

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

1400218310

035-1125-11/80

**ESTIMACIO DELS PARAMETRES DE MODELS ARMA (P, Q)
MITJANÇANT ALGORISMES DE FILTRATGE OPTIM**

Tesi elaborada per

Maria Pilar MUÑOZ i GRACIA

sota la direcció del

Dr. Jaume PAGES i FITA

i presentada per a l'obtenció del
Grau de Doctora en Informàtica.



BIBLIOTECA RECTOR GABRIEL FERRATÉ
Campus Nord

Juny 1988

FACULTAT D'INFORMATICA DE BARCELONA
UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA

*A Manin, que tantes ganes tenia que acabés i
a la meva mare, gràcies a ella sóc la que sóc.*

AGRAIMENTS

Vull agrair a totes aquelles persones que m'han ajudat a realitzar aquest treball, especialment en Jaume Pagés i Fita, Director de la meva tesi, pels seus consells, atencions i sobretot la paciència que ha demostrat envers la meva redacció. Així mateix, en Manuel Martí i Recober, pel seu estímul i per la confiança que sempre ha dipositat en mi.

Als meus companys de Departament, sobretot a la Lupe Gómez i en Tomàs Aluja, que tant m'han ajudat en la darrera època d'aquest treball.

A Nadala Salvo, per l'avorrida tasca de formatejar les pàgines i completar els detalls finals.

Especialment al Marc, per totes les hores que no he pogut jugar amb ell, que espero que quan sigui gran sabrà entendre-ho.

INDEX

	<u>Pàg.</u>
INTRODUCCIO	1
CAPITOL 1. INTRODUCCIO A L'ESTIMACIO DE MODELS ARMA UNIVARIANTS	
1.1 Introducció	4
1.1.1 Anàlisi i modelat de sèries temporals	5
1.1.1.1 Models explícits del temps i descomposició de sèries	6
1.1.1.2 Models recurrents i allisament exponencial	7
1.1.2 Processos estocàstics estacionaris ARMA	8
1.1.2.1 Representació en l'espai del temps	8
1.1.2.2 Representació en l'espai d'estat	11
1.1.3 Problemes resolts i per resoldre	13
1.2 Estimació de paràmetres d'un model ARMA en l'espai del temps	14
1.2.1 Algorismes globals	16
1.2.1.1 Enfocament de Box i Jenkins	16
1.2.1.2 Enfocament de Newbold	20
1.2.1.3 Enfocament d'Ansley	23
1.2.2 Algorismes recursius	25
1.2.2.1 Enfocament de Gardner, Harvey i Phillips	25
1.2.2.2 Enfocament de Ljung i Söderström	28
1.3 Estimació òptima: El nostre enfocament	31

**CAPITOL 2. FILTRE NO LINEAL PER L'ESTIMACIO DE PARAMETRES DE
PROCESSOS AR(P) AMB LA VARIANCIA DEL SOROLL
DESCONEGUDA**

2.1	Introducció	33
2.1.1	Model de l'espai d'estat general per un procés AR	36
2.1.2	Discussió de l'elecció de la distribució a priori	38
2.2	Algorisme de filtratge no lineal	42
2.2.1	Elecció de la distribució a priori	42
2.2.2	Predicció i filtratge	48
2.3	Estimació d'un model AR(1) amb σ^2 desconegut	51
2.3.1	Formulació	51
2.3.2	Implementació de l'algorisme de filtratge no lineal	52
2.3.2.1	Inicialització de la recursió	53
2.3.2.2	Càlcul de la predicció	55
2.3.2.3	Càlcul del filtratge	56
2.3.2.4	Càlcul de la predicció i filtratge conjuntament	57
2.4	Resultats	58
2.4.1	Resultats	58
2.4.2	Comparació amb el comportament assimptòtic	64
2.5	Conclusions	66

**CAPITOL 3. FILTRE NO LINEAL PER L'ESTIMACIO DELS PARAMETRES
DE PROCESSOS ARMA(P,Q)**

3.1	Introducció	68
3.2	Definició de la probabilitat a posteriori dels paràmetres	69
3.3	Càlcul recursiu de la funció de versemblança normalitzada	72
3.3.1	Obtenció eficient de la matriu inversa	72
3.3.2	Càlcul recursiu de la matriu de covariàncies inversa	77
3.3.3	Càlcul recursiu de la forma quadràtica	82
3.3.4	Càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori	84
3.3.5	Comportament assimptòtic	85

3.4	Estimació dels paràmetres d'un model ARMA(1,1) amb la variància del soroll desconeguda	86
3.4.1	Formulació	86
3.4.2	Implementació de l'algorisme de filtratge no lineal	87
3.4.2.1	Inicialització de la recursió	88
3.4.2.2	Càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori	89
3.4.3	Resultats	92
3.4.4	Conclusions	105
3.5	Estimació dels paràmetres d'un model ARMA(2,1)	108
3.5.1	Formulació	108
3.5.2	Implementació de l'algorisme de filtratge no lineal	110
3.5.2.1	Inicialització de la recursió	111
3.5.2.2	Càlcul recursiu de la probabilitat a posteriori	114
3.5.3	Resultats	115
3.5.4	Conclusions	139
3.6	Estimació dels paràmetres d'un model AR(1). Comparació dels dos mètodes.	141
CAPITOL 4. CONCLUSIONS I EXTENSIONS		142
ANNEX 1.		
	Estimació de paràmetres de processos ARMA(p,q) mitjançant el paquet estadístic BMDP i l'algorisme RPEM de Ljung i Söderström.	145
BIBLIOGRAFIA.		149

INTRODUCCIO

L'objectiu d'aquesta tesi és aprofundir en l'estimació recursiva dels paràmetres de models ARMA(p,q) i analitzar la relació entre el nombre de dades utilitzades i la precisió de l'estimació.

Hem emprat el punt de vista bayesià d'anar calculant les funcions de densitat a posteriori dels paràmetres a mesura que es va obtenint informació, per la qual cosa ha calgut la formulació i programació d'algorismes propis, així com la programació d'algorismes ja presentats per d'altres autors. Mitjançant el filtre no lineal òptim sintetitzat es pot conèixer el nombre mínim de dades que fan falta per estimar els paràmetres d'un model ARMA amb una precisió prefixada. Aquest coneixement ha de permetre avaluar d'altres metodologies que es fan servir actualment i de les quals l'únic coneixement de la precisió dels resultats que s'obtenen és dels que es deriva de les propietats asimptòtiques dels estimadors. Pel que fa a les tècniques estadístiques clàssiques, el "software" amb el qual s'ha treballat són els paquets estadístics BMDP [9] i MINITAB [29].

En primer lloc -CAPITOL 1- fem un breu repàs de l'estimació dels models ARMA amb l'objectiu de donar els elements bàsics per a comprendre el problema ja esmentat, la terminologia i les notacions necessàries per a la continuació.

En el -CAPITOL 2- s'estudien els models AR. L'estimació dels paràmetres de models AR es pot resoldre utilitzant un filtre lineal; en particular són de gran utilitat els treballs realitzats per Kalman-Bucy [23] si la variància del soroll és coneguda. Però si la variància del soroll és desconeguda, aquesta estimació es transforma en un problema de filtratge no lineal. Per determinar un estimador recursiu dels coeficients del model AR i de la variància del soroll es defineix un vector d'estat ampliat que inclou

les variables d'estat i els paràmetres a estimar. Amb un enfocament bayesià es determina la distribució a posteriori del vector d'estat ampliat.

En aquest capítol, s'han estimat models AR(1) amb la variància del soroll desconeguda i diferents localitzacions del pol en el cercle unitat. Aquesta estimació, encara que sembli trivial, posa de manifest les característiques pròpies dels problemes del filtratge no lineal.

En el -CAPÍTOL 3- s'estudien els models ARMA. L'estimació recursiva dels paràmetres d'aquests models es pot fer seguint la metodologia emprada en el capítol anterior, però el filtre no lineal òptim així obtingut és costós en temps de càlcul i ocupació de memòria, quan el nombre de paràmetres a estimar és elevat. Aquest fet ens ha dut a buscar una recurrència entre les formes quadràtiques que defineixen la funció de versemblança normalitzada dels paràmetres; amb ella, la funció de versemblança normalitzada pot ser calculada pas a pas utilitzant per una banda, la recurrència entre les formes quadràtiques i per altra banda l'algorisme de Levinson [8], [10] pel càlcul del determinant. L'algorisme obtingut ha estat programat i implementat en el VAX-8600 de la Facultat d'Informàtica de Barcelona. Aquest mètode disminueix notablement la capacitat de memòria i el temps de càlcul necessaris per a l'estimació recursiva òptima dels paràmetres del model ARMA.

Els models AR(1) amb la variància del soroll desconeguda proposats en el capítol 2, s'han estimat utilitzant l'algorisme pel càlcul de la funció de versemblança normalitzada descrit en aquest capítol. S'han comparat els resultats estadístics d'aquestes estimacions, el temps de càlcul i la capacitat de memòria amb els obtinguts fent servir el mètode del capítol 2.

Finalment, en el -CAPITOL 4- són posades de manifest les conclusions a les quals hem arribat i les possibles extensions d'aquest treball. L'experiència en estimadors òptims dels paràmetres de model ARMA(p,q) demostra que la precisió depèn essencialment dels valors absoluts dels pols i zeros i de la distància entre pols i zeros. A més, la construcció de la funció de densitat a posteriori ens permet controlar la grandària de mostra necessària per aconseguir una precisió determinada.

