

## 2.5 Evolucions temporals amb comportament d'instabilitat completa

A continuació il·lustrarem algunes característiques del comportament d'instabilitat completa quan s'observa en l'evolució temporal de sistemes en la forma (2.2), (2.5) i (2.7), per a una diversitat de funcions no lineals  $g(\Psi)$ , de dimensions dinàmiques  $N$  i de conjunts de coeficients  $c_j$  i  $d_j$ . En cada cas els paràmetres del sistema,  $c_j$  i  $d_j$ , han estat definits preseleccionant els valors de  $\omega_H$  i  $p_H$  de les  $N - 1$  bifurcacions de Hopf i el valor de  $c_1$ , tal i com es descriu a l'apèndix B. Les funcions no lineals utilitzades, els seus corresponents diagrames de branques en l'estat estacionari en funció de  $\mu_c$  i la distribució de valors de  $p$  han estat presentades a la figura 2.3 i es comenten amb més detall a l'apèndix A.

La il·lustració la fem a partir de la figura 2.1 i les figures d'aquesta mateixa secció. Els peus de figura indiquen la funció no lineal corresponent i els valors de  $c_1$ ,  $\omega_{H_q}$  i  $p_{H_q}$ . Els senyals de les evolucions sempre descriuen la variable  $\Psi$  en funció del temps per a valors fixats de  $\mu_c$  i, en general, contenen una diversitat de modes d'oscil·lació a freqüències  $\omega_q$  que, ordenades de menor a major, les identifiquem en els senyals per mitjà de l'etiqueta  $q$ .

Considerem primer els exemples de la figura 2.1 corresponents a un sistema hexadimensional amb una funció no lineal gaussiana, equació (A.1). Els diagrames de la figura 2.3(a) o A.1 mostren que per a  $\mu_c = 16$  el sistema té tres punts fixos amb  $\bar{\Psi} = 1.6, 6.6$  i  $12.1$  i  $p = 0.02, 3.4$  i  $-4.3$ , respectivament. El primer punt roman allunyat de la dinàmica observada. Els altres dos sorgeixen a  $\mu_c = 9.5$  gràcies a una bifurcació sella-node que produeix un node estable i una sella amb una dimensió inestable, ambdós amb  $p = 1$ . A  $\mu_c = 16$  el node ja ha esdevingut totalment inestable després de patir successives bifurcacions de Hopf amb freqüències  $\omega_{H_1}$ ,  $\omega_{H_3}$  i  $\omega_{H_5}$  per a valors de  $\mu_c$  que donen valors de  $p$  iguals a  $p_{H_1}$ ,  $p_{H_3}$  i  $p_{H_5}$ , respectivament. La primera bifurcació, en aquest cas a  $\omega_{H_1}$ , ha produït el cicle límit estable del qual deriva l'atractor que sosté l'evolució temporal de la figura 2.1. Per la seva banda, el punt sella ha patit també les dues bifurcacions de Hopf, a  $\omega_{H_2}$  i  $\omega_{H_4}$ , i per a  $\mu_c = 16$  té només una dimensió estable. Hi ha una clara relació entre els cinc temps característics que apareixen al senyal i les freqüències de Hopf,  $\omega_{H_q}$ , dels dos punts fixos. Els temps característics associats al punt node, especialment el de  $\omega_1$ , són més grans que les

corresponents freqüències de Hopf a causa de la presència d'oscil·lacions intermèdies a les freqüències de la sella. Després d'un transitori d'unes desenes d'oscil·lacions a  $\omega_1$ , durant el qual l'estructura presenta pocs canvis, el senyal es veu periòdic tot repetint la complexa seqüència d'oscil·lacions dins del període  $2\pi/\omega_1$ . S'han calculat els exponents de Lyapunov (en bits per unitat de temps) [91] i el resultat ha estat igual a  $(-0.002, -0.015, -0.225, -4.16, -17.31, -1813)$ .

La figura 2.10 presenta una sèrie d'evolucions temporals per a diferents valors de  $\mu_c$  amb la intenció de mostrar com apareixen els diferents modes d'oscil·lació. Malgrat tot, no hem estat capaços de caracteritzar els conjunts invariants subjacents als mecanismes de mescla de modes i, per tant, la interpretació que en fem es troba limitada. Les evolucions corresponen a un sistema hexadimensional amb una funció sinusoidal definida positivament i que es dona a (A.2) i a la figura A.1(b). El diagrama de la solució estacionària consisteix en una successió de branques en forma d'S i les evolucions que mostrem corresponen a una branca d'ordre elevat. Els valors de  $p$  dels punts fixos es donen al peu de figura i llur comparació amb  $p_{H_q}$  indica si la bifurcació de Hopf ja s'ha produït o no.

Les oscil·lacions comencen amb una bifurcació de Hopf supercrítica a freqüència  $\omega_{H_1}$  que té lloc al punt node just per sota de  $\mu_c = 61.79$ , però per a  $\mu_c = 62.0085$  una petita component d'oscil·lacions ràpides apareix del no res en un cert lloc de les ondulacions lentes (vegeu el senyal de  $\mu_c = 62.009$  i la seva ampliació). Aquesta freqüència ràpida és igual a  $\omega_{H_5}$  i un seguiment de l'òrbita estable indica que l'aparició d'aquestes oscil·lacions no està relacionada amb cap bifurcació local (*id est* no s'ha produït cap Hopf que generi aqueixa freqüència). Incrementant el paràmetre de control l'estructura localitzada d'oscil·lacions ràpides perd repetitivitat i el seguiment de l'òrbita acaba a  $\mu_c = 62.0097$ . Després d'aquest punt el sistema evoluciona cap a un atractor més gran que, de fet, coexisteix amb l'òrbita anterior per un cert rang del paràmetre de control, començant a  $\mu_c = 61.95$  (vegeu el senyal per a  $\mu_c = 62$ ). L'atractor gran també conté una estructura localitzada, però amb dues freqüències característiques,  $\omega_5$  igual a  $\omega_{H_5}$  i  $\omega_3$  una mica menor que  $\omega_{H_3}$ . Les bifurcacions de Hopf a  $\omega_{H_3}$  i  $\omega_{H_5}$  tenen lloc sobre el punt node per a  $\mu_c = 67.56$  i  $68.76$  respectivament. L'òrbita  $\omega_{H_5}$  és sella i apareix de forma supercrítica, però el seu seguiment és crític i falla ràpidament, mentre que l'òrbita  $\omega_{H_3}$  no ha estat detectada. Les dues bifurcacions tenen lloc prou a prop una de l'altra com perquè sigui possible l'existència

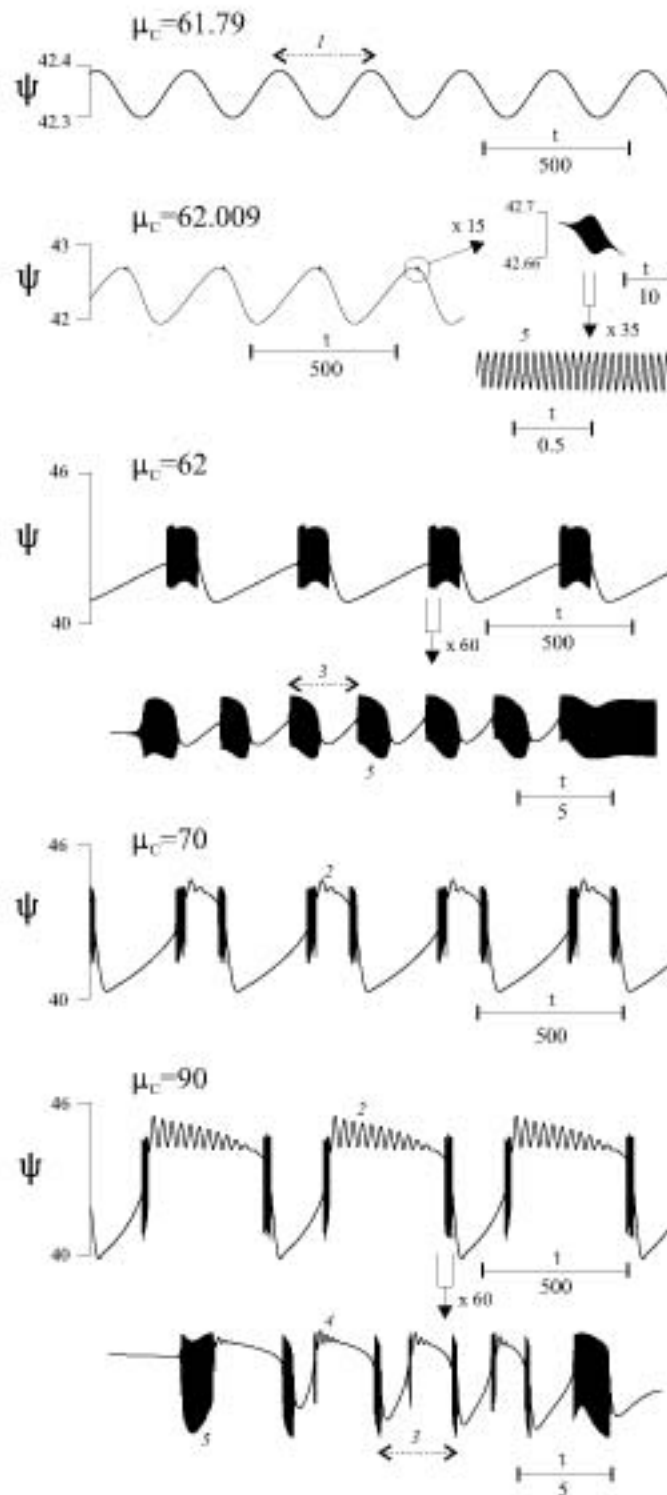


Figura 2.10: Seqüència d'evolucions temporals per a successius valors de  $\mu_c$  que mostren com sorgeixen les estructures de la instabilitat completa. La funció no lineal és donada a (A.2) i els paràmetres són:  $\omega_{H_q} = 0.02, 0.2, 2, 20, 125$ ,  $p_{H_q} = -12, 33, -18, 40, -17$  i  $c_1 = 2\omega_{H_5}$ . Els valors de  $\bar{\Psi}$  i  $p$  dels punts fixos involucrats són: a)  $\bar{\Psi} = 42.34$ ,  $p = -12.002$ , b) i c)  $\bar{\Psi} = 42.354$ ,  $p = -12.19$ , d)  $\bar{\Psi} = 45.4$ ,  $p = 16.3$ ;  $\bar{\Psi} = 42.7$ ,  $p = -19.0$ , e)  $\bar{\Psi} = 44.9$ ,  $p = 32.2$ ;  $\bar{\Psi} = 43.1$ ,  $p = -33.1$

d'un torus  $(\omega_3, \omega_5)$ . Això suggereix que l'evolució a tres freqüències que observem per a  $\mu_c = 62$  es pot interpretar temptativament tal i com segueix: l'òrbita estable  $\omega_1$  és influïda pel flux associat a les varietats invariants d'un torus sella  $(\omega_3, \omega_5)$ , de manera que l'òrbita inicial incorpora aquestes dues freqüències. Malgrat tot, la possibilitat que l'evolució sigui un torus-3 estable no es pot excloure tot i no tenir-ne evidències. Cal destacar també el grau d'autosimilaritat del senyal, evident quan comparem el senyal amb la seva ampliació en un factor 60.

El senyal per a  $\mu_c = 70$  mostra l'estructura  $(\omega_3, \omega_5)$  dividida en dues parts per culpa d'unes noves oscil·lacions més lentes. Hi podem veure l'aproximació de l'atractor cap al punt sella exterior gràcies a la presència d'aquestes noves oscil·lacions, que són a freqüència  $\omega_2$ , gairebé igual a  $\omega_{H_2}$ . Per aquest senyal trobem uns exponents de Lyapunov iguals a:  $(-0.0002, -0.055, -0.422, -8.37, -33.9, -201)$ . La influència del punt sella és encara més evident al senyal per a  $\mu_c = 90$ , on, a més de la gran quantitat d'oscil·lacions a  $\omega_2$ , podem veure l'aparició d'una nova freqüència  $\omega_4$ , molt semblant a  $\omega_{H_4}$ , barrejada en l'estructura  $(\omega_3, \omega_5)$ . Els autovalors del punt sella són  $(-0.0018 \pm 0.199i, -1.44 \pm 20.01i, -719)$ ; per tant és a punt de patir la bifurcació a  $\omega_{H_2}$  ( $\mu_c = 91.35$ ), però relativament lluny de la bifurcació a  $\omega_{H_4}$  ( $\mu_c = 103.84$ ). Aquestes bifurcacions seran supercrítiques i el seguiment de les òrbites corresponents també serà delicat. Els autovalors de la sella compleixen les condicions del teorema de Shil'nikov per al caos homoclínic [85] i el gran nombre d'oscil·lacions  $\omega_2$  indica la proximitat d'una homoclínica. No obstant això, l'evolució és periòdica i hem comprovat que així roman fins a  $\mu_c = 96.07$ , però amb cinquanta oscil·lacions  $\omega_2$  d'amplitud gairebé uniforme que denoten la presència d'un cicle sella creat a la bifurcació  $\omega_{H_2}$ . A  $\mu_c = 96.08$  l'homoclínica ja ha tingut lloc, ha destruït l'atractor i el sistema ha derivat cap a un estat oscil·latori d'una branca superior. Pel que fa al teorema de Shil'nikov pot ser que la dinàmica caòtica es concentri en un entorn molt estret de l'òrbita homoclínica o bé que certes condicions que fan referència a la geometria de la connexió de la sella no es compleixin [85].

Hem intentat realitzar un seguiment de les òrbites sella creades a les successives bifurcacions de Hopf dels punts fixos. Notem, a partir de la figura 2.3, que trobem un mateix valor de  $p_{H_q}$  dues vegades en una branca estacionària i el seguiment de l'òrbita s'ha realitzat a partir de les dues bandes. L'òrbita que sorgeix de la bifurcació  $\omega_{H_5}$  mostra una evolució quasi sinusoidal però la seva freqüència disminueix, arribant

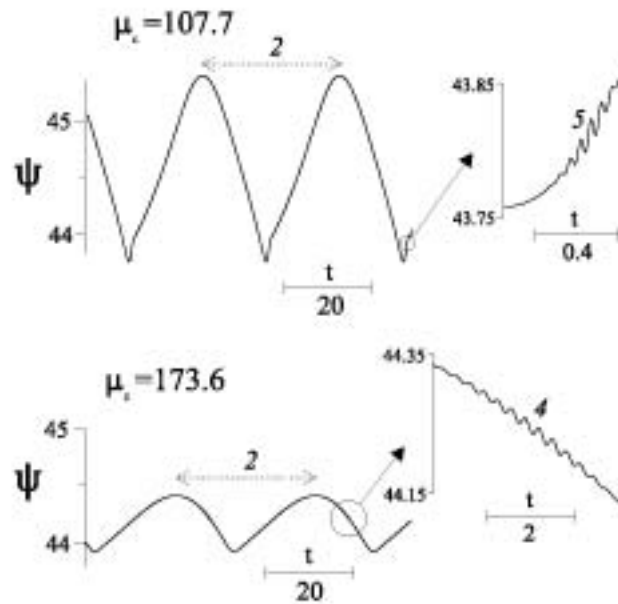


Figura 2.11: Evolució temporal de les òrbites sella creades a la bifurcació  $\omega_{H_2}$  que tenen lloc sobre el punt sella per a  $\mu_c = 91.35$  i  $\mu_c = 186.78$ , respectivament.

a gairebé la meitat del valor  $\omega_{H_5}$ . El fet és destacable, perquè les oscil·lacions ràpides que apareixen sobre altres òrbites tenen precisament una freqüència igual a  $\omega_{H_5}$ . El seguiment de l'òrbita de seguida es fa crític perquè un dels multiplicadors de l'òrbita creix considerablement; per això el seguiment s'ha limitat a zones properes a la bifurcació de Hopf. L'òrbita  $\omega_{H_3}$  no s'ha trobat, però la  $\omega_{H_4}$  s'ha pogut seguir fins la seva desaparició en una bifurcació de Hopf inversa a  $\mu_c = 177.98$  i sempre presentava una oscil·lació a gairebé  $\omega_{H_4}$ . El seguiment de l'òrbita  $\omega_{H_2}$  és més delicat, perquè de seguida incorpora oscil·lacions a  $\omega_{H_4}$  i  $\omega_{H_5}$ , però alhora és més interessant perquè mostra com apareixen noves freqüències en òrbites sella, com mostrem a la figura 2.11, és a dir, com es pot produir la mescla de modes també en ens sella.

El comportament d'instabilitat completa que es basa en freqüències d'oscil·lació bastant diferents normalment mostra evolucions força robustes que es repeteixen periòdicament si eliminem un transitori prou llarg. Això no obstant, també es poden trobar evolucions caòtiques si incrementem prou el paràmetre de control. Per exemple, la figura 2.12 presenta un exemple d'evolució caòtica obtinguda amb el mateix sistema de la figura 2.10 però per a un valor més alt de  $\mu_c$ . Per a aquest cas els exponents de Lyapunov calculats són:  $(0.0268, -0.00184, -0.0498, -2.269, -6.031, -1072)$ . L'e-

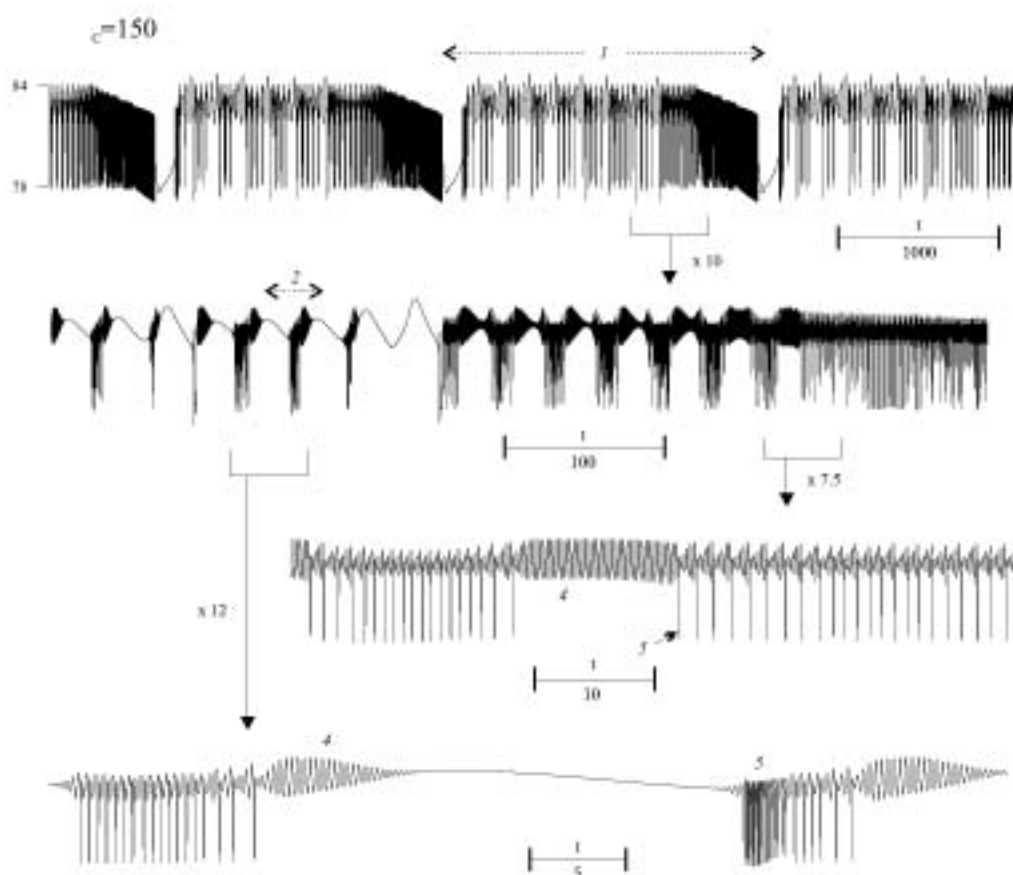
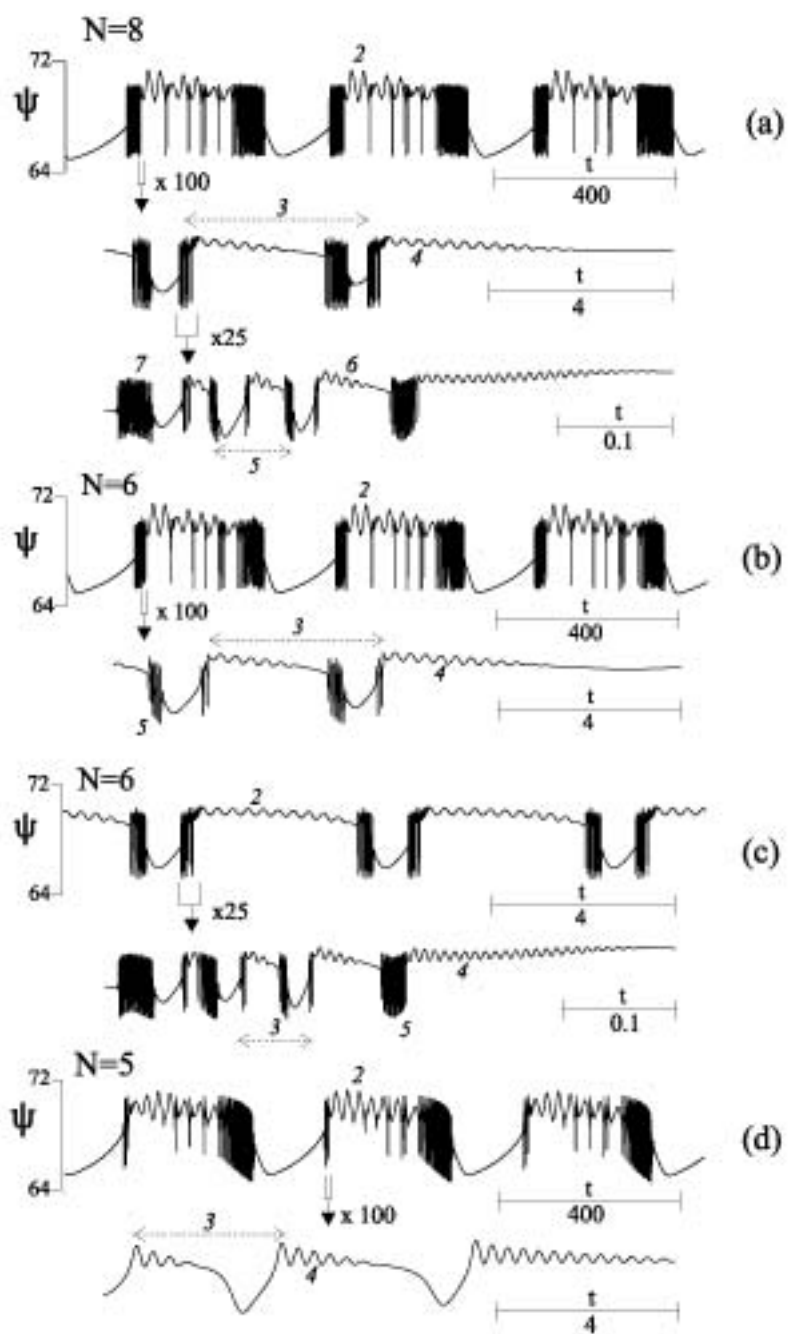


Figura 2.12: Evolució caòtica per al mateix cas que la figura 2.10 però per a un valor més alt del paràmetre de control

volució aperiòdica sorgeix de la repetició irregular de l'estructura complexa, i el que és més important, la complexitat del senyal no es pot atribuir al caos. En altres paraules un ajustament fi de  $\mu_c$  ens porta a estats estrictament periòdics en els quals la complexitat es manté.

La figura 2.13 il·lustra característiques autosimilars de les evolucions d'instabilitat completa a dos nivells diferents, un respecte a l'escala temporal i l'altre respecte a la dimensionalitat del sistema. L'autosimilaritat també és evident en els senyals de les figures 2.1 i 2.10. Cal notar que les oscil·lacions associades, bé amb el node bé amb la sella, mantenen els seus papers al llarg de l'escala de similaritat. Els resultats presentats contenen un nombre reduït de nivells de similaritat però, en no haver-hi límit en la dimensió del sistema, fóra interessant investigar l'autosimilaritat de la instabilitat completa per a alts valors d' $N$ , tant en el domini temporal com en el de freqüències.

Els diversos senyals de la figura 2.13 corresponen a la mateixa funció no lineal i el mateix valor de  $\mu_c$ , de manera que els sistemes de diferent dimensió tenen tots el mateix conjunt de punts fixos amb idèntics valors de  $\bar{\Psi}$  i  $p$ . Les evolucions estan sempre associades a la mateixa parella de punts sella-node. Notem l'escala única de  $\Psi$  i els tres nivells d'ampliació de l'escala temporal utilitzats en l'escala temporal. El primer nivell d'ampliació del cas (b) correspon al segon dels altres casos. Els paràmetres dels diversos sistemes han estat determinats imposant un conjunt comú de valors de  $\omega_H$  i  $p_H$  i un grau similar de divergència en el camp vectorial. Per exemple, si treiem les dues freqüències més ràpides del sistema (a) amb  $N = 8$  obtenim el sistema (b), i si treiem les dues més lentes obtenim el (c), ambdós amb  $N = 6$ . De la mateixa manera, el sistema (d) amb  $N = 5$  té les mateixes bifurcacions de Hopf que el sistema (b) excepte per la de freqüència més alta. D'aquesta forma obtenim sistemes de diferent dimensió en els quals l'estabilitat lineal de la parella sella-node de punts fixos és parcialment idèntica. Això confirma el paper essencial de les bifurcacions estacionàries a l'hora de determinar la dinàmica temporal observable en els règims d'instabilitat completa i el comportament genèric dels mecanismes no lineals de barreja de modes, com a mínim en el cas de funcions no lineals d'una sola variable en la forma (2.7). Una altra propietat significativa és la divergència del camp vectorial; en aquest sentit, en els sistemes de la figura 2.13, nosaltres hem escollit valors relativament semblants de  $c_1$  respecte a la freqüència més alta.





La figura 2.14 correspon a un sistema hexadimensional amb una funció no lineal que produeix una bifurcació en forquilla i amb els mateixos valors de  $\omega_{H_q}$ ,  $p_{H_q}$  i  $c_1$  que a la figura 2.1. La funció no lineal és la donada a l'equació (A.3) i representada a la figura A.1c. La forquilla produeix dos nodes estables i una sella amb una dimensió inestable. Pel rang de valors de  $\mu_c$  considerats a la figura 2.14 el sistema presenta només aquest trio de punts fixos. Aquests punts experimenten bifurcacions de Hopf a  $\mu_c = 2$  ( $\omega_{H_1}$ ), 2.35 ( $\omega_{H_3}$ ), 3 ( $\omega_{H_2}$ ) i 3.2 ( $\omega_{H_4}$  i  $\omega_{H_5}$ ), aproximadament. La primera bifurcació, a  $\omega_{H_1}$ , té lloc als dos nodes i crea un parell d'atractors que coexisteixen i estan situats simètricament respecte a l'origen de l'espai de fases. L'evolució temporal per a  $\mu_c = 2.25$  descriu un d'aquests atractors i ja conté oscil·lacions a  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  i  $\omega_4$ . El senyal per a  $\mu_c = 2.5$  descriu un atractor amb dos lòbuls que resulta de la unió dels dos atractors anteriors mitjançant dues homoclíniques simultànies del punt sella. Els punts node ja han patit la segona bifurcació de Hopf a  $\omega_{H_3}$  i ara el senyal inclou oscil·lacions a les cinc freqüències. Per a  $\mu_c = 3.5$  els punts node han patit la tercera bifurcació, a  $\omega_{H_5}$ , mentre que la sella del mig ha patit les bifurcacions a  $\omega_2$  i  $\omega_4$ . L'evolució temporal mostra ara una estructura molt rica que apunta cap a la instabilitat completa del sistema al voltant del trio node-sella-node de punts fixos. Remarquem que l'evolució complexa es basa també en cinc freqüències d'oscil·lació, és a dir,  $N - 1$ , perquè els dos punts node pateixen bifurcacions de Hopf amb els mateixos valors de  $\omega_H$  i  $p_H$ . Això no és conseqüència de la simetria de la funció no lineal i la resta de punts node del sistema es comporten igual.

La figura 2.15 mostra la influència de la divergència del camp vectorial sobre el comportament d'instabilitat completa. En essència es pot veure com la dissipació tendeix a diferenciar les freqüències d'oscil·lació associades amb el node o amb la sella i com regula llur participació en la dinàmica observada. Notem, en particular, l'absència de  $\omega_2$  i  $\omega_4$  per a  $c_1 = 0$  i  $c_1 = 60$ , i el petit vestigi de  $\omega_5$  per a  $c_1 = 3.6\omega_{H_5}$ . Les evolucions que hem representat corresponen a diferents sistemes hexadimensionals que tenen en comú una mateixa funció no lineal, un mateix valor de  $\mu_c$  i uns mateixos llindars  $p_{H_q}$  i freqüències  $\omega_{H_q}$  per a les cinc bifurcacions de Hopf, però difereixen en el valor del coeficient  $c_1$ . Com una de les freqüències d'oscil·lació és clarament major que les altres, la divergència del camp vectorial es pot caracteritzar amb l'equació (A.3) i es pot associar directament a  $c_1$ .

Així doncs, les evolucions de la figura 2.15 corresponen a sistemes de dissipació

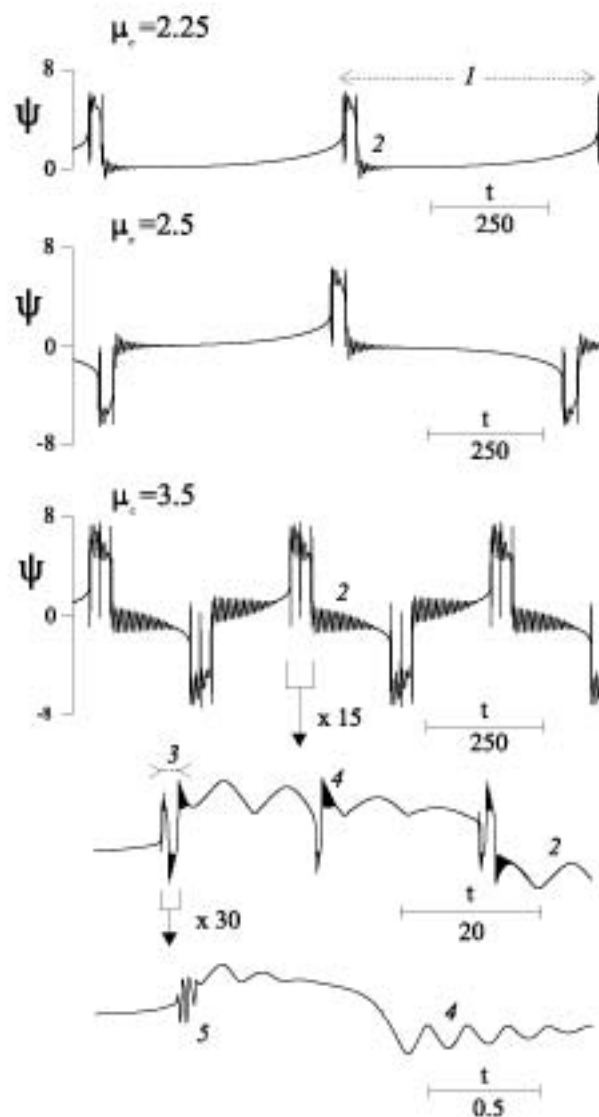


Figura 2.14: Evolucions temporals per a diferents valors de  $\mu_c$  que il·lustren el comportament d'inestabilitat completa per a un sistema de tres punts fixos node–sella–node sorgits d'una bifurcació en forquilla. La funció no lineal és la (A.3) i els diversos paràmetres com a la fig. 2.1.

creixent, desde el cas conservatiu  $c_1 = 0$  fins al fortament dissipatiu de  $c_1 = 3.6\omega_{H_5}$ . Tots els sistemes tenen el mateix diagrama de solució estacionària i la mateixa distribució de valors de  $p$  sobre aquest diagrama. Els punts fixos amb  $p = p_{H_q}$  són no hiperbòlics amb autovalors  $\pm i\omega_{H_q}$ . A l'espai de les  $k_j$  la recta que descriu els punts fixos es mou amb  $c_1$  però, per a  $c_1 \neq 0$ , manté la seva relació qualitativa amb les superfícies  $\{0\}$  i  $\{\pm i\omega\}$ , és a dir, la línia travessa les mateixes regions d'instabilitat i produeix diagrames de branques qualitativament equivalents. Tot això vol dir que tots els sistemes dissipatius pateixen les bifurcacions de Hopf com en el cas de la figura 2.14. En particular, les evolucions que hem representat corresponen al cas  $\mu_c = 3$ , per al qual la parella de punts node ja ha sofert les bifurcacions a  $\omega_{H_1}$  i  $\omega_{H_3}$  i la sella també ha patit ja la bifurcació a  $\omega_{H_2}$ .

El cas conservatiu es comporta de forma diferent. Al límit  $c_1 = 0$  la recta no talla la superfície  $\{\pm i\omega\}$  però hi penetra, així com en regions de degeneracions d'ordre elevat. Això vol dir que els punts hiperbòlics romanen molt no hiperbòlics per rangs molt llargs del paràmetre  $\mu_c$  i no tenen lloc les bifurcacions de Hopf. Concretament, els "punts node" són centres toroidals tridimensionals i el "punt sella" és un centre toroidal bidimensional amb l'afegit de varietats inestables i estables unidimensionals amb autovalors iguals. No hi ha atractors i cada conjunt de condicions inicials duu a una trajectòria particular. En l'exemple de la figura 2.15 la trajectòria evoluciona al voltant d'un dels punts laterals, tot i que també són possibles trajectòries al voltant dels tres punts. En qualsevol cas l'evolució conté només tres freqüències d'oscil·lació i són sempre de l'ordre de  $\omega_{H_1}$ ,  $\omega_{H_3}$  i  $\omega_{H_5}$ .

Els resultats numèrics presentats fins ara corresponen a sistemes que presenten el comportament d'instabilitat completa basats en freqüències realment diferents, això és, al voltant d'un ordre de magnitud entre freqüències consecutives. La figura 2.16 il·lustra com la dinàmica esdevé més irregular quan les freqüències d'oscil·lació esdevenen més properes entre sí. L'evolució de la figura 2.16a s'ha de comparar amb la de la 2.10 per a  $\mu_c = 90$ , perquè les úniques diferències entre les dues situacions són les freqüències de Hopf  $\omega_{H_q}$ , ara relacionades per un factor 3, i el coeficient  $c_1$ , que manté la mateixa relació  $c_1/\omega_{H_5}$  per tal d'aconseguir un nivell de dissipació similar. Igualment, el senyal de la figura 2.16b s'ha de comparar amb el de la 2.15 amb  $c_1/\omega_{H_5} = 1.2$ . Ambdós senyals descriuen l'evolució després d'un temps cinquanta vegades més llarg que el representat, per tal d'evitar efectes dels transitoris. L'es-

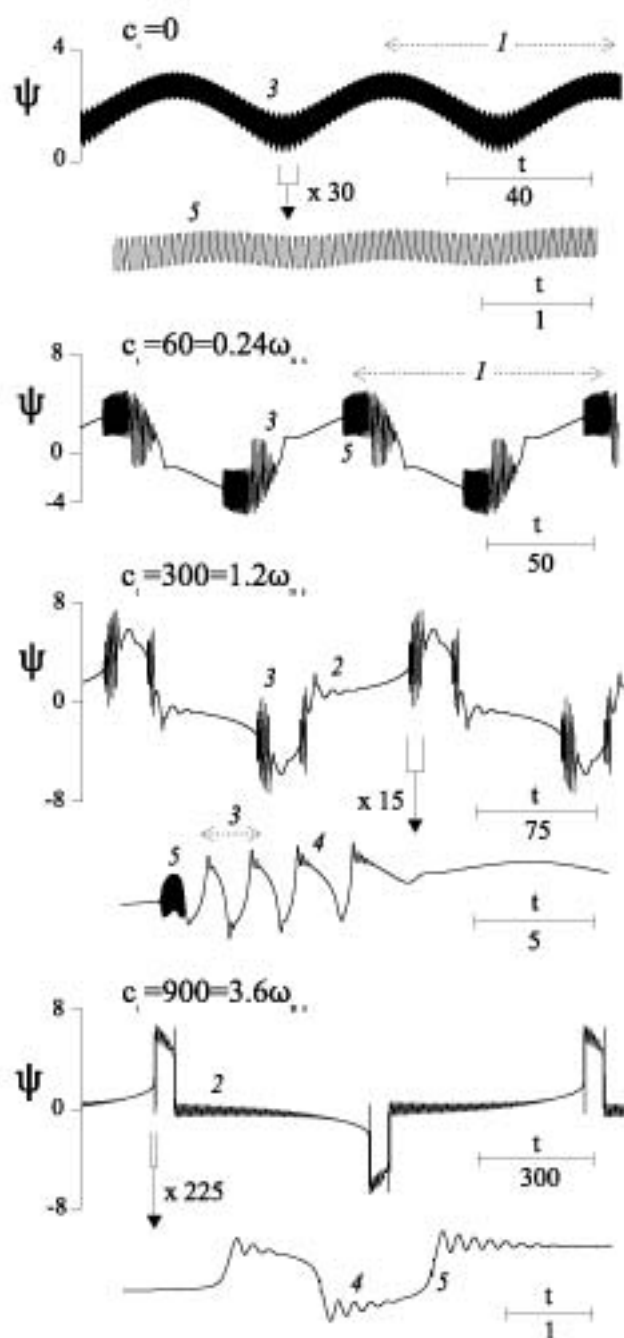


Figura 2.15: Influència del nivell de dissipació sobre les evolucions d'inestabilitat completa. Els senyals corresponen tots al mateix sistema que el de la fig. 2.14, excepte pel que fa al coeficient  $c_1$ , que variem de 0 a  $3.6\omega_{H_s}$ , i  $\mu_c = 3$ . La trajectòria per a  $c_1 = 0$  correspon a les condicions inicials  $x_N = 10^{-4}$  i  $x_{j \neq N} = 0$ . Destaquem les diferents escales temporals de cada cas.

pectre de Lyapunov calcula pel cas (a) és: (0.000848, 0.000414, -0.0159, -0.0989, -0.143, -8.20); i pel cas (b): (0.0271, -0.0005, -0.0330, -0.326, -0.729, -21.88). Per tant el senyal (b) és clarament caòtic, mentres que l'(a) sembla associat a una òrbita quasiperiòdica.

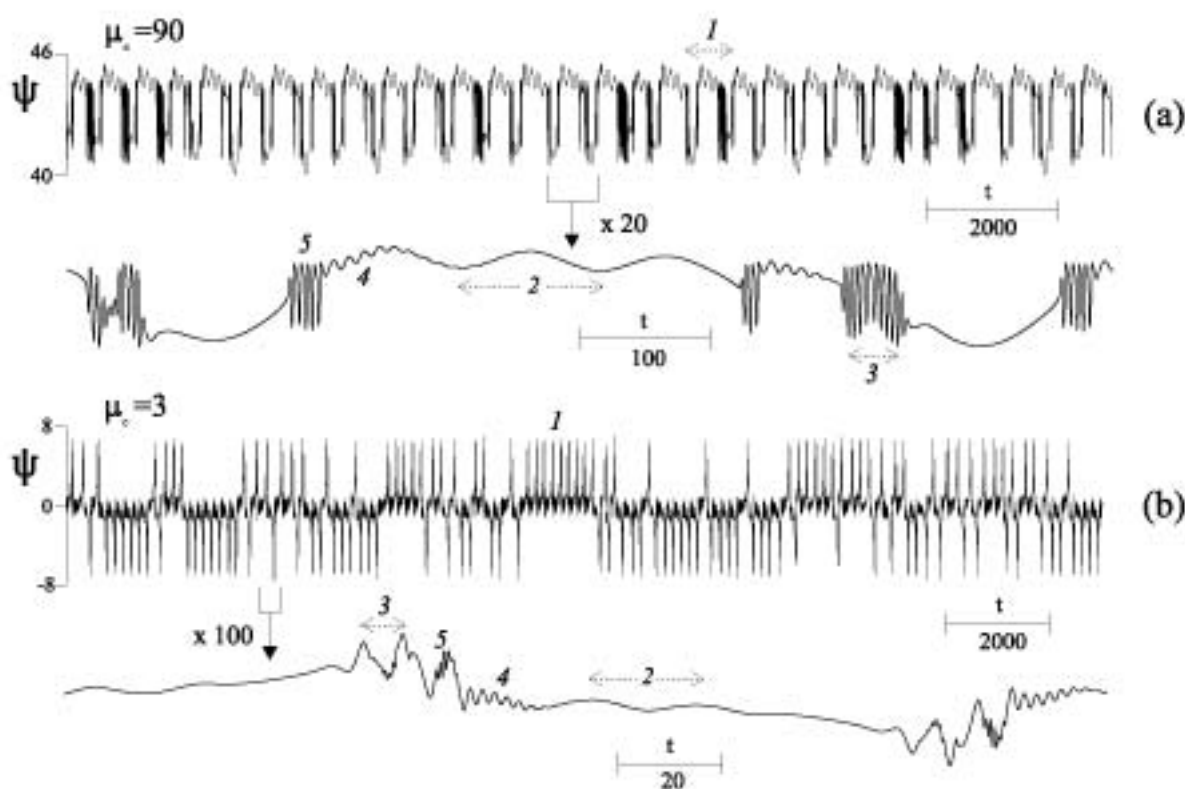


Figura 2.16: Evolucions temporals irregulars en sistemes hexadimensionals i que exhibeixen instabilitat completa a partir d'un conjunt de freqüències d'oscil·lació bastant similars. A tots dos casos  $\omega_{H(q+1)} = 3\omega_{H_q}$ , amb  $q$  d'1 a 4. A (a)  $\omega_{H_1} = 0.02$ ,  $c_1 = 2\omega_{H_5}$ , i la funció no lineal i els valors de  $p_{H_q}$  és igual que a la fig. 2.10. A (b)  $\omega_{H_1} = 0.1$ ,  $c_1 = 1.2\omega_{H_5}$ , i la funció no lineal i els valors de  $p_{H_q}$  són igual que a les fig. 2.13 i 2.14.

Per acabar, val la pena remarcar que els llindars  $p_{H_q}$  es poden fer servir per regular la posició relativa de les diverses bifurcacions de Hopf i la proximitat del sistema a certes degeneracions dels autovalors. L'anàlisi de la seva influència sobre la dinàmica observada podria proporcionar una gran perspectiva sobre el comportament d'instabilitat completa, i és un camí de futura recerca.