

successives als valors de μ_E imposats. Les tres frerqüències de Hopf del node són realment similars a les ω_1 , ω_3 i ω_5 de l'evolució temporal, més si tenim en compte que els valors lleugerament menors es poden atribuir a la presència d'oscil·lacions ràpides intermèdies. A més, l'atractor passa a la vora d'un punt sella que ha sofert una bifurcació de Hopf i està encara lluny de la segona; les seves freqüències són molt similars a les ω_2 i ω_4 de l'evolució. D'aquesta manera és clar que les cinc freqüències observades a l'evolució temporal numèrica estan relacionades amb les bifurcacions de Hopf de la parella sella-node.

Podem obtenir una perspectiva més àmplia si analitzem el comportament d'instabilitat completa d'un sistema de dimensió encara més alta, com l'exemple numèric per a $N = 10$ de la figura 2.28. Hem dissenyat el sistema dinàmic imposant cinc bifurcacions de Hopf al node i quatre a la sella. Per a $\mu_E = 120$, que és el cas representat, el node és totalment inestable, mentre que la sella ha sofert només una bifurcació de Hopf però és molt a la vora de patir les altres tres. L'evolució temporal és realment complexa, mostra la barreja no lineal de nou modes d'oscil·lació, exhibeix una clara autosimilaritat a diverses escales i, a més, les oscil·lacions associades bé al node bé a la sella mantenen el seu paper al llarg de l'escala de similaritat.

Els experiments i les simulacions numèriques mostren que el comportament d'instabilitat completa en els sistemes BOITAL es manifesta, en general, amb senyals com els que hem presentat a les figures anteriors, en els quals les diferents freqüències juguen papers clarament diferenciats i tenen escales temporals relativament diferents. No obstant això, també podem observar experimentalment comportaments complexos qualitativament diferents, tal com també hem vist numèricament (vegeu, per exemple, les figures 2.15 i 2.16). La figura 2.29 mostra un exemple obtingut amb un dispositiu de cinc capes similar al de la figura 2.26 però amb una capa de gel més prima ($160 \mu\text{m}$ en lloc de 180). El senyal conté cinc temps característics de 550, 3.8, 0.7, 0.25 i 0.1 s, i el procés de mescla no lineal produeix una evolució bastant irregular i on el paper de cada oscil·lació no està tan clarament diferenciats.

2.7 Conclusions

Al llarg d'aquest capítol hem verificat que la combinació de moviments oscil·latoris en un sistema dinàmic no lineal pot donar lloc a evolucions temporals complexes

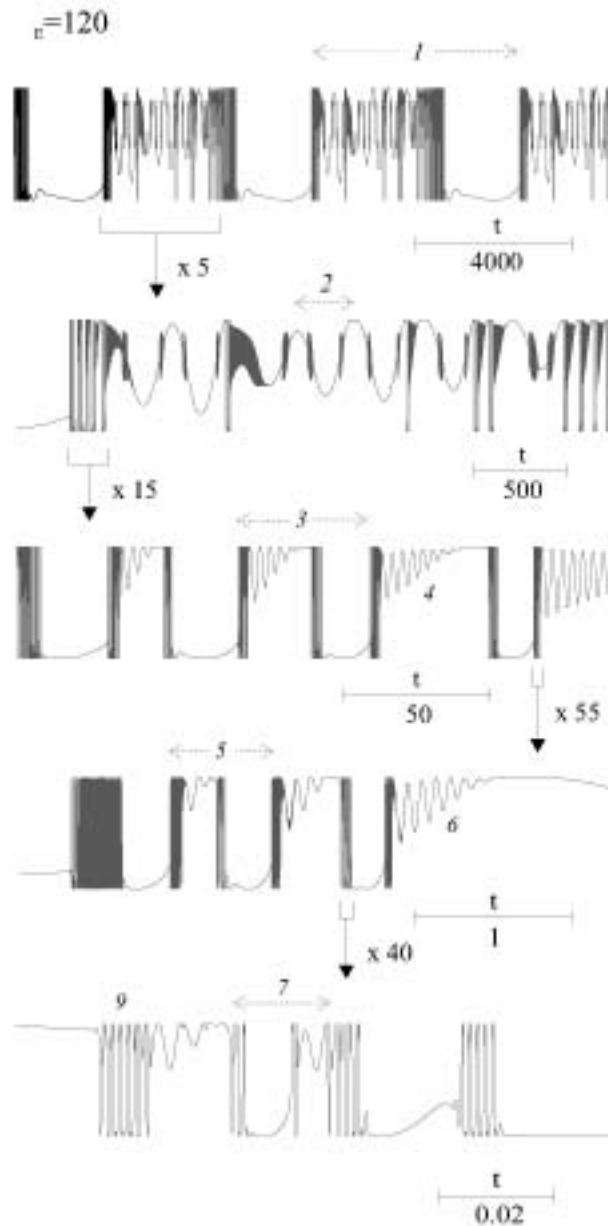


Figura 2.28: Evolució temporal numèrica per a $N = 10$ imposant les cinc freqüències al node de 0.002, 0.2, 12, 350 i 6000, i les quatre a la sella de 0.02, 1.8, 70 i 1500.

d'una forma que recorda la proposta de Landau per a explicar l'origen de la turbulència [36]. Hem trobat aquest comportament en sistemes N -dimensionals capaços d'explotar en gran mesura les capacitats d'instabilitat dels seus punts fixos. Les oscil·lacions sorgeixen associades a bifurcacions de tipus Hopf i la complexitat sorgeix

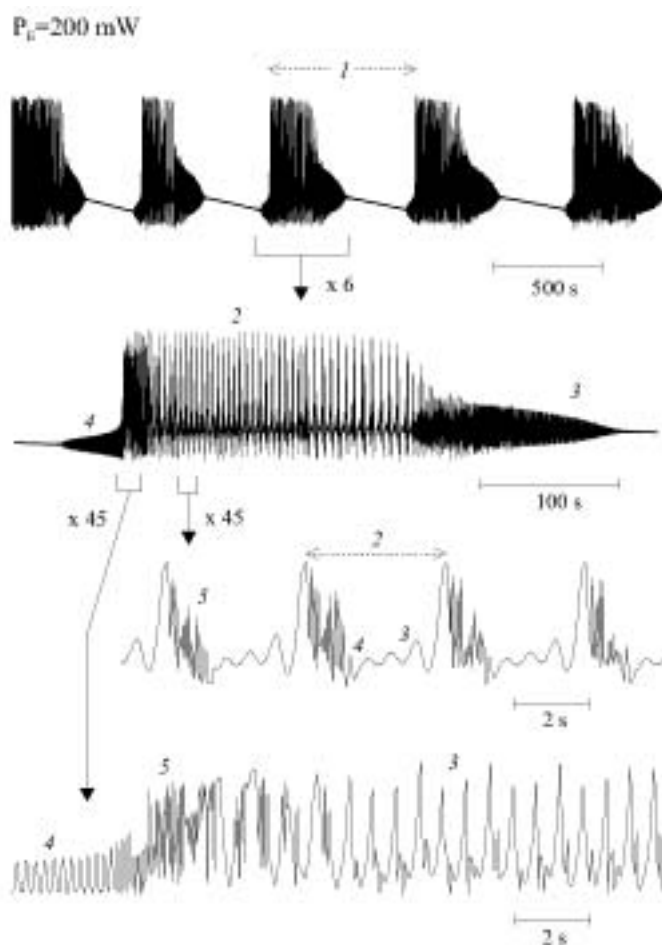


Figura 2.29: Evolució temporal experimental d'un dispositiu d' $N = 6$ que mostra una combinació de cinc modes d'oscil·lació molt diferent de les obtingudes a les figures 2.26–2.28.

en primer lloc, del nombre de diferents modes d'oscil·lació i, en segon lloc, de la diversitat de formes mitjançant les quals els mecanismes no lineals combinen els modes d'oscil·lació. El segon punt marca la diferència essencial amb l'escenari *à la* Landau, ja que els mecanismes de mescla de modes de la dinàmica no lineal són més rics que la simple superposició d'instabilitats oscil·latòries a través de successives bifurcacions torus. A més, poden introduir irregularitat en l'evolució temporal tot afectant de forma complicada les fases relatives i les amplituds dels diversos modes. Un conjunt de punts fixos coexistents pot generar més que les $N/2$ freqüències característiques d'una seqüència de bifurcacions torus. És important recordar que el mecanisme de mescla de modes es produeix a través d'una deformació contínua del flux en zones

particulars de l'atractor, encara que puguin estar acompanyades per seqüències més o menys complicades de bifurcacions. En altres paraules, els sistemes dinàmics no lineals tenen prou mecanismes com per desenvolupar la intuïció de Landau sobre l'emergència d'irregularitat a través de superposicions oscil·latòries. Una altra cosa és si aquesta irregularitat es pot relacionar amb l'origen de la turbulència en fluids, objectiu últim del treball de Landau, però que nosaltres no hem considerat.

Per altra banda, la successió irregular d'ondulacions de temps característics diferents que conforma els senyals d'instabilitat completa es pot repetir regularment i àdhuc de forma estrictament periòdica. Aquest fet indica que un comportament amb un alt grau d'instabilitat representa un camí cap a evolucions complexes independent del caos. De fet rarament hem trobat caos en les nostres evolucions temporals i a mesura que augmentava el nombre de modes d'oscil·lació més pronunciada era l'absència de comportaments caòtics. El grau de complexitat dels senyals d'instabilitat completa es pot emfasitzar fent una comparació que resulti familiar: suposem que les oscil·lacions més ràpides del senyal de la figura 2.13(a) tinguessin un període d'un dia, llavors el temps més llarg, que caracteritza el període, seria d'un miler d'anys, després dels quals el sistema repetiria altra vegada la mateixa seqüència irregular. De fet, la longitud de les seqüències irregulars es pot augmentar arbitràriament suposant sistemes amb la freqüència més lenta cada vegada més petita respecte a les altres. I, evidentment, el grau de complexitat es pot també augmentar considerant sistemes de dimensió més alta amb un gran nombre de freqüències d'oscil·lació. Segurament fóra interessant investigar les propietats de les evolucions irregulars de sistemes totalment inestables, especialment per a dimensions altes, i comparar-les amb les propietats prou conegudes de la dinàmica caòtica.

Un alt grau d'instabilitat de Hopf requereix un gran nombre de variables que participin en els cicles de realimentació del sistema i també l'existència de competència entre aquestes variables. Dues característiques, doncs, que els sistemes BOITAL presenten amb naturalitat i que també poden ser presents en sistemes de naturalesa social, econòmica o biològica, com els que hem comentat al capítol 1. Pel que fa als sistemes BOITAL un punt clau és que el dispositiu ens proporciona un criteri simple i efectiu per escollir el conjunt de paràmetres necessaris per obtenir el comportament d'instabilitat completa. El comportament d'instabilitat completa és un fenomen gros que té lloc en regions grans i contínues de l'espai de paràmetres, mentre que els

fenòmens caòtics s'han de considerar com a una cosa subtil. No obstant això, el caos és molt més general perquè pot aparèixer independentment del grau d'instabilitat; en altres paraules, el caos es troba discontinuament en zones molt estretes de l'espai de paràmetres que, malgrat això, s'estenen per regions molt més grans que les corresponents a la instabilitat completa. Expressat d'una altra manera, una pregunta immediata és si el fenomen és general o, en el seu defecte, fins a quin grau. D'acord amb la nostra interpretació trobem raonable suposar que l'aparició de diverses bifurcacions de Hopf en un cert domini de paràmetres sempre estarà associada amb mecanismes no lineals de mescla de modes. No obstant això la complexitat del procés i les característiques particulars de la dinàmica poden canviar en funció de les no linealitats. Encara una altra qüestió a plantejar-se és fins a quin punt el comportament d'instabilitat completa pot tenir alguna rellevància per a l'estudi de sistemes reals als que s'intenta aplicar el concepte de "sistema dinàmic". La presència de comportaments dinàmics oscil·lants és evident en biologia, economia, sociologia i altres camps, com ja hem comentat. En certs casos, per posar un exemple, en un organisme viu tenen lloc simultàniament processos oscil·latoris a diverses escales temporals. Alguns processos són autònoms, mentre que altres es generen a partir d'interrelacions i mescla d'oscil·lacions [63, 1]. La descripció de tals mecanismes al nivell dels sistemes dinàmics pot involucrar la combinació no lineal d'oscil·lacions associades a conjunts veïns de punts fixos.