

Aquest torus estable creix a mesura que augmentem la potència incident i s'apropa al focus sella extern. D'aquesta forma es crea una dinàmica de tipus Shil'nikov, ara amb tres freqüències: les dues del node i la de la sella. Aquesta freqüència intermèdia de la sella introdueix les noves oscil·lacions que veiem i, justament abans de l'homoclínica, el senyal esdevé aperiòdic ja que mostra un nombre diferent d'aquestes oscil·lacions en els successius passos vora la sella. El procés acaba amb la destrucció de l'atractor a la bifurcació homoclínica i el sistema escapa, en aquest cas, cap a un altre estat oscil·lant a l'altra banda de la separatriu de la sella, tal i com posa de manifest el transitori a 178.2 mW. La part dreta de la figura 2.24 correspon a un dispositiu molt similar però amb una capa de silicó més prima. El sistema genera les mateixes oscil·lacions amb les mateixes freqüències però amb l'ordre d'aparició invertit. Per a potències superiors els dos casos presenten atractors molt similars, com els de 178.1 mW.

En l'espai de paràmetres aquests dos casos d' $N = 4$ corresponen a sistemes localitzats als dos costats d'una bifurcació de codimensió 2 del tipus $\{\pm i\omega_a, \pm i\omega_b\}$, en la qual dues corbes de Hopf del mateix punt fix es creuen. La teoria dels desplegaments universals [21, 18] demostra que poden sorgir també bifurcacions de Hopf secundàries i que, en primera aproximació, les evolucions a dues freqüències sobre el torus estan basades en les freqüències de Hopf del punt fix original. La presència de torus invariants és clara en el cas presentat a l'esquerra de la figura 2.24, però no tant en el cas de la dreta, on les oscil·lacions ràpides apareixen del no res en dos punts ben definits de l'òrbita lenta. Les simulacions numèriques ens proporcionen evolucions molt similars i també ens permeten fer un seguiment continu de les òrbites periòdiques, que indica que les oscil·lacions ràpides apareixen sense cap bifurcació local. La situació és equivalent a la comentada pel cas $N = 3$ per a l'aparició de la freqüència associada a la sella: l'entortolliment del cicle límit al voltant de les varietats inestables de l'ens sella proper. Això ho mostrem a la figura 2.25 on representem un càlcul numèric de les varietats inestables de l'ens sella. En aquest cas tenim un espai de fases de quatre dimensions en el qual un punt fix inicialment estable ha sofert dues bifurcacions de Hopf successives i el cicle límit sella creat en la segona és a la vora de fer-se estable a través d'una bifurcació de Hopf secundària subcrítica. En aquesta situació el cicle límit estable mostra una estructura helicoidal en la qual evoluciona seguint les oscil·lacions del cicle límit sella. El seguiment continu de les òrbites ens

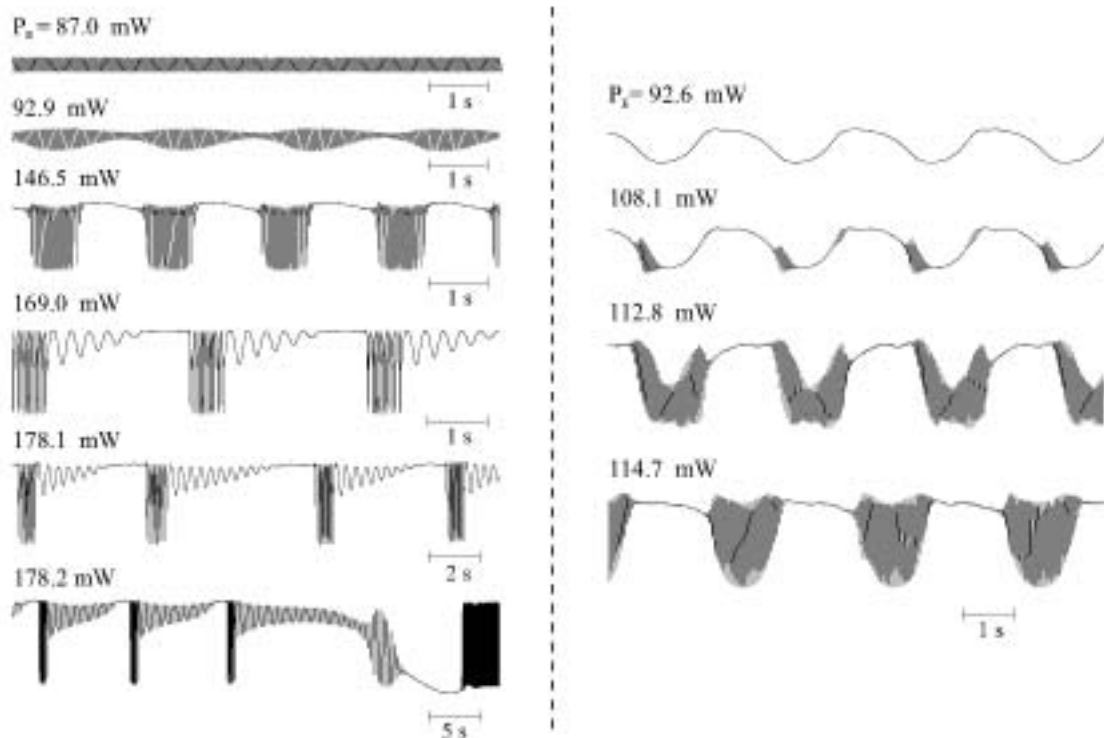


Figura 2.24: Evolucions temporals d'un dispositiu BOITAL quatricapa amb 140, 35, 400 i 305 μm de vidre, silicona, vidre i oli de girasol (esquerra) i un BOITAL idèntic però amb 30 μm de silicona (dreta). Els senyals mostren com les oscil·lacions a dues freqüències associades al torus es veuen deformades per l'ens sella extern i incorporen una tercera freqüència. Per a potències majors els dos senyals mostren el mateix comportament.

permet assegurar que ni l'òrbita estable ni l'òrbita sella han patit cap bifurcació local i, com en el cas tricapa, el moviment helicoidal apareix per una deformació de l'òrbita estable a mesura que variem el paràmetre de control. Cal remarcar que apareix una segona estructura de deformació en un lloc ben definit de l'òrbita, que a la figura 2.25 és marcada amb la lletra "a"; estructura que acabarà unint-se a la primera, tal com observem també als resultats experimentals. Està clar que en la simulació numèrica escollida no observem efectes provocats per l'ens sella veí, el qual és encara lluny de la seva bifurcació de Hopf. No obstant això, augmentant prou el paràmetre de control, podem observar com l'atractor exhibeix una superposició dels dos moviments helicoidals, un associat amb el punt node (ara sella) del qual ha sorgit i l'altre associat a l'ens sella veí, amb el qual patirà, eventualment, una bifurcació homoclínica.

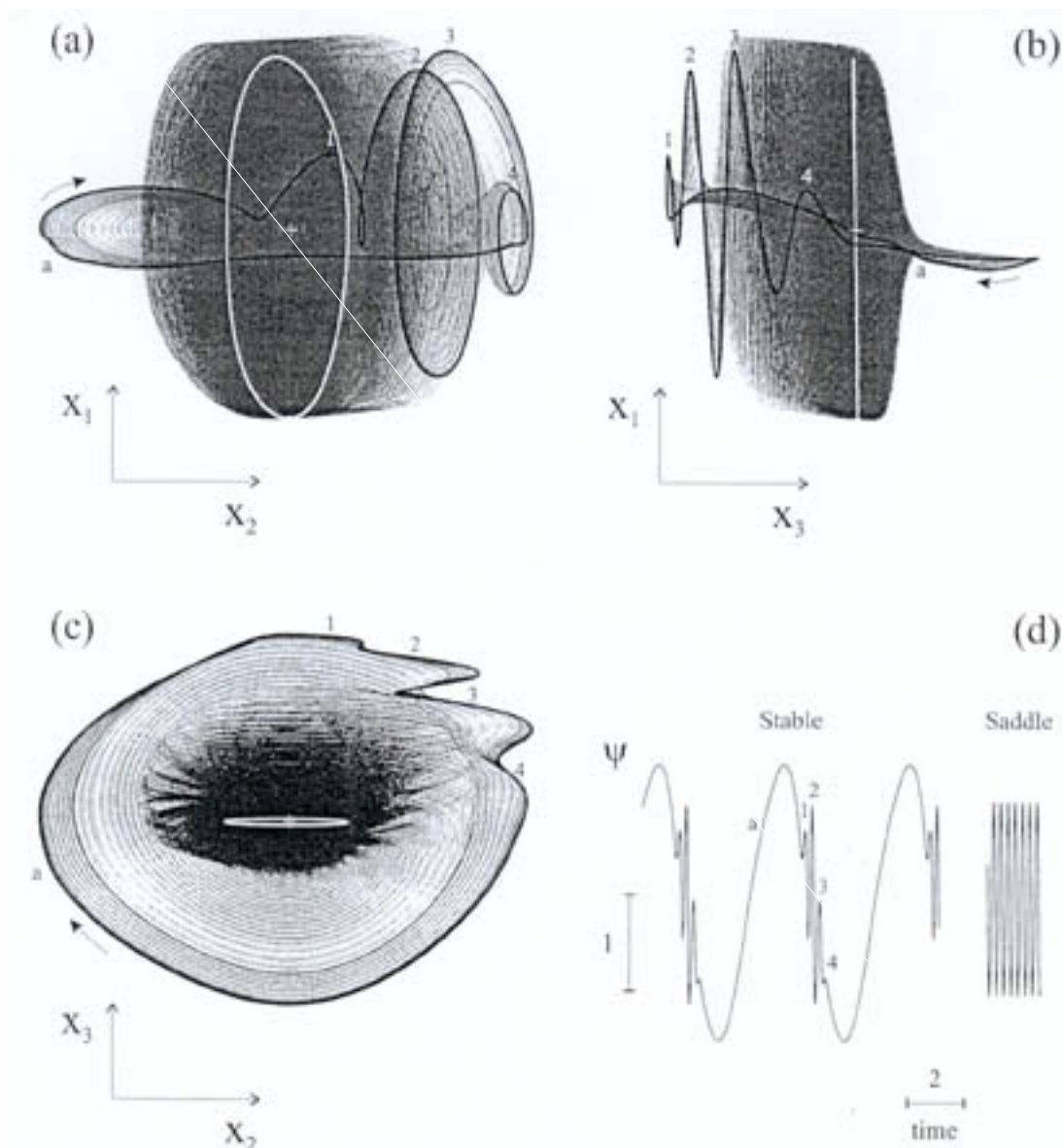


Figura 2.25: Resultats numèrics per a $N = 4$ que mostren la mescla no lineal de dos modes d'oscil·lació sorgits de dues bifurcacions de Hopf successives del mateix punt fix i on la bifurcació torus tindrà lloc sobre l'òrbita sella creada a la segona bifurcació. Les corbes negres i blanques representen respectivament les òrbites periòdiques estable i sella, i la creu blanca el punt fix. Les corbes grises representen la varietat inestable de l'òrbita sella¹¹. (a), (b) i (c) són projeccions sobre plans definits per diferents parells de variables; (d) és l'evolució temporal de les dues òrbites periòdiques. L'etiqueta a indica el lloc on apareixerà una segona estructura helicoidal en augmentar el paràmetre de control. Els càlculs corresponen a $c_q = 50, 438.98, 480.71, 358.22$, $d_q = -17.601, 66.044, -204.46, 358.22$ i amb $\mu_E = 10$. Les bifurcacions de Hopf del punt inicialment estable tenen lloc a $\mu_E = 8.2$ amb $\omega = 1.41$ i a $\mu_E = 9.1$ amb $\omega = 25$; la bifurcació torus de l'òrbita sella tindrà lloc a $\mu_E = 10.3$ amb $\omega = 1.38$.

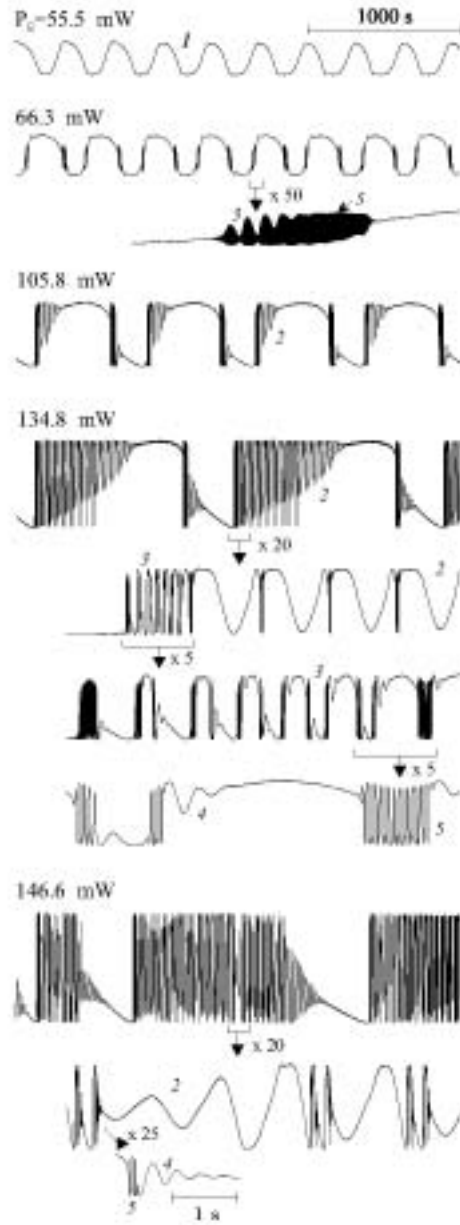


Figura 2.26: Evolucions temporals d'un dispositiu BOITAL amb 140, 35, 400, 180 i 3000 μm de vidre, silicó, vidre, gel òptic i vidre. La dinàmica és hexadimensional perquè el gel introdueix dos graus de llibertat (vegeu text).

La figura 2.26 presenta ja una dinàmica comparable a les que hem vist a les simulacions numèriques de les anteriors seccions. En aquest cas es tracta d'una dinàmica hexadimensional que mostra clarament les cinc freqüències corresponents ($N - 1$). El dispositiu experimental, però, no tenia sis capes sinó cinc, amb la particularitat que una d'elles era de gel òptic. Aquest tipus de materials se suposa que introdueixen no un sinó dos graus de llibertat a través de l'expansió tèrmica i l'efecte termoòptic, i és un comportament típic de materials que produeixen dos efectes de canvi de fase oposats i amb constants de temps diferents [60]. Els períodes bàsics que s'observen a la figura 2.26 són de 310, 23, 2.2, 0.35 i 0.07 s. Les corresponents freqüències ω_j s'indiquen a la figura amb el nombre j . Cal sempre tenir en compte que l'aparició d'oscil·lacions ràpides dins d'una oscil·lació més lenta pot allargar el seu corresponent període.

Els senyals per a potències incidents creixents mostren com apareixen les diferents estructures oscil·latòries. Observem que comencen amb una bifurcació de Hopf supercrítica a ω_1 sobre el punt node, però ben aviat s'afegeixen dues freqüències addicionals, ω_3 i ω_5 , a les estructures laterals que apareixen a cada oscil·lació de ω_1 (vegeu el detall a 66.3 mW). La relació de les noves freqüències amb el node no es pot verificar experimentalment, però sembla clara a partir de tot el que hem comentat a les seccions anteriors. L'evolució a tres freqüències es pot interpretar com un cicle límit estable a ω_1 que és influït per les estructures de sortida de la parella d'òrbites periòdiques sella o, més probablement, per un torus sella (ω_3, ω_5) que se'n deriva. Nogensmenys, la possibilitat d'un torus tres estable no es pot descartar. En qualsevol cas les oscil·lacions a ω_1 , ω_3 i ω_5 semblen clarament associades al punt node i a conjunts límit que se'n deriven. L'aproximació de l'atractor de tres freqüències cap al punt sella es manifesta en primer lloc per l'aparició d'oscil·lacions a ω_2 al cim de les oscil·lacions a ω_1 (vegeu el cas a 105.8 mW). A potències més elevades l'oscil·lació a ω_2 es barreja amb l'estructura (ω_3, ω_5) i comencen a aparèixer algunes oscil·lacions a ω_4 (134.8 mW). L'amplitud uniforme de les oscil·lacions a ω_1 , ω_3 i ω_5 indica que ja s'han produït les corresponents bifurcacions de Hopf, mentre que la convergència de les oscil·lacions a ω_2 i ω_4 suggereix que l'ens sella és un bifocus atractiu amb una varietat inestable unidimensional. El gran nombre d'oscil·lacions a ω_2 ens informa de la proximitat de la bifurcació, mentre que la corresponent a ω_4 sembla, en canvi, molt més llunyana. De fet el senyal a 146.6 mW indica que el punt fix ja ha patit la

bifurcació de Hopf a ω_2 . Això queda clar pels passos esporàdics vora un punt bifocus amb convergència a ω_4 però divergència a ω_2 (vegeu el detall a 146.6 mW). A més, el gran nombre d'oscil·lacions a ω_2 amb amplitud uniforme suggereix la presència del cicle límit sella sorgit de la bifurcació, així com la relativa proximitat de la seva homoclínica. D'aquesta manera és de preveure l'aparició de caos homoclínic d'acord amb els teoremes de Shil'nikov [84] i, de fet, el senyal a 146.6 mW no és tan repetitiu com els corresponents a més baixes potències. No obstant això, el caos no és el fet rellevant d'aquests senyals, sinó el seu grau de complexitat i de robustesa, així com la presència d'una certa autosimilaritat respecte a l'escala temporal.

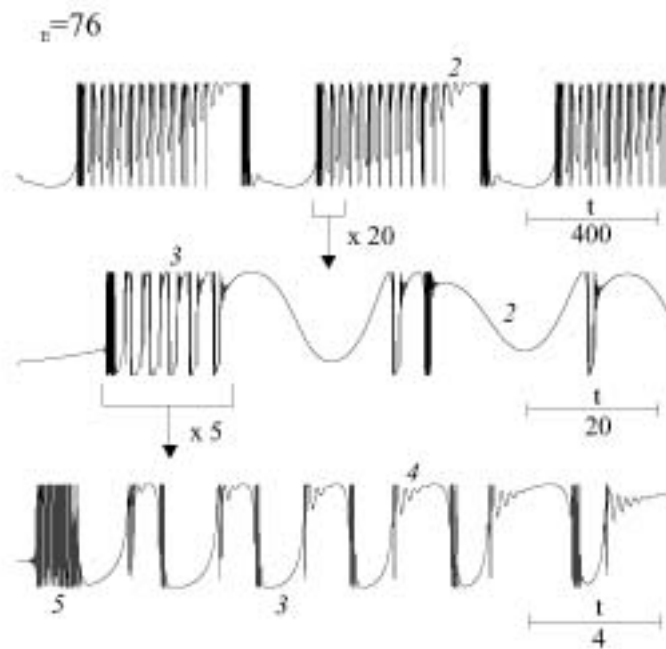


Figura 2.27: Oscil·lacions a cinc freqüències obtingudes numèricament per a $N = 6$ imposant tres bifurcacions de Hopf al node amb freqüències 0.02, 125 i 2.98 i dues a la sella amb 0.25 i 64.9.

La figura 2.27 presenta una simulació numèrica per a $N = 6$. L'estructura del senyal és remarcablement similar al cas de 134.8 mW de la figura 2.26. Els temps característics adimensionals a la simulació són 721, 25, 2.6, 0.26 i 0.05, amb les freqüències angulars corresponents $\omega_j = 0.009, 0.25, 2.4, 24$ i 125, que s'han de comparar amb les freqüències de Hopf. Les simulacions confirmen també que l'atractor evoluciona al voltant d'un punt fix inestable que ha sofert tres bifurcacions de Hopf