Anàlisi de diversos models cinètics i difusius a la física i biologia matemàtica

En aquest treball, d'una banda s'han estudiat diversos models basats en equacions de Fokker-Planck no linials aplicats a la física i la biologia. En concret ens hem centrat en el model de Fermi-Dirac

$$f_t = \mathrm{div}\{\nabla f + vf(1+kf)\},$$

amb $k = -1$, que és un model simplificat de l'equació de Boltzman quàntica per a fermions. S'ha provat l'existència i unicitat global de solucions en qualsevol dimensió i, per mitjà de tècniques d'entropia, la convergència exponencial d'aquestes a la solució d'equilibri d'igual massa, donada per un estadístic de Fermi-Dirac. Els mateixos arguments emprats en el cas anterior proporcionen també exisitencia local de solucions en el model per al model de Bose-Einstein ($k = 1$) en qualsevold dimensió, però resultats anàlegs sobre el comportament assimptòtic s'obtenen per a bosons només en el cas de dimensió 1.

També s'estudia el model de Keller-Segel per quimiotaxi

$$\rho_t = \mathrm{div}\{\varepsilon\nabla(\rho) + \rho\chi(\rho, S)\nabla S\} \qquad S_t = \Delta S + r(\rho, S)$$

on ρ representa la concentració de cèl·lules que es mouen sota la influència d'una substància química S, χ la sensibilitat de les cèl·lules a aquesta substància i r la tasa de creació/destrucció de S. En el cas que la quimiosensibilitat presenta una saturació de la forma $\chi = (C - \rho)$, s'ha provat l'existència i unicitat de solucions en dimensió arbitrària i en l'estudi del comportament assimptòtic s'ha obtingut el decaiment cuadràtic a zero de la norma infinit tant de ρ com d'S i la convergència polinomial a solucions autosemblants per la concentració de cèl·lues, en el cas que $\varepsilon > 1/4$. La convergència per a la concentració de la substància química i el comportament asimptòtic del model quan $\varepsilon < 1/4$ és encara tema d'estudi.

D'altra banda, tractem en detall la qüestió del correcte plantejament de l'equació d'agregació

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(uv) = 0 \qquad \text{with} \qquad v = -\nabla K * u$$

a L^p. Treballar en aquest espai ens permet fer significants avenos en la comprensió de l'equació d'agregació. En primer lloc, som capaos de considerar potencials K menys singulars que els Newtonians, mentre que fins ara sovint es demanava que les singularitats dels potencials fossin com a molt de tipus Lipschitz a l'origen. En segon lloc, identifiquem la regularitat crítica que necessitem en la dada inicial per tal de garantir que la solució romandrà absolutament contínua respecte a la mesura de Lebesgue, com a mínim per un temps curt. Tamb adrecem la questió de la unicitat de solució per a aquest i altres models de biologia que involucren termes d'agregació i competició entre agregació i difusió. Tot i que en molts casos ja es coneixia el resultat, aquí s'aconsegueix donar una prova significativament més simple de la unicitat per a les solucions d'aquestes equaicions, gràcies a l'us amb un nou enfoc d'eines que ens proporciona la teòria del transport òptim.

Finalment, es presenten diferents models que estudien el comportament collectiu d'animals. Primer s'enfoquen des del punt de vista de les equacions diferencials ordinàries, estudiant el sistema format per N partícules, per centrar-nos tot seguit en les equacions cinètiques resultants de prendre el límit quan $N \to \infty$. Tots els models es poden veure com a casos particulars de

$$\partial_t f + v\nabla_x f + \nabla_v \cdot [\xi(f)(x,v,t) f(x,v,t)] + \mathrm{div}_v(\gamma(v)f) = 0,$$

on ξ és un potencial de interacció i γ conté els termes de fricció amb l'entorn i d'autopropulsió. Aquí estarem interessats en l'estudi de l'estabilitat de les solucions, que adreçarem també per mitjà de tècniques de transport òptim, presentant noves aplicacions per a aquestes eines ja conegudes.

Analysis of some diffusive and kinetic models in mathematical biology and physics

In this work, on one hand we study several models based upon non-linear Fokker-Planck equations which apply to physics and biology. More precisely, we focus in the Fermi-Dirac model

$$f_t = \mathrm{div}\{\nabla f + vf(1+kf)\},$$

with $k = -1$, which is a simplified version of the Boltzmann equation for fermions. We have proven global existence and uniqueness of solution in any dimension and, using entropy methods, the exponential convergence of these solutions to the stationary solution given by the Fermi-Dirac statistic of the same mass as the initial condition. The same arguments provide local existence for the Bose-Einstein model ($k = 1$) in any dimension but analogous results about asymptotic behavior are obtained only in dimension 1.

We also study the Keller-Segel model for chemotaxis

$$\rho_t = \mathrm{div}\{\varepsilon\nabla(\rho) + \rho\chi(\rho, S)\nabla S\} \qquad S_t = \Delta S + r(\rho, S)$$

where ρ stands for the concentration of cells moving due to the influence of a chemical substance, S, χ is the sensibility of the cells to this substance and r the secretion/destruction rate of S. In the case that the chemosensibility presents a saturation of the form $\chi = (C - \rho)$, it has been proven the existence and uniqueness of solution in any dimension and in the study of the asymptotic behavior we get a quadratic decay to zero of the infinite norm, both of ρ and S and polynomial convergence to self-similar solutions for the concentration of cells when $\varepsilon > 1/4$. The convergence for the concentration of the chemical and the asymptotic behavior of the solutions when $\varepsilon < 1/4$ és is still an open problem.

On the other hand, we develop a fairly complete theory for the well-posedness of the aggregation equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(uv) = 0 \qquad \text{with} \qquad v = -\nabla K * u$$

in L^p. The L^p framework we adopt allow us to make to significant advances in the understanding of the aggregation equation. First, we are able to consider potentials K which are less singular than the Newtonian potential whilst up to now it was often requires to the ones which have been considered to be in the worst case Lipschitz singular at the origin. Second, we identify the critical regularity needed on the initial data in order to guarantee that the solution will remain absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, at least for short time. Also, we deal with the uniqueness question in this and some other models which involve an aggregation term and competition between aggregation and diffusion. Albeit in some of cases the result was already known, we are able to provide a simpler proof thanks to new point of view and tools coming from the optimal transport theory.

Finally, we study different models of collective animal behavior. We first approach them from the ODE viewpoint, through the study of the system of N particles, to focus afterwards in the kinetic equations obtained from the mean field limit, when we increase the number of particles. All the models we study can be seen as particular cases of

$$\partial_t f + v\nabla_x f + \nabla_v \cdot [\xi(f)(x,v,t)f(x,v,t)] + \mathrm{div}_v(\gamma(v)f) = 0,$$

where ξ is an interaction potential and γ gather the friction and self-propulsion terms. Here we are interested in the study of the stability of solutions. To deal with this problem we also use optimal transport techniques, providing new applications for these already known tools.