $\hat{H}$ n'és una estimació.

En aquest treball, hem provat la continuïtat respecte el paràmetre de Hurst de la llei dels funcionals donats per les integrals fraccionals múltiples amb $H \in (1/2,1)$, el temps local (per a qualsevol valor d'H), la integral de primer ordre i la integral simètrica tipus Russo-Vallois amb $H \in (0,1/2)$, respectivament (veure [2], [3], [4] i [5] per a més detalls).

Aquesta memòria consta de cinc capítol. Al Capítol 1 donem preliminars. El segon capítol està dedicada a estudiar un resultat de d'estabilitat en llei del temps local del moviment Brownià fraccionari respecte petites pertorbacions del paràmetre de Hurst. En efecte, provem que la llei (en l'espai de funcions contínues) del temps local del moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst H convergeix feblement cap al temps local de B^{H_0} , quan H tendeix a H_0.

En el tercer capítol, provem la convergència feble de les integrals múltiple tipus Itô-Wiener i Stratonovich, en $\mathscr{C}([0,T])$, d'una funció determinista respecte B^H amb $H \in (\frac{1}{2},1)$, quan $H \to H_0 \in [\frac{1}{2},1)$.

Usant la caracterització del domini de la integral de Wiener respecte el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H < 1/2$ donat en [1], provem en el Capítol 4 el resultat de convergència en llei de la integral de Wiener d'una funció determinista respecte B^H, en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$.

Finalment a l'últim capítol provem que, sota certes condicions, la llei (en $\mathscr{C}([0,T])$) de la integral simètrica tipus Russo-Vallois respecte el moviment Brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > 1/2$, convergeix feblement cap a la de la corresponent integral respecte B^{H_0} quan $H \to H_0$, amb $H_0 \in [\frac{1}{2},1)$.

Concretament, considerem una família de processos estocàstics $\{u^H,\ H \in V_0\}$ on V_0 és un interval que conté H_0 i cada $u^H = \{u_t^H,\ t \in [0,T]\}$ és a procés estocàstic continu satisfent certes conditions. La nostra finalitat és mostrar que la família $\{X^H,\ H \in V_0\}$ de processos estocàstics donats per $X_t^H := \int_0^t u_s^H dB_s^H$ convergeix en llei a X^{H_0}, en $\mathscr{C}([0,T])$, quan $H \to H_0$.

Per provar la convergència en llei seguim el procediment habitual. Primer de tot, comprovarem l'ajustament de les lleis i després mostrarem la convegència de les distribucions en dimensió finita.

Continuity in law with respect Hurst parameter of some functionals of fractional Brownian motion

Noèlia Viles i Cuadros

Consider the laws in $\mathscr{C}([0,T])$ of the family of processes $\{B^H,\, H \in (0,1)\}$, where each $B^H = \{B_t^H,\, t \in [0,T]\}$ is a fractional Brownian motion with Hurst parameter H. It is easily seen that these laws converge weakly to that of B^{H_0}, when H tends to $H_0 \in (0,1)$.

It is an interesting question to study if some important functionals of the fractional Brownian motion conserve this property. That is, we ask if the law of the functional of B^H remains near to that of the same functional of B^{H_0}, when H is near to H_0. It is worth to mention that this kind of results justify the use of $B^{\hat{H}}$ as a model in applied situations where the true value of the Hurst parameter is unknown and $\hat{H}$ is some estimation of it.

In this work, we have proved the continuity with respect to the Hurst parameter of the law of the functionals given by the multiple fractional integrals with $H \in (1/2, 1)$, the local time (for any value of H), the first order integral and the Russo-Vallois symmetric integral with $H \in (0, 1/2)$, respectively (see [2], [3], [4] and [5] for more details).

We have organized this memory in five chapters. In Chapter 1, we give some preliminaries. The second chapter is devoted to a result of stability in law of the local time of the fractional Brownian motion with respect to small perturbations of the Hurst parameter. In fact, we prove that the law (in the space of continuous functions) of the local time of the fractional Brownian motion with Hurst parameter H converges weakly to that of the local time of B^{H_0}, when H tends to H_0.

In the third chapter, we prove the weak convergence of the multiple Itô-Wiener and Stratonovich integrals, in $\mathscr{C}([0,T])$, of a deterministic function with respect to B^H with $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, when $H \to H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Using the characterization of the domain of the Wiener integral with respect to the fractional Brownian motion with Hurst parameter $H < 1/2$, following [1], we prove in Chapter 4 the result about the convergence in law of the first order Wiener integral of a deterministic function with respect to B^H, in $\mathscr{C}([0,T])$, when $H \to H_0$.

Finally in the last chapter we prove, under certain conditions, the law (in $\mathscr{C}([0,T])$) of the Russo-Vallois symmetric integral with respect to the fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > 1/2$, converges weakly to that of the corresponding integral with respect to B^{H_0} when $H \to H_0$, with $H_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Concretely, we consider a family of stochastic processes $\{u^H,\; H \in V_0\}$ where V_0 is an interval which contains H_0 and each $u^H = \{u_t^H,\; t \in [0,T]\}$ is a continuous stochastic process satisfying certain conditions. Our purpose is to show that the family $\{X^H,\; H \in V_0\}$ of stochastic processes given by $X_t^H := \int_0^t u_s^H \, dB_s^H$ converges in law to X^{H_0}, in the space $\mathscr{C}([0,T])$, when $H \to H_0$.

For proving such convergence in law we follow the usual procedure. First of all, we check the tightness of the laws and then we show the convergence of the finite-dimensional distributions.

References

[1] Bardina, X., Jolis, M. Multiple fractional integral with Hurst parameter less than $\frac{1}{2}$. *Stochastic Process. Appl.*, 116, no. 3, 463–479, 2006.

[2] Jolis, M., Viles, N. Continuity with respect to the Hurst parameter of the laws of the multiple fractional integrals. *Stochastic Process. Appl.* 117, no. 9, 1189–1207, 2007.

[3] Jolis, M., Viles, N. Continuity in law with respect to the Hurst parameter of the local time of the fractional Brownian motion. *J. Theoret. Probab.* 20, no. 2, 133–152, 2007.

[4] Jolis, M., Viles, N. Continuity in the Hurst parameter of the law of the Wiener integral with respect to the fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, vol. 80, issue 7-8, 566–572, 2010.

[5] Jolis, M., Viles, N. Continuity with respect to the Hurst parameter of the laws of the multiple fractional integrals. *Stochastic Process. Appl.*, 10.1016/j.spa.2010.05.002.