
Sistemes acoblats

3.1 Introducció

En aquest capítol passem a discutir el segon dels aspectes relacionats amb la complexitat que hem introduït al capítol 1. Aquest, com havíem apuntat, consisteix a produir el màxim nombre de bifurcacions sella–node de punts fixos, és a dir, crear una xarxa multidimensional de punts fixos en un espai d’alta dimensió. Subsegüents inestabilitats d’aquests punts fixos, principalment bifurcacions de Hopf, poden donar lloc a evolucions temporals complexes, tal com ja s’ha vist al capítol anterior. Això afegeix un nou element al comportament d’inestabilitat completa, que fins ara l’havíem aconseguit només amb una sola parella de punts fixos (un node i una sella) i amb la barreja no lineal de les seves respectives oscil·lacions. La idea és, doncs, aconseguir la barreja de modes de no només dos punts fixos sinó de molts. A nivell teòric la forma d’obtenir tal xarxa de punts fixos, com ja s’ha comentat, és incrementar el nombre de funcions no lineals independents, fet que es tradueix en l’acoblament de sistemes.

Els sistemes no lineals acoblats han despertat un gran interès en els darrers anys per la seva abundància a la natura [86, 56] i perquè ofereixen un model matemàtic molt potent per tal de simular el comportament d'una gran varietat de sistemes d'interès en moltes àrees científiques. Els diversos tipus d'acoblament possibles, la capacitat de variar amb relativa facilitat el nombre de sistemes acoblats, la intensitat de l'acoblament i la connectivitat dels elements, dóna a aquest tipus de sistemes una gran versatilitat. És especialment destacable la capacitat de tenir diversos tipus d'acoblament: acoblament difusiu o no lineal, acoblament instantani o amb retard temporal, acoblament global o entre un cert nombre de veïns propers, ja sigui unidireccional o bidireccional, etc. D'aquesta manera gran quantitat de sistemes reals han estat associats a models matemàtics d'equacions acoblades [65, 83]. Per altra banda, l'estudi dels sistemes acoblats és un camí natural que permet realitzar el pas cap a l'estudi d'estructures espacials contínues i del comportament de la dinàmica espaciotemporal. Cal remarcar, però, que els treballs experimentals de sistemes acoblats són escassos comparats amb els nombrosos estudis teòrics i/o numèrics. Usualment els sistemes acoblats s'estudien mitjançant circuits electrònics o làsers. Davant d'aquests el sistema BOITAL presenta certs avantatges, com la possibilitat de variar molt fàcilment la dimensió del sistema o la d'implementar diversos tipus d'acoblament.

Des d'un punt de vista intuïtiu, quan s'acoblen dos sistemes dinàmics el comportament interessant i novedós, més complex, es trobarà per a un acoblament mitjà, és a dir, és on es podran trobar dinàmiques qualitativament diferents de les dels sistemes independents. De fet podem distingir qualitativament tres casos:

- Quan l'acoblament és molt fort (concepte que caldrà precisar més endavant) el comportament relatiu entre els dos subsistemes és pràcticament inexistent. Els dos subsistemes fan (gairebé) el mateix que un de sol, possiblement de dimensió més alta.
- Quan l'acoblament és molt feble cada subsistema és, gairebé, independent i es comporta pràcticament com si estigués aïllat. La relació entre els dos comportaments és nul·la.
- Quan l'acoblament és "mitjà" és quan hi ha la possibilitat de tenir comportaments nous, apareixen comportaments relatius interessants.

Com veiem, doncs, en els sistemes acoblats és molt important estudiar el comportament relatiu dels dos subsistemes, que és el que ens podrà informar sobre els processos d'acoblament. La visió global, interessant per sí mateixa, ens durà a veure el sistema acoblat com un altre sistema únic de certa dimensió superior, però no ens donarà massa informació sobre el comportament de cada subsistema respecte als altres.

Aquí apareix també el problema típic que hom troba sempre en tractar sistemes acoblats: quan hem de parlar d'un sistema global i quan podem considerar (sub)sistemes separats? Pel que acabem de dir, sembla que podem considerar dos casos extrems: acoblament molt fort i acoblament molt feble, on el comportament relatiu és poc significatiu. Aquests dos casos extrems són, en principi, fàcils d'estudiar (és a dir, no presenten més dificultats que les que ja presentaven els sistemes aïllats, potser de dimensió més alta, per si sols). És, doncs, interessant i de gran importància estudiar el pas d'un extrem a l'altre, per mitjà de quines bifurcacions podem passar d'un cas a l'altre i com sorgeixen els comportaments nous que segurament trobarem per a acoblaments intermedis.

Al capítol anterior hem estudiat un camí cap a comportaments complexos en el cas de la família de sistemes BOITAL, i que sembla ser un mecanisme de caràcter general. Aquest camí, malgrat tot, no és suficient, ja que en el fons només tenim un punt node i un punt sella; tots els altres punts fixos del sistema són qualitativament idèntics als primers i, per tant, no introdueixen noves freqüències. Acoblant diversos sistemes d'alta dimensió podríem aconseguir punts fixos qualitativament diferents que donarien oscil·lacions també qualitativament diferents. Això aportaria una riquesa de modes d'oscil·lació molt superior i la mescla d'aquestes oscil·lacions podria donar lloc a evolucions considerablement més complexes que les obtingudes al capítol 2 si es donen les condicions adients. Malgrat tot, aquest escenari no ha estat encara estudiat per nosaltres, ja que ens hem concentrat en l'anàlisi dels casos més simples d'acoblament, amb dos i tres sistemes de dinàmica bidimensional o tridimensional. No obstant això, un dels camins evidents de futura recerca és precisament seguir per aquest camí: quins comportaments podem obtenir acoblant (com fem en aquest capítol) sistemes de dimensió dinàmica elevada (com els del capítol anterior) i veure si s'obtenen comportaments altament complexos. Realment, els sistemes BOITAL són una eina potent que permet estudiar amb detall l'acoblament de sistemes. En

primer lloc, com ja hem vist, constitueixen un sistema relativament senzill d'implementar, tant a nivell experimental com matemàtic. D'aquesta manera ens serà possible acoblar un nombre arbitrari de sistemes. I, igualment, ens permet introduir diversos tipus d'acoblament: acoblament difusiu (lineal) mitjançant la difusió de la calor entre els dispositius, acoblament no lineal mitjançant la llum reflectida per cada dispositiu, acoblament de sistemes unidimensionals, d'oscil·ladors (periòdics o caòtics), etc.

3.2 Camp vectorial amb una funció no lineal multidireccional

Considerem n sistemes no lineals, cada un N_s -dimensional. Això vol dir que l'espai de fases de cada sistema individual és de dimensió N_s . Per a qualsevol valor finit de l'acoblament l'espai de fases haurà de ser de dimensió $N = N_s \cdot n$. Per altra banda tindrem n funcions no lineals en el sistema, segurament independents, fet que té importants implicacions pel que fa als punts fixos. Considerem, doncs:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \sum_{j=1}^n \vec{b}_j \cdot f_j(\vec{x}; \mu) \quad (3.1)$$

on $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, A és una matriu $N \cdot N$ de constants i \vec{b}_j és un vector d' N components constants. Les f_j són funcions escalars no lineals en \vec{x} i μ representa els paràmetres de la funció no lineal. Els n vectors \vec{b}_j són linealment independents i les f_j també. Aquestes f_j no contenen termes lineals però poden contenir termes inhomogenis (constants). En el fons, l'única diferència amb l'expressió (2.1) és que ara tenim diverses funcions no lineals, indicades a (3.1) mitjançant l'índex j .

Si fem un canvi de base podem aconseguir que la nova base tingui vectors unitaris paral·lels als \vec{b}_j , de manera que tindrem:

$$\vec{z} = B\vec{z} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mu_1 f_1(\vec{z}; \mu) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mu_2 f_2(\vec{z}; \mu) + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \mu_n f_n(\vec{z}; \mu) \quad (3.2)$$

que sempre es podrà fer ja que els \vec{b}_j són linealment independents. Per altra banda la matriu A (o B) ens dóna idea del tipus d'acoblament lineal. Esquemàticament es pot representar per la següent matriu, on cada bloc representa les N_s variables de cada un dels (sub)sistemes:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \circ & \circ & \cdots \\ \square & \blacksquare & \square & \circ & \cdots \\ \circ & \square & \blacksquare & \square & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

si només apareixen els termes diagonals \blacksquare el sistema és no acoblat. Si també apareixen els termes \square tenim acoblament entre primers veïns, i si tota la matriu és, en general, de components no nuls, tindrem un acoblament global. Tot això ens dóna idea de l'acoblament lineal, però no del no lineal. Aquest últim serà donat per la possible mescla de variables dels diferents subsistemes en la funció no lineal.

Per saber com són els punts fixos trobem la solució estacionària:

$$0 = \sum_{j=1}^N B_{ij} z_j + f_i(\vec{z}; \vec{\mu}) \quad \text{per a } i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$0 = \sum_{j=1}^N B_{ij} z_j \quad \text{per a } i = n + 1, \dots, N \quad (3.4')$$

Les darreres equacions ens defineixen $N - n$ hiperplans de dimensió $N - 1$, de manera que els punts fixos estaran localitzats damunt d'un subespai n -dimensional de l'espai de fases N dimensional. La localització damunt d'aquest espai serà donada per les n primeres equacions.

3.3 Sistemes BOITAL acoblats

L'acoblament de sistemes BOITAL és un bon exemple del cas expressable amb l'equació (3.2), en què els vectors \vec{b}_j són independents entre sí. La modelització matemàtica l'hem realitzada per dos camins diferents, que donen resultats qualitativament molt semblants. Un camí és partir de les equacions originals en derivades parcials i reduir-les a un model d'equacions diferencials ordinàries seguint el procediment que ja s'ha fet per als sistemes BOITAL individuals. Aquest procediment

s'ha realitzat només per al cas de sistemes acoblats unidimensionals. L'altre és partir del model en equacions diferencials ordinàries dels sistemes BOITAL individuals i introduir-hi un terme d'acoblament *ad hoc*. Aquest terme d'acoblament inclou un terme de retard temporal que tradueix la velocitat finita de propagació de la calor. Cal fer notar que aquest retard constant no té en compte la forta dispersió de les ones de difusió tèrmica a baixes freqüències i per tant ens proporciona una descripció forçosament limitada del procés de propagació de la calor. Aquest model, però, prové de la seva forma equivalent al model físic. En qualsevol cas la confiança en ambdues modelitzacions prové del seu comportament qualitativament idèntic entre sí (comparació que hem realitzat pel cas d'acoblament de sistemes BOITAL amb $N_s = 1$) i també amb els resultats experimentals.

Descripció del sistema experimental

Podem crear diversos sistemes en una mateixa cavitat interferomètrica Fabry-Pérot tot focalitzant diversos feixos làser separats una certa distància d . Això ens proporciona de manera efectiva diversos dispositius BOITAL que resulten acoblats mitjançant la propagació de la calor d'un dispositiu a l'altre. D'aquesta manera els sistemes tenen els mateixos paràmetres de la cavitat i de l'espaiador, excepte pels desalineaments de la cavitat, que produeixen diferències en la fase inicial ψ^0 entre ambdós sistemes, i pels valors de la intensitat de cada un dels feixos làser, I_e^a i I_e^b .

Els experiments que presentem en aquest treball es van dur a terme amb diversos dispositius unicapa, bicapa i tricapa formats per una pel·lícula de níquel-crom de 6 nm com a mirall absorbent amb reflectivitats interna i externa de 0.23 i 0.17 respectivament i una transmissió de 0.46. El mirall dielèctric està dipositat sobre un substrat de 1000, 400 o 140 μm de vidre (segons el dispositiu utilitzat) i la seva reflectivitat és superior a 0.98. La cavitat és espaiada, precisament, amb la capa de vidre, en la qual l'expansió tèrmica produeix un desplaçament de fase positiu (10^{-5} K^{-1}) i amb oli de girasol, amb gruíxos que van des de 50 μm a 1 mm. El dispositiu és irradiat amb un feix d'un làser d'Ar⁺ de 514.5 nm de longitud d'ona. Les fluctuacions de potència són reduïdes a un 0.1% gràcies a un modulador electroòptic. El feix es divideix en dos amb una làmina 50% i cada un dels dos feixos resultants es focalitza sobre el dispositiu fins a un punt d'unes 50 μm , gràcies a una lent de 50 mm de focal. Les intensitats relatives dels dos feixos incidents, I_E^a i I_E^b , es fixen mitjançant dues

làmines $\lambda/2$ i un divisor polaritzador, mentre que la intensitat total I_E es controla amb el modulador (vegeu figura 3.1).

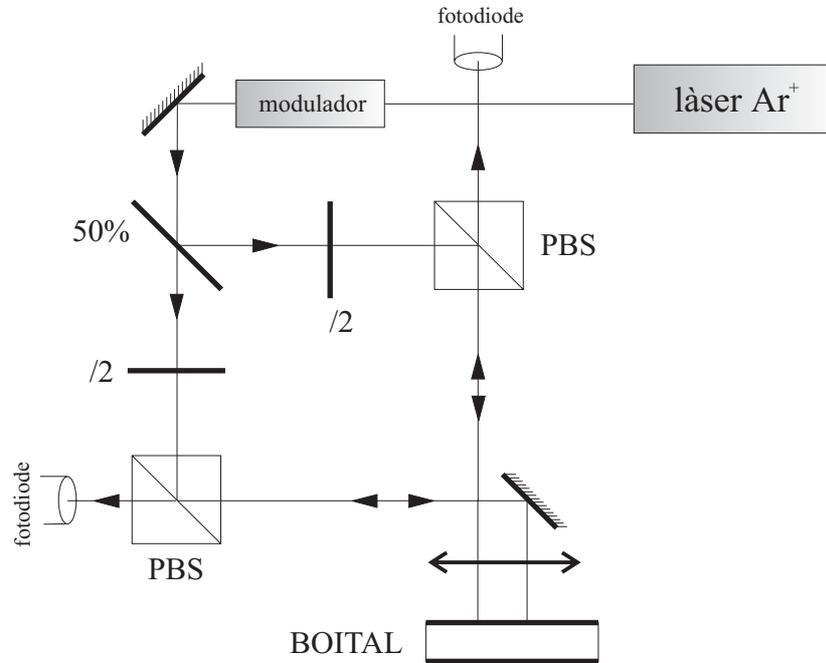


Figura 3.1: Esquema del muntatge experimental usat per a l'estudi de dos dispositius BOITAL acoblats. El muntatge és idèntic per a BOITALs de qualsevol dimensió.

La intensitat d'entrada complex $I_E = I_E^a + I_E^b$, i les intensitats relatives es poden descriure amb el paràmetre γ . Aquest paràmetre es defineix de manera que $I_E^a = \gamma I_E$ i $I_E^b = (1 - \gamma) I_E$. Les intensitats d'entrada controlen el grau de no linealitat, ja que entren en les equacions com un factor multiplicatiu de la funció no lineal $A(\psi)$. La distància d entre els dos (sub)sistemes es pot variar sense modificar l'angle d'incidència amb un mirall mòbil muntat sobre un suport micromètric i es mesura per observació directa a través d'un microscopi. La distància controla l'acoblament, ja que és inversament proporcional a la difusió tèrmica responsable d'aquell. Aquests dos paràmetres, γ i d , doncs, ens permeten controlar amb facilitat la importància relativa entre l'acoblament i la no linealitat, també controlada per la P_E total. No només això, sinó que el paràmetre γ permet un control sobre la simetria. En aquest sentit, la fase inicial ψ^0 també modifica la simetria, però aquest paràmetre és molt menys control·lable. Per obtenir una simetria total hem de fixar γ a 0.5 i llavors canviar lleugerament l'orientació relativa dels dos subsistemes, o bé la inclinació dels

feixos làser, fins obtenir la mateixa solució estacionària, que implica que les dues ψ^0 són iguals. Només en aquest cas la simetria estarà totalment controlada per γ . Per controlar possibles fluctuacions tèrmiques en la temperatura ambiental, tot el dispositiu es troba muntat sobre un sistema termoelèctric que permet estabilitzar la temperatura. A més, aquest termoelèctric ens permet variar també el paràmetre ψ^0 variant la temperatura.

Per tal de realitzar els diversos estudis que presentarem més endavant, vam realitzar diverses escombrades de la intensitat incident total, I_E , a diferents distàncies d i a diferents γ . Vam recollir la intensitat reflectida dels dos dispositius, I_R^a i I_R^b mitjançant fotodiodes a mesura que I_E canviava, així com sèries temporals per a una I_E fixa. Totes les dades es registren en un ordinador a través d'una tarja ADDA per a la seva posterior anàlisi i tractament.

3.4 Solució estacionària en els sistemes acoblats

Per estudiar la solució estacionària en els sistemes BOITAL acoblats és convenient utilitzar sistemes unidimensionals. Malgrat la seva manca de fenòmens dinàmics interessants, ens permeten caracteritzar amb molt detall les solucions estacionàries i l'estructura de punts fixos d'aquest tipus de sistemes, sense tenir la complicació addicional dels fenòmens dinàmics (que seran estudiats en els altres casos, $N_s \geq 2$). A més, també ens permeten observar amb facilitat el procés d'acoblament creixent només fixant-nos en els punts fixos i en l'estructura de salts de commutació (l'únic fenomen dinàmic que permet el sistema). Òbviament podria ser que aquests sistemes, un cop acoblats, fossin capaços d'oscil·lar. En aquest cas hauríem d'estudiar com sorgeixen aquestes noves oscil·lacions, i llavors per estudiar la solució estacionària hauríem de trobar regions on tals oscil·lacions fossin prohibides. El cert és, però, que un sistema format per dos BOITAL unidimensionals acoblats no presenta cap zona d'oscil·lació en l'espai de paràmetres. Per altra banda, hem pogut comprovar com l'estructura de la solució estacionària en funció de les intensitats incidents és qualitativament idèntica per a BOITALs acoblats de qualsevol dimensió, de manera que l'estudi realitzat amb dispositius unidimensionals és extrapolable als casos bidimensionals i tridimensionals. La diferència només es troba en els coeficients que defineixen la solució estacionària, que en casos de dimensió superior presenten una

dependència progressivament més complicada respecte als paràmetres del sistema.

Normalment els sistemes unidimensionals acoblats han estat molt poc estudiats a causa de la seva manca de fenòmens dinàmics rics i interessants. De fet, el camp dels sistemes acoblats sorgeix principalment a partir de l'acoblament d'oscil·ladors (ja Huygens, al segle XVIII, va investigar els fenòmens d'acoblament de dos pèndols) i ha estat aquest el tema que ha seguit predominant, més que no pas els estudis de sistemes generals acoblats, incloent-hi els unidimensionals, les solucions estacionàries i l'estructura de punts fixos. Malgrat tot, de cara al nostre estudi, és molt interessant començar considerant aquests sistemes per poder entendre, a partir de la base, el camí cap a la complexitat. En aquest sentit, les referències bibliogràfiques sobre acoblament de sistemes unidimensionals són escasses. Fins i tot, en el cas de sistemes bidimensionals (oscil·ladors) els estudis sobre les solucions estacionàries són reduïts, per centrar-se sobretot en els fenòmens dinàmics. Bar-Eli [50] ha estudiat numèricament les solucions estacionàries d'oscil·ladors acoblats i destaca especialment el fet de l'increment de punts fixos gràcies a l'acoblament; és gairebé l'únic estudi una mica detallat de solucions estacionàries en sistemes dinàmics acoblats.

Modelització

En el cas que ens ocupem tenim dues funcions no lineals, de manera que podem escriure l'equació del sistema tot reunint la part lineal en un únic terme i cada funció no lineal per separat:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Psi}^a \\ \dot{\Psi}^b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Psi^a \\ \Psi^b \end{pmatrix} + b_1 f_1(\Psi^a) + b_2 f_2(\Psi^b) \quad (3.5)$$

on A és una matriu $2 \cdot 2$ i b_1 i b_2 són vectors bidimensionals. Com en el cas general, escollim una nova base de manera que:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}^a \\ \dot{z}^b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z^a \\ z^b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f_1(\vec{z}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f_2(\vec{z}) \quad (3.6)$$

i la seva solució estacionària és:

$$0 = B_{11}z^a + B_{12}z^b + f_1(\vec{z}; \vec{\mu}) \quad (3.7)$$

$$0 = B_{21}z^a + B_{22}z^b + f_2(\vec{z}; \vec{\mu}) \quad (3.7')$$

En aquest cas veiem que l'espai de fases i el dels punts fixos coincideixen (com ja sabíem), de manera que els punts fixos es distribuïran sobre un pla. Per a $n = 2$ i una sola branca de biestabilitat el màxim de punts fixos possibles és 9.

Com ja hem comentat per al cas general, a l'hora de modelitzar el sistema acoblat hem procedit per dos camins diferents: en primer lloc, partint de les equacions en derivades parcials les hem reduït a un sistema finit d'equacions diferencials ordinàries; en segon lloc, hem construït un model més *ad hoc* basat en un terme de retard temporal. Cal dir que les simulacions numèriques d'ambdós models donen resultats molt coincidents i per això, i donada la major simplicitat del model de retard temporal, utilitzem aquest darrer.

Considerem dos dispositius BOITAL unicapa separats per una distància d i acoblats tèrmicament. Les fases inicials poden ser diferents per a cada un. L'acoblament l'introduïm mitjançant un terme amb una dependència temporal retardada un temps τ . Aquest terme depèn linealment de l'estat de l'altre dispositiu en un temps anterior $t - \tau$.

$$\frac{d\psi^a}{dt} = -b\psi^a + bA(\psi^a)\psi_e^a + c(\psi^b(t - \tau) - \psi^a) \quad (3.8)$$

$$\frac{d\psi^b}{dt} = -b\psi^b + bA(\psi^b)\psi_e^b + c(\psi^a(t - \tau) - \psi^b) \quad (3.9)$$

on els superíndexs a i b fan referència a cada un dels dos dispositius, i els diversos paràmetres s'expressen en funció de paràmetres físics:

$$b = 1 + 2\frac{k}{kg} \quad (3.10)$$

$$c = f\frac{k}{d^2} \quad (3.11)$$

$$\tau = \frac{d^2}{D} \quad (3.12)$$

essent k la conductivitat tèrmica, h la convecció, g el gruix del dispositiu, D la difusivitat i d la distància entre dispositius. Els coeficients c i τ són especialment importants ja que són el terme d'acoblament i el temps de retard. f és un factor constant que relaciona la transferència de calor amb les variacions de fase. La ψ_E , per la seva banda, es relaciona amb la intensitat incident a través del paràmetre β , $\psi_E = \beta I_E$.