



Universitat
Autònoma
de Barcelona

Departament de Física

Programa de doctorat de ciència de Materials

**DISSENY I CARACTERITZACIÓ
D'UN ONDULADOR HELICOÏDAL
PER A LA PRODUCCIÓ DE LLUM DE SINCROTRÓ,
I MILLORES EN EL SEU PROCÉS DE
CONSTRUCCIÓ**

Memòria presentada per a l'obtenció del títol de Doctor en Ciències Físiques

Autor: Zeus Martí Diaz

Director: Josep Campmany

Any: 2006

Agraïments

Agraeixo el suport econòmic i logístic del LLS (Laboratori de llum de sincrotró), en particular als seus màxims responsables científics, Joan Bordas i Ramon Pascual, així com al secretari del grup Enric Vinyals.

Agraeixo l'especial atenció en la direcció d'aquesta tesi doctoral del meu director Josep Campmany.

Desidero inoltre ringraziare Bruno Diviacco, Cristina Knapic, Roberto Bracco, Daniele Millo e Dino Zangrando per le osservazioni e gli utili consigli ricevuti durante la mia permanenza a Trieste.

Agraeixo tots i cada un dels comentaris i consells que he rebut dels meus companys Ferran Fernández, Jordi Marcos, Josep Nicolas, Miquel Traveria, Toni Pérez, Ramon Escribà, Felisa Berenguer i Joan Vilà.

Finalment agraeixo als amics que m'han donat suport moral durant el decurs del meu doctorat així com als meus pares i germans.

Pròleg

Aquest estudi es presenta com a resultat de la major part de la recerca que he portat a terme en els quatre anys del meu doctorat (2002-2006), el qual ha estat finançat per l'AGAUR (acrònim de *Agència de gestió d'ajuts universitaris i de recerca*).

Els estudis que es presenten s'han dut a terme en associació al LLS ("Laboratori de Llum de Sincrotró": consorci format per a la Universitat Autònoma de Barcelona, la Generalitat i l'Estat).

En el capítol 1 es presenten els ondulators dins del marc dels sincrotrons, així com de forma resumida les propietats principals dels primers. Es tracta doncs d'una introducció teòrica.

El contingut dels capítols 2 i 4 va ser recollit i desenvolupat durant la meua estada al sincrotró Elettra de Trieste, Itàlia.

El capítol 2 conté una descripció intensiva i exhaustiva de les tècniques i mètodes de caracterització i implementació dels ondulators. Es tracta d'una descripció del mètode experimental.

El capítol 3 conté una sèrie d'estudis de diferents mètodes per al disseny d'un ondulator. Aquests mètodes han estat desenvolupats per l'autor per tal d'implementar un dels 4 ondulators que s'instal·larà en el futur sincrotró ALBA a Cerdanyola, Espanya.

En el capítol 4 descriu el muntatge d'un ondulator de polarització helicoidal. En aquest apartat ressaltarem els problemes originats per les inhomogeneïtats dels blocs magnètics.

En el capítol 5 es planteja un nou mètode d'ordenació de blocs per al muntatge d'ondulators basat en el desenvolupament multipolar. Amb aquest mètode es pretén solucionar les mancances d'altres mètodes existents com els utilitzats en el capítol 3, en particular les mancances relacionades amb les inhomogeneïtats dels blocs.

En el capítol 6 es presenten les conclusions resumides de tots aquests estudis.

Índex

AGRAÏMENTS.....	1
PRÒLEG.....	2
1. INTRODUCCIÓ	11
1.1. SINCROTRONS	11
1.1.1. <i>Dispositius d'inserció</i>	13
1.2. ONDULADORS	15
1.2.1. <i>Formules rellevants</i>	15
1.2.2. <i>Espectre d'un ondulator</i>	21
1.2.3. <i>Tecnologies dels ondulators</i>	22
1.2.4. <i>Tipus d'ondulators: Apple II</i>	27
1.3. NOTACIÓ.....	31
1.4. EFECTES DELS ONDULADORS NO IDEALS	31
1.4.1. <i>Efecte sobre el feix d'electrons</i>	32
1.4.2. <i>Efecte sobre el feix de fotons</i>	37
2. TÈCNiques I MÈTODES EN LA IMPLEMENTACIÓ D'ONDULADORS.....	45
2.1. CARACTERITZACIÓ DEL CAMP MAGNÈTIC D'UN ONDULADOR	45
2.1.1. <i>Mesures amb bobines Helmholtz</i>	46
2.1.2. <i>Mesures amb fil tibant</i>	52
2.1.3. <i>Mesures amb sonda Hall</i>	58
2.2. TÈCNiques D'IMPLEMENTACIÓ D'UN ONDULADOR	63
2.2.1. <i>Correcció dels efectes de la permeabilitat en el disseny de les terminacions</i>	63
2.2.2. <i>Tècniques d'ordenació de blocs</i>	64
2.2.3. <i>Tècniques de Correcció</i>	68
2.2.4. <i>Correcció activa</i>	70
3. CAS PRÀCTIC 1: DISSENY D'UN ONDULADOR APPLE II.....	75
3.1. INTRODUCCIÓ.....	75
3.1.1. <i>Requeriments en el funcionament de l'ondulator pel que fa al rang d'energies</i>	75
3.2. DISSENY LLIURE SEGONS REQUERIMENTS CIENTÍFICS	76
3.2.1. <i>Introducció</i>	76
3.2.2. <i>Optimització del període</i>	76
3.2.3. <i>Resultats</i>	78
3.3. INTRODUCCIÓ DE CONDICIONANTS TÈCNICS AL DISSENY	79
3.3.1. <i>Introducció</i>	79
3.3.2. <i>Metodologia</i>	79
3.3.3. <i>Selecció del període</i>	91
3.4. DISSENY AMB LIMITACIONS PRÀCTIQUES ESPECÍFIQUES	92
3.4.1. <i>Introducció</i>	92

3.4.2.	<i>Metodologia</i>	93
3.4.3.	<i>Comparació amb altres mètodes</i>	96
3.5.	OPTIMITZACIÓ DE LES TERMINACIONS.....	97
3.5.1.	<i>Optimització paràmetre a paràmetre</i>	99
3.5.2.	<i>Optimització numèrica</i>	100
3.6.	ELECCIÓ DE LA SOLUCIÓ: PROPIETATS MAGNÈTIQUES, MECÀNiques I ÒPTIQUES	100
3.6.1.	<i>Paràmetres del disseny magnètic i mecànic</i>	101
3.6.2.	<i>Camp magnètic (eix longitudinal)</i>	102
3.6.3.	<i>Camp magnètic (pla transversal)</i>	104
3.6.4.	<i>Paràmetre K de l'ondulador</i>	105
3.6.5.	<i>Comportament òptic: desplaçament dels harmònics</i>	105
3.6.6.	<i>Forces magnètiques</i>	109
3.6.7.	<i>Variació de les integrals amb la coordenada transversal</i>	111
4.	CAS PRÀCTIC 2: MESURES D'UN ONDULADOR APPLE-II	117
4.1.	ESPECIFICACIONS	117
4.1.1.	<i>Especificacions sobre la radiació</i>	117
4.1.2.	<i>Especificacions sobre l'efecte en el feix d'electrons</i>	118
4.2.	MESURES I CONSTRUCCIÓ.....	118
4.2.1.	<i>Superposició d'errors produïts per inhomogeneïtats</i>	118
4.2.2.	<i>Muntatge i assaigs magnètics</i>	125
4.2.3.	<i>Procés d'ordenació de blocs</i>	133
4.2.4.	<i>Procés de correcció</i>	139
4.3.	RESUM.....	146
5.	MILLORA DEL MÈTODE D'ORDENACIÓ DE BLOCS	151
5.1.	INTRODUCCIÓ.....	151
5.2.	DESCRIPCIÓ DEL CAMP MAGNÈTIC D'UN BLOC	152
5.2.1.	<i>Expansió per Taylor</i>	152
5.2.2.	<i>Expansió amb harmònics esfèrics</i>	155
5.2.3.	<i>Comparació entre expressions</i>	156
5.2.4.	<i>Ajust del camp magnètic amb l'expansió multipolar</i>	157
5.2.5.	<i>Integrals multipolars</i>	159
5.2.6.	<i>Paràmetres de l'ajust</i>	159
5.3.	COMPARACIÓ ENTRE ALGORISMES D'ORDENACIÓ DE BLOCS	163
5.3.1.	<i>Modelització d'inhomogeneïtats</i>	163
5.3.2.	<i>Descripció d'un bloc: MMP vs. AMM</i>	166
5.3.3.	<i>Descripció d'un procés d'ordenació</i>	168
6.	CONCLUSIONS	181
7.	REFERÈNCIES (PER ORDRE ALFABÈTIC)	187
	APÈNDIX A. COMPONENTS DE LES INTEGRALS DE CAMP	195

A.1.	INTRODUCCIÓ.....	195
A.2.	DERIVACIÓ.....	195
A.2.1.	<i>Derivació a partir de la llei de Biot-Savart.....</i>	<i>195</i>
A.2.2.	<i>Derivació a partir de les lleis de Maxwell i la relació de dispersió.....</i>	<i>197</i>
APÈNDIX B. EXPANSIÓ DEL CAMP MAGNÈTIC PER TAYLOR		199
APÈNDIX C. PROPIETATS DELS MOMENTS MULTIPOLARS.....		201
C.1.	RESTRICCIÓ I DE LES MÀTRIS MULTIPOLARS	201
C.2.	RESTRICCIÓ II DE LES MÀTRIS MULTIPOLARS.....	201
C.3.	GENERALITZACIÓ.....	202
APÈNDIX D. GENERALITZACIÓ DE LES MÀTRIS MULTIPOLARS.....		203

CAPÍTOL 1

INTRODUCCIÓ:

Utilitzarem aquest primer capítol per contextualitzar l'objecte d'estudi d'aquest treball: els onduladors. En primer lloc veurem quin es el seu paper en els sincrotrons. També introduïrem les expressions que es fan servir per descriure la llum que produeixen. Farem un resum dels tipus d'onduladors utilitzats arreu i finalment descriurem quins són els paràmetres més importants a l'hora de caracteritzar-los.

1. INTRODUCCIÓ

1.1. Sincrotrons

Avui en dia els *acceleradors* són un instrument essencial per al desenvolupament científic en una gran varietat de camps i disciplines. L'objectiu principal d'aquest tipus d'instal·lacions és aconseguir un feix de partícules carregades amb unes propietats determinades. Les magnituds més importants per caracteritzar aquest feix són: l'energia mitjana de les partícules que el constitueixen, la seva trajectòria i moment, la intensitat i l'estructura temporal.

Existeix una gran varietat de sistemes d'acceleració. La diferència entre ells rau en el tipus de trajectòria en què es produeix l'acceleració. Així, existeixen *acceleradors* lineals, no lineals de trajectòria constant, i d'altres en què la trajectòria canvia al llarg del procés d'acceleració.

Actualment, els *acceleradors* que assoleixen unes de les energies més elevades són els *sincrotrons*. Fixem-nos per exemple en el cas del LHC (acrònim del nom anglès "Large hadron collider", accelerador ubicat a Ginebra), que assolirà quan es finalitzi els 7 TeV per partícula. Un sincrotró és un sistema d'acceleració circular de radi constant,¹ en què els imants que corben les trajectòries de les partícules accelerades van canviant el camp magnètic que produeixen per adaptar-lo a l'energia de les partícules, que a cada volta és incrementada per una o varies cavitats acceleradores de radiofreqüència, que al seu torn van adaptant la seva freqüència a l'energia de les partícules. Així doncs, com a resultat, la trajectòria no canvia volta rere volta, tot i que l'energia de la partícula augmenta.

¹ Philip J. Bryant, Kjell Johnsen, *The principles of Circular Accelerators and Storage Rings*, Cambridge university press, 1993, Cambridge, p. 10.

Amb l'aparició d'aquests acceleradors va arribar l'aprofitament de la *llum de sincrotró*.² No es tracta de res més que de la radiació emesa per càrregues accelerades, i ve descrita per les lleis de Maxwell, però donat que la seva intensitat depèn de l'energia de les partícules que l'emeten (i de la curvatura de la trajectòria), fins que no van aparèixer els *sincrotrons* no va ser detectada.

El fet que un paràmetre sigui més o menys important depèn de la utilitat que calgui de donar al feix de partícules. En general, però, l'energia del feix és la característica més rellevant. La capacitat d'interacció de les partícules del feix depèn sobretot de la seva energia. A més a causa dels efectes relativistes, com més gran és l'energia de les partícules menor es la dispersió, tant en energia com en posició, i major és la col·limació de la radiació de sincrotró, entre d'altres avantatges.

Per aconseguir tots aquests propòsits calen tot un seguit de sistemes, no només per produir l'acceleració en sí, sinó també per controlar i mantenir el feix estable. El més comú és que l'acceleració es produeixi mitjançant els camps elèctrics alterns d'una cavitat ressonant. En canvi el sistema de guiatge i de control del feix utilitza camps magnètics, que solen ser estàtics o canviar lentament.

També es imprescindible un sistema d'ultra alt buit per garantir que les partícules accelerades no es perdin en xocs amb les molècules del gas residual. Els seus components principals són la cambra i les bombes de buit. Igualment són importants altres sistemes secundaris de suport, com ara el de refrigeració.

Fins ara hem descrit el que s'anomenen sincrotrons de *segona generació*, en què tots els dispositius citats contribueixen d'una o altra forma a condicionar el feix de partícules carregades i la llum s'emet com a efecte secundari. Hi ha d'altres, els de *tercera generació*, la característica principal dels quals és la incorporació dels anomenats *dispositius d'inserció* o IDs (de l'anglès "insertion devices", ID)³. Es tracta d'elements dissenyats per extreure eficientment energia del feix de partícules carregades en forma de radiació de sincrotró. Aquests dispositius no són imprescindibles per al funcionament del sincrotró, i de fet en molts casos la utilització dels ID empitjora l'estabilitat del feix d'electrons. Però el seu ús és tan avantatjós des del punt de vista de la radiació produïda que fins i tot en aquests casos se'n fa un ús intensiu.^{3,4,5}

² Philip J. Bryant, Kjell Johnsen, *op. cit.*, p. 220.

³ P.Ellaume, H.Onuki, *Undulators, Wigglers and their applications*, Taylor & Francis, 2003, London.

⁴ James A.Clarke, *The Science and Technology of Undulators and Wigglers*, Oxford University Press, 2004, New York.

1.1.1. Dispositius d'inserció

De forma general, els IDs són dispositius magnètics que produeixen una certa distribució espacial de camp magnètic que fa que els electrons emetin llum de sincrotró amb característiques especials. Es tracta de distribucions periòdiques de camp magnètic al llarg de la trajectòria dels electrons. La figura 1 mostra el sistema de referència emprat i un esquema de la trajectòria de l'electró en el camp magnètic d'un ID.

Tot i que s'utilitzen regularment des de fa tan sols dues dècades, la seva història es remunta molt enrere en el temps. La primera discussió en què es va contemplar l'ús d'estructures periòdiques per generar microones utilitzant partícules carregades accelerades va ser fa 50 anys. Amb el temps, aquest dispositius s'han anat aplicant a sincrotrons d'energia cada cop més alta, i actualment poden produir des de radiació infraroja fins a raigs X durs.

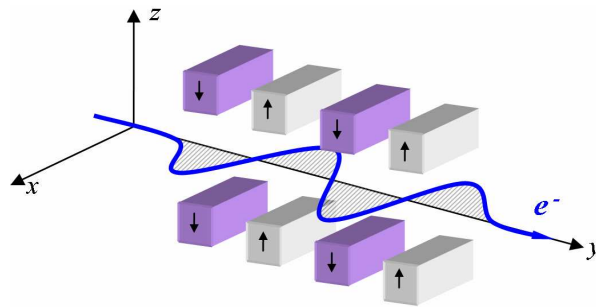


Figura 1: Esquema de la trajectòria d'un electró en el camp magnètic generat per un ID. Definició del sistema de referència.

La trajectòria dels electrons és causada per la força de Lorentz. De forma exacta, les equacions de moviment s'escriuen:

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{e}{m\gamma} \vec{\beta} \times \vec{B} \quad (1-1)$$

on β és la velocitat de l'electró (dividida per c la velocitat de la llum), B és el camp magnètic, e la càrrega del electró, m la seva massa i $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$. Sovint, en la regió on el feix travessa aquests dispositius, el camp magnètic es pot expressar amb bona aproximació com una sinusoide,

⁵ Richard P. Walker, "Insertion Devices: Undulators and Wigglers", CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998.

$$B_z = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \quad (1-2)$$

$$B_x = B_y = 0$$

on λ_0 és el període del dispositiu d'inserció. Amb l'assumpció que el camp no canviï segons la direcció horitzontal, i que les velocitats transversal (x) i vertical (z) siguin petites (en comparació a la velocitat de la llum), s'obtenen unes equacions simplificades del moviment de l'electró,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{\gamma m} B_z, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (1-3)$$

integrant la primera de les equacions, obtenim:

$$\beta_x = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{e B_0 \lambda_0}{2\pi m \gamma c} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) = \frac{K}{\gamma} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \quad (1-4)$$

Per a una partícula molt relativista, β_x és equivalent al pendent de la corba $x(c \cdot t)$. Es defineix la constant de l'ondulador, K , com:

$$K = \frac{e B_0 \lambda_0}{2\pi m c} \quad (1-5)$$

Aquest paràmetre diferencia els dos tipus principals de dispositius d'inserció, els ondulators (anomenats *undulators* en anglès) i els oscil·ladors (anomenats *wigglers*). Els ondulators es caracteritzen per presentar una constant K petita, pròxima a la unitat, mentre que els oscil·ladors es caracteritzen per tenir una constant K gran, típicament un o dos ordres per sobre de la unitat. Per entendre'n la diferència, cal només recordar una de les propietats característiques de la radiació de sincrotró: quasi tota la radiació emesa es troba concentrada en un con d'angle $1/\gamma$.

En el cas de l'ondulador, per a valors de K petits, l'equació (1-4) comporta que les rectes tangents a la trajectòria de l'electró no divergeixen una quantitat molt més gran que $1/\gamma$, la divergència del feix de fotons. Així, els feixos de radiació en tots els punts de la trajectòria d'un mateix electró interfereixen entre sí, i modulen el patró d'emissió de la llum.

En el cas d'un oscil·lador, per a valors de K grans, l'equació (1-4) comporta que les rectes tangents a la trajectòria de l'electró divergeixen un angle molt superior a $1/\gamma$. La radiació de cada oscil·lació se superposa directament donat que no interfereix entre sí.

La *Figura 2* mostra esquemàticament la trajectòria d'un electró dintre d'un ondulador i dintre d'un oscil·lador.

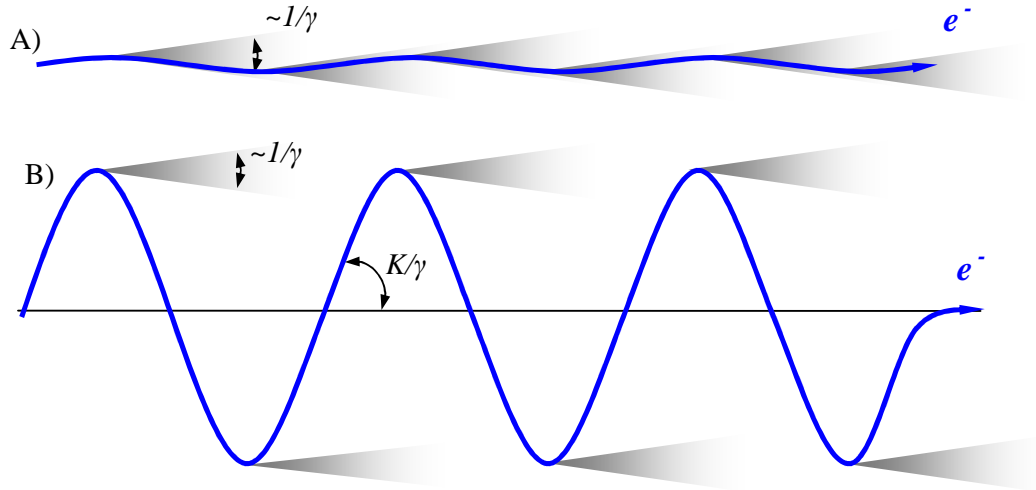


Figura 2: A) trajectòria (en blau) d'un electró en un ondulator. B) trajectòria (en blau) d'un electró en un oscil·lador. En gris, els feixos de radiació emesos en els punts de màxima curvatura (màxima radiació).

En aquest treball, ens centrarem exclusivament en els ondulators, en particular en els ondulators helicoïdals tipus Apple, que definirem més endavant.

1.2. Ondulators

Com hem explicat en l'apartat anterior, la llum emesa a cada període de l'ondulator interfereix entre si. Això vol dir que la llum emesa presenta una sèrie de pics, tant en la banda espectral com en la temporal. Així, la llum resultant és molt més col·limada i monocromàtica que la dels oscil·ladors. Tot seguit en derivarem la freqüència fonamental.

1.2.1. Formules rellevants

Partim del fet que un camp magnètic no pot alterar el mòdul de la velocitat:

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta^2 = \text{constant} \quad (1-6)$$

Afegint l'equació (1-4) a l'anterior, i considerant $1/\gamma$ molt petit:

$$\beta_y = \beta \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos\left(2\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \right) \quad (1-7)$$

L'electró no presenta una velocitat constant segons la direcció del moviment, però, podem establir una velocitat promig:

$$\overline{\beta}_y = \beta \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \quad (1-8)$$

on altre cop hem eliminat termes d'ordre superior a $1/\gamma^2$, fent valdre el límit $1/\gamma$ molt petit. Aquesta velocitat de desplaçament ens és imprescindible per determinar la freqüència principal de la llum de l'ondulador. Aquesta freqüència està relacionada amb el període de l'ondulador i amb el temps que triga l'electró a recórrer aquest període.

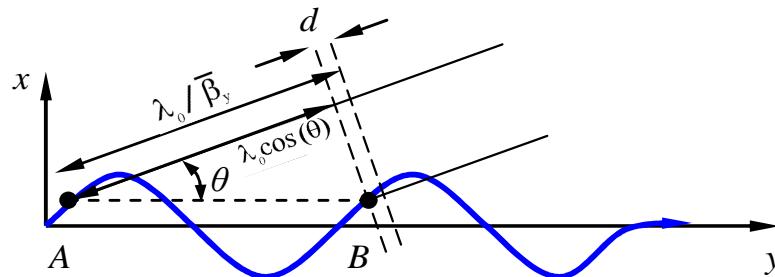


Figura 3: Interferència entre dues ones emeses a A i B (separates un període). y és la direcció de propagació.

En moure's d'un punt A a un punt B equivalent (separat un període), l'electró triga $\lambda_0/\beta c$. En aquest temps, una ona emesa en el punt A s'ha propagat una distància λ_0/β . Si observem la radiació procedent de la trajectòria des d'un angle θ , aleshores el desfasament entre l'ona emesa a A i una altra ona emesa a B és d (vegeu Figura 3):

$$d = \frac{\lambda_0}{\beta} - \lambda_0 \cos \theta = n \lambda_n \quad (1-9)$$

Quan aquesta distància és múltiple de la longitud d'ona fonamental λ , es produeix interferència constructiva en els successius períodes. Trobarem radiació en angles al voltant de $1/\gamma$, per tant θ també és molt petit en aquesta aproximació, i utilitzant l'equació (1-8) obtenim:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (1-10)$$

Per a energies dels electrons de l'ordre dels GeV , períodes de l'ordre de cm i en el primer harmònic, obtenim energies dels fotons d'alguns keV . El mínim en energia dels fotons ve determinat pel màxim valor de K que tecnològicament es pugui aconseguir per a un període λ_0 determinada.

En molts experiments interessa poder produir radiació en un cert rang de longituds d'ona. La forma més senzilla de realitzar aquest escombrat en els valors de λ_n és a través de la variació del paràmetre K . Podem alterar-lo fàcilment reduint el camp magnètic en la zona per on passa

el feix d'electrons. Així K , per a un període λ_0 fixat, dóna idea de la grandària del rang d'energies a les que podem accedir amb l'harmònic λ_n .

Per altra banda, la intensitat de la radiació, a l'igual que la curvatura de la trajectòria dels electrons, augmenten amb el valor de K . Això no ho podem apreciar a l'equació (1-10). A la literatura,^{6,7,8} podem trobar nombroses deduccions d'una expressió que permeti calcular el flux de fotons emesos. Unes i altres utilitzen l'expressió del camp electromagnètic de radiació per deduir la distribució d'intensitat electromagnètica. Al final d'aquesta deducció, hom pot comprovar que el con de radiació és, com a resultat de la interferència, més estret que el con causat per la radiació en cada punt de la trajectòria (l/γ). En particular, es pot comprovar que el con de radiació (l'amplada mitjana a mitja alçada: HWHM) queda reduït a:

$$\Delta\theta = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{K^2}{2N}} \quad (1-11)$$

on N és el nombre de períodes de l'ondulador. En la deducció esmentada es fan les següents suposicions:

1. Aproximació relativista: $\gamma \gg 1$.
2. Aproximació de camps llunyans (suposem que mirem la llum produïda per l'ondulador prou lluny d'aquest) .
3. Aproximació d'angles petits: $\theta \ll 1$.
4. Aproximació de periodicitat: Suposem que tots els períodes de l'ondulador són exactament iguals i, a més, que són sinusoidals.
5. Només existeixen dues components del camp magnètic, segons la direcció vertical (z) i segons la direcció horitzontal (x), ambdues són homogènies segons la direcció horitzontal (x) i periòdiques (mateix període) en la longitudinal (y), però desfasades en ψ . Cal dir que cada component té associada una constant K diferent, que anomenarem K_x i K_z , respectivament.
6. Ondulador amb molts períodes: $N \gg 1$.

Sota aquestes aproximacions, podem descriure el camp com:

⁶ Richard P. Walker, "Insertion Devices: Undulators and Wigglers", CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998, pag 136.

⁷ P.Ellaume, H.Onuki, *Undulators, Wigglers and their applications*, Taylor & Francis, 2003, London, pag 40.

⁸ James A. Clarke, *The Science and Technology of Undulators and Wigglers*, Oxford University Press, 2004, New York.

$$\begin{aligned} B_z &= B_{z0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \\ B_x &= B_{x0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y + \psi\right) \end{aligned} \quad (1-12)$$

La posició i la velocitat dels electrons s'expressa:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{K_z}{\gamma} \frac{c}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) \\ z(t) &= -\frac{K_x}{\gamma} \frac{c}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t + \psi) \\ y(t) &= \bar{\beta} c t - \frac{K_z^2}{4\gamma^2} \frac{c}{2\Omega_0} \sin(2\Omega_0 t) - \frac{K_x^2}{4\gamma^2} \frac{c}{2\Omega_0} \sin[2(\Omega_0 t + \psi)] \\ \beta_x(t) &= \frac{K_z}{\gamma} \cos(\Omega_0 t) \\ \beta_z(t) &= -\frac{K_x}{\gamma} \cos(\Omega_0 t + \psi) \\ \beta_y(t) &= \bar{\beta} - \frac{K_z^2}{4\gamma^2} \cos(2\Omega_0 t) - \frac{K_x^2}{4\gamma^2} \cos[2(\Omega_0 t + \psi)] \end{aligned} \quad (1-13)$$

on es defineix:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{2\pi \bar{\beta} c}{\lambda_0} \\ \bar{\beta} &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K_x^2}{4\gamma^2} - \frac{K_z^2}{4\gamma^2} \end{aligned} \quad (1-14)$$

Segons aquestes aproximacions, podem expressar analíticament la intensitat del camp electromagnètic per unitat de freqüència ω i angle sòlid Ω com:⁹

$$\frac{d^2 I(\theta, \phi)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 N^2 \gamma^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi[\omega - \omega_n(\theta)]}{\omega_1(\theta)}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi[\omega - \omega_n(\theta)]}{\omega_1(\theta)}\right)} F(\omega, K_x, K_z, \theta, \phi) \quad (1-15)$$

on θ és l'angle polar i ϕ l'azimutal. Les freqüències pròpies venen donades per:

$$\omega_n(\theta) = \frac{n 2\Omega_0 \gamma^2}{\left(1 + \frac{K_x^2 + K_z^2}{2} + \gamma^2 \theta^2\right)} \quad (1-16)$$

⁹ Richard P. Walker, "Insertion Devices: Undulators and Wigglers", CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998, p. 136.

El terme amb \sin^2 conté la informació de la interferència, mentre que el terme $F_n(K_x, K_y, \theta, \phi)$, també anomenat *factor de forma* (en analogia amb el fenomen de difracció) és el que dóna la intensitat de cadascun dels harmònics. Sota les aproximacions esmentades, es pot expressar:

$$F_n(K_x, K_z, \theta, \phi) = \frac{\omega^2(\theta)}{\gamma^2} \left| \int_{-\lambda_0/2c\bar{\beta}}^{\lambda_0/2c\bar{\beta}} [\theta \cos(\phi) - \beta_x(t), \theta \sin \phi - \beta_z(t)] e^{i\omega t_{ret}} dt \right|^2 \quad (1-17)$$

on $t_{ret} = t - \theta \cos \phi \frac{x(t)}{c} - \theta \sin \phi \frac{z(t)}{c} - \cos \theta \frac{y(t)}{c}$ és el temps retardat. $F(\omega, K_x, K_z, \theta, \phi)$ decau a zero quan K s'acosta a zero i decau de forma asimptòtica quan K creix indefinidament. Aquesta expressió es també vàlida per camps periòdics no sinusoidals. Aquest terme és pot calcular numèricament, però implica llargs temps de càlcul. Quan el nombre de períodes és molt gran, qui determina la distribució angular de la radiació és principalment el terme d'interferència (i l'amplada angular ve determinada per $\Delta\theta$) de forma que en realitat $F(\omega, K_x, K_z, \theta, \phi)$ es pot considerar constant dintre del conus central, i només es fa servir seu el valor al centre $F(\omega, K_x, K_z, 0, 0)$. A més, per a nombres de períodes molt grans, el terme amb \sin^2 en l'espai de les freqüències és només diferent de zero molt a prop de $\omega = \omega_n(\theta)$. Si, a més, fem servir les expressions anteriors segons les quals el camp és sinusoidal i ens concentrem en el cas $\psi = \pi/2$ (el cas més interessant ja que inclou polarització lineal i circular), arribem a la següent expressió:

$$F_n(K_x, K_z) \equiv F(\omega_n, K_x, K_z, 0, 0) = \frac{\omega_n^2(0)}{\gamma^2} \left| \int_{-\lambda_0/2c\bar{\beta}}^{\lambda_0/2c\bar{\beta}} (\beta_x(t), \beta_z(t)) e^{i\omega_n(0)t_{ret}} dt \right|^2 =$$

$$= \frac{n^2}{\left(1 + \frac{K_x^2 + K_z^2}{2}\right)^2} \left(K_z^2 \left(J_{\frac{n+1}{2}}(Y) - J_{\frac{n-1}{2}}(Y) \right)^2 + K_x^2 \left(J_{\frac{n+1}{2}}(Y) + J_{\frac{n-1}{2}}(Y) \right)^2 \right) \quad (1-18)$$

on J denota la funció de Bessel de primera espècie. I hem definit implícitament:

$$Y = \frac{n(K_z^2 - K_x^2)}{4 \left(1 + \frac{K_x^2 + K_z^2}{2}\right)} \quad (1-19)$$

Val a dir que aquesta aproximació només es valida per a harmònics senars, ja que per a harmònics parells no hi ha flux a $\theta = 0$.

Sovint no ens interessa la densitat de flux, sinó el flux integrat en el con central (dintre de $\Delta\theta$). La fórmula (1-15) es pot simplificar força si suposem que $F(\omega, K_x, K_z, \theta, \phi) \approx F_n(K_x, K_z)$, fet que és cert ja que $F(\omega, K_x, K_z, \theta, \phi)$ varia molt lentament en ω , θ i ϕ en comparació amb el terme d'interferència. No es pot resoldre la integral de la densitat de flux analíticament per a qualsevol freqüència, però sovint ens referim al flux integrat en el conus central per a una freqüència igual a $\omega = \omega_n(0)$. Així doncs, podem integrar la densitat de flux a una energia fixada (a cada un dels harmònics). De fet, això representa el cas real en què s'utilitza un monocromador per seleccionar una banda de freqüències encara més estreta que la que dona el propi ondulator. El monocromador també té una certa amplada de banda, i per conveni se suposa que la resolució d'aquest és del 0.1%, és a dir, que en realitat s'integra en un entorn $\Delta\omega$ de $\omega = \omega_n(\theta)$. $\Delta\omega$ es pot suposar molt menor que $\omega_n(0)$, i en aquest cas la densitat de flux a cada harmònic s'aproxima per:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_n(\theta)}{2\pi\theta d\theta \Delta\omega/\omega_n(0)} &= \frac{1}{\hbar} \frac{dI_n(\theta)}{2\pi\theta d\theta \Delta\omega} \approx \\ &\approx \frac{e^2 N^2 \gamma^2}{4\pi\epsilon_0 c \hbar} \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi[\omega_n(0) - \omega_n(\theta)]}{\omega_1(\theta)}\right)}{N^2 \left(\frac{\pi[\omega_n(0) - \omega_n(\theta)]}{\omega_1(\theta)}\right)^2} F_n(K_x, K_z) = \quad (1-20) \\ &= \alpha N^2 \gamma^2 \frac{\sin^2\left(Nn\pi \frac{\gamma^2 \theta^2}{(1 + (K_x^2 + K_z^2)/2)}\right)}{\left(\frac{Nn\pi\gamma^2 \theta^2}{(1 + (K_x^2 + K_z^2)/2)}\right)^2} F_n(K_x, K_z) \end{aligned}$$

En aquesta equació hem dividit la intensitat del camp elèctric $I_n(\theta)$ per $\hbar\omega_n(0)$ per tal d'obtenir el flux de fotons $\Phi_n(\theta)$. α és la constant d'estructura fina. Observem que hem fet servir l'aproximació d'angles petits. Aquesta mateixa aproximació ens permet realitzar la integral en θ , ja que integrarem de 0 fins a infinit en comptes de 0 fins a $\pi/2$. Aquesta aproximació és vàlida, ja que els valors de θ en què hi ha radiació compleixen $\theta \ll 1 < \pi$; obtenim per tant:

$$\frac{\Phi_n}{\Delta\omega/\omega_n(0)} \approx \alpha N \frac{\pi}{2} \frac{(1 + (K_x^2 + K_z^2)/2)}{n} F_n(K_x, K_z) \equiv \alpha N \frac{\pi}{2} Q_n(K_x, K_z) \quad (1-21)$$

Remarquem que aquesta expressió per al flux de fotons emesos a una energia determinada només és estrictament vàlida si s'acompleixen les aproximacions exposades. Tot i això, és força aproximada als casos reals, i s'usa per dissenyar els dispositius d'inserció.

1.2.2. Espectre d'un ondulator

L'espectre de l'ondulator és la seva característica més important des del punt de vista de l'aplicació de la radiació de sincrotró. L'experiment que es dugui a terme amb aquesta radiació haurà de satisfer uns requisits determinats en cada cas. De fet, el disseny d'un ondulator té el seu punt de partida en l'energia mínima que ha d'assolir quan la distància vertical entre les fileres d'imants (entreferro, també anomenat *gap* en anglès) és mínima.

Com hem vist en l'apartat anterior, el flux de fotons a una energia donada és funció del valor de K . El requeriment general dels usuaris de la llum de l'ondulator és d'augmentar al màxim l'energia dels fotons, i per tant, fer el període de l'ondulator al més petit possible sense que el valor de K disminueixi, és a dir, mantenint un flux de fotons elevat. Aquest és un problema important, donat que per a una tecnologia determinada: en disminuir el període, i per tant l'espai disponible per a la font de camp magnètic, el camp màxim que es pot produir decreix. Per altra banda, per a una tecnologia donada, quant més petit és l'entreferro de l'ondulator, menor és el volum de material necessari per a assolir el mateix valor del camp magnètic.

La majoria d'aplicacions de la llum de sincrotró requereixen fer escombrats en l'energia dels fotons. Per aconseguir-ho, cal desplaçar la freqüència fonamental de l'ondulator.

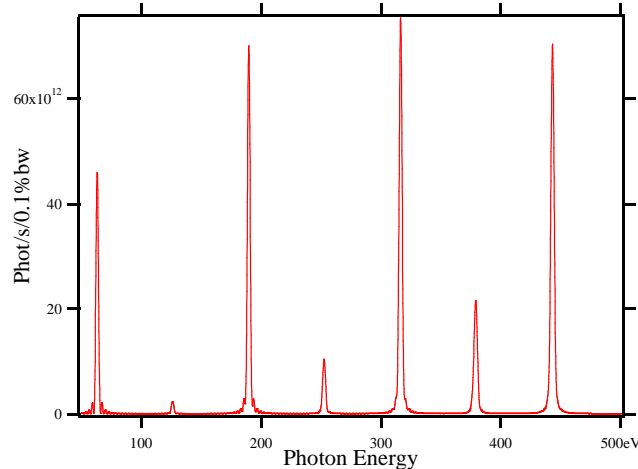


Figura 4: Espectre del futur ondulator de 71 mm de període, 0.93 T i 1.7 m de longitud a l'entreferro mínim (15.5 mm) per al sincrotró ALBA. La radiació es calcula amb una obertura de 0.6 mrad×0.6 mrad i se suposa una intensitat de 400 mA per al feix d'electrons.

A la pràctica, això implica o bé un canvi en l'energia dels electrons, o bé un canvi en el camp magnètic (canviar el període de l'ondulator resulta molt complex)¹⁰. Canviar l'energia dels electrons requereix un ús dedicat de tot l'accelerador per a l'aplicació concreta. Així doncs,

¹⁰ B. Diviacco, C. Poloni, R.P. Walker, *Conceptual design of a variable period PM undulator*, Sincrotrone Trieste internal note, ST/M-TN-90/1, gener 1990.

excepte en casos puntuals, la solució triada és canviar el camp tot variant el *gap*. Disminuint el camp, disminuïm K linealment, i l'energia dels fotons va augmentant, però el flux de fotons va disminuint conforme K s'acosta a zero.

Per raons de simetria, $F_n(K_x, K_z, \theta, \phi)$ segons la direcció de l'eix de l'ondulador ($\theta = \phi = 0$) per a un camp sinusoidal té els ordres amb n parell nuls. Ara bé, en integrar fora de l'eix (θ i $\phi \neq 0$) aquesta afirmació deixa de ser estrictament vàlida. A la pràctica, els harmònics parells tenen un flux de fotons més baix (Figura 4).

1.2.3. Tecnologies dels ondulators

Existeixen un nombre considerable de dispositius que poden crear camps periòdics amb les característiques necessàries per a ser utilitzats en un sincrotró. Podem organitzar-los segons el tipus de materials utilitzats:

1. Ondulators PPM (de l'anglès *pure permanent magnet*): basats en la tecnologia d'imants permanents.^{11,12}
2. Ondulators híbrids: Utilitzen imants permanents combinats amb blocs de material magnètic tou amb permeabilitat i saturació d'imantació elevades.^{13,14}
3. Ondulators electromagnètics: Utilitzen bobines convencionals sovint combinades amb un nucli de material magnètic tou amb permeabilitat i saturació d'imantació elevades.¹⁵
4. Ondulators superconductors: S'utilitzen bobines superconductores per a generar el camp magnètic.^{16,17}

¹¹ K. Halbach, *Permanent magnet undulators*, Journal de physique, Colloque C1, supplément au n°2, Tome 44, p. 211-216.

¹² G. Rakowsky et alr., *High-performance pure permanent-magnet undulators*, Nucl. Instr. and Meth. A, Volume 296, Issues 1-3, October 1990, p. 597-602.

¹³ K.E. Robinson et alr., *Hybrid undulator design considerations*, Nuc. Instr. Meth. A 250 (1986) p. 100-109.

¹⁴ V.A. Papadichev, G.V. Rybalchenko, *End field formation in planar hybrid undulators to ensure gap independence of the first and second field integrals*, Nucl. Instr. and Meth. A 532 (2004), p. 644-651.

¹⁵ M.W. Poole and R.P. Walker, *Some limitations on the design of plane periodic electromagnets for undulators and free electron lasers*, Nuc. Instr. Meth. 176 (1980) p. 487-495.

¹⁶ T. Hezel et al., *Experimental Results with a novel superconductive in-vacuum mini-undulator test device at the Mainz Microtron MAMI*, Proceedings of PAC99, New York, p. 165-167.

¹⁷ E. Wallén, J. Chavanne, P. Ellaume, *Magnetic calculations of a superconducting undulator at the ESRF*, Nucl. Instr. and Meth. A, Volume 541 (2005), p. 630-650.

1.2.3.1 Onduladors PPM

Els materials emprats solen ser aliatges de NdFeB (existeixen diferents composicions químiques, sent $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ la més coneguda, però en general es tracta de composicions no estequiomètriques NdFeB) o SmCo (existeixen diferents composicions químiques: SmCo_5 i $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$, principalment). Qualsevol d'aquests dos materials ofereix alta romanència, alta coercitivitat, molt baixa permeabilitat i una resposta lineal.¹⁸

Els imants basats en NdFeB solen presentar remanències majors (1.1 -1.5 T) que els basats en SmCo (0.9-1.2 T). La coercitivitat assolible amb el SmCo (730-820 kA/m) és inferior a la del NdFeB (900-1100 kA/m), però la resistència als efectes tèrmics i de radiació (característica molt important en el marc d'un accelerador de partícules) és molt més elevada en el cas del SmCo. Per mesurar la resistència als efectes tèrmics es fa servir el coeficient tèrmic de pèrdua d'imantació, que per al SmCo és de l'ordre de 0.15-0.25 %/°C mentre que per al NdFeB està en el rang 0.5-0.7 %/°C.¹⁹ En un ondulator, la intensitat de la llum ve determinada, entre d'altres factors, pel valor del camp magnètic. El camp magnètic a l'ondulator és directament proporcional a la romanència dels blocs, per tant la romanència és un factor important que cal tenir en compte. Per altra banda, els imants en un ondulator estan sotmesos a camps desmagnetitzants força elevats, i la seva utilització es realitza en ambients sotmesos a un grau considerable de radiació com és el cas del túnel d'un accelerador. Per això també és important una coercitivitat alta i un coeficient tèrmic baix.

En general el SmCo es fa servir per a ondulators d'entreferros molt petits, on els imants són més propers al feix d'electrons i per tant són susceptibles de rebre més radiació.²⁰

Tots dos materials presenten baixa permeabilitat (de l'ordre de 1.06 en el NdFeB i 1.005 pel SmCo) i són quasi lineals en un rang de treball ampli. Això fa que sigui senzill aproximar el resultat de combinar blocs (a través d'una superposició lineal dels efectes de cada bloc per separat), i per tant que el procés d'ensamblatge es pugui sistematitzar. Al llarg d'aquest estudi, analitzarem amb més detall aquest punt.

Donat un nombre parell de blocs per període, existeix una orientació de les imantacions d'aquests blocs que maximitza el flux en la part central de l'estructura (lloc per on passarà el feix d'electrons). Si utilitzem 4 blocs per període, la solució òptima s'anomena estructura de

¹⁸ J.Chavanne et altr., *Magnetic design considerations for in-vacuum undulators at ESRF*, Proceedings of EPAC 2002, Paris, p. 2604-2606.

¹⁹ Dades per a els imants subministrats per *Vacuumschmelze*:
<http://www.vacuumschmelze.de/dynamic/en/index.php>

²⁰ J. Marcos, *Radiation Damage on Permanent Magnets (review)*, ALBA internal note, AAD-SR-ID-AN-0074, 2005.

Halbach (veure Figura 5)²¹. Utilitzar més de 4 blocs per període suposa magnetitzar els blocs en direcció no perpendicular a cap cara del bloc. Això complica innecessàriament la construcció del dispositiu, ja que al capdavant, l'augment del camp en l'entreferro no justifica l'esforç.

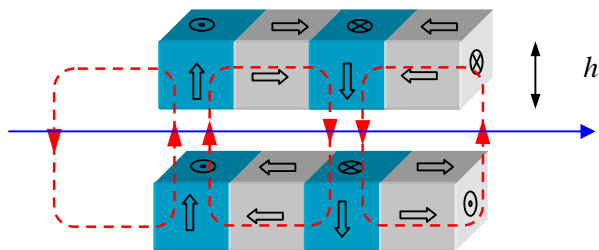


Figura 5: Estructura de Halbach: cada període es compon de quatre blocs en la part superior i quatre en la inferior. Els circuits en vermell indiquen el sentit del camp magnètic. Les fletxes en els blocs indiquen el sentit de la magnetització.

1.2.3.2 Onduladors híbrids

En aquest tipus d'onduladors, els blocs magnètics descrits per a l'ondulador PPM es combinen amb peces de material magnètic tou amb alta permeabilitat i alta imantació de saturació.²²

Aquest material magnètic tou pot ser del tipus *Permendur* (amb una inducció de saturació d'uns 2.3 T) o un aliatge tipus *Armco* (la composició d'aquest aliatge és força complexa i conté, entre altres elements, Mn, Si, Cr i Ni. Té una inducció de saturació d'uns 2.15 T). Tot i que el *Permendur* presenta una inducció de saturació lleugerament més gran, el cost és molt més gran que el de l'*Armco*.

En aquesta tecnologia, les peces de ferro substitueixen els imants que en el disseny PPM estan orientats verticalment (veure Figura 6). La funció de les peces de ferro és la de concentrar el flux generat pels blocs magnetitzats. Per tal d'afavorir aquesta concentració de flux, les peces polars i els blocs imantats tenen dimensions diferents.

En igualtat de període i entreferro, aquest tipus d'onduladors assoleix majors valors de camp magnètic a l'entreferro que els onduladors PPM. Aquest avantatge és més destacable conforme el període de l'ondulador és més gran.²³

²¹ K.Halbach, *Physical and Optical Properties of Rare Earth Cobalt Magnets*, Nuclear Instruments and Methods. 187 (1981) p. 109.

²² K.Halbach, *Concepts for insertion devices that will produce high-quality synchrotron radiation*, Nuclear Instruments and Methods A 246 (1986) p. 77-81.

²³ Richard P. Walker, *"Insertion Devices: Undulators and Wigglers"*, CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998, p. 153.

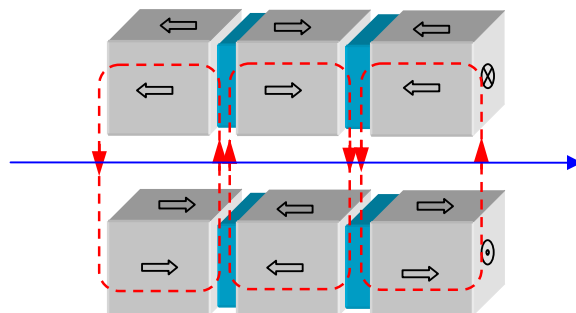


Figura 6: Estructura híbrida: Cada període està format per dos blocs magnetitzats més dues peces polars que concentren el flux dels primers. Els circuits en vermell indiquen el sentit del camp magnètic. Les fletxes en els blocs indiquen el sentit de la magnetització.

La tendència en diversos sincrotrons del món és la d'utilitzar cada cop més ondulators híbrids.²⁴ Aquest tipus de dispositius presenten, però, certes dificultats pràctiques. La permeabilitat tan alta que presenten i les no linealitats d'aquests materials alenteixen molt els càlculs acurats. Així mateix, les inhomogeneïtats que les peces polars presenten no són senzilles de caracteritzar. El muntatge d'aquest tipus de dispositiu és, doncs, força lent, i requereix tècniques específiques d'ajust (veure secció 2.2).

1.2.3.3 Onduladors electromagnètics

En aquest tipus de dispositiu, la font de camp magnètic són bobines. Sovint, aquestes bobines s'enrotllen entorn d'un nucli de material magnètic tou, de manera que es magnifica el camp que generen.

Un dels avantatges principals d'aquest esquema és que el camp magnètic de les bobines es pot ajustar fàcilment, i així es poden contrarestar possibles errors de fabricació.²⁵ Ara bé, el fet d'utilitzar aquest tipus de font fa els dispositius més costosos de mantenir que no pas els ondulators PPM.²⁶ No només el cost de manteniment augmenta, sinó que el volum ocupat pel dispositiu és molt major, i aquest punt no és gens menyspreable en el marc d'un sincrotró.

²⁴ J. Chavanne, P. Elleaume, P. Van Vaerenbergh, *Recent developments of insertion devices at the ESRF*, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference, Vancouver May 1997, p. 3506-3508.

²⁵ M.W. Poole and R.P. Walker, *Some limitations on the design of plane periodic electromagnets for undulators and free electron lasers*, Nuc. Instr. Meth. 176 (1980) p. 487-495.

²⁶ Richard P. Walker, *"Insertion Devices: Undulators and Wigglers"*, CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998, p. 153.

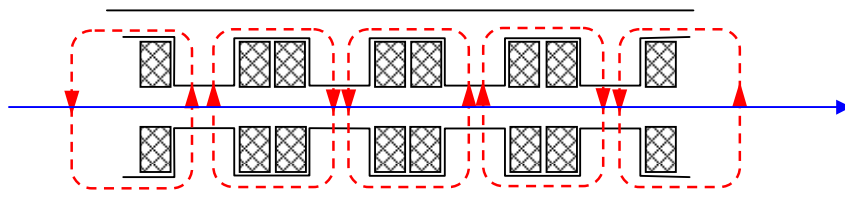


Figura 7: Esbós de perfil d'una estructura d'ondulador electromagnètic. Els circuits en vermell indiquen el sentit del camp magnètic. Les seccions de les bobines s'indiquen amb una trama.

Per a períodes petits, no hi ha prou espai disponible per a les bobines i el camp que es pot generar amb un ondulador electromagnètic és més petit que el que s'obté amb un ondulador PPM. Així doncs, excepte per a aplicacions particulars, l'opció dels onduladors PPM és en general preferible.

1.2.3.4 Onduladors superconductors

En aquest cas, les bobines són fabricades amb materials superconductors, típicament NbTi o NbSn. A causa dels requeriments dels usuaris de la llum de sincrotró, la tendència és produir radiació de longitud d'ona cada vegada més curta. Així, es tendeix a buscar tecnologies que puguin generar camps magnètics molt alts en volums reduïts. Per a períodes petits, l'alta densitat de corrent que poden suportar les bobines superconductores dóna un gran interès a aquesta tecnologia. El salt tecnològic necessari i la diferència econòmica són, però, també molt importants. A més, a banda d'algun prototipus, la viabilitat pràctica d'aquests dispositius està encara per demostrar.²⁷

Com hem dit al capítol 1.2, sovint interessa generar radiació en un cert rang espectral. Això s'aconsegueix variant el camp magnètic que produeix el dispositiu. En el cas dels onduladors PPM o dels híbrids, tan sols cal variar la distància entre els imants superiors i inferiors per regular el camp magnètic i, en conseqüència, l'energia dels màxims d'interferència que es produeixen. En el cas dels onduladors electromagnètics o superconductors, el camp magnètic es varia tot canviant el corrent a les bobines.

²⁷ R. Rossmanith, *A year's experience with a superconducting undulator in the storage ring ANKA*, Proceedings of EPAC 2006, Edinburgh, p.3571-3573.

1.2.4. Tipus d'onduladors: Apple II

Segons el tipus de camp magnètic periòdic que generen, distingim diversos tipus d'onduladors:

1. Onduladors Planars: Només hi ha una component de camp magnètic segons la direcció x o bé en la z . La trajectòria dels electrons és sinusoidal i la llum preferentment polaritzada lineal.²⁸
2. Onduladors Helicoïdals (en ocasions també anomenats el·líptics): Existeixen dues components del camp magnètic que tenen la mateixa freqüència espacial, i amb un cert desfasament entre elles. La trajectòria dels electrons és helicoïdal i la llum majoritàriament polaritzada el·líptica.²⁹
3. Onduladors *exòtics*: En alguns casos particulars les components del camp magnètic no són purament sinusoidals. Per exemple, els períodes de les components poden ser diferents o les components per si mateixos poden contenir nivells alts d'harmònics. Fins i tot, en certs casos, interessa que el camp no sigui periòdic.^{30,31}

En aquest estudi ens centrarem en els onduladors el·líptics. En particular, en els onduladors PPM el·líptics. Dintre d'aquest grup existeix un ampli ventall de diferents dissenys, fruit de les investigacions i experiments en els diferents sincrotrons i laboratoris d'arreu del món.

Podem trobar onduladors el·líptics i helicoïdals i onduladors el·líptics no helicoïdals. En el primer cas els electrons tenen trajectòries helicoïdals i la llum generada té polarització el·líptica. En el segon cas la trajectòria no és helicoïdal però la llum està polaritzada el·lípticament. Exemples d'aquest segon cas són els onduladors planars creuats (veure Figura 8).³²

²⁸ M.W. Poole and R.P. Walker, *Periodic magnets for undulators and free electron lasers – a review of performance features*, IEEE Trans. Mag. Vol. Mag-17, 5, 1981, p.1978-1981.

²⁹ P. Eillaume, *Generation of various polarization states from insertion devices: A review*, Rev. Sci. Instr. 60 (7), 1989, p. 1830-1833.

³⁰ S. Sasaki et al., *Conceptual design of quasi periodic undulator*, Rev. Sci. Instr., vol. 66, n° 2, febrer 1995, p.1953-1955.

³¹ B. Diviacco et al., *Design of a figure-8 undulator for Elettra*, Proceedings of EPAC 2002, p. 2610-2612.

³² J. Bahrtdt et al., *Circularly polarized synchrotron radiation from crossed undulator at BESSY*, Rev. Sci. Instr., Vol 63, n°1, gener 1992, p. 339-342.

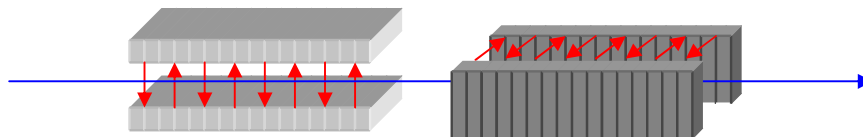


Figura 8: Onduladors planars encreuats produint llum polaritzada el·lípticament. Les fletxes vermelles esquematitzen el camp magnètic.

Centrant-nos ara en els onduladors PPM helicoidals el·líptics, en podem distingir tres tipus diferents: circulars, rectangulars i planars.

Els onduladors PPM helicoidals el·líptics circulars (veure Figura 9) s'anomenen així perquè els blocs magnètics se situen entorn del feix d'electrons formant una corona circular. Poden crear camps magnètic helicoidals molt uniformes i intensos però tenen l'inconvenient de no poder ser ajustats en intensitat. L'ajust de la intensitat és imprescindible per realitzar estudis de respostes espectrals.³³

Els onduladors PPM helicoidals el·líptics rectangulars consisteixen en dos onduladors creuats situats en la mateixa zona entorn el feix d'electrons (veure Figura 10). Amb aquest sistema es pot ajustar la fase entre els camps i la intensitat relativa entre aquests.³⁴

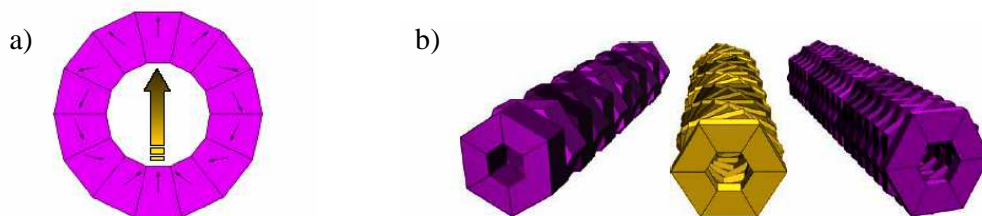


Figura 9: a) una corona de blocs magnètics genera un camp uniforme. b) per generar un camp magnètic helicoidal s'utilitzen corones successives rotades.

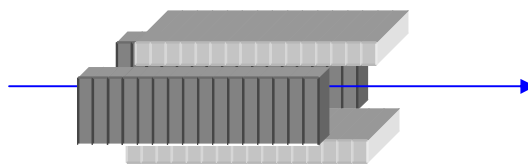


Figura 10: Ondulador PPM helicoidal el·líptic rectangular. La posició d'un ondulator respecte l'altre i l'entreferro de cada un d'ells canviaran la fase entre camps i la intensitat relativa, respectivament.

³³ D. Scott, *A Helical Undulator for TESLA*, Daresbury Laboratory internal note, ASTeC-ID-008.

³⁴ H. Onuki, N. Saito and T. Saito, *Undulator generating any kind of elliptically polarized radiation*, Appl Phys Lett., vol. 52, nº 3, 18 gener de 1988, p. 173-175.

En aquests tipus de dispositius la variació de l'entreferro es tècnicament molt complexa. En la majoria de sincrotrons (i d'altres acceleradors circulars) l'obertura horitzontal es molt major que la vertical, de forma que aquest tipus de dispositius són poc indicats.

Per últim, els ondulators PPM helicoidals el·líptics planars, permeten ajustar les dues components del camp magnètic, la fase entre elles i permeten grans obertures horitzontals. Novament, dintre d'aquest grup existeixen nombrosos models diferents. El primer en ser proposat va ser el model anomenat Helios per P.Ellaume (veure *Figura 11*)³⁵.

En aquest model, el camp magnètic vertical el generen el conjunt d'imants de la part inferior, mentre que el camp transversal el genera el conjunt superior.

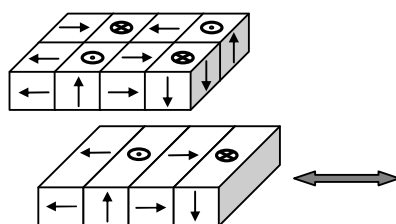


Figura 11 : Esbós del període de un ondulator PPM helicoidal el·líptic planar Helios.

D'entre tots els ondulators PPM helicoidals el·líptics planars ressaltarem el que s'anomena Apple II (de l'anglès *Advanced Polarized Photon Light Emitter*).³⁶ Es caracteritza per produir un camp magnètic més elevat que el de la majoria de dissenys i per la gran versatilitat a l'hora de produir llum amb diferents polaritzacions. El disseny (*Figura 12*) contempla la possibilitat de canviar la intensitat relativa de B_x i B_z . Això s'aconsegueix desplaçant la renglera d'imants superior esquerra (o dreta) simultàniament a la renglera d'imants inferior dreta (o esquerra).³⁷

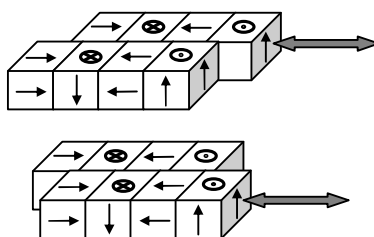


Figura 12 : Esbós del període d'un ondulator PPM helicoidal el·líptic planar Apple II.

Per entendre millor les característiques del camp generat per aquest dispositiu en funció de la posició relativa de les rengleres d'imants utilitzarem un model senzill (*Figura 13*). El model

³⁵ P.Ellaume and J.Chavanne, *A new powerful flexible linear/helical undulator for soft X-rays*. Nuclear Instruments and Methods, A304 (1991) p. 719-724.

³⁶ Y. Miyahara and S. Sasaki, *Generation of variously polarized radiation by a double array undulator*, Synchrotron Radiation News, Vol. 7, n°1, 1994, p. 18-20.

³⁷ S. Sasaki, *Analyses for a planar variably-polarizing undulator*, Nuc. Instr. Meth. A 347 (1994) p.83-86.

consisteix en entendre aquest dispositiu com dos ondulators creuats. La renglera superior dreta (esquerra) forma un ondulator amb la renglera inferior esquerra (dreta) i generen un camp B_1 (B_2).

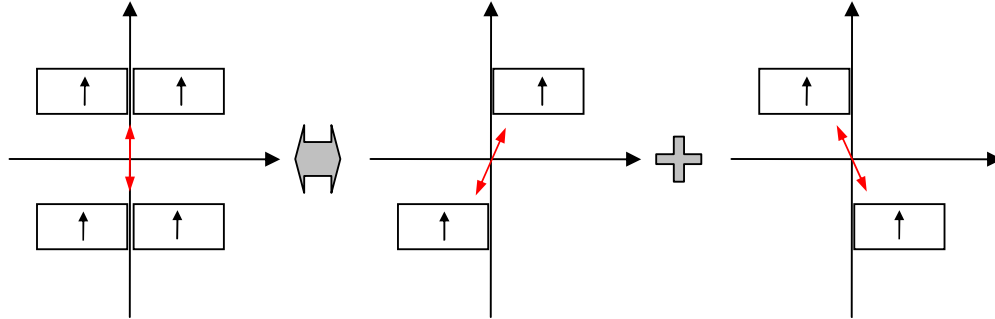


Figura 13: L'Apple II es pot entendre com dos ondulators que es mouen longitudinalment un respecte l'altre. En vermell es mostra el camp magnètic que oscil·la al llarg dels ondulators.

Segons aquest model, en el qual les rengleres oposades es mouen alhora una distància $\lambda_0 \delta/2\pi$, podem escriure:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 \cos \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{x} + B_0 \sin \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{z} \\ B_2 &= -B_0 \cos \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y + \delta\right) \hat{x} + B_0 \sin \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y + \delta\right) \hat{z} \end{aligned} \quad (1-22)$$

on α és l'angle que fa el camp magnètic B_1 amb l'eix x i δ és la diferència de fase dels camps degut al desplaçament dels arranjaments. El camp total s'expressa doncs:

$$B = B_1 + B_2 = B_0 \cos \alpha \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{x} + B_0 \sin \alpha \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{y} \quad (1-23)$$

Les components estan retardades $\pi/2$, i variant δ de 0 a π podem obtenir polarització vertical ($\delta=0$), horitzontal ($\delta=\pi$) i circular ($\delta=2\alpha$).

A aquest mode d'operació se'n diu Paral·lel. En el mode antiparal·lel es mouen també dos dels quadrants en diagonal, però ho fan en direccions oposades.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{B_0}{2} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y - \delta\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y + \delta\right) \right] (\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{z}) \\ B_2 &= -B_0 \cos \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{x} + B_0 \sin \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{z} \end{aligned} \quad (1-24)$$

on α és l'angle que fa el camp magnètic B_1 amb l'eix x . El camp total s'expressa doncs:

$$B = B_1 + B_2 = B_0 \cos \alpha (\cos(\delta) - 1) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{x} + B_0 \sin \alpha (1 + \cos \delta) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} y\right) \hat{y} \quad (1-25)$$

En aquest cas, les components sempre estan en fase, i per tant la polarització de la llum sempre és lineal. Variant δ de 0 a π podem assolir polarització vertical ($\delta=0$), horitzontal ($\delta=\pi$) i lineal a 45° (δ satisfà: $\cos(\delta)(I-\tan(\alpha))=I+\tan(\alpha)$).

1.3. Notació

En el camp dels dispositius d'inserció sovint es pren la següent nomenclatura: U designa ondulator i HU designa ondulator que genera llum helicoïdal. Al costat d'aquests acrònims hi podem trobar un número que indica el període del dispositiu en mil·límetres. Així doncs U20 i HU80 són les abreviacions d'un ondulator planar de període 20 mm i un ondulator helicoïdal amb període 80 mm . En particular, un ondulator Apple també es designa amb les sigles HU.

1.4. Efectes dels ondulators no ideals

Tots els ondulators, fins i tot en el cas que fossin exempts d'errors de fabricació, presenten un comportament no ideal. D'una banda, el fet de ser finits en el nombre de períodes en trenca la periodicitat, sobretot en els períodes prop de les terminacions. Igualment, les lleis de Maxwell imposen que el camp no pot ser uniforme segons la direcció x i z si varia al llarg de la direcció y . En definitiva, les assumpcions que hem fet fins ara no són ni tan sols ideals, són físicament impossibles. A més, a banda d'aquests defectes de base, n'existeixen d'altres d'addicionals. Els errors en la magnitud i la direcció de la imantació dels blocs, les seves inhomogeneïtats i els errors en el seu posicionament, fan que el patró d'interferència no sigui pur, i per tant que la llum que produeix l'ondulator als pics d'interferència no sigui tan intensa com s'esperava. Així mateix, a conseqüència d'aquests errors, el feix d'electrons queda desviat un cop travessa l'ondulator.

A més, donat que no tots els electrons del feix tenen la mateixa energia, l'ondulator no afectarà a tots els electrons per igual i aquest fet contribuirà a l'empitjorament de les qualitats dinàmiques del feix i de la llum emesa.

Un ondulator òptim és aquell que afecta el mínim possible la direcció i posició del feix d'electrons, i produeix un màxim de radiació en les freqüències d'interferència.

1.4.1. Efecte sobre el feix d'electrons

Un electró amb l'energia nominal que entri al dispositiu d'inserció amb una direcció coincident amb l'eix de l'ondulador, sortirà formant un cert angle i a una certa distància del centre de l'ondulador. Que aquests angle i distància siguin majors o menors depèn de com de ben compensat estigui l'ondulador, és a dir, de què les oscil·lacions a què es veuen sotmesos els electrons al llarg de l'ondulador tinguin una resultant nul·la.

Tot seguit quantificarem els efectes esmentats.

1.4.1.1 Integrals de camp

Anàlogament a l'equació (1-3), si el camp magnètic és homogeni en les direccions transversals i les excursions segons aquestes direccions són petites (o, el que és equivalent, si les velocitats transversals són petites: β_x i $\beta_y \ll 1$) podem escriure:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{\gamma m} B_z \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e}{\gamma m} B_x \quad (1-26)$$

Realitzant una primera integració i tenint en compte que a primer ordre $c = dy/dt$.

$$\beta_x = \frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^y B_z(y') dy' \quad \beta_z = -\frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^y B_x(y') dy' \quad (1-27)$$

Aquesta equació vincula l'angle que fa la trajectòria de l'electró a cada punt de l'eix de l'ondulador amb la integral del camp magnètic. Realitzant una segona integració també a primer ordre:

$$x = \frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{y'} B_z(y'') dy'' dy' \quad z = -\frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{y'} B_x(y'') dy'' dy' \quad (1-28)$$

Aquesta equació vincula el desplaçament transversal de l'electró respecte l'eix de l'ondulador amb la segona integral del camp magnètic.

Des del punt de vista de l'accelerador, interessa que al final de l'ondulador aquestes quantitats siguin zero, és a dir que l'efecte net de l'ondulador no desviï ni desplaci el feix. Des del punt de vista de la radiació també ens interessa que la trajectòria estigui centrada transversalment amb l'eix de l'ondulador a cada període d'aquest.

Podem tenir efectes sobre la radiació sense tenir-los sobre el feix d'electrons i a l'inrevés.

Cal advertir que la segona integral estesa indefinidament ($L \rightarrow \infty$) pot ser arbitràriament gran. Definir el final de l'ondulador pot presentar problemes de convencions, per això moltes

vegades utilitzem, com a figura de mèrit, la projecció al centre de l'ondulador, que anomenarem δ_0 , i s'expressa com:³⁸

$$\begin{aligned}\delta_{z,0} &= -\int_{-\infty}^{\infty} y B_x(y) dy \\ \delta_{x,0} &= \int_{-\infty}^{\infty} y B_z(y) dy\end{aligned}\quad (1-29)$$

La Figura 14 mostra de forma esquemàtica una possible trajectòria en un ondulador. En aquest exemple hi podem observar tant efectes nets sobre el feix d'electrons com efectes en l'emissió de la llum. A la sortida de l'ondulador, un electró que hagi entrat alineat amb l'eix d'aquest sortirà amb un cert angle α i un desplaçament horitzontal δ . A més, a causa de la trajectòria, els feixos de radiació no interfereixen de forma òptima.

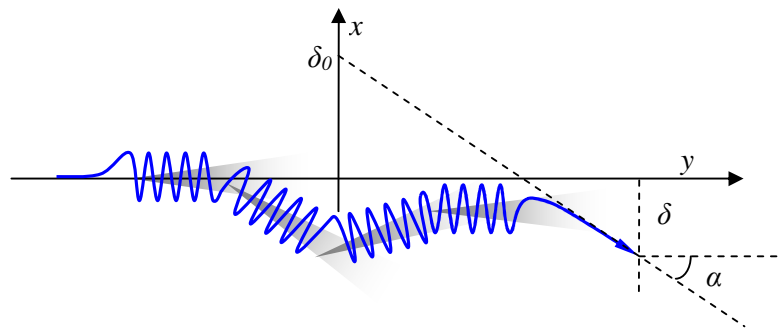


Figura 14: Exemple de trajectòria en un possible ondulador real. A la sortida d'aquest, un electró que entra segons l'eix i paral·lel a aquest es desvia i es desplaça. Al llarg de l'ondulador la trajectòria no està, en general, centrada.

Cal dir que fins i tot en el cas d'un ondulador ideal, aquell en què no hi ha errors d'imantació dels blocs, existeixen integrals no nul·les. Això ve causat pel fet que la permeabilitat dels imants és no nul·la i que la longitud de l'ondulador és finita. Els imants interaccionen amb els seus veïns i a les terminacions, a causa de la manca de veïns, aquesta interacció té un resultat diferent i descompensa les integrals. Fent les terminacions simètriques (camp simètric) podem fer que, tot i aquest efecte, δ_0 sigui nul·la (equació 1-29). Fent les terminacions antisimètriques podem anul·lar la primera integral (equació 1-27). Per anul·lar ambdues integrals cal un ajust dels gruixos i les separacions dels blocs dels períodes finals. Per trobar aquests paràmetres cal recórrer a simulacions magnètiques. En qualsevol cas, la descompensació que introdueixen les terminacions depèn de la distància entre les rengleres dels imants. Per tant, quan es pretén fer un escombrat en energia i cal variar la distància entre rengleres d'imants, s'ha de tenir en compte que previsiblement hi haurà un canvi en el

³⁸ Richard P. Walker, "Insertion Devices: Undulators and Wigglers", CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998, p. 158.

desviament del feix d'electrons. Per això els dispositius d'inserció van sempre acompanyats d'imants correctors que s'activen segons el valor de l'entreferro.

1.4.1.2 Multipols de les Integrals

No tots els electrons que formen part del feix que entra a l'ondulador ho fan alineats amb l'eix de l'ondulador ni amb l'energia nominal. En el feix existeix una certa distribució a l'energia, la direcció i el posicionament dels electrons. Així doncs, si les integrals de l'ondulador depenen del punt d'entrada, els electrons del feix seran afectats de forma diferent per l'ondulador. En general, aquest fet, si no es controla, contribuirà a empobrir l'homogeneïtat segons la direcció i el posicionament de les partícules.

Per caracteritzar com canvien la desviació i la separació respecte de l'eix (y) de l'ondulador, en funció de les coordenades transversals (x, z), cal saber com es comporten les integrals del camp magnètic al llarg de les coordenades transversals (x, z). Com ja sabem, les integrals descriuen només l'efecte sobre el feix d'electrons a primer ordre. Així doncs, a primer ordre, tot l'efecte de l'ondulador per a cada punt del pla (x, z) es pot resumir amb una desviació segons la direcció i un canvi en la posició.

En física d'acceleradors,³⁹ s'assumeix que el camp magnètic dels imants al llarg de la direcció y no varia. En aquest supòsit, es pot fer un tractament del problema en dues dimensions (en el pla transversal). En aquest cas es demostra que els camps B_x i B_z es poden expandir en un desenvolupament en sèrie de Taylor. Els coeficients d'aquesta expansió són els anomenats multipols del camp. Cada un dels multipols té un efecte concret sobre el feix d'electrons, per això es convenient fer l'expansió.

En el cas dels onduladors es fa un tractament equivalent. El camp de l'ondulador no és constant al llarg de la direcció y i no accepta un desenvolupament en dues dimensions, però les integrals del camp magnètic sí que ho permeten. Així doncs, parlarem dels multipols de les integrals de forma equivalent a com es fa en física d'acceleradors amb els multipols del camp. Cal tenir present que això només es vàlid a primer ordre.

Cal aclarir que es tracta doncs d'un desenvolupament multipolar en dues dimensions; més endavant, en l'apartat 5.2 parlarem del desenvolupament multipolar en tres dimensions, cal no confondre'ls.

³⁹ Philip J. Bryant, Kjell Johnsen, *The principles of Circular Accelerators and Storage Rings*, Cambridge university press, 1993, Cambridge, p. 10.

Hi ha molts factors que poden contribuir a què les integrals dels camps magnètics B_x i B_z tinguin una certa dependència a les direccions transversals. Fins i tot en cas que els blocs siguin perfectes, existeix una certa dependència transversal causada per a la finitud dels blocs. Aquesta contribució sol ser petita ja que les dimensions dels blocs s'escullen precisament per minimitzar aquest efecte. La contribució més important prové de les imperfeccions dels blocs. Al valor de les integrals segons l'eix longitudinal se l'anomena component dipolar, a la primera derivada de la integral segons aquest eix respecte de les variables transversals terme quadrupolar, a la segona derivada terme sexupolar, i així successivament. En cas que els blocs no tinguin errors, per simetria, només existiran derivades d'ordre parell, és a dir: dipol, sextupol, decapol... En general, però, podem expressar les integrals com:

$$I_{x,z}(x, z = 0) = I_{x,z}^d + I_{x,z}^Q x + \frac{I_{x,z}^S}{2} x^2 + \dots \quad (1-30)$$

on $I_{x,z}^d$ es el terme dipolar de cada una de les components, $I_{x,z}^Q$ el terme quadrupolar i $I_{x,z}^S$ el sextupolar.

1.4.1.3 Efectes de segon ordre

Fins ara hem suposat que la trajectòria dels electrons al llarg del dispositiu no té efectes sobre el camp que veu la partícula. En realitat, però, al llarg de l'eix y de l'ondulador, a mesura que els electrons són desviats pel camp magnètic, varien la seva posició dins el pla (x, z) i per tant es veuen sotmesos a camps lleugerament diferents. És a dir, la integral del camp en una direcció no reflexa fidelment l'efecte de l'ondulador sobre els electrons.

La importància d'aquest efecte depèn de dos factors. Per una banda, és més important quan els camps B_x i B_z depenen fortament de les coordenades x i z , com és el cas en un ondulador tipus Apple II. Així mateix, l'efecte depèn de la constant $\alpha = e/m\gamma c$ (que té unitats d'invers de la integral de camp magnètic $m^{-1}T^{-1}$). Aquesta quantitat, també anomenada *rigidesa del feix*, ens indica com de susceptible és la trajectòria del feix a una variació del camp magnètic.

Si no fem cap suposició sobre la homogeneïtat del camp magnètic, les equacions de moviment a partir de l'equació (1-1) s'escriuen:⁴⁰

⁴⁰ P.Ellaume, "A New Approach to the Electron Beam Dynamics in Undulators and Wigglers", EPAC 1992, pag 661-664.

$$\begin{aligned}
 x'' &= \frac{-\alpha}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}} [z'B_y - (1+x'^2)B_z + x'z'B_x] \\
 z'' &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}} [x'B_y - (1+z'^2)B_x + x'z'B_z]
 \end{aligned} \tag{1-31}$$

on $z' = dz/dy$ i $x' = dx/dy$. Aquesta equació se soluciona desenvolupant per sèrie de potències en termes d' α . A primer ordre retrobem l'equació (1-27), que en aquesta notació escrivim:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dy} &= \alpha \int_{-\infty}^y B_z dy \\
 \frac{dz}{dy} &= -\alpha \int_{-\infty}^y B_x dy
 \end{aligned} \tag{1-32}$$

A segon ordre, la resolució del sistema d'equacions diferencials (1-31) és més complexa. Es pot demostrar que, sota certes condicions:⁴¹

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} B_z dy &= 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y B_z dy' dy = 0 \\
 \int_{-\infty}^{\infty} B_x dy &= 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y B_x dy' dy = 0 \tag{1-33} \\
 \frac{dz}{dy}(-\infty) &= \frac{dx}{dy}(-\infty) = 0
 \end{aligned}$$

Els angles a $y \rightarrow \infty$ es poden expressar com:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dy}(x, \infty, z) &= -\frac{\alpha^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y, z) dy + o(\alpha^3) \\
 \frac{dz}{dy}(x, \infty, z) &= -\frac{\alpha^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x, y, z) dy + o(\alpha^3) \tag{1-34} \\
 \Phi(x, y, z) &= \left(\int_{-\infty}^y B_x dy \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^y B_z dy \right)^2
 \end{aligned}$$

Posat en paraules, si les integrals primeres i les segones són zero, i si els electrons entren a l'ondulador paral·lels a l'eix, aleshores l'angle de sortida només té un component de segon ordre que ve determinat per l'equació (1-34).

En general, si no es compleixen les restriccions (1-33) (aquestes equacions impliquen que no hi ha efecte de primer ordre), l'efecte de segon ordre és més complex. El que descriuen les equacions (1-34) és l'efecte net de segon ordre, quan no hi ha contribució de primer ordre.

⁴¹ P.Ellaume, "A New Approach to the Electron Beam Dynamics in Undulators and Wigglers", EPAC 1992, pag 661-664.

En un ondulator real, les premisses que descriuen les equacions (1-33) no es compleixen. Ara bé, en un ondulator real, ja muntat dins el sincrotró, els efectes de segon ordre no es prediuen amb aquest procediment. Es mesuren els efectes sobre el feix d'electrons directament a través dels aparells de mesura del feix dels quals disposa el propi sincrotró.

En qualsevol cas, cal conèixer quin pot ser l'efecte sobre el feix d'electrons amb anticipació, encara que sigui només de forma aproximada. En aquest sentit, les equacions (1-34) representen un forma senzilla d'anticipar l'efecte de segon ordre.

1.4.2. Efecte sobre el feix de fotons

1.4.2.1 Error de trajectòria

Com hem dit a l'apartat 1.3.1.1, des del punt de vista de la radiació emergent és important que la trajectòria dels electrons oscil·li entorn d'un sol eix. Si el feix queda orientat, al llarg de l'ondulator, en altres direccions, la llum emesa a cada tram de l'ondulator no interferirà tan favorablement. La trajectòria amitjanada a cada període té en compte la trajectòria mitjana (sense les oscil·lacions) de l'electró:

$$\begin{aligned} x_{av}(y) &= \frac{1}{\lambda_0} \int_{y-\lambda_0/2}^{y+\lambda_0/2} x(y') dy' \\ z_{av}(y) &= \frac{1}{\lambda_0} \int_{y-\lambda_0/2}^{y+\lambda_0/2} z(y') dy' \end{aligned} \quad (1-35)$$

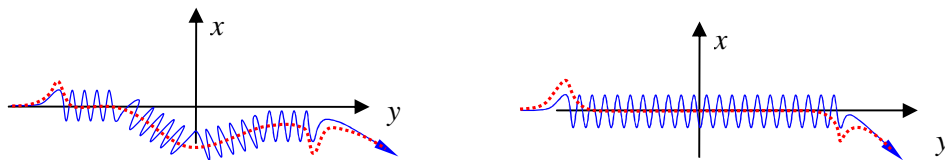


Figura 15: Exemple de trajectòria en un possible ondulator real. En blau la trajectòria de l'electró, en vermell i puntejada, la trajectòria amitjanada. A l'esquerra, un ondulator en el qual la trajectòria presenta diferents orientacions al llarg de l'ondulator, raó per la qual s'empobreix la qualitat de la radiació. A la dreta, un ondulator sense aquest efecte, tot i que també provoca una desviació del feix d'electrons.

La Figura 15 mostra un plausible exemple de trajectòria i trajectòria amitjanada en un ondulator. A partir d'aquesta trajectòria amitjanada, podem definir una funció de mèrit que doni idea de com de ben alineada està la trajectòria. Els termes a la següent equació en són un bon exemple:

$$X = \int_{-L}^L |x_{av}(y')|^2 dy' \quad Z = \int_{-L}^L |z_{av}(y')|^2 dy' \quad (1-36)$$

En aquest cas $2L$ és una distància d'integració que inclou la majoria de períodes de l'ondulador .

1.4.2.2 Error de fase òptica

Ja sigui per defectes en els blocs que el componen o bé per la seva finitud, el camp magnètic d'un ondulador no serà, en la pràctica, totalment paròdic. En aquest apartat veurem com caracteritzar-ne aquesta no periodicitat.

Petits defectes en el camp magnètic produeixen trajectòries lleugerament diferents a cada període, i desfasaments temporals en l'emissió de la radiació. Aquests desfasaments poden afectar el fenomen d'interferència que es produeix a l'ondulador.

Si no fem cap supòsit sobre la forma del camp magnètic, però mantenim la resta d'aproximacions esmentades al capítol 1.2, podem expressar la densitat de flux proporcional al camp H (correspon al mòdul quadrat del camp elèctric):⁴²

$$H(\omega, \theta, \phi) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 N^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(y) e^{i \frac{\omega}{2c\gamma^2} \int_0^y 1 + \gamma^2 v^2(y') dy'} dy \right|^2 \quad (1-37)^{43}$$

on $v(s)$ es la generalització de la velocitat transversal, que es pot escriure en termes del camp magnètic que genera la deflexió de la partícula carregada,

$$\bar{v}(s) = \left(\frac{e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^s B_x(s') ds' - \theta \cos \phi, \frac{-e}{\gamma mc} \int_{-\infty}^s B_z(s') ds' - \theta \sin \phi \right) \quad (1-38)$$

si l'ondulador fos completament periòdic, el terme a l'exponencial seria responsable del fenomen d'interferència, i donaria lloc al terme amb \sin^2 i al factor de forma de l'equació (1-15). En altres paraules, per a un ondulador periòdic, queda definida inequívocament la freqüència pròpia:⁴⁴

$$\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_0 (1 + \langle v^2(s) \rangle)} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K_{eff_x}^2}{2} + \frac{K_{eff_z}^2}{2} + \gamma^2 \theta_x^2 + \gamma^2 \theta_z^2} \quad (1-39)$$

En l'expressió anterior, la mitjana de la velocitat transversal està feta en un període (per assumpte, tots els períodes són iguals). K_{eff} és el valor efectiu de la constant de l'ondulador en cas que el camp tingui diverses components harmòniques,

⁴² P.Ellaume, H.Onuki, *Undulators, Wigglers and their applications*, Taylor & Francis, 2003, London, pag 102.

⁴³ A l'equació (1-37), l'integral en l'argument de l'exponencial està estesa de 0 a y , no des de $-\infty$ a y . En realitat, el punt d'inici de la integració només afegeix una fase que no contribuirà al resultat final.

⁴⁴ P.Ellaume, H.Onuki, *Undulators, Wigglers and their applications*, Taylor & Francis, 2003, London, pag 71.

$$K_{eff_x}^2 = \left(\frac{e\lambda_0}{2\pi mc} \right)^2 \sum_{i \geq 0} \frac{b_{x,2i+1}^2}{(2i+1)^2}, \quad K_{eff_z}^2 = \left(\frac{e\lambda_0}{2\pi mc} \right)^2 \sum_{i \geq 0} \frac{b_{z,2i+1}^2}{(2i+1)^2} \quad (1-40)$$

on $b_{x,2i+1}$ i $b_{z,2i+1}$ són els coeficients imparells de Fourier de les components B_x i B_z del camp magnètic; en general, no existeixen coeficients parells a causa de la simetria interna de cada pol magnètic.

A la pràctica, inclús en el millor dels casos, suposant que les toleràncies a la imantació i en al fabricació de les peces magnètiques són negligibles, el fet que l'ondulador sigui finit fa que, des del punt de vista magnètic, tots els períodes siguin diferents entre sí. Els períodes de les vores tenen menys veïns que els que són al centre, i per tant produeixen un camp lleugerament inferior.

Els períodes de les vores contribueixen a l'espectre de la radiació de forma que eixamplen i atenuen el pic d'interferència, fins i tot en poden desplaçar la posició del màxim d'intensitat. Es tracta d'un empobriment del fenomen d'interferència, i es pot explicar des del punt de vista de la transformada de Fourier. Com més iguals siguin (en termes de la coordenada temporal) els períodes entre sí, més localitzada serà l'ona a l'espai de freqüències. Recordem que una ona plana a l'espai és igual a tot l'espai temporal, té un espectre format per una sola línia espectral.

Podem il·lustrar aquest fet a partir de les equacions anteriors. En el cas d'un ondulador real, la mitjana $\langle v^2(s) \rangle$ a l'equació (1-39) no està ben definida, ja que cada període en té una de diferent. Estrictament, aquest mitjana només té sentit per a un ondulador infinit. Com que els períodes són diferents entre sí, els electrons triguen temps diferents a recórrer cada període (els períodes són distingibles en l'espai temporal). Això, traslladat a l'espai de les freqüències, equival a una reducció de la intensitat en la freqüència pròpia, que pot incloure també un desplaçament d'aquesta.

Sovint, ens interessa conèixer quant disminuirà el pic d'interferència en l'espectre generat per a un camp magnètic donat (simulat o mesurat). Com ja veurem, aquest càlcul s'haurà de repetir moltes vegades i per tant és desitjable trobar una expressió que permeti evitar el càlcul de l'espectre sencer. En el camp dels onduladors és tradicional fer servir l'argument de la part exponencial en l'equació (1-37), que rep el nom de fase òptica:⁴⁵

$$\phi(y) = \frac{\omega}{2c\gamma^2} \int_0^y 1 + \gamma^2 v^2(y') dy' \quad (1-41)$$

⁴⁵ B. Diviacco, R.P. Walker, *Recent advances in undulator performance optimization*, Nucl. Istr. Meth. A, 368 (1996), p. 522-532.

Idealment, aquesta funció, hauria d'augmentar una quantitat 2π cada període, quan ω és igual a la freqüència pròpia de l'ondulador. A la pràctica, en cada període, l'augment no serà ben bé 2π . Usualment es realitza un ajust lineal d'aquesta funció avaluada a cada màxim i zero del camp (cada quart de període, ja que volem tenir en consideració tant el camp B_x com el B_z i aquests estan desfasats entre sí un quart de període). En el cas d'un ondulador perfecte, tots aquests punts formarien una recta de pendent $2\pi/\lambda_0$. En el cas d'un ondulador real, en canvi, estaran distribuïts entorn d'una certa recta el pendent de la qual definirà el període promig equivalent. L'error de fase en graus, a cada punt, es calcula com:

$$\Delta\phi(s_q) = \frac{360}{2\pi} [\phi(s_q) - \phi_L(s_q)] \quad (1-42)$$

on s_q són els punts on calculem la fase (cada quart de període en el nostre cas) i $\phi_L(s_q)$ l'ajust lineal de les dades $\phi(s_q)$. Es defineix l'error de fase σ_ϕ d'un ondulador amb un camp magnètic donat com la desviació estandard de les dades $\Delta\phi(s_q)$. Es pot demostrar que existeix una correlació entre la intensitat del pic de l'harmònic n -èssim de l'espectre i l'error de fase òptica. Es tracta d'una relació estadística, que és certa fent la mitjana per a molts onduladors:

46

$$H = H(\sigma_\phi = 0) e^{-(n\sigma_\phi)^2} \quad (1-43)$$

⁴⁶ B. M. Kincaid, *Random errors in undulators and their effects on the radiation spectrum*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 2, n° 8, p. 1294-1306.

CAPÍTOL 2

TÈCNIQUES I MÈTODES EN LA IMPLEMENTACIÓ D'ONDULADORS:

Dividim aquest segon capítol en dos apartats. En primer lloc, farem un resum de les tècniques i dispositius utilitzats per a la mesura del camp magnètic de l'ondulador o dels seus components. En segon lloc farem un repàs de les tècniques d'implementació dels onduladors, comentarem les diferències entre les estratègies que s'utilitzen en els diferents sincrotrons.

2. TÈCNIQUES I MÈTODES EN LA IMPLEMENTACIÓ D'ONDULADORS

Tots els mètodes i dades presentats en el capítols 2 i 4 han estat recopilades durant l'estada al laboratori de llum de sincrotró italià Elettra situat prop de la ciutat de Trieste.⁴⁷

2.1. Caracterització del camp magnètic d'un ondulator

En el laboratori de mesures magnètiques d'Elettra, existeix un sistema complet per a la caracterització de dispositius d'inserció. Els blocs magnètics que constitueixen aquests dispositius es caracteritzen a través de la mesura del moment magnètic dipolar amb unes bobines Helmholtz. Aquesta és tota la informació que es fa servir per fer el muntatge inicial dels blocs. Un cop ensamblats es mesura el camp magnètic produït pel muntatge localment amb una sonda Hall de dues components. Es mesuren els camps magnètics horitzontal i vertical. El camp magnètic longitudinal (paral·lel al moviment dels electrons) no es mesura, ja que, en la majoria de casos, per simetria, és negligible segons l'eix per on passen els electrons. L'obtenció de les integrals del camp magnètic a través de les dades obtingudes amb la sonda Hall és molt sensible a la temperatura, els efectes del soroll de fons i a l'efecte Hall planar. Per això, per tal de mesurar acuradament les integrals, hi ha un sistema de fil tibant. Amb aquest sistema es poden mesurar tant la primera com la segona integral.

⁴⁷ Aquesta estada, de 7 mesos, va ser subvencionada per la generalitat de Catalunya a través de les borses de viatges programades per l'AGAUR, amb el número d'expedient 2004BV2 00022.

2.1.1. Mesures amb bobines Helmholtz

2.1.1.1 Introducció

Abans de procedir a l'ensamblatge de l'ondulador, cal caracteritzar molt acuradament les propietats magnètiques dels blocs. L'experiència a Elettra demostra que, de vegades, les mesures dels proveïdors d'imants no són del tot fiables. Mesurar els imants al laboratori serveix per optimitzar he l'ensamblatge. Per això, al laboratori es mesuren les imantacions dels blocs per tal de descartar possibles errors sistemàtics.

2.1.1.2 Consideracions teòriques

Les bobines Helmholtz produeixen una zona de camp molt uniforme al centre del muntatge. Per tant, les bobines no introdueixen cap anisotropia a l'hora de mesurar el moment dipolar de petites peces magnètiques situades en el seu centre. A les bobines s'indueix un voltatge provocat per qualsevol variació del flux magnètic a través seu. Per mesurar el moment dipolar de cada bloc, els imants es roten 180° respecte a l'eix perpendicular a l'eix de les bobines (Figura 16). La integració del voltatge generat ens permetrà conèixer la imantació mitjana de l'imant.

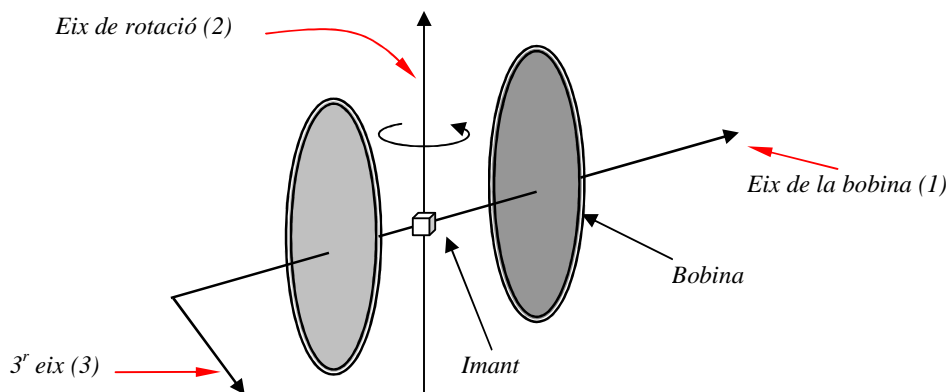


Figura 16: Esquema de la mesura de la imantació d'un bloc amb unes bobines de Helmholtz.

El sistema de mesura defineix una tríada d'eixos, anomenats respectivament 1, 2 i 3, i que es mostren a la Figura 16. En general, aquests eixos no seran totalment perpendiculars a les cares dels blocs, ja sigui per errors de posicionament o per imperfeccions de les cares o del suport. D'altra banda, cada bloc té uns eixos propis, definits per les seves cares. Aquests eixos serveixen de referència quan es fa el muntatge a l'ondulador. Un petit desajust en el paral·lisme dels dos sistemes de coordenades pot esbiaixar la mesura de la imantació.

2.1.1.2.1 Mesures normal-invertida

Per disminuir l'efecte del desalineament entre bobines i imant, es fa servir l'estratègia de repetir la mesura a dues posicions diferents (normal i invertida). La posició invertida consisteix en rotar l'imant 180° entorn la component d'imantació que volem mesurar. Suposem que volem mesurar la component M_m perpendicular a una determinada cara que està aproximadament orientada amb l'eix de les bobines. Les altres dues components es poden agrupar en una component M_e que estarà sempre en el pla perpendicular a la component que volem mesurar. Suposem també que existeix un desalineament θ entre el bloc i els eixos de les bobines, i que aquest desalineament és petit. A la Figura 17 es mostra un esbós d'aquesta situació.

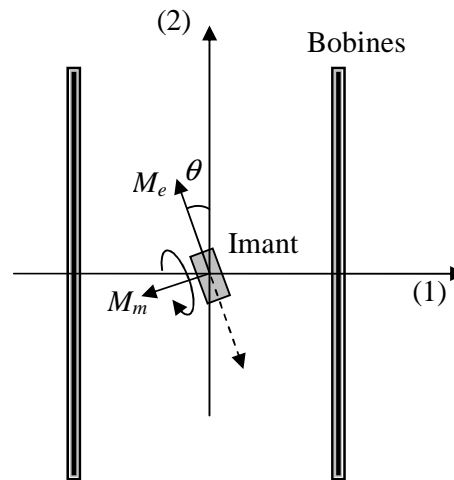


Figura 17: Esbós de les posicions normal (fletxa amb línia contínua) i invertida (fletxa amb línia discontinua) per a la mesura de la component de la imantació M_m amb un desalineament θ .

Amb aquest sistema podem aconseguir una mesura més acurada de la component perpendicular a la cara que suposadament era perpendicular a l'eix de les bobines. Per θ un desalineament petit tenim:

$$\begin{aligned} M_{1,N} &\approx M_m + \theta M_e \\ M_{1,R} &\approx M_m - \theta M_e \end{aligned} \quad , \quad M_m \approx \frac{M_{1,N} + M_{1,R}}{2} \quad (2-1)$$

els subíndexs N i R indiquen la posició, normal o invertida respectivament, del bloc quan es fa la mesura. Així doncs per realitzar una mesura de M_m ens caldran dues mesures amb la bobina Helmholtz.

2.1.1.2.2 Constant de calibratge de la bobina

La llei d'inducció de Faraday descriu el voltatge induït en la bobina quan es canvia el flux magnètic a través d'aquesta:

$$v = -\frac{d}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \phi \quad (2-2)$$

on v és el voltatge induït en el circuit elèctric C , B el camp magnètic en una superfície qualsevol delimitada pel circuit C , da l'element diferencial de superfície i ϕ el flux magnètic en la superfície esmentada. Com que per realitzar la mesura integrem el voltatge generat per les bobines, apliquem una integració temporal a l'equació anterior:

$$\Psi = \int_0^T v dt = \phi(0) - \phi(T) \quad (2-3)$$

El voltatge integrat Ψ és igual al canvi de flux en l'interval d'integració T . L'única component del moment magnètic de l'imant que afecta el flux és la component paral·lela a l'eix de les bobines. Com que la posició final de l'imant correspon a una rotació de 180° , tenim que $\phi(0) = -\phi(T)$. Suposem que el camp magnètic de l'imant té forma dipolar, és a dir, és pot expressar com la suma de camps magnètics dipolars distribuïts uniformement en el volum de l'imant.⁴⁸ Aleshores, podem expressar el flux magnètic en la posició inicial com:

$$\phi(0) = \frac{\mu_0 mn}{R} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{s}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2-4)$$

Éssent s la separació entre les bobines, R el radi i m el moment magnètic dipolar segons la direcció de l'eix de les bobines. Hem tingut en compte que hi ha dues bobines simètriques, i que cada una té un nombre d'espines n . Fent servir les equacions anteriors, podem relacionar el moment dipolar magnètic amb el voltatge integrat durant la rotació de l'imant:

$$\Psi = 2\phi(0) = \frac{2\mu_0 mn}{R} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{s}{2R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2-5)$$

Per simular el camp magnètic de l'imant, cal conèixer el valor de la imantació M . Aquesta, suposant que el bloc estigui homogèniament imantat, està relacionada amb el moment magnètic dipolar a través del volum del material V :

⁴⁸ En general una suma de camps dipolars localitzats a punts diferents, no conforma un camp dipolar, però com hem dit les bobines no fan distinció entre els punts de la zona central, on se situa l'imant.

$$\mu_0 m = MV \quad (2-6)$$

Finalment, combinant les expressions anteriors, podem relacionar el valor de la imantació amb la integral del voltatge generat a les bobines:

$$M = \Psi \left[1 + \left(\frac{s}{2R} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \frac{R}{2nV} \quad (2-7)$$

El factor que multiplica Ψ en l'equació anterior és el que anomenem constant de calibratge.

En el cas que ens ocupa, $s=R= 0.3 \text{ m}$, $n=1200$. La precisió de la mesura depèn de la precisió amb què es mesuri el voltatge induït. En la majoria dels casos, però, es la precisió amb què coneixem el volum del material el que determina la precisió de la imantació.

2.1.1.3 Consideracions pràctiques

Essencialment hi ha tres aspectes pràctics que juguen un paper important a l'hora de mesurar amb les bobines Helmholtz. En primer lloc, tot i que sembli obvi, cal definir un conveni d'eixos en els blocs, no només per realitzar les mesures normal–invertida, sinó per assegurar una mesura correcta de les components. Per altra banda, donat que la imantació escala amb la temperatura, és important que les mesures amb les bobines es duguin a terme sempre a la mateixa temperatura. Finalment, cal tenir en compte que els elements magnètics i electromagnètics que circumden el muntatge experimental estigui prou lluny, amb un èmfasi especial amb els materials d'alta permeabilitat (com per exemple ferro o compostos d'aquest). Tenir materials d'aquest tipus prop de l'experiment pot distorsionar greument les mesures.

2.1.1.3.1 Conveni d'eixos

Només es poden mesurar components del moment magnètic perpendiculars a l'eix de les bobines. En cas que les cares de l'imant i l'eix de les bobines no siguin perpendiculars, el sistema de mesura normal–invertida ens permet seguir mesurant la component de la imantació perpendicular a la cara de l'imant. Tot i això, tant els blocs com el muntatge de les bobines, tenen unes toleràncies geomètriques; es a dir, hi ha una certa incertesa en el posicionament i l'orientació del bloc. Aquest fet es veu potenciat quan les mesures es realitzen manualment, i s'introdueix una nova font d'error cada cop que l'imant es manipula per mesurar una nova component. En la mesura d'un bloc es canvia sis vegades la seva posició (dues per a cada component del moment magnètic). Amb un sistema automatitzat, la repetibilitat seria possiblement molt millor. Com a contrapartida, un sistema de mesura motoritzat, és complicat

i requereix d'una mesura externa de la posició angular del bloc durant la rotació, ja que en general no ni ha prou amb la resolució del propi motor.

Cal tenir en compte també que, en general, els imants estan imantats principalment en una direcció. En general, per a imants amb prou bona qualitat, les altres components són de l'ordre d'una centèsima o mil·lèsima part de la principal. A l'hora de mesurar les components secundàries, cal evitar que durant la rotació de l'imant la component principal encari les bobines. Si la component principal encara les bobines durant la rotació de l'imant, durant la integració es produirà una gran cancel·lació del voltatge induït a les bobines (l'error en la mesura del voltatge és relativa a la quantitat mesurada). El més convenient és que la component principal apunti segons la direcció de l'eix (2) del sistema de referència de les bobines (Figura 16). Així doncs, s'hauran d'establir muntatges diferents per a els imants imantats verticalment i horitzontalment.

2.1.1.3.2 Errors produïts per l'entorn de l'experiment

En primer lloc, cal efectuar un seguit de mesures sistemàtiques abans de començar l'experiment, per controlar l'efecte de l'entorn en les mesures. Com a mesura de seguretat, al laboratori de mesures magnètiques d'Elettra es mesura un bloc de referència. Si s'observa alguna discrepància amb les mesures anteriors, és senyal d'un canvi en l'entorn magnètic que cal corregir.

Per controlar més acuradament l'ambient magnètic, es poden repetir mesures d'un mateix bloc en diferents posicions i orientacions de les bobines respecte del laboratori. Cal trobar una posició òptima de les bobines que minimitzi la possible dependència en l'orientació d'aquestes.

En aquest sentit, els elements d'alta permeabilitat, com per exemple els objectes amb ferro, poden afectar significativament el flux magnètic. Una font externa de camp magnètic constant no afectaria la mesura, però els materials amb alta permeabilitat varien la seva imantació si varia el camp magnètic que els afecta. En presència d'aquest tipus de materials, en rotar el bloc durant la mesura, s'induirà un voltatge addicional a les bobines. La Figura 18 esquematitza aquest efecte. L'efecte és molt més important si la peça magnètica és a l'eix de les bobines.

Si un seguit de mesures es realitzen en un entorn amb materials magnètics d'alta permeabilitat i no es canvia la posició de les bobines durant les mesures, totes les mesures estaran alterades respecte del seu valor real per un cert factor. El flux es redistribueix a causa del material magnètic, i juga el paper d'un factor geomètric. L'efecte net consistirà en una modificació de

la constant de calibratge. Així doncs, cometrem sobretot un error en la component principal de la imantació, que sol ser milers de cops més gran que les secundàries.

Els camps magnètics estàtics també poden afectar a la mesura si les bobines es mouen o vibren durant la rotació de l'imant. De fet, si la rotació és manual, és molt aconsellable fixar el sistema de mesura a terra.

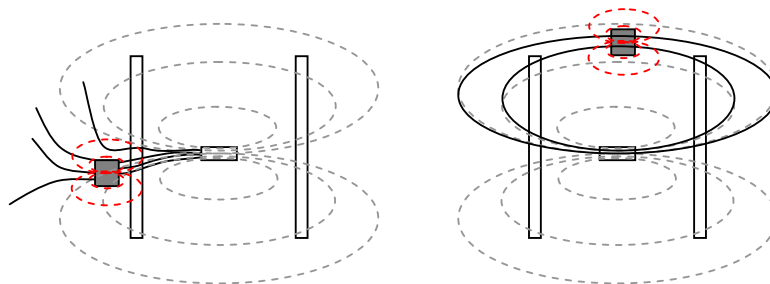


Figura 18 : Línees de flux produïdes per un imant. En línea discontinua es representen les línees de camp en un ambient no magnètic, i en línea contínua es representen les línees de camp alterades per un element d'alta permeabilitat. En vermell, les línees de camp corresponents a la peça momentàniament magnetitzada.

Finalment, les bobines actuen com a antenes i, per tant, capten soroll elèctric. En la secció 2.1.2.2.1 farem un tractament més ampli d'aquest tema. Així mateix, el cablejat fins a l'integrador també és una font de soroll apreciable. Per tant, ha de satisfer certs requeriments, de manera que el soroll a les mesures es mantingui dins l'ordre d'uns pocs $\mu\text{V}\cdot\text{s}$ de resolució.

2.1.1.3.3 Control de temperatura

Com hem dit, cal una mesura inicial de control abans de començar les mesures. Si la temperatura ha canviat, la imantació també ho haurà fet. En un ondulator, els imants es distribueixen periòdicament i, per tant, encara que un cop muntat la temperatura sigui diferent a la del laboratori, si les mesures del laboratori han estat totes fetes a la mateixa temperatura, la periodicitat (error de fase òptica) i les integrals, es veuran poc afectades. Cal recordar que les integrals són nul·les a primer ordre i, si s'alteren per un factor petit, el canvi produït serà de segon ordre.

Per tant, cal garantir, com a mínim, que les mesures es facin totes amb els blocs a la mateixa temperatura.

Ja hem comentat a l'apartat 1.2.4. que tipus diferents de materials tenen coeficients tèrmics de desimantació reversible diferents. La termalització fins al nivell desitjat de les peces magnètiques pot durar algunes hores. Per això, típicament, els imants es deixen termalitzar

durant un dia sencer abans de ser mesurats. L'estabilitat en temperatura al laboratori d'Elettra és de $\pm 3^{\circ}\text{C}$.

2.1.1.4 Limitacions

Una de les suposicions més importants a l'hora de caracteritzar els blocs magnètics mitjançant la mesura de la seva imantació és que són homogenis. Aquesta suposició implica un error en la predicció del camp magnètic, que és major conforme més a prop estem de l'imant i conforme més inhomogeni és aquest. Prop de les cares de l'imant, les inhomogeneïtats influeixen fortament el camp magnètic. Per tant si les dades obtingudes amb les bobines de Helmholtz s'utilitzen per ordenar els blocs en l'ondulador, es poden obtenir ordenacions de blocs que produeixen un camp poc periòdic i amb integrals de camp grans. En el cas d'onduladors d'entreferro petit, i la tendència actual en molts sincrotrons és la de reduir l'entreferro al màxim, aquesta limitació pot ser decisiva.

Hi ha diverses alternatives per superar aquest inconvenient. En primer lloc, es pot utilitzar la mesura directa del camp o de les integrals, en segon lloc, es pot també intentar millorar el procediment de fabricació dels blocs i, finalment, es poden caracteritzar les inhomogeneïtats dels blocs per una altra via, com proposem al llarg d'aquesta memòria.

2.1.2. Mesures amb fil tibant

2.1.2.1 Introducció

El mètode del fil tibant s'utilitza per mesurar les integrals d'un camp magnètic. Al laboratori de mesures magnètiques d'Elettra, s'aconsegueixen precisions de fins a $1 \mu\text{T}\cdot\text{m}$. El muntatge consisteix en dos suports muntats cadascun sobre un sistema de moviment motoritzat en dos eixos, un vertical i l'altre horitzontal. El fil, d'uns 3 m de llarg aproximadament, se sosté entre els suports mòbils de forma que es mou transversalment si els eixos dels dos suports es mouen simultàniament. La Figura 19 mostra el sistema.

El sistema es pot utilitzar tant per mesurar la primera com la segona integral. Si els motors corresponents al mateix eix en els dos bancs es mouen paral·lelament es mesura la primera integral, si es mouen antiparal·lelament es mesura la segona integral.⁴⁹

⁴⁹ D. Zangrando, R.P. Walker, *A stretched wire system for accurate integrated magnetic field measurements in insertion devices*, Nucl. Instr. and Meth. A 376 (1996) 275-282.

La Figura 20 mostra de forma esquemàtica el moviment del fil durant la mesura de la primera i la segona integral de camp. El fil és en realitat la secció recta d'una bobina que es tanca lluny de la font de camp magnètic. El voltatge V induït en la bobina és proporcional a la derivada temporal del flux magnètic ϕ que la travessa. Per a desplaçaments molt petits del fil, podem relacionar el canvi de flux magnètic amb la integral de camp.

$$\frac{1}{N} \int_{t_1}^{t_2} V dt = \phi(t_1) - \phi(t_2) = -\varphi \quad (2-8)$$

on t_1 i t_2 són els instants inicial i final del moviment del fil, $\phi(t_1)$ i $\phi(t_2)$ el flux magnètic a través de la bobina en aquests dos instants, φ és el flux magnètic que travessa la superfície delimitada per la posició inicial i final del fil, i N el nombre de voltes de la bobina.

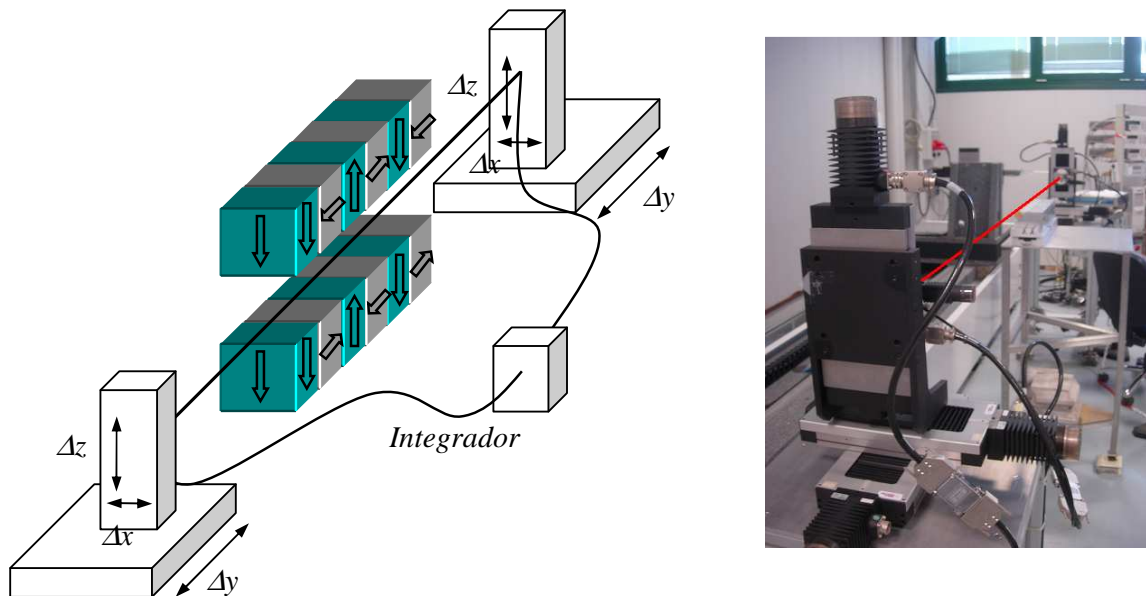


Figura 19: A l'esquerra, esbós corresponent al sistema de fil tibant implementat al laboratori de mesures magnètiques d'Elettra. A la dreta, fotografia del mateix (el fil s'ha ressaltat en vermell)

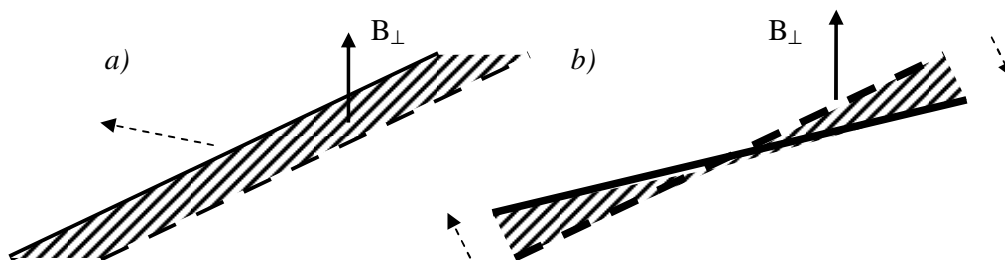


Figura 20: Diferents modes de moure el fil per mesurar: a) la primera integral de camp i b) la segona integral de camp.

2.1.2.1.1 Primera integral del camp

En aquest cas, l'àrea delimitada entre les posicions inicial i final del fil, té forma rectangular, molt més llarga que ampla. Si assumim que B_{\perp} canvia poc amb x :

$$\varphi = \iint B_{\perp} da = \int_{-\Delta x - L/2}^{\Delta x} \int_{-L/2}^{L/2} B_{\perp}(x + \delta, y, z) d\delta dy \approx 2\Delta x \int_{-L/2}^{L/2} B_{\perp}(x, y, z) dy = 2\Delta x I(x, z) \quad (2-9)$$

on $I(x, z)$ correspon a la primera integral de camp del component normal al moviment del fil i y és la coordenada paral·lela a la direcció del fil.

2.1.2.1.2 Segona integral del camp

En aquest cas el fil es manté centrat, però els seus extrems es mouen en direccions oposades i, per tant, l'àrea delimitada té la forma de dos triangles isòsceles simètrics que es toquen pel seu angle més petit; θ ,

$$\varphi = \iint B_{\perp} da = \int_{-y \tan \theta}^{y \tan \theta} \int_{-L/2}^{L/2} B_{\perp}(x + \delta, y, z) d\delta dy \approx 2 \tan \theta \int_{-L/2}^{L/2} y B_{\perp}(x, y, z) dy = -2 \tan \theta J(x, z) \quad (2-10)$$

on $J(x, z)$ correspon a la segona integral de camp de la component del camp normal al moviment del fil projectada al centre de l'ondulador.

2.1.2.2 Mesures

Les integrals que es mesuren amb aquest dispositiu són el resultat de la distribució de blocs, la contribució neta dels quals és, idealment, zero. Però, en realitat, les integrals no són exactament zero a causa de les imperfeccions dels blocs magnètics. Ara bé, tot i això, les integrals són molt petites. Per aconseguir captar el feble senyal que es genera, la bobina, i per tant el fil, tenen moltes voltes.

La velocitat del moviment està limitada. Si la velocitat és massa gran en el desplaçament del fil, aquest oscil·la i, per tant, per assegurar una bona mesura cal esperar a què les oscil·lacions disminueixin. Així doncs, no podem fer el senyal del voltatge induït al fil arbitràriament gran per via d'augmentar la velocitat d'escombratge.

Per altra banda, un sistema com el del fil tibant es comporta com una gran antena, moltes fonts de soroll influeixen la mesura, fins i tot quan el fil està quiet. Cal, doncs, prendre mesures apropiades per aconseguir mesures estables, precises i fiables.

2.1.2.2.1 El soroll

En el sistema implementat a Elettra, les mesures són típicament de l'ordre dels centenars o les desenes de μV . Per conèixer les fonts de soroll sistemàtiques cal un analitzador d'espectres. A Elettra es va analitzar l'espectre del senyal provinent del fil en absència de camps magnètics i en absència de moviment. El soroll de base es de l'ordre de nV , però apareixen alguns pics de l'ordre de μV . Malauradament, aquests pics apareixen a freqüències tan baixes com $14 Hz$, $17.5 Hz$, $37 Hz$ i $38 Hz$, amb els seus respectius harmònics. També apareix la freqüència de xarxa, $50 Hz$, amb una amplitud d'unes desenes de μV . Alguns dels pics es poden explicar com a resultat dels aparells circumdants. Per exemple, amb el sistema de ventilació apagat (el que manté l'ambient del laboratori amb una estabilitat tèrmica de $\pm 3^\circ C$) el pic de $17.5 Hz$ no apareixia. L'estabilitat amb què els pics es mantenen és un fet remarcable i, indica que les fonts responsables són també estables i emeten contínuament. Aquestes freqüències interfereixen i limiten la precisió de les mesures. Pel que fa a la freqüència de la xarxa, que és la més nociva pel que fa a l'amplitud, podem minimitzar el seu efecte amittjanant i utilitzant un temps de mostreig adient, en el nostre cas, múltiple de $20 ms$.

Hi ha altres fonts de soroll, les no sistemàtiques, com per exemple el cablejat, tant el que connecta l'integrador amb el voltímetre, com el dels motors o el del circuit de retorn de l'espira que forma el fil. Aquestes fonts poden introduir soroll, durant el moviment pel fet que poden comportar-se com a antenes, o bé a través de les connexions (efecte de termoparell, connexions brutes, etc). Els cables han de ser fixats mecànicament, entrelaçats i apantallats elèctricament. Per evitar l'efecte termoparell, cal escollir el mateix material per a tots els connectors. Cal també netejar periòdicament les connexions amb alcohol.

2.1.2.2.2 El moviment del fil

En principi, per tenir la relació senyal/soroll al més gran possible, cal que la velocitat de desplaçament sigui com més elevada millor. Ara bé, hi ha diversos factors que limiten la velocitat. En primer lloc, els motors. Un motor perd parell a mesura que guanya velocitat, per tant, a partir d'una certa velocitat, no pot desenvolupar la seva funció. Segon, tal com hem comentat anteriorment, a velocitats de desplaçament altes, l'estabilitat del fil disminueix, i els modes de vibració transversal s'exciten més i amb més intensitat. L'equació (2-8) ens indica que la mesura només depèn de la posició inicial i final del moviment. Si el fil oscil·la, cal esperar què les oscil·lacions s'atenuïn per tenir una bona mesura. Empíricament, es troba que la velocitat òptima per dur a terme les mesures és de $3 mm/s$.

Cal també determinar el desplaçament total del fil a cada mesura. Un desplaçament major dona un senyal més gran, i per tant, una mesura més repetible. Tanmateix, utilitzar desplaçaments grans equival a assumir integrals constants l'espai recorregut, cosa que en general no és certa. De fet, el desplaçament òptim dependrà del pendent transversal de la integral. Per a un ondulator Apple II de període 80 mm i distància d'entreferro de 15.5 mm , un desplaçament de $\pm 2.5 \text{ mm}$ és suficient per generar un bon senyal i prou petit per no afectar la distribució de les integrals de forma apreciable.

Així doncs, a partir dels valors empíricament establerts, un desplaçament dura aproximadament 1.667 segons . Per seguretat, el temps d'integració comença lleugerament abans i lleugerament més tard que el moviment del fil. Amb tots aquests afegits, una mesura triga al voltant de 4 segons . No qualsevol dispositiu pot integrar contínuament aquest temps: a banda dels integradors específics, els voltímetres normals tenen temps màxims d'integració d'un segon. En cas que el dispositiu no permeti integrar contínuament, caldrà triar apropiadament en quants intervals es fa la integració.

Després de la integració, la pròxima mesura no pot començar immediatament. Cal un temps per al descarregat elèctric i per a la lectura de les dades. El temps total de mesura és aproximadament 5 segons .

També cal considerar quin és el nombre òptim de voltes que ha de tenir el cable de l'espira. Es tracta d'un compromís entre tenir prou senyal i que el gruix total del cable no esbiaixi el valor de la integral. En el nostre cas hi ha 48 voltes , i el gruix del cable és de 0.5 mm .

2.1.2.3 Altres tècniques per mesurar integrals

Existeixen altres mètodes més eficients i ràpids per a la mesura de les integrals de camp, tot i que no estaven implementats a Elettra. En aquesta secció descriurem i farem alguns comentaris respecte d'aquests sistemes. En concret, compararem la mesura amb el fil tibant amb la bobina rotatòria o el fil fix tibant.

2.1.2.3.1 Bobina rotatòria

En aquest cas, el camí de retorn de la bobina és paral·lel al del fil (amb una separació entre 5 i 10 mm) i travessa la zona de mesura. La bobina té doncs una àrea molt més petita que en el cas del fil tibant, i per tant el soroll elèctric que capta com a antena és menor. Presenta però alguns desavantatges i complexitats. Per exemple, l'ample a de la bobina (*Figura 21*) s'ha de regular per a cada dispositiu específicament. El fet que la bobina roti, combinat amb l'efecte

de curvatura provocat per la gravetat, introdueix una dependència en la posició longitudinal del centre de la bobina y_0 .

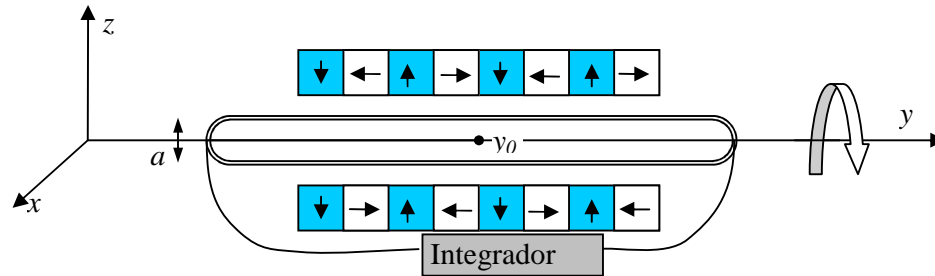


Figura 21: Esbós d'un sistema de mesura d'integrals basat en la bobina rotatòria.

Típicament és suficient fer la mesura en dues posicions, amb la bobina centrada a y_0 i a un semiperíode de distància.

Per mesurar les dues components de les integrals del camp magnètic d'un ondulator, només cal rotar la bobina 90° . Un avantatge important que presenta aquest sistema és la fàcil implementació de la mesura contínua en les dues components de les integrals, que consisteix en desplaçar la bobina transversalment amb un moviment continu a velocitat constant mentre es mesura el voltatge induït. Aquest moviment, en no tenir frenades ni acceleracions, és molt estable, i es pot fer més ràpidament. Típicament, es fan servir velocitats de 100mm/s .

2.1.2.3.2 Fil fix tibant

Aquest dispositiu està pensat per mesurar les integrals de mòduls amb 1, 3 o 5 imants. En aquest cas, el fil es manté fix i són els imants els que es desplacen sobre un banc lineal. Durant el moviment dels imants, el voltatge induït en el fil, s'enregistra contínuament i és directament proporcional a la integral a cada punt, si coneixem la velocitat de desplaçament en aquell punt (equació (2-11)). També en aquest cas la velocitat està menys limitada. El voltatge està relacionat amb la integral

$$\frac{1}{N} V dt = -d\varphi = -dx \int_{-\infty}^{\infty} B_{\perp}(x, y, z) dy \Rightarrow \frac{V \left(t = \frac{x}{v} \right)}{N v} = I(x, z) \quad (2-11)$$

on v és la velocitat del banc respecte a la bobina a cada posició transversal x . Només la integral del camp segons la direcció z es pot mesurar d'aquesta forma. La integral de l'altra component es pot deduir a partir de l'expressió:⁵⁰

⁵⁰ P.Ellaume, H.Onuki, *Undulators, Wigglers and their applications*, Taylor & Francis, 2003, London, pag 185.

$$I_x(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_z(x, z)}{x - x'} dx' \quad (2-12)$$

A l'apèndix A presentem una deducció alternativa basada en la transformada de Fourier. La validesa d'aquesta expressió es restringeix a fonts de camps magnètics a un costat del pla del fil (pla definit per la direcció del fil y i el seu desplaçament x). Aquesta expressió no és vàlida per a l'ondulador sencer, per al qual la determinació de les integrals s'ha de fer amb el fil tibant o la bobina rotatòria.

2.1.3. Mesures amb sonda Hall

2.1.3.1 Introducció

Al laboratori de mesures magnètiques d'Elettra s'ha implementat un sistema de mesura local del camp magnètic. Es tracta d'un sistema amb dues sondes Hall, una per a la component B_x i una altra per a la component B_z , ambdues en un capçal de metacrilat. El capçal se sustenta per mitjà d'un braç d'1 m aproximadament segons la direcció x . El braç està fixat a un sistema d'eixos, un per al moviment vertical (direcció z) i un altre per a la direcció transversal (direcció x). Els eixos descansen sobre un mòdul lineal que llisca segons la direcció y sobre un bloc de granit gracies a un coixí d'aire. La Figura 22 mostra un esbós del sistema de mesura. En aquest apartat, discutirem alguns dels aspectes més importants del postprocessat de les dades obtingudes amb aquest sistema. En particular, discutirem l'extracció del coeficient d'efecte planar i l'error de posicionament angular.

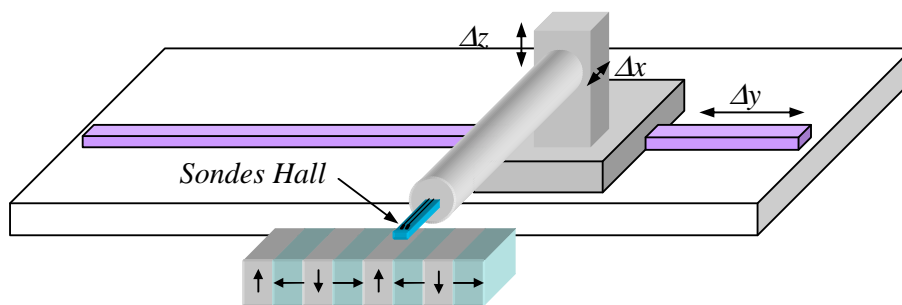


Figura 22: Esbós del banc de mesures amb sonda Hall del laboratori de mesures magnètiques d'Elettra.

2.1.3.2 Posicionament de la sonda

Un cop alineat mecànicament l'ondulador, les mesures magnètiques amb la sonda Hall ens donen informació de l'alineament magnètic del camp generat respecte de les sondes. Siguin

y_n^* les posicions dels màxims interpolats a partir de la mesura de $B_z(y)$. Per al centratge longitudinal, es fa la mitjana de les posicions dels màxims interpolats. Per al centratge vertical, es fan una sèrie de mesures de $B_z(y_n^*, z)$ a $y = y_n^*$, però a diferents posicions de l'eix z . El centre vertical de l'ondulador s'extreu fent la mitjana del mínim interpolat segons la direcció z de $B_z(y_n^*, z)$. La influència dels errors particulars de cada bloc sobre aquest centratge es redueix amitjanant per a un cert nombre de períodes.

En el cas d'un ondulador Apple II, donat que les dues components del camp magnètic B_x i B_z són sinusoidals, podem centrar les dues sondes independentment: A fase 0 podem centrar la sonda que mesura B_z , i a fase $\lambda_0/2$ la sonda que mesura B_x . En principi, la posició relativa d'una sonda respecte de l'altra és coneguda. Hi ha, però, errors de muntatge i altres fons d'imprecisió en el coneixement de la zona sensible del sensor, i aquest tipus d'estudis poden precisar-la millor.

L'error en la posició angular de les sondes és un factor molt important. Quan la sonda no és totalment perpendicular al camp que ha de mesurar, la mesura inclourà part de l'altra component. En el cas d'un ondulador sencer, per simetria, en el pla mig de l'ondulador no hi ha camp longitudinal. En aquest cas, suposant que l'error en el posicionament angular de la sonda sigui petit, el camp mesurat es pot expressar com segueix:

$$\begin{aligned} B_x^m(y) &\approx B_x^r(y) + \theta_x B_z^r(y) \\ B_z^m(y) &\approx B_z^r(y) + \theta_z B_x^r(y) \end{aligned} \quad (2-13)$$

on el superíndex r denota el camp real i el superíndex m el camp mesurat. θ_x i θ_z són els errors angulars de les sondes que mesuren les components B_x i B_z , respectivament. Si mesurem amb la fase de l'ondulador igual a 0, quan idealment $B_x^r(y)$ és nul al llarg de tot l'eix de l'ondulador (i per tant $B_z^m(y) \approx B_z^r(y)$), podem obtenir θ_x a partir de l'ajust de $B_x^m(y)$ amb el camp principal, en aquest cas $B_z^m(y)$. De forma anàloga, amb la fase de l'ondulador igual a $\lambda_0/2$ (i per tant $B_x^m(y) \approx B_x^r(y)$), podrem obtenir θ_z realitzant l'ajust de $B_z^m(y)$ a partir de la component més important $B_x^m(y)$.

Cal dir que la mesura d'aquests angles i de les distàncies entre sondes es pot fer abans de les mesures si es disposa d'un sistema de calibratge complet. Cal un camp de referència, un sistema de posicionament del suport de les sondes i un goniòmetre. Cal també un imant de calibratge per calibrar la resposta no lineal de cada sonda.

2.1.3.3 Efecte planar

En l'expressió que hem descrit a l'apartat anterior s'hi poden afegir termes addicionals, per exemple el coeficient d'efecte planar. La sonda, a part del coeficient de magnetoresistivitat Hall R_h , té el coeficient de magnetoresistivitat transvers M_t , que relaciona el voltatge induït en el pla del sensor amb la component paral·lela al pla $B_{//}$. El camp entre els connectors del semiconductor que experimenta l'efecte Hall es pot expressar com segueix:⁵¹

$$\vec{E} = \rho \vec{J} + R_h \vec{B} \times \vec{J} + M_t \rho \vec{B} \times [\vec{B} \times \vec{J}] \quad (2-14)$$

on ρ és la resistivitat i J la densitat de corrent. El voltatge entre els extrems de la zona sensible es pot expressar doncs de la següent manera:

$$V = k_1 B_{\perp} I + k_2 B_{\parallel}^2 I \sin[2\psi] \quad (2-15)$$

B_{\perp} és la component del camp perpendicular al pla de la sonda, I el corrent que circula a través de la sonda, ψ l'angle entre la direcció del corrent i $B_{//}$, k_1 el coeficient Hall, i k_2 el coeficient Hall planar. Aquests coeficients poden variar molt d'una sonda a una altra, fins i tot si són subministrades per a la mateixa empresa. Hi ha diferents estratègies per tenir en compte aquest efecte. Així, mentre que en alguns laboratoris, com l'ESRF (acrònim del nom angles *European synchrotron radiation facility*; sincrotró ubicat a Grenoble, França), es fa una preselecció de les sondes d'entre un conjunt major, i s'escullen les de menor coeficient planar, en altres laboratoris s'usa l'expressió (2-14) desenvolupada per a ordres més elevats.⁵²

2.1.3.4 Influència dels errors sistemàtics a la mesura

A les mesures amb la sonda Hall se'ls ha de sostreure un terme constant corresponent a la mesura en absència de fonts de camp magnètic. A causa del soroll electrònic de la sonda, és més acurat afegir una constant a les mesures, de forma que la integral correspongui al millor possible a les integrals mesurades amb el fil tibant. Per altra banda, tal i com es pot veure a les definicions de l'apartat 1.4.1.1, la segona integral no es veu afectada per termes simètrics en l'eix longitudinal del camp magnètic. En particular, afegir una component constant al camp no canvia la segona integral.

⁵¹ S.I. Redin et alr. ,” *Radial magnetic field measurements with a Hall probe device in the muon (g-2) storage ring magnet at BNL*”, Nucl. Instr. and Meth. A 473 (2001) 260-268.

⁵² F. Bergsma: (2003), “Calibration of hall sensors in three dimensions”, presented at 13th International Magnetic Measurement Workshop, May 19-22, 2003, Stanford, California, available at <http://fxb.home.cern.ch/fxb/immw13/>

La temperatura i els errors de posicionament de la sonda també juguen un paper important. El temps durant el qual es fa un mostreig del camp al llarg de l'eix y de l'ondulador és relativament curt, entorn d'un o dos minuts. En aquest temps, la temperatura dels imants i la de la sonda no varia gaire. Ara bé, quan es comparen mesures de camp magnètic fetes en moments diferents, cal tenir en compte l'efecte de la temperatura. La temperatura canviarà linealment la imantació dels imants (en realitat la sonda també mesura una diferència amb el camp real a causa de la temperatura, els dos efectes es combinen), de forma que existeix una diferència de camp fictícia entre dues mesures fetes en dos moments diferents que és proporcional al camp (per tant sinusoidal segons la direcció y) i a la diferència de temperatura. El posicionament del capçal de mesura on hi ha les sondes té una component d'error aleatòria durant la mesura i una component d'error sistemàtica. L'error aleatori ve donat pel sistema de posicionament, i és d'1 μm . Per altra banda, tot i que es realitzi un centrat abans de cada mesura, el component sistemàtic és diferent, tot i que constant, al llarg de la mesura. Això és irrellevant per al càlcul de les integrals o les propietats de la llum emesa pel dispositiu, però és molt important a l'hora de comparar mesures del mateix ondulador fetes en moments diferents. Suposem que hi ha un desplaçament δy entre dues mesures del mateix ondulador. Llavors, hi haurà una component de la diferència causada pels diferents posicionaments del capçal δB :

$$\delta B(y) = B(y + \delta y) - B(y) \approx \delta y \frac{dB(y)}{dy} \quad (2-16)$$

En el cas d'un camp sinusoidal, aquesta component de la diferència estarà en quadratura amb el camp. Si el camp fos completament sinusoidal:

$$\begin{aligned} B(y) &= B_0 \sin\left[\frac{2\pi y}{\lambda_0}\right] \\ \delta B(y) &= 2\pi \frac{\delta y}{\lambda_0} B_0 \cos\left[\frac{2\pi y}{\lambda_0}\right] \end{aligned} \quad (2-17)$$

Hem avaluat aquests efectes en un ondulador Apple II amb 22 períodes de 80 cm i 1T de camp màxim.

A la Figura 23 es mostra la diferència entre les components verticals dels camp mesurades abans i després de desplaçar un dels blocs. Com es pot observar, la diferència té un desfasament $\pi/2$ respecte al camp de l'ondulador (la component vertical és simètrica per disseny). Podem sostreure l'efecte d'aquesta diferència fictícia ajustant la diferència amb un terme sinusoidal. En el cas avaluat, trobem que la diferència de posicionament té una amplitud δB de 9 Gauss, i correspon a un desplaçament δy de 12 μm .

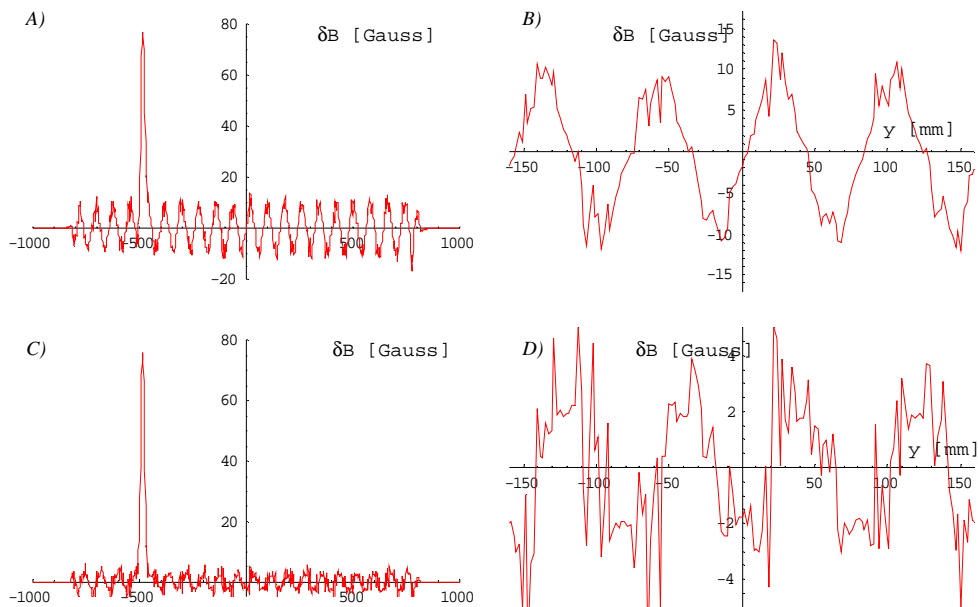


Figura 23: Diferències entre les components verticals dels camps mesurats després de desplaçar un bloc, en funció de la direcció longitudinal y . A) i B) abans de sostraure la diferència de camp causada per l'error sistemàtic en el posicionament, C) and D) després de la sostracció.

A la Figura 23 podem observar que un cop sostret l'efecte de l'error en el posicionament, la diferència dels camps conserva una component periòdica però passa a estar en fase amb el camp principal. El residu està provocat principalment per diferències de temperatura entre les dues mesures. Podem sostreure aquest efecte de la mateixa manera en que hem sostret l'efecte de la diferència de posicionament, aquest cop realitzant l'ajust amb un terme cosinusoidal.

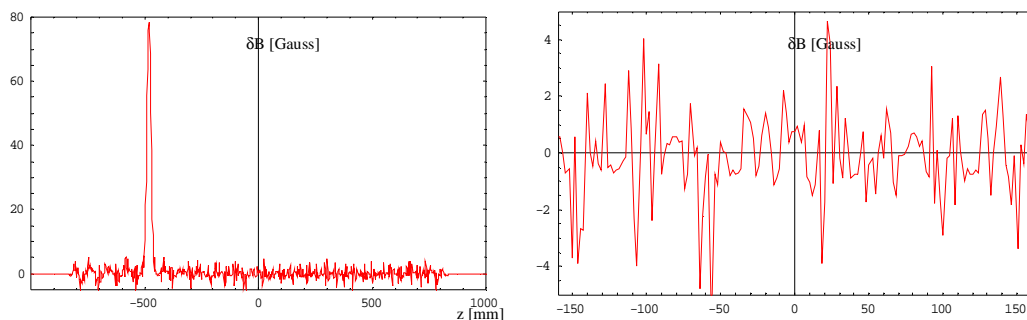


Figura 24: Diferències de les components verticals dels camps mesurats després del desplaçament d'un bloc magnètic, un cop s'ha realitzat la correcció de temperatura.

A la Figura 24 podem observar que, després d'extreure els components periòdics, l'efecte produït pel desplaçament del bloc es presenta sol, només acompanyat de l'error aleatori. L'error RMS final que trobem té una amplitud d'uns ± 1.5 Gauss; dóna una idea de la

repetibilitat de les mesures. Com ja hem dit, l'error causat per la temperatura es manifesta tant a través del canvi de la imantació dels blocs com a través de la sensibilitat de la sonda Hall. A la pràctica, aquests dos efectes són indistingibles.

2.2. Tècniques d'implementació d'un ondulator

En aquest apartat farem un breu repàs dels esquemes seguits per al muntatge d'onduladors en diversos laboratoris. Comentarem els casos més representatius, com ara els d'Elettra, ESRF i BESSY (acrònim del nom alemany *Berliner Elektronenspeicherring-Gesellschaft für Synchrotron Strahlung*: sincrotró de Berlín, Alemanya). En tots els casos, la implementació d'un ondulator es divideix en dues parts: (1) l'ordenació dels blocs per a l'ensamblatge inicial i (2) un cop ensamblat l'ondulator, la seva correcció. Aquests dos passos fan referència a la forma en què es compensen els efectes de les imperfeccions dels blocs magnètics i dels errors de muntatge. Començarem, però, explicant com es contraresten els problemes intrínsecs a la geometria de l'ondulator, com ara els derivats de la contribució de la permeabilitat a les integrals de camp, tal com hem esmentat a l'apartat 1.4.1.

2.2.1. Correcció dels efectes de la permeabilitat en el disseny de les terminacions

La permeabilitat afecta el camp magnètic que cada un dels blocs genera aïlladament. En general, l'efecte de la permeabilitat fa decreïxer el camp un cert factor, que en el cas dels blocs de NdFeB (material típicament utilitzat per a la construcció de onduladors PPM d'entreferro gran) és d'un 3% aproximadament. Ara bé, a les vores de l'ondulator, la influència dels blocs adjacents és diferent, i el camp que produeixen els blocs també. La pèrdua de la periodicitat origina una descompensació del camp, i fa que les integrals de camp siguin no nul·les. L'efecte més important de la permeabilitat és que, en canviar la fase de l'ondulator o bé la distància entre els ensamblatges magnètics superiors i inferiors, la descompensació serà també diferent i, per tant, les integrals presentaran una certa dependència amb la fase de l'ondulator i la mida de l'entreferro. Si no fos per aquesta dependència, l'efecte es podria solucionar simplement amb uns solenoides disposats al principi i al final de l'ondulator que desviessin el feix a l'entrada i a la sortida per tal de compensar la integral no nul·la.^{53 i 54} De fet, aquesta tècnica es fa servir, i s'anomena correcció

⁵³ K. Halbach, *Desirable excitation patterns for tapered wigglers*, Nuc. Inst. And Meth. A (1986) p. 95-99.

activa (vegeu l'apartat 2.2.4). Ara bé, corregir la integral a mesura que es canvia la fase de l'ondulador implica que el moviment ha de ser prou lent com per assegurar que l'estabilitat del feix d'electrons no es vegi compromesa. Com més gran sigui la correcció que calgui fer de forma activa, més lent haurà de ser el canvi de posició dels arranjaments magnètics. Ens interessa doncs que es corregeixin aquests efectes de forma passiva, és a dir, en el disseny mateix de l'ondulador.

Hi ha diverses tècniques per assolir aquest objectiu. Tot depèn del tipus de tecnologia que es faci servir i, a més, per a una mateixa tecnologia, cada laboratori utilitza solucions diferents segons els seus recursos i les seves experiències. En general, però, totes aquestes solucions consisteixen en utilitzar blocs (o fonts de camp magnètic) diferents a les terminacions.⁵⁵ En el nostre cas, quan es tracta d'onduladors PPM, els blocs de les terminacions tenen la mateixa secció (dimensions segons les direccions x i z) però són més curts segons la direcció y que els blocs de la zona periòdica. Es deixa un espai entre aquests blocs (en la direcció y), tal que minimitza la variació de les integrals amb l'entreferro i la fase de l'ondulador. En general, per a onduladors PPM hi ha nombrosos treballs al respecte.^{56, 57, 58 i 59} Per a cada ondulador cal fer un disseny específic de les terminacions optimitzant en cada cas la variació de les integrals amb la fase i l'entreferro. Usualment es busca minimitzar la variació total de les integrals, no el seu valor absolut, ja que com hem explicat abans, un error constant a les integrals és molt senzill de corregir. Més endavant, al capítol 3, en veurem un exemple. Fins aquí hem parlat del disseny amb blocs magnètics ideals (tot i que amb permeabilitat no nul·la). A partir d'ara discutirem el cas de blocs magnètics amb inhomogeneïtats o amb errors de muntatge.

2.2.2. Tècniques d'ordenació de blocs

L'ordenació dels blocs en un ensamblatge, *sorting* en anglès, no es pot fer de forma aleatòria. En un ondulador típic es poden tenir centenars de blocs magnètics i, malgrat que s'aconsegueixen toleràncies molt petites en la imantació dels blocs (típicament 1% en mòdul

⁵⁴ D. Humphies et al., *Design of end magnetic structures for the Advanced Light Source wigglers*, Advanced Light Source internal note, nº DE-AC03-76SF00098.

⁵⁵ B. Diviacco, Richard P. Walker, *Pure permanent magnet end-configuration*, Sincrotrone Trieste internal note, ST/M-TN-93/5, Maig 1992.

⁵⁶ J. Chavanne, P. Elleaume, P. Van Vaerenbergh, *Recent developments of insertion devices at the ESRF*, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference, Vancouver May 1997, p. 3506.

⁵⁷ G. Rakowsky, et al., *Performance of Rocketdyne Phase-optimized Pure Permanent Magnet Undulator*, Proceedings of the 1991 Particle Accelerator Conference, San Francisco May 1991, p. 2733.

⁵⁸ B. Diviacco, et al., *Development of elliptical undulators for Elettra*, Proceedings of the 2000 European Particle Accelerator Conference, Vienna May 2000, p. 2322.

⁵⁹ J. Chavanne, P. Elleaume, P. Van Vaerenbergh, *End field structures for linear/helical insertion devices*, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference, New York May 1999, p. 2665-2667.

d'imantació i 1º segons la seva direcció d'imantació), les inhomogeneïtats que presenten són difícilment controlables. Cal doncs caracteritzar aquests defectes per tenir-los en compte a l'hora de muntar l'ondulador. Segons el tipus d'ondulador i la disponibilitat de temps i diners de cada laboratori, existeixen diverses aproximacions per realitzar l'ordenació. Tot seguit en detallem els casos més representatius.

2.2.2.1 Tipus d'ordenació a Elettra

A Elettra l'ordenació inicial dels blocs es fa tenint en compte les mesures d'imantació obtingudes amb les bobines Helmholtz. Aquesta informació s'introdueix en un algorisme anomenat *Simulated annealing* (SA).⁶⁰ Inicialment es considera un ensamblatge aleatori, es realitza un càlcul del camp de tot l'ondulador, i es van provant diferents permutacions dels blocs. Hi ha diversos programes utilitzats per simular el camp d'un ondulador, que poden incloure l'efecte de la permeabilitat i són de molta utilitat per conèixer els detalls del camp. Ara bé, donat que cal realitzar la simulació del camp un nombre de vegades elevat, per tal d'obtenir resultats en un temps raonable és més convenient utilitzar expressions analítiques que no tinguin en compte la permeabilitat dels blocs. En el cas de blocs amb geometria de paral·lelepípede, existeixen formules analítiques per al camp i les integrals de camp magnètic.⁶¹ Aquesta combinació de mètodes basats en nombres aleatoris i les imantacions dels blocs està inspirat en altres treballs.⁶²

A partir de les imantacions dels blocs es calculen totes les magnituds rellevants (camps, integrals, trajectòries i error de fase òptica) per a diverses separacions entre les rengleres d'imants. Per altra banda, com que no es tenen en compte els efectes de la permeabilitat, i la imantació mesurada amb les bobines Helmholtz no descriu completament el camp generat per l'imant, l'optimització condueix a una solució òptima dintre d'un cert marge d'error.

Un cop desenvolupat el programari necessari, aquest permet trobar la millor configuració de blocs de forma molt ràpida. En aquest sentit, cal dir que sovint els fabricants adjunten els valors de la imantació dels blocs en l'entrega d'aquests. Això fa que el temps d'ordenació es pugui reduir al simple muntatge dels blocs, en l'ordre que s'obté a partir de l'aplicació de l'algorisme. Es tracta d'una ordenació a priori (abans del muntatge).

⁶⁰ *Numerical Recipes in C* Cambridge university press, 1992, New York, W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery.

⁶¹ O.Chubar, P.Ellaume i J.Chavanne, *A three-dimensional magnetostatics computer code for insertion devices*, J.Synchrotron Rad. (1998). 5, p 481-484.

⁶² A.D. Cox and B.P.Youngman, *Systematic selection of undulator magnets using the technique of simulated annealing*, Proceedings of the Internations Conference on Insertion Devices for Synchrotron Sources, 1985, SPIE Vol. 582 (1986) pag 91.

2.2.2.2 Tipus d'ordenació a l'ESRF

A l'ESRF l'ordenació es decideix a mesura que es munta l'ondulador.⁶³ Cada una de les rengleres d'imants es munta per separat (en el cas d'un Apple II, per exemple, s'han de muntar 4 rengleres). En aquest cas també es fan servir els valors de les imantacions dels blocs, però només de forma marginal. En primera instància, s'utilitzen els valors de la imantació per agrupar els blocs en mòduls d'1, 3 i 5 imants. Un cop combinats, les imantacions dels blocs ja no s'utilitzen com a criteri d'ordenació. Aquestes agrupacions de blocs disminueixen el nombre de permutacions possibles a fer i agilitzen el procés de muntatge.

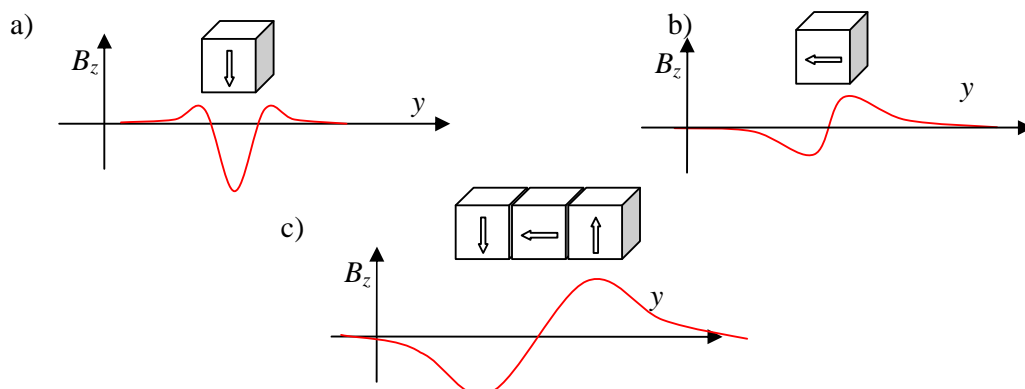


Figura 25: Esquema dels camps verticals generats pels blocs magnetitzats a) verticalment, b) longitudinalment i c) d'un conjunt de 3 blocs.

Hi ha una altra raó per agrupar els blocs, que està relacionada amb la manera com es caracteritzen els mòduls de blocs. Per tal de caracteritzar els mòduls es mesuren les integrals de camp d'aquests amb el fil fix tibant. Tal i com es pot veure a la Figura 25, les integrals de camp dels blocs orientats verticalment (blocs tipus A) són molt més grans que les dels blocs orientats longitudinalment (blocs tipus B). A l'hora de mesurar els blocs A es comet un error absolut major. Si s'agrupen els blocs en grups en que sempre hi hagi dos blocs A amb imantació oposada hi haurà cancel·lació de les integrals. D'aquesta manera, en la mesura de les integrals, només hi haurà contribucions netes provinents dels errors d'imantació dels blocs.

Per a cada mòdul es mesuren les integrals $I_x(x, z = 0)$ i $I_z(x, z = 0)$ en el pla mig de l'ondulador. Un cop mesurats tots els mòduls, comença el procés d'ordenació. Cada cop que s'afegeix un mòdul es mesuren les integrals $I_x(x, z = 0)$ i $I_z(x, z = 0)$ de l'agrupació de mòduls que hi hagi i

⁶³ T. Tanaka and H. Kitamura, *Effective initial sorting of undulator magnets*, Rev. Sci. Instr., vol. 71, 2000, p. 3010-3015.

es decideix quin mòdul afegir calculant quin cancel·la millor les integrals del conjunt muntat fins al moment.

A l'ESRF el procés de muntatge consumeix molt més temps que en el cas d'Elettra. En contrapartida, el resultat és molt més acurat, ja que sistemàticament té en compte la interacció entre els blocs veïns a causa de la permeabilitat. La trajectòria i l'error de fase òptica no es tenen en compte ni es corregeixen a mesura que es munta la renglera d'imants, però l'acció combinada d'escollir adequadament els blocs que formen els mòduls i la cancel·lació de les integrals a cada període assegura una bona periodicitat, i per tant que l'error de fase òptica sigui petit.

2.2.2.3 Tipus d'ordenació a BESSY

L'estratègia seguida a BESSY consisteix en mesurar tant les imantacions dels blocs com les integrals de cada un d'aquests.⁶⁴ L'algorisme utilitzat per a optimitzar la disposició dels blocs és també el *Simulated annealing*. La funció de mèrit utilitzada en l'optimització té diverses parts, algunes calculades a partir de les imantacions dels blocs, i d'altres a partir de les integrals. Com que a partir de les imantacions es poden calcular les integrals, per restar ambigüitat, en la funció de mèrit es fan servir per separat les integrals calculades a partir de la imantació i les mesures directament.

Es tracta d'una estratègia a mig camí entre les d'Elettra i l'ESRF, consumeix molt més temps que la utilitzada a Elettra, però la descripció de les inhomogeneïtats dels blocs és millor. En comparació a l'estratègia seguida a l'ESRF, és més ràpida, però contràriament a aquest, l'ordenació no té en compte la interacció entre els blocs amb l'efecte de la permeabilitat.

2.2.2.4 Altres tipus d'ordenació

En aplicar-se a onduladors basats en tecnologies diferents, existeixen diverses variants dels mètodes que hem esmentat. En casos de molt alta inhomogeneïtat, es mesuren tant el camp magnètic com les integrals dels blocs.⁶⁵ Per a onduladors amb blocs molt grans, sovint no es possible construir-los amb prou homogeneïtat, per això es fan servir sub-blocs més petits de manera que es realitza l'ordenació en dues fases: primer s'ordenen els sub-blocs per a formar

⁶⁴J. Bahrtdt et al., *Magnetic field optimization of permanent magnet undulators for arbitrary polarization*, Nucl. Instr. and Meth. A 516 (2004) 575-585.

⁶⁵B. Diviacco, *Performance Optimization of Pure Permanent Magnet Undulators*, in Proceedings of the 1993 IEEE PAC, p. 1590-1592.

els blocs i després s'ordenen els blocs (formats per conjunts de sub-blocs).⁶⁶ En el cas d'onduladors híbrids, sovint els blocs es mesuren en diferents posicions però acompanyats per diverses peces de ferro.⁶⁷ Existeixen també mètodes d'ordenació basats en la mesura de integrals per parts, de forma que es poden tenir en compte efectes sobre l'error de fase òptica sense mesurar el camp magnètic.⁶⁸ També cal mencionar mètodes basats en algorismes d'ordenació més elaborats com els basats en mètodes genètics.⁶⁹

2.2.3. Tècniques de Correcció

La correcció o *shimming* en anglès, es realitza un cop muntada la renglera. Un cop escollida i implementada una ordenació per als blocs, per norma general, l'ondulador encara no compleix els requisits per ser instal·lat en l'accelerador. Les integrals, la trajectòria i l'error de fase òptica normalment no són prou satisfactòries. En aquest apartat descriurem un seguit de tècniques i procediments estàndard utilitzats per corregir els defectes d'un ondulador un cop muntat.

2.2.3.1 Correcció amb peces de ferro

La correcció s'efectua adherint petites làmines de ferro sobre la cara dels imants que dona al feix d'electrons.⁷⁰ Segons si les làmines es col·loquen sobre imants imantats verticalment o sobre els imantats longitudinalment, s'aconsegueix augmentar o bé disminuir el camp en una zona determinada, respectivament per fixar-ne la posició s'han d'utilitzar substàncies adhesives resistents a la radiació. En el cas de onduladors PPM, aquestes peces de ferro introdueixen no linealitats que afecten de formes diferents el camp magnètic depenent de l'entreferro i la fase de l'ondulador. Per a entreferos molt petits, aquesta tècnica no és viable, ja que no és possible adherir peces suficientment grans com per a corregir els errors típics.

⁶⁶ W.V. Hassenzahl, et al., *Insertion devices for the Advanced Light Source at LBL*, in Proceedings of the 1989 PAC, p. 1222-1224.

⁶⁷ I. Vasserman et al., *Measurement, sorting and tuning of LCLS undulator magnets*, Nuc. Instr. and Meth. A 483 (2002) p. 383-387.

⁶⁸ T. Tanaka and H. Kitamura, *Effective initial sorting of undulator magnets*, Rev. Sci. Instr., vol. 71, 2000, p. 3010-3015.

⁶⁹ M. Ryytnäinen, *Characterisation and optimisation of hybrid insertion devices using genetic algorithms*, University of Helsinki, Report Series in Physics, HU-P-D122, 2004.

⁷⁰ J. Chavanne, E. Chinchio, P. Ellaume, *New techniques for the development of high quality undulators for synchrotron sources*, ESRF internal note ESRF-SR/ID-89-27, September 1989.

2.2.3.2 Correcció per desplaçament de blocs

Aquesta tècnica també s'anomena correcció virtual.⁷¹ La correcció s'efectua desplaçant vertical o horitzontalment alguns blocs, escollits en funció de l'efecte que tindran sobre el camp. En el cas d'onduladors PPM, la predicció de l'efecte d'aquests desplaçaments és lineal. L'efecte global de diversos desplaçaments serà igual a la superposició lineal de l'efecte de cadascun d'ells per separat. Això possibilita fer servir un algorisme per decidir *a priori* quina és la millor distribució de desplaçaments per aconseguir la correcció, sense necessitat de mesurar l'ondulador cada vegada que es fa un desplaçament. Per a entreferros molt petits, aquesta tècnica no es viable, ja que no és possible realitzar desplaçaments prou grans com per a corregir els errors típics.

2.2.3.3 Correcció dels multipols de les integrals

Les tècniques que hem esmentat fins ara tenen la particularitat de poder corregir el camp de l'ondulador al llarg del seu eix i , per tant, són tècniques eficients per tal de minimitzar tant l'error de fase òptica com les integrals. Ara bé, a causa de la grandària dels blocs, les tècniques anteriorment descrites no són eficients per minimitzar la dependència a la coordenada transversal x de la integral de camp. Per aconseguir una major resolució en la correcció de la variació de les integrals al llarg de l'eix x s'utilitzen una sèrie d'imants permanents en els extrems de l'ondulador.⁷² Aquesta tècnica no permet corregir errors de fase o bé desviacions del feix que tinguin lloc en la zona central del ondulador, però es molt efectiva per corregir els multipols de les integrals (secció 1.4.1.2).

Els imants permanents, o *magic fingers* en anglès, utilitzats per fer aquesta correcció es mantenen a una certa distància entre ells i de l'ondulador per assegurar una bona predictibilitat en la correcció de les integrals. Hi ha moltes variants en la forma i disposició dels petits blocs magnètics. Diferenciem entre les que respecten la simetria baix-dalt (simetria respecte al pla $z=0$) i principi-final (simetria al pla $y=0$) i les que no. La diferència essencial rau en el fet que en respectar la simetria baix-dalt es pot actuar independentment sobre les components de les integrals I_z i I_x (a $z=0$). En respectar la simetria principi-final es

⁷¹ G. Tosin et Altr., *EPU assembly based on sub-cassettes magnetic characterization*, Proceedings of EPAC 2006, Edinburgh, p. 3107-3109.

⁷² B. Diviaco et altr., *Multipole trim magnets for field integral correction of Apple type undulators*, Sincrotrone Trieste internal note, ST/SL-04/01, April 2004.

pot actuar independentment sobre les components de la primera integral i les de la segona (projectada a $y=0$).

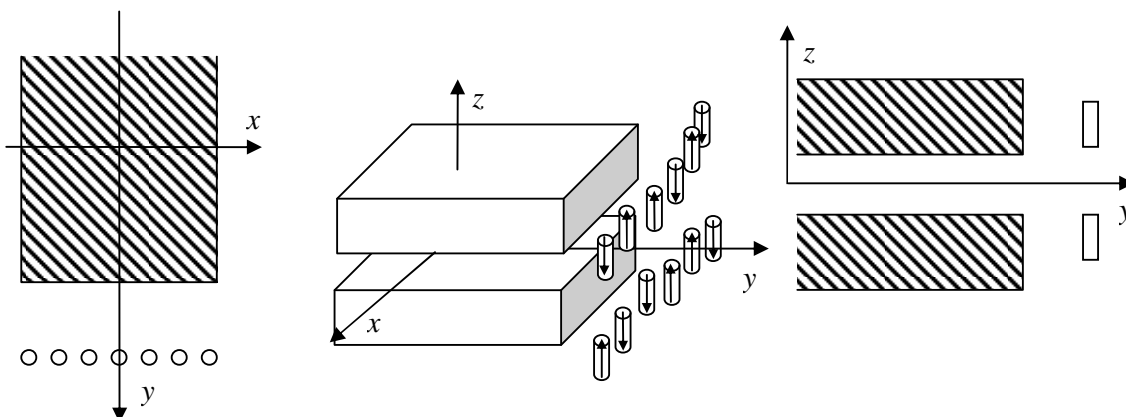


Figura 26: Esquema de la disposició dels imants (cilíndrics en aquest cas) per la correcció dels multipols de les integrals de camp.

El fet de tenir una bona predictibilitat fa que aquesta tècnica sigui molt adequada per ser utilitzada dins d'un algorisme d'optimització. Els paràmetres a optimitzar són la direcció de la imantació de cada *dit màgic*, la seva separació respecte al pla de l'ondulador i, fins i tot, les seves dimensions.

2.2.4. Correcció activa

Totes aquestes tècniques acosten el funcionament magnètic de l'ondulador al cas ideal. No obstant, sempre existeix una certa dependència amb la fase o l'entreferro. Això suposa que la trajectòria dels electrons dins del dispositiu i/o la seva dinàmica depèn de la fase o l'entreferro. Perquè l'òrbita dels electrons sigui estable cal que aquesta sigui tancada i, per tant, no es poden permetre aquest tipus de variacions. Per evitar-ho s'instal·len solenoides a banda i banda de l'ondulador, que permeten corregir-ne dinàmicament el comportament, de forma que pot canviar de mode d'operació mentre els electrons passen a través seu sense que llur estabilitat es vegi compromesa. Això és el que s'anomena correcció activa, per diferenciar-la de les tècniques descrites anteriorment, que formen part de la correcció passiva. Cal tenir en compte, però, que la correcció activa només actua sobre una posició horitzontal donada, típicament a $x=0$. És a dir, que en el perfil de les integrals al llarg de l'eix x , la correcció activa baixa o puja les corbes $I_x(x)$ i $I_z(x)$ fins aconseguir que a $x=0$ no hi hagi contribució.

CAPÍTOL 3

CAS PRÀCTIC 1: DISSENY D'UN ONDULADOR APPLE-II:

En aquest capítol afrontarem el disseny d'un ondulator Apple-II partint des de diferents restriccions. Essencialment es tracta de trobar el període i les dimensions de bloc adequades per a la cel·la central. Farem un disseny lliure, un disseny tenint en compte els condicionants tècnics i finalment un disseny amb limitacions específiques (sobretot les forces magnètiques). En cadascun dels tres casos aplicarem una tècnica d'optimització diferent, adequada a les condicions particulars de cada cas. Un cop acabat el disseny de la cel·la central, realitzarem també el disseny de les terminacions. Per acabar farem un recull de les propietats del model teòric pel que fa al seu efecte sobre els electrons i a la radiació que aquests emeten al passar per l'ondulator.

3. CAS PRÀCTIC 1: DISSENY D'UN ONDULADOR

APPLE II

3.1. Introducció

En aquest capítol desenvoluparem el disseny d'un ondulator tipus Apple II. Es tracta d'un cas real, l'objectiu del qual és triar un període apropiat, dimensionar els blocs de l'ondulator i la llargada d'aquest per satisfer les condicions del rang d'energies (dels fotons) desitjades. Per fer-ho es plantegen tres situacions pel que fa a les condicions que ha de complir el disseny. En el primer mètode, suposarem que no hi ha restriccions respecte a les forces que pot aguantar el suport mecànic de l'ondulator. En el segon mètode, les forces involucrades en el moviment dels arranjaments magnètics es tenen en compte, però no s'estableix cap límit concret per a elles. En el tercer mètode, es limiten les forces que pot aguantar l'estructura mecànica.

3.1.1. Requeriments en el funcionament de l'ondulator pel que fa al rang d'energies

El rang d'energies de la llum emesa per l'ondulator ha d'abastar des de 99 eV , que correspon a la vora d'absorció K del Si, a 2000 eV , que correspon a la vora d'absorció $M_{4,5}$ més alta de les terres rares.

No obstant, prendrem 80 eV com a energia mínima per les següents raons:

- I. Aquesta va ser l'especificació dels usuaris per a l'energia mínima de la llum polaritzada circularment.
- II. A més, dona un marge de seguretat molt ampli per a qualsevol possible error en la imantació dels imants o en el posicionament dels arranjaments magnètics.

- III. Assolir 80 eV en el mode circular assegura arribar fins a 99 eV en el mode de polarització vertical. En l'hipotètic cas que calgués estudiar les propietats magnètiques del *Si*, es podrien dur a terme experiments de difracció magnètica lineal (diferència entre els espectres d'absorció en polarització vertical i horitzontal) sense rotar la mostra.

En el cas de la polarització lineal, per cobrir tot el rang d'energies especificat cal utilitzar el $1r$ i el $3r$ harmònic de la radiació. En el cas de la llum polaritzada circularment, cal el $1r$ i el $2on$ harmònic. El flux de fotons per al segon harmònic de la radiació polaritzada circular és molt menys intens i menys polaritzat que el primer harmònic. Per aquest motiu s'intenta maximitzar el rang d'energies cobertes pel primer harmònic. Això ens servirà més endavant com a un criteri senzill per realitzar l'optimització: maximitzarem el flux que s'emet en el primer harmònic de polarització circular a 1100 eV . Aquesta energia correspon a les vores d'absorció $M_{4,5}$ del *Sm* i queda per sobre de les vores d'absorció $L_{2,3}$ dels metalls de transició, que són el principal centre d'interès per als futurs usuaris del dispositiu que estem dissenyant.

3.2. Disseny lliure segons requeriments científics

3.2.1. Introducció

En aquesta primera aproximació al problema no suposarem cap limitació pel que fa a les forces magnètiques. Suposarem també que la secció dels blocs magnètics és quadrada (de manera que tindrem més versatilitat en l'ordenació i arranjamant). Escollirem el període i la grandària del bloc adient tal que el camp magnètic sigui òptim i s'arribi a l'energia mínima de 80 eV . La longitud i l'entreferro mínim de l'ondulador vindran fixats per factors externs. Per exemple, la cambra de buit que ha de situar-se entre els arranjamants d'imants pel que fa a l'entreferro, o la longitud òptima pel que fa a les bombes de buit i al sistema de mesura del camp magnètic de l'ondulador. Així en aquest cas es va considerar un ondulador de 11.5 mm d'entreferro mínim i 2 m de llargada.

3.2.2. Optimització del període

Tal i com s'enfoca l'optimització en aquest cas, només hi ha dos paràmetres independents: el costat dels blocs i el període. Tenim, però, una restricció, i és que a entreferro mínim l'energia ha de correspondre a 80 eV . El nostre primer objectiu serà construir la corba $K_{opt}(\lambda_0)$, és a dir,

la corba que per a cada període dona el valor òptim del paràmetre K de l'ondulator. Per optimitzar K farem servir el gruix del bloc i , d'aquesta forma, per a cada valor de λ_0 tenim un valor de K igual a $K_{opt}(\lambda_0)$. D'aquesta corba, només un punt complirà la restricció d'arribar a 80 eV a l'entreferro mínim: el punt d'intersecció amb la corba $K_{Emin}(\lambda_0)$. Aquesta corba ve donada per l'equació (1-10) amb $\theta=0$ i $n=1$:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (3-1)$$

Per a l'entreferro mínim aquesta equació esdevé:

$$\frac{hc}{E_{\min}} = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_{E\min}^2}{2} \right) \rightarrow K_{E\min}(\lambda_0) = \sqrt{\frac{hc4\gamma^2}{E_{\min}\lambda_0} - 2} \quad (3-2)$$

Així doncs, l'optimització es fa en dos passos: en primer lloc és busca la corba $K_{opt}(\lambda_0)$ i després la intersecció d'aquesta corba amb la $K_{Emin}(\lambda_0)$.

3.2.2.1 La corba $K_{opt}(\lambda_0)$

El valor màxim de K per a un període fixat es donaria si els blocs fossin infinitament grans. Ara bé, l'augment de camp magnètic que proporciona l'increment de les dimensions dels blocs decreix exponencialment amb aquestes. Per expressar la variació relativa del paràmetre K en funció de les dimensions dels blocs, farem servir la següent funció:

$$\eta(\alpha) = \frac{dK(\alpha)}{d\alpha} \frac{\alpha}{K(\alpha)} \quad (3-3)$$

Anomenarem a aquesta funció efectivitat magnètica. α representa els paràmetres que descriuen la geometria dels blocs. En aquest cas, donat que hem fixat d'entrada la secció dels blocs com a quadrada i el període és la variable de la funció $K_{opt}(\lambda_0)$, α només és funció de la longitud del costat dels blocs.

El criteri d'optimització es defineix en termes de la funció $\eta(\alpha)$. Establim que el disseny és òptim quan l'efectivitat magnètica té un cert valor. Així, l'optimització es converteix en la cerca del zero de la funció $\eta(\alpha) - \eta_0$, on η_0 es el valor òptim de l'efectivitat magnètica. En el nostre cas, α serà l_x^2 , on l_x és l'amplada del bloc magnètic segons la direcció x . A la *Figura 27* hi hem representat l'efectivitat magnètica i el paràmetre K per a un període de 80 mm (en un abús de llenguatge, anomenem K a K_{eff} (veure equació (1-37))).

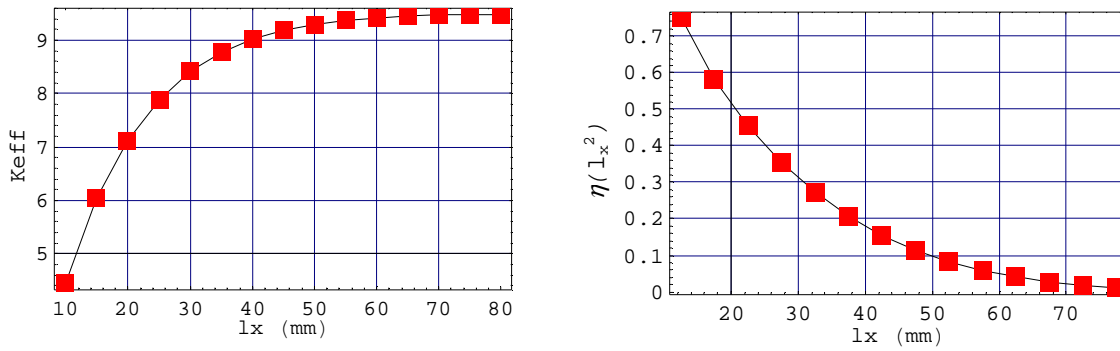


Figura 27: K i $\eta(lx^2)$ en funció de les l_x per a un període 80 mm.

Donada l'evolució de les gràfiques de la Figura 27, escollim una efectivitat del 10% ($\eta_0 = 0.1$) com a valor òptim. Considerarem doncs que, per a valors menors de η , no val la pena afegir més material. De la mateixa manera, per a valors majors, afegir material encara és rendible des del punt de vista magnètic.

L'optimització s'ha dut a terme per a una fase igual a 0 , és a dir, calculant K per al component vertical del camp magnètic (polarització horitzontal). La component horitzontal del camp magnètic es genera per la separació horitzontal entre arranjaments magnètics, i depèn menys de les dimensions dels blocs.

3.2.3. Resultats

Es va limitar l'estudi al rang de períodes entre 50 mm i 80 mm. Les corbes $K_{opt}(\lambda_0)$ i $K_{Emin}(\lambda_0)$ es mostren a la Figura 28.

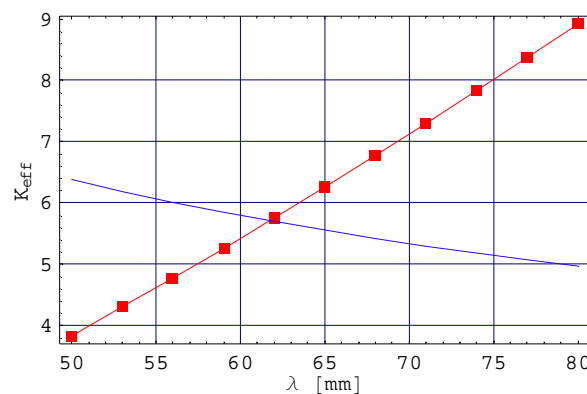


Figura 28 : Corbes $K_{opt}(\lambda_0)$ (en vermell) i $K_{Emin}(\lambda_0)$ (en blau) en el rang de períodes des de 50 mm a 80 mm.

Obtenim com a període òptim 62 mm, amb una amplada (i alçada de bloc) $l_x = l_z = 42$ mm.

3.3. Introducció de condicionants tècnics al disseny

3.3.1. Introducció

En l'apartat 3.2 hem utilitzat l'efectivitat magnètica com a única funció de mèrit per a optimitzar el període de l'ondulator. No hem tingut en compte limitacions provinents de la rigidesa del suport mecànic o de la potència de la radiació màxima que pot admetre el sistema òptic que ha de canalitzar la radiació que es genera a l'ondulator. Però l'amplada per als blocs que hem obtingut a l'apartat anterior, juntament amb la longitud triada per a l'ondulator, donen lloc a forces magnètiques realment grans, superiors a 3 tones segons la direcció vertical.

En aquest segon mètode, l'optimització es realitza tenint en compte les forces magnètiques a què estarà sotmès el mecanisme de suport. Cal trobar una relació de compromís minimitzant les forces magnètiques i maximitzant el flux de fotons. En aquest cas, considerarem l'opció de blocs rectangulars. Aquesta opció, tot i que pot ajudar a optimitzar la distribució de forces, disminueix el número de permutacions possibles que es poden fer en el procés d'ordenació, ja que els blocs perden un grau de simetria. Com en el cas anterior, considerarem fixada la longitud de l'ondulator a 2 m . També, com en el cas anterior, l'entreferro mínim el fixem a 11.5 mm .

3.3.2. Metodologia

En aquest cas, seguirem una estratègia similar a la del mètode 1, però en comptes d'una corba $K_{opt}(\lambda_0)$ que sigui òptima des del punt de vista de l'eficiència magnètica, generarem corbes a força constant. És a dir, per a cada període, escollirem unes dimensions dels blocs que facin que la força total en una determinada direcció tingui un cert valor, el mateix per a tota la corba.

3.3.2.1 Les corbes de K a força constant

Per portar a terme el nostre estudi, determinarem la dependència del valor del paràmetre K de l'ondulator per a un cert rang de forces. Calcularem les corbes a força constant des de 4 kN fins a 40 kN en increments de 1 kN . Escollim aquest rang perquè conté els valors típics de les forces d'un ondulator Apple II. A cada una de les corbes amb força constant, l'anomenarem $K_i(\lambda_0)$.

3.3.2.1.1 Tres forces

Hi ha diverses forces involucrades en el moviment dels arranjaments magnètics, les més importants i representatives de les quals són:

- I. F_s : Força magnètica longitudinal sobre la biga fixa, en el mode antiparal·lel. En general, ens referirem al valor màxim d'aquesta força, que es produeix a 45° de polarització de la llum i a entreferro mínim.
- II. F_z : Força magnètica vertical sobre els dos arranjaments superiors, en el mode paral·lel. Ens referirem també al valor màxim d'aquesta força que es produeix a polarització horitzontal de la llum i a entreferro mínim.
- III. F_x : Força magnètica horitzontal sobre l'arranjament mòbil, en mode paral·lel. Ens referirem també al valor màxim d'aquesta força que es produeix a polarització vertical i a entreferro mínim.

A la *Figura 29* observem la variació de les forces descrites anteriorment amb la fase de l'ondulator i l'entreferro.

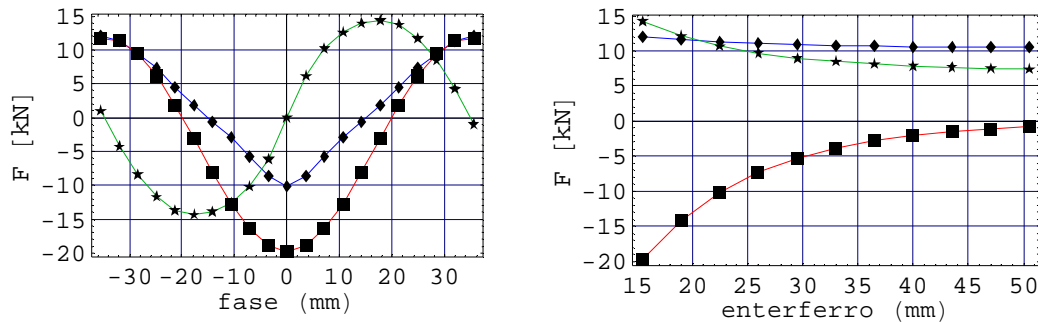


Figura 29: Forces F_x (línea blava), F_s (línea verda) i F_z (línea vermella) en funció de la fase de l'ondulator (esquerra) i de l'entreferro (dreta). Les dades corresponen a la simulació d'un HU71 amb 15.5 mm d'entreferro i 1.7 m de llarg.

F_s i F_z s'han de tenir en compte per dimensionar els motors encarregats de realitzar el moviment de l'entreferro i de la fase de l'ondulator. F_z és la de major magnitud, però està controlada per dos motors, i té un comportament monòton amb el gap. Finalment, F_x no es controla per cap motor, sinó que produeix la deformació a les bigues que descriurem a l'apartat 4.2.2. L'única forma d'aconseguir que aquest efecte no sigui plàstic, i per tant no repetitiu, és fent els suports prou resistents o F_x prou petita.

3.3.2.1.2 Força de torsió

A part de les tres forces que hem esmentat, existeixen altres forces, més febles, però que també poden tenir conseqüències si no es tenen en compte. El parell de forces que apareix quan es canvia la fase de l'ondulator n'és un bon exemple. Es tracta d'un moment que és petit a l'ondulator ideal, però que pot esdevenir important si aquest perd en molt les simetries a l'hora d'implementar-lo. És més important en el mode antiparal·lel quan, de forma natural, l'asimetria del sistema és major. Per a un ondulator com el que estem considerant, d'uns 2 m de longitud, el parell de forces pot ser, en el cas ideal, de fins a 100 N m . En un cas real, els errors de muntatge o de desalineament de les bigues poden incrementar aquest valor fins a fer-lo molt perjudicial pel que fa a la deformació de l'estructura i, en conseqüència, al comportament de les integrals en canviar la fase. La pitjor de les conseqüències pot ser una resposta no elàstica del sistema de suport, cosa que suposaria la impossibilitat de predir el canvi de les integrals amb la fase i, en el pitjor dels casos, conduiria a un ondulator no apte per operar dins el sincrotró.

3.3.2.1.3 Actuació de les forces sobre les bigues

Hem explicat en quines polaritzacions es produeixen els valors màxims de les forces per a cadascuna de les direccions. En aquesta secció indicarem, més en detall, com actuen aquestes forces a partir de la distribució dels blocs magnètics.

3.3.2.1.3.1 Força horitzontal

La contribució principal a aquesta força la produeixen els parells de blocs enfrontats. La *Figura 30* mostra la distribució de forces horitzontals en cada bloc per a diferents fases de l'ondulator.

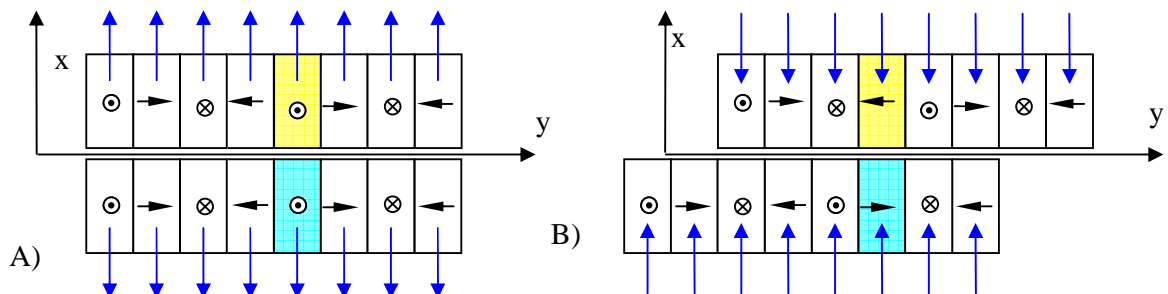


Figura 30: Vista esquemàtica dels arranjaments magnètics (els dos superiors) per a dos valors diferents de la fase: A) fase 0 i B) fase $\lambda_0/2$. Les forces horitzontals es representen amb fletxes en blau i les direccions de imantació dels blocs amb fletxes en negre. Cal notar que aquesta força es simètrica respecte al canvi de signe de la fase. La major contribució a aquesta força sobre un bloc determinat (en groc) la provoca el seu veí a l'arranjament adjacent (en blau).

Hi ha d'altres contribucions a aquestes forces, com les dels veïns més allunyats o les dels blocs dels arranjaments inferiors (ara estem considerant els blocs dels arranjaments superiors). La influència relativa dels blocs dels arranjaments inferiors depèn de la rectangularitat dels blocs.

Com hem dit, no hi ha motors que controlin el moviment segons la direcció d'aquesta força, ni tampoc cap regla òptica que mesuri en temps real la deformació de les bigues. Així doncs, per assegurar que no hi hagi desviacions massa grans i que aquestes siguin elàstiques (repetibles) cal un disseny mecànic adequat a les forces que s'hi produeixen. Per contenir l'atracció i/o separació de la biga mòbil, es fa servir una guia amb coixinets. La *Figura 31* mostra, en secció, la implementació d'aquest sistema en el cas de l'ondulator Apple II construït a Elettra. Donat que aquest tipus de sistemes mecànics tenen un cert joc, és essencial que les guies es precarreguin abans de ser implementades, per garantir que el suport mecànic sigui estable.

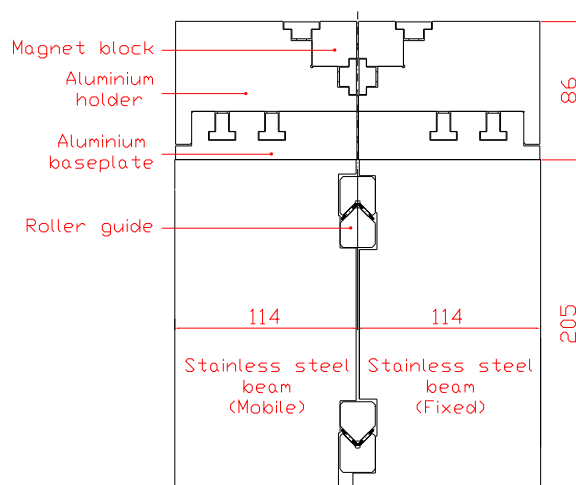


Figura 31: Secció del disseny mecànic d'encaix entre les dues rengleres i bigues inferiors en el cas de l'ondulator construït a Elettra. Es mostren les guies amb coixinets.

3.3.2.1.3.2 Força longitudinal

La contribució principal d'aquesta força sobre un bloc determinat la produeixen els dos blocs més propers que tenen la seva imantació en la mateixa direcció. De la mateixa manera que en el cas anterior, els imants més allunyats també tenen una certa contribució, així com els dels arranjaments inferiors (contribució que depèn de la rectangularitat dels blocs). La *Figura 32* mostra la distribució per blocs de les forces en dues posicions de la fase diferents.

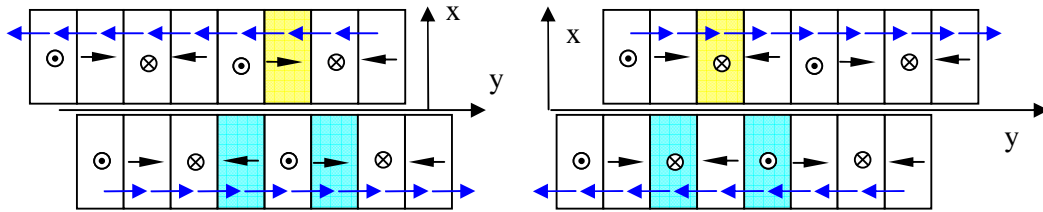


Figura 32: Vista esquemàtica dels arranjaments magnètics per a dos valors diferents de la fase: A) A fase $-\lambda_0/4$ i B) a fase $\lambda_0/4$. Les forces longitudinals es representen amb fletxes en blau i les direccions de imantació dels blocs amb fletxes en negre. Cal notar que aquesta força és asimètrica respecte al canvi de signe de la fase. La major porció d'aquesta força sobre un bloc determinat (en groc) la provoquen el seus veïns a l'arranjament adjacent (en blau).

3.3.2.1.3.3 Força vertical

La contribució principal a aquesta força prové dels veïns més propers en els arranjaments oposats verticalment. La *Figura 33* mostra la distribució esquemàtica de la força entre blocs.

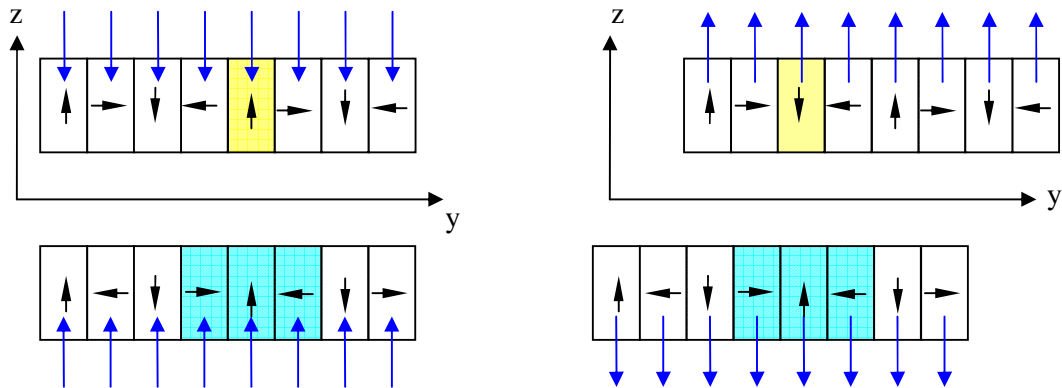


Figura 33: Vista esquemàtica dels arranjaments magnètics (superiors i inferiors) a fase 0 i a fase $\lambda_0/2$. Les forces verticals es representen amb fletxes en blau i les direccions de imantació dels blocs amb fletxes en negre. La major part d'aquesta força sobre un bloc determinat a la renglera superior (en groc) la provoquen el seus veïns a l'arranjament inferior (en blau).

3.3.2.1.3.4 Força de torsió

Per calcular el parell de forces sobre les bigues superiors cal calcular la força de les dues bigues inferiors sobre les superiors. El moment es produeix segons la direcció x , i el parell és màxim a fase $\lambda_0/2$. En realitat, es pot veure que en el mode antiparal·lel, les úniques forces que produeixen moment són les que provenen de les rengleres que es mouen, que estan en diagonal l'una respecte de l'altra, tal i com es mostra a la *Figura 34*. En el mode paral·lel, com que els arranjaments sempre queden encarats, no hi ha cap moment resultant.

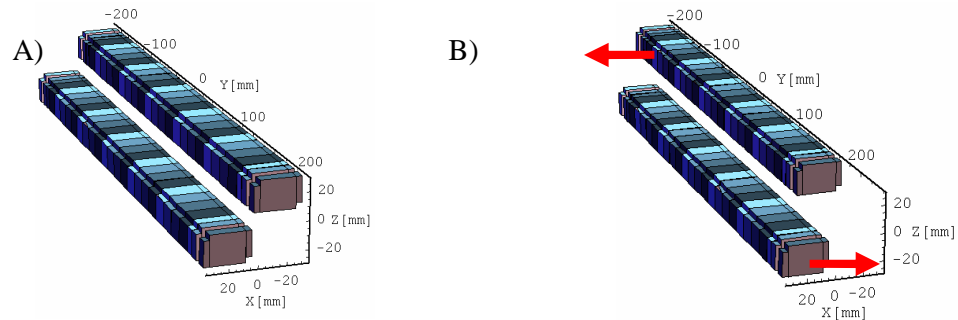


Figura 34: Parelles d'arranjaments d'imants que produeixen moment A) Mode paral·lel i B) Mode antiparal·lel.

3.3.2.1.4 Algunes clarificacions respecte a la polarització

Arribats a aquest punt cal fer uns aclariments respecte als estats de polarització (posicions de la fase i modes d'operació) en què es calculen les forces, les constants K de l'ondulator i els fluxos de fotons.

El primer aclariment és referent a les forces. Tot i que les unitats de F_x , F_s i F_z són les mateixes, no podem comparar directament els valors de les forces entre si. Segons la direcció en què s'aplica la força, l'efecte de cadascuna d'elles és molt diferent. En l'optimització, cal tenir-les en compte simultàniament totes tres.

Per altra banda, el paràmetre K de l'ondulator i els fluxos de fotons es calculen en el mode circular. La raó és que el requeriment en el rang d'energies que ha de cobrir l'ondulator està donat per a la polarització circular: 80 eV i 1100 eV . Així doncs, quan ens referim a les corbes $K_i(\lambda_0)$ per a la força F_x , per exemple, volem dir que per a un període λ_0 , per al gruix del bloc que fa que en el mode vertical la força F_x (valor màxim) valgui F_b , en el mode circular el valor del paràmetre de l'ondulator és $K_i(\lambda_0)$.

3.3.2.2 Energia mínima dels fotons

Per a cada força, $K_i(\lambda_0)$ s'intersecarà amb la corba $K_{Emin}(\lambda_0)$ en un cert punt. La *Figura 35* mostra gràficament aquest procediment per a cada una de les forces principals F_x , F_s i F_z .

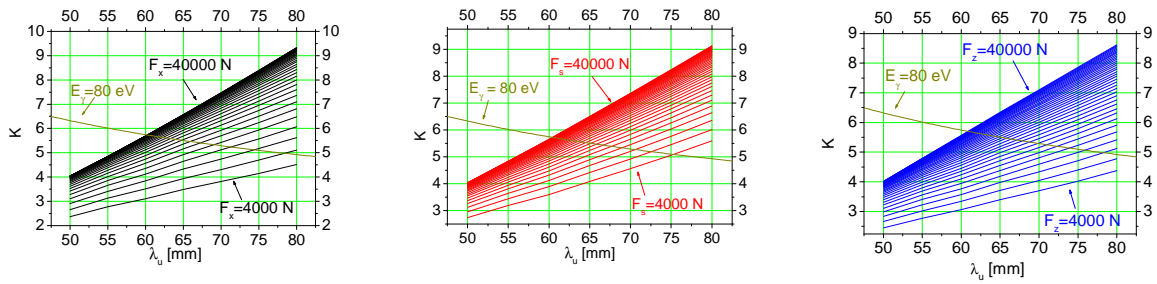


Figura 35: En negre es mostren les corbes $K_i(\lambda_0)$ per a F_x , en vermell per a F_s i en blau per a F_z . En tots els casos, els valors de les forces van des de 4kN fins a 40 kN. En verd fosc, la corba $K_{Emin}(\lambda_0)$ (K i λ_0 per assolir 80 eV a entreferro mínim).

La Figura 36 mostra els punts d'intersecció per a cada valor de la força entre 4 kN i 40 kN, i la Figura 37, l'ample de bloc corresponent.

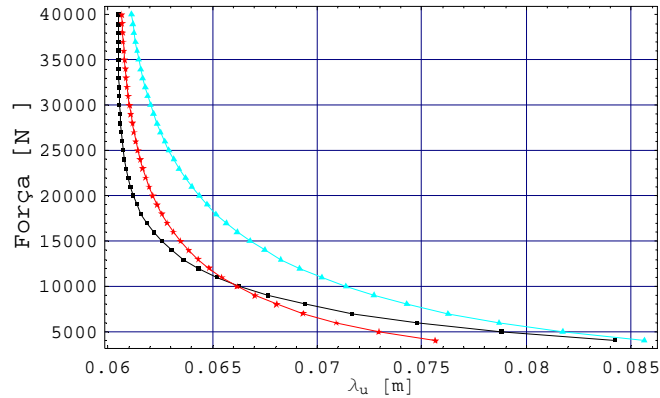


Figura 36: Les forces magnètiques més grans en cada direcció, F_s (vermell), F_x (negre) i F_z (blau) per a ondulators que emeten a una energia mínima de 80 eV en mode circular, en funció del període.

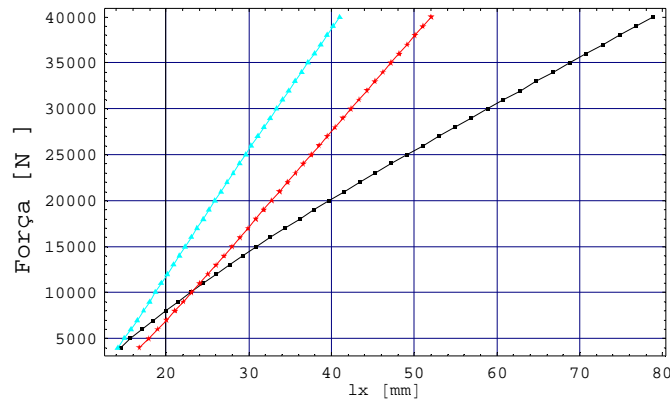


Figura 37: Les forces magnètiques més grans en cada direcció, F_s (vermell), F_x (negre) i F_z (blau) per a ondulators, que emeten a una energia mínima de 80 eV en mode circular, en funció de l'ample dels blocs magnètics.

En les corbes de la *Figura 35*, veiem que com més gran és la força magnètica, menor es el període, però major és el paràmetre K . Ara bé, a cada increment de la força, la variació de K i del període són menors. Això indica que el flux augmenta amb la força però que arriba un punt en què se satura.

3.3.2.3 Flux a l'energia màxima del rang d'utilització

En aquest apartat calcularem el flux de fotons per a cadascun dels punts de les interseccions que hem trobat a l'apartat anterior. D'aquesta manera en una sola gràfica podrem comparar els efectes de triar un o altre disseny sobre els fotons que es produeixen i les forces involucrades en el disseny. Com ja hem explicat, compararem fluxos (parlarem sempre del flux total al con central en fotons/s/0.1%BW) del primer harmònic a 1100 eV . Fem servir com a funció de mèrit el flux de fotons calculat a l'energia més alta del rang perquè és el valor més sensible al període de l'ondulador. La *Figura 38* mostra els valors del flux en funció de les tres forces. L'esglaonament de les corbes en determinats punts està relacionat amb el canvi del nombre de períodes a mesura que va disminuint el període (augmenten les forces), ja que la longitud total de l'ondulador roman fixada en 2 m . El flux pot ser zero per a un cert conjunt de punts si el primer harmònic no arriba a 1100 eV : així succeeix en els casos en què la força vertical es limita a valors molt petits.

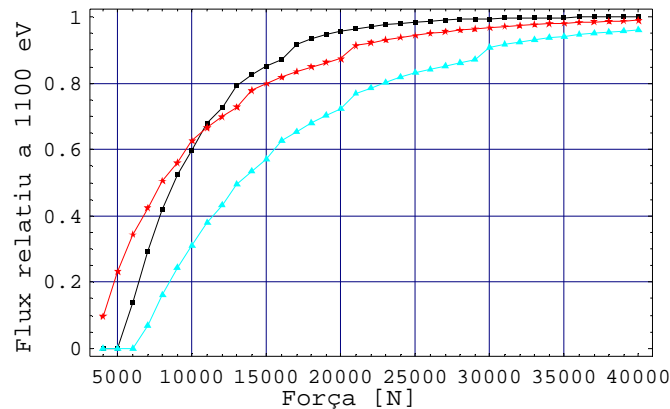


Figura 38: Flux relatiu de fotons integrat al primer harmònic (el valor de referència és $7.86 \cdot 10^{14}$ fotons/s/0.1%BW), per a un ondulator que a entreferro mínim té el primer harmònic a 80 eV , calculat a 1100 eV , com a funció de les tres forces magnètiques F_s (en vermell), F_x (en negre) i F_z (en blau).

3.3.2.4 Comparació amb altres dissenys

En aquesta secció presentem alguns dels dissenys més recents d'ondulators Apple II en altres laboratoris de llum de sincrotró. Cal tenir en compte que, en cada laboratori el disseny s'adapta als requeriments especificats pels usuaris i les restriccions pràctiques relacionades amb cada accelerador. La *Taula 1* conté dades sobre el disseny i les forces d'alguns dels Apple II més recents implementats arreu.

Instal·lació	ondulator	Secció del bloc	Long. [m]	F_x [kN]	F_s [kN]	F_z [kN]
		[mm x mm]				
Diamond	HU64	40 x 40	2.2	15	25	30
Spring-8	HU120	50 x 25	1.92	10	5	12
Soleil	HU80	28 x 28	1.6	11	12	18

Taula 1: Dissenys d'ondulators Apple II recents en altres laboratoris: El sincrotró anglès Diamond, el sincrotró japonès Spring-8 i el sincrotró francès Soleil.

En particular analitzarem amb una mica més de detall el disseny del nou Apple II per al sincrotró francès Soleil. Portarem el seu disseny al marc que hem descrit tot calculant corbes similars a les que hem calculat per al nostre disseny. La *Taula 2* en mostra els paràmetres més importants.

Paràmetre	magnitud
període	80 mm
longitud	1680 mm
Rang d'energia del primer harmònic	80-700 eV
gap	15.5 mm
Energia del feix d'electrons	2.75 GeV
Intensitat del feix d'electrons	0.5 A

Taula 2: Paràmetres per a l'Apple II de Soleil.

La *Figura 68* mostra les corbes de flux respecte de les forces resultants. El flux màxim és semblant al del nostre disseny, però el nostre ondulator és més llarg (té 2 m en comptes d'1.6 m), mentre que l'energia a la qual es calcula el flux és 700 eV en comptes de 1100 eV. En el seu disseny s'utilitza el 75% del màxim flux assolible, mentre que les forces magnètiques es mantenen per sota de 18 kN.

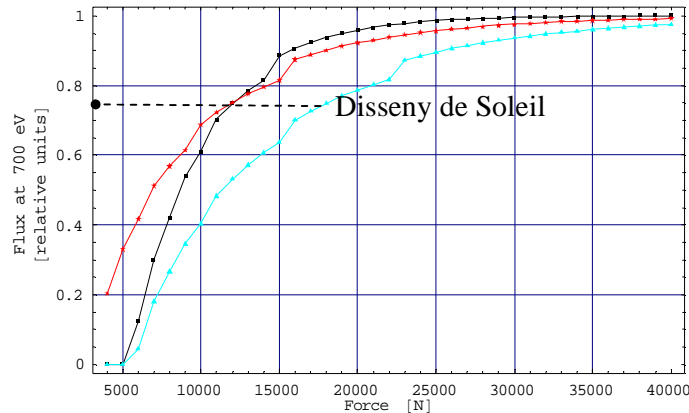


Figura 39: Flux de fotons integrat al con central del primer harmònic (el valor de referència és $7.30 \cdot 10^{14}$ fotons/s/0.1%BW), per a un ondulator que a entreferro mínim té el primer harmònic a 80 eV, calculat a 700 eV, com a funció de les tres forces magnètiques F_s (en vermell), F_x (en negre) i F_z (en blau).

Això posa de manifest el fet que sovint se sacrifica una part important del flux que potencialment l'ondulator pot emetre, en favor d'una reducció de les forces que aquest produeix. És a dir, per assegurar el funcionament de l'ondulator es prefereix no arriscar excessivament intentant maximitzar el flux.

3.3.2.5 Blocs rectangulars

La *Figura 40* mostra de forma esquemàtica el tipus de seccions que pot presentar l'ondulator si ens decidim per un disseny amb blocs rectangulars o quadrats.

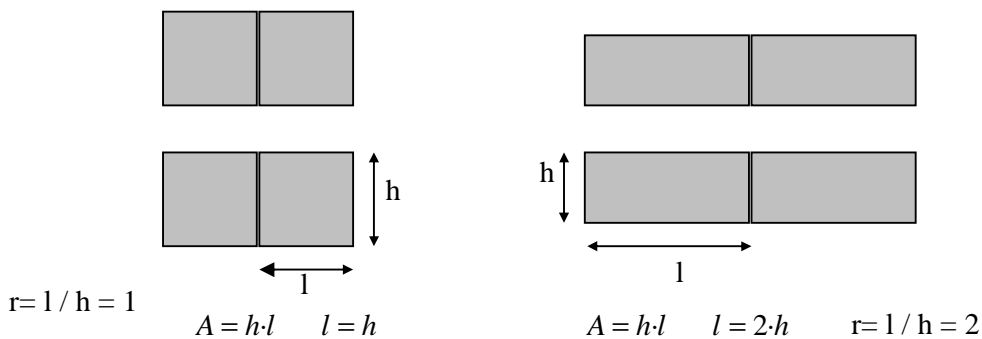


Figura 40: Esquema de la secció d'un ondulator Apple II en els dos casos extrems: quan $l=h$ i quan $l=2h$, sempre amb la mateixa àrea.

Alguns laboratoris com el CLS (acrònim del nom *Canadian light source*: sincrotró de Saskatoon, Canadà), ESRF o SPring-8 (nom del sincrotró de Sanyo Shinkansen, Japó) utilitzen blocs rectangulars en el disseny dels seus ondulators Apple II. Altres laboratoris com Elettra, Bessy i Soleil (nom del sincrotró de Paris, França) només han construït aquest tipus d'onduladors amb blocs de secció quadrada. Si mantenim el volum de material constant, i augmentem la rectangularitat r dels blocs (r =longitud/amplada), el paràmetre K té un màxim, F_x decreix però F_z creix.

La Figura 41 mostra la dependència de les forces magnètiques i el paràmetre K amb la rectangularitat r , a volum magnètic i període constant.

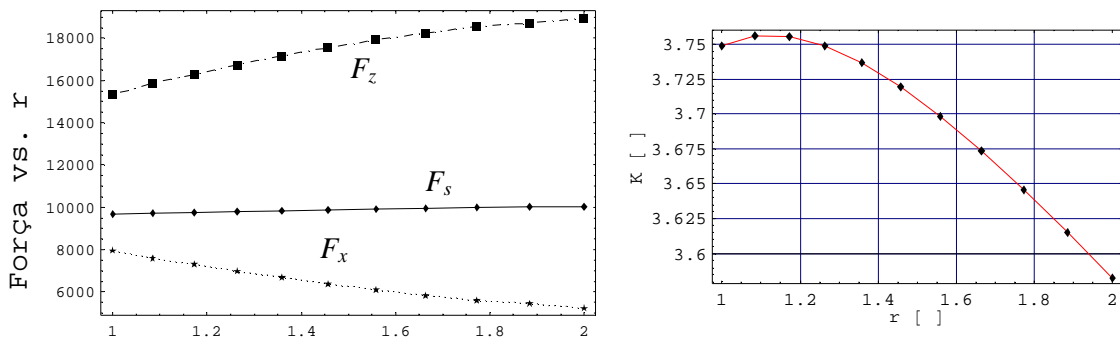


Figura 41: forces (F_x estrelles, F_s rombes i F_z quadrats) i paràmetre K en funció de la rectangularitat r a volum magnètic constant i període constant.

Quan augmenta la rectangularitat, la superfície d'interacció entre els blocs de les rengleres a la dreta i els de l'esquerra disminueix. És per aquesta raó que disminueix també la força horitzontal F_x . De forma equivalent, la força vertical F_z creix quan augmentem la rectangularitat. Com ja hem dit amb anterioritat, la força horitzontal pot ser particularment nociva.

Conforme el bloc es fa més rectangular, la distribució de material magnètic és tal que el camp al centre de l'ondulator disminueix, i això fa que, per a blocs molt rectangulars el paràmetre K tendeixi a zero. Per a valors de la rectangularitat prop d'1, hi ha un punt òptim en què el volum magnètic queda òptimament distribuït entorn a l'eix de l'ondulator.

3.3.2.5.1 Força, flux i rectangularitat

Per a valors de r grans, la superfície d'interacció entre els blocs que estan costat per costat és molt petita comparada amb els que estan un a sobre de l'altre. Per això, per a un mateix flux, F_x disminueix i F_z augmenta.

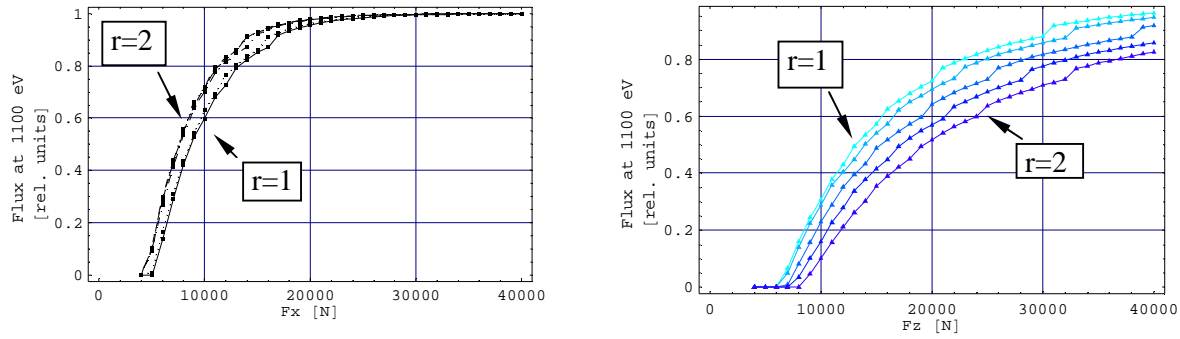


Figura 42: Flux en front de les forces (F_x i F_z) per a diversos valors de la rectangularitat.

En general, però, la reducció de F_x conforme augmentem la rectangularitat se satura, mentre que l'augment en F_z creix indefinidament. Això succeeix perquè, per generar prou camp magnètic, sigui quina sigui la rectangularitat, sempre necessitem una certa alçada l_z mínima dels blocs que produeixi suficient camp per assolir a l'energia mínima de 80 eV a l'entreferro mínim. Per tant, un bloc amb molta rectangularitat serà molt ample, però tindrà una alçada estàndard, que en el nostre cas ronda els 20 mm .

r	$l_z [\text{mm}]$	$l_x [\text{mm}]$
1.00	27.6	27.6
1.20	24.0	28.8
1.50	21.8	32.7
1.75	21.2	37.2
2.00	20.8	41.6

Taula 3: Dimensions de la secció dels blocs magnètics que produeixen diferents rectangularitats amb un flux del 75% del màxim teòricament assolible.

La Taula 3 mostra les seccions dels blocs a un flux relatiu del 75% per a diferents rectangularitats. Podem veure com mentre l_x augmenta amb la rectangularitat, l_z té un límit inferior. La Figura 43 mostra el comportament asimptòtic dels valors de l_z en funció de la rectangularitat. Així doncs, a partir d'una certa rectangularitat, només s'augmenta la força vertical i no es disminueix l'horitzontal. Per tant, un valor de $r=1.5$ és un bon compromís.

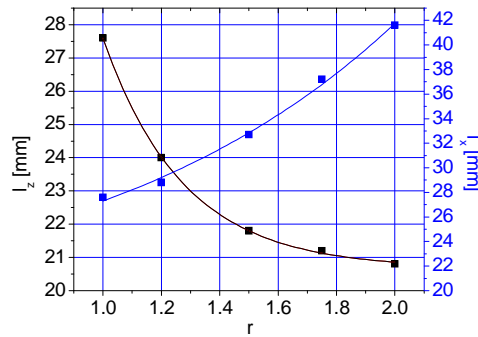


Figura 43: Punts on es representen les dimensions de la secció dels blocs magnètics amb diferents rectangularitats amb un flux del 75% del màxim teòricament assolible. Hem ajustat els punts amb corbes exponencials.

En qualsevol cas, utilitzant blocs rectangulars amb $r = 1.5$, podem reduir la força horitzontal aproximadament 2 kN . La contrapartida en la força vertical depèn de quin flux relatiu triem. En el rang $[60\%, 80\%]$, la força vertical creix en el rang $[4 \text{ kN}, 6 \text{ kN}]$. Aquests són valors raonables, tenint en compte que el moviment vertical està controlat per mitjà de motors i regles òptiques absolutes.

3.3.3. Selecció del període

Un cop obtingudes les corbes del flux respecte a les forces, la decisió que cal prendre per escollir el període és quina quantitat de flux és prescindible. Per prendre la decisió es té en compte l'opinió del responsable de la línia de llum que farà ús de la radiació emesa per l'ondulator. En el nostre cas, escollim treballar al 75% del flux disponible. Per reduir la força horitzontal, utilitzarem blocs amb rectangularitat 1.5. Amb aquestes eleccions, tots els paràmetres de l'ondulator queden definits. La *Taula 4* resumeix les solucions obtingudes amb aquest mètode i el de l'apartat 3.2.

Mitjançant el mètode de l'apartat 3.2 trobàvem una solució única per a un valor determinat de l'efectivitat magnètica. Aquell mètode era més ràpid, però no tenia en compte les implicacions d'escollir una efectivitat magnètica en la força i el flux. Amb aquest segon mètode, tota aquesta informació es posa de manifest, tot permetent que la decisió sobre l'elecció del període sigui més senzilla de prendre.

Magnitud	Apartat 3.2	Apartat 3.3
Flux relatiu [% del Maxim]	90	75
Període [mm]	62.76	64.36
L_x [mm]	35	33
L_z [mm]	35	22
F_x [kN]	16	12
F_s [kN]	23	17
F_z [kN]	32	29

Taula 4: Llista dels paràmetres que defineixen les solucions obtingudes en els apartats 3.2 i 3.3.

3.4. Disseny amb limitacions pràctiques específiques

3.4.1. Introducció

En aquest tercer mètode que presentem, farem servir l'algorisme SÍMPLEX⁷³ per maximitzar el flux prenent certs valors frontera per a les forces i les densitats de força. Cal recórrer a aquest tipus d'optimització quan les restriccions des del punt de vista mecànic són molt estrictes. Aquest és el cas, per exemple, quan es vol fer servir un suport preexistent per a un nou ondulator, cosa que té beneficis evidents des del punt de vista de l'estandardització dels elements mecànics en un sincrotró. Així doncs, el disseny estarà restringit a produir forces i densitats de forces més petites o iguals a les tolerables pel suport de referència.

Per poder ajustar-nos a aquestes forces i densitats de forces ens cal deixar la longitud de l'ondulator també com a paràmetre lliure, sempre mantenint un màxim de 2 m. Per optimitzar el flux, comptarem amb la secció del bloc i la longitud de l'ondulator.

En aquest cas, establim l'entreferro mínim en 15.5 mm perquè, per a entreferros més petits, el procés d'ordenació dels blocs està dominat per les inhomogeneïtats.

⁷³ W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes in C Cambridge university press, 1992, New York.

3.4.2. Metodologia

Tot seguit descriurem l'espai de paràmetres en què es realitza la cerca de la solució i quina funció de mèrit es fa servir.

3.4.2.1 Espai de paràmetres

Ja hem vist que utilitzar blocs rectangulars pot millorar la distribució de forces. Per això, en l'optimització, deixarem lliures l'amplada del bloc l_x , l'alçada del bloc l_z i la longitud de l'ondulator L . Per definir completament l'ondulator ens cal el període λ_0 . Per tal de determinar-lo fem us de la restricció de l'energia a entreferro mínim (80 eV en el nostre cas).

3.4.2.1.1 Determinació del període en un punt de l'espai de paràmetres

Per determinar el període, cal buscar la intersecció de la corba $K_{Emin}(\lambda_0)$ i la corba $K_{l_x, l_z}(\lambda_0)$ tal com s'ha explicat a l'apartat 3.2.2, on $K_{l_x, l_z}(\lambda_0)$ són els valors del paràmetre K per a un l_x i l_z fixats. Trobarem la intersecció de les rectes per aproximacions lineals successives al punt d'intersecció. No coneixem d'entrada la corba $K_{l_x, l_z}(\lambda_0)$ ni la seva derivada, però podem calcular-les en punts determinats. Per simplicitat farem servir el mètode de Newton per trobar la intersecció entre les corbes.

3.4.2.2 Funció de mèrit

La contribució principal a la funció de mèrit és el flux de fotons integrat polaritzats circularment a 1100 eV . En general, aquest flux és de l'ordre de 10^{14} . Definim la contribució del flux a la funció de cost com:

$$C = -\frac{F(1100 \text{ eV}, \lambda_0, k_{\max}, L)}{10^{12}} \quad (3-4)$$

on C es la funció de mèrit, i $F()$ el flux de fotons integrat al con central per a polarització circular a una energia donada per a un ondulator donat (punt en l'espai de paràmetres).

3.4.2.2.1 Condicions de frontera

Podem imposar les condicions de frontera a través de la funció de mèrit. Utilitzarem sumands exponencials per introduir les barreres en la funció de cost. Típicament, si no volem que certa quantitat x superi un cert valor prefixat x_0 , i ho volem garantir amb una precisió Δx , afegirem un terme a la funció de mèrit tal com el següent:

$$\Delta C = e^{\pm \frac{x-x_0}{\Delta x}} \quad (3-5)$$

on ΔC es el sumand que afegirem a la funció de mèrit, el signe en l'exponencial el decidim segons si s'ha de complir $x > x_0$ ó $x < x_0$. La Taula 5 mostra les limitacions utilitzades,

Magnitud limitada	Condicció de frontera	Implementació de la condició de frontera
l_x i l_z	$l_x \geq l_z$	$e^{\frac{l_z - l_x}{0.10}}$
l_z	$l_z > 15 \text{ mm}$	$e^{\frac{l_z - 15}{0.1}}$
l_x	$l_x < 50 \text{ mm}$	$e^{\frac{l_x - 50}{0.1}}$
L	$L < 2000 \text{ mm}$	$e^{\frac{L - 2500}{1}}$
F_x	$F_x < 14400 \text{ N}$	$e^{\frac{F_x - 14400}{100}}$
F_s	$F_s < 14400 \text{ N}$	$e^{\frac{F_s - 14400}{100}}$
F_z	$F_z < 21600 \text{ N}$	$e^{\frac{F_z - 21600}{100}}$
F_x/L	$D_x < 9.0 \text{ kN/m}$	$e^{\frac{D_x - 9.0}{0.1}}$
F_s/L	$D_s < 9.0 \text{ kN/m}$	$e^{\frac{D_s - 9.0}{0.1}}$
F_z/L	$D_z < 13.5 \text{ kN/m}$	$e^{\frac{D_z - 13.5}{0.1}}$

Taula 5: Condicions de frontera de l'optimització i implementació en la funció de mèrit.

on D_x , D_z i D_s són les densitats de força corresponents a F_x , F_z i F_s . Hi ha diferents raons per a cadascuna de les limitacions, que expliquem breument tot seguit.

Pel que fa a les dimensions del bloc, imposem d'entrada que $l_x \geq l_z$ ja que sabem que, d'aquesta manera, la distribució de forces és més favorable (F_x és més nociva que F_z) i d'aquesta forma estalviem temps en l'optimització així com solucions espúries. Per altra banda, els blocs no poden ser massa petits, donat que això comportaria que el camp variés massa ràpid transversalment, i per tant tindrà un contingut multipolar de segon ordre molt gran (recordem que depèn de la curvatura en el perfil transversal del camp (1-31)). El camp magnètic segons

la direcció x té el seu origen en la separació que hi ha entre els arranjaments a dreta i esquerra, i de forma natural presenta una curvatura gran, fins i tot quan l_x és molt gran. Ara bé, quan l_x disminueix per sota de 15 mm , aquesta curvatura es fa molt més gran i, per aquest motiu, introduïm la limitació $l_x > 15 \text{ mm}$. Finalment, les dimensions transversals es limiten superiorment a 50 mm (valor molt gran) ja que, amb valors tan grans, la simulació del camp magnètic dels blocs és més lenta.

La longitud de l'ondulator està limitada a 2 m com a màxim a causa de l'espai disponible, tant a l'accelerador com als sistemes de mesura i caracterització.

Les forces i densitats de forces venen definides pel disseny del suport mecànic preconcebut. Com hem dit, l'ús d'un suport ja dissenyat permet que la construcció del dispositiu sigui molt més barata, senzilla i ràpida. Els valors de les forces i densitats van ser subministrades pels responsables del disseny del suport mecànic.

3.4.2.3 Llavors

Tal i com hem definit la funció de mèrit, aquesta no posseeix un mínim absolut clar. A més, es tracta d'una funció definida numèricament. La variació amb la longitud de l'ondulator, per exemple, no és contínua, fet que impedeix utilitzar algorismes que requereixin conèixer la derivada de la funció de mèrit. Per altra banda, l'avaluació de la funció de mèrit és força lenta, en el rang de desenes de segons, cosa que fa prohibitiu des del punt de vista del temps de càlcul la implementació d'un algorisme tipus *Simulated Annealing*. Així doncs, escollirem el mètode SÍMPLEX. Per apropar-nos al màxim possible a la solució global, repetirem la rutina d'optimització 20 vegades començant des de diferents punts inicials. Prendrem la millor solució d'aquest conjunt de 20 solucions particulars.

Les solucions obtingudes es poden veure a la *Taula 6*. Obtenim diverses solucions numèricament molt semblants i corresponents al mateix mínim en l'espai de paràmetres al voltant de $C_{min} = -224$, cosa que ens dóna confiança en la bondat de la solució final escollida. Aquest conjunt de solucions les assenyalarem en gris a la taula mencionada.

Escollim d'entre el conjunt de solucions esmentat la que té la funció de mèrit més baixa, que hem assenyalat a la taula anterior en blau. La distribució de les solucions ens indica que molt probablement la solució escollida és el mínim absolut, o s'hi acosta molt.

l_x (mm)	l_z (mm)	L (mm)	λ_0 (mm)	C
32.4684	28.8632	1731.66	71.1322	-223.518
34.3014	30.7287	1632.04	70.488	-223.789
38.6614	26.1523	1638.00	70.823	-213.163
32.3956	29.0097	1754.20	71.1207	-223.433
33.9002	29.3046	1674.67	70.7825	-224.609
34.4506	32.5694	1276.98	70.2228	-176.819
17.0766	49.8011	1545.80	81.0604	-1.543
34.1891	30.8654	1627.54	70.4869	-223.622
33.6342	27.7926	1726.55	71.1179	-223.878
34.9244	28.3131	1655.65	70.7985	-224.300
33.1191	28.2871	1735.69	71.1126	-223.95
34.582	32.4786	1347.00	70.2123	-186.999
34.1155	30.9807	1631.41	70.4829	-223.548
35.5837	27.7876	1657.66	70.808	-223.506
27.782	23.4263	2387.43	73.903	-173.131
33.9308	23.3431	1893.41	72.3302	-199.436
35.987	28.9644	1591.13	70.5226	-222.167
29.7053	28.558	1916.52	71.8702	-215.275
33.1179	28.2697	1780.83	71.1163	-223.94
38.5538	25.3639	1577.61	71.0488	-205.846

Taula 6: 20 solucions per a la cel·la central partint de llavors diferents.

3.4.3. Comparació amb altres mètodes

En el mètodes desenvolupats en els apartats 3.2 i 3.3, hem assumit un entreferro mínim d'11.5 mm i la longitud de l'ondulator estava fixada en 2 m. En aquest cas, l'entreferro mínim està

limitat a 15.5 mm i la longitud de l'ondulator és variable. Observem que la longitud final a la *Taula 7* discrepa de la de la solució escollida en la *Taula 6*. Aquest fet ve provocat per la natura discreta de la magnitud L . A més, la longitud final de l'ondulator ve fixada per les terminacions, que determinarem a l'apartat següent, però que ja incloem a la *Taula 7*.

Tot i les diferències particulars entre els mètodes, podem comparar la proporció del flux de fotons integrat respecte al màxim en cadascun dels casos.

Magnitud	Apartat 3.2	Apartat 3.3	Apartat 3.4
Flux integrat relatiu [%]	90	75	70
Gap magnètic mínim [mm]	11.5	11.5	15.5
període [mm]	62.76	64.36	71
l_x [mm]	35	33	34
l_z [mm]	35	22	30
L [mm]	2000	2000	1650
F_x [kN]	16	12	13
F_y [kN]	23	17	15
F_z [kN]	32	29	20

Taula 7: Paràmetres principals de les solucions obtingudes amb els tres mètodes.

3.5. Optimització de les terminacions

Un cop està decidida la cel·la central, cal calcular les terminacions òptimes per minimitzar l'excursió de les integrals de camp quan variem l'entreferro de l'ondulator o la fase d'aquest. No tenim restriccions des del punt de vista de fins a on es pot estendre longitudinalment el camp més enllà de les terminacions i, per tant, no s'han de dissenyar específicament per disminuir-lo. Podrem doncs utilitzar terminacions on l'últim imant està imantat longitudinalment.

Per altra banda, el gruix del feix d'electrons és, al centre de l'ondulator, de $133 \mu\text{m}$, mentre que les oscil·lacions degudes al camp magnètic tenen una amplitud de $10 \mu\text{m}$. No caldrà, doncs, dissenyar les terminacions específicament per a que les oscil·lacions es produeixin

entorn a l'eix de l'ondulator. H'hi ha prou amb què l'eix de les oscil·lacions no es desplaci molt més que la grandària de les oscil·lacions mateixes. Una de les solucions més senzilles i efectives consisteix en utilitzar tres blocs de gruix la meitat d'un bloc normal, la distància entre els quals s'ajusta per minimitzar la variació de la integral amb la fase de l'ondulator (en anglès *field integral variation with the phase* o FIVP).

Així doncs, l'optimització té com a funció de mèrit la FIVP i com a paràmetres la separació entre els blocs de les terminacions (tres paràmetres). Com hem comentat en els capítols precedents, minimitzar la FIVP implica minimitzar els efectes de la permeabilitat. Des d'un punt de vista teòric pot semblar més adequat utilitzar com a funció de mèrit el valor RMS de les integrals en funció de la fase. Això segurament faria que tinguéssim integrals més baixes en el model simulat. Però cal tenir present que el valor final de les integrals dependrà molt dels errors magnètics dels blocs i, per tant, no té sentit minimitzar-les en un cas ideal. En canvi, la FIVP és menys dependent de la casuística real dels blocs. A més, al final del procés, sempre podem incloure un terme constant en les bobines correctores. Tenint en compte que no podem anticipar els errors que tindran els blocs, en el disseny inicial la funció de mèrit més adequada és la FIVP.

La *Figura 44* mostra un esbós de les terminacions. Hi podem observar els tres paràmetres S_1 , S_2 i S_3 que les defineixen. Tot seguit optimitzarem aquest paràmetres seguint dues aproximacions diferents. En primer lloc, optimitzarem cada paràmetre per separat; després, optimitzarem els tres paràmetres simultàniament mitjançant una rutina de SIMPLEX.

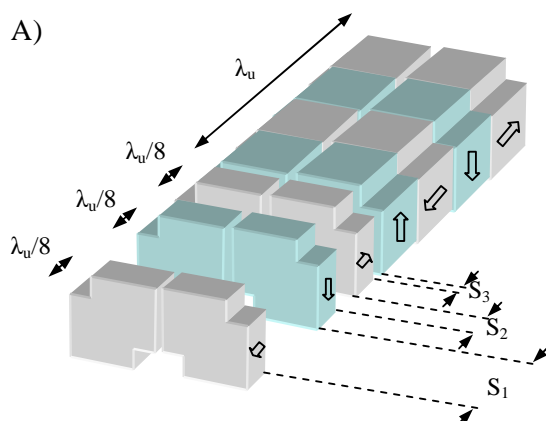


Figura 44: Esquema de la parametrització de les terminacions. Hi ha tres paràmetres, S_1 , S_2 i S_3 .

3.5.1. Optimització paràmetre a paràmetre

En el tipus de terminacions que hem presentat, el paràmetre més influent és S_1 . La *Figura 45* mostra la FIVP en funció del paràmetre S_1 . Els altres dos paràmetres S_2 i S_3 es mantenen nuls.

El punt òptim és al voltant de $S_1=6$ mm.

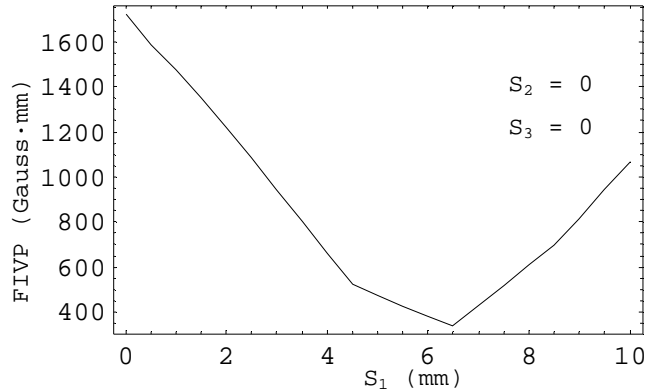


Figura 45: Optimització gràfica de la FIVP escollint apropiadament S_1 .

En l'optimització del següent paràmetre mantindrem el valor òptim trobat per a S_1 . Així doncs, S_2 s'optimitza de forma semblant mantenint S_1 i S_3 constants ($S_1 = 6$, $S_3=0$). El punt òptim és al voltant de $S_2=2$ mm (Figura 46).

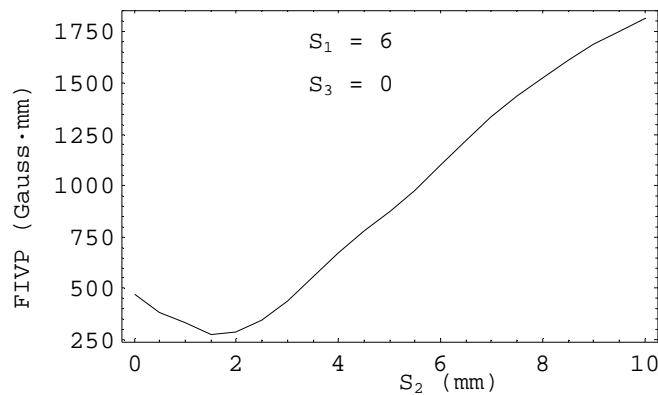


Figura 46: Optimització gràfica de la FIVP escollint apropiadament S_2 .

En l'optimització del següent paràmetre mantindrem el valor òptim trobat per a S_2 . Així doncs, S_3 s'optimitza de forma semblant mantenint S_2 i S_3 constants ($S_1 = 6$, $S_2=2$). El punt òptim és $S_3=0$ mm (Figura 47).

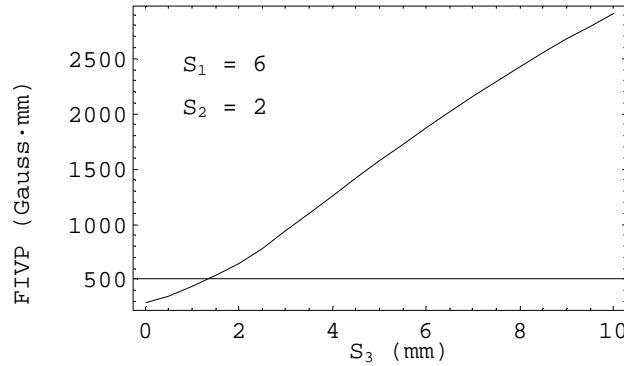


Figura 47: Optimització gràfica de la $FIVP$ escollint apropiadament S_3 .

Després d'haver optimitzat S_1 i S_2 trobem que variar el paràmetre S_3 no millora la $FIVP$.

3.5.2. Optimització numèrica

Com en altres ocasions escollim la rutina SÍMPLEX per realitzar l'optimització. Utilitzem com a valor inicial l'ajust paràmetre a paràmetre. La solució trobada es mostra a la *Taula 8*.

Parametre	Valor
S_1	5.92
S_2	1.03
S_3	0.46

Taula 8: Solució òptima.

La solució òptima té una $FIVP$ de 208 Gauss mm, mentre que el valor òptim trobat optimitzant paràmetre a paràmetre era de 250 Gauss mm. És a dir, obtenim un 20% de disminució utilitzant un algorisme només lleugerament més complicat.

3.6. Elecció de la solució: propietats magnètiques, mecàniques i òptiques

En aquest apartat resumirem les propietats magnètiques, mecàniques i òptiques més importants del disseny final triat.

3.6.1. Paràmetres del disseny magnètic i mecànic

A la *Taula 9* fem un resum dels paràmetres que hem optimitzat en l'apartat anterior.

<i>Magnitud</i>	<i>Valor</i>
<i>Nom</i>	<i>HU71</i>
<i>Període [mm]</i>	<i>71</i>
<i>Ample de bloc l_x [mm]</i>	<i>34</i>
<i>Alçada de bloc l_z [mm]</i>	<i>30</i>
<i>Longitud magnètica L [mm]</i>	<i>1650</i>
<i>separació S_1 [mm]</i>	<i>5.92</i>
<i>separació S_2 [mm]</i>	<i>1.03</i>
<i>separació S_3 [mm]</i>	<i>0.46</i>

Taula 9 : Principals paràmetres del disseny de l'ondulator.

A part d'aquests paràmetres, a la *taula Taula 10* es mostren alguns paràmetres addicionals, que han estat pre-imposats com a restriccions en l'optimització o bé corresponen a paràmetres de disseny de la màquina.

<i>Magnitud</i>	<i>valor</i>
<i>Max. força horitzontal F_x [kN]</i>	<i>13</i>
<i>Max. força longitudinal F_s [kN]</i>	<i>15</i>
<i>Max. força vertical F_z [kN]</i>	<i>20</i>
<i>Max. densitat de força horitzontal D_x [kN/m]</i>	<i>7.8</i>
<i>Max. densitat de força longitudinal D_s [kN/m]</i>	<i>9.0</i>
<i>Max. densitat de força vertical D_z [kN/m]</i>	<i>11.9</i>
<i>Altura màxima [mm]</i>	<i>2500</i>
<i>Ample Màxim [mm]</i>	<i>1000</i>
<i>Ample (a l'interior) [mm]</i>	<i>750</i>

Ample (a l'exterior) [mm]	250
altura del feix d'electrons [mm]	1400
Entreferro mínim [mm]	15.5
Entreferro màxim [mm]	250 - 300
Rang de la fase [mm]	± 35.5 mm
Nombre de Blocs	89
Nombre de terminacions	3+3 per quadrant

Taula 10: Paràmetres mecànics addicionals.

3.6.2. Camp magnètic (eix longitudinal)

A la *Figura 48* es mostra el camp magnètic produït per l'ondulator sobre l'eix y ($x=z=0$), a entreferro mínim. Es mostra tant el cas del mode paral·lel com en mode antiparal·lel, cas en què les components horitzontal i vertical del camp magnètic tenen la mateixa amplitud.

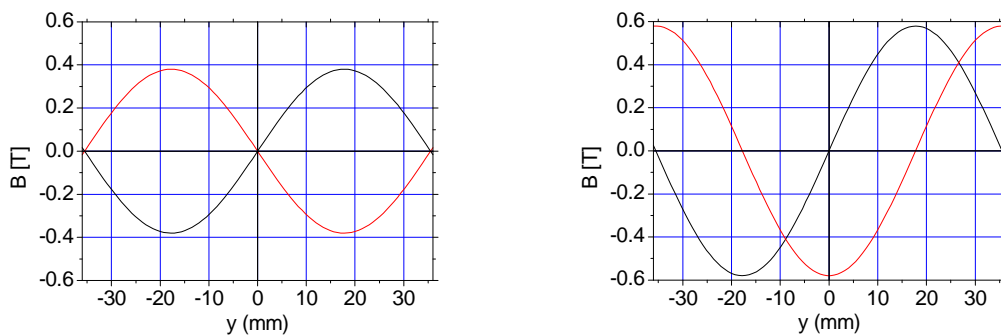


Figura 48: Camp magnètic segons l'eix longitudinal en el cas de moviment paral·lel (dreta) o antiparal·lel (esquerra). La corba negra és per al camp vertical i la vermella per l'horitzontal.

En la majoria d'experiments es fa servir llum polaritzada circular o el·líptica. Analitzarem amb major detall el mode paral·lel, ja que és en aquest on es produeix aquest tipus de polarització.

A la *Figura 49* es mostren els camps B_x i B_z en funció de la fase de l'ondulator. El punt on es creuen les dues corbes equival al punt de polarització circular (aproximadament, ja que en realitat el punt de polarització circular ve donat per $K_x=K_z$). Per a entreferros diferents, el punt de polarització circular es desplaça cap a fases més grans.

La *Figura 50* mostra els camps B_x i B_z en funció de la posició en l'eix longitudinal y , per a uns quants períodes. Observem que els camps estan desfasats un quart de període. Cada una de les gràfiques correspon a una posició diferent de la fase (*Figura 49*): en la *Figura 50 a*) es representa un estat de polarització horitzontal (el camp només té component B_z), en la *Figura 50 b*) es representa un estat de polarització el·líptica (hi ha tant component B_z com B_x), en la *Figura 50 c*) es representa un estat de polarització circular (hi ha tant component B_z com B_x i són iguals en amplitud) i finalment en la *Figura 50 d*) es representa un estat de polarització vertical (el camp només té component B_x).

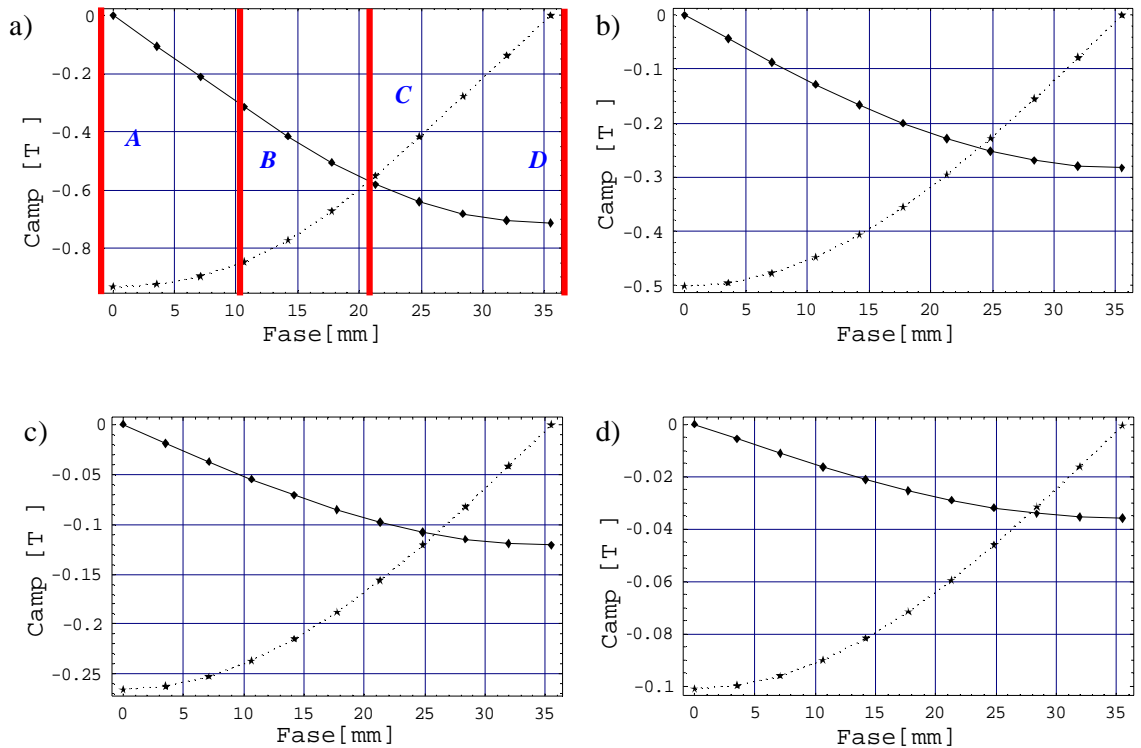


Figura 49: Variació dels camps magnètics vertical (línea continua) i horitzontal (línea puntejada) amb la fase per a diferents valors de l'entreferro: a) A 15.5 mm d'entreferro (l'energia dels fotons és 80 eV). b) A 30.0 mm d'entreferro (l'energia dels fotons és 300 eV). c) A 44.0 mm d'entreferro (l'energia dels fotons és 300 eV). d) A 65.0 mm d'entreferro (l'energia dels fotons és 1100 eV).

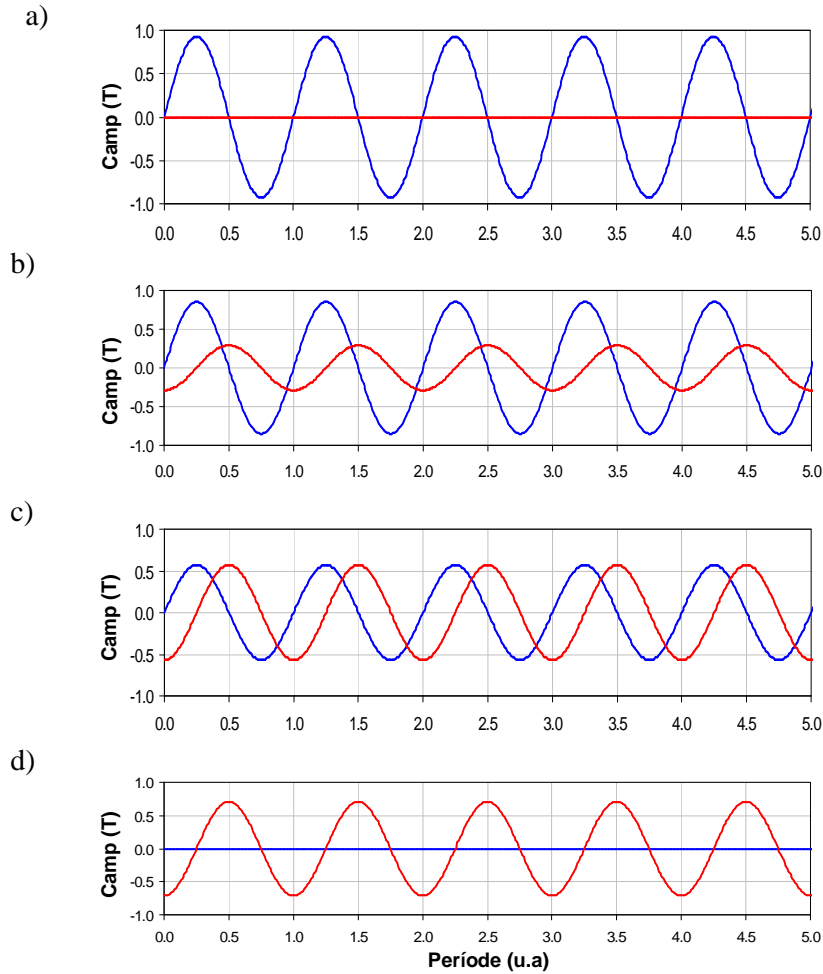


Figura 50: Camps magnètics vertical (blau) i horitzontal (vermell) al llarg de la direcció longitudinal, per a diferents valors de la fase: a) A 0.0 mm de fase (punt A en la Figura 48 a). b) A 11.0 mm de fase (punt B en la Figura 48 a). c) A 21.0 mm de fase (punt B en la Figura 48 a). d) A 35.5 mm de fase (punt D en la Figura 48 a).

3.6.3. Camp magnètic (pla transversal)

Com ja hem dit, el perfil del camp magnètic d'un ondulator Apple II segons la direcció transversal presenta peculiaritats rellevants. La *Figura 96* mostra els camps B_x i B_z en funció de la posició transversal x . El camp horitzontal presenta una curvatura important, fet que té efectes importants (de segon ordre) sobre el feix d'electrons.

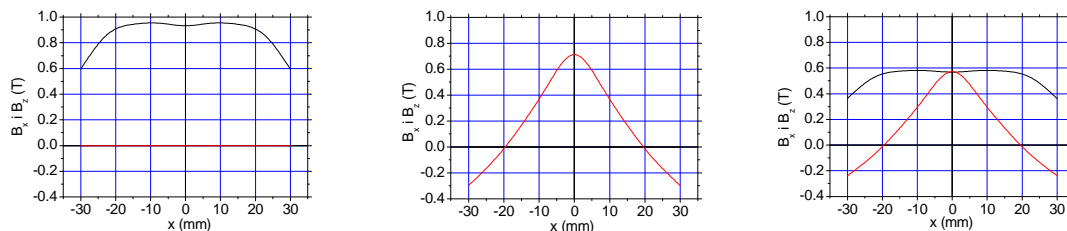


Figura 51: Camps magnètics vertical (negre) i horitzontal (vermell) al llarg de la direcció transversal per a tres fases diferents: (polarització horitzontal, esquerra; polarització vertical, centre; polarització circular, dreta).

3.6.4. Paràmetre K de l'ondulator

La *Taula 11* mostra els valors del paràmetre K per a diferents polaritzacions: horitzontal (fase = 0), vertical (fase = $\lambda_u/2$), i polarització circular (fase = $\lambda_u/4$). La taula també mostra la potència radiada en cada polarització. El paràmetre K , juntament amb la longitud de l'ondulator i el període en determinen la potència radiada.

Magnitud	Polarització horitzontal	Polarització vertical	Polarització circular
Max B_x [T]	0.00	0.71	0.57
Max B_y [T]	0.93	0.00	0.57
Max K_x	0.00	4.73	3.78
Max K_y	6.19	0.00	3.78
Potència total[kW]	3.25	1.89	2.44

Taula 11: Valors màxims del camp i el paràmetre K .

3.6.5. Comportament òptic: desplaçament dels harmònics

Tal i com hem explicat al capítol 1, el flux integrat en tot el conus central a l'energia d'interferència és fàcilment calculable. A mesura que es canvia l'entreferro del dispositiu, els pics de l'espectre de la radiació emesa es van desplaçant cap a energies més altes, però la seva intensitat disminueix (eq (1-10)). A la *Figura 52* es presenta el flux integrat per al primer harmònic en el mode circular i per als tres primers harmònics imparells en el mode lineal.

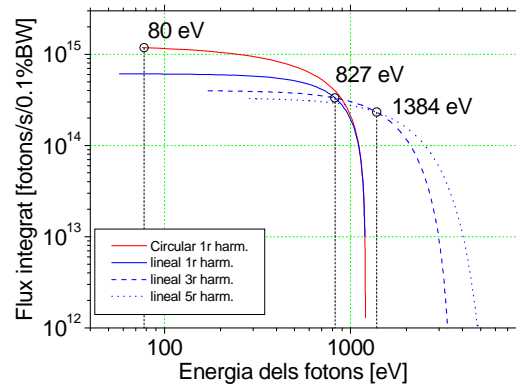


Figura 52: Desplaçament dels harmònics del flux integrat: per a la polarització circular (en vermell) i per a la polarització lineal (blau). Assenyalen les energies en què es canvia d'harmònic: 80 eV, 827 eV i 1384 eV.

3.6.5.1 Flux a través d'una esclatxa

De tots els paràmetres que caracteritzen la radiació emesa per l'ondulator, el més important és el flux que entra dins de la línia de llum. Aquest ve determinat per la primera esclatxa (també anomenada esclatxa de feix blanc). La *Figura 53* mostra el flux a través de la primera esclatxa.

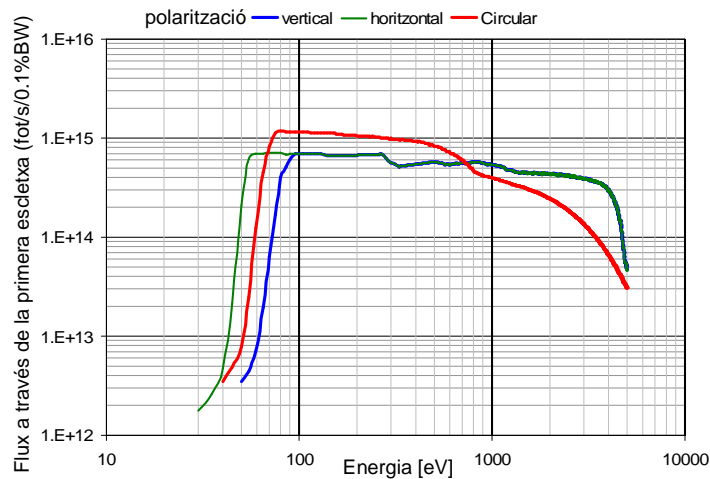


Figura 53: Flux a través de la primera esclatxa. En el càlcul s'ha tingut en compte la contribució de tots els harmònics. Hem pres una esclatxa de 0.6 mrad \times 0.6 mrad.

En el càlcul, s'inclouen tots els harmònics de la radiació, i a més hem introduït un error en la periodicitat del camp magnètic (amb un error de fase òptica de 3°) i s'ha tingut en compte la

dispersió de posició, moments i energia del feix. Els càlculs s'han dut a terme emprant el programa SRW.⁷⁴

3.6.5.2 Distribució de la densitat de potència

La densitat de potència és un paràmetre important a tenir en compte a l'hora de fer el disseny dels diferents components de la línia de llum. La distribució de potència depèn molt del mode de polarització en què estigui l'ondulator.

3.6.5.2.1 Camp magnètic vertical – polarització lineal horitzontal

En aquest cas, la llum s'emet en una franja horitzontal. La *Figura 54* mostra la distribució de potència en aquest cas.^{75,76}

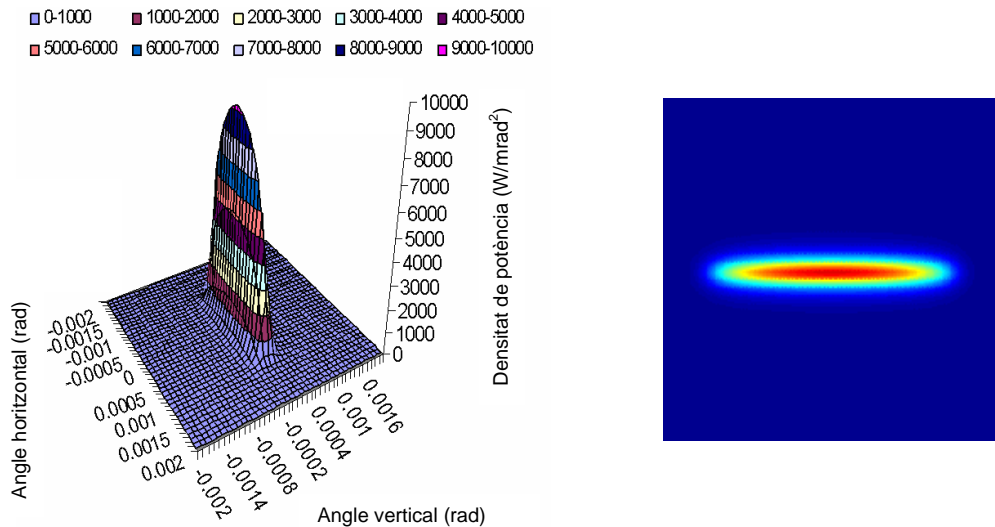


Figura 54: Distribució de la densitat de potència per a una fase de l'ondulator igual a 0 (llum polaritzada horitzontalment).

La densitat de potència serveix per fer els corresponents estudis de carregues tèrmiques en els materials que s'interposen en el camí de la llum.

⁷⁴ O.Chubar, P.Elleau, *Accurate and efficient computation of synchrotron radiation in the near field region*, EPAC'98, p.1177.

⁷⁵ J. Campmany and Z. Martí, *Conceptual design of APPLE-II devices for PEEM and XMCD beamlines at ALBA*, ALBA internal note, AAD-SR-ID-AN-0141, 2006.

⁷⁶ J.Nicolas, *Power emitted by HU71 helical undulator*, ALBA internal note, AXD-SRID-DG-0503, 2005.

3.6.5.2.2 Polarització circular

En aquest cas, la majoria de la potència es concentra en una corona circular centrada en l'eix de l'ondulator. La *Figura 55* mostra la distribució de potència en aquest cas.

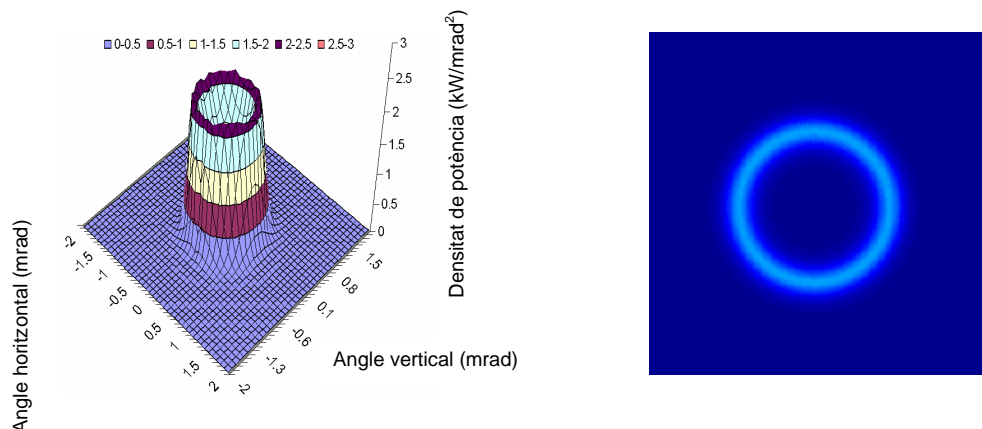


Figura 55: Distribució de la densitat de potència per al mode circular de l'ondulator (llum polaritzada circularment).

La potència radiada en aquest cas és menor que en el cas de polarització horitzontal.

3.6.5.2.3 Els harmònics i la primera escletxa

En l'apartat anterior hem mostrat com es distribueix la potència radiada en les polaritzacions horitzontal i circular. En la potència radiada hi ha contribucions de tots els harmònics. De fet, la radiació que produeix l'ondulator a harmònics alts deixa de ser un espectre de pics i passa a ser contínua. Per aquest motiu, la distribució de la densitat de potència total radiada no està gens correlacionada amb la distribució de la densitat de potència radiada per als primers harmònics.

En el cas polarització circular, l'ondulator emet en un conus central només en el primer harmònic, mentre que els harmònics superiors es distribueixen en cercles entorn del primer.

Tal com il·lustra la *Figura 56*, és possible operar l'ondulator en mode circular aprofitant els tres primers harmònics i deixant la major part de la potència radiada fora de la línia de llum.

Tal com il·lustra la *Figura 57*, en el cas de la polarització horitzontal, una bona part de la potència total radiada entra dintre de la primera escletxa. Per això aquest és el cas més crític des del punt de vista de la potència que es transmet a la línia de llum.

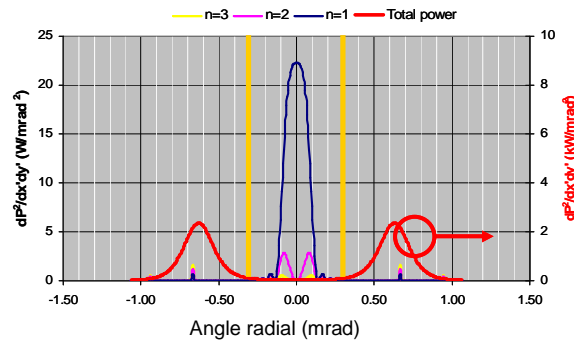


Figura 56: Distribució de la densitat de potència total (en vermell) i la dels primers harmònics (1r: blau; 2on: lila; 3r: groc) per al mode circular de l'ondulator (llum polaritzada circularment) respecte a la primera esletxa (en carbassa).

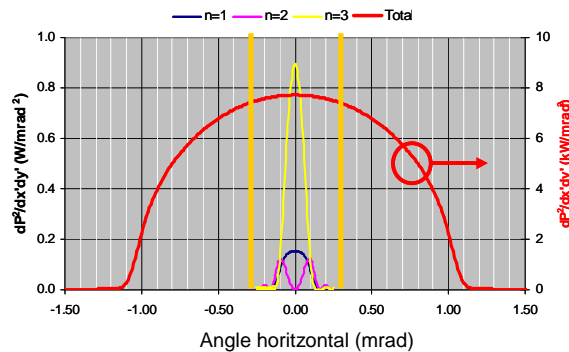


Figura 57: Distribució de la densitat de potència total (en vermell) i la dels primers harmònics (1r: blau; 2on: lila; 3r: groc) per al mode horitzontal de l'ondulator (llum polaritzada horitzontalment) respecte a la primera esletxa (en taronja).

3.6.6. Forces magnètiques

El moviment dels quadrants de l'ondulator, involucra l'aparició de forces en tots tres eixos de coordenades. En aquest apartat mostrarem quin es el comportament de les forces magnètiques en funció de la fase i del gap.

3.6.6.1 Comportament amb la fase

El comportament amb la fase és significativament diferent segons si estem en el mode paral·lel o en l'antiparal·lel. La *Figura 58* mostra la dependència de les forces amb la fase en el mode en el mode antiparal·lel i la *Figura 59* la dependència de les forces amb la fase en el mode paral·lel. En el cas del mode paral·lel, el sistema manté una certa simetria: la força sobre

la biga que es mou i la que resta fixa tenen igual magnitud i sentit contrari. En el cas de mode antiparal·lel, això no es compleix.

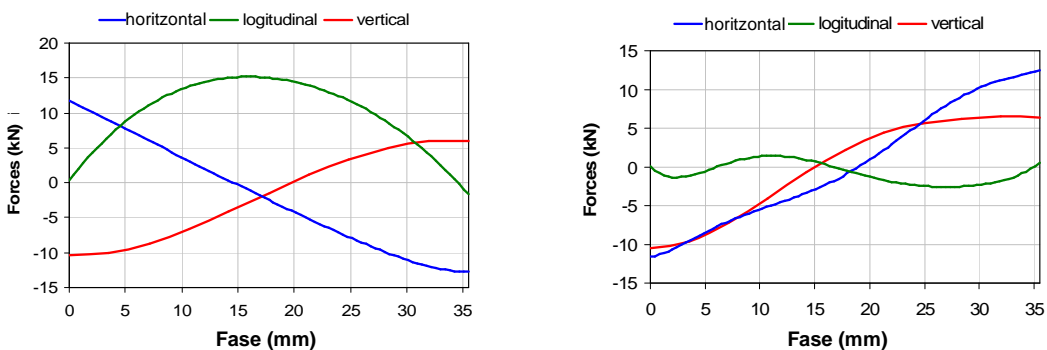


Figura 58: Forces sobre la biga fixa (esquerra) i sobre la mòbil (dreta) en funció de la fase de l'ondulator en el mode antiparal·lel. El color indica la direcció de la força tal i com s'indica a la gràfica.

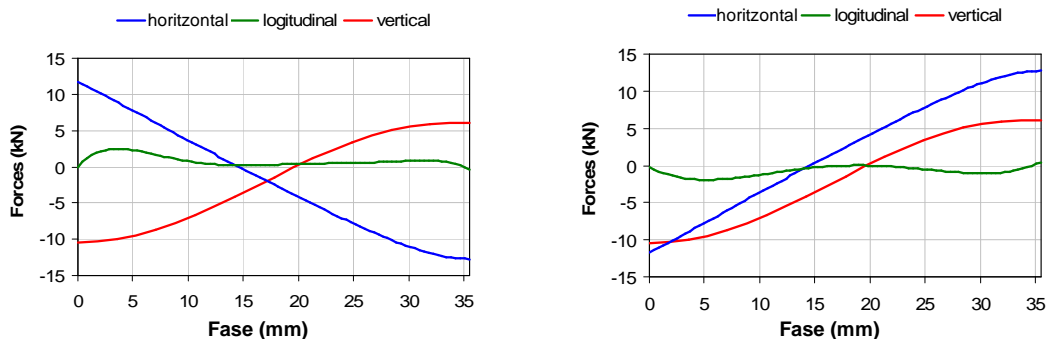


Figura 59: Forces sobre la biga fixa (esquerra) i sobre la mòbil (dreta) en funció de la fase de l'ondulator en el mode paral·lel. El color indica la direcció de la força tal i com s'indica a la gràfica.

La Figura 60 mostra la força sobre les dues bigues superiors en funció de l'entreferro. En cap cas se superen els valors estipulats per les restriccions que s'havien especificat en el disseny inicial (veure Taula 5).

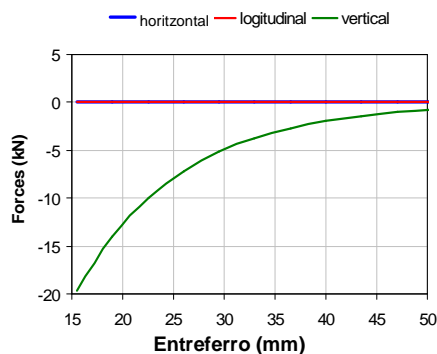


Figura 60: Forces sobre les bigues superiors en funció de l'entreferro a polarització horitzontal. El color indica la direcció de la força tal i com s'indica a la gràfica.

3.6.7. Variació de les integrals amb la coordenada transversal

A l'apartat 3.5.2 hem trobat unes terminacions que minimitzen la variació de les integrals amb la fase. Cal dir que en el model amb què es fan les simulacions, donada la simetria del camp B_x , la integral I_x és sempre nul·la, per a qualsevol valor de la fase de l'ondulator i de l'entreferro. Les corbes que mostrem en aquest apartat no tenen en compte errors magnètics o mecànics i, per tant, la integral I_x és sempre nul·la. A més per la mateixa raó, la integral I_z és simètrica a banda i banda de l'eix x . A la *Figura 61* hi podem veure la dependència de les integrals segons l'eix x per a cadascuna de les polaritzacions principals.

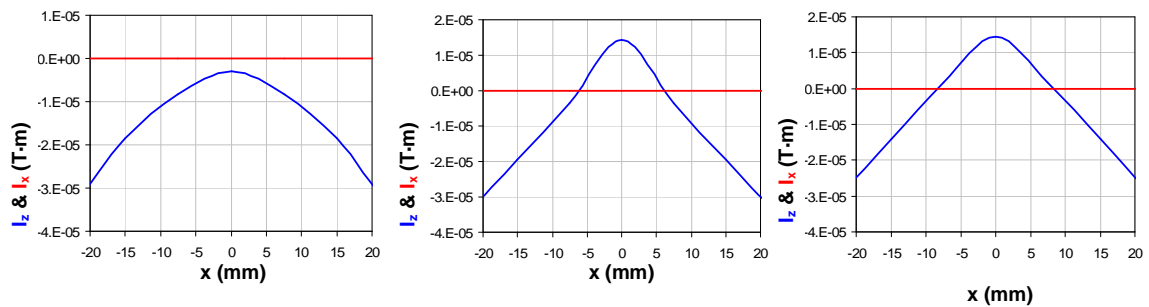


Figura 61: Integrals calculades en diferents posicions de l'eix x per a $z=0$. Es mostra la integral I_z (I_x) en blau (vermell). Per als casos de polarització horitzontal (esquerra), circular (centre) i vertical (dreta).

Quan l'ondulator passa d'un mode de polarització a un altre, es recorren tots els estats intermitjos, i les integrals varien contínuament (veure *Figura 62*). Aquesta variació de les integrals afecta a la dinàmica del feix d'electrons.

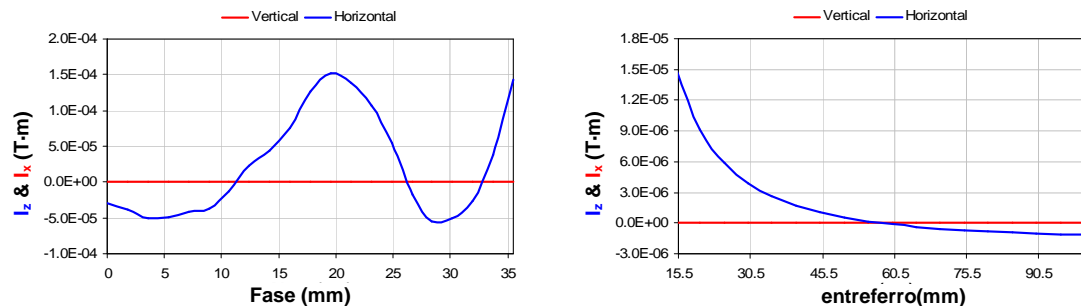


Figura 62: Integrals calculades per a diferents valors de la fase (a entreferro mínim) i l'entreferro (a fase màxima) de l'ondulator. Es mostra la integral I_z (I_x) en blau (vermell). Es mostra sempre el valor a

A la *Taula 12* es mostra el contingut multipolar del cas de polarització circular, que correspon al pitjor dels casos. Només apareixen termes parells degut a la simetria en la simulació.

Multipol	valor
Quadrupol	0.0 T
Sextupol	-1.17 T/m
Octupol	0.0 T/m ²
Decapol	1.91·10 ⁵ T/m ³
Dodecapol	0.0 T/m ⁴
Tetradecapol	-6.99·10 ¹⁰ T/m ⁵

Taula 12: Multipols del model ideal de l'HU71.

CAPÍTOL 4

CAS PRÀCTIC 2: MESURES D'UN ONDULADOR APPLE-II:

En aquest capítol detallem els processos de muntatge, ordenació i de correcció d'un cas real d'ondulador tipus Apple II. En els primers apartats es porten a terme una sèrie d'estudis orientats a posar de manifest els punts febles dels mètodes emprats. En particular, ens centrarem en l'anàlisi dels límits de la caracterització dels blocs a través de la seva imantació mitjana.

4. CAS PRÀCTIC 2: MESURES D'UN ONDULADOR

APPLE-II

Tots els mètodes i dades presentades en aquest capítol han estat recopilats durant l'estada al laboratori de llum de sincrotró italià, Elettra. Allà es va mesurar, ensamblar i corregir un ondulator HU80 destinat al nou sincrotró Soleil.

4.1. Especificacions

4.1.1. Especificacions sobre la radiació

L'ondulator s'utilitzarà com a font de llum en el rang des dels ultraviolats de buit (VUV) fins als raigs X tous.

El dispositiu ha de generar llum en les tres polaritzacions: horitzontal (eix x), vertical (eix z) i circular dextrògira i levògira. En els tres casos, el rang espectral ha d'estar en el rang des de 80eV fins a 1600eV . Es demana també un alt flux integrat, al voltant de 10^{15} fotons/(s·0.1%BW).

L'ondulator té un període de 80 mm , un entreferro mínim de 15.5 mm , i la tolerància en la resolució longitudinal del moviment de les rengleres per ajustar la fase de l'ondulator és de $5\text{ }\mu\text{m}$, mentre que la resolució en el moviment de l'entreferro de l'ondulator és de $1\text{ }\mu\text{m}$.

La component vertical del camp ha de ser simètrica respecte al centre de l'ondulator segons la direcció y . La component horitzontal del camp ha de ser asimètrica respecte al centre de l'ondulator segons la direcció y . Per tant, cadascun dels 4 arranjaments d'imants ha d'estar centrat en un bloc imantat verticalment.

4.1.2. Especificacions sobre l'efecte en el feix d'electrons

Un cop corregides les integrals, la primera integral ha de satisfer:

$$\begin{aligned} I_x &\leq 3.5 \mu T \cdot m \\ I_z &\leq 16.0 \mu T \cdot m \end{aligned} \quad (4-1)$$

Per la seva banda, la segona integral ha d'acomplir:

$$\begin{aligned} J_x &\leq 12 \mu T \cdot m^2 \\ J_z &\leq 130 \mu T \cdot m^2 \end{aligned} \quad (4-2)$$

Aquest valors provenen de l'estudi de les toleràncies de l'accelerador Soleil. En general aquestes restriccions depenen no només de l'accelerador, sinó també de la posició exacta que hagi d'ocupar el dispositiu d'inserció dintre de l'anell.

4.2. Mesures i construcció

4.2.1. Superposició d'errors produïts per inhomogeneïtats

4.2.1.1 Introducció

Abans de començar el procés de muntatge, es van realitzar alguns assaigs preliminars. Un d'aquests consisteix en la implementació d'un petit arranjament de blocs de 4 períodes en un sol quadrant, amb les mateixes terminacions que l'ondulator complet (19 períodes en els 4 quadrants). Els blocs utilitzats en el muntatge es van mesurar un a un amb les bobines de Helmholtz, i es va fer servir un algorisme d'optimització basat en el *Simulated Annealing* per determinar la millor configuració possible (per a una introducció al concepte veure secció 2.2.2.1, per a una aplicació més detallada veure secció 4.2.3). Cal advertir que, un cop fet el muntatge, els valors de les integrals predits teòricament discrepen en general dels valors mesurats. En aquest apartat analitzarem algunes de les raons més importants d'aquestes discrepàncies. Les raons principals semblen ser les inhomogeneïtats dels blocs i l'efecte de la permeabilitat. Cal esmentar que altres estudis sobre aquest tema han arribat a conclusions similars i fins hi tot han proposat possibles solucions.⁷⁷

En general, el nombre d'orientacions en què podem col·locar el bloc a l'ondulator varia segons la geometria del bloc. En el cas que ens ocupa, el bloc presenta una secció quadrada de 28 mm de costat i una longitud d'un quart de període: 20 mm (tenint en compte que l'espai

⁷⁷ J. Bahrtdt et altr, *Magnetic field optimization of permanent magnet undulators for arbitrary polarization*, Nucl. Instr. and Meth. A 516 (2004) 575-585.

entre blocs es d'uns 0.09 mm , el període és en realitat 80.36 mm). Si el bloc fos de secció rectangular, un bloc de tipus B no es podria canviar de direcció d'imantació sense canviar-lo de renglera.

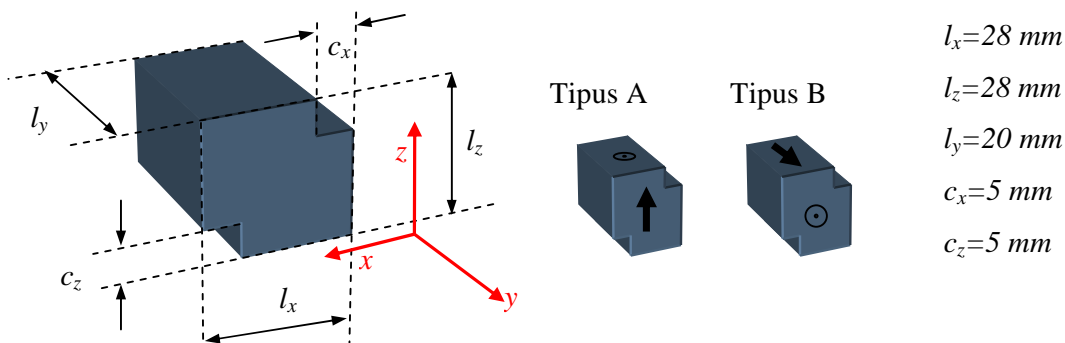


Figura 63: Característiques geomètriques dels blocs utilitzats per a l'ondulator Apple II de 15.5 mm d'entreferro mínim i 80 mm de període.

A la *Figura 63* hi ha detallades les dimensions del bloc. Les dimensions c_x i c_z determinen les dimensions de la regata usada per fixar l'imant al seu contenidor. El valor d'aquests rebaixos ve determinat per la força per unitat de superfície que pot suportar el material sense veure compromès el seu comportament magnètic i mecànic.

4.2.1.2 Mesures d'imantació

Com ja hem dit, els imants utilitzats en el muntatge es mesuren prèviament amb les bobines Helmholtz. Aquestes mesures de les bobines Helmholtz ens informen de la imantació homogènia equivalent, és a dir, suposant que la imantació és constant dintre l'imant. Ara bé, donat que el material presenta una permeabilitat finita, la imantació a les vores de l'imant és lleugerament superior. És a dir, de forma natural, el material presenta una imantació no uniforme. A més, del procés de fabricació del material se'n poden derivar altres inhomogeneïtats no sistemàtiques. Els efectes de les inhomogeneïtats sobre el camp magnètic desapareixen ràpidament amb la distància a la font, i les bobines Helmholtz no hi són sensibles. Això ens permetrà distingir entre els errors en la predicció del camp causats per les inhomogeneïtats i els causats per un simple error en la mesura de les components dipolars, que variaran més lentament amb la mida de l'entreferro.

4.2.1.3 Renglera d'imants no ordenats

Es va fer un primer muntatge de blocs sense optimitzar-ne el posicionament. Compararem la predicció de la primera integral i les mesures de les integrals amb el fil tibant. La *Figura 64*

mostra la disposició de l'arranjament d'imants respecte al fil tibant, que coincideix amb la del quart quadrant. A la *Figura 65* podem veure la comparació entre les integrals esmentades. Tot i que les diferències són apreciables, el comportament global concorda amb les prediccions. Les mesures del fil tibant a diferents entreferros mostren que les oscil·lacions esmentades se suavitzen conforme s'augmenta el gap. Aquest fet ens indica la possible intervenció de les inhomogeneïtats com a causa de la discrepància, de forma que les oscil·lacions entorn els valors predits es poden explicar com a efecte de les inhomogeneïtats.

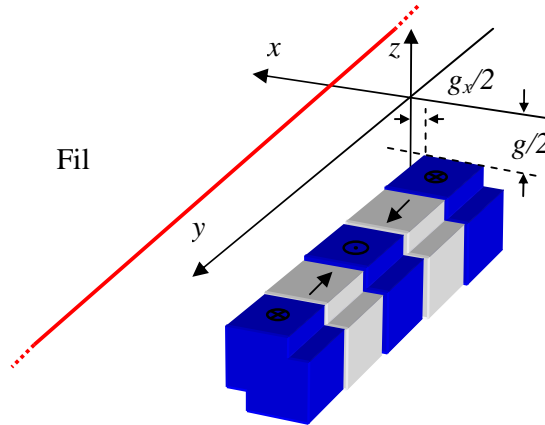


Figura 64: Centratge de l'arranjament dels imants respecte a l'origen de coordenades del fil tibant.

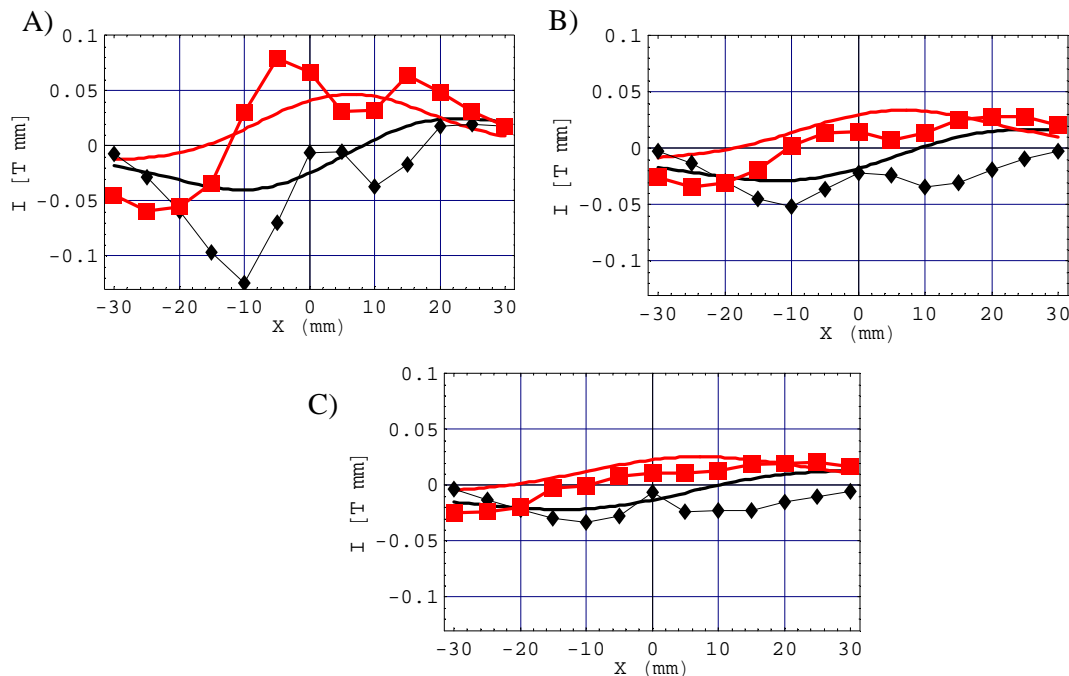


Figura 65: Comparació de les integrals de camp de les dades previstes (línies contínues) i les dades mesurades (línies amb punts) per a la component horitzontal (en negre) i la vertical (en vermell). A) Mesurades al pla de l'ondulator ($g/2=7.75$ mm per sobre de la superfície dels imants). B) Mesurades 5 mm sobre el pla mig (12.75 mm sobre els imants). C) Mesurades 17.5 mm sobre els imants.

4.2.1.4 Renglera d'imants ordenats

El programa d'ordenació no té en compte la permeabilitat i suposa que els blocs són homogenis. Podem veure el resultat de l'optimització a la *Figura 66* a entreferro mínim. Ens trobem amb una gran discordança entre els valors pronosticats i els mesurats.

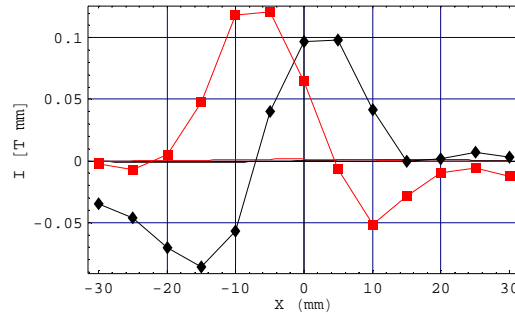


Figura 66: Comparació de les components de les integrals de camp (vermell per a la vertical i negre per a l'horitzontal). Es mostren les integrals predites (línees contínues) i les mesurades (línees amb punts).

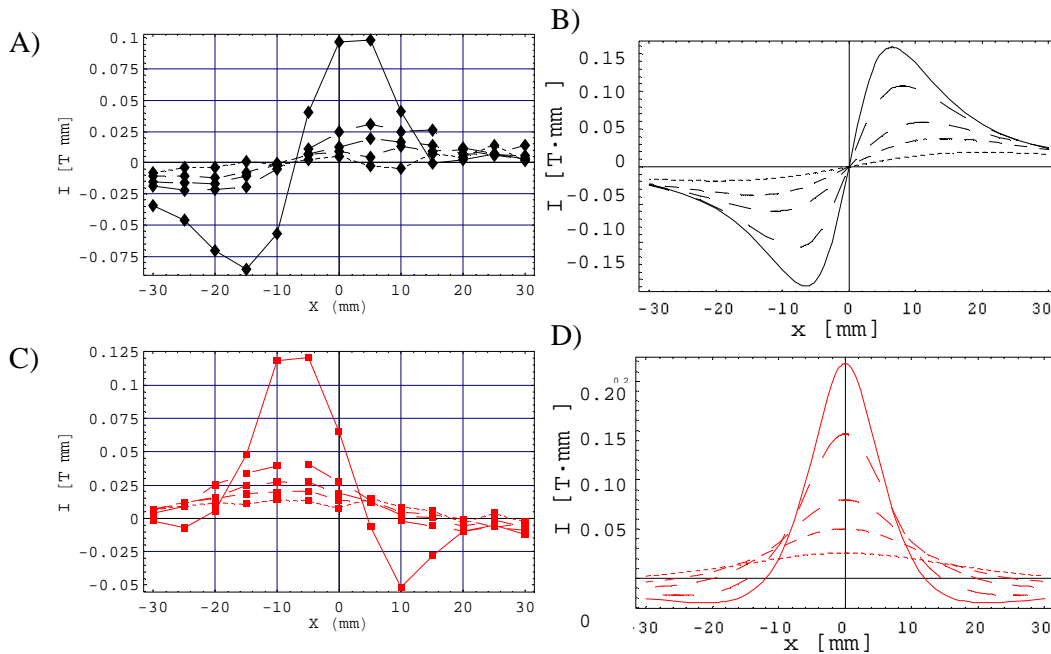


Figura 67: Integrals de camp a diferents separacions dels imants: a 7.75 mm (línea contínua), a 10 mm (línea segmentada), a 15 mm (2a línea segmentada), a 20 mm (3a línea segmentada) i a 30 mm (4a línea segmentada). A) Integral de la component horitzontal mesurada. B) Típica distribució de la component horitzontal de la integral per un imant uniformement imantat. C) Component vertical de la integral mesurada. D) Típica distribució de la integral de la component vertical per a un imant uniformement imantat.

El desacord que s'observa és molt més clar en aquest cas que en l'anterior. També en aquest cas, els errors de predicció decauen ràpidament. Per fer evident aquest punt, a la Figura 67 hem fet una comparació amb les integrals d'un bloc homogèniament imantat.

En aquesta configuració les integrals podrien estar afectades per les inhomogeneïtats. Per confirmar aquesta conjectura, mesurarem cadascuna de les cares dels blocs que han estat canviats de posició per passar de l'ordenament inicial al de l'arranjament optimitzat. Donat que en el primer cas, l'acord no era tant dolent, els blocs que han estat modificats de posició són els que amb més probabilitat contribueixen al desacord observat a la Figura 66. Per a una millor comprovació hauria estat més adequat mesurar tots els blocs, això no va ser possible per manca de temps.

Per una banda, coneixem les imantacions de cadascun dels blocs canviat de posició o orientació i, per tant, podem saber quin és l'efecte de canviar el bloc de posició o orientació (predit d'acord amb la imantació) sobre les integrals. Per altra banda, mesurarem les integrals de cadascun d'aquests blocs amb el fil tibant.

En general, si el bloc és inhomogeni, les integrals mesurades en cares oposades del bloc no seran equivalents, de forma que, si utilitzem només la informació que dóna la imantació per a ordenar (i orientar) els blocs, cometrem un error diferent segons la cara que quedi orientada al feix d'electrons.

Així doncs, si la diferència que observem a la Figura 66 es pot explicar a partir de la superposició de les diferències aportades pel fet de tenir les cares orientades de forma diferent, haurem demostrat que les inhomogeneïtats dels blocs són la causa de l'efecte.

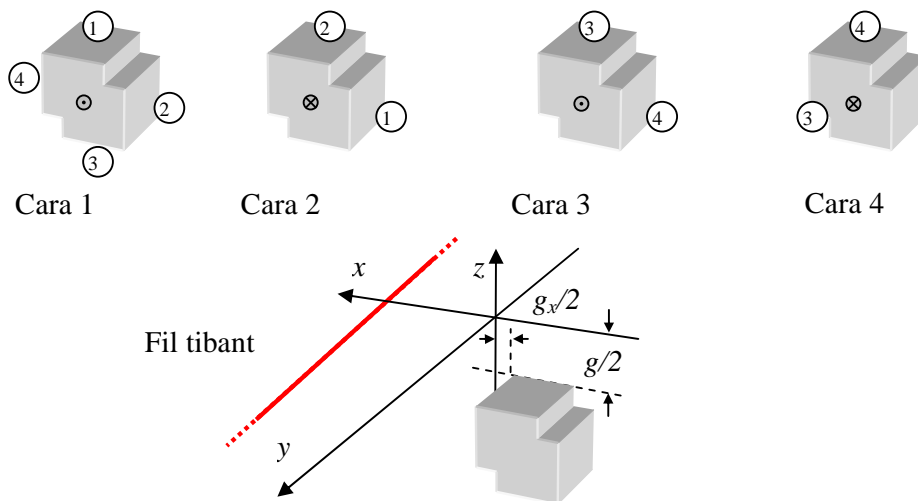


Figura 68: A la part superior es defineix el conveni per a la nomenclatura de les cares. A la part inferior, es mostra l'esquema de mesura de cadascuna de les cares amb el fil tibant.

En primer lloc, les integrals dels imants seleccionats es mesuren amb el fil tibant per a cadascuna de les seves cares. A la *Figura 68* podem veure esquemàticament com es duu a terme la mesura, i a la *Figura 69*, en mostrem els resultats.

Tal i com es pot veure a la *Figura 69*, les inhomogeneïtats són clarament mesurables, i expliquen les diferències entre les cares 1 i 3 i entre les cares 2 i 4. No en tots els casos mesurats hi ha la mateixa discrepància entre les prediccions i les mesures, és a dir la discrepància entre el model (imantació homogènia) i la realitat varia de bloc a bloc, però en tots els blocs mesurats la discrepància té una variació semblant al llarg de la coordenada x . Els valors màxims de desacord ronden els $0.02 T mm$, mentre que els valors RMS de desacord ronden els $0.006 T mm$, tal i com es pot veure a l'exemple de la *Figura 69*.

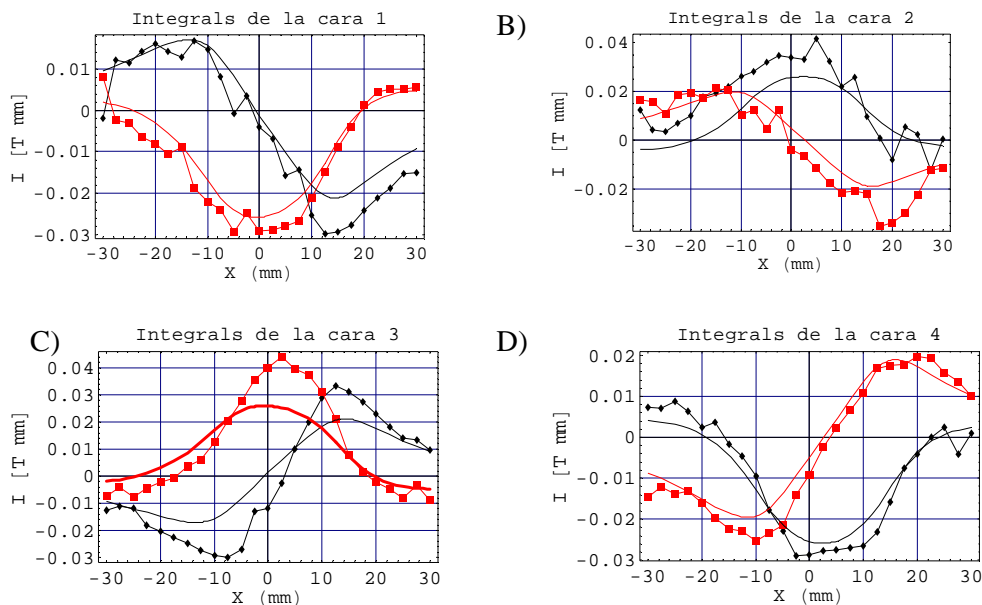


Figura 69: Integrals de camp per a un bloc de tipus B. Es mostra la comparació entre les dades calculades a partir del moment magnètic (línies contínues) i les mesures (línies amb punts) per a les coordenades horitzontal (en negre) i vertical (en vermell). A) Cara 1. B) Cara 2. C) Cara 3. D) Cara 4.

A la *Figura 70* es mostra la comparació entre les integrals de l'arranjament i la superposició lineal de les diferències entre les integrals predites a partir de la imantació i les mesures per a cadascun dels blocs reorientats en el nou arranjament.

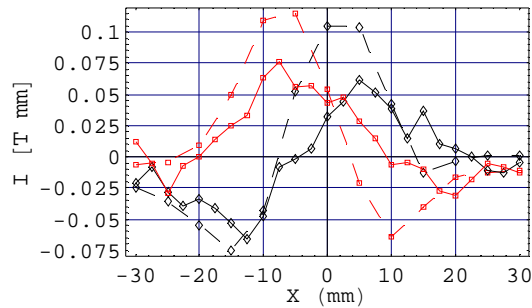


Figura 70: Comparació entre les integrals de camp mesurades al llarg de la direcció horitzontal, per a l'arranjament sencer (línea segmentada) i per a la superposició lineal de les inhomogeneïtats dels blocs dels quals s'ha modificat la orientació (línies contínues). En vermell es representa la component vertical i en negre la horitzontal.

4.2.1.5 Discussió

Les inhomogeneïtats es produeixen en el procés de compactació i imantació del material magnètic. Està comprovat que els efectes són més perceptibles quan la direcció d'imantació es paral·lela a la direcció segons la qual s'exerceix la pressió. En el cas que ens ocupa, aquestes direccions són perpendiculars una respecte de l'altra. Tot i això, s'observen diferències sistemàtiques (en la forma de les corbes, no en la seva amplitud) entre les integrals mesurades i les predites suposant una imantació homogènia. Tot i que es tracta d'una discrepància gran, de fins a 0.1 T mm , és molt més petita que les integrals que s'obtidrien en un arranjament pesimitzat (seguint el mateix algorisme esmentat però maximitzant les integrals i l'error de fase òptica en comptes de minimitzar-ho). És a dir, conèixer les imantacions, tot i que no permet predir acuradament les integrals, permet portar les integrals a valors raonablement baixos.

Una altra estratègia,⁷⁸ proposa fer servir les integrals mesurades dels blocs per compensar els defectes de l'ordenació basada exclusivament en la mesura de les imantacions tal i com es va indicar a la secció 2.2.2.

⁷⁸ J. Bahrtd et altr, *Magnetic field optimization of permanent magnet undulators for arbitrary polarization*, Nucl. Instr. and Meth. A 516 (2004) 575-585.

4.2.2. Muntatge i assaigs magnètics

4.2.2.1 Introducció

El suport mecànic de l'ondulator es va rebre al laboratori de mesures magnètiques d'Elettra amb el sistema de control inclòs. El suport conté sis motors, quatre per al moviment vertical de cadascuna de les rengleres superiors i inferiors, i dos per al moviment longitudinal dels arranjaments, uns respecte dels altres. La *Figura 71* mostra un esquema del suport mecànic.

Cadascun dels sis motors es controla amb un PLC (de l'anglès *Programmable logic control*). Les posicions de les bigues es mesuren amb 6 regles òptiques absolutes, cadascuna llegida pel PLC que controla la posició del motor corresponent. El control del conjunt es duu a terme amb una altre PLC que es connecta a un ordinador personal via cable telefònic. Quan es rep el suport, aquest ja ha estat testejat a la fàbrica, però l'assaig d'acceptació final es duu a terme al laboratori.

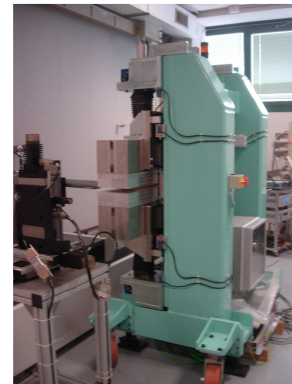
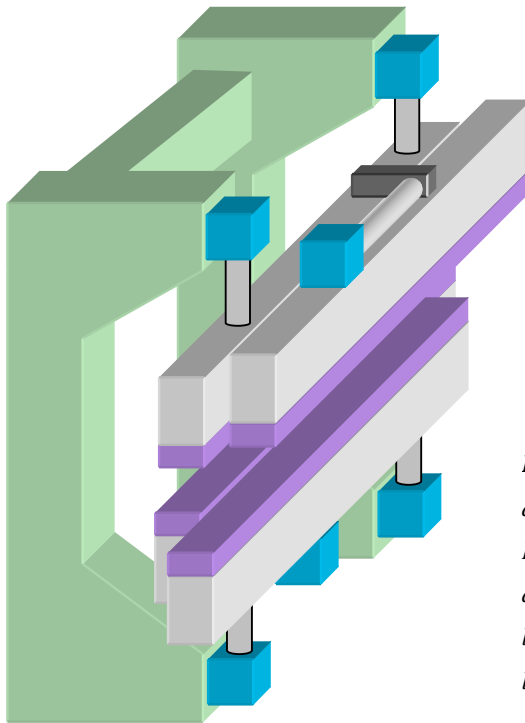


Figura 71: Esquema (a l'esquerra) i fotografia (a dalt) del suport mecànic d'un ondulator Apple II. Es representen en blau els sis motors, en lila els arranjaments magnètics, en gris les barres sobre les quals es munten els arranjaments i en verd l'estructura rígida del suport.

4.2.2.2 Muntatge

4.2.2.2.1 Abans de muntar

Cadascun dels blocs magnètics està subjectat per un contenidor d'alumini. Aquests contenidors no es munten directament sobre les bigues mogudes pels motors, sinó sobre una

sèrie de 4 planxes metàl·liques collades a cada biga.⁷⁹ Això, tot i que complica el muntatge, facilita l'alineament final dels blocs. Cal tenir en compte que les bigues són d'acer, molt pesades i difícilment alineables amb la precisió requerida (al voltant de les μm). A més, aquest sistema permet utilitzar el mateix tipus de suport per a ondulators diferents. Les planxes, en canvi, amb tots els seus orificis per collar-hi els contenidors, es dissenyen per a cada ondulator tenint en compte la grandària dels blocs. La *Figura 72* mostra l'esquema de muntatge de planxes i contenidors.

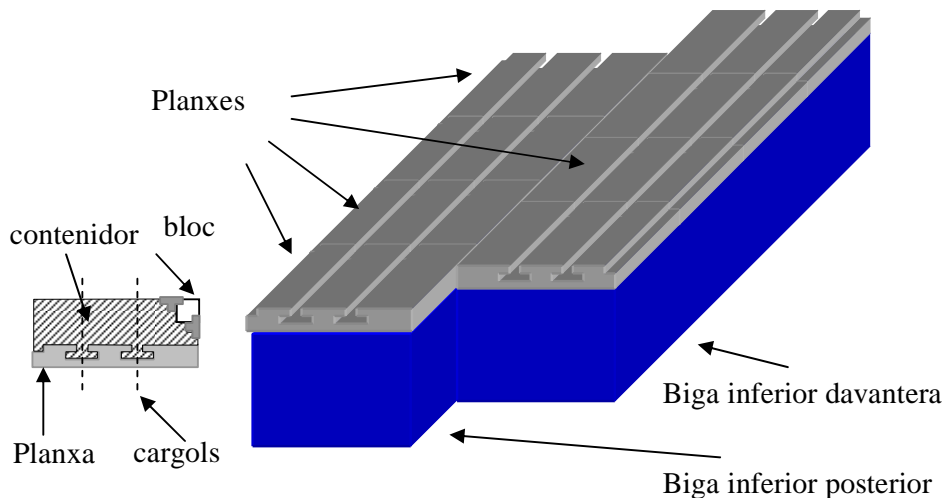


Figura 72: Configuració esquemàtica de les barres i les planxes on es munten els contenidors dels blocs.

El primer pas és alinear els regles òptics de forma que el zero coincideixi amb la posició per a l'entreferro mínim i la fase de l'ondulator zero. Aquest alineament es fa a ull nu, ja que no es crític, sinó que es duu a terme per facilitar l'alineament de les planxes metàl·liques.

Donat que el suport mecànic té un cert nivell de tolerància, les bigues inferior i superior no són perfectament paral·leles. De la mateixa manera, les bigues presenten un cert desalineament tant verticalment com longitudinalment.

Les planxes s'alineen simultàniament en els 4 quadrants (en les 4 bigues). Per tal de realitzar l'alineament de les planxes, els orificis dels cargols tenen un cert marge que permet ajustar-ne la posició. Per alinear totes les planxes amb la mateixa referència, es fa servir una barra de precisió mecanitzada amb una tolerància molt petita (de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$). Les planxes es referencien a la barra de guiatge gràcies a una sèrie de contenidors especials que les fan solidàries al sistema de referència de la barra (*Figura 73*).

⁷⁹ En general el nombre de planxes per biga depèn de la llargada de l'ondulator, en aquest cas se'n fan servir 4.

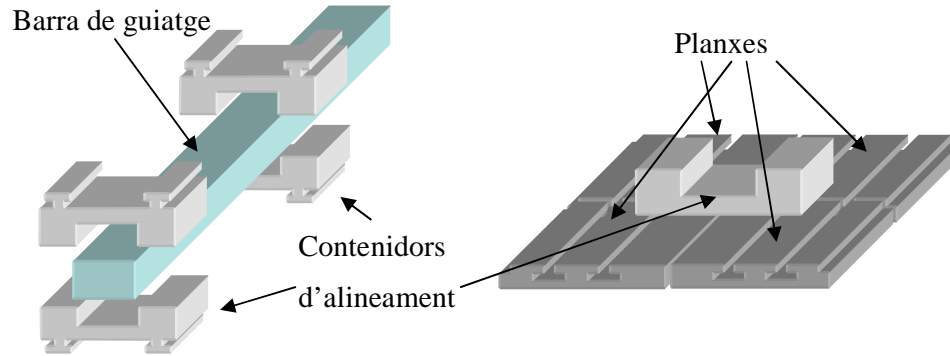


Figura 73: Esquema de les peces usades per a l'alineament de les planxes. Barra de guiatge i els contenidors que la fixen a les planxes.

Tant a les dues bigues inferiors com a les dues superiors, cada contenidor especial es fixa a 4 planxes simultàniament (veure *Figura 73*), excepte a les vores. Així doncs, s'utilitzen 5 contenidors especials per a les 8 planxes sobre les bigues superiors i 5 contenidors més per a les 8 planxes sobre les inferiors.

4.2.2.2 Muntatge

Un cop alineades les planxes, es procedeix a muntar els contenidors en què prèviament s'han muntat els blocs magnètics. En el cas d'un ondulator Apple II, s'han de muntar imants en rengleres molt properes, com és el cas de les dues de la part inferior (quadrants 3 i 4) i les dues superiors (quadrants 1 i 2). Cadascun dels contenidors, a part dels orificis per ser fixat, consta de dos forats per a passadors. Es tracta d'orificis amb toleràncies molt petites (de l'ordre de $10\ \mu\text{m}$), que permeten alinear els contenidors amb molta precisió (poques desenes de μm). Per evitar que en fixar el contenidor hi hagi influència dels imants veïns, cal planificar quins imants es munten primer, de forma que en cap moment es munti un bloc si en la biga adjacent hi ha un bloc en la mateixa posició longitudinal. Per tal d'aconseguir-ho cal muntar les dues bigues (anterior i posterior) simultàniament. Un cop es munta un contenidor es desplaça la biga (fent us del motor longitudinal de què disposa el mecanisme) i es procedeix a muntar el contenidor ubicat en la posició simètrica a l'altra biga.

4.2.2.3 Assaigs mecànics sota forces magnètiques

En l'ondulator complet, les forces entre els arranjaments depenen de llur posició relativa. Les bigues, les planxes i cadascun dels contenidors es desplaçaran o deformaran durant el canvi d'entreferro o de fase. La variació de la força és molt més abrupta en el cas de variar la fase. Cal tenir en compte que en variar la fase en mig període els blocs passen d'estar

orientats en la mateixa direcció que els seus veïns a la biga del quadrant adjacent a estar orientats en direcció oposada. Farem mesures de les deformacions i desplaçaments de les bigues per a diferents posicions de fase. El moviment de la fase indueix desplaçaments en totes les direccions. Ara bé, tant per a la separació segons la direcció x de les dues bigues com per al desplaçament segons la direcció y de la biga fixa el mecanisme no disposa de cap regla òptica i, per tant, durant l'operació amb l'ondulador no podrem controlar ni mesurar aquestes deformacions. Per avaluar els moviments segons la direcció z i la posició y de la biga mòbil, un cop fet el muntatge es mesuren directament amb les regles òptiques. Es duen a terme també comprovacions de la repetibilitat de l'entreferro i la velocitat de desplaçament.

4.2.2.3.1 *Moviment transversal de la biga mòbil*

Per mesurar el desplaçament de les bigues s'utilitza un comparador digital amb una resolució de $10\ \mu\text{m}$. La *Figura 74* mostra una imatge del sistema de mesura. Les mesures es realitzen per a diferents fases però totes a entreferro mínim, cas en què les forces, en cadascuna de les direccions, són màximes. El comparador es manté subjecte a una estructura solidària a l'estructura rígida del suport (estructura de color verd en la *Figura 71*), de forma que la seva posició no es veu afectada pel moviment de la fase.

No obstant això, com que cal mesurar la deformació horitzontal de la biga que es mou en la direcció longitudinal, si el moviment de la biga no és totalment perpendicular al comparador, es mesurarà una un desplaçament horitzontal fictici, que canviarà linealment amb la fase.

En primer lloc es van realitzar mesures directament sobre la superfície de les bigues. En aquest cas, es van trobar valors per sota de la resolució del comparador.

Els contenidors, que són d'alumini en comptes d'acer, són més petits i tenen menys rigidesa que la biga. Estem interessats en el desplaçament dels contenidors, però no volem informació de cada un en particular, ja que en un període els quatre contenidors es mouran de forma diferent. A més, mesurant els contenidors directament, les mesures es veurien influenciades per les seves irregularitats. Per suavitzar les contribucions dels contenidors individuals utilitzem una barra d'acer fixada als contenidors interposada entre aquests i el comparador.

Cal que aquesta barra s'alineï totalment perpendicular al comparador, en cas contrari, com ja hem dit més amunt, s'afegirà, a la mesura del desplaçament horitzontal, una dependència lineal amb la fase.

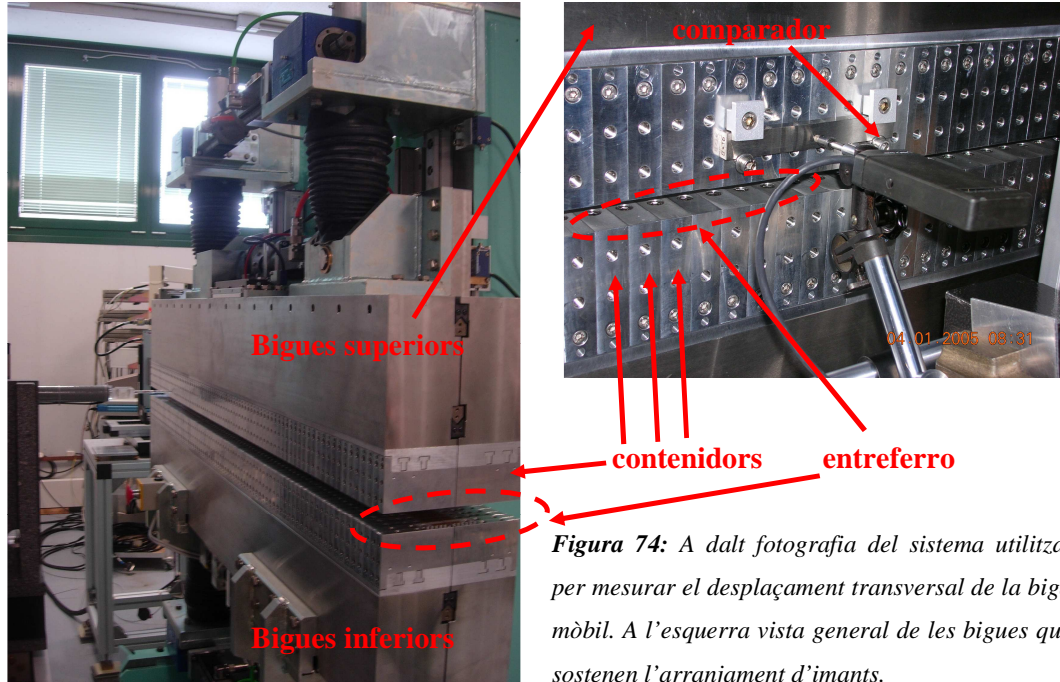


Figura 74: A dalt fotografia del sistema utilitzat per mesurar el desplaçament transversal de la biga mòbil. A l'esquerra vista general de les bigues que sostenen l'arranjament d'imants.

Els contenidors no es deformen la mateixa quantitat en posicions diferents en la biga. Per comprovar-ho, el desplaçament es mesura en tres posicions diferents al llarg de la biga: a les bandes i al centre. Els resultats es poden veure a la *Figura 75*.

Les mesures dels contenidors centrals (cercles vermells) presenten una certa desviació lineal respecte de les altres. Tot i això els valors no arriben a les $100 \mu\text{m}$, i per sota d'aquesta cota els efectes sobre el camp magnètic són negligibles. Cal remarcar que estem parlant d'errors sistemàtics. Els errors no sistemàtics (errors en la repetibilitat) que es poden permetre són molt més petits. Les especificacions els fixen a $5 \mu\text{m}$ en el control de la fase i $1 \mu\text{m}$ per a l'entreferro.

En principi, les forces segons la direcció x són iguals, tant en el mode paral·lel com en l'antiparal·lel, tal i com mostra la *Figura 76*. A les mesures, els valors de la deformació en aquesta direcció són similars en magnitud, però presenten una dependència amb la fase diferent. La força és la mateixa, però en els dos modes la posició de les bigues és diferent, per tant la deformació que es produirà en funció de la fase de l'ondulator serà també diferent.⁸⁰ A més, les components de la força en les altres direccions són molt diferents en els dos modes. Aquests fets poden explicar la resposta diferent en cada mode.

⁸⁰ En el cas del mode paral·lel, les bigues sempre queden encorquades, en el mode antiparal·lel no.

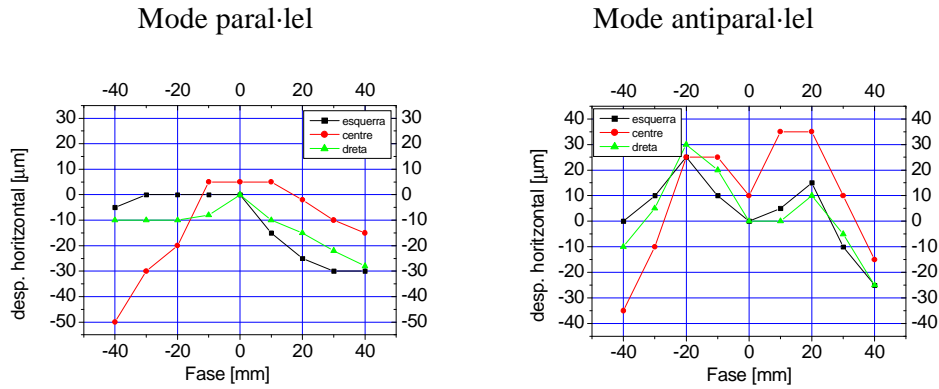


Figura 75: Desplaçament transversal de diferents grups de contenidors de la biga mòbil, situats a la banda esquerra (quadrats negres), al centre (cercles vermells) i a la banda dreta (triangles verds) de l'ondulator.

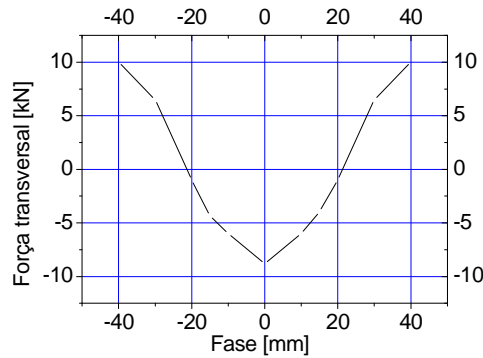


Figura 76: Força segons la direcció x calculada en les simulacions per a diferents posicions de la fase. És la mateixa en el mode paral·lel que en l'antiparal·lel.

4.2.2.3.2 Moviment longitudinal de la biga fixa

Es fa servir el mateix aparell que en el cas anterior, però amb un arranjament diferent adaptat a mesurar el moviment longitudinal (segons l'eix y) de la barra fixa. Com en el cas anterior, es mesura sobre un conjunt de contenidors, el moviment dels quals té també en compte el moviment de les planxes i de la biga. La *Figura 77* mostra una fotografia del sistema de mesura.



Figura 77: Fotografia del sistema per mesurar les deformacions longitudinals de la biga fixa.

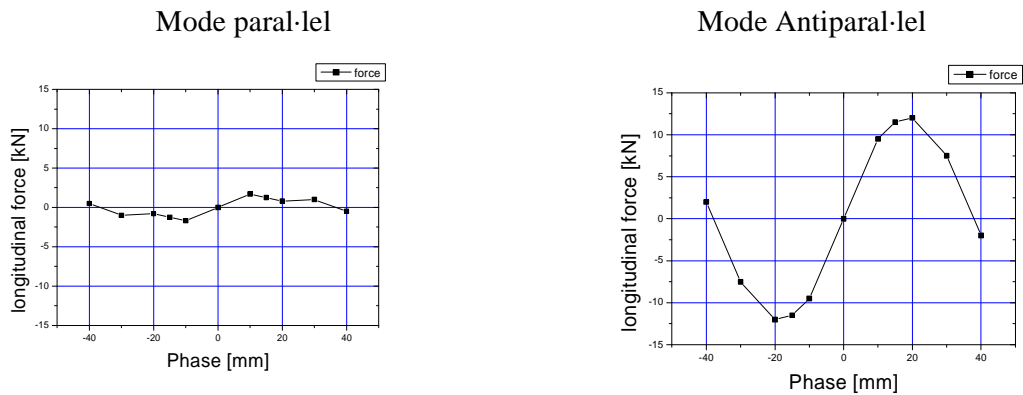


Figura 78: Força magnètica longitudinal (eix y) simulada amb Radia per a diferents valors de la fase. És molt més gran en el cas del moviment antiparal·lel.

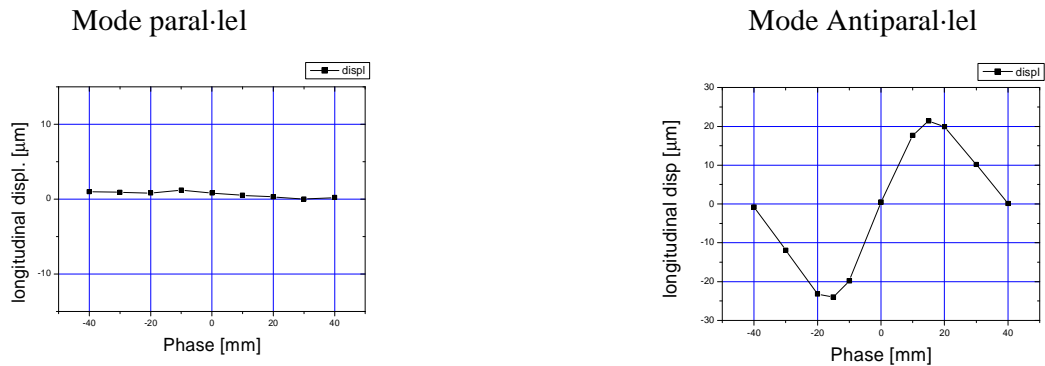


Figura 79: Desplaçament longitudinal per a diferents posicions de la fase.

Aquest cop la direcció de la força que es mesura és paral·lela a la direcció segons la qual estan alineats els contenidors. Això fa que el comportament diferent de cada contenidor quedi suavitzat. Així, a la *Figura 79* podem observar com l'evolució de la deformació amb la fase

es mol suau. En el cas del mode paral·lel, el desplaçament està per sota de la resolució de l'instrument ($10 \mu\text{m}$).

4.2.2.4 Conclusions

Els resultats ens indiquen que el sistema mecànic, tot i la seva gran rigidesa, presenta unes variacions que depenen de la fase, encara que no són crítiques.

La *Figura 80* mostra les mesures de la variació de la primera integral de camp amb la fase de l'ondulator tant en mode paral·lel com antiparal·lel. Els valors tenen com a referència el valor a fase zero: 0.36 Tmm per a la component horitzontal i 0.17 Tmm per a la component vertical. La *Figura 81* mostra la els corresponents valors simulats amb Radia.⁸¹ En qualsevol cas, la variació total és propera a 0.4 Tmm .

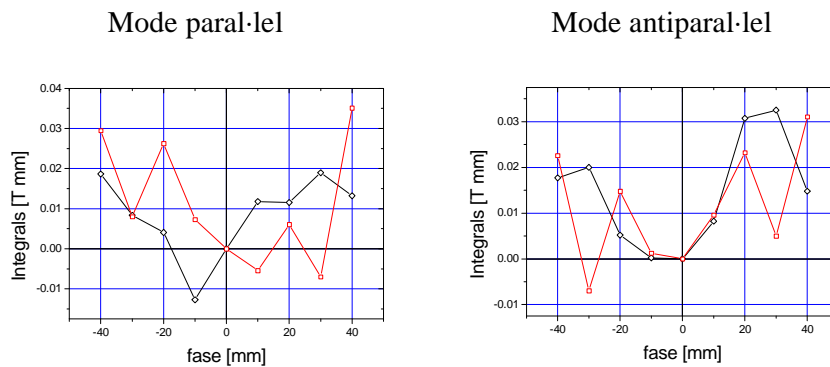


Figura 80: Variació de les integrals de camp mesurades respecte del valor per a fase zero. Es mostra la component horitzontal (valor central: 0.36 Tmm) en rombes negres i la component vertical (valor central: 0.17 Tmm) en quadrats vermells.

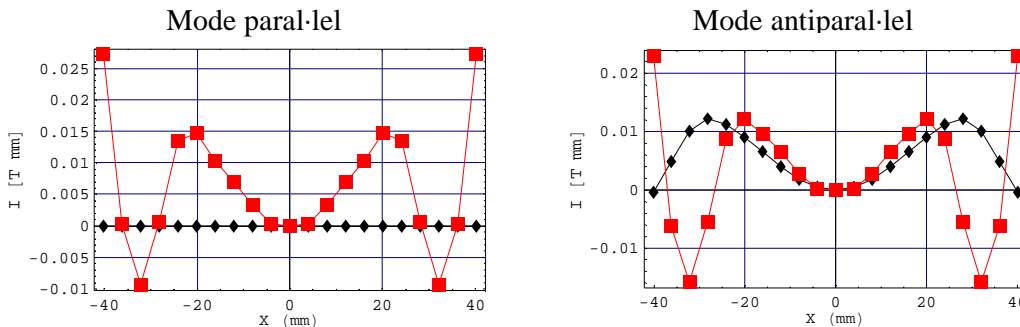


Figura 81: Variació de la integral de camp simulada amb Radia. Es mostra la component horitzontal (rombes negres) i la component vertical (quadrats vermells).

⁸¹ Radia 4.1, April 1997. Download at: <http://www.esrf.fr/Accelerators/Groups/InsertionDevices/Software/Radia>.

La correspondència entre les mesures és molt dolenta, però cal tenir en compte que en el model no s'han pogut tenir en compte, ni tan sols, els errors d'imantació.⁸² A més, les discrepàncies també poden tenir el seu origen en les forces magnètiques, les toleràncies en el muntatge o l'alineament de les bigues entre altres fonts d'imperfeció.

En general, la independència de les integrals i l'error de fase òptica amb la fase és una clara prova de les bones qualitats del suport mecànic. En aquest cas, tot i que, en funció de la fase, existeix una variació important de les integrals (de l'ordre d'algunes vegades 0.01 T mm, veure *Figura 81* i *Figura 80*). Com ja veurem a l'apartat següent, aquesta variació té una magnitud un ordre de magnitud per sota de la variació de la integral en funció de la coordenada x .

4.2.3. Procés d'ordenació de blocs

4.2.3.1 Introducció

Els processos d'ordenació de blocs poden ser diferents depenent de la qualitat i de la linealitat dels blocs magnètics així com de la mida de l'entreferro de l'ondulator. Per a entreferros petits (~ 10 mm), fins i tot amb blocs d'alta qualitat magnètica, les inhomogeneïtats del material poden jugar un paper important.

Tot depèn doncs de quina és la font d'errors dominant. Si la font més important són les components dipolars, es pot dur a terme un procés d'ordenació basat en la mesura de les imantacions mitjanes (mesurades amb les bobines Helmholtz per exemple). Si la font principal d'errors són les inhomogeneïtats, aleshores el procés d'ordenació no es pot basar només en les imantacions dels blocs, sinó que cal fer mesures de les integrals (amb el fil tibant) o/i del camp magnètic (amb la sonda Hall).

En el cas que ens ocupa, l'entreferro és de 15 mm. No és un entreferro particularment petit però, com hem vist a l'apartat 4.2.1, és just a la frontera on el model d'imantació uniforme encara és adient. Per això es va optar per seguir emprant aquest tipus de tècnica d'ordenació. En qualsevol cas, com discutirem més endavant, canviar de mètode d'ordenació té associats una sèrie de costos de temps i econòmics.

⁸² No es pot simular sencer l'ondulator amb permeabilitat finita (per qüestions de limitació de memòria i temps), de forma que només es simulen uns pocs períodes, 5 en el nostre cas.

El procés d'ordenació involucra una optimització, per això cal definir una funció de mèrit (o de cost), un espai de paràmetres (o espai de configuracions possibles) i un algorisme de minimització.

4.2.3.2 Espai de configuració

Un cop mesurades les imantacions, a cada bloc magnètic se li assigna un número. L'ondulator té un número donat de posicions per als blocs i , com ja sabem, els blocs tipus A (eix d'imantació vertical: direcció z) i B (eix d'imantació longitudinal: direcció y) tenen posicions alternades. Per a cada posició, un bloc tipus A només té una orientació possible. En canvi, per a cada posició, un bloc tipus B té dues orientacions possibles. Per tal de tenir en compte aquesta ambigüitat, s'introdueix el paràmetre de normalitat. Un bloc A té sempre normalitat 1 (normal), però un bloc B pot tenir normalitat 1 (posició normal) o -1 (posició invertida). El significat d'aquest paràmetre es pot visualitzar a la *Figura 82*. Per definició, un bloc tipus B en posició normal a qualsevol quadrant sempre presenta la mateixa cantonada a la part interior. En canvi, un bloc A, no.

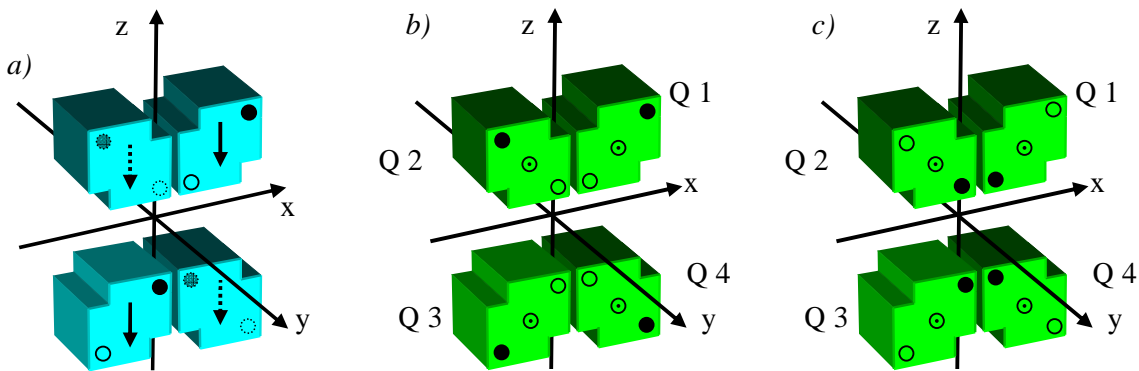


Figura 82: En aquest esquema es defineix el sistema de coordenades i els quadrants (Q1, Q2, Q3, Q4) de l'ondulator. a) Bloc tipus A orientat en la mateixa direcció (-z) en cada un dels 4 quadrants de l'ondulator. b) Bloc tipus B orientat en la mateixa direcció (+y) i normalitat (+1) en cada un dels 4 quadrants de l'ondulator. c) Bloc tipus B orientat en la mateixa direcció (+y) i normalitat (-1) en cada un dels 4 quadrants de l'ondulator. (les línies puntejades indiquen una rotació de 180° respecte de l'eix vertical z).

Per tant, un vector a l'espai de configuracions conté les posicions de l'ondulator amb un número d'imant assignat i , en el cas de les posicions dels blocs tipus B, un valor per a la normalitat.

4.2.3.3 Funció de mèrit de l'optimització

La funció de mèrit conté les integrals de camp al llarg de l'eix y produïdes per cadascuna de les quatre rengleres $I_{x,z}^{i,j}(x)$ (on i , que va de 1 a 4, indica el quadrant en que se situa la renglera i j , que va de 1 a N_g , indica en quin entreferro es calcula) i la suma d'elles per els quatre quadrants (integrals totals produïdes per l'ondulator), els multipols de les integrals de l'ondulator sencer $I_{x,z}^{j,Q}$, $I_{x,z}^{j,S}$, $I_{x,z}^{j,O}$ i $I_{x,z}^{j,D}$ (on els índexs Q, S, O i D designen els coeficients Quadrupolar, Sextupolar, Octupolar i Decapolar), l'error de fase òptica per a cadascun dels quatre quadrants $\sigma_\phi^{i,j}$ i la de tot l'ondulator σ_ϕ^j i la segona integral $J_{x,z}^{i,j}(x)$ i els seus multipols $J_{x,z}^{j,Q}$, $J_{x,z}^{j,S}$, $J_{x,z}^{j,O}$ i $J_{x,z}^{j,D}$. Totes aquestes quantitats es calculen per a diversos valors de l'entreferro; que típicament, per no alentir molt el càlcul; prenem com a $N_g=3$. Tota aquesta informació es pot obtenir a partir de fórmules analítiques del camp generat per a un paral·lelepípede uniformement imantat amb permeabilitat I . Introduir efectes de permeabilitat no milloraria substancialment el procés d'ordenació, ja que degut a la naturalesa oscil·lant del camp magnètic de l'ondulator, l'efecte es compensa a la zona periòdica. La influència de la permeabilitat es produeix doncs només en els extrems. La funció de mèrit C és l'arrel de la suma dels quadrats dels termes que la componen, on cada terme està normalitzat a I . Per normalitzar els diferents termes de la funció de mèrit, l'algorisme d'ordenació inclou una rutina que busca el valor mitjà de cada terme en un cert nombre de punts de l'espai de paràmetres aleatoris.

$$\begin{aligned}
C^2 = & c_I \sum_{j=1}^{N_g} \left[\sum_{i=1}^4 \left[\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} I_{x,z}^{i,j}(x)^2 dx \right] + \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\sum_{j=1}^4 I_{x,z}^{i,j}(x) \right)^2 dx \right] \\
& + c_J \sum_{j=1}^{N_g} \left[\sum_{i=1}^4 \left[\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} J_{x,z}^{i,j}(x)^2 dx \right] + \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\sum_{j=1}^4 J_{x,z}^{i,j}(x) \right)^2 dx \right] \\
& + c_{IQ} \sum_{j=1}^{N_g} I_{x,z}^{j,Q^2} + c_{IS} \sum_{j=1}^{N_g} I_{x,z}^{j,S^2} + c_{IO} \sum_{j=1}^{N_g} I_{x,z}^{j,O^2} + c_{ID} \sum_{j=1}^{N_g} I_{x,z}^{j,D^2} \\
& + c_{IQ} \sum_{j=1}^{N_g} J_{x,z}^{j,Q^2} + c_{IS} \sum_{j=1}^{N_g} J_{x,z}^{j,S^2} + c_{IO} \sum_{j=1}^{N_g} J_{x,z}^{j,O^2} + c_{ID} \sum_{j=1}^{N_g} J_{x,z}^{j,D^2} \\
& + c_\sigma \sum_{j=1}^{N_g} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\sigma_\phi^{i,j} \right)^2 + \sigma_\phi^j \right]
\end{aligned} \tag{4-3}$$

on els coeficients c són les constants de normalització.

4.2.3.4 Algorisme d'optimització

El *Simulated annealing* està consolidat com a algorisme d'optimització per realitzar els processos d'ordenació i correcció en ondulators. Es tracta d'un algorisme específicament encarat a espais de paràmetres discrets, com és el cas que tractem. És senzill i ofereix molta flexibilitat: podem escollir nosaltres mateixos els moviments en l'espai de configuració. Aquest fet és rellevant, ja que els moviments que permetem a l'algorisme determinaran la velocitat de convergència del procés d'optimització.

4.2.3.4.1 Moviments en l'espai de configuració

Es poden implementar un gran nombre de moviments diferents, aquí en considerarem 5.

- Moviment 1: Intercanviar les posicions de dos blocs tipus A.
- Moviment 2: Canviar un bloc tipus A de l'ondulator per un de sobrant no utilitzat.
- Moviment 3: Intercanviar les posicions de dos blocs tipus B.
- Moviment 4: Canviar un bloc tipus B de l'ondulator per un de sobrant no utilitzat.
- Moviment 5: Canvi de normalitat d'un bloc tipus B.

Cadascun d'aquests moviments implica generar un o varis nombre aleatoris. Per exemple, en el cas del moviment 5, cal escollir aleatòriament el bloc al que se li canviarà la normalitat. La selecció de quin d'aquests 5 moviments s'intentarà realitzar també comporta la generació d'un nombre aleatori.

4.2.3.5 Resultats

El programa d'ordenació no inclou els efectes derivats de la permeabilitat. Així, per exemple, no inclou com canviaran les integrals amb el canvi de la fase o de l'entreferro. Per tant, com a conseqüència del procés d'ordenació, hi haurà inevitablement integrals i errors residuals de fase òptica.

Ara bé, la variació d'aquestes magnituds amb la fase i l'entreferro no es veu afectada pels errors magnètics, ja que en principi depèn només de la permeabilitat del material. Els efectes de la permeabilitat estan relacionats amb el valor del camp magnètic que generen els blocs sobre els seus blocs veïns.

En canvi, les corbes de les integrals $I_{x,z}(x,z)$ no depenen tant del valor absolut del camp com de la compensació dels camps que generen els blocs. Per contra, els errors magnètics (tant

segons la direcció d'imantació com en la seva homogeneïtat), si no són exageradament grans, no afecten significativament la interacció entre blocs veïns i, en canvi, tenen un impacte directe sobre les corbes de les integrals $I_{x,z}(x,z)$. Pel mateix argument, els efectes de permeabilitat no depenen de l'ordenació dels blocs.

A la pràctica, com ja hem vist, hi ha dependències addicionals que tenen el seu origen en la deformació de l'estructura conforme es canvia l'entreferro o la fase de l'ondulator. En qualsevol cas, donada la funció de mèrit que hem escollit, els resultats de l'ordenació es faran palesos en un entreferro o fase qualsevol. En general, per simplicitat, aquí els presentem a fase zero i entreferro mínim.

4.2.3.5.1 Integrals

Tenint en compte quins són els nivells als que volem arribar (veure secció 4.1.2), tant la primera com la segona integral mostren resultats dolents, tal i com es pot veure a la Figura 84 i a la Figura 85, però acceptables tenint en comte que hi haurà correccions posteriors.

Ara bé, es tracta de valors molt millors del que s'obtidrien en el cas d'haver muntat l'ondulator sense un ordre preestablert (veure *Figura 83*). En aquest cas les integrals arriben a valor molt grans, de fins a $2 T mm$ per la primera integral i $6 T mm$ per la segona.

En l'ondulator un cop muntat segons la configuració òptima, La primera integral no sobrepassa els $0.5 T mm$ mentre que la segona integral es manté per sota de $0.2 mT m^2$. En un anell de $3 GeV e$, $0.1 T mm$ equival a una desviació de l'òrbita dels electrons de $10\mu rad$ i $0.1 mT m^2$ equival a $10\mu m$ de desplaçament de l'òrbita. Des del punt de vista de l'accelerador, $10\mu rad$ de desviament són més difícils de corregir que $10\mu m$ de desplaçament. La reducció de la primera integral serà doncs el primer objectiu en la fase de correcció.

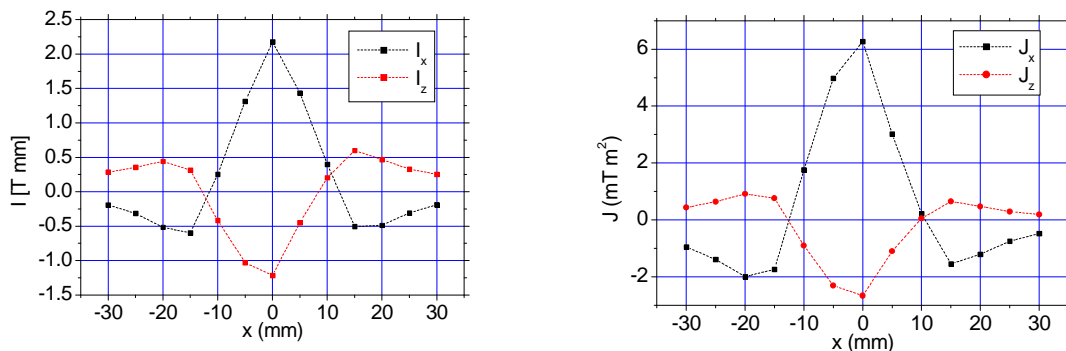
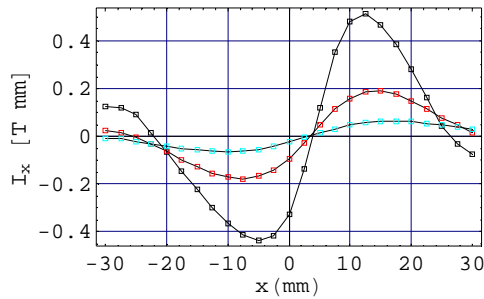


Figura 83: Integrals primeres i segones avaluades al llarg de la direcció x (a entreferro mínim). Aquest seria el resultat per a una ordenació aleatòria dels blocs.

Component horitzontal de la primera integral



Component vertical de la primera integral

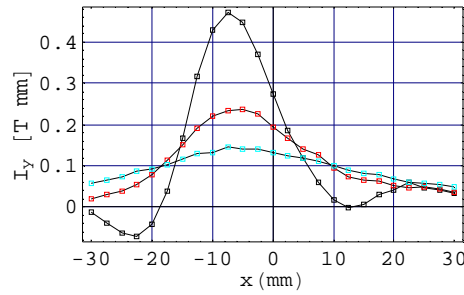
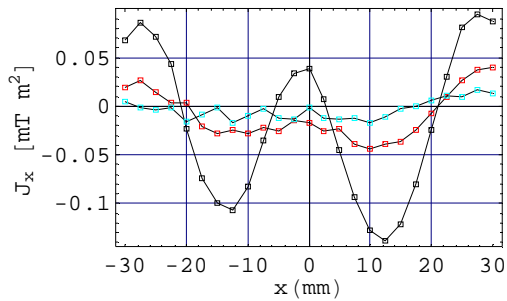


Figura 84: Integrals mesurades amb el fil tibant al llarg del pla mig de l'ondulator per a tres entreferros diferents: 15.5 mm (punts negres), 30 mm (punts vermells) i 50 mm (punts blaus).

Component horitzontal de la segona integral



Component vertical de la segona integral

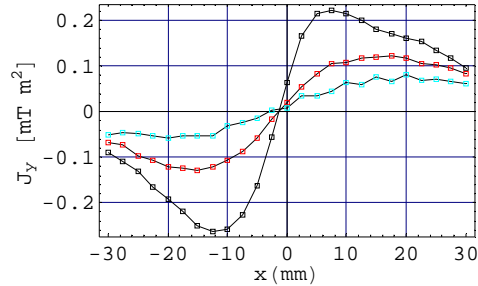


Figura 85: Segones integrals mesurades amb el fil tibant al llarg del pla mig de l'ondulator per a tres entreferros diferents: 15.5 mm (punts negres), 30 mm (punts vermells) i 50 mm (punts blaus).

4.2.3.5.2 Error de fase òptica i trajectòria

A entreferro mínim i a fase zero, l'error de fase òptica mesurat és de 2° . Aquest valor tan baix no pot ser fruit d'una ordenació aleatòria. En una distribució aleatòria dels blocs obtenim, via simulacions, un error de fase de 5° . Així doncs, el valor mesurat, reflecteix clarament que l'ordenament ha complert el seu paper.

Un altre punt positiu és que la trajectòria (que és aproximadament igual a la segona integral) a la zona periòdica és lineal *a trossos*, és a dir, que excepte a certs punts on hi ha canvis bruscos de la direcció del feix, la curvatura de la trajectòria és zero. Això pronostica una correcció fàcil. En una ordenació aleatòria, no obtindríem aquest comportament. Efectivament, per a una ordenació aleatòria, la trajectòria presenta una clara curvatura (*Figura 86*). En canvi, això no succeeix en el cas de les integrals mesurades per la configuració òptima (*Figura 87*)

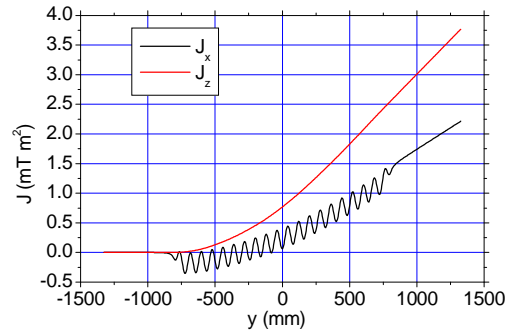


Figura 86: Segona integral calculada a partir de les simulacions de una ordenació de blocs aleatòria.

Component horitzontal de Segona integral

Component vertical de la segona integral

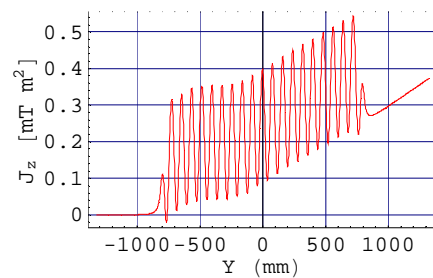
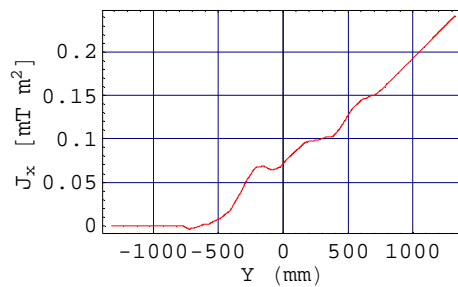


Figura 87: Segona integral calculada a partir de la doble integració dels valors del camp magnètic mesurats amb la sonda Hall al llarg de l'eix de l'ondulator.

4.2.4. Procés de correcció

4.2.4.1 Introducció

Com ja hem esmentat a l'apartat 2.2.3, a Elettra s'implementa una correcció de l'ondulator mitjançant desplaçaments dels blocs. En principi podem desplaçar tant blocs de tipus A com blocs de tipus B. Ara bé, per simplificar i evitar esforços innecessaris, la correcció es fa en dos passos. En un primer pas, només es desplacen blocs tipus A. El desplaçament vertical (eix z) o horitzontal (eix x) dels blocs A afectarà tant a les integrals com a la trajectòria i a l'error de fase. En canvi, desplaçaments dels blocs B només tenen una influència marginal sobre les integrals $I_{x,z}(x,z)$. Només es realitzarà un segon pas desplaçant els blocs B si l'error de fase òptica requereix d'una correcció addicional després d'haver implementat la correcció amb el desplaçament dels blocs de tipus A.

4.2.4.2 Espai de configuració

Com hem dit, cada bloc de tipus A pot ser desplaçat bé verticalment (acostant-se a l'eix de l'ondulator) o horitzontalment (separant-se de l'eix de l'ondulator). A la *Figura 88* en podem veure un esquema. Per simplificar l'algorisme requerit en la correcció, no es permeten desplaçaments continus dels blocs, sinó que el problema es fa discret: els blocs es mouen en unitats de 0.05 mm . Per altra banda, el desplaçament màxim per a cada bloc és de 0.25 mm , això implica que la reducció de l'entreferro mecànic pot ser, com a molt, de 0.50 mm , és a dir, que l'entreferro mecànic es manté sempre per sobre de 15.00 mm (recordem que l'entreferro magnètic és de 15.50 mm).

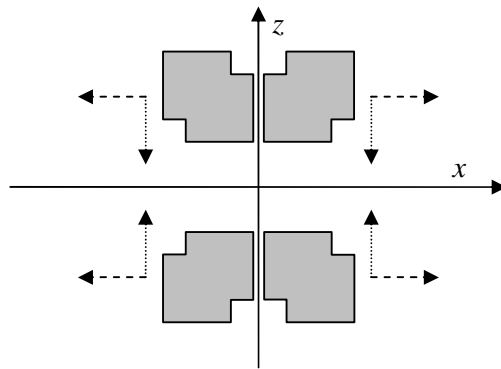


Figura 88: Vista esquemàtica de la secció de l'ondulator. Les fletxes segmentades indiquen el desplaçament del bloc per efectuar la correcció en la direcció horitzontal i les fletxes puntejades indiquen l'equivalent segons la direcció vertical.

Per simplicitat, els imants de les terminacions no s'inclouen en el procés de correcció. L'espai de configuració té doncs el nombre de blocs A que caben en un arranjament (38: recordem que cada un dels 4 arranjaments té 19 períodes) multiplicat per 4 i multiplicat pel nombre de desplaçaments diferents que podem tenir per a cada bloc (6: de 0.00 mm fins a 0.25 mm). Així doncs, el nostre espai de configuració té dimensió 912.

4.2.4.2.1 Implementació mecànica

Es fan servir dos tipus diferents de contenidors. Del primer d'aquest tipus ja n'hem parlat: es tracta dels contenidors que han estat utilitzats per muntar la configuració inicial. Hi ha però un altre tipus de contenidors especialment adaptats per a aquells imants els quals s'han de desplaçar. A la *Figura 89* es mostra l'esquema d'ambdós tipus de contenidors. Aquesta solució mecànica es va adoptar a Elettra després de molts anys d'experiència.

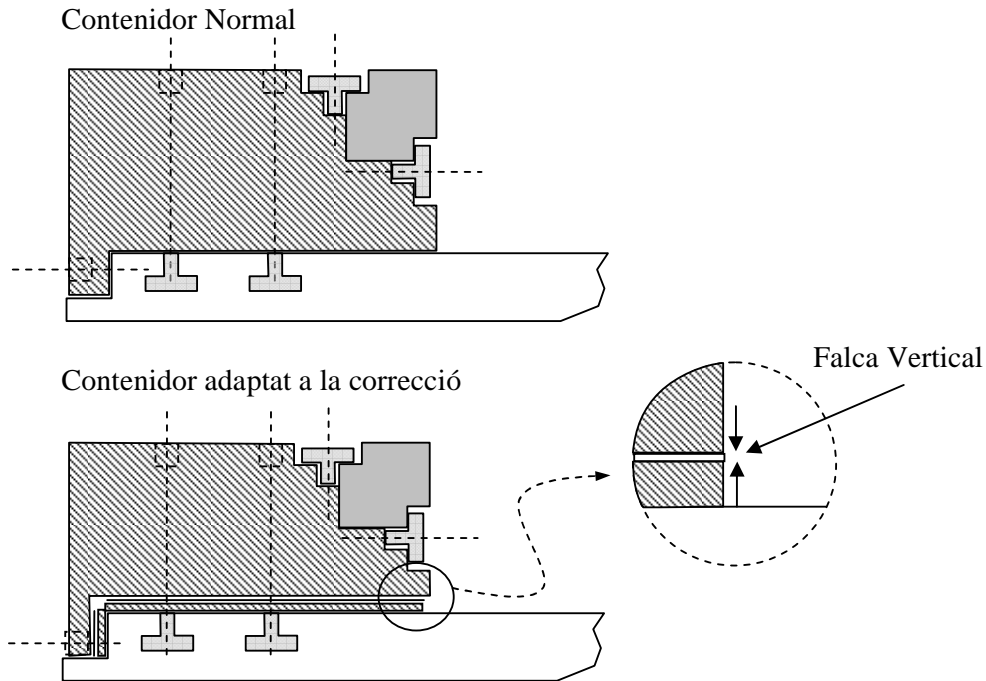


Figura 89: Esquema dels dos tipus de contenidors que es fan servir en la correcció de l'ondulator. Per raons mecàniques, es preferible no fixar els contenidors amb les falques directament sobre el suport.

4.2.4.3 Funció de mèrit

La funció de mèrit és conceptualment la mateixa que en el procés d'ordenació; ara bé, en aquest cas, la forma de construir-la és diferent (veure l'equació (4-3)). La funció de mèrit conté la primera i segona integral al llarg de l'eix x , els seus termes multipolars i l'error de fase òptica total, tot això calculat per a tres entreferros diferents. Per aconseguir aquesta informació per a cada configuració de l'espai de paràmetres, necessitem les mesures de les integrals amb el fil tibant i les mesures del camp magnètic al llarg de l'eix de l'ondulator amb la sonda Hall. Per altra banda necessitem saber quin és l'efecte sobre les integrals i sobre el camp d'un desplaçament unitari. Tant les variacions de les integrals com les dels camps induïts per un desplaçament unitari (ho anomenarem signatura del desplaçament) depenen molt poc dels errors i inhomogeneïtats particulars del bloc que es desplaça. De fet, la signatura del desplaçament està molt ben correlacionada només amb la imantació promig del bloc i la seva geometria. Així doncs, per comoditat i per precisió, les signatures dels desplaçaments es calculen amb Radia en comptes de ser mesurades. A més, un cop es prova la linearitat de les signatures dels desplaçaments, l'efecte per a desplaçaments no unitaris pot ser

extrapolat. Per raons de simetria, només cal la signatura d'un bloc de tipus A en una orientació particular en un quadrant particular. Amb rotacions de 180° respecte als eixos de l'ondulator obtenim la signatura del desplaçament en altres quadrants o amb imantacions de signe oposat. En bona aproximació, les integrals i els camps de les signatures compliran el principi de superposició, i per tant les integrals i els camps de les signatures dependran poc de la fase de l'ondulator. Les integrals de l'ondulator i l'error de fase òptica depenen de la fase de l'ondulator, però aquesta dependència és intrínseca a la disposició dels blocs, depèn del disseny de les terminacions, i no canviarà si simplement desplaçem lleugerament un bloc. Per això no es fan mesures dels paràmetres a diferents fases de l'ondulator. A la *Figura 90* es mostren les signatures en el camp i les integrals produïdes per un desplaçament unitari d'un bloc en el tercer quadrant amb la imantació positiva (el vector de la imantació apunta cap a les z positives).

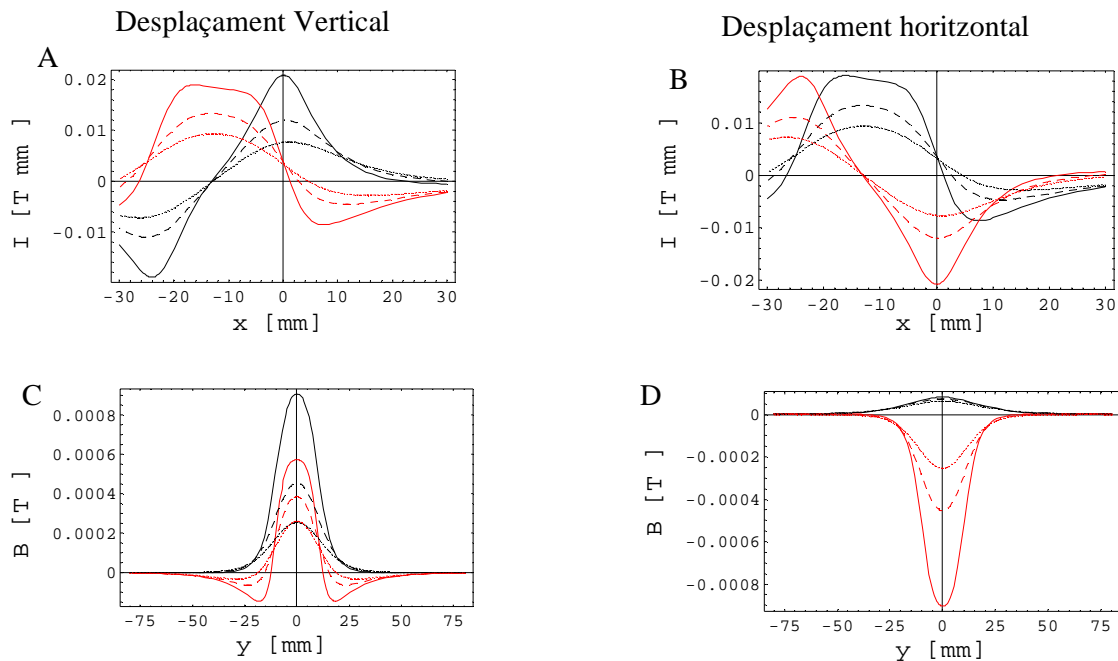


Figura 90: Signatures dels desplaçaments verticals i horitzontals unitaris (0.05 mm) per a tres entreferros diferents: 15.5 mm (línia continua), 23 mm (línia segmentada) i 31 mm (línia puntejada). En negre es representen les components horitzontals i en vermell les verticals. A: Integrals de camp de la signatura del desplaçament vertical. B: Integrals de camp de la signatura del desplaçament horitzontal. C: Camp de la signatura del desplaçament vertical al llarg de l'eix de l'ondulator. D: Camp de la signatura del desplaçament horitzontal al llarg de l'eix de l'ondulator.

Es van fer proves de linearitat de les signatures, és a dir, es va comprovar que en augmentar el desplaçament del bloc, l'efecte sobre el camp i les integrals augmenta proporcionalment. El coeficients trobats es mostren a la Taula 13.

Signatura	Coefficients ajustats
integral horitzontal	0.4156 Tm / m
Integral vertical	0.4226 Tm / m
Camp horitzontal	18.074 T / m
Camp vertical	18.439 T / m

Taula 13: Coeficients lineals de les signatures.

Així doncs, a partir de la signatura unitària, podem calcular qualsevol altra signatura multiplicant pel nombre de desplaçaments unitaris que es realitzen. També, per a cada conjunt de desplaçaments dels blocs de tipus A de l'ondulator podem calcular fàcilment les funcions de mèrit fent ús del principi de superposició. Si volem predir l'efecte d'un conjunt de desplaçaments, cal afegir, al camp i a les integrals mesurades, les signatures corresponents. Un cop afegides les signatures, podem tornar a calcular la funció de mèrit per determinar si el conjunt de desplaçaments esmentat es favorable o no.

Com en el cas de l'ordenació, els pesos utilitzats en cada component de la funció de mèrit es treuen a partir dels valors típics de cada component. De vegades, però, no només és important saber quin és el valor típic de la component, sinó també la seva desviació. En certs casos, algunes components, com l'error de fase òptica, depenen poc dels desplaçaments dels blocs tipus A, per això en aquests casos és millor treure aquesta component de la funció de mèrit.

4.2.4.4 Algorisme d'optimització

Com ja havíem fet en el cas del procés d'ordenació, per a la correcció es fa servir l'algorisme *Simulated Annealing*.

4.2.4.4.1 Moviments a l'espai de configuració

Per a la correcció es van considerar 4 tipus diferents de moviments en l'espai de les configuracions:

- Moviment 1: Eliminar un desplaçament.
- Moviment 2: Afegir un desplaçament.
- Moviment 3: Intercanviar els desplaçaments de dues posicions diferents.
- Moviment 4: Moure un desplaçament d'una posició a una altra sense desplaçament.

Com en els casos anteriors, la selecció de quin moviment es fa i de quin bloc es desplaça es fa aleatòriament.

4.2.4.5 Resultats

4.2.4.5.1 Correcció de multipols

Després de l'ordenació, les integrals són de l'ordre de $0.5 T \cdot mm$ per al màxim de la primera integral i de l'ordre de $0.2 mT \cdot m^2$ per al màxim de la segona integral. Es tracta de valors massa grans per provar de corregir-les juntament amb l'error de fase (1.8°). Decidim doncs realitzar un pas previ a la correcció pròpiament dita, la correcció multipolar amb els *dits màgics* de la qual es parla a l'apartat 2.2.3. Aquest pas intermedi redueix les integrals a $0.1 T \cdot mm$ per a la primera integral i $0.1 mT \cdot m^2$ per a la segona integral. La *Figura 91* mostra aquesta reducció.

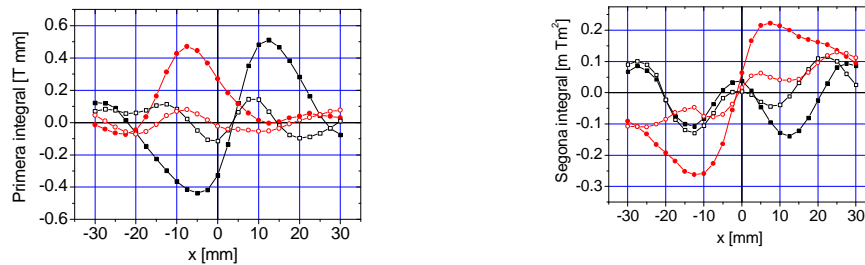


Figura 91: Integrals mesurades amb el fil tibant abans i després de la correcció multipolar. Discs vermells: Integral vertical inicial. Cercles vermells: Integral vertical final. Quadres negres: Integral horitzontal inicial. Marcs negres: Integral horitzontal final.

En l'optimització per reduir les integrals (en què s'utilitza també el *Simulated Annealing*), es va donar més pes als valors centrals ($|x| < 10 mm$). Això es pot observar en els resultats que es presenten a la *Figura 91*. Pel que fa a la trajectòria, aquesta no millora en cap aspecte a excepció d'un canvi d'angle general. A la *Figura 92* es presenta la segona integral de camp al llarg de l'eix de l'ondulator, que equival a la trajectòria.

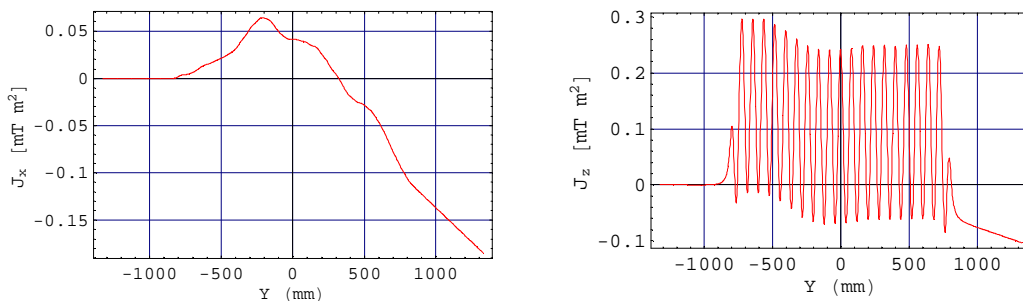


Figura 92: Segona integral de camp al llarg de l'eix de l'ondulator després de la correcció multipolar.

4.2.4.5.2 Correcció per desplaçament de blocs

Les integrals no es veuen afectades en excés per aquest procés, els valors ronden encara $0.1 T mm$ per a la primera integral i $0.1 mT m^2$ per a la segona integral. La *Figura 93* mostra el canvi produït en les integrals al llarg de la direcció horitzontal. En realitat la correcció per *dits màgics*, a causa de les seves dimensions reduïdes, és més eficient per corregir les variacions de les integrals per a diferents posicions transversals.

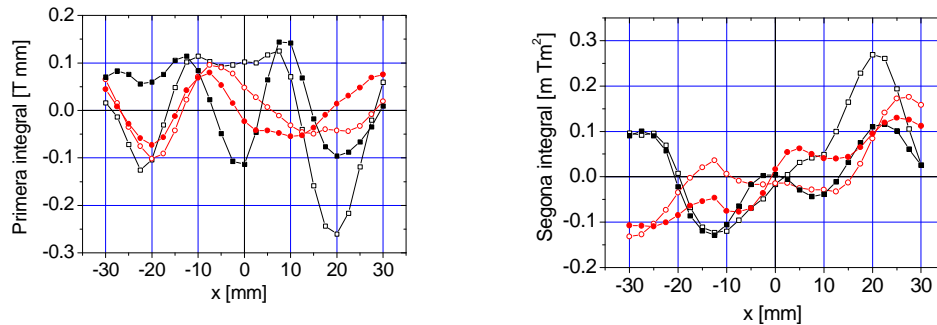


Figura 93: Integrals primeres i segones mesurades abans i després de la correcció per desplaçament de blocs. Discs vermells: Integral vertical inicial. Cercles vermells: Integral vertical final. Quadres negres: Integral horitzontal inicial. Marcs negres: Integral horitzontal final.

Després del procés de correcció la trajectòria és més rectilínia (vegeu la *Figura 94*), i l'error de fase s'ha reduït a 1.1° . Les millores en aquests sentits són considerables. En realitat, la correcció per desplaçaments només ha corregit la trajectòria i l'error de fase òptica. Les integrals les ha reduïdes el procés de correcció amb *dits màgics*. Si haguéssim invertit l'ordre de les correccions, hauríem obtingut integrals acumulades menors però una trajectòria i un error de fase òptica pitjors. Cal recordar però que aquests resultats no són els definitius encara: manca afegir la correcció activa, la qual es duu a terme quan s'instal·la el dispositiu en el sincrotró.

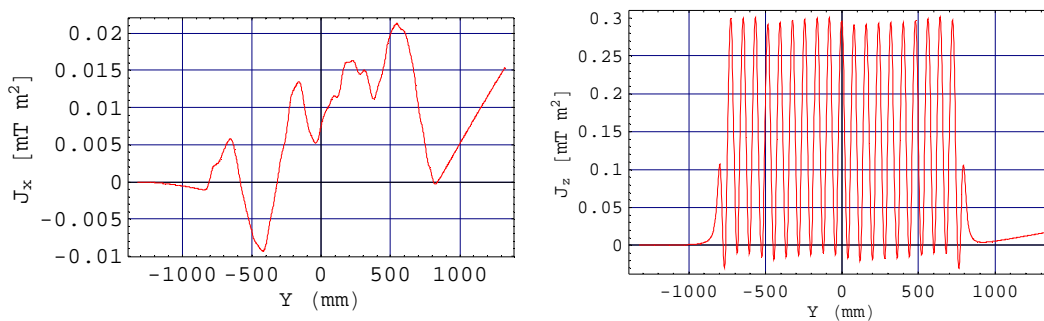


Figura 94: Segona integral de camp al llarg de l'eix de l'ondulator després d'aplicar la correcció per desplaçament dels blocs.

El valor a l'eix ($x=0$) de les integrals és de $I_x=0.1 T mm$ i $I_z= 0.05 T mm$. La correcció activa situa aquests valors a $I_x=0.002 T mm$ i $I_z= 0.001 T mm$, valors que estan per sota de les especificacions requerides per a la dinàmica de l'accelerador. Ara bé, els components multipolars resten tan grans com els que es mostren a les gràfiques anteriors.

4.3. Resum

En aquest capítol resumim el procés d'optimització de les funcions de mèrit de l'ondulator, que hem descrit en aquest capítol. La *Taula 14* mostra aquests resultats, observem com s'aconsegueix disminuir considerablement les integrals i l'error de fase a cada pas del procés de construcció.

	I_x màxim	I_z màxim	J_x màxim	J_z màxim	σ_ϕ
<i>Simulació d'una Ordenació aleatòria</i>	2.0 Tmm	1.0 Tmm	6.0 mT m ²	2.0 mT m ²	4.9°
<i>Mesures després de la ordenació</i>	0.5 Tmm	0.5 Tmm	0.2 mT m ²	0.3 mT m ²	2.0°
<i>Mesures després dels dits màgics</i>	0.1 Tmm	0.1 Tmm	0.1 mT m ²	0.1 mT m ²	1.8°
<i>Mesures després de la correcció</i>	0.1 Tmm	0.1 Tmm	0.1 mT m ²	0.1 mT m ²	1.1°

Taula 14 : Resum de la evolució de les funcions de mèrit de l'ondulator, al llarg de la correcció.

CAPÍTOL 5

MILLORA EN EL MÈTODE D'ORDENACIÓ DE BLOCS:

En el capítol 4 fèiem referència a les limitacions en la caracterització de blocs magnètics pels mètodes habituals. En aquest capítol proposem un nou mètode: presentarem en primer lloc la base teòrica en que es sustenta i en segon lloc un estudi sobre simulacions magnètiques que avalen la viabilitat del mètode.

5. MILLORA DEL MÈTODE D'ORDENACIÓ DE BLOCS

5.1. Introducció

Ja vàrem avançar a l'apartat 2.1.1 que les mesures de la imantació podien no representar prou bé els camps i les integrals generats pels blocs magnètics. Hem vist també a l'apartat 4.2.1 que les inhomogeneïtats poden jugar un paper important a l'hora d'escollir l'ordenació dels blocs.

En la implementació d'un ondulator real, a l'apartat 4.2.3, hem comprovat que realitzar el procés d'ordenació basant-nos només en les mesures de la imantació comporta un error important en la predicció de les integrals. Altrament, es pot dir en el seu favor que l'ús de la imantació comporta temps de muntatge realment ràpids, i que no cal cap temps addicional (a banda del temps de càlcul, que és sempre inferior a un dia), ni dispositius de mesura addicionals al laboratori.

A l'apartat 2.2.2 hem parlat d'altres tècniques d'ordenació de blocs que eviten el problema esmentat, per exemple la que es fa servir a l'ESRF. Com a contrapartida, aquestes tècniques necessiten de dispositius addicionals i d'un temps de muntatge molt més grans, de fins a diversos mesos.

Tots aquests problemes es poden solucionar, en part, trobant una forma més adient per descriure el camp magnètic dels blocs.

A l'apartat 5.2 presentarem un desenvolupament matemàtic que ens permet ajustar millor el camp magnètic d'un bloc fent servir mesures del camp magnètic (cosa que a la pràctica, es pot dur a terme amb una sonda Hall). En el capítol 5.3 farem servir aquest mètode per descriure

els blocs, ho aplicarem a un nou algorisme d'ordenació, i compararem els resultats amb altres sistemes de descripció de blocs. D'ara en endavant anomenarem a aquest mètode AMM (ajust de moments multipolars).

5.2.Descripció del camp magnètic d'un bloc

Presentarem un mètode d'ajust del camp magnètic basat en el desenvolupament multipolar.⁸³ En aquest apartat generalitzarem la deducció dels termes del desenvolupament en multipols. Per completitud ho farem tot seguint dues estratègies diferents. A l'apartat 5.2.1 utilitzarem l'aproximació en sèrie de Taylor i en el 5.2.2 el desenvolupament en harmònics esfèrics. Val a dir que finalment, per comoditat, farem servir el desenvolupament en harmònics esfèrics. Hem volgut però incloure en el text d'aquesta tesi el desenvolupament en sèrie de Taylor, ja que suposa un resultat en si mateix, i a més es pot utilitzar alternativament per comprovar els resultats del mètode que proposem.

5.2.1. Expansió per Taylor

Tal i com queda demostrat a l'apèndix B, podem expressar el camp magnètic com una sèrie:

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} \Lambda_{a_0 \dots a_n} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) \quad (5-1)$$

on :

$$T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) = \partial'_{a_0} \dots \partial'_{a_n} \left[\frac{(r-r')_i}{|r-r'|^3} \right] (r'=0) \quad (5-2)$$

$$\Lambda_{a_0 \dots a_n} = \frac{1}{n!} \int_V F_{a_0}(r') \prod_{k=1}^n r'_{a_k} dr' \quad (5-3)$$

on n és un índex que indica el terme multipolar a què ens referim, i, a_0, \dots, a_n són índexs que van de 1 a 3 indicant la component en l'espai cartesià, r correspon a les coordenades cartesianes del punt on s'avalua el camp magnètic i r' correspon a les coordenades on es mesura la funció $F_{a_0}(r')$, que depèn de les fonts. Sovint, en un abús de llenguatge, r sense subíndex denota el mòdul del vector amb coordenades r_i . D'aquesta manera hem definit els moments multipolars Λ i les matrius multipolars T .

⁸³ K. Jerbi et altr. , "On MEG forward using multipolar expansions", Physics in Medicine and biology **47** (2002) 523-555.

5.2.1.1 Graus de llibertat

Les matrius multipolars $T_{i,n,a_0\dots a_n}(r)$ satisfan les següents restriccions:

- I. Tots els subíndexs a_k amb k des de 0 fins a n es poden intercanviar de posició en $T_{i,n,a_0\dots a_n}(r)$.
- II.
$$\sum_{a_j=1}^3 \sum_{a_k=1}^3 \delta_{a_j,a_k} T_{i,n,a_0\dots a_n}(r) = 0 \forall j, k = 0\dots n .$$

La restricció I es pot deduir a partir de les propietats commutatives de les derivades ∂_a a l'equació (5-2). Utilitzant la restricció I a l'equació (5-2) podem veure com es compleix la restricció II ja que:

$$\nabla'^2 \left[\frac{(r-r')}{|r-r'|^3} \right]_{r'=0} = 0 \quad (5-4)$$

Observem que aquesta equació no és vàlida a $r = r' = 0$, ja que la descomposició multipolar no és vàlida dins de les fonts. Podem enunciar les restriccions I i II de la següent forma: **les matrius multipolars són simètriques i tenen totes les traces zero**. Aquestes propietats tenen una importància directa en el significat dels moments multipolars Λ . A l'apèndix C deduïm que, de fet, sense afectar el valor de camp magnètic, hi ha prou graus de llibertat com per assegurar que **els moments magnètics multipolars són simètrics i tenen totes les traces zero**. Per tant, les matrius multipolars $\Lambda_{a_0\dots a_n}$ satisfan les següents restriccions:

- I. Tots els subíndexs a_k amb k des de 0 fins a n es poden intercanviar de posició en $\Lambda_{a_0\dots a_n}$.
- II.
$$\sum_{a_j=1}^3 \sum_{a_k=1}^3 \delta_{a_j,a_k} \Lambda_{a_0\dots a_n} = 0 \forall j, k = 0\dots n .$$

A partir d'aquestes premisses, els graus de llibertat que introdueix cada terme multipolar no són 3^{n+1} (aquest seria el nombre de graus de llibertat si els índexs fossin no intercanviables de posició i fossin independents). En realitat, les restriccions I i II introdueixen $3^{n+1}-2n-3$ condicions, i per tant els graus de llibertat es veuen reduïts en $2n+3$ per a l' n -èsim terme multipolar.

5.2.1.2 Expressió generalitzada

L'expressió (5-1) mostra el camp magnètic com una successió de termes que són el producte de dos elements, els moments multipolars $\Lambda_{a_0\dots a_n}$ i les matrius multipolars $T_{i,n,a_0\dots a_n}$. Els

moments contenen la informació que fa referència a les fonts (a través de la funció $F(r')$) mentre que les matrius multipolars contenen informació sobre les dependències espacials del camp. L'expressió (5-2), sota la suposició de que els moments multipolars satisfan les restriccions I i II, es pot expressar (vegeu la demostració a l'apèndix D):

$$T_{i,n,a_0\dots a_n}(r) = -(n+1) \frac{(2n+1)!!}{r^{2n+3}} \delta_{i,a_0} \prod_{k=1}^n r_{a_k} + \frac{(2n+3)!!}{r^{2n+5}} r_i \prod_{k=0}^n r_{a_k} \quad (5-5)$$

Aquesta expressió només és vàlida si utilitzem moments multipolars totalment simètrics i amb totes les traces nul·les. Per ajustar el camp magnètic amb aquesta expressió, necessitem que estigui en funció dels seus graus de llibertat. Una expressió apropiada per realitzar l'ajust és la següent:

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha_n=1}^{2n+3} t_{i,n,\alpha_n}(r) m_{\alpha_n} \quad (5-6)$$

Hem d'expressar el nous moments multipolars m_{α_n} en termes dels antics moments multipolars $\Lambda_{a_0\dots a_n}$. Les restriccions I i II defineixen un conjunt de $3^{n+1}-2n-3$ equacions que relacionen els 3^{n+1} moments multipolars $\Lambda_{a_0\dots a_n}$. Aquestes equacions es poden expressar en forma matricial de la següent forma:

$$A_{j_n,a_0\dots a_n} \Lambda_{a_0\dots a_n} = 0 \quad \forall j_n = 1 \dots 3^{n+1}-2n-3 \quad (5-7)$$

on A és una matriu $(3^{n+1}-2n-3) \times 3 \times \dots \times 3$, però pot ser expressada com una matriu rectangular $(3^{n+1}-2n-3) \times 3^{n+1}$. Igualment, els moments multipolars es poden considerar vectors de 3^{n+1} coordenades en comptes de matrius $3 \times \dots \times 3$. Així doncs, el sistema d'equacions generat per les restriccions I i II es pot expressar com:

$$\sum_{k_n=1}^{3^{n+1}} A_{j_n,k_n} \Lambda_{k_n} = 0 \quad \forall j_n = 1 \dots 3^{n+1}-2n-3 \quad (5-8)$$

hi ha un sistema d'equacions per a cada terme multipolar n . Aquesta equació indica que a l'espai de 3^{n+1} coordenades, en què estan definits els vectors Λ_{k_n} , els que tenen efecte sobre el camp magnètic estan limitats a l'espai nul de la matriu A. Siguin m_{α_n} , amb α_n des d'1 fins a $2n-3$, les coordenades d'un vector definit en l'espai nul d'A, podem escriure:

$$\Lambda_{k_n} = \sum_{\alpha_n=1}^{2n-3} N_{k_n,\alpha_n} m_{\alpha_n} \quad (5-9)$$

on N és una matriu $3^{n+1} \times (2n+3)$ que té com a columnes els vectors que generen l'espai nul d'A. Així doncs, les noves matrius multipolars $t_{i,n,\alpha_n}(r)$ de l'equació (4-6) queden definides de la següent forma:

$$t_{i,n,\alpha_n}(r) = \sum_{k_n=1}^{3^{n+1}} N_{\alpha_n,k_n} T_{i,n,k_n}(r) \quad (5-10)$$

L'expressió final del camp magnètic dependrà de com triem la base per a l'espai nul d'A. Però, en qualsevol cas, es tracta sempre d'una expressió que conté tots els graus de llibertat del camp magnètic, i per tant és adequada com a expressió per ajustar-lo.

5.2.2. Expansió amb harmònics esfèrics

Sabem que, fora de les fonts, el camp magnètic es pot expressar com el gradient d'un cert potencial ϕ , que compleix l'equació de Laplace:

$$B = -\nabla\phi \quad \nabla^2\phi = 0 \quad (5-11)$$

Sabem que els harmònics esfèrics formen un conjunt complet de solucions de l'equació de Laplace, per tant podem escriure:

$$\phi(\theta, \varphi, r) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\alpha_n = -n}^n m_{\alpha_n} \frac{Y_{n,\alpha_n}(\theta, \varphi)}{r^{n+1}} \quad (5-12)$$

on θ , φ i r són les coordenades esfèriques, $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ són els harmònics esfèrics i m_{α_n} els coeficients del desenvolupament que podem denominar moments multipolars. Per tant, el camp magnètic es pot escriure com:⁸⁴

$$B_i(\theta, \varphi, r) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\alpha_n = -n}^n -m_{\alpha_n} \nabla_i \left(\frac{Y_{n,\alpha_n}(\theta, \varphi)}{r^{n+1}} \right) \quad (5-13)$$

Per condicionar aquesta expressió per ser utilitzada en un ajust del camp magnètic, utilitzarem la següent expressió:

$$B_i(x, y, z) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\alpha_n = -n}^n m_{\alpha_n} t_{i,n,\alpha_n}(x, y, z) \quad (5-14)$$

Observem que l'índex n que estem fent servir en el cas de l'expansió per harmònics esfèrics equival a $n-1$ de l'expansió per Taylor. En aquest cas les matrius multipolars t_{i,n,α_n} s'expressen:

⁸⁴ R.G. Barrera, G.A. Estévez and J Giraldo, *Vector spherical harmonics and their applications to magnetostatics*, Eur. J. Phys, 1985, pag 287-294.

$$t_{i,n,\alpha_n}(x, y, z) = \begin{cases} \alpha_n = -n \dots -1 : -\nabla_i \left(\frac{\text{Im}[Y_{n,-\alpha_n}(x, y, z)]}{r^{n+1}} \right) \\ \alpha_n = 0 : -\nabla_i \left(\frac{Y_{n,0}(x, y, z)}{r^{n+1}} \right) \\ \alpha_n = 1 \dots n : -\nabla_i \left(\frac{\text{Re}[Y_{n,\alpha_n}(x, y, z)]}{r^{n+1}} \right) \end{cases} \quad (5-15)$$

Per obtenir una expressió directament en funció de les coordenades cartesianes, partim de l'expressió dels harmònics esfèrics en aquestes coordenades:⁸⁵

$$Y_{n,\alpha_n}(x, y, z) = \frac{(-1)^{n+\alpha_n}}{2^n} \sum_{b=0}^{\alpha_n} \sum_{\substack{a=0 \\ 2a \geq n+\alpha_n}}^n \frac{\alpha_n! 2a! i^b (-1)^a}{n-\alpha_n! a! (2a-n-\alpha_n)!} \frac{z^{2a-n-\alpha_n} y^b x^{\alpha_n-b}}{r^{2a-n}} \quad (5-16)$$

on r és el mòdul del vector (x,y,z) i i la unitat dels nombres imaginaris purs. No hem inclòs els coeficients de normalització dels harmònics esfèrics, ja que, pel que fa a l'ajust, els coeficients de normalització no tenen transcendència. Per deixar explícita l'expressió que s'utilitzarà en l'ajust només cal derivar l'expressió anterior. Podem reescriure l'equació (5-15) com segueix:

$$t_{i,n,\alpha_n}(x, y, z) = \begin{cases} \alpha_n = -n \dots -1 : \text{Im}[\xi_{i,n,-\alpha_n}(x, y, z)] \\ \alpha_n = 0 : \xi_{i,n,0}(x, y, z) \\ \alpha_n = 1 \dots n : \text{Re}[\xi_{i,n,\alpha_n}(x, y, z)] \end{cases} \quad (5-17)$$

on:

$$\xi_{i,n,\alpha_n}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{-Y_{n,\alpha_n}(x, y, z)}{r^{n+1}} = \begin{cases} i=1 & \frac{(-1)^{n+\alpha_n}}{2^n} \sum_{b=0}^{\alpha_n} \sum_{\substack{a=0 \\ 2a \geq n+\alpha_n}}^n \frac{\alpha_n! 2a! i^b (-1)^a}{n-\alpha_n! a! (2a-n-\alpha_n)!} \frac{((2a+1)x^2 - (\alpha_n - b)r^2) z^{2a-n-\alpha_n} y^b x^{\alpha_n-b-1}}{r^{2a+3}} \\ i=2 & \frac{(-1)^{n+\alpha_n}}{2^n} \sum_{b=0}^{\alpha_n} \sum_{\substack{a=0 \\ 2a \geq n+\alpha_n}}^n \frac{\alpha_n! 2a! i^b (-1)^a}{n-\alpha_n! a! (2a-n-\alpha_n)!} \frac{((2a+1)y^2 - br^2) z^{2a-n-\alpha_n} y^{b-1} x^{\alpha_n-b}}{r^{2a+3}} \\ i=3 & \frac{(-1)^{n+\alpha_n}}{2^n} \sum_{b=0}^{\alpha_n} \sum_{\substack{a=0 \\ 2a \geq n+\alpha_n}}^n \frac{\alpha_n! 2a! i^b (-1)^a}{n-\alpha_n! a! (2a-n-\alpha_n)!} \frac{((2a+1)z^2 - (2a-n-\alpha_n)r^2) z^{2a-n-\alpha_n-1} y^b x^{\alpha_n-b-1}}{r^{2a+3}} \end{cases} \quad (5-18)$$

5.2.3. Comparació entre expressions

Ambdues expressions (5-6) i (5-14) poden ser igualment útils per ajustar el camp magnètic. De fet, la solució trobada amb els harmònics esfèrics constitueix una base particular de l'espai

⁸⁵ Les formules presentades es poden extreure de <http://mathworld.com/SphericalHarmonic.html>.

nul de la matriu A_{j_n, k_n} del desenvolupament per Taylor. Es tracta d'una diferència formal. És millor el desenvolupament en harmònics esfèrics, ja que la dependència amb les coordenades espacials es dona explícitament. En el cas del desenvolupament per Taylor, per conèixer l'expressió cal calcular la matriu N_{α_n, k_n} . Però aquesta matriu, que és fàcilment calculable fins i tot per a valors de n grans (varies desenes), pot ser tan gran que no es pugui allotjar a la memòria d'un ordinador personal corrent. Per exemple, si fem servir variables de doble precisió (8 bytes), per a $n = 9$ ($n = 10$ per als harmònics esfèrics), la matriu A_{j_n, k_n} (que té $3^{n+1} \times 3^{n+1} - 2n - 3$ elements), necessària en el càlcul de la matriu N , ocupa un espai en memòria de l'ordre de 3 Gbytes.

5.2.4. Ajust del camp magnètic amb l'expansió multipolar

D'acord amb les equacions de Maxwell, el camp magnètic en el buit a tot l'espai està definit sense ambigüitat si es pot determinar el seu valor en un pla.⁸⁶ Això vol dir que, per realitzar l'ajust dels coeficients que defineixen el camp magnètic generat per un bloc magnètic a tot l'espai, necessitem només una malla de punts distribuïda en un pla oportunament situat prop del bloc magnètic. Com més densa i extensa sigui la malla, amb més precisió podrem derivar els coeficients multipolars i , per tant, l'expressió que descriu el camp esdevindrà més precisa. A partir dels camps mesurats en aquesta malla, podem ajustar l'expressió (5-14). Un cop determinats els coeficients multipolars m_{α_n} , el bloc quedarà completament caracteritzat des del punt de vista magnètic.

Cal advertir que haurem de realitzar simultàniament un ajust lineal de tres funcions, les tres components del camp magnètic $B_i(r_p)$, en un conjunt de punts r_p . Per realitzar aquest ajust simultani utilitzem el mètode dels mínims quadrats. La funció a minimitzar és:

$$\Psi^2 = \sum_{p=1}^R \sum_{i=1}^3 (\beta_{i,p} - B_i(r_p))^2 \quad (5-19)$$

on $\beta_{i,p}$ és el valor de la component i del camp magnètic mesurada en el punt r_p de la malla de R punts. Utilitzant l'expressió (5-14) i substituint $B_i(r_p)$ obtenim:

⁸⁶ Aquesta afirmació no és immediata, però té una demostració senzilla. Sigui $z=z_0$ el pla on coneixem el camp magnètic. Coneguts $B_x(x,y,z_0)$, $B_y(x,y,z_0)$ i $B_z(x,y,z_0)$ podem reconstruir el camp a tot l'espai a partir de les derivades successives en la direcció en que no coneixem el camp $\partial^n B_x(x,y,z_0) / \partial z^n$, $\partial^n B_y(x,y,z_0) / \partial z^n$ i $\partial^n B_z(x,y,z_0) / \partial z^n$. Aquestes derivades estan relacionades amb les derivades en les direccions en que si coneixem el camp (es a dir x i y) a través de les equacions de Maxwell per al camp magnètic estàtic.

$$\Psi^2 = \sum_{p=1}^R \sum_{i=1}^3 \left(\beta_{i,p} - \sum_{n=1}^Q \sum_{\alpha_n=-n}^n m_{\alpha_n} t_{i,n,\alpha_n}(r_p) \right)^2 \quad (5-20)$$

En l'expressió anterior hem limitat explícitament el nombre de termes multipolars a un nombre Q . El conjunt de paràmetres m_{α_n} que minimitzen la funció Ψ^2 aconsegueixen:

$$\frac{\partial}{\partial m_{\alpha_q}} \Psi^2 = 0 \quad \forall \alpha_q = -q \dots q \quad \text{i} \quad \forall q = 1 \dots Q \quad (5-21)$$

D'aquí obtenim un conjunt d'equacions que determinen els moments multipolars:

$$\sum_{p=1}^R \sum_{i=1}^3 \beta_{i,p} t_{q,i,\alpha_q}(r_p) = \sum_{p=1}^R \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^Q \sum_{\alpha_n=-n}^n t_{n,i,\alpha_n}(r_p) t_{q,i,\alpha_q}(r_p) m_{\alpha_n} \quad (5-22)$$

$$\forall \alpha_q = -q \dots q \quad \text{i} \quad \forall q = 1 \dots Q$$

Tot i la complexitat aparent d'aquesta equació, es tracta només d'un sistema d'equacions lineals. Podem simplificar la notació introduint les següents definicions:

$$b_{q,\alpha_q} = \sum_{p=1}^R \sum_{i=1}^3 \beta_{i,p} t_{q,i,\alpha_q}(r_p) \quad (5-23)$$

$$\Phi_{n,\alpha_n,q,\alpha_q} = \sum_{p=1}^R \sum_{i=1}^3 t_{n,i,\alpha_n}(r_p) t_{q,i,\alpha_q}(r_p) \quad (5-24)$$

Podem doncs escriure el sistema lineal de la següent forma:

$$b_{q,\alpha_q} = \sum_{n=0}^Q \sum_{\alpha_n=-n}^n \Phi_{n,\alpha_n,q,\alpha_q} m_{\alpha_n} \quad (5-25)$$

$$\forall \alpha_q = -q \dots q \quad \text{i} \quad \forall q = 1 \dots Q$$

El nombre de paràmetres que cal determinar ve donat per:

$$\sum_{n=1}^Q 2n + 1 = Q(Q + 2) \quad (5-26)$$

$\Phi_{n,\alpha_n,q,\alpha_q}$ es pot considerar una matriu quadrada $Q(Q+2) \times Q(Q+2)$ i b_{q,α_q} i m_{α_n} vectors de $Q(Q+2)$ components. Per a valors raonables de Q (al voltant de la desena), la inversió de la matriu $\Phi_{n,\alpha_n,q,\alpha_q}$ és quasi immediata, però el càlcul de tots els elements de la matriu pot comportar un temps de càlcul significatiu (desenes de minuts). Ara bé, aquest sistema està pensat per realitzar un gran nombre de mesures del camp magnètic de blocs, però sempre en la mateixa disposició geomètrica, per tant, en tots aquests ajustos, la matriu $\Phi_{n,\alpha_n,q,\alpha_q}$, que no depèn de les fonts, és la mateixa, i només cal calcular-la un cop per a cada matriu de punts de mesura, cosa que equival a dir que només cal calcular-la per cada ondulator.

5.2.5. Integrals multipolars

L'expressió (5-16) es pot integrar analíticament, cosa que ens permetrà calcular de forma molt ràpida les integrals d'un conjunt de blocs els camps dels quals han estat ajustats amb el mètode AMM.

$$I_i(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B_i(x, y, z) dy = \sum_{n \geq 1} \sum_{\alpha_n = -n}^n m_{\alpha_n} d_{i,n,\alpha_n}(x, z) \quad (5-27)$$

on hem definit implícitament les funcions $d_{i,n,\alpha_n}(x, z)$:

$$d_{i,n,\alpha_n}(x, z) = \begin{cases} \alpha_n = 0 : U_{i,n,0}(x, z) \\ \alpha_n = 1..n : \text{Re}[U_{i,n,\alpha_n}(x, z)] \end{cases} \quad (5-28)$$

Els moments multipolars amb índex negatius (índex b imparell a l'equació (5-16)) de α_n no afecten a les integrals ja que en aquest cas el camp és proporcional a potències imparelles de la coordenada y. Per solucionar aquesta integral ens cal conèixer $U_{i,n,\alpha_n}(x, z)$, que són les integrals de les funcions definides en l'equació (5-17):

$$U_{i,n,\alpha_n}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{i,n,\alpha_n}(x, y, z) dy \quad (5-29)$$

La integral té solució analítica:

$$U_{1,n,\alpha_n}(x, z) = \frac{(-1)^{n+\alpha_n}}{2^n} \sum_{b=0}^{\alpha_n} \sum_{\substack{a=0 \\ 2a \geq n+\alpha_n}}^n \frac{\alpha_n! 2a! i^b (-1)^a \Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right) \Gamma\left(a - \frac{b}{2}\right) (x^2 + z^2)^{\frac{b}{2}} (m(x^2 + z^2) - 2ax^2 - bz^2) z^{2a-n-\alpha_n} x^{\alpha_n-b-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) n - \alpha_n! a! (2a - n - \alpha_n)! r^{2a+2}} \quad (5-30)$$

$$U_{2,n,\alpha_n}(x, z) = \frac{(-1)^{n+\alpha_n}}{2^n} \sum_{b=0}^{\alpha_n} \sum_{\substack{a=0 \\ 2a \geq n+\alpha_n}}^n \frac{\alpha_n! 2a! i^b (-1)^a \Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right) \Gamma\left(a - \frac{b}{2}\right) (x^2 + z^2)^{\frac{b}{2}} (m+l)(x^2 + z^2) - 2ax^2 - bz^2 z^{2a-n-\alpha_n-1} x^{\alpha_n-b}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) n - \alpha_n! a! (2a - n - \alpha_n)! r^{2a+2}} \quad (5-31)$$

on $\Gamma(\cdot)$ es la funció Gamma.

5.2.6. Paràmetres de l'ajust

5.2.6.1 Introducció

En primer lloc cal dir que no s'ha realitzat l'ajust de mesures de blocs reals, sinó l'ajust de valors del camp simulats utilitzant el programari Radia. És a dir, els valors $\beta_{i,p}$, el camp que es vol ajustar, de l'expressió (5-19), han estat obtinguts per simulació.

Com ja havíem esmentat a l'apartat 2.2.2, sovint es realitza l'ordenació en dos passos. En un primer pas s'agrupen els blocs en conjunts de 3 blocs (dos blocs A orientats en direccions oposades i un bloc B entremig d'ells) i 1 bloc (un bloc tipus B). Així doncs, hem implementat dos programes (en C++) per ajustar el camp magnètic, un per ajustar el camp d'un bloc i un

altre per ajustar el camp de 3 blocs conjuntament. D'aquesta forma tenim en compte en part l'efecte de la permeabilitat, ja que aquest tindrà un cert paper en els grups de 3 blocs.

En general, però, ajustar el camp de 3 blocs requerirà més coeficients en el desenvolupament multipolar que ajustar només un bloc. Per això tractarem explícitament aquest cas a l'hora de definir els paràmetres de l'ajust.

També ha calgut crear un programa per agrupar els blocs en conjunts de 3. Aquest programa s'ha realitzat en Mathematica, de forma que el seu ús és directament compatible amb les simulacions de Radia. Altre cop utilitzem l'algorisme *Simulated Annealing*, i tindrem en compte el càlcul de la imantació de cada bloc per garantir que la integral total és el més proper a zero possible

5.2.6.2 Descripció dels paràmetres

Els paràmetres de l'ajust caracteritzaran el conjunt de punts per al qual es realitza l'ajust i el nombre màxim de termes multipolars a utilitzar. Els punts els situem tots en el mateix pla, que coincidirà amb el pla mig del ondulator.

Per simplicitat, realitzarem un ajust amb una malla de punts quadrada. La malla la definirà el costat L_M i la separació entre punts d_M . El nombre de punts de la malla N_M ve donat per:

$$N_M = \left(\frac{L_M}{d_M} \right)^2 \quad (5-32)$$

5.2.6.3 Resultats

Per determinar els paràmetres d_M i L_M adients, en primer lloc realitzem un estudi on, mantenint el nombre de punts N_M constant, variarem d_M i L_M proporcionalment. Per decidir si l'ajust és bo o no, assajarem diferents valors de Q . L'estudi el referirem a les integrals, seguint l'esquema de la *Figura 95*, perquè l'ajust del camp serà sempre millor que el de les integrals ja que els camps són la magnitud directament ajustada. Les integrals es dedueixen a partir dels coeficients trobats (eq (5-27)). Per això, el fet que les integrals deduïdes de l'ajust dels camps s'assemblin a les corresponents al bloc simulat és un bon indicador de la bondat de l'ajust.

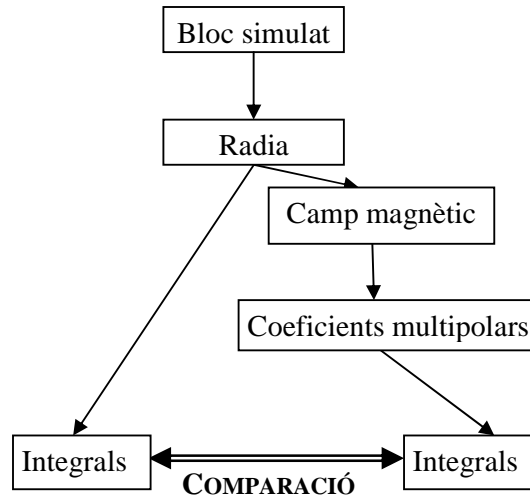


Figura 95: Esquema seguit en la comparació de les integrals simulades directament i les obtingudes a partir de l'ajust del camp simulat amb els coeficients multipolars.

En particular, siguin $I_x(x)$ i $I_z(x)$ les integrals corresponents al conjunt de tres blocs simulat, i siguin $I_x^{AMM}(x)$ i $I_z^{AMM}(x)$ les integrals deduïdes a partir de l'ajust. La funció de mèrit de l'ajust C_{AMM} la definim de la forma següent:

$$\Delta I_{AMM} = \sqrt{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left(I_x^{AMM}(x) - I_x(x) \right)^2 + \left(I_z^{AMM}(x) - I_z(x) \right)^2 dx} \quad (5-33)$$

$$C_{AMM} = \frac{\Delta I_{AMM}}{\Delta I_1} \quad (5-34)$$

on $x \in [-L, L]$ és el rang on volem que el model s'ajusti be al camp simulat, L ve donat per l'obertura dinàmica de l'accelerador (la màxima excursió transversal de les partícules del feix d'electrons a l'accelerador que es mantenen estables, $L=30$ mm en el nostre cas). En l'expressió anterior, ΔI_1 correspon a l'error de mesura típica de les integrals amb el fil tibant, $\Delta I_1=0.5$ μTm en el nostre cas.

La *Figura 96* mostra els valors de C_{AMM} en funció de l'ordre multipolar màxim utilitzat en l'ajust per a diferents valors de d_M però amb N_M constant ($N_M=2600$, hem trobat aquest valor mitjançant el mètode de *prova i error*). Observem que per a $d_M=3$ mm i $d_M=5$ mm, la bondat de l'ajust esdevé erràtica en augmentar l'ordre de l'ajust. Això indica que, en aquests casos, la densitat o l'amplada de la malla no es suficient per ajustar la dependència espacial del camp, què és més complicada conforme augmentem el nombre màxim de Q . Així doncs, $d_M=4$ mm i $L_M=200$ mm són els paràmetres escollits.

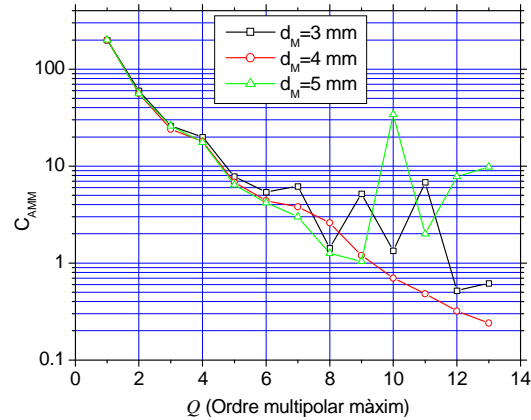


Figura 96: Bondat de l'ajust C_{AMM} en funció de l'ordre màxim del desenvolupament multipolar per a diferents valors de d_M amb un nombre de punts N_M constant.

Observant la *Figura 96*, veiem que el valor C_{AMM} disminueix per sota de la unitat en la solució triada. En realitat, sembla que, per als paràmetres escollits, es pugui arribar a qualsevol precisió en la predicció de les integrals augmentant el nombre màxim de termes en el desenvolupament multipolar Q . La situació canvia si introduïm un cert soroll en els valors simulats del camp $\beta_{i,p}$, de forma que simulem una mesura real del camp d'un bloc amb el seu error associat inevitable. Així doncs, afegirem una certa component aleatòria als valors $\beta_{i,p}$. Per simplicitat, afegim una component d'error de distribució quadrada d'amplada $0.5 \cdot 10^{-4} T$, valor típic d'una mesura als dispositius de sonda Hall en el rang de $\pm 0.2 T$ (típicament, el camp d'un bloc cau troba dins d'aquest rang).

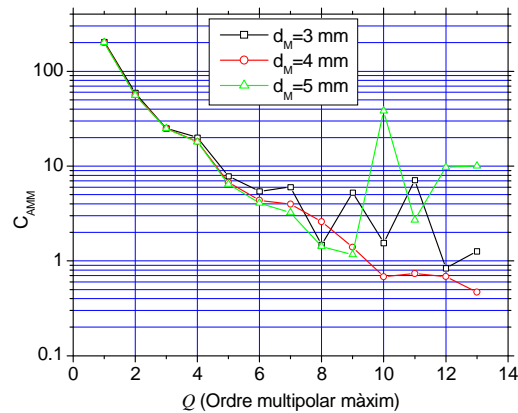


Figura 97: Bondat de l'ajust, C_{AMM} , en funció de l'ordre màxim del desenvolupament multipolar per a diferents valors de d_M amb un nombre de punts N_M constant (afegint una component aleatòria d'error de $0.5 \cdot 10^{-4} T$ d'amplitud als valors simulats del camp $\beta_{i,p}$).

Amb aquesta suposició, més realista, trobem que la precisió amb què es poden predir les integrals a partir de l'ajust està limitada a partir de $Q=10$, tal i com es veu a la *Figura 97* ($Q(Q+2)=120$ variables a ajustar). No obstant, en aquest cas també aconseguim valors de C_{AMM} per sota de la unitat. Això indica que, quan es mesura un bloc per separat, podem predir les integrals millor si les mesurem a través del camp dels blocs que a través d'una mesura directa amb el sistema experimental del fil tibant. La situació serà diferent quan haguem de predir les integrals d'un conjunt de blocs.

5.3. Comparació entre algorismes d'ordenació de blocs

5.3.1. Modelització d'inhomogeneïtats

Com ja hem dit a l'apartat 5.2.6, els camps utilitzats a l'ajust s'obtenen a partir d'una simulació. Tal i com hem enunciat al començament d'aquest capítol, el mètode que hem desenvolupat sorgeix de la necessitat de caracteritzar blocs inhomogenis. Per dur a terme aquesta tasca, hem de definir una forma d'introduir aquestes inhomogeneïtats en la simulació dels blocs. Es tracta tan sols d'un model de treball, i aquí no pretenem treure cap conclusió sobre la distribució real de les inhomogeneïtats d'un bloc.

5.3.1.1 Simular el camp d'un bloc

Cal tenir en compte les limitacions a l'hora de simular els blocs amb Radia. Aquest programa realitza una segmentació dels blocs en sub-blocs, als quals assigna una imantació uniforme. tot seguit, aplica un algorisme de relaxació (iterativament es calculen les imantacions dels sub-blocs fins a convergir) que té en compte la permeabilitat assignada al bloc per decidir la imantació exacta de cada sub-bloc, i calcula el camp com la superposició lineal del camp de cada un d'ells (el camp i les integrals d'un paral·lelepípede tenen solució analítica). Es tracta d'un càlcul ràpid, si se'l compara amb altres programes de simulació de camp 3D, però que tendeix a ocupar un espai molt gran a la memòria de l'ordinador. En el nostre cas, per a les dimensions dels blocs que considerem (paràmetres de la cel·la central trobada al apartat 3.4), amb una segmentació adient per obtenir repetibilitats de l'ordre de la precisió de les mesures, podem simular un màxim de 10 períodes. La segmentació a què ens referim és $\{5,3,3\}$, és a dir, segons la direcció x dividim el bloc en 5 plans, en 3 segons la direcció y i en 3 segons la direcció z . Això fa un total de 45 sub-blocs per bloc. Tots els sub-blocs tenen, abans de la

relaxació, la mateixa imantació i permeabilitat, però un cop realitzada la relaxació, la imantació de cada sub-bloc és reorientada.

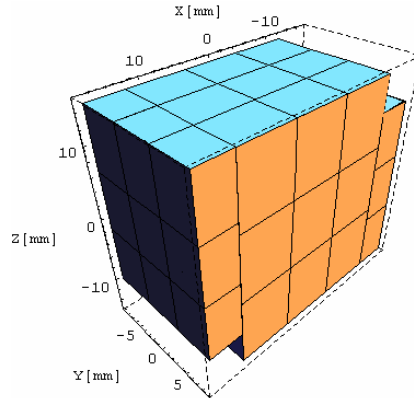


Figura 98: Representació d'un bloc magnètic en el codi Radia. Cada sub-bloc queda delimitat per una línia negra contínua.

Així doncs, la relaxació introdueix una certa inhomogeneïtat natural, que podríem considerar provocada per la mateixa geometria o finitud del bloc. Aquesta inhomogeneïtat natural és producte de la permeabilitat del bloc, és a dir, de la interacció de les parts del bloc entre si. Cal veure doncs, en primer lloc, si aquesta inhomogeneïtat és de l'ordre de la que hem observat a les mesures de l'apartat 4.2.1. Recordem que, en aquell cas, trobàvem discrepàncies que en RMS eren de l'ordre de $6 \mu Tm$, valor que, a partir d'ara, anomenarem ΔI_2 . Per mesurar l'efecte de les inhomogeneïtats, compararem les integrals d'un bloc simulades mitjançant Radia amb les del mateix bloc amb permeabilitat 1 i imantació uniforme. En realitat, la suposició de bloc amb permeabilitat unitaria i imantació uniforme és la que s'assumeix a les mesures amb les bobines Helmholtz. En el nostre cas, realitzarem un càlcul equivalent a la mesura, tot calculant el flux de camp magnètic en una zona equivalent a l'àrea real de les bobines (per veure detalls sobre els paràmetres de les bobines veure apartat 2.1.1), i anomenarem a aquest mètode MMP (mesura de la imantació promig).

La Figura 99 mostra la diferència entre les integrals obtingudes en la simulació d'un bloc i les obtingudes a partir de la MMP. Per tant aquesta figura il·lustra l'error natural (induït per la geometria) comés en la mesura de la imantació amb les bobines de Helmholtz. Els valors d'aquesta diferència són com a màxim $0.3 \mu Tm$, molt per sota de ΔI_2 ($6 \mu Tm$) que havíem trobat en les discrepàncies entre integrals mesurades i predites a l'apartat 4.2.1. Això ens indica que, efectivament, els blocs reals tenen inhomogeneïtats afegides a les purament derivades de la geometria.

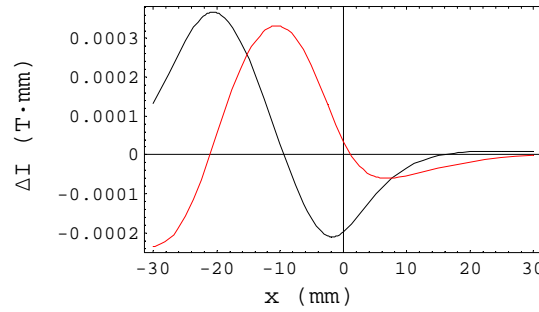


Figura 99: Diferència entre les integrals simulades mitjançant Radia (que assimilem a un cas real) i les calculades a partir de la imantació promig (que assimilem a les integrals deduïdes de les magnetitzacions mesurades amb les bobines Helmholtz).

5.3.1.2 Simular el camp d'un bloc inhomogeni

Cal tenir en compte que els imants que subministren les empreses solen tenir tots la mateixa MMP dins d'un rang d'un 1% en mòdul i 1° en desviació. Per a ser realistes, els blocs que simularem també hauran de satisfer aquesta restricció.

El nostre objectiu és generar tot un conjunt de blocs inhomogenis que compleixi els requisits esmentats, de forma que els puguem enumerar i ordenar segons el criteri de cada mètode.

Hem descrit les limitacions que existeixen a l'hora de proposar un model d'inhomogeneïtat en el marc de les nostres simulacions. Tenint-les en compte, i minimitzant la complexitat sempre que ha estat possible, hem triat un model que dona resultats prou versemblants.

En primer lloc, per a cada bloc que es genera, s'introdueix un error aleatori en la seva imantació. Suposem, per exemple, que hem de simular un bloc tipus B; la seva imantació ideal seria $M_0 = \{0, m_0, 0\}$, però en el i -èssim bloc introduïrem un cert error $\Delta m_{i,j}$ aleatori en la component j de la imantació, i per tant la imantació M_i del i -èssim bloc generat serà:

$$M_i = \{\Delta m_{i,1}, m_0 + \Delta m_{i,2}, \Delta m_{i,3}\} \quad (5-35)$$

Aquesta imantació que correspondrà gairebé exactament a la MMP, ha de satisfer els requisits anteriors, per tant:

$$\left| \frac{m_0 - \sqrt{\Delta m_{i,1}^2 + (\Delta m_{i,2} + m_0)^2 + \Delta m_{i,3}^2}}{m_0} \right| \leq 0.01 \quad (5-36)$$

$$\text{ArcSin}\left[\frac{\Delta m_{i,1}}{m_0}\right] \leq 1^\circ \quad \text{ArcSin}\left[\frac{\Delta m_{i,3}}{m_0}\right] \leq 1^\circ \quad (5-37)$$

Quan aquests valors són petits podem escriure les restriccions de la següent manera:

$$\frac{\Delta m_{i,1}}{m_0} \leq \frac{\pi}{180} ; \frac{\Delta m_{i,3}}{m_0} \leq \frac{\pi}{180} ; \frac{\Delta m_{i,2}}{m_0} \leq \frac{1}{100} \quad (5-38)$$

En segon lloc, cada bloc està constituït en realitat per 15 porcions (cada una conté 3 sub-blocs per a la relaxació). Hi ha tres tipus diferents de porcions, 5 amb imantació M_i , 5 amb imantació $M_i (1+h\cdot\Delta h_i)$ i 5 amb imantació $M_i (1-h\cdot\Delta h_i)$, on hem introduït el factor h d'inhomogeneïtat. Δh_i és un nombre aleatori entre -1 i 1 que es diferent per a cada bloc simulat. D'aquesta forma, no s'altera la imantació en cada un dels blocs i , tot el factor aleatori introduït per $h\cdot\Delta h_i$, es segueixen complint les restriccions del conjunt de blocs (5-38). Pel que fa a la posició que ocupa cada porció dintre del bloc, aquestes canvien de bloc a bloc de forma aleatòria.

Pel que fa al nombre de blocs utilitzats en la ordenació, utilitzarem, com és usual, un 20% addicional, es a dir simularem un total de 100 blocs tipus A i 100 blocs tipus B (per l'ondulador en farem servir 80 de cada tipus).

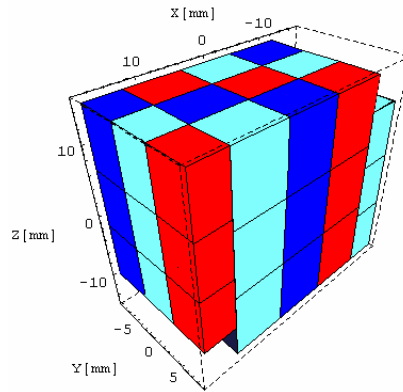


Figura 100: Representació esquemàtica d'un exemple de bloc inhomogeni en el codi Radia. Els blocs amb colors iguals tenen la mateixa imantació (abans de la relaxació). Cada sub-bloc queda delimitat per una línia negra contínua.

Ara cal veure que el model reproduïx els errors observats a la *Figura 69* ($6 \mu T \cdot m$). Aquesta prova és necessària per avaluar la versemblança del nostre model d'inhomogeneïtats. Ho farem tot comparant els mètodes de caracterització de blocs MMP i AMM.

5.3.2. Descripció d'un bloc: MMP vs. AMM

En aquest apartat compararem la bondat de la descripció d'un bloc, pel que fa a la predicció de les integrals. Farem un estudi d'aquesta bondat en funció de la inhomogeneïtat del bloc (inhomogeneïtat seguint el model descrit a l'apartat anterior).

En el cas del *AMM* deduïm les integrals a partir del camp generat pel bloc mesurat en una malla de punts, en el cas del *MMP* les deduïm a partir de la imantació (si assumim

permeabilitat 1 i imantació homogènia, les integrals d'un paral·lelepípede s'expressen de forma analítica en funció de la imantació). Es pretén doncs, comparar la caracterització d'un bloc real a través de la mesura de la seva imantació amb les bobines Helmholtz (equivalent al *MMP* en el cas del bloc simulat) amb la caracterització del mateix bloc a partir del camp que genera el bloc en una malla de punts prefixada (equivalent al *AMM* en el cas del bloc simulat). Anàlogament a com havíem fet per al *AMM*, definirem una funció de mèrit basada en l'error en la predicció de les integrals deduïdes a partir del *MMP*. Siguin $I_x(x)$ i $I_z(x)$ les integrals corresponents al conjunt de tres blocs simulat, i siguin $I_x^{MMP}(x)$ i $I_z^{MMP}(x)$ les integrals deduïdes a partir de la simulació de la mesura de la imantació dels blocs. Definim la funció de mèrit de l'ajust ΔI_{MMP} de la forma següent:

$$\Delta I_{MMP} = \sqrt{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left(I_x^{MMP}(x) - I_x(x) \right)^2 + \left(I_z^{MMP}(x) - I_z(x) \right)^2 dx} \quad (5-39)$$

Així doncs, haurem de comparar els valors de ΔI_{MMP} i ΔI_{AMM} a mesura que canvia el paràmetre d'inhomogeneïtat del bloc.

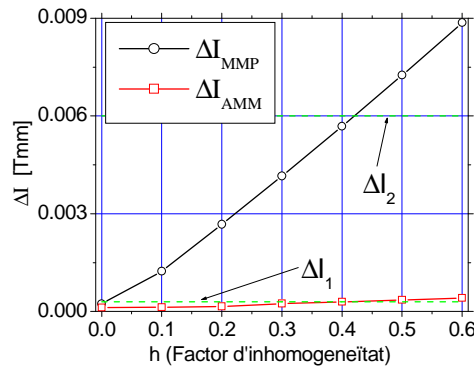


Figura 101: Desacord en la predicció de les integrals per als mètodes AMM i MMP per a diferents inhomogeneïtats dels blocs.

Tal com es pot observar a la *Figura 101*, el mètode *AMM* és molt més acurat per a qualsevol valor de la inhomogeneïtat h , mentre que el mètode *MMP* empitjora ràpidament quan augmentem la inhomogeneïtat h dels blocs simulats. De fet l'*AMM* és, en tot el rang estudiat, de l'ordre de ΔI_1 (error en la mesura de les integrals amb el fil tibant). Observem també que el nostre model presenta errors en la predicció de les integrals per *MMP* equivalents a ΔI_2 ($6 \mu Tmm$: error en la mesura de les integrals mesurades, veure apartat 4.2.1) quan $h=0.42$.

No obstant això, *AMM* empitjora progressivament a mesura que augmentem les inhomogeneïtats. La causa d'això és que la inhomogeneïtat incrementa la proporció de multipols d'ordre alt, mentre que l'ajust es fa tenint en compte un nombre finit de multipols.

Cal assenyalar de forma especial, que en cap cas estem afirmant que dintre dels blocs reals hi ha imantacions tan diferents com les del model. Per assegurar-ho caldria saber quina és la distribució espacial de les inhomogeneïtats, característica que ens és desconeguda.

En aquest apartat hem considerat l'ajust del camp creat per un bloc, però en un ondulator, els blocs es veuen afectats pel camp creat per la resta de blocs. La permeabilitat finita d'aquests farà que les integrals resultants en l'ondulator no siguin les que han estat ajustades per a cada bloc en concret. Així doncs, per comprovar si el nostre mètode resulta ser millor per a l'ordenació de blocs, cal realitzar (simular en el nostre cas) un procés de muntatge. Per realitzar l'ordenació, utilitzarem un conjunt de blocs amb inhomogeneïtats a partir del model definit a l'apartat 5.3.1.

5.3.3. Descripció d'un procés d'ordenació

En aquest apartat compararem fins a quin nivell podem disminuir el valor de les funcions de mèrit de l'ondulator simulat, utilitzant tres sistemes d'ordenació diferents.

1. *Ordenació tipus ELETTRA*: Combinarem la caracterització mitjançant el mètode MMP per a blocs individuals amb un algorisme d'ordenació basat en el *Simulated Annealing*.
2. *Ordenació tipus AMM*: Realitzarem l'ordenació en dues fases. En una primera fase s'agrupen els blocs en grups de tres (bloc tipus A, bloc tipus B, bloc tipus A) i grups d'un sol bloc (tipus B). Els grups de blocs es caracteritzen amb el mètode *AMM*. En la segona fase s'ordenen els grups amb un algorisme d'ordenació basat en el *Simulated Annealing*.
3. *Ordenació tipus ESRF*: Es realitza l'ordenació en dues fases. En la primera fase s'agrupen els blocs en grups de tres (bloc tipus A, bloc tipus B, bloc tipus A) i grups d'un sol bloc (tipus B). Un cop s'han simulat les integrals de cada grup de blocs (en realitat, les integrals es mesuren amb el fil tibant fix, com hem descrit a l'apartat 2.1.2.3.2), es construeix l'ordenació tot simulant les integrals del conjunt de grups cada cop que s'afegeix un grup. Cada cop que s'afegeix un grup es tria aquell que disminueix més les integrals. Aquest procediment es duu a terme per a cadascun dels 4 arranjaments per separat.

Val a dir que, en tots tres casos, partim del mateix conjunt de blocs, de forma que podem comparar directament els resultats dels diferents processos d'ordenació.

Per tal de comparar els resultats dels diferents mètodes, farem servir dos indicadors, ΔI per a les integrals i σ_ϕ per a l'error de fase òptica. Ja hem parlat de σ_ϕ a l'apartat 1.4.2 i ΔI és l'error *RMS* de les integrals residuals en el rang $[-L, L]$ segons la direcció transversal.

$$\Delta I = \sqrt{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L (I_x(x))^2 + (I_z(x))^2 dx} \quad (5-40)$$

Així doncs, per a cada conjunt de blocs, generarem tres ordenacions diferents, una per a cada mètode (podem parlar de tres ondulators diferents per a cada conjunt de blocs). Per a cada ondulator avaluarem els valors de σ_ϕ i ΔI per als ondulators construïts d'acord amb cadascun dels mètodes.

5.3.3.1 Introducció dels errors a les simulacions

Cadascun dels tres mètodes té, en la nostra simulació, la seva font d'errors particular. El mètode per simular la incertesa a l'hora de reproduir el camp en cada cas és similar, però per a cada mètode d'ordenació, la incertesa prové d'una magnitud diferent: la imantació M en l'ordenació de tipus Elettra, el camp magnètic B en la de tipus AMM i les integrals de camp I en la de tipus ESRF.

1. *Ordenació tipus ELETTRA: σ_M* : Els errors entren en joc només en la simulació de la mesura de la imantació. Per simular-ne la incertesa associada, es fa servir la propagació d'errors en l'expressió (2-7). Com ja havíem dit, la incertesa més important en la mesura ve donada per a la incertesa en el volum del bloc. Les toleràncies mecàniques típiques per als blocs són de $\pm 50 \mu m$. Donat que les dimensions en el nostre cas són $34 \times 30 \times 18 \text{ mm}^3$, la incertesa en la imantació (el càlcul es durà a terme tenint en compte totes les contribucions a la incertesa) es troba sempre al voltant de 0.1%.
2. *Ordenació tipus AMM: $\sigma_B = 50 \mu T$* : La incertesa en la mesura dels multipols en un cas real prové de la mesura del camp magnètic. De la mateixa manera que a l'apartat 5.3.2, simularem la incertesa ajustant els multipols a un camp que no és exactament el simulat, sinó que té una sèrie d'errors afegits aleatòriament a la malla de punts en què es mesura el camp. Com ja hem dit abans, tenint en compte que el camp dels blocs està en el rang $[-0.2 T, 0.2 T]$, podem estimar que la incertesa associada a la mesura amb una sonda Hall és d'uns $50 \mu T$.
3. *Ordenació tipus ESRF: $\sigma_I = 5 \cdot 10^{-4} T \text{ mm}$* : En aquest cas simularem l'error comés en la caracterització dels blocs a través de la mesura de les integrals dels blocs.

Com ja hem dit abans, la incertesa associada a la mesura de les integrals amb un fil tibant és de $5 \cdot 10^{-4} T mm$. Aquest error es tindrà en compte tant a l'hora de mesurar les integrals com a l'hora de realitzar el muntatge.

Així doncs, en cada cas introduïrem un error equivalent a l'experimental en cada una de les magnituds rellevants. L'error estarà aleatòriament distribuït entre $-\sigma_M$ i σ_M en cadascuna de les components de la imantació dels blocs en l'ordenació tipus Elettra, entre $-\sigma_B$ i σ_B en el cas de les components del camp magnètic dels blocs en cada punt de la malla que es fa servir en el mètode AMM. A l'ordenació de tipus ESRF l'error estarà aleatòriament distribuït entre $-\sigma_I$ i σ_I en el cas de les components de les integrals del camp magnètic dels blocs en cada punt de la línia de mesura $x \in [-30, 30] mm$ (al pla mig del ondulator).

5.3.3.2 Resultats

La *Figura 102* ens mostra valors de σ_ϕ i ΔI per als els diferents mètodes d'ordenació en funció del factor d'inhomogeneïtat dels blocs. Observem que, en general, excepte en el cas de blocs molt homogenis ($h=0$), l'ordenació de tipus AMM és la més avantatjosa, tant pel que fa al camp com pel que fa a les integrals.

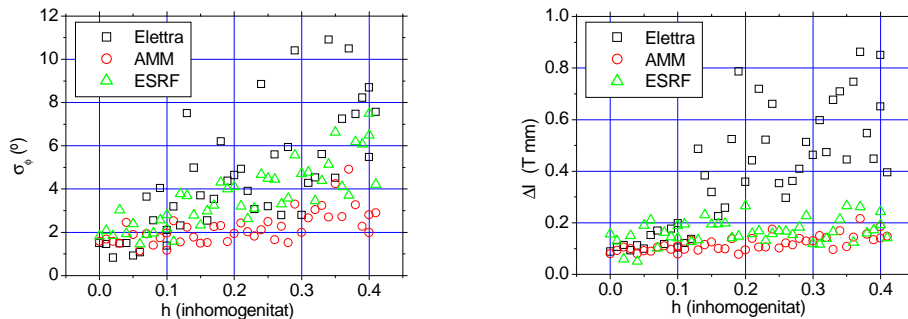


Figura 102: Error de fase òptica (σ_ϕ) i valor Residual de les integrals RMS (ΔI) un cop realitzat el procés d'ordenació en funció del factor d'inhomogeneïtat per als tres mètodes d'ordenació que hem estudiat.

Abans de centrar-nos en les característiques que presenten les dades generades pels models, cal mencionar algunes generalitats.

En tots els casos, a mesura que augmenta el factor d'inhomogeneïtat h , les integrals residuals ΔI i la manca de periodicitat (error de fase òptica) σ_ϕ augmenten en promig. En general (amb l'excepció del mètode tipus ESRF pel que fa a les integrals residuals ΔI), també es produeix

un augment de la dispersió de les dades a mesura que augmenta el paràmetre d'inhomogeneïtat h .

Aquest efectes es deuen a la combinació de dues causes. En primer lloc, a mesura que augmenta el paràmetre d'inhomogeneïtat, la caracterització dels blocs a través de la imantació o els multipols es va fent més dolenta (*Figura 101*). En segon lloc, els processos d'ordenació es basen en algorismes amb una certa component aleatòria. En el cas del *Simulated Annealing* que utilitzem en els tipus d'ordenació AMM i Elettra, això es clar. En el cas de l'ordenació tipus ESRF, també té un cert grau d'arbitrarietat, sobretot pel que fa a l'ajust de l'error de fase òptica, que només es regula a través de la cancel·lació local de les integrals. Aquest fet no assegura que la primera integral sigui al més petita possible, sobretot quan, a causa de les inhomogeneïtats, els blocs generen camps diferents. En cada cas, l'algorisme corresponent funciona correctament. De fet les funcions de mèrit finals aconseguides en tots els casos es troben sempre al voltant dels mateix valor. Però a mesura que augmenta h , la correspondència amb les simulacions va empitjorant, i per tant la dispersió de les dades augmenta.

Centrem-nos ara en la comparació de les característiques específiques de cadascun dels mètodes que hem sotmès a estudi.

En primer lloc cal puntualitzar que després de l'ordenament sempre caldrà una correcció. L'ordenació tipus Elettra és molt més ràpida pel que fa a la seva implementació real. Això vol dir, que el temps que no s'inverteix en el procés d'ordenació es pot invertir en el de correcció. Ara bé, el resultat de la correcció sempre està lligat al punt inicial del qual es parteix, i això depèn de l'ordenació.

En principi, el mètode d'ordenació tipus ESRF, tot i ser el més lent, és el més segur. En aquest tipus de procés, però, no es tenen en compte totes les possibles ordenacions, sinó que se n'escull una amb un criteri particular, sense que sigui necessàriament la millor. En altres paraules, seguint aquesta metodologia, mai s'afegirà un grup de blocs que no sigui el millor possible per reduir les integrals a cada moment de la construcció. És factible, però, trobar un cas en què, escollint un conjunt de blocs que no fos del tot òptim en aquell moment de la construcció, portés al final del procés a un valor millor que si haguéssim escollit la millor opció en el moment esmentat.

Pel que fa a la periodicitat del camp magnètic, l'ordenació tipus ESRF no té en compte, de forma directa, l'error de fase, sinó de forma indirecta a través de la cancel·lació de les integrals a cada període.

Així doncs, l'ordenació tipus AMM es presenta com una solució intermèdia pel que fa al temps d'implementació, i promet resultats tan bons com al de tipus ESRF. És clar que tot això

queda subjecte a la comprovació en un cas real. En aquest estudi ens hem limitat, a través de simulacions, a posar de manifest que hi ha raons de pes per experimentar la implementació de l'ordenació tipus AMM.

5.3.3.3 Detalls de l'ordenació a $h=0.0$

En aquest apartat analitzarem amb més detall quina és la bondat amb la qual es descriu el procés d'ordenació amb els mètodes *AMM* i *PMM* a $h=0$. En el cas de l'ordenació tipus ESRF, no podem parlar de cap predicció. Allò que limita el resultat final en aquest cas és el mètode d'ordenació en si mateix.

La Figura 103 ens mostra la correspondència entre les integrals simulades (equivalents a les mesures en un cas real) i les predites (utilitzant la *MMP*). La Figura 104 ens mostra la correspondència entre les integrals simulades (equivalents a les mesures en un cas real) i les predites (utilitzant la *AMM*).

A banda de comparar els resultats, un fet rellevant que cal mencionar és que les integrals netes de cada conjunt de blocs són del mateix ordre que les integrals residuals finals. De fet, aquest és un dels factors que limita el mètode d'ordenació tipus ESRF (gràfica de la dreta a la *Figura 102*).

Observem en primer lloc que l'ajust del camp de cada bloc (i de cada conjunt de tres blocs) és molt bo (*Figura 103 A* i *Figura 103 B*), a excepció d'un bloc. A la *Figura 103 A*, la corba de color negre contínua (simulació amb Radia del bloc) no concorda amb la corba negre discontinua (predicció a través de la *PMM*). A la *Figura 103 B*, la corba de color púrpura contínua (simulació amb Radia del conjunt de 3 blocs) no concorda amb la corba púrpura discontinua (predicció a través de la *PMM*).

Aquests dos casos en què hi ha una diferència tan gran (en comparació amb la predicció de les integrals de la resta de blocs) corresponen al primer bloc tipus B en el primer quadrant (corba negra a la *Figura 103 A*) i a l'últim conjunt de tres blocs en el primer quadrant (corba púrpura a la *Figura 103 B*). En ambdós casos, es tracta dels blocs situats a les extremitats de l'ondulador. L'error en la predicció de les integrals d'aquests pocs blocs és el que genera la major part de l'error en la predicció de les integrals del primer quadrant sencer (corba negra a la *Figura 103 D*). Aquest fenomen és causat per la permeabilitat, i és comú en tots dos mètodes d'ordenació (veure també *Figura 104 A,B* i *D*).

Elettra

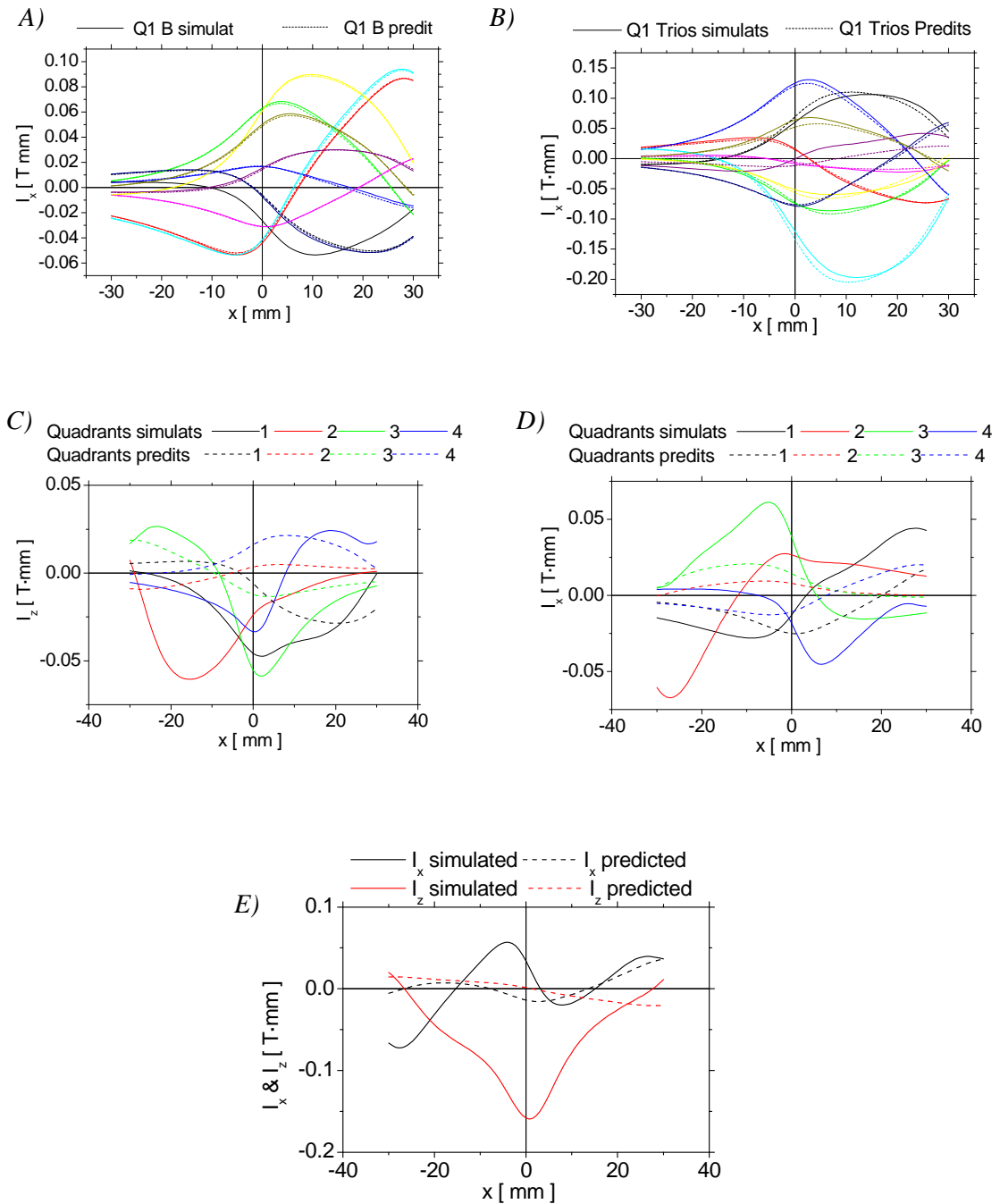


Figura 103: Comparació entre les integrals simulades amb Radia (corbes contínues: cas “real”) i calculades a partir de les magnetitzacions en el cas de realitzar una ordenació tipus **Elettra** a $h=0$ (corbes segmentades). A) Integrals I_x corresponents als 10 blocs tipus B del primer quadrant. B) Integrals I_x corresponents als 10 trios de blocs (tipus A+tipus B+tipus A) del primer quadrant. C) Integrals I_z produïdes per cada un dels quadrants per separat. D) Integrals I_x produïdes per cada un dels quadrants per separat. E) Integrals I_x i I_z produïdes per l’ondulador sencer.

AMM

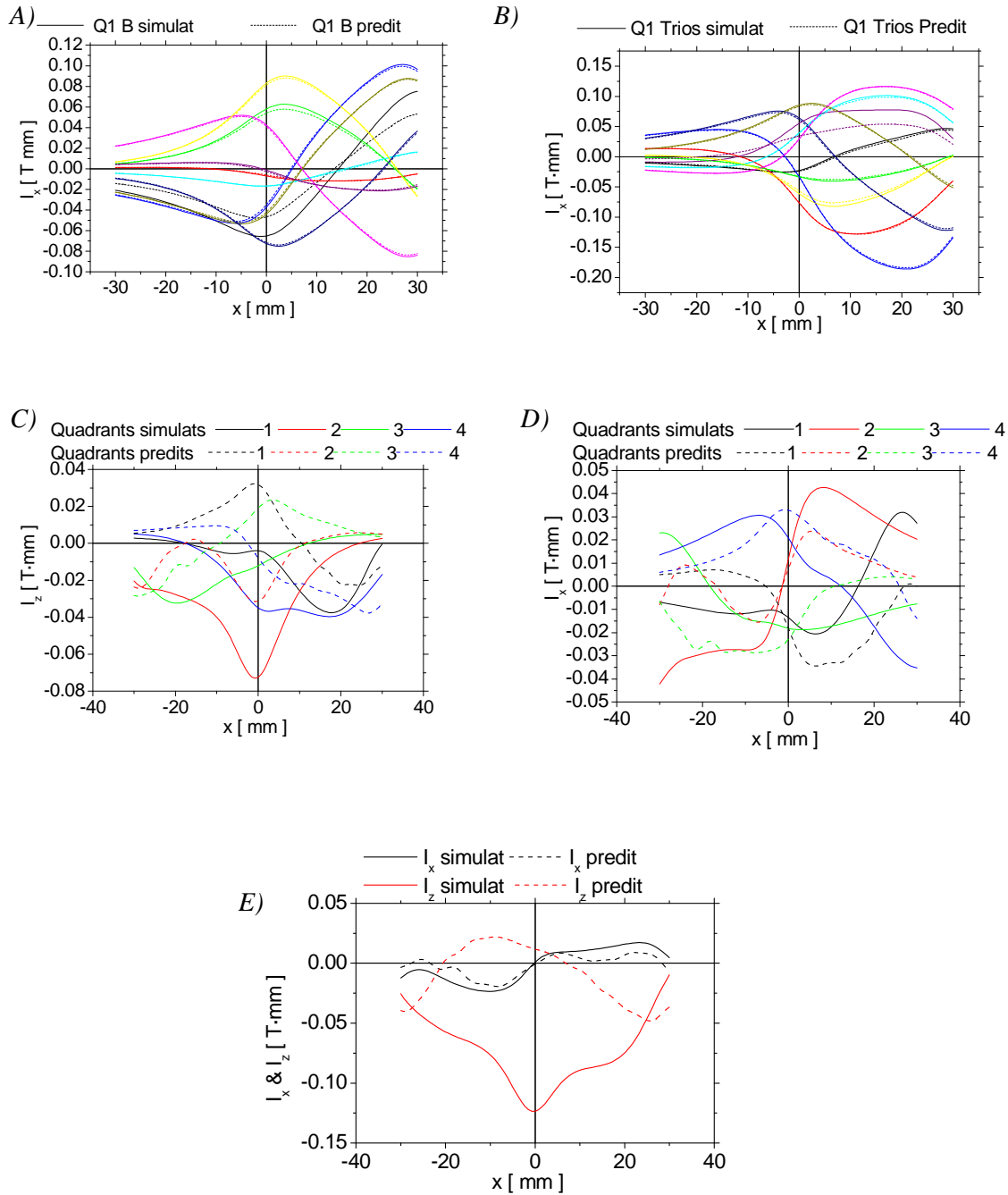


Figura 104: Comparació entre les integrals simulades amb Radia (corbes contínues: cas “real”) i calculades a partir del camp en el cas de realitzar l’ordenació tipus AMM a $h=0$ (corbes segmentades). A) Integrals I_x corresponents als 10 blocs tipus B del primer quadrant. B) Integrals I_x corresponents als 10 trios de blocs (tipus A+tipus B+tipus A) del primer quadrant. C) Integrals I_z produïdes per cada un dels quadrants per separat. D) Integrals I_x produïdes per cada un dels quadrants per separat. E) Integrals I_x i I_z produïdes per l’ondulador sencer.

Observem en segon lloc com en tots dos casos (Figura 103 E i Figura 104 E), les components I_x i I_z predites (per al *MMP* i el *AMM* respectivament) són sempre petites i del mateix ordre en ambdós casos. L'algorisme d'ordenació (*Simulated Annealing*) sempre és efectiu. De fet, en les optimitzacions de'ambdós mètodes, la funció de mèrit acaba sempre (fins i tot per a valors de h més grans) en el mateix valor numèric (al voltant de 0.2). Ara bé, tal i com veurem més endavant, la correlació amb la simulació va disminuint a mesura que augmentem el valor de h .

Observem també com en tots dos casos (Figura 103 E i Figura 104 E), la component I_x simulada és molt més petita que la component I_z simulada. De fet, la correspondència entre I_x simulada i I_x predita és molt millor que la que presenta I_z . Com ja hem dit, la principal causa de la diferència entre aquestes corbes és el fenomen de permeabilitat que es dona a les terminacions. Es tracta doncs, d'un error simètric a banda i banda de l'ondulador. Com que la component horitzontal del camp magnètic B_x és antisimètrica, els efectes de les terminacions un cop sumats els quatre quadrants tendeixen a cancel·lar-se.

5.3.3.4 Detalls de l'ordenació a $h=0.3$

La Figura 105 ens mostra la correspondència entre les integrals simulades (equivalents a les mesures en un cas real) i les predites (utilitzant la *MMP*) per a $h=0.3$. La Figura 106 ens mostra la correspondència entre les integrals simulades (equivalents a les mesures en un cas real) i les predites (utilitzant la *AMM*).

Contràriament al que succeïa en el cas en què no hi havia inhomogeneïtats per a $h=0.3$, al mètode *MMP* tots els blocs contribueixen en la mateixa mesura a l'error del quadrant (Figura 105 A i B). Donat que l'error de cada bloc és aleatori, no hi ha cap cancel·lació final a les integrals (Figura 105 E).

Per al mètode *AMM*, els blocs de les vores continuen sent els principals contribuents a les integrals dels quadrants (Figura 106 A i B). Les integrals simulades per a cada quadrant són significativament més grans que en el cas de $h=0$ (Figura 106 C i D). Això ve causat perquè, com ja hem comentat, quan augmenta la inhomogeneïtat l'ajust per multipols es veu lleugerament afectat. Ara bé, el fenomen de cancel·lació entre els quadrants segueix mantenint I_x en valors petits (Figura 106 E), molt més petits que per al cas d'Elettra.

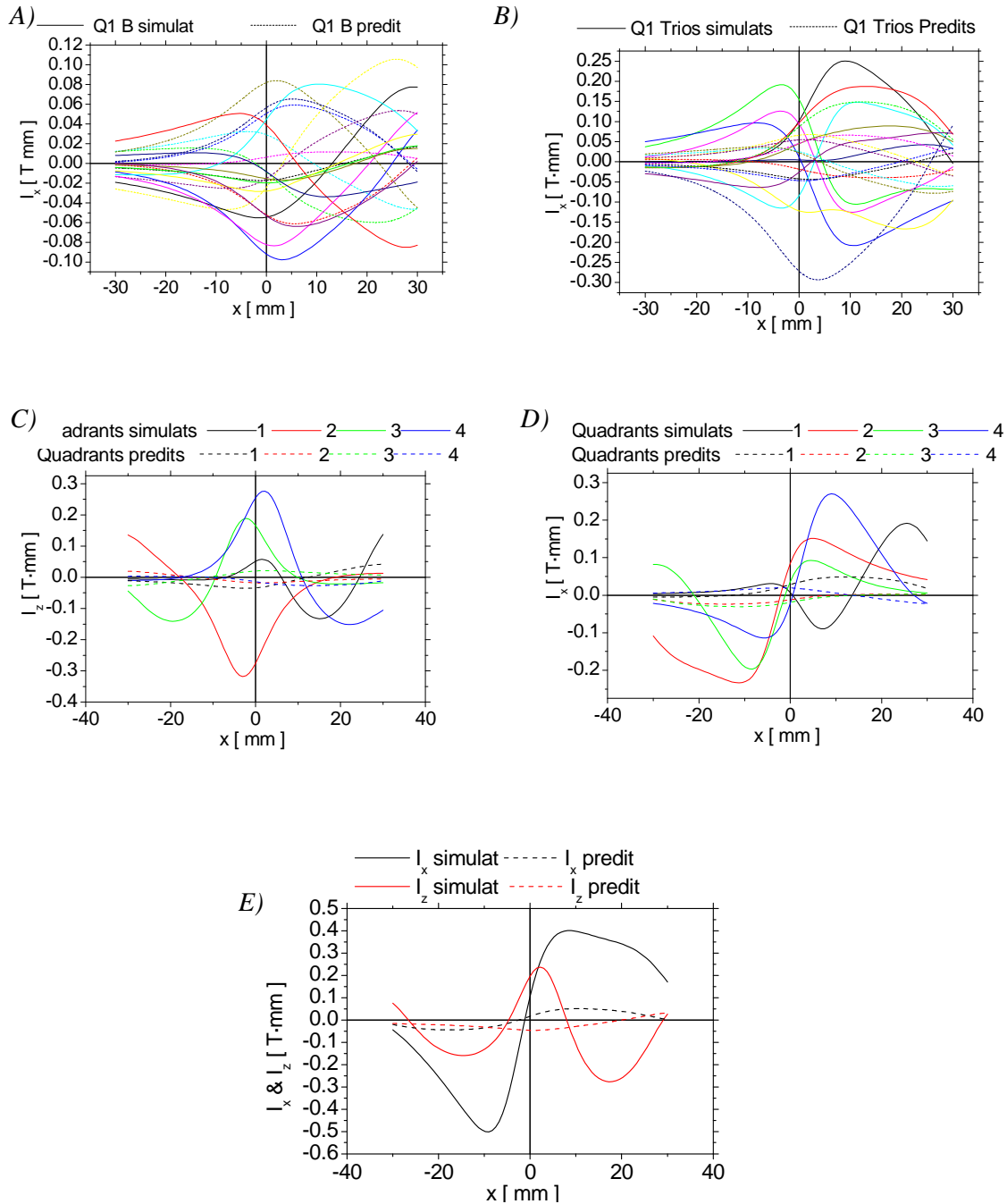
Elettra

Figura 105: Comparació entre les integrals simulades amb Radia (corbes contínues: cas “real”) i calculades a partir de les magnetitzacions en el cas de realitzar una ordenació tipus *Elettra* a $h=0.3$ (corbes segmentades). A) Integrals I_x corresponents als 10 blocs tipus B del primer quadrant. B) Integrals I_x corresponents als 10 trios de blocs (tipus A+tipus B+tipus A) del primer quadrant. C) Integrals I_z produïdes per cada un dels quadrants per separat. D) Integrals I_x produïdes per cada un dels quadrants per separat. E) Integrals I_x i I_z produïdes per l'ondulador sencer.

AMM

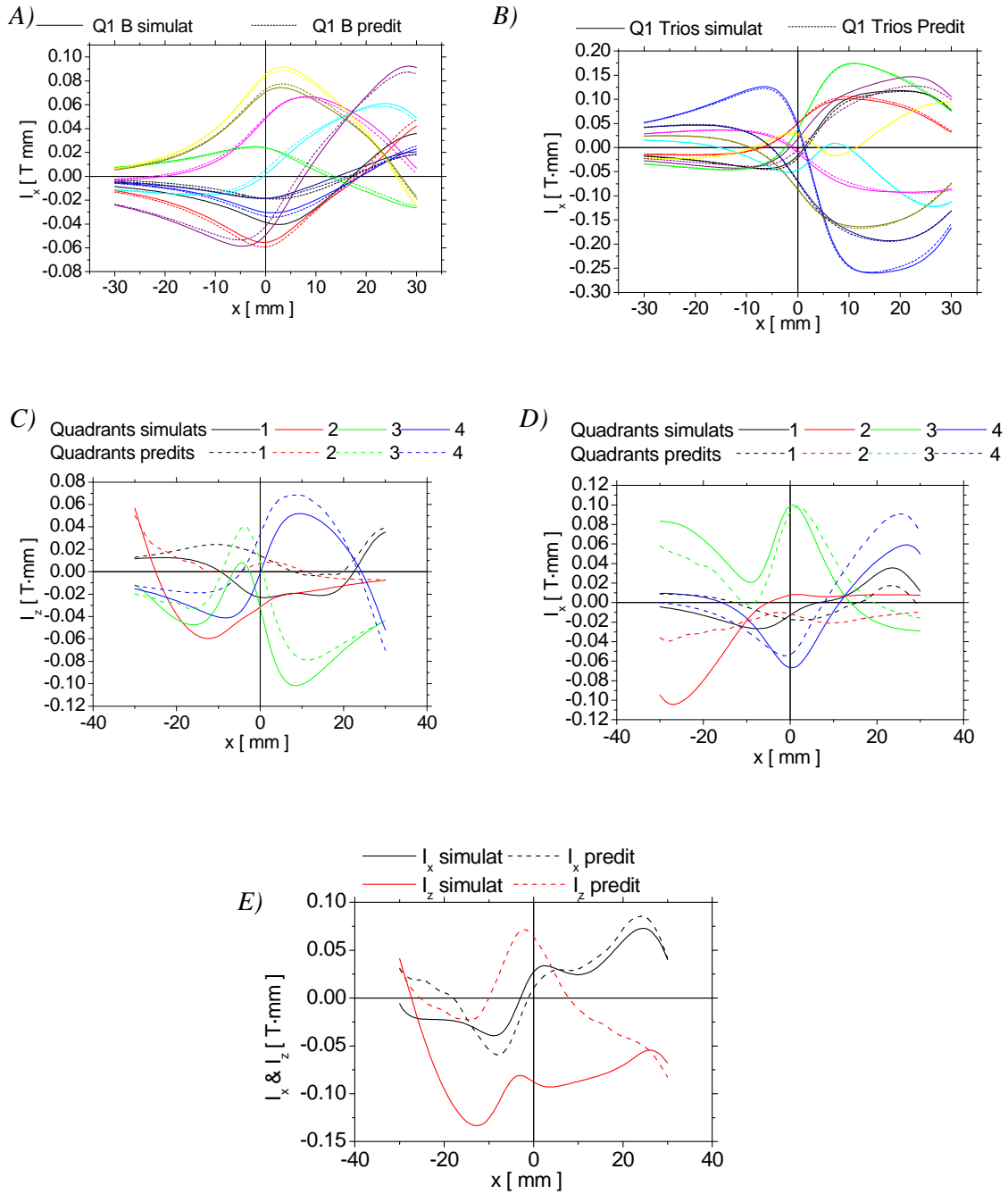


Figura 106: Comparació entre les integrals simulades amb Radia (corbes contínues: cas “real”) i calculades a partir del camp en el cas de realitzar l’ordenació tipus AMM a $h=0.3$ (corbes segmentades). A) Integrals I_x corresponents als 10 blocs tipus B del primer quadrant. B) Integrals I_x corresponents als 10 trios de blocs (tipus A+tipus B+tipus A) del primer quadrant. C) Integrals I_z produïdes per cada un dels quadrants per separat. D) Integrals I_x produïdes per cada un dels quadrants per separat. E) Integrals I_x i I_z produïdes per l’ondulador sencer.

CONCLUSIONS

6. CONCLUSIONS

Al llarg d'aquesta dissertació hem presentat tota una sèrie de mètodes i tècniques relacionades amb la construcció d'onduladors. Aquestes tècniques cobreixen diversos àmbits, des de l'apartat de disseny magnètic fins a l'assenblatge de les peces i la correcció del camp magnètic que produeix el dispositiu.

Hem fet diverses contribucions per sistematitzar el disseny magnètic d'onduladors, tot utilitzant algorismes numèrics com el *Simplex* o el *Simulated Annealing*. En particular, hem dut a terme el disseny d'un HU71 sota un conjunt d'especificacions que inclouen les forces magnètiques màximes acceptades pel suport mecànic. Aquest ondulator serà construït i s'utilitzarà en el futur sincrotró de Barcelona.

També ens hem centrat en els mètodes d'ordenació de blocs magnètics, on hem fet una aportació tot desenvolupant un nou mètode per ordenar blocs basat en la mesura dels moments magnètics del camp de cada bloc. Aquest nou mètode permet realitzar ordenacions a priori amb blocs molt inhomogenis. Tot i que en aquest estudi no hem aprofundit fins a quin grau d'inhomogeneïtat podem arribar, la tècnica descrita és força prometedora en aquest sentit. Cal tenir en compte que relaxar les especificacions dels blocs n'abarateix molt els costos. En aquest sentit, caldria considerar com continuació de la recerca feta fins aquí, l'aplicació del mètode a blocs reals. Si aquesta recerca fos exitosa, aquest mètode seria útil en la construcció en cadena d'una gran quantitat d'onduladors. Aquesta circumstància es dona en els acceleradors lineals del tipus làser d'electrons lliures (FEL: de l'angles *Free electron laser*) que s'estan dissenyant i construint actualment a diversos punts d'Europa.⁸⁷ En aquests acceleradors, s'utilitzen, en sèrie, una llarga successió d'onduladors al final del accelerador.

⁸⁷ J. Pfluger, *Insertion Devices for 4th Generation Light Sources*, in Proceedings of the 1999 PAC, p. 157-161.

Les restriccions sobre la qualitat del camp en aquests ondulators són majors que en els ondulators per a sincrotrons. Això implica que, o bé es fan més restrictives les toleràncies de les peces, o bé es milloren els processos d'ordenació i correcció.

Actualment, sota el projecte del sincrotró de Cerdanyola del Vallès, està prevista la construcció d'un laboratori de mesures magnètiques. La recerca realitzada i presentada en aquesta memòria permetrà millorar i ampliar les tècniques i mètodes de les quals hem tingut experiència en altres laboratoris com el d'Elettra.

En els laboratoris d'arreu del món, com ja hem explicat, s'utilitzen un gran nombre de mètodes diferents d'ordenació. En aquest treball es presenta per primer cop una comparació dels mètodes aplicats al mateix conjunt de blocs. Preteníem, doncs, desfer les ambigüitats habituals en la comparació d'aquests mètodes, com ara el tipus d'ondulador a que s'han aplicat, el material magnètic emprat o les dimensions dels blocs, entre d'altres.

Tot i que hem portat a terme un gran nombre d'estudis, considerem que queden tasques pendents que podrien ser desenvolupades en un futur: a part de la implementació pràctica amb blocs reals, les possibilitats de les simulacions que hem fet no estan del tot explotades. Per exemple, es podrien fer estudis sobre el nombre de blocs que es necessiten per realitzar el procés d'ordenació sense estar limitats per aquest factor. Aquest estudi no és viable utilitzant blocs reals, i en canvi es podria atacar a partir de les simulacions. En particular, es podria buscar la dependència del nombre de blocs necessaris en funció del nombre de períodes de l'ondulador, o en funció de les inhomogeneïtats dels blocs.

Per altra banda, des del punt de vista més experimental, seria interessant, abans d'aplicar el mètode d'ordenació a blocs reals, realitzar un estudi de les inhomogeneïtats en alguns blocs reals concrets. Es podrien fer mesures del camp magnètic a diferents distàncies de la superfície de l'imant, així com mesures de la imantació local. Respecte d'aquest últim punt, ja existeixen treballs al respecte amb NdFeB, tot i que encara no aplicats al camp dels IDs.⁸⁸ El problema principal en la realització d'aquest tipus d'estudis al camp dels IDs és el gran nombre de blocs que cal caracteritzar. Qualsevol solució s'ha de poder sistematitzar de forma senzilla.

Pel que fa a la implementació pràctica de l'AMM, caldria estudiar la possibilitat d'implementar un sistema de mesura de camp magnètic en una línia de punts (mitjançant un conjunt de sondes situades en una mateixa línia). D'aquesta forma, la mesura del camp magnètic generat per un bloc sobre una malla de punts seria molt més ràpida. Per raons

⁸⁸ J.H. Espina-Hernández, R. Grössinger, *A pulse field magnetometer for local magnetization measurements*, Journal of Alloys and Compounds 369 (2004), p. 235–238.

mecàniques i electròniques seria més convenient un disseny on les sondes Hall fossin fixes i el bloc es mogués.

REFERÈNCIES

7. REFERÈNCIES (PER ORDRE ALFABÈTIC)

- ❖ J. Bahrtdt et altr, *Magnetic field optimization of permanent magnet undulators for arbitrary polarization*, Nucl. Instr. and Meth. A 516 (2004) p. 575-585.
- ❖ J. Bahrtdt et altr. , *Circularly polarized synchrotron radiation from crossed undulator at BESSY*, Rev. Sci. Instr., Vol 63, nº1, gener 1992, p. 339-342.
- ❖ R.G. Barrera, G.A. Estévez and J GiralDOS, *Vector spherical harmonics and their applications to magnetostatics*, Eur. J. Phys, 1985, p. 287-294.
- ❖ F. Bergsma: (2003), *Calibration of hall sensors in three dimensions*, presented at 13th International Magnetic Measurement Workshop, May 19-22, 2003, Stanford, California, available at <http://fxb.home.cern.ch/fxb/immw13/>.
- ❖ P. J. Bryant, Kjell Johnsen, *The principles of Circular Accelerators and Storage Rings*, Cambridge university press, 1993, Cambridge, p. 10.
- ❖ J. Campmany and Z. Martí, *Conceptual design of APPLE-II devices for PEEM and XMCD beamlines at ALBA*, ALBA internal note, AAD-SR-ID-AN-0141, 2006.
- ❖ J.Chavanne et altr., *Magnetic design considerations for in-vacuum undulators at ESRF*, Proceedings of EPAC 2002, Paris, p. 2604-2606.
- ❖ J. Chavanne, P. Elleaume, P. Van Vaerenbergh, *End field structures for linear/helical insertion devices*, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference, New York May 1999, p. 2665-2667.
- ❖ J. Chavanne, P. Elleaume, P. Van Vaerenbergh, *Recent developments of insertion devices at the ESRF*, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference, Vancouver May 1997, p. 3506-3508.

- ❖ J. Chavanne, E. Chinchio, P. Elleaume, *New techniques for the development of high quality undulators for synchrotron sources*, ESRF internal note ESRF-SR/ID-89-27, September 1989.
- ❖ O.Chubar, P.Elleaume, *Accurate and efficient computation of synchrotron radiation in the near field region*, Proceedings of the 1998 EPAC, p.1177.
- ❖ O.Chubar, P.Elleaume i J.Chavanne, *A three-dimensional magnetostatics computer code for insertion devices*, J.Synchotron Rad. (1998). 5, p. 481-484.
- ❖ James A.Clarke, The Science and Technology of Undulators and Wigglers, Oxford University Press, 2004, New York.
- ❖ A.D. Cox and B.P.Youngman, "Systematic selection of undulator magnets using the technique of simulated annealing", Proceedings of the International Conference on Insertion Devices for Synchrotron Sources, 1985, SPIE Vol. 582 (1986) p. 91.
- ❖ B. Diviacco, *Performance Optimization of Pure Permanent Magnet Undulators*, in Proceedings of the 1993 IEEE PAC, p. 1590-1592.
- ❖ B. Diviacco, C. Poloni, R.P. Walker, *Conceptual design of a variable period PM undulator*, Sincrotrone Trieste internal note, ST/M-TN-90/1, gener 1990.
- ❖ B. Diviacco, R. P. Walker, *Pure permanent magnet end-configuration*, Sincrotrone Trieste internal note, ST/M-TN-93/5, Maig 1992.
- ❖ B. Diviacco, R.P. Walker, *Recent advances in undulator performance optimization*, Nucl. Istr. Meth. A, 368 (1996), p. 522-532.
- ❖ B. Diviacco, et altr. *Development of elliptical undulators for Elettra*, Proceedings of the 2000 European Particle Accelerator Conference, Vienna May 2000, p. 2322.
- ❖ B. Diviacco et altr. , *Design of a figure-8 undulator for Elettra*, Proceedings of EPAC 2002, p. 2610-2612.
- ❖ B. Diviacco et altr., *Multipole trim magnets for field integral correction of Apple type undulators*, Sincrotrone Trieste internal note, ST/SL-04/01, April 2004.
- ❖ P.Elleaume, *A New Approach to the Electron Beam Dynamics in Undulators and Wigglers*, Proceedings of the 1992 EPAC, p. 661-664.
- ❖ P.Elleaume and J.Chavanne. *A new powerful flexible linear/helical undulator for soft X-rays*. Nuclear Instruments and Methods, A304 (1991) p. 719-724.
- ❖ P.Elleaume, H.Onuki, Undulators, Wigglers and their applications, Taylor & Francis, 2003, London.

- ❖ J.H. Espina-Hernández, R. Grössinger, *A pulse field magnetometer for local magnetization measurements*, Journal of Alloys and Compounds 369 (2004), p. 235–238.
- ❖ K. Halbach, *Concepts for insertion devices that will produce high-quality synchrotron radiation*, Nuc. Inst. And Meth. A 246 (1986) p. 77-81.
- ❖ K. Halbach, *Desirable excitation patterns for tapered wigglers*, Nuc. Inst. And Meth. A (1986) p. 95-99.
- ❖ K. Halbach, *Permanent magnet undulators*, Journal de physique, Colloque C1, supplément au n°2, Tome 44, p. 211-216.
- ❖ K.Halbach, *Physical and Optical Properties of Rare Earth Cobalt Magnets*, Nucl. Instr. and Meth. 187 (1981) p. 109.
- ❖ W.V. Hassenzahl, et altr., *Insertion devices for the Advanced Light Source at LBL*, in Proceedings of the 1989 PAC, p. 1222-1224.
- ❖ T. Hezel et al., *Experimental Results with a novel superconductive in-vacuum mini-undulator test device at the Mainz Microtron MAMI*, Proceedings of PAC99, New York, p. 165-167.
- ❖ D. Humphies et altr. , *Design of end magnetic structures for the Advanced Light Source wigglers*, Advanced Light Source internal note, n° DE-AC03-76SF00098.
- ❖ K. Jerbi et altr. , *On MEG forward using multipolar expansions*, Physics in Medicine and biology **47** (2002) p. 523-555.
- ❖ B. M. Kincaid , *Random errors in undulators and their effects on the radiation spectrum*, J.Opt. Soc. Am. B, vol. 2, n° 8. p. 1294-1306.
- ❖ J. Marcos, *Radiation Damage on Permanent Magnets (review)*, ALBA internal note, AAD-SR-ID-AN-0074, 2005.
- ❖ Y. Miyahara and S. Sasaki, *Generation of variously polarized radiation by a double array undulator*, Sinchotron Radiation News, Vol. 7, n°1, 1994, p. 18-20.
- ❖ J. Nicolas, *Power emitted by HU71 helical undulator*, ALBA internal note, AXD-SRID-DG-0503, 2005.
- ❖ H. Onuki, N. Saito and T. Saito, *Undulator generating any kind of elliptically polarized radiation*, Appl Phys Lett., vol. 52, n° 3, 18 gener de 1988, p. 173-175.
- ❖ J. Pfluger, *Insertion Devices for 4th Generation Light Sources*, in Proceedings of the 1999 PAC, p. 157-161.

- ❖ V.A. Papadichev, G.V. Rybalchenko, *End field formation in planar hybrid undulators to ensure gap independence of the first and second field integrals*, Nucl. Instr. and Meth. A 532 (2004), p. 644–651.
- ❖ M.W. Poole and R.P. Walker, *Periodic magnets for undulators and free electron lasers – a review of performance features*, IEEE Trans. Mag. Vol. Mag-17, 5, 1981, p.1978-1981.
- ❖ M.W. Poole and R.P. Walker, *Some limitations on the design of plane periodic electromagnets for undulators and free electron lasers*, Nuc. Instr. Meth. 176 (1980) p. 487-495.
- ❖ G. Rakowsky et al., *High-performance pure permanent-magnet undulators*, Nucl. Instr. and Meth. A, Volume 296, Issues 1-3 , October 1990, p. 597-602.
- ❖ G. Rakowsky, et al., *Performance of Rocketdyne Phase-optimized Pure Permanent Magnet Undulator*, Proceedings of the 1991 Particle Accelerator Conference, San Francisco May 1991, p. 2733.
- ❖ S.I. Redin et al., *Radial magnetic field measurements with a Hall probe device in the muon (g-2) storage ring magnet at BNL*, Nucl. Instr. and Meth. A 473 (2001) p. 260-268.
- ❖ J.R.Reitz, F.J. Milford, R.W.Christy, Fundamentos de la teoría electromagnética, cuarta edicion, Addison-Wesley Iberoamericana.
- ❖ K.E. Robinson et al., *Hybrid undulator design considerations*, Nuc. Instr. Meth. A 250 (1986) p. 100-109.
- ❖ R. Rossmanith, *A year's experience with a superconducting undulator in the storage ring ANKA*, Proceedings of EPAC 2006, Edinburgh, p.3571-3573.
- ❖ M. Ryytnänen, *Characterisation and optimisation of hybrid insertion devices using genetic algorithms*, University of Helsinki, Report Series in Physics, HU-P-D122, 2004.
- ❖ S. Sasaki, *Analyses for a planar variably-polarizing undulator*, Nuc. Instr. Meth. A 347 (1994) p.83-86.
- ❖ S. Sasaki et al., *Conceptual design of quasiperiodic undulator*, Rev. Sci. Instr., vol. 66, n° 2, febrer 1995, p.1953-1955.
- ❖ D. Scott, *A Helical Undulator for TESLA*, Daresbury Laboratory internal note, ASTeC-ID-008.
- ❖ T. Tanaka and H. Kitamura, *Effective initial sorting of undulator magnets*, Rev. Sci. Instr., vol. 71, 2000, p. 3010-3015.

- ❖ T. Tanaka, T. Seike and H. Kitamura, *Undulator field correction by in-situ sorting*, Nucl. Instrum. Methods, vol. A 465, p. 600-605.
- ❖ S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes in C Cambridge university press, 1992, New York, W.H. Press.
- ❖ G. Tosin et Altr., *EPU assembly based on sub-cassettes magnetic characterization*, Proceedings of EPAC 2006, Edinburgh, p. 3107-3109.
- ❖ I. Vasserman et altr., *Measurement, sorting and tuning of LCLS undulator magnets*, Nuc. Instr. and Meth. A 483 (2002) p. 383-387.
- ❖ R. P. Walker, *"Insertion Devices: Undulators and Wigglers"*, CERN Accelerator School: Synchrotron radiation and free electron lasers, CERN 98-04, 3 August 1998.
- ❖ E. Wallén, J. Chavanne, P. Ellaume, *Magnetic calculations of a superconducting undulator at the ESRF*, Nucl. Instr. and Meth. A, Volume 541 (2005), p. 630-650.
- ❖ D. Zangrando, R.P, Walker, *A stretched wire system for accurate integrated magnetic field measurements in insertion devices*, Nucl. Instr. and Meth. A 376 (1996) p. 275-282.

APÈNDIXS

Apèndix A. Components de les integrals de camp

A.1.Introducció

És un fet conegut que les components de les integrals del camp magnètic al llarg d'un cert eix (diferent de l'eix d'integració) estan relacionades si i només si les fonts de camp magnètic són totes a un mateix costat del pla generat per la direcció d'integració i la línia de mesura. En aquest apèndix es dedueix la relació existent entre les components a partir de la llei de Biot-Savart. Tot i que hi ha altres derivacions basades en les transformacions de Hilbert, aquí es desenvolupa una derivació diferent des del punt de vista matemàtic i es mostra que el resultat és el mateix.

A.2.Derivació

A.2.1. Derivació a partir de la llei de Biot-Savart

Comencem la derivació partint de la llei de Biot-Savart. D'acord amb aquesta llei, podem escriure el camp magnètic $B(r)$ de qualsevol font de camp magnetostàtic en termes de la densitat de corrent equivalent $J(r')$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{A-1})$$

on $r = (x, y, z)$ són les coordenades del punt on es calcula el camp magnètic i $r' = (x', y', z')$ les coordenades del punt on hi ha una densitat de corrent $J(r')$. Definim I com la integral del camp magnètic:

$$\vec{I}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}(\vec{r}) dy \quad (\text{A-2})$$

Degut a que fora de les fonts el camp magnètic es pot escriure com el gradient d'una certa funció escalar, només les components transversals a la direcció d'integració són no nul·les. Les anomenarem I_x i I_z :

$$\begin{aligned} I_x(x, z) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int dx' dz' \frac{(z - z') \sigma(x', z')}{(z - z')^2 + (x - x')^2} \\ I_z(x, z) &= \frac{-\mu_0}{2\pi} \int dx' dz' \frac{(x - x') \sigma(x', z')}{(z - z')^2 + (x - x')^2} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

on la densitat de corrent integrada $\sigma(x', z')$ s'expressa de la forma següent:

$$\sigma(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} J_z(\vec{r}) dz \quad (\text{A-4})$$

En aquest punt cal fer una suposició que serà explicada més endavant. Suposarem que la densitat de corrent integrada es pot escriure de la següent forma:

$$\sigma(x, z) = \delta(z' - z_0) \lambda(x') \quad (\text{A-5})$$

on $\delta()$ és la funció Delta de Dirac. Estem suposant que la font de camp magnètic té dues dimensions, i existeix només dintre del pla $z = z_0$. Fent servir la suposició anterior, obtenim una expressió més simple per a les integrals:

$$\begin{aligned} I_x(x, z) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int dx' \frac{(z - z_0) \lambda(x')}{(z - z_0)^2 + (x - x')^2} \\ I_z(x, z) &= \frac{-\mu_0}{2\pi} \int dx' \frac{(x - x') \lambda(x')}{(z - z_0)^2 + (x - x')^2} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

l'expressió anterior, es pot entendre com un producte de convolució, i la transformada de Fourier és útil per invertir la relació Camp(Font de Camp). Aplicant la transformada de Fourier a banda i banda de l'expressió anterior, obtenim:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_x(k_x, z) &= \frac{\mu_0}{2\pi} H(k_x, z - z_0) \tilde{\lambda}(k_x) \\ \tilde{I}_z(k_x, z) &= \frac{-\mu_0}{2\pi} G(k_x, z - z_0) \tilde{\lambda}(k_x) \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

El símbol \sim sobre les funcions indica la transformada de Fourier i k_x és la variable conjugada d' x . Les funcions $H()$ i $G()$ es defineixen de la següent forma:

$$\begin{aligned} H(k_x, z - z_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{(z - z_0) e^{i k_x t}}{t^2 + (z - z_0)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z - z_0}{|z - z_0|} e^{-k_x |z - z_0|} S(k_x) \\ G(k_x, z - z_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{t e^{i k_x t}}{t^2 + (z - z_0)^2} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} S(k_x) e^{-k_x |z - z_0|} S(k_x) \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

Per a solucionar la integral anterior s'ha utilitzat el programari *Mathematica*.⁸⁹ La funció $S()$ es defineix de la següent forma:

$$S(x) = \begin{cases} x < 0 \rightarrow -1 \\ x = 0 \rightarrow 0 \\ x > 0 \rightarrow 1 \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

De les equacions anteriors, podem concloure que hi ha una relació entre les transformades de Fourier de les components de la integral de camp:

⁸⁹ Mathematica 4.1 Copyright 1988-2000 Wolfram Research, Inc.

$$\tilde{I}_z(k_x, z) = -i S(k_x) \frac{|z - z_0|}{z - z_0} \tilde{I}_x(k_x, z) \quad (\text{A-10})$$

Aquesta equació només és vàlida per a una distribució de fonts de camp magnètic en un pla. Considerem ara un conjunt de fonts de camp magnètic totes elles complint l'equació anterior, i totes elles al mateix costat del pla $z = z_0$, és a dir, totes elles per sobre o per sota d'aquest pla. Aleshores, per a aquest conjunt de fonts planes, l'equació anterior no depèn de la coordenada z en què es troben les fonts:

$$\tilde{I}_z(k_x, z) = \mp i S(k_x) \tilde{I}_x(k_x, z) \quad (\text{A-11})$$

Aquesta relació es pot invertir, però per fer-ho cal tenir en compte que $S(k_x)$ s'anul·la a $k_x = 0$. Multiplicarem a banda i banda per $S(k_x)$:

$$\mp i S(k_x) \tilde{I}_z(k_x, z) = -S(k_x)^2 \tilde{I}_x(k_x, z) \quad (\text{A-12})$$

$S(k_x)^2$ és igual a 1 excepte a k_x on val 0. Ara bé, a $k_x = 0$ sempre es compleix $\tilde{I}_x(k_x, z) = 0$ ja que:

$$\tilde{I}_x(k_x = 0, z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I_x(x, z) dx \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_c \vec{I}(x, z) d\vec{l} = 0 \quad (\text{A-13})$$

així doncs, l'equació (A-11) es pot escriure també tal com segueix:

$$\tilde{I}_x(k_x, z) = \pm i S(k_x) \tilde{I}_z(k_x, z) \quad (\text{A-14})$$

Ja tenim, doncs, explícites, les relacions que buscàvem.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_z(k_x, z) &= i S(k_x) \tilde{I}_x(k_x, z) \\ \tilde{I}_x(k_x, z) &= -i S(k_x) \tilde{I}_z(k_x, z) \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Recordem que s'escull un signe positiu o negatiu segons la font de camp magnètic estigui per sobre o per sota del pla que formen la direcció d'integració i la línia de mesura de les integrals. En l'equació anterior hem suposat que les fonts de camp magnètic estan per sota del pla esmentat.

A.2.2. Derivació a partir de les lleis de Maxwell i la relació de dispersió

Les equacions de maxwell aplicades a la integral de camp es poden escriure com:

$$\begin{aligned} \nabla \times B = 0 & \quad \rightarrow \quad \partial_x I_z - \partial_z I_x = 0 \\ \nabla \cdot B = 0 & \quad \rightarrow \quad \partial_z I_z + \partial_x I_x = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

A partir d'aquestes relacions podem construir una funció complexa diferenciable (és a dir que compleixi les condicions de Cauchy Riemann):

$$F(x, z) = I_z(x, z) + i I_x(x, z) \quad (\text{A-18})$$

on i representa la unitat imaginària. Donades les equacions anteriors, la funció $F ()$ està definida com a diferenciable (observem que I_x és el terme imaginari i I_z el terme real), per tant les seves parts reals i imaginaries estan relacionades a través de la Relació de Dispersió:

$$\begin{aligned} I_z(x, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_x(x', z)}{x' - x} dx' \\ I_x(x, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_z(x', z)}{x' - x} dx' \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

En les integrals anteriors cal prendre el valor principal de Cauchy. Observem que aquest última equació correspon exactament a la transformada de Fourier inversa de l'equació (Apèndix A-15). Cal només notar que l'equació anterior es pot entendre com una convolució i tenir en compte la igualtat següent:

$$g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \tilde{g}(k_x) = i \pi S(k_x) \quad (\text{A-20})$$

Per tant queda demostrat que les dues derivacions són equivalents.

Apèndix B. Expansió del camp magnètic per Taylor

Partim de l'equació de Biot-Savart.⁹⁰ Per a una font finita, el camp magnètic $B(r)$ en un punt r es pot expressar en termes d'un cert corrent equivalent $J(r')$.

$$B_i(r) = \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{(r-r')_j J_k(r')}{|r-r'|^3} dx' \quad (\text{B-1})$$

on i, j i k són índexs de 1 a 3 i indiquen la component de l'eix cartesià, r són les coordenades del punt on es mesura el camp magnètic, r' les coordenades del punt on la densitat de corrent equivalent val $J(r')$ i ε_{ijk} és el tensor de Levi-Civita. Suposant que el corrent equivalent sigui estàtic:

$$\nabla \cdot J(r') = 0 \quad (\text{B-2})$$

Per tant, podem expressar aquest corrent com el rotacional d'un cert camp vectorial F .

$$J_k(r') = \varepsilon_{kmn} \partial'_m F_n(r') \quad (\text{B-3})$$

i podem reescriure l'equació (B-1) com:

$$B_i(r) = \int_V \partial_{a_0} \left[\frac{(r-r')_i}{|r-r'|^3} \right] F_{a_0}(r') dr' \quad (\text{B-4})$$

on a_0 és un índex mut de 1 a 3. Definim la següent funció:

$$G_{ia_0}(r-r') = \partial_{a_0} \left[\frac{(r-r')_i}{|r-r'|^3} \right] \quad (\text{B-5})$$

Lluny de les fonts, on $r' \ll r$, podem utilitzar l'expansió per Taylor de G_{ia_0} :

$$B_i(r) = \int_V F_{a_0}(r') \left[\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \partial'_{a_1} \dots \partial'_{a_n} G_{ia_0}(r-r') \Big|_{r'=0} \prod_{k=1}^n r'_{a_k} \right] dr' \quad (\text{B-6})$$

Amb aquest pas hem separat la contribució de les fonts (termes amb r') de la dependència espacial (termes amb r). Definim ara els moments multipolars M i les matrius multipolars T com segueix:

$$T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) = \partial'_{a_0} \dots \partial'_{a_n} \left[\frac{(r-r')_i}{|r-r'|^3} \right]_{(r'=0)} \quad (\text{B-7})$$

⁹⁰ J.R.Reitz, F.J. Milford, R.W.Christy, "Fundamentos de la teoría electromagnética", cuarta edición, Addison-Wesley Iberoamericana

$$\Lambda_{a_0 \dots a_n} = \frac{1}{n!} \int_V F_{a_0}(r') \prod_{k=1}^n r'_{a_k} dr' \quad (\text{B-8})$$

Per tant podem escriure:

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_n} \quad (\text{B-9})$$

En aquesta expressió podem veure com la component multipolar n contribueix amb 3^{n+1} variables, no obstant moltes d'aquestes no són graus de llibertat.

Apèndix C. Propietats dels moments multipolars

Comencem amb l'equació (B-9):

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_n} \quad (\text{C-1})$$

El camp magnètic ve determinat per a un conjunt de paràmetres $\Lambda_{a_0 \dots a_n}$. L'efecte d'aquests paràmetres sobre el valor del camp en cada punt de l'espai ve determinat per les matrius multipolars $T_{i,n,a_0 \dots a_n}$. Veurem que totes les restriccions pel que fa als índex de les matrius multipolars es poden traslladar als moments multipolars, ja que aquests tenen més graus de llibertat dels que té el camp. Considerem ara per separat les propietats d'aquets:

C.1. Restricció I de les matrius multipolars

Aquesta regla assegura que els índexs $a_0 \dots a_n$ són intercanviables en $T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r)$, per tant podem escriure:

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n} = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_j \dots a_k \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n} \quad (\text{C-2})$$

En el producte de l'equació anterior, els índexs a_k són muts, podem intercanviar els seus noms. Per exemple podem anomenar a_j a a_k i a_k a a_j , si ho fem, l'equació anterior esdevé:

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n} = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_j \dots a_k \dots a_n} \quad (\text{C-3})$$

Aquesta equació ens indica que els índexs de $\Lambda_{a_0 \dots a_n}$ es poden intercanviar tots sense alterar el valor del camp magnètic. És a dir, com que els índexs de $T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r)$ són intercanviables, podem escollir que $\Lambda_{a_0 \dots a_n}$ també ho sigui.

C.2. Restricció II de les matrius multipolars

Aquesta regla assegura que les traces parcials de les matrius multipolars $T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r)$ són totes nul·les:

$$\sum_{a_j=1}^3 \sum_{a_k=1}^3 \delta_{a_j, a_k} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) = 0 \quad \forall j, k = 0 \dots n \quad (\text{C-4})$$

Així doncs podem escriure:

$$B_i(r) = \sum_{n \geq 0} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_n} = \sum_{a_j=1}^3 \sum_{a_k=1}^3 \delta_{a_j, a_k} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_n} + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ a_j \neq a_k}} T_{i,n,a_0 \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_n} \quad (C-5)$$

Estudiarem amb més detall el primer terme de l'expressió anterior. Aquest terme té la forma d'un producte escalar a \mathfrak{R}^3 . Per posar-ho en evidència fem les següents definicions:

$$u_\alpha = T_{i,n,a_0 \dots \alpha \dots \alpha \dots a_n}^{j \quad k}(r) \quad (C-6)$$

$$v_\alpha = \Lambda_{a_0 \dots \alpha \dots \alpha \dots a_n}^{j \quad k}$$

Podem reescriure doncs l'equació (C-5) com:

$$B_i(r) = \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha v_\alpha + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ a_j \neq a_k}} T_{i,n,a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n}(r) \Lambda_{a_0 \dots a_k \dots a_j \dots a_n} \quad (C-7)$$

Gràcies a la propietat II de les matrius multipolars, sabem que el vector u_α està definit en el pla $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Anomenarem a aquest pla U . El vector v es pot descompondre en dos components, una que sigui normal al pla U i una altra que hi estigui continguda. La component de v que és perpendicular a U no afecta l'expressió anterior. Per tant sempre podem suposar que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ sense afectar al valor del camp magnètic, és a dir, podem suposar que totes les traces dels moments multipolars $\Lambda_{a_0 \dots a_n}$ són nul·les.

$$\sum_{a_j=1}^3 \sum_{a_k=1}^3 \delta_{a_j, a_k} \Lambda_{a_0 \dots a_n} = 0 \quad \forall j, k = 0 \dots n \quad (C-8)$$

C.3. Generalització

De fet el producte de l'equació (C-1) es pot entendre com una sèrie d'infinits productes escalars amb 3^{n+1} components cadascun. Per tant, si repetim l'argument anterior, conclouem que, per a qualsevol relació lineal entre els índexs de $T_{n,i,a_0 \dots a_n}(r)$, podem suposar que $\Lambda_{a_0 \dots a_n}$ també les compleixen sense alterar el valor del camp magnètic.

Apèndix D. Generalització de les matrius multipolars

L'equació (4-5) es demostra per inducció. Definim primer les matrius:

$$\tau_{i,n,a_0\dots a_n}(r) = -(n+1)\frac{(2n+1)!!}{r^{2n+3}}\delta_{i,a_0}\prod_{k=1}^n r_{a_k} + \frac{(2n+3)!!}{r^{2n+5}}r_i\prod_{k=0}^n r_{a_k} \quad (\text{D-1})$$

Podem comprovar que el primer terme coincideix amb el de les matrius multipolars:

$$T_{i,0,a_0}(r) = \partial'_{a_0} \left[\frac{(r-r')_i}{|r-r'|^3} \right] (r,0) = -\frac{\delta_{i,a_0}}{r^3} + \frac{3r_i r_{a_0}}{r^5} = \tau_{i,0,a_0}(r) \quad (\text{D-2})$$

Per generalitzar, hem de calcular el terme $n+1$ -ésim:

$$\begin{aligned} \partial'_{a_{n+1}} \tau_{i,n,a_0\dots a_n}(r-r') \Big|_{r'=0} &= -(n+1)(2n+3)\frac{(2n+1)!!}{r^{2n+5}}r_{a_{n+1}}\delta_{i,a_0}\prod_{k=1}^n r_{a_k} \\ &+ \sum_{j=1}^n (n+1)\frac{(2n+1)!!}{r^{2n+5}}\delta_{i,a_0}\delta_{a_{n+1},a_j}\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n r_{a_k} \\ &+ (2n+5)\frac{(2n+3)!!}{r^{2n+7}}r_{a_{n+1}}r_i\prod_{k=0}^n r_{a_k} - \frac{(2n+3)!!}{r^{2n+5}}\delta_{i,a_{n+1}}\prod_{k=0}^n r_{a_k} \\ &- \sum_{j=1}^n \frac{(2n+3)!!}{r^{2n+5}}r_i\delta_{a_{n+1},a_j}\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n r_{a_k} \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

En aquest punt utilitzarem el fet que els moments multipolars $\Lambda_{a_0\dots a_n}$ satisfan les restriccions I i II. Per tant els termes no rellevants en el producte $\Lambda_{a_0\dots a_n} \cdot T_{i,n,a_0\dots a_n}(r)$ poden ser eliminats de l'expressió anterior sense cap repercussió sobre el valor del camp magnètic. Per exemple, el segon i cinquè sumands contenen un terme amb δ_{a_k,a_j} , i, per tant, no contribuiran (restricció II). Com que $\Lambda_{a_0\dots a_n}$ té índexs intercanviables, aquests índexs poden ser intercanviats a l'expressió anterior. Finalment obtenim:

$$\begin{aligned} \partial'_{a_{n+1}} \tau_{i,n,a_0\dots a_n}(r-r') \Big|_{r'=0} &= -(n+2)(2n+3)\frac{(2n+3)!!}{r^{2n+5}}r_{a_{n+1}}\delta_{i,a_0}\prod_{k=1}^n r_{a_k} \\ &+ (2n+5)\frac{(2n+3)!!}{r^{2n+7}}r_{a_{n+1}}r_i\prod_{k=0}^n r_{a_k} = \tau_{i,n+1,a_0\dots a_{n+1}}(r) \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

Això prova el que volíem demostrar.