

# La variedad de orbitas keplerianas y la teoría general de perturbaciones

Carlos Simó Torres

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

FACULTAD DE CIENCIAS

LA VARIEDAD DE ORBITAS KEPLERIANAS

Y

LA TEORIA GENERAL DE PERTURBACIONES

Memoria presentada por  
Carlos Simó Torres  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias,  
Sección de Matemáticas.

Barcelona , 1974 .

## Contenido

<u>Introducción</u> . . . . .	3
<u>1. Topología del problema de 2 cuerpos</u> . . . . .	5
1.1. El problema de los dos cuerpos	6
1.2. Estructura de $h = \text{cte.} < 0$	9
1.3. Distancia entre órbitas	10
1.4. La variedad de Kepler	12
<u>2. Los parámetros de la variedad kepleriana</u> . . . . .	30
2.1. Interpretación geométrica	31
2.2. Consecuencias del teorema 1.4.4.	35
2.3. Relación con las condiciones iniciales	38
2.4. Estructura del espacio fásico	41
2.5. Ejemplos	44
2.6. Elementos de una trayectoria	48
<u>3. El método clásico en la teoría formal de perturbaciones</u> . . . . .	55
3.1. El método clásico	56
3.2. Obtención de las perturbaciones de orden arbitrario	58
<u>4. El teorema de Lagrange y la comparación de los métodos formales de la teoría de perturbaciones</u> . . . . .	67
4.1. El teorema de Lagrange	68
4.2. Exposición de diversos tipos de métodos	74
4.3. Comparación del método de Lacina con el método de Deprit y con el método clásico	84

<u>5. Perturbaciones del problema de dos cuerpos</u>	97
5.1. Transferencia de órbita de forma óptima y a duración indiferente	98
5.2. Perturbaciones debidas a potencial (conser- vativo)	102
5.3. Resonancia	103
5.4. El método de los promedios y los pasos por resonancia	109
<u>Bibliografía citada</u> . . . . .	115

## INTRODUCCION

La mayor parte de los problemas de la Mecánica Celeste pueden reducirse a un problema perturbado de dos cuerpos. Esta memoria es una contribución a la comprensión y resolución de dichos problemas.

En primer lugar se aborda la estructura del conjunto de órbitas del problema de dos cuerpos sin perturbar. Una adecuada definición de distancia entre órbitas permite, entre otros resultados, explicar las dificultades y singularidades que aparecen en los problemas perturbados en cuanto a las variables escogidas.

Se demuestra a continuación la equivalencia formal de los métodos empleados en la teoría general de perturbaciones de la Mecánica Celeste (válidos en realidad para ecuaciones diferenciales ordinarias). Se explicitan los algoritmos que permiten el cálculo efectivo (mediante recurrencia) para todos los órdenes. En el caso del método clásico de Lagrange, Laplace y Poisson se obtienen las perturbaciones de orden cualquiera en forma explícita de manera directa. Se generaliza el teorema de Lagrange para la inversión de funciones. Su utilización es la base de diversas transformaciones.

Otros conceptos introducidos en el último capítulo parecen tener interés en el estudio de la optimización y en el problema de los denominadores pequeños debidos a la dependencia de las frecuencias sobre el cuerpo racional.

El detalle del contenido de los diversos capítulos se halla en la introducción que precede a cada uno de ellos.

Como norma general se indica cuándo un resultado es conocido, omitiendo la demostración.

Los conceptos de distancia entre órbitas, variedad de Kepler, elementos topológicos, operador de iteración, derivada contractiva, conjunto localmente accesible, desbloqueo de orden  $k$  y condición geométrica de desbloqueo, entre otros, se introducen en esta memoria.

Si de un mismo concepto se citan varias referencias se debe a que en ellas se abordan distintos aspectos del mismo.

Expreso mi agradecimiento al Dr. J.J. de Orús por la acogida que me viene dispensando en su Departamento y por haber querido aceptar la dirección de este trabajo.

## Capítulo 1

TOPOLOGIA DEL PROBLEMA DE 2 CUERPOSIntroducción.

El tema que vamos a tratar en este capítulo cuenta con notables contribuciones en los últimos años. La relación entre el aspecto cualitativo de las soluciones de los sistemas dinámicos (y en particular de los que se encuentran en la Mecánica) y la Topología, se hace patente en Abraham [1], Moser [91], Smale [114], Souriau [115], Sternberg [117], y Weinstein [121] entre otros. Interesantes trabajos acerca de la Topología del problema de 3 y de  $N$  cuerpos se deben a Easton [34], [35] y a Cabral [16].

Sin embargo, el problema que se ha tratado con mayor detalle es, lógicamente, el de los dos cuerpos. Es de particular interés el estudio de la variedad formada por el conjunto de órbitas keplerianas, que cuenta con contribuciones de Bacry et al. [10], Kaplan [62], Moser [91] y Souriau [115] p.155, y con la interpretación de Gagliardi en términos de la regularización KS ([118] p.289).

En (1.4.14) introducimos el concepto de variedad de Kepler, al que se llega compactificando (excepto en lo que hace referencia a la energía) la variedad anterior.

Se generaliza así el trabajo de Moser [91] incorporando todas las órbitas keplerianas (en lugar de considerar sólo las que tienen una energía negativa fija).

Se obtienen coordenadas "naturales" (tanto en términos físicos como topológicos o incluso numéricos) que describen dicha variedad sin singularidades, a diferencia de lo que ocurre con las variables de Kepler, de Delaunay o de Poincaré, y sin tener ligaduras entre los parámetros de la órbita como ocurre con las variables vectoriales.

Se engloban en resultados únicos los trabajos relativos a la Topología del problema de los dos cuerpos de los autores reseñados en el inicio de esta introducción.

Las mayores dificultades se presentan en la definición adecuada de distancia entre órbitas, ya que en general se tiene que los espacios de órbitas no son Hausdorff (basta pensar en órbitas de colisión y en las que discrepan sólo en el sentido de recorrido; ver [115], p.155). La distancia que se utiliza (tanto (1.3.6), como (1.4.16)) es perfectamente natural, geométrica y físicamente.

### §1.1.- El problema de los dos cuerpos.

El problema de los dos cuerpos, considerados puntuales, se reduce a la atracción de una masa puntual móvil (secundario) por una fija (primario) (ver Pollard [99] p.27), de manera que si  $\underline{x}$  es el vector de posición del secundario respecto al primario y  $\mu$  designa el producto  $G(M+m)$ , ( $G =$  constante de la gravitación universal,  $M =$  masa del primario,  $m =$  masa del secundario),  $\underline{x}$  se obtiene como solución de la ecuación diferencial :

$$(1.1.1) \quad \ddot{\underline{x}} + \mu \underline{x} / \|\underline{x}\|^3 = \underline{0} .$$

Convenimos en hacer  $\mu = 1$  de ahora en adelante ya que el valor de esta constante es no significativo.

Sea en general:

$$(1.1.2) \quad \dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y}, t)$$

con  $\underline{y}$  perteneciente al espacio de las fases (o al fibrado tangente a la variedad, en el caso de sustituir el espacio físico  $R^3$  por una variedad diferenciable cualquiera), la ecuación diferencial que rige un determinado fenómeno. Con-



sideraremos las siguientes definiciones :

1.1.3. Definición. - Llamaremos trayectoria por el punto  $(\underline{y}_0, t_0)$  la aplicación  $\text{Try}$  que hace corresponder a cada valor de  $t$  un punto en el espacio fásico que satisface (1.1.2) con la condición  $\text{Try}(t_0) = \underline{y}_0$ . Se entiende que los valores de  $t$  se toman dentro del mayor intervalo  $I$ ,  $\mathbb{R} \supset I \ni t_0$  de manera que en él (1.1.2) satisfaga las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

Supondremos de ahora en adelante que a cada trayectoria se le puede asignar un escalar obtenido evaluando, en un punto cualquiera de la imagen de la trayectoria que pasa por un punto dado, una integral primera destacada que llamaremos energía.

Puede darse el caso de que dos trayectorias distintas tengan la misma imagen y la misma energía (correspondiendo a movimientos en el mismo plano de  $\mathbb{R}^3$  en sentidos contrarios). Convendrá distinguir ambas trayectorias, lo que conseguimos en nuestro problema mediante el vector momento  $\underline{c}$ .

La función energía la representaremos por  $h$  y el módulo del momento por  $c$ .

1.1.4. Definición. - Llamaremos órbita abstracta por el punto  $\underline{y}_0$  la imagen de  $I$  por la aplicación  $\text{Try} \times h \times c$ . Obsérvese que la componente imagen por  $\text{Try}$  se considera como conjunto de puntos en el espacio fásico.

1.1.5. Definición. - a) Entendemos por órbita la proyección de la órbita abstracta sobre el espacio fásico (designamos por  $pr_1$  esta aplicación proyección). En un problema general efectuaremos la proyección sobre la variedad diferenciable en que se desarrolla el fenómeno estudiado.

b) Llamamos hodógrafa a la proyección de la órbita abstracta en el espacio de las velocidades (siendo  $pr_2$  la proyección correspondiente).

1.1.6. Definición. - Entenderemos por órbita kepleriana (tanto abstracta como no) la que corresponda a una trayectoria solución de (1.1.1). Descartamos la solución trivial  $\underline{x} = \underline{o}$  (constante).

1.1.7. Definición. - Llamaremos órbita abstracta de colisión  $O_c$  de (1.1.1) la que verifique que  $pr_1(O_c)$  contiene al primario.

A las soluciones de (1.1.1) les corresponden órbitas abstractas que se proyectan en el espacio físico en elipses, parábolas ó ramas de hipérbola, según que  $h$  sea  $< 0$ ,  $= 0$ ,  $> 0$ , respectivamente, y siempre en planos que contienen al primario ([99] p.2,5). En los casos hiperbólico y elíptico se tiene

$$(1.1.8) \quad h = -\frac{1}{2a}$$

siendo  $a$  el semieje real o mayor (respectivamente), conviniendo en que  $a < 0$  en el caso hiperbólico.

Eventualmente las órbitas son rectilíneas, correspondiendo a órbitas abstractas de colisión. Existen los tres tipos de órbitas de colisión; en el caso elíptico la órbita es un radio de la esfera de velocidad nula; en los otros dos casos son semirectas, correspondiendo en el infinito velocidad nula o positiva según se trate de órbita parabólica o hiperbólica.

En el caso de las órbitas de colisión entendemos que ésta es elástica y que la trayectoria está definida para tiempos anteriores y posteriores al choque.

Si  $h \geq 0$  las órbitas son no acotadas.

Si la energía es negativa todas las trayectorias son periódicas. El periodo es sólo función de la energía, como ocurre con todo sistema hamiltoniano que posea exclusivamente trayectorias periódicas (véase Gordon [45]).

### §1.2.- Estructura de $h = \text{cte.} < 0$ .

1.2.1. Teorema (Moser).- Si  $h = \text{cte.}$  es negativo, la subvariedad del espacio de las fases en que la energía toma dicho valor constante es homeomorfa al fibrado tangente unitario de  $S^n$  (supuesto estudiado el problema de dos cuerpos en dimensión  $n$ ). El flujo hamiltoniano se aplica en el flujo geodésico (métrica inducida por la de  $R^{n+1}$ ).

1.2.2. Nota.- El resultado obtenido por Kaplan en 1941 para  $n = 2$  [62] discrepa ligeramente por no tener en cuenta las órbitas de colisión, que son precisamente las que compactifican  $R^2$  pasándolo a  $S^2$ .

Demostración : Basta asociar a cada órbita su hodógrafa y construir la antiimagen de la misma por la proyección estereográfica sobre  $S^n$ . Las geodésicas por el polo de dicha proyección corresponden a las órbitas de colisión. Véase [91] para los detalles.

Se puede demostrar asimismo (Souriau [115] p.155, Moser [91]) que si asociamos a cada órbita (dentro de la variedad con energía  $h = \text{cte.} < 0$ ) un punto, es decir, si identificamos todos los puntos de una órbita (con las salvedades mencionadas después de (1.1.3)), se obtiene  $S^2$  en el caso de dimensión 2 y  $S^2 \times S^2$  en el caso de dimensión 3 (véase también Stiefel-Scheifele [118] p.288).

Nuestro primer objetivo consiste en estudiar qué ocurre cuando se incorporan todas las órbitas keplerianas. Para ello necesitamos algunas cuestiones previas.

### §1.3.- Distancia entre órbitas.

1.3.1. Definición.- Sea  $E$  un espacio métrico siendo  $d$  la distancia y  $\mathcal{P}(E)$  el conjunto de las partes de  $E$ . Sea  $a \in E$ ,  $B \in \mathcal{P}(E)$ ,  $B \neq \emptyset$ . Definimos

$$\underline{d}(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b) .$$

Si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A, B \neq \emptyset$ , definimos

$$\hat{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \underline{d}(a, B) ,$$

y como  $\hat{d}$  no es simétrica, hacemos  $\bar{d}(A, B) = \hat{d}(A, B) + \hat{d}(B, A)$ . A esta función en  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  la llamamos métrica de Hausdorff (Kelley [64] p.131, Michael [84]).

1.3.2. Proposición.- a) Si  $d$  es una distancia en  $E$ ,  $\bar{d}$  es una pseudodistancia en  $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ .

b) Si  $\mathcal{P}_c(E)$  designa las partes cerradas de  $E$ ,  $\bar{d}$  es una distancia en  $\mathcal{P}_c(E) - \{\emptyset\}$ . (Ver Abraham [1] p.243, Dieudonné [31] p.66).

Vamos a justificar que no es conveniente utilizar la métrica de Hausdorff para expresar la distancia entre dos órbitas keplerianas.

En efecto : Sean  $R, \varepsilon > 0$  arbitrarios. Si una órbita  $\mathcal{O}$  no está acotada, aunque otra órbita  $\mathcal{O}'$  permanezca a distancia  $d$  de  $\mathcal{O}$  menor que  $\varepsilon$  dentro de la bola centrada en el origen y radio  $R$ , puede ser  $\bar{d}$  no acotada

si las órbitas se "separan" fuera de la bola considerada. Sin embargo parece deseable tener una distancia tal que en el caso considerado no sólo esté acotada, sino que sea pequeña. Por otra parte la interpretación geométrica de la distancia entre órbitas será más sencilla si trabajamos con distancias entre las órbitas reales en lugar de hacerlo con las abstractas. Lo anteriormente expuesto sugiere la siguiente

1.3.3. Definición. - Dadas dos órbitas keplerianas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$ , sean  $pr_1(\mathcal{O})$ ,  $pr_1(\mathcal{O}')$  sus proyecciones en el espacio físico,  $B'_n$  la bola cerrada de radio  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) con centro en el origen;

$$\mathcal{O}_n = pr_1(\mathcal{O}) \cap B'_n, \quad \mathcal{O}'_n = pr_1(\mathcal{O}') \cap B'_n$$

llamamos

$$(1.3.4) \quad d_n(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = d^*(\mathcal{O}_n, \mathcal{O}'_n) \quad \text{y} \quad \bar{d}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} d_n(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$$

Nótese que  $\mathcal{O}_n$  u  $\mathcal{O}'_n$  pueden ser vacías; en este caso las sustituimos por  $B'_n$  en (1.3.4).

1.3.5. Proposición. -  $\bar{d}$  es una pseudodistancia en el conjunto de las órbitas keplerianas.

La demostración es inmediata observando que  $\bar{d}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2n}{2^n} = 4$ , que cada  $d_n$  es pseudodistancia y que si

$\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  son dos órbitas de colisión hiperbólicas con la misma semirecta soporte,  $\bar{d}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = 0$ , y basta que  $h_{\mathcal{O}} \neq h_{\mathcal{O}'}$  para que  $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}'$ . Análogamente dos órbitas idénticas recorridas en sentido contrario estarían a distancia  $\bar{d}$  nula.

Advirtamos que puede definirse  $\bar{d}$  en un espacio métrico cualquiera, y que no es equivalente en general a tomar la

distancia de Hausdorff entre conjuntos cerrados en un espacio en el que la distancia se ha convertido en otra equivalente acotada.

1.3.6. Definición.— Sean  $\Theta$ ,  $\Theta'$  dos órbitas keplerianas,  $h_{\Theta}$ ,  $h_{\Theta'}$  y  $\underline{c}_{\Theta}$ ,  $\underline{c}_{\Theta'}$  sus energías y momentos respectivamente.

Definimos

$$(1.3.7) \quad D(\Theta, \Theta') = \bar{d}(\Theta, \Theta') + |h_{\Theta} - h_{\Theta'}| + \mathcal{K}(\underline{c}_{\Theta}, \underline{c}_{\Theta'}) ,$$

en donde  $\mathcal{K}$  se obtiene a partir de los extremos de  $\underline{c}_{\Theta}$  y  $\underline{c}_{\Theta'}$  tal como  $\bar{d}$  se ha obtenido a partir de  $\Theta$  y  $\Theta'$ .

1.3.8. Proposición.—  $D$  define una distancia en el conjunto de las órbitas keplerianas.

Basta tener en cuenta (1.3.5), la observación que la sigue, y el hecho de ser  $|h_{\Theta} - h_{\Theta'}|$  y  $\mathcal{K}(\underline{c}_{\Theta}, \underline{c}_{\Theta'})$  pseudo-distancias.

Obsérvese que así hemos dotado al conjunto de las órbitas keplerianas de una estructura de espacio métrico "natural" atendiendo a consideraciones físicas del problema. Otro procedimiento ([91]) consiste en establecer una biyección con un cierto espacio métrico y dotar a las órbitas de la topología inducida, que no tiene por qué tener un significado físico. Además hasta la actualidad sólo se habían considerado biyecciones con subconjuntos de órbitas keplerianas.

#### §1.4.— La variedad de Kepler.

Un procedimiento trivial, simplemente explicitando un homeomorfismo, nos dará la estructura del conjunto de las órbitas keplerianas.

Posteriormente se hará una observación que permitirá llegar a una definición natural de variedad kepleriana con una estructura topológica sencilla.

Un simple cálculo prueba el siguiente

1.4.1.Lema.- a) Sea  $d$  la distancia del foco a la directriz de la cónica solución de (1.1.1) y  $h$  su energía. Entonces se tiene para la excentricidad el valor

$$(1.4.2.) \quad e = \sqrt{h^2 d^2 + 1} + hd = (\sqrt{h^2 d^2 + 1} - hd)^{-1}$$

(la primera fórmula es más adecuada para hallar  $e$  si  $h > 0$  y la segunda si  $h < 0$ ). Esta expresión es válida para los casos límite : órbitas de colisión ( $d = 0$ ) y órbitas circulares ( $d = \infty$ ).

b) si  $q$  es la distancia del foco al periastro :

$$e = 1 + 2hq \quad , \quad d = 2q(hq + 1)/(2hq + 1) \quad , \quad q = ed/(1 + e).$$

1.4.3.Lema.- La directriz y la energía determinan la órbita solución de (1.1.1) supuesto que ésta no sea de colisión.

Demostración : Por no ser de colisión, la directriz no pasa por el primario. Luego junto con éste define el plano de la órbita. En éste el eje de la cónica es perpendicular a la directriz (eventualmente ésta está en el infinito para el caso de órbita circular). Entonces  $h$  y  $d$  determinan  $a$  y  $e$  en virtud de (1.1.8.) y (1.4.1.).

A continuación obtendremos el teorema fundamental de este capítulo, cuya larga prueba no es más que un conjunto de comprobaciones.

1.4.4.Teorema.- El conjunto de las órbitas keplerianas provisto de la distancia  $D$  es homeomorfo a

$$\mathcal{P} = S^2 \times S^2 \times \mathbb{R} - \left\{ (\underline{a}, -\underline{a}, h) \mid \underline{a} \in S^2, h \geq 0 \right\}$$

con la métrica inducida por la de  $\mathbb{R}^7$ . (El símbolo  $\mathcal{P}$  se usa en razón de ser éste el espacio que "parametriza" las órbitas keplerianas).

Demostración : Designaremos por  $\mathcal{O}$  el conjunto de las órbitas keplerianas. Vamos a definir una aplicación

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{O}$$

y probaremos que es biyectiva y bicontinua. Descomponemos la demostración del teorema en varias partes :

Definición de  $\phi$  :

Sea  $p = (\underline{a}, \underline{b}, h) \in \mathcal{P}$  con  $\underline{a}, \underline{b} \in S^2$ ,  $h$  va a significar siempre la energía de la órbita. Si  $\underline{a} = \underline{b}$  hacemos corresponder a  $p$  una órbita de colisión sobre la semirrecta soporte de ambos vectores y con energía  $h$ .

Si  $\underline{a} \neq \underline{b}$ , sean  $\underline{c}' = \frac{\underline{a} - \underline{b}}{\|\underline{a} - \underline{b}\|}$  ;  $\underline{a}' = -\underline{b}$  ;  $\Pi_{\underline{c}'}$  el plano perpendicular a  $\underline{c}'$  pasando por el primario y  $d'$  la intersección de la perpendicular a  $\underline{a}'$  por el extremo de  $\underline{c}'$  con  $\Pi_{\underline{c}'}$ . (\*).

Tomamos como directriz en  $\Pi_{\underline{c}'}$  la recta por  $d'$  perpendicular al plano definido por  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ .

En virtud de (1.4.3.),  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$  determinan una órbita única.

Observemos que si el ángulo entre  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  es  $\psi$ , entre  $\underline{c}'$  y  $\underline{a}'$  es  $(\pi - \psi)/2$ .

(\*) En realidad basta que el paso de  $\underline{a}' \in S^2 - \{\underline{c}'\}$  a  $d'$  sea un homeomorfismo. Por ejemplo, se hubiera podido escoger la proyección estereográfica. Se ha definido tal como se indica para facilitar la posterior interpretación geométrica (§2.1).



En el caso particular de que  $\underline{b} = -\underline{a}$  la órbita en cuestión es circular si  $h < 0$ . (Ver 1.4.14.).

Obsérvese también que  $(\underline{b}, \underline{a}, h)$  corresponde en el espacio a la misma órbita que  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$ , pero recorrida en sentido contrario.

La aplicación entre órbitas y puntos de  $S^2 \times S^2$  para  $h = \text{cte.} < 0$ , definida en [118] p.289, puede prolongarse a toda  $h < 0$ , pero deja de tener sentido si  $h \geq 0$ .

#### Inyectividad de $\phi$ :

Sean  $\phi(p_1) = \phi(p_2)$ ,  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ . Si las órbitas son idénticas  $h_1 = h_2$ . Si son de colisión  $\underline{a}_1 = \underline{b}_1$  y  $\underline{a}_2 = \underline{b}_2$ , pero por ser la misma la semirrecta soporte  $\underline{a}_1 = \underline{a}_2 \implies p_1 = p_2$ . Si no son de colisión está definido el plano en que se hallan las dos órbitas en el espacio físico, lo que implica  $\underline{c}'_1 = \underline{c}'_2$  (no puede ser  $\underline{c}'_1 = -\underline{c}'_2$  pues el sentido de recorrido sería opuesto). Por otra parte, si no son circulares (en cuyo caso la directriz está en el infinito, o sea  $(\pi - \psi)/2 = 0 \implies \underline{a}_i = -\underline{b}_i$ ,  $i = 1, 2$  y como  $\underline{c}'_1 = \underline{c}'_2$  se implica  $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$ ), existe eje de la cónica, lo que determina el plano en que se encuentran  $\underline{a}_i, \underline{b}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Por ser las directrices idénticas  $d'_1 = d'_2 \implies \underline{a}'_1 = \underline{a}'_2 \implies \underline{b}_1 = \underline{b}_2$ , que junto con  $\underline{c}'_1 = \underline{c}'_2 \implies p_1 = p_2$ .

#### Exhaustividad de $\phi$ :

Si la órbita  $\mathcal{O}$  es de colisión con soporte la semirrecta  $\lambda \underline{u}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\underline{u} \neq \underline{0}$ , definimos  $\underline{a} = \underline{b} = \underline{u}/\|\underline{u}\|$ , y se tiene  $\phi(\underline{a}, \underline{b}, h) = \mathcal{O}$ .

Si  $\mathcal{O}$  no es de colisión, puede ser circular o no. Si es circular en un plano normal a  $\underline{u}$  ( $\underline{u} \neq \underline{0}$ , tomado de forma que el sentido de recorrido sea directo respecto a  $\underline{u}$ ), sean  $\underline{a} = -\underline{b} = \underline{u}/\|\underline{u}\|$ . Trivialmente  $\phi(\underline{a}, \underline{b}, h) = \mathcal{O}$ .

Si no es circular, sea  $\underline{c}'$  unitario ( $\neq$ ), perpendicular al plano de la órbita y definido de forma que el sentido de recorrido de dicha órbita sea directo respecto a  $\underline{c}'$ . Existe eje de la cónica y en él el periastro. Sea  $\underline{q}$  el vector de posición del mismo ( $\neq$ );  $\underline{q}' = -\underline{q}/\|\underline{q}\|$ ;  $d$  la distancia del primario a la directriz,  $d \in (0, \infty)$ . Calculamos  $\alpha = \text{arc.ctg } d$ ,  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Si tomamos

$$(1.4.5.) \quad \underline{a} = \underline{c}' \cos \alpha + \underline{q}' \sin \alpha, \quad \underline{b} = -\underline{c}' \cos \alpha + \underline{q}' \sin \alpha$$

se comprueba inmediatamente que  $\phi(\underline{a}, \underline{b}, h) = \emptyset$ .

#### Continuidad de $\phi$ :

Consideraremos separadamente los tres tipos de órbitas.

a) Caso elíptico: Si  $h = k < 0$  la órbita  $\emptyset$  está acotada. Sea  $D^*(\emptyset, \emptyset') = D(\emptyset, \emptyset') - \bar{d}(\emptyset, \emptyset') + d^*(\emptyset, \emptyset')$ , (ver 1.3.7.). Es inmediato que  $D^*$  es equivalente a  $D$  sobre las órbitas con  $h < k/2$ .

Consideremos la bola

$$\{\emptyset' \in \emptyset \mid D^*(\emptyset, \emptyset') < \varepsilon < k/2\}.$$

Imponemos  $|h - h'| + \mathcal{K}(\underline{c}_{\emptyset}, \underline{c}_{\emptyset'}) < \varepsilon/2$ . (ver 1.3.6).

Bastará, por tanto, que  $d^*(\emptyset, \emptyset') < \varepsilon/2$ . Si  $\emptyset$  y  $\emptyset'$  no están en un mismo plano, se podrá pasar del plano  $\Pi_{\emptyset}$  al  $\Pi_{\emptyset'}$  mediante giro alrededor de su intersección, de ángulo  $\psi = \text{arc.cos}(\underline{c}'_{\emptyset} \cdot \underline{c}'_{\emptyset'})$ . Si  $\emptyset$  es de colisión la recta alrededor de la cual hacemos el giro es la perpendicular al soporte de  $\emptyset$  contenida en el plano  $\Pi_{\emptyset}$ . (Si  $\emptyset'$  también es de colisión no hacemos giro por estar ya en un mismo plano).

( $\neq$ )  $\underline{c}'$  es colineal con  $\underline{c}$ .

( $\neq$ )  $\underline{q}'$  es colineal con  $\underline{e}$ .

Sea  $\sigma'_1$  la imagen de  $\sigma'$  por el giro inverso del definido. Supuesto que  $\sigma$  y  $\sigma'_1$  no son circulares, llevemos el eje de  $\sigma'_1$  a coincidencia con el de  $\sigma$ . Esto define una nueva cónica  $\sigma_2$ . Como  $\omega, \omega_1^*$  (argumentos de los periastrós) están definidos, basta que  $|\omega' - \omega| < \xi/32a^*$  para que tengamos que probar sólo que  $d^*(\sigma, \sigma_2) < \xi/8$ .

Sea ahora  $\sigma_3$  la órbita correspondiente a efectuar una homotecia de  $\sigma_2$  y con el mismo semieje que  $\sigma$ :

$$d^*(\sigma_2, \sigma_3) = 2|a - a_2|(1 + e_2) \leq 4|a - a_2|, \quad a_2 = a_1 = a'.$$

Basta que  $|a - a'| < \xi/64$  (lo cual se traduce en una restricción de los valores de  $h'$ ) para que sólo quede por probar que

$$d^*(\sigma, \sigma_3) \leq \xi/16.$$

Si  $E, E'$  designan las anomalías excéntricas,  $e, e'$  las excentricidades, se tiene para  $x \in \text{pr}_1 \sigma, x_3 \in \text{pr}_1 \sigma_3$ :

$$x = a \begin{pmatrix} \cos E - e \\ (1 - e^2)^{1/2} \sin E \end{pmatrix}, \quad x_3 = a \begin{pmatrix} \cos E' - e' \\ (1 - e'^2)^{1/2} \sin E' \end{pmatrix},$$

(tomadas las componentes en el plano común y como primer eje el común a las cónicas).

$$\inf_{E' \in [0, 2\pi]} d(x, x_3) \leq a |\text{arc. cos } e - \text{arc. cos } e'| \implies$$

$$d^*(\sigma, \sigma_3) \leq 2a |\text{arc. cos } e - \text{arc. cos } e'|$$

Observemos que no se puede hallar otra cota superior de  $d^*(\sigma, \sigma_3)$  menor que la dada y válida para todos los posibles valores de  $e$  y  $e'$ .

Luego si

$$(1.4.6.) \quad \cos(\min(\pi/2, \text{arc. cos } e + \xi/128a^*)) \leq e' \leq \\ = \cos(\max(0, \text{arc. cos } e - \xi/128a^*)),$$

y se cumplen las hipótesis anteriores, se tendrá

$$d^*(\theta, \theta') < \varepsilon/2 .$$

Veamos ahora qué condiciones debe cumplir  $p'$  tal que  $\theta(p') = \theta'$  para que  $D^*(\theta, \theta') < \varepsilon$ .

En primer lugar si  $\theta$  no es de colisión debemos buscar condiciones sobre  $\underline{a}'$  y  $\underline{b}'$  tales que garanticen que el ángulo de las normales a las órbitas sea menor que  $\psi$ , (o que el ángulo entre  $(\underline{c}')'$  y  $\underline{a} = \underline{b}$  sea mayor que  $\pi/2 - \psi$ ). En segundo lugar hay que ver qué condiciones sobre  $\underline{a}'$  y  $\underline{b}'$  hay que imponer para que el ángulo entre  $\underline{a} + \underline{b}$  y  $\underline{a}' + \underline{b}'$  sea menor que  $\psi/2$  (supuesto  $\theta$  no circular).

Esta condición asegurará que los vectores dirigidos hacia el periastro de las órbitas  $\theta$  y  $\theta'$  forman ángulo menor que  $\psi/2$  y por tanto también es menor que  $\psi/2$  el ángulo entre los periastrós de  $\theta$  y  $\theta_1$ .

Por último hay que encontrar condiciones a imponer a  $\underline{a}'$ ,  $\underline{b}'$ ,  $h'$  para que  $e'$  satisfaga (1.4.6.).

Sea  $\gamma$  tal que  $\cos \gamma = \underline{a} \cdot \underline{b}$  ( $\times$ ). (Si  $\cos \gamma = 1$ , basta que  $\underline{a} \cdot \underline{a}'$ , y  $\underline{a} \cdot \underline{b}'$  sean mayores que  $\cos \psi$ ). Hallaremos  $\beta$  tal que

$$\underline{b} \cdot \underline{b}' > \cos \beta , \quad \underline{a} \cdot \underline{a}' > \cos \beta$$

garanticen la primera de las condiciones mencionadas :

$$\frac{(\underline{a} - \underline{b}) \cdot (\underline{a}' - \underline{b}')}{\|\underline{a} - \underline{b}\| \cdot \|\underline{a}' - \underline{b}'\|} > \cos \psi .$$

Simplemente se tiene :

---

( $\times$ ) El punto entre 2 vectores denota producto escalar. Usaremos indistintamente la notación  $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a} \cdot \underline{b}$ .

$$\frac{(\underline{a} - \underline{b}) \cdot (\underline{a}' - \underline{b}')}{\|\underline{a} - \underline{b}\| \cdot \|\underline{a}' - \underline{b}'\|} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}' + \underline{b} \cdot \underline{b}' - \underline{a} \cdot \underline{b}' - \underline{a}' \cdot \underline{b}}{\|\underline{a} - \underline{b}\| \cdot \|\underline{a}' - \underline{b}'\|} >$$

$$> \frac{2 \cos \beta - 2 \cos(\gamma - \beta)}{2 \sin \gamma/2 \cdot 2 \sin(\gamma/2 + \beta)} = \frac{\text{sen}(\gamma/2 - \beta)}{\text{sen}(\gamma/2 + \beta)}$$

que es mayor que  $\cos \varphi$  si . . . .

$$(1.4.7.) \quad \text{tg } \beta < \text{tg } \gamma/2 \cdot \text{tg}^2 \varphi/2 \quad .$$

Análogamente para la segunda condición debe tenerse :

$$\frac{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a}' + \underline{b}')}{\|\underline{a} + \underline{b}\| \cdot \|\underline{a}' + \underline{b}'\|} > \cos \varphi/2 \quad ,$$

que se traduce fácilmente en

$$(1.4.8.) \quad \text{tg } \beta < \text{ctg } \gamma/2 \cdot \text{tg}^2 \varphi/2 \quad .$$

Sean  $e'_1$  y  $e'_2$  los extremos posibles en la variación de  $e'$  :

$$e'_1 \leq e' \leq e'_2 \quad .$$

Como que según (1.4.2.) :

$$e = \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha} - h \cos \alpha} = \mathcal{K}(h, \alpha) \quad ,$$

existen entornos  $\mathcal{U}_1$  de  $h$  y  $\mathcal{U}_2$  de  $\alpha$  tales que

$$h \in \mathcal{U}_1 \quad , \quad \alpha \in \mathcal{U}_2 \quad \implies \quad e' \in [e'_1, e'_2] \quad ,$$

ya que el denominador no es nunca nulo si  $0 > \varepsilon/2 > h$  ,  
 $\alpha \in [0, \pi/2)$ . Sean  $\mathcal{U}_2 = (\alpha_0, \alpha_1)$  ,  $K_\alpha = \min(|\alpha_0 - \alpha|, |\alpha - \alpha_1|)$  .

Basta que se cumpla

$$(1.4.9.) \quad h \in \mathcal{U}_1 \quad , \quad \underline{a} \cdot \underline{a}' > \cos K_\alpha \quad , \quad \underline{b} \cdot \underline{b}' > \cos K_\alpha$$

para que se satisfaga la última condición. Esto acaba la prueba de que  $\emptyset$  es continua si  $\Theta$  es de tipo elíptico.

b) Caso parabólico : Dado  $\xi$  y tomando  $|h'| < \xi/2$ ,

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \sum_{n > n_0} 2^{-n} d_n^*(\Theta, \Theta') < \xi/4$  , con lo que para tener

$D(\Theta, \Theta') < \xi$  basta que  $\sum_{n \leq n_0} 2^{-n} d_n^*(\Theta, \Theta') < \xi/4$  , pero

esta distancia en la bola de radio  $n_0$  es equivalente a  $d_{n_0}^*$  . Luego para un cierto  $\eta > 0$  habrá que probar que

existe un entorno de  $p$  ( $\emptyset(p) = \Theta$ ) en  $\emptyset$  que se aplica por  $\emptyset$  en puntos de  $\Theta$  a distancia  $d_{n_0}^*$  de  $\Theta$  menor que  $\eta$  .

Para lo que hace referencia a plano de la órbita y periastro procedemos como en el caso anterior, sustituyendo  $a^*$  por  $n_0$  y  $\xi/4$  por  $\eta$  , y definiendo análogamente  $\Theta'_1$  y  $\Theta_2$  .

Sea  $\Theta_3$  una órbita con la misma energía que  $\Theta_2$  y el mismo periastro que  $\Theta$  (y, naturalmente, en el mismo plano y con el mismo eje). Basta probar que la podemos escoger de modo que

$$d_{n_0}^*(\Theta, \Theta_3) < \eta/4 \quad , \quad d_{n_0}^*(\Theta_2, \Theta_3) < \eta/4 \quad ,$$

para tener demostrada la continuidad en el caso de ser  $\Theta$  parabólica. Sean  $q$  y  $q'$  las distancias al periastro de  $\Theta$  y  $\Theta'$ . En virtud de (1.4.1.)  $e = 1 \pm 2hq$  . Si  $\Theta'$  es elíptica el paso de  $\Theta_2$  a  $\Theta_3$  acarrea una variación de  $e$  sin variación de  $a$  . Por lo visto anteriormente en este caso la función :

$$e \longrightarrow d_{n_0}^*(\Theta_2, \Theta_3)$$

es continua. Si  $\Theta'$  es hiperbólica se verá al estudiar el

caso  $\Theta$  hiperbólica. Sea  $\Theta'$  parabólica. Trivialmente en este caso  $d' = 2q'$ . Las órbitas  $\Theta_2$  y  $\Theta_3$  son homotéticas de razón  $q/q'$  y basta que ésta se halle en

$$\left( \frac{n_0 - \eta/8}{n_0}, \frac{n_0}{n_0 - \eta/8} \right) \quad \text{para que} \quad d_{n_0}^*(\Theta_2, \Theta_3) < \eta/4.$$

Si  $q = 0$  (colisión parabólica) bastará que  $q' < < \min(n_0, \eta^2/128q)$ .

Para finalizar el caso parabólico hay que garantizar  $d_{n_0}^*(\Theta, \Theta_3) < \eta/4$ . Si  $\Theta$  es de colisión ( $q = 0$ ) basta que  $h > -1/n_0$  para que  $d_{n_0}^*(\Theta, \Theta_3) = 0$ .

Si  $\Theta$  no es de colisión, por ser  $q$  ( $q \neq 0$ ) idéntico en  $\Theta$  y  $\Theta_3$ , la continuidad de la solución de (1.1.1) respecto al parámetro  $\| \underline{v}_q \|$  (velocidad en el periastro), asegura  $d_{n_0}^*(\Theta, \Theta_3) < \eta/4$ .

Traducido lo dicho anteriormente a condiciones sobre  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$  digamos que las del tipo (1.4.7) y (1.4.8) permanecen.

Si  $\Theta'$  es elíptica la condición (1.4.9) también sirve, pues aunque  $h = 0$ , se tiene  $\alpha \neq 0$ . Para  $\Theta'$  parabólica bastará recordar que el paso

$$\alpha \longrightarrow d \longrightarrow q$$

es continuo.

En cuanto a  $\| \underline{v}_q \|$  recordemos que, fijado  $q$ , el paso  $h \longrightarrow \| \underline{v}_q \|$  es continuo (suponemos  $q \neq 0$ ).

c) Caso hiperbólico: Escogido  $n_0$  como en el caso parabólico y con las mismas consideraciones que anteriormente respecto a plano de la órbita y periastro, bastará que  $d_{n_0}^*(\Theta, \Theta_2) < \eta/2$ . Como en el caso elíptico tomamos  $\Theta_3$  con la misma excentricidad que  $\Theta_2$  e idéntica  $h$  que  $\Theta$ .

El paso de  $\theta_2$  a  $\theta_3$  es una homotecia cuya razón  $h'/h$  se hallará (con  $h'$  conveniente) dentro del intervalo

$$\left( \frac{n_0 - \eta/8}{n_0}, \frac{n_0}{n_0 - \eta/8} \right).$$

Si  $\theta$  es de colisión con  $h = k > 0$ , dado que la ecuación de  $\theta_3$  se escribe

$$(2hx - e)^2(e^2 - 1) = 4h^2y^2 + e^2 - 1,$$

se tiene

$$|y| < \frac{\sqrt{((2hn_0 + e)^2 - 1)(e^2 - 1)}}{2h}$$

y como que esta función es continua en  $h > k/2$  y nula en  $e = 1$ , existen  $\mathcal{U}_h$ ,  $\mathcal{U}_e$  tales que  $h' \in \mathcal{U}_h$ ,  $e' \in \mathcal{U}_e$  implica

$$d_{n_0}^*(\theta, \theta_3) < \eta/4.$$

Si  $\theta$  no es de colisión  $e > 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Sea  $e' \in [e - \delta/2, e + \delta/2]$ . Cortemos las dos hipérbolas por una recta paralela al eje  $X$ . Si  $x_\theta$ ,  $x_{\theta_3}$  designan las abscisas en una y otra hipérbolas, se tiene:

$$x_{\theta_3}(x_\theta, e') = \frac{\sqrt{\frac{e^2 - 1}{e'^2 - 1} [(2xh_\theta - e)^2 - 1]} + 1 + e'}{2h}$$

y, claro está,  $x_{\theta_3}(x_\theta, e) = x_\theta$ .  $x_{\theta_3}$  es uniformemente continua en  $[0, n_0] \times [e - \delta/2, e + \delta/2]$ . Por tanto existe  $\nu$  tal que  $|e' - e| < \nu \implies |x_{\theta_3} - x_\theta| < \eta/8$ , es decir  $d_{n_0}^*(\theta, \theta_3) < \eta/4$  q.e.d.

Utilizando ahora para  $e$  la expresión (ver 1.4.2.)



$$e = \bar{\chi}(h, \alpha) = (\sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} + h \cos \alpha) / \sin \alpha,$$

que es continua si  $h > 0$ ,  $\alpha \in (0, \pi/2]$ , se obtienen trivialmente condiciones análogas a (1.4.9.). Lógicamente hay que imponer además las del tipo (1.4.7) y (1.4.8). Esto acaba la prueba de la continuidad de  $\phi$ .

Continuidad de  $\phi^{-1}$ :

Sea  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta \mid \phi(p) = \theta$ . Dentro de la bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $p$  se hallan los puntos  $p'$  que satisfacen

$$(1.4.10) \quad |h' - h| < \varepsilon/2, \quad \underline{a} \cdot \underline{a}' > \cos \varepsilon/4, \quad \underline{b} \cdot \underline{b}' > \cos \varepsilon/4.$$

Veamos que  $\exists \delta \mid D(\theta, \theta') < \delta \implies d_{\mathcal{P}}(p, p') < \varepsilon$  siendo  $p' \mid \phi(p') = \theta'$  y  $d_{\mathcal{P}}$  la distancia en  $\mathcal{P}$ . Bastará comprobar que se cumple (1.4.10).

Obviamente si  $I$  es un intervalo cerrado cualquiera de  $\mathbb{R}$ , por ser  $S^2 \times S^2 \times I = K$  compacto, bastará probar que  $\phi^{-1}$  es continua en  $\mathcal{P} - \overset{\circ}{K}$ , por ejemplo, para órbitas con energía

$$h > k > 0 \quad \text{ó} \quad h < -k.$$

a) Caso elíptico: Es suficiente trabajar con  $d^*(\theta, \theta')$ , ( $\times$ ). Supongamos que  $\theta$  no es de colisión. Si  $\theta$  es circular, basta que

$$|h - h'| < \min(\varepsilon/2, |h|/2), \quad \delta < \min(-\varepsilon/16h, -1/12h, \varepsilon/192h^2).$$

En efecto, para que  $\underline{a}, \underline{a}'$  y  $\underline{b}, \underline{b}'$  formen ángulo menor que  $\varepsilon/4$  es suficiente que las normales a las órbitas formen ángulo menor que  $\varepsilon/8$  y que el ángulo para la órbita  $\theta'$  sea menor que  $\varepsilon/8$ , es decir, que  $\text{arc.ctg } d' < \varepsilon/8$ , que equivale a

( $\times$ ) Nótese que si  $k$  es suficientemente grande, el término  $\mathcal{H}(\underline{c}, \underline{c}')$  de (1.3.7) no importa, ya que  $c \in (2|h|)^{-1/2}$ .

$$\frac{1 - e'^2}{e'} > -2h' \operatorname{ctg} \frac{\xi}{8}$$

Se tiene  $-2h' < -3h$ , y si escribimos

$$|a - a'(1 - e')| < \delta, \quad |a - a'(1 + e')| < \delta$$

se deduce  $|a - a'| < \delta$  y por tanto  $a'e' < 2\delta$ , o sea  $e' < 2\delta/a'$ . Si  $\delta < -1/12h$ ,  $e' < (-1/6h)/(-1/3h) = 1/2$ ,

lo que implica  $\frac{1 - e'^2}{e'} > \frac{3/4}{e'}$ , y por tanto verificamos que

$$-2h' \operatorname{ctg} \frac{\xi}{8} < \frac{-8}{3h\xi} < \frac{-1}{8h\delta} < \frac{3a'/4}{2\delta} < \frac{3/4}{e'} < \frac{1 - e'^2}{e'}$$

Si  $\Theta$  es de colisión es suficiente que se cumpla que el ángulo entre la dirección de la colisión y el apoastro de  $\Theta'$  sea menor que  $\xi/8$  y que  $\alpha \geq \pi/2 - \xi/8$ . Para lo primero basta que  $\delta < \xi/16a$ . Para lo segundo, dado que se tendrá  $a' \sqrt{1 - e'^2} < \delta$  y podemos limitar  $h'$  de modo que  $|h - h'| < |h|/4$ ,

$$e'^2 > 1 - (\delta/a')^2 > 1 - (5h\delta/2)^2.$$

Para que  $\alpha \geq \pi/2 - \xi/8$ , debe cumplirse  $1 - e'^2 \leq -\xi h'e'/4$ . Si  $\delta < \min(-1/12h, \sqrt{-3\xi/500h})$  se tendrá en virtud de

$$|2a - a'(1 + e')| < \delta,$$

que

$$a'e' > |2a - a'| - \delta,$$

y como

$$a' = -1/2h' < -2/3h,$$

se tiene

$$a'e' > -1/3h - (-1/12h) = -1/4h \implies e' > 1/5.$$

Luego

$$1 - e'^2 < \delta^2/a'^2 < \frac{-3\xi}{500h} / \left(-\frac{1}{2 \cdot 5h/4}\right)^2 = -\frac{3\xi h}{80} < -\frac{3\xi h e'}{16} < -\frac{\xi h'e'}{4}.$$

Examinemos ahora el caso  $e \in (0,1)$ .

Sea  $\alpha$  el ángulo entre  $\underline{a}'$  y  $\underline{c}'$  correspondiente a la órbita  $\Theta$  y  $\alpha'$  el de la  $\Theta'$ . Sea  $\nu$  una cota del ángulo entre las normales entre los periastrós y de  $|\alpha - \alpha'|$ . De (1.4.5) se obtiene inmediatamente que se cumplen las dos últimas condiciones de (1.4.10), si  $\cos^2 \nu - \sqrt{5} \sin \nu > \cos \xi/4$ , para lo que basta con que  $\nu < \xi^2/100$ , por ejemplo. Si

$$(1.4.11) \quad \delta < \frac{1}{4} a(1-e) \sin \nu$$

se cumple la condición relativa a las normales a las órbitas.

Por (1.4.1) se tiene  $\alpha = \text{arc.ctg} \frac{a(1-e^2)}{e}$  que es función continua de  $a, e$ , si  $e \in (0,1)$ . Por tanto existen  $\mathcal{U}_e, \mathcal{U}_a$  tales que  $e' \in \mathcal{U}_e, a' \in \mathcal{U}_a \implies$

$$(1.4.12) \quad |\alpha' - \alpha| < \nu.$$

Sea  $e' = e + \Delta e, a' = a + \Delta a$ . La distancia entre las órbitas verifica

$$\delta > |a(1+e) - a'(1+e')| = |a\Delta e + \Delta a(1+e+\Delta e)|.$$

$\Delta a$  está acotado (y por tanto  $a' \in \mathcal{U}_a$ ) si acotamos  $\Delta h$  convenientemente, en virtud de (1.1.8).

En cuanto a  $\Delta e$ :  $|\Delta e| < (\delta + 2|\Delta a|)/a$  y basta con acotar  $\delta$  y de nuevo  $\Delta a$ . Así se cumplirá (1.4.12).

Por último vamos a acotar el ángulo entre los periastrós. Para simplificar el razonamiento consideramos  $\Theta$  y  $\Theta'$  coplanarias, habida cuenta de (1.4.11), y una transformación idéntica a la efectuada en el inicio de la prueba de la continuidad de  $\theta$ , reduce el problema a este caso.

Sea  $\Theta_1$  una órbita obtenida de  $\Theta$  variando sólo  $a$ ;  $\Theta_2$  obtenida de  $\Theta_1$  variando sólo  $e$ :

$$(1.4.13) \quad d^*(\Theta, \Theta') \geq d^*(\Theta_2, \Theta') - d^*(\Theta, \Theta_1) - d^*(\Theta_1, \Theta_2);$$

$d^*$  es función continua de  $a$  (órbitas homotéticas) y

asimismo lo es de  $e$  (órbitas coaxiales del mismo semieje mayor). Por tanto, por (1.4.13)  $\exists U_a, U_e$  tal que si  $a' \in U_a, e' \in U_e \implies d^*(\theta, \theta') > \delta/2$ , siendo  $d^*(\theta_2, \theta') = \gamma$ . Veamos que si el ángulo entre periastrós es mayor que cierto  $\omega$  será  $d^*(\theta_2, \theta')$  mayor que cierto  $\gamma$  (lo que llevará a un absurdo si escogemos  $\delta < \gamma/2$ ).

Sea  $E$  una elipse y  $A$  el apoastro de la elipse obtenida de la anterior con un giro de ángulo  $\omega$ . Se obtiene fácilmente

$$d(A, E) > 4(e^2 + e) \sin^2 \frac{\omega}{2} \implies d^*(\theta_2, \theta') > 8(e^2 + e) \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Tomando  $\delta$  tal que obligue a ser  $\gamma < 8(e^2 + e) \sin^2 \frac{\nu}{2}$  llegaríamos a contradicción  $\implies \omega < \nu$ , lo que concluye esta parte de la demostración.

b) Caso hiperbólico : Debemos estudiar las órbitas de  $h = k$ ,  $k$  positivo fijo.

En primer lugar, las mismas consideraciones que se han hecho para las órbitas elípticas permiten omitir la influencia de los términos segundo y tercero de (1.3.7). Sin embargo debemos tener en cuenta la no acotación de las órbitas, por lo que la distancia  $\bar{d}$  no será equivalente a la métrica de Hausdorff sobre los cerrados de  $R^3$ .

Si  $\theta$  no es de colisión, basta, como en el caso elíptico, con probar que los ángulos entre las normales a los planos, y entre los periastrós, así como la diferencia  $|\alpha - \alpha'|$  son menores que un cierto  $\nu$ .

Sea  $E$  la función parte entera. Definimos  $n = E[a(e - 1)]$ . Para la primera condición es suficiente que se cumpla

$$\delta < \frac{1}{4} a(e - 1) \sin \nu / 2^{n+1}$$

Si como en el caso elíptico hacemos  $a' = a + \Delta a$ ,  $e' = e + \Delta e$ , se cumple

$\delta > |a(e-1) - a'(e'-1)|/2^{n+1} = |\Delta a(e-1) + e(a+\Delta a)/2^{n+1}|$ , expresión de la que se obtiene

$$\Delta e < \frac{\delta 2^{n+1} + |\Delta a|(e-1)}{a/2}$$

siempre que  $|\Delta a|$  sea menor que  $a/2$ , lo que puede conseguirse restringiendo suficientemente la variación de energía.

Esta consideración, junto con la continuidad de la función

$\alpha = \text{arc.ctg} \frac{a(e^2 - 1)}{e}$  para las órbitas de energía positiva,

aseguran que  $|\alpha - \alpha'|$  será pequeño si limitamos la variación de energía y la distancia  $\delta = \bar{d}(\theta, \theta')$ .

Por último se obtiene la limitación del ángulo entre los periastrós aplicando el mismo razonamiento que en el caso elíptico, pero sustituyendo los apoastros por los periastrós.

Si  $\theta$  es de colisión, la segunda de las tres condiciones analizadas continua siendo válida, lo que implica la continuidad de  $\alpha'$  respecto a  $\delta$ . Para finalizar basta con demostrar que  $\delta$  suficientemente pequeño asegura que el ángulo entre  $\underline{a}$  y  $(-\underline{q}')'$  es menor que  $\nu$ . Ahora bien, dado  $\nu$ , existen puntos de  $\theta'$  a distancia mayor o igual de  $\theta$  que los puntos de una órbita  $\theta''$  de colisión y con idéntico  $(\underline{q}')'$ . Luego basta que  $\delta < \nu$  para asegurar la pequeñez del ángulo entre  $\underline{a}$  y  $(-\underline{q}')'$ . Esto concluye la demostración de (1.4.4).

Vemos, sin embargo, que hay que excluir de  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}$  el conjunto

$$\{(\underline{a}, -\underline{a}, h) \mid \underline{a} \in S^2, h \geq 0\}.$$

Esto sugiere el incorporar, en cada plano pasando por el pri-

mario, una órbita parabólica y una hiperbólica (para cada  $h > 0$ ) en el infinito de dicho plano. (En realidad una con cada orientación). Para las hiperbólicas convenimos en que la excentricidad es mayor que 1, arbitraria, y que en cada plano y para cada  $e > 1$  y cada orientación, existe una órbita en el infinito.

1.4.14. Definición.— El conjunto de las órbitas keplerianas, con las órbitas que se han incorporado en el párrafo anterior, se denominará variedad de Kepler,  $K$ . Si  $\theta_\infty$  son las órbitas en el infinito :

$$K = \theta \cup \theta_\infty .$$

1.4.15. Proposición.—  $D$  es una pseudodistancia en  $K$ .

Basta observar que dos órbitas en el infinito con la misma  $h$  están a distancia  $D$  nula.

1.4.16. Definición.— Dadas  $\theta, \theta' \in K$  definimos  $\bar{D}(\theta, \theta')$  mediante el siguiente procedimiento :

Sea  $\zeta: \bar{R}_+ \longrightarrow [0,1]$  dada por  $\zeta(u) = \frac{u}{1+u}$  ;

$\zeta^*(\underline{v}) = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \zeta(\underline{v})$  si  $\underline{v} \neq 0$ ,  $\zeta^*(\underline{0}) = \underline{0}$ ;  $\zeta$  la apli-

cación que asigna a cada vector su extremo. Si  $\underline{c}, \underline{c}'$  son los momentos correspondientes a  $\theta$  y  $\theta'$  respectivamente :

$$\bar{D}(\theta, \theta') = d(\zeta \zeta^*(\underline{c}), \zeta \zeta^*(\underline{c}'))$$

siendo  $d$  la distancia euclídea en  $R^3$ .

1.4.17. Proposición.—  $\bar{D}$  es una pseudodistancia en  $K$  que es distancia sobre los elementos de  $\theta_\infty$  de idéntica  $h$ , (como se comprueba a partir de las definiciones).

1.4.18.Proposición.-  $\hat{D} = D + \bar{D}$  es una distancia en  $K$ .

Es consecuencia inmediata de (1.3.8) y (1.4.17) .

1.4.19.Corolario.- La variedad de Kepler  $K$  provista de la métrica  $\hat{D}$  es homeomorfa a  $S^2 \times S^2 \times R$  .

Demostración : Extendemos  $\phi$  haciendo corresponder a  $(\underline{a}, -\underline{a}, h)$  en el caso  $h \geq 0$  , la órbita en el infinito con energía  $h$  en el plano perpendicular a  $\underline{a}$  y con sentido de recorrido dado por  $\underline{a}$  . La continuidad de  $\phi$  y de  $\phi^{-1}$  se obtiene inmediatamente de la expresión de  $\hat{D}$  con ligeras modificaciones (y paciencia) de la demostración de (1.4.4).

## Capítulo 2

LOS PARAMETROS DE LA VARIEDAD KEPLERIANAIntroducción.

En este capítulo se da en primer lugar una interpretación geométrica a los parámetros  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  que según (1.4.4) y (1.4.19) sirven para describir la citada variedad. Se relacionan con elementos vectoriales clásicos, con los que se comparan, y se expliciran las transformaciones y sus jacobianos.

A continuación se desarrolla con detalle (1.4.19) en diversos casos particulares, lo que permite reencontrar los resultados ya conocidos y obtener varios nuevos.

Es interesante destacar que en una órbita se pueden tomar como elementos la posición y la velocidad en un instante prefijado. La relación entre estos elementos y los que utilizamos en este trabajo se pone también de manifiesto en este capítulo.

El conocimiento de la variedad kepleriana permite abordar fácilmente la estructura del espacio fásico en el problema de los dos cuerpos para todos los casos, incluyendo órbitas de colisión y las de energía positiva o nula.

Se ha creído interesante ilustrar con algunos ejemplos numéricos y gráficos la obtención de los elementos topológicos y su evolución en un problema perturbado.

Una observación acerca de (1.2.1) y de (1.4.19) llevan a la conclusión de la imposibilidad de dotar a la variedad de Kepler y al conjunto de las trayectorias de una parametrización regular y no sobreabundante mediante elementos de un  $R^m$  adecuado.

Finalmente se obtienen las fórmulas para el problema perturbado.



## §2.1.- Interpretación geométrica.

Veamos ahora la manera de obtener los elementos  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ , que llamaremos elementos topológicos (por cuanto describen la estructura topológica de la variedad kepleriana), en función de los elementos clásicos.

2.1.1.Proposición.- Las variables  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  se expresan en función de las variables vectoriales clásicas  $\underline{c}$  y  $\underline{e}$  mediante las fórmulas :

$$(2.1.2) \quad \underline{a} = \frac{-\underline{e} + \underline{c}\underline{c}}{\sqrt{e^2 + c^4}}, \quad \underline{b} = \frac{-\underline{e} - \underline{c}\underline{c}}{\sqrt{e^2 + c^4}}$$

Demostración : Sea  $\underline{e}$  el llamado vector excentricidad, dirigido hacia el periastro y con módulo la excentricidad de la órbita, y  $\underline{c}$  el vector momento angular. Ambos vectores están siempre definidos y son siempre ortogonales. Si la órbita es circular  $\underline{e}$  es cero, y si es de colisión es entonces  $\underline{c}$  quien se anula, siendo en este caso  $\underline{e}$  unitario. Estos elementos se relacionan con la energía de la órbita mediante la relación

$$(2.1.3) \quad h = \frac{\underline{e} \cdot \underline{e} - 1}{2 \underline{c} \cdot \underline{c}}$$

que deja de estar definida cuando la órbita es de colisión. Es decir, que  $\underline{e}$  y  $\underline{c}$  aún con la relación  $\underline{e} \cdot \underline{c} = 0$ , no bastan para determinar la órbita.

Las órbitas añadidas, situadas en el infinito (caso  $h \geq 0$ ,  $\underline{a} = -\underline{b}$ , ver (1.4.14)), corresponden a situaciones físicas extremas. Para ellas el vector  $\underline{c}$  tiene módulo infinito. En cuanto a  $\underline{e}$  convenimos en que su módulo sea 1 si  $h = 0$ , y mayor que 1 si  $h > 0$ , pero su dirección, en plano perpendicular a  $\underline{c}$  queda indeterminada.

Ya sabemos que en caso de colisión  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  están confundidos y valen exactamente  $-\underline{e}$ . En el caso de órbitas circulares, también sabemos que  $\underline{a} = -\underline{b} = \underline{c}/c$ . Veamos qué ocurre en los restantes casos.

Si  $\underline{a} \neq \underline{b}$  se tiene :

$$\underline{c}' = \frac{\underline{c}}{\|\underline{c}\|} = \frac{\underline{a} - \underline{b}}{\|\underline{a} - \underline{b}\|}$$

Si  $e \neq 0$  podemos escribir  $\underline{a} \mp \underline{b} = -\underline{a} \mp \underline{b} e/e$ .

Por otra parte sabemos (por (2.1.1), (1.1.8), (1.4.1), (1.4.5)) que :

$$e^2 - 1 = 2hc^2, \quad d = \frac{a(1-e^2)}{e} = \frac{(e^2-1)}{2he},$$

$$d^2 = \frac{e^2 - 1}{2he}^2 = \frac{c^4}{e^2} = \text{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1 - (\underline{a} \cdot \underline{b})}{1 + (\underline{a} \cdot \underline{b})}.$$

Esto implica que

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{1 - c^4/e^2}{1 + c^4/e^2} = \frac{e^2 - c^4}{e^2 + c^4}$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sqrt{\frac{1 + \underline{a} \cdot \underline{b}}{2}}, \quad \text{sen}(\pi/2 - \alpha) = \sqrt{\frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{a} &= -\frac{e}{e} \cos(\pi/2 - \alpha) + \frac{c}{c} \text{sen}(\pi/2 - \alpha) = \\ &= -\frac{e}{e} \sqrt{\frac{(e^2 + c^4) - 1}{2} \frac{2e^2}{e^2 + c^4}} + \frac{c}{c} \sqrt{\frac{(e^2 + c^4) - 1}{2} \frac{2c^4}{e^2 + c^4}} = \frac{-\underline{e} + \underline{c}\underline{c}}{\sqrt{e^2 + c^4}} \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$\underline{b} = \frac{-\underline{e} - \underline{c}\underline{c}}{\sqrt{e^2 + c^4}}$$

lo que concluye la demostración.

Observemos que no se presenta ninguna singularidad en el cálculo de  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  a partir de  $\underline{e}$  y  $\underline{c}$ , pues  $\underline{c}$  sólo es nulo cuando  $\underline{e}$  vale 1. Además  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  son independientes, no cumpliendo más condición que la de pertenecer a  $S^2$ . Ambos están perfectamente definidos para las órbitas en el infinito.

2.1.4. Proposición. - Las variables clásicas  $\underline{e}$  y  $\underline{c}$  se expresan en función de  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$  mediante

$$(2.1.5) \quad \underline{e} = -\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \underline{a}\cdot\underline{b}}}, \quad \underline{c} = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b}) \frac{x^{1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \underline{a}\cdot\underline{b}}}$$

donde

$$(2.1.6) \quad x = c^2 = \frac{h(1 - \underline{a}\cdot\underline{b}) + \sqrt{h^2(1 - \underline{a}\cdot\underline{b})^2 + 1 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2}}{1 + (\underline{a}\cdot\underline{b})} =$$

$$= \frac{1 - (\underline{a}\cdot\underline{b})}{-h(1 - \underline{a}\cdot\underline{b}) + \sqrt{h^2(1 - \underline{a}\cdot\underline{b})^2 + 1 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2}}$$

utilizándose la primera expresión siempre que  $\underline{a} \neq -\underline{b}$ , y observando que se presenta singularidad en ambas fórmulas sólo para las órbitas en el infinito.

Debemos excluir el caso  $\underline{a} = \underline{b}$ , para el que  $\underline{c} = 0$  y  $\underline{e} = \underline{a} = \underline{b}$ .

Demostración: Es inmediato a partir de (2.1.2) que basta con calcular  $\underline{e}^2 + \underline{c}^4$ . Teniendo en cuenta (2.1.3) se tiene

$$\underline{a} + \underline{b} = \frac{-2\underline{e}}{\sqrt{2xh + 1 + x^2}}$$

Hallando el módulo de ambos miembros, utilizando de nuevo

(2.1.3) y despejando, se obtiene (2.1.6), y a continuación (2.1.5).

Hallemos ahora la expresión de la matriz jacobiana de los elementos topológicos en función de los vectoriales clásicos, que se necesita en los cálculos de §2.6. Para ello utilizamos la siguiente formulación (\*):

$$\begin{aligned} h = h \quad , \quad \underline{a} &= \langle -\underline{e} + \underline{c}\underline{c} \ , \ -\underline{e} + \underline{c}\underline{c} \rangle^{-1/2} (-\underline{e} + \underline{c}\underline{c}) \quad , \\ \underline{b} &= \langle -\underline{e} - \underline{c}\underline{c} \ , \ -\underline{e} - \underline{c}\underline{c} \rangle^{-1/2} (-\underline{e} - \underline{c}\underline{c}) \quad , \end{aligned}$$

obteniéndose de forma inmediata (\*\*):

$$(2.1.7) \quad \left\{ \begin{aligned} D_{\underline{h}} h &= 1 \quad , \quad D_{\underline{e}} h = 0 \quad , \quad D_{\underline{c}} h = 0 \quad , \\ D_{\underline{e}} \underline{a} &= \frac{\sqrt{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}}{x\sqrt{2}} \left[ \underline{a} \otimes \underline{a}^T - I \right] \quad , \quad D_{\underline{h}} \underline{a} = \underline{0} \quad , \\ D_{\underline{e}} \underline{b} &= \frac{\sqrt{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}}{x\sqrt{2}} \left[ \underline{b} \otimes \underline{b}^T - I \right] \quad , \quad D_{\underline{h}} \underline{b} = \underline{0} \quad , \\ D_{\underline{c}} \underline{a} &= \sqrt{\frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{2x}} \left[ I - \underline{a} \otimes \underline{a}^T + \frac{((\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{a} - \underline{b}) \otimes (\underline{a} - \underline{b})^T}{2(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})} \right] \quad , \\ D_{\underline{c}} \underline{b} &= \sqrt{\frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{2x}} \left[ -I + \underline{b} \otimes \underline{b}^T - \frac{((\underline{b} \cdot \underline{a})\underline{b} - \underline{a}) \otimes (\underline{b} - \underline{a})^T}{2(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})} \right] \quad , \end{aligned} \right.$$

Nótese que la interpretación geométrica del teorema de Moser dada en [118] p.289 da para  $h = h_0 < 0$  el homeomorfismo de la subvariedad de  $K$  de energía  $h_0$  con

(\*) Téngase en cuenta que trabajamos en la variedad  $\underline{e} \cdot \underline{c} = 0$  y las diferenciales se aplicarán sólo a variaciones  $\Delta \underline{e}$ ,  $\Delta \underline{c}$  relacionadas por  $\underline{e} \cdot \Delta \underline{c} + \underline{c} \cdot \Delta \underline{e} = 0$ .

(\*\*) Empleamos  $\otimes$  para el producto tensorial.

$S^2 \times S^2$ , (simplemente asignando a cada órbita los vectores  $\underline{y} = \underline{p} + \underline{q}$ ,  $\underline{z} = \underline{p} - \underline{q}$  con  $\underline{p} = -e2a$ ,  $\underline{q} = 2a\sqrt{1-e^2} \underline{c}/c$ ). Esto se consigue si escogemos  $\alpha = \text{arc.cos } e$ , independientemente del valor de  $h$ . Se observará que esta representación no puede extenderse a  $h \geq 0$ . (Ver (1.4.5) y la nota al pie de la página 14).

### §2.2.- Consecuencias del Teorema 1.4.4.

La interpretación geométrica dada en §2.1. junto con (1.4.4), (1.4.19) permite obtener los siguientes corolarios :

2.2.1. Corolario.- Para toda  $k \in \mathbb{R}$  las órbitas de la variedad kepleriana de energía  $h = k$  son homeomorfas a  $S^2 \times S^2$ . (Esto engloba, naturalmente, el enunciado de Moser para  $k < 0$ ). El conjunto de todas las órbitas elípticas o el de todas las hiperbólicas son homeomorfos a  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}$  (cfr. Souriau [115] p.155).

Basta notar que la última coordenada en  $\mathcal{P}$  es la energía.

2.2.2. Corolario.- Las órbitas de colisión constituyen una subvariedad de  $K$  homeomorfa a  $S^2 \times \mathbb{R}$ .

En efecto, cada  $\underline{a} \in S^2$  y cada  $h \in \mathbb{R}$  determinan una y sólo una órbita de colisión.

2.2.3. Corolario.- El conjunto de las órbitas de la variedad  $K$  con momento  $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$  constante no nulo es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . El conjunto de las órbitas de  $K$  con  $\underline{c} \neq 0$  es homeomorfo a  $TS^2$ , fibrado tangente de  $S^2$ . El conjunto de órbitas elípticas que no son de colisión es homeomorfo a  $\mathbb{R} \times TS^2$ .

Basta observar que, fijado  $\underline{c}$ , en virtud de (2.1.3), es suficiente especificar  $\underline{e}$  en el plano perpendicular a  $\underline{c}$  para tener la órbita. (Téngase presente que si  $\theta \in \theta_\infty$ ,  $\underline{c} \notin \mathbb{R}^3$ ).

2.2.4. Corolario. - El subconjunto de  $K$  con  $h$  constante y  $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$  fijo, es homeomorfo a :

- a)  $S^2$  si  $\underline{c} = \underline{0}$ ,
- b)  $\emptyset$  si  $\underline{c} \neq \underline{0}$ ,  $h < -1/2c^2$ ,
- c) un punto si  $\underline{c} \neq \underline{0}$ ,  $h = -1/2c^2$ ,
- d)  $S^1$  si  $\underline{c} \neq \underline{0}$ ,  $h > -1/2c^2$ .

Si se busca la subvariedad de  $K$  con  $h = \text{cte.}$ ,  $c = \text{cte.}$ , a) y b) permanecen ; c) da lugar a  $S^2$ , y d) a  $T_{\text{u}}S^2$ , fibrado tangente unitario de  $S^2$ .

Omitimos la demostración por reducirse a simples comprobaciones a partir de (1.4.4).

2.2.4.bis. Observación. - Puede compararse (2.2.4) con la Proposición 1.3. de Smale [114] y con el Teorema 2 de Kaplan [62]. Téngase en cuenta que Smale omite el caso  $c = 0$ , que trabaja en el plano y que hace el estudio en el espacio de las fases, y que nosotros hemos identificado todos los puntos de la órbita (homeomorfa a  $S^1$  si está acotada, y a  $\mathbb{R}$  si no lo está). Véase sin embargo § 2.4. y § 2.6.

Sea  $A$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado por los puntos del plano  $z = 0$  unión con el eje  $Z$ .

2.2.5. Corolario. - El subconjunto de  $K - \theta_\infty$  de  $\underline{e} = \text{cte.}$  es homeomorfo a :

- a)  $S^2 \times \mathbb{R}$  si  $\underline{e} = \underline{0}$ ,
- b)  $S^1 \times \mathbb{R}$  si  $\|\underline{e}\| > 0$ ,  $\|\underline{e}\| \neq 1$ ,
- c)  $A$  si  $\|\underline{e}\| = 1$ .

La verificación de estas afirmaciones es inmediata.

Si consideramos  $e$  en lugar de  $\underline{e}$  se reformulan b) y c) como sigue :

b') El subconjunto de  $K - \theta_\infty$  con  $e = \text{cte.}$ ,  $e > 0$ ,  $e \neq 1$ , es homeomorfo a  $R \times T_u S^2$ .

c') El subconjunto de la órbitas de  $K - \theta_\infty$  con  $e = 1$  es homeomorfo a  $A' = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in S^2 \times R^3 \mid \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0 \text{ ó } \underline{y} = \lambda \underline{x}, \lambda > 0\}$ .

Obsérvese que en c') se incluyen las órbitas de colisión y las parabólicas, pero que aún así el conjunto es arco conexo.

En general debe tenerse presente que el conocimiento de  $\underline{e}$  ó el de  $\underline{c}$ , no nulos, implica que dado uno de los vectores  $\underline{a}$  ó  $\underline{b}$ , queda determinado el otro (por (1.4.5) y los pies de la página 16).

2.2.6.Nota.- Si en (2.2.5) sustituimos  $K - \theta_\infty$  por  $K$  entonces a) no varía, y tampoco lo hacen b) ni b') en el caso de ser  $e < 1$ . Definimos los siguientes conjuntos :

$$B = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = y = 0 \text{ ó } z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\} ;$$

$$C = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in S^2 \times R^3 \mid \underline{y} \in S^2 \text{ ó } \underline{y} = \lambda \underline{x}, \lambda > 0\} .$$

Entonces en b) debemos sustituir (si  $e > 1$ )  $S^1 \times R$  por un disco cerrado menos su centro. En b'), y también si  $e > 1$ , debemos sustituir  $R \times TS^2$  por  $TS^2$ . El caso c) se solventa cambiando  $A$  por  $B$ , y finalmente el c') sustituye  $A'$  por  $C$ .

Téngase en cuenta (1.4.1) para la demostración, que se reduce a un simple ejercicio.

2.2.7.Nota.- Podemos particularizar los resultados obtenidos al caso de que las órbitas estén en un plano fijo. Exponemos escuetamente las modificaciones que deben hacerse :

- 2.2.1 : Aparecen los conjuntos  $S^2$  y  $S^2 \times R$ , respectivamente.
- 2.2.2 : Las órbitas de colisión serán homeomorfas a  $S^1 \times R$ .
- 2.2.3 : Se obtienen, respectivamente, los conjuntos  $R^2$  y  $R^2 \times S^0$  (entendiendo  $S^0$  como espacio discreto con 2 puntos). Las elípticas de no colisión dan  $S^0 \times R^3$ .
- 2.2.4 : Son los conjuntos  $S^1$ ,  $\emptyset$ , 1 punto,  $S^1$ , respectivamente, los que aparecen en este caso. En el caso  $c = \text{cte.}$  se modifican c) y d) quedando multiplicados por  $S^0$ .
- 2.2.5 : Para a), b), c), b'), c'), se obtienen  $R \times S^0$ ,  $R \times S^0$ , E,  $S^1 \times R \times S^0$  y  $S^1 \times E$ , respectivamente.

También se modifican los resultados mencionados en (2.2.6). Como en el caso de dimensión 3 del espacio físico, se tiene para a) y para el caso  $e < 1$  de b) y b') los resultados de (2.2.5) tal como aparecen modificados en esta misma Nota. En b) ( $e > 1$ ), b') ( $e > 1$ ), c) y c'), los resultados hallados son, respectivamente : R,  $R^2 \times S^0$ , F y G.

Los conjuntos E, F y G son subconjuntos de  $R^2$ ,  $R^2$  y  $R^3$ , respectivamente, con la topología inducida, y definidos como sigue :

$$E = \text{ejes de } R^2,$$

$$F = S^1 \cup \{(x, 0) \mid x > 0\},$$

$$G = S^2 \cup \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 > 0\}.$$

### §2.3.-Relación con las condiciones iniciales.

Una de las maneras de parametrizar una órbita del problema de dos cuerpos consiste en dar las condiciones iniciales en un cierto instante. Está claro que así obtendremos sólo las llamadas órbitas keplerianas, es decir, las de en lugar de las de K. (Otro procedimiento puede consistir en dar las posiciones en dos instantes prefijados, que, bajo



ciertas condiciones, determinan unívocamente la órbita. Véase [37], [55], [112].

Sin embargo, si trabajamos con condiciones iniciales debemos identificar todas las condiciones (puntos en el espacio de las fases) que pertenecen (y por tanto parametrizan) a una misma órbita, y además las condiciones iniciales pueden presentar dificultades en el caso de colisión o de eyección.

Queremos probar ahora el

2.3.1. Teorema. - El paso de condiciones iniciales a  $\phi$  es continuo.

Demostración : Sabemos ([99] p.8) que

$$(2.3.2) \quad h = \frac{1}{2} \|\dot{\underline{x}}_0\|^2 - \frac{1}{\|\underline{x}_0\|}, \quad \underline{c} = \underline{x}_0 \wedge \dot{\underline{x}}_0, \quad \underline{e} = \underline{c} \wedge \dot{\underline{x}}_0 + \frac{\underline{x}_0}{\|\underline{x}_0\|}$$

Expresiones que son válidas y continuas si  $\|\underline{x}_0\| \neq 0$ , es decir, para todo tipo de órbitas incluidas las de colisión si las condiciones iniciales corresponden a un instante que no sea el de colisión (\*).

El jacobiano de

$$\begin{pmatrix} h \\ \underline{e} \\ \underline{c} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \dot{\underline{x}}_0 \end{pmatrix}$$

tiene por expresión

$$(2.3.3) : \quad D_{\underline{x}_0} h = \langle \underline{x}_0, \underline{x}_0 \rangle^{-3/2} \underline{x}_0^T, \quad D_{\dot{\underline{x}}_0} h = \dot{\underline{x}}_0^T,$$

$$D_{\underline{x}_0} \underline{e} = -\langle \dot{\underline{x}}_0, \dot{\underline{x}}_0 \rangle I + \dot{\underline{x}}_0 \otimes \dot{\underline{x}}_0^T + \langle \underline{x}_0, \underline{x}_0 \rangle^{-1/2} I - \langle \underline{x}_0, \underline{x}_0 \rangle^{-3/2} \underline{x}_0 \otimes \underline{x}_0^T,$$

$$D_{\dot{\underline{x}}_0} \underline{e} = \langle \dot{\underline{x}}_0, \underline{x}_0 \rangle I - 2 \underline{x}_0 \otimes \dot{\underline{x}}_0^T + \dot{\underline{x}}_0 \otimes \underline{x}_0^T,$$

---

(\*) Téngase presente que en la colisión las condiciones iniciales no determinan la órbita, y que debemos dar  $h$  ó  $V_\infty$  (si  $h \geq 0$ ).

$$D_{\underline{x}_0} \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_0^3 & -\dot{x}_0^2 \\ -\dot{x}_0^3 & 0 & \dot{x}_0^1 \\ \dot{x}_0^2 & -\dot{x}_0^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{\underline{x}_0} \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 & -x_0^3 & x_0^2 \\ x_0^3 & 0 & -x_0^1 \\ -x_0^2 & x_0^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el paso de  $\underline{e}, \underline{c}, h$  a  $\mathcal{P}$  es continuo según §2.1, se tiene que a condiciones iniciales próximas les corresponden puntos próximos en  $\mathcal{P}$ .

También podemos pensar en que, si no existe colisión, la dependencia de la solución respecto a las condiciones iniciales es continua para intervalos de tiempo finitos. Para el caso elíptico, por ser periódicas las órbitas, podrá afirmarse la continuidad (excepto para órbitas de colisión) de dichas órbitas en  $K$  respecto a las condiciones iniciales. Si la órbita no es periódica, nada puede afirmarse en intervalos infinitos, pero en virtud de la distancia utilizada en  $K$  basta que se tenga dicha continuidad dentro de una bola  $B'_n(o)$  de radio suficientemente grande. El ser  $h \geq 0$  garantiza que se alcanza la frontera de dicha bola en tiempo finito.

Si existe colisión puede obtenerse la continuidad respecto a las condiciones iniciales simplemente regularizando el problema mediante la transformada KS ([69], [118] p.24). La ecuación resultante es lineal de 2º orden a coeficientes constantes en todos los casos, y la solución puede obtenerse en forma unificada mediante las funciones de Stumpff, [119] p.166. La única dificultad en este tratamiento (y que no influye en la continuidad buscada) estriba en que a cada punto de  $R^3$  le corresponde como fibra en el espacio  $R^4$  introducido por la transformación KS inversa, una circunferencia centrada en el origen. Esta es función no sólo del punto, sino también de la trayectoria kepleriana que siga el mismo. Esto concluye la demostración de (2.3.1).

## §2.4.- Estructura del espacio fásico.

Vamos a obtener ahora la estructura del espacio fásico  $\mathcal{F}(\ast)$ .

Para ello consideraremos en este apartado las órbitas no como un punto sino como un conjunto de puntos. Una órbita con  $h \geq 0$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}$  y con  $h < 0$  es homeomorfa a  $S^1$ . Para las elípticas de colisión y debido a que en el instante de la misma se alcanza velocidad infinita, es también cierto el homeomorfismo con  $S^1$ . Explícitamente, siendo  $x$  la distancia al primario, se tiene por (2.3.2) :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{a}} \quad .$$

La proyección estereográfica de  $S^1$  sobre la citada curva en el plano  $x, \dot{x}$ , tomando como polo  $(0, -1)$ , y asignando el polo a la colisión, es el homeomorfismo en cuestión (considerando, naturalmente, la compactificación Alexandroff de la curva mencionada).

2.4.1. Teorema.- Dentro del espacio fásico  $\mathcal{F}$  la subvariedad  $\mathcal{F}_+$  con  $0 < h < \infty$  es homeomorfa a  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ; La  $\mathcal{F}_0$ , correspondiente a  $h = 0$ , lo es a  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}$ , y la  $\mathcal{F}_-$ , esto es, con  $h < 0$ , lo es a  $S^2 \times S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ .

Demostración : Para  $\mathcal{F}_-$  puede verse en [10], según [115] p.155. Según (1.2.1), se obtiene también que es homeomorfa a  $\mathbb{R} \times T_u S^3$ , siendo  $T_u S^3$  el fibrado tangente unitario de  $S^3$ . La paralelizabilidad de  $S^3$  asegura esta

---

(\*) En  $\mathcal{F}$  consideraremos que tanto la velocidad como la posición pueden tener módulo infinito, dado que admitimos las colisiones y englobamos los puntos de las órbitas introducidas en (1.4.12). (Imponemos la restricción de que el módulo de la velocidad es infinito si y sólo si el de  $\underline{x}$  es cero).

parte de (2.4.1).

La demostración para  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_+$  es idéntica. Vamos a hacerla para  $\mathcal{F}_+$ .

Toda órbita abstracta parabólica o hiperbólica es homeomorfa a una recta (ver 1.1.4), (basta pensar que su hodógrafa es una circunferencia excepto un punto o excepto un arco cerrado, respectivamente, y que para las de colisión la hodógrafa es una recta compactificada pero a la que hemos quitado el origen (parabólicas) o un intervalo cerrado (hiperbólicas) correspondiente a puntos impropios de la órbita o a puntos imaginarios). Por abuso de lenguaje consideraremos también válido este homeomorfismo, y el razonamiento que sigue, para las órbitas introducidas en (1.4.14).

Escogemos en cada órbita el periastro y definimos una aplicación de  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  en  $\mathcal{F}_+$  que asigne a cada  $(\underline{a}, \underline{b}, h, t)$  el punto de la órbita correspondiente a  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$  ( $h > 0$ ) que se alcanza en un tiempo  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) después del paso por el periastro. Trivialmente esta aplicación es una biyección entre  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\mathcal{F}_+$ . La continuidad de la directa se obtiene de la continuidad del paso de una órbita (en  $\mathcal{F}_+$ ) a su periastro y de la continuidad de la solución de (1.1.1) respecto a las condiciones iniciales y respecto al tiempo. La continuidad de la inversa se obtiene del §2.3. Esto concluye la demostración de (2.4.1).

Nótese que este procedimiento no puede aplicarse a  $\mathcal{F}_-$  en virtud de (2.6.1).

Por otra parte, siguiendo el método utilizado en [62], se puede estudiar lo que sucede a la parte "propia" de  $\mathcal{F}$ , esto es, desprovista de las colisiones ( $V = \infty$ ) y sin las órbitas introducidas en (1.4.14).

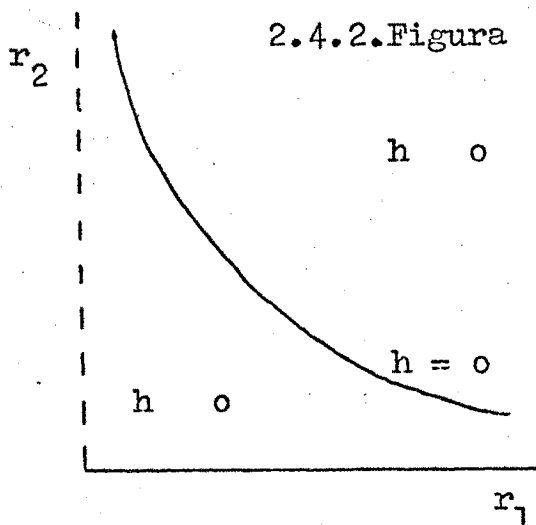
Sean  $x_1, x_2, x_3$  las coordenadas espaciales,  $x_4, x_5, x_6$  las componentes de la velocidad, y definimos  $r_1$  y  $r_2$  por

$$r_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \quad r_2 = (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^{1/2}.$$

De la ecuación de la energía se obtiene  $r_1 = \frac{2}{r_2^2 - 2h}$ .

Para cada valor de  $h$  se obtienen puntos en el primer cuadrante del plano  $r_1, r_2$ , desprovisto de la semirrecta  $r_1 = 0$  (ver (2.4.2)). Si  $h = 0$ , encontramos una curva homeomorfa a  $R$ . Para  $h > 0$  los puntos que se encuentran son los que se hallan por encima de dicha curva. Este recinto es homeomorfo a  $R^2$ . Para  $h < 0$  se tiene un recinto entre la curva y la recta  $r_2 = 0$  (incluida), homeomorfo a un semiplano.

2.4.3. Teorema. - En la parte "propia"  $\mathcal{F}^p$  de  $\mathcal{F}$  se tiene que  $\mathcal{F}_+^p$  es homeomorfo a  $S^2 \times S^2 \times R^2$ ;  $\mathcal{F}_0^p$  lo es a  $S^2 \times S^2 \times R$ , y  $\mathcal{F}_-^p$  lo es a  $S^2 \times S^2 \times P$ , siendo  $P$  un semiplano (incluida la recta que lo limita).



2.4.4. Definición. - Llamaremos "cilindro partido" (abreviadamente  $C_p$ ) al conjunto obtenido de la siguiente manera: Consideremos en el plano  $R^2$  el conjunto  $\{(x, y) \mid y = 1/|x|\}$ , dotado de la topología inducida por la topología habitual del plano. El borde de este conjunto lo constituyen las dos ramas de hipérbola  $y = 1/x$  e  $y = 1/|x|$  con  $y > 0$ . Consideremos en espacio cociente obtenido al identificar los puntos del borde con igual ordenada. Es fácil probar que este espacio cociente es homeomorfo a un cilindro desprovisto de una semigeneratriz (cerrada).

2.4.5. Teorema. - Los puntos del espacio fásico que pertenecen a órbitas de colisión forman un conjunto homeomorfo a  $S^2 \times C_p$ .

Demostración : Para órbitas de colisión siempre tiene sentido hablar de periastro. La misma aplicación utilizada en la demostración de (2.4.1) va a servir para establecer el homeomorfismo. Para cada dirección y energía tenemos una única órbita de colisión. Esta es homeomorfa a  $S^1$  si  $h < 0$  y a  $R$  si  $h \geq 0$ . Por tanto en el plano  $(h, t)$ , debemos identificar los puntos  $(h_1, t_1)$  y  $(h_2, t_2)$  si  $h_1 = h_2 < 0$  y  $t_1 - t_2 = k \sqrt{-\pi^2/2h^3}$ . Trivialmente, el conjunto obtenido es  $C_p$ .

Como corolario se obtiene que el conjunto de condiciones iniciales que lleva a colisión tiene medida (Lebesgue) cero. Análogamente sucede lo mismo para el problema de tres cuerpos (Alexeyev [4]). Esto deja de ser cierto para determinadas leyes de atracción, como puede verse en Saari [105] al abordar el estudio de la regularización del problema de un satélite artificial (de interés discutible, pues dicho problema es esencialmente exterior; el potencial interior tiene otra expresión).

### §2.5.- Ejemplos.

Como ilustración se han calculado los elementos ( $\ast$ )  $a, b, h$  para los planetas en el año 2.000. Se ha tomado  $\mu = 1$  y 10 u.a. como unidad de longitud. Los resultados son (tomando una base ortonormal con plano XY el de la eclíptica y X dirigido hacia  $\eta$ ) :

---

( $\ast$ ) Fuente de los elementos keplerianos : Escobal [38] p.8 .

Mercurio	$h = -12.916612$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} -.84173914 \\ -.49497326 \\ .21558454 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.87406522 \\ -.46620346 \\ -.13661743 \end{pmatrix}$
Venus	$h = -6.912473$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} .11910340 \\ -.08330302 \\ .98938111 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} .00436541 \\ -.05613762 \\ -.99841350 \end{pmatrix}$
Tierra	$h = -4.9999993$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} .03691650 \\ -.16066441 \\ .98631847 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} .03691650 \\ -.16066441 \\ -.98631847 \end{pmatrix}$
Marte	$h = -3.2815109$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} -.12832937 \\ .48634432 \\ .86429207 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.17011441 \\ .52195975 \\ -.83583438 \end{pmatrix}$
Júpiter	$h = -.96106514$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} .01597119 \\ .09692962 \\ .99516309 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.02856078 \\ .08871310 \\ -.99564766 \end{pmatrix}$
Saturno	$h = -.52330009$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} -.01475301 \\ .03790194 \\ .99917255 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.09415716 \\ .00310639 \\ -.99564766 \end{pmatrix}$
Urano	$h = -.26017086$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} .01676502 \\ -.02756800 \\ .99947933 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.00916549 \\ -.02012131 \\ -.99975553 \end{pmatrix}$
Neptuno	$h = -.16606016$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} .02269618 \\ .02354734 \\ .99946506 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.02336116 \\ -.01760453 \\ -.99957208 \end{pmatrix}$
Plutón(⊛)	$h = -.12652546$	$\underline{a} = \begin{pmatrix} .21423122 \\ .09115566 \\ .97252025 \end{pmatrix}$	$\underline{b} = \begin{pmatrix} -.34218779 \\ -.09994059 \\ -.93430156 \end{pmatrix}$

(⊛) Para Plutón se han dado los elementos correspondientes a la época 0,0344 Octubre 1989 (paso por el perihelio)

Asimismo podemos representar la órbita seguida en  $\mathcal{P}$  por una órbita kepleriana sujeta a perturbaciones (véase 2.6.7 y §5.2). En (2.5.1) se muestra la evolución de la órbita osculatriz (ver 2.6.9) correspondiente a un satélite artificial terrestre en el que se consideran como únicas perturbaciones a tener en cuenta las seculares de primer orden debidas a  $J_2$ .

La  $\xi$  - estabilidad toroidal (esto es, existen toros invariantes tales que todo movimiento que se encuentre en un cierto instante a distancia menor que  $\xi'$  ( $\xi' = O(\xi)$ ) de uno de estos toros permanece a distancia menor que  $\xi$  de él indefinidamente, y  $\xi \rightarrow 0$  si  $J_2 \rightarrow 0$ ), del problema de 2 cuerpos frente a las perturbaciones zonales (ver Kyner [70], Simó [113]), no asegura que el movimiento de las órbitas keplerianas en  $\mathcal{P}$  sea  $\xi$  - orbitalmente estable. (Basta pensar en las perturbaciones de una órbita polar y de una órbita próxima a polar) ( $\times$ ).

Por ser el campo conservativo se tiene  $h = \text{cte.}$  (véase sin embargo (2.6.9)). Se toma como unidad de longitud  $10/3$  del radio ecuatorial terrestre. En (2.5.1a) aparece la proyección del vector  $\underline{a}$  sobre el plano XY; en (2.5.1b) la del vector  $\underline{b}$  y en (2.5.1c) se representan ambos vectores en el espacio. Los elementos keplerianos iniciales de la órbita representada son :

$$\omega_0 = \pi/3, \quad \Omega_0 = \pi/4, \quad i_0 = \pi/6, \quad a_0 = \frac{23/18}{10/3}, \quad e_0 = .1$$

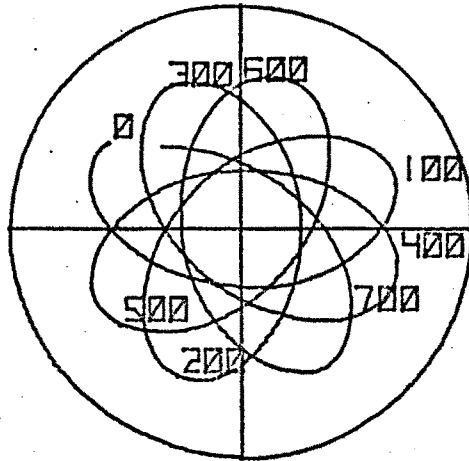
y sus variaciones vienen dadas por (ver Kovalevsky [68] p.168, Simó [110], [111]) :

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \frac{\cos i}{a^{7/2} (1 - e^2)^2}, \quad \dot{\omega} = \frac{3 - \frac{15}{4} \sin^2 i}{a^{7/2} (1 - e^2)^2} J_2$$

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{e} = 0, \quad \dot{i} = 0,$$

( $\times$ ) Para un estudio de la estabilidad acotada véase el interesante artículo de Poritsky [100].

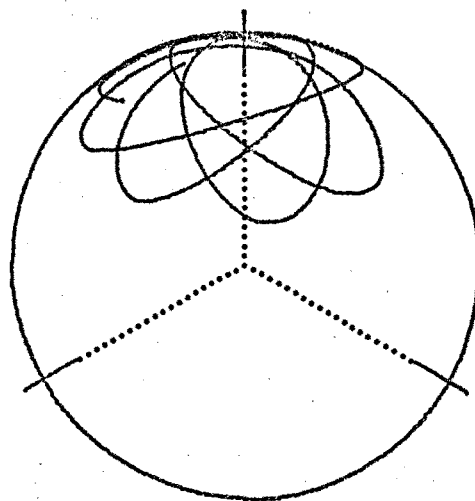
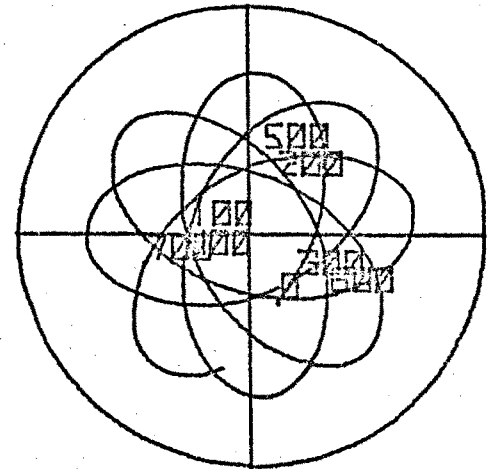




2.5.1.a.Figura.- A la izquierda se representa la variación del vector  $\underline{a}$  proyectado sobre el plano XY, al someter un satélite artificial terrestre

a los efectos de  $J_2$ .

2.5.1.b.Figura.- Idem, correspondiendo al vector  $\underline{b}$ . Los números indican el tiempo transcurrido en días desde que se inicia el movimiento en el punto marcado como cero.



2.5.1.c.Figura.- El mismo caso visto en proyección axonométrica normal sobre el plano  $x+y+z = \text{cte}$ . Sólo se tienen en cuenta los términos seculares de primer orden, por lo que la perturbación es

manifiestamente cuasiperiódica.

en lo que hace referencia a perturbaciones seculares de primer orden (véanse las referencias citadas para las de 2º orden y para los términos de periodo largo y corto, así como [23] y [36]). Hemos tomado para  $J_2$  el valor de  $1082.61 \times 10^{-6}$  (ver Kaula [63] y Simó [110]).

### §2.6.- Elementos de una trayectoria.

Como sabemos, con los elementos  $a, b, h$  queda determinada la órbita, pero no la trayectoria, ya que para ello debe darse la posición sobre la órbita en un cierto instante, o, lo que es equivalente, la época de paso por un punto de la órbita convenientemente escogido. Clásicamente se toma como tal punto el periastro de la órbita. Mas esto es válido para órbitas no circulares. Además, órbitas casi circulares con periastrós muy distintos (por ejemplo opuestos respecto al primario) y por los que se pasara en el mismo instante  $t_0$  darían lugar a trayectorias completamente distintas, siendo así que los elementos  $a, b, h, t_0$  serían casi iguales.

Este inconveniente puede paliarse tomando como punto destacado o de referencia en cada órbita, el que corresponde a un valor prefijado (cero, por ejemplo) de la longitud media ( $\Omega + \omega + M$  en variables keplerianas,  $h + g + l$  en variables de Delaunay, [14] p.290), o de la longitud verdadera. Sin embargo este procedimiento deja de tener sentido en el caso de órbitas de colisión.

Cabe preguntarse, por tanto, si es posible hacer una elección de un punto destacado en cada órbita de manera continua y para todo tipo de órbitas. La respuesta la da el

2.6.1. Teorema.- No existe ninguna aplicación continua de  $\mathcal{O}$  en  $R^3$  que asigne a cada órbita kepleriana un punto de la misma.

Demostración : Usaremos (1.2.1). En particular esta elección de un punto en cada órbita debería ser válida con  $h = \text{cte.} < 0$  y para órbitas situadas en un mismo plano. El conjunto de éstas es homeomorfo a  $S^2$  y cada una de ellas lo es a un círculo máximo de  $S^2$ . Escoger un punto en cada órbita sería equivalente a seleccionar un vector unitario en el plano tangente a la esfera en el polo norte de la órbita, es decir, deberían existir secciones continuas del fibrado tangente unitario a  $S^2$ . Un conocido teorema de Poincaré asegura la imposibilidad de dichas secciones ( $\neq$ ).

Esto no obsta para que podamos tomar un elemento de tipo temporal para acabar de determinar la trayectoria, pero cualquier elección que se haga carecerá de continuidad. En la práctica se recomienda la longitud media o la verdadera, dado que aparecen escasamente las órbitas de colisión.

2.6.2.Nota.- El mismo razonamiento sirve para probar que no podemos tomar un par de variables reales para describir todo  $S^2$  mediante una fórmula única. Por tanto las variables topológicas no pueden ser descritas de manera continua por 5 parámetros reales (pero sí por un parámetro 5-dimensional según (1.4.4)). Deben serlo por 7 sujetos a dos condiciones : la normalidad de  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ .

Por último vamos a calcular la expresión de los paréntesis de Poisson de los elementos  $\underline{a}, \underline{b}$ .

Sean  $f, g$  dos funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  definidas

( $\neq$ ) Nótese que existen campos de este tipo para otras esferas. Concretamente, para  $S^1, S^3, S^7$  familias de estos campos generan el espacio tangente (ver Adams [3], Kervaire [65]). La existencia de esos campos en  $S^1$  y  $S^3$  da origen a la transformación de Levi-Civita (ver [112]) y a la KS (ver [69]).

en el espacio fásico ;  $I_3$  la matriz de la aplicación identidad en  $R^3$  ;  $J \in \mathcal{L}(R^6; R^6)$  definida por su matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(esto es,  $J$  considerado como tensor 2 veces covariante no es más que una métrica simpléctica ). Sea  $\underline{y}$  el vector  $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\dot{x}} \end{pmatrix}$

2.6.2. Definición. - Llamaremos paréntesis de Poisson de las funciones  $f$  y  $g$  y lo designaremos por  $\{f, g\}$  a :

$$\{f, g\} = D_{\underline{y}} f J (D_{\underline{y}} g)^T .$$

Esta definición es válida cualesquiera que sean las dimensiones de los espacios imagen de las aplicaciones  $f$  y  $g$  .

(Análogamente se define el de Lagrange mediante  $[f, g] = (D_{\underline{f}} \underline{y})^T J D_{\underline{g}} \underline{y}$  ).

2.6.3. Lema. - Sea  $\underline{n}$  el vector  $\begin{pmatrix} \underline{e} \\ \underline{c} \end{pmatrix}$  . Si por  $T_{\underline{\alpha}}$  designamos la aplicación lineal :

$$T_{\underline{\alpha}} : R^3 \longrightarrow R^3 , \quad T_{\underline{\alpha}} \underline{\beta} = \underline{\beta} \wedge \underline{\alpha} ,$$

(ver Milne [85] p.47), se tiene :

$$\{\underline{n}, \underline{n}\} = \begin{pmatrix} -2hc \underline{c} & T_{\underline{e}} \\ T_{\underline{e}} & T_{\underline{c}} \end{pmatrix} .$$

Demostración : Basta aplicar (2.6.2), (2.3.2) y (2.3.3). Como comprobación, dadas las ligaduras  $\langle \underline{e}, \underline{c} \rangle = 0$  y  $2hc^2 = e^2 - 1$  , debe cumplirse

$$(\underline{c} \quad \underline{e})^T \{\underline{n}, \underline{n}\} = (-2\underline{e} \quad 4hc)^T \{\underline{n}, \underline{n}\} = \underline{0} ,$$

lo cual es cierto.

2.6.4. Proposición. - Sea  $\underline{m}$  el vector  $\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$ . Se tiene :

$$\{\underline{m}, \underline{m}\} = \begin{pmatrix} \frac{c(c^4 + 2e^2 + 1)}{(c^4 + e^2)^2} (c \underline{T}_{\underline{c}} - \underline{T}_{\underline{e}}) & \frac{(1 - c^4)}{c(c^4 + e^2)^2} (c^3 \underline{T}_{\underline{c}} + S(\underline{c}/\underline{e}, \underline{c})) \\ \frac{(1 - c^4)}{c(c^4 + e^2)^2} (c^3 \underline{T}_{\underline{c}} - S(\underline{c}/\underline{e}, \underline{c})) & \frac{c(c^4 + 2e^2 + 1)}{(c^4 + e^2)^2} (c \underline{T}_{\underline{c}} + \underline{T}_{\underline{e}}) \end{pmatrix}$$

en donde  $S(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  designa la aplicación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta}^T + \underline{\beta} \otimes \underline{\alpha}^T .$$

Demostración : Se obtiene trivial y pacienzudamente de (2.6.3) y (2.1.5). Nótese que a partir de (2.1.4) y (2.1.1) puede ponerse  $\{\underline{m}, \underline{m}\}$  en términos de  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ , obteniendo :

$$(2.6.5) \quad \{\underline{m}, \underline{m}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{2x} \right|^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{x^2} + 3 + \underline{a} \cdot \underline{b} \right] \underline{T}_{\underline{a}} & \frac{(1 - x^2)(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2} x^{5/2}} \left[ \underline{T}_{\underline{a} - \underline{b}} + \frac{S(\underline{b}/\underline{a}, \underline{a} - \underline{b})}{(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})} \right] \\ \frac{(1 - x^2)(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2} x^{5/2}} \left[ \underline{T}_{\underline{a} - \underline{b}} - \frac{S(\underline{b}/\underline{a}, \underline{a} - \underline{b})}{(1 - \underline{a} \cdot \underline{b})} \right] & -\frac{1}{2} \left| \frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{2x} \right|^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{x^2} + 3 + \underline{a} \cdot \underline{b} \right] \underline{T}_{\underline{b}} \end{pmatrix}$$

Dado que  $\underline{a} \cdot \underline{a} = 1 = \underline{b} \cdot \underline{b}$  se debe cumplir (y así es)

$$\begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{o} \end{pmatrix}^T \{\underline{m}, \underline{m}\} = \begin{pmatrix} \underline{o} & \underline{b} \end{pmatrix}^T \{\underline{m}, \underline{m}\} = \underline{o} .$$

2.6.6. Observación. - En (2.6.5) no aparece ninguna singularidad, para lo que basta comprobar, a partir de (2.1.6), que

$$\lim_{\underline{a} \rightarrow \underline{b}} \frac{1 - \underline{a} \cdot \underline{b}}{\|\underline{x}\|^2} = 2$$

y que

$$\lim_{\underline{a} \rightarrow \underline{b}} \left\| \frac{S(\underline{b}/\underline{a}, \underline{a}-\underline{b})}{1-\underline{a} \cdot \underline{b}} \right\| \leq 2 \lim_{\underline{a} \rightarrow \underline{b}} \frac{\|\underline{b}/\underline{a}\| \cdot \|\underline{a}-\underline{b}\|}{1-\underline{a} \cdot \underline{b}} = 4.$$

Debemos destacar que cualquier elemento de tipo temporal escogido junto con las variables  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$  no constituyen sistema de variables canónicas. Esto supone un alargamiento de los cálculos en el estudio de las perturbaciones, que sin embargo presenta algunas ventajas, como se verá en (2.6.10).

Si como variable temporal escogemos la longitud media  $\lambda$ , y como elemento la longitud media en la época  $\lambda_0$ , no hay dificultades con  $e = 0$ , ó  $I = 0$  (aunque sí en  $e = 1$ ,  $I = \pi$  ó para órbitas no elípticas).

2.6.7. Definición. - Llamaremos problema perturbado de los dos cuerpos (ver Cap.5) al regido por

$$(2.6.8) \quad \ddot{\underline{x}} + \underline{x} / \|\underline{x}\|^3 = \underline{F},$$

siendo  $\underline{F}$  la fuerza perturbatriz, que en general depende de  $\underline{x}, \dot{\underline{x}}$  y  $t$ . Un caso más restringido pero de gran interés práctico se tiene cuando  $\underline{F}$  depende sólo de  $\underline{x}$  y es el gradiente de una función  $R$  (función perturbatriz). Suponemos que el problema perturbado está próximo al de dos cuerpos, esto es, que  $\|\underline{F}\|$  es "pequeño" frente a  $\|\underline{x}\|^{-2}$ .

2.6.9. Definición. - Entendemos por trayectoria osculatrix  $\text{Try}_{t_1}^0$  a una trayectoria solución de (2.6.8) en un cierto instante  $t_1$ , la trayectoria del problema de 2 cuerpos determinada por la condición de que las imágenes de ambas trayectorias coincidan en dicho instante.

Supondremos que la imagen común no corresponde a un punto de colisión. Se tiene que  $\underline{x}(t_1)$ ,  $\dot{\underline{x}}(t_1)$  son comunes, así como  $\underline{c}(t_1)$ . Las energías son distintas y discrepan en  $R$  si  $\underline{F} = \nabla R(\underline{x})$ . El conocimiento de  $\text{Try}_{t_1}^0 \quad \forall t_1 \in I$  (ver 1.1.3), determina la solución de (2.6.8).

Designemos por  $\underline{\sigma}$  los elementos  $(\underline{a}, \underline{b}, h, \lambda_0)$ . Cuando correspondan a  $\text{Try}_t^0$  se llamarán osculadores. Entonces  $y(t) = (\text{Try}^0(\underline{\sigma}(t)))(t)$ , en donde la dependencia de  $\text{Try}^0$  respecto a  $t$  se tiene a través de  $\underline{\sigma}$ . Asimismo  $R(\underline{x}) = R(\underline{\sigma}, t)$ .

2.6.10. Proposición. - Los elementos osculadores evolucionan de acuerdo con la ecuación

$$(2.6.11) \quad \dot{\underline{\sigma}} = \{ \underline{\sigma}, \underline{\sigma} \} D_{\underline{\sigma}} R .$$

Demostración : Se obtiene la fórmula (2.6.11) por el procedimiento habitual (ver Brouwer-Clemence [14] p.273), efectuando los cálculos con paréntesis de Poisson en lugar de Lagrange. Por (2.6.6) la parte  $\{ \underline{m}, \underline{m} \}$  de  $\{ \underline{\sigma}, \underline{\sigma} \}$  es siempre regular. Para las restantes partes se obtiene :

$$\{ \underline{m}, h \} = 0 \quad , \quad \{ h, \lambda_0 \} = (-2h)^{3/2} \quad (\text{estudiamos caso elíptico})$$

$$\{ \underline{m}, \lambda_0 \} = D_{\underline{m}} \left( \begin{array}{l} \frac{\sqrt{1-e^2}e}{1+\sqrt{1-e^2}} + \frac{e \operatorname{sen} \omega}{c^2} \operatorname{tg} \frac{I}{2} \underline{c} \\ \frac{1}{c} \underline{c} + \operatorname{tg} \frac{I}{2} \begin{pmatrix} -\cos I \operatorname{sen} \Omega \\ \cos I \cos \Omega \\ \operatorname{sen} I \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Las únicas e inevitables dificultades ( $c = 0$ ,  $I = \pi$ ) son debidas a  $\lambda_0$ , y por (2.6.1) existirán siempre en al-

gún punto (pueden suprimirse eventualmente con elementos sobreabundantes). Incluso así, se han introducido menos singularidades que las tradicionales (ver 68 p.138) en que debe ser además  $I \neq \mathbb{V}/2$ . La desaparición de singularidades de (2.6.11) depende por supuesto de  $R$ . Para la eliminación de las mismas en algunos casos véase Lahulla [72].



## Capítulo 3

EL METODO CLASICO EN LA TEORIA FORMAL DE PERTURBACIONESIntroducción.

La mayor parte de problemas en el estudio de un sistema dinámico conducen a ecuaciones diferenciales (expresables siempre en forma canónica, ver [61]), no fácilmente integrables (o no integrables, según el significado que se dé a la palabra "integrable", ver Siegel [108], Moser [88]) (\*).

Una técnica habitual consiste en simplificar el problema convirtiéndolo en otro integrable de forma más o menos elemental y añadir, como una perturbación, la parte que se ha omitido previamente.

Admitiremos que esta perturbación es pequeña o, en otras palabras, que es un múltiplo de un "pequeño parámetro"  $\epsilon$ . Obtenemos la solución formal en términos de las potencias de  $\epsilon$ . Asimismo la perturbación puede ser una función analítica en la variable  $\epsilon$  y en las variables dinámicas del sistema. La convergencia del procedimiento es problema abierto para la mayor parte de los casos (ver Arnol'd [5], [6], Giacaglia [44] p.57, Moser [89], [90], Siegel-Moser [109] p.207, etc).

El caso en el que las perturbaciones son grandes escapa de las posibilidades actuales del Análisis (ver Contopoulos [26], Giacaglia [44] p.357) y en este campo sólo se dispone de experiencias numéricas (ver Danby [27], Hénon-Heiles [53], para algunas de las más significativas).

Los problemas de convergencia de las soluciones halladas están relacionados con los problemas físicos de resonancia y estabilidad [92], de trayectorias periódicas y cuasiperiódicas [90], y con los problemas matemáticos de aproximación de números reales por números racionales. En particular

---

(\*) Poincaré prefería llamarlos no integrados.

las más graves dificultades se presentan con los números de Liouville (ver Simó [113] , Wintner [124] ) (\*).

En este capítulo se expone el método clásico. El resultado fundamental que se ha obtenido es el teorema 3.2.3 en el que se dan en forma explícita las perturbaciones de orden cualquiera y una información exhaustiva sobre los términos que aparecen.

### §3.1.- El método clásico.

Entendemos por tal el método de Lagrange, Laplace, Poisson, (\*\*), cuya idea fundamental es la que da origen al método de Picard y, en general, a los teoremas de punto fijo en Análisis.

Independientemente de que en el capítulo próximo apliquemos este método a un sistema hamiltoniano próximo a uno integrable, vamos a exponerlo en el caso general. Además es así útil en diversos casos (ver Simó [111] ) en que no encierra excesiva complejidad la aplicación a un problema aunque no esté en forma canónica.

Sea  $E$  un espacio de Banach,  $U$  un abierto en  $E \times \mathbb{R}$ . Identificamos  $\mathcal{L}(R;E)$  con  $E$ . Sea  $\varphi$  una aplicación  $\mathcal{C}^\infty$  de  $U$  en  $E$  y supongamos que (\*\*\*) viene regido por

$$(3.1.1) \quad \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \varphi(\sigma, t)$$

con la condición  $\sigma = \sigma_0$  si  $t = 0$ .

Admitimos que

$$(3.1.2) \quad \varphi = o(\varepsilon) .$$

(\*) Véanse los capítulos 4 y 5 .

(\*\*) Obtuvieron términos hasta tercer orden .

(\*\*\*) A diferencia de los cap.1 y 2, omitimos el subrayado en  $\sigma$  .

Si fuera cierto que toda reiteración de integrales sobre y sus diferenciales preserva esta propiedad, tendríamos asegurada la convergencia, pero esto no es cierto debido a la aparición de los llamados "pequeños denominadores".

Vamos a proceder de modo absolutamente formal (ver Simó llo ). Integramos (3.1.1) manteniendo durante la integración el valor de  $\sigma$  constante e igual a  $\sigma_0$  en el término de la derecha en (3.1.1) :

$$(3.1.3) \quad \sigma_1 = \sigma_0 + \int \varphi(\sigma_0, t) dt = \sigma_0 + \Delta \sigma_0 .$$

La integración se efectúa desde el valor  $t_0$  del tiempo (que podemos tomar igual a cero) para el cual  $\sigma$  vale  $\sigma_0$ , hasta un tiempo  $t$  cualquiera .

Conocida la corrección  $\Delta \sigma_0$  dada por (3.1.3) podemos integrar (3.1.1) poniendo  $\sigma_1$  en lugar de  $\sigma_0$  en el miembro de la derecha, lo que dará

$$(3.1.4) \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_0 + \int \varphi(\sigma_1, t) dt$$

donde encontramos la dificultad de que teniendo  $\varphi(\sigma_0, t)$  una expresión relativamente sencilla, puede dar origen a  $\varphi(\sigma_1, t)$  engorrosa. Paliemos este inconveniente desarrollando en serie de Taylor la función  $\varphi$  y tomando sólo términos hasta primer orden en  $\varepsilon$  (formalmente), dado que hemos efectuado sólo la primera integración. Empezamos a discrepar del método de Picard.

Así (3.1.4) se convierte en

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_0 + \int (\varphi(\sigma_0, t) + D\varphi(\sigma_0, t)(\int \varphi(\sigma_0, t)) dt = \\ &= \sigma_1 + \Delta \sigma_1 . \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos  $\sigma_3$  mediante

$$\sigma_3 = \sigma_0 + \int \left[ \varphi(\sigma_0, t) + D\varphi(\sigma_0, t)(\Delta \sigma_0 + \Delta \sigma_1) + \frac{1}{2} D^2 \varphi(\sigma_0, t)(\Delta \sigma_0, \Delta \sigma_0) \right] dt$$

en donde se han introducido términos de segundo orden en la expresión de la derecha en (3.1.1).

De ahora en adelante prescindiremos de indicar el punto en que se evalúan las diferenciales sucesivas de la función  $\varphi$ , entendiéndose siempre que es en el punto  $\sigma_0$ . Nótese que la diferenciación se lleva sólo a cabo respecto a la primera variable.

El método iterativo es ya evidente y vamos a tratar el término general en el próximo apartado.

### §3.2.- Obtención de las perturbaciones de orden arbitrario.

Empezamos con la siguiente

3.2.1. Definición.- Llamamos  $k$ -ésimo operador de iteración  $L_k$  definido sobre  $k$  vectores de  $E$  al dado por la siguiente expresión :

$$(3.2.2) \quad L_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \int (D^k \varphi)(v_1, v_2, \dots, v_k) dt .$$

Para  $k = 0$  convenimos en

$$L_0 = \int \varphi(\sigma_0, t) dt .$$

Eventualmente los vectores  $v_i$  ( $i = 1 + k$ ) pueden ser aplicaciones de un cierto abierto de  $R$  (en donde varía  $t$ ) en  $E$ .

3.2.3. Teorema.- Sean  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma_0$ , ...,  $\sigma_{k+1} = \sigma_k + \Delta\sigma_k$ , ... la sucesión de funciones obtenidas por el método iterativo expuesto en §3.1., soluciones aproximadas de la ecuación (3.1.1) en el método clásico.

Entonces  $\Delta \sigma_0 = L_0$  , y

$$a) \quad (3.2.4) \quad \Delta \sigma_{k+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j!} L_j \left[ \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_j = k+1-j \\ i_h \geq 0, h=1+j}} (\Delta \sigma_{i_1}, \Delta \sigma_{i_2}, \dots, \Delta \sigma_{i_j}) \right]$$

(en donde deben considerarse todas las permutaciones posibles de  $i_1, \dots, i_j$  cumpliendo  $i_1 + \dots + i_j = k + 1 - j$ ).

b) Formalmente  $O(\sigma_k) = \xi^{k+1}$  ,  $k \geq 0$  .

c) La suma de todos los coeficientes numéricos en  $\Delta \sigma_{k+1}$  (habida cuenta de las simetrías) viene dada por

$$\frac{(k+2)^k}{(k+1)!} , \quad k \geq 0 .$$

d) En  $\Delta \sigma_k$  hay un total de

$$\binom{2k}{k} \frac{1}{k+1}$$

términos, siendo  $k \geq 0$  .

e) Se puede calcular  $\Delta \sigma_k$  directamente a partir de  $\varphi$  y de sus diferenciales sucesivas, viniendo dada su expresión por :

$$(3.2.5) \quad k \geq 1 \quad \Delta \sigma_k =$$

$$= \sum_{\substack{k_j = k \\ k_j \geq 1}} \frac{1}{\prod_j k_j!} L_{k_1} (L_{k_2} (\underbrace{\dots, L_0}_{k_2}), \dots, L_{k_j} (\underbrace{\dots, L_0}_{k_j}), \dots)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{k_1}$

en donde cada operador  $L_{k_j}$  se aplica a  $k_j$  vectores y el último eslabón en cada cadena de aplicaciones es  $L_0$ . Obsérvese que esta fórmula permite dar directamente las perturbaciones de cualquier orden en el método clásico.

Demostración : a) y b) van íntimamente relacionadas, ya que escogemos en  $\sigma_{k+1}$  los términos de la derecha de (3.1.1) que nos darán formalmente hasta orden  $k+2$ . Como  $D^j \varphi$  lo consideramos de orden 1, la suma de los demás órdenes debe ser  $k+1$ . Dado que  $L_j$  se aplica a  $j$  vectores  $\Delta \sigma_{i_p}$  y el orden de cada uno de éstos es  $i_p + 1$ , se obtiene de inmediato que

$$\sum_{p=1}^j i_p = k+1-j.$$

c) Es un ejercicio de combinatoria que vamos a esquematizar. Se tiene de inmediato la validez de la fórmula para  $k=0,1,2$ . Procedamos por inducción : Supuesto cierto hasta  $k$ , debe ser

$$(3.2.6) \quad \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{j \\ \sum_{h=1}^j i_h = k+1-j \\ i_h \geq 0}} \prod_{h=1}^j \frac{(i_h+1)^{i_h-1}}{(i_h)!} = \frac{(k+2)^k}{(k+1)!},$$

o, equivalentemente :

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\alpha} \frac{(k+1)!}{j! i_1! \dots i_j!} \prod_{h=1}^j (i_h+1)^{i_h-1} = (k+2)^k.$$

Es inmediato que se deberá cumplir

$$(3.2.7) \quad \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} \sum_{\alpha} \frac{(k+1-j)!}{i_1! \dots i_j!} \prod_{h=1}^j (i_h+1)^{i_h-1} =$$

$$= \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} (k+1)^q = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{k+1-j} (k+1)^{k+1-j} .$$

Para ello bastará que sean iguales en (3.2.7) los sumandos con la misma  $j$ , o sea

$$\frac{k+1}{j} \sum_{\alpha} \frac{(k+1-j)!}{i_1! \dots i_j!} \prod_{h=1}^j (i_h+1)^{i_h-1} = (k+1)^{k+1-j} .$$

Es decir, con el cambio de nomenclatura  $k+1-j \rightarrow b$ , y llamando

$$\psi(b, j) = \sum_{\substack{j \\ \sum_{h=1}^j a_h = b, a_h \geq 0}} \frac{b!}{a_1! \dots a_j!} \prod_{h=1}^j (a_h+1)^{a_h-1} ,$$

debe cumplirse

$$(3.2.8) \quad \psi(b, j) = j(b+j)^{b-1} .$$

Trivialmente (3.2.8) es cierto si  $j=1$ ,  $\forall b \in \mathbb{N}$ .  
 Supuesto cierto para  $j$ , veamos que lo es para  $j+1$ .  
 Apoyándonos en la hipótesis de inducción, descomponemos  $b$  en  $b_1$  y  $b_2$ ,  $b_1$  en  $j$  partes y  $b_2$  en una.  
 Para estos dos es cierta (3.2.8); luego haciendo recorrer a  $b_2$  todos los valores desde 0 hasta  $b$  y sumando, obtenemos:

$$\sum_{k=0}^b \binom{b}{k} j (b+j-k)^{b-k-1} (k+1)^{k-1} = (b, j+1) \stackrel{?}{=} (j+1)(b+j+1)^{b-1} .$$

Para probarlo usamos la fórmula de Abel (Journal Crelle, 1826)

[95] :

$$(3.2.9) \quad (c+a)^m = \sum_{h=0}^m \binom{m}{n} c(c-nd)^{n-1} (a+nd)^{m-n}$$

válida  $\forall a \in \mathbb{R}$ . Si  $d = -1$  y  $c = 1$  :

$$(a+1)^m = \sum_{h=0}^m \binom{m}{n} (1+n)^{n-1} (a-n)^{m-n} .$$

Se tiene, pues :

$$\begin{aligned} (j+1)(b+j+1)^{b-1} &= (b+j+1)^b - b(b+j+1)^{b-1} = \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^b \binom{b}{n} (n+1)^{n-1} (b+j-n)^{b-n}}_{(3.2.9) \text{ con } m=b, a=b+j} - b \underbrace{\sum_{n=0}^{b-1} \binom{b-1}{n} (1+n)^{n-1} (b+j-n)^{b-n-1}}_{(3.2.9) \text{ con } m=b-1, a=b+j} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{b-1} \left[ \binom{b}{n} (b+j-n) - \binom{b-1}{n} b \right] (b+j-n)^{b-n-1} (n+1)^{n-1} + (b+1)^{b-1} = \\ &= \sum_{n=0}^b \binom{b}{n} j (b+j-n)^{b-n-1} (n+1)^{n-1} = \psi(b, j+1) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

De aquí sacamos como consecuencia que si  $L_k$  es del orden de  $\xi$  y en la composición e integración no disminuye el orden (lo que puede ocurrir debido a las resonancias) (ver también Loomis [78]), se tiene :

$$(3.2.10) \quad \Delta \sigma = o\left(\sum_0^{\infty} \xi^{n+1} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\right)$$

en la hipótesis de que todas las derivadas son de orden de magnitud parecido. Esto de un valor de  $e^{-1}$  como radio



de convergencia de (3.2.10). Con las hipótesis mencionadas ésta sería la cota que habría que imponer al pequeño parámetro  $\xi$  para conseguir convergencia en el método clásico. También puede obtenerse el radio de convergencia si se dispone de acotaciones de la norma de  $L_k$ .

d) Nos referimos aquí al número total de sumandos en (3.2.4) haciendo caso omiso de sus coeficientes (lo que tiene interés en el cálculo efectivo como comprobación de que no omitimos ningún término). Evidentemente el teorema de Schwarz permitirá agrupar algunos de los términos debido a la simetría de  $D^k \psi$ , pero no tenemos ahora en cuenta esta reducción, (nótese sin embargo que es importante, como se indica en (3.2.11)).

k	0	1	2	3	4	5	6
nº de sumandos sin contar simetría	1	1	2	5	14	42	132
nº de sumandos contando simetría	1	1	2	4	9	20	48

3.2.11 Tabla

Si llamamos  $a_k$  al número de términos en  $\Delta \sigma_k$ , se tiene:

$$a_k = \sum_{j=1}^k a_{k-j} a_{j-1} \quad \text{siendo} \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Debemos hallar la expresión de  $a_k$ . Probaremos por inducción que

$$a_k = \binom{2k}{k} \frac{1}{2k+1}.$$

Supuesta cierta la fórmula para  $k = 0, 1, \dots, n$ , debe cumplirse :

$$(3.2.12) \quad \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{k+1} \frac{1}{n-k+1}.$$

Probar (3.2.12) equivale a demostrar que

$$\sum_{k=0}^n b_k = \frac{4n+2}{n+2},$$

siendo  $b_0 = 1$ , y

$$(3.2.13) \quad b_k = b_{k-1} \frac{(2k-1)(n-k+2)}{(2n-2k+1)(k+1)}.$$

Dado que esta expresión corresponde a una progresión hipergeométrica cuya suma no se conoce en el caso general, procedemos a sumarla directamente.

De (3.2.13) obtenemos

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} \frac{b_{n-k+1}}{b_{n-k}} = 1,$$

que da inmediatamente  $b_k = b_{n-k}$ ,  $b_n = 1$ . Por tanto

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-2k)b_k = 0, \text{ lo que implica } n \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} kb_k.$$

Sea  $c_k = (k+1)b_k$ . Se tiene

$$c_k(2n-2k+1) = c_{k-1}(2k-1)(n-k+2), \quad k = 1 + n.$$

Sumando m. a m. y simplificando

$$nc_n = (n+1)c_0 + \left( \sum_{k=1}^{n-1} c_k \right) (n+1) \implies \sum_{k=1}^{n-1} c_k = n-1,$$

es decir :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kb_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = n-1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kb_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \frac{n}{2} = 0,$$

sistema del que se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{2n-2}{n+2} \implies \sum_{k=0}^n b_k = \frac{4n+2}{n+2} \quad \text{q.e.d.}$$

e) Es inmediato a partir de la expresión dada en a) para  $\Delta \sigma_k$ .

Nótese que si (3.1.1) es de la forma

$$(3.2.14) \quad \dot{\sigma} = \sum_{i \geq 1} \varphi_i(\sigma, t)$$

con  $\varphi_i = O(\varepsilon^i)$  se obtienen fórmulas análogas a las dadas para la contribución de orden  $\varepsilon^j$  a la solución de (3.1.1). Guiados por (3.2.1) introducimos la

3.2.15. Definición. - Llamamos operador de iteración  $L_{k,m}$  definido sobre  $k$  vectores al dado por

$$L_{k,m}(\nu_1, \dots, \nu_k) = \int (D^k \varphi_m(\sigma_0, t))(\nu_1, \dots, \nu_k) dt$$

Como caso particular se encuentran los operadores definidos anteriormente :

$$L_k = L_{k,1}$$

Hacemos extensiva la observación efectuada en (3.2.1).

3.2.16. Teorema. - El término de orden  $k+1$  en la solución formal de (3.2.14) viene dado por

$$\Delta \sigma_k = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \sum m_j = k \\ k_h, m_j \geq 1}} \frac{1}{\prod k_h!} L_{k_1, m_1} (L_{k_2, m_2} (\dots, L_{0, m_i}), \dots, L_{k_j, m_j} ( ))$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{k_1}$

en donde cada operador  $L_{k_j, m_j}$  se aplica a  $k_j$  vectores

y el último eslabón en cada cadena de aplicaciones es de la forma  $L_{0,m_j}$ .

La demostración es idéntica a la de (3.2.3)

## Capítulo 4

EL TEOREMA DE LAGRANGE Y LA COMPARACION DE LOS METODOSFORMALES DE LA TEORIA DE PERTURBACIONESIntroducción.

Dejando para más adelante la descripción y comentario acerca de los diversos métodos utilizados, digamos sólo que el problema central consiste en hallar una transformación canónica que elimine del hamiltoniano los términos de un determinado tipo, de manera que el hamiltoniano transformado sea fácilmente integrable.

La solución del problema canónico simplificado debe transformarse de nuevo a las variables iniciales. Debemos obtener explícitamente una variable que se halla en forma implícita con otras variables y parámetros. Es aquí donde interviene el teorema de Lagrange.

En (4.1.3) se ha obtenido una generalización del citado teorema, que engloba todos los casos considerados anteriormente, y que, junto con los corolarios que de él se deducen, es utilizado más adelante.

Asimismo se presenta en (4.1.8) una extensión del primitivo teorema conservando la misma apariencia formal.

En (4.2.3) se demuestra que la aplicación del teorema de Lagrange generalizado es equivalente a los algoritmos de Henrard relativos a las series de Lie.

Como resultado fundamental se prueba en §4.3. la equivalencia de los métodos clásico, de Deprit y de Lacina, que junto a las equivalencias ya conocidas (ver §4.2.) producen la equivalencia formal de todos los métodos utilizados en Mecánica Celeste.

#### §4.1.- El teorema de Lagrange.

Es típico de la teoría de perturbaciones el transformar (3.1.1) en otra ecuación más sencilla mediante cambios de variable, hallar la solución de la nueva ecuación y deshacer los cambios. Esto obliga a dar métodos para desarrollar una función en serie de Taylor en términos de otra función. El primer teorema en este sentido para funciones de 1 variable compleja es el teorema de Lagrange (Whittaker-Watson [123]). Actualmente dicho teorema se obtiene como consecuencia del

4.1.1. Teorema (Teixeira)..- Sea  $f(z)$  analítica en  $A$ , región en forma de corona con borde exterior  $C$  e interior  $c$ ; sea  $\theta(z)$  analítica en  $C$  y en el recinto que limita  $C$ , poseiendo en éste un único cero  $a$  que suponemos simple y tal que para un cierto  $x \in A$ ,

$$\forall z \in C, |\theta(x)| < |\theta(z)|; \forall z' \in c, |\theta(x)| > |\theta(z')|.$$

Entonces se tiene

$$f(x) = \sum_0^{\infty} A_n \theta^n + \sum_1^{\infty} B_n \theta^{-n}$$

com

$$A_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_C \frac{f'}{\theta^n} dz \quad \text{para } n \neq 0, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f\theta'}{\theta} dz,$$

$$B_n = -\frac{1}{2\pi i n} \int_c f'\theta^n dz.$$

4.1.2. Corolario (Teorema de Lagrange)..- Sea  $C$  un camino cerrado simple que rodea un punto  $a$ . Sean  $f, g$  analíticas en  $C$  y en la región  $A$  que éste limita, y sea  $x$  tal que  $\forall z \in C$  se cumpla  $|xg(z)| < |z - a|$ . Entonces  $y = a \pm xg(y)$  tiene una única raíz  $y$  en

A y se tiene :

$$f(y) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ f'(a) \cdot (g(a))^n \right] .$$

La demostración de (4.1.1) y (4.1.2) puede hallarse en 123 p.131-133 .

Generalizaciones del teorema de Lagrange se hallan en Dieudonné [31] p.271 y Hagihara [52] Vol.I, p.117 y Vol.II, p.399. Sin embargo en Mecánica Celeste éstas son insuficientes. Vamos a estudiar el caso en que se tienen relaciones más generales entre  $y$  y  $a$  ; permitiremos que el parámetro (vectorial)  $x$  intervenga en  $f$  y ésta será una función vectorial.

Obtenemos el siguiente resultado :

4.1.3. Teorema.— Sean  $g(y,x)$  ,  $f(y,x)$  funciones analíticas en un entorno de  $(a,0)$  . Consideremos la relación  $g(y,x) = a$  ; sean  $g(a,0) = 0$  ,  $D_y g(a,0)$  un isomorfismo ,  $f(y,x) \in \mathbb{C}^p$  , con  $y \in U \subset \mathbb{C}^n$  ,  $x \in V \subset \mathbb{C}^m$  . Entonces :

$$f(y,x) = F(a,x) = f(a,0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x)^k ,$$

en donde  $F^{(k)}$  , que depende de  $f$  y  $g$  , pertenece a  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m \times \dots \times \mathbb{C}^m, \mathbb{C}^p)$  y viene dado por

$$F^{(k)} = \sum_{\substack{k, h_1, h_2 \\ r, s, q}} \left( C_{r_1, \dots, r_q, s_1, \dots, s_q}^{k, h_1, h_2} D_x^{h_1} D_y^{h_2} f \cdot \left( (D_x^{s_1} y)^{r_1}, \dots, (D_x^{s_q} y)^{r_q} \right) \right) \Bigg|_{\substack{y=a \\ x=0}} \left. \begin{array}{l} h_1 + \sum_{i=1}^q r_i s_i = k \\ \sum_{i=1}^q r_i = h_2, h_i \geq 0, r_i \geq 1 \end{array} \right.$$

con

$$C_{r_1, \dots, r_q, s_1, \dots, s_q}^{k, h_1, h_2} = \frac{k!}{h_1! \prod_{i=1}^q (s_i!)^{r_i} r_i!}$$

(ó abreviadamente  $C_{r, s, q}^{k, h_1, h_2}$  ; abreviamos también de ahora

en adelante las condiciones sobre el sumatorio en la forma indicada), y obteniéndose  $D_x^k y$  por recurrencia mediante

$$D_x^k y = - (D_y g)^{-1} \sum_{\alpha_{r, s, q}^{k, h_1, h_2}} C_{r, s, q}^{k, h_1, h_2} D_x^{h_1} D_y^{h_2} g((D_x^{s_1} y)^{r_1}, \dots, (D_x^{s_q} y)^{r_q})$$

$(y=a, x=0)$  .

Nota : Obsérvese la relación de los coeficientes  $C$  con los coeficientes de Faà di Bruno (Hagihara [52] Vol.II, p.398, Abramowitz-Stegun [2] p.823,824), y con los números de Stirling de 2ª especie, así como con el Master Theorem de Mac Mahon ([96] p.17). Compárense con los obtenidos para el método de von Zeipel en [43].

Demostración : Aplíquese el teorema de la función implícita y calcúlese. El valor del coeficiente se obtiene por inducción.

En las aplicaciones es corriente el caso en que  $D_y g = I$ . En particular es de especial interés el caso en que el paso de  $a$  a  $y$  es "próximo a la identidad" , es decir

$$y = a + h(y)(x) ,$$

siendo  $h : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$  ;  $g(y, x) = y - h(y)(x)$  .

Entonces  $D_y g = I - D_y h(x)$  ,  $D_y^k g = - D_y^k h(x)$  ,  $D_x^k g = -h$  ,  
 $k > 1$



$D_x^k g = 0$  ,  $D_x D_y^k g = -D_y^k h$  , con lo que se obtiene el  
 $k > 1$

4.1.4. Corolario. - Con las hipótesis anteriores :

$$D_x y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=a}} = h(a)$$

$$D_x^k y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=a}} = \sum_{\substack{\alpha \\ r,s,q}} C_{r,s,q}^{k,1,k_2} D_y^{k_2} h((D_x^{s_1} y)^{r_1}, \dots, (D_x^{s_q} y)^{r_q}) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=a}} \\ k > 1, \quad k_2 \neq 0$$

Habitualmente  $f$  es sólo función de  $y$  . Si no es así, podemos escribir

$$f = \sum f_k(y) (x)^k$$

y expresar cada una de las  $f_m$  en términos de  $x$  y  $a$  .  
 Trivialmente :

4.1.5. Corolario. - Con las hipótesis anteriores se tiene

$$f(y) = \sum_0^{\infty} \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x)^k \quad \text{con } F^{(0)} = f(a) , \text{ y para } k \geq 1$$

$$F^{(k)}(a) = \sum_{\substack{\alpha \\ r,s,q}} C_{r,s,q}^{k,0,k_2} D_y^{k_2} f((D_x^{s_1} y)^{r_1}, \dots, (D_x^{s_q} y)^{r_q}) . \\ k_2 \neq 0$$

Si la transformación "próxima a la identidad" adopta la forma

$$y = a + \sum_{j \geq 1} h_j(y) \frac{(x)^j}{j!} \quad \text{con } h_j : U \longrightarrow \mathcal{L}(C^m \times \dots \times C^m; C^n)$$

debemos modificar los resultados obtenidos. Es inmediato que

$$D_x^j g(a) = -h_j(a) \quad , \quad D_y g(a) = I \quad , \quad D_y^j g(a) = 0 \quad , \quad D_x^j D_y^r g(a) =$$

$$j > 0 \qquad \qquad \qquad j > 1$$

$$= -D_y^r h_j \quad , \quad \text{con lo que llegamos al}$$

4.1.6. Corolario. - En las hipótesis precedentes, es válida la expresión en (4.1.5) y la de (4.1.4) se modifica obteniendo :

$$D_x^k y(a) = \sum_{\substack{k, p_1, p_2 \\ r, s, q}} C_{r, s, q}^{k, p_1, p_2} D_y^{p_2} h_{p_1} \left( (D_x^{s_1} y)^{r_1}, \dots, (D_x^{s_q} y)^{r_q} \right) \Big|_{x=0}^{y=a}$$

El caso en que  $m = 1$  , esto es, la transformación próxima a la identidad depende de un único parámetro :  
 $y = a + xg(y)$  se tiene obviamente :

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = g(y) \quad , \quad y(0) = a \quad , \quad \frac{df}{dx} = D_y f \cdot g \quad , \quad f(x=0) = f(y=a).$$

Podemos aplicar entonces la técnica introducida en §3.2. con  $\varphi = g(y)$  ó  $\varphi = D_y f \cdot g$  para obtener la expresión de  $y$  ,  $f$  en función de  $x$  . Encontramos así de nuevo las fórmulas dadas en (4.1.4), (4.1.5). Obsérvese que por ser independiente de  $x$  la integración da los factores  $x^k/k!$  . Así el teorema de Lagrange generalizado se obtiene del método clásico de perturbaciones. Si  $\varphi$  es sólo función de  $y$  el método vale para  $m \neq 1$  .

Las expresiones dadas en (4.1.4), (4.1.5) pueden obtenerse de forma elegante (Feagin-Gottlieb [39] ) mediante las fórmulas recurrentes :

$$\left. \begin{aligned} F^{(k)}(a) &= \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} D_a F^{(k-r-1)}(a) G^{(r)}(a) \\ G^{(s)}(a) &= \sum_{s=0}^r \binom{r-1}{s} D_a G^{(r-s-1)}(a) G^{(s)}(a) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Iniciadas con} \\ F^{(0)} = f(a), \\ G^{(0)} = h(a), \end{array}$$

(en donde abreviamos :  $D_a \psi(a) = D_y \psi(y) \Big|_{y=a}$  ) .

Nótese que  $G^{(p)}(a) \in \mathcal{L}(C^m \times \dots \times C^m ; C^n)$  y que

$$D_a F^{(r)}(a) \in \mathcal{L}(C^n, C^m \times \dots \times C^m ; C^p) .$$

Sería interesante disponer de fórmulas análogas a las dadas en el primitivo teorema de Lagrange. Para ello debemos introducir la

4.1.7. Definición. - Sean  $y \in U \subset C^n$  ,  $D_y^r : U \rightarrow \mathcal{L}(C^m ; C^p)$  ,  $s_i : U \rightarrow \mathcal{L}(C^m ; C^n)$  ,  $i = 1 + m$  .

Suponemos  $D_y^r$  ,  $s_i \in \mathcal{L}^\infty(U)$  . Sea  $\psi = (D_y^r ; s_1, \dots, s_m)$  .

Llamaremos derivada contractiva  $\mathcal{D}_y$  de  $\psi$  a la definida mediante

$$\mathcal{D}_y \psi(y) = (D_y^2 r(y) ; s_1(y), \dots, s_m(y)) + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i \neq j} (D_y^r(y) ; s_1(y), \dots, \hat{s}_i, D_y s_i(y) \cdot s_j(y), \dots, \hat{s}_j(y), \dots, s_m(y))$$

donde  $\hat{\phantom{x}}$  significa suprimir. Análogamente se definen las derivadas sucesivas, llegando después de  $m-1$  derivaciones a expresiones de la forma

$$(D_y^k r(y) ; w_1(y), \dots, w_k(y))$$

que tomaremos como  $D_y^k r(y)(w_1(y), \dots, w_k(y))$  .

4.1.8. Proposición. - En las hipótesis de (4.1.5), se tiene

$$F^{(k)}(a) = \mathcal{D}_a^{k-1} [D_a f; h, h, \dots, h] \quad k \geq 1 .$$

Demostración : Para  $k = 1$  es trivialmente cierto teniendo en cuenta (4.1.4) y (4.1.5) . Supuesto cierto para  $k$  debemos comprobar que

$$D_x \mathcal{D}_a^{k-1} [D_a f; h, \dots, h] = \mathcal{D}_a^k [D_a f; h, \dots, h]$$

El segundo miembro podemos considerarlo igual a

$$\mathcal{D}_a^{k-1} \left\{ [D_a^2 f; h, \dots, h] + (k+1) [D_a f; D_a h(a) \cdot h(a), h(a), \dots, h(a)] \right\}$$

habida cuenta de la simetría de  $D_a^i f$  . El primer miembro, utilizando el hecho de que  $D_x f = D_a f \cdot h$  , nos da

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_a^{k-1} \left\{ [D_a (D_x f); h, \dots, h] + [D_a f; D_x (h, \dots, h)] \right\} = \\ & = \mathcal{D}_a^{k-1} \left\{ [D_a^2 f; h, \dots, h] + [D_a f; D_a h(a) \cdot h(a), h(a), \dots, h(a)] + \right. \\ & \quad \left. + k [D_a f; D_a h(a) \cdot h(a), h(a), \dots, h(a)] \right\} \end{aligned}$$

con lo que queda probada la proposición.

#### §4.2.- Exposición de diversos tipos de métodos.

Excepto el método clásico que ha constituido el objeto del capítulo anterior, todos los demás procedimientos utilizados en la teoría de perturbaciones se aplican a ecuaciones

en forma canónica, si bien se generalizan posteriormente a ecuaciones no canónicas. Además toda ecuación diferencial puede ponerse en forma canónica simplemente doblando el número de variables (ver Dirac [32]). La idea esencial en todos los procedimientos es la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi por un método iterativo.

Podemos agrupar los métodos en tres amplias clases : Teoría de promedios, series de Lie, y obtención de integrales primeras. El texto de Giacaglia [44] es una referencia standard de dichos métodos.

a) La teoría de promedios se utiliza en Mecánica Celeste desde los trabajos de Lindstedt [77] refundidos por Poincaré [98] Vol.II . Posteriormente el método fue redescubierto por von Zeipel [127] quién lo aplicó al estudio del movimiento de pequeños planetas.

La teoría de promedios toma cuerpo matemático con los trabajos de Bogoliubov, Krilov y Mitropolsky [13] . Morrison ofrece en [87] una clara exposición y observa cómo el método de promedios es una generalización del de Lindstedt-Poincaré-von Zeipel.

El carácter canónico de un sistema de ecuaciones puede perderse al promediar, pero Burshtein y Solov'ev [15] muestran cómo escoger las funciones arbitrarias que se introducen en el método para recobrar el carácter canónico. V.V.Laričeva [73] ofrece una interesante discusión de los promedios de orden superior con acotación de los errores producidos en un intervalo de tiempo finito.

Zabreiko et al. [126] muestran cómo, en ciertos casos, el método de los promedios se obtiene como consecuencia del teorema de la función implícita del análisis funcional.

Morrison [86] obtiene el método del desarrollo en 2

variables (lenta y rápida) debido a Kevorkian [66] como caso particular de la teoría de promedios. Un método de promediar distinto del standard lleva a Diliberto a su teoría de superficies periódicas [33]. En Arnol'd - Avez ([9] p.103) se ofrecen ideas penetrantes de dicho procedimiento. (Véase también § 5.3.).

Musen [93] y Giacaglia [43] han dado la forma de obtener los términos de cualquier orden del método de von Zeipel. Este ha sido aplicado con éxito por Brouwer ([14] p.562) en el estudio del efecto de  $J_2$  en un satélite terrestre. Un detallado estudio del mismo problema con incorporación de armónicos zonales puede verse en Calvo [18].

La convergencia del método de von Zeipel excepto para un conjunto de condiciones iniciales de medida de Lebesgue pequeña con la perturbación ha sido establecida por Barrar [11] y [12] con el método utilizado en el teorema de Kolmogorov-Arnol'd-Moser ([67], [5], [89], [104], [120]). Debe observarse que Barrar construye actualmente la solución, mientras que Arnol'd, para la mayoría de las condiciones iniciales, construye un toro invariante en el que se desarrolla el movimiento perturbado, cerca del toro invariante (de idénticas frecuencias) correspondiente al movimiento sin perturbar.

En síntesis, dado el sistema

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x) \quad (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$\varepsilon$  = "pequeño parámetro", se trata de resolver el sistema "promediado":

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi)$$

siendo  $X_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt$ , y de acotar  $|x - \xi|$ ,

al menos para  $0 < t < 1/\varepsilon$ . (Véase §5.3.) (\*).

En el método de von Zeipel se trata de construir una transformación canónica para eliminar de un hamiltoniano del tipo

$$H(y, x, \xi) = H_0(x) + \xi H_1(x, y) + \dots$$

los términos en que intervengan las variables angulares  $y$  (al menos parcialmente).

Ello se consigue mediante una función generatriz

$$W(y, X, \xi) = y \cdot X + \xi S_1(y, X) + \xi^2 S_2(y, X) + \dots$$

de la que se tiene la transformación canónica

$$Y = D_x W^T, \quad x = D_y W^T,$$

y que coincide con la identidad para  $\xi = 0$ . La sustitución directa e igualación de términos da:

$$H(y, D_y W^T, \xi) = K(X, \xi) \quad (K = \text{nuevo hamiltoniano}),$$

$$K_0 = H_0, \quad D_x H_0 \cdot D_y S_1^T = K_1 - H_1,$$

$$D_x H_0 \cdot D_y S_2^T + \frac{1}{2} D_x^2 H_0 (D_y S_1^T, D_y S_1^T) + D_x H_1 \cdot D_y S_1^T + H_2 = K_2, \text{ etc.}$$

Si  $P$  es el operador "promedio respecto a  $y$ " tomamos:

$$K_1 = P H_1, \quad D_x H_0 \cdot D_y S_1^T = (K_1 - H_1)(x),$$

$$S_1 = \int \sum_j (K_1 - H_1) (D_{x_j} H_0)^{-1} dy_j + A_1(x), \quad A_1 \text{ arbitrario,}$$

obteniéndose análogamente los demás términos.

---

(\*) Para un Hamiltoniano en las variables  $I$  (acción),  $\varphi$  (ángulo), se entiende que el promedio se efectúa respecto a todas las variables  $\varphi$ .

b) El método de las series de Lie (Lie [76] p.52, Gröbner [50]), ha sido utilizado recientemente en teoría de perturbaciones (véase sin embargo Leimanis [75] p.121). El primero en aplicarlo a Mecánica Celeste parece ser Hori [56] para sistemas canónicos, quien posteriormente establece su equivalencia con vonZeipel [57] y lo generaliza más adelante a sistemas no canónicos [58]. Esta generalización ha sido también establecida independientemente por Calvo [17].

Posteriormente (y mencionando de pasada el trabajo de Sersic [106]), es Deprit [28] quien reaviva el interés por las series de Lie, destacando la sistematización en la transformación del Hamiltoniano y en el cambio directo e inverso de variables. Como en el método de promedios, se busca un nuevo hamiltoniano en el que, por ejemplo, desaparezcan las variables angulares. Véase la aplicación al caso de un satélite artificial (Deprit [30]) perturbado sólo por  $J_2$  o al método de normalización de Birkhoff ([29]) de la transformación de Deprit. Este método ha sido generalizado por Kamel [59] quien luego lo aplicó a problemas no canónicos [60]. Henrard sistematiza la teoría de las series de Lie aplicadas a perturbaciones de sistemas cualesquiera explicitando todos los algoritmos [54] (ver 4.2.1). Posteriormente Kamel [61] compara el método de Deprit generalizado aplicado a un sistema no hamiltoniano y el método inicial aplicado a la hamiltonianización del mismo problema, comprobando su equivalencia.

Campbell y Jefferys [21] (así como posteriormente Mersman [82]) comprueban las equivalencias de las formulaciones de Hori y Deprit explicitando las relaciones entre funciones generatrices hasta 6º orden (ayudados del LISP); Shniad [107] demuestra la equivalencia de los métodos de von Zeipel y de Lie, equivalencia completada por Mersman [83] que la hace extensiva al método de Hori. Rapaport [101] muestra la equi-



valencia de los métodos de Deprit y Hori sin pasar por la función generatriz de von Zeipel. Finalmente Stern [116] tomando en consideración transformaciones canónicas (próximas a la identidad) directas, con carácter general, encuentra el método de von Zeipel o el de Lie según las funciones (arbitrarias en su método) que escoja.

Exponemos a continuación el método de las series de Lie en la formulación dada por Henrard [54] :

Sea  $x = X(y, \xi)$  la transformación  $y \in U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n$  dependiente de  $\xi \in \mathbb{R}$  dada por

$$\frac{dx}{d\xi} = W(x, \xi) \quad , \quad x(0) = y \quad ,$$

suponiendo  $W$  analítica en  $\xi$  en un cierto entorno de cero. La expresión de  $x$  es

$$X(y, \xi) = x = \sum_0^{\infty} \frac{\xi^i}{i!} D^i x \quad \left| \begin{array}{l} x = y \\ \xi = 0 \end{array} \right.$$

siendo  $Df(x, \xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi} + D_x f \cdot W$  . Sea  $y = Y(x, \xi)$

la transformación inversa.

Si la evolución de  $x$  viene regida por ecuaciones canónicas entonces  $W$  es el gradiente simpléctico (ver Souriau [115] p.87) de una función  $\mathcal{W}$  y se tiene

$$D\phi(x, \xi) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \{\phi ; \mathcal{W}\}$$

cuando  $\phi$  es una función escalar.

Sean  $\phi$  y  $P$  una función escalar y un campo vectorial  $n$ -dimensional respectivamente,  $\mathcal{L}(W)$  y  $\tilde{\mathcal{L}}(W)$  las aplicaciones

$$\mathcal{L}(W) \phi(x, \varepsilon) = \psi(y, ) = \phi(X(y, \varepsilon), \varepsilon)$$

$$\mathcal{L}(W) P(x, \varepsilon) = Q(y, ) = \left[ D_x Y \cdot P \right]_{x = X(y, \varepsilon)}$$

Se tiene :

$$(4.2.1) \text{ Algoritmo I : Si } \phi(x, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_n^{(0)}(x) \quad y$$

$$W = \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(x)$$

entonces

$$\psi(y, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \phi_0^{(n)}(y)$$

con

$$\phi_0^{(n)} = \phi_n^{(0)} + \sum_1^n \binom{n}{j} M_j \phi_{n-j}^{(0)} \quad y \quad M_1 = L_1 ,$$

$$M_j = L_j + \sum_1^{j-1} \binom{j-1}{i-1} M_{j-i} L_i \quad , \quad L_i \phi = D_x \phi \cdot W_i .$$

$$(4.2.2) \text{ Algoritmo II : Si } P(x, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \tilde{P}_n^{(0)}(x) \quad ,$$

entonces

$$Q(y, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \tilde{P}_0^{(n)}(y)$$

con

$$\tilde{P}_0^{(n)} = \tilde{P}_m^{(0)} - \sum_1^n \binom{n}{j} \tilde{P}_{j, n-j} \quad , \quad \tilde{P}_{ij} = -\tilde{L}_i \tilde{P}_0^{(j)}$$

$$- \sum_1^{i-1} \binom{i-1}{k-1} \tilde{L}_k \tilde{P}_{i-k, j} \quad , \quad \tilde{L}_m f = D_x f \cdot W_m - D_x W_m \cdot f .$$

Si el cambio de variables que hacemos es canónico basta saber transformar funciones escalares. Obsérvese que al transformar el campo  $P$  se obtiene el campo  $Q$  no en

la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ , sino en la base nueva  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \right\}$  por lo que en realidad debemos hacer el cambio de la función n-dimensional  $D_x Y \cdot P$

4.2.3. Proposición. - Los algoritmos I y II del método de las series de Lie tal como se han expuesto, producen el mismo resultado que (4.1.3).

Demostración : Utilizando la notación del §3.2. tenemos

$$D_x y = \sum_0^{\infty} W_{i+1}(y) \frac{(x)^i}{i!}$$

Sea  $z = D_x y$  ;  $D_x^k y = D_x^{k-1} z =$

$$= \sum_{r,s,q}^{k-1,p_1,p_2} C_{r,s,q}^{k-1,p_1,p_2} D_y^{p_2} W_{p_1+1} \left( (D_x^{s_1} y)^{r_1}, \dots, (D_x^{s_q} y)^{r_q} \right)$$

$$\propto_{r,s,q}^{k-1,p_1,p_2}$$

$$D_x y \Big|_{x=0} = W_1$$

Basta ahora aplicar la expresión de  $F^{(k)}$  de (4.1.3) con los valores de  $D_x^k y$  obtenidos, para encontrar el mismo resultado que en (4.2.1).

La comprobación para campos vectoriales es más laboriosa y el uso del teorema de Lagrange exige más esfuerzo que

(4.2.2), digno de todo elogio. En efecto, conociendo  $D_x^k y \Big|_{\substack{y=a \\ x=0}}$

como se acaba de indicar, hay que calcular  $D_x^k a(y)$  mediante

$$(4.2.4) \quad D_x^k a(y) = \sum_{\substack{r,s,q \\ \propto_{r,s,q}^{k,p_1,p_2}}} C_{r,s,q}^{k,p_1,p_2} D_a^{p_2} \left( -D_x^{p_1} y \Big|_{\substack{y=a \\ x=0}} \right) \left( (D_x^{s_1} a)^{r_1}, \dots \right) \Big|_{\substack{a=y \\ x=0}} \quad p_1 \neq 0$$

Como se ha indicado antes de (4.1.5), si  $f = \sum f_k(y)(x)^k$  se reduce al caso de (4.1.3). En nuestro problema

$$\sum f_k(y)(x)^k = D_y a \cdot P \quad ,$$

con

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(y) \frac{(x)^j}{j!} \quad .$$

Se tiene

$$f_k = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} D_x^m D_y^m a \cdot P_{k-m} \quad ,$$

obteniéndose  $D_x^m D_y^m a$  por derivación de (4.2.4).

Nótese, pues, que el método de las series de Lie produce análogos resultados al teorema de Lagrange (véase Griffith [49]) para un caso muy particular de (4.2.3). Sin embargo (4.1.3) permite trabajar con relaciones mas generales que las series de Lie. Por ejemplo, relaciones entre  $a$  e  $y$  implícitas ; relaciones dadas por

$$D_x^k y = \sum W_i(y)(x)^i$$

conociendo  $D_x^j y$   $j = 0 + k-1$  en función de  $x$  y  $a$  ; permite el uso del parámetro  $x$   $m$ -dimensional ; permite trabajar con variables  $y$  sometidas a ligaduras (variables sobreabundantes como se las llama en la literatura de Mecánica Celeste), etc. Pueden transformarse también funciones vectoriales. En realidad (4.1.3) es la base de cualquier transformación de variables, funciones o campos.

c) Integrales primeras formales : Finalmente existen lo métodos cuyo objetivo es encontrar integrales primeras independientes. Admitimos que el sistema se presenta en forma canónica (sabemos que ello no es ninguna restricción).

Destaquemos primero que además de los teoremas clásicos de Bruns, Poincaré y Painlevé (ver Hagihara [52] Vol. II, p556-604 y 613-639) acerca de la no existencia de ciertos tipos de integrales primeras distintas de las clásicas en el problema de  $n$  cuerpos, se sabe ([108]) que no existen integrales primeras analíticas en el entorno de un punto singular, e incluso ([88]) que no existen integrales <sup>1</sup> para un conjunto denso de sistemas hamiltonianos. Ello no impide que existan para determinados valores de los parámetros de la perturbación. Nos limitaremos aquí, como en lo que precede, al carácter formal.

E.T. Whittaker [122] introduce las integrales adélficas o integrales primeras formales en 1916 ( $\alpha\delta\epsilon\lambda\phi\iota\kappa\omicron\varsigma$  = hermanadas, por estar íntimamente relacionadas con la integral de la energía). Fundamentalmente ([44] p.91) basta imponer  $\{H, G\} = 0$ , siendo  $G$  la integral buscada. Si  $\xi$  es un pequeño parámetro y

$$H = H_0 + \xi H_1 + \xi^2 H_2 + \dots$$

escribimos también

$$G = G_0 + \xi G_1 + \xi^2 G_2 + \dots$$

Si  $H_0 = H_0(p)$  siendo  $p$  los momentos, puede escogerse como  $G_0$  cualquier función arbitraria de  $p$ , para que  $\{H_0, G_0\} = 0$ . Identificando:

$$\{H_0, G_1\} + \{H_1, G_0\} = 0,$$

$$\{H_0, G_2\} + \{H_1, G_1\} + \{H_2, G_0\} = 0, \text{ etc.}$$

lo que permite obtener (a menos de funciones arbitrarias de  $p$ ) las funciones  $G_1, G_2, \text{ etc.}$

Se sabe (Rüsmann [102], [103]) que para  $n = 2$  si el método de la integral adélfica converge, entonces también converge la normalización de Birkhoff.

Las integrales adélficas han cobrado interés en los trabajos de Contopoulos ([25]) y otros, bajo el nombre de tercera integral, (debido a que aparece una función que se comporta como integral (aislante) en problemas de dinámica galáctica, junto con la del momento y la de la energía).

Es de destacar que bajo el punto de vista numérico, para "pequeñas perturbaciones", las "integrales" adélficas se comportan efectivamente como integrales (Hènon-Heiles [53]).

Un procedimiento para obtener  $2n$  integrales adélficas en involución (incluyendo la de la energía) para sistemas hamiltonianos perturbados próximos a uno integrable ha sido dado por Lacina ([71]), pero será comentado en el próximo apartado.

#### §4.3.- Comparación del método de Lacina con el método de Deprit y con el método clásico.

Vamos a comparar ahora no las imágenes por diversas transformaciones de funciones escalares o vectoriales (que deben ser todas casos particulares más o menos elaborados de (4.1.3)), sino directamente las soluciones de sistemas hamiltonianos. Empezamos con un resumen del método de Lacina.

$$\text{Sea } H = H_0(q, p) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n H_n(q, p) \quad \text{el hamil-}$$

toniano de un sistema con  $N$  grados de libertad, para el que se supone que  $H_0$  es integrable en el sentido de Liouville, o sea, que existen  $N$  integrales primeras independientes. Entonces obviamente se podrá tomar como variables

dichas integrales y se tiene  $H_0 = H_0(p)$ . Si  $D_{p_N} H_0 \neq 0$  (lo cual es cierto con un eventual cambio de índices si no estamos en un punto de equilibrio), la transformación canónica que tiene por función generatriz

$$F = -H_0(p) \cdot \tilde{Q}_N - \sum_{k=1}^{N-1} P_k \cdot Q_k$$

convierte el hamiltoniano en  $H_0(\tilde{P}, \tilde{Q}) = P_N$ . Suponemos de ahora en adelante que se utilizan estas nuevas variables y suprimimos  $\sim$  para simplificar.

Se buscan por iteración las funciones

$$J_k = P_k + \sum \lambda^n J_{k,n}(Q,P)$$

$$W_k = Q_k + \sum \lambda^n W_{k,n}(Q,P)$$

de forma que el paso  $(P,Q) \longrightarrow (J,W)$  sea canónico y tal que

$$J_N = H = H_0 + \sum \lambda^n H_n.$$

Se tendrá entonces

$$\{J_k, J_r\} = 0 = \{W_k, W_r\}, \quad \{J_k, W_r\} = \delta_k^r$$

La solución obtenida por Lacina [71] es :

$$J_{k,n} = \int_0^{Q_N} (D_{Q_k} H_n - \sum_{s=1}^{n-1} \{J_{k,s}, H_{n-s}\}) dQ_N, \quad k \neq N,$$

$$W_{k,n} = - \int_0^{Q_N} (D_{P_k} H_n + \sum_{s=1}^{n-1} \{W_{k,s}, H_{n-s}\}) dQ_N, \quad J_{N,n} = H_n.$$

Nótese que  $\sum_{s=0}^n \{A_{k,s}, H_{n-s}\} = 0$  si  $A = W$  ó  $J$ , es decir,

que  $J_k, W_k$  son integrales adélficas.

Inmediatamente se tiene  $J_k = \text{cte. } (k = 1 + N)$ ,  
 $W_k - \delta_{k,N} \cdot t = \text{cte.}$ , y las variables iniciales  $P, Q$   
 se obtienen para cada valor de  $t$  a partir de un sistema  
 de  $2N$  ecuaciones.

El método de Deprit ([28]), caso particular de las series  
 de Lie, permite transformar funciones analíticas en  $\xi$  y  
 $\mathcal{C}^\infty$  en  $(x, X)$

$$f(x, X, \xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \xi^n f_n(x, X)$$

mediante el cambio canónico  $(x, X) \longrightarrow (y, Y)$  dado por

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial}{\partial X} W(x, X, \xi), \quad \frac{dX}{d\xi} = - \frac{\partial}{\partial x} W(x, X, \xi)$$

sujeto a las condiciones  $x(0) = y$ ,  $X(0) = Y$ . La fun-  
 ción generatriz  $W(x, X, \xi)$  la suponemos analítica en  $\xi$   
 y  $\mathcal{C}^\infty$  en  $(x, X)$ :

$$W = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \xi^n W_{n+1}(x, X)$$

Designamos por  $L_{W_P}$  ó abreviadamente  $L_P$  el ope-  
 rador "paréntesis de Poisson con  $W_P$ " :  $L_P \phi = \{ \phi, W_P \}$ .

La función imagen :

$$f(x(y, Y, \xi), X(y, Y, \xi); \xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \xi^n f^{(n)}(y, Y)$$

se obtiene por recurrencia mediante :

$$(4.3.1) \quad f_n^{(0)} = f_n, \quad f_n^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}, \quad f^{(n)} = f_0^{(n)}$$

Para mostrar la equivalencia del método de Deprit con  
 el de Lacina construiremos una transformación canónica de  
 manera que del hamiltoniano



$$H = P_M + \sum_{n \geq 0} \lambda^n H_n$$

pasemos a  $K = J_N$ . Esta condición nos dará la función generatriz  $S$  de la transformación. Acto seguido buscaremos las funciones  $J_k(P, Q, \lambda)$ ,  $W_k(P, Q, \lambda)$  que con dicho cambio se transformen en funciones independientes de  $\lambda$  y cuyos términos de orden cero son  $P_k$  y  $Q_k$  respectivamente. En realidad sólo indicamos los cálculos para  $W_k$ , siendo idénticos para  $J_k$ .

Sea  $f$  una función analítica de  $\xi$  (en un entorno de 0) y  $\mathcal{C}^\infty$  en  $(x, X)$  (en un entorno de  $(y, Y)$ ), tal que el cambio de variables la convierta en una función  $f(y, Y, \lambda)$  con  $f^{(i)} = 0$  para  $i \geq 1$ . Entonces se obtiene de (4.3.1) que  $f_j^{(i)} = 0$   $i \geq 1, j \geq 0$ . En particular

$$f_{n-1}^{(1)} = f_n + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{m} L_{m+1} f_{n-1-m} = 0.$$

Explicitando esta relación y habida cuenta de que la aplicamos a  $f = H$  y  $H_0 = P_N$ , se tiene

$$\frac{\partial S_m}{\partial Q_N} = H_m + \sum_0^{n-2} \binom{n-1}{m} \{H_{n-1-m}, S_{m+1}\}$$

que permite determinar  $S_n$  de forma recurrente.

Vamos ahora a por las coordenadas : Sea

$$W(P, Q, \lambda) = \sum_{n \geq 0} Q_n(P, Q) \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{con } Q_0 = Q.$$

Aplicando la observación hecha para una  $f$  |  $f^{(i)} = 0 \forall i \geq 1$  a  $W$  (se entiende a cada una de sus componentes), se tiene :

$$(4.3.2) \quad Q_n = - \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{m} \{Q_{n-1-m}, S_{m+1}\} \quad .$$

Queremos demostrar que

$$(4.3.3) \quad Q_n = - \int_0^{Q_N} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \{Q_k, H_{n-k}\} dQ_N$$

en donde  $Q_N$  es la última componente de  $Q$ , asociada canónicamente a  $P_N$ .

Derivando respecto a  $Q_N$  hay que probar la igualdad :

$$(4.3.4) \quad \textcircled{1} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \{Q_m, H_{n-m}\} = \frac{\partial}{\partial Q_N} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \{Q_{n-1-m}, S_{m+1}\} = \textcircled{2}$$

La expresión (4.3.3) y por tanto la igualdad anterior son trivialmente ciertas para  $n = 1$ , pues  $\partial S_1 / \partial Q_N = H_1$  y por tanto

$$Q_1 = - \{Q, S_1\} \implies \frac{\partial Q_1}{\partial Q_N} = - \left\{ Q, \frac{\partial S_1}{\partial Q_N} \right\} = - \{Q, H_1\} \implies$$

$$Q_1 = - \int_0^{Q_N} \{Q, H_1\} dQ_N \quad \text{q.e.d.}$$

Vamos a verificar (4.3.4) por inducción :

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \left[ \left\{ \frac{\partial Q_{n-1-m}}{\partial Q_N}, S_{m+1} \right\} + \left\{ Q_{n-1-m}, \frac{\partial S_{m+1}}{\partial Q_N} \right\} \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-1}{m} \left\{ - \sum_{k=0}^{n-2-m} \binom{n-1-m}{k} \{Q_k, H_{n-1-m-k}\}, S_{m+1} \right\} + \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m} \left\{ Q_{n-1-m}, H_{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \{H_{m-k}, S_{k+1}\} \right\} + \{Q_{n-1}, H_1\} . \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} = - \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left\{ \{Q_{m-1-k}, S_{k+1}\}, H_{n-m} \right\} \quad .$$

Por lo tanto debe anularse la función  $\psi$  definida por la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
 (4.3.5) \quad \psi &= \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2-m} \binom{n-1}{m} \binom{n-1-m}{k} \left\{ \left\{ Q_k, H_{n-1-m-k} \right\}, S_{m+1} \right\} - \\
 &- \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{m} \binom{m}{k} \left\{ Q_{n-1-m}, \left\{ H_{m-k}, S_{k+1} \right\} \right\} - \\
 &- \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \left\{ Q_{n-1-m}, H_{m+1} \right\} + \left\{ Q_0, H_n \right\} - \\
 &- \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{m-1} \binom{m-1}{k} \left\{ \left\{ Q_{m-1-k}, S_{k+1} \right\}, H_{n-m} \right\} + \\
 &+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{m} \binom{m-1}{k} \left\{ \left\{ Q_{m-1-k}, S_{k+1} \right\}, H_{n-m} \right\} .
 \end{aligned}$$

Una adecuada recombinación de índices y la identidad de Jacobi muestran que los sumandos 1º, 2º y 5º de (4.3.5) se compensan para reducirse a

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} \binom{n-1}{j-1} \binom{n-j}{i} \left[ \left\{ \left\{ Q_i, H_{n-i-j} \right\}, S_j \right\} + \left\{ \left\{ H_{n-i-j}, S_j \right\}, Q_i \right\} + \left\{ \left\{ S_j, Q_i \right\}, H_{n-i-j} \right\} \right]$$

El 4º sumando de (4.3.5) se compensa con el término correspondiente a  $m = n-1$  que aparece en el 3º, y, finalmente, los restantes términos de éste son idénticos, excepto el signo, con los que aparecen en el 6º sumando, si tenemos en cuenta (4.3.2). Con ello queda probado el siguiente

4.3.6. Teorema. - Para un sistema hamiltoniano obtenido por perturbación de uno integrable y supuesto no nos encontremos en un punto de equilibrio, los métodos de Deprit y de Lacina son equivalentes.

Nótese además que mediante el algoritmo de Deprit hemos construido la función generatriz del método de Lacina. Compárese con Deprit ([28]) p.14 .

En la práctica la dificultad del método de Lacina estriba en el cálculo de las primitivas involucradas.

A continuación comparamos el método de Lacina con el clásico. Obtenemos el

4.3.7. Teorema. - En las mismas hipótesis del teorema anterior, los métodos de Lacina y clásico son equivalentes.

Demostración : Supondremos que el hamiltoniano tiene la expresión sencilla

$$H = P_N + \lambda H_1(Q, P) .$$

Esto en realidad no supone restricción (compárese con el paso de (3.2.3) a (3.2.16) , y simplifica los cálculos.

Sean

$$V = \begin{pmatrix} W \\ J \end{pmatrix} , \quad R = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

Debemos integrar el sistema

$$\dot{R} = -e_N + \lambda M(DH_1)^T$$

en donde  $e_N$  es el vector de  $2N$  componentes todas nulas excepto la  $N$ -ésima que vale 1 , y  $M$  es la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

siendo  $I$  la identidad en  $\mathbb{R}^N$ .

Excepto para los términos de orden cero en  $R$  sólo cuenta el segundo sumando. Sea

$$\varphi = M (DH_1)^T.$$

Reformulemos el método de Lacina de la siguiente forma:

Si  $W_n, J_n$  son los vectores de componentes  $W_{k,n}, J_{k,n}$ , respectivamente y  $V_n = \begin{pmatrix} W_n \\ J_n \end{pmatrix}$ , es inmediato (siendo  $H_1 = 0$

$\forall i \geq 2$ ) que

$$\begin{aligned} (4.3.8) \quad V_n &= \begin{pmatrix} W_n \\ J_n \end{pmatrix} = - \int_0^{Q_N} \begin{pmatrix} \{W_{n-1}, H_1\} \\ \{J_{n-1}, H_1\} \end{pmatrix} = - \int_0^{Q_N} \{V_{n-1}, H_1\} = \\ &= - \int_0^{Q_N} DV_{n-1} M (DH_1)^T = - \int_0^{Q_N} DV_{n-1} \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Obtendremos así

$$(4.3.9) \quad V = R + \sum_{n > 0} \lambda^n V_n(R)$$

con

$$V_n = - \int_0^{Q_N} DV_{n-1} \cdot \varphi \quad y \quad V_0 = R.$$

De esta expresión debemos hallar  $R$  en función de  $V$ .

Las componentes de  $V$  son los elementos canónicos del

problema no perturbado  $H = P_N$ .

La ecuación (4.3.9) es del tipo

$$a = y - \sum_{j \geq 1} h_j(y) \frac{\lambda^j}{j!}$$

y aplicando (4.1.6) habida cuenta de que  $h_j = j! V_j$  (nótese el cambio de signo, pues al efectuar el cambio de variables  $R \rightarrow V$  se tiene  $Q_N \rightarrow W_N = \text{cte.} - t$  y  $dW_N = - dt$ , siendo de ahora en adelante  $t$  la variable independiente en la expresión de  $R$ ), se tiene:

$$R = V + \sum_{k \geq 1} \lambda^k \phi^{(k)}(V)$$

con

$$(4.3.10) \quad \phi^{(k)} = - \sum_{\substack{k, p_1, p_2 \\ r, s, q}} D^{p_2} V_{p_1} \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} ((\phi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\phi^{(s_q)})^{r_q})$$

$p_1 \neq 0$

en donde se entiende que  $V_{p_1}$ ,  $\phi^{(s_i)}$  están en función de  $R$ , que  $D = D_R$  y  $V_{p_1}$  que después de operar sustituimos  $R$  por  $V$ .

De acuerdo con (3.2.3), para obtener la equivalencia del método de Ĥacina con el clásico, hay que comprobar que:

$$(4.3.11) \quad \phi^{(k+1)} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \int D^j \varphi \left[ \sum_{\substack{q \\ p=1}}^q ((\phi^{(i_1)})^{r_1}, \dots, (\phi^{(i_q)})^{r_q}) \right]$$

$\sum_{p=1}^q i_p r_p = k, \quad i_p = 1$

puesto que para  $k=0$  se tiene  $\phi^{(1)} = \int \varphi$  que concuerda trivialmente con el  $\Delta \sigma_0$  del método clásico (recordemos que en éste el "pequeño parámetro"  $\lambda$  está incluido en  $\varphi$ ). Teniendo en cuenta que en (4.3.11) el sumatorio se extiende a todos los valores de  $i_p, r_p$  cumpliendo la relación indicada y que deberán agruparse todos los términos iguales, basta pues, verificar que si obtenemos  $V_n$  según (4.3.8), y luego  $\phi^{(k)}$  según (4.3.10), se cumple para éstas la

relación :

$$(4.3.12) \quad \varphi^{(k+1)} = \sum_{\substack{\alpha \\ r,s,q}} \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} \int_D^{p_2} \varphi((\varphi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\varphi^{(s_q)})^{r_q})$$

$\alpha^{k,0,p_2}$  ,  $p_2 \neq 0$

lo que haremos a continuación con una simple inducción.

Si escribimos (4.3.10) para  $k+1$  y derivamos respecto a  $t$  obtenemos para los términos en los que  $p_1$  vale 1 un sumando igual a (4.3.12). El otro sumando debe ser igual a los términos obtenidos con  $p_1 > 1$ . Es decir, debe cumplirse (integrando) :

$$(4.3.13) \quad \int \sum_{\substack{\alpha \\ r,s,q}} \left( D^{p_2} \int \varphi \right) \left[ \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} \frac{d}{dt} ((\varphi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\varphi^{(s_q)})^{r_q}) \right] =$$

$\alpha^{k,0,p_2}$  ,  $p_2 \neq 0$

$$= \sum_{\substack{\alpha \\ r,s,q}} (D^{p_2} \int \varphi) \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} ((\varphi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\varphi^{(s_q)})^{r_q}) .$$

$\alpha^{k+1,p_1,p_2}$  ,  $p_1 \neq 0$

Admitimos de momento que la derivada respecto a  $t$  del 2º miembro de esta supuesta igualdad es

$$(4.3.14) \quad \sum_{\substack{\alpha \\ r,s,q}} D^{p_2} ((D \int \varphi) \cdot \varphi) \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} ((\varphi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\varphi^{(s_q)})^{r_q}) .$$

$\alpha^{k,1,p_2}$

La aplicación de la fórmula de Leibnitz a (4.3.14) en forma

adecuada y el uso de (4.3.12) para valores del índice inferiores a  $k+1$ , válida por hipótesis de inducción, nos conduce a

$$\sum_{\sum m_i j_i = k - p_2 - 2} \frac{1}{\prod_{i=1}^q m_i!} (D^{p_2+1-h} \int \varphi) \left( \frac{d}{dt} \phi^{(p_2+1)}, (\phi^{(j_1)})^{m_1}, \dots \right)$$

$$\sum m_i = p_2 + 1 - h, \quad p_2 \geq 0, \quad j_i > 0, \quad 0 \leq h \leq p_2$$

que es igual a la derivada respecto a  $t$  del miembro izquierdo de (4.3.13) q.e.d.

Por último vamos a verificar la validez de la hipótesis utilizado en esta demostración. Tiene que ser :

$$(4.3.15) \quad \frac{d}{dt} \sum_{\substack{k+1, p_1, p_2 \\ \alpha_{r,s,q} \\ p_1 \neq 0}} D^{p_2} V_{p_1} \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} ((\phi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\phi^{(s_q)})^{r_q}) =$$

$$= \sum_{\substack{k, l, p_2 \\ \alpha_{r,s,q}}} D^{p_2} ((D \int \varphi) \cdot \varphi) \frac{1}{\prod_{i=1}^q r_i!} ((\phi^{(s_1)})^{r_1}, \dots, (\phi^{(s_q)})^{r_q}) .$$

Efectuamos la derivación y tenemos en cuenta (4.3.8). Recopilando términos en  $D^{h_1} V_{h_2}$  para  $h_2 > 1$  se tiene que este operador se aplica a



$$\sum \frac{1}{\prod m_i!} (D^{p_2+1-h_1}) ((\emptyset^{(j_1)})^{n_1}, \dots, (\emptyset^{(j_q)})^{n_q}, (\emptyset^{(j_1)})^{m_1}, \dots, (\emptyset^{(j_q)})^{m_q})$$

$$\sum_{i=1}^q r_i j_i = k - h_2$$

$$\sum_{i=1}^q r_i = p_2$$

$$\sum_{i=1}^q n_i = p_2 + 1 - h_1$$

$$\sum_{i=1}^q j_i m_i = h_1 - 1, \quad n_i + m_i = r_i, \quad j_i > 0, \quad p_2 \geq 0$$

$$+ \sum \frac{1}{\prod r_i!} \frac{d}{dt} ((\emptyset^{(j_1)})^{r_1}, \dots, (\emptyset^{(j_q)})^{r_q})$$

$$\sum_{i=1}^q r_i = p_2$$

$$\sum_{i=1}^q r_i j_i = k - h_2$$

que es nulo habida cuenta de (4.3.12) para índices menores o iguales que  $k - h_2 < k - 1$ .

En definitiva sólo quedan en el miembro de la izquierda en (4.3.15) los términos procedentes de

$$\frac{d}{dt} D^{p_2} v_2$$

es decir, de

$$D^{p_2} (-DV_1; \varphi) = D^{p_2} ((D\varphi) \cdot \varphi)$$

Estos son precisamente los del miembro de la derecha. Con eso concluye la demostración de (4.3.7).

Conclusión : Se llega así con lo demostrado, unido a los resultados ya clásicos de la equivalencia Poincaré - von Zeipel y von Zeipel - promedios, y a los más modernos de equivalencia entre von Zeipel, Hori y Deprit (citados anteriormente), a que todos los métodos que se utilizan en la teoría de perturbaciones en Mecánica Celeste son formalmente equivalentes . En realidad todos ellos son maneras formales de resolver una misma ecuación diferencial.

Hemos supuesto implícitamente total ausencia de resonancia y denominadores pequeños. (Véase § 5.3.).

Sin embargo, la convergencia para el método de von Zeipel con restricciones de tipo diofántico ( $\ast$ ) sobre las frecuencias (ver § 4.2. , [5] , [12]) y el hecho de que los métodos sean formalmente equivalentes permite esperar que, con esas restricciones, también lo sean los demás métodos. Las experiencias numéricas de Hénon-Heiles [53] apoyan esta conjetura.

El teorema de Lagrange en la forma que le hemos dado (4.1.3) o en las demás variantes de § 4.1. , es la base de toda teoría de transformaciones de sistemas de ecuaciones diferenciales (canónicas o no) .

---

( $\ast$ ) Expresa el hecho de que las frecuencias sean "suficientemente independientes sobre  $Q$ " .

## Capítulo 5

PERTURBACIONES DEL PROBLEMA DE DOS CUERPOSIntroducción.

Definido en (2.6.7) el problema perturbado de dos cuerpos, vamos a hacer algunas observaciones acerca del mismo. Consideraremos 2 tipos de perturbaciones : artificiales y naturales. Las primeras se presentan en el caso de un satélite o nave espacial propulsados en el campo de un primario. Estamos aquí interesados en el estudio del paso, a duración indiferente, de una órbita kepleriana a otra.

Las perturbaciones naturales son las debidas a la atracción de otros cuerpos (como en las teorías planetarias) y, por ejemplo en el caso de un satélite artificial, a la no esfericidad del primario, efectos atmosféricos, presión de radiación, campos eléctricos y magnéticos, términos relativistas, etc.

En §5.1. se introduce y estudia el concepto de accesibilidad local. La global queda asegurada por (5.1.4).

De cara a estabilidad interesan las perturbaciones que derivan de potencial, como la no esfericidad. Este es el caso de un satélite artificial elevado y de relación  $S/m$  pequeña.

En este caso aparece en determinadas condiciones la resonancia entre las frecuencias. El efecto de la misma, los casos que pueden presentarse y algunos ejemplos se estudian en §5.3. , introduciendo y analizando para dichos ejemplos el concepto de condición de desbloqueo de cualquier orden.

En el último apartado se muestra la extensión del teorema de Arnol'd [8] a pasos por resonancia con más de 2 grados de libertad, y el efecto de separación de las oscilaciones en

regiones resonantes. No consideramos aquí la  $\xi$ -estabilidad toroidal (ver §2.5) que puede verse tratada parcialmente en [113].

Para la inestabilidad toroidal y el efecto de un movimiento sobre separatrices que se desdoblán por perturbación, ver Arnol'd [7].

### 5.1.- Transferencia de órbita de forma óptima y a duración indiferente.

Se desea pasar de una órbita kepleriana  $\Theta$  a otra  $\Theta'$  mediante una perturbación  $\underline{F}$  dada por un motor de

manera que  $\int_t^{t'} I dt$  ( $I = \|\underline{F}\|$ ) sea mínimo y siendo

la órbita osculatriz en  $t$  igual a  $\Theta$  y en  $t'$  igual a  $\Theta'$ . Admitimos que  $t' - t$  no importa en este caso.

Para  $\Theta, \Theta'$  circulares coplanarias son muy populares las transferencias de Hohmann y biparabólicas ([38] p.58,61). Marchal [79] estudia el caso de órbitas elípticas coplanarias. Gravier, Marchal y Culp ([46], [47], [48]) abordan el caso de órbitas no coplanarias con  $e, I$  pequeños, y su aplicación a transferencias de sondas Tierra-Marte, Tierra-Venus y viceversa (incluyendo el efecto de la esfera de influencia). Camarena [20] ha aplicado la teoría del control optimal de Pontryagin al estudio de la transferencia óptima y en particular al efecto de trampolín lunar. Un resumen del estado de la transferencia analítica de órbitas en 1969 se debe a Marchal [80].

Empleando  $\underline{e}, \underline{c}, h$  para simplificar la descripción de la órbita osculatriz perteneciente a la variedad kepleriana,

se tiene ([99] p.31) :

$$(5.1.1) \quad \dot{\underline{c}} = \underline{x} \wedge \underline{F} \quad , \quad \dot{\underline{e}} = \underline{F} \wedge \underline{c} + \dot{\underline{x}} \wedge \underline{c} \quad , \quad \dot{h} = \underline{F} \cdot \underline{x}$$

(h es innecesario si  $\underline{c} \neq 0$ ). (Véase también [81] para una formulación distinta).

Para conseguir el paso de  $\underline{c}, \underline{e}$  a una órbita próxima con  $\underline{c} + \Delta \underline{c}$  ,  $\underline{e} + \Delta \underline{e}$  debemos aplicar un impulso  $\Delta \underline{I}$  en la dirección adecuada y en el momento en que  $\underline{x}$  y  $\dot{\underline{x}}$  sean tales que  $\Delta I$  resulte mínimo. Esto es posible conseguirlo en principio si la duración es indiferente y la órbita osculatrix es periódica. No tiene importancia el que el empuje del motor sea pequeño, (basta fraccionar en vueltas sucesivas el impulso total).

5.1.2.Nota.- Si  $\underline{c} = 0$  y  $\dot{\underline{x}} = 0$  trivialmente  $\dot{\underline{e}} = 0$ ,  $\dot{h} = 0$ . Entonces obtenemos

$$(5.1.3) \quad \ddot{\underline{e}} = (2\underline{F} - h^2 \underline{e}) \wedge \underline{c} \quad y \quad \ddot{h} = (\underline{F}, \underline{F} - h^2 \underline{e})$$

que sustituyen a (5.1.1).

5.1.4.Nota.- La transferencia óptima es un problema variacional en  $S^2 \times S^2 \times R$  (órbitas elípticas). El camino óptimo puede ser sólo diferenciable a trozos. En algunos casos la optimalidad no es alcanzable sobre las elípticas, exigiendo el paso por parabólicas (transferencia por el infinito).

5.1.5.Definición.- Dado un punto en  $S^2 \times S^2 \times R$  (elípticas), llamaremos conjunto localmente accesible pasando por dicho punto a los puntos de la variedad de Kepler que se pueden obtener del dado con un impulso  $\Delta \underline{I} = \underline{F} \Delta t$ .

5.1.6. Teorema. - El conjunto localmente accesible (que nunca contiene un entorno) correspondiente a un punto  $(\underline{e}, \underline{c}, h)$  verifica (5.1.7) además de la condición trivial  $(\dot{\underline{e}}, \underline{c}) + (\underline{e}, \dot{\underline{c}}) = 0$ .

$$(5.1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \neq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{c} \wedge \dot{\underline{c}} \neq 0 \\ \underline{c} \wedge \dot{\underline{c}} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} e \neq 0 : c^2 e(\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \dot{\underline{e}}) = 2(\underline{c}, \dot{\underline{c}}) \left[ e(\underline{c}, \dot{\underline{c}}, e) + \sqrt{c^2 (\underline{e}, \dot{\underline{c}})^2 + (\underline{c}, \dot{\underline{c}}, e)^2} \right] \\ e = 0 : (\dot{\underline{e}}, \underline{c}, \dot{\underline{c}}) \sqrt{c^2 (\dot{\underline{c}}, \dot{\underline{c}}) - (\underline{c}, \dot{\underline{c}})^2} = 2(\underline{c}, \dot{\underline{c}}) (\dot{\underline{c}}, \dot{\underline{c}}) \\ (\underline{e}, \dot{\underline{e}}) c^2 \cong 4(\dot{\underline{c}}, \dot{\underline{c}}) (1 - e^2) + 4ec(\dot{\underline{e}}, \dot{\underline{c}}) \end{array} \right.$$

$$c = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{c}} \neq 0 \\ \dot{\underline{c}} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} \neq 0 : (\dot{\underline{c}}, \dot{\underline{e}}) = 0, (\underline{e}, \dot{\underline{e}}) = 0, (\dot{h} \text{ arbitrario}) \\ \dot{\underline{x}} = 0 : (\text{ver 5.1.2}) (\dot{\underline{c}}, \ddot{\underline{e}}) = 0, (\underline{e}, \ddot{\underline{e}}) = -2h(\dot{\underline{c}}, \dot{\underline{c}}), \\ \ddot{h} = h^2(\underline{c}, \underline{c}) + \frac{1}{4} \left[ \frac{(\underline{e}, \ddot{\underline{e}}, \dot{\underline{c}})^2}{(\dot{\underline{c}}, \dot{\underline{c}})^2} - h^4 \right] \\ \dot{\underline{c}} = 0 : \dot{\underline{e}} = 0, (\dot{h} \text{ arbitrario}) \end{array} \right.$$

Demostración : Vamos a explicitarla sólo para el primero de los casos expuestos. Se hace paralelamente en los demás.

Dado  $\dot{\underline{c}} \mid \underline{c} \wedge \dot{\underline{c}} \neq 0$ , por (5.1.1)  $\underline{F} = \dot{\underline{c}} \wedge \underline{x}_0 r^{-2} + \lambda \underline{x}_0$  siendo  $\underline{x}_0$  el punto en que se aplica  $\underline{F}$ ,  $r = \|\underline{x}_0\|$ . Se tiene

$$\underline{e} = (\underline{c}, \dot{\underline{c}}) \underline{x}_0 r^{-2} + \lambda \underline{x}_0 \wedge \underline{c} + \dot{\underline{x}}_0 \wedge \dot{\underline{c}} \implies$$

$$(5.1.8) \quad (\dot{\underline{e}}, \underline{x}_0) = 2(\underline{c}, \dot{\underline{c}}) .$$

Por otra parte  $\underline{x}_0 = \nu \underline{c} \wedge \dot{\underline{c}}$  implica, siendo  $f$

la anomalía verdadera

$$(5.1.9) \quad (\underline{x}_0, \underline{e}) = re \cos f = \nu(\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \underline{e})$$

$$(\underline{x}_0, \underline{c} \wedge \underline{e}) = ce \sin f = -\nu c^2(\underline{e}, \dot{\underline{c}})$$

De (5.1.9) se tiene

$$\nu = c^2 e \left[ \sqrt{c^2(\underline{e}, \dot{\underline{c}})^2 + (\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \underline{e})^2} + e(\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \underline{e}) \right]^{-1}$$

que con (5.1.8) da

$$c^2 e(\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \dot{\underline{e}}) = 2(\underline{c}, \dot{\underline{c}}) \left[ e(\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \underline{e}) + \sqrt{c^2(\underline{e}, \dot{\underline{c}})^2 + (\underline{c}, \dot{\underline{c}}, \underline{e})^2} \right] \text{ q.e.d.}$$

Para acabar estas consideraciones veamos las ecuaciones que se deben satisfacer sobre una trayectoria optimal.

Sea  $l$  el empuje del motor :  $\|\underline{F}\| = l$  y  $f$  la anomalía verdadera (consideramos sólo  $e < 1$  ó  $e=1$ ,  $h=0$ ,  $c \neq 0$ ), del punto en que se aplica  $\underline{F}$ . Los controles que debemos determinar son  $\underline{F}$  y  $f$  (ver [97] p.1).

Si  $\underline{p}_c$ ,  $\underline{p}_e$  son los momentos asociados a  $\underline{c}$ ,  $\underline{e}$ , el hamiltoniano será

$$(5.1.10) \quad H = (\underline{p}_c, \dot{\underline{c}}) + (\underline{p}_e, \dot{\underline{e}}) = \underline{F} \cdot (\underline{p}_c \wedge \underline{x} + \underline{c} \wedge \underline{p}_e + (\underline{p}_e, \underline{x}) \dot{\underline{x}} - (\dot{\underline{x}}, \underline{x}) \underline{p}_e)$$

Mediante fórmulas conocidas del problema de los dos cuerpos :

$$\underline{x} = \frac{r}{e} \cos f \underline{e} + \frac{r}{ce} \sin f \underline{c} \wedge \underline{e}, \quad \dot{\underline{x}} = -\frac{\sin f}{ce} \underline{e} + \frac{e + \cos f}{c^2 e} \underline{c} \wedge \underline{e},$$

$$(\dot{\underline{x}}, \underline{x}) = \frac{ec \sin f}{1 + e \cos f}$$

(si  $e = 0$  se escoge un vector  $\underline{u}$  |  $(\underline{u}, \underline{c}) = 0$ ,  $\underline{u} = 1$   
 y entonces  $\underline{x} = c^2 \underline{u} \cos f + \underline{c} / \underline{u} c \sin f$ , etc., o pasamos  
 a  $(\underline{a}, \underline{b}, h)$ ), queda :

$$H = \underline{F} \cdot \underline{\psi}(\underline{e}, \underline{c}, f, \underline{p}_e, \underline{p}_c) \quad (*)$$

Según el principio del máximo de Pontryagin ([97] p.20)  
 basta determinar  $f \in [0, 2\pi)$  tal que  $\|\underline{\psi}\|$  sea máximo,  
 tomar  $\underline{F} = \underline{\psi} / \|\underline{\psi}\|$  y sustituirlos en  $H$ . Sean  $\underline{x}_f, \dot{\underline{x}}_f$   
 los valores correspondientes al  $f$  obtenido. Las ecuacio-  
 nes canónicas

$$\dot{\underline{c}} = D_{\underline{p}_c} H = \underline{x}_f \wedge \underline{F}, \quad \dot{\underline{e}} = D_{\underline{p}_e} H = \underline{F} \wedge \underline{c} + \dot{\underline{x}}_f \wedge \underline{c}, \quad \dot{\underline{p}}_c = -D_{\underline{c}} H, \quad \dot{\underline{p}}_e = -D_{\underline{e}} H$$

corresponden a la trayectoria óptima.

### §5.2.- Perturbaciones debidas a potencial (conservativo).

Tomamos como ejemplo típico la perturbación de un saté-  
 lite artificial por el potencial terrestre. Despreciando el  
 efecto de marea y el movimiento del polo, dicho potencial se  
 expresa en la forma

$$(5.2.1) \quad R = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\sin \beta) \quad (\text{ver [51]})$$

que en las variables keplerianas se convierte en

$$(5.2.2) \quad R = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^n \sum_{k=-n}^n \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^{\delta_q} J_{n,q} \left(\frac{a_e^n}{a^{n+1}}\right) A_{n,q}^k (I) B_{n+1,p}^k(e).$$

$$\cdot \text{Re}(i^{n-q} \exp(i(pM+k\omega+q(R-T-\lambda)_{n,q}))) \quad (\text{ver [22]}) .$$

(\*)  $\underline{\psi}$  es análogo al vector primer de Lawden ([74] p.56).



o en forma abreviada

$$(5.2.3) \quad R = \sum J \cdot C \cdot A \cdot B \cdot \operatorname{Re}(i^{n-q} \exp(i \operatorname{Arg})) \quad (\text{ver } [111])$$

La evolución de la trayectoria osculatrix se obtiene por las fórmulas de Lagrange ([68] p.133). Para un estudio de la resonancia (§5.3.) en los elementos osculadores de un satélite artificial en primera aproximación, véase Yashkin [125]).

5.2.4.Observación.— La evolución de la órbita osculatrix  $(a, b, h)$  en  $S^2 \times S^2 \times R$  sometida a la perturbación (5.2.3) no es autónoma (ver [23], [24], [36]). La expresión de las perturbaciones con la inclusión de la velocidad de rotación de la Tierra implica un aumento de grados de libertad, con lo que la aplicación de Poincaré de  $S^2 \times S^2 \times R$  (como superficie de sección) en sí misma carece de sentido. Lo recobra si consideramos la Tierra desprovista de rotación.

### §5.3.— Resonancia.

Sean  $I$  y  $\varphi$  las variables de acción y de ángulo, respectivamente, de un problema hamiltoniano (de  $n$  grados de libertad), que suponemos próximo a uno integrable, de manera que se tiene :

$$(5.3.1) \quad H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon), \quad \dot{I} = -\varepsilon D_\varphi H_1, \quad \dot{\varphi} = D_I H_0 + \varepsilon D_I H_1.$$

Supondremos que  $H_1$  es  $2\pi$ -periódico respecto a las variables  $\varphi$ ,  $H_0, H_1$  analíticas en  $L : |\operatorname{Im} \varphi| < \rho$ ,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ,  $I \in G$ ,  $G$  compacto.

En primera aproximación las frecuencias  $\omega_i = \dot{\varphi}_i$  son constantes (esto es, en el sistema integrable).

En la integración formal de (5.3.1) (§3.2. y cap. 4) aparecen integrandos del tipo  $\exp i(m, \varphi)$  donde  $m$  es un vector de componentes enteras, procedente del desarrollo múltiple de Fourier de  $H_1$ .

5.3.2. Definición. - Diremos que para unas frecuencias se produce resonancia en el problema (5.3.1) si  $\exists m \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $(m, \omega) = 0$ .

5.3.3. Definición. - Se entiende por variedad resonante  $Vr_m$  asociada a una  $n$ -pla de enteros  $m$  el conjunto de puntos  $(I, \varphi) \in L$  tal que en ellos  $(m, \omega) = 0$ . Su ecuación es, pues,  $(m, D_I H) = 0$  (en general, de codimensión 1).

En principio (5.3.1) se encontrará con resonancias durante su evolución, ya que el conjunto de frecuencias para las que se produce resonancia es denso.

5.3.4. Definición. - Sea  $\psi = (m, \omega)$ . Diremos que la resonancia  $\dot{\psi} = 0$  está sometida en un subconjunto  $D_{k,m} \subset Vr_m$  a condición de desbloqueo de orden  $k$  si

$$0 = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \dots = \frac{d^k\psi}{dt^k}, \quad \frac{d^{k+1}\psi}{dt^{k+1}} \neq 0, \quad \forall (I, \varphi) \in D_{k,m}.$$

5.3.5. Proposición. - Condición suficiente de desbloqueo de orden  $n$  o menor es

$$(5.3.6) \quad \det\left(\omega, \frac{d\omega}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\omega}{dt^{n-1}}\right) \neq 0 \quad (*).$$

Como ejemplo, si  $\xi$  es suficientemente pequeño, para  $n=3$ , (5.3.6) se traduce en

(\*) Más general es que la matriz  $(\omega, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p-1)})$  tenga rango  $n$  con  $p \geq n$ ,  $\omega^{(j)} = \frac{d^j \omega}{dt^j}$ , para desbloqueo de orden  $p$  a lo sumo.

$$(5.3.7) \quad A = (D_{I_0}, -D_{I_0}^2(D_{H_1}) + (D(D_{I_1})))(D_{I_0}),$$

$$-D_{I_0}(D^2 H_1(D_{I_0})) + (D^2(D_{I_1}))(D_{I_0})^2 \neq 0,$$

en términos del hamiltoniano (\*).

Demostración : Trivial.

5.3.8. Definición. - Diremos que en un subconjunto  $B_m$  de  $Vr_m$  la resonancia está bloqueada si  $\frac{dj\psi}{dt^k} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+$ . Obviamente  $B_m = \bigcap_k (Vr_m - D_{k,m})$ .

5.3.9. Nota. - La condición (5.3.6) produce desbloqueo no sólo en resonancia sino también en las regiones no resonantes. En realidad un bloqueo con  $\psi = \text{cte.} \neq 0$ ,  $\|\psi\| > \delta |m|^{-(n+2)}$ ,  $|m| = \sum_{i=1}^n |m_i|$  asegura la convergencia de los métodos formales.

5.3.10. Observación. - Lo dicho para el sistema (5.3.1) es válido para un sistema de la forma

$$(5.3.11) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= \{F_1(I, \psi, \varepsilon) \\ \dot{\psi} &= F_0(I, \varepsilon) + \{F_2(I, \psi, \varepsilon) \end{aligned}$$

con  $F_i$  analítica en  $I$ ,  $F_1, F_2$   $2\pi$ -periódicas en  $\psi$ . (Debe modificarse convenientemente 5.3.7).

A continuación vamos a analizar ejemplo debidos a V.I. Arnol'd ([9] p.102,104) que sirven para ilustrar los conceptos introducidos.

5.3.12. Ejemplo. - Consideremos el sistema  $\dot{\psi}_1 = I_1$ ,  $\dot{\psi}_2 = I_2$ ,  $\dot{I}_1 = \varepsilon$ ,  $\dot{I}_2 = \varepsilon a \cos(\psi_1 - \psi_2)$ ,  $a > 1$ . Las

(\*)  $\forall \varepsilon > 0$  sustitúyase  $H_0, H_1$  por  $H$ .

ecuaciones promediadas (ver §4.2.) se obtienen de (5.3.11) sustituyendo  $F_1$  y  $F_2$  por los términos independientes del desarrollo de Fourier. Si  $J_i$  son las variables promediadas :  $\dot{J}_1 = \xi$  ,  $\dot{J}_2 = 0$  .

Las condiciones iniciales  $I_i(0) - 1 = J_i(0) - 1 = \varphi_1(0) - \arccos(1/a) = \varphi_2(0) = 0$  , llevan a

$$I_i(t) - (1 + \xi t) = J_1(t) - (1 + \xi t) = J_2(t) - 1 = 0.$$

Luego  $\|I(t) - J(t)\| = \xi t$  . Para  $t = 1/\xi$  ,  $\|I(t) - J(t)\| = 1$ , en oposición a Bogoliubov-Mitroplosky [13] p.429 para el caso de un grado de libertad.

5.3.13. Ejemplo. - Estudiemos ahora  $\dot{\varphi}_1 = I_1 + I_2$  ,  $\dot{\varphi}_2 = I_1$  ,  $\dot{I}_1 = \xi$  ,  $\dot{I}_2 = \xi \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$  , sometido a las condiciones iniciales :  $I_1(0) = I_2(0) - 1 = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$  . Ecuaciones promediadas :  $\dot{J}_1 = \xi$  ,  $\dot{J}_2 = 0$  ,  $J_i(0) = I_i(0)$  .

Se tiene ([8]) :  $\|I(t) - J(t)\| = \sqrt{2\xi} \int_0^{\sqrt{\frac{\xi}{2}} t} \cos x^2 dx$  .

La separación entre el sistema real y el promediado es  $O(\sqrt{\xi})$  . Una primera explicación del distinto comportamiento de los dos ejemplos, la da el que  $\det(\omega, \dot{\omega}) = 0$  en (5.3.12) ,  $\det(\omega, \dot{\omega}) \neq 0$  en (5.3.13) , para las condiciones iniciales escogidas . Se llega de forma natural a

5.3.14. Teorema (Arnol'd [8]). - Si  $n = 2$  y  $\det(\omega, \dot{\omega}) \neq 0$  en  $L$  , se tiene que  $\forall t \in [0, 1/\xi]$  ,  $\|I(t) - J(t)\| < C\sqrt{\xi} \ln^2(1/\xi)$  .

Sin embargo :

5.3.15. Proposición. - a) En (5.3.13) se tiene que  $\|I(t) - J(t)\|$  es a lo sumo  $O(\sqrt{\xi}) \forall t \geq 0$  y para todas las condiciones

iniciales ;

b) El ejemplo (5.3.13) está sometido a un desbloqueo a lo sumo de 5º orden ;

c) El ejemplo (5.3.12) está sometido a resonancia bloqueada para las condiciones iniciales propuestas.

Demostración : a) Sea  $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$  ,  $\varphi_i^0 = \varphi_i(0)$  ,  $I_i^0 = I_i(0)$  . Fácilmente se obtiene

$$I_1(t) = I_1^0 + \xi t , \quad \varphi_3(t) = \varphi_3^0 + I_1^0 t + \xi t^2/2 , \quad J_2(t) = I_2^0 , \quad J_1(t) = I_1(t)$$

$$I_2(t) = I_2^0 + \xi \int_0^t \cos(\varphi_3^0 + I_1^0 \tau + \xi \tau^2/2) d\tau = I_2^0 + \sqrt{\pi \xi} \left\{ \cos \alpha \left[ C\left(\frac{I_1(t)}{\sqrt{\pi \xi}}\right) - C(\beta) \right] \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \alpha \left[ S\left(\frac{I_1(t)}{\sqrt{\pi \xi}}\right) - S(\beta) \right] \right\} ,$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + \int_0^t I_2(\tau) d\tau = \varphi_2^0 + \left\{ I_2^0 - \sqrt{\pi \xi} (\cos \alpha C(\beta) + \operatorname{sen} \alpha S(\beta)) \right\} t + \\ + \left\{ \cos \alpha \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} I_1(t) \cdot C\left(\frac{I_1(t)}{\sqrt{\pi \xi}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{(I_2(t))^2}{\pi \xi}\right) \right] + \operatorname{sen} \alpha \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} I_1(t) \cdot S\left(\frac{I_1(t)}{\sqrt{\pi \xi}}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos\left(\frac{(I_1(t))^2}{\sqrt{\pi \xi}}\right) \right] \right\} t$$

en donde  $\alpha = (I_1^0)^2 / (2\xi) - \varphi_3^0$  ,  $\beta = I_1^0 / \sqrt{\pi \xi}$  , C y S

son las integrales de Fresnel definidas por

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} w^2\right) dw , \quad S(z) = \int_0^z \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} w^2\right) dw \quad (\text{ver [2] p.300}).$$

El hecho de ser  $|C| \leq C(1) \simeq 0,779893$  ,

$|S| \leq S(\sqrt{2}) \simeq 0,713972$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 1/2$

aseguran que  $\|I(t) - J(t)\| < 4\sqrt{\xi} \sqrt{t}$  ,  $\forall \varphi_i^0$  ,  $I_i^0$  y que  $\varphi_2$  tiende (para  $t$  suficientemente grande) a comportarse

como una recta de pendiente  $I_2^0 \pm 0(\sqrt{\varepsilon})$ .

b) Sea  $\omega = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ . Se tiene  $\omega = \omega^{(0)} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ ,

$$\omega^{(1)} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(2)} = -\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ I_1 \sin \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(3)} = -\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ I_1^2 \cos \varphi_3 + \varepsilon \sin \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$\omega^{(4)} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 3\varepsilon I_1 \cos \varphi_3 + I_1^3 \sin \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \omega^{(5)} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 3\varepsilon^2 \cos \varphi_3 - 6\varepsilon I_1^2 \sin \varphi_3 - I_1^4 \cos \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Llamamos  $\Delta_{ij} = \det(\omega^{(i-1)}, \omega^{(j-1)})$ . Siendo  $\Delta_{12} = 0$ , tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = 0 : I_2 = 0 \\ I_1 \neq 0 \end{array} \right\} \begin{cases} \varphi_3 = k\pi & \Delta_{26} \neq 0 \\ \varphi_3 \neq k\pi & \Delta_{24} \neq 0 \\ I_2 = 0 : \varphi_3 = (k+1/2)\pi & \Delta_{13} \neq 0 \\ 0 \neq |I_2| \leq |I_1| \begin{cases} \varphi_3 = k\pi & \Delta_{14} \neq 0 \\ \varphi_3 \neq k\pi & \Delta_{13} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

con lo que queda probada esta parte.

c) En (5.3.12) hacemos  $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $I_3 = I_1 - I_2$  con lo que queda  $\dot{\varphi}_3 = I_3$ ,  $\dot{I}_3 = \varepsilon(1 - a \cos \varphi_3)$  y las condiciones iniciales son  $I_3^0 = 0$ ,  $\cos \varphi_3^0 = 1/a$ .

Trivialmente  $\omega^{(n)} = \omega^{(n)}(I_3, \varphi_3)$ ;  $\omega^{(n+1)} =$

$$\frac{d}{dI_3} \omega^{(n)} \cdot \varepsilon(1 - a \cos \varphi_3) + \frac{d}{d\varphi_3} \omega^{(n)} \cdot I_3 \quad \text{y por tanto}$$

$$\omega^{(n+1)}(I_3^0, \varphi_3^0) = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

5.3.16.Observación.- Para  $n = 1$ , en el problema de resonancia ideal (Garfinkel [40], Garfinkel, Jupp, Williams [41], Garfinkel [42], Calvo [19]) con hamiltoniano

$$H = H(x, y, \xi) = B(y) + 2\xi A(y) \sin^2(x), \quad 0 < \xi \ll 1,$$

con centro de libración  $(0, y_0)$ , la condición  $B'' A \neq 0$  en  $y_0$  es un desbloqueo de primer orden, pues

$$\dot{y} = 2\xi A(y) \sin 2x$$

$$\dot{x} = B'(y) + \xi A'(y)(1 - \cos 2x)$$

$$\ddot{x} = 2\xi(B'' A + B' A') \sin 2x + 2\xi^2(A'' A + A'^2) \sin 2x(1 - \cos 2x).$$

#### §5.4.El método de promedios y los pasos por resonancia.

Vamos a estudiar el valor de  $\|I(t) - J(t)\|$  cuando (5.3.11) pasa por resonancia, para tiempos del orden de  $\xi^{-r}$ . Designamos con  $\bar{F}(I, \xi)$  la función  $F(I, \varphi, \xi)$  promediada respecto a  $\varphi$  (son válidas las hipótesis y notaciones de §5.3.).

5.4.1.Proposición.- Si se produce resonancia bloqueada  $(B'_m)$  en (5.3.11) siendo  $F_1(I, \varphi, \xi) = \bar{F}_1(I, \varphi) + A\xi \cos(m, \varphi)$ , se tiene  $\|I(t) - J(t)\| = O(\xi^{1-r})$  si  $|t| = O(\xi^{-r})$ , siempre que  $(m, \varphi) \neq (k+1/2)\pi$ .

Demostración : Trivial .

Este es el caso de (5.3.12). Vamos a ver condiciones que aseguren que la separación entre el sistema real y el promediado es mucho más lenta (como muestra (5.3.13)).

Para  $n = 2$  (ver 5.3.14) existe una condición analítica sencilla suficiente para asegurar la proximidad de  $J$  e  $I$ . En realidad es suficiente con que se cumpla la

condición geométrica (5.4.2). Esta condición garantiza también la acotación de la diferencia entre  $I$  y  $J$  para dimensión superior (ver 5.4.4 para  $n = 3$ ). Sin embargo así como el desbloqueo de primer orden ( $n-1$ ) para  $n = 2$ , es suficiente para que se cumpla (5.3.14), no lo es el desbloqueo de 2º orden para  $n = 3$ , como se verá en (5.4.10). Tampoco es suficiente dicha condición para asegurar la proximidad de  $I$  y  $J$ , como demuestra (5.4.11).

5.4.2. Definición.— Sea  $\psi_m = (m, \omega)$  en (5.3.11). Admitiremos de ahora en adelante  $\omega \neq 0$ . Diremos que se cumple la condición geométrica si  $\forall m \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\exists c_1 > 0$  tal que  $|\dot{\psi}_m| > c_1 \varepsilon$  siempre que  $\psi_m < c_2$ ,  $c_2 = O(1)$  (es decir: el sistema se aleja de la resonancia  $Vr_m$  suficientemente aprisa). ( $c_i$  serán constantes independientes de  $I, \varphi, \varepsilon, N, K$ ).

5.4.3. Lema.— Si  $n = 2$  la condición de desbloqueo de primer orden implica la condición geométrica.

Demostración:  $\omega \neq 0$  y el estar en un compacto garantiza que  $\omega$  está en el exterior de una bola de radio  $c_3$  y en el interior de otra de radio  $c_4$ , y que  $|\det(\omega, \dot{\omega})| > c_5 \varepsilon$ .

Sea  $\theta = \text{atan} \omega_2 / \omega_1$ ;  $|\dot{\theta}| = |\det(\omega, \dot{\omega})| / \|\omega\|_2^2 > c_5 c_4^{-2} \varepsilon$ .

Sea  $M_p(\omega)$  el movimiento de  $\omega$  proyectado sobre la normal a  $Vr_m$ :

$$|\dot{M}_p(\omega)| > c_3 c_5 c_4^{-2} \varepsilon \implies |\dot{\psi}_m| > |\dot{M}_p(\omega)| > c_6 \varepsilon$$

(cierto, por ejemplo, mientras  $|\psi_m| < c_3/2$ ).

5.4.4. Teorema.— Para  $n = 3$  la condición geométrica (5.4.2) implica que  $\exists \varepsilon_0 > 0$   $\forall |\varepsilon| > \varepsilon_0$ ,



$$(5.4.5) \quad \|I(t) - J(t)\| < c_7 \xi^{\frac{3}{2} - r} \ln^4(1/\xi) \quad \text{si } |t| < \xi^{-r}.$$

**Demostración :** La condición geométrica implica el Lema 2 de Arnol'd [8]. Los Lemas 3 y 4 son válidos con carácter general. El Lema 5 (en el que se usa la técnica del filtro pasa baja ([117], Vol.II, p.135) para acotar la variación en las regiones no resonantes) continua siendo cierto en cualquier dimensión si  $\xi$  es suficientemente pequeño.

Realmente lo único que hay que demostrar es el equivalente al Lema 1, que enunciamos en (5.4.9).

Sea  $N \geq \sum |m_i| > 0$  en que  $N$  indica el orden máximo de las resonancias consideradas.

5.4.6. Definición. - Llamamos zona resonante de anchura  $K$  asociada a  $Vr_m$  al conjunto de puntos  $I \in G \mid (\omega, m) \leq K$ . El conjunto de todas las zonas resonantes de orden menor o igual que  $N$  lo designamos por  $R_{K,N}$ . Su complemento en  $G$ , por  $G_{K,N}$ . Nótese que si  $K = O(\xi^a)$ ,  $a < 1$ ,  $(\omega, m) = K$  equivale a que  $(\omega(I), m) \leq K$ .

5.4.7. Definición. - Diremos que (5.3.11) se encuentra en resonancia múltiple si existe más de un  $m \in Z^n \mid \psi_m = (\omega, m) = 0$  (excluyendo los valores de  $m$  proporcionales, que dan la misma  $Vr_m$ ).

A diferencia del caso en que  $\omega$  está en un plano, si  $n = 3$  aparecen resonancias múltiples.

5.4.8. Lema. - a) La unión de las zonas resonantes correspondientes a una resonancia múltiple está contenida en un cilindro de radio  $c_8 KN^2$ .

b) La distancia del eje del cilindro que aparece en a) (dicho eje es la intersección de las variedades resonantes correspondientes) a la variedad resonante más próxima es mayor que  $C_3/N^3$ .

Demostración : Basta ver que  $\sum |m_i| \leq N$  implica que el ángulo entre dos vectores (no colineales) es mayor que  $N^{-2}$  y que el paralelepípedo que forman 3 de ellos (no coplanarios) tiene volumen  $\geq 1$ .

5.4.9.Lema.- a) El tiempo que pasa (5.3.11) desde que entra en  $R_{K,N}$  hasta que sale de ella por primera vez es menor que  $C_9 KN^2/\varepsilon$  (tanto si se trata de una resonancia múltiple como si no lo es).

b) El número de pasos por resonancia es menor que  $C_{10} N^3 \varepsilon^{-1+r}$ .

Demostración : Para a) no hay más que tener en cuenta (5.4.8) a) y (5.4.2) ; para b) , el que la velocidad de está acotada superiormente por un cierto  $C_{11} \varepsilon$  y (5.4.8.b).

Por último, teniendo en cuenta que en  $G_{K,N}$  la diferencia entre el sistema promediado y el real es  $O(\varepsilon/K)$  y escogiendo  $K = O(\sqrt{\varepsilon}/N)$  se obtiene (5.4.5). Los detalles de los Lemas 2 a 5 citados anteriormente se hallan en [8].

5.4.10.Proposición.- La condición de desbloqueo de 2º orden no garantiza la condición geométrica para  $n = 3$ .

Demostración : Si  $\det(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}) \neq 0$  ( $\dot{\omega} = O(\varepsilon)$ ,  $\ddot{\omega} = O(\varepsilon)$ ) no pueden ser simultáneamente nulas  $\psi$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\ddot{\psi}$ . Dado que  $\sum |m_i| > 0$  se obtiene  $|\dot{\psi}| + |\ddot{\psi}| \geq C_{12} \varepsilon - |\psi|/\varepsilon$ . Por tanto para  $\psi = O(\varepsilon^b)$ ,  $b > 0$ , fijo, lo único que podemos asegurar es que  $|\dot{\psi}|$  y  $|\ddot{\psi}|$  no pueden ser simultáneamente

menores que  $C_{13} \xi$ . Esto no implica la condición geométrica, pues basta pensar en  $\psi = \xi \cos t$ .

En esta última observación se basa (5.4.11). Aunque la resonancia no está bloqueada se tiene un anclaje demasiado cerca de la variedad resonante (lo que impide la utilización de regiones resonantes de anchura más pequeña, ya que fuera de ellas sería inútil la técnica pasa baja), que acarrea la separación de  $I$  y  $J$ .

#### 5.4.11. Ejemplo. - El sistema

$$(5.4.12) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 1 & \dot{I}_1 &= 0 & \dot{J}_1 &= 0 \\ \dot{\psi}_2 &= I_2 + 2\xi \cos 2\psi_1 & \dot{I}_2 &= \xi \cos \psi_1 \\ \dot{\psi}_3 &= I_2 + \xi \cos \psi_1 & \dot{I}_3 &= \xi \cos(\psi_2 - \psi_3) \end{aligned}$$

sometido a las condiciones iniciales  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = I_1 = I_2 - 1 = I_3 = 0$ , no está en resonancia bloqueada para  $m_1 = 0, m_2 = -m_3 = 1$  y sin embargo  $\|I(t) - J(t)\| = O(\xi t)$ .

En efecto, la solución de (5.4.12) se expresa mediante las siguientes fórmulas:

$$\psi_1 = t, \quad I_1 = I_1^0, \quad I_2 = I_2^0 + \xi \sin t, \quad \psi_2 = \psi_2^0 + I_2^0 t - \xi \cos t - \xi \cos 2t$$

$$\psi_3 = \psi_3^0 + I_2^0 t - 2\xi \cos t, \quad I_3 = I_3^0 + \xi \int_0^t \cos(\psi_2^0 - \psi_3^0 - \xi \sin t + \xi \sin 2t) dt.$$

$$\text{En nuestro caso } I_3 - J_3 = I_3 = \xi \int_0^t \cos(-\xi \sin t + \xi \sin 2t) dt >$$

$$> \xi \int_0^t \cos 2\xi dt > \xi t/2 \quad \text{si } |\xi| < \pi/6.$$

Por otra parte tenemos

$$\dot{\psi} = -4 \xi \sin 2\varphi_1 + \xi \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\psi} = -\xi(8 \cos 2\varphi_1 - \cos \varphi_1)$$

$\dot{\psi}$  se anula sólo para  $\varphi_1 = k\pi$  ó  $\varphi_1 = \arccos(1/8)$ , valores para los que  $\ddot{\psi} \neq 0$ .

En este ejemplo  $\psi$  oscila dentro de la región resonante de anchura  $2\xi$ .

5.4.13. Observación.- Para sistemas en los que  $F$  tenga nulo el término independiente de  $\psi$  en el desarrollo de Fourier, puede aplicarse el teorema de Nekhorosev (ver [94]) que asegura la lentitud de la evolución de  $I$ , ya que en este caso  $J(t) = I(0)$ .

Bibliografía citada

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E.: "Foundations of Mechanics", Benjamin, 1967.
- [2] Abramowitz, M., Stegun, I.: "Handbook of Mathematical Functions", Dover, 1965.
- [3] Adams, J.F.: "Vector Fields on Spheres", Bull. Amer. Math. Soc. 68(1962), 39-41.
- [4] Alexeyev, V.M.: "Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps", Actes Congrès intern. Math. Nice 1970, tome 2, 893-907, Gauthier-Villars.
- [5] Arnol'd, V.I.: "Proof of a Theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian", Russ. Math. Surveys, 18(1963), 9-36.
- [6] Arnol'd, V.I.: "Small denominators and problems of stability of motion in classical and Celestial Mechanics", Russ. Math. Surveys, 18(1963), 85-192.
- [7] Arnol'd, V.I.: "Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom", Soviet Math. Doklady 5(1964), 581-585.
- [8] Arnol'd, V.I.: "Conditions for the Applicability, and Estimate of the Error, of an Averaging Method for Systems which pass through States of Resonance in the Course of their Evolution", Soviet Math. Doklady 6(1965), 331-334.
- [9] Arnol'd, V.I., Avez, A.: "Ergodic Problems of Classical Mechanics", Benjamin, 1968.
- [10] Bacry, H., Ruegg, H., Souriau, J.M.: "Dynamical Groups and Spherical Potentials in Classical Mechanics", Commun. Math. Physics 3(1966), 323-333.

- [11] Barrar, R.B.: "A proof of the convergence of the Poincaré-von Zeipel procedure in Celestial Mechanics", *Amer. J. of Math.* 88(1966), 206-220.
- [12] Barrar, R.B.: "Convergence of the von Zeipel procedure", *Celestial Mechanics* 2(1970), 494-504.
- [13] Bogoliubov, N.N., Mitropolsky, Y.A.: "Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations", Gordon & Breach, 1961.
- [14] Brouwer, D., Clemence, G.M.: "Methods of Celestial Mechanics", Academic Press, 1961.
- [15] Burshtein, E.L., Solov'ev, L.S.: "Hamiltonian of averaged Motion", *Soviet Physics Doklady* 6(1962), 731-733.
- [16] Cabral, H.E.: "On the Integral Manifolds of the N-Body Problem", *Inventiones Math.* 20(1973), 59-72.
- [17] Calvo, M.: "Teoría de perturbaciones para sistemas no canónicos", *Vrania* nº273 (1971), 51-60.
- [18] Calvo, M.: "Aplicación de los métodos de promedios al estudio del movimiento de satélites artificiales", *Pub. Acad. Ciencias Zaragoza, Serie 2, Tomo XXVI, nº 3* (1971).
- [19] Calvo, M.: "Sobre el problema de resonancia ideal", *Actas segundas Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, Madrid 1973, (por aparecer)*.
- [20] Camarena, V.: "Optimización de trayectorias y el efecto de trampolín lunar", *Tesis, Fac. Ciencias, Univ. Zaragoza*.
- [21] Campbell, J.A., Jefferys, W.H.: "Equivalence of the perturbation Theories of Hori and Deprit", *Celestial Mechanics* 2(1970), 467-473.
- [22] Challe, A., Laclaverie, J.J.: "Disturbing Function and Analytical Solution of the Problem of a Satellite", *Astronomy & Astrophysics* 3(1969), 15-28.

- [23] Cid, R., Lahulla, J.F.: "Perturbaciones de segundo orden y corto período, para el movimiento de un satélite artificial en la variables de Hill", Pub. Acad. Ciencias Zaragoza, Serie 2, Tomo XXVI, nº2 (1971).
- [24] Cid, R., Lahulla, J.F.: "Aplicación de las transformaciones de Lie a la eliminación de los términos de corto período", Vrania, nº 274 (1971), 177-184.
- [25] Contopoulos, G.: "On the Existence of a Third Integral of Motion", Astronomical Journal 68(1963), 1-14.
- [26] Contopoulos, G.: "Orbits in Highly Perturbed Dynamical Systems", Astron. Journal 75(1970), 96-130; 76(1971), 147-156.
- [27] Danby, J.M.A.: "Wild Dynamical Systems, and the Role of two or more Small Divisors", en "Periodic Orbits, Stability and Resonances", 272-285, Ed. G.E.O. Giaccaglia, Reidel 1970.
- [28] Deprit, A.: "Canonical transformations depending of a small parameter", Celestial Mechanics 1(1969), 12-30.
- [29] Deprit, A., Henrard, J., Price, J.F., Rom, A.: "Birkhoff Normalization", Celestial Mechanics 1(1969), 223-251.
- [30] Deprit, A., Rom, A.: "The Main Problem of a Artificial Satellite Theory for small and moderate eccentricities", Celestial Mechanics 2(1970), 166-206.
- [31] Dieudonné, J.: "Fundamentos de Análisis Moderno", Reverté, 1966.
- [32] Dirac, P.A.M.: "Generalized Hamiltonian Systems", Proc. Roy. Soc. London A246(1958), 326-332.
- [33] Diliberto, S.: "Perturbation Theorems for Periodic Surfaces", Rendic. Circolo Matem. di Palermo 9(1960), 265-299; 10(1961), 111-161.

- [ 34 ] Easton, R.: "Some Topology of the 3-Body Problem", J. of Diff. Equations 10(1971), 371-377.
- [ 35 ] Easton, R.: "The Topology of the Regularized Integral Surfaces of the 3-Body Problem", J. of Diff. Equations 12(1972), 361-384.
- [ 36 ] Eckstein, M.C., Hechler, F.: "A reliable Derivation of the Perturbations due to any Zonal and Tesseral Harmonics of the Geopotential for Nearly-Circular Satellite Orbits", ESRO Scientific Report SR-13(1970).
- [ 37 ] Escobal, P.R.: "Methods of Orbit Determination", Wiley, 1965.
- [ 38 ] Escobal, P.R.: "Methods of Astrodynamics", Wiley, 1968.
- [ 39 ] Feagin, T., Gottlieb, R.G.: "Generalization of Lagrange's Implicit Function Theorem to N Dimensions", Celestial Mechanics 3(1971), 227-231.
- [ 40 ] Garfinkel, B.: "Formal Solution in the Problem of Small Divisors", Astron. Journal 71(1966), 657-669.
- [ 41 ] Garfinkel, B., Jupp, A., Williams, C.: "A Recursive von Zeipel Algorithm for the Ideal Resonance Problem", Astron. Journal 76(1971), 157-166.
- [ 42 ] Garfinkel, B.: "Regularization in the Ideal Resonance Problem", Celestial Mechanics 5(1972), 189-203.
- [ 43 ] Giacaglia, G.E.O.: "Notes on von Zeipel's Method", GSFC-NASA Publ. X-547-64-161, Greenbelt, Md. 1964.
- [ 44 ] Giacaglia, G.E.O.: "Perturbation Methods in Non-Linear Systems", Applied Math. Sci. 8, Springer, 1972.
- [ 45 ] Gordon, W.B.: "On the Relation Between Period and Energy in Periodic Dynamical Systems", J. of Math. and Mech. 19(1969), 111-114.



- [46] Gravier, J.P., Marchal, C., Culp, R.D.: "A Technique for Obtaining Optimal Interplanetary Transfers in the Real Case", *J. Astronautical Sciences* XVIII(1970), 101-117.
- [47] Gravier, J.P., Marchal, C., Culp, R.D.: "Optimal Trajectories between Earth and Mars in their True Planetary Orbits", *J. of Optimization Theory and Applications* 9(1972), 120-136.
- [48] Gravier, J.P., Marchal, C., Culp, R.D.: "Effects of Inclination and Eccentricity on Optimal Trajectories between Earth and Venus", *Astronautica Acta* 18(1973), 273-279.
- [49] Griffith, J.S.: "Note on Lie Transforms and Lagrange's Implicit Function Theorem", *Celestial Mechanics* 7 (1973), 395-397.
- [50] Gröbner, W.: "Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen", Springer 1960.
- [51] Hagihara, Y.: Triannual Report of the I.A.U. Commission 7, in "Reports on Astronomy", p.24, Academic Press, 1964.
- [52] Hagihara, Y.: "Celestial Mechanics", Vol.1(1970), Vol.2(1972), M.I.T. Press.
- [53] Henon, M., Heiles, C.: "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments", *Astron. Journal* 69(1964), 73-79.
- [54] Henrard, J.: "On a Perturbation Theory Using Lie Transforms", *Celestial Mechanics* 3(1970), 107-120.
- [55] Herrick, S.: "Methods of Astrodynamics", Van Nostrand, Vol.1(1971), Vol.2(1972).
- [56] Hori, G.I.: "Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables", *Publ. Astron. Soc. Japan* 18 (1966), 287-296.

- [57] Hori, G.I.: "Comparison of Two Perturbation Theories Based on Canonical Transformations", *Publ. Astron. Soc. Japan* 22(1970), 191-198.
- [58] Hori, G.I.: "Theory of General Perturbations for Non-Canonical Systems", *Publ. Astron. Soc. Japan* 23(1971), 567-587.
- [59] Kamel, A.A.: "Expansion Formulae in Canonical Transformations depending on a Small Parameter", *Celestial Mechanics* 3(1970), 90-106.
- [60] Kamel, A.A.: "Perturbation Method in the Theory of Nonlinear Oscillations", *Celestial Mechanics* 3(1970), 90-106.
- [61] Kamel, A.A.: "Lie Transforms and the Hamiltonization of Non-Hamiltonian Systems", *Celestial Mechanics* 4(1971), 397-405.
- [62] Kaplan, W.: "Topology of the two-Body Problem", *Amer. Math. Monthly* 49(1942), 316-322.
- [63] Kaula, W.M.: "Theory of Satellite Geodesy", Blaisdell Pub. Co., 1966.
- [64] Kelley, J.L.: "General Topology", Van Nostrand I.S.E., 1955.
- [65] Kervaire, M.A.: "Non-parallelizability of the n-Sphere for  $n > 7$ ", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 44(1958), 280-283.
- [66] Kevorkian, J.: "The two Variable Expansion Procedure for the Approximate Solution of Certain Nonlinear Differential Equations", en "Space Mathematics 3", ("Lectures in Applied Math.", Vol. 7), 206-276, Amer. Math. Soc. 1966.
- [67] Kolmogorov, A.N.: "General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics", *Proc. 1954 Inter. Cong. Math. (ruso)*, traducido al inglés en Apéndice D de [1].

- [68] Kovalevsky, J., Levallois, J. J.: "Géodésie générale: IV, Géodésie Spatiale", Eyrolles, 1971.
- [69] Kustaanheimo, P., Stiefel, E.: "Perturbation Theory of Kepler Motion based on Spinor Regularization", *J. für Reine und Angewandte Math.* 218(1965), 204-219.
- [70] Kyner, W. T.: "Rigorous and Formal Stability of Orbits about an Oblate Planet", *Mem. Amer. Math. Soc.* 82(1968), 1-27.
- [71] Lacina, J.: "New Canonical Perturbation Method for Complete Set of Integrals of Motion", *Ann. of Phys.* 51(1969), 381-391.
- [72] Lahulla, J. F.: "Movimiento de satélites artificiales. Eliminación de pequeños divisores en una teoría de segundo orden", *Publ. Acad. Ciencias Zaragoza, Serie 2ª, tomo XXV*(1970).
- [73] Laričeva, V. V.: "A new Algorithm for obtaining higher Approximations in the Averaging method", *Soviet Math. Doklady* 10(1969), 1294-1298.
- [74] Lawden, D. F.: "Optimal Trajectories for Space Navigation", Butterworths, 1963.
- [75] Leimanis, E.: "The General Problem of Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point", Springer, 1965.
- [76] Lie, S.: "Theorie der Transformationsgruppen I", Teubner, 1888 (reimpresión 1930).
- [77] Lindstedt, A.: "Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie", *Abh. K. Akad. Wiss. St. Petersburg* 31 nº 4 (1882).
- [78] Loomis, L. H.: "The Spectral Characterization of a Class of Almost Periodic Functions", *Ann. of Math.* 72(1960), 362-368.

- [79] Marchal, Ch.: "Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (Durée indifférente)", *Astronautica Acta* 11(1965), 432-445.
- [80] Marchal, Ch.: "Synthèse des résultats analytiques sur les transferts optimaux entre orbites képlériennes (Durée indifférente)", en "Colloquium on Advanced Problems & Methods for Space Flight Optimization. (Liège, 19-24 Juin 1967)", 91-156, Pergamon 1969.
- [81] Marec, J.P.: "Utilisation des équations aux variations dans l'étude des trajectoires spatiales optimales; application aux solutions singulières reticentes", en "Symposium on Optimization", *Lect. Not. in Math.* 132, p. 218-251, Springer 1970.
- [82] Mersman, W.A.: "A new Algorithm for the Lie Transform", *Celestial Mechanics* 3(1970), 81-89.
- [83] Mersman, W.A.: "Explicit Recursive Algorithms for the Construction of Equivalent Canonical Transformations", *Celestial Mechanics* 3(1971), 384-389.
- [84] Michael, E.: "Topologies on Spaces of Subsets", *Trans. Amer. Math. Soc.* 71(1951), 152-182.
- [85] Milne, E.A.: "Vectorial Mechanics", Methuen, 1948
- [86] Morrison, J.A.: "Comparison of the Modified Method of Average and the two Variable Expansion Procedure", *SIAM Review* 8(1966), 66-85.
- [87] Morrison, J.A.: "Generalized Method of Averaging and the von Zeipel Method", en "Progress in Astronautics and Aeronautics", Vol. 17, p. 117-138, Academic Press, 1966.
- [88] Moser, J.: "Nonexistence of Integrals for Canonical Systems of Differential Equations", *Comm. on Pure and Appl. Math.* 8(1955), 409-436.

- [89] Moser, J.: "On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus", *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klas.*, 1962, 1.
- [90] Moser, J.: "Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions", *Math. Ann.* 169(1967), 136-176.
- [91] Moser, J.: "Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold", *Comm. on Pure and Appl. Math.* 23(1970), 609-636.
- [92] Moser, J.: "Stable and Random Motion in Dynamical Systems", Princeton 1973.
- [93] Musen, P.: "On the High Order Effects in the Methods of Krylov-Bogoliubov and Poincaré", *J. of Astronautical Sciences* 12(1965), 129-134.
- [94] Nekhorosev, N. N.: "Behaviour of Hamiltonian Systems close to Integrable", *Funct. Anal. and Appl.* 5(1971), 338-339.
- [95] Netto, E.: "Lehrbuch der Combinatorik", Teubner, 1901.
- [96] Percus, J. K.: "Combinatorial Methods", *Appl. Math. Sci.* 4, Springer, 1971.
- [97] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V.; Mischenko, E. F.: "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Wiley 1962.
- [98] Poincaré, H.: "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", Reprint NASA TT-F-450, 451, 452. 1967.
- [99] Pollard, H.: "Mathematical Introduction to Celestial Mechanics", Prentice Hall, 1973.
- [100] Poritsky, H.: "Motion of a Satellite around an Oblate Earth", *Astron. Journal* 67(1962), 212-216.
- [101] Rapaport, M.: "Sur l'équivalence entre les théories de Deprit et Hori", *Astron. & Astrophysics* 31(1974), 79-82.

- [102] Rüssmann, H.: "Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung", *Math. Ann.* 154(1964), 285-300.
- [103] Rüssmann, H.: "Über die Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung", *Math. Ann.* 169(1967), 55-72.
- [104] Rüssmann, H.: "Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes", *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klas.* 1970.
- [105] Saari, D.G.: "Regularization and the Artificial Earth Satellite Problem", *Celestial Mechanics* 9(1974), 55-72.
- [106] Sersic, J.L.: "Aplicaciones de un cierto tipo de transformaciones canónicas a la Mecánica Celeste", *Publ. Obs. Astron. Univ. Nac. de la Plata, Serie Astron.* tomo XXXV, 1969.
- [107] Shniad, H.: "The Equivalence of von Zeipel Mappings and Lie Transforms", *Celestial Mechanics* 2(1970), 114-120.
- [108] Siegel, C.L.: "On the Integrals of Canonical Systems", *Ann. Math.* 42(1941), 806-822.
- [109] Siegel, C.L., Moser, J.: "Lectures on Celestial Mechanics", Springer, 1971.
- [110] Simó, C.: "Determinación de armónicos zonales del potencial terrestre", *Vrania*(1971) nº273, 39-49 y nº274, 167-175.
- [111] Simó, C.: "Secular Perturbations due to Potential: Second Approximation", en "Space Research XIII", 45-49, Akademie Verlag, 1973.
- [112] Simó, C.: "Solución del problema de Lambert mediante regularización", *Collectanea Mathematica* 24(1973), 231-247.
- [113] Simó, C.: "Estabilidad toroidal en el campo de un primario finito", *Actas 2as. Jornadas Mat. Hisp.-Lus. Madrid 1973*, (por aparecer).

- [114] Smale, S.: "Topology and Mechanics", Inventiones Math. 10 (1970), 305-331 y 11 (1970), 45-64.
- [115] Souriau, J.M.: "Structure des systèmes dynamiques", Dunod, 1970.
- [116] Stern, D.P.: "A new Formulation of Canonical Perturbation Theory", Celestial Mechanics 3 (1971), 241-246.
- [117] Sternberg, S.: "Celestial Mechanics", Benjamin, 1969.
- [118] Stiefel, E.L., Scheifele, G.: "Linear and Regular Celestial Mechanics", Springer, 1971.
- [119] Stumpff, K.: "Himmelsmechanik", Bd.1, Deuts. Verlag der Wiss. 1956.
- [120] Takens, F.: "A  $C^1$  Counterexample to Moser's Twist Theorem", Indagationes Math. 33 (1971), 379-388.
- [121] Weinstein, A.: "Lagrangian Submanifolds and Hamiltonian Systems", Ann. Math. 79 (1973), 377-410.
- [122] Whittaker, E.T.: "On the Adelpic Integral of the Differential Equations of Dynamics", Proc. Roy. Soc. Edinburgh 37 (1917), 95-116.
- [123] Whittaker, E.T., Watson, G.N.: "A Course of Modern Analysis", Cambridge Univ. Press, 1927.
- [124] Wintner, A.: "The linear Difference Equation of First Order for Angular Variables", Duke Math. J. 12 (1945), 445-449.
- [125] Yashkin, S.N.: "Cases of Resonance in Satellite Orbital Elements", Sov. Astronomy AJ 14 (1971), 1030-1034.
- [126] Zabreïko, J., Kolesov, S., Krasnosel'skii, M.A.: "Implicit Functions and the Bogoliubov-Krylov Averaging Principle", Soviet Math. Doklady 10 (1969), 111-114.
- [127] Zeipel, H. von: "Recherches sur le mouvement des petites planètes", Arkiv för Mat., Astron. och Fys., Bd 11 n°1, 1-58, n°7, 1-62 (1916); Bd 12 n°9, 1-89; Bd 13 n°3, 1-93 (1917).