



Universitat Autònoma de Barcelona

# Facultat de Ciències

## INESTABILITATS DINÀMIQUES EN DISPOSITIUS ÒPTICS PASSIUS EXCITATS AMB LLUM MODULADA.

**TESI**

per a l'obtenció del GRAU DE DOCTOR

presentada a

LA FACULTAT DE CIÈNCIES

de la

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

per

**Jordi FARJAS SILVA**

Director de la Tesi  
**Gaspar ORRIOLS TUBELLA**

Novembre de 1993



## V.- ACOBLAMENTS NO LINEALS.

### V.1 Introducció.

En aquest capítol il·lustrarem la dinàmica del sistema modulad en punts propers a la bifurcació de Hopf del sistema autònom. Ens centrarem en el problema de la sincronització de les dues freqüències del sistema no autònom: la pròpia del dispositiu  $\omega_0$  (resultant de la bifurcació de Hopf del sistema autònom) i la freqüència de la modulació externa  $\omega_E$ . Farem també un estudi de les transicions entre les solucions periòdiques i realitzarem un estudi de bifurcacions locals de codimensió dos.

Comprovarem com la descripció de les diferents solucions s'ajusta a les prediccions dels mapes circulars. Observarem una dinàmica característica dels oscil·ladors actius modulats. També comprovarem una gran semblança entre la dinàmica del Brusselator forçat i el dispositiu bicapa modulad. Aquest darrer punt és un indicatiu de la riquesa de la dinàmica del dispositiu bicapa modulad ja que el Brusselator forçat és un dels sistemes paradigmàtics en l'estudi dels oscil·ladors forçats.

A diferència dels oscil·ladors no lineals més coneguts, el dispositiu BOITAL bicapa pot exhibir una certa varietat de bifurcacions globals gràcies a la multiestabilitat de la resposta estacionària del dispositiu autònom. En presència de la modulació externa, els diversos punts fixos que coexisteixen a l'espai de les fases per al sistema autònom, es converteixen en diferents òrbites periòdiques. Si aquestes òrbites són suficientment properes es poden influir mútuament donant lloc a l'aparició de bifurcacions globals. Aquestes bifurcacions globals seran objecte d'estudi al proper capítol. En aquest capítol ens limitarem a estudiar la dinàmica resultant de l'acoblament entre la modulació externa i una solució periòdica del sistema autònom, per això, considerarem situacions molt properes al punt de la bifurcació de Hopf del dispositiu autònom. D'aquesta manera ens assegurem que estem lluny de la bifurcació homoclínica del sistema autònom, i que per tant, l'acoblament entre la modulació externa i l'òrbita periòdica del dispositiu bicapa no queda pertorbat per l'existència d'altres solucions.

Dedicarem el següent apartat d'aquest capítol a fer una breu introducció a la problemàtica relacionada amb les sincronitzacions d'oscil·ladors no lineals. En aquest mateix apartat introduïrem els mapes circulars. Aquest tipus de mapes són molt útils per descriure la dinàmica resultant de l'acoblament entre dos oscil·ladors, i ens serviran per a introduir diversos conceptes bàsics necessaris per a analitzar l'acoblament d'oscil·ladors. La resta del capítol es centrarà en l'anàlisi de resultats numèrics i experimentals del dispositiu bicapa modulad. A l'apartat V.3 analitzarem l'aparició i caracterització de solucions periòdiques. A l'apartat V.4 estudiarem les bifurcacions locals de codimensió  $\dot{u}$  que afecten aquestes solucions periòdiques en l'espai dels paràmetres  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E$ . A l'apartat V.5 descriurem cinc bifurcacions locals diferents de codimensió dos. El darrer apartat l'hem dedicat a analitzar la relació existent entre les solucions periòdiques i les caòtiques, analitzant l'organització de les zones caòtiques on coexisteixen aquestes dues solucions.

## V.2 Sincronització d'oscil·ladors no lineals. Mapes circulars.

El problema de la sincronització d'oscil·ladors no lineals ha estat molt important en el món de la física i de la enginyeria, com a resultat del seu extens camp d'aplicació. Per exemple, tenim l'acoblament entre estructures urbanes amb el vent, o el d'un marcapassos amb el cor, la sincronització del moviment de la terra i la lluna, la sincronització dels ritmes biològics dels essers vius amb l'alternància dels dies i les nits, acoblaments en oscil·ladors electrònics i mecànics, i molts altres.

En els capítols anteriors ja hem avançat en alguns casos l'existència d'acoblaments no lineals entre la freqüència pròpia del sistema i la freqüència de la modulació externa. Hem vist que aquests acoblaments provocaven la sincronització de les oscil·lacions del dispositiu bicapa amb la modulació externa. Aquests acoblaments tenien una certa amplada en freqüències donant lloc a l'aparició de *finestres periòdiques*. Un altre detall característic d'aquests acoblaments és el fet que l'acoblament no només es donava quan les dues freqüències eren semblants, sinó que es donaven en un gran nombre de situacions diferents.

Les característiques abans esmentades són els trets que identifiquen els acoblaments no lineals entre oscil·ladors. Quan l'acoblament és lineal, la condició de la sincronització és molt més restrictiva; només es pot donar quan les dues freqüències són exactament iguals. Un exemple d'oscil·lador lineal és el pèndol. Sabem que les oscil·lacions de dos pèndols només es sincronitzen quan la longitud de la corda de què estan suspesos és la mateixa, és a dir quan la seva freqüència d'oscil·lació natural és la mateixa.

De tota manera, fins i tot en aquest cas, la sincronització és possible degut a les petites no linealitats presents en el sistema físic com són el fregament amb l'aire o l'elasticitat de la corda. Si els dos fossin dos oscil·ladors perfectament lineals seria impossible sincronitzar-los perquè les dues cordes haurien de ser iguals amb una precisió infinita.

Esquemàticament podem dir que hi ha dos elements essencials per a la sincronització d'oscil·ladors:

- Cal disposar de dos oscil·ladors més o menys independents amb paràmetres de control diferents. A més, com a mínim un d'ells ha de ser no lineal.
- Per altra banda cal que existeixi dissipació. En cas contrari ens trobarem dins la teoria de sistemes Hamiltonians. En aquest cas no existeixen ni òrbites asimptòticament atractives ni atractors caòtics, tot hi que poden presentar una dinàmica periòdica i caòtica. En els sistemes hamiltonians l'acoblament entre oscil·ladors ve descrita per la teoria de KAM [70].

El nostre dispositiu bicapa modulats compleix aquestes dues condicions. D'una banda el nostre dispositiu és un oscil·lador no lineal. Tal i com hem vist al capítol II el sistema pot presentar auto-oscil·lacions periòdiques. Aquesta és una característica dels oscil·ladors actius (Recordem per exemple l'oscil·lador de Van der Pol). A més a més, el nostre sistema és clarament dissipatiu, en els dispositius BOITAL la dissipació de l'energia absorbida al mirall d'entrada es fa a través de les conveccions al substrat i al mirall d'entrada.

L'altre oscil·lador és la modulació del feix de llum del làser que incideix sobre el dispositiu. Aquest modulador és extern i, per tant, independent del sistema. Aquest oscil·lador és lineal ja que la seva freqüència i amplitud és fixa i no queda alterada per l'acoblament amb dispositiu bicapa.

### V.2.1 El mapa circular lineal.

Els mapes circulars són una aplicació d'un cercle sobre ell mateix [26,31]. Aquests mapes donen els indicis per entendre el fenomen de les sincronitzacions i l'aparició de caos en els sistemes no lineals que impliquen la competència de dues o més freqüències. Els mapes circulars són el model més simple per descriure l'acoblament entre dos oscil·ladors no lineals, i ens permeten descriure fenòmens com la quasiperiodicitat, les finestres periòdiques, i les transicions de solucions periòdiques o quasiperiòdiques al caos.

Començarem l'estudi dels mapes circulars a partir del cas més senzill, el mapa circular lineal. El mapa circular lineal consisteix en una rotació constant d'angle  $\alpha$  al damunt de la circumferència :

$$\theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\} \tag{V.1}$$

on la notació simbòlica  $\{y\}$  significa mòdul d' $y$ , i  $\alpha$  és un número real positiu qualsevol inferior o igual a 1. En aquesta descripció considerem una volta sencera com 1 enlloc de  $2\pi$  o 360 graus. Aquest mapa es difeomòrfic, és a dir, invertible i continu.

De forma immediata podem deduir que la  $q$ -èssima iteració del mapa es pot escriure com :

$$\theta_q = \{\theta_0 + q\alpha\} \tag{V.2}$$

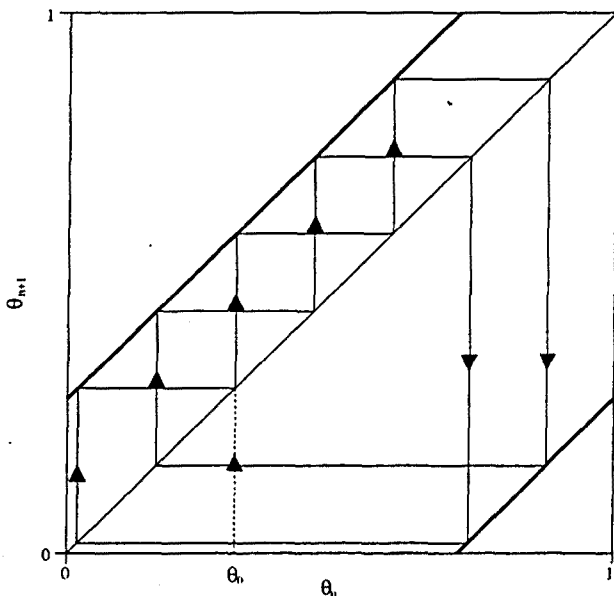


Fig. V.1 Òrbita periòdica del mapa circular lineal per  $\alpha=2/7$ .

Si  $\alpha$  és igual al quocient de dos enters  $p$  i  $q$ , és a dir,  $\alpha=p/q$ , llavors en l'evaluar  $\theta_q$  mòdul 1 ens desapareix el terme  $q\alpha$ . En aquest cas tenim una òrbita de període  $q$ .

Si ens fixem a la figura V.1, on hem representat una òrbita del mapa circular lineal de període 7 amb  $\alpha=2/7$ , podem observar que el número total de punts de l'òrbita és 7,

dels quals 2 estan per sota la bisectriu. En general quan  $\alpha=p/q$ , el nombre de punts de l'òrbita és  $q$  dels quals  $p$  estan per sota la bisectriu.

A partir d'aquesta aplicació podem construir una altra aplicació contínua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  retenint l'efecte acumulatiu de les rotacions, és a dir, no fent l'operació de mòdul 1. La nova aplicació consisteix en una simple translació:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha \quad (\text{V.3})$$

Podem comprovar que per a  $0 < \theta < 1$  aquesta aplicació ens porta a  $\{\theta_n + \alpha\}$  o a  $\{\theta_n + \alpha\} + 1$  segons el cas. En general, quan el mapa circular és dibuixat sense aplicar la funció mòdul s'extén a tot l'espai en comptes d'estar confinat a un quadrat unitari. A aquest mapa se'l coneix com *l'estirament (lift)* del mapa circular. L'estirament del mapa circular és un línia contínua de pendent positiu.

Hem vist que quan  $\alpha=p/q$ , existeixen  $q$  punts en el cercle, i són visitats en  $p$  voltes completes.  $\alpha$  s'anomena número rotacional i el simbolitzarem per  $\rho$ . Al proper subapartat introduïrem la definició del número rotacional per a un mapa circular general. Com veurem a la propera secció el número rotacional no sempre apareix de forma explícita en el mapa circular general i, aquest ha de ser calculat.

La dependència del número rotacional dels paràmetres és un dels problemes més importants en l'estudi de mapes circulars ja que ens permet discernir si l'acoblament dels dos oscil·ladors té com a resultat un moviment periòdic o quasiperiòdic. Arribat a aquest punt, convé aclarir la relació entre el mapa circular amb el problema de l'acoblament de dues oscil·lacions, i això vol dir, veure on són les dues freqüències en joc. Una de les freqüències té com a període el temps d'una iteració del mapa (recordem que els mapes es poden relacionar amb fluxos continus a l'espai de les fases on les interseccions amb una secció de Poincaré defineixen el mapa). L'altra freqüència està associada al moviment damunt del mapa. En el mapa circular lineal el quocient del dos períodes és igual a  $\alpha$ . En cas que el número rotacional sigui racional tenim sincronització de les dues freqüències de manera que la superposició d'oscil·lacions continua essent periòdica.

En canvi, quan  $\rho$  és un número irracional no podem obtenir mai en el mapa circular lineal un cicle periòdic finit. Les successives iteracions omplen indefinidament una circumferència sense que mai coincideixin dos punts. Tal i com hem vist al capítol I això correspon a una solució quasiperiòdica, i més concretament, biperiòdica. En aquest cas direm que tenim una solució quasiperiòdica caracteritzada pel número rotacional irracional  $\rho$ . La quasiperiodicitat és un fenomen que es presenta quan existeixen dues freqüències inconmensurables en competició. Recordem que en l'espai dels fluxos continus una òrbita quasiperiòdica correspon a un torus, és a dir, el torus és el resultat de la composició de dues oscil·lacions periòdiques inconmensurables.

Així doncs si fem variar el paràmetre de control  $\alpha$  ( $\alpha \in [0;1]$ ) entre 0 i 1, obtenim una descripció completa de les diferents solucions. Si aquest nombre  $\alpha$  és racional tenim una òrbita periòdica, en cas contrari tenim una òrbita quasiperiòdica. Aquesta descripció concorda exactament amb les característiques abans esmentades de l'acoblament entre oscil·ladors lineals; només hi haurà sincronització quan el quocient de les dues freqüències sigui exactament igual a un número racional. Si escollim de

manera aleatòria un número  $\alpha$  de l'interval  $[0;1]$  és pràcticament segur que obtindrem un número irracional. És a dir, en l'acoblament de dos oscil·ladors lineals pràcticament només trobarem evolucions quasiperiòdiques. Això és resultat del fet que en els oscil·ladors lineals el període és fix i no pot variar, en resum només hi haura sincronització quan les dues freqüències siguin commensurables.

Si volem la possibilitat d'assolir la sincronització de freqüències cal introduir una no linealitat al mapa circular lineal. Per exemple tenim el mapa circular sinusoidal:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \left\{ \theta_n + \alpha + \frac{B}{2\pi} \sin(2\pi \theta_n) \right\} \quad (\text{V.4})$$

on el funció sinusoidal és clarament un terme periòdic i no lineal. El nou paràmetre  $B$  caracteritza la força de l'acoblament de la no linealitat. El règim periòdic associat a un número rotacional  $\rho=p/q$ , que en el cas del mapa lineal es produïa en el punt  $\alpha=p/q$ , ara tindrà lloc en un rang de valors d' $\alpha$  quan  $B$  sigui diferent de zero. Aquest és un fenomen nou anomenat *afermant de freqüències (frequency-locking)* o *afermant de modes (mode-locking)*. L'oscil·lador no lineal, representat per  $f(\theta)$ , s'aferma dins d'un règim periòdic definit pel número rotacional  $\rho=p/q$  en comptes de mostrar sempre dues components periòdiques de períodes fixos. L'afermant de freqüències és possible en oscil·ladors no lineals ja que aquests, a diferència dels lineals, poden canviar dins un cert límit la seva freqüència d'oscil·lació. Aquestes zones d'amplada finita on existeix una solució periòdica s'anomenen *finestres periòdiques*. L'amplada de la finestra periòdica depèn de la capacitat de variació de la freqüència pròpia de l'oscil·lador i està associada a la força de la no linealitat. Quan major sigui la no linealitat més ampla serà la finestra periòdica.

A la figura V.2 hem fet un esquema on representem les zones periòdiques en les que hi ha afermant de freqüències. Aquestes zones es coneixen com *Llengües d'Arnold* (Arnold Tongues). Podem observar que per a valors de  $B$  petits les llengües d'Arnold no es superposen.

El mapa circular lineal és una referència per ordenar les òrbites periòdiques en mapes circulars més generals. Si el mapa circular és una funció monòtona creixent en  $\theta$ , l'ordre en què el mapa recorre els punts d'una òrbita periòdica al pla de Poincaré és el mateix que el del mapa circular lineal i amb el mateix número rotacional, encara que la distància entre punts pugui variar. Si el mapa és monòton creixent en fixar dos o més punts inicials, el seu ordre relatiu d'aparició en les successives iteracions és el mateix. Aquest fenomen es coneix amb el nom de *bon ordre (good order)*. En un mapa on hi hagi bon ordre, quan seguim les successives iteracions a partir d'un punt inicial a llarg del cercle, tant en el cas d'una òrbita periòdica o quasiperiòdica, el moviment és regular. Es a dir, les successives iteracions sempre es mouen cap endavant sense aturar-se en el temps o saltar enrera. El cas contrari, *mal ordre*, es dona quan el mapa no és monòton creixent. Les successives iteracions poden alternar endavant i enrere, i poden aparèixer atractors càdtics. Malgrat això, mal ordre no implica caos, per exemple un únic doblament de període viola el bon ordre.

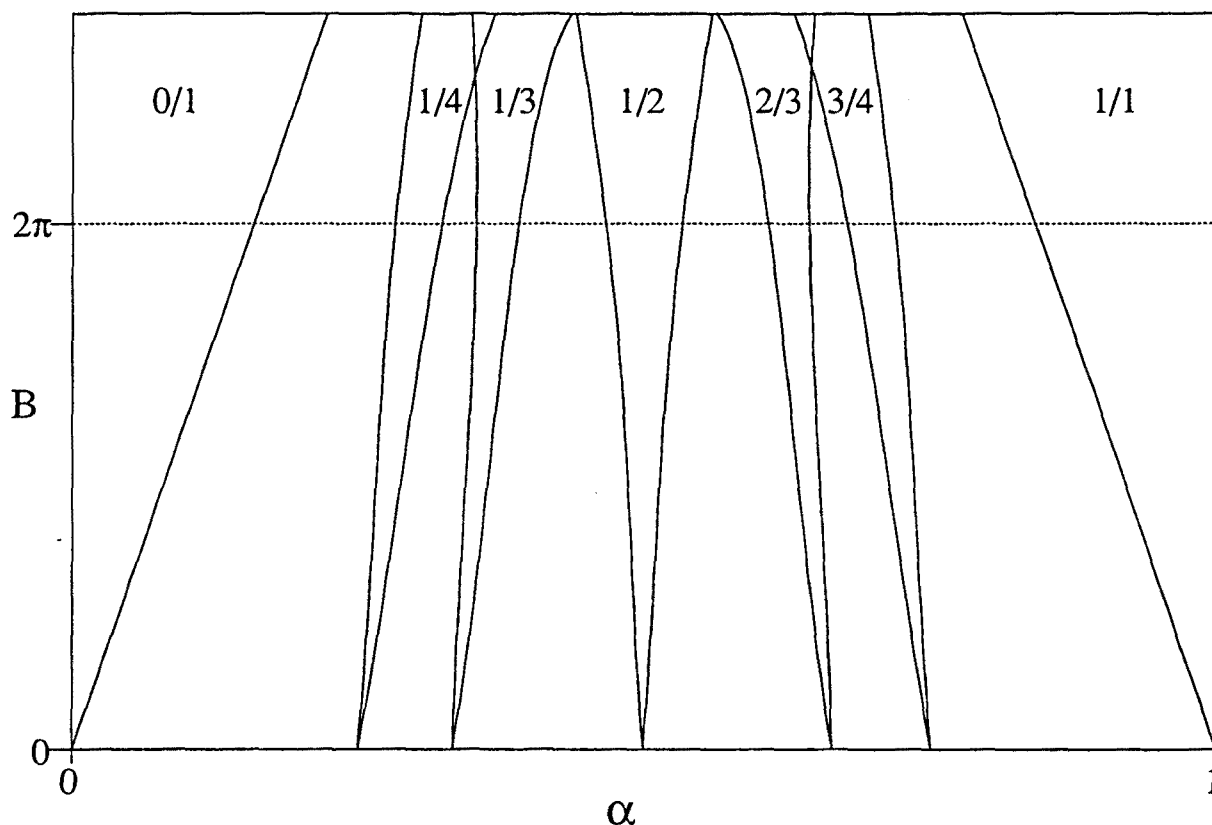


Fig. V.2 Llengües d'Arnold del mapa circular sinusoidal en l'espai dels paràmetres  $B$  i  $\alpha$ . Dins de cada llengua d'Arnold es troba indicat el número rotacional  $p/q$  associat al corresponent afermament de freqüències. La línia discontinua és la línia crítica.

Per poder fer un estudi complet de la complexitat dels mapes circulars calen dos paràmetres de control, que en el cas del mapa circular sinusoidal són  $\alpha$  i  $B$ . Quan volem estudiar les transicions al caos o seguir una seqüència d'òrbites periòdiques necessitem ajustar dos paràmetres. Aquests estudis s'anomenen estudis de codimensió dos.

### V.2.2 Mapes circulars generals.

L'expressió més general dels mapes circulars s'obté a partir d'acoblar al mapa circular lineal un terme no lineal:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n, \mu) = \{\theta_n + \alpha + Bg(\theta_n)\} \quad (\text{V.5})$$

on  $\mu$  simbolitza els paràmetres  $\alpha$  i  $B$ . Suposarem que  $g(\theta)$  és contínua, diferenciable i periòdica de període 1. A partir d'una construcció anàloga al cas de l'estirament del

mapa circular lineal podem definir l'estirament d'un mapa circular general. Mirem de construir un difeomorfisme  $F$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  a partir de  $f$  que sigui a  $f$  el que és  $\{\theta_n + \alpha\}$  a  $\theta_n + \alpha$ . Suposem que  $\theta_c$  és el punt de  $[0;1]$  tal que  $f(\theta_c, \mu) = 1$ , llavors definim  $F(\theta_n, \mu)$  com:

$$\begin{aligned} F(\theta_n, \mu) &= f(\theta_n, \mu) & 0 < \theta_n < \theta_c \\ F(\theta_n, \mu) &= f(\theta_n, \mu) + 1 & \theta_c < \theta_n < 1 \\ F(\theta_n + k, \mu) &= F(\theta_n, \mu) & k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{V.6}$$

Per a qualsevol valor de  $\theta_n$  ( $\theta_n \in \mathbb{R}$ ) fora de  $[0;1]$ ,  $F(\theta_n, \mu)$  està completament determinat per la condició de periodicitat.

Fàcilment podem comprovar que si  $f(\theta_n) = \{\theta_n + \alpha\}$  llavors  $F(\theta_n) = \theta_n + \alpha$ , i que en general  $F(\theta_n, \mu)$  conserva les propietats de continuïtat i inversibilitat de  $f(\theta_n, \mu)$ . A partir del mapa podem definir el número rotacional com:

$$\rho(\theta_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{(i)}(\theta_0) - \theta_0}{i} \tag{V.7}$$

on  $F^{(i)}(\theta_0)$  és la iteració  $i$ -èssima de  $F(\theta_0)$ . El número rotacional mesura el promig de la rotació per iteració. Per al cas del mapa circular lineal estirat sempre existeix el límit i és igual a  $\alpha$ . En general aquest límit pot no existir (corresponent a un moviment sense nombre rotacional) i pot dependre de les condicions inicials  $\theta_0$ , de manera que en general escriurem  $\rho(F, \theta_0)$ .

Si el mapa és difeomòrfic el límit existeix i aquest número rotacional és independent del punt inicial. En el cas que el número rotacional no depengui de les condicions inicials parlarem del número rotacional del mapa  $\rho(F)$ .

El número de rotacional del mapa és un invariant de conjugació. Un invariant de conjugació és una constant del mapa que és invariant sota canvis de base. Llavors si  $\rho(F)$  és el número rotacional de mapa, també existeix el número rotacional de  $f$  i ambdós són el mateix:  $\rho(f) = \rho(F)$ . Ara bé la propietat més interessant del número rotacional és que si dues aplicacions tenen el mateix número rotacional irracional, llavors existeix un canvi de variable que els conjugui. D'aquí podem concloure que si  $\rho(f)$  és irracional, llavors existeix una funció  $u$  que transforma el mapa  $f$  en el mapa circular lineal:  $u^{-1} \circ f(\theta_n) \circ u = \theta_n + \alpha$ .

El mapa  $F$  és monòton creixent sempre i quan la seva derivada sigui estrictament positiva. Si en variar els paràmetres de control contínuament la derivada del mapa s'anul·la per a un o més valors de  $\theta$ , el mapa s'anomena *crític*. En canvi quan el mapa és monòton creixent s'anomena mapa *subcrític*. En l'espai dels paràmetres de control  $(B, \alpha)$ , la línia que separa la zona on el mapa és subcrític de la zona on el mapa és crític s'anomena *línia crítica*. En el cas del mapa circular sinusoidal, figura V.2, aquesta línia és la recta  $B = 2\pi$ .

Els mapes subcrítics són molt senzills d'entendre. Per a qualsevol número rotacional racional  $p/q$ , en incrementar la no linealitat, la zona d'afermament de modes s'obre en forma de llengües a l'espai dels paràmetres de control  $(\alpha, B)$ , essent més ampla com més gran és  $B$ . És a dir, l'amplada creix en fer-se més forta la no



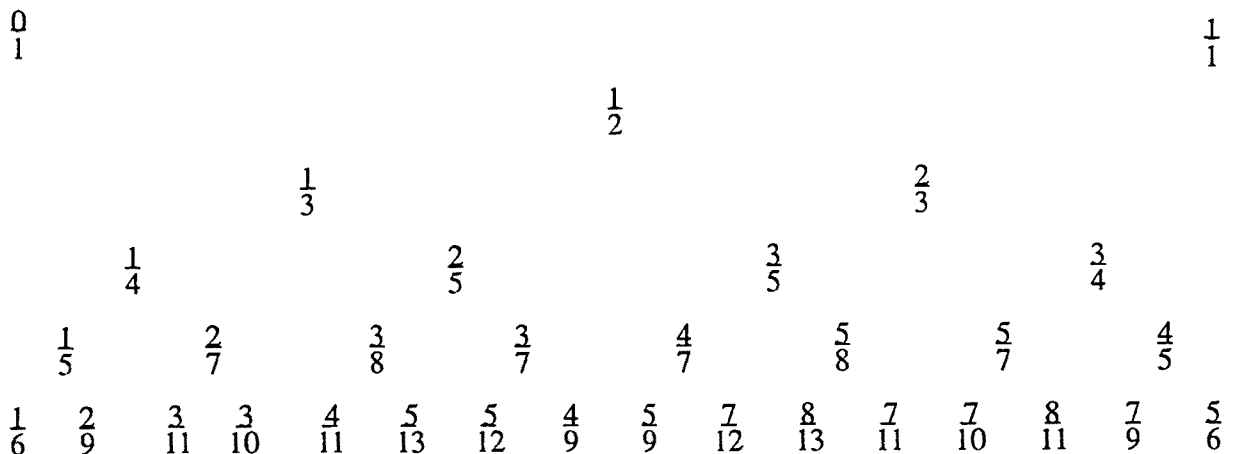


Fig. V.3 Construcció de l'arbre de Farey.

linealitat. Aquestes zones periòdiques són les *llengües d'Arnold* (*Arnold Tongues*) [71-74]. En canvi, les zones amb nombre rotacional irracional constant són línies d'amplada nul·la.

El més important de la zona subcrítica és que per a qualsevol valor inicial  $\theta_0$ , la solució assoleix el mateix nombre rotacional, és a dir, el nombre rotacional no depèn del punt inicial.

Per sobre la línia crítica el mapa no és monòton creixent. Les zones amb nombre rotacional irracional s'obren, deixant de ser línies per passar a ser superfícies d'amplada finita. El nombre rotacional pot assolir diferents valors dins un rang en dependència del punt inicial, és a dir, no podem assignar un únic nombre rotacional al mapa. Això permet el solapament de les llengües d'Arnold, és a dir, al mateix punt de l'espai dels paràmetres poden coexistir més de dues òrbites periòdiques estables. Fins i tot poden coexistir òrbites periòdiques i quasiperiòdiques estables. En aquesta situació la solució estable del sistema és sensible a les condicions inicials, és a dir, poden aparèixer atractors caòtics. En canvi en el mapa subcrític només poden existir solucions periòdiques i quasiperiòdiques. L'amplada de les llengües d'Arnold depèn del nombre rotacional. Es pot demostrar mitjançant la dinàmica simbòlica [31] que, per a un mapa circular, l'amplada i l'ordre d'aparició de les finestres ve completament determinada per l'anomenat *arbre de Farey* (*Farey Tree*). Aquest arbre es construeix a partir de la composició de Farey:

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'} \quad (\text{V.8})$$

Aplicant aquesta llei de composició als dos extrems 0/1 i 1/1 de l'interval unitat obtenim el nombre rotacional 1/2. Repetint aquesta construcció per a tots els parells adjacents obtenim l'arbre de Farey representat a la figura V.3. L'amplada de la finestra periòdica ve determinada per la posició en vertical l'arbre de Farey. La

finestra periòdica és més ampla quan més amunt ens trobem en l'arbre de Farey. És a dir, entre dos nivells de l'arbre de Farey les finestres periòdiques més amples correspondran al nivell superior. L'ordre d'aparició de les finestres periòdiques en l'interval unitat ve determinat per la posició en horitzontal a l'arbre de Farey.

La construcció de Farey és un ajut molt important en la realització d'experiments, ja que ens determina la finestra periòdica més fàcilment observable (la més ampla) entre dues finestres periòdiques.

### V.3 Finestres periòdiques del dispositiu bicapa.

A la figura V.4 il·lustrem les llengües d'Arnold del dispositiu bicapa modulad corresponents als números rotacionals 1/1, 1/2, 2/3, 3/4 i 4/5. La figura ha estat representada en l'espai dels paràmetres de control  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E/\omega_0$ . L'anàlisi que fem de

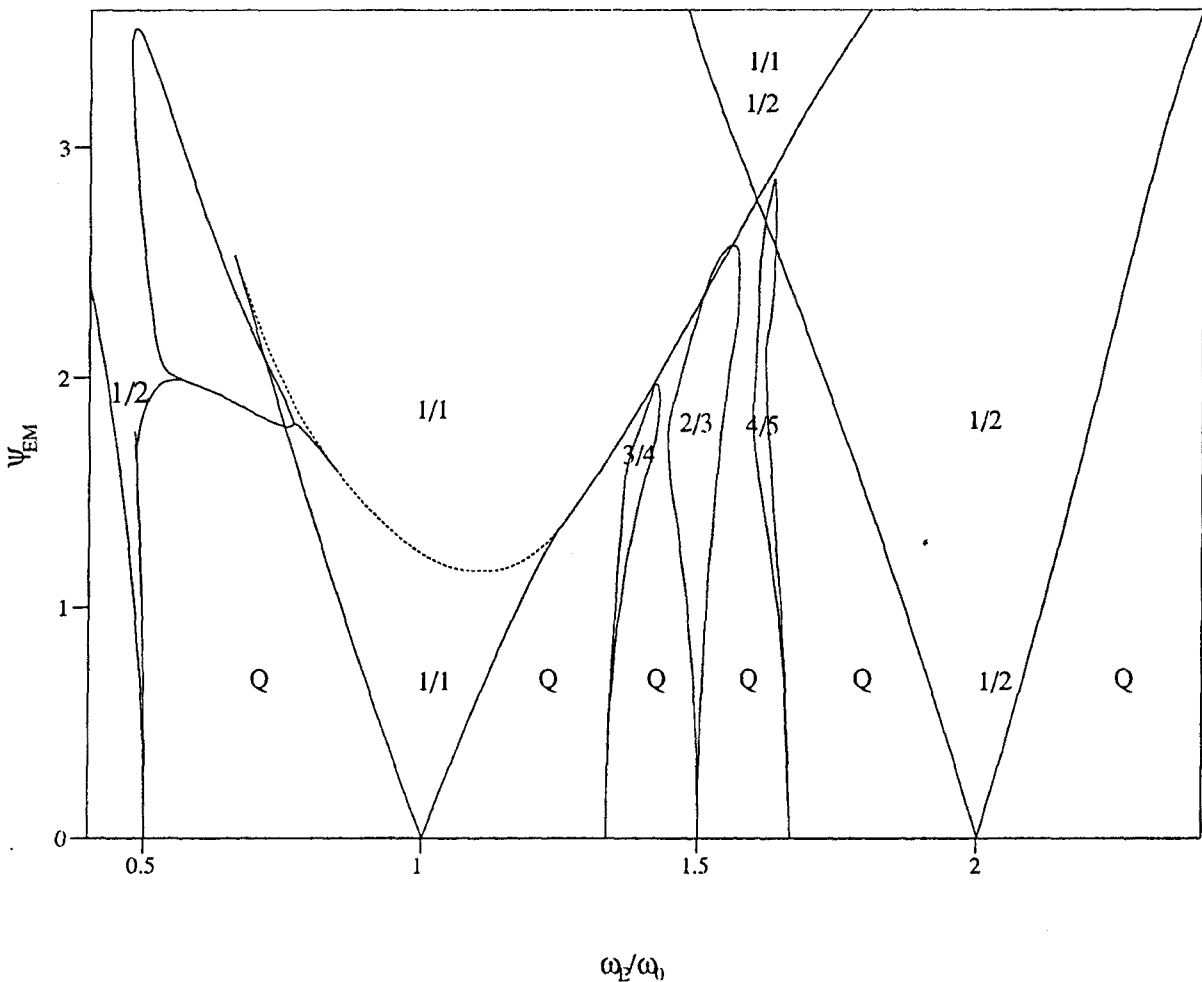


Fig. V.4 Llengües d'Arnold en l'espai dels paràmetres  $\omega_E/\omega_0$  i  $\psi_{EM}$  del dispositiu bicapa modulad corresponents als números rotacionals 1/1, 1/2, 2/3, 3/4 i 4/5.

la figura V.4 és un estudi de codimensió dos on el paràmetre de control  $\omega_E/\omega_0$  representa la relació entre les dues freqüències en competició i  $\psi_{EM}$  és l'amplitud de la modulació que ens dóna la força de l'acoblament entre els dos oscil·ladors. És a dir, aquest espai dels paràmetres és equivalent a l'espai dels paràmetres  $B, \alpha$  dels mapes circulars. Cal remarcar que el càlcul s'ha obtingut a partir de l'anàlisi del sistema d'equacions II.28, és a dir, a partir de l'anàlisi d'un flux continu i no pas d'un flux discret, com és el cas dels mapes circulars.

El càlcul s'ha realitzat per integració, localització i seguiment d'òrbites periòdiques. El paràmetre  $\psi_{EB}$  s'ha pres fix amb un valor de 10. En absència de modulació externa la solució del sistema correspon a una òrbita periòdica pràcticament sinusoidal. Aquesta òrbita periòdica és propera a la bifurcació de Hopf de la primera branca estable. L'únic punt fix és el node d'aquesta branca que és inestable. El dinàmica del dispositiu bicapa modulada és el resultat de l'acoblament entre l'oscil·lació periòdica del sistema autònom i la modulació externa. El primer oscil·lador, la bicapa, no és lineal i la seva freqüència d'oscil·lació és  $\omega_0$ , i el segon oscil·lador, la modulació externa, és lineal i la seva freqüència és igual a  $\omega_E$ . En general ens referirem a  $\omega_0$  com la freqüència pròpia del sistema en contraposició a  $\omega_E$ , que és la freqüència de la pertorbació externa. Les diferents zones on existeix l'afermament de freqüències estan separades per línies contínues. Les zones indicades amb una  $Q$  corresponen a solucions quasiperiòdiques. Dins les zones on existeix l'afermament de modes hi hem indicat el número rotacional associat. Més endavant explicarem com podem obtenir el valor del número rotacional. En tot cas, el número rotacional ha de ser un valor semblant al quocient de la freqüència de la modulació externa amb la freqüència pròpia del sistema bicapa  $\omega_E/\omega_0$ .

La forma de les zones d'afermament de freqüència és la característica de les llengües d'Arnold; per a  $\psi_{EM}=0$  les llengües tenen una amplada nul·la, i només existeix la sincronització dels oscil·ladors quan  $\omega_E/\omega_0$  és igual a un número racional. A mesura que augmentem l'amplitud de la modulació externa també augmentem la força de l'acoblament, i les llengües d'Arnold es van obrint. L'amplada i l'ordre d'aparició d'aquestes llengües segueix les pautes marcades per l'arbre de Farey. També podem constatar l'existència de dues zones diferents; en amplituds de modulació baixa les finestres periòdiques no es superposen. Només existeixen dos tipus de solucions: quan existeix l'afermament de freqüències, tenim òrbites periòdiques i en el cas contrari apareixen solucions quasiperiòdiques. Aquesta és la zona subcrítica. En canvi per a amplituds més elevades les finestres periòdiques comencen a superposar-se, les llengües d'Arnold es deformen i algunes desapareixen i com veurem més endavant apareixen respostes caòtiques. Aquesta és la zona supercrítica. Malauradament no podem determinar la línia crítica a partir del sistema d'equacions II.28, però de tota manera és fàcil d'imaginar que no és una línia recta com en el cas del mapa circular sinusoidal, ja que la desaparició i superposició de les llengües d'Arnold es produeixen en un rang ampli de valors de  $\psi_{EM}$ .

A la figura V.5 il·lustrem un diagrama de bifurcació experimental on podem observar l'aparició de finestres periòdiques. El diagrama s'ha realitzat fixant la intensitat de base i la intensitat de la modulació externa i variant de forma contínua

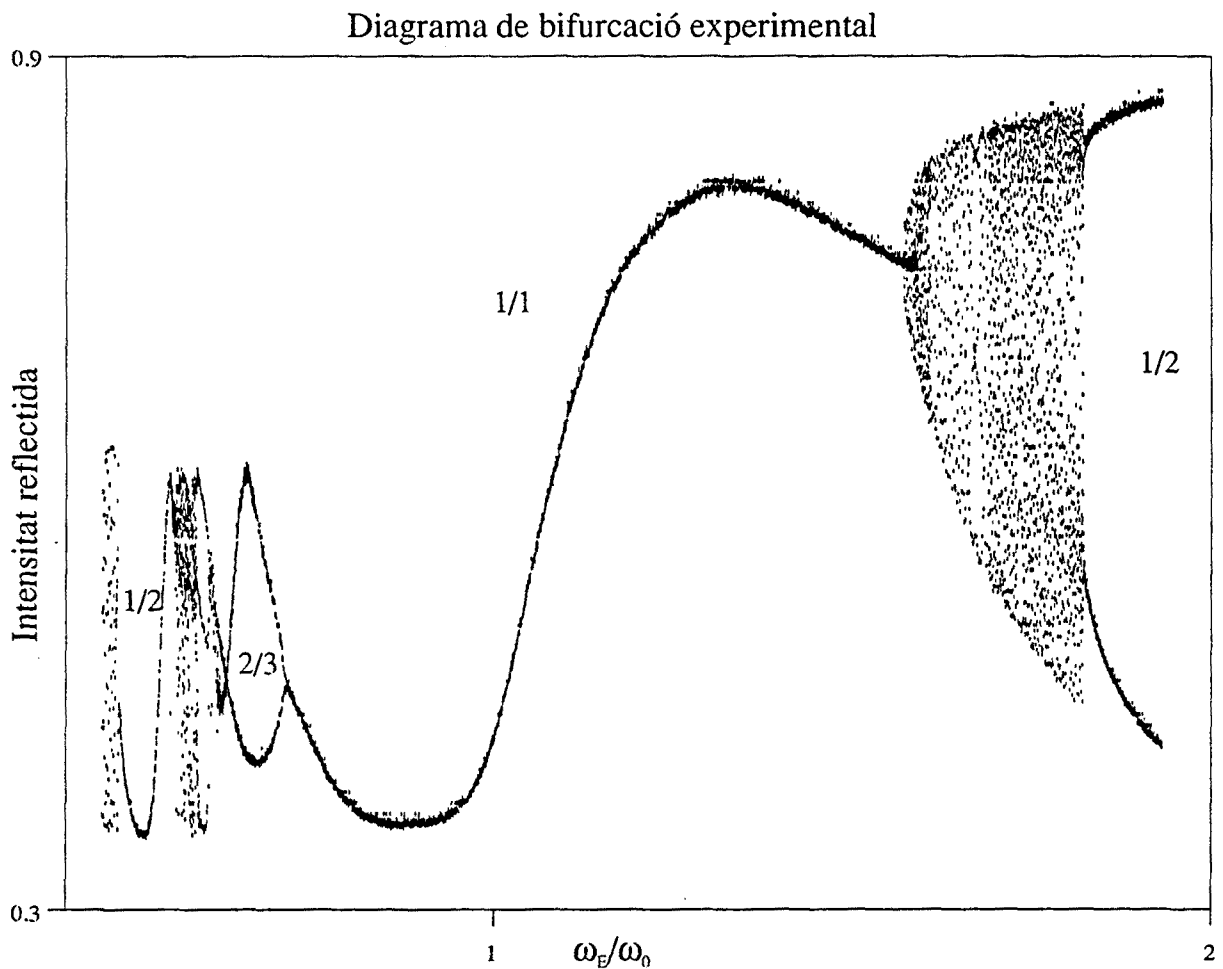


Fig. V.5 Diagrama de bifurcació experimental. La captació de punts s'ha realitzat estroboscòpicament.

la freqüència de la modulació externa. El registre consisteix en una captació estroboscòpica a temps real de la intensitat reflectida. És a dir, es tracta de la representació de la projecció de la secció de Poincaré. La intensitat de base és igual a 1 Volt. La bifurcació de Hopf del sistema no modulat es produeix per a una intensitat d'entrada igual a 0.94 Volts. A la intensitat d'entrada de 1 Volt, la resposta del sistema no modulat és una òrbita periòdica de freqüència 15.53 Hz. Aquesta oscil·lació és pràcticament sinusoidal donada la proximitat del punt de Hopf.

En aquest diagrama podem observar l'existència de les finestres periòdiques resultants de l'afermament entre la oscil·lació del dispositiu bicapa i la modulació externa. El número rotacional associat a aquests afermaments ha estat indicat a la figura. Per ordre d'esquerra a dreta podem observar la finestra de període 2 amb número rotacional  $1/2$  corresponent a l'afermament de freqüències  $\omega_E/\omega_0=1/2$ , la finestra de període 3 amb número rotacional  $2/3$  corresponent a l'afermament de freqüències  $\omega_E/\omega_0=2/3$ , la finestra de període 1 amb número rotacional  $1/1$  corresponent a l'afermament de freqüències  $\omega_E/\omega_0=1$  i la finestra de període 2 amb

número rotacional  $1/2$  corresponent a l'afermament de freqüències  $\omega_E/\omega_0=2/1$ . Un conjunt més ampli de resultats numèrics i experimentals on s'observen finestres periòdiques del dispositiu bicapa es pot trobar als capítols III i V del meu Treball de Recerca [38].

En els mapes circulars es pot determinar el número rotacional directament a partir del mapa de primer retorn. El nostre cas no és exactament igual, existeix una diferència important. Els mapes circulars descriuen l'evolució combinada de dos oscil·ladors no lineals acoblats. En canvi aquí un dels oscil·ladors és perfectament lineal. La modulació externa té un període i una amplitud ben definits i fixos, és a dir, l'evolució d'una de les variables del sistema  $\psi_E$  és fixa i no queda pertorbada per la presència de l'altre oscil·lador no lineal que és el dispositiu bicapa. Això implica que la secció estroboscòpica realitzada sobre les fases parcials, la fase total o la fase reflectida no descriu de forma complerta l'evolució combinada dels dos oscil·ladors. Aquesta qüestió no canvia gaire tot l'anàlisi teòric anterior, però cal anar en compte a l'hora d'interpretar tant les seccions com el significat del número rotacional.

A l'hora de determinar el número rotacional d'una òrbita periòdica s'han de distingir dues situacions diferents en dependència de si el període de la modulació externa ( $T_E$ ) és superior o inferior al període de l'oscil·lació pròpia del sistema ( $T_0$ ).

Suposem per exemple que  $\rho=p/q$  i que  $T_E < T_0$ . En aquest cas la fase total interferomètrica  $\psi(t)$ , i per extensió les fases parcials  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  i la fase reflectida  $\psi_R(t)$ , tenen una evolució periòdica, i la longitud temporal del període és igual a  $qT_E$ . Dins d'un període complet de l'oscil·lació de  $\psi$  es poden observar  $p$  pics. És a dir, l'evolució de  $\psi(t)$  és periòdica de període  $p$ . Però en canvi, tal i com hem vist abans, un número rotacional racional  $\rho=p/q$  corresponia a una òrbita de període  $q$ . Així doncs, quin és el període d'evolució del sistema  $p$  o  $q$ ? La resolució d'aquest dilema es troba en la interpretació del número rotacional. El número rotacional ens dóna el període d'oscil·lació del sistema complet i això inclou també la fase d'entrada que ve determinada per la modulació externa. La duració d'un període complet de  $\psi(t)$  és igual a  $qT_E$ . En aquest període s'observen  $p$  pics en l'evolució de  $\psi(t)$  però, paral·lelament, tenim  $q$  pics en l'evolució de  $\psi_E(t)$ , de manera que en l'evolució global del sistema format pels dos oscil·ladors tenim una òrbita de període  $q$ .

Per il·lustrar aquesta qüestió a la figura V.6 presento dos casos obtinguts per integració numèrica. A la figura hi he representat la projecció de l'atractor a l'espai de les fases  $\psi_1, \psi_2$ , el mapa estroboscòpic de primer retorn de  $\psi$  i la transformada de Fourier de  $\psi(t)$  per a dos casos diferents. Aquests casos corresponen les freqüències  $\omega_E/\omega_0=2.5$  i  $1.654$ . Els valors de  $\psi_{EB}$  i  $\psi_{EM}$  són iguals en els dos casos i valen 10 i 1 respectivament. El primer cas correspon a una òrbita periòdica de número rotacional  $\rho=2/5$  i el segon cas també és una òrbita periòdica però amb número rotacional  $\rho=3/5$ . En el primer cas, la fase  $\psi$  té una evolució periòdica de període 2 i el segon cas de període 3, en ambdós casos la longitud temporal del període és igual a  $5T_E$ . En ambdues seccions estroboscòpiques apareixen 5 punts, és a dir, demostren que el període és  $5T_E$  i que l'evolució global del sistema és de període 5. Això no obstant no podem determinar totalment el número rotacional a partir de la secció estroboscòpica atès que en ambdues gràfiques hi ha dos punts per sota la bisectriu. Això evidencia

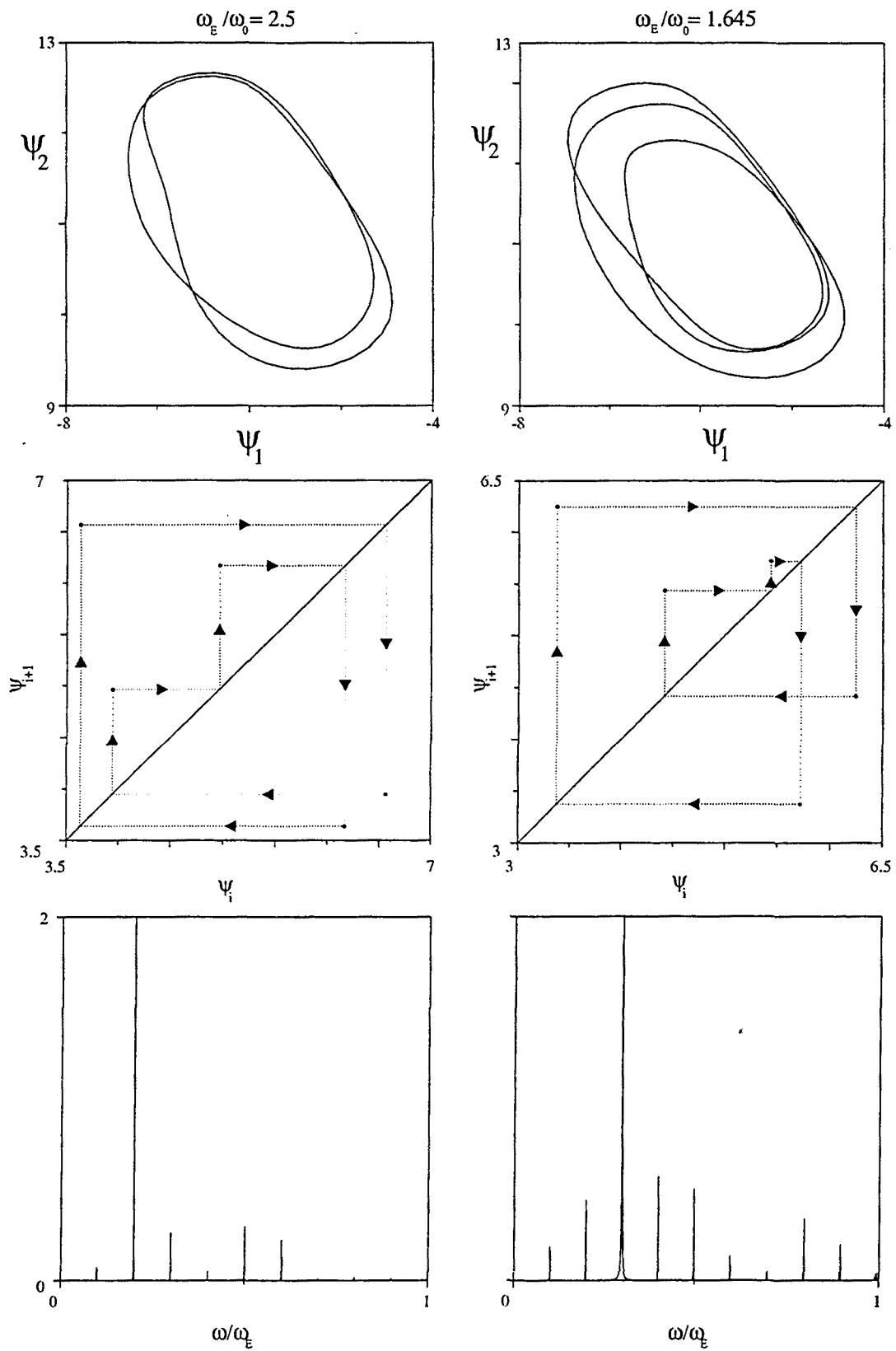


Fig. V.6 Projecció de l'atractor, secció de primer retorn i transformada de Fourier numèrics per als casos  $\omega_E/\omega_0=2.5$  i  $1.645$  del dispositiu bicapa modulad.

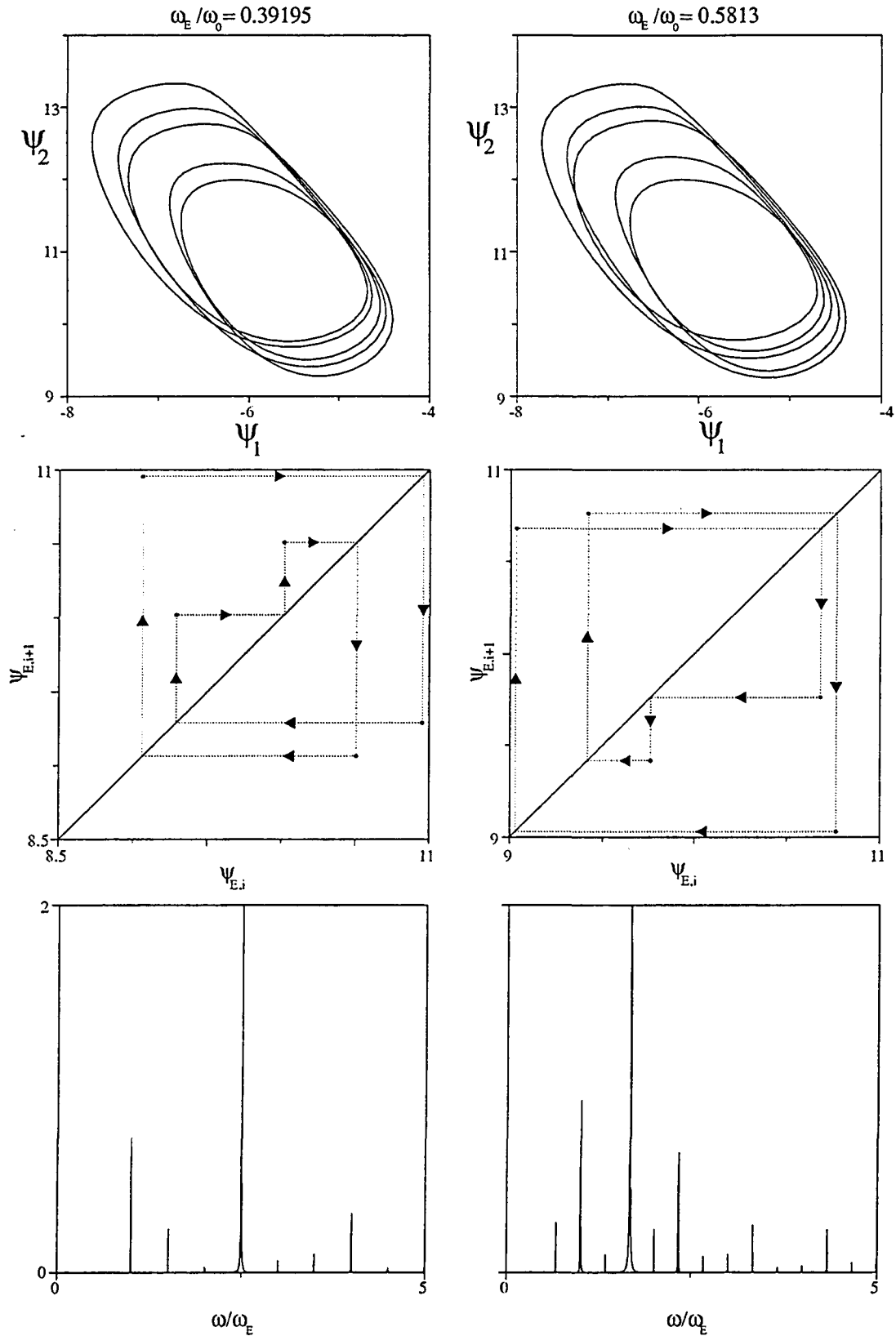


Fig. V.7 Projecció de l'atractor, secció de primer retorn i transformada de Fourier numèrica per als casos  $\omega_E/\omega_0=0.39195$  i  $0.5813$  del dispositiu bicapa modulada.

el fet de que el mapa estroboscòpic no descriu completament la dinàmica global dels dos oscil·ladors. La informació que ens manca la podem completar analitzant els atractors. Podem determinar la periodicitat de l'evolució de  $\psi$  a partir del número de voltes que dona l'atractor per tornar-se a tancar en si mateix; aquesta és la manera com podem concloure ràpidament que el primer cas correspon a una evolució de període 2 i en el segon cas de període 3 per a la fase  $\psi$ . És a dir, a partir d'analitzar simultàniament la secció i els atractors podem determinar completament el número rotacional. La deducció també la podem fer a partir de la transformada de Fourier; en ambdós casos la separació dels harmònics és de  $\omega/\omega_E=0.2$ , és a dir el període total és de  $5T_E$ , la diferència està en la posició dels harmònics màxims. En el primer cas és  $\omega/\omega_E=0.4$  i en el segon  $\omega/\omega_E=0.6$ . Aquests harmònics màxims corresponen a l'amplada en el temps dels pics que formen un període complet de  $\psi$ . En el primer cas aquesta amplada és de  $2.5T_E$ , és a dir, hi ha dos pics per cada període complet de  $\psi$ , i per tant el número rotacional és  $2/5$ . En el segon cas l'amplada és de  $1.6667T_E$ , és a dir, hi ha tres pics dins un període complet de  $\psi$ , i el número rotacional és  $3/5$ . En principi és millor analitzar el mapa de Poincaré i l'atractor que no pas la transformada de Fourier tot i que aquesta última sigui suficient per deduir el número rotacional. Les raons són dues; primer és més fàcil i immediat la deducció a partir del mapa i de l'atractor, i segon és més precís discernir la naturalesa periòdica i el període a partir del mapa.

La situació és totalment diferent per al cas en que  $T_E > T_0$ . En aquests cas el període de  $\psi$  i el del sistema complet és el mateix. Si tenim una òrbita periòdica amb número rotacional  $\rho=p/q$ , tenim que el període de  $\psi$  és igual a  $pT_E$ , i a més per cada període complet de  $\psi$  apareixen  $q$  pics. És a dir, l'evolució de  $\psi$  és de període  $q$ . A la figura V.7 il·lustrem dos casos que corresponen a aquesta situació. En ambdós casos he representat la projecció de l'atractor a l'espai de les fases  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , la secció de primer retorn i la transformada de Fourier. Els dos casos corresponen a  $\psi_{EB}=10$ ,  $\psi_{EM}=1$  i les freqüències de la modulació externa són  $\omega_E/\omega_0=0.39195$  i  $0.5813$  respectivament. Ambdós casos corresponen a òrbites periòdiques de període 5, amb números rotacionals  $2/5$  i  $3/5$  respectivament. A partir de l'anàlisi dels atractors només podem deduir que l'evolució de  $\psi$  és de període cinc en ambdós casos. En aquesta situació la secció estroboscòpica donaria per als dos caos 2 i 3 punts respectivament. Això justifica el fet que a la figura V.5 ens apareixi una única branca a la finestra de període 2 corresponent a l'afermament de freqüències  $\omega_E/\omega_0=1/2$  i dues branques a la finestra de període 3 corresponent a l'afermament de freqüències  $\omega_E/\omega_0=2/3$ , quan la periodicitat d'aquets dos caos és 2 i 3 respectivament. En la figura V.7 però, no hem representat la secció estroboscòpica, sinó que hem realitzat un altre tipus de secció que ens dona la informació completa per poder calcular el número rotacional. Aquesta secció ha estat construïda representant el valor  $\psi_E$  corresponent a un màxim de l'evolució temporal de  $\psi(t)$ , i després realitzant el primer retorn de  $\psi_E$ . Podem obtenir directament el número rotacional a partir del número total de punts, i el número de punts que es troben per sota la bisectriu en la secció. En el primer cas comprovem immediatament que  $\rho=5/2$  i en el segon cas  $\rho=5/3$ . Aquest tipus de secció però no és útil en cas que  $T_E > T_0$ . Per exemple suposem el cas analitzat abans corresponen a  $\omega_E/\omega_0=2.5$ ; si fem aquesta secció per cada 5 períodes de la modulació externa tenim, un període de l'evolució de  $\psi$  i per tant dos màxims en  $\psi$ ,



és a dir, en un període de  $\psi$  ens apareixen dos valors diferents de  $\psi_E$  i en els successius períodes es van repetint aquests dos valors cosa que fa que la secció doni només dos punts. En l'anàlisi de les transformades de Fourier observem que en el primer cas la distància entre harmònics és  $\omega/\omega_E=0.5$ , és a dir, el període del senyal és  $2T_E$ ; en el segon cas la distància entre harmònics és  $\omega/\omega_E=0.333$  i això correspon a un període de  $3T_E$ . L'harmònic màxim ens determina l'amplada en el temps dels pics que apareixen dins un període sencer. En el primer cas aquest harmònic està centrat a  $\omega/\omega_E=2.5$  ( $5/2$ ), per tant, l'amplada dels pics és de  $0.4T_E$  ( $2/5$ ) i el número de pics en un període de  $\psi$  és 5, o el que és el mateix, l'evolució de  $\psi$  és de període 5. En l'altre cas l'harmònic màxim està centrat a  $\omega/\omega_E=1.667$  ( $5/3$ ) i això també correspon a una oscil·lació de període 5.

Hem comprovat que la secció estroboscòpica no ens dona una informació completa, de tota manera tots els diagrames de bifurcació es construiran a partir de la secció estroboscòpica. Això no és cap problema, ja que encara que no podem avaluar directament el número rotacional, la secció estroboscòpica ens permet distingir clarament les solucions periòdiques de les quasiperiòdiques i caòtiques. A més podem calcular la secció estroboscòpica amb molta facilitat tant numèricament com experimentalment. De tota manera caldrà sempre anar amb compte a l'hora d'interpretar el període del senyal i haurem de tenir present el que acabem de comentar.

Sempre que parlem durant tot el treball d'òrbites periòdiques de període  $q$  ens estarem referint exclusivament al període del sistema global i no al període de l'evolució de  $\psi(t)$ .

#### V.4 Estudi de codimensió dos de l'estabilitat de les solucions periòdiques.

En aquest apartat farem un estudi de codimensió dos de l'estabilitat de les solucions periòdiques, il·lustrant el tipus de bifurcació que es dona als límits de les llengües d'Arnold i parant especial atenció a les llengües d'Arnold de període 1 i 2. L'objectiu d'aquest apartat és mostrar un estudi numèric ampli i complet de l'estabilitat de les solucions periòdiques, tot mostrant la rica varietat d'inestabilitats que es donen en el dispositiu bicapa. També presentarem en aquest apartat alguns resultats experimentals, però pel que fa a l'estudi experimental, creiem que aquest es pot ampliar en posteriors treballs.

Tal i com hem vist al capítol I, en un sistema no autònom de segon ordre existeixen tres multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat d'una òrbita periòdica. Un d'aquests multiplicadors sempre és igual a 1, de manera que els altres dos multiplicadors  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  determinen totalment l'estabilitat de l'òrbita periòdica. A partir dels valors dels dos multiplicadors de Floquet  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  podem classificar les òrbites periòdiques en vuit tipus en funció de la seva estabilitat: si els dos multiplicadors de Floquet són reals:

- Sella directe :  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  o  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ .
- Sella invers :  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  o  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ .

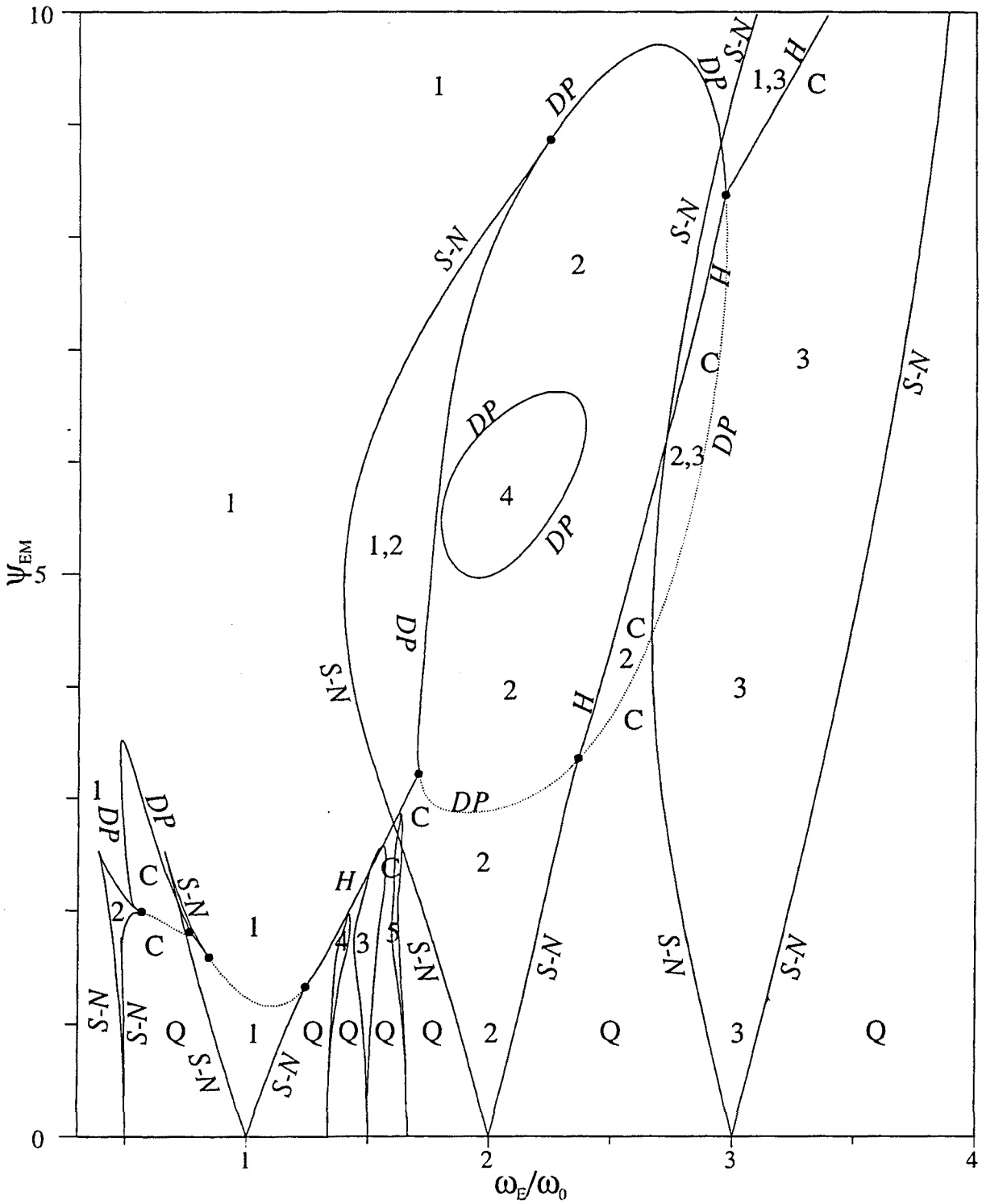


Fig. V.8 Llengües d'Arnold en l'espai dels paràmetres  $\omega_E/\omega_0$  i  $\psi_{EM}$  corresponents al dispositiu bicapa modulad. Les zones periòdiques venen indicades pel període corresponent, les quasiperiòdiques per Q, les aperiòdiques per C i les bifurcacions en les fronteres de les llengües d'Arnold per S-N (sella node d'òrbites periòdiques), DP (doblament de període) i H (Hopf de segon ordre).

- Node directe estable :  $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ .
- Node directe inestable :  $1 < \lambda_1, \lambda_2$ .
- Node indirecte inestable :  $\lambda_1, \lambda_2 < -1$ .
- Node indirecte estable :  $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

Si els multiplicadors de Floquet són complexos conjugats:

- Focus estable :  $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ .
- Focus inestable :  $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ .

Quan una òrbita periòdica és directa, l'evolució temporal al damunt del manifold lineal segueix una direcció ben definida, mentre que en el cas contrari salta alternativament al voltant de l'òrbita periòdica. En les bifurcacions, la inestabilització d'un node directe correspon a un bifurcació sella node; en canvi la desestabilització d'un node indirecte correspon a un doblament de període.

La figura V.8 representa les llengües d'Arnold. Igual que en el cas de la figura V.4 el valor de  $\psi_{EB}$  és igual 10 però en aquesta figura hi hem representat una zona més àmplia en l'espai dels paràmetres  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E/\omega_0$ . Concretament el paràmetre  $\psi_{EM}$  abasta tots els valors físicament possibles (valors superiors a 10 implicaria que  $\psi_E$  arribés a valors inferiors a zero i això és equivalent a il·luminar amb una intensitat negativa del feix làser). El paràmetre  $\omega_E/\omega_0$  recorre l'interval  $[0,3,4]$ , fora d'aquest interval la dinàmica s'empobreix ja que si la diferència entre les dues freqüències és gran els acoblaments són dèbils. Gràcies a aquesta ampliació podem il·lustrar completament les llengües d'Arnold de períodes 1 i 2 i, a més a més, mostrar una nova llengua d'Arnold de període 3 corresponent al número rotacional 1/3.

En aquest diagrama les zones assenyalades amb un número  $i$  corresponen a llengües d'Arnold de període  $i$ . El cas de zones on existeixen superposades dues solucions periòdiques de diferent període està indicat amb els dos números corresponents a la periodicitat de les finestres. Les zones quasiperiòdiques estan indicades amb una  $Q$  i les zones on existeixen solucions caòtiques amb una  $C$ . Les llengües d'Arnold estan limitades per línies contínues. Aquestes línies contínues representen bifurcacions locals de codimensió 1. En aquestes línies existeixen òrbites periòdiques on dos dels seus tres multiplicadors de Floquet són reals de mòdul 1 ó on dos són imaginàris de mòdul 1 i un real de mòdul 1. Aquestes òrbites periòdiques són estructuralment inestables. El càlcul dels multiplicadors de Floquet associats a les òrbites periòdiques s'ha realitzat a partir del calcular els valors propis de la matriu variacional (recordem que la matriu variacional s'obté a partir de fer una aproximació lineal del flux del sistema al voltant de l'òrbita periòdica, c.f. apèndix B).

En el nostre sistema són possibles tres tipus de bifurcacions locals : bifurcacions sella node, doblament de període i bifurcacions tipus de Hopf de segon ordre. A damunt de les línies contínues de la figura V.8 està indicat el tipus de bifurcació amb lletra itàlica, concretament; *S-N* correspon a bifurcacions sella node, *DP* correspon a doblaments de període i *H* correspon a bifurcacions de Hopf de segon ordre. L'estudi de les bifurcacions locals ens permet d'entendre els mecanismes de les transicions entre finestres periòdiques i quasiperiòdiques. Aquestes transicions

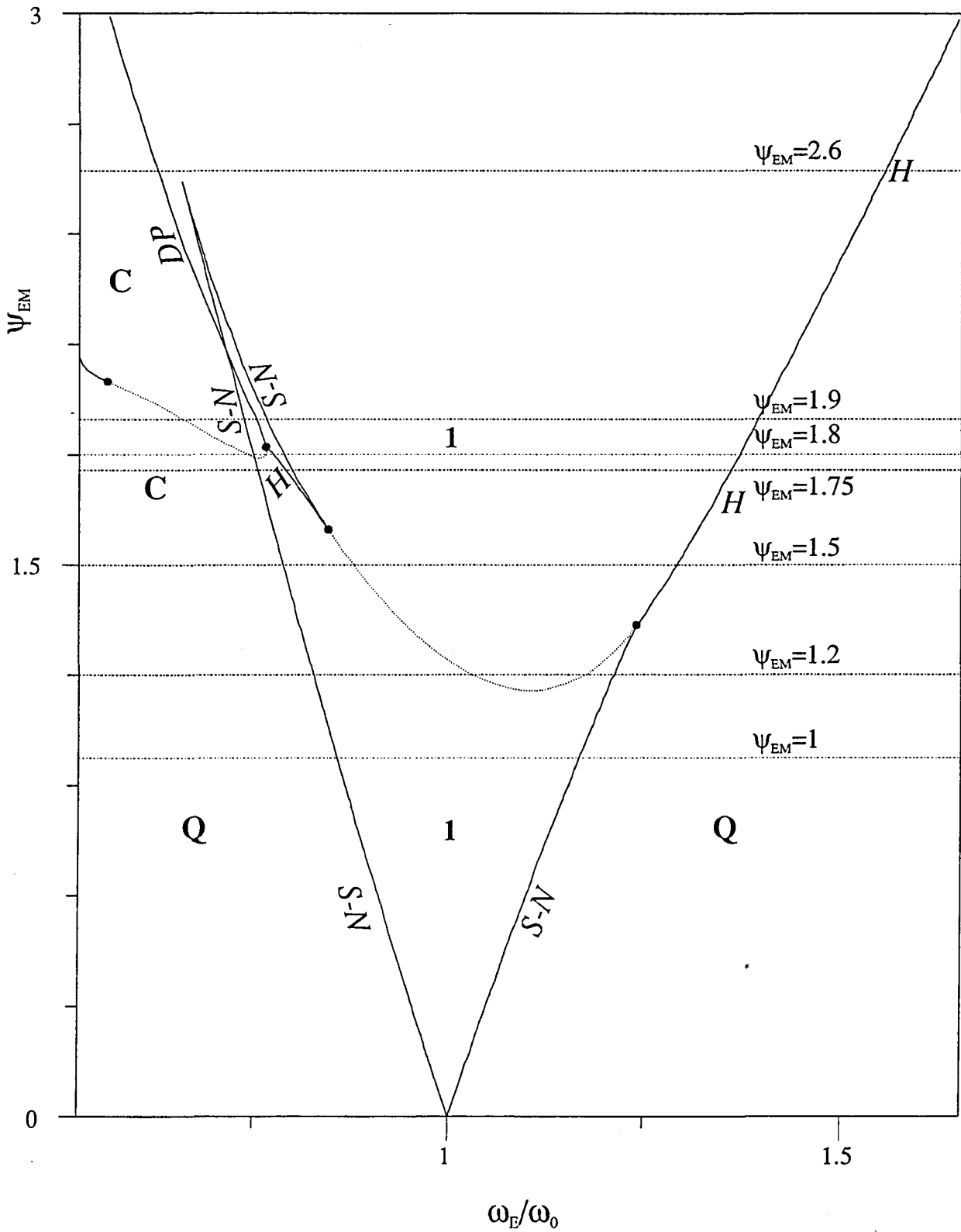


Fig. V.9 Ampliació de la figura V.8 corresponent a la part inferior de la llengua d'Arnold de període 1. Les rectes puntejades corresponen a 7 casos analitzats a la figura V.10.

impliquen la desestabilització d'una òrbita estable; si l'òrbita periòdica és un node directe estable es tracta d'una bifurcació sella node, si és tracta d'un node indirecte estable llavors es tracta d'un doblament de període i finalment en el cas d'un focus estable tenim un Hopf de segon ordre.

També existeixen bifurcacions locals de codimensió 1 on no estan implicades òrbites estables. Aquest és el cas del doblaments de període d'òrbites inestables i les bifurcacions sella node d'òrbites inestables. La mecànica d'aquestes bifurcacions és idèntica a les de les seves homòlogues d'òrbites estables substituïnt els nodes estables per nodes inestables. Per exemple, en una bifurcació sella node d'òrbites inestables, una òrbita sella i una òrbita node inestable es fusionen i desapareixen. Per al cas dels doblaments de període d'òrbites inestables també existeix la possibilitat que sigui supercrític o subcrític, en dependència de si l'òrbita de període doble que apareix és un node inestable o una sella, respectivament. De tota manera, cal tenir present que aquestes bifurcacions no són observables experimentalment, ja que tampoc ho són les solucions inestables. Tampoc límiten les llengües d'Arnold, ja que les llengües d'Arnold estan associades a solucions periòdiques estables. Tot i això, seguidament comprovarem que per fer un estudi complet de les inestabilitats de les òrbites periòdiques estables és necessari conèixer també les bifurcacions d'òrbites inestables. També són imprescindibles per a l'estudi de les bifurcacions locals de codimensió dos que presentarem al proper apartat. Aquestes bifurcacions d'òrbites inestables estan indicades amb línies discontinües a la figura V.8.

Aquest diagrama de bifurcació té una forma molt semblant al del Brusselator forçat [32,33]. Per exemple, per a valors de l'amplitud de modulació petits la transició entre les finestres periòdiques i quasiperiòdiques es dona a través de bifurcacions sella node, cosa que també succeeix en el cas del Brusselator forçat [75]. En canvi per a amplituds de modulació més grans la transició en el límit dret de les llengües d'Arnold de període 1 i 2 es fa a través d'una bifurcació de Hopf, cas que també es dona al Brusselator forçat [75]. Com veurem tot seguit l'anàlisi d'estabilitat revela que els dos sistemes són molt semblants. Ara bé, no són sistemes equivalents, existeixen diverses diferències força interessants. El fet de posar en evidència les semblances entre els dos sistemes, no respon a la idea d'establir una connexió entre els dos sistemes, sinó a demostrar que el sistema bicapa modulada és un bon candidat per a l'estudi dinàmic dels oscil·ladors forçats.

### V.6.1 Bifurcacions de la llengua d'Arnold de període 1 per a amplituds petites de la modulació externa.

Aquesta és una de les zones on l'estructura de bifurcacions és més complexa. A la figura V.9 he fet una ampliació de la figura V.8 on podem analitzar amb més detall les diferents bifurcacions de codimensió 1. A la part dreta, per a amplituds petites, la transició entre la finestra periòdica i la zona quasiperiòdica es fa a través d'una bifurcació sella node. Un exemple numèric i experimental d'aquesta bifurcació el tenim al primer cas presentat al capítol IV. Per a amplituds de modulació més altes la transició és una bifurcació de Hopf de segon ordre. A l'esquerra de la llengua d'Arnold la transició és molt més complexa. Inicialment tenim una única bifurcació

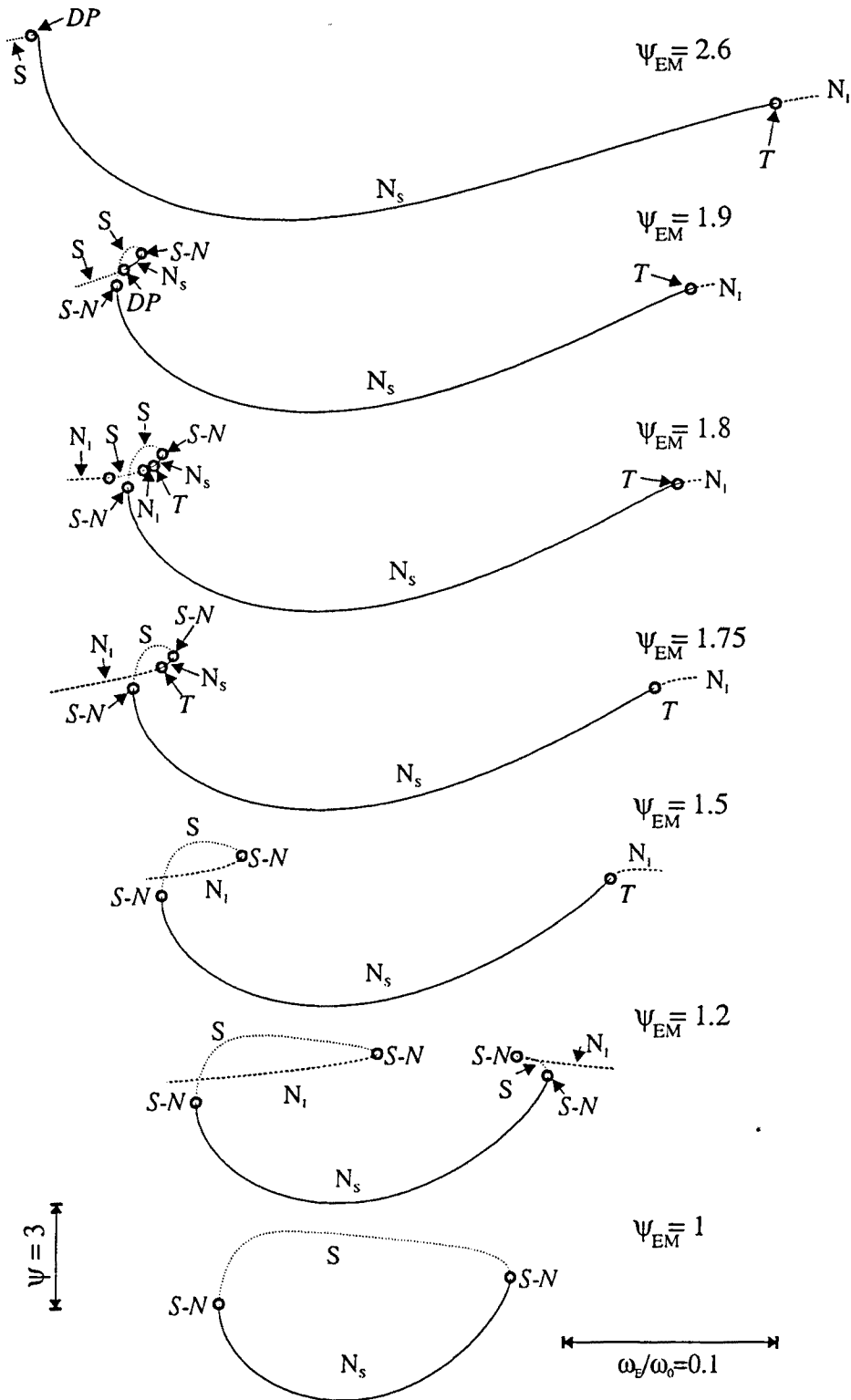


Fig. V.10 Diagrames de bifurcació de les òrbites de període 1 obtinguts numèricament emprant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques. En aquesta seqüència il·lustrem les diferents bifurcacions de codimensió 1 que es produeixen als límits de la llengua d'Arnold de període 1.

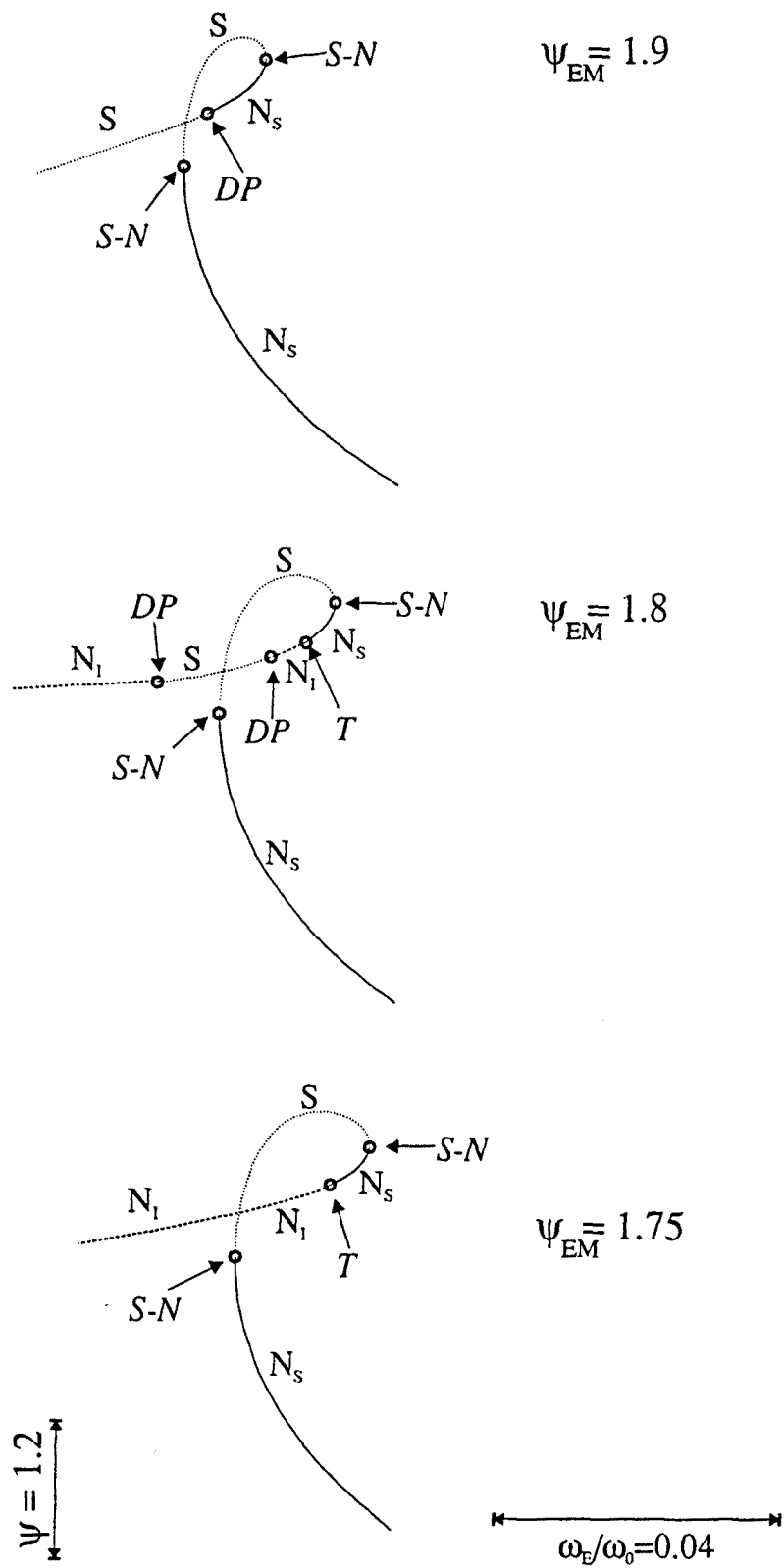


Fig. V.11 Ampliació dels diagrames de bifurcació de la figura V.10.

sella node. A mesura que augmentem l'amplitud de la modulació externa ens apareixen dues noves bifurcacions una de tipus sella node i una altra Hopf de segon ordre. Aquesta bifurcació de Hopf es troba entre les dues bifurcacions sella node. Entre la bifurcació de Hopf i la bifurcació sella node situada més a la dreta coexisteixen dues solucions periòdiques diferents, ambdues de període 1 però amb conques d'atracció diferents. En augmentar l'amplitud de la modulació, la bifurcació de Hopf es transforma en un doblament de període. Per amplituds de modulació més altes, les dues bifurcacions sella node es troben i desapareixen. Per sobre d'aquest punt només existeix una òrbita de període 1.

Per tal d'il·lustrar amb més claredat aquests canvis en les bifurcacions locals hem representat a la figura V.10 l'evolució de les òrbites periòdiques de la llengua d'Arnold de període 1 en funció de la freqüència de la modulació externa, fixant l'amplitud de modulació per a 7 casos. Per representar les òrbites periòdiques dibuixem la secció estroboscòpica de  $\psi$ . Recordem que una òrbita de període 1 en el pla de Poincaré és un punt fix. Els 7 casos corresponen als següents valors de l'amplitud de la modulació externa: 1, 1.2, 1.5, 1.75, 1.8 i 2.6. La localització d'aquests 7 casos dins la figura V.9 s'ha indicat amb línies de punts i ratlles. Aquestes evolucions de les òrbites periòdiques en funció de  $\omega_E/\omega_0$  han estat calculades numèricament emprant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques. Això ens permet calcular tant les òrbites estables com les selles i inestables, a més a més, ens permet de calcular la seva estabilitat a partir dels multiplicadors de Floquet. Donada la complexitat de les parts esquerres dels casos corresponents a  $\psi_{EM}=1.75, 1.8$  i  $1.9$ , aquestes zones han estat ampliades a la figura V.11. En aquesta figura hem utilitzat traç continu per a les òrbites estables, traç discontinu per a les inestables i puntejat per a les òrbites tipus sella. A més, també he indicat el tipus d'estabilitat de les òrbites periòdiques amb la següent notació:

- $N_s$  òrbites estables, és a dir, nodes directes i indirectes estables i focus estables.
- $N_i$  òrbites inestables, és a dir, nodes directes i indirectes inestables i focus inestables.
- $S$  òrbites selles directes i indirectes.

Els punts on hi ha un canvi en l'estabilitat de l'òrbita periòdica, és a dir, on es produeix una bifurcació entre dues de les anteriors solucions, l'hem indicat amb un cercle. També hem indicat en cursiva el tipus de bifurcació.

En el primer cas, corresponent a  $\psi_{EM}=1$  la transició en ambdós costats és del tipus sella node. Dins de la finestra periòdica només existeixen dues solucions periòdiques: una d'estable i una tipus sella. Cal remarcar que fora de la finestra periòdica no existeix cap òrbita periòdica de període 1. Obviament, per la pròpia definició de la llengua d'Arnold, això sempre succeeix amb les òrbites estables, però com veurem per tots els casos posteriors la situació és molt diferent per a les òrbites selles i inestables.

Per al cas  $\psi_{EM}=1.2$ , tot i que la finestra periòdica també es troba limitada per dues bifurcacions sella node, la situació ha canviat. Per començar no existeix l'òrbita sella en tot l'interval ocupat per la finestra periòdica, ja que en ambdós costats aquesta òrbita sella es destrueix en una bifurcació sella node d'òrbites inestables. Aquesta bifurcació sella node d'òrbites inestables no existia en el cas anterior.



Suposem que sortim del mig de la finestra periòdica resseguint la solució cap a l'esquerra. Inicialment tenim un node directe estable, quan arribem a la bifurcació sella node la solució passa a ser una sella directe i en resseguir la solució reculem en direcció cap al centre de la finestra. Després arribem a una bifurcació sella node d'òrbites inestables. En aquest cas, passem d'una òrbita sella directa a un node directe inestable i torna a canviar la direcció del seguiment. En general quan la transició implica solucions directes, per exemple una bifurcació sella node, el seguiment té un canvi de direcció, mentre que en el cas contrari no es dona aquest canvi. Recordem que multiplicadors de Floquet reals positius (negatius) impliquen òrbites directes (indirectes). En aquest cas, a diferència del primer, fora de la finestra periòdica existeixen solucions inestables de període 1.

Per al cas  $\psi_{EM}=1.5$ , les bifurcacions a esquerra i dreta de la llengua d'Arnold, són diferents. A l'esquerra de la llengua d'Arnold, la forma qualitativa de les bifurcacions és la mateixa que en el cas anterior. En canvi, a la dreta l'òrbita estable inicialment és un node directe estable, després es transforma en un focus estable i finalment és produïx una bifurcació de Hopf; s'inestabilitza el focus estable apareixent un focus inestable que s'exten més enllà dels límits de la llengua d'Arnold de període 1. A partir d'aquí, la bifurcació a la dreta de la llengua de període 1 no pateix cap canvi qualitatiu en la zona del espai dels paràmetres representada a la figura V.9. En tots els casos que segueixen de la figura V.10 la transició a la dreta de la finestra periòdica es fa a través d'una bifurcació de Hopf. Per això, en els següents casos només analitzarem l'estructura de l'extrem esquerre de la llengua d'Arnold de període 1.

Per al cas  $\psi_{EM}=1.75$ , apareixen tres bifurcacions a la part esquerra de la llengua d'Arnold. Suposem que resseguint l'evolució de l'estabilitat l'òrbita periòdica cap a l'esquerra. Inicialment tenim un node directe estable que es transforma en una òrbita sella directa a través d'una bifurcació sella node que implica un canvi de direcció en el resseguiment. Tot seguit una altre bifurcació sella node transforma l'òrbita sella directe en una òrbita node directa i tornem a tenir un canvi en la direcció del resseguiment de l'òrbita. Aquesta òrbita que és un node estable pateix un bifurcació de Hopf i se'ns transforma en un node inestable que s'exten a l'esquerra de la llengua d'Arnold de període 1. Entre la darrera bifurcació sella node i la bifurcació de Hopf coexisteixen dues òrbites periòdiques estables de període 1 amb conques d'atracció diferents. Això es pot veure amb la coexistència de dues línies contínues que conformen dues branques associades a nodes estables. En aquest cas a l'esquerra de la llengua d'Arnold existeixen solucions càdtiques, de manera que la primera bifurcació sella node té associades intermitències de tipus I càdtiques. Cal esmentar que la segona bifurcació sella node no està associada a intermitències de tipus I, perquè quan es produïx la bifurcació sella node el sistema salta cap a la solució periòdica estable de la branca inferior.

Per al cas  $\psi_{EM}=1.8$ , l'evolució és pràcticament igual al cas anterior, però aquí, a partir de la bifurcació de Hopf l'òrbita inestable pateix dos canvis d'estabilitat. En la bifurcació de Hopf ens apareix un focus inestable. Aquest focus inestable es converteix en un node inestable indirecte, posteriorment pateix un doblament de període i es converteix en una sella inestable indirecta. Aquesta òrbita periòdica sella torna a patir un nou doblament de període i es converteix en una òrbita periòdica

## Diagrama de bifurcació numèric

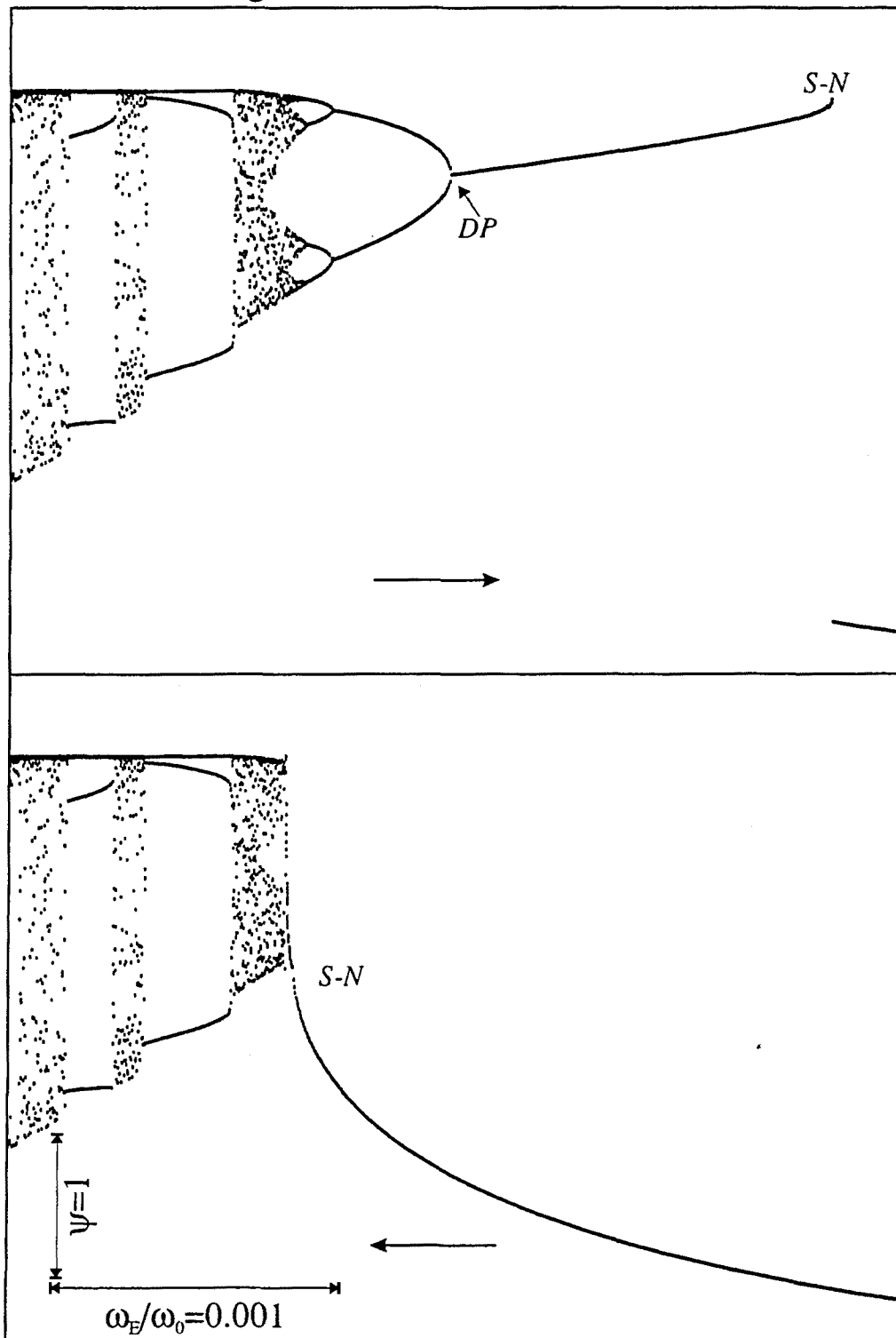


Fig. V.12 Diagrames de bifurcació numèrics. El diagrama superior s'ha obtingut decremantant la freqüència de la modulació externa, mentre que el diagrama de bifurcació inferior s'ha obtingut incrementant la freqüència de la modulació externa. En ambdós casos només hem representat les solucions asimptòticament estables.

tipus node inestable indirecte. Aquest darrer doblament de període es produeix fora de la llengua d'Arnold de període 1. Aquests dos doblaments de període són d'òrbites inestables, de manera que no afecten els límits de la llengua d'Arnold de període 1.

Per al cas  $\psi_{EM}=1.9$ , la bifurcació de Hopf s'ha transformat en una bifurcació de doblament de període. El node estable directe, que apareix a partir de la segona bifurcació sella node, es transforma en un node estable indirecte. Aquest node estable indirecte pateix una inestabilitat subharmònica i ens apareix una òrbita tipus sella indirecta. Aquest doblament de període és el primer pas d'una cascada de doblaments de període que finalitza en una zona caòtica. A l'esquerra de la llengua d'Arnold, la ruta al caos ha canviat i en lloc d'aparèixer les intermitències de tipus I, tenim la seqüència de doblaments de període. Si sortim del centre de la llengua d'Arnold disminuint la freqüència, arribem a la bifurcació sella node, i en comptes d'aparèixer intermitències de tipus I, saltem dins la zona caòtica resultant de la cascada subharmònica. És a dir, en aquests, la transició no és contínua sinó que hi ha un salt. Si després augmentem la freqüència de la modulació externa, sortim de la zona caòtica a través d'una seqüència de doblaments de període, arribant a una òrbita de període 1 estable corresponent al node estable de la branca superior. Si continuem incrementant la freqüència de la modulació externa, arribem a la segona bifurcació sella node que ens fa saltar a la branca inferior. En aquesta situació, donat que existeixen dues solucions periòdiques estables, es produeix un fenomen d'histèresi ja que, si tornéssim a disminuir la freqüència de la modulació externa, tornem a trobar la bifurcació sella node que ens fa saltar a l'atractor caòtic i es repetiria la situació anteriorment descrita. Aquest fenomen està representat en els diagrames de bifurcació numèrics de la figura V.12. Aquests diagrames de bifurcacions s'han obtingut representant la projecció de la secció estroboscòpica de Poincaré de  $\psi$  en funció de  $\omega_E/\omega_0$ . S'han pres fixos  $\psi_{EB}=10$  i  $\psi_{EM}=2$ . Aquests diagrames s'han obtingut a partir d'enregistrar els punts després de deixar evolucionar el sistema un temps llarg, de manera que representen la solució assímtotament estable. El diagrama superior s'ha obtingut decremantant  $\omega_E/\omega_0$  de 0.744 fins a 0.712 i l'inferior incrementant  $\omega_E/\omega_0$  de 0.712 fins 0.744.

Per al cas  $\psi_{EM}=2.6$ , les dues bifurcacions sella node han desaparegut. Ja no hi ha coexistència de solucions periòdiques estables de període 1. L'òrbita estable que inicialment és un node directe, a les proximitats de la bifurcació es transforma en un node indirecte i després del doblament de període en una sella indirecte. Aquest doblament de període també és l'inici d'una seqüència de doblaments de període.

L'estructura de bifurcacions de la llengua d'Arnold de període 1 il·lustrada a la figura V.9 és qualitativament pràcticament idèntica a la presentada per Knudsen i al. [34]. Aquest últim ha estat calculat a partir del sistema d'equacions del Brusselator forçat. Això torna a evidenciar la semblança entre els dos sistemes i demostra que el sistema bicapa modulada és un bon sistema per a l'anàlisi d'inestabilitats dels sistemes forçats. Només hi ha una diferència qualitativa important: en els resultats presentats pel Brusselator forçat la bifurcació de Hopf no es transforma en un doblament de període. En el sistema bicapa modulada també es pot aconseguir aquesta mateixa situació variant  $\psi_{EB}$ , però he preferit il·lustrar el cas en que  $\psi_{EB}=10$  ja que és on la dinàmica és més rica.

En aquest treball de Knudsen i al. també s'il·lustra una bifurcació global de tipus homoclínic relacionada amb les bifurcacions locals. Aquesta bifurcació global també es dona en el nostre cas, però l'analitzaré al proper capítol.

A la figura V.13 he representat sis diagrames de bifurcació experimentals per il·lustrar les bifurcacions al voltant de la llengua d'Arnold de període 1. En aquests diagrames represento la intensitat reflectida captada estroboscòpicament variant la freqüència de la modulació externa. Els sis casos han estat realitzats per a diferents amplituds de la modulació externa, concretament: *a)* 0.03, *b)* 0.05, *c)* 0.07, *d)* 0.1, *e)* 0.25 i *f)* 0.3 Volts, i la intensitat de base d'entrada és igual a 1 Volt. A la figura V.13 hem indicat també el tipus de bifurcació als extrems de la finestra periòdica, així com el número rotacional de la finestra periòdica. Per determinar el tipus de bifurcació, no n'hi prou amb examinar el diagrama de bifurcació; ha estat necessari també analitzar les seccions estroboscòpiques i transformades de Fourier per a valors de les freqüències de modulació externa propers al punt de la bifurcació. De tota manera, a partir dels diagrames de bifurcació es pot intuir el tipus de bifurcació; per exemple, en les bifurcacions sella node la branca corresponent a les solucions periòdiques té forma de mitja paràbola aprop del punt de bifurcació. En les bifurcacions de Hopf l'òrbita quasiperiòdica que neix correspon a una circumferència al pla de Poincaré, el radi de la mateixa augmenta amb el quadrat del paràmetre de control. En el diagrama de bifurcació això es tradueix en un creixement en forma de paràbola de la zona quasiperiòdica.

La primera cosa que podem observar en els diagrames de bifurcació experimentals és que l'amplada de les finestres periòdiques augmenta en incrementar l'amplitud de la modulació. És a dir, quan més fort és l'acoblament, més capacitat tenen les oscil·lacions del dispositiu per sincronitzar-se amb la modulació externa.

En el cas *a)* podem comprovar que per a amplituds de modulació petites la finestra periòdica està envoltada per solucions quasiperiòdiques i la transició es fa a través d'una bifurcació sella node.

En els casos *b)* i *c)* la transició pel costat dret ja ha canviat, en aquest cas la transició de la finestra periòdica a la zona quasiperiòdica és fa a través d'una bifurcació de Hopf.

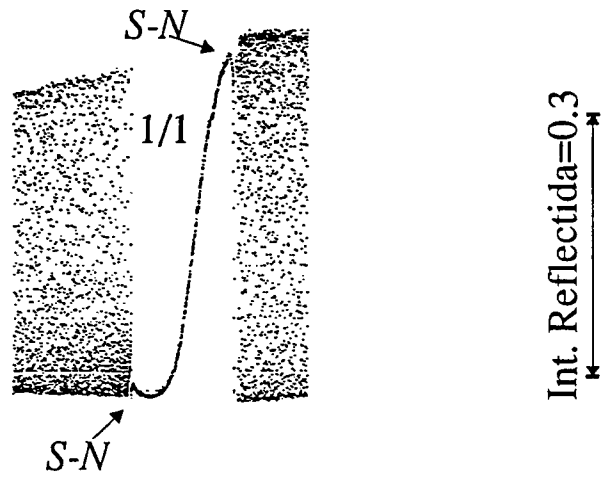
En els casos *d)* i *e)* ha canviat la transició al costat esquerre i en comptes d'aparèixer una bifurcació sella node ens apareix un doblament de període. Aquest doblament de període permet connectar les finestres periòdiques  $1/1$  i  $2/3$ .

Finalment al cas *f)* han desaparegut les finestres  $1/3$ ,  $1/2$  i  $2/3$  i la finestra de període 1 ocupa tota la zona esquerra.

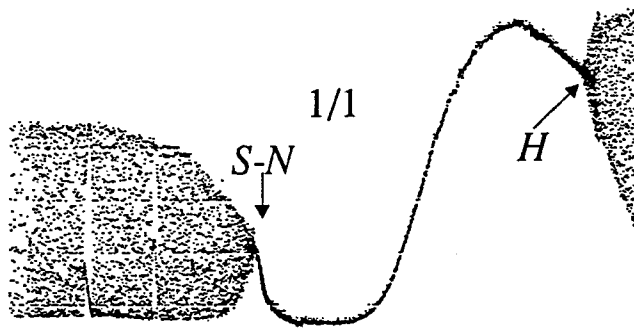
En conclusió, hi ha un bon acord entre la teoria i l'experiment. Hem pogut comprovar com per a amplituds de modulació petites la finestra de període 1 està limitada per dues bifurcació sella node. També està d'acord amb la predicció numèrica, de la transformació de la bifurcació sella node situada a la dreta de la llengua d'Arnold de període 1 en una bifurcació de Hopf de segon ordre. També tal i com succeïa en el cas numèric, l'aparició d'aquesta bifurcació de Hopf es produeix quan al costat dret encara existeix una bifurcació sella node al costat esquerre de la llengua d'Arnold de període 1. On sí existeix una diferència important és en la dinàmica a l'esquerra de la finestra de període 1, en el cas numèric teniem una successió de bifurcacions de codimensió 1, en què ens apareixia un Hopf, un

Diagrama de bifurcació experimental

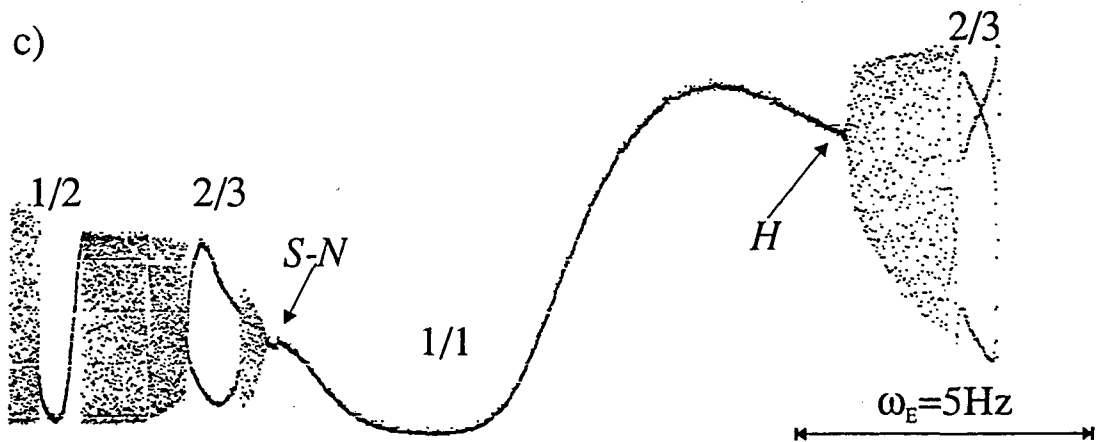
a)



b)



c)



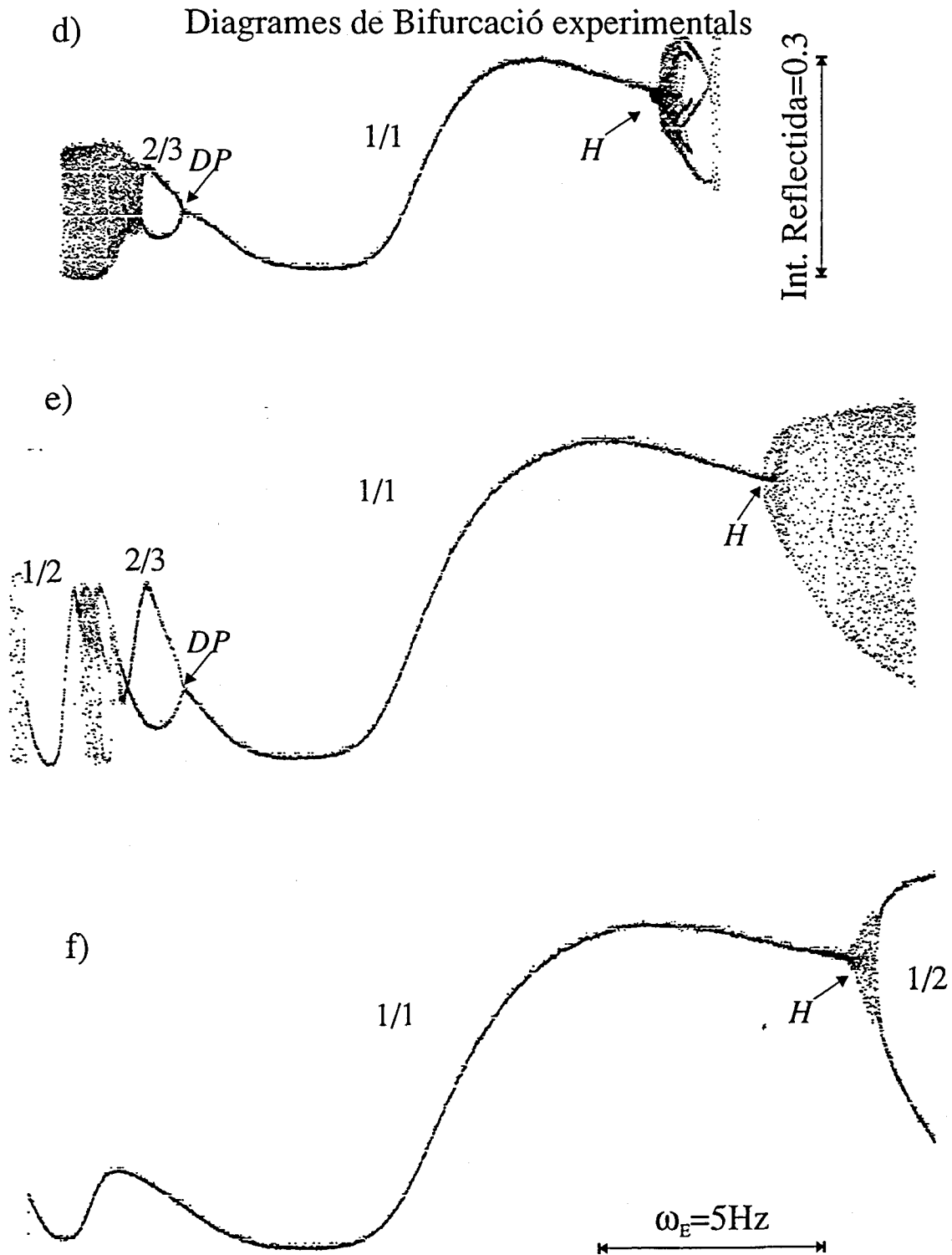


Fig V.13 Diagrames de bifurcació experimentals obtinguts a partir de representar la intensitat reflectida captada estroboscòpicament en funció de la freqüència de la modulació externa. Els diferents casos corresponen a diferents amplituds de la modulació externa creixents de (a) a (f).

doblament de període i posteriorment desapareixia la bifurcació sella node. En canvi en els registres experimentals passem directament de la bifurcació sella node al doblament de període. Cal tenir present que en el cas numèric aquesta variada dinàmica es produïa en un regió molt petita en l'espai dels paràmetres, cosa que dificulta la seva observació experimental.

### V.6.2 Superposició de les finestres de període 1 i 2. Bifurcacions de la finestra de període 2.

En general les llengües d'Arnold, per a amplituds de modulació petites, estan envoltades per solucions quasiperiòdiques. Si analitzem la figura V.8 podem observar aquest fenomen per a la llengua d'Arnold de període 2. La transició de la finestra període 2 a les solucions quasiperiòdiques es produeix a través de bifurcacions de tipus sella node.

En augmentar l'amplitud de modulació, la bifurcació sella node, situada a la dreta, se'ns transforma en una bifurcació de Hopf. També s'observa, per a amplituds de modulació alta, la superposició de les llengües d'Arnold. Concretament la llengua d'Arnold de període 2 es superposa a l'esquerra amb la de període 1 i a la dreta amb la de període 3. La part superior de la llengua d'Arnold de període 2 està envoltada per solucions periòdiques de període 1. La transició entre les solucions de període 1 i la finestra de període 2 es fa a través d'un doblament de període supercrític. L'amplada de la finestra de període 2 disminueix fins que al final acaba per desaparèixer.

Dins la llengua de període 2 hi ha una illa on existeixen solucions de període 4. Aquesta illa apareix per a una bifurcació de doblament de període supercrítica.

Per analitzar amb més detall la connexió entre la finestra de període 1 i la finestra de període 2 hem inclòs la gràfica V.14. En aquesta gràfica representem l'evolució de les òrbites periòdiques de la llengua d'Arnold de període 1 i 2 en funció de la freqüència de la modulació externa fixant l'amplitud de la modulació externa per a 3 casos. Per representar les òrbites periòdiques he dibuixat la secció estroboscòpica de  $\psi$ . En aquesta representació una òrbita de període 1 és un punt, i una òrbita de període 2 són dos punts. Els 3 casos corresponen al següents valors de l'amplitud de la modulació externa: 2.5, 3 i 3.5. Igual que en el cas de la figura V.10, aquestes evolucions han estat calculades numèricament emprant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques, això ens permet calcular tant les òrbites estables com les inestables i selles. A més, ens permet de calcular l'estabilitat de les solucions periòdiques a partir dels multiplicadors de Floquet.

Per al cas en que  $\psi_{EM}=2.5$  dins la llengua d'Arnold de període 2, només existeixen dues solucions periòdiques de període dos: un node estable directe i una sella directe. La finestra periòdica de període 2 està limitada als extrems per una única bifurcació sella node. Cal remarcar el fet que a cada extrem de la finestra de període dos existeix una única bifurcació sella node, ja que a la figura es veu com dues branques sella connecten amb dues branques node estable, i això es pot confondre amb l'existència de dues bifurcacions sella node simultànies. Aquesta connexió doble correspon a una única bifurcació sella node atès que cada parell de branques correspon a una única solució de període 2.

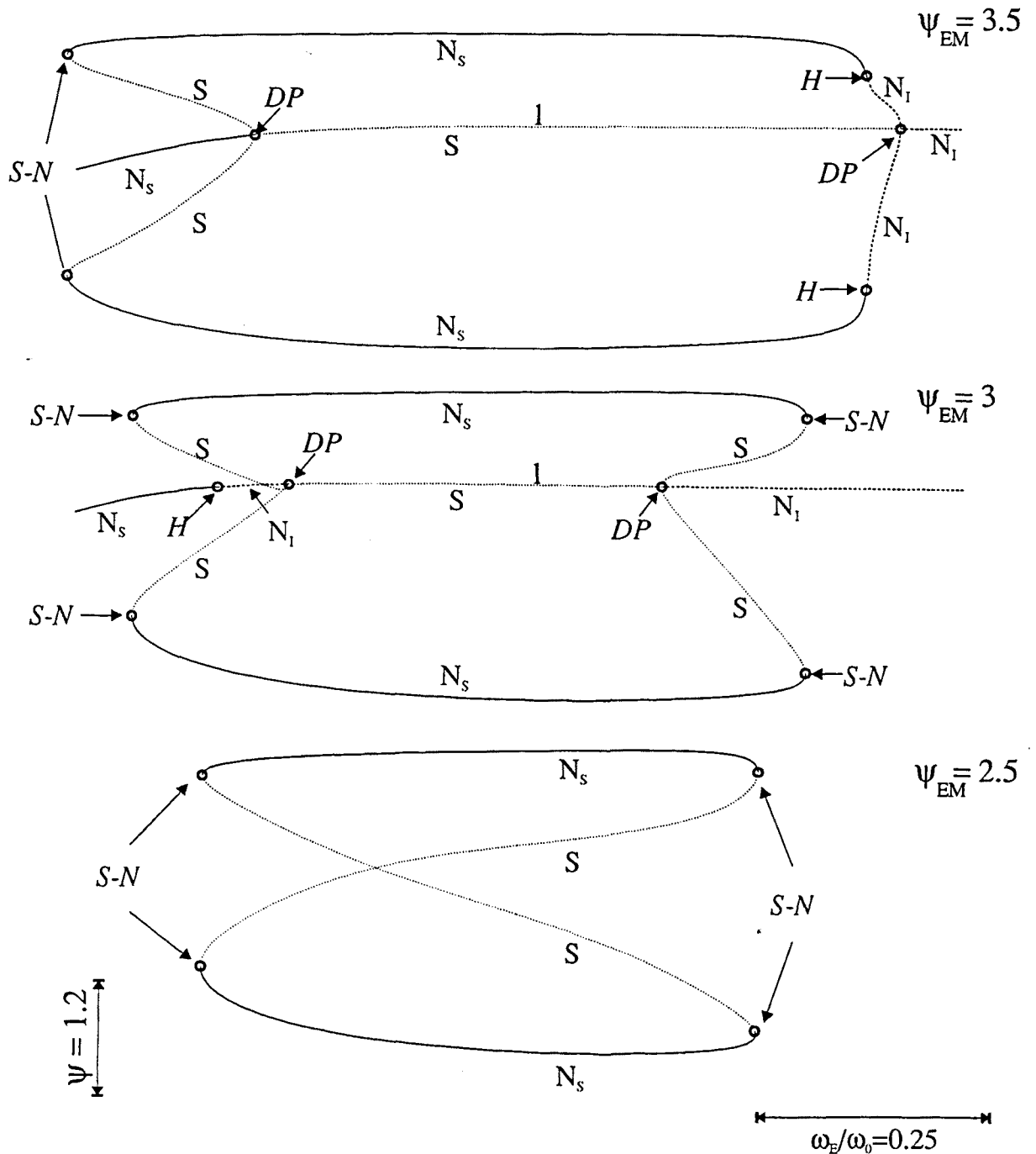


Fig. IV.14 Diagrama de bifurcació numèric obtingut a partir del seguiment d'òrbites de període 1 i 2 en funció de  $\omega_E$ . En els dos primers casos coexisteixen solucions de període 1 (centre) i període 2. En el darrer cas només existeixen dues solucions de període 2, una solució sella i una estable.



Per al cas en què  $\psi_{EM}=3$ , ja existeix una connexió entre la finestra de període 1 i la finestra de període 2. Si ens col·loquem a l'extrem esquerre de la figura trobem una solució estable de període 1 corresponent a un focus estable. Si anem resseguint aquesta solució trobem una bifurcació de Hopf i el node estable és desestabilitza convertint-se en un focus inestable. Posteriorment aquest focus inestable es converteix en un node indirecte inestable. Aquest node indirecte pateix un doblament de període subcrític. Del doblament de període subcrític sorgeixen dues noves solucions: una sella directa de període 2 i un sella indirecte de període 1. Donat el caràcter subcrític de la bifurcació, per resseguir l'òrbita sella directe de període 2 hem de tornar enrere en la variació de la freqüència de la modulació externa. Aquest doblament de període s'ha produït dins la finestra de període 2. A més podem observar que, a diferència d'abans, l'òrbita sella de període 2 no existeix en tot l'interval de la finestra periòdica ja que aquesta apareix arran d'un doblament de període subcrític i desapareix en una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques de període dos. També és important destacar que a la zona esquerra de la finestra coexisteixen dues solucions periòdiques estables, una de període 1, una altre de període 2. Si continuem resseguint la solució sella de període 2, arribem un punt on les dues branques que representen aquesta solució col·lisionen amb les dues branques corresponents a l'òrbita node estable directe de període dos, donant lloc a la bifurcació sella node d'òrbites de període dos. Al costat dret l'estructura de les bifurcacions és la mateixa. Cal ressaltar que la solució de període 1 provinent de la finestra de període 1 és de tipus sella entre els dos doblaments de període subcrítics, i que segueix existint passada la finestra de període 2 però convertida en un node inestable.

Per al cas en què  $\psi_{EM}=3.5$  un dels doblaments de període subcrítics d'òrbites inestables ha canviat el seu caràcter subcrític i l'altre s'ha transformat en un doblament de període d'òrbita estable. Concretament el doblament de període situat a l'esquerra s'ha transformat en un doblament de període d'òrbita estable, ja que en aquest cas, la solució de període 1 no pateix una bifurcació de Hopf i, per tant, en arribar al punt del doblament de període aquesta òrbita és estable. A partir d'aquest doblament de període subcrític de l'òrbita estable de període 1 apareixen dues noves solucions: una òrbita sella directa de període 2 i una òrbita sella indirecta de període 1. Al costat dret també hi ha una altra diferència; la bifurcació tipus sella node s'ha transformat en un bifurcació de Hopf d'una òrbita de període dos, és a dir, en aquest cas l'òrbita de període dos estable es converteix en una òrbita de període 2 inestable. Aquesta òrbita inestable de període dos desapareix en el doblament de període supercrític d'òrbita inestable situat a la dreta de la finestra de període dos. En aquesta bifurcació l'òrbita de període 1 tipus sella es transforma en una òrbita inestable de període 1. Aquest node inestable de període 1 s'extén a la dreta més enllà dels límits de la finestra de període dos.

Resumint; la connexió entre la finestra de període 1 i la de període 2 es produeix de tres formes diferents: a través d'un doblament de període subcrític d'una òrbita inestable de període 1, mitjançant un doblament de període subcrític d'una òrbita estable de període 1 o a través d'un doblament de període supercrític d'una òrbita estable de període 1. Les tres bifurcacions apareixen successivament en augmentar l'amplitud de la modulació externa, essent el doblament de període supercrític el que es produeix per a amplituds de modulació més altes.

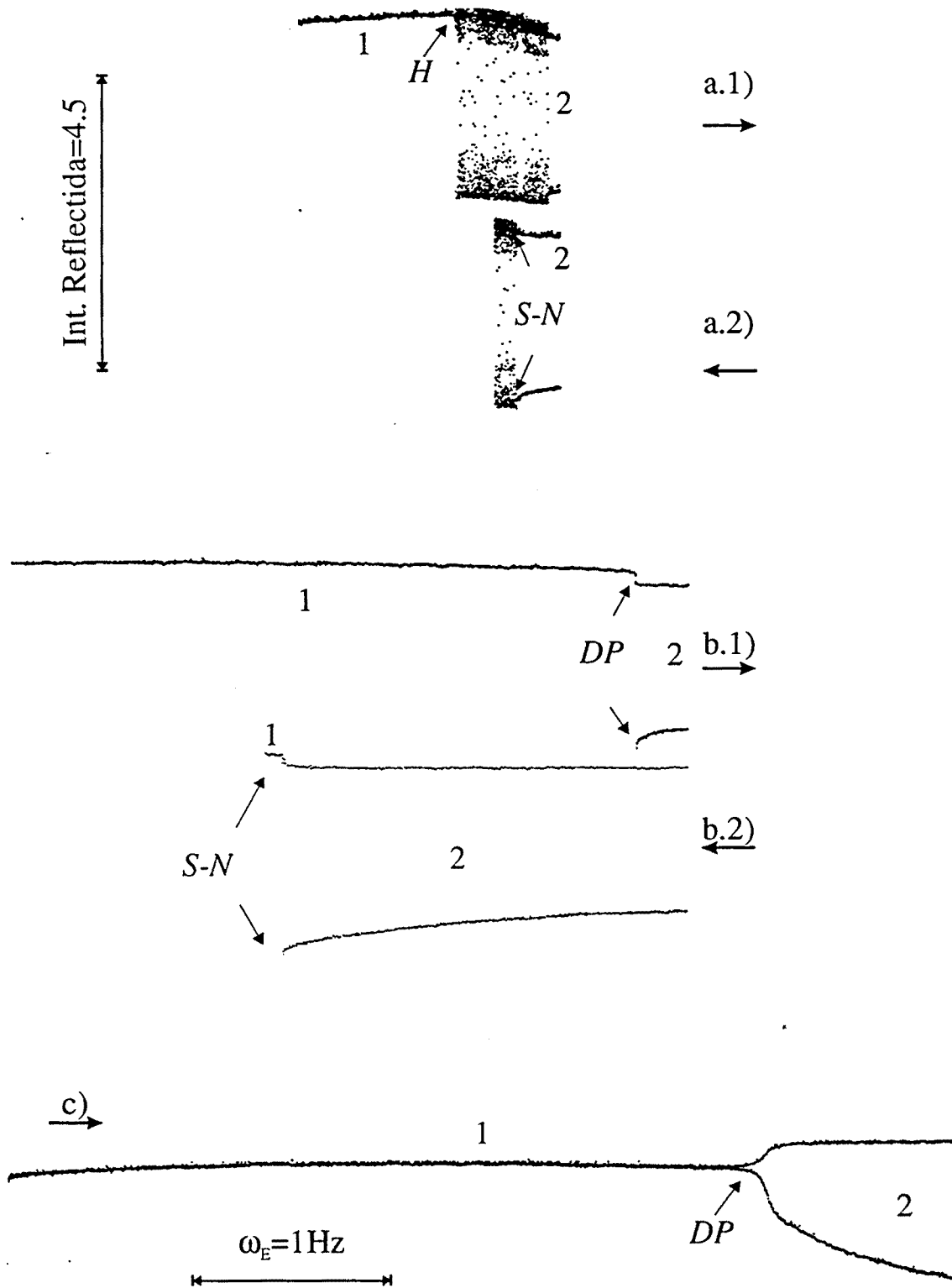


Fig V.15 Diagrames de bifurcació experimentals obtinguts a partir de representar la intensitat reflectida captada estroboscòpicament en anar variant la freqüència de la modulació externa. En aquest diagrama podem veure els tres diferents tipus de bifurcacions que apareixen en la transició de la finestra de període 1 a la finestra de període 2.

Aquesta dinàmica en la transició de la finestra de període 1 a la finestra de període dos també es dona per al cas del Brusselator forçat [34,75,76], i ha estat objecte d'un ampli estudi, cosa que torna a posar de relleu l'interès del nostre sistema.

A la figura V.15 hem representat cinc diagrames de bifurcació experimentals per il·lustrar els tres tipus de bifurcacions que ens apareixen en la connexió entre la finestra de període 1 i la finestra de període 2. En aquests diagrames hem representat la intensitat reflectida captada estroboscòpicament variant la freqüència de la modulació externa. Els tres casos han estat realitzats per a diferents amplituds de la modulació externa, concretament: *a)* 1.15, *b)* 1.5 i *c)* 2.4 Volts, i la intensitat d'entrada de base és igual a 3 Volts. A la figura V.15 hem indicat també el tipus de bifurcació així com el període corresponent a les solucions periòdiques.

Per als dos primers casos hem representat els diagrames de bifurcació quan augmentem la freqüència de la modulació externa (*a.1* i *b.1*) i quan disminuïm (*a.2* i *b.2*). Això ho hem fet, perquè normalment les bifurcacions amb caràcter subcrític presenten histèresi, i d'aquesta manera les podem caracteritzar.

Per al primer cas observem una branca contínua a l'esquerra de *a.1*) corresponent a una òrbita de període 1 estable. Aquesta òrbita s'instabilitza a través d'una bifurcació de Hopf i ens apareix una solució quasiperiòdica. Finalment mitjançant una bifurcació global el sistema s'estabilitza al voltant d'una solució de període 2 estable. Sobre aquesta bifurcació global en parlarem al proper capítol, però de moment avançarem que aquesta bifurcació comporta l'aparició d'atractors caòtics. Si ara decrementem la freqüència de la modulació externa (*a.2*) ens mantenim dins la finestra de període 2, i podem comprovar que coexisteixen els atractors caòtics i la finestra de període 2 per al mateix valor de la freqüència de la modulació externa. Si seguim decrementant la freqüència de la modulació externa es produeix una bifurcació sella node i el sistema salta a l'atractor caòtic. En aquest cas l'òrbita de període 1 s'instabilitza a través d'una bifurcació de Hopf i posteriorment l'òrbita inestable de període 1 pateix una bifurcació de doblament de període supercrític. Aquest doblament de període supercrític comporta l'aparició d'una òrbita sella de període 2. Com veurem al proper capítol per tal que es produeixi la bifurcació global ens cal que existeixi una òrbita tipus sella.

Per al segon cas podem observar com, en anar incrementant la freqüència de la modulació externa (*b.1*), l'òrbita de període 1 s'instabilitza saltant directament a l'òrbita de període 2, i a més a més, de forma no contínua. En decrementar la modulació externa (*b.2*) no recuperem l'òrbita de període 1 al mateix punt, sinó que apareix un fenomen d'histèresi i retornem a l'òrbita de període 1 per un valor de la freqüència de la modulació externa força més petit que el valor per al qual s'havia produït l'anterior salt de l'òrbita de període 1 a l'òrbita de període 2. En el punt on retornem a l'òrbita de període 1 es produeix una bifurcació tipus sella node de l'òrbita de període 2. Aquesta histèresi juntament amb la discontinuïtat en la transició de període 1 a període 2 demostra l'existència d'un doblament de període subcrític en la desaparició de l'òrbita de període 1 estable.

Per al tercer cas no hi ha fenòmens d'histeresi, passem de forma contínua de la solució estable de període 1 a la solució estable de període 2. Aquesta transició continua és fa a través d'un doblament de període supercrític. Cal fer notar que

aquesta transició es produeix per a amplituds de modulació molt elevades tal i com hem previst numèricament al gràfic V.8. Concretament l'amplitud de la modulació és un 80% de la intensitat de base de la modulació, és a dir, la modulació de la pertorbació externa abasta pràcticament tota la intensitat d'entrada.

## V.5 Bifurcacions locals de codimensió dos.

En l'apartat anterior hem observat que en una mateixa llengua d'Arnold es donen bifurcacions tipus sella node, doblament de període i bifurcacions de Hopf. A més podem comprovar en la figura V.8 que aquestes bifurcacions estan connectades. En els punts on es connecten es donen simultàniament diverses bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$ . En aquests punts és on es produeixen les bifurcacions de codimensió dos. Aquestes bifurcacions de codimensió dos són de caràcter local ja que també ho són les bifurcacions de codimensió que connecten. En el nostre cas això es dona quan els dos multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de l'òrbita periòdica simultaneament assoleixen els valors  $+1$  o  $-1$ . També es poden produir connexions entre bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$  d'òrbites periòdiques de diferent període, en aquests casos, si la codimensió dos és de caràcter local ha d'existir un doblament de període que permeti connectar de manera contínua ambdues òrbites periòdiques. Cal distingir molt clarament els punts on les corbes es creuen o es connecten. Allà on es creuen és produeixen dues bifurcacions al mateix punt però per a solucions diferents, és a dir, no existeix una codimensió dos. Aquest és el cas del creument a la figura V.8 de la bifurcació de Hopf a la dreta de la finestra de període 1 amb la bifurcació sella node a l'esquerra de la finestra de període 2. Ambdues es donen per al mateix valor de  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E/\omega_0$ , però afecten a solucions diferents. La primera correspon a una solució de període 1 que passa de focus estable a focus inestable, i la segona a una solució de període 2 que passa de node estable directe a node inestable indirecte.

Això s'il·lustra a la figura V.16 on he fet un seguiment numèric de les òrbites de període 1 i 2. El seguiment ha estat calculat per a  $\psi_{EM}=2.77$  i  $\psi_{EB}=10$  variant  $\omega_E/\omega_0$ . Es pot comprovar immediatament que, tot i que ambdues bifurcacions és donin per als mateixos valors de  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E/\omega_0$ , afecten a solucions diferents de manera que no existeix una bifurcació de codimensió dos. Per poder distingir els creuaments de les bifurcacions de codimensió dos, a les figures V.8 i V.9 he marcat amb cercles negres els punts on es produeixen aquestes bifurcacions codimensions dos.

Per localitzar una bifurcació de codimensió  $n$  cal variar simultàniament  $n$  paràmetres. Per exemple, per localitzar una bifurcació de codimensió  $\dot{u}$  cal variar un paràmetre de control, és a dir, el punt de la bifurcació ve determinat per un paràmetre de control. Per això en les figures V.8 i V.9, on la representació és fa en l'espai dels paràmetres  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E/\omega_0$  les bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$  són corbes (dimensió  $\dot{u}$ ). En canvi els punts de bifurcació de codimensió dos venen determinats per dos paràmetres de control, de manera que, en les figures V.8 i V.9 són punts (dimensió 0). Una conclusió immediata d'això és que en un estudi de codimensió dos, com els que hem fet a les figures V.8 i V.9, només podem analitzar bifurcacions codimensions  $\dot{u}$  i dos. Si volguessin trobar una bifurcació de codimensió tres caldria

## Seguiment d'òrbites numèric

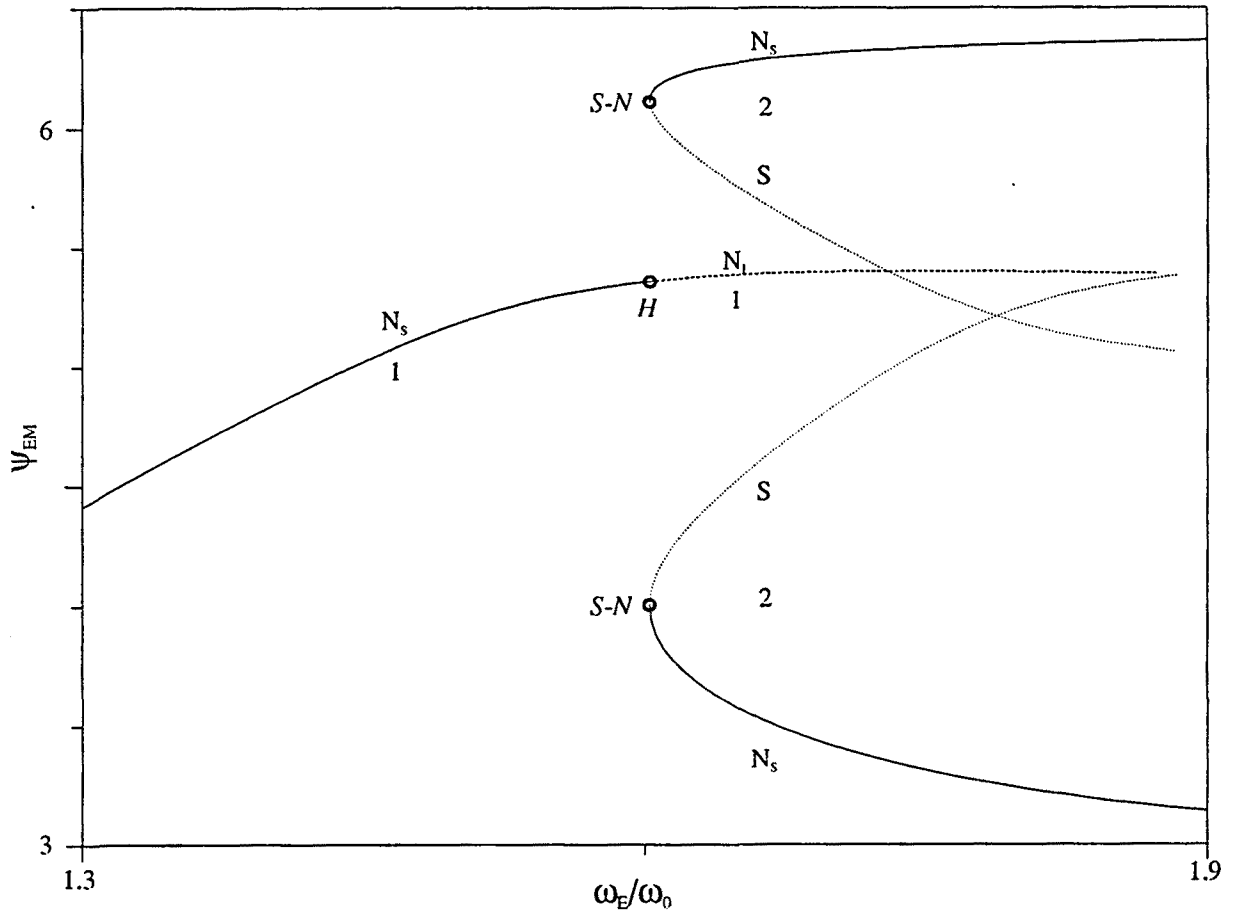


Fig. V.16 Seguiment numèric de les òrbites de període 1 i 2 en funció de  $\omega_E/\omega_0$  per  $\psi_{EM}=2.77$  i  $\psi_{EB}=10$ . En aquesta figura il·lustrem el creuament de dues bifurcacions de codimensió 1. Concretament la bifurcació de Hopf (H) i la bifurcació sella node (S-N) es donen per als mateixos valors de  $\psi_{EM}$  i  $\omega_E$ , però afecten a diferents solucions periòdiques de manera que no existeix cap bifurcació de codimensió dos.

afegir un nou paràmetre de control i fer un estudi en un espai dels paràmetres tridimensional.

La motivació de l'estudi de les bifurcacions de codimensions dos és molt gran; d'una banda, ens permet tenir una visió global de la dinàmica de les solucions periòdiques, d'altra banda, ens permet conèixer els mecanismes involucrats en les connexions entre bifurcacions de codimensió  $\geq 2$ . En aquest apartat descobrirem que al voltant dels punts de bifurcació de codimensió dos és on trobarem una dinàmica més rica i variada. Al proper capítol demostrarem que les bifurcacions de codimensió dos estan directament relacionades amb l'aparició de bifurcacions globals.

Tal i com veurem tot seguit, totes les diferents connexions imaginables entre bifurcacions de codimensió 1 no són possibles. A més, certs tipus de connexions de bifurcacions de codimensions  $\geq 2$  impliquen que en la connexió també apareixin

determinades bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$  que involucrin òrbites inestables (línies puntejades a la figura V.8 i V.9).

En l'estudi realitzat a partir de la figura V.8 i V.9 hem trobat cinc diferents tipus de bifurcacions de codimensió dos, les quals impliquen respectivament la connexió de les següents bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$ :

- 1) Hopf, sella node d'òrbita estable i sella node d'òrbites inestables.
- 2) Hopf, doblament de període d'òrbita estable i doblament de període d'òrbita inestable.
- 3) Sella node d'òrbita estable de període 2 i doblaments de període subcrítics i supercrítics d'òrbites estables de període 1.
- 4) Hopf d'una òrbita de període dos, doblaments de període d'òrbita estable i inestable de període 1 supercrítics.
- 5) Sella node d'òrbita estable de període dos, Hopf d'òrbita estable de període 2 i doblaments de període d'òrbita inestable de període 1 subcrítics i supercrítics.

Es podria pensar que en les bifurcacions de codimensió dos es produeix la connexió de dues bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$ , analitzant breument els cinc casos anteriors ens podem adonar ràpidament que aquesta condició és falsa, ja que en els darrers casos estan implicades de tres a quatre bifurcacions de codimensió  $\dot{u}$ .

Els casos 2 i 3 són els responsables dels tres tipus de connexions entre les finestres de període 1 i 2 esmentats en l'apartat anterior. Ara tot seguit analitzaré detingudament els cinc casos.

### V.5.1 Cas 1.

Aquesta bifurcació de codimensió dos la trobem en ambdós costats de la finestra de període 1 i és la que es dona per a les amplituds més baixes de la modulació externa. Aquesta bifurcació de codimensió 2 apareix quan es produeix el canvi de una bifurcació sella node a la bifurcació de Hopf en ambdós costats de la llengua d'Arnold de període 1. Recordem que, per a amplituds de modulació baixes, les llengües d'Arnold estan envoltades per solucions quasiperiòdiques i la transició de periodicitat a quasiperiodicitat es fa a través d'una bifurcació sella node.

Per il·lustrar aquesta bifurcació de codimensió dos analitzaré la bifurcació de codimensió dos situada a la dreta de la llengua d'Arnold de període 1 (cf. figura V.9). L'estudi de la bifurcació de codimensió dos situada a l'esquerra de la llengua d'Arnold de període 1 és qualitativament equivalent al cas que estudiarem, ja que ambdues corresponen al mateix tipus de bifurcació

Per analitzar com, en aquesta bifurcació de codimensió dos, es produeix la transició de la bifurcació sella node a una bifurcació de Hopf, estudiarem l'evolució de les òrbites periòdiques en funció del paràmetre  $\omega_E/\omega_0$  per a dos valors de  $\psi_{EM}$  diferents localitzats al voltant de la bifurcació de codimensió dos. Concretament analitzaré la bifurcació sella node per a una situació anterior a la bifurcació de codimensió dos, i la bifurcació de Hopf per a una situació posterior a la bifurcació de codimensió dos. Amdós casos han estat triats de manera que siguin propers a la

bifurcació de codimensió dos. Com que la bifurcació de codimensió dos és local, la transició entre les dues bifurcacions de codimensió ú ha de ser de forma contínua, de manera que intentarem il·lustrar com passem de forma contínua de la bifurcació sella node a la bifurcació de Hopf. També comprovarem que perquè es doni aquesta bifurcació de codimensió dos és necessària la implicació d'una tercera bifurcació de codimensió ú, una bifurcació sella node d'una òrbita inestable.

Els dos exemples triats han estat calculats per a  $\psi_{EM}=1.3$  i  $\psi_{EM}=1.4$  amb  $\psi_{EB}=10.0$ . A la figura V.17 presentem a l'esquerra, el cas  $\psi_{EM}=1.3$  corresponent a la bifurcació sella node, i a la dreta el cas  $\psi_{EM}=1.4$ , corresponent a la bifurcació de Hopf. Per calcular l'evolució de les òrbites periòdiques en funció de  $\omega_E/\omega_0$  hem emprat tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques. Aquestes tècniques ens permeten seguir l'evolució en funció d'un paràmetre de control tant de les òrbites estables com inestables i també podem evaluar l'estabilitat d'aquestes òrbites periòdiques. A la part superior hem representat la secció estroboscòpica en  $\psi$  de les òrbites periòdiques, i a la part inferior hem representat els dos multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de l'òrbita periòdica. Als dos multiplicadors de Floquet els hem notat per  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

Per al cas  $\psi_{EM}=1.3$  si seguim l'òrbita començant per l'esquerra tenim que  $|\lambda_1|$ ,  $|\lambda_2| < 1$ , és a dir, inicialment l'òrbita és estable. Ambdós valors són reals i positius de manera que la nostra òrbita és un node directe estable de període 1. En augmentar  $\omega_E/\omega_0$  els dos valors creixen fins arribar a un punt en què  $\lambda_1$  és fa més gran que +1. En aquest moment s'ha produït la bifurcació sella node que he notat per  $S-N_S$ . El subíndex  $S$  indica que en aquesta bifurcació sella node està implicada una òrbita estable. Si continuem resseguint la solució periòdica els dos valors segueixen creixent fins arribar a un punt en què  $\lambda_2$  és fa més gran que +1. En aquest moment l'òrbita sella passa a ser una òrbita inestable, aquest punt l'he notat per  $S-N_I$ . El subíndex  $I$  indica que en aquesta bifurcació sella node està implicada una òrbita inestable. A partir d'un valor màxim de  $\lambda_1$  aquest comença a decreixer mentre que  $\lambda_2$  segueix creixent fins arribar a un punt on els dos valors coincideixen. A partir d'aquest punt els dos multiplicadors passen a ser complexos conjugats i el seu mòdul comença a créixer.

Per al cas  $\psi_{EM}=1.4$  hi ha una diferència molt important i és que en el punt on els dos multiplicadors de Floquet es fan iguals i passen a ser complexos conjugats, el valor dels multiplicadors de Floquet és inferior a +1. El màxim de  $\lambda_1$  real té un valor inferior a 1. El creuament dels multiplicadors de Floquet de la circumferència de radi 1 a l'espai complex es produeix quan ambdós multiplicadors són complexos conjugats i, per tant, no apareixen les dues bifurcacions sella node i en el seu lloc tenim una bifurcació de Hopf.

En el punt de la bifurcació de codimensió dos els dos multiplicadors de Floquet són iguals a +1. El màxim de  $\lambda_1$  real coincideix amb el valor màxim de  $\lambda_2$  real. Al principi ambdós multiplicadors de Floquet són reals positius inferiors a 1. Al punt de la bifurcació de codimensió 2 tots dos són iguals a +1 i després són complexos conjugats amb mòdul superior a 1. És a dir, en aquest punt coincideixen les tres bifurcacions de codimensió ú simultàniament.

Seguiment d'òrbites numèric

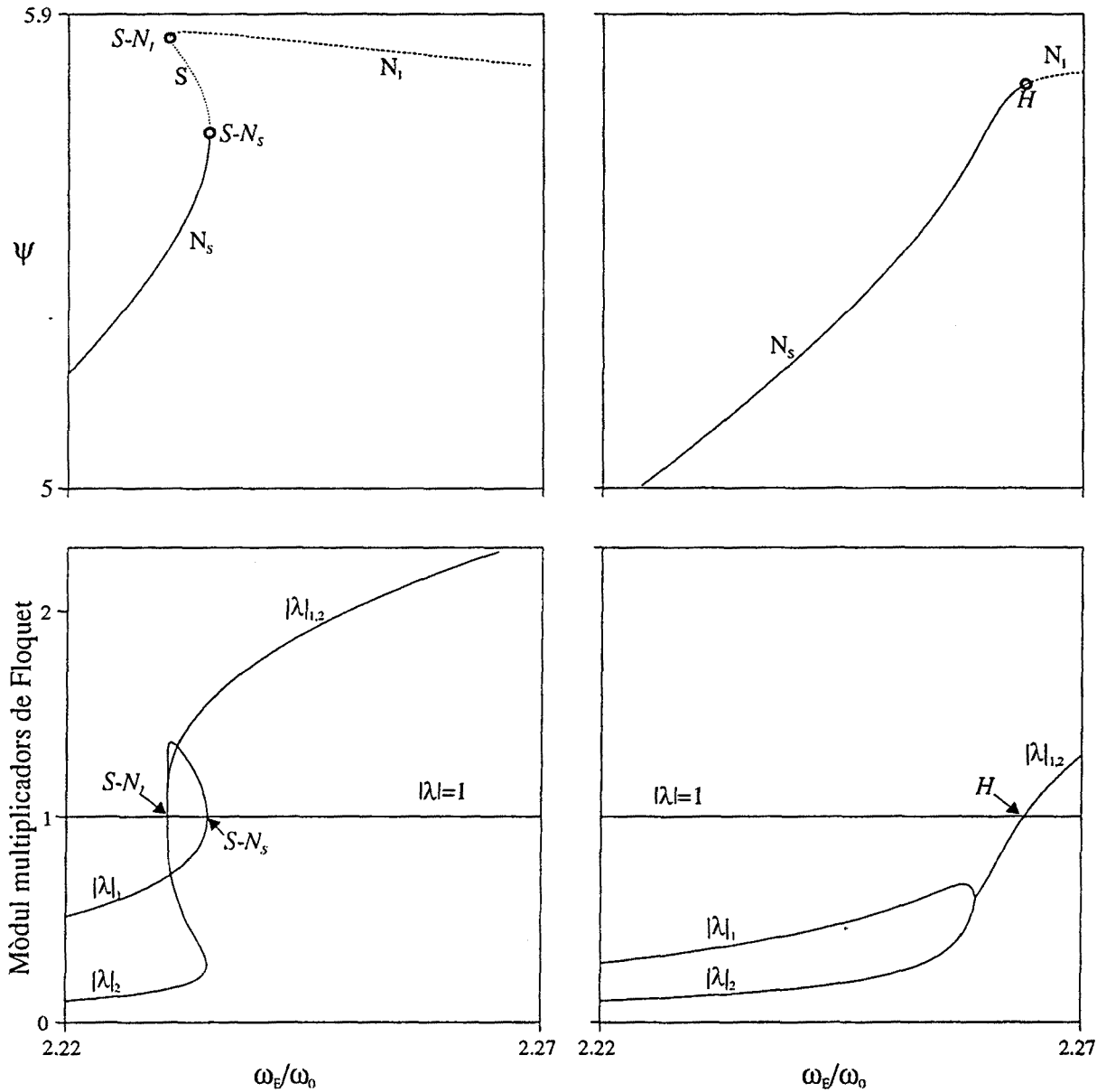


Fig V.17 Seguiment d'òrbites periòdiques per als casos  $\psi_{EM}=1.3$  (esquerra),  $1.4$  (dreta) amb  $\psi_{EB}=10$ . A la part superior hem representat la secció de Poincaré estroboscòpica i a la part inferior els multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de les solucions periòdiques. Aquests dos casos han estat triats al voltant de la bifurcació de codimensió dos del cas 1. A l'esquerra existeixen dues bifurcacions sella node una d'òrbita estable i l'altre d'òrbita inestable, i a la dreta només existeix una bifurcació de Hopf.



### V.5.2 Cas 2.

En aquest cas es produeix la transició d'una bifurcació de Hopf d'una òrbita de període 1 a un doblament de període supercrític d'una òrbita estable de període 1. També observarem que en aquesta bifurcació de codimensió dos hi està implicat un doblament de període d'òrbita inestable de període 1. Aquesta bifurcació de codimensió dos també es dona en ambdós extrems de la llengua d'Arnold de període 1.

A la figura V.18 hem il·lustrat un parell d'exemples on s'observa el canvi que es produeix en travessar el punt de bifurcació de codimensió dos. Aquest exemple correspon al cas que es dona a la dreta de la finestra de període 1. Aquesta gràfica s'ha calculat de la mateixa forma que la figura V.16. Per tant, podem representar la projecció de la secció estroboscòpica de l'òrbita periòdica així com els dos multiplicadors de Floquet  $\lambda_1, \lambda_2$  que determinen la seva estabilitat. En aquest cas no només hem il·lustrat el mòdul dels multiplicadors de Floquet sinó que per il·lustrar amb més claredat el doblament de període també hem representat la part real dels mateixos. També podem observar aquest canvi a la figura V.14. En aquesta figura la bifurcació de codimensió dos es dona entre els casos corresponents a  $\psi_{EM}$  igual a 3 i 3.5.

En el primer cas calculat per a  $\psi_{EM}=3.2$  i  $\psi_{EB}=10$ , el seguiment d'òrbites periòdiques ens indica l'existència de dues inestabilitats: una bifurcació de Hopf ( $H$ ) i un doblament de període d'una òrbita inestable ( $DP_1$ ). Si resseguim l'òrbita periòdica de període 1 des de l'esquerra inicialment l'òrbita és un focus estable, els dos multiplicadors de Floquet són complexos conjugats i de mòdul inferior a 1. Però a mesura que incrementem  $\omega_E/\omega_0$  el mòdul d'ambdós creix fins arribar a un punt on el mòdul dels multiplicadors de Floquet es fa més gran que 1. En aquest punt l'òrbita s'inestabilitza i es transforma en un focus inestable. S'ha produït la bifurcació de Hopf. Si seguim augmentant  $\omega_E/\omega_0$  arribem a un punt on els dos multiplicadors de Floquet es fan reals, en aquest punt l'òrbita passa a ser un node inestable indirecte, ja que ambdós multiplicadors de Floquet són negatius. Els mòduls són diferents i, mentre que el mòdul d'un multiplicador de Floquet ( $\lambda_2$ ) segueix creixent amb  $\omega_E/\omega_0$ , l'altre ( $\lambda_1$ ) decreix. Arriba a un punt en què  $\lambda_1$  és fa igual a -1 i per tant el mòdul de  $\lambda_1$  és fa igual a 1. En aquest punt es produeix un doblament de període de l'òrbita inestable, i aquesta es transforma en una òrbita sella.

Per al segon cas  $\psi_{EM}=3.2$  i  $\psi_{EB}=10$  l'evolució dels multiplicadors de floquet és pràcticament la mateixa amb una única diferència. En el punt en què els dos multiplicadors de Floquet es fan reals el mòdul d'aquets és inferior a 1, llavors, el focus estable es converteix en un node estable. Com la part real d'ambdós multiplicadors és negativa es tracta d'un node estable indirecte. Una conseqüència immediata és que ja no es produeix la bifurcació de Hopf. Igual que abans, el mòdul de  $\lambda_1$  decreix amb  $\omega_E/\omega_0$  mentre que el mòdul de  $\lambda_2$  creix. És aquest darrer el que ara protagonitzarà el doblament de període. Efectivament quan  $\lambda_2$  assoleix el valor -1, el seu mòdul és igual a 1, i es produeix el doblament de període. En aquest cas però el mòdul de  $\lambda_1$  és inferior a 1, és a dir, es tracta d'un doblament de període d'una òrbita estable, que es transforma en una òrbita sella.

Seguiment d'òrbites numèric

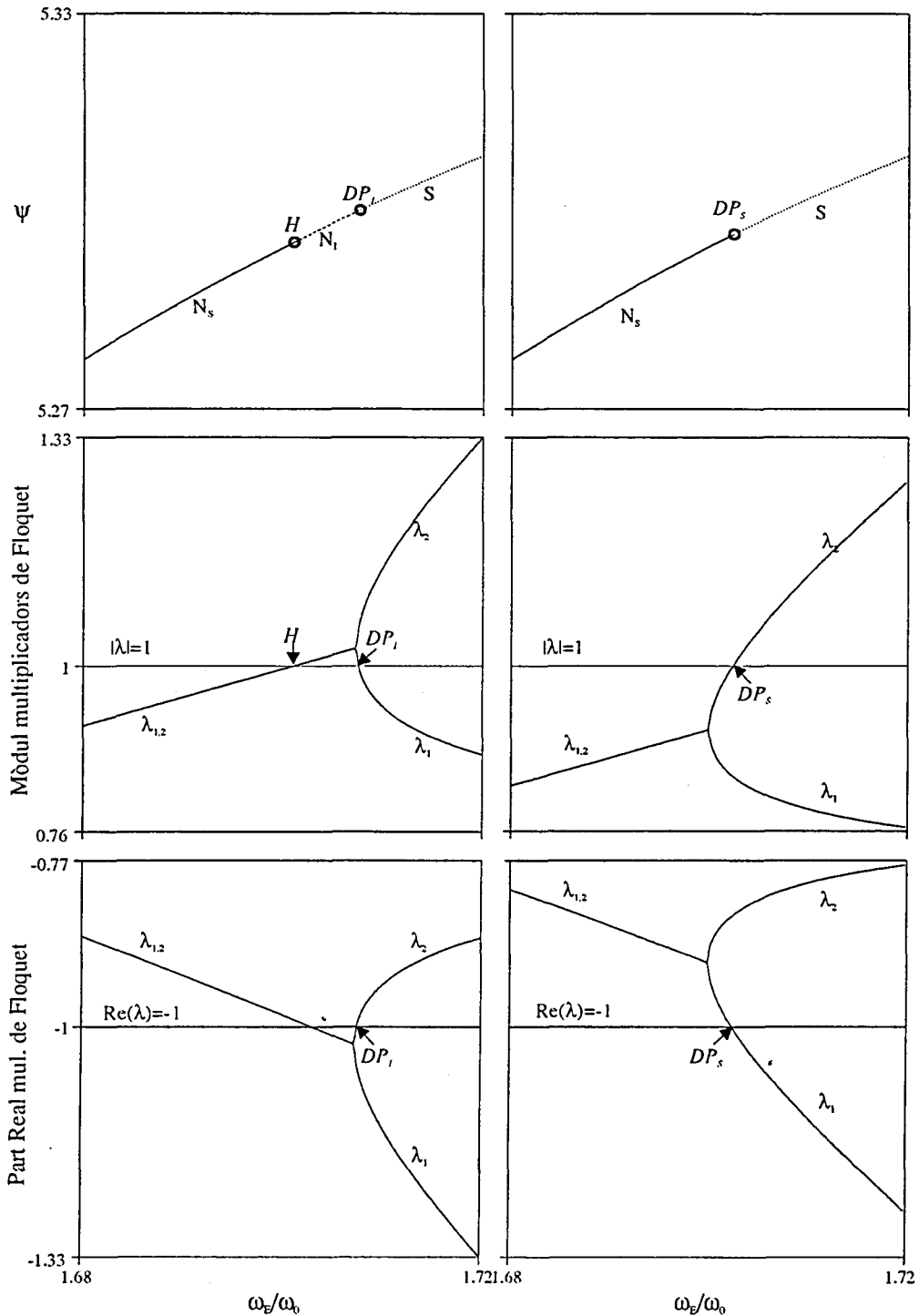


Fig V.18 Seguiment d'òrbites periòdiques per als casos  $\psi_{EM}=3.2$  (esquerra),  $3.3$  (dreta) amb  $\psi_{EB}=10$ . A la part superior hem representat la secció de Poincaré estroboscòpica, i a la part inferior el mòdul i part real dels multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de les solucions periòdiques. Aquests dos casos ha estat triats al voltant de la bifurcació de codimensió dos del cas 2. A l'esquerra existeixen dues bifurcacions: un Hopf i un doblament de període d'òrbita inestable, a la dreta, només existeix un doblament de període d'òrbita estable.

És fàcil a partir d'això imaginar-nos què passa al punt de la bifurcació de codimensió dos. En aquest punt ambdós multiplicadors són iguals a  $-1$ . Aquesta situació és produïda quan el punt on els multiplicadors passen de complexos conjugats a reals coincideix amb què el punt on el mòdul d'ambdós és igual a  $1$ . És a dir es donen simultàniament la bifurcació de Hopf i els dos doblaments de període.

### V.5.3 Cas 3.

En aquest cas desapareix la bifurcació sella node d'una òrbita estable de període  $2$  i, simultàniament, un doblament de període d'una òrbita estable de període  $1$  passa de supercrític a subcrític.

En els casos anteriors la bifurcació de codimensió dos implicava a una única finestra periòdica, i el punt de la bifurcació es caracteritzava per tenir els dos multiplicadors de Floquet reals i iguals a  $1$  (cas 1), o bé reals i iguals a  $-1$  (cas 2). En aquest cas i els següents, la situació és diferent ja que també estan implicades bifurcacions locals de la finestra de període  $2$ . Concretament en aquest cas, es produeix un canvi en la bifurcació de doblament de període  $1$ . Aquesta bifurcació passa de ser subcrítica a supercrítica. Aquesta bifurcació de doblament de període és la que connecta la finestra de període  $1$  amb la finestra de període  $2$  i aquest canvi en el caràcter del doblament de període implica la desaparició de la bifurcació sella node de l'òrbita de període  $2$ . Aquesta bifurcació es dona a l'esquerra de la llengua d'Arnold de període  $2$ . Podem observar a la figura V.8 que en el punt de bifurcació de codimensió dos la línia que limita la llengua d'Arnold de període  $2$  per l'esquerra passa de ser una bifurcació sella node a ser una bifurcació de doblament de període. En aquest punt també connecta la bifurcació de doblament de període d'òrbita inestable, que és la línia discontinua que es troba dins la llengua d'Arnold de període  $2$ .

A la figura V.19 il·lustrem dos seguiments d'òrbites fets en funció de  $\omega_E/\omega_0$  corresponents a un cas situat abans de la bifurcació de codimensió dos i a un cas posterior a la bifurcació de codimensió dos. El primer cas ha estat calculat per a  $\psi_{EM}=8$  i  $\psi_{EB}=10$  i el segon cas per a  $\psi_{EM}=9$  i  $\psi_{EB}=10$ . Igual que en la figura V.17, el càlcul s'ha realitzat emprant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques, cosa que ens permet calcular els multiplicadors de Floquet i resseguir les òrbites selles i inestables. En aquest cas, a diferència de les figures V.17 i V.18, hem representat dues òrbites diferents una de període  $1$  i una de període  $2$ . Els multiplicadors que caracteritzen l'estabilitat de l'òrbita de període  $1$  són  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i els que caracteritzen l'estabilitat de l'òrbita de període  $2$  són  $\mu_1$  i  $\mu_2$ .

En el primer cas podem observar que l'òrbita de període  $1$ , que inicialment és un node indirecte estable, s'inestabilitza i es converteix en una sella indirecta. Aquesta inestabilització ha estat un doblament de període subcrític, i per tant ens apareix una nova òrbita de període  $2$  tipus sella. Després aquesta òrbita sella de període  $2$  pateix una bifurcació sella node i es converteix en un node estable. Podem comprovar com en el punt en què es produeix la bifurcació de doblament de període apareixen els dos multiplicadors de Floquet  $\mu_1$  i  $\mu_2$  associats a la nova òrbita de període  $2$ . En el punt de la bifurcació els dos nous multiplicadors de Floquet són igual al quadrat dels

Seguiment d'òrbites numèric

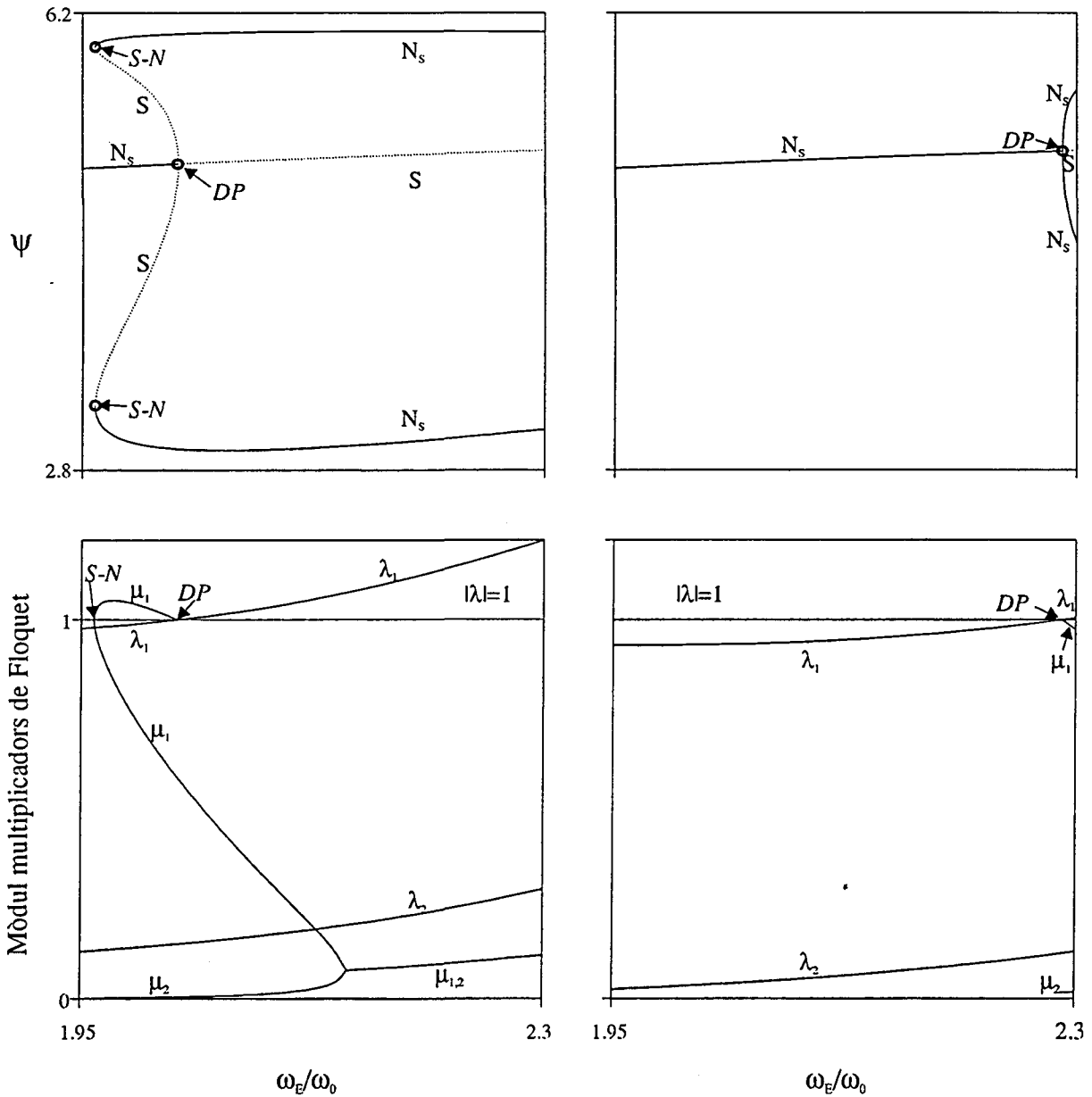


Fig V.19 Seguiment d'òrbites periòdiques per als casos  $\psi_{EM}=8$  (esquerra), 9 (dreta) amb  $\psi_{EB}=10$ . A la part superior hem representat la secció de Poincaré estroboscòpica, i a la part inferior el mòdul dels multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de les solucions periòdiques. Aquests dos casos han estat triats al voltant de la bifurcació de codimensió dos del cas 3. Entre els dos casos, el doblament de període de l'òrbita estable de període 1 passa de subcrític a supercrític, i desapareix la bifurcació sella node de l'òrbita estable de període 2.

multiplicadors de Floquet de l'òrbita de període 1, concretament;  $\mu_1 = \lambda_1^2$  i  $\mu_2 = \lambda_2^2$ . De manera que  $\mu_2$  és real positiu inferior a 1 i  $\mu_1$  és igual a +1. Més endavant  $\mu_1$  comença a créixer, i per tant la nova òrbita és tipus sella. Després d'assolir un valor màxim  $\mu_1$  comença a decreixer fins a arribar a valer 1, punt on es produeix la bifurcació sella node de l'òrbita de període 2, i esdevé un node estable.

En el segon cas l'única diferència rau en què el valor del mòdul de  $\mu_1$  inicialment decreix de manera que la nova òrbita de període dos és estable i ja no es produeix la bifurcació sella node. L'única cosa que ha variat d'un cas a l'altre és que la bifurcació de doblament de període ha canviat de subcrítica en supercrítica. Aquest canvi es manifesta en la concavitat de la corba que descriu la projecció de la secció de Poincaré de l'òrbita de període dos al voltant del punt de la bifurcació per doblament de període. Si és còncava, el doblament de període és subcrític i si és convexa, és supercrític.

#### V.5.4 Cas 4.

En aquesta bifurcació de codimensió dos també estan implicades dues òrbites de període diferent: una de període 1 i una de període 2. En aquest cas una bifurcació de Hopf d'una òrbita de període 2 col·lisiona amb un doblament de període supercrític d'una òrbita inestable de període 1. Aquestes dues bifurcacions desapareixen i apareix un doblament de període supercrític d'una òrbita estable de període 1 i una bifurcació de Hopf d'una òrbita de període 1. En la figura V.8 podem localitzar aquesta bifurcació de codimensió dos a la part superior dreta de la llengua d'Arnold de període 2.

Per il·lustrar aquesta bifurcació de codimensió dos he representat dos seguiments d'òrbites a la figura V.20 entre els quals es dona la bifurcació de codimensió dos. Els dos casos han estat calculats amb la mateixa tècnica que la figura V.17. Els seguiments s'han fet en funció de  $\omega_E/\omega_0$ . En les figures representem el seguiment de les òrbites de període 1 i 2. Concretament hem il·lustrat la projecció de la secció estroboscòpica de  $\psi$  i els multiplicadors de Floquet associats a l'òrbita de període 1 ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) i a l'òrbita de període 2 ( $\mu_1, \mu_2$ ).

El primer cas ha estat calculat per a  $\psi_{EM}=8.0$  i  $\psi_{EB}=10.0$ . En aquest cas es poden observar dues bifurcacions de codimensió ú diferents; un doblament de període supercrític de l'òrbita de període 1 inestable i una bifurcació de Hopf de l'òrbita de període 2. Si analitzem l'evolució dels multiplicadors de Floquet de l'òrbita de període 1 a partir de l'esquerra, comprovem que inicialment tenim una òrbita sella. El mòdul de  $\lambda_1$  és superior a 1 i el de  $\lambda_2$  és inferior a 1. Ambdós multiplicadors són reals i negatius de manera que es tracta d'una òrbita sella indirecte. En anar variant  $\omega_E/\omega_0$ , el valor mòdul de  $\lambda_1$  decreix mentre que el de  $\lambda_2$  creix. Arriba un punt on  $\lambda_2$  és fa igual a -1, en aquest punt es produeix el doblament de període. L'òrbita sella s'inestabilitza i ens apareix un node inestable de període 1 indirecte. Passat el punt de la bifurcació, el mòdul de  $\lambda_1$  segueix variant de forma decreixent mentre que el de  $\lambda_2$  ho fa de forma creixent fins arribar a un punt en què ambdós coincideixen. En aquest punt els multiplicadors passen de ser reals a complexos conjugats i el valor del mòdul dels multiplicadors de Floquet creix amb  $\omega_E/\omega_0$ . Així doncs, el punt passa

Seguiment d'òrbites numèric

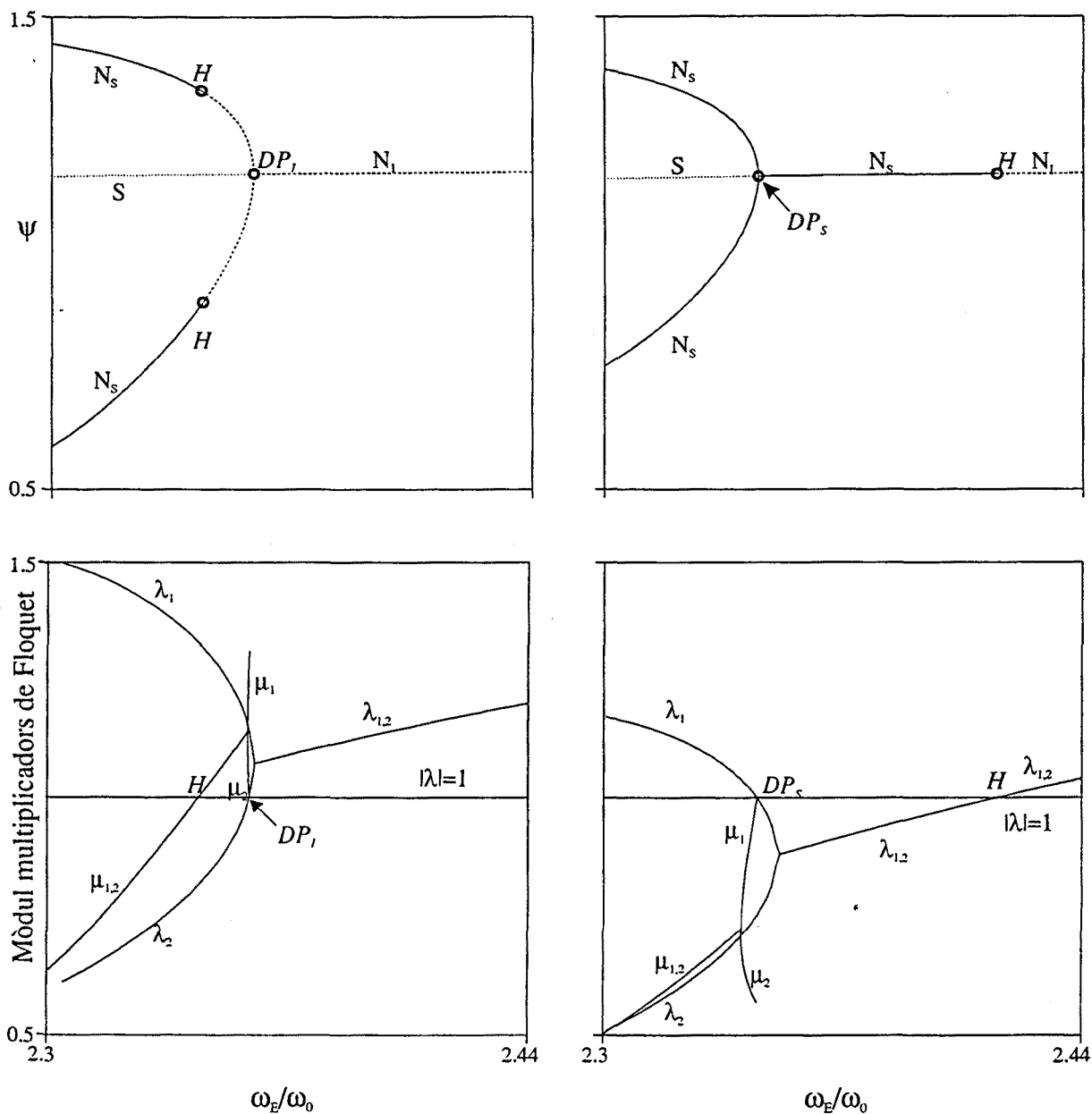


Fig V.20 Seguiment d'òrbites periòdiques per als casos  $\psi_{EM}=8$  (esquerra), 9 (dreta) amb  $\psi_{EB}=10$ . A la part superior hem representat la secció de Poincaré estroboscòpica, i a la part inferior el mòdul dels multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de les solucions periòdiques. Aquests dos casos han estat triats al voltant de la bifurcació de codimensió dos del cas 4. A l'esquerra observem l'existència d'un doblament de període supercrític d'òrbita inestable de període 1 i un Hopf d'òrbita de període 2. A la dreta, ens apareixen un doblament de període supercrític d'òrbita estable de període 1 i un Hopf d'òrbita de període 1.

a ser un focus inestable. Ara ressegurem l'evolució de l'òrbita de període 2 des de l'esquerra. Inicialment els dos multiplicadors de Floquet  $\mu_1$  i  $\mu_2$  són complexos conjugats de mòdul inferior a 1. L'òrbita de període 2 inicialment és un focus estable. Si anem resseguint l'òrbita periòdica el mòdul dels dos multiplicadors de Floquet augmenta fins a arribar a valer 1. En aquest punt es produeix la bifurcació de Hopf de l'òrbita de període 2. El mòdul dels dos multiplicadors de Floquet segueix creixent fins arribar en un punt on es fan reals. Aquesta situació és imposada per l'existència del doblament de període de l'òrbita de període 1 a partir del qual neix l'òrbita de període 2. En el punt en què es produeix el doblament de període ambdós multiplicadors de Floquet han de ser reals i a més iguals dos a dos amb els multiplicadors de Floquet de l'òrbita de període 1 al quadrat. Com que al punt de bifurcació  $\lambda_2$  és igual a -1 i  $\lambda_1$  és més petit que -1, llavors  $\mu_2$  decreix fins a fer-se igual a 1 i  $\mu_1$  creix fins arribar a ser igual a  $\lambda_1^2$ . En aquest punt l'òrbita de període 2 desapareix.

El segon cas ha estat calculat per a  $\psi_{EM}=9.0$  i  $\psi_{EB}=10.0$ . En aquest cas l'evolució dels multiplicadors de Floquet és la mateixa però amb la diferència que el punt on els multiplicadors de Floquet es fan complexos conjugats correspon a un mòdul dels mateixos inferior a 1. Això comporta importants diferències. La primera conseqüència és que en aquest cas el multiplicador de Floquet responsable del doblament de període és  $\lambda_1$ , de manera l'òrbita passa de ser una òrbita sella a una òrbita node estable indirecte. El doblament de període ha passat de ser un doblament de període d'una òrbita inestable a ser un doblament de període d'una òrbita estable. La segona diferència és l'aparició de una bifurcació de Hopf per a l'òrbita de període 1. Com que ara en el punt on coincideixen els dos multiplicadors  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  inicialment és un focus estable, en anar creixent el mòdul dels multiplicadors de Floquet complexos conjugats quan augmentem  $\omega_E/\omega_0$ , arriba un punt en què l'òrbita es converteix en un focus inestable a través d'una bifurcació de Hopf de l'òrbita de període 1. Com que en aquest cas en el punt on es produeix el doblament de període  $\lambda_1$  és igual a -1 i el mòdul de  $\lambda_2$  és inferior a 1, llavors en el punt on els multiplicadors de Floquet de l'òrbita de període dos es fan reals el seu mòdul és inferior a 1 i per tant no es produeix la bifurcació de Hopf de l'òrbita de període 2. Al començament és un focus estable, després passa a ser un node directe estable i finalment desapareix en el doblament de període.

El punt de bifurcació de codimensió dos és el punt on  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  és fan complexos conjugats i ambdós són iguals a -1. Aquest punt a més coincideix amb el punt on  $\mu_1$  i  $\mu_2$  és fan reals i valen 1.

La situació presentada aquí és molt semblant al cas 2. Concretament l'evolució dels multiplicadors de Floquet de l'òrbita de període 1 és equivalent a la del cas 2. En el cas dos també es donava que ambdós multiplicadors eren reals i iguals a -1 en el punt de la bifurcació de codimensió dos. En ambdós casos també existeix la connexió amb una bifurcació de Hopf d'òrbites de període 1. Però si examinem la figura V.8 podem observar que a diferència del cas 2 en aquest cas, a més, es dona la connexió amb una bifurcació tipus torus d'òrbites de període 2. Una altra diferència està en el caràcter del doblament de període, diferència que no es pot apreciar en la figura V.8. En aquest cas ambdós doblaments de període són

supercrítics, i en canvi, a partir de la figura V.14 podem adonar-nos immediatament que en el cas 2 el doblament de període és subcrític.

### V.5.5 Cas 5.

En aquesta bifurcació codimensió dos també estan implicades dues òrbites de període diferent: una de període 1 i una de període 2. En aquest cas una bifurcació sella node d'una òrbita de període dos es transforma en una bifurcació de Hopf d'una òrbita de període dos, simultàniament el doblament de període de l'òrbita inestable de període 1 inestable passa de subcrítica a supercrítica. En la figura V.8 podem localitzar aquesta bifurcació de codimensió a la part inferior dreta de la llengua d'Arnold de període 2.

En aquest cas la bifurcació de codimensió dos es dona arran del canvi del doblament de període, de subcrític i a supercrític. Aquest canvi implica la transformació de la bifurcació sella node d'òrbites estables de període 2 a una bifurcació de Hopf de l'òrbita de període 2.

Per il·lustrar aquesta bifurcació de codimensió dos, a la figura V.21 hem representat dos seguiments d'òrbites entre els quals es dona la bifurcació de codimensió dos. Els dos casos han estat calculats amb la mateixa tècnica que la figura V.17. Els seguiments s'ha fet en funció de  $\omega_E/\omega_0$ . A la figura representem el seguiment de les òrbites de període 1 i 2. Concretament a la part superior de la figura trobem la projecció de la secció estroboscòpica de  $\psi$  i a la part inferior tenim els multiplicadors de Floquet associats a l'òrbita de període 1 ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) i a l'òrbita de període 2 ( $\mu_1, \mu_2$ ). Els casos han estat calculats per a  $\psi_{EM}=3.3, 3.5$  amb  $\psi_{EB}=10$ .

Si analitzem l'evolució dels multiplicadors de Floquet de l'òrbita de període 1, no s'observa cap diferència qualitativa entre els casos  $\psi_{EM}=3.3, 3.5$ . Un multiplicador de Floquet ( $\lambda_2$ ) sempre és negatiu amb mòdul superior a 1, alhora l'evolució del mòdul de  $\lambda_1$  és creixent en tot l'interval, i passa de mòdul inferior a 1 a superior a 1. En aquest punt és on produeix el doblament de període. Abans d'arribar a la bifurcació, el valor de  $\lambda_1$  és superior a -1 amb mòdul inferior a 1, és a dir, l'òrbita inicialment és una sella indirecte i en el punt de bifurcació es transforma en un node indirecte inestable. L'única diferència entre els dos casos està en el caràcter del doblament de període que en el primer cas és subcrític i en el segon cas supercrític.

Si analitzem l'estabilitat de l'òrbita de període 2, la situació és molt diferent en ambdós casos. En el primer cas, l'òrbita de període 2 inicialment té associats un parell de multiplicadors de Floquet complexos conjugats amb mòdul inferior a 1. Llavors en principi tenim un focus estable de període 2, arribat un punt ambdós multiplicadors de Floquet es fan reals i ens apareix un node estable. A partir d'aquest punt els mòduls dels dos multiplicadors de Floquet  $\mu_1$  i  $\mu_2$  són diferents. Ambdós mòduls presenten una variació creixent, però el ritme de creixement de  $\mu_1$  és molt més gran que el de  $\mu_2$  de manera que aquest és el primer en desestabilitzar-se. Això succeeix en el punt on es produeix la bifurcació sella node de l'òrbita estable de període dos que es transforma en una òrbita sella de període dos. En el segon cas el punt inicialment també és un focus estable, però ara abans que el seus valors propis no es converteixin en reals pateix una bifurcació de Hopf, de manera que passa de



Seguiment d'òrbites periòdiques

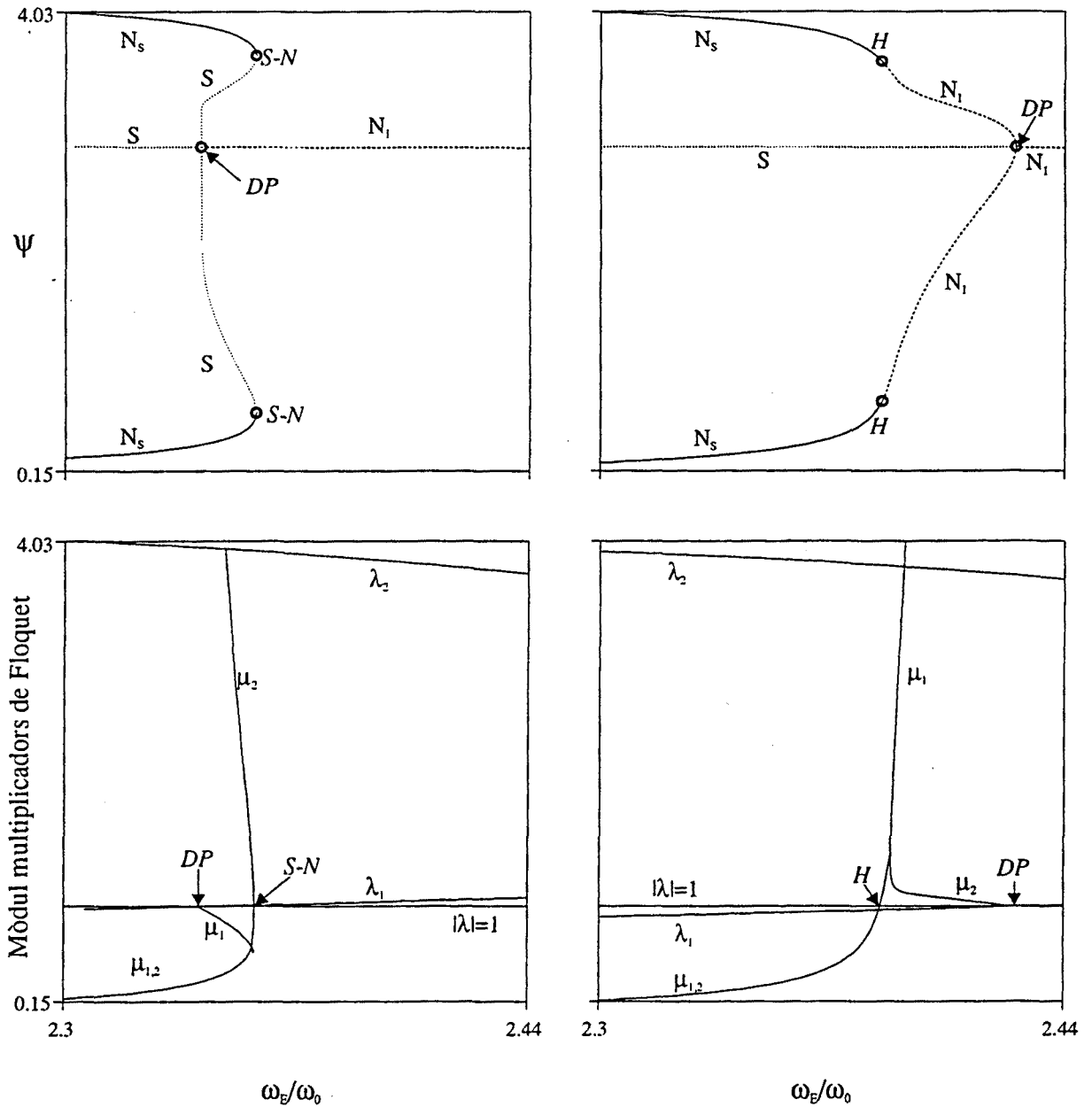


Fig V.21 Seguiment d'òrbites periòdiques per als casos  $\psi_{EM}=3.3$  (esquerra), 3.5 (dreta) amb  $\psi_{EB}=10$ . A la part superior hem representat la secció de Poincaré estroboscòpica, i a la part inferior el mòdul dels multiplicadors de Floquet que determinen l'estabilitat de les solucions periòdiques. Aquests dos casos han estat triats al voltant de la bifurcació de codimensió dos del cas 5. A l'esquerra observem l'existència d'un doblament de període subcrític d'òrbita inestable de període 1 i una bifurcació sella node d'òrbita de període 2. A la dreta ens apareixen un doblament de període supercrític d'òrbita inestable de període 1 i un Hopf d'òrbita de període 2.

focus estable a focus inestable i després a node directe inestable. Aquest node directe inestable desapareix en el doblament de període.

Aquest canvi en les bifurcacions de l'òrbita de període 2 és forçat pel canvi del caràcter del doblament de la òrbita inestable de període 1. En el primer cas el doblament de període de l'òrbita inestable és subcrític i això implica que l'òrbita de període 2 que apareix arran del doblament de període sigui de tipus sella. Per tant, per poder passar a ser una òrbita de període 2 estable ha d'haver patit una bifurcació sella node. En el segon cas el doblament de període de l'òrbita inestable de període 1 és supercrític de manera que l'òrbita de període 2 que sorgeix també ha de ser inestable. Perquè aquesta òrbita de període dos passi a ser estable, cal que hagi patit una bifurcació de Hopf.

## V.6 Organització de les zones caòtiques.

En el capítol III hem vist que dins les zones caòtiques existeixen finestres periòdiques i, la posició i amplada d'aquestes finestres periòdiques seguia una ordenació. L'aparició d'aquestes finestres està relacionada amb l'arbre de Farey. En aquest apartat analitzarem l'estructura d'òrbites periòdiques dins les zones caòtiques i la transició entre aquestes i les solucions caòtiques.

Podem distingir dues situacions diferents en funció de si la zona caòtica està aprop o lluny de la corba crítica. Un exemple del primer cas el podem veure a la figura V.22. Aquest cas correspon a la part inferior de la zona caòtica situada a l'esquerra de la llengua d'Arnold de període 1. Aquest diagrama de bifurcació s'ha realitzat representant la projecció de la secció de Poincaré després de deixar passar un temps llarg de transitori. El càlcul s'ha realitzat prenent els següents valors:  $\psi_{EM}=1.8$  i  $\psi_{EB}=10.0$  i variant de forma contínua  $\omega_E/\omega_0$ .

Podem observar l'existència d'una seqüència de finestres periòdiques. Aquestes finestres periòdiques pertanyen a les llengües d'Arnold corresponents als números rotacionals  $2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, \dots$ . L'aparició d'aquestes finestres periòdiques és resultat de la proximitat amb la línia crítica. Tal i com podem observar a la figura V.8, a mesura que augmentem l'amplitud de modulació, les llengües d'Arnold van desapareixent. La majoria desapareixen per amplituds de modulació lleugerament superiors a la corba crítica. Quant més a dalt es troben en l'arbre de Farey, més tarden a desaparèixer. Per exemple, a la figura V.8 podem veure com la llengua d'Arnold corresponent a  $1/2$  desapareix per a una amplitud de modulació de l'ordre de 9.5 sobre 10. Ara bé, a mesura que baixem de nivell en l'arbre de Farey, les corresponents llengües d'Arnold associades, desapareixen per a amplituds de modulació més petites. La zona al voltant de la línia crítica és on s'acumulen aquestes extincions de les llengües d'Arnold. En aquesta zona, a més a més, les diferents finestres periòdiques i finestres quasiperiòdiques es solapen. Com a conseqüència d'aquest solapament, les diferents solucions entren en competició. Aquesta competició és la responsable de l'aparició del caos. Aquest fenomen és reflecteix en l'aparició d'una estructura complexa formada per un gran nombre d'òrbites periòdiques que pertanyen a aquestes llengües d'Arnold. Aquest fenomen no és tan acusat quan estem situats lluny de la corba crítica, ja que en aquest cas normalment la competició es dona entre dues o tres finestres periòdiques.

## Diagrams de bifurcació numèrics

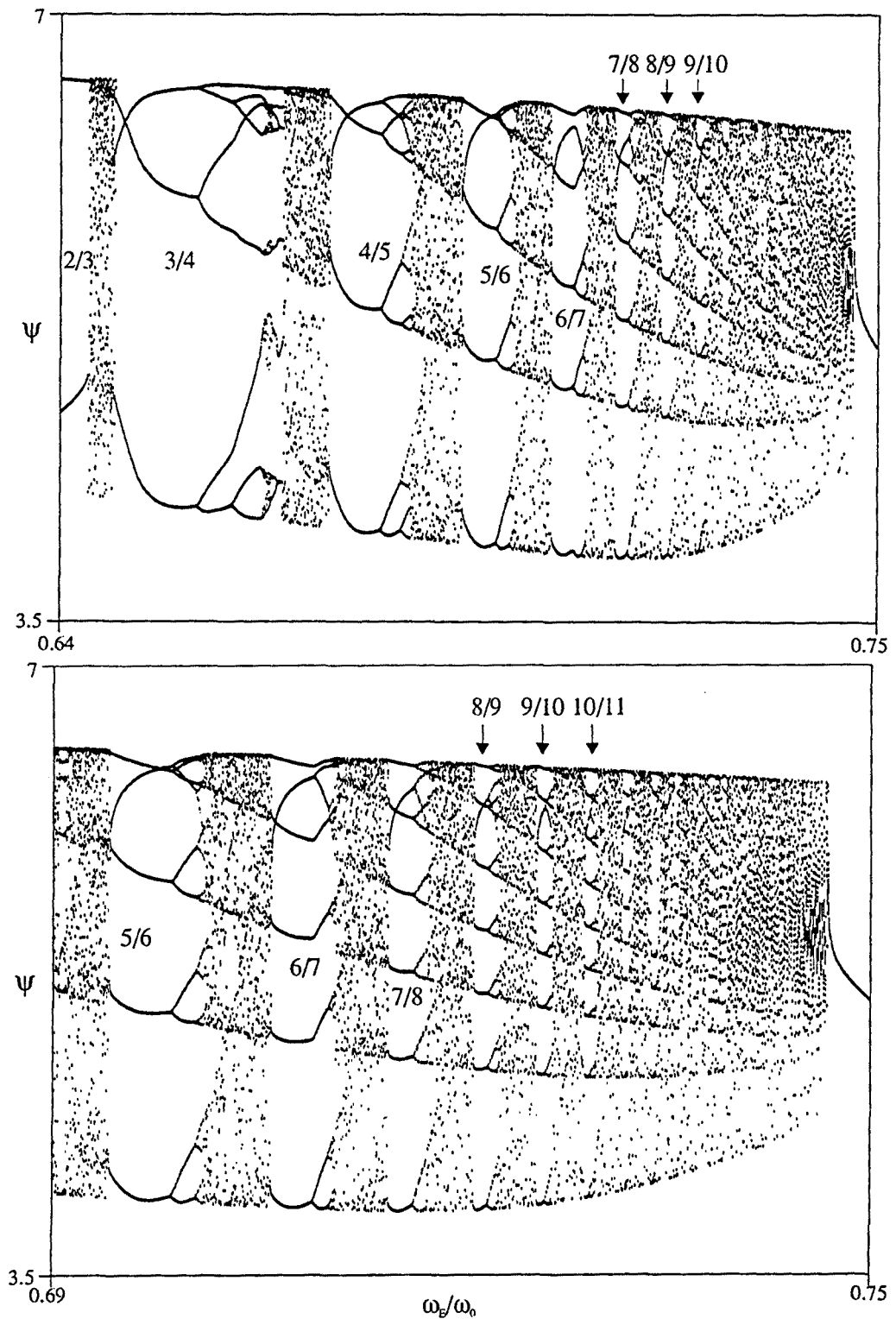


Fig V.22 Diagrames de bifurcació numèrics calculats a partir de variar  $\omega_E/\omega_0$ . On  $\psi_{EB}=10$  i  $\psi_{EM}=1.8$ . El diagrama inferior correspon a una ampliació de la part dreta del diagrama superior. En aquests diagrams podem observar la complexa estructura d'òrbites periòdiques que es dona en les zones caòtiques properes a la corba crítica.

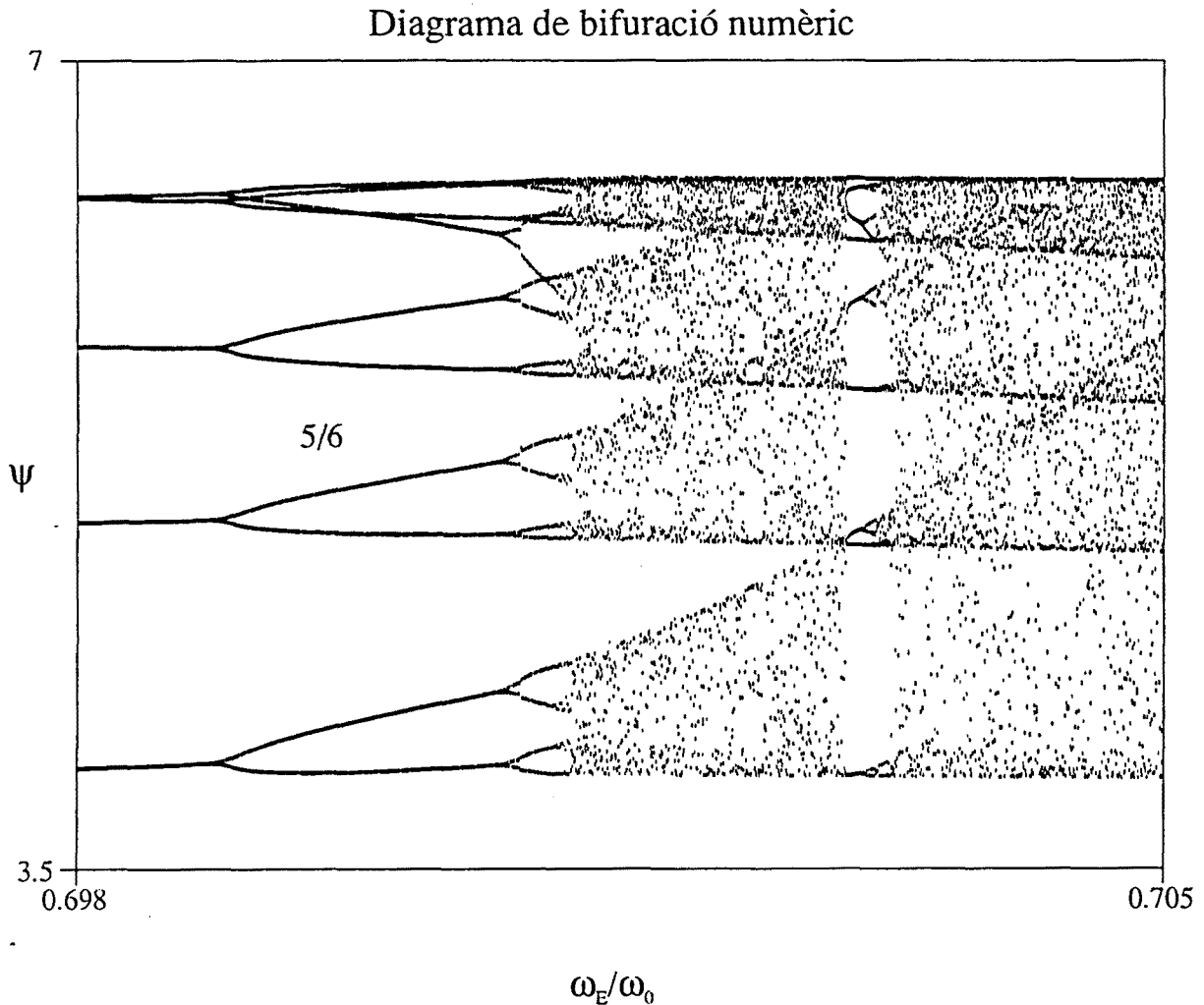


Fig V.23 Ampliació del diagrama de bifurcació numèric V.22.

De tota manera podem observar que en la seqüència anterior falten finestres periòdiques. Per exemple, segons l'arbre de Farey entre  $2/3$  i  $1/1$  la finestra corresponent a  $5/7$  hauria de ser més fàcilment observable que la finestra  $6/7$ . De fet aquesta finestra no ha desaparegut sinó que és molt estreta, és pràcticament imperceptible. Aquesta és una característica de la zona supercrítica del mapa circular. La deducció de l'arbre de Farey es fa suposant que el sistema conserva el bon ordre. En la zona supercrítica aquest bon ordre no es compleix, així ens apareixen anomalies en l'aparició de les finestres periòdiques respecte a l'arbre de Farey. Altres fenòmens que posen de relleu aquestes anomalies són la desaparició d'algunes llengües d'Arnold i la coexistència de finestres periòdiques.

Aquesta seqüència de finestres periòdiques aparegudes a partir de les llengües d'Arnold immerses dins la zona càdica és la seqüència principal de finestres periòdiques.

## Diagrama de bifurcació numèric

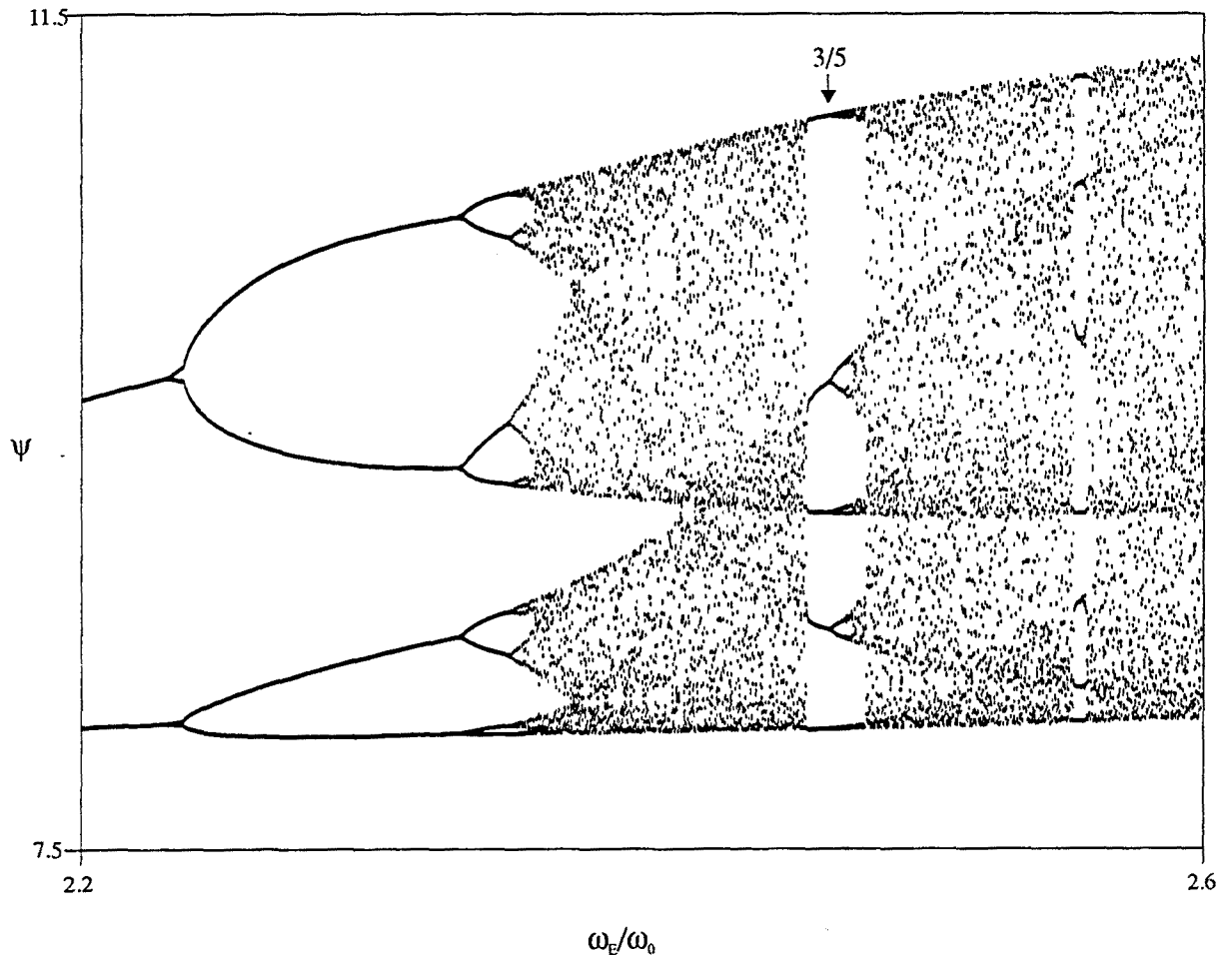


Fig V.24 Diagrames de bifurcació numèric calculat a partir de variar  $\omega_E/\omega_0$ . On  $\psi_{EB}=14.8$  i  $\psi_{EM}=8$ .

Dins de cada finestra periòdica de la seqüència principal existeix una segona seqüència de finestres periòdiques que apareixen a partir d'una cascada subharmònica produïda en inestabilitzar-se la finestra periòdica de la seqüència principal. Cadascuna d'aquestes finestres periòdiques de la seqüència secundària també té la seva pròpia cascada de doblaments de període directes i inversos. A la figura V.23 il·lustrem una d'aquestes seqüències secundàries de finestres periòdiques que apareix per a la finestra periòdica corresponent al número rotacional  $5/6$  de la seqüència principal. Concretament observem que dins la zona caòtica existeix una finestra periòdica que té la seva pròpia cascada de doblaments de període. Existeixen, a més, moltes més finestres periòdiques dins aquesta zona, però la seva amplada és massa petita perquè siguin observables.

No totes les finestres periòdiques tenen les seqüències de doblament de període complertes. Per exemple, en la finestra  $4/5$  es dona un número finit de doblaments de període seguits pels corresponents desdoblaments. Aquestes

seqüències de doblaments de període incomplertes només són possibles quan el mapa de primer retorn no es pot reduir a una dimensió [77]. Això corrobora la bidimensionalitat del mapa que descriu la dinàmica del nostre sistema. Aquestes finestres amb cascades de doblaments de període incomplertes es troben a l'esquerra de la seqüència principal de finestres periòdiques. Si augmenten l'amplitud de la modulació, el nombre de finestres amb cascades incomplertes disminueix, en canvi, si decrem l'amplitud de la modulació externa, aquest nombre de finestres periòdiques amb cascades de doblaments incomplertes augmenta fins el punt en què desapareix la seqüència de principal de finestres periòdiques, és a dir, quan la zona caòtica desapareix. En augmentar l'amplitud de la modulació, a més a més, també desapareixen finestres periòdiques degut a l'extinció de les llengües d'Arnold de manera que això també limita la zona caòtica superiorment.

Tal i com hem vist, les finestres periòdiques és desestabilitzen per la dreta a través de seqüències de doblaments de període. En canvi per l'esquerra desapareixen a través de bifurcacions sella node que impliquen intermitències de tipus I. Existeix també possibilitat de bifurcacions globals que permetin passar d'atractors caòtics a òrbites periòdiques, aquest cas, però, serà estudiat al proper capítol.

A la figura V.24 hem representat el diagrama de bifurcació numèric calculat per a  $\psi_{EB}=14.8$  i  $\psi_{EM}=8$ . En aquest cas ens trobem molt lluny de la corba crítica. Aquesta zona caòtica es dona entre les llengües d'Arnold corresponents als números rotacionals  $1/2$  i  $1/3$ . Hi podem observar com en aquest cas no es dona la seqüència d'òrbites periòdiques de la figura V.22. Tot i això, dins la zona caòtica apareixen seqüències de finestres periòdiques. Aquestes finestres periòdiques, no estan relacionades amb les llengües d'Arnold, sinó que estan relacionades amb la cascada subharmònica. Concretament aquestes finestres periòdiques segueixen la seqüència universal  $U$  [31] pel que fa a la periodicitat en l'evolució de  $\psi$ . Tal i com hem vist al capítol III, aquesta seqüència és la mateixa que la del mapa logístic. Per exemple si observem la finestra periòdica que hi ha enmig, aquesta correspon a una oscil·lació de període 5 amb número rotacional  $3/5$ . Tal i com hem comentat al principi del capítol una solució de número rotacional  $3/5$  en el cas que  $T_o > T_E$  correspon a una oscil·lació de període 3 per a l'evolució de  $\psi$ . Aquesta finestra coincideix amb la finestra de període 3 que es troba al mig del mapa logístic.



## VI.- BIFURCACIONS GLOBALES.

Les bifurcacions homoclíniques són un tipus de bifurcació global que ha esdevingut un dels principals objectes d'estudi en la dinàmica de sistemes. La raó és que estan íntimament relacionades amb l'aparició de dinàmiques caòtiques. No obstant això, són pocs els sistemes directament útils per a estudiar aquestes bifurcacions, ja que acostumen a anar acompanyades d'altres fenòmens que dificulten la seva observació.

Una de les característiques més interessants dels dispositius BOITAL autònoms és la facilitat amb què poden donar bifurcacions homoclíniques. En el cas de sistemes bicapes s'ha observat tant experimentalment com numèricament diverses bifurcacions homoclíniques que, al produir-se en un espai pràcticament bidimensional, no involucren òrbites d'estructura complexa [14, 78]. En els sistemes tricapa, en canvi, la homoclinicitat pot aparèixer acompanyada d'una rica dinàmica associada a la configuració tridimensional de la sella. En aquest sentit s'han obtingut evidències de tant numèriques com experimentals de caos del tipus Shil'nikov [17, 37] i del tipus Rössler [79].

En aquest capítol demostrarem que aquesta facilitat del dispositiu bicapa autònom per donar bifurcacions globals també es produeix en el dispositiu bicapa modulad. De fet, comprovarem que hi ha dues situacions diferents en què el sistema forçat pot experimentar una bifurcació homoclínica. Una que correspon a la situació en què el dispositiu autònom es troba ja de per sí aprop d'una bifurcació homoclínica i que en el cas forçat, gràcies al nou grau de llibertat introduït per la modulació, pot donar lloc a l'aparició d'evolucions caòtiques. I un segon tipus de situació, amb el sistema autònom lluny de l'homoclínica, però amb el sistema forçat a la vora d'una bifurcació local de codimensió dos.

Abans de començar la discussió d'aquestes dues situacions, a l'apartat VI.1 introduïrem diversos conceptes matemàtics necessaris per a la comprensió de la dinàmica relacionada amb aquestes bifurcacions [24,28,29]. Aquests conceptes es refereixen a sistemes discretitzats en el temps, concretament en el nostre cas s'apliquen a l'estudi del mapa estroboscòpic. També dedicarem un apartat, el VI.2, a descriure breument el concepte de bifurcació homoclínica i, a títol d'exemple, descriurem una bifurcació homoclínica senzilla que ens apareix al sistema autònom.

A l'apartat VI.3 presentarem les bifurcacions homoclíniques associades a les bifurcacions locals de codimensió dos i a l'apartat VI.4 les bifurcacions globals del sistema modulad relacionades amb les bifurcacions homoclíniques del sistema autònom.

A l'apartat VI.5 descriurem amb més detall una bifurcació concreta de cada un dels dos tipus esmentats. Comprovarem que qualitativament totes dues bifurcacions globals són la mateixa, però també il·lustrarem que el primer cas està molt més limitat que el segon. I el que és més important, assenyalarem que les bifurcacions homoclíniques relacionades amb les bifurcacions de codimensió dos es donen en regions de l'espai dels paràmetres molt més petites que aquelles regions on es produeixen les bifurcacions globals associades a les bifurcacions homoclíniques del sistema autònom. A més a més, també veurem que l'estructura de les bifurcacions homoclíniques associades a bifurcacions de codimensió dos és significativament



menys flexible i, per tant, més difícil d'observar experimentalment que les que corresponen a l'altra situació.

Finalment a l'apartat VI.6 presentarem evidències experimentals d'aquestes dues situacions, estudiarem la problemàtica de la observació experimental de les bifurcacions globals en el dispositiu bicapa modulada, i presentarem diverses tècniques que ens permetran caracteritzar el fenomen homoclínic.

## VI.1 Òrbites homoclíniques en el mapa estroboscòpic.

Considerem un difeomorfisme  $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Suposem que  $L$  és un conjunt límit no caòtic de  $P$ . El *manifold estable* de  $L$ , que notem per  $W^s(L)$ , està definit pel conjunt de punts tals que  $P^k(x^*)$  s'apropa a  $L$  quan  $k \rightarrow +\infty$ . El *manifold inestable*  $W^u(L)$  està definit pel conjunt de punts que s'apropa a  $L$  quan  $k \rightarrow -\infty$ .

Els *manifolds* estables i inestables són invariants en  $P$ , fins i tot, en la seva intersecció.

Suposem un punt fix hiperbòlic  $x^*$  de  $P$ . La seva estabilitat és determinada pels multiplicadors de Floquet que són els valors propis de la matriu variacional  $DP(x^*)$ . Suposem que existeixen  $n_s$  multiplicadors de Floquet estables (mòdul inferior a 1) i  $n_i$  multiplicadors de Floquet inestables (mòdul superior a 1),  $n_i + n_s = n$ . Llavors  $W^s(L)$  és de dimensió  $n_s$  i és tangent en punt  $x^*$  a l'espai definit per les parts reals i imaginàries dels vectors propis associats als multiplicadors de Floquet estables, mentre que  $W^u(L)$  és de dimensió  $n_i$  i és tangent en el punt  $x^*$  a l'espai definit per les parts reals i imaginàries dels vectors propis associats als multiplicadors de Floquet inestables. En el nostre cas, tal i com hem vist, el pla de Poincaré és de dimensió 2. Suposem per exemple un punt sella, llavors els *manifolds* estable i inestable són dues corbes de dimensió 1. Per exemple, la figura VI.4 mostra els dos *manifolds* de dimensió 1 d'una òrbita sella ( $S$ ) de període 2. Com que l'òrbita és de període dos està representada per dos punts, a cadascun dels quals dues corbes que corresponen als dos *manifolds* es creuen. Cal anar amb compte a l'hora d'interpretar els *manifolds*, ja que a la figura VI.4 semblen que siguin trajectòries però no ho són pas. En l'espai del flux continu aquests *manifolds* són superfícies. La intersecció d'aquestes superfícies amb el pla de Poincaré dona les corbes il·lustrades a la figura VI.4. Això vol dir que els *manifolds* no són ni una trajectòria, ni una òrbita, sinó la unió d'un nombre infinit d'òrbites diferents.

L'estudi dels *manifolds* és de gran ajut per entendre la dinàmica no lineal i el caos. En el cas de coexistència d'atractors, els *manifolds* d'un punt fix sella actuen com a separatrius entre les conques d'atracció dels conjunts límits estables. L'estructura dels atractors caòtics es determina per les interseccions entre els *manifolds* estables i inestables d'un punt fix sella.

Suposem ara que els *manifolds* de  $x^*$ ,  $W^s(L)$  i  $W^u(L)$  interseccionen en un punt  $x_0 \neq x^*$ . Llavors tots els punts del conjunt  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  definit per les successives iteracions en davant i enrera a partir de  $x_0$ , pertanyen alhora a tots dos *manifolds* i els anomenem *punts homoclínics*. El conjunt  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  s'acosta biassimptòticament al punt  $x^*$ . Aquesta òrbita s'anomena òrbita homoclínic. Aquest fenomen biassimptòtic es tradueix en l'existència de infinits punts homoclínics.

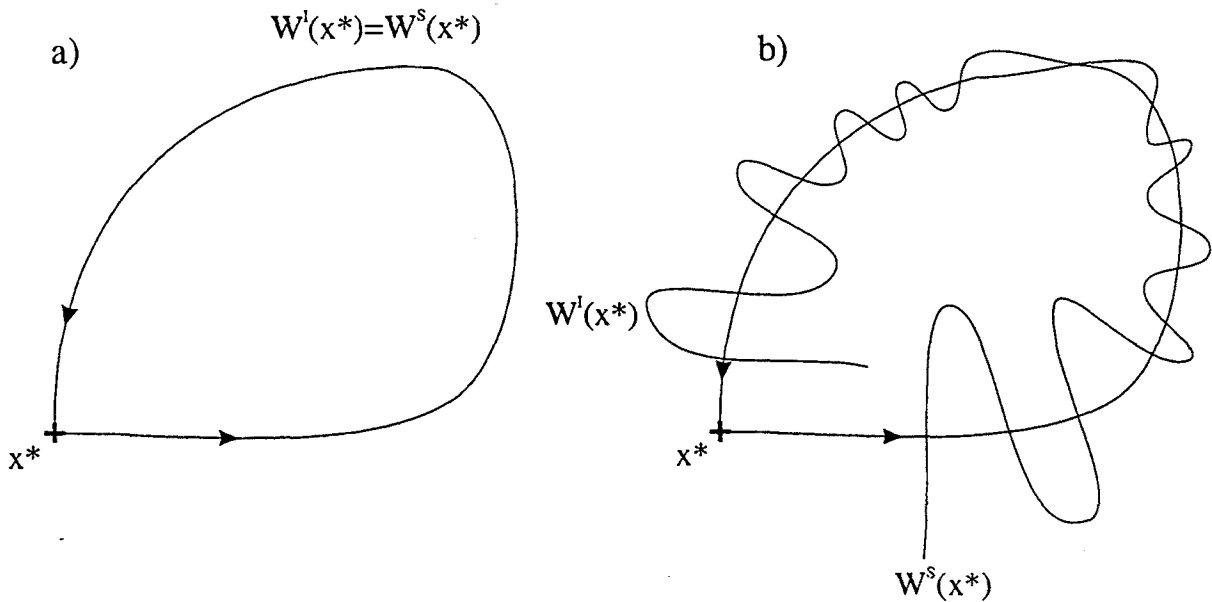


Fig VI.1 a) Connexió homoclínica. c) intersecció amb punts homoclínics transversals.

A la figura VI.1 il·lustrem dos tipus diferents d'interseccions entre els *manifolds* estables i inestables d'un punt fix sella per a un mapa bidimensional. En el cas *a*) il·lustrem l'esquema corresponent a una òrbita homoclínica on els *manifolds* estable i inestable són idèntics. Aquesta estructura s'anomena *connexió homoclínica*. Els *manifolds* interseccen tangencialment i qualsevol pertorbació destrueix la connexió, és a dir, l'òrbita homoclínica no és estructuralment estable.

Interseccions més complexes poden aparèixer quan els *manifolds* interseccen transversalment, cas mostrat a la figura VI.1.b. Quan els *manifolds* interseccen transversalment, els punts homoclínics s'anomenen *punts homoclínics transversals*, i les òrbites associades s'anomenen *òrbites transversals*.

El fet que un punt homoclínic transversal impliqui un número infinit de punts homoclínics comporta l'estirament i plegament dels *manifolds*. El plegament i estirament són els mecanismes claus dels atractors caòtics. L'existència de punts homoclínics transversals implica l'existència d'un mapa tipus ferradura incrustat a  $P$ . (vegeu "Ferradura de Smale" a l'apartat 1.4.4.).

Aquest resultat ha estat demostrat en el teorema homoclínic de Smale-Birkhoff: Considerem un difeomorfisme  $P: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  amb un punt fix hiperbòlic  $x^*$ . Si  $W^s(x^*)$  i  $W^u(x^*)$  interseccen transversalment a un punt diferent de  $x^*$ , llavors  $P$  té incrustat un mapa tipus ferradura.

## VI.2 Bifurcacions homoclíniques. Bifurcació homoclínica en el dispositiu bicapa autònom.

Les bifurcacions globals són canvis dinàmics qualitius del sistema associats amb un canvi en la configuració topològica dels *manifolds* invariants d'un punt fix tipus sella. Aquest punt fix sella tant pot ser un punt fix en un espai continu (punt estacionari) o en un de discret (òrbita periòdica). Les bifurcacions globals es donen quan en variar un dels paràmetres aquest arriba a un valor llindar.

Existeixen diversos tipus de bifurcacions globals depenent de la configuració topològica dels *manifolds* involucrats. En general, qualsevol canvi en la configuració topològica dels *manifolds* implica un canvi qualitatiu en la dinàmica. Per exemple, hem vist al capítol III, que les crisis internes són bifurcacions globals que comporten un canvi qualitatiu de l'atractor. Hi ha, però, bifurcacions globals que impliquen la destrucció o creació d'attractors a través de connexions homoclíniques o heteroclíniques. Les bifurcacions globals del dispositiu bicapa modulad presentades en aquest capítol corresponen a connexions homoclíniques.

Encara que l'objectiu d'aquest capítol és il·lustrar les bifurcacions homoclíniques que es donen al dispositiu bicapa modulad, en aquest apartat descriurem breument el cas més senzill de bifurcació homoclínica del sistema bicapa autònom. Les raons són dues, per una banda, l'anàlisi d'aquest cas és més senzilla que la del sistema bicapa modulad - cosa que ens permetrà introduir-nos més fàcilment en l'enrevessada dinàmica de les bifurcacions homoclíniques. L'altra raó és que més endavant estudiarem òrbites homoclíniques del sistema modulad que sorgeixen en modular una òrbita propera a una bifurcació homoclínica del sistema autònom, cosa que ens permetrà assentar els precedents d'aquestes bifurcacions homoclíniques del sistema modulad.

Al capítol II ja hem parlat de la bifurcació global de tipus homoclínic del dispositiu bicapa autònom. Concretament a la figura II.8, hem il·lustrat el diagrama de branques corresponent a la solució estacionària i al seu damunt hem representat les solucions periòdiques. Al capítol II també trobarem una breu discussió de les diferents bifurcacions homoclíniques que patien les òrbites periòdiques en fer tangència amb un punt fix sella. Aquestes bifurcacions implicaven la destrucció de les òrbites periòdiques i en alguns casos l'aparició de cicles dobles. El que farem ara serà descriure amb detall la bifurcació homoclínica del cicle límit  $LC_1$ .

Aquesta òrbita periòdica apareixia arran d'una bifurcació de Hopf del node  $N_1$  de la primera branca. Aquest cicle límit en un primer moment presenta unes oscil·lacions pràcticament sinusoidals. Però en anar augmentant la fase d'entrada  $\psi_E$ , l'òrbita s'apropa al punt sella  $S_1$ , les oscil·lacions es deformen i el període augmenta. Quan arribem al punt en què l'òrbita periòdica fa tangència amb el punt sella es produeix la bifurcació homoclínica i l'òrbita desapareix.

Per tal d'entendre el que ha passat no farem un estudi local sinó que ens centrarem en analitzar els *manifolds* del punt sella atès que les bifurcacions homoclíniques estan associades a canvis topològics d'aquests *manifolds*. A la figura VI.2 hem representat els *manifolds* estable i inestables del punt sella  $S_1$  per dos valors

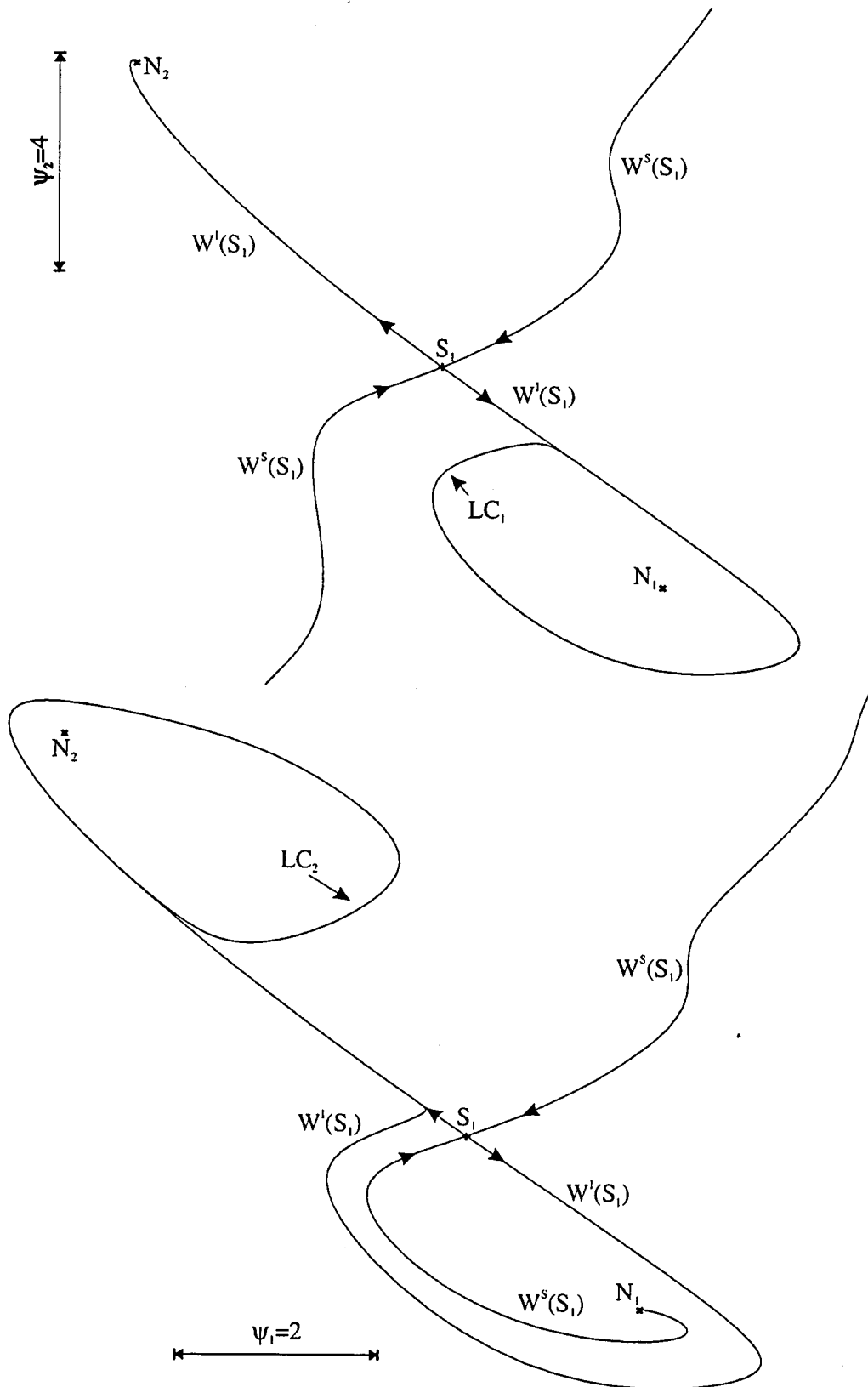


Fig VI.2 manifolds estable ( $W^s$ ) i inestable ( $W^i$ ) del punt sella  $S_1$  per a  $\psi_E=13$  (cas superior) i 15 (cas inferior) pel dispositiu bicapa autònom.

de  $\psi_E$  diferents. Concretament la gràfica superior ha estat calculada per a  $\psi_E=13$  i correspon a un cas anterior a la bifurcació homoclínica mentre que la gràfica d'abaix ha estat calculada per a  $\psi_E=15$  i correspon a un cas posterior de la bifurcació homoclínica.

En primer cas comprovem l'existència de tres punts fixos:  $N_1$  un node inestable,  $S_1$  un punt sella i  $N_2$  un node estable, també existeix el cicle límit  $LC_1$ . Podem adonar-nos que la branca inferior del *manifold* inestable convergeix asimptòticament cap a  $LC_1$ , mentre que la branca superior del *manifold* inestable convergeix asimptòticament vers el node  $N_2$ . El *manifold* estable actua com a separatriu entre les conques d'atracció de  $LC_1$  i  $N_2$ .

Quant al segon cas, segueixen existint els tres punts fixos del cas anterior però en canvi ha desaparegut el cicle límit  $LC_1$ . També ens ha aparegut un nou cicle límit  $LC_2$ , arran d'una bifurcació de Hopf del punt  $N_2$ , però això no té res a veure amb la bifurcació homoclínica. L'anàlisi de la bifurcació homoclínica seria idèntic si en comptes d'existir  $LC_2$ , el punt  $N_2$  fos estable. L'existència d'aquest cicle límit es dona per la coincidència que la bifurcació homoclínica i la bifurcació de Hopf del node  $N_2$  es produeixen per valors molt propers de  $\psi_E$ . El que si és remarcable és el canvi qualitatiu que s'ha produït en l'estructura dels *manifolds* del punt sella. En aquest sentit, la branca inferior del *manifold* estable del punt convergeix cap a  $LC_2$ , i la branca inferior del *manifold* inestable ha passat a connectar el node inestable amb el punt sella asimptòticament quedant embolcallat per la branca inferior del *manifold* inestable.

En el punt on es produeix la bifurcació homoclínica l'òrbita periòdica  $LC_1$  s'ha transformat en una òrbita homoclínica biassimptòtica respecte  $S_1$  i que correspon a la connexió homoclínica dels *manifolds* del punt sella. Concretament les branques inferiors del *manifold* estable i inestable coincideixen i formen l'òrbita homoclínica. Cal tenir present que la dimensió del sistema autònom és dos, de manera que l'única òrbita homoclínica possible és una connexió homoclínica tangent. En aquests cas, a diferència del cas modulad, la representació dels *manifolds* es fa en l'espai de les fases, i per tant, les corbes unidimensionals són una única trajectòria. Això fa impossible que es produeixi una intersecció transversal dels *manifolds* exceptuant el punt sella. A més, també és impossible que apareguin atractors caòtics perquè la seva dimensió és superior a dos.

Cal matisar que la bifurcació homoclínica presentada en aquest capítol és la situació més senzilla que podem estudiar en els dispositius BOITAL autònoms. Un estudi exhaustiu fet pel nostre grup [14,16,17,35,36,37,78,79] ha fet palesa tant numèricament com experimentalment una rica varietat de bifurcacions homoclíniques en el dispositiu bicapa, i per al cas tricapa, l'aparició d'atractors caòtics associats a aquestes bifurcacions.

La situació és diferent en el cas del dispositiu bicapa modulad. Aquí els *manifolds* implicats corresponen a una òrbita periòdica tipus sella, representada per un punt fix al mapa de Poincaré; aquests *manifolds* com que són superfícies establir-se connexions transversals i tangencials entre ells i a més al pla de Poincaré són corbes. Tal com hem vist abans, dos tipus de òrbites homoclíniques es poden donar depenent de si la intersecció entre els *manifolds* és tangent o transversal. Tot seguit analitzarem les situacions en què es poden donar les bifurcacions homoclíniques, mitjançant

l'anàlisi de la connexió dels *manifolds* de l'òrbita sella per tal d'establir el tipus de homoclínica implicada. També estudiarem els atractors estables involucrats a la bifurcació.

### VI.3 Bifurcacions globals i bifurcacions de codimensió 2.

Ja hem indicat a la introducció que en el dispositiu modulad hi ha dues situacions diferents en què apareixen bifurcacions homoclíniques, una relacionada amb les bifurcacions locals de codimensió dos i l'altra associada a l'existència d'una bifurcació homoclínica en el sistema autònom. En aquest apartat analitzarem el primer cas.

Tal i com demostren Knudsen i col·laboradors [34], hi ha una connexió directa entre les bifurcacions de codimensió dos i les bifurcacions globals. Concretament estableixen dos teoremes on es demostra l'existència de bifurcacions globals per a dos tipus diferents de bifurcacions de codimensió dos:

**Teorema (a)** Suposem que tenim un punt de bifurcació de codimensió dos en un flux de dimensió  $n$ , amb  $n > 2$ , on tots els altres multiplicadors de Floquet es troben dins el cercle unitari del pla complex. Si una corba corresponent a una bifurcació de Hopf connecta amb una corba de bifurcacions per doblament de període en el punt de codimensió dos i aquest doblament de període és subcrític, extenent-se les òrbites selles de període doble en direcció a la bifurcació de Hopf; llavors entre el costat corresponent a la bifurcació de Hopf, on hi ha un torus estable, i la corba de doblaments de període existeix un conjunt de punts  $\Gamma$  on es produeix una bifurcació global.

**Teorema (b)** Suposem que tenim un punt de codimensió dos en un flux de dimensió  $n$ , amb  $n > 2$ , on tots els altres multiplicadors de Floquet es troben dins el cercle unitari del pla complex. Si una corba corresponent a una bifurcació de Hopf connecta amb un parell de corbes de bifurcacions sella node al punt de codimensió dos i el node del parell sella node és un node inestable en la direcció de la bifurcació de Hopf, llavors entre el costat corresponent a la bifurcació de Hopf on hi ha un torus estable i la corba de bifurcacions sella node existeix un conjunt  $\Gamma$  de punts on es produeix una bifurcació global.

Tot seguit estudiarem dues situacions on es compleixen les condicions dels teoremes anteriors per al dispositiu bicapa i il·lustrarem les bifurcacions globals associades als dos casos.

#### VI.3.1 Cas a.

Al capítol V, apartat V.5.2, s'ha presentat una bifurcació de codimensió dos que compleix les condicions del teorema a), concretament el segon cas. Si fem un cop d'ull a la figura V.8, aquesta bifurcació està situada a la dreta de la llengua d'Arnold de període 1. En aquest punt una corba corresponent a una bifurcació de Hopf es connecta amb dues corbes corresponents a doblaments de període. La bifurcació

Diagrames de bifurcació numèrics

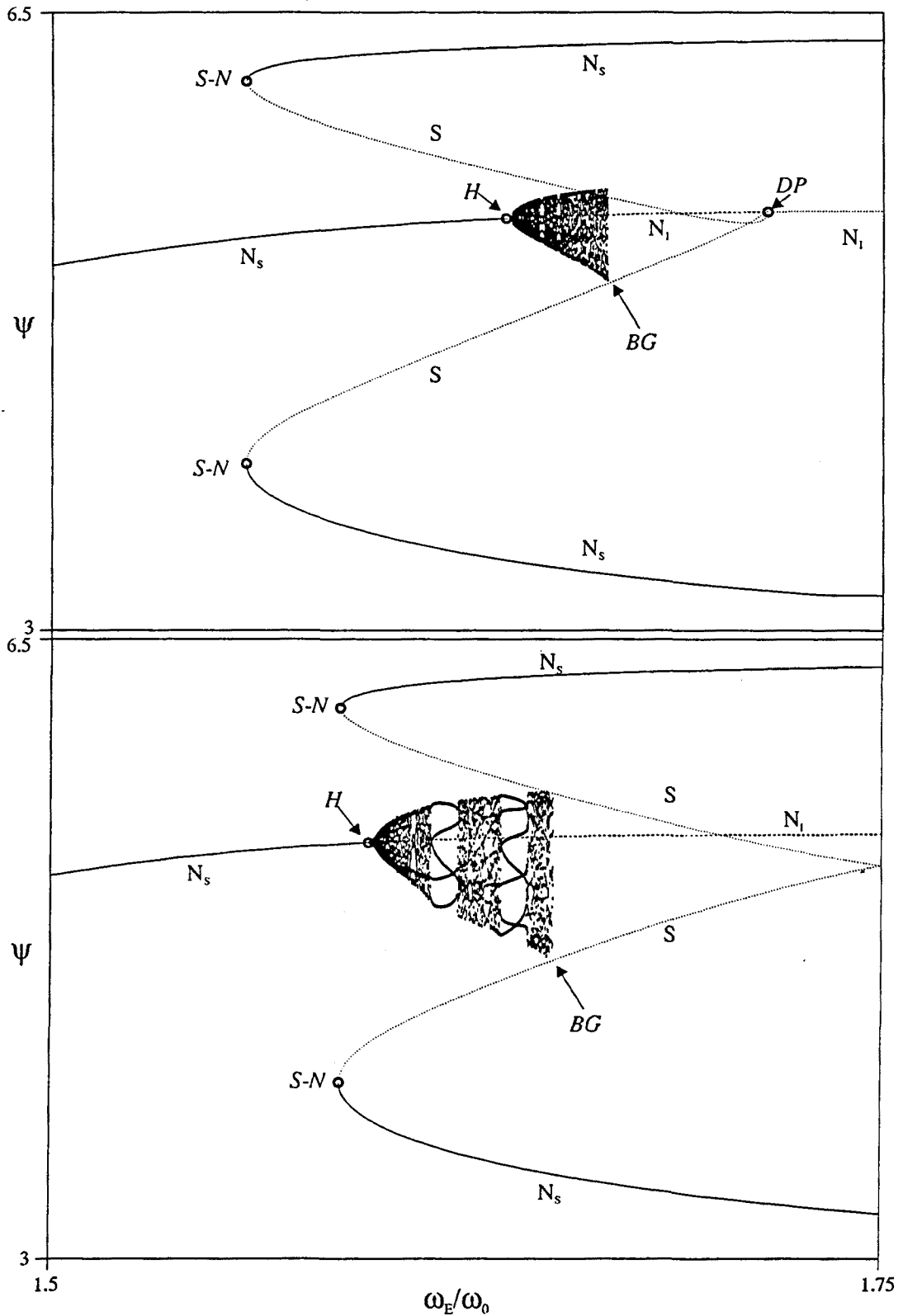


Fig VI.3 Diagrames de bifurcació numèrics del dispositiu bicapa modulad, per als casos  $\psi_{EM}=3.0$  i  $2.8$  amb  $\psi_{EB}=10.0$ .

global apareix entre la corba corresponent a la bifurcació de Hopf i el doblament de període subcrític d'una òrbita inestable. Això succeeix per a valors de  $\psi_{EM}$  inferiors al del punt de la bifurcació de codimensió dos.

La figura VI.3 representa dos diagrames de bifurcació per a dos casos propers a la bifurcació de codimensió dos. A la figura hem representat la projecció de la secció estroboscòpica de  $\psi$  en funció de  $\omega_E/\omega_0$ . Aquests diagrames de bifurcació han estat calculats combinant dos mètodes: les òrbites periòdiques estables, inestables i selles de període 1 i 2 han estat calculades mitjançant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques. Aquesta tècnica ens permet, també, calcular la seva estabilitat. Per altra banda, la resta de solucions s'han calculat enregistrant la resposta assintòtica després de deixar passar un transitori llarg. Aquest mètode només permet calcular atractors estables. La figura superior ha estat calculada per a  $\psi_{EM}=3.0$  i  $\psi_{EB}=10.0$ , i la figura inferior per a  $\psi_{EM}=2.8$  i  $\psi_{EB}=10.0$ .

A la figura hem indicat on es produeixen les bifurcacions;  $S-N$  sella node,  $H$  Hopf,  $DP$  doblament de període i  $BG$  bifurcació global.

Si resseguim l'evolució de l'òrbita de període 1 per al primer cas des de l'esquerra observem que inicialment tenim una òrbita estable que en arribar a un punt s'inestabilitza a través d'una bifurcació de Hopf supercrítica i es converteix finalment en una òrbita inestable. Més endavant pateix un doblament de període subcrític i es converteix en una òrbita tipus sella. En la bifurcació de Hopf apareix un torus estable i a la bifurcació de doblament de període apareix una òrbita de període 2 tipus sella. El torus que neix a la bifurcació de Hopf comença a créixer fins a fer tangència amb l'òrbita de període 2 tipus sella. En aquest punt es produeix la bifurcació global i l'atractor desapareix. En ambdós diagrames podem observar que hi ha una zona on coexisteixen una òrbita de període 2 estable, una òrbita de període 2 tipus sella i una òrbita de període 1 estable. Més endavant hi ha una altra zona on coexisteixen una òrbita de període 2 estable, una òrbita de període 2 sella, una òrbita de període 1 inestable i un torus.

La coexistència de l'atractor tipus torus i l'òrbita de període dos tipus sella són la clau perquè es produeixi la bifurcació global, ja que quan l'atractor tipus torus fa tangència amb l'òrbita tipus sella es produeix la bifurcació global. Com veurem posteriorment una de les diferències bàsiques entre aquesta bifurcació homoclínica i les crisis internes és que en el cas objecte d'estudi en aquest apartat els *manifolds* de l'òrbita sella actuen com a separatrius de la conca d'atracció del torus amb les conques d'atracció dels nodes estables, cosa que no passa en les crisis internes. La figura VI.4 il·lustra la secció de Poincaré de l'òrbita sella de període dos, els seus *manifolds* i la secció de Poincaré del torus. Notem per  $S$  l'òrbita sella de període dos,  $N_s$  a l'òrbita estable de període dos,  $W^s(S)$  el *manifold* estable de l'òrbita sella i  $W^u(S)$  el *manifold* inestable de l'òrbita sella. En aquesta figura es pot apreciar com els *manifolds* estables actuen com a separatrius entre les diferents conques d'atracció. Si prenem com a punt inicial, per a una trajectòria, un punt que es trobi entre els dos *manifolds* estables  $W^s(S)$ , aquesta trajectòria convergeix cap a l'únic atractor que es troba en aquesta zona, el torus. De la mateixa manera, les trajectòries que surtin de punts situats fora d'aquesta zona no convergeixen cap al torus, sinó que ho fan cap a un dels nodes estables. En canvi, tal com i hem vist al capítol III, en les crisis





manera que el canvi en l'estructura dels *manifolds* implica la destrucció de la conca d'atracció de l'atractor caòtic, i per tant, la destrucció del mateix atractor.

A mesura que ens acostem al punt de la bifurcació aquest torus es desestabilitza i es converteix en un atractor caòtic. La naturalesa caòtica d'aquest atractor així com l'estudi detallat de la bifurcació global es troben a l'apartat VI.5.

Una característica important d'aquest tipus de bifurcacions globals és que no són contínues a l'espai de les fases i presenten fenòmens d'histèresi. Si sortim d'un punt situat a l'òrbita de període 1 i augmentem la freqüència de la modulació externa, el sistema anirà resseguint l'òrbita periòdica fins arribar al punt de la bifurcació de Hopf. En aquest punt el sistema presentarà una evolució quasiperiòdica. Si seguim augmentant la freqüència de la modulació externa arribarem a la bifurcació global. En aquest punt desapareix l'atractor que fa la tangència i el sistema salta a l'òrbita estable de període 2. Si ara disminuïm la freqüència de la modulació externa no recuperem l'anterior atractor, sinó que ressegüim l'òrbita de període dos fins arribar al punt on es produeix la bifurcació sella node de l'òrbita de període 2, punt on saltem a l'òrbita de període 1 estable. Aquest fenomen d'histèresi està directament relacionat amb el fet que en aquests casos la bifurcació global implica la destrucció de l'atractor i que el sistema ha de saltar a una altre atractor estable, que no té cap relació amb la bifurcació global. En resum, existeix amb independència de la bifurcació global. Tot i que hem vist que les crisis internes podien ser discontinües mai no presenten fenòmens d'histèresi, ja que no impliquen la destrucció de l'atractor. El fenomen de la histèresi és de molt ajut per identificar aquest tipus de bifurcacions ja que és fàcilment observable experimentalment.

A mesura que augmentem  $\psi_{EM}$  ens acostem a la bifurcació de codimensió dos; la bifurcació tipus de Hopf de la finestra de període 1 es va acostant al punt de bifurcació de doblament de període. Quan arribem al punt de bifurcació de codimensió dos ambdues bifurcacions locals coincideixen al mateix punt de manera que també desapareix la bifurcació global. És a dir, en el punt de bifurcació de codimensió dos no només coincideixen tres bifurcacions locals de codimensió 1 sinó que també hi coincideix una bifurcació global de codimensió 1. Aquesta seqüència es pot observar a la figura VI.3. El cas superior de la gràfica es troba més proper que al cas inferior a la bifurcació de codimensió dos. S'observa com en el cas superior la bifurcació de Hopf es troba propera al doblament de període i això fa que l'amplada de l'atractor quan pateix la bifurcació homoclínica sigui més petita que en el cas anterior. També és més petita, la distància entre la bifurcació global i la bifurcació de Hopf.

Si disminuïm  $\psi_{EM}$  també poden observar la desaparició de la bifurcació global. La figura VI.5 representa dos casos entre els quals desapareix la bifurcació global. El cas superior ha estat calculat per a  $\psi_{EM}=2.3$  i encara s'hi produeix la bifurcació global. Quan disminuïm  $\psi_{EM}$ , el punt de la bifurcació global s'acosta progressivament a la bifurcació sella node de l'òrbita de període dos. Per a  $\psi_{EM}=2.3$  podem observar que ambdues bifurcacions es troben molt properes. El fenomen d'histèresi és molt menys pronunciat que en els casos anteriors, ja que la seva amplada depèn de la distància entre la bifurcació global i la bifurcació sella node de període dos.

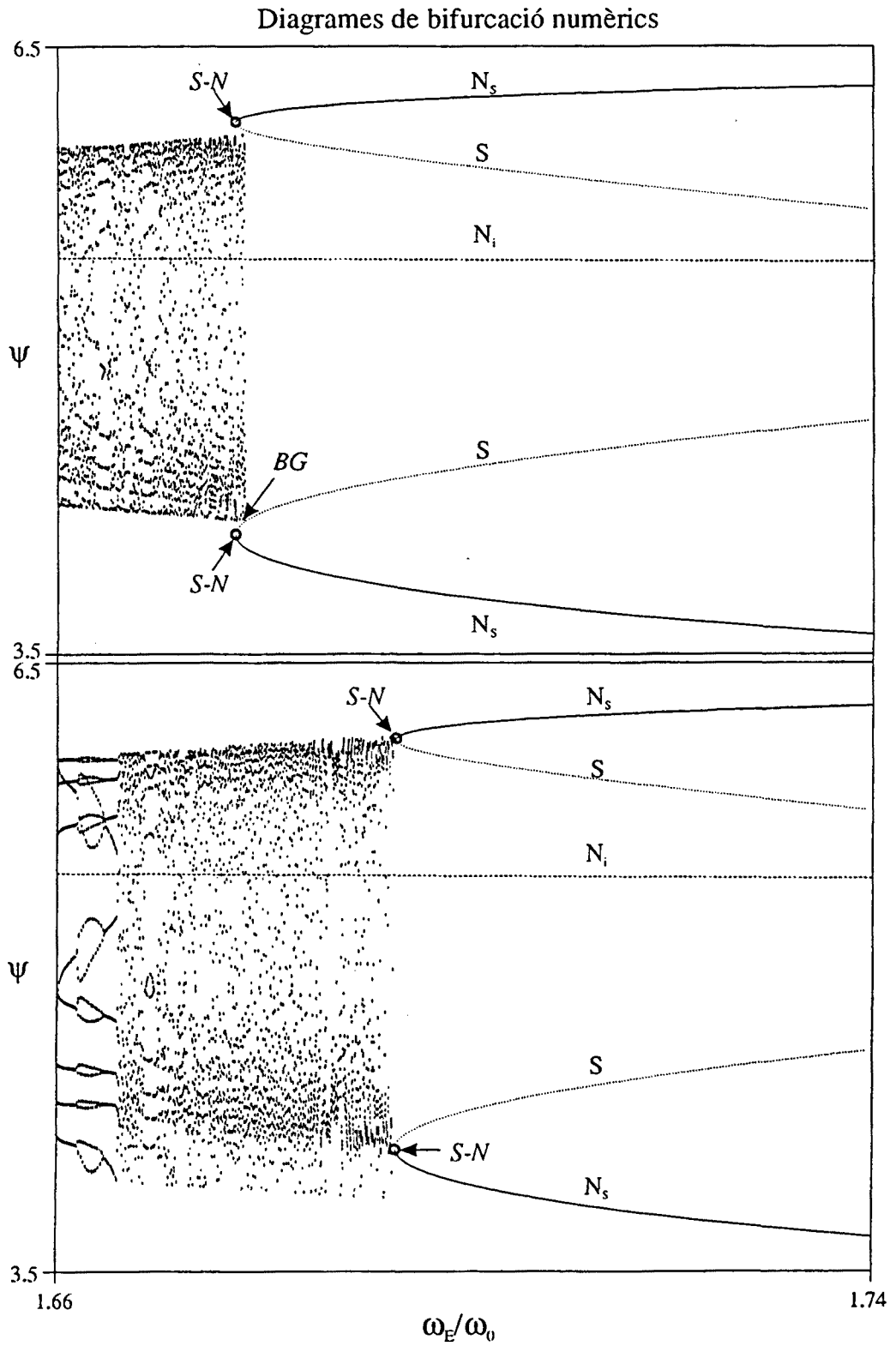


Fig VI.5 Diagrames de bifurcació numèrica del dispositiu bicapa modulada, per als casos  $\Psi_{EM}=2.3$  i  $2.2$  amb  $\Psi_{EB}=10.0$ .

El diagrama de bifurcació de la part baixa ha estat calculada per a  $\psi_{EM}=2.2$ . En aquest cas ja no existeix la bifurcació global, en el seu lloc la transició entre l'atractor i l'òrbita periòdica es produeix a través d'intermitències de tipus I. El punt on desapareix la bifurcació global és un punt de bifurcació codimensió dos de la bifurcació global, ja que hem d'ajustar dos paràmetres ( $\omega_E$  i  $\psi_{EM}$ ) per localitzar-lo. En aquest punt la bifurcació global té la peculiaritat que l'òrbita periòdica és una òrbita sella on estructuralment inestable.

### VI.3.2 Cas b.

Al capítol V també hem estudiat una bifurcació de codimensió dos on es produeix la connexió especificada en el teorema *b*). Es tracta del primer cas presentat a l'apartat V.5.1. En aquesta bifurcació es produïa la connexió d'una bifurcació de Hopf amb una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques estables i una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques inestables. En el capítol V, comentàvem que existien dues bifurcacions de codimensió dos d'aquest tipus a tots dos costats de la llengua d'Arnold de període 1. A la figura V.9 podem localitzar les dues bifurcacions de codimensió dos.

En aquest apartat estudiarem la bifurcació de codimensió dos situada a l'esquerra de la llengua d'Arnold de període 1, atès que aquest cas compleix les condicions del teorema *b*). Recordem que en les condicions del teorema *b*) no només s'exigeix que existeixi la connexió entre les tres bifurcacions de codimensió  $\acute{u}$  abans esmentades, sinó que també cal que en el punt de la connexió arribin, per un costat, la bifurcació de Hopf i la bifurcació sella node d'òrbites estables, i per l'altre ens ha de sortir la bifurcació sella node d'òrbites inestables.

Si examinem la figura V.9 la bifurcació de codimensió dos situada a l'esquerra de la llengua d'Arnold de període 1, podem observar que al anar augmentant  $\psi_{EM}$  la bifurcació sella node d'òrbites inestables situades al centre de la finestra de període 1 desapareix al punt de bifurcació dos, i en el seu lloc apareixen dues noves bifurcacions de codimensió 1, una de Hopf i una sella node d'òrbites estables. Per tant es compleixen les condicions del teorema *b*), ja que al mateix costat de la bifurcació de codimensió dos existeixen simultàniament una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques estables i una bifurcació de Hopf.

En canvi, la bifurcació de codimensió dos situada a la dreta de la llengua d'Arnold de període 1, no compleix les condicions del teorema *b*). Tot i que en aquesta bifurcació de codimensió dos connecten les mateixes bifurcacions de codimensió  $\acute{u}$  abans esmentades en el cas anterior, si analitzem la figura V.9 ens podem adonar ràpidament que per un costat arriben una bifurcació sella node d'òrbites inestables i una bifurcació sella node d'òrbites estables, i en surt una bifurcació de Hopf. És a dir, en aquest cas no existeixen simultàniament una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques estables i una bifurcació de Hopf. Intuitivament podem imaginar el que passa. La idea d'aquesta bifurcació és que el torus que sorgeix la bifurcació de Hopf faci tangència amb l'òrbita sella que està implicada en la bifurcació sella node d'òrbites estables. És evident que, si a un costat només tenim la bifurcació de Hopf, no existeix l'òrbita tipus sella i no es produeix la bifurcació global.

## Diagrama de bifurcació

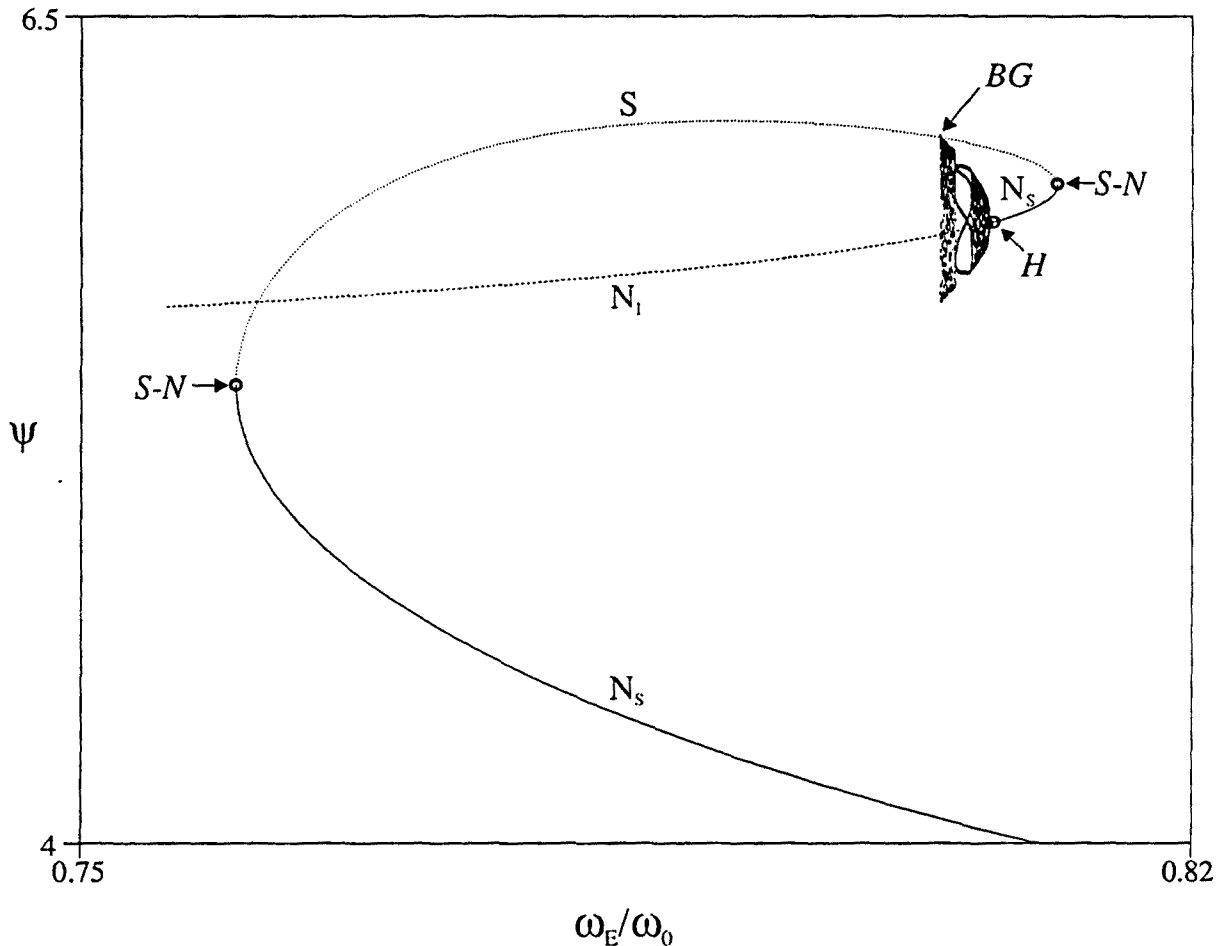


Fig VI.6 Diagrama de bifurcació numèric del dispositiu bicapa modulad, per al cas  $\psi_{EM}=1.7$  amb  $\psi_{EB}=10.0$ .

La figura VI.6 il·lustra un diagrama de bifurcació on es produeix aquesta bifurcació global. El cas correspon a  $\psi_{EM}=1.7$  i  $\psi_{EB}=10$  i hem utilitzat com a paràmetre de control  $\omega_E/\omega_0$ . Igual que en les figures anteriors, s'han calculat les òrbites periòdiques emprant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques i el torus s'ha calculat a partir de representar la solució assímptòtica en deixar evolucionar el sistema un temps llarg.

En aquest cas podem observar com hi ha un interval en  $\omega_E/\omega_0$  on coexisteixen dues òrbites de període 1 estable i una òrbita de període 1 sella. Una d'aquestes òrbites de període 1 estable es desestabilitza a través d'una bifurcació de Hopf i ens apareix un torus estable. De manera que tenim un nou interval en  $\omega_E/\omega_0$  on coexisteixen un torus estable, una òrbita de període 1 estable, una òrbita de període 1 inestable i una òrbita de període 1 sella. El radi d'aquest torus comença a créixer fins arribar a un punt on fa tangència amb l'òrbita tipus sella, moment en què es produeix la bifurcació homoclínica i l'atractor es destrueix.

Podem observar com en el cas anterior que no existeix continuïtat. La no continuïtat és evident si tenim present que quan es produeix la tangència de l'atractor caòtic amb l'òrbita sella, l'atractor i la seva conca d'atracció desapareixen i el flux del sistema salta a la branca interior on existeix el node estable.

Igual que en el cas anterior el *manifold* estable de l'òrbita sella és la separatriu entre les conques d'atracció del torus i del node estable de la branca inferior. Això es pot apreciar a la figura VI.7. En aquesta figura hem representat els *manifolds* estable  $W^s(S)$  i inestable  $W^u(S)$  de l'òrbita sella  $S$ . Aquest cas ha estat calculat per a  $\psi_{EB}=10.0$ ,  $\psi_{EM}=1.7$  i  $\omega_E/\omega_0=0.805$ . En aquesta figura també hi hem representat el node estable  $N_s$ , el node inestable  $N_i$  i l'atractor caòtic resultant de la inestabilització del torus. Podem observar que una de les branques de *manifold* inestable convergeix cap al node estable, mentre que l'altra ho fa cap a l'atractor caòtic. Aquest atractor queda embolcallat pel *manifold* inestable. Podem observar com al voltant del *manifold* inestable apareixen zones més fosques. Aquestes zones corresponen a punts de l'atractor caòtic. Per la seva banda, aquest *manifold* inestable està embolcallat pel *manifold* estable. Qualsevol trajectòria que surti d'un punt inicial dins la zona delimitada pel *manifold* inestable convergirà vers l'atractor caòtic. En cas contrari, si surt fora d'aquesta zona, convergirà cap al node estable.

A mesura que ens acostem a la bifurcació homoclínica en disminuir  $\omega_E/\omega_0$  la distància entre les branques inferiors dels *manifolds* estable i inestable de l'òrbita sella disminueix, fins arribar a fer una connexió homoclínica transversal. En el punt de la bifurcació, l'atractor caòtic juntament amb la seva conca d'atracció han quedat destruïts. Aquesta bifurcació homoclínica serà objecte d'un estudi més detallat a l'apartat VI.5.

Aquesta bifurcació global està limitada per dues bifurcacions de codimensió 2. Inferiorment per la bifurcació de codimensió dos que hem comentat al principi de l'apartat. Si disminuïm  $\psi_{EM}$ , la distància entre la bifurcació de Hopf i la bifurcació sella node, situada a la dreta de la figura VI.6, disminueix. El punt on s'ajunten aquestes dues bifurcacions també desapareix la bifurcació Homoclínica. És a dir, tal i com passava en el cas anterior, en aquesta codimensió dos no només estan involucrades tres bifurcacions locals de codimensió ú sinó que també hi està involucrada una bifurcació homoclínica de codimensió ú.

Si tornem a examinar la figura V.9 observem que si augmentem  $\psi_{EM}$  trobem una altra bifurcació de codimensió dos en què desapareix la bifurcació de Hopf i ens apareixen dues bifurcacions de doblament de període, una d'òrbites estables i l'altra d'òrbites inestables. En aquest punt la desaparició de la bifurcació de Hopf implica la desaparició del bifurcació homoclínica. Si analitzem aquesta bifurcació de codimensió 2, podem observar que compleix les condicions del teorema a). És a dir la bifurcació global està limitada a l'espai dels paràmetres  $\omega_E/\omega_0$ ,  $\psi_{EM}$  per dues bifurcacions de codimensió dos que compleixen les condicions dels teoremes a) i b).

### VI.3.3 Altres situacions.

Durant l'estudi de les bifurcacions globals en el dispositiu bicapa modulada s'ha descobert que els dos casos anteriors no són les úniques situacions on hi ha

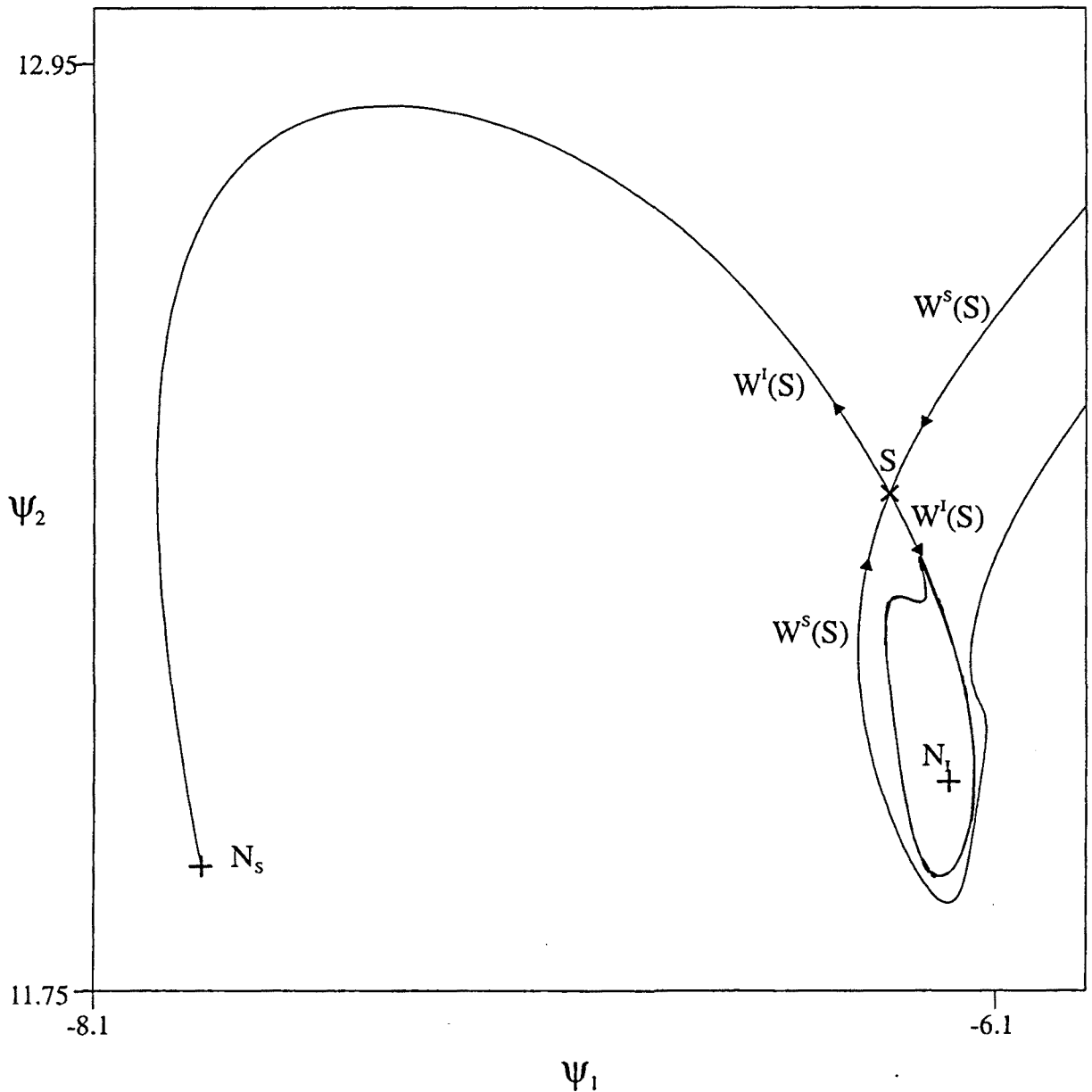


Fig VI.7 manifolds estable ( $W^s$ ) i inestable ( $W^l$ ) del punt sella  $S$  per al dispositiu bicapa modulad.  $\psi_{EB}=10.0$ ,  $\psi_{EM}=1.7$  i  $\omega_E/\omega_0=0.805$ .

involucrades bifurcacions de codimensió dos que permeten l'aparició de bifurcacions globals.

Una de les condicions perquè existeixin bifurcacions globals és la coexistència de solucions en l'espai dels paràmetres  $\omega_E/\omega_0$ ,  $\psi_{EM}$ . En general a les zones on es superposen finestres periòdiques, es poden donar bifurcacions globals. Aquest no és l'únic requisit necessari per a l'aparició d'aquestes bifurcacions globals. També cal

## Diagrama de bifurcació numèric

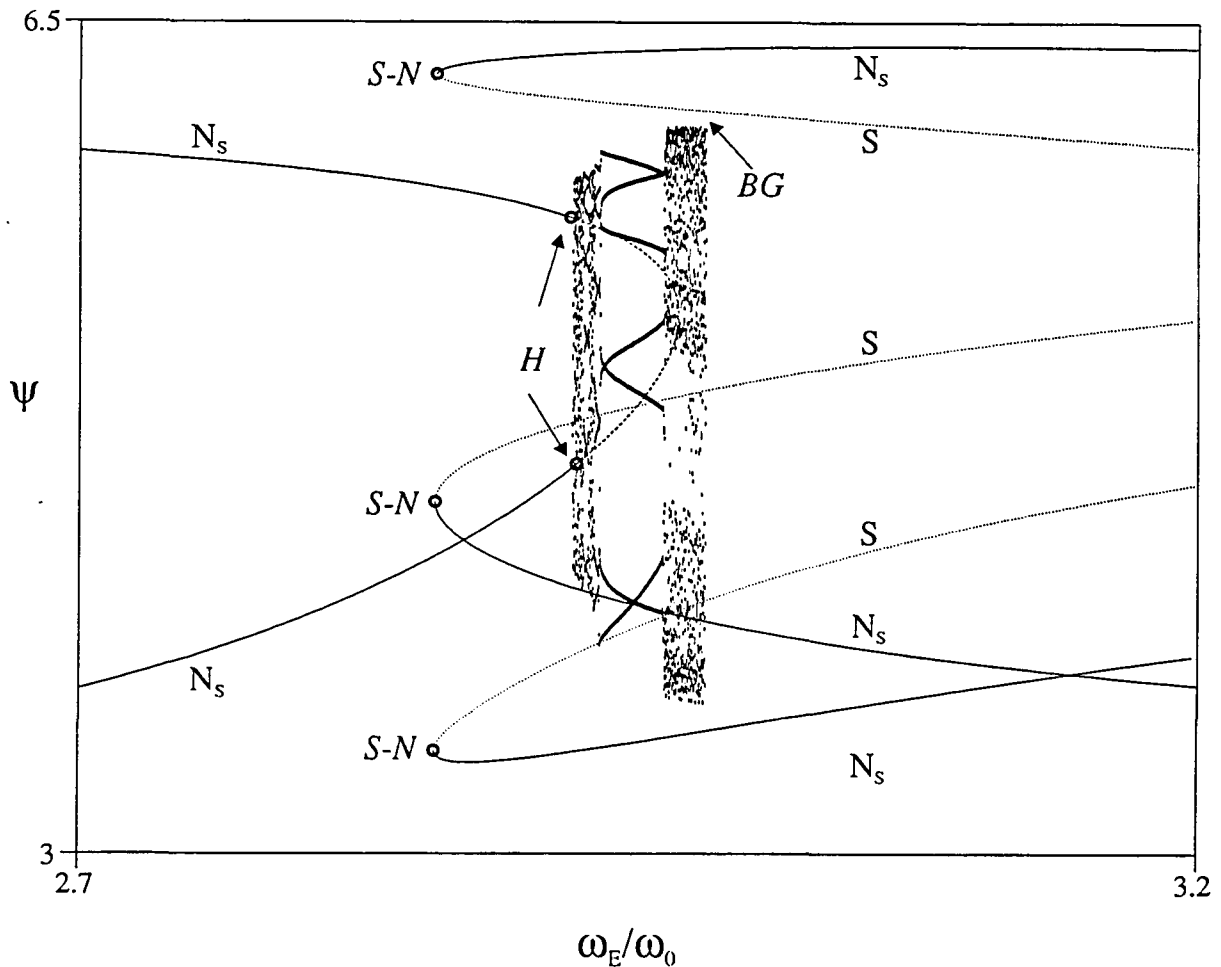


Fig VI.8 Diagrama de bifurcació numèric del dispositiu bicapa modulada, per al cas  $\psi_{EM}=8.0$  amb  $\psi_{EB}=10.0$ .

que existeixi una òrbita sella amb la qual es produeixi la bifurcació global. Aquesta òrbita sella estarà garantida si en el límit d'una de les finestres periòdiques existeix una bifurcació sella node o un doblament de període subcrític. Cal, a més, que existeixi algun tipus d'inestabilització que permeti l'aparició d'un atractor caòtic. Això es pot donar a partir d'una bifurcació tipus Hopf o d'un doblament de període. Tot i suposar que les anteriors condicions es donin, no és obligat que existeixi una bifurcació global. Tanmateix a la majoria de llocs indicats amb una C a la figura V.8, existeixen bifurcacions globals. Aquestes zones caòtiques apareixen en els llocs on les finestres periòdiques es superposen o estan properes. Des d'un punt de vista físic podríem dir que aquestes zones caòtiques apareixen a partir de la competició entre les dues òrbites periòdiques. Aquests atractors caòtics apareixen a partir de doblaments de període o inestabilitzacions d'un torus i desapareixen a través d'una bifurcació global o a través d'intermitències tipus I.



La figura VI.8 representa un diagrama de bifurcació per al qual també es produeix una bifurcació global. L'aparició d'aquesta bifurcació global no està relacionada amb cap de les bifurcacions de codimensió dos dels dos casos anteriors. Aquest diagrama de bifurcació s'ha obtingut variant  $\omega_E/\omega_0$  i fixant :  $\psi_{EM}=8.0$  i  $\psi_{EB}=10.0$ . Podem observar que existeix una zona on coexisteix una òrbita de període dos estable amb una òrbita de període 3 estable. L'òrbita de període 3 desapareix en fer una bifurcació del tipus sella node amb una òrbita de període tres tipus sella. Per la seva banda, la finestra de període dos s'instabilitza a partir d'una bifurcació de Hopf. Això fa que en un interval de  $\omega_E/\omega_0$  coexisteixin una òrbita de període 3 estable, una òrbita de període 3 tipus sella, una òrbita de període 2 inestable i un torus. Quan aquest torus s'instabilitza, esdevé un atractor caòtic i finalment desapareix en fer una bifurcació de tipus homoclínic. Al mig d'aquest procés hi ha una finestra periòdica de període 6 que apareix i desapareix a través d'intermitències de tipus I.

Aquesta bifurcació global està limitada inferiorment en  $\psi_{EM}$  per una bifurcació de codimensió dos. En aquesta bifurcació de codimensió dos la bifurcació global es transforma en intermitències de tipus I. A mesura que disminuïm  $\psi_{EM}$ , el punt de la bifurcació global i el punt de la bifurcació sella node de l'òrbita de període 3 s'acosten fins arribar a coincidir. Recordem que aquest codimensió dos també es donava en el primer cas que hem estudiat en aquest apartat.

Superiorment trobem una altra bifurcació de codimensió dos on connecta la bifurcació global. Aquesta bifurcació de codimensió dos també involucra quatre bifurcacions de codimensió ú locals. Aquesta bifurcació de codimensió dos ha estat estudiada al capítol V apartat V.5.5. Si examinen la figura V.8, la podem localitzar a la part superior dreta de la llengua d'Arnold de període 2. En aquesta bifurcació de codimensió dos es produeix la connexió d'un doblament de període d'una òrbita inestable i una bifurcació Hopf de l'òrbita de període 2, també en surten un doblament de període d'una òrbita de període 1 inestable i una bifurcació de Hopf d'una òrbita de període 1. En aquest punt, a diferència dels casos anteriors, no desapareix la bifurcació global, ja que a l'altre costat segueix existint una bifurcació de Hopf. A més en aquest cas la bifurcació sella node de la finestra de període tres no està involucrada en la bifurcació codimensió dos cosa que significa que l'òrbita tipus sella segueix existint.

#### **VI.4 Bifurcació homoclínica amb una òrbita sella nascuda en modular un punt fix sella del sistema autònom.**

Fins ara tot els casos presentats han estat calculats per  $\psi_{EB}=10.0$ . Per aquesta fase d'entrada, tal com s'observa a la figura II.8, els únics atractors que existeixen en el sistema autònom són un punt fix inestable i una òrbita periòdica estable. A l'hora d'interpretar els atractors que existeixen en el sistema modulad, podem dir que les diferents solucions han aparegut a partir d'aquests dos atractors del sistema autònom. De fet, si anéssim disminuint paulatinament l'amplitud de la modulació al final, per a una amplitud de modulació nul·la, assoliríem de forma contínua l'òrbita periòdica estable del sistema autònom. Suposem per un moment que en comptes de treballar

en aquesta zona, apliquem la modulació externa al dispositiu per un valor de  $\psi_{EB}$  per al qual en el sistema autònom, a més d'existir un node inestable i una òrbita periòdica existeix també un punt fix sella. Llavors què passa amb aquest punt sella en aplicar la modulació?

Taula VI.1 Solució Estacionària del sistema autònom per  $\psi_E=13.5$  On  $\bar{\lambda}_{1,2}$  són els valors propis del camp vectorial linealitzat.

$\bar{\psi}$	$\bar{\psi}_1$	$\bar{\psi}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	Branca
5.55	-6.41	11.96	1.27+1.33i	1.27-1.33i	$N_1$
7.38	-8.52	15.91	-5.91	0.31	$S_1$
10.35	-11.94	22.29	-0.39+1.04i	-0.39-1.04i	$N_2$

Suposem per exemple el cas concret del sistema modulad en què  $\psi_{EB}=13.5$ ,  $\omega_E=2.33$  i prenem  $\psi_{EM}$  variable. Quan  $\psi_{EM}=0$  desapareix la modulació externa. En aquest cas l'estudi del sistema es redueix a l'estudi del sistema autònom il·luminat amb un feix d'intensitat constant corresponent a una fase d'entrada ( $\psi_E$ ) igual a 13.5. Per a aquest valor de  $\psi_E$  existeixen tres punts fixos estacionaris. A la taula VI.1 es donen els valors de la fase total, fases parcials i valors propis del camp vectorial linealitzat als punts estacionaris. Recordem del capítol II que aquests valors propis determinen l'estabilitat dels punts estacionaris: el punt  $N_1$  és un node inestable, el punt  $S_1$  és una sella i el punt  $N_2$  és un node estable. També existeix en l'espai de les fases una òrbita periòdica que oscil·la al voltant del punt fix  $N_1$ . Aquesta òrbita periòdica està deformada per la proximitat al punt sella. Per a aquest valor de la fase d'entrada, el sistema autònom es troba proper al punt on es produeix la bifurcació homoclínica descrita al apartat VI.2.

La figura VI.9 il·lustra un seguiment d'òrbites calculat variant de forma contínua  $\psi_{EM}$  i prenent fixos  $\psi_{EB}=13.5$  i  $\omega_E=2.33$ . A la part superior de la figura el valor de la fase total captada estroboscòpicament està representat i a la part inferior els multiplicadors de Floquet associats a l'òrbita periòdica. El seguiment d'òrbites periòdiques comença per  $\psi_{EM}=0$ , prenent com a valors inicials de  $\psi_1$  i  $\psi_2$  els corresponents al punt sella del sistema autònom. Podem observar com a partir d'aquest punt i en augmentar  $\psi_{EM}$ , ens apareix una òrbita de període 1 tipus sella ( $LC_1$ ). Tal i com era d'esperar, el valor de la fase total quan  $\psi_{EM}=0$  és exactament igual al del punt estacionari del sistema autònom  $S_1$ . També hi ha una connexió entre els multiplicadors de Floquet ( $\lambda_i$ ) i els valors propis del camp vectorial linealitzat al punt estacionari del sistema autònom ( $\bar{\lambda}_2$ ). Tal i com ja hem vist al capítol I, els multiplicadors de Floquet són una generalització dels valors propis del camp vectorial linealitzat als punts estacionaris. Concretament els multiplicadors de Floquet d'un punt estacionari són, en funció dels valors propis del camp vectorial linealitzat, iguals a:

$$\lambda_i = e^{\bar{\lambda}_i T} \quad (\text{VI.1})$$

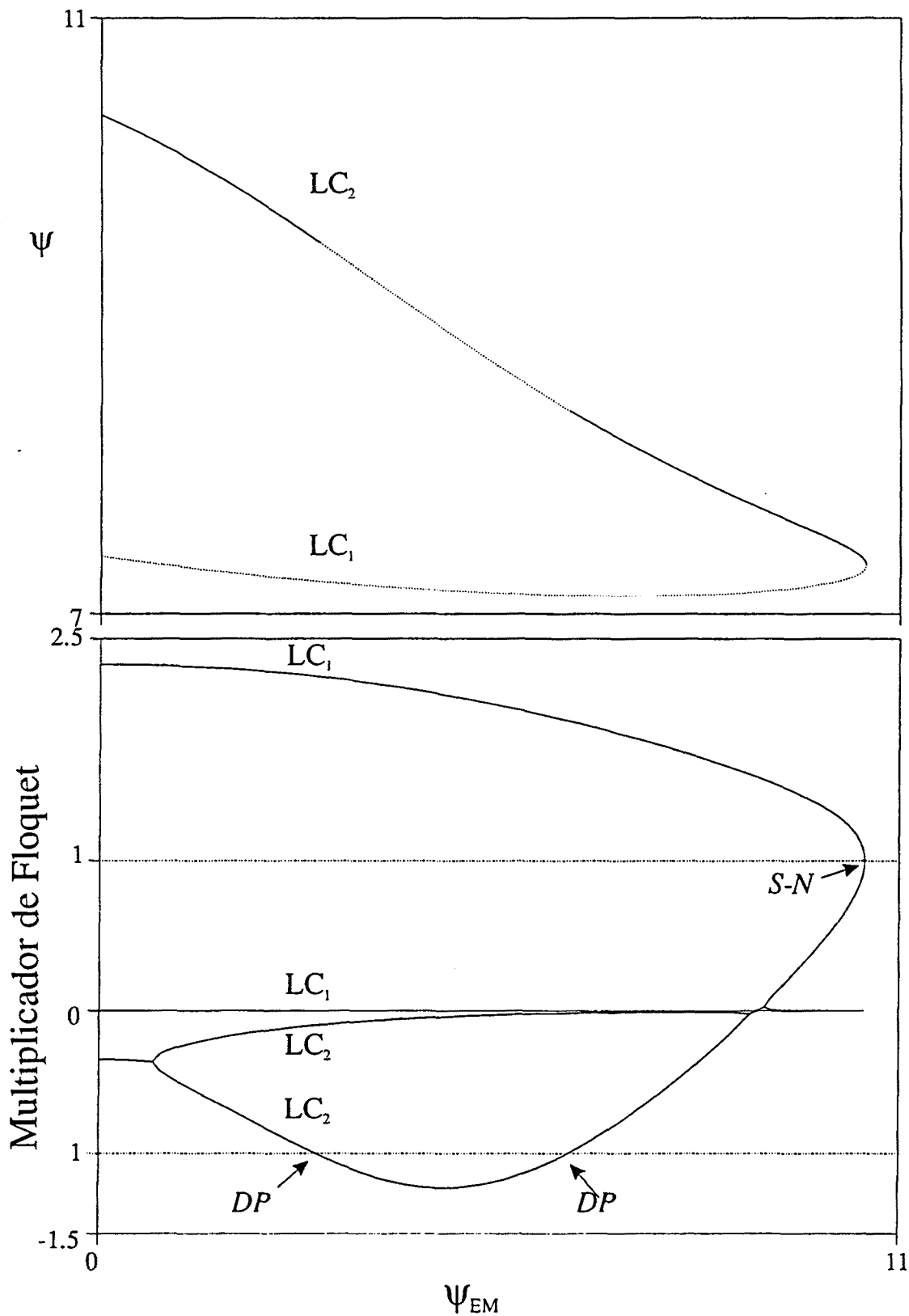


Fig VI.9 Seguiment d'òrbites periòdiques per a  $\psi_{EB}=13.5$  i  $\omega_E=2.3$  variant  $\psi_{EM}$ .

on  $T$  és el temps total per al qual hem avaluat la matriu variacional, en el nostre cas és igual al període de la modulació externa. En aquest cas també es compleix que quan l'amplitud de modulació externa tendeix a zero, els valors dels multiplicadors de Floquet de l'òrbita periòdica sella tendeixen vers els multiplicadors de Floquet del punt fix sella  $S_1$ . També existeix una altra òrbita periòdica de període 1 ( $LC_2$ ). Quan  $\psi_{EM}=0$ , el valor de la fase total coincideix amb el valor del punt estacionari  $N_2$  del sistema no autònom. Aquesta òrbita és inicialment estable encara que en un interval de  $\psi_{EM}$  és inestable. La inestabilitat apareix i desapareix mitjançant un doblament i posterior desdoblament de període. També és compleix la tendència dels multiplicadors de Floquet de l'òrbita periòdica vers els multiplicadors de Floquet del punt estacionari  $N_2$ . Així doncs, de la mateixa manera que podem dir que l'òrbita sella  $LC_1$  apareix arran de modular el punt estacionari  $S_1$  del sistema autònom, també podem dir que  $LC_2$  apareix en aplicar la modulació externa al node estacionari  $N_2$  del sistema autònom.

Recordem que també existia en el sistema autònom una òrbita periòdica per al valor de  $\psi_E=13.5$ . Tal i com hem vist, al llarg de tot el treball, en aplicar la modulació externa sobre una òrbita periòdica del sistema autònom ens poden aparèixer atractors periòdics, quasiperiòdics o caòtics en el sistema modulad. Llavors com pot influir l'existència d'aquesta òrbita sella als atractors sorgits a partir de modular l'òrbita periòdica del sistema autònom?

Evidentment la influència es pràcticament nul·la quan, en el sistema autònom, el punt sella i l'òrbita periòdica es troben allunyats l'un de l'altre a l'espai de les fases. Ara bé, si en el sistema autònom aquests dos atractors estan propers, lògicament també ho estaran els atractors sorgits en aplicar la modulació. Si a aquesta proximitat afegim el fet que l'òrbita periòdica, sorgida en modular el punt estacionari sella, és de tipus sella ja tenim les condicions perquè es puguin produir bifurcacions homoclíniques en el sistema modulad.

Per aconseguir aquesta proximitat entre el punt estacionari sella i l'òrbita periòdica només cal que seleccionem un valor de  $\psi_{EB}$  per al qual en el sistema autònom l'òrbita periòdica estigui propera al punt on realitzarà la bifurcació homoclínica.

La figura VI.10 representa un diagrama de bifurcació calculat variant de forma contínua  $\psi_{EM}$  i prenent fixos  $\psi_{EB}=13.5$  i  $\omega_E=2.33$ , és a dir, per als mateixos paràmetres que en la figura VI.9. Aquest diagrama de bifurcació ha estat realitzat combinant el mètode del seguiment d'òrbites periòdiques amb el de calcular la solució assintòtica. En aquest diagrama només hi hem representat el valor de  $\psi$  captat estroboscòpicament. A més, de trobar-hi les òrbites  $LC_1$  i  $LC_2$  ja comentades abans en la figura VI.9, també hi trobem l'existència d'un nou atractor sorgit a partir de modular l'òrbita periòdica del sistema no autònom.

Inicialment per a amplituds de modulació petites coexisteixen tres solucions: una òrbita de període 1 estable, una de sella i un atractor quasiperiòdic. Tal i com hem vist al capítol V, aquest atractor quasiperiòdic és el resultat de la no sincronització entre l'òrbita periòdica del sistema no autònom i la modulació externa.

A mesura que augmentem  $\psi_{EM}$ , arribem a una finestra periòdica de període 3 que apareix arran d'una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques. Aquesta finestra periòdica desapareix en una seqüència de doblaments de periòdica donant lloc a

## Diagrama de Bifurcació numèric

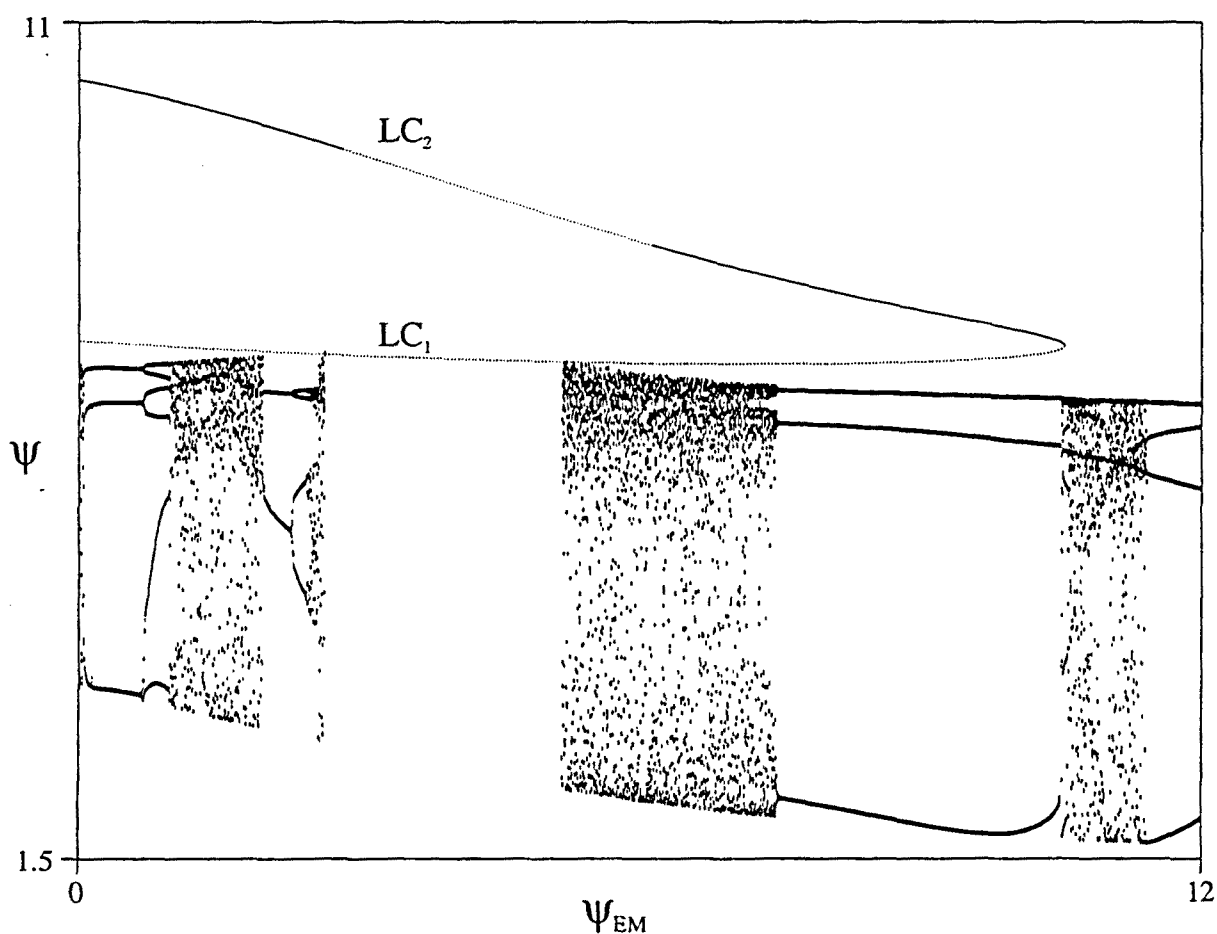


Fig VI.10 Diagrama de bifurcació del sistema no autònom per a  $\psi_{ER}=13.5$  i  $\omega_E=2.3$  variant  $\psi_{EM}$ .

l'aparició d'una zona caòtica. A través d'una nova bifurcació sella node desapareix la zona caòtica i ens apareix una finestra de període 2. Aquesta finestra de període 2 desapareix en una seqüència de doblaments de període i tot seguit entrem en una nova zona caòtica. Posteriorment aquest atractor caòtic és destruït en una bifurcació homoclínica, i el sistema salta a la solució periòdica  $LC_1$ . Aquesta discontinuïtat a l'espai de les fases, produïda pel salt vers l'òrbita  $LC_1$ , és característica de les bifurcacions globals. Aquesta bifurcació homoclínica és transversal i a l'apartat VI.5 se'n fa un estudi detallat.

Aquesta nova situació on es produeixen bifurcacions globals té un interès afegit respecte als casos relacionats amb bifurcacions locals de codimensió dos que hem vist a l'apartat anterior. En els casos anteriors, tant l'atractor caòtic com l'òrbita sella implicats a la bifurcació global sorgien a partir de modular una única òrbita periòdica del sistema autònom. Aquest fet és una restricció forta en dos aspectes: D'una banda, pel que fa a l'estructura de la bifurcació global, perquè com que els dos atractors estan relacionats, les combinacions que podem imaginar entre l'òrbita sella

i l'atractor caòtic són molt limitades. Per altra banda, les limitacions que imposen les condicions necessàries perquè es donin les bifurcacions homoclíniques al voltant de la bifurcació de codimensió dos, restringeixen l'amplada i localització de les zones on es produeixen aquestes bifurcacions en l'espai dels paràmetres -cosa que dificulta molt la seva observació experimental.

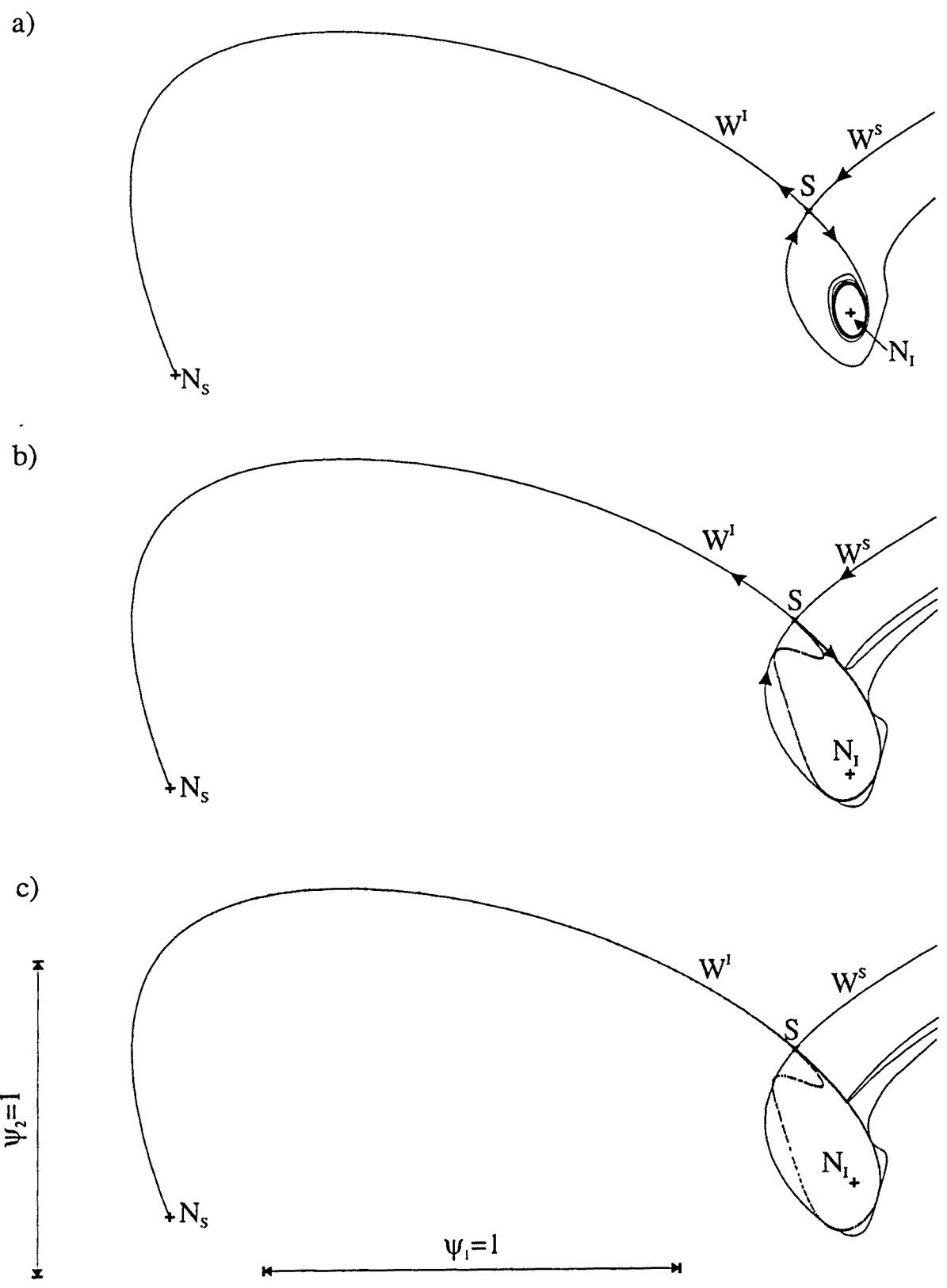
En canvi en aquesta nova situació, existeix una gran diversitat de bifurcacions homoclíniques i a més es produeixen en zones molt àmplies en l'espai dels paràmetres, cosa que facilita la seva observació experimental.

## VI.5 Estudi detallat de dues bifurcacions homoclíniques transversals.

En aquest apartat estudiarem amb més detall dues bifurcacions homoclíniques. Concretament un cas correspon a una bifurcació homoclínica associada a una bifurcació local de codimensió dos, i en l'altre la bifurcació homoclínica es produeix en aplicar la modulació a una òrbita periòdica del sistema autònom a punt de realitzar una bifurcació homoclínica. Demostrarem, a partir d'analitzar els *manifolds* de l'òrbita sella implicada en la bifurcació, que ambdues bifurcacions són iguals, però també comprovarem que en el segon cas és més fàcil estudiar el fenomen homoclínic. També analitzarem l'estructura de l'atractor caòtic involucrat a la bifurcació.

Aquest estudi es centra en les bifurcacions homoclíniques transversals, atès que tots els casos de bifurcacions homoclíniques que he estudiat en el dispositiu bicapa modulats són transversals. En els dos casos anteriors he preferit escollir òrbites selles de període 1 per simplificar l'anàlisi de la bifurcació homoclínica. De tota manera, les bifurcacions homoclíniques transversals per al cas d'òrbites selles de període més gran que 1 no aporten cap canvi fenomenològic rellevant.

En el primer cas hem fixat  $\psi_{EM}=1.7$  i  $\psi_{EB}=10.0$ , i hem variat  $\omega_E/\omega_0$  entre 0.801 i 0.807. La figura VI.6 representa el diagrama de bifurcació d'aquest cas i la seva discussió es troba l'apartat VI.3.2. A la figura VI.11 hem representat els *manifolds* atractiu i repulsiu al pla de Poincaré estroboscòpic de l'òrbita sella per a cinc valors diferents de  $\omega_E$ , numerats de la a) a la e), concretament  $\omega_E/\omega_0$  és igual a: a) 0.807, b) 0.80425, c) 0.8042, d) 0.803 i e) 0.801. En aquests cinc casos podrem analitzar l'evolució dels *manifolds* de l'òrbita sella al voltant de la bifurcació homoclínica transversal. Per simplificar l'anàlisi dels cinc casos anteriors hem representat separatament els *manifolds* i la secció estroboscòpica dels atractors caòtics implicats a la bifurcació homoclínica. Com que la branca inferior del *manifold* inestable convergeix vers l'atractor caòtic, es fa molt difícil distingir-los, per la qual cosa aquesta representació en dues gràfiques separades ens permetrà veure amb més claredat l'evolució dels *manifolds* i dels atractors caòtics. A la figura VI.12 han estat representats 1500 punts de la secció de Poincaré estroboscòpica. Aquestes seccions corresponen cadascuna a una única trajectòria calculada a partir d'un punt inicial proper a l'òrbita inestable  $N_I$ . A cap dels cinc casos no he eliminat el transitori perquè en l'estudi de la bifurcació homoclínica és interessant veure la seva evolució. La causa és que això ens permet de comprovar la desaparició de la conca d'atracció de l'atractor caòtic. En aquestes figures també hem representat les òrbites periòdiques implicades.



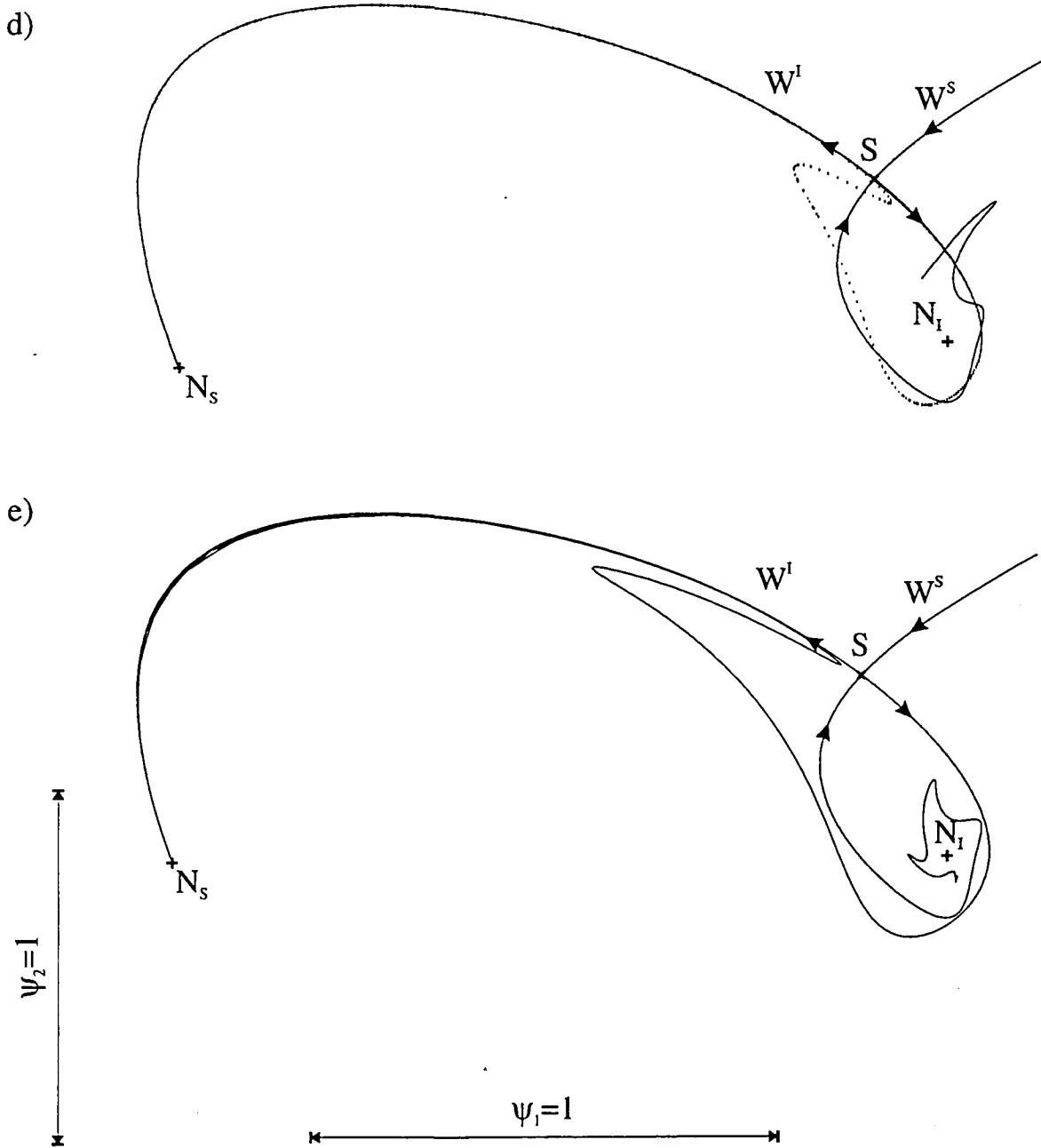


Fig VI.11 *manifolds* estable ( $W^s$ ) i inestable ( $W^i$ ) de l'òrbita sella. Els cinc casos han estat calculats per a  $\psi_{EM}=1.7$  i  $\psi_{EB}=10$ .



a)



b)



c)

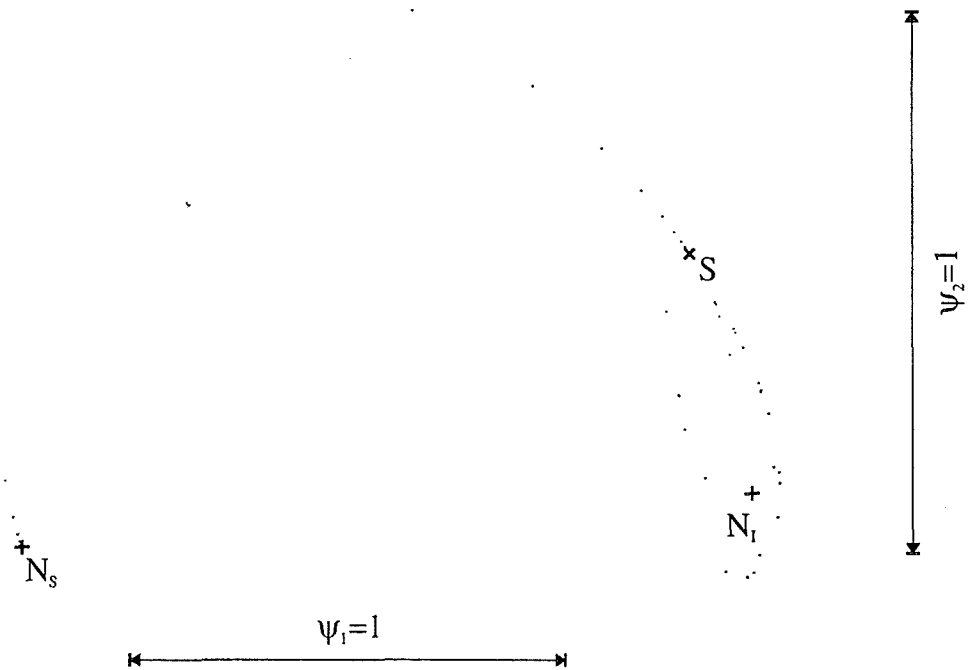


Fig VI.12 Seccions de Poincaré calculades a partir d'un punt proper a  $N_1$  per als casos (b), (c) i (d) de la figura VI.11.

En el cas *a*) ens trobem lluny de la bifurcació homoclínica. Podem observar que existeixen tres òrbites periòdiques: una d'estable  $N_s$ , una altra tipus sella  $S$  i finalment una tercera d'instable  $N_i$ . Aquesta darrera òrbita periòdica s'ha inestabilitzat arran d'una bifurcació de Hopf que ha donat lloc a l'aparició d'un atractor quasiperiòdic. Les dues branques del *manifold* instable de l'òrbita sella convergeixen a l'òrbita estable i a l'atractor quasiperiòdic, respectivament. Podem observar que l'atractor quasiperiòdic i l'òrbita sella es troben força allunyats. També podem comprovar que les branques inferiors dels *manifolds* estable i instable estan allunyades l'una de l'altra. Aquest *manifold* estable és la separatriu entre les conques d'atracció del punt fix  $N_i$  i de l'atractor quasiperiòdic. Qualsevol trajectòria que tingui com a punt inicial un punt situat dins la regió delimitada pel *manifold* estable convergeix asimptòticament vers l'atractor quasiperiòdic. En el cas contrari, quan el punt inicial de la trajectòria es troba fora d'aquesta regió, la trajectòria convergeix vers l'òrbita estable  $N_s$ .

En el cas *b*) podem analitzar una situació molt propera a la bifurcació homoclínica. La branca inferior del *manifold* estable de l'òrbita sella forma una corba que evoluciona aprop de la branca inferior del *manifold* instable. Però encara no s'ha produït la bifurcació homoclínica atès que els *manifolds* estable i instable encara no han interseccionat. Hi ha hagut canvis qualitius en l'estructura dels *manifolds* i de l'atractor. L'atractor ha crescut significativament i ara es troba molt més proper a l'òrbita sella. L'atractor quasiperiòdic s'ha inestabilitzat i ara ens ha aparegut un atractor caòtic. La branca inferior del *manifold* instable convergeix ràpidament vers l'atractor caòtic. Això fa que aquest *manifold*, en recargolar-se al voltant de l'atractor caòtic, presenti una estructura de replegaments i dilatacions complexa. Aquesta estructura ens ha obligat a representar gràficament només els punts del *manifold* calculats, en comptes d'ajuntar-los amb una línia contínua com en el cas anterior. Donat que el sistema és molt dissipatiu, aquesta estructura de replegaments es pràcticament imperceptible en l'atractor caòtic i el *manifold*. També ha quedat deformada la branca inferior del *manifold* estable. Aquest *manifold* presenta uns plegaments pronunciats que s'apropen al *manifold* instable. Aquests plegaments són els que més endavant interseccionaran transversalment el *manifold* instable.

En el cas *c*) ja s'ha produït la bifurcació homoclínica. La branca inferior del *manifold* instable ja no convergeix vers l'atractor caòtic, sinó ho fa cap a l'òrbita periòdica  $N_s$ . En aquest cas també hem representat només els punts del *manifold* instable calculats perquè la branca inferior del *manifold* instable, abans de convergir cap a l'òrbita periòdica  $N_s$ , fa diverses voltes al voltant del punt  $N_i$  en la regió que abans ocupava l'atractor caòtic. En aquesta zona el *manifold* instable també presenta l'estructura de plegaments i dilatacions complexa que es donava en l'atractor caòtic. Aquesta convergència de la branca inferior del *manifold* instable vers el punt  $N_s$  és difícil de veure a la figura VI.11.c, però si ens hi fixem detingudament, podem observar uns punts al costat de la branca superior del *manifold* instable que pertanyen a la branca inferior del *manifold* instable. També podem observar com els *manifolds* estable i instable interseccionen transversalment.

Una òrbita homoclínica passa per cada punt on es produeix una d'aquestes interseccions. Tal i com ja hem vist, el número d'aquestes òrbites homoclíniques

transversals, i per tant el número de punts d'intersecció, és infinit. Aquestes òrbites homoclíniques pertanyen a ambdós *manifolds* simultàniament.

L'existència d'aquests infinits punts d'intersecció fa palesa l'aparició d'aquesta estructura fina de la branca inferior del *manifold* inestable. Encara que la bifurcació és estructuralment estable, hi ha hagut un canvi global en l'estructura dels *manifolds*, atractors i conques d'atracció en l'espai de les fases. La branca inferior del *manifold* inestable convergeix asimptòticament amb  $t \rightarrow -\infty$  vers l'òrbita periòdica inestable  $N_1$ . Ja no existeix l'atractor caòtic, i la seva conca d'atracció ha estat destruïda. Si analitzem la figura VI.12.c podem observar com la trajectòria que inicialment surt d'un punt proper a  $N_1$  acaba convergint asimptòticament amb  $t \rightarrow +\infty$  al punt  $N_5$ . El transitori, il·lustrat a la figura VI.12.c, abans de convergir vers  $N_5$ , fa unes quantes voltes al voltant de  $N_1$  recorrent la regió on abans es trobava l'atractor caòtic. Això fa que aquest transitori conservi l'estructura de plegaments i dilatacions que presentava l'atractor caòtic. És per això, que alguns autors anomenen aquests tipus de situacions *transitoris caòtics*.

Tot i que la bifurcació homoclínica és estructuralment estable, aquest canvi global en l'espai de les fases és discontinu, ja que implica la desaparició sobtada de l'atractor caòtic. Aquesta destrucció sobtada de l'atractor caòtic és característica de les bifurcacions homoclíniques.

Quan l'atractor caòtic es destrueix en la bifurcació homoclínica s'observa com el sistema s'estabilitza cap a l'òrbita periòdica  $N_5$ . Aquesta òrbita periòdica no es troba localitzada dins de l'atractor caòtic. Els dos atractors estables implicats són disjunts i separats per una distància finita a l'espai de les fases. L'existència d'aquesta òrbita periòdica  $N_5$  és anterior a la bifurcació homoclínica i la seva estabilitat no està afectada en cap aspecte per la bifurcació. Això evidencia el caràcter global d'aquesta bifurcació homoclínica. En canvi, tant en el cas dels doblaments de període com en el cas de les intermitències de tipus I, hem vist que l'aparició dels atractors caòtics està directament relacionada amb la inestabilització de les òrbites periòdiques. Aquesta desconexió entre els dos atractors estables implicats és la causa de l'aparició del fenomen d'histèresi. La histèresi ens és molt útil per identificar experimentalment les bifurcacions globals, ja que és fàcilment observable.

En el cas *d)* encara existeix la intersecció entre ambdós *manifolds*, i lògicament també existiran infinites òrbites homoclíniques. Això és degut a què la bifurcació homoclínica transversal, a diferència de la bifurcació homoclínica tangencial, és estructuralment estable. Això vol dir que en el cas de la bifurcació tangencial existeix un únic valor del paràmetre de control en el qual els *manifolds* interseccionen transversalment. És a dir, les òrbites homoclíniques només existeixen per a un valor concret del paràmetre de control. Contràriament, en el cas de les bifurcacions homoclíniques transversals existeix un interval per al paràmetre de control en què es produeix la intersecció dels *manifolds* estable i inestable. Això implica que les òrbites homoclíniques també existeixen per a un interval finit del paràmetre de control. En aquest cas el número de punts del *manifold* inestable que fan voltes al voltant de  $N_1$  ha disminuït considerablement respecte al cas anterior, i la convergència vers  $N_5$  és més ràpida.

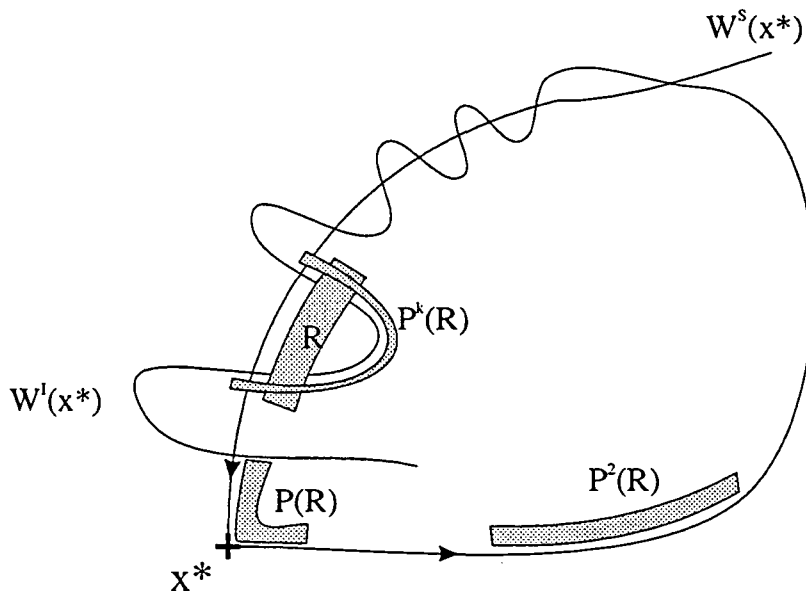


Fig VI.13 Representació esquemàtica del mapa de ferradura en les bifurcacions transversals.

En el darrer cas: *e*), els dos *manifolds* ja no interseccionen. Això implica la desaparició del transitori caòtic. D'aquesta manera hem pogut tornar a representar en línia contínua el *manifold* inestable. La branca inferior del *manifold* estable convergeix ràpidament vers  $N_1$  quan  $t \rightarrow \infty$ . Aquesta branca inferior del *manifold* estable queda embolcallada per la branca inferior del *manifold* inestable que convergeix ràpidament vers  $N_5$ .

Un aspecte que fan especialment interessants les bifurcacions globals és que acostumen a anar acompanyades de l'aparició d'atractors caòtics. En tots els casos de bifurcacions homoclíniques que he estudiat per al dispositiu bicapa modulad he observat que aquestes són transversals i que estan sempre acompanyades de l'aparició d'un atractor caòtic. La naturalesa caòtica d'aquets atractors està relacionada amb el mapa tipus ferradura. El teorema d'Smale-Birkhoff ens assegura que quan es produeix una bifurcació homoclínica transversal, l'aplicació de Poincaré que descriu el sistema té incrustat un mapa tipus ferradura. Per tal d'entendre com està relacionada la bifurcació transversal amb el mapa tipus ferradura suposem, a l'espai de les fases del pla de Poincaré una regió rectangular  $R$  propera al *manifold*, tal i com està representat a l'esquema VI.13. A continuació veurem com les successives aplicacions del Mapa de Poincaré poden realitzar les transformacions descrites al capítol I per al mapa tipus ferradura. Les primeres aplicacions del mapa ens apropen al punt sella  $x^*$ . En aquesta zona el rectangle inicial es contreu en la direcció del *manifold* estable i s'espandeix en la direcció del *manifold* inestable. Després de successives aplicacions la regió s'allunya del punt fix, però roman sempre aprop del *manifold* inestable tal i com està esquematitzat a la figura VI.13. Després de  $k$  iteracions  $P^k(R)$  intersecciona amb  $R$ . Ara bé, degut als plegaments de *manifold* aquesta intersecció, es produeix de la mateixa manera que en el mapa tipus ferradura.

Recordem del capítol I que el mapa tipus ferradura comprenia bàsicament tres accions; una dilatant, una contractant i finalment un plegament. En el cas de les bifurcacions transversals, les components estable i inestable del punt sella són les responsables de la dilatació i contracció del mapa quan aquest s'acosta al punt sella. El plegament és degut al fet que en ser la connexió homoclínica transversal això obliga els *manifolds* a plegar-se.

No obstant això, l'existència del mapa tipus ferradura no ens assegura que el atractor sigui caòtic. De fet, la ferradura d'Smale no descriu un atractor caòtic. Recordem que la ferradura d'Smale és una idealització en el pla de Poincaré realitzada per Smale per tal de deduir de forma rigorosa propietats fonamentals dels atractors caòtics. Tanmateix, la simplificació que implica aquesta idealització té com a conseqüència que el mapa tipus ferradura no ha de descriure necessàriament un atractor caòtic, sinó també pot descriure transitoris caòtics; com per exemple en el model de Lorentz o en els casos *c*) i *d*) de la figura VI.11. Per tal de poder assegurar que en cas *b*) existeix un atractor caòtic, hem calculat els exponents de Lyapunov de la trajectòria il·lustrada a la figura VI.12.b. El càlcul s'ha realitzat a partir de la matriu variacional mitjançant una tècnica usual ens sistemes d'equacions en derivades ordinàries [80]. Per tal d'assegurar la convergència dels exponents de Lyapunov, aquests s'han calculat per a un interval de temps d'aproximadament uns 30.000 períodes de la modulació externa. Els exponents resultants són iguals a : 0.04412, 0 i -0.285819. Com que un dels exponents és positiu, la naturalesa caòtica del cas *b*) de la figura VI.12 queda assegurada. Diversos autors anomenen els atractors caòtics associats al mapa ferradura atractors del tipus Birkhoff-Saw. Atractors d'aquest tipus s'han observat en l'oscil·lador forçat de Van der Pol [28], el sistema d'equacions de Rössler [81] i en el dispositiu tricapa autònom [37,79].

Ara passarem a estudiar la bifurcació homoclínica transversal del cas VI.4. En aquest cas farem un estudi més detallat dels atractors, analitzant més a fons la naturalesa caòtica dels atractors; posteriorment a l'apartat VI.6 analitzarem un cas experimental que concorda força bé els resultats numèrics que tot seguit presentarem. Recordem que en el cas presentat a l'apartat VI.4 l'òrbita sella, implicada en la bifurcació homoclínica, ha sorgit a partir del punt sella del sistema autònom. Abans d'analitzar amb detall l'atractor, farem una breu descripció dels *manifolds* per a tres valors de  $\psi_{EM}$  propers a la bifurcació homoclínica per justificar que es tracta d'una bifurcació homoclínica transversal. La figura VI.14 il·lustra tres seccions de Poincaré on estan representats l'òrbita sella (*S*), els *manifolds* estable ( $W^s$ ) i inestable ( $W^l$ ), i l'òrbita estable  $N_s$ . Els tres casos han estat calculats prenent fixos els valors de  $\psi_{EB}=13.5$  i  $\omega_E=2.33$ , i hem utilitzat com a paràmetre de control  $\psi_{EM}$ . Concretament el valor de  $\psi_{EM}$  és igual en els tres casos a: *a*) 2.2, *b*) 2.65 i *c*) 2.66.

En el primer cas la branca inferior del *manifold* estable actua com a separatriu de les conques d'atracció de l'atractor caòtic i de l'òrbita periòdica  $N_s$ . En el segon cas es pot observar com les branques inferiors del *manifold* estable i inestable s'han anat apropant i fins a arribar a un punt en què pràcticament interseccen, simultàniament l'atractor caòtic i el punt sella s'han apropat mútuament. Encara no s'ha produït la bifurcació homoclínica atès que els *manifolds* estable i inestable no han arribat a interseccionar.

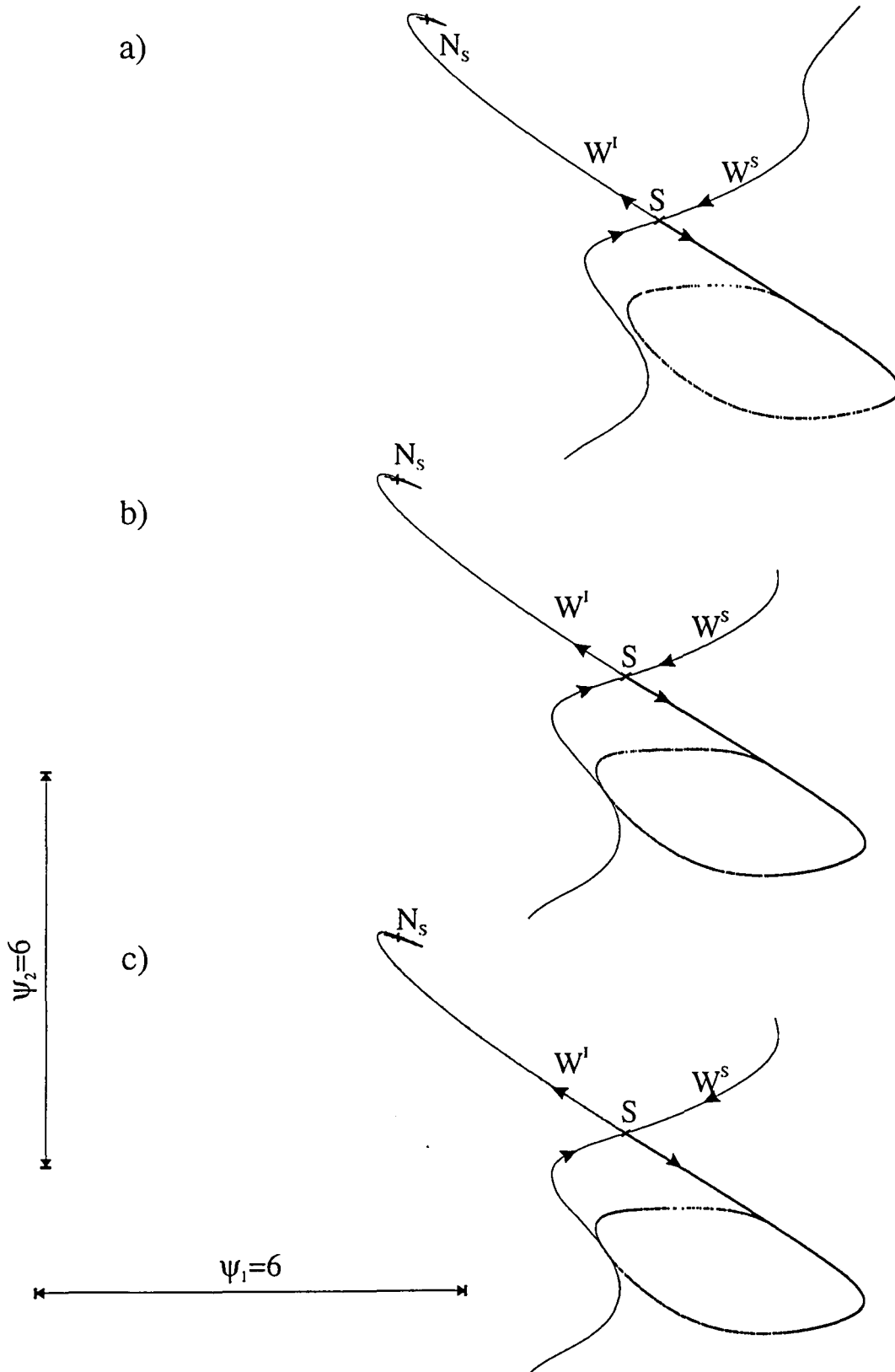


Fig VI.14 *manifolds* estable ( $W^s$ ) i inestable ( $W^I$ ) de l'òrbita sella. Els tres casos han estat calculats per  $\psi_{EB}=13.5$  i  $\omega_E=2.33$ .

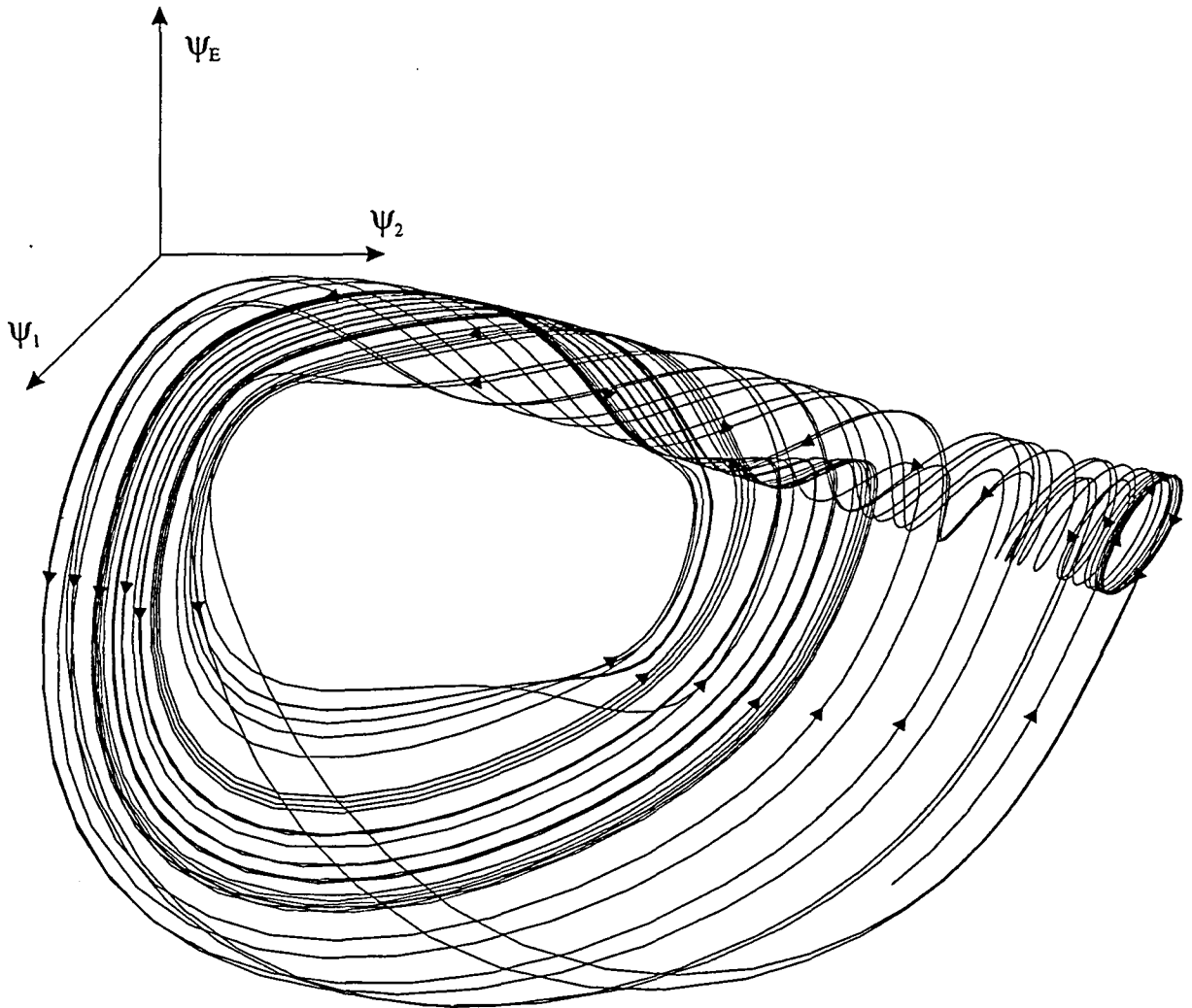


Fig. VI.15 Atractor a l'espai de les fases  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  i  $\psi_E$ . El càlcul ha estat fer per a  $\psi_{EB}=13.5$ ,  $\psi_{EM}=2.6$  i  $\omega_E=2.33$ .

En el tercer cas, ja s'ha produït la bifurcació homoclínica. La branca inferior del *manifold* inestable ja no convergeix vers l'atractor caòtic, sinó que després d'un transitori caòtic retorna al punt sella i convergeix cap a l'òrbita periòdica  $N_S$ . També podem observar com els *manifolds* estable i inestable interseccionen transversalment.

A la figura VI.15 hem representat l'atractor tridimensional per a  $\psi_{EB}=13.5$ ,  $\psi_{EM}=2.6$  i  $\omega_E=2.33$ . Aquesta representació ha estat feta a l'espai tridimensional  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  i  $\psi_E$ . A la figura hem representat 4000 punts de l'atractor caòtic després d'un transitori de 2000 punts. A la gràfica també hem representat l'òrbita inestable sella: aquesta es troba a la dreta de la figura i ha estat dibuixada amb un traç més gruixut. Donat que aquesta situació és molt propera a la bifurcació homoclínica, l'òrbita sella està pràcticament enganxada a l'atractor caòtic. En aquest atractor es poden observar

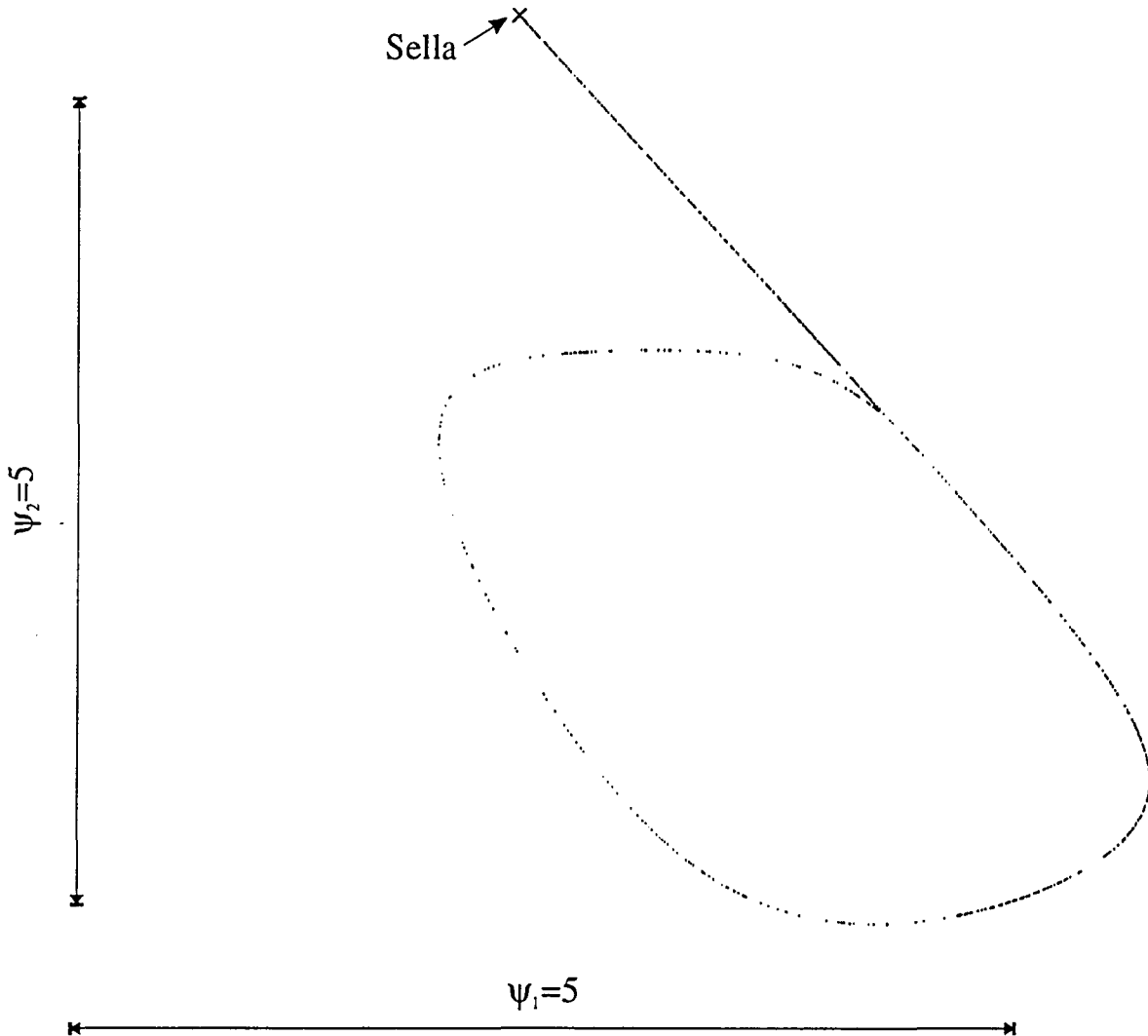


Fig. VI.16 Secció de Poincaré estroboscòpica de l'atractor representat a la figura VI.15.

els tres fenòmens que caracteritzen els atractors caòtics: dilatació, plegament i contracció.

Si sortim de diversos punts situats a l'esquerra de l'atractor, observem com les trajectòries que en surten s'obren, divergint les unes de les altres en apropar-se a l'òrbita sella, i l'amplada de l'atractor en aquesta zona augmenta. Aquesta dilatació es produeix en el pla de la figura, ja que en aquesta zona les trajectòries són coplanàries. Després aquestes trajectòries es repleguen sobre si mateixes, perden el seu aspecte pla i es transformen en una mena de tirabuixó al voltant de l'òrbita sella. Finalment en allunyar-nos de l'òrbita sella les trajectòries es contreen en la direcció perpendicular al pla i tornen a ser coplanàries.

Recordem del capítol primer que les principals característiques d'una solució caòtica són: la dependència sensible de les condicions inicials i una estructura fractal



de l'atractor. Aquestes tres accions que actuen sobre la trajectòries (dilatació inicial, seguida del replegament i la contracció) són les responsables de la naturalesa caòtica de l'atractor. Donades dues trajectòries molt properes, aquestes seran separades per la dilatació inicial. Aquesta separació augmenta progressivament a mesura que descrivim més voltes. D'aquesta manera el sistema és sensible a les condicions inicials, i per tant, impredecible en el sentit explicat al primer capítol. Els posteriors replegament i contracció de les trajectòries fan que el conjunt de les òrbites quedin confinades en un volum finit a l'espai de les fases, cosa que dóna lloc a la formació de l'atractor caòtic. Aquest punt és molt important, ja que en sistemes lineals es pot donar el cas que es produeixi aquesta divergència de les trajectòries. Ara bé, en aquesta situació la solució de sistema no queda limitada en l'espai de les fases, i per tant, no existeix cap atractor ni solució caòtica.

Com a resultat de la infinitat de dilatacions, replegaments i contraccions que pateixen les trajectòries, l'atractor té una estructura fractal. Tot i que sembla que les trajectòries s'ajunten en la zona on es produeix el replegament i contracció, això és impossible donada la unicitat de la solució en un sistema d'equacions determinista com el nostre. Això provoca que en aquestes zones es produeixi una estructura fractal ben complexa només observable per grans ampliacions de l'atractor. En el nostre cas, atès que la contracció de les trajectòries és molt forta, aquesta estructura és extremadament petita. Aquesta circumstància és molt usual en atractors del tipus Birkhoff-Shaw [28].

La figura VI.17 il·lustra la secció de Poincaré de l'atractor de la figura VI.16. Amb una X s'indica la posició de l'òrbita sella. A la figura podem observar dues corbes enganxades, una línia recta que s'acosta a l'òrbita sella i que correspon a la regió on es produïa la dilatació de trajectòries, i una corba tancada corresponent a la regió on es produïa el replegament i contracció de les trajectòries. L'existència d'aquestes dues corbes evidencia en les seccions de Poincaré la naturalesa caòtica de la solució. Aquestes dues corbes no són línies senzilles sinó que tenen una estructura fractal que lògicament, tal i com passava en el cas de l'atractor, és pràcticament inapreciable visualment.

## VI.6 Evidències experimentals de bifurcacions homoclíniques en el dispositiu bicapa modulada.

L'anàlisi de les bifurcacions homoclíniques a partir de resultats experimentals és molt més difícil que en el cas numèric. Aquesta dificultat no només rau en el fet de tenir una resolució molt més petita que en el cas numèric, sinó que, a més, el número de tècniques d'anàlisi és molt més limitat. Per exemple, no podem determinar les solucions no estables, i per tant, no podem avaluar ni l'òrbita sella ni els seus *manifolds*. Aquesta limitació és molt més dramàtica quan intentem estudiar bifurcacions globals que no pas en l'estudi dels fenòmens descrits en els altres capítols, ja que, els *manifolds* de l'òrbita sella són imprescindibles per descriure el tipus de bifurcació homoclínica. És per aquesta raó que presentem els resultats experimentals al final del capítol, perquè una descripció acurada de la fenomenologia de les bifurcacions homoclíniques només es pot fer en base dels resultats numèrics.

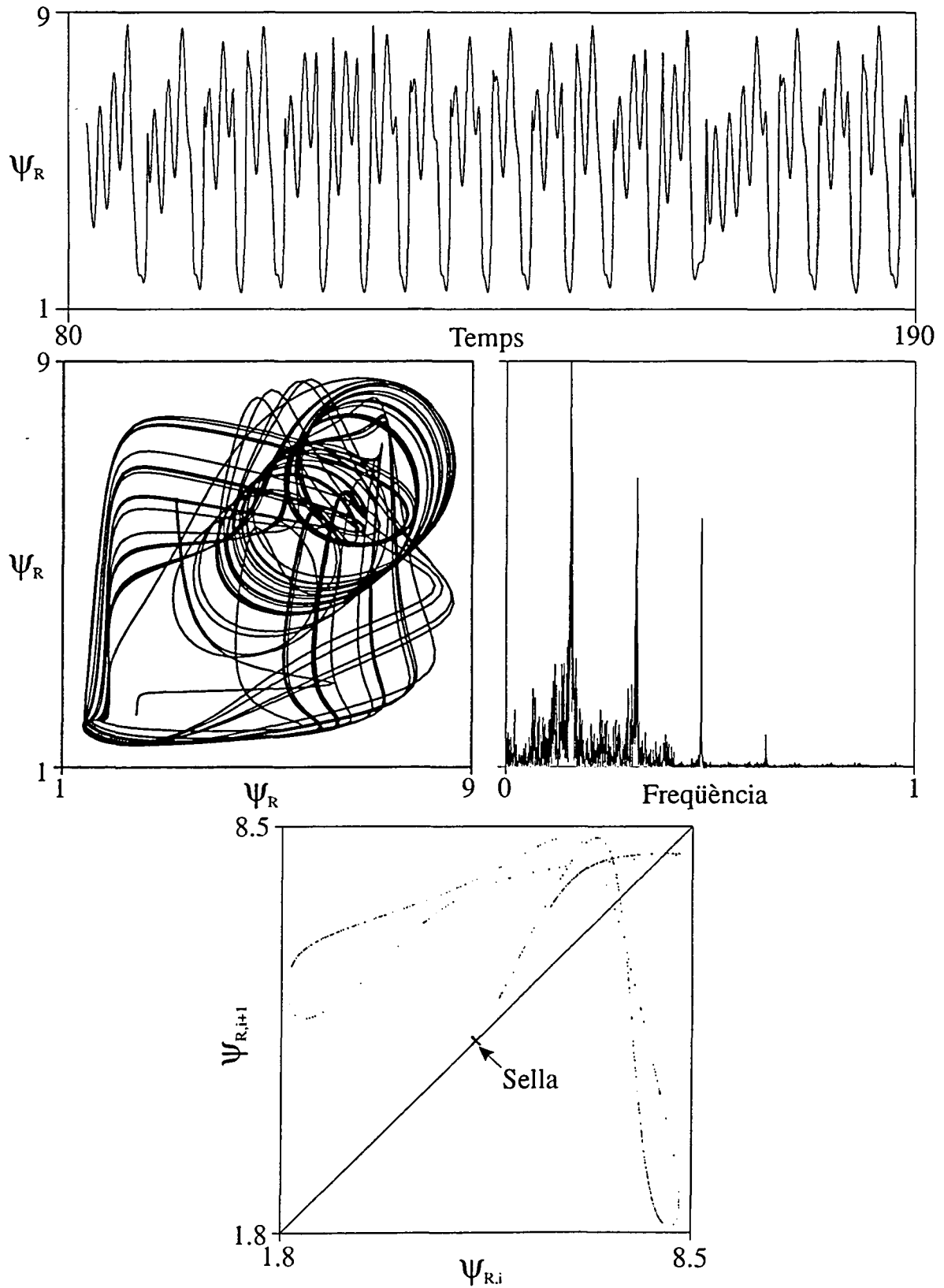


Fig VI.17 Resultats numèrics obtinguts a partir de la fase reflectida on representem: l'evolució temporal, l'atractor reconstruït, la transformada de Fourier i la secció de primer retorn estroboscòpica.

De tota manera existeixen certs fenòmens associats a les bifurcacions homoclíniques com són les discontinuïtats al espai de les fases, l'apropament asimptòtic de les trajectòries a l'òrbita sella i la histèresi que són observables experimentalment i que són la base per a la determinació de l'existència de les bifurcacions homoclíniques en resultats experimentals.

Per tal d'establir una connexió entre els resultats numèrics i experimentals, hem inclòs la figura VI.17 on presentem una sèrie de resultats numèrics reproduïbles experimentalment. A la part superior de la figura hi ha representada l'evolució temporal de la fase reflectida  $\psi_R$ . A la part central esquerra hi ha representada la projecció de l'atractor reconstruït a partir de l'evolució de la fase reflectida mitjançant la tècnica d'*embedding* desplaçat [82,83]; concretament hi hem representat la fase reflectida respecte a la fase reflectida desplaçada un quart de període. A l'esquerra d'aquesta figura trobem la transformada de Fourier de la fase reflectida. I finalment a la part inferior de la figura hi ha el primer retorn de la secció de Poincaré de la fase reflectida. En aquesta representació s'ha indicat la situació de l'òrbita sella inestable amb una X. Els càlculs s'han realitzat prenent els següents valors per a la modulació externa:  $\psi_{EB}=13.5$ ,  $\psi_{EM}=2.6$  i  $\omega_E=2.33$ . Per a aquests valors, el sistema es troba aprop de la bifurcació homoclínica transversal descrita al final de l'apartat anterior.

Recordem que experimentalment l'única variable que podem mesurar és la intensitat reflectida, d'aquí que tots els anteriors resultats s'hagin realitzat a partir de l'evolució temporal de la fase reflectida, que és proporcional a la intensitat reflectida (Capítol II). En aquesta figura, també trobem resumides tres tècniques d'anàlisi de dades experimentals que es poden utilitzar: reconstrucció d'attractors mitjançant tècniques d'*embedding*, càlcul de la transformada de Fourier i mapes de primer retorn estroboscòpics. En aquest apartat també utilitzarem dues tècniques més que són els diagrames de bifurcació estroboscòpics i el càlcul de l'exponent de Lyapunov principal (apèndix C) a partir d'una sèrie temporal. L'estudi dels resultats presentats a la figura VI.17 es fa paral·lelament a la discussió dels resultats experimentals presentats a les figures VI.19, VI.20, VI.21 i VI.22.

En aquest apartat analitzarem dues situacions experimentals diferents; en la primera estudiarem una bifurcació homoclínica que es produeix en aplicar la modulació externa sobre una òrbita periòdica del sistema autònom propera a una bifurcació homoclínica. En el segon cas analitzarem la bifurcació homoclínica d'un atractor caòtic que fa tangència amb una òrbita sella resultant d'un doblament de període subcrític.

En el primer cas experimental la intensitat de base de la modulació externa ( $\psi_{EB}$ ) és igual a 1.11 Volts. Per a aquest valor de la intensitat d'entrada, en el sistema autònom existeix una òrbita periòdica al voltant del punt fix node de la primera branca de la solució estacionària. Aquesta òrbita periòdica es troba propera a la bifurcació homoclínica amb el punt fix sella de la segona branca de la solució estacionària. En aquest cas hem intentat reproduir la mateixa situació que teniem en el cas numèric analitzat a la part final de l'anterior apartat, on la bifurcació homoclínica es produïa quan un atractor caòtic sorgit a partir de modular una òrbita periòdica del sistema autònom feia tangència amb una òrbita sella nascuda del punt fix sella del sistema autònom en aplicar la modulació externa.

## Diagrama de bifurcació experimental

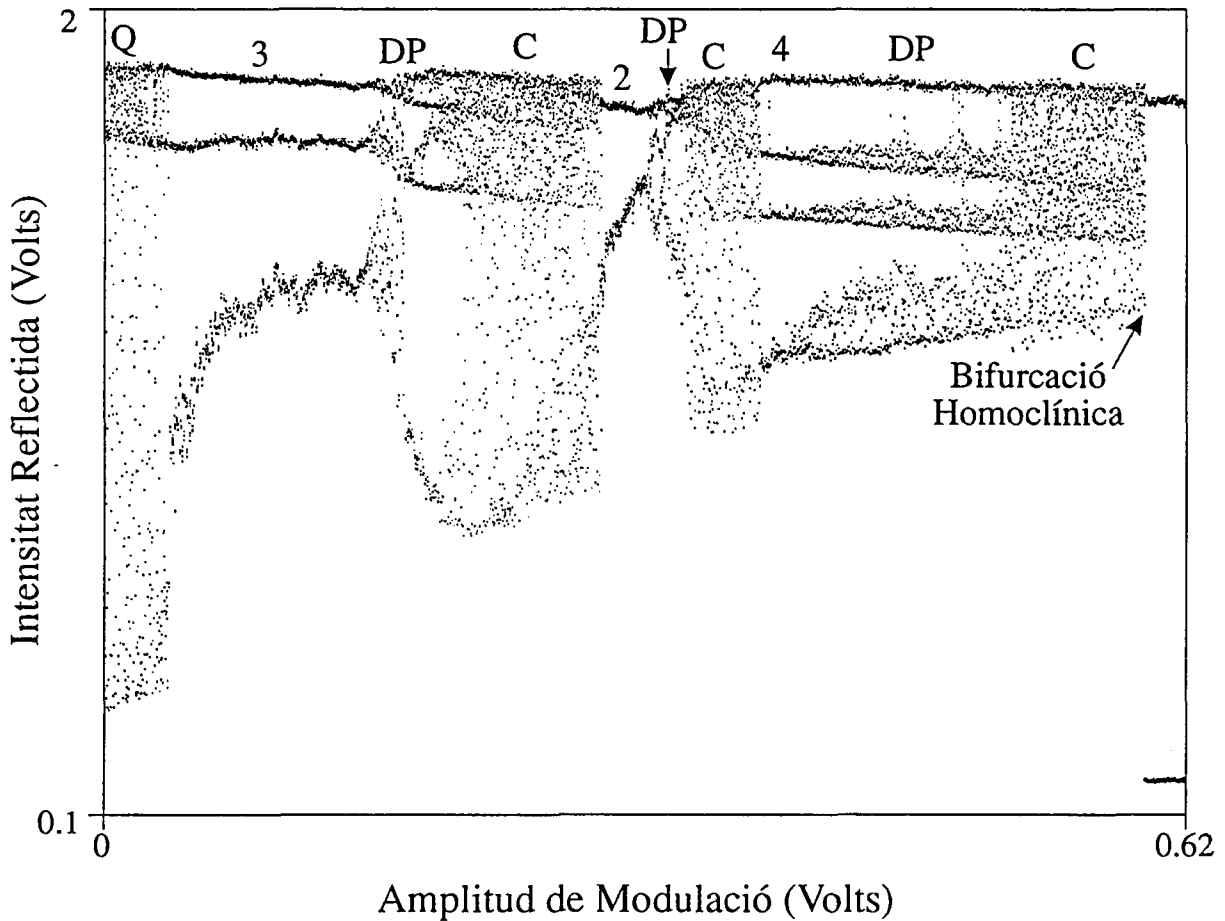


Fig VI.18 Diagrama de bifurcació experimental. La captació de punts s'ha realitzat estroboscòpicament.

És per això que observarem que els resultats experimentals que tot seguit donarem es poden comparar amb els obtinguts numèricament, i especialment amb la figura VI.17 presentada al principi d'aquest apartat. En aquest cas experimental hem fixat la freqüència de la modulació externa a 30.78 Hz, i hem utilitzat com a paràmetre de control l'amplitud de la modulació, la qual hem fet variar entre 0 i 0.62 Volts.

La figura VI.18 representa un diagrama de bifurcació experimental estroboscòpic del dispositiu bicapa modulada on s'il·lustra la bifurcació homoclínica. Hem representat la zona quasiperiòdica amb una  $Q$ , les zones periòdiques amb el número corresponent a la seva periodicitat, les zones caòtiques amb una  $C$ , i finalment les zones on es produeix una seqüència de doblaments de període amb  $DP$ . Inicialment, per a amplituds de modulació petites, no es produeix una sincronització entre els dos oscil·ladors (el sistema bicapa i la modulació externa), de manera que en fer la captació estroboscòpica obtenim un senyal quasiperiòdic a l'esquerra de la figura. En augmentar l'amplitud de la modulació, els dos oscil·ladors es sincronitzen i n'apareix una òrbita de període tres. Aquesta òrbita apareix arran d'una bifurcació

sella node i en augmentar l'amplitud de la modulació desapareix a través d'una seqüència de doblaments de període i dona lloc a l'aparició d'una zona caòtica. Posteriorment aquesta zona caòtica desapareix en una bifurcació sella node i ens apareix una finestra de període dos. Una nova seqüència de doblaments de període dona pas a l'aparició d'una nova zona caòtica. Aquesta zona caòtica desapareix en una bifurcació sella node i ens apareix una finestra de període quatre. Aquesta finestra de període quatre s'inestabilitza a partir d'una nova seqüència de doblaments de període i alhora entrem en una nova zona caòtica. Aquesta zona caòtica desapareix sobtadament, l'atractor caòtic és destruït, i el sistema salta a una òrbita de període dos situada a la dreta de la figura. El salt vers l'òrbita periòdica, a diferència del cas de les intermitències, és discontinu; podem observar com la branca inferior de l'òrbita de període dos es troba molt lluny de la regió ocupada per l'atractor caòtic. Aquesta destrucció de l'atractor caòtic i la discontinuïtat en la transició posen de relleu el caràcter global de la bifurcació responsable d'aquesta transició. El punt de la bifurcació és el punt on l'atractor caòtic desapareix.

Per estudiar amb més detall aquesta bifurcació global tot seguit analitzarem amb cura les evolucions temporals experimentals de la intensitat reflectida per a quatre valors diferents de l'amplitud de la modulació externa, concretament:  $I_{EM} = a) 0.384, b) 0.432, c) 0.452$  i  $d) 0.453$  Volts.

Els tres primers casos corresponen a evolucions caòtiques anteriors a la bifurcació i el darrer cas correspon a l'òrbita de període dos on el sistema s'estabilitza després de realitzar la bifurcació global. Per poder afirmar la naturalesa caòtica dels atractors implicats he calculat l'exponent de Lyapunov no negatiu per als quatre casos a partir de les evolucions temporals de la intensitat reflectida i els valors són els següents:  $\lambda_a=0.011, \lambda_b=0.013, \lambda_c=0.016$  i  $\lambda_d=0.00009$ . El número de punts emprat en aquest càlcul és de 30.000 i equivalen aproximadament a un interval de 152 segons. Els tres primers valors són clarament positius comparats amb el darrer valor, això demostra la naturalesa caòtica dels tres primers casos. El darrer cas és pràcticament nul i correspon a una oscil·lació periòdica. Una altra conseqüència que podem concloure del càlcul dels exponents de Lyapunov, és que el valor de l'exponent de Lyapunov augmenta en apropar-nos al punt de la bifurcació, cosa que no passava en el cas de les intermitències de tipus I. Recordem que donat el caràcter continu de les intermitències de tipus I en apropar-nos al punt de la bifurcació el valor dels exponents de Lyapunov tendia a zero ja que aquest és l'exponent associat a l'òrbita periòdica. Aquesta disminució del caràcter caòtic dels atractors implicats en les intermitències de tipus I es podia observar en la disminució de la freqüència mitjana de les oscil·lacions irregulars. En canvi, en les bifurcacions homoclíniques, aquesta continuïtat no existeix, i per tant, els exponents de Lyapunov no estan obligats a tendir a zero.

A la figura VI.19 hem representat un interval d'un segon de les evolucions temporals de la intensitat reflectida per als quatre casos anteriors. En aquest diagrama tornem a observar el caràcter discontinu de la transició, ja que no hi ha cap semblança entre les oscil·lacions caòtiques dels tres primers casos i les oscil·lacions regulars del darrer cas. Aquesta situació és completament diferent al cas de les intermitències de tipus I, on dins de les oscil·lacions caòtiques existien règims

## Evolucions temporals experimentals

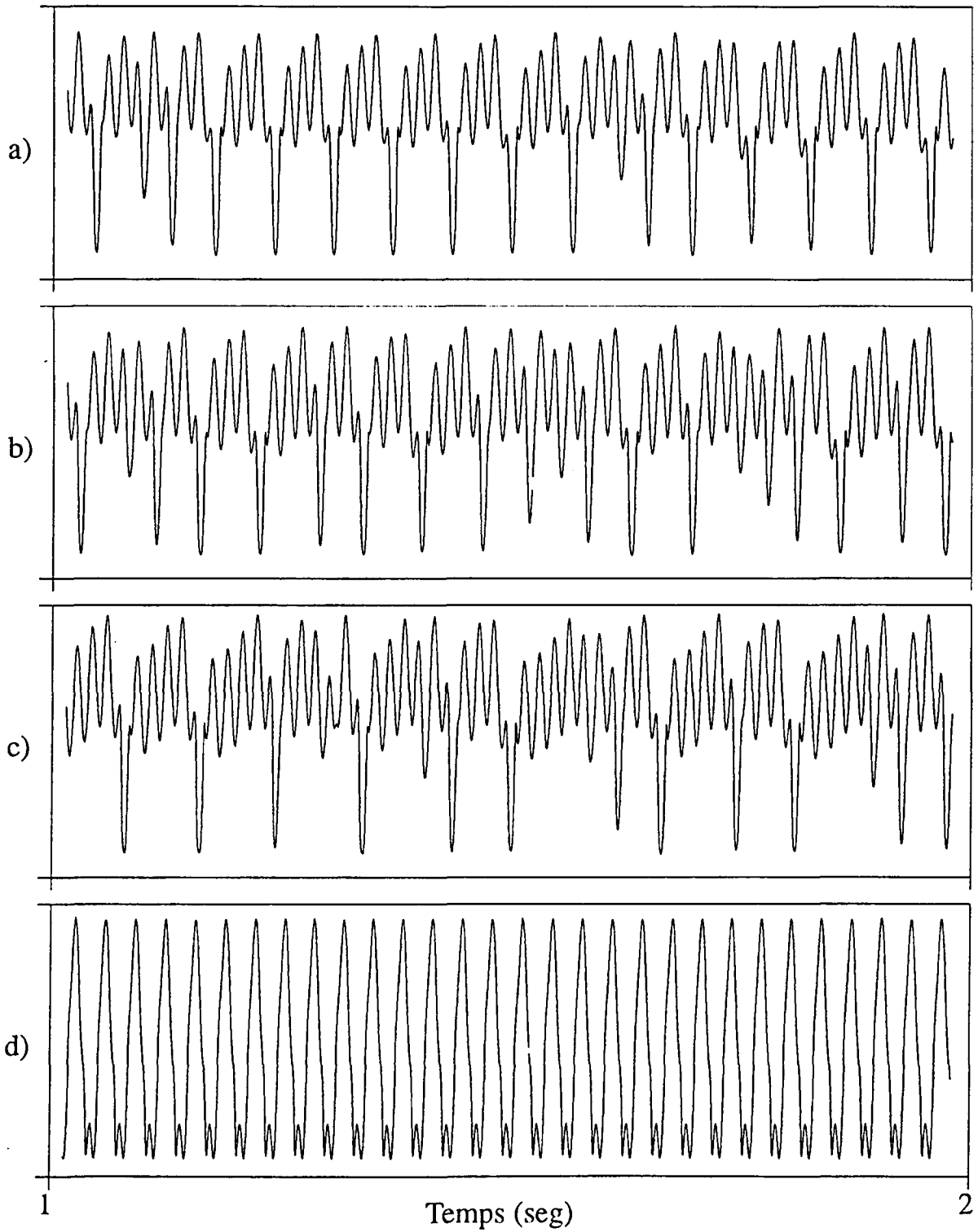


Fig.VI.19 Evolucions temporals experimentals per a quatre casos inclosos a la figura VI.18. Els valors de l'amplitud de la modulació són per als quatre casos: a) 0.384, b) 0.432, c) 0.452 i d) 0.453 Volts.

laminars on la forma de les oscil·lacions eren pràcticament idèntiques a la del règim periòdic. En els tres primers casos sembla que existeixin dues oscil·lacions diferents superposades; una oscil·lació de període llarg, i una altra oscil·lació de període més petit que modula a les oscil·lacions més lentes. El període de les oscil·lacions lentes és irregular, i aquesta irregularitat augmenta a mesura que ens acostem a punt de la bifurcació global. En canvi, les oscil·lacions de període petit són pràcticament regulars i el seu període no varia en acostar-nos al punt de la bifurcació i coincideix amb el període de la modulació externa. Aquesta estructura també es pot observar en la simulació numèrica il·lustrada a la figura VI.17. En aquest cas les evolucions de període llarg corresponen a oscil·lacions al voltant de l'òrbita inestable que es troba dins la conca d'atracció de l'atractor caòtic, mentre que les oscil·lacions de període petit són oscil·lacions al voltant de l'òrbita sella amb què és produirà la tangència homoclínica. Recordem que el període de l'òrbita sella és igual al període de la modulació externa, de manera que el període de les oscil·lacions al voltant de l'òrbita sella és aproximadament igual al període de la modulació externa. Degut al fenomen asimptòtic associat a la proximitat a l'òrbita sella, a mesura que ens acostem a punt de la bifurcació homoclínica, a cada oscil·lació al voltant de l'òrbita inestable, el número d'oscil·lacions al voltant de l'òrbita sella augmenta, i per tant, el temps que trigen les trajectòries a realitzar una oscil·lació al voltant de l'òrbita inestable augmenta. Aquest fenomen es pot observar en la seqüència d'evolucions temporals de la figura VI.19, on a mesura que ens acostem a la bifurcació global s'observa com el període de les oscil·lacions lentes augmenta. Aquest fenomen asimptòtic d'acostament a l'òrbita sella és característic de les bifurcacions homoclíniques, la qual cosa ens permet concloure que aquesta bifurcació global és homoclínica.

Aquest caràcter asimptòtic es pot apreciar amb més claredat en la forma dels atractors. A les figures VI.15 i VI.17 es representen els càlculs numèrics de dos atractors propers a la bifurcació homoclínica. En el primer cas la representació s'ha fet en l'espai de les fases determinat per les variables  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  i  $\psi_E$ , mentre que en el segon cas l'atractor ha estat reconstruït a partir de l'evolució temporal de  $\psi_R$  aplicant la tècnica d'embedding desplaçat. A la figura VI.15 s'observa com les trajectòries que giren al voltant de l'òrbita inestable situada dins l'atractor és recargolen al voltant d'un tub enganxat a l'òrbita sella, les voltes al voltant del tub corresponen a les oscil·lacions més ràpides, mentre que les voltes al voltant de l'òrbita inestable són les oscil·lacions lentes. Quant més aprop es troba l'atractor de l'òrbita sella, més llarg és aquest tub, més temps trigen les trajectòries en girar al voltant del tub i més lentes és fan les voltes al voltant de l'òrbita inestable. Aquesta estructura de l'atractor caòtic amb la formació d'aquest tub també és present en l'atractor reconstruït a la figura VI.17. A la figura VI.20 hem representat els atractors reconstruïts a partir de les evolucions experimentals dels casos a)-d). La tècnica emprada per reconstruir els atractors és l'*embedding* desplaçat i el temps del desplaçament és aproximadament igual a un quart del període de la modulació externa. En els tres primers atractors també es pot observar la formació d'aquest tub resultant del caràcter asimptòtic de la bifurcació homoclínica. A més, tal i com ja hem previst, la longitud d'aquest tub augmenta en acostar-nos a la bifurcació homoclínica. El quart atractor correspon a una òrbita periòdica de període doble al de la modulació externa i la seva forma no té cap semblança amb els altres tres atractors.

Atractors Experimentals

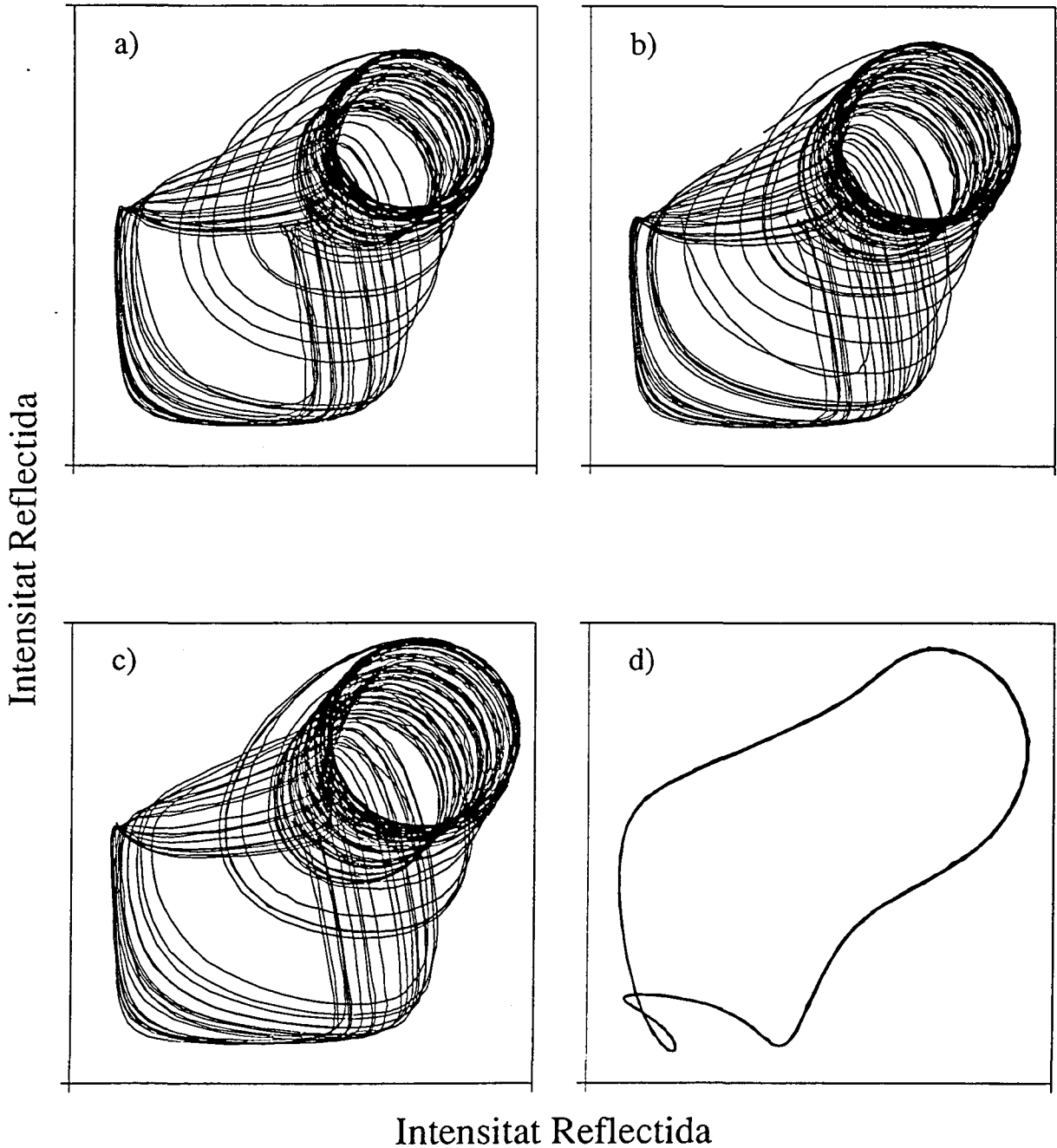


Fig. VI.20 Atractors construïts aplicant la tècnica d'embedding desplaçat a partir de les quatre evolucions temporals experimentals representades a la figura VI.19.



## Transformades de Fourier Experimentals

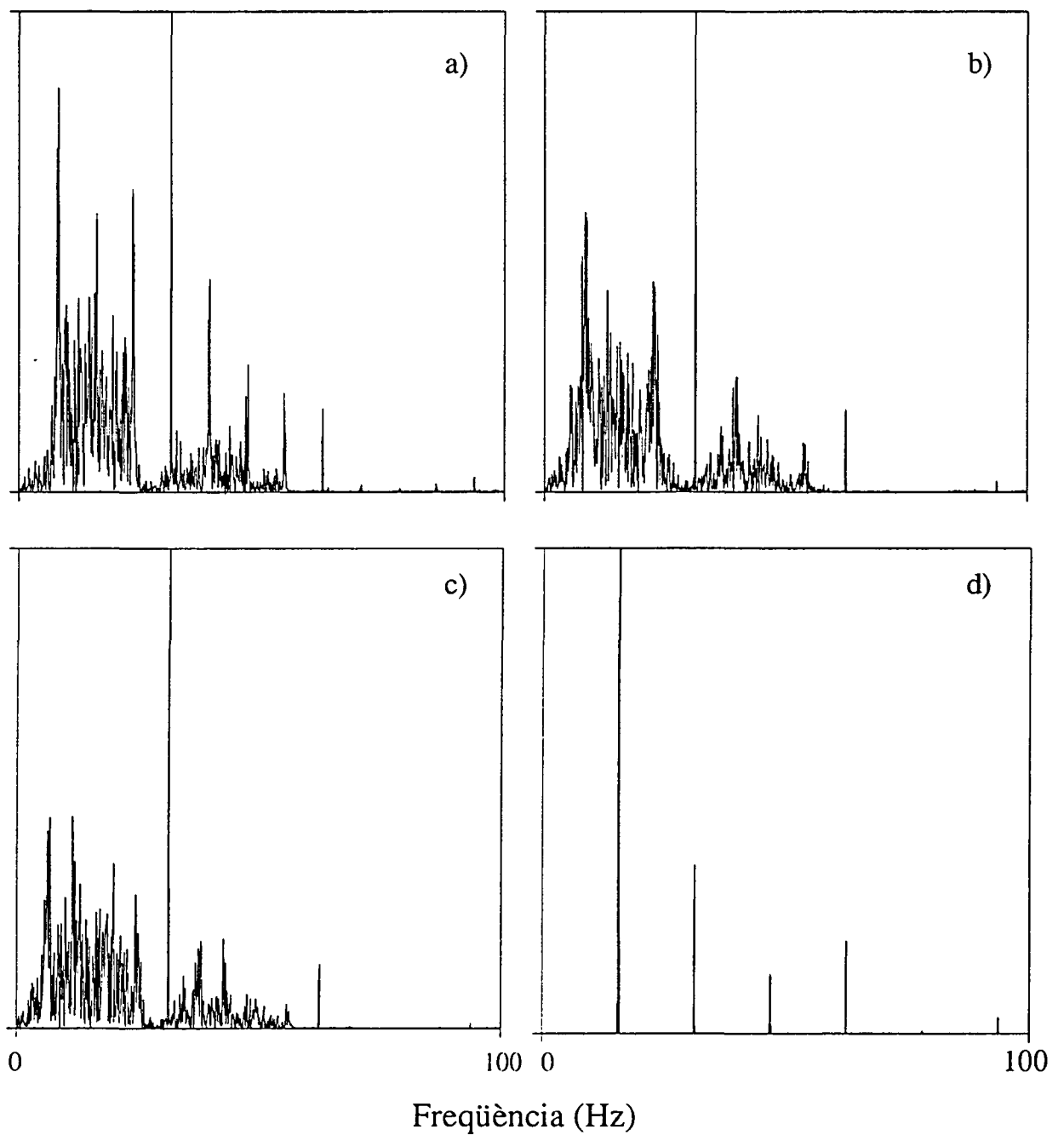


Fig. VI.21 Transformades de Fourier de les evolucions temporals experimentals de la figura VI.19.

## Seccions de Poincaré experimentals

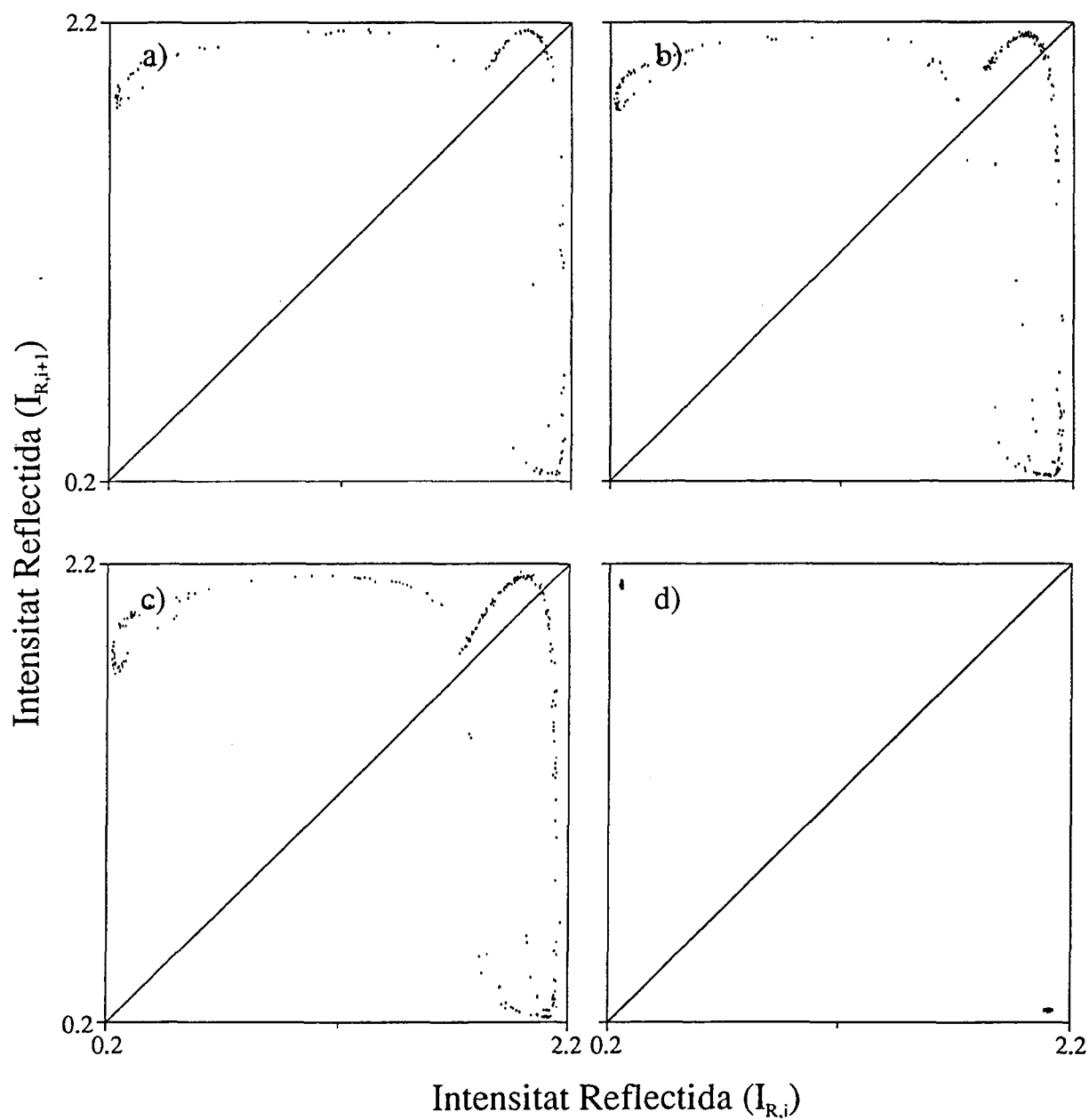


Fig. VI.22 Seccions de primer retorn estroboscòpiques de la intensitat reflectida calculades a partir de les evolucions temporals representades a la figura VI.19.

A la figura VI.21 hem representat les transformades de Fourier calculades a partir de les evolucions temporals experimentals dels casos *a)-d)*. En les transformades de Fourier podem distingir clarament la naturalesa caòtica des tres primers casos respecte de l'espectre periòdic del darrer cas. Dins l'espectre caòtic dels tres primers casos podem distingir una estructura de pics. Observem un pic principal molt nítid que correspon al període de les oscil·lacions regulars ràpides al voltant de l'òrbita sella. A l'esquerra d'aquest pic apareix una banda molt caòtica, molt irregular. L'estructura de pics d'aquesta banda queda cada cop més difuminada mentre ens anem acostant a la bifurcació homoclínica. Això és resultat de la creixent irregularitat de les oscil·lacions lentes en la proximitat a l'òrbita sella.

Aquest acostament a l'òrbita sella també es pot observar en les seccions de primer retorn estroboscòpiques de la intensitat reflectida. A la figura VI.17 també hem introduït una d'aquestes seccions per al cas numèric. En aquesta figura també hem representat la posició del punt sella que es troba al damunt la bisectriu. En aquesta secció s'observa un arc proper a la bisectriu a la part superior dreta. Aquest arc correspon a punts que es troben al damunt del tub. La distància entre l'extrem inferior d'aquest arc i l'òrbita sella disminueix en acostar-nos al punt de la bifurcació. L'existència d'aquest arc també s'observa en les tres primeres seccions de la figura VI.22. Aquestes seccions són els primers retorns estroboscòpics de les evolucions temporals experimentals de la intensitat reflectida pels casos *a)-d)*. Es pot observar en les successives seccions com la longitud d'aquest arc augmenta en acostar-nos a la bifurcació homoclínica.

Finalment estudiarem una altra bifurcació global experimental. El diagrama de bifurcació està il·lustrat a la figura VI.23. Aquest diagrama s'ha obtingut representant la intensitat reflectida en anar variant la freqüència de la modulació externa ( $\omega_E$ ). La intensitat de base i l'amplitud de modulació s'han fixat als valors:  $I_{EB}=3.0$  i  $I_{EM}=1.15$  Volts. Aquest diagrama de bifurcació està dividit en dues parts, la part superior s'ha obtingut variant la freqüència la modulació externa de forma creixent i en la part inferior la variació s'ha realitzat de forma decreixent. La raó és il·lustrar el fenomen d'histèresi que es dona en les bifurcacions globals.

Si ens col·loquem a l'esquerra del diagrama superior trobem una solució periòdica de període  $\dot{u}$ . En anar incrementant la freqüència de la modulació externa aquesta solució periòdica es desestabilitza, i poc després ens apareix una solució caòtica. Si seguim incrementant la freqüència de la modulació externa la solució caòtica desapareix i saltem a una solució periòdica de període dos. Si ara comencem a disminuir la freqüència de la modulació externa no recuperem l'atractor caòtic al mateix punt on abans s'havia produït la bifurcació, sinó que descobrim que dins d'un interval en  $\omega_E$  coexisteixen dues solucions, una de caòtica que havíem trobat en fer la variació creixent de  $\omega_E$ , i una altra de periòdica de període dos, que és la que trobem fent la variació decreixent en  $\omega_E$ . Finalment aquesta solució de període dos es desestabilitza i tornem a l'atractor caòtic. Així doncs ens ha aparegut un cicle d'histèresi. En aquest cas és més difícil de identificar la bifurcació global, ja que no s'aprecia la marcada discontinuïtat del cas experimental anterior. La única prova clara de l'existència d'aquesta bifurcació global és l'aparició d'aquest cicle d'histèresi. La raó d'això és que la situació en què es produeix aquesta bifurcació global és diferent al cas anterior. En aquest cas per al valor de  $I_E=3.0$  Volts, el sistema autònom es troba

## Diagrames de Bifurcació experimentals

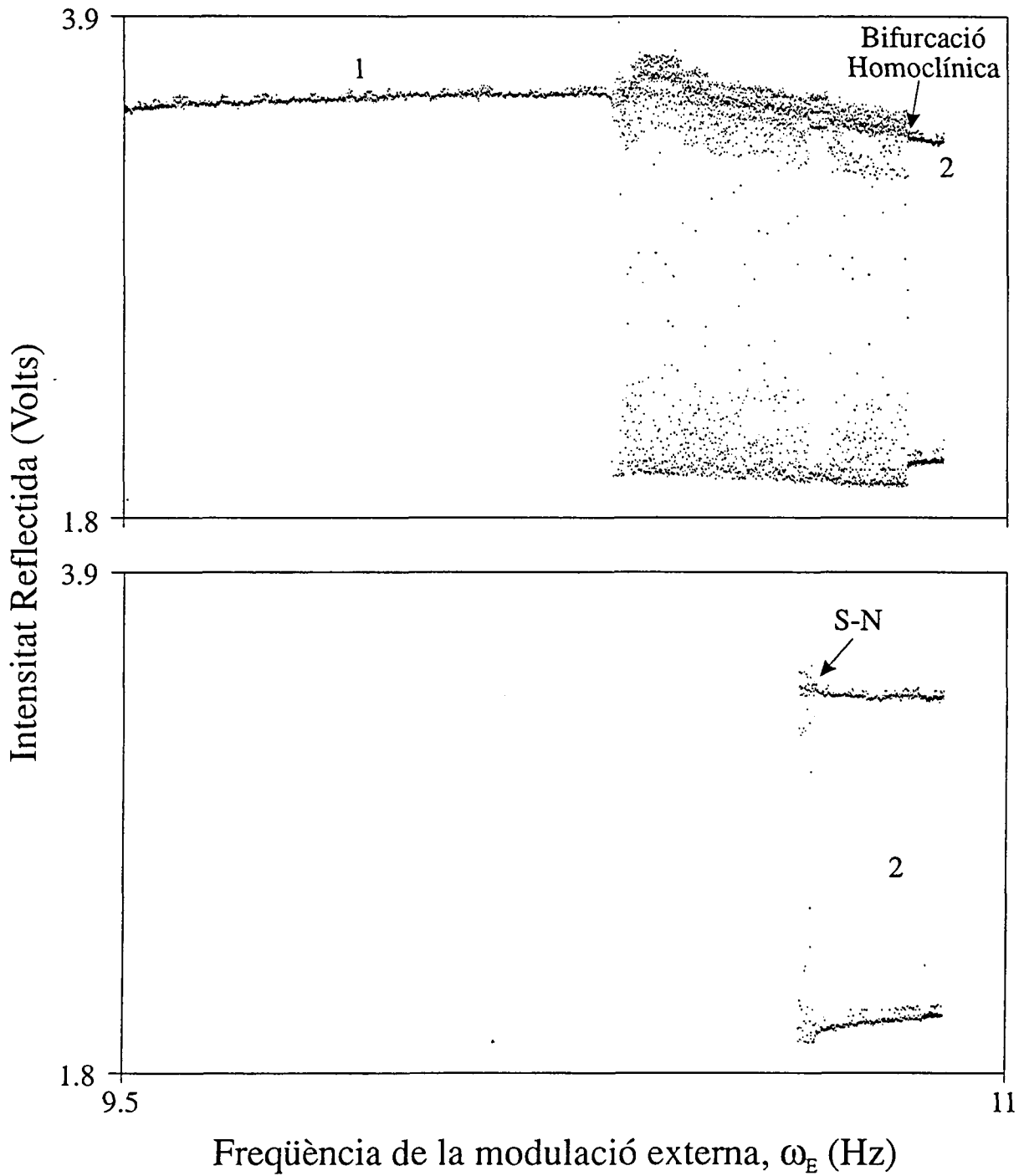


Fig VI.23 Diagrama de bifurcació experimental. La captació de punts s'ha realitzat estroboscòpicament.

lluny de la seva bifurcació homoclínica, i per tant la bifurcació global del sistema modulad no està relacionada amb la bifurcació homoclínica del sistema autònom. La bifurcació global del sistema modulad es produeix entre les finestres de període  $\dot{u}$  i dos. Aquesta situació correspon al cas que hem descrit numèricament a l'apartat VI.3.1. Hem vist, a l'estudi numèric presentat al apartat VI.3.1, que existia una bifurcació homoclínica, associada a una bifurcació local de codimensió dos, on l'atractor caòtic era destruït i el sistema evolucionava vers una òrbita de període dos. Aquesta bifurcació homoclínica es produïa arran de la tangència de l'atractor caòtic amb una òrbita sella de període dos. Aquesta òrbita sella de període dos i l'òrbita estable desapareixien en una bifurcació sella node propera a la bifurcació homoclínica. Aquestes dues bifurcacions limiten l'interval del cicle d'histeresi. La proximitat de la bifurcació sella node a la bifurcació global fa que en el punt de la bifurcació homoclínica l'òrbita de període dos estable i l'òrbita de període dos sella estiguin properes i que les oscil·lacions d'ambdues òrbites periòdiques siguin semblants. Aquesta proximitat emmascara la discontinuïtat en l'espai de les fases de la bifurcació global, cosa que dificulta la distinció entre aquest tipus de bifurcació global i les intermitències de tipus I. Recordem que numèricament hem vist, a l'apartat VI.3.1, que podem passar de forma contínua de la bifurcació homoclínica a les intermitències de tipus I.

La única diferència clara que tenim entre els dos fenòmens és que el cicle d'histeresi té una amplada igual a la distància entre la bifurcació homoclínica i la bifurcació sella node. Tal i com ja hem vist, el punt on passen de forma contínua de la bifurcació homoclínica a les intermitències de tipus I, és un punt de codimensió dos, i allà coincideixen les dues bifurcacions; l'homoclínica i la sella node. A mesura que ens acostem al punt de codimensió dos, la distància entre ambdues bifurcacions disminueix, i per tant, també ho fa l'amplada del cicle d'histeresi. Aquest cicle d'histeresi desapareix a l'altre costat de la bifurcació de codimensió dos, on ja no existeix la bifurcació homoclínica i en el seu lloc ens ha aparegut les intermitències de tipus I. Una altra diferència respecte al cas experimental estudiat abans és que els canvis que s'observen al voltant de la bifurcació homoclínica (variació dels exponents de Lyapunov i el fenomen asimptòtic) es donen en un rang del paràmetre de control molt més petit. Això dificulta en gran mesura la seva observació. En aquest cas, a més, no existeixen unes diferències qualitatives tant pronunciades com en el cas anterior entre la forma i longitud temporal de les oscil·lacions de l'atractor caòtic i l'òrbita de període dos estable, cosa que fa que no puguem observar com en el cas anterior l'estructura de dues oscil·lacions superposades en la forma de les evolucions temporals. Recordem que en el cas anterior l'origen de l'òrbita sella i de l'atractor caòtic eren diferents; el primer sorgia arran de modular el punt sella estacionari del sistema autònom, i el període de l'òrbita sella resultant era igual al de la modulació externa, mentre que l'atractor caòtic sorgia de modular l'òrbita periòdica del sistema autònom, de manera que les oscil·lacions lentes estaven relacionades amb el període de la oscil·lació de l'òrbita periòdica del sistema autònom. Això ens permetia, variant el període de la modulació externa, aconseguir que les dues oscil·lacions superposades tinguessin períodes relativament diferents, i d'aquesta manera podíem distingir clarament aquesta estructura.

## Evolucions temporals experimentals

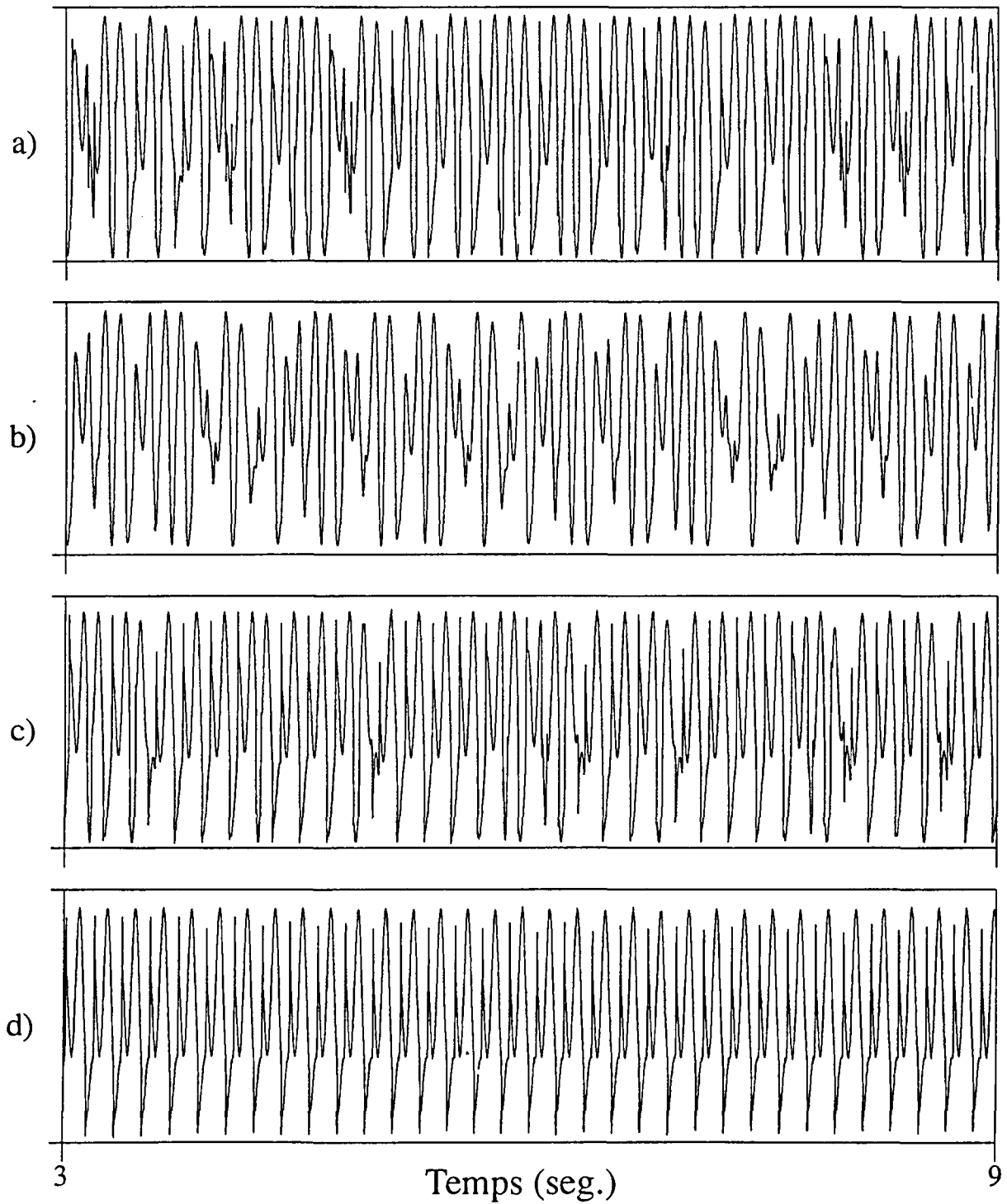


Fig.VI.24 Evolucions temporals experimentals per quatre casos inclosos a la figura VI.23. Els valors de  $\omega_E$  pels quatre casos són : a) 10.36, b) 10.447, c) 10.79 i d) 10.88 Hz.

En aquest cas, no tenim la llibertat de variar el període de les dues oscil·lacions ja que tots els atractors implicats han sorgit de modular l'òrbita periòdica del sistema autònom.

Igual que en cas anterior, per estudiar amb més detall la bifurcació homoclínica hem escollit quatre casos propers al punt de la bifurcació. Els valors concrets de la freqüència de la modulació per a aquests quatre casos són: *a*) 10.36, *b*) 10.447, *c*) 10.79 i *d*) 10.88 Hz. Els tres primers casos corresponen a atractors caòtics anteriors a la bifurcació homoclínica i el darrer cas és l'òrbita periòdica de període dos a què el sistema salta després de produir-se la bifurcació homoclínica. Per demostrar la naturalesa caòtica dels tres primers casos he calculat els respectius exponents de Lyapunov i els valors obtinguts són: *a*) 3.78, *b*) 2.96, *c*) 2.99 i *d*) 0.16. Aquests valors són força més grans que en el cas anterior atès que les escales de temps en ambdós casos són força diferents -- recordem que els exponents de Lyapunov són una mesura relativa de la divergència de les trajectòries respecte al temps --. Aquests resultats, a banda de mostrar que els valors dels exponents de Lyapunov dels tres primers casos, són clarament més grans que el darrer cas, cosa que evidencia la naturalesa caòtica de les evolucions. També ens demostra l'existència d'una discontinuïtat; observem que, tot i que els casos *b*) i *c*) estan més distanciat en funció del paràmetre de control que els casos *c*) i *d*), el canvi en els valors dels exponents de Lyapunov ha estat molt més sobtat entre *c*) i *d*) que entre *b*) i *c*).

A la figura VI.24 hem il·lustrat les evolucions temporals per als quatre casos anteriors. En aquestes evolucions podem distingir el caràcter erràtic dels tres primers casos comparats amb l'aspecte regular del darrer cas. En les tres primeres evolucions no s'observa l'estructura d'oscil·lacions superposades del cas anterior i el fenomen asimptòtic té la mateixa forma que els règims laminars de les intermitències de tipus I. Donada la proximitat de la bifurcació sella node de l'òrbita de període dos, la forma de les oscil·lacions al voltant de l'òrbita sella de període dos tenen una forma pràcticament idèntica a les oscil·lacions regulars del cas *d*) corresponents a l'òrbita de període dos estable. Quant més aprop estem de la bifurcació homoclínica, el número d'oscil·lacions al voltant de l'òrbita sella augmenta, i això es tradueix en l'aparició d'uns règims amb oscil·lacions regulars cada cop més llargs. La forma d'aquestes oscil·lacions és molt semblant a les del règim periòdic del cas *c*). Aquesta descripció del fenomen asimptòtic encaixa molt bé amb la descripció de les intermitències. Hi ha però una diferència respecte a les intermitències de tipus I: en el cas de les intermitències, donat el caràcter continu de la transició, la longitud dels règims laminars no està acotada. Quant més ens acostem a la bifurcació sella node, més llargs són els règims laminars, de manera que de forma contínua passem de règims laminars cada cop més llarg, -- i a un únic règim laminar, de longitud infinita. És a dir, la solució periòdica. En el cas de les bifurcacions homoclíniques, atès que aquestes són discontinues, la longitud dels règims laminars no es pot allargar indefinidament. A la figura podem observar que tot i que el cas *c*) és significativament proper a la bifurcació, les longituds dels règims laminars són qualitativament molt més curtes que les observades al capítol IV (capítol dedicat a l'estudi de les intermitències).

Atractors experimentals

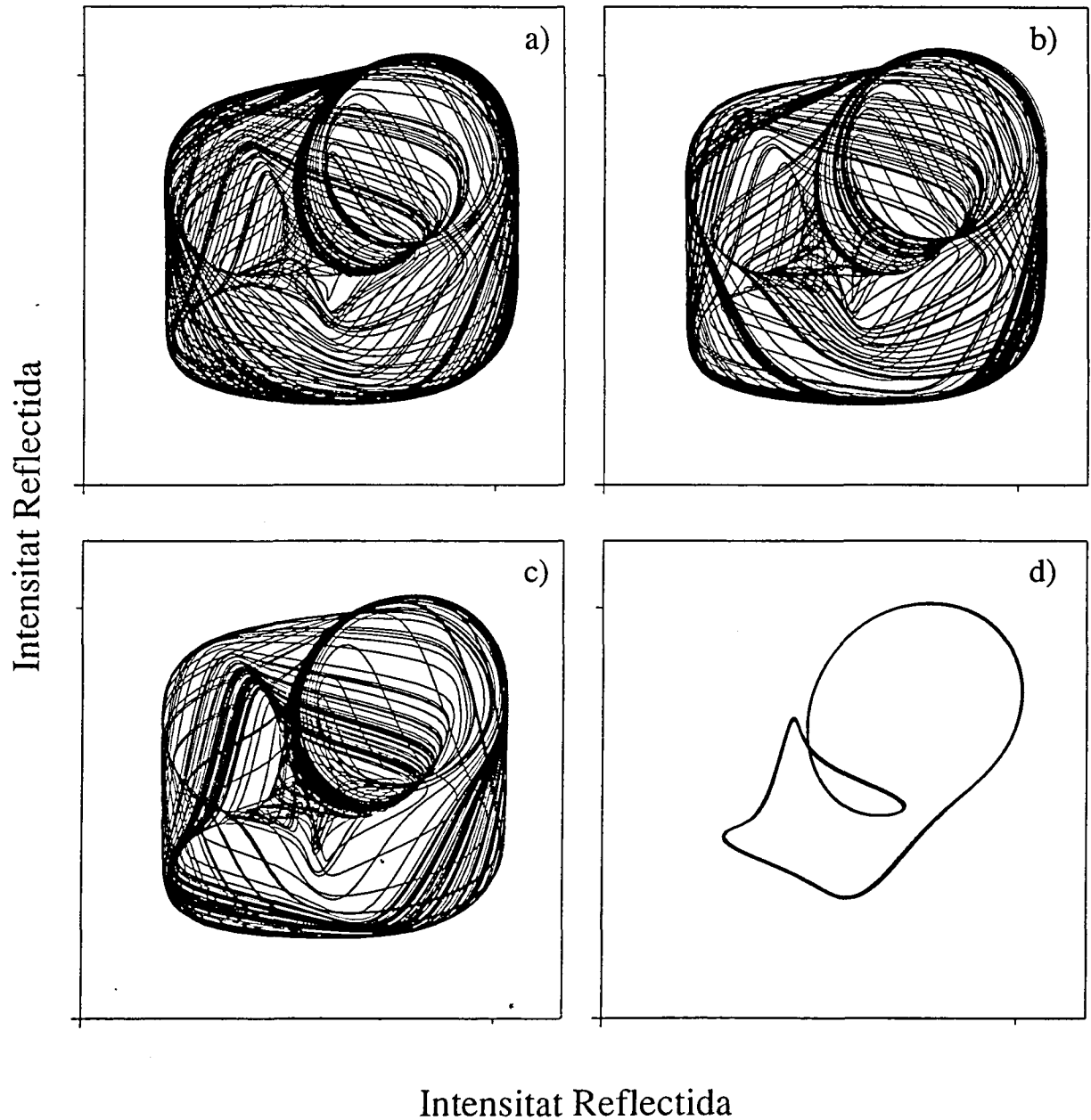


Fig. VI.25 Atractors construïts aplicant la tècnica d'embedding desplaçat a partir de les quatre evolucions temporals experimentals representades a la figura VI.24.



Transformades de Fourier Experimentals

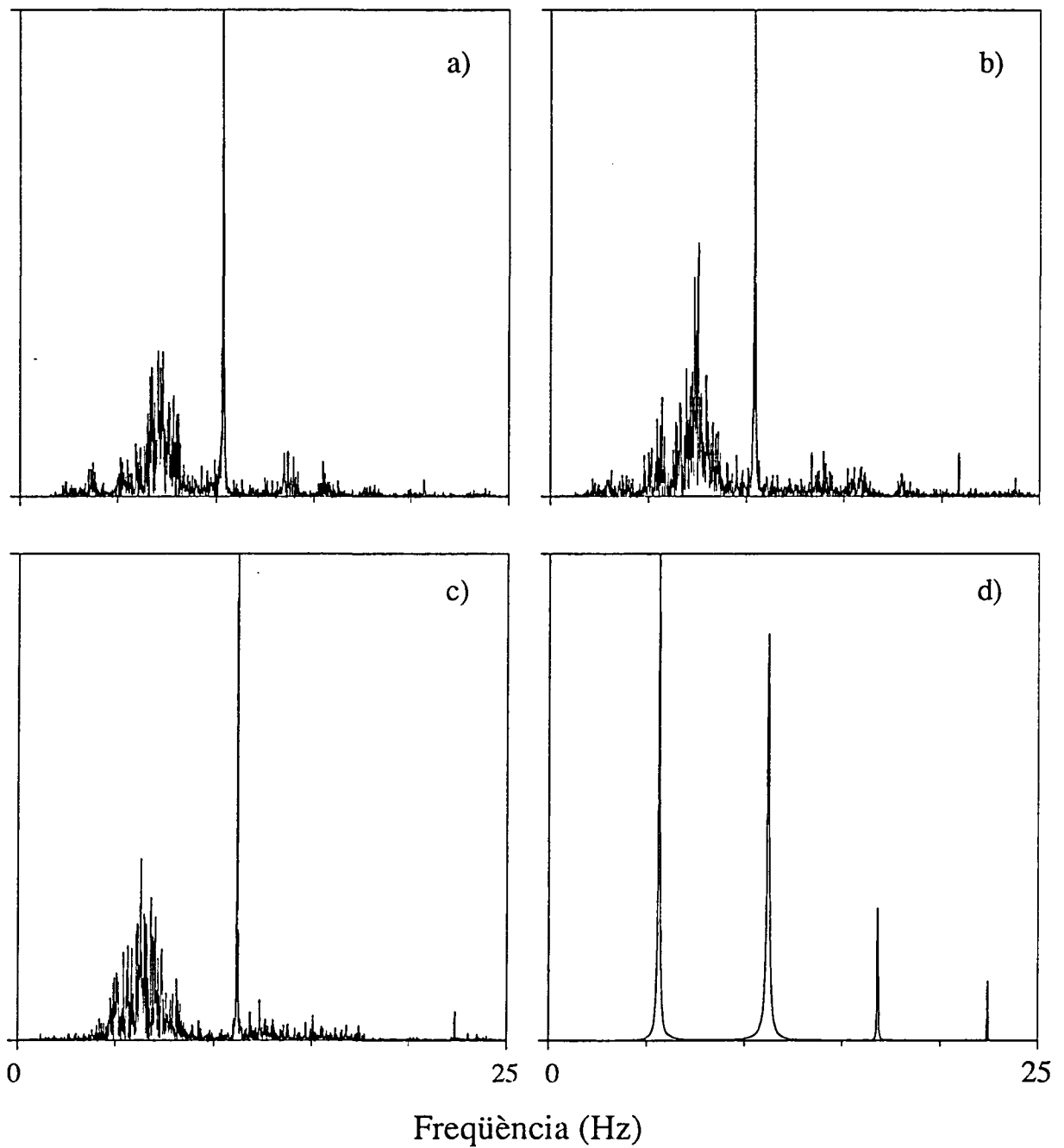


Fig. VI.26 Transformades de Fourier de les evolucions temporals experimentals de la figura VI.24.

## Seccions de Poincaré experimentals

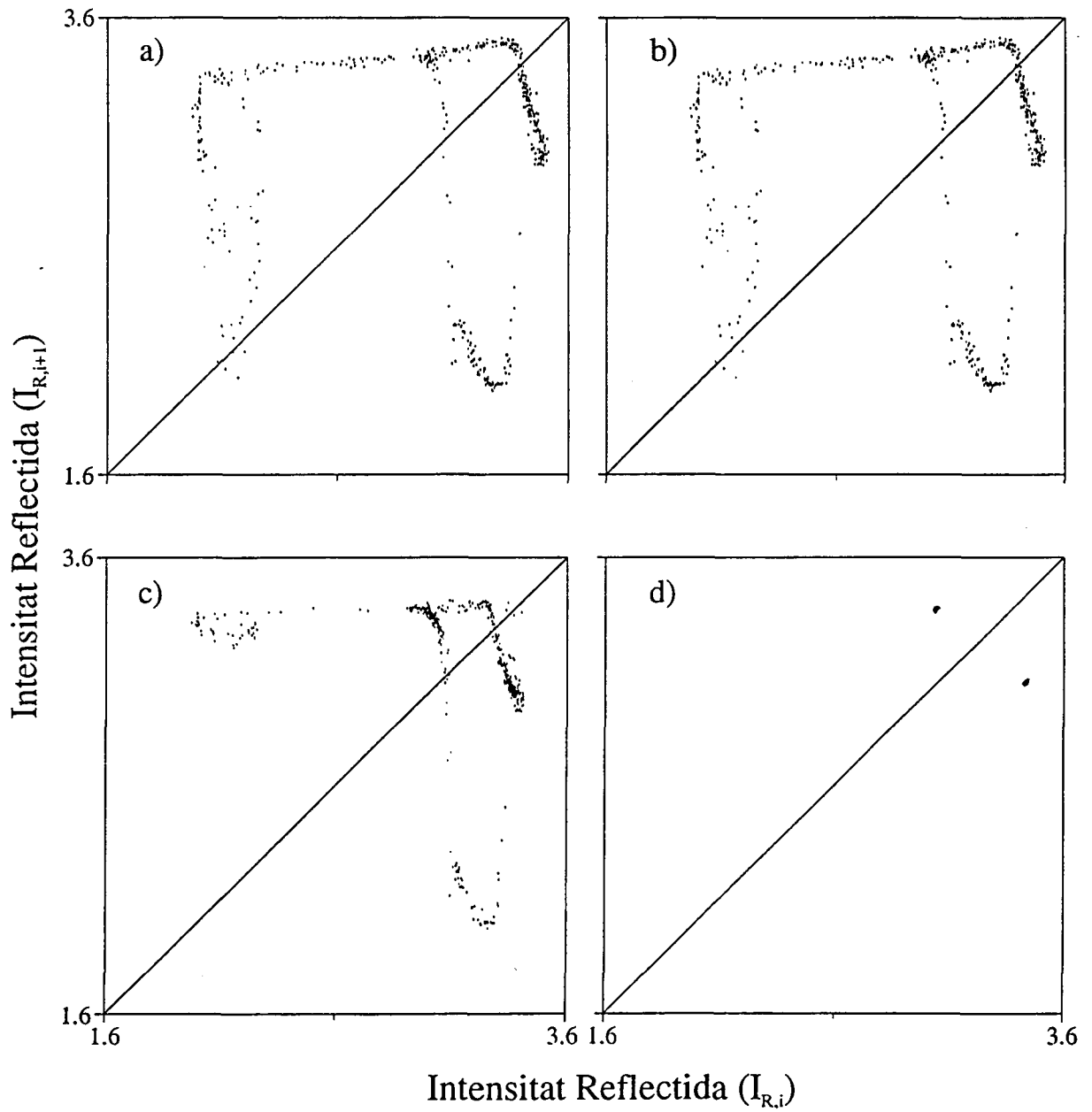


Fig. VI.27 Seccions de primer retorn estroboscòpiques de la intensitat reflectida calculades a partir de les evolucions temporals representades a la figura VI.24.

Aquest fenomen també el corrobora els valors obtinguts al càlcul de l'exponent de Lyapunov no nul; un allargament continu dels règims laminars implica la tendència a zero de l'exponent de Lyapunov no negatiu en acostar-nos al punt de la bifurcació. En canvi, hem observat una variació sobtada de l'exponent de Lyapunov que està en contradicció amb aquesta tendència contínua.

A la figura VI.25 hem representat els atractors reconstruïts a partir de les evolucions temporals experimentals dels quatre casos *a*)-*d*). La tècnica per reconstruir els atractors ha estat la tècnica de l'*embedding* desplaçat, i el temps desplaçat és aproximadament igual a un quart del període. També podem observar en l'estructura dels atractors el fenomen asimptòtic. S'observa un progressiu enfosquiment de la zona més propera a l'òrbita periòdica en els successius atractors. Aquest enfosquiment és resultat de l'acumulació de trajectòries al voltant de l'òrbita periòdica sella que, recordem que està molt propera i és significativament semblant a l'òrbita periòdica estable il·lustrada a la figura VI.25.d.

A la figura VI.26 hem representat les transformades de Fourier calculades a partir de les evolucions temporals experimentals dels casos *e*) i *d*). Podem observar la presència d'un pic principal molt nítid. La freqüència d'aquest pic és igual a la de la modulació externa. A més, a l'esquerra d'aquest pic existeix una banda contínua de freqüències que evidencia la naturalesa caòtica dels tres primers casos. Aquesta banda està aproximadament centrada al voltant de la freqüència meitat de la modulació externa, i correspon a la freqüència d'oscil·lació de l'òrbita sella.

Finalment a la figura VI.27 hem representat les seccions de Poincaré estroboscòpiques de primer retorn calculades a partir de les evolucions temporals experimentals dels casos *a*)-*d*). En aquestes seccions podem observar com els tres primers casos són clarament caòtics, mentre que el darrer cas és una òrbita de període dos. També podem comprovar que la forma de les seccions no té res a veure amb les que obtenien en el cas de les intermitències. Quan la transició és intermitent, en el mapa de primer retorn s'observa, entre la bisectriu i la secció de Poincaré, la formació d'uns canals responsables de l'aparició dels règims laminars. En canvi, en les seccions de Poincaré de la figura VI.27 no apareixen aquests canals. Els règims laminars sorgeixen arran del fenomen asimptòtic d'acostament a l'òrbita sella. A l'angle dret superior de les seccions podem observar com dues corbes s'acosten a dos punts. Aquests dos punts corresponen a l'òrbita sella i estan relativament propers a la posició ocupada pels dos punts que representen l'òrbita de període dos estable a la figura VI.27.d.

## VII.- CONCLUSIONS.

En el present treball hem estudiat tant numèricament com experimentalment la dinàmica d'un dispositiu biestable opto-tèrmic il·luminat amb un feix làser modulat en intensitat. Aquest dispositiu és un interferòmetre Fabry-Perot, en el qual l'espaciador de la cavitat està format per dues capes de materials transparents amb coeficients termo-òptics oposats i el mirall d'entrada consisteix en una pel·lícula metàl·lica de gruix i constants òptiques tals que optimitzen el contrast interferencial sobre l'absorció de llum en la mateixa.

La dinàmica del dispositiu pot ser descrita mitjançant un sistema d'equacions homogènies de transport de calor, que són lineals i es troben subjectes a les corresponents condicions de continuïtat i de frontera, entre les quals s'ha de destacar la condició de frontera que descriu el focus de calor localitzat en el mirall d'entrada. Aquesta condició de frontera és no local i no lineal i, de fet, és la responsable de les no linealitats dinàmiques en el dispositiu. És no lineal perquè involucra la funció interferomètrica, la qual no és altra que la típica funció d'Airy, i és no local perquè la fase interferomètrica depèn en forma integral de la distribució de temperatures en el espaciador de la cavitat.

Les característiques més destacables de la resposta del dispositiu bicapa autònom són:

- La dimensió dinàmica efectiva del sistema és dos.
- La solució estacionària és multivaluada i presenta una estructura de branques en forma de essa. Les bifurcacions sella node que es produeixen en els punts de retorn són responsables del fenomen d'histeresi característic dels sistemes biestables.
- El sistema exhibeix amb facilitat una certa varietat de bifurcacions homoclíniques sense estructura complicada. Aquesta facilitat resulta de la presència de les diverses parelles de punts sella node associades a la resposta multiestable i, del fet que els cicles límit generats per bifurcació de Hopf dels nodes poden engrandir-se fins a fer tangència a una sella veïna.

En introduir una modulació externa, el sistema d'equacions presenta una dependència explícita en el temps i la dimensió dinàmica efectiva del sistema passa a ser tres. Això té dues conseqüències immediates:

- No existeixen solucions estacionàries, l'atractor més senzill que podem trobar és una òrbita periòdica.
- El tercer grau de llibertat fa possible l'existència de fenòmens dinàmics més complexos i l'aparició de caos.

Com a cosa prèvia a l'anàlisi dinàmica del dispositiu bicapa hem resolt el problema de la reducció del sistema d'equacions en derivades parcials (EDP's), obtenint un sistema pràcticament equivalent d'equacions en derivades ordinàries (EDO's) d'ordre igual al nombre de capes en l'espaciador de la cavitat. Això s'ha fet pel cas general d'un espaciador multicapa amb un nombre de capes arbitrari, s'ha establert una relació directa entre els coeficients del sistema EDO's i els paràmetres

físics del dispositiu i s'ha verificat numèricament la coincidència d'ambdues descripcions. En el cas de la bicapa amb excitació modulada, el sistema ve descrit per un sistema d'ordre dos no autònom o, equivalentment, per un sistema d'ordre tres autònom.

La reducció del sistema d'EDP's es fonamenta en l'anàlisi lineal d'estabilitat de la seva solució estacionària i en les simulacions numèriques obtingudes a partir de la seva integració. La raó física d'aquest comportament de baixa dimensió es troba en el fet que la variable que descriu el bucle de realimentació no lineal del sistema, la fase interferomètrica, està completament determinada per les temperatures promig de les diverses capes del espaciador. Les noves variables del sistema són les fases interferomètriques associades a cada capa, les quals són proporcionals a la temperatura promig dins la capa.

La reducció del sistema d'equacions ens ha permès d'implementar diverses tècniques d'anàlisi numèric molt potents, i que només són disponibles per a sistemes d'EDO's. Concretament per a la realització d'aquest treball hem emprat tècniques de localització, seguiment i càlcul d'estabilitat d'òrbites periòdiques, càlcul de manifolds estables i inestables d'òrbites periòdiques i càlcul dels exponents de Lyapunov.

L'anàlisi dinàmic del dispositiu bicapa forçat s'ha realitzat en dues zones diferents caracteritzades per l'estat del dispositiu en absència de la modulació externa. Les dues situacions considerades corresponen a:

- El sistema autònom es troba en una òrbita periòdica propera a la bifurcació de Hopf d'on ha sorgit.
- El sistema autònom es troba en una òrbita periòdica propera a una bifurcació homoclínica on serà destruïda.

En el primer cas hem observat una rica dinàmica característica dels sistemes no autònoms, comparable a la de sistemes paradigmàtics com són l'oscil·lador de Van der Pol forçat o el Brusselator forçat, i sempre amb una gran concordància entre teoria i experiment. Més concretament:

- a) Hem observat tant numèricament com experimentalment seqüències de doblaments de període i cascades inverses. En aquestes cascades inverses hem pogut fer un estudi detallat de les crisis internes responsables de la formació de bandes caòtiques. En el dispositiu bicapa modulad aquestes crisis internes són bifurcacions homoclíniques transversals.
- b) Hem observat tant numèricament com experimentalment intermitències de tipus I quasiperiòdiques i caòtiques.
- c) Hem fet un estudi detallat de codimensió dos de la sincronització entre el dispositiu bicapa i la modulació externa. Hem pogut observar la existència de les llengües d'Arnold resultants de l'afermament de freqüències i hem descobert una rica varietat de inestabilitats associades a transicions entre dues d'aquestes llengües. Concretament hem pogut demostrar l'existència de cinc tipus diferents de bifurcacions locals de codimensió dos. Al voltant d'aquestes bifurcacions de codimensió dos hem descobert una complexa dinàmica associada a bifurcacions homoclíniques transversals i a solucions caòtiques. També hem descobert una bifurcació de codimensió dos global en la que podem passar de forma contínua d'una bifurcació homoclínica a intermitències de tipus I.

En el segon cas, hem estudiat les bifurcacions homoclíniques resultants d'aplicar la modulació externa sobre una òrbita periòdica del sistema autònom propera a realitzar una bifurcació homoclínica. Hem demostrat l'especial interès que té el sistema modulad per estudiar el caos homoclínic. Això es deu a les tres característiques següents:

- L'ampli ventall de possibilitats que resulta de la varietat de bifurcacions homoclíniques del sistema bicapa autònom.
- La flexibilitat d'anàlisi que resulta del fet que els dos atractors implicats en la bifurcació homoclínica, és a dir, l'òrbita sella i l'atractor caòtic, sorgeixen de la modulació de dues solucions diferents del sistema autònom. El punt important és que l'estructura de l'atractor caòtic pot ser ajustada mitjançant la freqüència externa i això permet trobar situacions més òptimes per a caracteritzar el caos homoclínic.
- El fet que les bifurcacions siguin fàcilment reproductibles i caracteritzables experimentalment.

Concretament, hem presentat evidències numèriques i experimentals de l'existència de caos homoclínic associat a atractors del tipus Birkoff-Shaw. També hem fet un estudi numèric detallat de l'estructura dels manifolds que ens ha revelat el caràcter transversal de la connexió homoclínica.

Tanmateix creiem que l'estudi d'aquestes bifurcacions homoclíniques no està acabat, especialment pel que fa a l'experiment. Queda pendent un estudi més complet de les diferents situacions homoclíniques que es poden presentar a partir del coneixement que tenim del dispositiu autònom. Com per exemple, el cas de les bifurcacions per contacte de gota (*gluing bifurcations*) en el cas de dos cicles límit que s'acosten simultàniament a la mateixa sella.

També tenim tot un camp obert d'estudi en el dispositiu tricapa forçat amb l'objectiu d'analitzar la influència del grau de llibertat introduït per la modulació sobre la dinàmica tridimensional del sistema autònom. Aquesta anàlisi seria complementària de l'estudi del sistema de quatre capes recentment iniciat en el nostre grup.



## APÈNDIX

### A. Funció interferomètrica per a una cavitat amb miralls absorbents.

En aquest apèndix donarem la transmitància, reflectància i absorbència d'una cavitat Fabry-Perot, suposant que un dels miralls és parcialment absorbent. La teoria normal dels interferòmetres Fabry-Perot suposa que els miralls no tenen pèrdues i en el nostre cas, en introduir el mirall d'entrada parcialment absorbent, no podem aplicar aquesta teoria.

Fent l'aproximació d'ona plana en la descripció dels feixos de llum, i si no tenim en compte les reflexions dins les capes de l'espaciador per tal de tenir una funció interferomètrica només depengui de les característiques dels miralls d'entrada i sortida, la transmitància i la reflectància s'expressen com [12,38]:

$$T(\psi) = T_B T_C(\psi) \quad (\text{A.1})$$

$$R(\psi) = R_F + T_F R_{B\alpha} T_C + 2\sqrt{R_F T_F R_{B\alpha} T_F} \cos(\psi + \Phi + \theta_C) \quad (\text{A.2})$$

amb

$$T_C(\psi) = \frac{T_F}{(1 - \sqrt{R'_F R_{B\alpha}})^2 (1 + C \sin^2 \frac{\psi}{2})} \quad (\text{A.3})$$

$$\Phi = 2\delta_{tF} - \delta_{r'F} - \delta_{rF} \quad (\text{A.4})$$

$$\psi = \delta_{R'F} + \delta_{R_B} + \sum_{j=1}^N \frac{4\pi}{\Lambda} \int_{z_{j-1}}^{z_j} n_j dz \quad (\text{A.5})$$

$$C = \frac{4\sqrt{R'_F R_{B\alpha}}}{(1 - \sqrt{R'_F R_{B\alpha}})^2} \quad (\text{A.6})$$



on

$$R'_{FB} = \sqrt{R'_F R_{B\alpha}} \quad (\text{A.7})$$

$$R_{FB} = \sqrt{R_F R_{B\alpha}} \quad (\text{A.8})$$

$T_B$ ,  $R_B$  i  $\delta_{RB}$  són la transmitància, reflectància i el desfasament en la reflexió del mirall de sortida, respectivament. Les reflectàncies externa i interna del mirall d'entrada les anomenem  $R_F$ ,  $R'_F$ , la transmitància  $T_F$  i els respectius desfasaments com  $\delta_{RF}$ ,  $\delta_{R'_F}$  i  $\delta_{TF}$ . L'expressió que dóna el desplaçament (A.5) assumeix per simplicitat que la incidència és normal. A partir de considerar la conservació de l'energia podem obtenir l'absorbància com:

$$A(\psi) = 1 - R(\psi) - T(\psi) = A_F(\psi) + A_B(\psi) \quad (\text{A.9})$$

on

$$A_F(\psi) = 1 - R_F - T_C [1 - R_B(1 - T_F) + 2R_{FB}(\cos(\psi + \phi) - R'_{FB} \cos \phi)] \quad (\text{A.10})$$

$$A_B(\psi) = (1 - R_B - T_B) T_C \quad (\text{A.11})$$

$A_F(\psi)$  i  $A_B(\psi)$  són les funcions interferencials que descriuen les absorcions del mirall d'entrada i sortida respectivament.

En el nostre cas l'absorció de la cavitat està localitzada al mirall d'entrada. Per aquest cas és important destacar que la fase relativa entre  $T(\psi)$  i  $R(\psi)$  és donada per  $\phi$ , la fase relativa entre  $A_F(\psi)$  i  $A_B(\psi)$  per a  $\phi + \pi$  i que  $T(\psi)$  i  $A_B(\psi)$  estan sempre en fase. És fàcil, doncs, adonar-se que el contrast òptim en el nostre cas es dóna quan  $\phi = 2m\pi$ , i que s'ha aconseguit un alt contrast sense necessitat d'alta finesa [12].

## B. Càlcul de la matriu variacional. Tècnica de localització d'òrbites periòdiques.

En aquest apèndix descriurem com calcular la matriu variacional del sistema bicapa modulats i com, a partir d'aquesta, podem fer localitzar les òrbites periòdiques [29,30].

Considerem el sistema d'equacions autònom d'ordre  $n$ :

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{B.1})$$

amb solució  $\phi_t(x_0, t_0)$ , és a dir:

$$\dot{\phi}_t(x_0, t_0) = f(\phi_t(x_0, t_0), t), \quad \phi_{t_0}(x_0, t_0) = x_0 \quad (\text{B.2})$$

on  $\phi_t(x_0, t_0)$  és el flux continu i,  $x_0$  i  $t_0$  són les condicions inicials.

La matriu variacional  $\Phi_t(x, t_0)$  és la derivada de les trajectòries respecte a les condicions inicials:

$$\Phi_t(x_0, t_0) = D_{x_0} \phi_t(x_0, t_0) \quad (\text{B.3})$$

Tenint en compte que el mapa estroboscòpic  $P_N(x)$  és defineix com:

$$P_N = \Phi_T(x, t_0) \quad (\text{B.4})$$

on  $T$  és el període de la modulació externa,  $\phi_T(x, t_0)$  és el flux continu avaluat després d'un temps  $T$  a partir dels punts inicials  $x$  i  $t_0$ . Llavors, la matriu variacional  $\Phi_T(x, t_0)$  avaluada després d'un temps  $T$  és l'expressió de la derivada del mapa estroboscòpic:

$$DP_N(x) = D_x \phi_T(x, t_0) = \Phi_T(x, t_0) \quad (\text{B.5})$$

Si  $x^*$  és un punt fix del mapa de Poincaré estroboscòpic (òrbita periòdica de període  $T$ ) llavors els valors propis de  $\Phi_T(x, t_0)$  són els multiplicadors de Floquet característics de l'òrbita periòdica.

Com que no disposem d'una expressió analítica del flux  $\phi_t(x_0, t_0)$  no podem avaluar directament la matriu variacional, però sí que podem calcular a partir de (B.2) una equació diferencial que ens determina l'evolució temporal de la matriu variacional. Aquesta equació es coneix com *equació variacional*.

Si diferenciem (B.2) respecte a  $x_0$  obtenim:

$$D_{x_0} \dot{\phi}_t(x_0, t_0) = D_x f(\phi_t(x_0, t_0), t) D_{x_0} \phi_t(x_0, t_0), \quad D_{x_0} \phi_{t_0}(x_0, t_0) = I \quad (\text{B.6})$$

Llavors l'equació variacional s'expressa com:

$$\dot{\Phi}_t(x_0, t_0) = D_x f(\phi_t(x_0, t_0), t) \Phi_t(x_0, t_0), \quad \Phi_{t_0}(x_0, t_0) = I \quad (\text{B.7})$$

L'equació variacional és una equació diferencial matricial lineal dependent del temps. Aquesta matriu és la linealització del camp vectorial a llarg de la trajectòria  $\phi_t(x_0, t_0)$ . Així doncs, si la trajectòria canvia, el mateix succeeix amb la matriu variacional.

Atès que les condicions inicials són la matriu identitat, llavors una pertorbació  $\delta x_0$  d'un punt de la secció estroboscòpica  $x_0$  evoluciona com:

$$\delta x(t) = \Phi_t(x_0, t_0) \delta x_0 \quad (\text{B.8})$$

La pertorbació  $\delta x$  es pot interpretar de dues maneres diferents: com una pertorbació infinitesimal del sistema original (B.1) o com una solució de sistema linealitzat (B.7).

Per calcular la matriu variacional, atès que l'equació variacional depèn de  $\phi$  i  $\Phi$ , el que fem és integrar simultàniament el camp vectorial i la equació variacional, de manera que obtenim el sistema combinat:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x, t) \\ D_x f(x, t) \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

amb les condicions inicials:

$$\begin{Bmatrix} x(t_0) \\ \Phi(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ I \end{Bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

En el cas del dispositiu bicapa modulats els termes de la matriu variacional s'expressen com:

$$\Phi_{ij}(t) = \left( \frac{\partial \Psi_i(t)}{\partial \Psi_{j,0}} \right), \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.11})$$

Podem deduir l'equació variacional aplicant (B.7) al sistema d'equacions que descriu la dinàmica temporal del sistema modulats (II.25):

$$\dot{\Phi}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^2 b_{ik} \left[ \frac{\partial A(\Psi)}{\partial \Psi} \Psi_E(t) - \Phi_{kj} \right] \quad (\text{B.12})$$

### B.1 Localització d'òrbites periòdiques

Una altra aplicació de la matriu variacional és localitzar òrbites periòdiques. Vist que una òrbita periòdica és un punt fix de Mapa de Poincaré estroboscòpic, llavors, un cop fixat un valor de  $T_E$  de la modulació, ens interessa trobar un punt  $x^*$  tal que  $P_N(x^*)=x^*$ . Suposem que partim d'un punt  $x_0$  i la següent aplicació del mapa ens porta a un punt  $x_1$  proper a l'anterior. És possible imaginar que estem aprop d'una òrbita periòdica, llavors, si realment existeix aquesta òrbita periòdica, com la podem localitzar si coneixem  $x_0$ ,  $x_1$  i  $T_E$ ?

La resposta es basa en una extensió de l'algorisme de Newton-Raphson [29]. Si realment el punt  $x_0$  és proper a  $x^*$  podem escriure:

$$x^* = x_0 + \delta x \quad (\text{B.13})$$

Llavors si apliquem  $P_N$  a l'equació anterior obtenim:

$$P_N(x^*) = x^* = P_N(x_0 + \delta x) \quad (\text{B.14})$$

Si tenim en compte que la matriu variacional ens determina com varia una pertorbació d'un punt inicial, aplicant (B.3) a l'anterior equació obtenim:

$$x^* = P_N(x_0) + \Phi_{T_E}(x_0) \delta x = x_1 + \Phi_{T_E}(x_0) \delta x \quad (\text{B.15})$$

Si a (B.15) li restem (B.13) obtenim:

$$x_0 - x_1 = [\Phi_{T_E}(x_0) - I] \delta x \quad (\text{B.16})$$

Encara que en teoria podem avaluar  $\delta(x)$  exactament a partir de (B.16). Hem de tenir present que, en establir que la evolució de  $\delta(x)$  venia determinada per la matriu variacional, hem fet l'aproximació que  $\delta(x)$  és una pertorbació infinitesimal. De tota manera, el nou punt  $x_2=x_0+\delta$  és trobarà més proper a  $x^*$ . Com que la convergència de l'algorisme de Newton-Raphson és quadràtica, en unes poques iteracions obtindrem una estimació de  $x^*$  amb una resolució alta. Cal tenir present però que si  $x_0$  no és suficientment proper a  $x^*$  el mètode pot no convergir.

### C. Determinació de l'exponent de Lyapunov a partir d'una sèrie temporal.

Tal i com ja hem vist al capítol I, els exponents de Lyapunov són una eina molt útil per identificar atractors caòtics. Els exponents de Lyapunov són la mesura de la divergència entre òrbites properes. Una solució amb un o més exponents de Lyapunov positius indica que la solució és caòtica i el valor dels exponents positius reflecteix l'escala de temps en què el sistema esdevé impredecible.

Numèricament, podem calcular els exponents de Lyapunov a partir de diagonalitzar la matriu variacional. Aquesta tècnica, evidentment, no es pot aplicar de forma directa a una sèrie temporal experimental. Aquest apèndix descriu de forma concisa una tècnica per calcular l'exponent de Lyapunov no negatiu d'una sèrie temporal [84].

El primer pas per calcular els exponents de Lyapunov és reconstruir un atractor a partir de la sèrie temporal. La seva reconstrucció es pot fer emprant una tècnica molt usual anomenada *embedding* desplaçat [82,83]. Aquesta tècnica ja ha estat utilitzada en diversos apartats d'aquesta tesi i consisteix en utilitzar com a noves variables la mateixa sèrie temporal desplaçada diverses vegades un interval de temps. A partir d'aquest atractor determinarem la divergència de les òrbites en les escales temporals més petites possibles.

Per avaluar l'exponent de Lyapunov no negatiu analitzarem l'evolució d'un parell de trajectòries properes. Tot i que el nostre atractor experimental ha estat reconstruït a partir d'una única trajectòria, en el cas d'atractors estranys podem trobar punts que es poden considerar com a pertanyents a trajectòries independents. Escollirem punts que estiguin separats temporalment més d'un període principal orbital, perquè un parell de punts més propers que això es caracteritzen per un exponent de Lyapunov nul. Quan la distància a l'espai de les fases entre dos punts és petita, podem considerar que aquests dos punts defineixen la direcció de divergència més ràpida de les trajectòries. Quan aquesta distància augmenta podem realitzar la renormalització de Gram-Schmidt. Aquesta renormalització és una tècnica habitual en el càlcul numèric dels exponents de Lyapunov a partir d'un sistema d'EDO's [29,84]. Aquesta renormalització permet evitar divergències en la direcció de dilatació més ràpida de les trajectòries. En el cas de tractament de dades experimentals, aquesta normalització suposa canviar el punt inicial per un altre de més proper a l'òrbita fiducial, i que es troba en la mateixa direcció. D'aquesta manera, si anem repetint consecutivament aquests passos, podem obtenir una estimació de l'exponent de Lyapunov no negatiu.

A l'hora d'aplicar aquesta tècnica cal anar molt amb compte amb els paràmetres emprats, ja que si no podem obtenir una lectura incorrecta de l'exponent de Lyapunov.

El primer paràmetre a escollir és el temps del desplaçament emprat per reconstruir l'atractor. Aquest temps ha de ser suficientment gran per evitar un col·lapse de les variables en una direcció, i suficientment petit perquè el desplaçament per a la darrera variable independent sigui de l'ordre del període orbital principal.

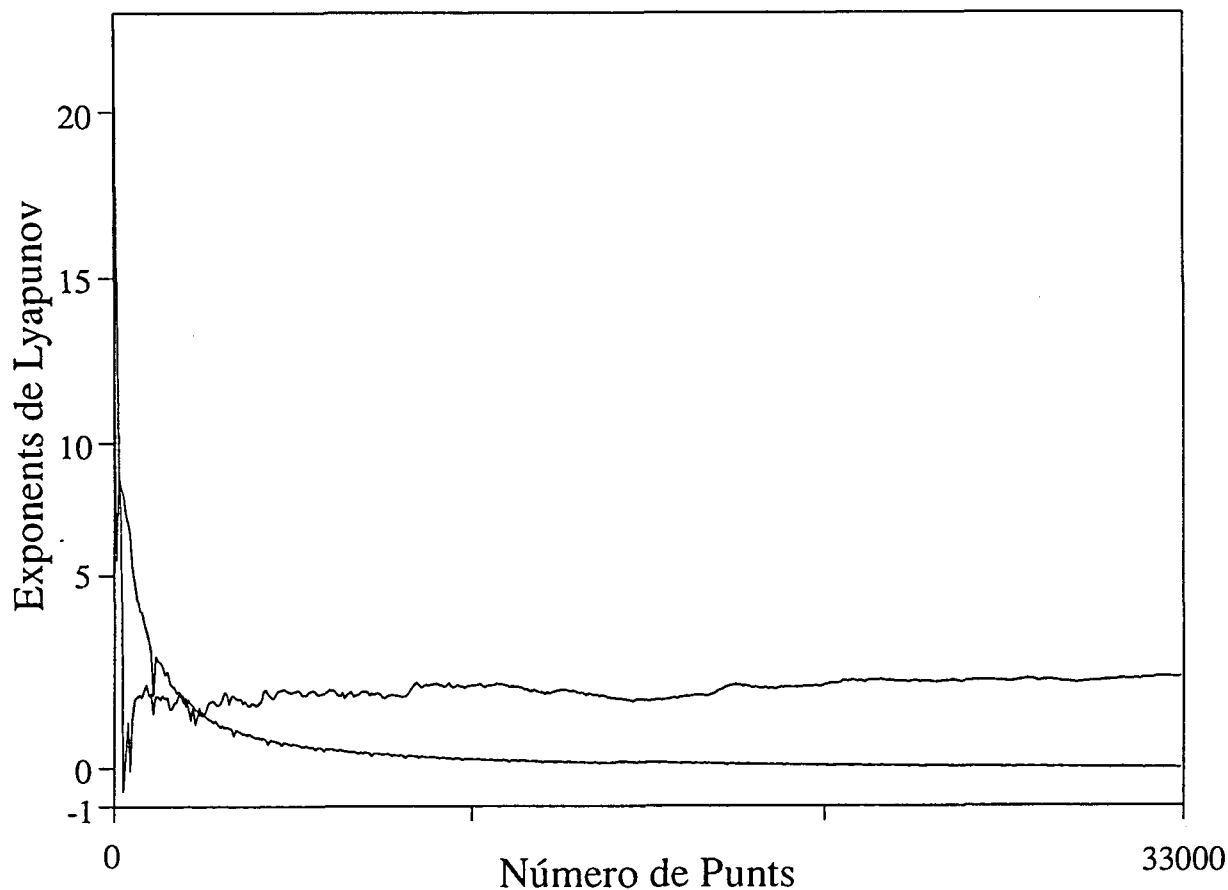


Fig C.1 Evolucions del exponent de Lyapunov no negatiu respecte al número de punts, per dues evolucions temporals experimentals. Una evolució és periòdica i l'altre caòtica.

En el nostre cas la dimensió del sistema és tres, de manera el desplaçament per a la tercera variable és dues vegades el temps del desplaçament. Hem comprovat que un desplaçament de l'ordre de un terç del període orbital principal compleix les anteriors condicions.

El segon paràmetre és el temps d'evolució entre dues renormalitzacions. Un temps d'evolució gran redueix els errors en l'orientació dels vectors i el temps de càlcul. Ara bé, si aquest temps és massa llarg els successius fenòmens de replegament característics dels sistemes caòtics provoquen una indeterminació en el càlcul de l'exponent de Lyapunov principal, ja que aquest mesura la divergència.

Quan nosaltres estudiem caos homoclínic, aquest plegament està associat a la proximitat de l'òrbita sella, de manera que el valor màxim del temps d'evolució es pren en referència al temps que tarda una trajectòria en acostar-se a l'òrbita sella. Aquests temps es mesura en funció del número de períodes de la modulació externa sobre la projecció de la secció de Poincaré estroboscòpica.

Un altre problema afegit en el càlcul dels exponents de Lyapunov a partir d'un registre experimental és el soroll. Podem distingir dos tipus de soroll: un de dinàmic,

com ara les fluctuacions en el feix làser, i un altre resultat de la resolució en l'enregistrament de les dades.

Quan tractem les dades experimentals podem fer poca cosa per eliminar el soroll dinàmic. Aquest soroll apareix a causa de les fluctuacions externes que actuen sobre el sistema afectant la seva dinàmica. De tota manera, hem pogut constatar que aquest soroll és molt petit. Hem comprovat que l'influència de les pertorbacions ambientals sobre el sistema és poc significativa i que la incorporació d'un estabilitzador-modulador del feix làser redueix per sota del 1% les fluctuacions en intensitat del feix làser.

El soroll no dinàmic és resultat de les limitacions quant a resolució dels detectors, amplificadors i la tarja digitalitzadora encarregats de la captació del senyal. Aquest soroll es pot eliminar aplicant un filtre passa-baix. Aquest filtratge elimina l'estructura d'escala petita. En el nostre cas hem pogut observar una clara diferència d'escala entre l'estructura deguda al soroll i la resultant de la naturalesa caòtica de les evolucions, cosa que ens ha permès eliminar fàcilment el soroll no dinàmic.

Un altre problema és el número de punts necessaris per evaluar l'exponent de Lyapunov adequadament. A la figura C.1 he il·lustrat l'evolució de l'exponent de Lyapunov en funció del número de punts en dues evolucions temporals experimentals. Aquestes dues evolucions temporals han estat estudiades al darrer capítol en el darrer cas experimental presentat. Ambdós registres experimentals han estat obtinguts per a la mateixa intensitat de base i modulació:  $I_{EB}=3.0$  i  $I_{EM}=1.15$  Volts, i la freqüència de la modulació externa ( $\omega_E$ ) dels dos casos és: 10.447 i 10.88 Hz. Podem observar com a mesura que augmenta el número de punts; millora la convergència de l'exponent de Lyapunov. En el primer cas ( $\omega_E=10.447$  Hz), l'evolució és caòtica i el valor calculat de l'exponent de Lyapunov no negatiu és 2.98; en el segon cas ( $\omega_E=10.88$  Hz), l'evolució és periòdica i el valor calculat de l'exponent de Lyapunov no negatiu és 0.16.

En tots els càlculs de l'exponent principal de Lyapunov ha estat necessari analitzar la convergència de l'exponent de Lyapunov per poder estar segurs que teniem un número suficient de punts per determinar-lo. En tots els resultats presentats al capítol VI hem pogut comprovar que els registres eren suficientment llargs.

## IX.- REFERÈNCIES

- [1] H. M. Gibbs, *Optical Bistability: Controlling Light with Light*, (Academic 1985).
- Per un seguiment de la Biestabilitat Òptica, veure els següents proceedings de conferències internacionals:
- [2] *Optical Bisability 2*, eds. C.M. Bowden, H.M. Gibbs i S.C. Mc Call (Plenum New York, 1984).  
*Optical Bistability III*, eds. H.M. Gibbs, P. Mandel, N. Peyghambarian and S.D. Smith (Springer, Berlin, 1986).
- [3] A. Dorsel, J.D. Mc Cullen, P. Meystre, E. Vignes i H. Walter *Optical Bistability and mirror confinement induced by radiation pressure* Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 1550
- [4] McCall i H.M. Gibbs, J. Opt Soc Am. 68 (1978) 1378.
- [5] P. Mandel, S.D. Smith, B.S. Wherret, *From Optical Bistability towards Optical Computing*, (North-Holand, Amsterdam, 1987).
- [6] J.C. Englud, R.R. Snapp, W.C. Schieve, *Progress in Optics*, vol. XXI (North-Holland, Amsterdam, 1984), 63-94.  
P. Mandel, *Frontiers in Quantum Optics*, E.R. Pike, S. Sarkar, eds (Adam Hilger, Bristol, 1986) 261-281.
- [7] R. Bonifacio, L. Lugiatto, Opt Commun. 19 (1976) 172-177; phys. Rev A 18 (1978) 1129-1138.
- [8] S.L. Mc Call, Appl. Phys. Lett. 32 (1978) 284-286.
- [9] K. Ikeda, Opt Commun. 30 (1979) 257-261  
K. Ikeda, H. daido, O. Akimoto, Phys. rev Lett. 45 (1980) 709-712.
- [10] H.M. Gibbs, F.A. Hopf, D.L. Kaplan, R.L. Shoemaker, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 474-476.
- [11] F. Pi, C. Schmidt-Iglesias, G. Orriols, J. Modern Optics 35 (1988) 1345-1362.
- [12] G. Orriols, F. Pi, C. Schmidt-Iglesias, Opt. Commun. 63 (1987) 66-72.
- [13] F. Pi, G Orriols *Composite feedback mechanisms in termal optical bistability*, en el llibre *Interaction of Radiation with Matter*, volum en honor de Adriano Gozzini, ed Scuola Normale Superiore Pisa 239-255 (1987).  
F. Boixader, J. Farjas, R. Herrero, G. Orriols, J. Massaneda, F. Pi, J. I. Rosell *Flip-Flop Operation in Opto-Thermal Biestable Devices with Localized Absortion*, Fiber and Int. Opt. 12 (1993) 287-3000.
- [14] J.I. Rosell, F. Pi, F. Boixader, R. Herrero, J. Farjas, G. Orriols, *Nonlinear Dynamics in Optical Systems*, N. B. Abraham, E. M. Garmire, P. Mandel, eds.. (optical Society of America, Washington, 1991); Opt. Commun. 82 (1991) 162-170.
- [15] L.P. Shil'nikov, Sov. Math. Dakl. 6 (1965) 163-166.
- [16] J.I. Rosell, F. Pi, C. Schmidt-Iglesias, G. Orriols, *Dynamics of Nonlinear Optical Systems*, eds. L. Pesquera y F.J. Bermejo (World Sci., Singapore, 1989) 212-215.  
J.I. Rosell, F. Pi, F. Boixader, J. Massaneda, J. Farjas, G. Orriols, *Nonlinear Dynamics and Quantum Phenomena in Optical Systems*, eds. R. Vilaseca and R. Corbalán (Springer, Berlin, 1991) ...



- [17] J.I Rosell, F. Pi, F. Boixader, J. Farjas, G. Orriols *Homoclinic bifurcations in thermo-optical bistability with localized absorption*. European conference on Optics Optical Systems and applications (ECOOSA'90), Roma.  
J.I Rosell, F. Pi, F. Boixader, J. Farjas, G. Orriols *Homoclinic bifurcations in thermo-optical bistability with localized absorption*. *Opt. Commu.*, **82** (1991) 162-170.
- [18] P. Holmes *Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and chaos*, *Phys. Rep.* **3** (1990) 138-163.
- [19] L. A. Blumenfeld *Problems of biological systems*, (eds. Springer Verlag 1981).  
W. Hoppe, W. Lohmann, H. Markl, H. Ziegler *Biophysics*, (eds. Springer Verlag 1986).  
F. C. Hoppensteadt *Nonlinear Oscillations in Biology*, *Lec. Appl. Math.* **17**.
- [20] I. R. Epstein *New chemical Oscillators*, en el llibre *Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems*, eds. C. Vidal i A. Pacault, (Springer Verlag 1984) 24-34.  
Y. Kuramoto *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer Verlag 1983)
- [21] A.A. Andronov, S.E. Khaikin i A.A. Vitt *Theory of oscillators*, (eds. Pergamon Press 1966).  
C. Hayashi *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, (eds. Princeton Univ. Press. 1985).  
N. Minorsky *Non-Linear Oscillations*, (Van. Nostrand Co. 1962).  
A. C. Stoker *Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics*, (eds. Wiley & Sons 1970).
- [22] H. Poincaré *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, vols 1,2 i 3 1892, 1893, 1894. Reimprimit per Dover 1957.
- [23] N. Cutland *Computability*, (eds. Cambridge University Press, 1980).  
R. P. Feynman *Simulating physics with computers*, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467-488.  
P. D. Lax *Mathematics and computing*, *J. Stat. Phys.* **43**, 749-756.  
T. Toffoli *Physics and Computation*, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 165-175.
- [24] John Gukenheimer, Philip Holmes *Nonlinear oscil.lators. Dinamical Systems, and bifurcations of Vector Fields* (eds. Springer-verlag , Nova York 1983).
- [25] D.K. Arrowsmith, C.M. Place *An introduction to dynamical systems*, (eds Cambridge University Press 1990).
- [26] E. Atlee Jackson *Perspectives of nonlinear dynamics*, (eds. Cambridge University Press 1989).
- [27] Milos Marek, Igor Schreiber, *Chaotic behavior of Deterministic Dissipative Systems*. (Cambridge University Press, 1991).
- [28] J.M.T Thomson, H.B. Stewart *Nonlinear Dynamics and Chaos*, (eds. John Wiley & Sons, Gran Bretanya 1986).
- [29] T. S. Parker, L. O. Chua *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, (Springer Verlag, Nova York 1989).
- [30] P. Seydel, *From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analisis*, (eds. Elseiver corp. Nova York 1988).
- [31] Hao Bai-lin *Elementary Symbolic Dynamics*, (World Scientific Publishing, Singapore 1989).
- [32] T. Kai iK. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* **61**, 54 (1979).
- [33] K. Tomita i T. Kai, *Jour. of Stat. Phys.* **21**, 65 (1979).
- [34] C. Knudsen, J. Sturis, i J. S. Thomsen *Phys. Rev A* **44**, 3503 (1991).

- [35] J.I Rosell *Dinàmica dels dispositius opto-tèrmics amb absorció localitzada*. Tesi Doctoral (UAB 1991).
- [36] J.I. Rosell, F. Pi, J. Farjas, G. Orriols *Homoclinic Orbits and Chaos in Opto-Thermal Bistability with Localized Absorption (I)*, enviat a Physica D.
- [37] J.I. Rosell, F. Pi, J. Farjas, R. Herrero, G. Orriols *Homoclinic Orbits and Chaos in Opto-Thermal Bistability with Localized Absorption (II)*, enviat a Physica D.
- [38] J.Farjas *Dinàmica de Dispositius Opto-Tèrmics Bistables excitats amb llum modulada*. Treball de Recerca (UAB 1991).
- [39] M. Faraday, Philos. Trans. Roy. Soc. London 52, 229 (1831).  
M. Faraday, Philos. Trans. Roy. Soc. London 52, 319 (1831).
- [40] R. Keolian, I. A. Turkevich, S. J. Putterman, I. Rudnick, i J. A. Rudnick, *Suharmonic sequences in the Faraday experiment: departures from period doubling*. Phys. Rev. Lett 47, 1133-1136 (1981).
- [41] J.C Bacri, U. d'Ortona i D. Salin, Phys. Rev. Lett. 67, 50 (1991).
- [42] M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini *Transition to chaotic behaviour via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations* Phys. Rev. Lett 47, 243-246 (1981).  
J. P. Gollub, S. V. Benson *Many routes to turbulent convection* J. Fluid. Mech., 100 449-470 (1980).  
J. Maurer, A Libchaber *Rayleigh-Bénard experiments in liquid helium; frequency looking and the onset of turbulence*. J. Phys. Lett., 40 L419-L423.(1979)
- [43] R. H. Simoyi, A. Wolf, H. L. Swinney *One dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction*, Phys. Rev. Lett., 49, 245-248 (1982).
- [44] J.R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccioni, A. Poggi i W. Gadomski, Phys. Rev. A 34, 2073 (1986).  
D. Dagnois, P. Glorieux, i D. Hannequin Phys. Rev. A 36 (1987).
- [45] M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25 (1978).
- [46] P. Collet, J. P. Eckman i O. E. Landford Commun. Math. Phys. 76, 211 (1980).
- [47] O. E. Landford Bull. Am. Math. soc. 6, 427 (1984).
- [48] C. Grebogi, E. Ott, i J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 48, 1507 (1982).
- [49] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'Ordre dans le Chaos*, (Hermann, Paris, 1984).
- [50] P. Manneville and Y. Pomeau, Phys. Lett. 75 A, 1 (1979).
- [51] Y. Pomeau and P. Manneville, Physica D 1, 219 (1980).
- [52] H.J. Scholz, T. Yamada, H. Brand, and R. Graham, Phys. Lett. 82 A, 321 (1981)
- [53] F. Argoul, A. Arneodo, and P. Richetti, J. Phys. (Paris), 49, 767 (1988).
- [54] C. Meunier, M. N. Bussac, and G. Laval, Physica D 4, 236 (1982).
- [55] P. Richetti, F. Argoul and A. Arneodo, Phys. Rev. A, 34, 726 (1986).
- [56] H. Kaplan, Phys. Rev. Lett. 68, 553 (1992).
- [57] M. Dubois, M. A. Rubio, and P. Bergé, Phys. Rev. Lett. 51, 1446 (1983).
- [58] J. Maurer and A. Libchaber, J. Phys. (Paris) Lett. 41, L515 (1980).
- [59] P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville, and Y. Pomeau, J. Phys. (Paris) Lett. 41, L341 (1980).
- [60] Y. Pomeau, J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, and Ch. Vidal, J. Phys. (Paris) Lett 42, L271 (1981).
- [61] N. Kreisberg, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, Physica D 50, 463 (1991).
- [62] G. Baier, K. Wegmann, and J. L. Hudson, Phys. Lett A 141, 340 (1989).



- [63] H. Herzel, P. Plath, and P. Sevensson, *Physica D* **48**, 340 (1991).
- [64] J. Y. Huang and J.J. Kim, *Phys. Rev A* **40**, 7244 (1989).
- [65] C. Jeffries and J. Perez, *Phys. Rev. A* **26**, 2177 (1982).
- [66] J. Sacher, W. Elsässer, and E. O. Göbel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2224 (1989).
- [67] D. Y. Tang, J. Pujol, and C. O. Weiss, *Phys. Rev. A* **44**, R35 (1991).
- [68] D. Y. Tang, M. Y. Li, and C. O. Weiss, *Phys. Rev. A* **46**, 676 (1992).
- [69] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos* (VCH, Weinheim 1988).
- [70] N. A. Komolgorov *The general Theory of Dynamical Systems and classical Mechanics*. Traducció a l'anglès a *Fundatons of Mechanics* per R. Abraham i J.E. Mardsen (1954).  
J. Moser *Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory*. Academia Nazionale dei Lincei. (Pisa 1981).
- [71] V.I. Arnol'd, *Am. Math. Soc. Trans.* **46**, 213 (1965).
- [72] M.H. Jensen, P. Bak, i T. Bohr, *Phys. Rev. A* **30**, 1960 (1984).
- [73] T. Bohr, P. Bak, i M. H. Jensen, *Phys. Rev. A* **30**, 1970 (1984).
- [74] R. E. Ecke, J. D. Farmer i D. K. Umberger, *Nonlinearity* **2**, 175 (1989).
- [75] I.G. Kevrekidis, L.D. Schmidt, i R. Aris, *Cem. Eng. Sci.* **41**, 1263 (1986).
- [76] D. G. Aronson, R.P. Mcgehe, I.G. Kevrekidis i R. Aris, *Phys. Rev A.* **33**, 2190 (1986).
- [77] P.J. Holmes, D. C. Whitley, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* **311**, (1984).
- [78] F. Boixader *Caos Homoclínic en dispositius termo-òptics biestables* Tesi Doctoral (UAB 1993).
- [79] R. Herrero *Caos de Rössler en dispositius òptics biestables*, Treball de Recerca (UAB 1993).
- [80] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney i J. A. Vastano, *Phys. D.* **16**, 285 (1985).
- [81] Otto E. Rössler *A chaotic hierarchy*, (eds G. Baier i M. Klein, World sci. Singapore, 1991).
- [82] N.H. Packard, J. P. Crutchfield, J.D. Farmer i R. Shaw, *Phys. Rev. Lett.* **45**, (1980), 712.
- [83] J. C. Roux, R. H. Simoyi, H. L. Swinney, *Phys. D* **8**, (1983) 257.
- [84] K. Briggs, *Phys. Lett. A* **151**, 27 (1990).



Universitat Autònoma de Barcelona

Servei de Biblioteques

Reg. 225161

Sig. \_\_\_\_\_

Ref. 12500

