



TESIS DOCTORAL

Título	Medición del impacto en la economía de la inversión en infraestructura público-privada en países en vías de desarrollo. Aplicación a la economía peruana
Realizada por	Alex Roberto Albújar Cruz
en el Centro	ESADE Business School
y en el Departamento	Economía, Finanzas y Contabilidad y Ciencias Sociales
Dirigida por	Dr. Diego Cueto Dr. Calin Arcalean

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE CONTENIDO	ii
ÍNDICE DE GRÁFICOS, FIGURAS Y TABLAS.....	vi
INTRODUCCIÓN.....	viii
CAPÍTULO I.....	1
Ejecución e Importancia de Proyectos de Infraestructura	1
1.1 Ejecución de proyectos de infraestructura por el Estado	1
1.2 Ejecución de proyectos de infraestructura por el sector privado.....	2
1.3 Ejecución de proyectos de infraestructura a través de Asociaciones Público Privadas	3
1.4 Importancia de la Inversión Pública y Público Privada (APP) en el Perú.....	4
CAPÍTULO II	7
Infraestructura pública y público-privada de servicio público:	7
Crecimiento y desarrollo económico del Perú	7
2.1 Revisión de literatura	7
2.2 Marco analítico.....	11
2.2.1 La inversión en infraestructura de servicio público.....	11
2.2.2 Participación privada en la inversión en infraestructura	14
2.3 Metodología y estimación.....	16
2.3.1 Modelo Teórico de la Función de Producción	16
2.3.2 Complementariedad de los factores de producción	18
2.3.3 Modelo Econométrico de la Función de Producción.....	19
2.3.4 Los datos.....	20
2.4 Los resultados.....	23
CAPÍTULO III	25
Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeta a Congestión en una Economía Cerrada	25
3.1 La economía	26
3.1.1 Las empresas	27
3.1.2 Las familias	29
3.1.3 El Mercado.....	35
3.1.4 El Gobierno	36
3.1.5 Equilibrio de la Economía	37

3.2	Shock de productividad.....	37
3.3	Estado estacionario	39
3.4	Calibración de parámetros	40
	Las empresas:	41
	Las familias:	41
	Gobierno:.....	42
	Equilibrio OA-DA:	42
	Shock de productividad:	42
3.5	Resultados	44
3.5.1	Sector privado: Familias y Empresas	44
3.5.2	Sector público: Gobierno	50
CAPÍTULO IV.....		53
Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta		53
4.1	La Economía	54
4.1.1	Las Empresas	55
4.1.2	Las Familias.....	56
4.1.3	El Mercado.....	61
4.1.4	El Gobierno	62
4.1.5	Equilibrio de la Economía	63
4.2	Estado estacionario	63
4.3	La velocidad de convergencia al estado estacionario	64
4.4	Solución log-lineal del modelo	65
4.4.1	Trayectoria temporal de la infraestructura público-privada	65
4.4.2	Trayectoria temporal del PIB per-cápita.....	66
4.5	Calibración.....	66
4.6	Resultados	67
4.6.1	Trayectoria dinámica de la infraestructura público-privada con meta dinámica.....	67
4.6.2	Trayectoria dinámica del PIB per-cápita con meta estática	68
4.6.3	Trayectoria dinámica del PIB per-cápita con meta dinámica (modelo).....	70
4.6.4	Trayectoria dinámica del PIB per-cápita con meta dinámica (método alternativo).....	72
4.6.5	Tasas de crecimiento requeridas para la economía peruana	73
CAPÍTULO V.....		77
Conclusiones, Limitaciones, Recomendaciones y Trabajo Pendiente.....		77
Bibliografía.....		81
ANEXOS		87

Anexo N° 1: Evaluación de los supuestos del modelo Mínimos Cuadrado Ordinarios (OLS)

.....	87
1.1	Matriz de correlaciones..... 87
1.2	Matriz de Covarianzas 88
1.3	No Autocorrelación de los residuos 88
1.3.1	Estadístico Durbin-Watson 88
1.3.2	Modelo Auxiliar para los residuos 88
1.4	Homocedasticidad del residuo..... 89
1.4.1	Análisis gráfico 89
1.4.2	Test de Heterocedasticidad: White 90
1.4.3	Regresión robusta a la White 90
1.5	Normalidad del residuo..... 91
1.5.1	Análisis gráfico de la Normalidad: Kernel Density 91
1.5.2	Test de Shapiro-Wilk W (Ho: Normalidad) 91
1.5.3	Test de Shapiro-Francia W' (Ho: Normalidad) 91

Anexo N° 2: Derivaciones del Modelo de Economía Cerrada..... 92

2.1	Las Empresas 92
2.1.1	Expresando en términos de trabajador efectivo 92
2.1.2	Demostración de la Proposición 3.1 92
2.2	Las Familias 95
2.2.1	Definición y propiedades de la función CRRA (Constant Risk Relative Aversion) 95
2.2.2	Expresando en términos de trabajador efectivo 97
2.2.3	Demostración de la Proposición 3.2 98
2.3	Derivación del estado estacionario 101

Anexo N° 3: Derivaciones del Modelo de Economía Abierta 110

3.1	Las Familias: expresando las ecuaciones principales en términos de trabajador efectivo 110
3.2	Teoría del Control Óptimo 113
	El Hamiltoniano 114
	El principio del máximo 114
3.3	Demostración de la Proposición 4.2 115
3.4	El Gobierno: expresando las principales ecuaciones en términos de trabajador efectivo 119
3.5	Derivación del estado estacionario de las principales variables del modelo..... 120
3.6	Derivación de la velocidad de convergencia del modelo 122
3.6.1	Linealización logarítmica del sistema (modelo)..... 122

Linealización logarítmica de la ecuación de restricción de la economía	122
Linealización logarítmica de la ecuación de Euler	122
3.6.2 El estado estacionario de las variables logarítmicas y la ecuación de relación.	123
De la ecuación de restricción de la economía	123
De la ecuación de Euler	123
3.6.3 Aproximación logarítmica al estado estacionario	123
Aproximación logarítmica de la ecuación de restricción de la economía	123
Aproximación logarítmica de la ecuación de Euler.....	125
3.6.4 Calculando los autovalores del sistema de aproximaciones logarítmicas al estado estacionario. 127	
3.6.5 El beta convergencia.....	128
3.7 Solución log-lineal del modelo	129
3.7.1 Trayectoria temporal de la infraestructura público-privada	129
3.7.2 Trayectoria temporal del PIB per-cápita.....	129
Anexo N° 4: Resultados numéricos de la convergencia a brecha cero en infraestructura	130
Anexo N° 4. 1: Tabla de resultados numéricos de la convergencia a brecha cero en infraestructura	130
Anexo N° 5: Resultados numéricos de la convergencia al LPIBpc de EE.UU. del 2014...	131
Anexo N° 5. 1: Tabla de resultados numéricos de la convergencia al LPIBpc de EEUU del 2014	131
Anexo N° 6: Resultados numéricos de la convergencia a la economía de EE.UU.	132
Anexo N° 6. 1: Tabla de resultados numéricos de la convergencia a la economía de EE.UU.	132

ÍNDICE DE GRÁFICOS, FIGURAS Y TABLAS

GRÁFICOS

GRÁFICO 1. 1: INVERSIÓN PRIVADA EN INFRAESTRUCTURA (% DEL PIB)	4
GRÁFICO 2.1: PIB PER-CÁPITA	21
GRÁFICO 2.2: STOCK DE CAPITAL PER-CÁPITA PERÚ	22
GRÁFICO 2.3: STOCK DE INFRAESTRUCTURA PÚBLICA Y PÚBLICO-PRIVADA PERÚ	22

FIGURAS

FIGURA 3. 1: DIAGRAMA DE FLUJO DE LA ECONOMÍA CERRADA	26
FIGURA 4. 1: DIAGRAMA DE FLUJO DE LA ECONOMÍA PARCIALMENTE ABIERTA.....	54

GRÁFICOS

GRÁFICO 3. 1: SHOCK DE PRODUCTIVIDAD (At)	44
GRÁFICO 3. 2: RESPUESTA DEL PIB (yt)	45
GRÁFICO 3. 3: RESPUESTA DEL CONSUMO (ct).....	46
GRÁFICO 3. 4: RESPUESTA DE LA INVERSIÓN EN CAPITAL (ikt).....	47
GRÁFICO 3. 5: RESPUESTA DEL STOCK DE CAPITAL (kt).....	48
GRÁFICO 3. 6: RESPUESTA DE LA INVERSIÓN TOTAL EN INFRAESTRUCTURA (iftt).....	49
GRÁFICO 3. 7: RESPUESTAS DEL STOCK DE INFRAESTRUCTURA PÚBLICO-PRIVADA (fvt).....	49
GRÁFICO 3. 8: RESPUESTAS DEL GASTO DE GOBIERNO (gt)	51
GRÁFICO 3. 9: RESPUESTAS DE LA INFRAESTRUCTURA PÚBLICA (fbt)	52
GRÁFICO 4. 1: CONVERGENCIA A BRECHA CERO EN INFRAESTRUCTURA.....	68
GRÁFICO 4. 2: CONVERGENCIA AL PIB PER-CÁPITA DE EEUU-2014	69
GRÁFICO 4. 3: EVOLUCIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO DEL PIB PER-CÁPITA DE PERÚ Y EEUU	70
GRÁFICO 4. 4: CONVERGENCIA A LA ECONOMÍA DE EEUU	71

TABLAS:

TABLA 2. 1: RESULTADOS	23
TABLA 3. 1: CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS.....	43
TABLA 4. 1: CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS.....	66
TABLA 4. 2: PIB PER-CÁPITA INICIAL.....	68
TABLA 4. 3: TASAS DE CRECIMIENTO REQUERIDAS.....	75

GRÁFICOS Y TABLAS DEL ANEXO:

ANEXO N° 3. 1: GRÁFICO DE LA RELACIÓN ENTRE LA FORMA DE LA CURVA DE INDIFERENCIA Y SU ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN INTERTEMPORAL	97
ANEXO N° 4. 1: TABLA DE RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA CONVERGENCIA A BRECHA CERO EN INFRAESTRUCTURA.....	130
ANEXO N° 5. 1: TABLA DE RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA CONVERGENCIA AL LPIBPC DE EEUU DEL 2014	131
ANEXO N° 6. 1: TABLA DE RESULTADOS NUMÉRICOS DE LA CONVERGENCIA A LA ECONOMÍA de EE.UU.	132

INTRODUCCIÓN

Las obras de infraestructura en los países son importantes para el desarrollo económico y social de los mismos. A través de ellas, un país puede contar con mayor capacidad física para facilitar el desarrollo de sus actividades productivas. Así tenemos que, con mejores carreteras se podrá disminuir los costos logísticos y de transporte, con mejores puertos se podrá incrementar el comercio internacional, con mejores aeropuertos se podrá incrementar el flujo de turistas al país, con más centrales eléctricas se podrá mejorar el nivel de cobertura de servicio eléctrico a la población, y en general, con las obras de infraestructura el país podrá mejorar de manera importante la prestación del servicio público correspondiente. Es obligación del Estado proporcionar esta infraestructura. Si bien, en muchos países es el Estado quien se encarga de financiar la construcción de estas obras, y luego operarlas y mantenerlas, ha quedado demostrado que muchas veces el Estado no cuenta con los recursos suficientes (humanos, de conocimiento y financieros) para una gestión eficaz y eficiente de dicha infraestructura. En los países en vías de desarrollo, donde las necesidades de servicio son muchas, los gobiernos deberían satisfacer las necesidades primarias y muy urgentes, tales como salud y educación, destinando sus presupuestos a estos rubros. Los proyectos de infraestructura son proyectos de gran envergadura que requieren sumas muy altas de dinero para financiar las inversiones. Si el Estado tuviera que financiarlas totalmente (Inversión Pública) implicaría tener que comprometer su presupuesto sacrificando otras inversiones que podrían ser más urgentes. Es allí donde podría entrar el sector privado para financiar, construir, operar y mantener la infraestructura (Inversión Público Privada), proporcionando el servicio público que se requiere, sin comprometer necesariamente los recursos financieros del Estado y transfiriendo riesgos al sector privado.

En el capítulo I se hace una revisión de la literatura sobre la ejecución e importancia de los proyectos de infraestructura en la economía. En el capítulo II se analiza la importancia de la inversión en infraestructura pública y privada en el desempeño económico del Perú y se estiman las elasticidades de los factores de la función de producción. Para ello, se plantea una función de producción que incluye stock de capital físico, infraestructura pública (financiado por el Estado) e infraestructura público-privada (financiado por el sector privado). En el capítulo III se formula un modelo que permite entender el papel de la infraestructura pública y público-privada en el crecimiento económico y los efectos que se tiene ante un shock negativo de productividad. Se analiza una economía cerrada en el que interactúan tres agentes: empresas, familias y gobierno. Las variables clave son la inversión en infraestructura pública con financiamiento del gobierno (infraestructura pública) y la inversión en infraestructura pública con financiamiento del sector privado (infraestructura público-privada). Los parámetros son calibrados con las elasticidades que se estiman en el capítulo II para la economía peruana. En el capítulo IV se formula un modelo de economía parcialmente abierta con movilidad parcial del capital para analizar la velocidad de convergencia de la economía a su estado estacionario (equilibrio de largo plazo) y a estados meta: cerrar la brecha de infraestructura existente, alcanzar el PIB per cápita de EE.UU. al

2014 y a la economía de EE.UU. en términos de PIB per cápita. Con un modelo alternativo, con la finalidad de comparar los resultados, se calcula la convergencia a la economía de EE.UU. mediante una tasa de crecimiento promedio del PIB y las tasas de los factores de producción que garantizan este crecimiento. La función de producción utilizada es aquella que se deriva en el capítulo II. Y finalmente, en el capítulo V se presentan las conclusiones, recomendaciones, limitaciones y trabajo pendiente.

CAPÍTULO I

Ejecución e Importancia de Proyectos de Infraestructura

El servicio público que el Estado debe proporcionar requiere generalmente de inversiones en obras de infraestructura que permitan mejorar la capacidad operativa del país y su desarrollo social y económico. Podría decirse que el país permanecerá en subdesarrollo mientras no mejore su infraestructura (Gutierrez y Dodero (2007)). Estos proyectos pueden ser ejecutados directamente por el Estado, a través de alguna entidad pública, o en conjunto con el sector privado. En cualquiera de los casos, lo que el Estado busca es cumplir con su rol de brindar servicio público para el bienestar de la sociedad. Dependiendo de la modalidad de ejecución que utilice, los resultados en cuanto a costos, calidad del servicio y administración de los riesgos, suelen ser distintos. A continuación se explican las distintas modalidades que tiene el Estado para la ejecución de estos proyectos.

1.1 Ejecución de proyectos de infraestructura por el Estado

Si el Estado ejecuta las obras directamente, significa que debe proporcionar los recursos necesarios, asumir los beneficios y todos los riesgos del proyecto. Bajo esta modalidad, el Estado debe demostrar previamente que los recursos que asigne a estos proyectos (financieros, humanos, tecnológicos, entre otros), retornarán bajo la forma de beneficios sociales, esto es, que el proyecto sea socialmente rentable. Una forma de medir los beneficios sociales es a través del crecimiento de la economía. Romer (1986) y Barro (1990) miden, por ejemplo, este bienestar social a través de la maximización de la renta per-cápita. Para efectos de la selección de proyectos que debe ejecutar directamente el Estado, lo más común es realizar una evaluación social de proyectos y escoger los que generen mayor valor agregado a la sociedad. Para ello, se valorizan económicamente los beneficios sociales esperados del proyecto y los costos del mismo (inversión, operación y mantenimiento). El criterio de decisión es escoger los proyectos con mayor valor actual neto social, siempre que estos no sean negativos.

La ejecución de estos proyectos conlleva a que el Estado financie el cien por ciento de las obras y se encargue de la operación y mantenimiento de la infraestructura terminada. Esto implica que el Estado asumirá los riesgos del proyecto, entre ellos, los sobre costos que pudieran haber durante la etapa de construcción y la poca calidad del servicio en la etapa de operación, lo cual conllevaría a una reducción en los beneficios sociales esperados.

Por otro lado, si el Estado es quien va a asumir todos los riesgos, debe ser capaz de administrarlos adecuadamente ante la probabilidad que alguno de ellos se materialice en

CAPÍTULO I: Ejecución e Importancia de Proyectos de Infraestructura

el tiempo. Lamentablemente, el Estado no necesariamente es un buen gestor de servicios públicos. El Estado (Ariño, 2001) por lo general, no es eficiente en la provisión de servicios públicos, sobre todo en los países en vías de desarrollo, por lo que permite que maneje todos los riesgos de un proyecto de infraestructura atenta contra la calidad de servicio que la comunidad requiere.

Si bien, en los países en vías de desarrollo es el Estado el encargado de construir y entregar estos servicios (Quintanilla Acosta, 2005), esto no asegura que los mismos sean de calidad. Las obras de infraestructura realizadas por el sector público tradicionalmente han tenido la reputación de ser pobremente administradas (Allen, 2001).

Además de lo antes mencionado, podemos agregar el hecho que las infraestructuras son muy costosas y ello implica que los gobiernos de países en vías de desarrollo destinen altos porcentajes de sus presupuestos a la financiación de estas obras, lo que podría atentar contra otros gastos o inversiones del Estado cuyo retraso podría generar problemas sociales inmediatos (Gutierrez y Doderó (2007)).

1.2 Ejecución de proyectos de infraestructura por el sector privado

En general, los proyectos de infraestructura de servicio público difícilmente podrían ser ejecutados y administrados exclusivamente por el sector privado si es que este tuviese que asumir todos los riesgos del proyecto, salvo que exista una demanda tan grande que le genere ingresos lo suficientemente importantes que permita mitigarlos adecuadamente. La complejidad de un servicio público puede ser muy grande, toda vez que se debe tomar en cuenta los diferentes actores que intervienen (sociedad civil, organismos rectores, organismos reguladores, opinión pública, entre otros), además, los activos generalmente pertenecen a alguna entidad del Estado, no al sector privado.

Estas complejidades del servicio público traen consigo riesgos que no podrían ser manejados por el sector privado, y que requieren necesariamente de la participación del Estado para su adecuado tratamiento.

Según Lloveras y Borderas (1988), los proyectos de infraestructuras y equipamientos destinados a servicios públicos tienen las siguientes características específicas:

- Períodos largos de gestación.
- Condicionantes económicos, políticos y administrativos.
- Grandes necesidades financieras.
- Relación con otros proyectos.
- Irreversibilidad de la inversión.
- Difícil evaluación de las variables de demanda, ingresos y otras.
- Riesgos asociados al proyecto.

Estas características asociadas a este tipo de proyectos requieren que estos sean muy rentables para que el sector privado pueda asumirlas. Lamentablemente, no son muchos los proyectos de servicio público que cuenten con alta rentabilidad. Arecete (2004) argumenta que la participación privada tiene las siguientes limitaciones: “... *escasa rentabilidad proporcionada por éstos, sus características particulares, o, el rechazo social.*”

Por lo expuesto, difícilmente un inversionista privado querrá invertir en proyectos de infraestructura y asumir la totalidad de los riesgos asociados a estos. Se requiere, por tanto, de la participación del Estado para que pueda compartir los riesgos y viabilizar los proyectos de infraestructura.

1.3 Ejecución de proyectos de infraestructura a través de Asociaciones Público Privadas

El Estado puede entregar servicio público a través del sector privado, y aprovechar las ventajas competitivas que éste posee. Para ello, se requiere que el sector público y el sector privado se unan para llevar adelante el proyecto (Jalami, 2004). Esta relación contractual se conoce como Asociación Público Privada (APP).

Akintoye y Hardcastle (2003), definen una APP como la relación contractual mediante la cual el sector público y el sector privado se unen para compartir la provisión de recursos, los beneficios y los riesgos asociados a la ejecución de proyectos de infraestructura para servicio público.

Las APP constituyen una posición intermedia entre el suministro de servicios públicos al cien por ciento por el Estado, y el suministro de los mismos al cien por ciento por el sector privado. Según Gerrard (2001): “*Las APPs operan en el límite de los sectores público y privado, de manera que no son activos o servicios nacionalizados, ni tampoco son privados... representan una tercera vía para que los gobiernos presten ciertos servicios públicos*”.

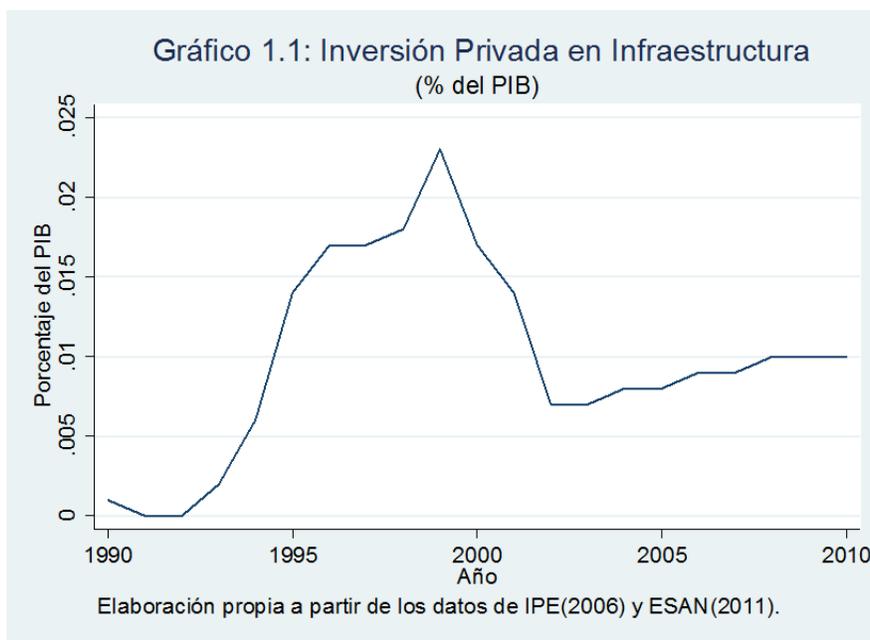
Vale la pena resaltar que en el caso de las APP que son financiadas íntegramente por el sector privado, esto representa un valor agregado muy importante para el Estado, especialmente en los países en vías de desarrollo. Cuando el financiamiento proviene del sector privado, la inyección de estos capitales permitirá al Estado utilizar sus recursos de corto plazo para atender aquellos proyectos con necesidades sociales más esenciales, tales como salud, seguridad ciudadana, educación pública, entre otros (Gutiérrez y Dodero (2007)), y en paralelo el Estado cumple con el desarrollo de infraestructura que soporte de manera más directa a las empresas (carreteras, puertos, energía, entre otros) a través del sector privado mediante las APP. De esta manera, el desarrollo de infraestructura a través de las APP y el desarrollo de infraestructura para necesidades más básicas se complementan, ya que las empresas no necesitarán sólo de carreteras y puertos, sino también de recurso humano saludable y con buen nivel de educación. Así tenemos que, a mayor desarrollo de las empresas, más necesidades de infraestructura tendrán y mayor será la necesidad de personas competitivas y saludables.

CAPÍTULO I: Ejecución e Importancia de Proyectos de Infraestructura

1.4 Importancia de la Inversión Pública y Público Privada (APP) en el Perú

En las últimas dos décadas, la importancia de la inversión pública y privada en infraestructura, y su participación en el crecimiento y desarrollo económico del Perú ha ido creciendo. Hasta antes de los años 90s el Estado era el único que invertía en infraestructura de servicio público (con una tasa de crecimiento, en promedio, 4% en los años 90 en términos per-cápita), siendo la participación privada en ello prácticamente nula. Sin embargo, a partir de 1990 la participación de la inversión privada en infraestructura ha tomado protagonismo (ver Gráfico 1.1), empezando por la privatización de empresas estatales y continuando con las Asociaciones Público Privadas desde finales de los 90s.

Gráfico 1. 1: Inversión Privada en Infraestructura (% del PIB)



Inicialmente, la participación privada se dio a través de la privatización de algunos servicios públicos esenciales, como la telefonía pública y la energía eléctrica. Posteriormente, a través de las Asociaciones Público Privadas. A la fecha, se han desarrollado proyectos de infraestructura público privada en carreteras, aeropuertos, puertos, plantas de tratamiento de agua potable y residual, proyectos de irrigación, sistemas de transporte urbano, seguridad, turismo, entre otros. Los resultados han sido satisfactorios.

La normatividad peruana en los temas de APP permite distinguir dos tipos de proyectos: Las APP autosostenibles y las APP cofinanciadas. Las primeras son aquellas donde el Estado permite la participación del sector privado en el desarrollo de infraestructura, financiadas totalmente por este, y sin aportes dinerarios del Estado. A lo más, el Estado puede otorgar

garantías no financieras, pero que tengan una baja probabilidad de materialización. Estas APP tienen la particularidad que los costos de inversión, operación y mantenimiento son pagados por los usuarios a través de las tarifas que se apliquen para ello. Por otro lado, las APP cofinanciadas son aquellas donde no es posible que la aplicación de tarifas sea suficiente para que los inversionistas privados recuperen sus costos de inversión, operación y mantenimiento. En este caso, se requiere que el Estado participe activamente con aportes dinerarios que complementen los flujos de dinero necesarios para que la participación privada pueda recuperar los costos antes indicados.

No obstante que la normatividad peruana es adecuada para el desarrollo de infraestructura pública privada, y que existen muchos proyectos realizados bajo esta modalidad, aún se percibe que hay mucho camino por recorrer en este campo. Además de ello, los procedimientos que el Estado sigue para llevar adelante las inversiones de infraestructura son muy burocráticos y engorrosos, lo que se traduce en retrasos importantes en los procesos de licitación o de ejecución de las inversiones.

La literatura respecto a la influencia de la inversión en infraestructura en el crecimiento económico es amplia, pero gran parte de la literatura se puede resumir contestando la siguiente pregunta ¿qué tanto incluye en la producción de un país el gasto público y privado en infraestructura?

Larrain y Vergara (1997) resaltan la importancia de la tasa de crecimiento, sostienen que un país que crece al 3% sostenidamente por 10 años incrementará su PIB en 34% al término del periodo; y si creciera al 5% anual, su PIB incrementaría en 64%. Entonces, una diferencia de sólo 2% por año se traduce en una brecha de 30% del PIB. Por lo tanto, es importante explicar los determinantes de las tasas de crecimiento del PIB per cápita y la literatura del crecimiento económico trata de explicar esto. Se resalta la importancia del capital público de infraestructura, además de los factores de producción clásicos como el trabajo y stock de capital en el modelo básico de Solow (1956) y el equilibrio general en la versión de Ramsey (1928) y mejorado más tarde por Cass (1966) y Koopmans (1965); el capital humano Mankiw, Romer y Weil (1992), los recursos naturales Nordhaus (1992) y los avances tecnológicos.

Los determinantes del crecimiento económico son muchos. Algunos estudios destacan las principales fuentes del crecimiento:

- Acumulación de capital y trabajo Solow (1956) y Swan (1956); Ramsey (1928); Cass (1965); y Koopmans (1965).
- Investigación y desarrollo Romer (1986); Aghion y Howitt (1992); Grossman y Helpman (1994).
- Institucionalidad e infraestructura Levine (1997); North, 1960 y 1970; Bigio y Ramírez-Rodán (2006); Acemoglu y otros (2001).
- Organización y regulación de los mercados interiores y exteriores Loayza y Soto (2002) y Battman y otros (2003).
- Infraestructura física e institucional Aschauer (1989); Levy y Spiller (1996).

CAPÍTULO I: Ejecución e Importancia de Proyectos de Infraestructura

Posada y Gómez (2002) resaltan que uno de los determinantes clave del crecimiento económico de largo plazo es el gasto público destinado a la formación de capital humano e infraestructura. Generalmente, los economistas coinciden en que una adecuada dotación de infraestructura incrementa la competitividad, estimula la inversión privada y la generación de mercados competitivos (Rozas, Patricio; Sánchez, Ricardo, 2004).

El Economic Forum World (2013), en adelante WEF, elabora un índice de competitividad global en el cual uno de los pilares fundamentales que lo conforman es la infraestructura. El reporte del WEF (2012) claramente indica que el nivel de la infraestructura de la economía peruana es débil, de 144 países el Perú ocupó el puesto 89 en infraestructura en el año 2012 mientras que para los años 2013-2014 descendió al puesto 91. Además del reporte del WEF (2013), diversas investigaciones locales ponen en claro el enorme déficit de infraestructura que el país atraviesa.

Tomando en cuenta lo expuesto en el presente capítulo, en el siguiente capítulo, se analiza la importancia de la inversión en infraestructura pública y público privada en el desempeño económico del Perú y se estiman las elasticidades de los factores de la función de producción que se defina para tal fin.

CAPÍTULO II

Infraestructura pública y público-privada de servicio público: Crecimiento y desarrollo económico del Perú

En el presente capítulo se analiza la importancia de la inversión en infraestructura pública y privada en el desempeño económico del Perú y se calculan las elasticidades de los factores de la función de producción. Se plantea una función de producción con rendimientos constantes en factores privados (capital físico, infraestructura público-privada y fuerza laboral) y externalidades positivas de la infraestructura pública sujetas a congestión. Los datos se obtienen de distintas fuentes: como Penn World Table (2012), Banco Central del Perú (2013), International Monetary Fund (IMF, 2013), Universidad Esan (2011) e Instituto Peruano de Economía (2006). La muestra abarca 60 observaciones, desde 1950 hasta el 2010 a precios constantes, en términos per cápita y corregido por la paridad de poder de compra. Las variables stock de capital, infraestructura pública e infraestructura público-privada, son reconstruidas en base al método del inventario perpetuo que utiliza variables de flujo. La metodología econométrica empleada para estimar las elasticidades es el *Ordinary Least Squares* (OLS).

2.1 Revisión de literatura

La renta o ingreso per cápita es un indicador del crecimiento de la economía respecto a su estado inicial en un determinado período de tiempo. El crecimiento económico es determinado por un aumento sostenido de la capacidad productiva del país, y se mide como el aumento porcentual del Producto Interno Bruto (PIB). Los factores de producción más utilizados en los modelos de crecimiento económico son el trabajo, el stock de capital humano, los recursos naturales y los avances tecnológicos.

Barro y Sala-i-Martin (2004) demuestran para la economía estadounidense que las consecuencias de pequeñas diferencias en la tasa de crecimiento a largo plazo pueden originar grandes diferencias en los niveles de renta per cápita y de bienestar a largo plazo.

La teoría del crecimiento económico es una de las ramas de mayor importancia en macroeconomía, ya que a partir de esta se formulan políticas económicas en el marco de la optimización para el uso de los recursos a largo plazo. Es por esto que, a lo largo de varios años, muchos investigadores económicos han tenido considerable interés en el tema, realizando estudios empíricos y teóricos cuyo objeto de estudio es el análisis del crecimiento económico. Los diferentes modelos y teorías del enfoque moderno del crecimiento económico se caracterizan por presentar un mayor grado de formalización, y

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

de análisis empírico que las teorías clásicas debido tanto a los cruciales avances realizados en técnicas y herramientas econométricas como a la importante mejora y mayor disponibilidad de la información estadística. En su mayoría, estos modelos toman en cuenta los aportes clásicos para mejorar y actualizar la teoría del crecimiento económico. Dentro del bloque de la teoría moderna del crecimiento económico se encuentran dos enfoques claramente diferenciados: el crecimiento exógeno y el crecimiento endógeno.

Como punto de partida de las teorías modernas en cuanto al crecimiento exógeno, se encuentran los modelos de Harrod (1939) y de Domar (1946), los cuales tienen como característica fundamental el objetivo de dinamizar el análisis económico de Keynes. El modelo de crecimiento exógeno expresa las condiciones necesarias para que una economía de mercado genere el volumen de demanda agregada y mantenga una situación de crecimiento sostenido, equilibrado y de pleno empleo.

Con el trabajo de Solow (1956) y Swan (1956), nace la revolución neoclásica de la teoría del crecimiento económico. El análisis del crecimiento de Solow (1956) y Swan (1956) se perfecciona con los estudios de Cass (1965) y Koopmans (1965), quienes incorporan el enfoque de la optimización intertemporal desarrollado por Ramsey (1928) para analizar el comportamiento de los consumidores.

Romer (1986) y Lucas (1988) plantean nuevas teorías caracterizadas por la modelización de tasas de crecimiento de largo plazo positivas sin factores exógenos. Estos nuevos modelos son llamados teorías de crecimiento endógeno. Los modelos de Romer (1986), Lucas (1988), Rebelo (1991) y Barro (1991) eliminan los rendimientos decrecientes a escala a través de externalidades o con la presencia de capital humano. Por otro lado, Romer (1987) y Romer (1990), Aghion y Howitt (1992) y Grossman y Helpman (1991) proponen modelos donde el factor investigación y desarrollo (I+D) actúa como un generador de progreso tecnológico de forma endógena en el marco de una situación de competencia imperfecta.

Los llamados modelos de crecimiento endógeno refutan la idea de un progreso tecnológico exógeno. En este tipo de modelos las decisiones de los agentes económicos determinarán el comportamiento del progreso técnico. La visión endógena también recalca la intervención del Estado y la heterogeneidad de las tasas de crecimiento entre países. Para el enfoque endógeno del crecimiento hay cuatro factores que explican el proceso de crecimiento sostenido de largo plazo:

- Capital físico. El fundamento principal en los modelos económicos es el supuesto de rendimientos crecientes. Romer (1986) establece la importancia de la acumulación de capital físico en el crecimiento económico.
- Capital público de infraestructura. La inversión en infraestructuras de origen público puede conducir al mejoramiento de la productividad del sector privado. Barro (1990) resaltó la importancia de las infraestructuras en el proceso productivo.
- Investigación y Desarrollo (I+D). Dentro de este enfoque, en los modelos de Romer (1987) y Romer (1990) este factor presenta rendimientos crecientes.
- Capital humano. La producción de nuevo capital humano, tiene un consumo relativamente intenso de factor capital humano. En el modelo desarrollado por Uzawa (1965) y utilizado por Lucas (1988), el capital humano existente es el único

factor del sector que produce educación. Mankiw, Romer y Weil (1992) también desarrollan modelos con Capital Humano.

Siguiendo la línea de modelos teóricos que puedan explicar la influencia del gasto público en la economía, Barro y Sala-i-Martin (1992) realizan un modelo que determina el tamaño óptimo del gobierno (tasa de impuestos), así como también un nivel óptimo de infraestructura. La conclusión central de los modelos de Barro (1990, 1991) (basados en el crecimiento endógeno) es que la inversión pública, o capital público, posee una fuerte influencia en el crecimiento de la economía. A nivel empírico, Barro y Sala-i-Martin (1991) en un estudio para 98 países examina la relación entre el gasto público de diferentes tipos en el PIB y la tasa de crecimiento del PIB. El coeficiente de regresión obtenido es significativo y negativo en lo que corresponde a gasto de consumo, mientras que existe una baja relación entre el crecimiento del PIB y la cantidad de inversión pública. Cabe resaltar que estos resultados no explican en su totalidad el comportamiento del débil crecimiento de algunos países pertenecientes al África y a América Latina. Con el objetivo de analizar y comparar con los datos ya existentes, Garcia-Milá, McGuire y Porter (1996) realizan un estudio enfocado en evaluar sistemáticamente una correcta especificación de la función de producción tomando el capital público como input. Cullison (1993) analiza cuales son las categorías del gasto público que más promueven el crecimiento económico, para la economía norteamericana, y obtiene una elasticidad del PIB respecto al gasto público en transporte de 0.80 y una elasticidad del PIB respecto al gasto público total de 0.037. Mehrotra, Aaron y Väilä, Timo (2006) describen la evolución de la inversión pública y las existencias de capital público en Europa en tres décadas (1970 - 2000). Encuentran que la inversión pública es determinada por la renta nacional, mientras el costo de financiamiento y las normas fiscales no tienen un impacto sistémico en la inversión pública. Ghosh y Narayana (2005) indican que las reformas económicas de la India de 1991 afectaron a la economía en términos de producción, a su vez Goel (2003) estudia el impacto de la provisión infraestructura en la productividad para el sector manufacturero de India desde 1965 hasta 1999. Encontró que, tanto la infraestructura económica y social, afectan significativamente el costo y la productividad del sector manufacturero. Concluye que la infraestructura juega un papel positivo y significativo y que afecta la productividad en el sector industrial de la India y, por lo tanto, contribuye al crecimiento de la economía.

Por otro lado; en un análisis regional de España, Maudos, Mas, Pérez y Uriel (1996) demostraron que existe una correlación positiva entre la relación inicial de capital público y la tasa de crecimiento del Valor Agregado Bruto (VAB) per cápita. Las regiones españolas que comenzaron con ratios altos de capital público-VAB en promedio, crecen a un ritmo más acelerado que en aquellas en donde la proporción era menor.

En los estudios para economías desarrolladas la variable gasto público puede ser un buen indicador del nivel de infraestructura con que cuenta la economía ya que gran parte de estas inversiones la asume el Estado, lo que no sucede en las economías subdesarrolladas Straub (2008). El trabajo de Aschauer (1989) es uno de los estudios pioneros en el tema del impacto de las infraestructuras (gasto público). En su modelo determina al capital público como un input más, asumiendo rendimientos constantes a escala, originándose debate debido a sus resultados que demuestran que el capital público es muy productivo. Los

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

resultados de su estudio manifiestan que una alza de 1% del capital público no militar aumenta la productividad total de los factores (trabajo y capital privado) en 0.34% y que un incremento del 1% en el ratio capital público-capital privado lo eleva en un 0.39%. Posteriormente, diversos estudios analizan los efectos de la inversión en infraestructura pública, sobre todo, aquella más productiva para la economía. Duffy-Deno y Randall (1991) en su estudio para determinar los efectos del capital público en el desarrollo económico regional llegan a la conclusión que el stock de capital público es un input importante en la producción regional y que a largo plazo logra aumentar la productividad. Basándose en la visión de Aschauer (1989), Munnell (1992) analiza si los cambios en la cantidad del capital público junto con el crecimiento del capital privado y el trabajo, pueden explicar la mayor parte de la desaceleración de la economía estadounidense del periodo 1947-1988, hallando una elasticidad del PIB con respecto al capital público igual a 0.34.

Naqvi (2002) examina las relaciones entre el crecimiento económico, la inversión pública y la inversión privada. Sugiere que la inversión pública tiene un impacto positivo en la inversión privada y ambos afectan positivamente al crecimiento económico. Rivera y Toledo (2004) analizan los efectos de la inversión en obras públicas en el crecimiento de la economía partiendo de un modelo estocástico para constatar las hipótesis del crecimiento endógeno contra la del exógeno en la economía chilena. Concluyen que un incremento del 10% en la inversión pública en infraestructura genera un incremento de 1.6% en el PIB. Tomando como base el modelo teórico de Aschauer (1989), Jaén y Piedra (2007) investigan la relación existente entre el crecimiento económico y el capital público en España. Específicamente analizan cómo las dotaciones de capital público favorecen el crecimiento de la productividad en el sector privado. La elasticidad del output con respecto al capital público en infraestructura es de 0.2686. Vásquez y Bendejú (2008) analizan los efectos de la inversión en infraestructura vial sobre el crecimiento económico del Perú en el marco de la teoría del crecimiento endógeno. Concluyen que la expansión de la infraestructura tiene un impacto positivo y significativo sobre el crecimiento económico encontrando que la elasticidad del PIB de largo plazo de la infraestructura vial corresponde a un valor de 0.218. Hernández (2009) establece un modelo teórico, basado en Aschauer (1989), Barro (1990), Baxter y King (1993), Glomm y Ravikumar (1994), Turnovsky y Fisher (1995) y Shantayanan, Swaroop y Zou (1996), con el objetivo de analizar los efectos del gasto público en el crecimiento económico. El modelo plantea que el capital público tiene un comportamiento similar al capital privado, y el gasto público productivo toma la forma de inversión pública en infraestructura. Por su parte, Idrovo (2012) analiza la relación entre el crecimiento económico y la inversión en infraestructura, así como también el porcentaje del crecimiento del PIB que es explicado por un cambio marginal de la inversión en infraestructura pública. Idrovo (2012), en su análisis también toma en cuenta el efecto de la inversión de concesiones de obras. Los resultados de su investigación arrojan que cuando la inversión en infraestructura pública crece en un 10%, el PIB en términos per cápita crece en promedio 1.7%. El autor concluye que el gasto de inversión en infraestructura pública tiene un rol fundamental en la productividad total de factores.

2.2 Marco analítico

2.2.1 La inversión en infraestructura de servicio público

La inversión en infraestructura en un país se relaciona directamente con el desarrollo del mismo. Las obras de infraestructura de los países son importantes para el desarrollo económico y social de estos. A través de ellas, un país puede contar con mayor capacidad física para facilitar el desarrollo de sus actividades productivas. Así tenemos que, con mejores carreteras se podrá disminuir los costos logísticos y de transporte, con mejores puertos se podrá incrementar el comercio internacional, con mejores aeropuertos se podrá incrementar el flujo de turistas al país, con más centrales eléctricas se podrá mejorar el nivel de cobertura de servicio eléctrico a la población, con más colegios y hospitales se podrá mejorar la calidad de vida de las personas, y en general, con las obras de infraestructura el país podrá mejorar de manera importante la prestación del servicio público correspondiente.

Aschauer (1989), utiliza una función de producción que relaciona el PIB con el stock de capital público. La función de producción presenta retornos constantes a escala en los factores productivos privados, pero decrecientes cuando se incluye el factor público. El stock de capital público se comporta como una variable exógena, es decir una variable dada e independiente. También se asume que el Estado provee servicios directamente a los productores privados sin cobrar tarifas, y financia su gasto con los impuestos. Aschauer (1989) enfatiza la importancia de la dotación de los servicios públicos por parte de Estado debido a que algunos servicios no pueden ser provistos eficientemente por el sector privado. Otra razón para la intervención pública es la existencia de economías de escala, que supone costos reducidos debido al tamaño de la empresa y, cuando esto ocurre, es eficiente que solo una empresa dote el bien o servicio, generándose así un monopolio en el mercado, para esta determinación la empresa más eficiente sería el Estado.

Aschauer (1989) realiza una distinción entre el capital público militar y capital público no militar, definiendo al segundo como capital público productivo. En su estudio, el capital público productivo está clasificado por diferentes tipos, en primer lugar se encuentra un “núcleo” de infraestructuras (carreteras, puertos, aeropuertos, transporte público, sistemas eléctricos y de agua, gas, entre otros). Le sigue los hospitales públicos, otras edificaciones (edificios de oficinas, estaciones policiales, terminales, etc.), estructuras de conservación y desarrollo, y por último el rubro de estructuras para la educación.

Algunos autores coinciden con la iniciativa de Aschauer (1989) en plantear y usar las funciones de producción para llevar a cabo un análisis del impacto del gasto público en la economía. Garcia-Milá, McGuire y Porter (1996) formulan una función de producción Cobb-Douglas linealizada. Rivera y Toledo (2004) consideran una función de producción agregada tipo Cobb-Douglas. Vásquez y Bendezú (2008) empiezan el análisis de las infraestructuras planteando una función de producción Cobb-Douglas que incluye el capital en infraestructura y una productividad total de los factores. Munnell (1990) asume una función

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

de producción Cobb-Douglas, donde figuran el nivel de tecnología y el stock de capital público. Posada y Gómez (2002) determinan el gasto óptimo de infraestructura por parte del Estado planteando un modelo de equilibrio general¹, en el cual la función de producción incorpora dentro de la expresión el nivel de tecnología, el stock de capital, el capital humano e infraestructura (gasto en infraestructura por parte del Estado en carreteras, puertos, etc.). La ecuación resultante plantea que las tasas de crecimiento del PIB dependen del nivel de infraestructura pública. Además de la importancia de la función de producción, Posada y Gómez (2002) plantean una función de utilidad social de tal manera que el gasto público óptimo sea resultante del proceso de maximización de dicha utilidad. Gracias al modelo planteado, se puede encontrar una senda o conjunto de valores óptimos para el gasto de gobierno en infraestructura; es decir, se encuentran valores tales que maximizan la función de utilidad social. A modo de conclusión, logran determinar que el nivel de PIB por unidad de trabajo eficiente depende positivamente del nivel óptimo de infraestructura por unidad de trabajo eficiente.

La importancia de determinar el gasto en infraestructura pública óptima, viene del costo de oportunidad asociado a dicho gasto. Montos por encima del gasto en infraestructura óptima perjudicarían las tasas de crecimiento, y montos por debajo tendrían efecto similar. Según Urrunaga y Aparicio (2012) se debe primero plantear una función de producción, que incluye capital físico distinto a infraestructura, capital humano y la infraestructura pública como la variable determinante.

Hernández (2009) define al capital público como un insumo complementario de la producción y establece que cada firma puede producir aprovechando el insumo capital público que proviene del gasto público productivo destinado a la creación de infraestructura física y humana. Vásquez y Bendezú (2008) establecen una función de producción Cobb Douglas donde se asume que el PIB agregado depende del factor capital en infraestructura, capital privado y capital humano (fuerza laboral).

Aschauer (1990) establece una función de producción donde el nivel de producción depende del capital privado fijo, el nivel de los servicios públicos productivos, la fuerza de trabajo o población, y un índice de progreso tecnológico. Además, supone que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala incluyendo los servicios públicos. Por otra parte, Idrovo (2012) contrasta una función de producción CES (elasticidad de sustitución constante) con una de tipo Cobb-Douglas incluyendo en una misma variable el gasto en infraestructura pública y el gasto en obras públicas concesionadas. Bajo ciertos supuestos en los parámetros de la función de producción CES², esta puede ser expresada como una función Cobb Douglas en términos del número de trabajadores.

¹ Los modelos de equilibrio general son muy utilizados en la teoría del crecimiento e intentan explicar fenómenos económicos agregados.

² Función de producción homogénea y lineal con elasticidad de sustitución constante, al analizar el parámetro de sustitución (ρ), si $\rho = 0$, la función converge a una Cobb Douglas, si $\rho = 1$ la función converge a una función lineal y si $\rho = \infty$ la función converge a una Leontief. Fue introducida por (Arrow, K. J.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S., 1961).

Barro y Sala-i-Martin (1992) presentan un modelo de congestión, donde la función de producción de la economía depende, además del capital, de los servicios públicos sujetos a congestión. “La cantidad asignada a cada individuo disminuye a medida que el resto de los usuarios abarrotan los servicios” (Barro, Robert; Sala-I-Martin, Xavier, 2004).

Thorat y Fan (2007) realizan un estudio sobre la inversión pública y reducción de la pobreza en China e India. Indican que las lecciones de estas economías muestran que la inversión pública en áreas rurales ha contribuido significativamente al crecimiento agrícola y a la reducción de la pobreza. Concluyen que la investigación agrícola, la educación y el desarrollo de infraestructura tienen un impacto significativo crecimiento, así como un impacto importante reducción de la pobreza.

Imran y Niazi (2011) revisan el estado de desarrollo de la infraestructura en Pakistán y hacen dos tipos de análisis. El primer análisis consiste en encontrar el impacto de los determinantes de la productividad total de los factores (PTF, por sus siglas en inglés), específicamente la del stock de infraestructura pública y, el segundo análisis, consiste en encontrar el impacto del stock de infraestructura física (la generación de electricidad, telecomunicaciones, agua la disponibilidad y el acceso a caminos y carreteras) sobre el PIB real per cápita. Concluyen que las inversiones en generación de energía, telecomunicaciones y mejora de la disponibilidad de agua para la agricultura tienen efectos significativos sobre el crecimiento. Sin embargo, en el entorno de Pakistán, los gastos en expansión y/o mejora de la red de carreteras no parecen conferir beneficios visiblemente significativos.

Leduc y Wilson (2012) analizan los efectos económicos dinámicos de la inversión en infraestructura pública, encuentran que la inversión en infraestructura vial afecta positivamente al PIB en dos períodos: un efecto inmediato significativo en los dos primeros años y luego un efecto secundario más grande después de seis a ocho años. Los multiplicadores calculados a partir de las respuestas de impulso son grandes, entre 1 y 3 en el impacto inmediato y entre 3 y 7 luego de seis a ocho años.

Barajas y Flores (2012) evalúan la importancia que tiene la infraestructura física en el crecimiento de los municipios de la frontera norte de México. Concluyen que existe evidencia de que la dotación de infraestructura productiva afecta positivamente en el desempeño económico de estas ciudades. *“Los resultados encontrados confirman efectivamente que la infraestructura en energía, transporte y telecomunicaciones son elementos determinantes del crecimiento de las ciudades fronterizas. Sin embargo, la infraestructura en transportes no se presenta como factor determinante, lo que puede deberse a que, al tratarse de estados fronterizos, en realidad no requieren de amplias redes carreteras al interior del país, sino más bien al exterior, lo cual hace más fluido el acceso al mercado mundial de bienes y servicios”.*

Como se puede apreciar, de la revisión de literatura concerniente a la participación del gasto público en el desarrollo económico del país, muchos autores utilizan la función de producción Cobb Douglas, donde el gasto público representa generalmente una variable exógena que representa el gasto público productivo, en especial, el gasto del Estado destinado a la construcción de infraestructura de servicio público.

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

Si bien, la producción de un país depende de los factores productivos como el capital privado, la tecnología y la fuerza laboral, el gasto público destinado a la inversión en infraestructura de servicio público que realiza el Estado permite a las empresas aumentar su productividad, bajar costos logísticos, aumentar la competitividad, entre otros, por lo que ello se traduce en mayor nivel de ingresos para el país.

En países en vías de desarrollo, las necesidades de inversión en infraestructura de servicio público son mucho mayores. Estos países buscan satisfacer primeramente necesidades primarias como salud, educación y gasto social para salir de la pobreza, además deben aumentar la productividad de la fuerza laboral y ejecutar inversiones en infraestructura física que aumenten la productividad de las empresas, como carreteras, puertos, aeropuertos, entre otros. Por esa razón, y sumando el hecho que los países en vías de desarrollo tienen menores recursos que los países desarrollados, es que resulta lógico pensar que estos países concentrarán sus esfuerzos primeramente en satisfacer sus necesidades primarias.

Sin embargo, las inversiones del sector público no pueden concentrarse únicamente en salud, educación y gasto social. Lo racional sería que el Estado invierta en todo tipo de infraestructura de servicio público, tanto para salud, educación, como en infraestructura que permita incrementar la productividad de las empresas, es decir, ambos tipos de inversiones deben complementarse.

Ante ello, tomando en cuenta que en los países en vías de desarrollo la brecha de infraestructura es bastante importante, y que el crecimiento de la economía exige mayor inversión en infraestructura para seguir atendiendo el crecimiento, el estado debe buscar alternativas creativas para poder desempeñar su rol facilitador de la inversión privada y brindar bienestar a través de un adecuado servicio público.

2.2.2 Participación privada en la inversión en infraestructura

Una forma eficiente para la ejecución de proyectos de infraestructura, con la participación de la empresa privada, es a través de contratos de largo plazo entre el sector público y el sector privado. Con ello se busca satisfacer un servicio de largo plazo, requiriendo grandes inversiones y garantizando la operación y mantenimiento de la infraestructura proporcionada. Este es el caso de una Asociación Público Privada (APP)³. Una APP es un contrato de largo plazo que se suscribe entre el sector público y el sector privado, donde los beneficios y los riesgos son compartidos por ambas partes con la finalidad de proporcionar un servicio público adecuado (Akintoye, Beck, Hardcastle (2003)).

Según Grimsey y Lewis (2002), el objetivo principal de las APP para el sector público, donde este deba financiar total o parcialmente las inversiones, es generar más valor por el dinero invertido (Value for Money), valiéndose para ello de las obligaciones contractuales del sector privado diseñadas eficientemente. Esto significa que bajo la modalidad de APP, el

³ En inglés, Public Private Partnerships (PPP).

Estado puede obtener mejores beneficios por el dinero que destine al financiamiento de las inversiones en infraestructura que si las ejecutara directamente como obra pública. La afirmación de que el sector privado puede mejorar el desarrollo de infraestructura para servicio público está basada en los siguientes argumentos (Zhang, 2005):

- a) El sector privado es menos burocrático y más eficiente operacionalmente que el sector público, por lo que puede tomar mejores decisiones sobre asignación y uso de recursos.
- b) Los fondos adicionales que provienen del sector privado para financiar las inversiones en infraestructura reducen las restricciones presupuestales del sector público.
- c) La experiencia, habilidades gerenciales y tecnologías innovativas del sector privado son mejor utilizadas.
- d) La participación del sector privado reduce los monopolios del sector público e incrementa la competencia en obras y servicios públicos.
- e) Los mecanismos de mercado incrementan los incentivos hacia la eficiencia en instituciones públicas.

Generalmente la contraparte privada, dentro de las APP, se encarga de financiar la ejecución de los proyectos de infraestructura sobre la base de los ingresos esperados que se generen por la entrega del servicio público, con lo cual el Estado puede destinar sus recursos a invertir en infraestructura para los más necesitados. En este caso, el sector privado y el Estado se complementan en el desarrollo de infraestructura del país. Sin embargo, el Estado podría participar también en el financiamiento de las inversiones a través de aportes dinerarios u otorgando garantías financieras que mejoren la calidad de los flujos de caja del proyecto y facilite el financiamiento por parte del sector privado.

De manera general, un proyecto de infraestructura podría ser ejecutado de tres formas: i) con financiamiento cien por ciento privados, ii) una parte financiada por el sector privado y otra por el sector público, o iii) con financiamiento cien por ciento públicos. Por ejemplo, si el Estado desea ejecutar una carretera a través de una APP, y se espera que el flujo vehicular sea suficientemente alto como para que el concesionario privado pueda generar ingresos a través del cobro de peaje y recuperar sus costos de inversión, operación y mantenimiento, entonces podría ejecutarse con financiamiento cien por ciento privado. Sin embargo, si los ingresos esperados no fueran los suficientes, debería participar el Estado en financiar la parte necesaria que pueda cubrir los costos del concesionario antes indicados. Finalmente, podría ser que el Estado decida entregar esta carretera para que el concesionario construya, opere y mantenga la misma, sin que tenga que otorgar el derecho de cobro de peaje al concesionario, en cuyo caso sería el mismo Estado quien cubra todos los costos del concesionario privado. En el primer caso el Estado estaría logrando su objetivo de brindar servicio público sin tener que utilizar recursos monetarios en dicha infraestructura. En el último caso, el Estado lograría el mismo objetivo pero le costaría el cien por ciento de las inversiones, lo que es más parecido a una obra pública.

Es de esperar que, dependiendo de la forma como se financie la infraestructura, el Estado puede ser más o menos eficiente en su rol de proporcionar infraestructura al país. Así, por

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

ejemplo, si el Estado quisiera encargarse de financiar el cien por ciento de las inversiones necesarias para reducir la brecha de la infraestructura, (a través de los mecanismos de Obras Públicas, no de APP) es muy probable que no cuente con los recursos suficientes para ello, y tenga que priorizar algunos sectores en desmedro de otros, o que ejecute proyectos de infraestructura de poca calidad por restricciones presupuestales. Sin embargo, si por el contrario, la infraestructura fuera financiada totalmente por el concesionario privado a través de las APP, el Estado tendría dicha infraestructura en el corto plazo sin costo alguno para él (serían los usuarios quienes pagarían los costos de inversión, operación y mantenimiento a través de las tarifas por uso de la infraestructura). Del mismo modo, en los mecanismos de APP, las inversiones podrían ser financiadas conjuntamente por el concesionario y por el Estado, en cuyo caso los desembolsos del Estado serían menores (comparado con la obra pública) y podría aprovecharse una mejor distribución de los recursos públicos para desarrollar más inversiones. Esto equivale a un efecto de apalancamiento del Estado a través del sector privado, lo que le permite utilizar sus recursos limitados para financiar un mayor número de proyectos de infraestructura.

2.3 Metodología y estimación

2.3.1 Modelo Teórico de la Función de Producción

El objetivo de esta investigación es analizar la importancia de la infraestructura pública (financiada por el gobierno) e infraestructura público-privada (financiada por el sector privado) en el desempeño económico del país. Para ello, se establece una función de producción por medio de la cual se pueda estimar los parámetros de participación de cada factor.

Se asume que hay “m” firmas homogéneas (idénticas) en la economía. La empresa “i” tiene una función de producción con rendimientos constantes a escala en factores privados: Stock de Capital K_{it} , Stock de Infraestructura Público-Privada Fv_{it} y Trabajo L_{it} :

$$Y_{it} = A_t K_{it}^\alpha Fv_{it}^\gamma L_{it}^{1-\alpha-\gamma}. \quad (2.1)$$

Además, el Estado provee infraestructura pública de forma gratuita (externalidad positiva para las empresas), sujeta a congestión, lo que significa que para una cantidad dada de capital agregado K_t , un aumento en la cantidad de infraestructura pública agregada suministrada por el Estado, Fb_t , genera un aumento en la producción de cada empresa “i”; pero para una cantidad dada de infraestructura pública agregada Fb_t , un aumento del capital agregado K_t genera una disminución de la producción debido a la congestión. Siguiendo a Barro y Sala-i-Martin (1992), dado un número de carreteras suministradas por el estado, un aumento en el número de camiones de las empresas congestiona las

carreteras y reduce la productividad de las firmas. Por lo tanto, el factor de escala o de productividad A_t recoge estas externalidades:

$$A_t = \bar{A}_t \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta, \quad (2.2)$$

donde \bar{A}_t es el componente exógeno y β indica la importancia de la externalidad. Reemplazando (2.2) en (2.1) se tiene:

$$Y_{it} = \bar{A}_t K_{it}^\alpha F_{V_{it}}^\gamma L_{it}^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta. \quad (2.3)$$

Entonces la producción agregada es la sumatoria de las producciones individuales de cada firma, de igual forma con los factores de producción (Marrero, Gustavo; Novales, Alfonso, 2006):

$$Y_t = \sum_{i=1}^m Y_{it}; \quad K_t = \sum_{i=1}^m K_{it}; \quad F_{V_t} = \sum_{i=1}^m F_{V_{it}}; \quad L_t = \sum_{i=1}^m L_{it}.$$

Por lo tanto, la función de producción de la economía es la siguiente:

$$Y_t = \bar{A}_t K_t^\alpha F_{V_t}^\gamma (L_t)^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta. \quad (2.4)$$

Expresando en términos per-cápita:

$$\begin{aligned} \frac{Y_t}{L_t} &= \bar{A}_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\alpha \left(\frac{F_{V_t}}{L_t} \right)^\gamma \left(\frac{L_t}{L_t} \right)^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t/L_t}{K/L_t} \right)^\beta, \\ y_t &= \bar{A}_t (k_t)^\alpha (fv_t)^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t} \right)^\beta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

si $\beta = 0$, la función de producción se convierte en la Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala. En cambio, si $\beta > 0$ la función presenta externalidades de la infraestructura pública sujeta a congestión.

2.3.2 Complementariedad de los factores de producción

Complementariedad entre stock de capital e infraestructura público-privada:

La función de producción (2.3), con externalidades de la infraestructura pública pero sujeta a congestión, indica lo siguiente: ante un incremento del stock de capital físico (K_t), la variación de la infraestructura pública (Fb_t) debe ser necesariamente mayor, o igual, que la variación del stock de capital, para que la variación del nivel de PIB (Y_{it}) sea positiva. En caso contrario se tendrá una caída en el crecimiento de la producción. Esto implica que el stock de capital e infraestructura pública son complementarios.

Sin embargo, el incremento continuo de la infraestructura pública podría no ser sostenible (especialmente por restricciones presupuestales). Entonces, para que el nivel de producción no caiga se requerirá necesariamente de mayor infraestructura financiada por el sector privado (infraestructura público-privada). Por lo tanto, también existe una relación de complementariedad entre stock de capital e infraestructura público-privada.

Complementariedad entre infraestructura pública y público-privada:

En los países en vías de desarrollo las necesidades de infraestructura son más heterogéneas. Se puede clasificar en dos tipos:

a) Demanda de infraestructura básica:

Esta infraestructura es una condición necesaria, pero no suficiente, para el sostenimiento de largo plazo de la economía. Está destinada a resolver los problemas de pobreza y necesidades básicas, y por lo general los usuarios no están en capacidad de pagar una tarifa por el servicio público que reciben (o pagan tarifas subvencionadas). También se considera como infraestructura básica las vías de comunicación (carreteras) que el estado construye en regiones inaccesibles, donde no existe comunicación vial y no es posible rentabilizar; por lo tanto, el papel del Estado es fundamental, pues estas vías ayudan a la conexión entre los pueblos, generación de comercio, creación de pequeñas empresas (por ejemplo, los restaurantes a lo largo de las carreteras). Esta infraestructura es financiada por el Estado y se encuentra dentro de infraestructura pública (Fb_t).

Ahora, para el caso de infraestructura vial, una vez que se necesite la ampliación de la vía, dado el progreso comercial de la región, ya es posible rentabilizar y esto se podría hacer con el financiamiento del sector privado. Es decir, para la ampliación y mejoramiento se pasa de infraestructura pública (Fb_t) a infraestructura público-privada (Fv_t).

b) Demanda de infraestructura productiva:

Esta infraestructura es una condición suficiente para el sostenimiento de largo plazo de la economía. Está destinada a incrementar la productividad de las empresas. Los usuarios de esta infraestructura sí están en condiciones de pagar una tarifa de mercado por el servicio recibido. Esta infraestructura puede ser financiada por el sector privado y se encuentra dentro de infraestructura público-privada (Fv_t).

Así, para tener un crecimiento sostenible se debe cumplir con la condición necesaria y suficiente; es decir, no sirve de mucho que un país se dedique a construir solamente infraestructura productiva sin preocuparse por la básica (infraestructura educativa, de salud, saneamiento, entre otros, para el fortalecimiento del capital humano). A mayor desarrollo de infraestructura productiva, mayor necesidad de capital humano capacitado y saludable. Por lo tanto, Fb_t y Fv_t son complementarios.

2.3.3 Modelo Econométrico de la Función de Producción

Expresando la ecuación (2.5) en términos per-cápita y realizando una transformación logarítmica, con la finalidad de linealizar la ecuación y eliminar el posible problema de heterocedasticidad, se tiene lo siguiente:

$$\text{Ln}y_t = \text{Ln}\bar{A}_t + (\alpha - \beta)\text{Ln}k_t + \gamma\text{Ln}fv_t + \beta\text{Ln}fb_t . \quad (2.6)$$

Dado que el modelo econométrico utiliza datos históricos, se toma en cuenta lo siguiente: la inversión en infraestructura, tanto pública como público-privada, no tienen efectos inmediatos en el PIB (o en todo caso no un efecto importante en el mismo período). En cambio, la inversión en capital, y por ende el stock de capital, tiene efectos inmediatos en el PIB (en el mismo período), debido que las maquinarias, equipos, existencias e insumos, son utilizados en el mismo período para generar la nueva producción. Por lo tanto, para el modelo econométrico se considera las variables de infraestructura pública y público-privada rezagadas un período. Así, se tiene:

$$\text{Ln}y_t = \text{Ln}\bar{A}_t + (\alpha - \beta)\text{Ln}k_t + \gamma\text{Ln}fv_{t-1} + \beta\text{Ln}fb_{t-1}, \quad (2.7)$$

de esta manera, α , β y γ muestran la participación del factor capital, la infraestructura pública y la infraestructura público-privada, respectivamente. Para el caso peruano, se tiene

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

en cuenta los cambios estructurales (crisis de la deuda a finales de los años 80s y cambio de régimen político a inicios de la década de los años 90s) que ocurrieron en la economía en distintos períodos y también observaciones atípicas (outliers). Para capturar estos efectos, se agrega al modelo algunas variables dummy, así se tiene:

$$\text{Lny}_t = \text{Ln}\bar{A}_t + (\alpha - \beta)\text{Lnk}_t + \gamma\text{Lnfv}_{t-1} + \beta\text{Lnfb}_{t-1} + d1 + d2 + d3 + d4 + d5 + d6, \quad (2.8)$$

La variable dummy d1 considera el cambio estructural de la economía peruana en los años 80s debido a la crisis de endeudamiento, que no solo ocurrió en este país sino a nivel regional, y se vio reflejado en altas tasas de inflación, déficits fiscales, etc. Por otro lado, la d2 es el cambio estructural en la década de los años 90's; durante ese período se inician las primeras asociaciones público privadas en el país, además de la transición política y apertura comercial en los años posteriores. A su vez, se tiene cuatro variables dummy de control para las observaciones atípicas (outliers), que son d3, d4, d5 y d6. Para la agregación de estas variables dummy se ha tenido cuidado en no caer en el problema de "la trampa de las dummy" que genera multicolinealidad perfecta. Se adjunta, en el Anexo N° 1, la matriz de correlaciones de las variables dummy y se puede corroborar que no existe este problema. Gracias a las dummy de control, se obtienen residuos limpios (residuos sin autocorrelación, homocedásticos y con distribución normal). Por lo tanto, el modelo econométrico final es el siguiente:

$$\text{Lny}_t = \text{Ln}\bar{A} + (\alpha - \beta)\text{Lnk}_t + \gamma\text{Lnfv}_{t-1} + \beta\text{Lnfb}_{t-1} + d1 + d2 + d3 + d4 + d5 + d6 + \varepsilon_t. \quad (2.9)$$

Los parámetros de esta ecuación, (2.9), se estiman por el método de Ordinary Least Squares (OLS).

2.3.4 Los datos

Los datos fueron obtenidos de distintas fuentes, como Penn World Table (2012), Banco Central de Reserva del Perú (2013), Fondo Monetario Internacional (2013), Universidad Esan (2011) e Instituto Peruano de Economía (2006). La muestra abarca 60 observaciones desde el año 1950 hasta el 2010 a precios constantes, en términos per cápita y corregido por la paridad de poder de compra. El PIB a precios domésticos y moneda nacional no es comparable entre países, incluso el PIB a precios domésticos convertidos a una misma moneda usando tipos de cambio nominales no resuelve el problema de comparabilidad. Usualmente, el PIB es reportado en dólares usando tipos de cambio nominales. Sin

embargo, los precios domésticos de los bienes y servicios varían entre países, así, países donde el costo de vida es elevado parecerán más ricos cuando en realidad no lo son. Para solucionar este problema, se utiliza los datos de la Penn World Table (2012), donde se encuentra variables macroeconómicas corregidas de los problemas de comparabilidad mencionados anteriormente. En el Gráfico 2.1 se puede ver la evolución del PIB Per-cápita en los últimos 60 años.

Para el stock de capital y el stock de infraestructura pública y privada se utiliza los cuadros históricos del Banco Central de Reserva del Perú (2013), donde se muestra la inversión privada y pública como porcentaje del PIB, además, se utilizan datos de dos investigaciones previas: Instituto Peruano de Economía (2006) y Universidad ESAN (2011). De esta manera, se obtienen los flujos de inversión privada en infraestructura para así obtener la inversión total en infraestructura en cada año. La construcción del stock de capital e infraestructura fue hecha en base al método del inventario perpetuo que utiliza variables flujo. Para esta construcción se asumió un valor aproximado de la tasa de depreciación del capital igual a 0.05; de la infraestructura pública, 0.06; y de la infraestructura público-privada, 0.04. En el Gráfico 2.2 se observa la evolución del stock de capital per cápita desde el año 1950 hasta el 2010 en el Perú. En el Gráfico 2.3 se presenta la evolución del stock de infraestructura pública y privada per cápita desde el año 1950 hasta el 2010 en el Perú. Claramente se observa que la inversión privada en infraestructura y la acumulación de infraestructura privada empiezan a inicios de los años 90s.

Gráfico 2.1: PIB per-cápita

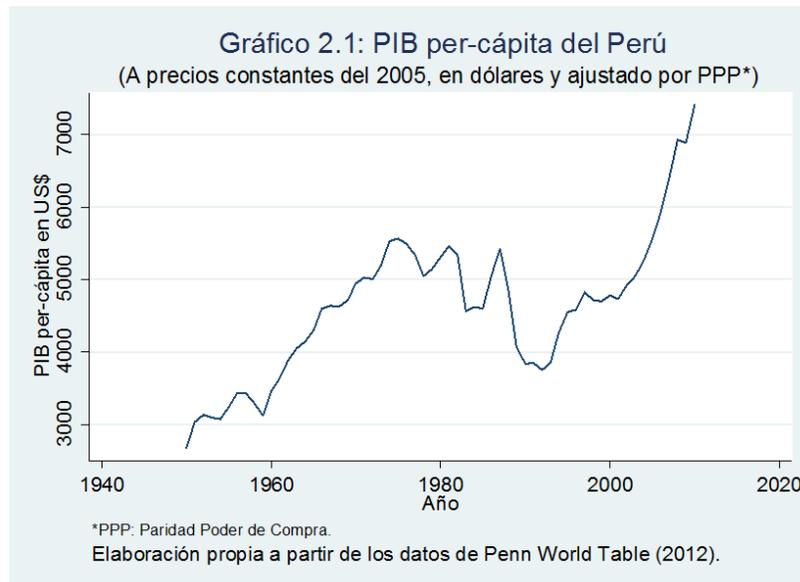


Gráfico 2.2: Stock de capital per-cápita Perú

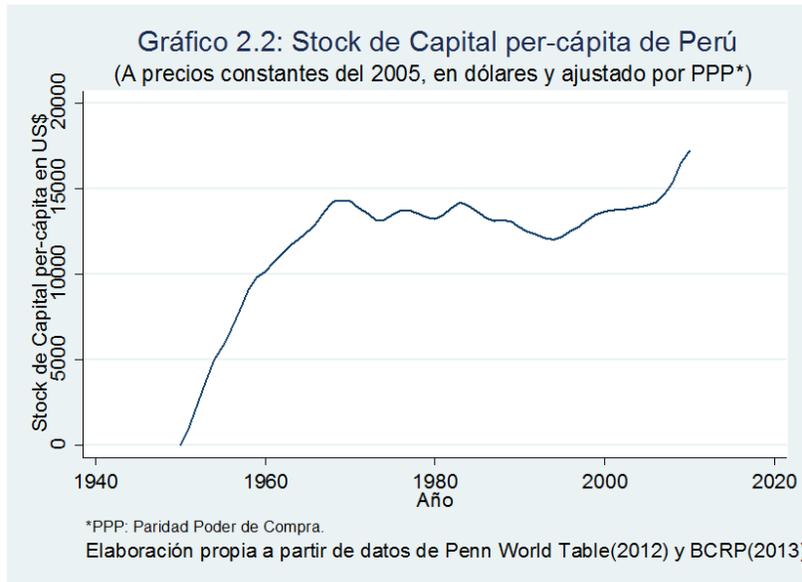
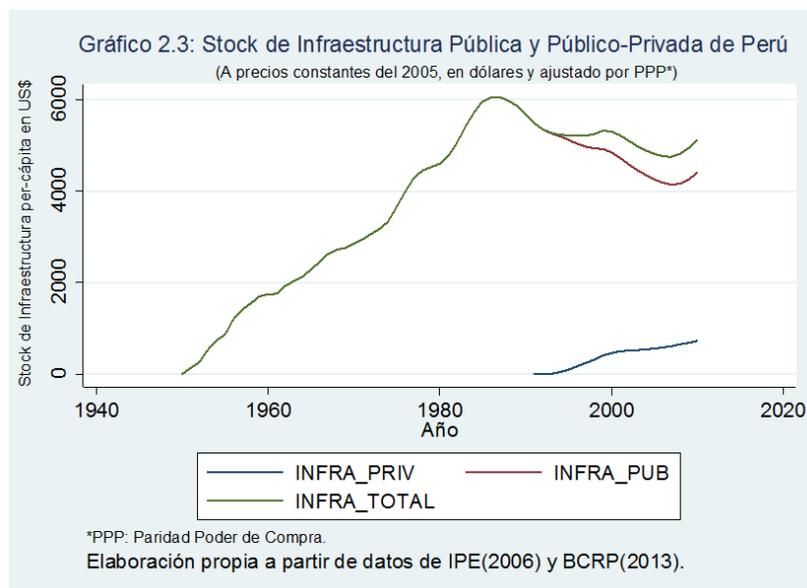


Gráfico 2.3: Stock de infraestructura pública y público-privada Perú



2.4 Los resultados

Los coeficientes asociados a cada variable del modelo son las elasticidades. En el Anexo N° 1 se presentan todos los test para verificar el cumplimiento de los supuestos del Ordinary Least Squares: matriz de correlaciones, matriz de covarianzas, test de autocorrelación, test de heterocedasticidad y test de normalidad de los residuos. Cabe resaltar que el modelo propuesto pasa satisfactoriamente las pruebas de los test aplicados. En la Tabla 2.1 se presentan los parámetros estimados del mencionado modelo.

Tabla 2. 1: Resultados

Número de Obs.	59			
F(9,49)	88.13			
Prob>F	0.0000			
R cuadrado	0.9418			
R cuadrado ajustado	0.9311			

ly	Coefficiente	S.E.	t	p> t
IA	5.10	0.451	11.31	0.000
lk	0.25	0.069	3.62	0.001
lfb(-1)	0.13	0.033	3.81	0.000
lfv(-1)	0.04	0.006	7.09	0.000
d1	0.29	0.065	4.46	0.000
d2	-0.15	0.026	-5.97	0.000
d3	0.10	0.027	3.72	0.001
d4	-0.13	0.036	-3.54	0.001
d5	-0.29	0.036	-8.15	0.000
d6	0.25	0.032	7.77	0.000

El coeficiente α , la elasticidad del PIB per-cápita (ly) respecto al stock de capital per cápita (lk), es de 0.38; esto indica que el incremento en 1% del stock de capital per cápita incrementa el PIB per-cápita en 0.38%. Este coeficiente es altamente significativo (tiene un p-value de 0.001).

El coeficiente β , la elasticidad del PIB per-cápita (ly) respecto al stock de infraestructura pública (lfb), es 0.13; es decir, el incremento en 1% del stock de infraestructura pública per cápita incrementa el PIB per-cápita en 0.13%. Igualmente, este coeficiente es altamente significativo (tiene un p-value de 0.000).

El coeficiente γ , la elasticidad del PIB per-cápita (ly) respecto al stock de infraestructura público-privada (lfv), es 0.04; es decir, un incremento del 1% del stock de infraestructura

CAPÍTULO II: Infraestructura de servicio público

privada incrementa en 0.04% el PIB per-cápita. De igual manera, este coeficiente estimado es altamente significativo (tiene un p-value de 0.000).

Los resultados indican que incrementos porcentuales del stock en infraestructura pública tienen mayores efectos en la economía respecto a la infraestructura público-privada. Cabe resaltar que la participación privada en el desarrollo de infraestructura de servicio público empezó a inicios de los años 90s con la privatización de empresas del Estado como una de las principales reformas que estableció el gobierno a causa de la crisis que atravesaba la economía peruana. No obstante, fue a partir del año 2001 donde la relevancia del sector privado en temas de infraestructura se acrecentó, debido a distintas reformas y políticas, una de ellas fue la acentuación de las Asociaciones Público Privadas a nivel nacional. El análisis de esta investigación toma información desde el año 1950 hasta el 2010, probablemente, en la medida que siga participando el sector privado en el ámbito de la infraestructura, sus efectos en la economía se irán consolidando.

Las elasticidades encontradas de los factores de producción se utilizarán en los capítulos III y IV para calibrar los parámetros de modelos de equilibrio general.

CAPÍTULO III

Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeta a Congestión en una Economía Cerrada

Este capítulo presenta un modelo que permite entender el papel de la infraestructura pública, sujeto a congestión, y público-privada en el crecimiento económico; y los efectos que se tiene ante un shock negativo de productividad. Se analiza una economía cerrada en la que interactúan tres agentes: empresas, familias y gobierno. Las variables clave son la inversión en infraestructura pública con financiamiento del gobierno (infraestructura pública) y la inversión en infraestructura pública con financiamiento del sector privado (infraestructura público-privada). Los parámetros son calibrados con las elasticidades estimadas en el capítulo II para la economía peruana. Las simulaciones del modelo indican que la participación del sector privado en la inversión en infraestructura se comporta como un amortiguador de choques contra la productividad y, junto con la inversión en capital, impulsan la recuperación de la economía.

En la sección 3.1 se analiza la economía. La subsección 3.1.1 describe el comportamiento de las empresas, se define el problema económico de las mismas y se obtiene la solución (que son las demandas óptimas de los factores que utilizan en su proceso productivo). La subsección 3.1.2 describe el comportamiento de las familias, de igual forma que en la subsección anterior, se define el problema económico al que se enfrentan, se obtiene la solución (que son las ofertas óptimas de los factores que ofrecen al mercado) y se propone los escenarios (cada escenario es representado por el porcentaje de la inversión en infraestructura público-privada) para la simulación. En 3.1.3 se define la interacción entre las empresas y las familias en los mercados competitivos. En 3.1.4 se indica la restricción a la que se enfrenta el gobierno. Finalmente, en 3.1.5, el modelo se cierra con una condición de equilibrio de la economía: oferta agregada igual a demanda agregada. En la sección 3.2 se introduce un shock de productividad. En 3.3 se derivan los estados estacionarios de las variables del modelo. En 3.4 se presenta el sistema de ecuaciones que describe el modelo y la tabla de calibración de parámetros. Este sistema de ecuaciones, con los parámetros calibrados, se introduce en MATLAB (archivo “.mod” del Toolbox Dynare) para realizar la simulación y obtener las funciones impulso-respuesta ante el shock negativo de productividad para varios escenarios. Y en 3.5 se presenta los resultados.

Finalmente, en este capítulo, el sistema de ecuaciones del modelo se desarrolla en tiempo discreto debido a que las simulaciones de impulso-respuestas se desarrollan en MATLAB (Toolbox Dynare). Cabe indicar que para este software el tiempo discreto es un requisito imprescindible.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

3.1 La economía

El modelo se basa en los siguientes supuestos fundamentales:

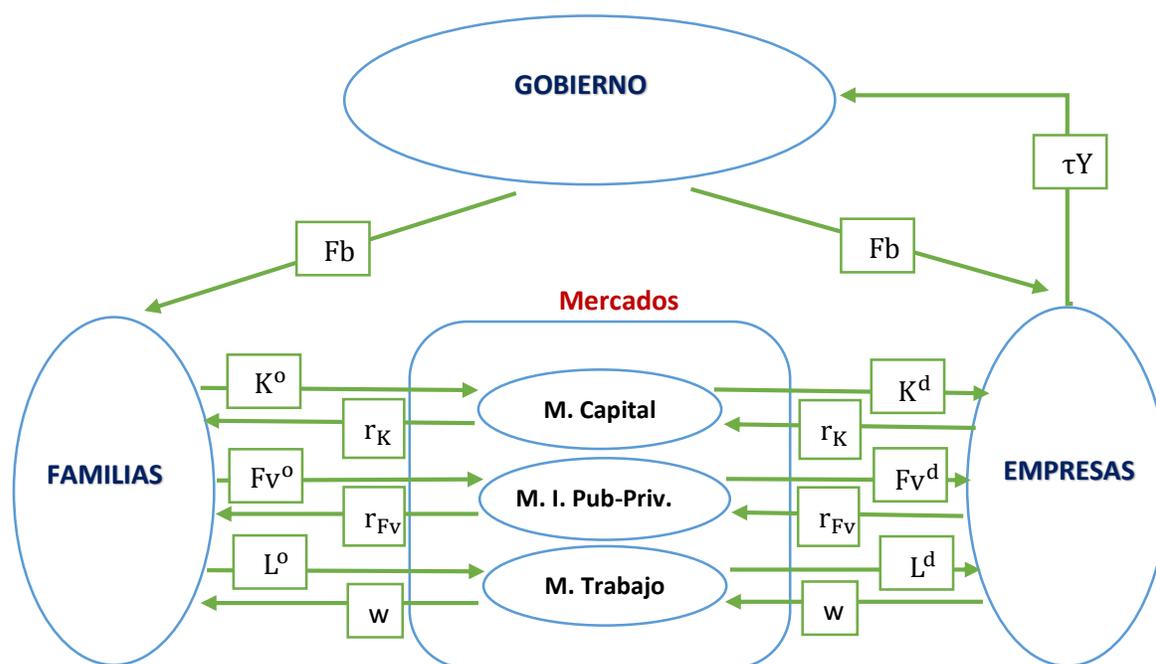
Supuesto 3.1: *Se tiene una economía cerrada.*

Supuesto 3.2: *En la economía interactúan tres agentes: empresas, familias y gobierno.*

El supuesto 3.1 implica que la inversión total en la economía será igual al ahorro total. Entonces, la acumulación de capital e infraestructura dependerá del ahorro de la economía. Por lo tanto, los tres agentes del supuesto 3.2 se enfrentan, cada uno y en conjunto, a un problema económico que debe ser resuelto dentro de la economía.

La figura 3.1 presenta el diagrama de flujo del modelo, en el cual se muestra la interacción de los agentes de la economía antes mencionados.

Figura 3. 1: Diagrama de flujo de la economía cerrada



El primer agente, la empresa, demanda capital (K^d), infraestructura público-privada (F_v^d), el trabajo (L^d) y aprovecha las externalidades positivas de la infraestructura pública (F_b). El segundo agente, la familia, oferta capital (K^o), infraestructura público-privada (F_v^o) y trabajo (L^o), y usa la infraestructura pública (F_b). El mercado de cada factor, dados la oferta

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

y demanda, define el pago de equilibrio, es decir, el retorno al capital (r_K), el retorno a la infraestructura público-privada (r_{FV}) y el salario (w). El tercer agente, el gobierno, provee infraestructura pública gratuita (Fb), pero ésta se encuentra sujeta a congestión, recauda ingresos de los impuestos (τ) gravados a la producción final de las empresas.

3.1.1 Las empresas

Supuesto 3.3: *En la economía hay “m” firmas homogéneas (idénticas).*

En el modelo, las “m” empresas están representadas por la firma “i” (en adelante, empresa representativa). Por lo tanto, dado que son homogéneas, basta con estudiar el problema económico de la empresa representativa para entender todas las demás.

Supuesto 3.4: *Las empresas tienen una función de producción del tipo Cobb-Douglas con externalidades de la infraestructura pública sujeta a congestión.*

La función de producción del Supuesto 3.4 se formula en el capítulo II (ecuación 2.3). A esta función se agrega el progreso tecnológico exógeno B_t , ahorrador de trabajo o neutral en el sentido Harrod (1939)⁴. Expresando en términos de trabajador efectivo⁵, la función de producción de la empresa “i” es la siguiente:

$$y_{it} = \bar{A}_t(k_{it})^\alpha (fv_{it})^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t}\right)^\beta, \quad (3.1)$$

donde el término $\left(\frac{fb_t}{k_t}\right)^\beta$ es una externalidad, sujeta a congestión, y por lo tanto es constante para la empresa “i”. Si $\beta = 0$, la función de producción se convierte en una Cobb-Douglas con rendimientos constantes. En cambio, si $\beta > 0$, la función presenta externalidades de la infraestructura pública sujeta a congestión. Como se indica en el capítulo II, para que la externalidad sea positiva, se requiere que incrementos en fb_t sean mayores a los incrementos en k_t .

Definición 3.1: Problema Económico de las Empresas (PEE). *Las empresas maximizan sus beneficios. Sus ingresos derivan de su producción y, sus costos, por la utilización de los factores de producción.*

⁴ Esta forma de progreso tecnológico que aumenta la eficiencia del trabajo indica que es posible producir más con la misma cantidad de trabajo.

⁵ La derivación se encuentra en el Anexo N° 2, sección 2.1, subsección 2.1.1.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

De la definición 3.1, el objetivo de la empresa representativa es maximizar su función de beneficios π_t (ingresos menos costos). Sus ingresos provienen de la venta del bien y_{it} y sus costos están asociados al pago de impuestos τy_{it} (τ es la tasa de impuestos) y al pago de los factores productivos utilizados en la producción: al capital $r_{K_t} k_{it}$, donde r_{K_t} es el rendimiento del capital; a la infraestructura público-privada $r_{FV_t} f_{vit}$, donde r_{FV_t} es el rendimiento de la infraestructura público-privada; y al trabajo w_t , donde w_t es el salario. La función de beneficios de la empresa "i" en términos de trabajador efectivo⁶ es el siguiente:

$$\frac{\pi_{it}}{(B_t L_{it})} = y_{it} - \tau y_{it} - r_{K_t} k_{it} - r_{FV_t} f_{vit} - \frac{w_t}{B_t}. \quad (3.2)$$

Supuesto 3.5: *Las empresas son competitivas, tanto en el mercado de bienes como en el de factores.*

Las variables r_{K_t} , r_{FV_t} y w_t están dadas para las empresas, debido a que son determinadas en el mercado (por el supuesto 3.5); es decir, la empresa "i" no tiene poder en ningún mercado para influir sobre estas variables.

Definición 3.2: Definición formal del PEE. *En cada período t , dados los pagos w_t , r_{K_t} y r_{FV_t} , los parámetros τ , α , γ y β , la productividad exógena \bar{A}_t y la externalidad de la infraestructura pública sujeta a congestión $\left(\frac{fb_t}{k_t}\right)^\beta$; el nivel de producción y_{it} y las cantidades demandas (d) de los factores de producción k_{it}^d y f_{vit}^d resuelven el problema de la empresa representativa "i":*

$$\begin{aligned} \max \pi_{it} &= (B_t L_{it}) \left[y_{it} - \tau y_{it} - r_{K_t} k_{it} - r_{FV_t} f_{vit} - \frac{w_t}{B_t} \right], \\ \text{s.a:} \\ y_{it} &= \bar{A}_t k_{it}^\alpha f_{vit}^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t} \right)^\beta \quad \forall t. \end{aligned}$$

A continuación se presenta la solución a este problema.

Proposición 3.1: Solución al PEE. *Las demandas óptimas (d) de los factores de producción que solucionan el problema de la empresa representativa "i" (Definición 3.2), son las siguientes:*

$$k_{it}^d = (1 - \tau) \alpha \frac{y_{it}}{r_{K_t}}, \quad (3.3)$$

⁶ La derivación se encuentra en el Anexo N° 2, sección 2.1, subsección 2.1.1.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

$$fv_{it}^d = (1 - \tau)\gamma \frac{y_{it}}{r_{Fv_t}}, \quad (3.4)$$

$$(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)y_{it}B_t = w_t. \quad (3.5)$$

La demostración de la Proposición 3.1 se encuentra en el Anexo N° 2, sección 2.1, subsección 2.1.2. Ahora bien, bajo el Supuesto 3.3 la producción agregada es la sumatoria de las producciones individuales de cada firma, de igual forma ocurre con los factores de producción (Marrero, Gustavo; Novales, Alfonso, 2006), por lo que se tiene lo siguiente:

$$y_t = \sum_{i=1}^m y_{it},$$

$$k_t = \sum_{i=1}^m k_{it},$$

$$fv_t = \sum_{i=1}^m fv_{it}.$$

Por lo tanto, los valores agregados serían los siguientes:

$$y_t = \bar{A}_t(k_t)^\alpha (fv_t)^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t}\right)^\beta, \quad (3.6)$$

$$k_t^d = (1 - \tau)\alpha \frac{y_t}{r_{K_t}}, \quad (3.7)$$

$$fv_t^d = (1 - \tau)\gamma \frac{y_t}{r_{Fv_t}}, \quad (3.8)$$

$$(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)y_t B_t = w_t. \quad (3.9)$$

3.1.2 Las familias

Antes de definir y resolver el problema económico de las familias, se listan a continuación los supuestos requeridos.

Supuesto 3.6: *En la economía hay “q” familias homogéneas (idénticas).*

Bajo este supuesto, se analizará solo una familia que represente a todas, a la que llamaremos familia “j”.

Supuesto 3.7: *Las familias tienen una función de utilidad del tipo CRRA⁷ (Constant Risk Relative Aversion), cuya utilidad marginal es positiva pero decreciente.*

⁷ También se le conoce como Elasticidad Intertemporal de Sustitución Constante (CIES, por sus siglas en inglés).

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Bajo este supuesto, la función de bienestar que depende del consumo de bienes finales (C_{jt}), con una utilidad marginal del consumo positiva ($u'(C_{jt}) > 0$) pero decreciente ($u''(C_{jt}) < 0$) en cada período, es la siguiente:

$$u_t(c_{jt}) = \frac{\left(\frac{C_{jt}}{L_{jt}}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad (3.10)$$

donde $\frac{C_{jt}}{L_{jt}}$ es el consumo per cápita, σ representa el grado de aversión al riesgo y $\frac{1}{\sigma}$ es la elasticidad de sustitución intertemporal⁸. La utilidad futura está actualizada por un factor de descuento intertemporal $\beta_d \in (0,1)$, éste, a su vez, está determinado por la tasa de preferencia subjetiva intertemporal ρ .

$$\beta_d = \frac{1}{1+\rho}.$$

Así se tiene, por ejemplo, que la función de utilidad intertemporal para dos períodos, 1 y 2, es la siguiente:

$$U(c_1, c_2) = u(c_{j1}) + \beta_d u(c_{j2}).$$

Si los individuos fueran impacientes valorarían más el consumo presente que el consumo futuro. Se presenta a continuación los casos extremos:

Cuando los individuos son extremadamente impacientes, β_d toma un valor de 0 (debido a que ρ tiende a ∞); es decir, exigen una alta tasa positiva por sacrificar su consumo actual. Entonces la ecuación es:

$$U(c_{j1}, c_{j2}) = u(c_{j1}).$$

En cambio, si los individuos fueran extremadamente pacientes, valoran el consumo futuro igual que el consumo presente, β_d toma un valor cercano a 1 (ρ tiende a 0); es decir, no exigen una tasa de descuento por sacrificar su consumo. Entonces la ecuación anterior quedaría así:

⁸ Para más detalles ver el Anexo N° 3, sección 3.1.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

$$U(c_{j1}, c_{j2}) = u(c_{j1}) + u(c_{j2}).$$

En esta investigación, el factor de descuento intertemporal β_d tomará un valor cercano a la unidad, para reflejar el comportamiento de una familia altamente paciente dispuesta a sacrificar su consumo hoy y así tener ahorros. Así se tiene:

$$U(c_{j1}, c_{j2}) = u(c_{j1}) + \beta_d u(c_{j2}).$$

Supuesto 3.8: *Las familias planifican su consumo a lo largo de todo el horizonte temporal.*

Bajo este supuesto, la función de utilidad que obtiene la familia "j", en todo el horizonte temporal, es:

$$\begin{aligned} U(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, \dots) &= u(c_{j1}) + \beta_d u(c_{j2}) + \beta_d^2 u(c_{j3}) + \dots, \\ U &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t u(c_{jt+1}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.10) en (3.11):

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{\left(\frac{c_{jt}}{L_{jt}}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \quad (3.12)$$

Expresando en términos de trabajador efectivo, donde $c_{jt} = \frac{C_{jt}}{B_t L_{jt}}$ es el consumo en unidades efectivas de trabajo y B_t , la tecnología⁹:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \quad (3.13)$$

Supuesto 3.9: *Las familias tienen una restricción presupuestaria en cada período, que es el equilibrio entre sus ingresos y egresos.*

⁹ La derivación se encuentra en el Anexo N° 2, sección 2.2, subsección 2.1.2.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Supuesto 3.10: *Las familias son dueñas del capital, del trabajo y tienen derechos de explotación de la infraestructura público-privada que construyan. Estos son ofertados en un mercado de competencia perfecta.*

Bajo los supuestos 3.9 y 3.10, los ingresos de la familia “j” se derivan del salario percibido w_t , los rendimientos que obtienen del capital físico, r_{K_t} , y de la infraestructura público-privada, $r_{FV_t}fv_{jt}$. Y estos ingresos los destinan al consumo de bienes finales c_{jt} . La diferencia es su ahorro.

Supuesto 3.11: *Las familias destinan su ahorro para inversiones en capital e infraestructura público-privada.*

Bajo el supuesto 3.1, el ahorro total será igual a la inversión total. Bajo el supuesto 3.6, las familias tienen un comportamiento homogéneo. Por lo tanto, el ahorro de la familia “j” será igual a su inversión, que es la suma de la inversión en bienes de capital físico $i_{K_{jt}}$ y la inversión en infraestructura público-privada $i_{FV_{jt}}$.

Por lo tanto, la familia elige el nivel de consumo e inversión en capital e infraestructura público-privada óptimos. Entonces, bajo el supuesto 3.9, la restricción presupuestaria para la familia “j” es:

$$c_{jt} + i_{K_{jt}} + i_{FV_{jt}} = \frac{w_t}{B_t} + r_{K_t} k_{jt} + r_{FV_t} fv_{jt} . \quad (3.14)$$

Donde las variables se encuentran en términos de trabajador efectivo, y son las siguientes:

- c_{jt} : Consumo de bienes finales.
- $i_{K_{jt}}$: Inversión en capital físico.
- $i_{FV_{jt}}$: Inversión en Infraestructura público-privada.
- k_{jt} : Stock de capital privado.
- fv_{jt} : Stock de infraestructura público-privada.
- w_t : Remuneración al trabajo.
- r_{K_t} : Rendimiento del capital.
- r_{FV_t} : Rendimiento de la infraestructura público-privado.

Además, existen dos ecuaciones que describen la evolución de las variables de stock: el stock de capital del siguiente periodo (k_{jt+1}) es igual al stock de capital del periodo actual

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

(k_{jt}) , neto de depreciación (δ_K) , más la nueva inversión en capital (i_{Kjt}) que se realiza en el período actual:

$$(1 + x)(1 + n)k_{jt+1} = (1 - \delta_K)k_{jt} + i_{Kjt} , \quad (3.15)$$

donde x es la tasa de crecimiento exógena de la tecnología y n es la tasa de crecimiento de la población. El stock de infraestructura público-privada del siguiente periodo (fv_{jt+1}) es igual al stock actual (fv_{jt}) , neto de depreciación (δ_{FV}) , más la nueva inversión que realizan las familias i_{FVjt} :

$$(1 + x)(1 + n)fv_{jt+1} = (1 - \delta_{FV})fv_{jt} + i_{FVjt} . \quad (3.16)$$

Definición 3.3: Problema Económico de las Familias (PEF). *Las familias maximizan su función de utilidad sujeta a su restricción presupuestaria y a las condiciones de evolución del stock de capital e infraestructura público-privada, con la finalidad de determinar los niveles óptimos de su consumo, la inversión en capital y la inversión en infraestructura público-privada.*

El stock de capital, como la infraestructura público-privada del periodo t , fue determinado en el período anterior $t-1$. Y la inversión que se realiza hoy, período t , determina tanto el stock del capital como el stock de la infraestructura del periodo siguiente $t+1$. Por lo tanto, la decisión de invertir hoy está en función de cuánto de capital e infraestructura público-privada se necesite mañana. Entonces los niveles óptimos de stocks de mañana dependen de la inversión que se realice hoy. Por lo tanto, con la finalidad de determinar los niveles óptimos de estos factores se maximiza la función objetivo de las familias respecto al consumo en el periodo presente t y los stocks de capital e infraestructura público-privada del periodo siguiente $t+1$.

Definición 3.4: Definición formal del PEF. *Dados los pagos w_t , r_{Kt} y r_{FVt} y los parámetros σ , ρ , x , n , δ_K y δ_{FV} ; las secuencias c_{jt} , i_{Kjt} , i_{FVjt} , k_{jt+1} y fv_{jt+1} resuelven el problema de la familia representativa "j":*

$$\max U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} ,$$

s.a:

$$c_{jt} + i_{Kjt} + i_{FVjt} = \frac{w_t}{B_t} + r_{Kt} k_{jt} + r_{FVt} fv_{jt} \quad \forall t ,$$

$$c_{jt}, i_{Kjt}, i_{FVjt} \geq 0 \quad \forall t .$$

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Proposición 3.2: (Solución al PEF). *El siguiente sistema describe la senda óptima de consumo:*

$$\left(\frac{c_{jt+1}}{c_{jt}}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{c_{jt+1}}{c_{jt}}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (3.18)$$

La demostración de la Proposición 3.2 se encuentra en el Anexo N° 2 (sección 2.2, subsección 2.2.2). Las condiciones de Euler son ecuaciones intertemporales que describen la dinámica del consumo. Las ecuaciones (3.17) y (3.18) son, por tanto, la solución óptima al PEF de la Proposición 3.2, e indican que la tasa de crecimiento del consumo está en función de las rentabilidades del capital $r_{K_{t+1}}$ y de la infraestructura público-privada $r_{FV_{t+1}}$ descontadas de sus respectivas tasas de depreciación δ_K y δ_{FV} . Para ambas condiciones, los determinantes de la tasa de crecimiento están ponderados por el factor de descuento intertemporal β_d y la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo $\frac{1}{\sigma}$.

Siguiendo similar procedimiento que en la empresa, las variables agregadas de la economía para las familias equivalen a la sumatoria de las variables individuales de cada familia elegidas de manera óptima:

$$c_t = \sum_{j=1}^q c_{jt},$$

$$i_{K_t} = \sum_{j=1}^q i_{K_{jt}},$$

$$i_{FV_t} = \sum_{j=1}^q i_{FV_{jt}},$$

$$k_{t+1} = \sum_{j=1}^q k_{jt+1},$$

$$fv_{t+1} = \sum_{j=1}^q fv_{jt+1}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones que describen el comportamiento de todas las familias son los siguientes:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (3.19)$$

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1 - \delta_{FV})}{(1+x)^\sigma (1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (3.20)$$

$$c_t + i_{K_t} + i_{FV_t} = \frac{w_t}{B_t} + r_{K_t} k_t + r_{FV_t} fV_t, \quad (3.21)$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta_K)k_t + i_{K_t}, \quad (3.22)$$

$$fV_{t+1} = (1 - \delta_K)fV_t + i_{FV_t}. \quad (3.23)$$

Supuesto 3.12: Con la finalidad de tener varios escenarios en la simulación de las funciones de impulso-respuesta, se asume que existe un parámetro θ que representa el porcentaje de inversión en infraestructura público-privada respecto a la inversión en infraestructura total.

En la simulación, el parámetro θ tomará tres valores, 25%, 37.5% y 50%. Esto permitirá tener tres escenarios bajo los cuales se evaluará el impacto del shock negativo de productividad, para finalmente responder a la pregunta ¿con qué porcentaje de inversión en infraestructura público-privada, parámetro θ , el impacto del shock negativo es menor?

Entonces, dado θ y dada la decisión en infraestructura público-privada i_{FV_t} , determinado de manera óptima por las “q” familias de la economía, se obtiene la inversión necesaria en infraestructura total i_{Ft_t} . Es decir:

$$i_{Ft_t} = \left(\frac{1}{\theta}\right) i_{FV_t}. \quad (3.24)$$

Reemplazando (3.24) en (3.21) y (3.23) tenemos la nueva restricción agregada:

$$c_t + i_{K_t} + \theta i_{Ft_t} = \frac{w_t}{B_t} + r_{K_t} k_t + r_{FV_t} fV_t, \quad (3.25)$$

$$fV_{t+1} = (1 - \delta_K)fV_t + \theta i_{Ft_t}. \quad (3.26)$$

3.1.3 El Mercado

Definición 3.5: Equilibrio en los Mercados de Factores (EMF). En cada período t , los Mercados de Factores, por las leyes de la oferta (o) y demanda (d), determinan los pagos a los factores que se realizan en la economía: r_{K_t} , r_{FV_t} y w_t .

- **Mercado del Capital:** el equilibrio entre el capital ofertado k_t^o por las “q” familias y lo demandado k_t^d por las “m” empresas determina el pago de mercado r_{K_t} .

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

$$\sum_{j=1}^q k_{jt}^o = k_t^o = k_t = k_t^d = \sum_{i=1}^m k_{it}^d . \quad (3.27)$$

- **Mercado del Servicio de Infraestructura Público-Privada:** el equilibrio entre la infraestructura público-privada ofertado fv_t^o por las “q” familias y lo demandado fv_t^d por las “m” empresas determina el pago de mercado r_{Fv_t} .

$$\sum_{j=1}^q fv_{jt}^o = fv_t^o = fv_t = fv_t^d = \sum_{i=1}^m fv_{it}^d . \quad (3.28)$$

- **Mercado de Trabajo:** el equilibrio entre la fuerza de trabajo ofertado L_t^o por las “q” familias y lo demandado L_t^d por las “m” empresas determina el salario de mercado w_t .

$$\sum_{j=1}^q L_{jt}^o = L_t^o = L_t = L_t^d = \sum_{i=1}^m L_{it}^d . \quad (3.29)$$

3.1.4 El Gobierno

Supuesto 3.13: En la economía, la inversión pública es complementaria a la inversión público-privada de las familias.

Así, dado i_{Ft_t} , se encuentra determinada la inversión pública en infraestructura i_{Fb_t} . Es decir, esta variable no es controlada por el gobierno:

$$i_{Fb_t} = (1 - \theta)i_{Ft_t} . \quad (3.30)$$

Y mediante la ley de movimiento, el stock de infraestructura pública del siguiente período fb_{t+1} también se encuentra determinada:

$$(1 + n)(1 + x)fb_{t+1} = (1 - \delta_{Fb})fb_t + i_{Fb_t} . \quad (3.31)$$

Donde δ_{Fb} es la tasa de depreciación de la infraestructura pública. Y reemplazando (3.49) en (3.50) se obtiene:

$$(1 + n)(1 + x)fb_{t+1} = (1 - \delta_{Fb})fb_t + (1 - \theta)i_{Ft_t} . \quad (3.32)$$

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Supuesto 3.14: Los ingresos del gobierno provienen únicamente de los impuestos τy_t .

Definición 3.6: Restricción Presupuestaria del Gobierno (RPG). Dados los parámetros τ, x, n, δ_{Fb} y θ ; y las variables y_t e i_{Ft} ; se obtiene el gasto público g_t que equilibra la restricción presupuestaria del gobierno:

$$g_t = \tau y_t - (1 - \theta) i_{Ft} \quad \forall t. \quad (3.33)$$

3.1.5 Equilibrio de la Economía

Definición 3.7: Equilibrio OA-DA. Existe un equilibrio entre la oferta agregada (OA) y la demanda agregada (DA).

$$y_t = c_t + i_{Kt} + i_{Ft} + g_t. \quad (3.34)$$

Definición 3.8: Equilibrio General Competitivo (EGC). Un EGC es un conjunto de secuencias para las cantidades $y_t, k_t, f_{vt}, f_{bt}, c_t, i_{Kt}, i_{Fvt}, i_{Fbt}, i_{Ft}$ y g_t , y los precios r_{Kt}, r_{Fvt} y w_t ; tales que las empresas y las familias resuelven su problema económico (declarado en las definiciones 3.2 y 3.4 respectivamente), el gobierno ejecuta un presupuesto equilibrado (definición 3.6), se cumple las leyes del mercado (definición 3.5) y existe un equilibrio a nivel agregado en la economía (definición 3.7).

Hasta aquí se ha descrito el modelo de equilibrio general. A continuación se introduce la modelación de un shock de productividad, con la finalidad de evaluar los efectos que tendría en la economía y la importancia de la inversión público privada como elemento amortiguador.

3.2 Shock de productividad

Para modelar el shock de productividad es necesario la definición del mecanismo de impulso y propagación.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Definición 3.9: Siguiendo a Frisch (1933, 1965) y Slutsky (1927,1937), se definen dos tipos de mecanismos: de impulso y de propagación. El mecanismo de impulso causa que una variable se desvíe de su estado estacionario (equilibrio de largo plazo). El mecanismo de propagación amplifica los efectos del mecanismo de impulso sobre las variables endógenas y hace que la desviación de dichas variables, con respecto a su estado estacionario, sea persistente durante un periodo de tiempo.

En el modelo propuesto en este capítulo, el mecanismo de impulso es el shock negativo de productividad. Esto, con la finalidad de simular un shock por el lado de la oferta, como podría ser el impacto en la economía de los desastres naturales, del clima, entre otros, cuya ocurrencia no se puede determinar a priori. Para ello, se expresa el componente exógeno de la productividad (que se encuentra en la ecuación 3.3) de la siguiente forma:

$$\bar{A}_t = e^{z_t}, \quad (3.35)$$

donde z_t contiene al shock ϵ_t y cuya estructura autorregresiva de orden 1 (AR1) y con una persistencia p_z (que es menor que la unidad en valor absoluto), es la siguiente:

$$z_t = p_z(z_{t-1}) - \epsilon_t. \quad (3.36)$$

Cuando las variables se encuentran en el estado estacionario, el shock toma el valor de su media, que es cero, la variable z_t sería nula y \bar{A}_t sería igual a 1. Si en el período hay un shock negativo $-\epsilon_t$ (que se activa una sola vez), la serie z_t toma valores negativos y la serie \bar{A}_t , menores a la unidad; con ello cae la producción y las demás variables de la economía. El retorno de las variables al estado estacionario (a sus valores de equilibrio) depende de la persistencia del shock. Un shock transitorio tiene una persistencia baja, p_z cercano a cero; mientras un shock permanente (shock muy fuerte, propio de los neoclásicos) tiene una alta persistencia, p_z cercano a 1.

El mecanismo de propagación es el *suavizamiento del consumo*¹⁰. Esto se puede ver en las ecuaciones de Euler. Ante un shock fuerte, se espera que la caída de la producción sea por varios períodos y con ella la menor demanda de los factores; entonces en el presente se tiene un menor rendimiento esperado del capital y de la infraestructura público-privada y, por lo tanto, se decidirá invertir menos. Los rendimientos esperados afectarán directamente a las decisiones de consumo de las familias.

¹⁰ Un shock temporal sobre la economía afectará fuertemente al ahorro. Con un shock negativo se tendrá una caída del ahorro y con ella, debido a que la economía es cerrada, caerá la inversión en el periodo actual y con ella las variables stock del periodo siguiente y el nivel de producción. Mientras un shock permanente afectará fuertemente a las decisiones de consumo de las familias.

3.3 Estado estacionario

En esta sección se deriva el valor de estado estacionario de las variables del modelo. El subíndice ss indica que la variable se encuentra en el estado estacionario, es decir, no depende del tiempo (el desarrollo se encuentra en el Anexo 2, sección 2.3).

PIB por trabajador efectivo:

$$y_{ss} = (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}, \quad (3.37)$$

Donde:

$$\begin{aligned} h_1 &= (1 - \tau)\alpha \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right), \\ h_2 &= (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right), \\ h_3 &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \left[\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FB})} \right] \left(\frac{(1-\tau)\gamma}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right). \end{aligned}$$

Stock de capital físico por trabajador efectivo:

$$k_{ss} = (1 - \tau)\alpha \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.38)$$

Stock de infraestructura público-privada por trabajador efectivo:

$$fv_{ss} = (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.39)$$

Remuneración al trabajo:

$$w_{ss} = (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)B_0(1 + x)(h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.40)$$

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Inversión en capital por trabajador efectivo:

$$i_{KSS} = (1 - \tau)\alpha \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_K)}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.41)$$

Inversión en infraestructura público-privada por trabajador efectivo:

$$i_{FVSS} = \theta i_{FtSS} = (1 - \tau)\gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.42)$$

Gasto corriente de gobierno por trabajador efectivo:

$$g_{SS} = \left[\tau - \frac{(1-\theta)}{\theta} (1 - \tau)\gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right] (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.43)$$

Infraestructura pública por trabajador efectivo:

$$fb_{SS} = \frac{(1-\theta)}{\theta} \left[\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})} \right] \left(\frac{(1-\tau)\gamma}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.44)$$

Consumo de las familias por trabajador efectivo:

$$c_{SS} = (1 - \tau) \left\{ 1 - (\alpha - \gamma) \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right\} (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.45)$$

3.4 Calibración de parámetros

El objetivo de este capítulo es explicar la importancia de la infraestructura, la inversión del sector público y privado para su acumulación y evaluar los efectos que se tiene ante un

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

shock de oferta. Para ello se calibra el modelo con los parámetros de la economía peruana. Las principales ecuaciones del modelo son las siguientes:

Las empresas:

- Función de producción

$$y_t = \bar{A}_t (k_t)^\alpha (fv_t)^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t}\right)^\beta .$$

- Demanda de capital:

$$k_t = (1 - \tau) \alpha \frac{y_t}{r_{K,t}} .$$

- Demanda de infraestructura público-privada:

$$fv_t = (1 - \tau) \gamma \frac{y_t}{r_{FV,t}} .$$

- Demanda de trabajo

$$w_t = (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)y_t B_t .$$

Las familias:

- Ecuación de Euler1: consumo-inversión en capital:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1 - \delta_K)}{(1+x)^\sigma (1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}} .$$

- Ecuación de Euler2: consumo-inversión en infraestructura público-privada:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1 - \delta_{FV})}{(1+x)^\sigma (1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}} .$$

- Restricción presupuestaria.

$$c_t + i_{K_t} + \theta i_{F_t} = \frac{w_t}{B_t} + r_{K_t} k_t + r_{FV_t} fv_t .$$

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

- Evolución del stock de capital:

$$(1 + x)(1 + n)k_{t+1} = (1 - \delta_K)k_t + i_{K_t}.$$

- Evolución del stock de infraestructura público-privada:

$$(1 + x)(1 + n)fv_{t+1} = (1 - \delta_{FV})fv_t + \theta i_{Ft_t}.$$

Gobierno:

Evolución de la infraestructura pública:

$$(1 + x)(1 + n)fb_{t+1} = (1 - \delta_{Fb})fb_t + (1 - \theta)i_{Ft_t}.$$

Restricción presupuestaria:

$$g_t = \tau y_t - (1 - \theta)i_{Ft_t}.$$

Equilibrio OA-DA:

$$y_t = c_t + i_{K_t} + i_{F_t} + g_t.$$

Shock de productividad:

$$\bar{A}_t = e^{z_t},$$

$$z_t = \rho_z(z_{t-1}) - \epsilon_t.$$

La tabla 3.1 presenta de manera detallada los valores de los parámetros y la fuente de donde se han tomado.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Tabla 3. 1: Calibración de parámetros

Familias			
Preferencias:			
sigma (σ)	2.5	Grado de aversión al riesgo o Inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.	Galindo (2011)
rho (ρ)	0.01	Tasa de preferencia subjetiva intertemporal.	Galindo (2011)
Participación APP:			
theta (θ)	0.25	Participación del sector privado en la inversión en infraestructura total en un 25%.	
theta (θ)	0.375	Participación del sector privado en la inversión en infraestructura total en un 37.5%.	Dato asumido a priori para evaluar su impacto.
theta (θ)	0.5	Participación del sector privado en la inversión en infraestructura total en un 50%.	
Población:			
n	0.0099	Tasa de crecimiento de la población.	Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI)
Empresas			
Elasticidades:			
alpha (α)	0.38	Elasticidad del PBI per-cápita respecto al stock de captal.	Estimado en el capítulo II
gamma (γ)	0.04	Elasticidad del PBI per-cápita respecto al stock de infraestructura público-privada.	Estimado en el capítulo II
beta (β)	0.13	Elasticidad del PBI per-cápita respecto al stock de infraestructura pública.	Estimado en el capítulo II
Depreciación:			
deltak (δ_k)	0.05	Tasa de depreciación del capital.	Valor aproximado en el capítulo II
deltafv (δ_{fv})	0.04	Tasa de depreciación de la infraestructura público-privada.	Valor aproximado en el capítulo II
deltafb (δ_{fb})	0.06	Tasa de depreciación de la infraestructura pública.	Valor aproximado en el capítulo II
Tecnología:			
x	0.02	Tasa de crecimiento de la tecnología.	Aproximación
Gobierno			
Impuesto:			
tau (τ)	0.18	Tasa de impuesto. Promedio de la presión tributaria Perú 1994-2005.	Galindo (2011)
Shock			
-et	-0.05	Shock negativo de productividad.	
p_z	0.4	Persistencia del shock.	Dato asumido a priori para evaluar su impacto.

El factor de descuento intertemporal $\widehat{\beta}_d$ toma un valor de 0.99, refleja una familia paciente dispuesta a sacrificar su consumo hoy y así poder realizar ahorros para consumir en el futuro. Dado que es una economía cerrada, estos ahorros serán iguales a las inversiones en capital e infraestructura público-privada, y así sustituirán su consumo intertemporalmente. Las elasticidades de los factores privados (capital e infraestructura público-privada) y de la infraestructura pública se han estimado en el capítulo anterior. Las elasticidades del capital e infraestructura público-privada suman 0.42, por lo tanto la elasticidad del factor trabajo es 0.58; esto indica que se tiene una economía intensiva en trabajo, esto es, una economía con mayor demanda de trabajo, empleo menos especializado y una menor productividad, muy común en países en desarrollo¹¹. Se trabaja con tres tasas de depreciación: la tasa de depreciación del capital (deltak), la tasa de depreciación de la infraestructura público-privada (deltafv) y la tasa de depreciación de la infraestructura pública (deltafb); los valores utilizados en la calibración se estiman de acuerdo a las estadísticas, tomando en cuenta que la infraestructura pública se deprecia más que la infraestructura público-privada¹². Se considera una tasa de impuesto de 18%, que es el promedio de la presión tributaria de Perú, Galindo (2011). Por último, se asume que el shock negativo de productividad es del 5%, esto quiere decir que la productividad caerá en el periodo 1 en 5%. La persistencia del shock es de 0.4.

¹¹ Una economía desarrollada presenta una función de producción intensiva en capital.

¹² Esto es un hecho estilizado.

3.5 Resultados

Se presentan los gráficos de la función impulso-respuesta del modelo ante un shock de productividad. Estos gráficos describen el comportamiento de las variables del modelo ante este shock. Para cada variable, el eje horizontal corresponde al tiempo y los indicadores del eje vertical son la variación porcentual respecto al estado estacionario.

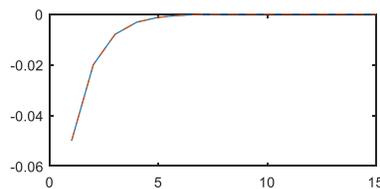
3.5.1 Sector privado: Familias y Empresas

Mecanismo de impulso: shock de productividad

El primer agente económico que es afectado por el shock de productividad es la empresa. Un shock negativo de productividad ($\downarrow \bar{A}_t$) contrae la producción (Y_t) (ver ecuaciones 3.3). Esta caída de la producción será menor para una economía que tiene una alta participación del sector privado en la inversión en infraestructura total de la economía. Como se puede ver en el Gráfico 3.2¹³, en el escenario base (primer gráfico), cuando la participación del sector privado es sólo del 25% ($\theta = 0.25$), la producción cae en 6.33% de su nivel de equilibrio de largo plazo; en cambio, si la participación del sector privado fuese al menos el 50% ($\theta = 0.5$), la producción sólo caerá en 4.95% de su valor de equilibrio.

A su vez se presentan escenarios alternativos: escenario 1, cuando α varía en $\pm 5\%$ manteniendo constante β y γ . Escenario 2, cuando β varía en $\pm 5\%$ manteniendo constante α y γ . Escenario 3, cuando γ varía en $\pm 5\%$ manteniendo constante α y β . Los resultados son similares al escenario base.

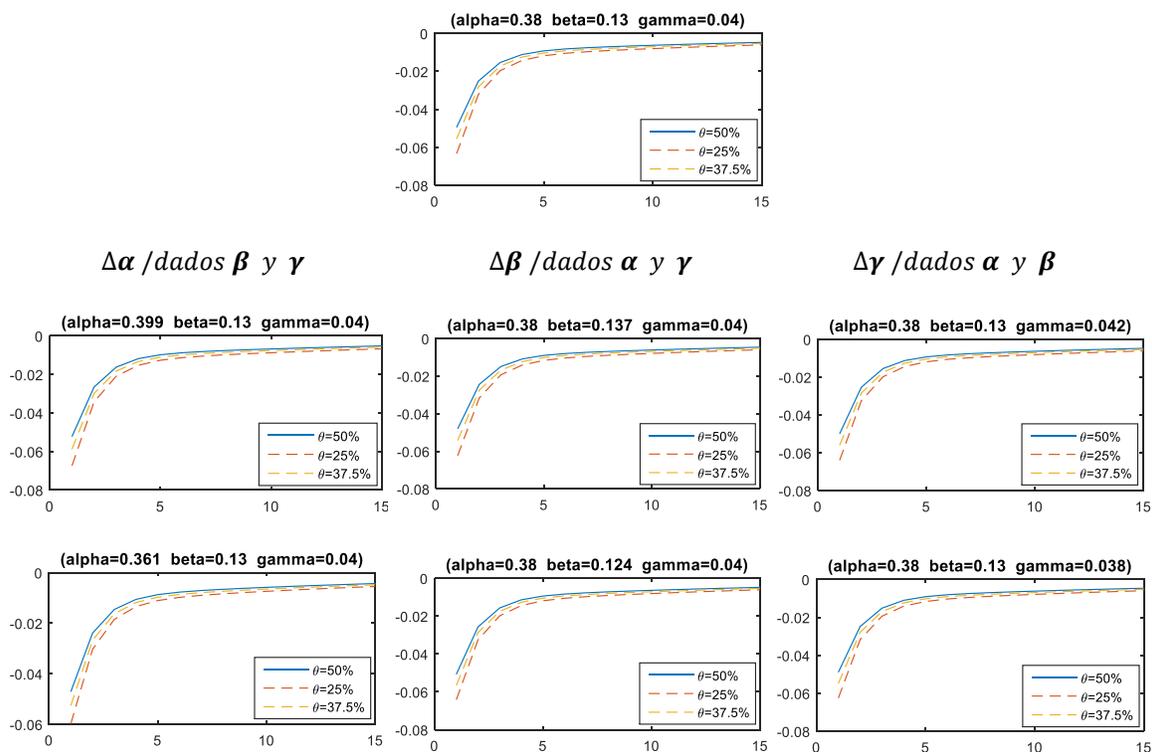
Gráfico 3. 1: Shock de productividad (\bar{A}_t)



¹³ En los gráficos, el eje de las abscisas representa los períodos (años) y el eje de las ordenadas la variación porcentual del estado estacionario.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Gráfico 3. 2: Respuesta del PIB (y_t)



Mecanismo de propagación

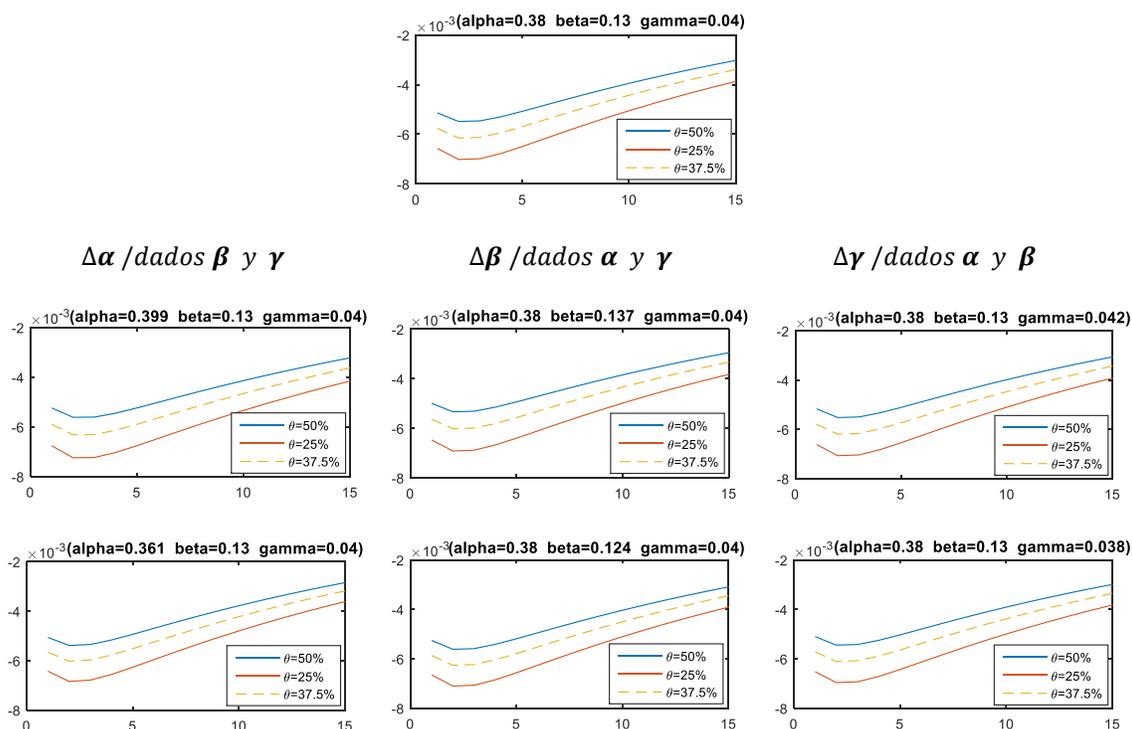
Las empresas, bajo el shock de productividad negativo, reducen la demanda de trabajo por debajo de la oferta, produciéndose un exceso de oferta de trabajo, lo que empuja al salario por debajo de su nivel de equilibrio en el período t . Las familias tendrán menores ingresos y reducirán su consumo con lo cual cae la demanda interna ajustando los precios a la baja. La recuperación será lenta, que está en función a la reactivación de los componentes de la demanda interna, como inversión en capital e inversión en infraestructura público-privada, la mayor inversión genera mayor demanda impulsando a las empresas a reactivar su producción y ellas aumentarán su demanda de trabajo aprovechando los salarios bajos; sin embargo, dado que todas las empresas reaccionarán de manera homogénea, los salarios se incrementarán ante la mayor demanda de trabajo. Por lo tanto, para la recuperación de la economía es fundamental la inversión en infraestructura, que genera empleo en la ejecución de la obra y productividad en la etapa de funcionamiento. El gráfico 3.3 presenta el impacto del shock en el consumo para los tres porcentajes de la participación del sector privado en infraestructura.

El salario depende de la productividad del trabajo, entonces la existencia de externalidades positivas a los factores productivos (capital, trabajo) por parte de la infraestructura es

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

fundamental para los ingresos de las familias; por lo tanto, cuando en la economía se tenga mayor infraestructura –caso cuando $\theta=0.5$ - se tendrá mayores ingresos y con ello el consumo caerá menos y se recuperará más rápidamente (ver Gráfico 3.3¹⁴). Cuando la participación del sector privado es sólo del 25% ($\theta = 0.25$), el consumo cae en 0.70% de su nivel de equilibrio de largo plazo; en cambio, si la participación del sector privado fuese 50% ($\theta = 0.5$), el consumo sólo caerá en 0.55%. Y en los escenarios alternativos, los resultados no difieren de los obtenidos en el escenario base.

Gráfico 3. 3: Respuesta del consumo (c_t)



Por otra parte, dado un menor nivel de producción, las empresas reducirán su demanda de bienes de capital físico (K_t^d) y la demanda de servicios de infraestructura (Fv_t y Fb_t). Se reducirán sus rentabilidades ($\downarrow r_{K,t}$) y ($\downarrow r_{fv,t}$). Dado que las familias son dueñas del capital e infraestructura público-privada, tendrán menores ingresos y con ello menor ahorro. En una economía cerrada el ahorro es igual a la inversión, las familias tendrán que reducir sus niveles de inversión en el periodo t ($\downarrow I_{K,t}$) y ($\downarrow \theta I_{F,t}$), con ello, se tendrá un menor nivel de stock de capital ($\downarrow K_{t+1}^0$) e infraestructura ($\downarrow Fv_{t+1}^0$) ofertadas en el periodo $t + 1$. Esta menor oferta originará que en el período $t+1$ se incrementen las rentabilidades ($\uparrow r_{K,t+1}$) y ($\uparrow r_{fv,t+1}$), y con ello se incrementarán las inversiones, permitiendo un mayor stock de

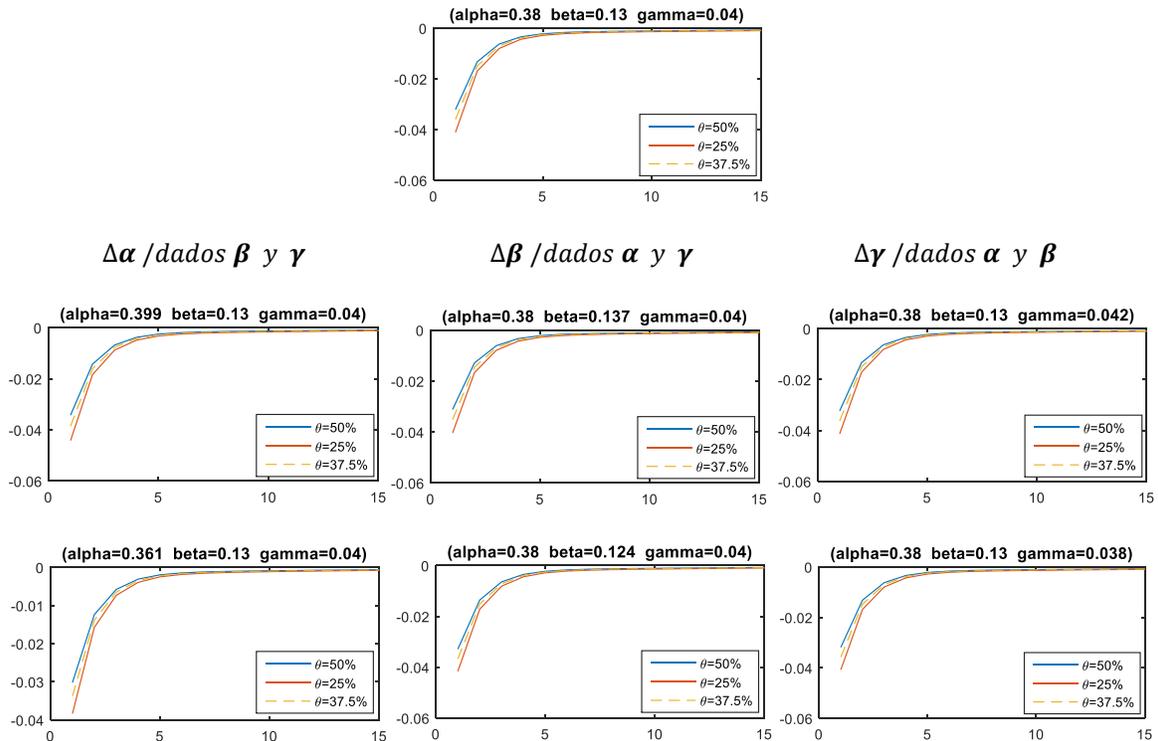
¹⁴ En los gráficos, el eje de las abscisas representa los períodos (años) y el eje de las ordenadas la variación porcentual del estado estacionario.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

capital e infraestructura en los periodos siguientes. Debido a que seguirán incrementándose las rentabilidades hasta por encima de su estado estacionario, y dada su participación en la función de producción, se elevará el PIB de dicho periodo. Los gráficos¹⁵ 3.4 y 3.5 describen este comportamiento para diferentes porcentajes de participación en la inversión en infraestructura del sector privado (θ). Por lo tanto, dado que un mayor stock de capital es importante para la recuperación, el hecho de que las familias sean dueñas de un gran porcentaje de la infraestructura es un componente adicional clave que acelera la recuperación.

Los resultados indican que con una participación de sólo 25% ($\theta = 0.25$), la inversión en capital cae en 4.11% de su nivel de equilibrio de largo plazo (ver Gráfico 3.4), y con ella el stock de capital cae en 5.69% (ver Gráfico 3.5). En cambio, si esta participación fuese 50% ($\theta = 0.5$), la inversión en capital caerá sólo en 3.21% de sus valores de equilibrio y el stock de capital sólo en 4.45% de su nivel de largo plazo. En los escenarios alternativos, los resultados son similares al escenario base.

Gráfico 3. 4: Respuesta de la inversión en capital (ik_t)

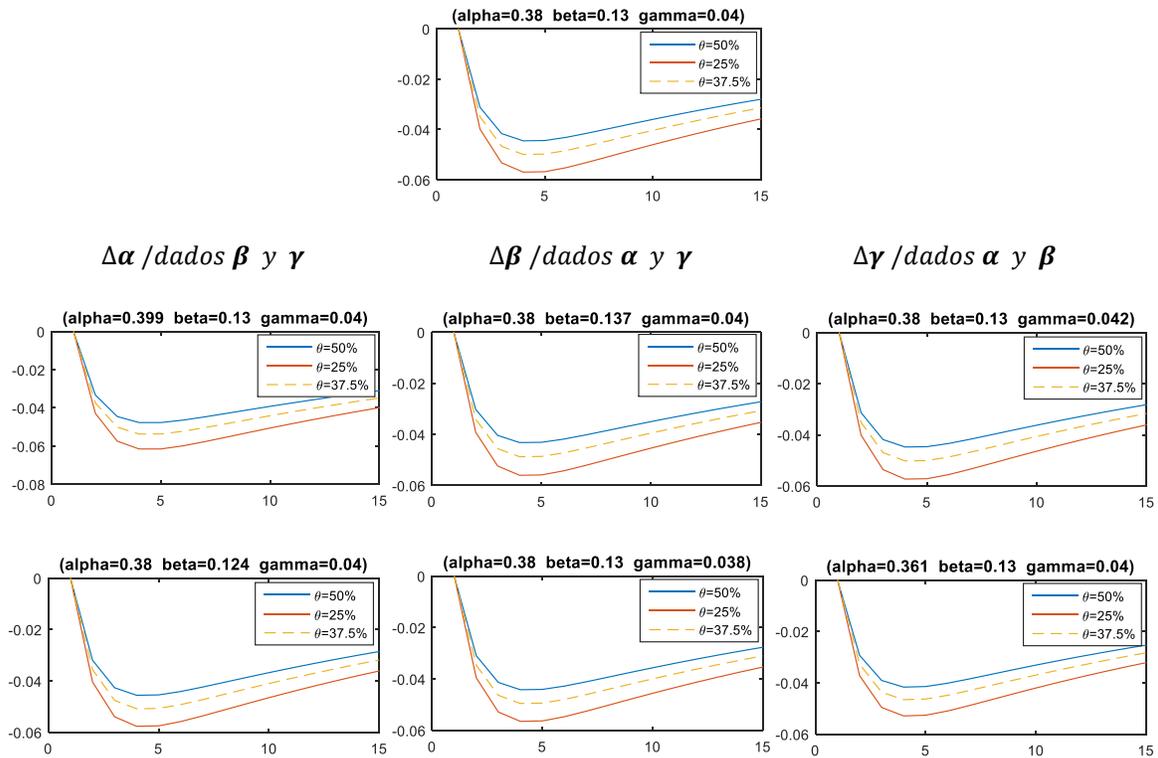


¹⁵ En los gráficos, el eje de las abscisas representa los períodos (años) y el eje de las ordenadas la variación porcentual del estado estacionario.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Por otro lado, si el sector privado tiene una participación sólo del 25%, la inversión total en infraestructura (ift) caerá en 1.7% (ver Gráfico 3.6) de su valor de equilibrio de largo plazo, con ello el nivel de stock de infraestructura público-privada (fv) caerá en 0.68% (ver Gráfico 3.7). En cambio, si las familias tienen una participación del 50%, la inversión total en infraestructura (ift) caerá sólo en 0.67% de sus valores de equilibrio, teniendo una caída de 0.53% en el stock de infraestructura público-privada (fv). En los escenarios alternativos, los resultados son similares a los obtenidos en el escenario base.

Gráfico 3. 5: Respuesta del stock de capital (k_t)



CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Gráfico 3. 6: Respuesta de la inversión total en infraestructura (ift_t)

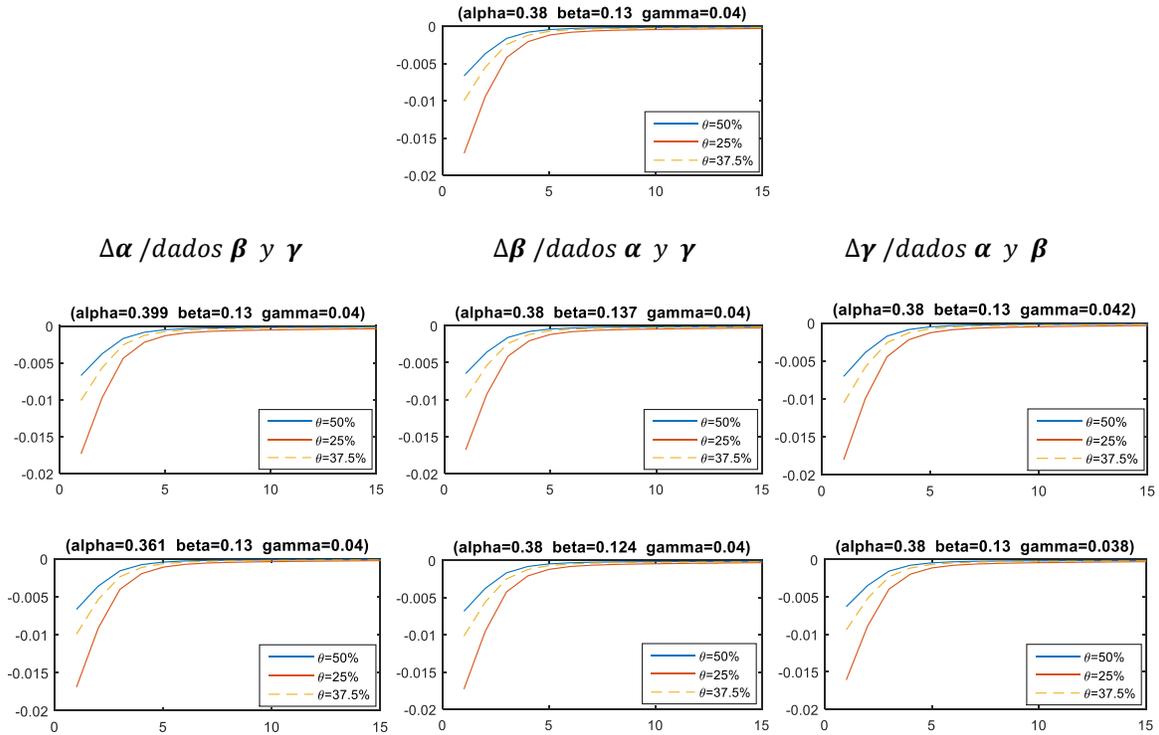
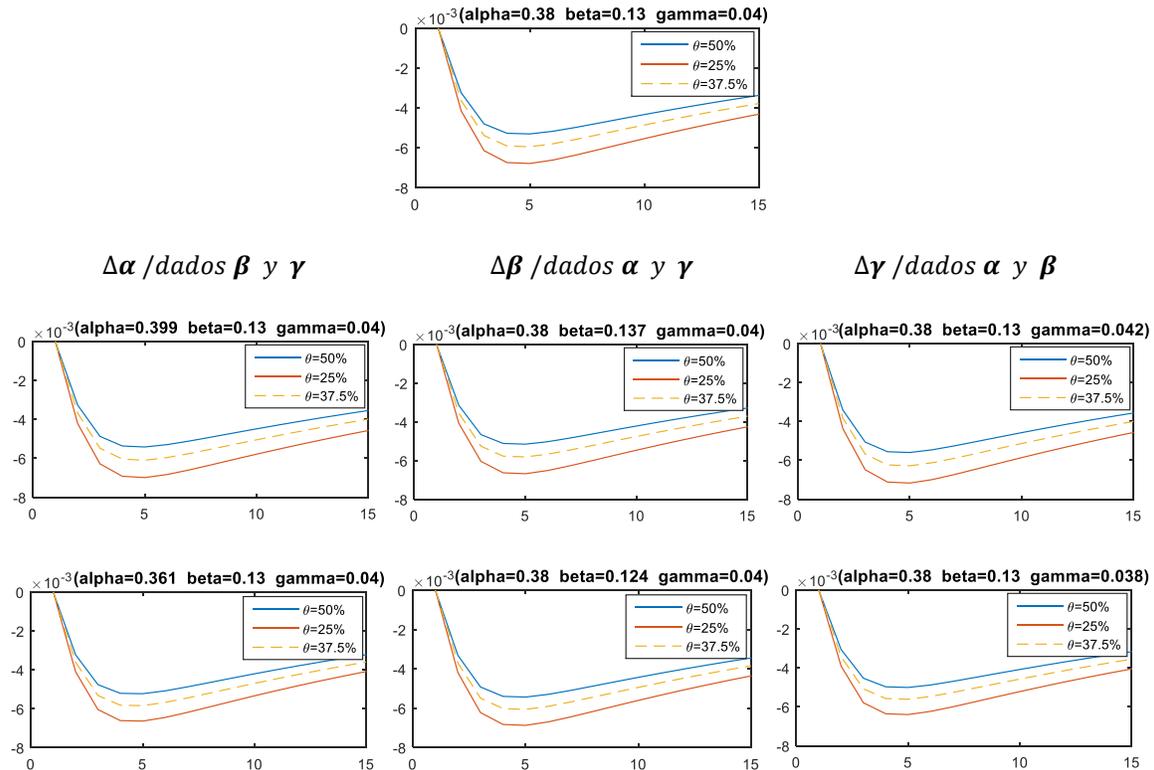


Gráfico 3. 7: Respuestas del stock de infraestructura público-privada (fv_t)



CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Claramente, ante un shock negativo, cuando el sector privado tiene una alta participación en infraestructura, se tendrá un menor impacto en el capital e infraestructura y a su vez, por medio de la función de producción, menor impacto en el nivel de producción (Gráfico 3.2).

3.5.2 Sector público: Gobierno

Problema

Ante una recesión, las acciones de los gobiernos de países en vías en desarrollo son generalmente las siguientes: incrementar el gasto (gasto corriente e inversión en infraestructura) para contrarrestar el shock en una situación donde el principal ingreso fiscal cae fuertemente ($\tau Y_t \downarrow$). Entonces el gobierno tiene una fuerte restricción presupuestaria para impulsar la recuperación de la economía.

Resultados:

Cuando el gobierno tiene una participación del 75% en la inversión en infraestructura ($1-\theta$), dada su restricción presupuestaria, sólo podrá incrementar su gasto corriente descuidando la inversión en infraestructura. Elige mayor gasto corriente debido a que espera que esta variable impacte rápidamente la demanda agregada y, con ella, al PIB. Mientras que realizar una nueva inversión podría tomar mucho tiempo, ya sea por la formulación del proyecto como por la aprobación y ejecución del mismo. Sin embargo, el mayor gasto corriente no será sostenible y caerá rápidamente hasta niveles por debajo de sus valores de equilibrio debido a que se enfrenta a una fuerte restricción presupuestaria. El Gráfico 3.8 presenta la insostenibilidad del gasto fiscal cuando el estado tiene una participación del 75% en la inversión en infraestructura ($1 - \theta = 0.75$).

En el gráfico¹⁶ 3.9 se puede ver que si el gobierno tiene una participación del 75% en la inversión en infraestructura ($1-\theta$), la caída de la infraestructura pública será en 1.96% (Gráfico 3.9); mientras si esta participación fuera no más del 50%, la caída de la infraestructura pública estaría en 0.51%. Y en los escenarios alternativos, los resultados no difieren mucho del escenario base.

¹⁶ En los gráficos, el eje de las abscisas representa los períodos (años) y el eje de las ordenadas la variación porcentual del estado estacionario.

CAPÍTULO III: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Público Sujeto a Congestión en una Economía Cerrada

Gráfico 3. 8: Respuestas del gasto de gobierno (g_t)

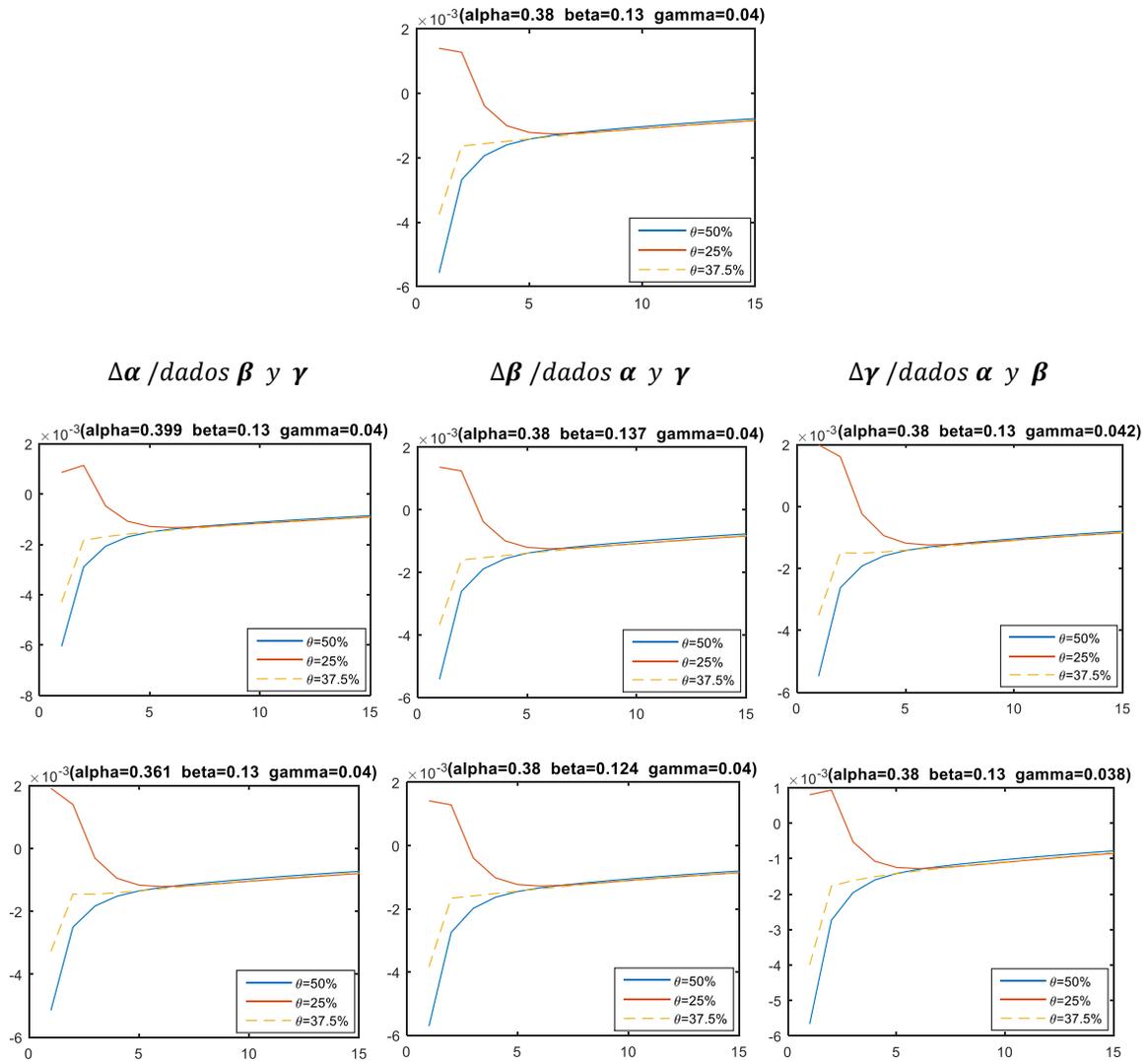
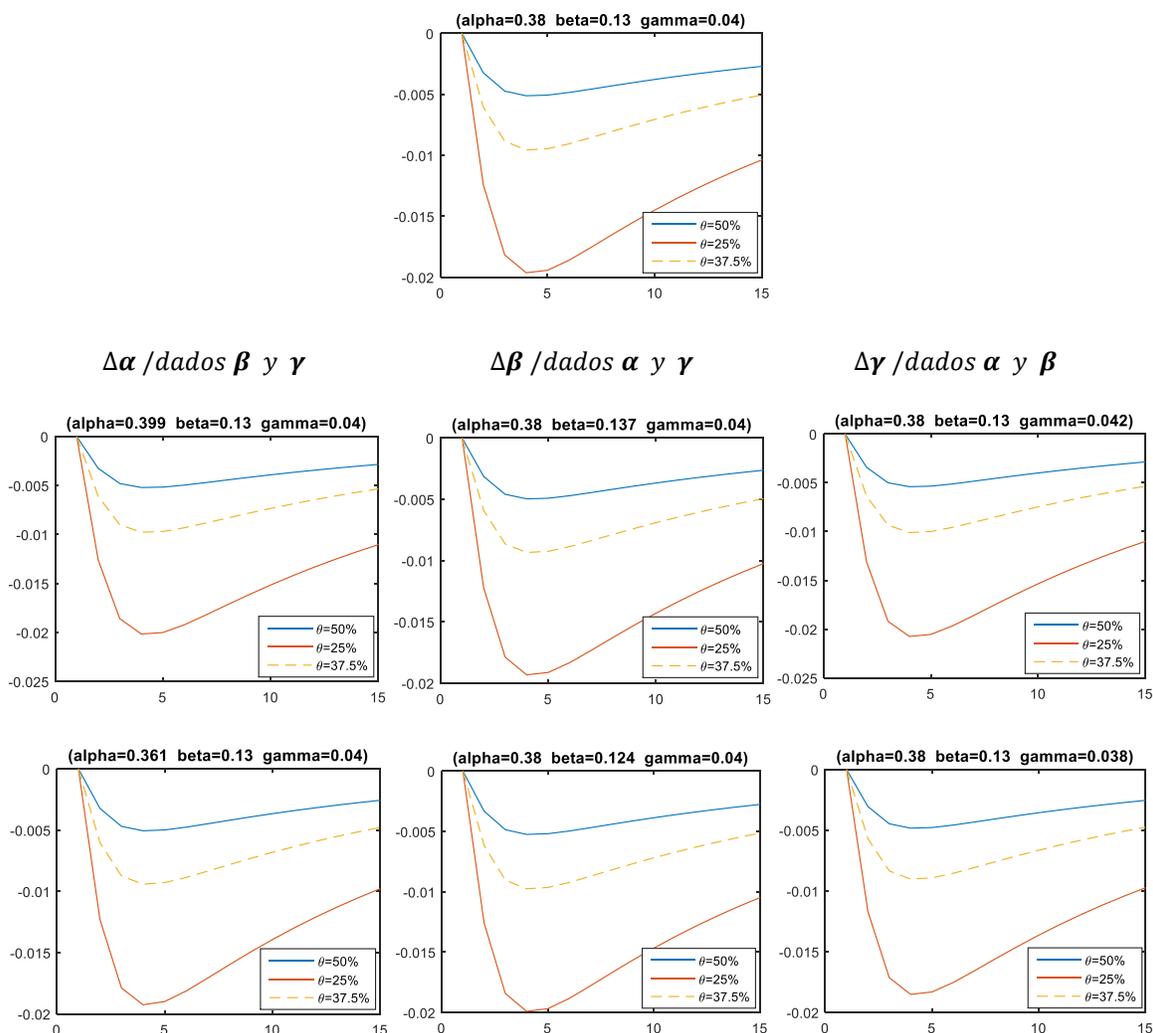


Gráfico 3. 9: Respuestas de la infraestructura pública (fb_t)



En conclusión, las simulaciones del modelo indican que la alta participación del sector privado en la inversión en infraestructura, al menos en 50%, se comporta como un amortiguador ante un shock negativo de productividad, y junto con la inversión en capital impulsan la recuperación de la economía.

El siguiente capítulo presenta un modelo de economía parcialmente abierta con movilidad parcial del capital tomando en cuenta las elasticidades estimadas en el capítulo II. Las variables clave siguen siendo la inversión en infraestructura pública con financiamiento del gobierno (infraestructura pública) sujeta a congestión y la inversión en infraestructura pública con financiamiento del sector privado (infraestructura público-privada).

CAPÍTULO IV

Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Este capítulo presenta un modelo de economía parcialmente abierta con movilidad parcial del capital para analizar la velocidad de convergencia de la economía a su estado estacionario (equilibrio de largo plazo) y a estados meta (cerrar la brecha de infraestructura existente en Perú, alcanzar el PIB per cápita de EE.UU. al año 2014 y alcanzar la economía de EE.UU. en términos de PIB per cápita). Además, con la finalidad de comparar los resultados del modelo, se presenta un modelo alternativo para calcular la convergencia a la economía de EE.UU. mediante una tasa de crecimiento promedio del PIB y las tasas de crecimiento de los factores de producción que garantizan este crecimiento. Se trabaja con la función de producción formulada en los capítulos anteriores, y la restricción a la entrada de capitales a la economía viene dada por la capacidad de apalancamiento de las familias, quienes utilizan su capital físico como colateral para contraer deuda con el exterior (Barro, Mankiw y Sala-i-Martin, 1995). Entre los resultados, se obtiene que la velocidad de convergencia depende de los parámetros estructurales de la economía: de las familias, de las empresas y del gobierno.

En la sección 4.1 se analiza la economía. La subsección 4.1.1 describe el comportamiento de las empresas (igual que en el capítulo anterior). La subsección 4.1.2 describe el comportamiento de las familias; se define el problema económico al que se enfrentan en una economía parcialmente abierta. En 4.1.3 se define la interacción entre las empresas y las familias en los mercados competitivos; se obtiene la solución al problema económico de las familias tomando en cuenta la demanda óptima de las empresas. En 4.1.4, la restricción a la que se enfrenta el gobierno. Finalmente, en 4.1.5, el modelo se cierra con una condición de equilibrio de la economía: oferta agregada igual a demanda agregada. En la sección 4.2 se halla el estado estacionario. En 4.3 se deriva la velocidad de convergencia al estado estacionario. En 4.4 se presenta la solución log-lineal del modelo. En 4.5, la calibración para obtener el beta convergencia. Y en 4.6 se presentan los resultados.

Finalmente, en este capítulo, el sistema de ecuaciones del modelo se desarrolla en tiempo continuo debido a que toda la literatura consultada se presenta de esa manera, por lo tanto, mantener el tiempo continuo permite comparar las ecuaciones de los modelos de la literatura con las del modelo del presente capítulo. Por otro lado, el beta convergencia se deriva algebraicamente ecuación por ecuación y, para obtener los resultados numéricos, sólo es necesario el Excel (no requiere trabajar en MATLAB).

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

4.1 La Economía

El modelo se basa en los siguientes supuestos fundamentales:

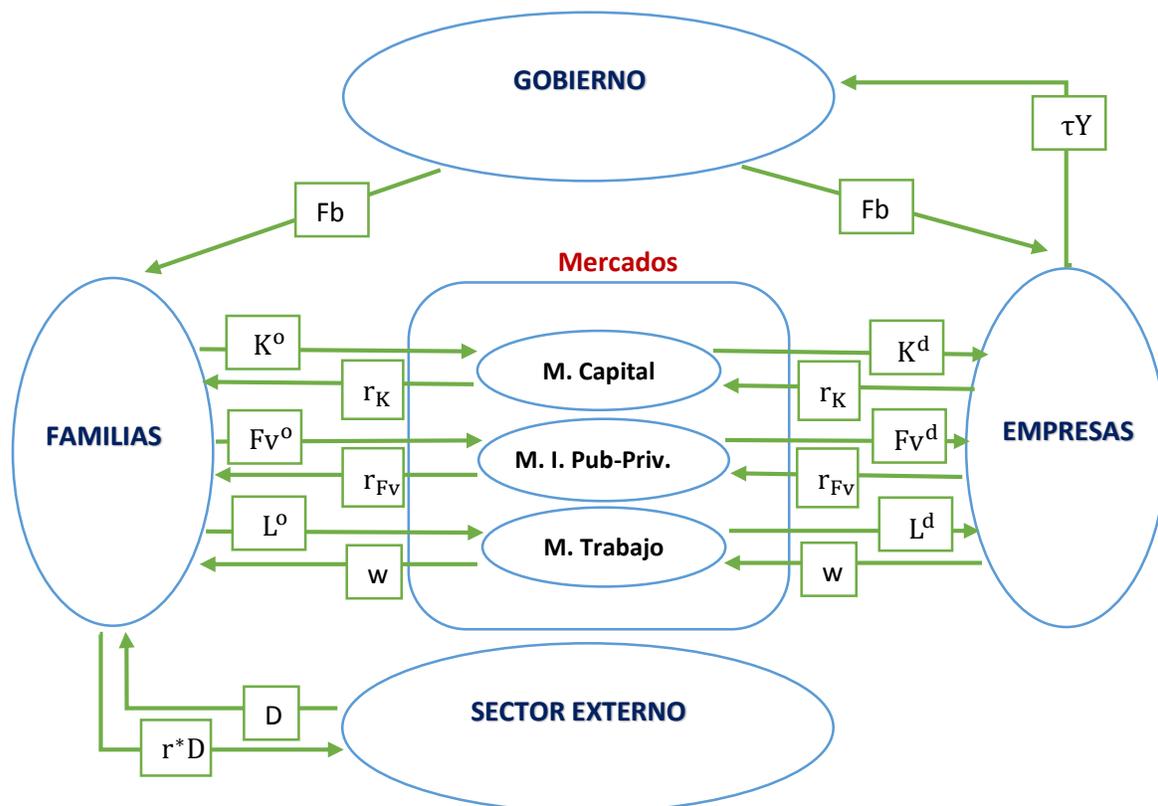
Supuesto 4.1: *Se tiene una economía pequeña y parcialmente abierta.*

Este supuesto tiene dos implicancias. Primero: el hecho de que la economía sea pequeña implica que no tiene capacidad para influir en las variables internacionales, por ejemplo, la tasa de interés externa es un parámetro exógeno para la economía local. Segundo: al ser economía parcialmente abierta, la inversión total en la economía no será igual al ahorro total, es más, los planes de inversión no están restringidos por el ahorro local porque hay la posibilidad de endeudarse con el exterior, pero sí existen restricciones de endeudamiento. Por lo tanto, la inversión en capital e infraestructura podrá ser financiada tanto con capital local como con endeudamiento con el exterior.

Supuesto 4.2: *En la economía interactúan tres agentes: empresas, familias y gobierno.*

Los tres agentes de la economía se enfrentan cada uno a un problema económico y, en conjunto, a la restricción de ser una economía pequeña. La figura 4.1 presenta el diagrama de flujo del modelo, en la cual se muestra la interacción de los agentes de la economía.

Figura 4. 1: Diagrama de flujo de la economía parcialmente abierta



CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

El primer agente, la empresa, demanda capital (K^d), infraestructura público-privada (Fv^d), el trabajo (L^d) y aprovecha las externalidades positivas de la infraestructura pública (Fb). El segundo agente, la familia, oferta capital (K^o), infraestructura público-privada (Fv^o) y trabajo (L^o), usa la infraestructura pública (Fb) y contrae deuda (D) con el sector externo a una tasa de interés r^* . El mercado de cada factor, dadas la oferta y demanda, define el pago de equilibrio, es decir, el retorno al capital (r_K), el retorno a la infraestructura público-privada (r_{FV}) y el salario (w). El tercer agente, el Gobierno, provee infraestructura pública gratuita (Fb), pero ésta se encuentra sujeta a congestión, y recauda ingresos de los impuestos (τ) gravados a la producción final de las empresas.

4.1.1 Las Empresas

Para las empresas se mantienen los supuestos descritos en el capítulo anterior. Por lo tanto no hay cambios en las ecuaciones, en el problema económico ni en la solución.

Supuesto 4.3: *Todas las firmas de la economía son homogéneas (idénticas).*

Supuesto 4.4: *Las empresas tienen una función de producción del tipo Cobb-Douglas con externalidades de la infraestructura pública sujeta a congestión.*

Supuesto 4.5: *Las empresas son competitivas en el mercado de bienes como en el de factores.*

Por lo tanto, las ecuaciones que describen el comportamiento de la empresa “ i ” son las siguientes:

$$y_i = \bar{A}(k_i)^\alpha (fv_i)^\gamma \left(\frac{fb}{k}\right)^\beta, \quad (4.1)$$

$$\pi_i = (BL_i) \left[y_i - \tau y_i - R_{K_t} k_i - R_{FV_t} fv_i - \frac{w}{B} \right]. \quad (4.2)$$

Definición 4.1: Problema Económico de las Empresas (PEE). *Las empresas maximizan sus beneficios, ingresos menos costos, sujetos a su función de producción. Sus ingresos se derivan de su producción y los costos derivan de la utilización de los factores de producción.*

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Definición 4.2: Definición formal del PEE. Dados w , R_K , R_{FV} , τ , α , γ y β , la productividad exógena \bar{A} y la externalidad sujeta a congestión $\left(\frac{fb}{k}\right)^\beta$; los valores de y_i , k_i^d y fv_i^d resuelven el problema de la empresa representativa "i":

$$\text{Max } \pi_i = (BL_i) \left[y_i - \tau y_i - R_{K_t} k_i - R_{FV_t} fv_i - \frac{w}{B} \right],$$

s.a:

$$y_i = \bar{A} k_i^\alpha fv_i^\gamma \left(\frac{fb}{k}\right)^\beta \quad \forall t.$$

Proposición 4.1: Solución al PEE. *Las demandas óptimas (d) de los factores de producción que solucionan el problema de la empresa representativa "i" (Definición 4.2), son las siguientes:*

$$k_i^d = (1 - \tau) \alpha \frac{y_i}{R_K}, \quad (4.3)$$

$$fv_i^d = (1 - \tau) \gamma \frac{y_i}{R_{FV}}, \quad (4.4)$$

$$(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma) y_i B = w. \quad (4.5)$$

Debido a que las firmas son homogéneas (supuesto 4.3), se tiene:

$$y = \int_0^1 y_i di, \quad (4.6)$$

$$k^d = \int_0^1 k_i^d di, \quad (4.7)$$

$$fv^d = \int_0^1 fv_i^d di. \quad (4.8)$$

Por lo tanto:

$$y = \bar{A}(k)^\alpha (fv)^\gamma \left(\frac{fb}{k}\right)^\beta. \quad (4.9)$$

4.1.2 Las Familias

Supuesto 4.6: *Todas las familias de la economía son homogéneas (idénticas).*

Supuesto 4.7: *Las familias tienen una función de utilidad del tipo CRRA¹⁷ (Constant Risk Relative Aversion), cuya utilidad marginal es positiva pero decreciente.*

Bajo el supuesto 4.7, se tiene la función de utilidad de la familia "j" cuya utilidad marginal del consumo positiva ($U'(C_j) > 0$), pero decreciente ($U''(C_j) < 0$):

¹⁷ También se le conoce como Elasticidad Intertemporal de Sustitución Constante (CIES, por sus siglas en inglés).

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

$$u(c_j) = \frac{\left(\frac{c_j}{L_j}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad (4.10)$$

donde $\frac{c_j}{L_j}$ es el consumo per cápita, σ representa el grado de aversión al riesgo y $\frac{1}{\sigma}$ es la elasticidad de sustitución intertemporal¹⁸.

Supuesto 4.8: *Las familias planifican su consumo a lo largo de todo el horizonte temporal.*

Del supuesto anterior, la función de utilidad que obtiene la familia “j” en todo el horizonte temporal es:

$$U = \int_0^{\infty} U\left(\frac{c_j}{L_j}\right) e^{-\rho t} e^{nt} dt, \quad (4.11)$$

donde ρ es la tasa de preferencia intertemporal a la cual el individuo descuenta el consumo futuro. Valores positivos de esta tasa indican que las utilidades son menos valoradas mientras más tarde se consuman. Entonces $U\left(\frac{c_j}{L_j}\right) e^{-\rho t} e^{nt}$ representa la agregación de las utilidades de todos los miembros de la familia “j” en el instante t. Reemplazando (4.10) en (4.11), se tiene la siguiente ecuación:

$$U = \int_0^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{c_j}{L_j}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt.$$

Expresando en términos de trabajador efectivo:

$$U = \int_0^{\infty} \left(\frac{(Bc_j)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt. \quad (4.12)$$

¹⁸ Para más detalles ver el Anexo N° 3, sección 3.1.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Supuesto 4.9: Las familias son dueñas del capital, del trabajo y tienen derechos de explotación de la infraestructura público-privada que construyan. Estos son ofertados en un mercado de competencia perfecta.

Supuesto 4.10: Las familias se enfrentan a una restricción presupuestaria entre sus ingresos y egresos. Sus ingresos provienen de la remuneración de su trabajo y de la rentabilidad del capital físico e infraestructura público-privada.

De los supuestos 4.9 y 4.10 se puede formular la ecuación de la restricción presupuestaria de las familias "j":

$$c_j + s_j = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} f_{Vj} . \quad (4.13)$$

Donde (las variables se encuentran en términos de trabajador efectivo):

- c_j : Consumo de bienes finales,
- s_j : Ahorro,
- k : Stock de capital físico,
- f_{Vj} : Stock de infraestructura público-privada.

Además $R_K = r_K + \delta_K$; $R_{FV} = r_{FV} + \delta_{FV}$; y los retornos netos de depreciación son r_K y r_{FV} . El stock de capital físico y la infraestructura público-privada tienen su propia ley de acumulación descrita por las siguientes ecuaciones:

- Ecuación de acumulación del capital:

$$i_{Kj} = \dot{k}_j + (n + x + \delta_K)k_j . \quad (4.14)$$

- Ecuación de acumulación de la infraestructura público-privada:

$$i_{FVj} = \dot{f}_{Vj} + (n + x + \delta_{FV})f_{Vj} . \quad (4.15)$$

Supuesto 4.11: Las familias contraen deuda de largo plazo con el exterior a una tasa r^* .

Supuesto 4.12: La inversión en capital e infraestructura público-privada es financiada por capital propio (ahorro) y deuda.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

La siguiente ecuación recoge los supuestos 4.11 y 4.12:

$$i_j + i_{FVj} = s_j + d_j, \quad (4.16)$$

donde s_j es el ahorro y d_j la deuda, ambos del período y en términos de trabajador efectivo. Reemplazando (4.16) en (4.13):

$$c_j + i_{Kj} + i_{FVj} - d_j = \frac{w}{B} + R_K K_j + R_{FV} F_{Vj}. \quad (4.17)$$

De la ecuación anterior, despejando la deuda d_j :

$$d_j = c_j + i_{Kj} + i_{FVj} - \frac{w}{B} - R_K k_j - R_{FV} f_{Vj}, \quad (4.18)$$

esta ecuación indica que la deuda del período d_j será positiva si la suma del consumo e inversión de la familia "j" $c_j + i_{Kj} + i_{FVj}$ es mayor al ingreso total del período $\frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} f_{Vj}$.

Supuesto 4.13: *El saldo de deuda de las familias al tiempo t es igual al saldo de deuda del año anterior, más los intereses generados en el período actual, más la nueva deuda contraída en el período actual.*

Dicho supuesto se plasma en la siguiente ecuación, donde sd_{jt} es el saldo de deuda; las variables se encuentran en términos de trabajador efectivo (la derivación se encuentra en el Anexo N° 3, sección 3.1):

$$\dot{sd}_j = (r^* - n - x)sd_j + d_j. \quad (4.19)$$

Reemplazando (4.18) en (4.19):

$$\dot{sd}_j = (r^* - n - x)sd_j + (c_j + i_{Kj} + i_{FVj} - \frac{w}{B} - R_K k_j - R_{FV} f_{Vj}). \quad (4.20)$$

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Esta ecuación describe la evolución de la deuda de las familias, indica que la variación del saldo de la deuda será positiva cuando el consumo e inversión de las familias sean mayores al total de sus ingresos; y será negativa en caso que ocurra lo contrario. Reordenando la ecuación anterior, tenemos:

$$c_j + i_{Kj} + i_{Fvj} - \dot{s}_j = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} f_{vj} - (r^* - n - x) s_j . \quad (4.21)$$

Supuesto 4.14: Restricciones a la movilidad del capital. *Las familias utilizan su capital como colateral.*

La economía peruana es pequeña en comparación al resto del mundo y se encuentra en vías de desarrollo. Por lo tanto, para los agentes externos, dar crédito a los agentes locales (en este caso, las familias) implica asumir un riesgo¹⁹. Frente a esto, las familias deberán otorgar garantías para el préstamo. La infraestructura público-privada no sería una garantía aceptable para el préstamo con el exterior debido a que pertenece al Estado, y por tanto, se comporta como un intangible para las familias. Por ejemplo, una carretera es una infraestructura de servicio público y no es posible embargar ni vender. Barro, Mankiw y Sala-i-Martin (1995) modelan una economía parcialmente abierta con restricciones de la movilidad del capital, para ello distinguen dos tipos de capital: capital físico y capital humano. Indican que el capital físico puede ser usado como aval o garantía colateral; mientras el capital humano, no. Siguiendo este mismo razonamiento, las familias utilizarán su capital físico como garantía de préstamo ya que el acreedor puede apropiarse de ellos en caso de impago. Entonces, el stock acumulado de capital físico es la restricción del saldo de deuda:

$$s_j \leq k_j . \quad (4.22)$$

En línea con Barro, Mankiw y Sala-i-Martin (1995), el retorno neto sobre el capital físico r_K es igual a la tasa de interés externa r^* ya que los hogares se comportan de manera óptima, utilizan su ahorro para financiar el capital que no puede ser ofrecido como garantía en los mercados internacionales (infraestructura privada-pública) y pedir prestado para financiar el capital físico. Entonces:

$$r_K = r^* . \quad (4.23)$$

¹⁹ La existencia de este riesgo no permite la entrada de todo el capital que necesita la economía para llegar al estado estacionario (equilibrio de largo plazo), por lo tanto, el ajuste será gradual.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

La restricción (4.22) se cumple con la igualdad y cualquier deuda menor a k no sería lo óptimo. Barro, Mankiw y Sala-i-Martin (1995), realizan este mismo análisis, por lo tanto:

$$sd = k . \tag{4.24}$$

Volviendo al problema a nivel de la familia “j”, tenemos:

$$sd_j = k_j , \tag{4.25}$$

$$\dot{s}d_j = \dot{k}_j . \tag{4.26}$$

Definición 4.3: Problema Económico de las Familias (PEF). *Las familias maximizan su función de utilidad, sujeta a su restricción presupuestaria y a las condiciones de la evolución del stock de capital e infraestructura público-privada, con la finalidad de determinar los niveles óptimos de su consumo, la inversión en capital y la inversión en infraestructura público-privado.*

Definición 4.4: Definición formal del PEF. *Dados los pagos w , $r_K = r^*$ y r_{FV} y los parámetros σ , ρ , x , n , δ_K y δ_{FV} ; las secuencias c_j , i_{Kj} , i_{FVj} , k_j y fv_j resuelven el problema de la familia representativa “j”:*

$$\text{Max } U = \int_0^{\infty} \left(\frac{(Bc_j)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt ,$$

s.a:

$$c_j + i_{Kj} + i_{FVj} - \dot{s}d_j = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} fv_j - (r^* - n - x)sd_j,$$

$$sd_j = k_j .$$

4.1.3 El Mercado

Definición 4.5: Equilibrio en los mercados de Factores (EMF). *En cada período t , los mercados de factores, por las leyes de la oferta (o) y demanda (d), determinan los pagos a los factores que se realizan en la economía: R_{FVt} y w_t .*

- **Mercado del Capital:** Debido a que $r_K = r^*$, el rendimiento bruto del capital está dado por la tasa de interés externa y la tasa de depreciación:

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

$$R_k = r^* + \delta_K . \quad (4.27)$$

- **Mercado del Servicio de Infraestructura Público-Privada:** el equilibrio entre la infraestructura público-privada ofertado, fv_j^o , por las familias y lo demandado, fv_i^d , por las empresas determina el pago de mercado R_{FV} .

$$fv_j^o = fv_i^d . \quad (4.28)$$

- **Mercado de Trabajo:** el equilibrio entre la fuerza de trabajo ofertado, L_t^o , por las “m” familias y lo demandado, L_t^d , por las empresas determina el salario de mercado w_t .

$$L_j^o = L_i^d . \quad (4.29)$$

Proposición 4.2: (Solución al PEF). *El siguiente sistema describe la senda óptima de consumo e infraestructura público-privada, una vez internalizada la demanda óptima de las empresas respecto a los factores que las familias ofertan:*

$$\dot{fv}_j = (1 - \tau)\bar{A}fv_j^{\gamma+\alpha} \left(\frac{fb}{k}\right)^\beta - \left(n + x + \delta_{FV} + (r^* + \delta_K) \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right) fv_j - c_j , \quad (4.30)$$

$$\frac{\dot{c}_j}{c_j} = \frac{1}{\sigma} \left\{ (1 - \tau)(\gamma + \alpha)\bar{A}fv_j^{\gamma+\alpha-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\beta - \left[\rho + \sigma x + \delta_{FV} + (r^* + \delta_K) \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right] \right\} . \quad (4.31)$$

El PEF se resuelve por el principio del máximo²⁰. La demostración se encuentra en el Anexo 3, sección 3.4.

4.1.4 El Gobierno

Bajo los siguientes supuestos, se modela el comportamiento del Gobierno:

Supuesto 4.14: *Los ingresos del gobierno provienen únicamente de los impuestos τy_t .*

²⁰ El principio del máximo es una herramienta principal para la solución de problemas de control óptimo, es una condición necesaria de primer orden. Para mayor detalle, ver Anexo N° 3, sección 3.3.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

$$\tau y = \tau \int_0^1 y(i) di . \quad (4.32)$$

Definición 4.6: Restricción Presupuestaria del Gobierno (RPG). Dada la tasa de impuestos τ y la variable y_t , el gobierno determina g_t e i_{Fb_t} que equilibra su cuenta:

$$g + i_{Fb} = \tau y . \quad (4.33)$$

Y al determinar i_{Fb} se determina fb (ver Anexo N° 3, sección 3.5):

$$i_{Fb} = fb + (n + x + \delta_{Fb})fb . \quad (4.34)$$

4.1.5 Equilibrio de la Economía

Definición 4.7: Equilibrio OA-DA. Existe un equilibrio entre la oferta agregada (OA) y la demanda agregada (DA).

$$y = c + i_K + i_{Ft} + g . \quad (4.35)$$

Definición 4.8: Equilibrio General Competitivo (EGC). Un EGC es un conjunto de secuencias para las cantidades y , k , fv , fb , c , i_K , i_{Fv} , i_{Fb} , i_{Ft} y g , y los precios R_{Fv} y w ; tales que las empresas y las familias resuelven su problema económico, declarado en las definiciones 4.2 y 4.4 respectivamente; el gobierno ejecuta un presupuesto equilibrado, definición 4.6; se cumplen las leyes del mercado, definición 4.5; y existe un equilibrio a nivel agregado en la economía, definición 4.7.

4.2 Estado estacionario

A continuación se analiza el comportamiento del modelo en el largo plazo, o estado estacionario, para luego describir el corto plazo o dinámica de transición. El estado estacionario es aquella situación donde las diversas variables absolutas crecen a tasas constantes y las variables relativas (medidas en términos per cápita) muestran crecimiento nulo (ver Anexo 3, sección 3.6).

- El consumo en estado estacionario:

$$c_{j_{ss}} = (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}fv_{j_{ss}}^\varphi \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - [n + x + \delta_{Fv}]fv_{j_{ss}} . \quad (4.36)$$

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

- La infraestructura público-privada en estado estacionario:

$$fv_{j_{ss}} = \left[\frac{(1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}\left(\frac{fb}{k}\right)^\eta}{\rho+\sigma x+\delta_{FV}} \right]^{\frac{1}{1-\varphi}}. \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) indica que la infraestructura público-privada en el estado estacionario está determinada por los parámetros estructurales de la economía y la externalidad de la infraestructura pública fb que está dada para la familia j .

- El PIB en estado estacionario:

$$y_{i_{ss}} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\varphi}} \left[\frac{(1-\tau)(1-\alpha)\varphi}{\rho+\sigma x+\delta_{FV}} \right]^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\frac{\eta}{1-\varphi}}. \quad (4.38)$$

Se obtiene así, la producción por trabajador efectivo en estado estacionario que depende de los parámetros estructurales de la economía y del nivel de tecnología y la externalidad sujeta a congestión.

4.3 La velocidad de convergencia al estado estacionario

A continuación se calcula la velocidad de convergencia al equilibrio de largo plazo (estado estacionario). La velocidad de convergencia β_{ss} mide la proporción en que desciende la tasa de crecimiento de la infraestructura público privada en la medida que esta se incrementa, es decir:

$$\beta_{ss} = -\frac{\partial\left(\frac{fv_j}{fv_j}\right)}{\partial\log(fv_j)}. \quad (4.39)$$

Para calcular β_{ss} se debe expresar la ecuación principal de la tasa de crecimiento en función de logaritmos y luego derivar. En el modelo se tienen dos ecuaciones principales: ecuación de la restricción de la economía y la ecuación de Euler; estas dos ecuaciones forman un sistema que resume todo el modelo y cada una de ellas tiene como variables el consumo y la infraestructura público-privada, y cambian simultáneamente en el tiempo. Por lo tanto, para encontrar β_{ss} se debe trabajar con una matriz donde las ecuaciones estén expresadas en aproximaciones logarítmicas al estado estacionario. Los pasos a seguir son los siguientes:

- i) Linealización logarítmica del sistema. Esto debido a que las ecuaciones son no lineales.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

- ii) Calcular el estado estacionario de las variables y la ecuación que las relaciona.
- iii) Realizar la aproximación logarítmica al estado estacionario.
- iv) Calcular los autovalores del sistema. La solución matemática obtiene dos autovalores, del cual sólo uno es aplicable a la lógica económica y esa es la velocidad de convergencia.

Esta derivación matemática está expresada en el Anexo N° 3, sección 3.7. La velocidad de convergencia obtenida, para variables en términos de trabajador efectivo, es la siguiente:

$$2\beta_{ss} = -(\rho + (\sigma - 1)x - n) + \left[(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4 \left(\frac{1}{\sigma} \right) \left(1 - \frac{\gamma}{1-\alpha} \right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{(1-\alpha)(\rho + \sigma x + \delta_{FV})}{\gamma} - (n + x + \delta_{FV}) \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.40)$$

Esta velocidad de convergencia está en función de los parámetros estructurales de la economía: la inversa de la elasticidad de sustitución (σ), la tasa de descuento (ρ) de las familias, la tasa de crecimiento de la población (n), las elasticidades de los factores de producción (α y γ), la tasa de crecimiento de la tecnología (x) y la tasa de depreciación de la infraestructura público-privada (δ_{FV}). Más adelante se calibran estos parámetros para calcular esta velocidad de convergencia al estado estacionario.

4.4 Solución log-lineal del modelo

4.4.1 Trayectoria temporal de la infraestructura público-privada

La solución log-linealizada para $\log(fv)$ es la siguiente:

$$\log(fv(t)) = \log(fv^*) + \psi_1 e^{\lambda_1 t} + \psi_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4.41)$$

Reemplazando las condiciones de solución (ver Anexo 3, sección 3.8) y dado $-\beta_{ss} = \lambda_2$ (ver Anexo N° 3, sección 3.7, subsección 3.7.5), se tiene lo siguiente:

$$\log(fv(t)) = e^{-\beta_{ss} t} \log(fv(0)) + (1 - e^{-\beta_{ss} t}) \log(fv^*), \quad (4.42)$$

esta es la ecuación de la trayectoria temporal de la infraestructura público-privada que permite obtener la senda dinámica de convergencia a un nivel de equilibrio de largo plazo.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

4.4.2 Trayectoria temporal del PIB per-cápita

La trayectoria temporal para el PIB per-cápita vendría dada por la siguiente ecuación:

$$\log(y(t)) = e^{-\beta_{ss}t} \log(y(0)) + (1 - e^{-\beta_{ss}t}) \log(y^*). \quad (4.43)$$

La ecuación (4.43) indica que la ponderación del valor inicial disminuye exponencialmente a una tasa β_{ss} , que es la velocidad de convergencia al estado estacionario, y depende de los parámetros estructurales de la economía.

4.5 Calibración

Los valores para la calibración de estos parámetros son expresados en la Tabla 4.1:

Tabla 4. 1: Calibración de parámetros

Familias			
Preferencias:			
sigma (σ)	2.5	Grado de aversión al riesgo o Inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.	Galindo (2011)
rho (ρ)	0.01	Tasa de preferencia subjetiva intertemporal.	Galindo (2011)
Población:			
n	0.0099	Tasa de crecimiento de la población.	Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI)
Empresas			
Elasticidades:			
alpha (α)	0.38	Elasticidad del PBI per-cápita respecto al stock de capital.	Estimado en el capítulo II
gamma (γ)	0.04	Elasticidad del PBI per-cápita respecto al stock de infraestructura público-privada	Estimado en el capítulo II
beta (β)	0.13	Elasticidad del PBI per-cápita respecto al stock de infraestructura pública.	Estimado en el capítulo II
tecnología (x)	0.02	Tasa de Crecimiento de la Tecnología.	Aproximación
Depreciación:			
deltak (δ_k)	0.05	Tasa de depreciación del capital.	Valor aproximado en el capítulo II
deltafv (δ_{fv})	0.04	Tasa de depreciación de la infraestructura público-privada.	Valor aproximado en el capítulo II
deltafb (δ_{fb})	0.06	Tasa de depreciación de la infraestructura pública.	Valor aproximado en el capítulo II

Con estos parámetros, la velocidad de convergencia es:

$$\beta_{ss} = 0.22, \quad (4.44)$$

Esta velocidad es alta en comparación a los estimados por Barro y Sala-i-Martin (2004) para economías desarrolladas (entre 0.02 y 0.03). Esto se debe a que las tasas de crecimiento de

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

los países en vías de desarrollo, por lo general, son mayores que las tasas de los países desarrollados y, además, la función de producción de economías en vías de desarrollo son intensivas en trabajo; por ejemplo, para la economía peruana, las elasticidades de los factores privados (capital e infraestructura público-privada) suman en total 0.42, frente al trabajo que es de 0.58.

4.6 Resultados

4.6.1 Trayectoria dinámica de la infraestructura público-privada con meta dinámica

El logaritmo del nivel de infraestructura público-privada per-cápita de la economía peruana al 2012 es:

$$fv(0) = \$ 74.1 , \quad (4.45)$$

$$\log(fv(0)) = 1.86987 . \quad (4.46)$$

Existe una brecha dinámica en infraestructura de US\$87,975 millones, estimada por las Universidades Pacífico y ESAN en el año 2012. Por lo tanto, el nivel de infraestructura meta será aquel que nos permita cerrar esa brecha. La infraestructura actual más lo que falta para cerrar la brecha, en términos per-cápita es la siguiente:

$$fv^* = fv(0) + brechafv(t) ,$$

$$fv^* = 74.1 + \frac{87975000000}{30814175} = \$ 2929.12 , \quad (4.47)$$

$$\log(fv^*) = 3.4667 . \quad (4.48)$$

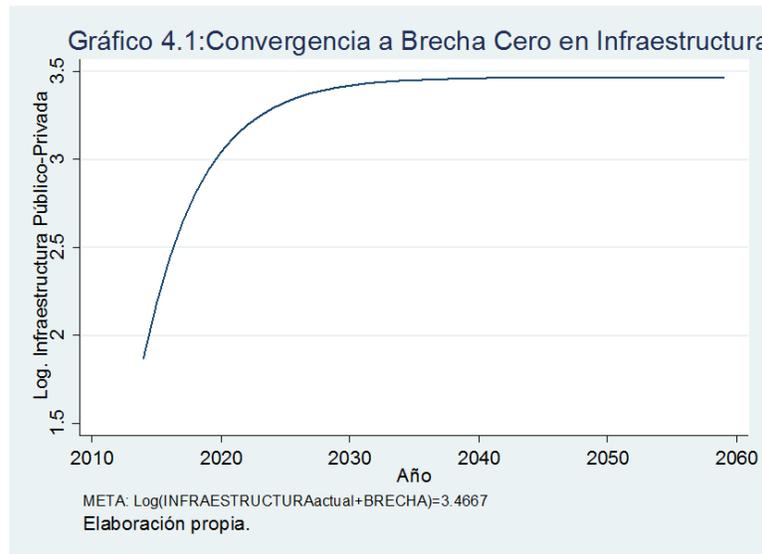
Reemplazando la condición inicial (4.45), el nivel meta (4.48) y la velocidad de convergencia (4.44) en (4.43) se tiene lo siguiente:

$$\log(fv(t)) = e^{-0.22t}(1.86987) + (1 - e^{-0.22t})(3.4667) . \quad (4.49)$$

Los resultados numéricos de (4.49) se adjuntan en el Anexo N° 4. El Gráfico 4.1 muestra la senda dinámica al equilibrio de brecha cero en infraestructura. Los resultados indican que, bajo las condiciones actuales, se logrará cerrar la brecha en 45 años, con un rango entre 43 y 47 años.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Gráfico 4. 1: Convergencia a brecha cero en infraestructura



4.6.2 Trayectoria dinámica del PIB per-cápita con meta estática

Si las condiciones actuales se mantienen, ¿en cuántos años se podrá alcanzar el PIB per-cápita que EE.UU. tiene en el año 2014? Para responder a esta interrogante, se debe fijar como meta el PIB per cápita de EE.UU. del año 2014, y como valor inicial el PIB per cápita de Perú al mismo año. Los datos del Banco Mundial (2015) indican que el Perú tiene un PIB per-cápita de US\$ 11,438 al año 2014, según el concepto de Paridad de Poder Adquisitivo y a precios internacionales constantes del año 2005. Bajo este mismo concepto, EE.UU. tiene un PIB per cápita de US\$ 52,118 al mismo año:

Tabla 4. 2: PIB per-cápita inicial

PIBpc\País	PERÚ	EE.UU.
PIB	11602.58	50859.39
Log(PIB)	4.06455	4.70637

Elaboración propia a partir de los datos del Banco Mundial (2014)

$$y(0) = \$ 11\,438 , \tag{4.50}$$

$$\log(y(0)) = 4.05835 , \tag{4.51}$$

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

$$y^* = \$ 52\,118, \quad (4.52)$$

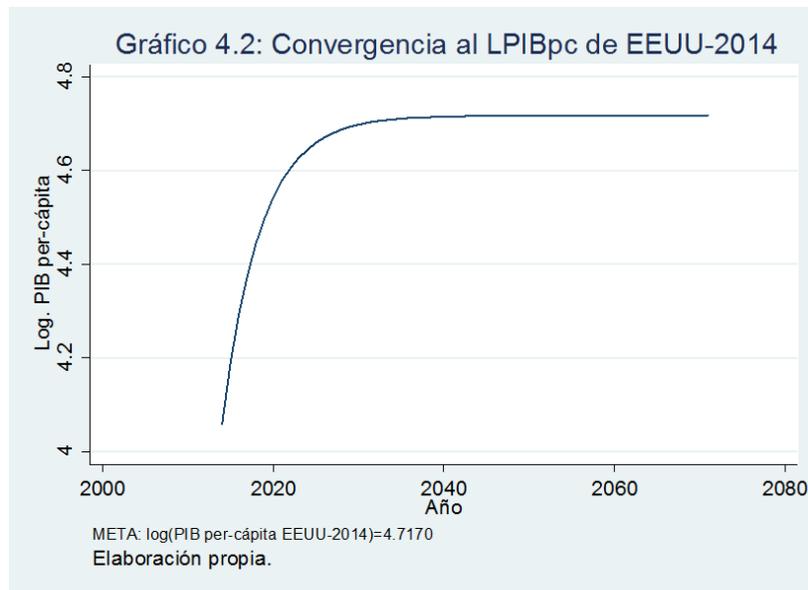
$$\log(y^*) = \$ 4.71699. \quad (4.53)$$

Reemplazando la condición inicial (4.51), el nivel meta (4.53) y la velocidad de convergencia (4.44) en (4.43) se tiene lo siguiente:

$$\log(y(t)) = e^{-0.22t}4.05835 + (1 - e^{-0.22t})4.71699. \quad (4.54)$$

Los resultados numéricos de la ecuación (4.54) indican que, bajo las condiciones actuales, alcanzar el PIB per-cápita que Estados Unidos tuvo al año 2014 tomaría 55 años, con un rango entre 53 y 57 años (ver Anexo N° 5). Los resultados se adjuntan en el Anexo N° 6. El Gráfico 4.2 presenta la senda de convergencia del logaritmo del PIB per-cápita de Perú al PIB per-cápita que tuvo EE.UU. al 2014:

Gráfico 4. 2: Convergencia al PIB per-cápita de EEUU-2014



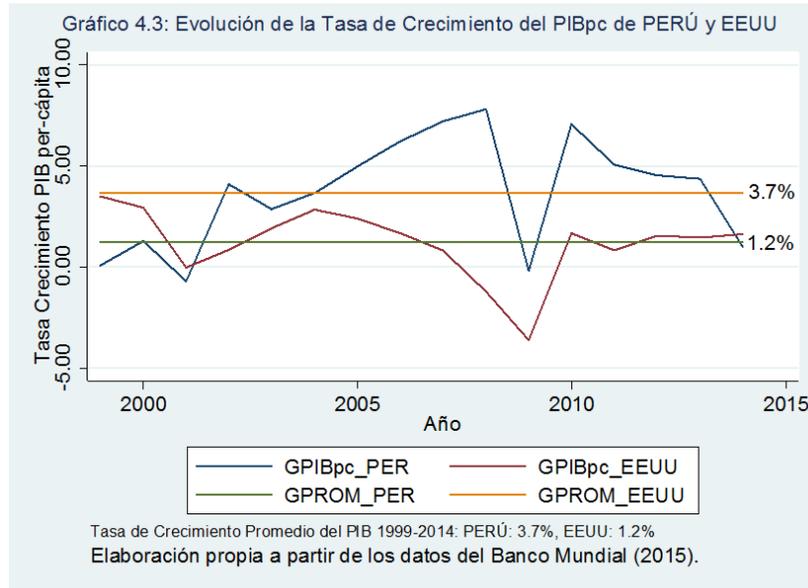
Una observación a la convergencia anterior es que el PIB per-cápita meta es fijo para todo el horizonte temporal de evaluación, lo cual es un poco realista para el análisis dado que a medida que el PIB per-cápita de Perú se incrementa, el de EE.UU. también se incrementa en el tiempo. A continuación, se presenta el análisis para la convergencia con meta dinámica.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

4.6.3 Trayectoria dinámica del PIB per-cápita con meta dinámica (modelo)

A continuación se realiza el cálculo de convergencia del PIB per-cápita de Perú a la meta dinámica. Por lo tanto la nueva pregunta es: ¿En cuántos años se puede alcanzar la economía de Estados Unidos en términos de PIB per-cápita? Para dar respuesta a la pregunta, primero se analiza la serie histórica de tasas de crecimiento de ambas economías. El Gráfico 4.3 presenta las tasas de crecimiento del PIB per-cápita de ambos países entre los años 1999 y 2014. Estas series presentan una media de 3.71% para Perú y 1.2% para EE.UU. Los datos fueron extraídos del Banco Mundial (2015).

Gráfico 4. 3: Evolución de la tasa de crecimiento del PIB per-cápita de Perú y EEUU



Para la proyección dinámica con el modelo formulado, se utilizará la beta convergencia para la economía peruana y una tasa de crecimiento de 1.2% para la economía de EE.UU. Por lo tanto la meta dinámica es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 y^*(t) &= y^*(0)(1 + g^*)^t, \\
 y^*(t) &= (\$ 52\ 118)(1 + 1.2\%)^t, \\
 \log(y^*(t)) &= \log[(\$ 52\ 118)(1 + 1.2\%)^t].
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

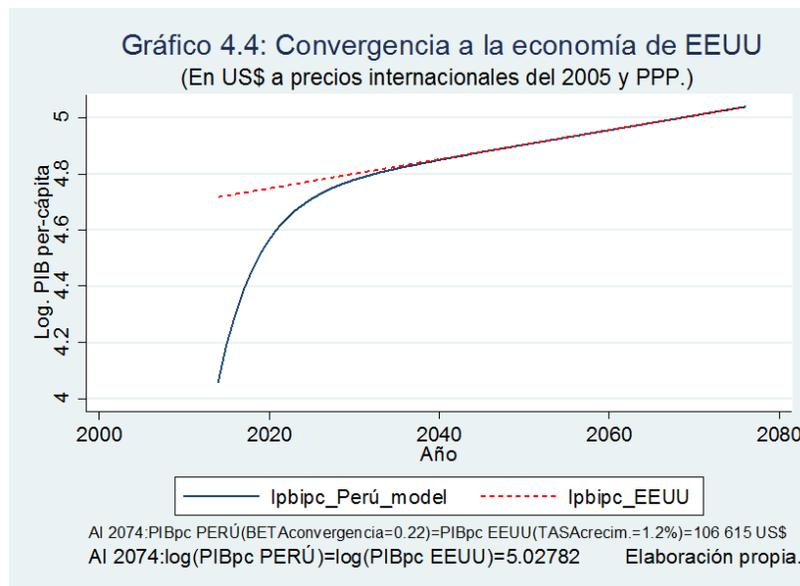
CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Reemplazando la condición inicial (4.41), la meta dinámica (4.55) y la velocidad de convergencia (4.44) en la ecuación (4.43), tenemos:

$$\log(y(t)) = e^{-0.22t}4.05835 + (1 - e^{-0.22t})\{\log[(\$ 52\ 118)(1 + 1.2\%)^t]\} . \quad (4.56)$$

Los resultados numéricos del modelo (adjuntos en el Anexo N° 6) indican que, bajo los parámetros actuales, la economía peruana convergerá a la de Estados Unidos en aproximadamente 60 años, con un rango entre 58 y 62 años (ver Anexo N° 7). En 60 años los PIB per-cápita de Perú y Estados Unidos convergerán a \$106 615. El Gráfico 4.4 presenta la convergencia dinámica.

Gráfico 4. 4: Convergencia a la economía de EEUU



Los resultados anteriores están en función de la velocidad convergencia derivada del modelo. Con la finalidad de ver la robustez de los resultados obtenidos, en la siguiente sección se realiza este mismo análisis de convergencia mediante un método alternativo, cuya formulación es independiente del modelo planteado.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

4.6.4 Trayectoria dinámica del PIB per-cápita con meta dinámica (método alternativo)

En esta sección se va responder a la misma pregunta de la sección anterior: ¿en cuántos años se puede alcanzar la economía de Estados Unidos en términos de PIB per-cápita? Pero la respuesta ya no estará en función a la velocidad de convergencia obtenida a partir del modelo, sino solamente en función de tasa de crecimiento promedio de los últimos 16 años (1999 - 2014). La tasa de crecimiento promedio anual del PIB per-cápita de 3.71% y el de EE.UU. 1.2%.

Trayectoria dinámica de la economía de Perú:

$$y(t) = y(0)(1 + gy)^t . \quad (4.57)$$

Trayectoria dinámica de la economía de EEUU:

$$y^*(t) = y^*(0)(1 + gy^*)^t . \quad (4.58)$$

Reemplazando los valores iniciales presentados en la Tabla 4.1 y las tasas de crecimiento promedio de los últimos 16 años en las ecuaciones (4.57) y (4.58), tenemos lo siguiente:

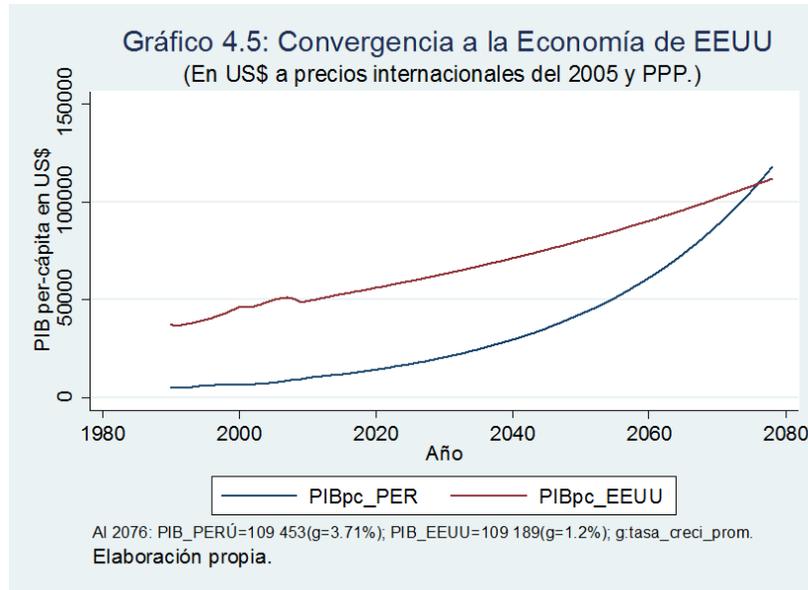
$$y(t) = (11\ 438)(1 + 3.71\%)^t , \quad (4.59)$$

$$y^*(t) = (52\ 118)(1 + 1.2\%)^t . \quad (4.60)$$

Los cálculos numéricos de este método alternativo indican que, si Perú y Estados Unidos presentan tasas de crecimiento promedio anual del PIB per-cápita de 3.71% y 1.2% respectivamente, la economía peruana convergerá a la de EE.UU. en términos de PIB per-cápita en 62 años, con un rango entre 60 y 64 años (ver Anexo N° 6). Estos resultados son similares a los obtenidos con el modelo (beta convergencia), que indica una convergencia en 60 años, con un rango entre 58 y 62. Por lo tanto, se demuestra que los resultados del modelo son robustos. El Gráfico 4.5 muestra la convergencia dinámica del PIB per-cápita de Perú al de EE.UU. según el método alternativo.

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Gráfico 4. 5: Convergencia a la economía de EEUU



4.6.5 Tasas de crecimiento requeridas para la economía peruana

En la sección anterior se indicó que con una tasa de crecimiento promedio anual del PIB per-cápita de Perú de 3.71% se lograría converger a la economía de EE.UU. entre 60 y 64 años. Pero ¿cómo se podría obtener esta tasa de crecimiento? Del modelo, la ecuación (4.9) ayuda a responder esta última pregunta.

$$y_t = \bar{A}_t k_t^{\alpha-\beta} f_v^{\gamma} f_b^{\beta}$$

$$\log(y_t) = \log(A_t) + (\alpha - \beta) \log(k_t) + \gamma \log(f_v) + \beta \log(f_b). \quad (4.61)$$

Derivando respecto al tiempo, se obtiene las tasas de crecimiento:

$$g_y = g_A + (\alpha - \beta)g_k + \gamma g_{f_v} + \beta g_{f_b}. \quad (4.62)$$

Calibrando las elasticidades, que han sido estimadas en el capítulo II, se tiene lo siguiente:

$$g_y = g_A + 0.25g_k + 0.13g_{f_b} + 0.04g_{f_v}. \quad (4.63)$$

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

Se puede fijar las tasas de crecimiento objetivo para cada factor que permita obtener una tasa de crecimiento anual de 3.71% del PIB per-cápita.

La contabilidad de crecimiento indica que la tasa de crecimiento de un país es contribuida por tres factores productivos agregados: Productividad Total de Factores (PTF), que en los modelos se ha denotado como A_t , del capital y del trabajo. Según Vera (2013), el crecimiento promedio anual de la productividad fue de 1,0 % para los años 1990-2000 y 2,6% para los años 2000-2010. En el mismo estudio se indica que para tener un crecimiento sostenible de la productividad en el Perú, se requiere de la consolidación de reformas en la institucionalidad, educación, salud, infraestructura, tecnología, regulaciones para los negocios que aumenten la formalidad y sofisticación empresarial. En la presente investigación se formula una función de producción donde la infraestructura genera externalidades positivas a la PTF, esto indica que a medida que se tenga mayor infraestructura, la productividad se incrementará endógenamente ya sea porque los procesos tomen menos tiempo o sean más efectivos cuando se tenga la infraestructura requerida. Tomando en cuenta la externalidad de la infraestructura en la productividad, se formula una tasa de crecimiento meta de la PTF de 2%: $g_A = 2\%$

Según el Reporte de Inflación del BCRP (2015), la variación porcentual real promedio de la inversión privada en los años 2008 al 2014 fue de 9.7%, y la tasa de crecimiento de la población fue 0.99%. La tasa de crecimiento de la inversión privada per-cápita promedio fue de 8.62%. Debido a que esta tasa cayó 1.7% en el año 2014, el BCRP prevé, para los años 2015 al 2017, tasas de crecimiento de -5.5% 2,0% y 4,4%, respectivamente; que vendría a ser en términos per-cápita -4.47%, 1% y 3.38%. Para el presente análisis se propone una tasa de crecimiento promedio de 3% en términos per-cápita. Esta inversión privada está enfocada en la acumulación de capital privado, por lo tanto, se aproxima como una tasa de crecimiento meta del capital: $g_k = 3\%$.

La economía presenta una brecha en infraestructura que deber ser cerrada cuanto antes, para ello se necesita más inversión, específicamente, en infraestructura. Dado que esta inversión es de gran envergadura, las Asociaciones Público-Privadas representan una buena alternativa de solución. Según el reporte de inflación de Setiembre (2015) hay 24 proyectos privados en infraestructura con una inversión total de US\$ 4,404 millones para el período 2015-2017, esto representa 11% de la inversión privada total, mientras en el 2014 fue de 8%. Asumiendo este mayor protagonismo en la participación del sector privado en el desarrollo de infraestructura de servicio público, resultaría razonable suponer que la tasa de crecimiento de la inversión en infraestructura público-privada sea, en promedio, 7.1% para los años futuros.

El Reporte de Inflación del BCRP (2015) indica que la evolución de la tasa de crecimiento promedio de la inversión pública de los años 2008-2014 es 12.2%, lo que en términos per-cápita equivale a 11.1%. Su proyección para los años 2015 al 2017 es de -2%, 8.5% y 5%, el equivalente en términos per-cápita es -1%, 7.44% y 3.97%, respectivamente. Cabe resaltar que la falta de dinamismo del Estado hace que no se ejecuten rápidamente los

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

planes de inversión. Por lo tanto, si se piensa en una tasa de crecimiento de largo plazo conservadora, es razonable suponer que dicha tasa de inversión pública promedio meta sea del orden del 6.24% debido que la inversión del estado está canalizada a la infraestructura pública. La tasa de crecimiento per-cápita de la infraestructura pública meta será de 5.2%: $g_{fb} = 5.2\%$

Entonces, las tasas de crecimiento meta que permita garantizar una tasa de crecimiento per-cápita del PIB de 3.71%, son los mostrados en la Tabla 4.3:

Tabla 4. 3: Tasas de crecimiento requeridas

g_y	g_a	g_k	g_{fv}	g_{fb}
3.71%	2.00%	3.00%	7.1%	5.2%

Esto indica que, para garantizar una tasa de 3.71% anual del PIB per-cápita, la tasa de crecimiento de la productividad debe ser de 2% anual, el capital per-cápita debe crecer a 3% anual, la infraestructura público-privada per-cápita (inversión público-privada) debe ser de 7.1% y la tasa de crecimiento de la infraestructura pública per-cápita (inversión pública) debe ser de 5.2%. La finalidad de estas últimas es de cerrar la brecha en infraestructura y con ella generar externalidades positivas en la productividad de los demás factores como el capital y el trabajo. Entonces, debido a que estas inversiones son de gran envergadura, se debería concentrar más esfuerzos en priorizar la inversión público-privada en infraestructura mediante las Asociaciones Público Privadas (APP).

Teniendo en cuenta que la tasa de crecimiento del PIB es más sensible a la infraestructura pública que la público-privada, por tener una elasticidad sobre el PIB tres veces mayor, se puede ver que sacrificar un 1% en crecimiento de infraestructura pública (de 5.2% a 4.2%) podría dar pie a tener que incrementar el crecimiento de la infraestructura público privada en 3.2% (de 7.10% a 10.3%), ver Tabla 4.4, para mantener la tasa meta del PIB. Reduciendo 2% el crecimiento de la infraestructura pública (de 5.2% a 3.2%) se tendría que aumentar de 7.10% a 13.5% el crecimiento de la infraestructura público privada.

Tabla 4.4: Escenario de las tasas de crecimiento

g_y	g_a	g_k	g_{fv}	g_{fb}
3.71%	2.00%	3.00%	7.10%	5.20%
3.71%	2.00%	3.00%	8.60%	4.70%
3.71%	2.00%	3.00%	10.30%	4.20%
3.71%	2.00%	3.00%	13.50%	3.20%
3.71%	2.00%	3.00%	16.80%	2.20%

CAPÍTULO IV: Modelo de Crecimiento Económico con Infraestructura Público-Privada y Externalidades de la Infraestructura Pública Sujeto a Congestión en una Economía Parcialmente Abierta

En conclusión, en este capítulo se encontró que la velocidad de convergencia depende de los parámetros estructurales de la economía: familias, empresas y gobierno, y es igual a 0.22; con esta velocidad, que refleja las condiciones actuales, se logrará cerrar la brecha en 45 (2057) años, con un rango entre 43 (2055) y 47 (2059) años. Así mismo, con las condiciones actuales, alcanzar el PIB per-cápita de EE.UU. del 2014 tomaría 55 (2069) años, con un rango entre 53 (2067) y 57 (2071) años. Y finalmente, 60 (2074) años para alcanzar la economía de EE.UU. con un rango entre 58 (2072) y 62 (2076) años. Según el modelo alternativo, con una tasa de crecimiento del PIB per-cápita de 3.71% alcanzamos a la economía de EE.UU. en 62 años y para ello las tasas mínimas de crecimiento de los factores deben ser de 2% de productividad, 3% de capital per-cápita, 7.1% de infraestructura público-privada per-cápita y 5.2% de infraestructura pública per-cápita.

CAPÍTULO V

Conclusiones, Limitaciones, Recomendaciones y Trabajo Pendiente

Las principales conclusiones son las siguientes:

- De la revisión de la literatura y la evidencia empírica (para el caso peruano) podemos afirmar que la infraestructura pública y público-privada tiene efectos importantes sobre el PIB per cápita. Debido al gran déficit en infraestructura, se han creado diversos mecanismos para que el sector privado incremente su participación en la construcción de infraestructura, siendo uno de estos instrumentos las Asociaciones Público Privadas. El presupuesto del Estado tiene un costo de oportunidad y es una de las razones por la cual la participación privada en obras de infraestructura toma mayor importancia. Este hecho empezó a inicios de los años 90s, y tiene poco tiempo de implementado comparado con otras economías como la británica, u otras, donde el modelo APP es utilizado a mayor escala.
- La elasticidad del PIB per-cápita respecto al stock de capital per cápita es 0.38; del PIB per-cápita respecto al stock de infraestructura pública, 0.13 y del PIB per-cápita respecto al stock de infraestructura público-privada, 0.04. Se ha podido encontrar una relación bastante significativa entre la producción y la inversión privada en infraestructura en la economía peruana, a la que se denomina inversión público privada.
- Las elasticidades de los factores privados (capital e infraestructura público-privada) suman 0.42, frente al trabajo que es 0.58, bajo el supuesto de rendimientos constantes de escala en factores privados.
- La alta participación del sector privado en la inversión en infraestructura se comporta como un amortiguador ante choques de productividad negativo y, junto con la inversión en capital, impulsan la recuperación de la economía. En una economía donde los impuestos son la principal fuente de ingreso fiscal, bajo un shock negativo, el gobierno no podría realizar políticas fiscales expansivas sostenibles debido a que sus recaudaciones están ancladas fuertemente al comportamiento de la economía, ni mucho menos podrá realizar nuevas inversiones en infraestructura: Cuando la participación del sector privado es sólo del 25% ($\theta = 25\%$), la producción cae en 6.33% de su nivel de equilibrio de largo plazo, el consumo en 0.7%, la inversión en capital en 4.11%, el stock de capital en 5.69%, la inversión total en infraestructura en 1.7%, el stock de infraestructura público-privada en 0.68%, y el stock de infraestructura pública en 1.96%. En cambio, si la participación del sector privado fuese del 50% ($\theta = 50\%$), la producción sólo caerá en 4.95% de

CAPÍTULO V: Conclusiones, Recomendaciones, Limitaciones y Trabajo Pendiente

su valor de equilibrio, el consumo sólo en 0.55%; la inversión en capital en 3.21%, el stock de capital en 4.45%, la inversión total en infraestructura en 0.67%, una caída en 0.53% en el stock de infraestructura público-privada; y para la infraestructura pública, en 0.51%. Claramente, ante un shock negativo, cuando el sector privado tiene una alta participación en infraestructura, se tendrá un menor impacto en el capital e infraestructura y a su vez, por medio de la función de producción, menor impacto en el nivel de producción. Los resultados de los escenarios alternativos son similares a los obtenidos en el escenario base.

- La velocidad de convergencia depende de los parámetros estructurales de la economía: familias, empresas y gobierno, y es igual a 0.22. Con esta velocidad, que refleja las condiciones actuales, se logrará cerrar la brecha en 45 años. Así mismo, con las condiciones actuales, alcanzar el PIB per-cápita de Estados Unidos del año 2014 tomaría 55 años. Finalmente, tomaría 60 años para alcanzar la economía de Estados Unidos. Según el modelo alternativo, con una tasa de crecimiento del PIB per-cápita de 3.71% alcanzamos a la economía de Estados Unidos en 62 años y, para ello, las tasas mínimas de crecimiento de los factores deben ser del 2% de productividad, 3% de capital per-cápita, 7.1% de infraestructura público-privada per-cápita y 5.2% de infraestructura pública per-cápita.
- En una economía en desarrollo, como la peruana, es de suma importancia cubrir el déficit de infraestructura con mayor participación del sector privado, solo así el impacto del shock en la economía no será muy profundo, se podrá retornar al estado estacionario y así garantizar un crecimiento sostenido de la economía.

Las limitaciones del modelo planteado en el tercer capítulo son las siguientes:

- Como primera limitación es que la productividad se ha modelado como dependiente únicamente de la infraestructura. Es sabido que la productividad depende también de la educación que reciben las personas. Así, con gente mejor educada, la empresa contará con personal más capacitado y podrá aumentar su productividad de mejor manera. Del mismo modo, la productividad depende también de la salud de las personas. Cuando un país brinda mayor acceso a las personas a los sistemas de salud, es de esperar que las personas produzcan más y las empresas puedan aumentar así su productividad. No obstante lo mencionado, el objetivo de la presente investigación está orientado al impacto que origina la inversión en infraestructura en la economía del país, en especial la inversión público-privada.
- Otra limitación es que se ha asumido que el shock de productividad simulado en el capítulo III de la presente tesis asume que la función de producción mantiene sus elasticidades constantes en el tiempo. Sin embargo, es de esperar que conforme pase el tiempo y se agregue más información histórica a la serie, las elasticidades antes encontradas podrían variar. Por ejemplo, si la política del país es aumentar la participación privada en la inversión en infraestructura, es de esperar que la elasticidad relacionada con la infraestructura público-privada, aumente.
- El modelo asume también que la infraestructura público-privada es financiada cien por ciento por el sector privado, lo que significa que los inversionistas recuperan sus

CAPÍTULO V: Conclusiones, Recomendaciones, Limitaciones y Trabajo Pendiente

costos de inversión, operación y mantenimiento a través del cobro de tarifas por el uso de la infraestructura de servicio público. Sin embargo, no todas las inversiones en infraestructura público privada pueden ser cubiertas con las tarifas. Existen inversiones que requieren del subsidio del Estado para que puedan ser viables, a las que se les denomina Asociaciones Público Privadas Cofinanciadas.

No obstante las limitaciones mencionadas, el modelo propuesto permite abrir puertas para aplicaciones reales a economías de países en vías de desarrollo que deseen incrementar el desarrollo de infraestructura de servicio público a través de la participación del sector privado. En ese sentido, las aplicaciones que se proponen son las siguientes:

- En primer lugar, se debe tener presente que el modelo propuesto relaciona la producción per cápita de la economía en función del stock de infraestructura pública y público privada, ambos per cápita. El modelo toma como restricciones que la inversión pública se financia únicamente con la recaudación de impuestos y la inversión público-privada se financia con capital privado local y externo.
- Si bien, el modelo hace la separación de fuentes de financiamiento antes indicada, ello no imposibilita el hecho que parte de las inversiones público privadas sean financiadas con los impuestos, es decir, que el modelo sea utilizado para las APP cofinanciadas.
- En efecto, en el Perú las APP cofinanciadas son subsidiadas en parte con pagos dinerarios del Estados, pero estas son pagadas generalmente de manera diferida en el tiempo y después que la infraestructura ha sido construida. Por ejemplo, si se desea construir una carretera de US\$ 500 millones durante 4 años, bajo la modalidad de APP, durante este período es el inversionista privado quien financia los US\$ 500 millones. Una vez concluidas las obras, y aceptadas por el Estado, este garantiza que la empresa concesionaria reciba una cuota periódica que sirve para pagar las inversiones y el costo de operación y mantenimiento. Sin perjuicio de ello, la empresa concesionaria cobra una tarifa a los usuarios de la infraestructura, por lo que el cofinanciamiento del Estado equivale a la diferencia entre los ingresos garantizados al concesionario menos la recaudación de este por el uso de la infraestructura.
- El cofinanciamiento expuesto en el párrafo anterior puede ser considerado en el modelo como gasto del Estado dentro de la ecuación (4.32), lo que equivaldría a que el Estado paga por una infraestructura ya construida de manera posterior, similar a un apalancamiento de las inversiones. Resulta evidente que este esquema origina menor presión a la caja fiscal que pagar las inversiones de forma inmediata, como ocurre con las inversiones públicas. Por ejemplo, si se tuviera que hacer una inversión de infraestructura de US\$ 500 millones como obra pública, el Estado tendría que desembolsar dicho monto en paralelo a la ejecución de las obras. Si dicho monto fuera cofinanciado y pagado posteriormente a la ejecución de las obras en cuotas anuales, digamos durante 15 años, el monto a pagar anualmente sería del orden del 13%²¹.

²¹ Calculando una anualidad a 15 años con una tasa de interés del 10%.

CAPÍTULO V: Conclusiones, Recomendaciones, Limitaciones y Trabajo Pendiente

- Si bien, con el esquema de APP cofinanciadas se generan compromisos firmes de pago del Estado para el futuro, también se debe tener en cuenta que se logran adelantar los beneficios de las inversiones en infraestructura sin que al Estado le cueste el cien por ciento de ellas desde el inicio.
- En la Tabla 4.4 se presentan los valores de las tasas de crecimiento que deberían tener la inversión pública y público privada para lograr tasas de crecimiento sostenibles de 3.71%. Teniendo en cuenta que la tasa de crecimiento del PIB es más sensible a la infraestructura pública que la público-privada, por tener una elasticidad sobre el PIB tres veces mayor, se puede ver que sacrificar un 1% en crecimiento de infraestructura pública (de 5.2% a 4.2%) podría dar pie a tener que incrementar el crecimiento de la infraestructura público privada en 3.2% (de 7.10% a 10.3%), ver Tabla 4.4, para mantener la tasa meta del PIB; y reduciendo 2% el crecimiento de la infraestructura pública (de 5.2% a 3.2%) se tendría que aumentar de 7.10% a 13.5% el crecimiento de la infraestructura público privada.
- Por lo expuesto, el modelo permite que se puedan construir distintos escenarios en cuanto a las tasas de crecimiento que deba tener la infraestructura pública y público-privada, de modo que se consiga como objetivo una tasa de crecimiento del PIB per cápita sostenible en el tiempo.

Bibliografía

- Aghion, Philippe; Howitt, Peter. (1992). A Model of Growth Through Creative Destruction. *Source: Econometrica, Vol. 60*, 323-351.
- Akintoye, A.; Beck, Matthias; Hardcastle, C. (2003). *Public Private Partnerships: Managing Risks and Opportunities*. UK: C. Hardcastle.
- Albújar Cruz, A. (2010). El Proyecto Finance: una técnica para viabilizar proyectos de infraestructura. *Documento de trabajo N° 27. Univesidad ESAN*.
- Allen, G. (2001). *Risk and the private finance initiative (PFI)*.
- Arecete Gil, J. B. (2004). *Financiación y gestión privada de infraestructuras y servicios públicos: Asociaciones Público Privadas*. Tesis Doctoral. Universidad de Saragoza.
- Ariño, G. (2001). *Principios de derecho público económico*.
- Arrow, K. J.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics, Vol. 43, No. 3*, 225-250.
- Aschauer, D. A. (1989). In Public Expenditure Productive? *Journal of Monetary Economics 23*, 177-200.
- Aschauer, D. A. (1990). Is Government Spending Stimulative? *Contemporary Economic Policy, Western Economic Association International, vol. 8(4)*, 30-46.
- Asociación para el Fomento de la Infraestructura Nacional - AFIN; UP; ESAN. (2012). *Plan Nacional de Infraestructura 2012-2021*. Lima, Perú: AFIN.
- Barajas, Héctor A.; Gutiérrez, Luis. (2012). La importancia de la infraestructura física en el crecimiento económico de los municipios de la frontera norte. *Estudios Fronterizos*, 57 - 87.
- Barro, R. J. (1990). Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth. *The Journal of Political Economy*, S103-S125.
- Barro, R. J. (1991). Economic Growth in a Cross Section of Countries. *Quarterly Journal of Economics*, 106, 407-443.
- Barro, Robert J.; Mankiw, N. Gregory; Sala-i-Martin, Xavier. (1995). Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth. *The American Economic Review*, 103-115.
- Barro, Robert J.; Sala-i-Martin, Xavier. (1991). Convergence across States and Regions. *Brookings Paper on Economic Activity*, 1, 107-182.

- Barro, Robert J.; Sala-i-Martin, Xavier. (1992). Public Finance in Models of Economic Growth. *Review of Economic Studies*, 59, 645-661.
- Barro, Robert; Sala-I-Martin, Xavier. (2004). *Economic Growth*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- BCRP. (2013). *Banco Central de Reserva del Perú*. Obtenido de <http://www.bcrp.gob.pe/estadisticas.html>
- BCRP. (2015). *Reporte de Inflación Setiembre*. Lima.
- Bigio, Saki; Ramírez-Rodán, Nelson. (Junio de 2006). *BCRP*. Obtenido de <http://www.bcrp.gob.pe/docs/Publicaciones/Documentos-de-Trabajo/2006/Documento-Trabajo-07-2006.pdf>
- Birch Sorensen, Peter; Whitta, Jacobsen; Hans, Jorgen. (2008). *Introducción a la Macroeconomía Avanzada*. (Vol. II: Ciclos económicos). España: McGRAW-HILL / Interamericana de España.
- BM. (2015). *Banco Mundial*. Obtenido de <http://datos.bancomundial.org>
- Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *The Review of Economic Studies*, Vol. 32, 233-240.
- Cass, D. (1966). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *Econometrica*. Vol 34.
- Chiang, Alpha C.; Wainwright, Kevin. (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática* (Cuarta Edición. ed.). México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.
- Cullison, W. E. (1993). Public Investment and Economic Growth. *FRB Richmond Economic Quarterly*, vol. 79, 19-33.
- De Gregorio, J. (2012). *Macroeconomía. Teoría y Políticas*. Santiago, Chile.: Pearson-Educación.
- Domar, E. (1946). Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment. *Econometrica*, 14, 137-147.
- Duffy-Deno, Kevin T.; Eberts, Randall W. (1991). Public Infraestructure and regional economic development: A simultaneous equations approach. *Journal of Urban Economics*, 329-343.
- Economic Forum World. (2013). *The Global Competitiveness Reprot 2012-2013*.
- ESAN. (2011). *Graduate School of Business*. Obtenido de <http://www.esan.edu.pe>
- Frisch, R. (1933, 1965). Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics. *Readings in Business Cycles*. American Economic Association, 10., 155-185.

- García-Milá, Teresa; McGuire, Therese J.; Porter, Robert H. (1996). The effect of public capital in state-level production functions reconsidered. *The Review of Economics and Statistics*, 177-80.
- Gerrard, M. (2001). *Public-private partnerships. Finance and Development*.
- Ghosh, Probal; Narayana, N. S. (2005). Impact of Economic Reforms and Macroeconomic Forecasts: Pulses, Levels and Trends. *Economic and Political Weekly*, 2330 - 2339.
- Glomm, Gerhard; Ravikumar, B. (1994). Public investment in infrastructure in a simple growth model. *Journal of Economist Dynamics and Control*, 1173-1187.
- GOEL, D. (2003). Impact of Infrastructure on Productivity: Case of Indian Registered Manufacturing. *Indian Economic Review, New Series*, 95-113.
- Grimsey, Darrin; Lewis, Mervyn K. (2002). Evaluating the risks of public private partnerships for infrastructure projects. *International Journal of Project Management*, 107–118.
- Grossman, G.; Helpman, E. (1994). Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *The Journal of Economic Perspectives. Vol. 8*, 23 - 44.
- Grossman, Gene M.; Helpman, Elhanan. (1991). Innovation and Growth in the Global Economy. *The MIT Press*.
- Gutiérrez de Vera, F.; Doderó, L. (2007). "Infraestructura y concesiones: un instrumento de desarrollo. *Información Comercial Española, ICE: Revista de Economía. N° 838.*, 169 - 188.
- Gutiérrez de Vera, Fernando; Doderó Jordán, Luis. (2007). *Infraestructura y Concesiones. Un instrumento de desarrollo*.
- Gutiérrez de Vera, Fernando; Doderó Jordán, Luis. (2007). *Infraestructura y Concesiones. Un instrumento de desarrollo*.
- Hamilton, G. (2011). Requerimiento de capital bancario y ciclos económicos en un modelo DSGE. *SBS Documentos de Trabajo*.
- Harrod, R. F. (1939). An Essay in Dynamic Theory. *Economic Journal*, 49, 14-33.
- Hernández Mota, J. L. (2009). *La composición del gasto público y el crecimiento* . Obtenido de REDALYC: <http://www.redalyc.org/pdf/413/41311453005.pdf>
- Idrovo Aguirre, B. (2012). Inversión en infraestructura pública y crecimiento económico, evidencia para Chile. *Documentos de Trabajo de la Cámara Chilena de la Construcción No. N° 69*.
- IMF. (2013). *International Monetary Fund*. Obtenido de <http://www.imf.org>

- Inada, K.-I. (1963). On a two-sector model of economic growth: comments and a generalization. *The Review of Economic Studies* 30, 119–127.
- IPE. (2006). *Instituto Peruano de Economía*. Obtenido de <http://www.ipe.org.pe>
- Jalami, D. (2004). *Success and failure mechanisms of public private partnerships (PPPs) in developing countries: Insights from the Lebanese context*. Emerald Group Publishing Limited.
- Koopmans, T. C. (1965). On the concept of optimal economic growth. *The Econometric Approach to Development Planning*.
- Larrain, F. B.; Vergara, R. M. (1997). *Income Distribution, Investment, and Growth*. Harvard - Institute for International Development.
- Leduc, Sylvain; Wilson, Daniel. (2012). Roads to Prosperity or Bridges to Nowhere? Theory and Evidence on the Impact of Public Infrastructure Investment. *The University of Chicago Press*, 89-142.
- Levine, R. (1997). Financial Development and Economic Growth: Views and Agenda. *Journal of Economic Literature*, 688–726.
- Levine, R. (1997). Financial Development and Economic Growth: Views and Agenda. *Journal of Economic Literature*, 688–726.
- Lloveras Soler, Josep M.; Borderas, Luis Marco. (1988). *Financiación privada de proyectos de infraestructura y equipamiento*. Madrid: SEOPAN.
- Loayza, Norman; Soto, Raimundo. (2002). *BCHILE*. Obtenido de http://www.bcentral.cl/estudios/banca-central/pdf/v6/001_010soto_loayza.pdf
- Lucas, R. E. (1988). On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, 22, 3-42.
- Mankiw, Romer and Weil. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 407 - 437.
- Marrero, Gustavo; Novales, Alfonso. (2006). INCOME TAXES, PUBLIC INVESTMENT AND WELFARE IN A GROWING ECONOMY.
- Maudos, Joaquín; Mas, Matilde; Pérez, Francisco; Uriel, Ezequiel. (1996). Public Capital and Productive Efficiency in the Spanish Regions. *Regional Studies, Taylor & Francis Journals*, 30(7), 641-649.
- Mehrotra, Aaron; Väililä, Timo . (2006). Public Investment in Europe: Evolution and Determinants in Perspective. *Fiscal Studies*, 443-471.

- Mendoza Bellido, W. (2014). *Macroeconomía intermedia para América Latina*. Lima: Fondo Editorial PUCP.
- Munnell, A. H. (January/February de 1990). *Why Has Productivity Growth Declined? Productivity and Public Investment*. Obtenido de Federal Reserve Bank of Boston: <http://www.bostonfed.org/economic/neer/neer1990/neer190a.htm>
- Munnell, A. H. (1992). Policy Watch: Infrastructure Investment and Economic Growth. *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 6, No 4, 189-198.
- Naqvi Source, Naveed. (2002). Crowding-in or Crowding-out? Modelling the Relationship between Public and Private Fixed. *The Pakistan Development Review*, 255-275.
- Nordhaus, W. D. (1992). Lethal Model 2: The Limits to Growth Revisited. *Brookings Papers on Economic Activity*. , 1-60.
- Posada, Carlos Esteban; Gómez, Wilman. (2002). *Crecimiento económico y gasto público: un modelo para el caso colombiano*. Obtenido de Banco Central de la República: <http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra218.pdf>
- PWT_7.1. (2012). *Penn World Table PWT 7.1*. Obtenido de https://pwt.sas.upenn.edu/php_site/pwt71/pwt71_form.php
- Quintanilla Acosta, E. (2005). *Dotación institucional de un país y su relación con la autonomía de los organismos reguladores*. Obtenido de ESAN: <http://www.esan.edu.pe/publicaciones/2009/12/07/DocTrab15.pdf>
- Ramsey, F. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal*, Vol 38, 543 - 559.
- Rebelo, S. (1991). Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 99, 500-521.
- Rivera, Jorge; Toledo, Patricia. (2004). Efectos de la infraestructura pública sobre el crecimiento de la economía, evidencia para Chile. *Estudios de Economía, University of Chile, Department of Economics, University of Chile, Department of Economics*, vol. 31(1 Year 20), 21-38.
- Romer, P. M. (1986). Increasing Returns and Long-Run Growth. *The Journal of Political Economy*, 94, 1002-1037.
- Romer, P. M. (1987). Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization. *American Economic Review*, 77, 56-62.
- Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98, S71-S102.
- Rozas, Patricio; Sánchez, Ricardo. (2004). Desarrollo de infraestructura y crecimiento económico: revisión conceptual. *CEPAL N° 75*, 75.

- Shantayanan, Devarajan; Swaroop, Vinaya; Zou, Heng-fu. (1996). The Composition of Public Expenditure and Economic Growth. *Journal of Monetary Economics*, 32(2), 313-344.
- Shumpeter, J. (1911). Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung. *The American Journal of Economics and Sociology*, Chapter 2 pp. 103 - 107.
- Slutzky, E. (1927,1937). The Summation of Random Causes as the Source of Cyclical Processes. *Econometrica*, 105-146.
- Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, 65-94.
- Straub, S. (2008). Infraestructure and Growth in Developing Countries . *Policy Research Working Paper*, 4460 .
- Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *The Economic Record*. Vol. 32, 334-361.
- Turnovsky, S. J.; Fisher, W. H. (1995). The Composition of Government Expenditure and its Consequences for Macroeconomic Performance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, 747-786.
- Urrunaga, Roberto; Aparicio, Carlos. (2012). Infraestructura y crecimiento económico en el Perú. *Revista CEPAL N° 107*.
- Uzawa, H. (1965). Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 6., 18-31.
- Vásquez , Cordano Arturo; Bendezú, Medina Luis. (Septiembre de 2008). *Ensayos sobre el rol de la infraestructura vial en el crecimiento económico del Perú*. Obtenido de CIES, BCRP: <http://cies.org.pe/sites/default/files/files/diagnosticoypropuesta/archivos/dyp-39.pdf>
- Vera Tudela, R. (2013). Productividad en el Perú. Evolución histórica y la tarea pendiente. *Moneda*, 24-25.
- Zhang, X. (2005). Concessionaire's Financial Capability in Developing Build-Operate-Transfer Type Infrastructure Projects. *Journal of Construction Engineering and Management*, 1054-1064.

ANEXOS

Anexo N° 1: Evaluación de los supuestos del modelo Mínimos Cuadrado Ordinarios (OLS)

1.1 Matriz de correlaciones

Esta matriz muestra la correlación entre las variables lk, lfb y lfv. Se puede ver que existe una correlación de 0.9 entre lk y lfb, mientras para lk y lfv es 0.3 y entre lfb y lfv es 0.3. Si bien la correlación entre lk y lfb es alta, las otras correlaciones son bajas. Esto indica que tenemos un cierto grado de correlación pero no es severa. Las recomendaciones usuales son sacar la omitir la variable correlacionada o no hacer nada. Optamos por la segunda debido a que necesitamos que la variable lk esté presente en nuestro modelo.

	lk	L. lfb	L. lfv
lk	1.0000		
lfb		1.0000	
L1. lfv	0.9009	0.3139	1.0000
L1.	0.3123	0.3139	1.0000

Se presenta la matriz de correlaciones de las variables dummy. Se puede ver que el grado de correlación entre todas ellas es muy baja. Ninguna sobrepasa 0.5. Por lo tanto no estamos en el problema de la “trampa de las dummies”.

	d1	d2	d3	d4	d5	d6
d1	1.0000					
d2	-0.0663	1.0000				
d3	-0.0550	-0.1076	1.0000			
d4	-0.0419	-0.0819	-0.0680	1.0000		
d5	-0.1383	-0.2704	-0.2244	-0.1708	1.0000	
d6	-0.0608	-0.1189	-0.0987	-0.0751	0.4398	1.0000

1.2 Matriz de Covarianzas

Covariance matrix of coefficients of regress model

e (V)	lk	L. lfb	L. lfb	L. lfb	d1	d2
lk	.00477902					
L.lfb	-.0019155	.00107492				
L.lfb	-.00014856	.00007179	.00003596			
d1	.00143037	.00025641	-.0000114	.00427813		
d2	-.00022739	.00025732	.00001369	.00052708	.00066482	
d3	-.00017899	2.945e-06	2.822e-06	-.00009316	.00011754	
d4	.00051863	-.00041578	-.00002441	-.00026014	9.090e-06	
d5	.00127508	-.00074149	-.000165	-.00009455	-.00003908	
d6	-.00084766	.00038071	-.00005323	-.00014308	.00006249	
_cons	-.02966474	.00945947	.0008253	-.01559066	-.00004976	

e (V)	d3	d4	d5	d6	_cons
d3	.00075335				
d4	.00017339	.00131824			
d5	.0001501	.00044059	.00127962		
d6	.00002258	-.00011971	-.00013385	.00103991	
_cons	.00150918	-.00172033	-.00623766	.00493761	.20351751

1.3 No Autocorrelación de los residuos

1.3.1 Estadístico Durbin-Watson

El estadístico Durbin-Watson es cercano a 2, esto indica que no hay autocorrelación de primer orden en los residuos.

$$\text{Durbin-Watson d-statistic}(10, 59) = 1.701474$$

Para ver con más detalle, a continuación se formula una regresión auxiliar del residuo del modelo con sus rezagos.

1.3.2 Modelo Auxiliar para los residuos

$$\text{resid}_t = c_0 + c_1 * \text{resid}_{t-1} + c_2 * \text{resid}_{t-2} + v_t$$

Source	SS	df	MS			
Model	.005750923	2	.002875462	Number of obs = 57		
Residual	.115507997	54	.002139037	F(2, 54) = 1.34		
Total	.12125892	56	.002165338	Prob > F = 0.2693		
				R-squared = 0.0474		
				Adj R-squared = 0.0121		
				Root MSE = .04625		

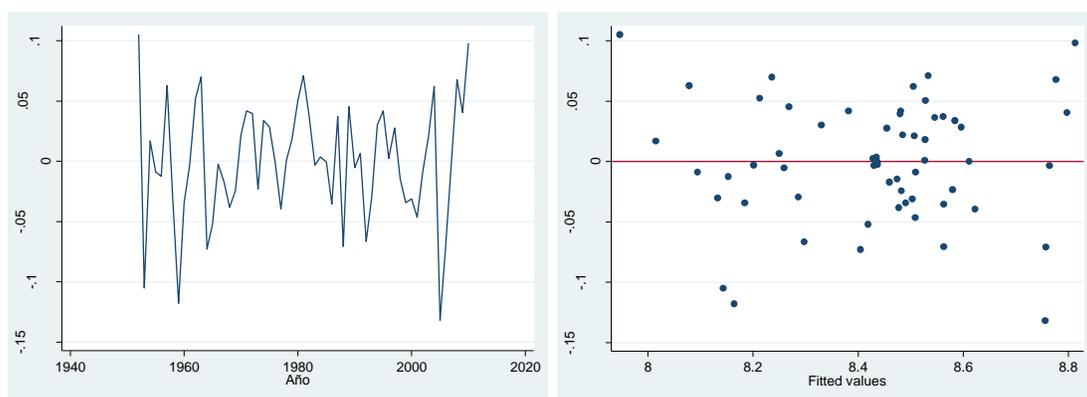
residuo	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
residuo						
L1.	.1874465	.1326264	1.41	0.163	-.0784534	.4533463
L2.	-.1153344	.1276023	-0.90	0.370	-.3711617	.1404929
_cons	.0003879	.0061507	0.06	0.950	-.0119435	.0127193

Se puede corroborar que ningún coeficiente c_i de los rezagos del residuo es significativo. Esto indica que no hay autocorrelación en el comportamiento de los residuos del modelo.

1.4 Homocedasticidad del residuo

1.4.1 Análisis gráfico

Se presenta el gráfico de los residuos en el tiempo. El análisis gráfico no muestra un problema serio de heterocedasticidad.



1.4.2 Test de Heterocedasticidad: White

White's test for Ho: homoskedasticity
against Ha: unrestricted heteroskedasticity

chi2(27) = 41.55
Prob > chi2 = 0.0365

Cameron & Trivedi's decomposition of IM-test

Source	chi2	df	p
Heteroskedasticity	41.55	27	0.0365
Skewness	7.01	9	0.6357
Kurtosis	0.11	1	0.7404
Total	48.67	37	0.0949

Los resultados indican que no hay un problema serio de heterocedasticidad. Solo con la finalidad de comparación con los resultados obtenidos, a continuación se estima una regresión robusta a la heterocedasticidad (White).

1.4.3 Regresión robusta a la White

Linear regression

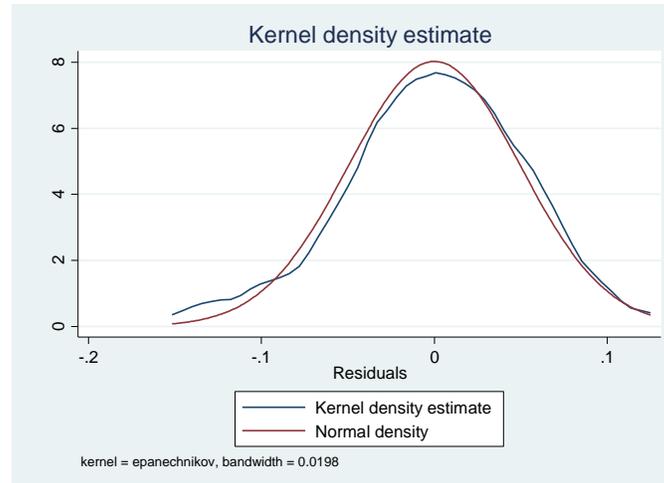
Number of obs = 59
F(9, 49) = 101.36
Prob > F = 0.0000
R-squared = 0.9418
Root MSE = .05408

ly	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
lk	.2501487	.0683469	3.66	0.001	.1128004 .387497
lfb L1.	.1250192	.0326692	3.83	0.000	.0593681 .1906704
lfv L1.	.0425261	.0044027	9.66	0.000	.0336786 .0513737
d1	.2915763	.0880048	3.31	0.002	.1147241 .4684285
d2	-.1540176	.0278353	-5.53	0.000	-.2099548 -.0980803
d3	.1021517	.0179478	5.69	0.000	.0660843 .1382191
d4	-.1285251	.0181658	-7.08	0.000	-.1650306 -.0920197
d5	-.2913939	.0311849	-9.34	0.000	-.3540624 -.2287254
d6	.2505328	.0419991	5.97	0.000	.1661325 .334933
_cons	5.101329	.4126771	12.36	0.000	4.272024 5.930635

Se puede ver que no hay cambios significativos en los Std. Err; t-estadístico, p-value e intervalos de confianza. Es más, los p-vaes permanecen igual que el modelo inicial presentado en la sección 2.4.

1.5 Normalidad del residuo

1.5.1 Análisis gráfico de la Normalidad: Kernel Density



1.5.2 Test de Shapiro-Wilk W (Ho: Normalidad)

El test nos indica que no podemos rechazar la hipótesis nula de normalidad de los residuos.

Shapiro-Wilk W test for normal data

Variable	Obs	W	V	z	Prob>z
residuo	59	0.98315	0.904	-0.218	0.58647

1.5.3 Test de Shapiro-Francia W' (Ho: Normalidad)

De igual forma, los residuos tienen una distribución normal.

Shapiro-Francia W' test for normal data

Variable	Obs	W'	V'	z	Prob>z
residuo	59	0.98317	0.999	-0.001	0.50043

En conclusión, los residuos del modelo son limpios: no presentan autocorrelación, son homocedásticos y se distribuyen como una normal. Por lo tanto todos los procesos tanto de inferencia están garantizados. Nuestro modelo cumple con los supuestos del Ordinary least squares (OLS).

Anexo N° 2: Derivaciones del Modelo de Economía Cerrada

2.1 Las Empresas

2.1.1 Expresando en términos de trabajador efectivo

A continuación se expresan las principales ecuaciones que describe el comportamiento de las empresas, en términos de trabajador efectivo:

- La función de producción:

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \bar{A}_t K_{it}^\alpha F_{V_{it}}^\gamma (B_t L_{it})^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta, \\ \frac{Y_{it}}{B_t L_{it}} &= \bar{A}_t \frac{K_{it}^\alpha F_{V_{it}}^\gamma (B_t L_{it})^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta}{B_t L_{it}}, \\ \frac{Y_{it}}{B_t L_{it}} &= \bar{A}_t \left(\frac{K_{it}}{B_t L_{it}} \right)^\alpha \left(\frac{F_{V_{it}}}{B_t L_{it}} \right)^\gamma \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta, \\ y_{it} &= \bar{A}_t (k_{it})^\alpha (fv_{it})^\gamma \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta, \\ y_{it} &= \bar{A}_t (k_{it})^\alpha (fv_{it})^\gamma \left(\frac{Fb_t / B_t L_{it}}{K_t / B_t L_{it}} \right)^\beta, \\ y_{it} &= \bar{A}_t (k_{it})^\alpha (fv_{it})^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t} \right)^\beta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

- La ecuación de beneficios de la empresa:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{it}}{B_t L_{it}} &= \frac{Y_{it} - \tau Y_{it} - r_{K_t} K_{it} - r_{F_{V_t}} F_{V_{it}} - w_t L_{it}}{B_t L_{it}}, \\ \pi_{it} &= (B_t L_{it}) \left[y_{it} - \tau y_{it} - r_{K_t} k_{it} - r_{F_{V_t}} fv_{it} - \frac{w_t}{B_t} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

2.1.2 Demostración de la Proposición 3.1

Para encontrar las soluciones óptimas anteriores, se maximiza la función de beneficios de la empresa (ecuación 3.2) obteniendo la demanda óptima de cada factor. Así tenemos:

- **Demanda óptima de capital**

$$\frac{\partial \pi_{it}}{\partial K_{it}} = (1 - \tau) \frac{\partial Y_{it}}{\partial K_{it}} - r_{K_t} = 0 ,$$

$$(1 - \tau) \alpha \bar{A}_t K_{it}^{\alpha-1} FV_{it}^\gamma (B_t L_{it})^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta = r_{K_t} .$$

Multiplicando por $\frac{K_{it}}{K_{it}}$:

$$(1 - \tau) \alpha \bar{A}_t K_{it}^{\alpha-1} FV_{it}^\gamma (B_t L_{it})^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta \left(\frac{K_{it}}{K_{it}} \right) = r_{K_t} ,$$

$$(1 - \tau) \alpha \frac{Y_{it}}{K_{it}} = r_{K_t} .$$

Esta condición determina la demanda óptima del capital por parte de la empresa “i”:

$$K_{it}^d = (1 - \tau) \alpha \frac{Y_{it}}{r_{K_t}} .$$

Expresando en términos de trabajador efectivo:

$$\frac{K_{it}^d}{B_t L_{it}} = (1 - \tau) \alpha \frac{\frac{Y_{it}}{B_t L_{it}}}{r_{K_t}} ,$$

$$k_{it}^d = (1 - \tau) \alpha \frac{y_{it}}{r_{K_t}} . \quad (3.3)$$

- **Demanda óptima de la infraestructura público-privada**

$$\frac{\partial \pi_{it}}{\partial FV_{it}} = (1 - \tau) \frac{\partial Y_{it}}{\partial FV_{it}} - r_{FV_t} = 0 ,$$

$$(1 - \tau) (\gamma) \bar{A}_t K_{it}^\alpha FV_{it}^{\gamma-1} (B_t L_{it})^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{Fb_t}{K_t} \right)^\beta = r_{FV_t} .$$

Multiplicando por $\frac{FV_{it}}{FV_{it}}$:

$$(1 - \tau)(\gamma)\bar{A}_t K_{it}^\alpha F_{V_{it}}^{\gamma-1} (B_t L_{it})^{1-\alpha-\gamma} \left(\frac{F_{bt}}{K_t}\right)^\beta \left(\frac{F_{vit}}{F_{vit}}\right) = r_{F_{Vt}},$$

$$(1 - \tau)\gamma \frac{Y_{it}}{F_{vit}} = r_{F_{Vt}}.$$

Esta condición determina la demanda óptima de la infraestructura público-privada:

$$F_{vit}^d = (1 - \tau)\gamma \frac{Y_{it}}{r_{F_{Vt}}}.$$

Expresando en términos de trabajador efectivo:

$$\frac{F_{vit}^d}{B_t L_t} = (1 - \tau)\gamma \frac{Y_{it}}{r_{F_{Vt}}},$$

$$f_{vit}^d = (1 - \tau)\gamma \frac{y_{it}}{r_{F_{Vt}}}. \quad (3.4)$$

- Demanda óptima de trabajo

$$\frac{\partial \pi_{it}}{\partial L_{it}} = (1 - \tau) \frac{\partial Y_{it}}{\partial L_{it}} - w_t = 0,$$

$$(1 - \tau) \frac{\partial Y_{it}}{\partial L_{it}} = w_t,$$

$$(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)\bar{A}_t K_{it}^\alpha F_{V_{it}}^\gamma B_t^{1-\alpha-\gamma} L_{it}^{1-\alpha-\gamma-1} \left(\frac{F_{bt}}{K_t}\right)^\beta = w_t.$$

Multiplicando por $\frac{L_{it}}{L_{it}}$:

$$(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)\bar{A}_t K_{it}^\alpha F_{V_{it}}^\gamma B_t^{1-\alpha-\gamma} L_{it}^{1-\alpha-\gamma-1} \left(\frac{F_{bt}}{K_t}\right)^\beta \left(\frac{L_{it}}{L_{it}}\right) = w_t,$$

$$(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma) \frac{Y_{it}}{L_{it}} = w_t.$$

Esta condición, productividad marginal igual al salario, determina la demanda óptima de trabajo:

$$L_{it}^d = (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma) \frac{Y_{it}}{w_t}.$$

Expresando en términos de trabajador efectivo:

$$\begin{aligned} \frac{L_{it}^d}{B_t L_{it}} &= (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma) \frac{\frac{Y_{it}}{B_t L_{it}}}{\frac{w_t}{B_t L_{it}}}, \\ (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma) y_{it} B_t &= w_t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

2.2 La Familias

2.2.1 Definición y propiedades de la función CRRA (Constant Risk Relative Aversion)

La función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante (CRRA) o elasticidad de sustitución intertemporal constante. “Esta función se usa para el análisis de decisiones bajo incertidumbre, en cuyo caso es útil verla como una función de aversión relativa al riesgo constante. Sin embargo, nuestro foco está en las decisiones intertemporales, por lo tanto conviene pensar en que esta función tiene una elasticidad de sustitución intertemporal constante” (De Gregorio, 2012).

Esta función viene dada por:

$$u(c_t) = \begin{cases} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma > 0, \sigma \neq 1 \\ \ln c_t & \text{si } \sigma = 1 \end{cases}$$

Derivando esta función para t y t+1, tenemos:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= c_t^{-\sigma} \quad \text{si } \sigma > 0, \sigma \neq 1, \\ u'(c_{t+1}) &= c_{t+1}^{-\sigma} \quad \text{si } \sigma > 0, \sigma \neq 1. \end{aligned}$$

Dividiendo ambas ecuaciones, tenemos la Tasa Marginal del Sustitución (TMS): entendido como el número de unidades de un bien a las que el consumidor está dispuesto a renunciar a cambio de una unidad adicional del otro bien, manteniendo constante su nivel de utilidad (satisfacción). Para nuestro modelo esto se entiende como una relación de intercambio

entre consumo presente c_t y consumo futuro c_{t+1} que mantiene constante el nivel de utilidad.

$$\text{TMS} = \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{c_t^{-\sigma}}{c_{t+1}^{-\sigma}} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^\sigma \text{ si } \sigma > 0, \sigma \neq 1,$$

Resolviendo para $\frac{c_{t+1}}{c_t}$, expresamos el consumo futuro en relación al consumo presente (CF/CP):

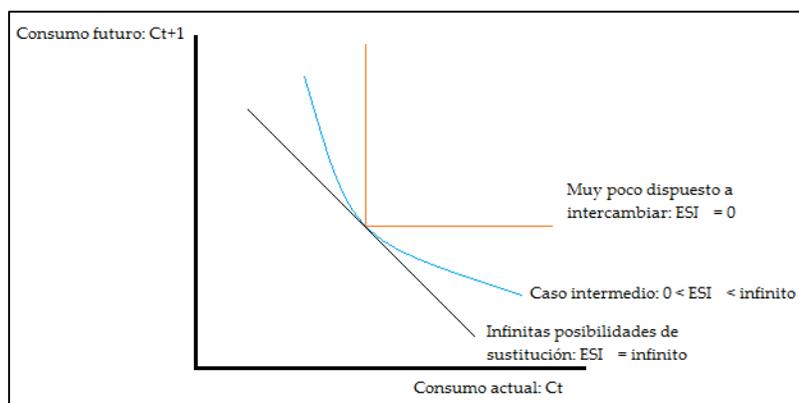
$$\begin{aligned} \frac{\text{CF}}{\text{CP}} &= \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \\ \frac{\text{CF}}{\text{CP}} &= (\text{TMS})^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Ahora definamos la elasticidad. “La Elasticidad de Sustitución Intertemporal Constante (ESIC) mide el grado en que el consumidor está dispuesto a sustituir consumo actual por consumo futuro. En términos matemáticos la ESIC es la variación porcentual que se produce en el consumo futuro en relación al consumo presente (CF/CP) como una consecuencia del cambio en uno por ciento en la Relación Marginal de Sustitución (RMS)” (Mendoza Bellido, 2014). Es decir:

$$\begin{aligned} \text{ESI} &= \frac{\frac{d(\frac{\text{CF}}{\text{CP}})}{(\frac{\text{CF}}{\text{CP}})}}{\frac{d(\text{TMS})}{(\text{TMS})}} = \left[\frac{d(\frac{\text{CF}}{\text{CP}})}{d(\text{TMS})} \right] \frac{(\text{TMS})}{(\frac{\text{CF}}{\text{CP}})}, \\ &= \left[\frac{1}{\sigma} (\text{TMS})^{\frac{1}{\sigma}-1} \right] \frac{(\text{TMS})}{(\text{TMS})^{\frac{1}{\sigma}}}, \\ &= \frac{1}{\sigma}. \end{aligned}$$

Es decir, la elasticidad de sustitución intertemporal es constante e igual a $\frac{1}{\sigma}$. “Modificando σ , podemos estudiar, pues, los efectos de las variaciones de la disposición del consumidor a sustituir consumo a lo largo del tiempo. Cuando σ tiende a infinito, la ESIC tiende a cero, el consumidor está muy poco dispuesto a intercambiar consumo actual por consumo futuro, por lo que sus curvas de indiferencia se vuelven rectangulares, como se muestra en la siguiente figura 1. En cambio, cuando σ tiende a cero, la ESIC tiende a infinito, las posibilidades de sustitución también se vuelven infinitas por lo que las curvas de indiferencia convergen hacia líneas rectas” (Birch Sorensen, Peter; Whitta, Jacobsen; Hans, Jorgen, 2008).

Anexo N° 3. 1: Gráfico de la relación entre la forma de la curva de indiferencia y su elasticidad de sustitución intertemporal



Reproducido de Birch, Whitta y Hans (2008)

2.2.2 Expresando en términos de trabajador efectivo

A continuación se expresan las principales ecuaciones, que describe el comportamiento de las familias, en términos de trabajador efectivo:

- La función de utilidad intertemporal:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{\left(\frac{C_{jt}}{B_t L_{jt}}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{\left(\frac{B_t C_{jt}}{B_t L_{jt}}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{\left[B_t \left(\frac{C_{jt}}{B_t L_{jt}}\right)\right]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_d^t \frac{B_t^{1-\sigma} C_{jt}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}.$$

(3.13)

- La restricción presupuestaria de las familias:

$$\frac{C_{jt}}{B_t L_{jt}} + \frac{I_{K_{jt}}}{B_t L_{jt}} + \frac{I_{FV_{jt}}}{B_t L_{jt}} = \frac{W_t L_{jt}}{B_t L_{jt}} + r_{K_t} \frac{K_{jt}}{B_t L_{jt}} + r_{FV_t} \frac{FV_{jt}}{B_t L_{jt}},$$

$$c_{jt} + i_{K_{jt}} + i_{FV_{jt}} = \frac{W_t}{B_t} + r_{K_t} k_{jt} + r_{FV_t} fV_{jt}. \quad (3.14)$$

- La función de acumulación del capital (3.19):

$$\frac{K_{jt+1}}{B_{t+1} L_{jt+1}} = (1 - \delta_K) \frac{K_{jt}}{B_t L_{jt}} + \frac{I_{K_{jt}}}{B_t L_{jt}}.$$

El lado izquierdo de la ecuación tal como está expresado no permite obtener el stock de capital en términos por trabajador efectivo para el período $t+1$, es por eso que se multiplica por $\frac{B_{t+1} L_{jt+1}}{B_{t+1} L_{jt+1}}$ y se obtiene:

$$\left(\frac{B_{t+1}}{B_t}\right) \left(\frac{L_{jt+1}}{L_{jt}}\right) \frac{K_{jt+1}}{B_{t+1} L_{jt+1}} = (1 - \delta_K) \frac{K_{jt}}{B_t L_{jt}} + \frac{I_{K_{jt}}}{B_t L_{jt}},$$

$$(1 + x)(1 + n)k_{jt+1} = (1 - \delta_K)k_{jt} + i_{K_{jt}}. \quad (3.15)$$

Donde x es la tasa de crecimiento exógena de la tecnología y n es la tasa de crecimiento de la población. Por último, siguiendo el mismo proceso anterior, la ecuación de acumulación en stock de infraestructura público-privada (3.20):

$$(1 + x)(1 + n)fV_{jt+1} = (1 - \delta_{FV})fV_{jt} + i_{FV_{jt}}. \quad (3.16)$$

2.2.3 Demostración de la Proposición 3.2

Para demostrar las soluciones óptimas anteriores, reemplazaremos las ecuaciones (3.15) y (3.16) en (3.14) con la finalidad de tener sólo una restricción que esté en función del consumo, del capital e infraestructura público-privada:

$$c_{jt} + [(1 + x)(1 + n)k_{jt+1} - (1 - \delta_K)k_{jt}] + [(1 + x)(1 + n)fV_{jt+1} - (1 - \delta_{FV})fV_{jt}] = \frac{W_t}{B_t} + r_{K_t} k_{jt} + r_{FV_t} fV_{jt}.$$

Finalmente, expresando el lagrangiano, tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta_d^t \frac{B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda_t \left(\frac{W_t}{B_t} + r_{K_t} k_{jt} + r_{FV_t} f_{V_{jt}} - c_{jt} - (1+x)(1+n)k_{jt+1} + (1-\delta_K)k_{jt} - (1+x)(1+n)f_{V_{jt+1}} + (1-\delta_{FV})f_{V_{jt}} \right) \right], \quad (3a.1)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{jt}} = \beta_d^t B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{-\sigma} + \lambda_t (-1) = 0, \quad (3a.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{jt+1}} = \lambda_t (-(1+x)(1+n)) + \lambda_{t+1} (r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)) = 0, \quad (3a.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{V_{jt+1}}} = \lambda_t (-(1+x)(1+n)) + \lambda_{t+1} (r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})) = 0. \quad (3a.4)$$

De (3a.2), se obtiene:

$$\lambda_t = \beta_d^t B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{-\sigma}, \quad (3a.5)$$

$$\lambda_{t+1} = \beta_d^{t+1} B_{t+1}^{1-\sigma} c_{jt+1}^{-\sigma}. \quad (3a.6)$$

Operando (3a.3):

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} = \frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)(1+n)}. \quad (3a.7)$$

Reemplazando (3a.5) y (3a.6) en (3a.7), tenemos la ecuación de Euler para el stock de capital físico:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_d^t B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{-\sigma}}{\beta_d^{t+1} B_{t+1}^{1-\sigma} c_{jt+1}^{-\sigma}} &= \frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)(1+n)}, \\ \left(\frac{\beta_d^t}{\beta_d^{t+1}} \right) \left(\frac{B_t}{B_{t+1}} \right)^{1-\sigma} \left(\frac{c_{jt}}{c_{jt+1}} \right)^{-\sigma} &= \frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)(1+n)}, \\ \left(\frac{1}{\beta_d} \right) \left(\frac{1}{1+x} \right)^{1-\sigma} \left(\frac{c_{jt}}{c_{jt+1}} \right)^{-\sigma} &= \frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)(1+n)}, \\ \left(\frac{c_{jt}}{c_{jt+1}} \right)^{-\sigma} &= \beta_d (1+x)^{1-\sigma} \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)(1+n)} \right], \end{aligned}$$

$$\left(\frac{c_{jt+1}}{c_{jt}}\right)^\sigma = \beta_d \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right].$$

Se obtiene así la primera ecuación de Euler:

$$\left(\frac{c_{jt+1}}{c_{jt}}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (3.17)$$

Operando (3a.4):

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} = \frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)}. \quad (3a.8)$$

Reemplazando (3a.5) y (3a.6) en (3a.8), tenemos la ecuación de Euler para el stock de infraestructura:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_d^t B_t^{1-\sigma} c_{jt}^{-\sigma}}{\beta_d^{t+1} B_{t+1}^{1-\sigma} c_{jt+1}^{-\sigma}} &= \frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)}, \\ \left(\frac{\beta_d^t}{\beta_d^{t+1}}\right) \left(\frac{B_t}{B_{t+1}}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{c_{jt}}{c_{jt+1}}\right)^{-\sigma} &= \frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)}, \\ \left(\frac{1}{\beta_d}\right) \left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{c_{jt}}{c_{jt+1}}\right)^{-\sigma} &= \frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)}, \\ \left(\frac{c_{jt}}{c_{jt+1}}\right)^{-\sigma} &= \beta_d (1+x)^{1-\sigma} \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)(1+n)} \right], \\ \left(\frac{c_{jt+1}}{c_{jt}}\right)^\sigma &= \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right]. \end{aligned}$$

Se obtiene la segunda ecuación de Euler:

$$\left(\frac{c_{jt+1}}{c_{jt}}\right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}. \quad (3.18)$$

Igualando ambas tasas de crecimiento, en equilibrio, se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K_{t+1}} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}} = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1-\delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\begin{aligned}
r_{K_{t+1}} + (1 - \delta_K) &= r_{FV_{t+1}} + (1 - \delta_{FV}), \\
r_{K_{t+1}} - \delta_K &= r_{FV_{t+1}} - \delta_{FV} = R_{t+1}.
\end{aligned}
\tag{3a.9}$$

Esta ecuación indica que en equilibrio ambas tasas de rendimiento, netas de sus depreciaciones, del capital e infraestructura público-privada, deben ser iguales, es decir, es el equilibrio entre tasas de rentabilidad real R_t . Si esto se cumple, las familias se mostrarán indiferentes en invertir en capital o infraestructura público-privada. Toda vez que haya desequilibrios de esta condición, estas oportunidades serán aprovechadas para invertir más en aquello que le rinda más, con la finalidad de obtener ganancias adicionales. Esta conducta lleva rápidamente al equilibrio, por lo tanto, el mismo mercado garantiza la condición anterior. Reemplazando la ecuación (3a.9) en (3.17) y (3.18) se obtiene la tasa de crecimiento del consumo de todas las familias:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) &= \left\{ \beta_d \left[\frac{1 + R_{t+1}}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \\
\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) - 1 &= \left\{ \beta_d \left[\frac{1 + R_{t+1}}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}} - 1.
\end{aligned}
\tag{3a.10}$$

Esta ecuación indica que el consumo en el periodo t depende inversamente de las rentabilidades futuras del capital e infraestructura público-privada. Si las familias pronostican que en el futuro se van a incrementar las rentabilidades, reducirán su consumo en el período actual con la finalidad de ahorrar y poder invertir más en el presente y así puedan tener un mayor stock de capital e infraestructura público-privada disponible en el futuro para ofrecer a las empresas, obteniendo así más ingresos y consumir más, con lo que la tasa de crecimiento del consumo se incrementa.

2.3 Derivación del estado estacionario

En esta sección se deriva el valor de estado estacionario de las variables del modelo. El subíndice ss indica que la variable se encuentra en el estado estacionario, es decir, no depende del tiempo.

Las empresas:

- De la función de producción, ecuación (3.6):

$$\begin{aligned}
y_t &= \bar{A}_t(k_t)^\alpha (fv_t)^\gamma \left(\frac{fb_t}{k_t}\right)^\beta, \\
y_{ss} &= \bar{A}_{ss}(k_{ss})^{\alpha-\beta} (fv_{ss})^\gamma fb_{ss}^\beta.
\end{aligned}
\tag{3a.11}$$

- De la demanda de capital, ecuación (3.7):

$$\begin{aligned}
k_t &= (1 - \tau)(\alpha) \frac{y_t}{r_{K,t}}, \\
(1 - \tau)(\alpha) \frac{y_{ss}}{k_{ss}} &= r_{K,ss}, \\
\frac{k_{ss}}{y_{ss}} &= (1 - \tau)\alpha \left(\frac{1}{r_{K,ss}}\right).
\end{aligned}
\tag{3a.12}$$

- De la demanda de infraestructura público-privada, ecuación (3.8):

$$\begin{aligned}
fv_t &= (1 - \tau)\gamma \frac{y_t}{r_{Fv,t}}, \\
(1 - \tau)\gamma \frac{y_{ss}}{fv_{ss}} &= r_{Fv,ss}, \\
\frac{fv_{ss}}{y_{ss}} &= (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{r_{Fv,ss}}\right).
\end{aligned}
\tag{3a.13}$$

- De la demanda de trabajo, ecuación (3.9):

$$\begin{aligned}
w_t &= (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)y_t B_t, \\
(1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)y_{ss} B_{ss} &= w_{ss}, \\
\frac{w_{ss}}{y_{ss}} &= (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)B_{ss}.
\end{aligned}
\tag{3a.14}$$

Las familias:

- De la ecuación de Euler, ecuación (3.19)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) &= \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K,t+1} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma (1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \\
\left(\frac{c_{ss}}{c_{ss}}\right) &= \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{K,ss} + (1-\delta_K)}{(1+x)^\sigma (1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}},
\end{aligned}$$

$$1 = \beta_d \left[\frac{r_{K_{SS}} + (1 - \delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right],$$

$$\frac{1}{\beta_d} = \frac{r_{K_{SS}} + (1 - \delta_K)}{(1+x)^\sigma(1+n)},$$

$$\frac{(1+x)^\sigma(1+n)}{\left(\frac{1}{1+\rho}\right)} - (1 - \delta_K) = r_{K_{SS}},$$

$$(1+x)^\sigma(1+n)(1+\rho) - (1 - \delta_K) = r_{K_{SS}}.$$

Entonces, la rentabilidad del stock de capital es:

$$r_{K_{SS}} = (1 + \rho)(1 + x)^\sigma(1 + n) - (1 - \delta_K). \quad (3a.15)$$

- De la Ecuación de Euler, ecuación (3.20):

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{t+1}} + (1 - \delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\left(\frac{c_{SS}}{c_{SS}} \right) = \left\{ \beta_d \left[\frac{r_{FV_{SS}} + (1 - \delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right] \right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$1 = \beta_d \left[\frac{r_{FV_{SS}} + (1 - \delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)} \right],$$

$$\frac{1}{\beta_d} = \frac{r_{FV_{SS}} + (1 - \delta_{FV})}{(1+x)^\sigma(1+n)}.$$

Entonces, despejando, la rentabilidad de la infraestructura público-privada es:

$$r_{FV_{SS}} = (1 + \rho)(1 + x)^\sigma(1 + n) - (1 - \delta_{FV}). \quad (3a.16)$$

- De la restricción presupuestaria, ecuación 3.25:

$$c_t + i_{K_t} + \theta i_{Ft_t} = \frac{W_t}{B_t} + r_{K_t} k_t + r_{FV_t} fV_t,$$

$$c_{SS} + i_{K_{SS}} + \theta i_{Ft_{SS}} = \frac{W_{SS}}{B_{SS}} + r_{K_{SS}} k_{SS} + r_{FV_{SS}} fV_{SS}. \quad (3a.17)$$

- De la evolución del stock de capital, ecuación 3.22:

$$(1 + x)(1 + n)k_{t+1} = (1 - \delta_K)k_t + i_{Kt}, \quad (3a.18)$$

$$(1 + x)(1 + n)k_{ss} = (1 - \delta_K)k_{ss} + i_{Kss},$$

$$(1 + x)(1 + n) = (1 - \delta_K) + \frac{i_{Kss}}{k_{ss}},$$

$$\frac{i_{Kss}}{k_{ss}} = (1 + x)(1 + n) - (1 - \delta_K), \quad (3a.19)$$

$$(1 + x)(1 + n)\frac{k_{ss}}{y_{ss}} = (1 - \delta_K)\frac{k_{ss}}{y_{ss}} + \frac{i_{Kss}}{y_{ss}},$$

$$\frac{i_{Kss}}{y_{ss}} = [(1 + x)(1 + n) - (1 - \delta_K)]\frac{k_{ss}}{y_{ss}}. \quad (3a.20)$$

- De la ecuación de evolución del stock de infraestructura público-privada, ecuación (3.23):

$$(1 + x)(1 + n)fv_{t+1} = (1 - \delta_{FV})fv_t + \theta i_{Ft_t},$$

$$(1 + x)(1 + n)fv_{ss} = (1 - \delta_{FV})fv_{ss} + \theta i_{Ft_{ss}},$$

$$\frac{\theta i_{Ft_{ss}}}{fv_{ss}} = (1 + x)(1 + n) - (1 - \delta_{FV}), \quad (3a.21)$$

$$(1 + x)(1 + n)\frac{fv_{ss}}{y_{ss}} = (1 - \delta_{FV})\frac{fv_{ss}}{y_{ss}} + \frac{\theta i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}},$$

$$\frac{\theta i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}} = [(1 + x)(1 + n) - (1 - \delta_{FV})]\frac{fv_{ss}}{y_{ss}}. \quad (3a.22)$$

El gobierno:

- De la restricción presupuestaria, ecuación (3.33):

$$g_t = \tau y_t - (1 - \theta)i_{Ft_t},$$

$$g_{ss} = \tau y_{ss} - (1 - \theta)i_{Ft_{ss}},$$

$$\frac{g_{ss}}{y_{ss}} = \tau \frac{y_{ss}}{y_{ss}} - \frac{(1 - \theta)i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}},$$

$$\frac{g_{ss}}{y_{ss}} = \tau - \frac{(1 - \theta)i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}}. \quad (3a.23)$$

- De la ecuación de evolución de la infraestructura pública, ecuación (3.23):

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+n)fb_{t+1} &= (1-\delta_{Fb})fb_t + (1-\theta)i_{Ft_t}, \\
(1+x)(1+n)fb_{ss} &= (1-\delta_{Fb})fb_{ss} + (1-\theta)i_{Ft_{ss}}, \\
(1+x)(1+n) &= (1-\delta_{Fb}) + (1-\theta)\frac{i_{Ft_{ss}}}{fb_{ss}}, \\
\frac{(1-\theta)i_{Ft_{ss}}}{fb_{ss}} &= (1+x)(1+n) - (1-\delta_{Fb}), \tag{3a.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+n)\frac{fb_{ss}}{y_{ss}} &= (1-\delta_{Fb})\frac{fb_{ss}}{y_{ss}} + (1-\theta)\frac{i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}}, \\
[(1+x)(1+n) - (1-\delta_{Fb})]\frac{fb_{ss}}{y_{ss}} &= (1-\theta)\frac{i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}}, \\
\frac{fb_{ss}}{y_{ss}} &= \left[\frac{1}{(1+x)(1+n) - (1-\delta_{Fb})} \right] (1-\theta)\frac{i_{Ft_{ss}}}{y_{ss}}. \tag{3a.25}
\end{aligned}$$

Equilibrio de mercado:

De la ecuación (3.34)

$$\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_{K_t} + i_{F_t} + g_t, \\
y_{ss} &= c_{ss} + i_{K_{ss}} + i_{F_{ss}} + g_{ss}, \\
\frac{y_{ss}}{y_{ss}} &= \frac{c_{ss}}{y_{ss}} + \frac{i_{K_{ss}}}{y_{ss}} + \frac{i_{F_{ss}}}{y_{ss}} + \frac{g_{ss}}{y_{ss}}, \\
\frac{c_{ss}}{y_{ss}} &= 1 - \frac{i_{K_{ss}}}{y_{ss}} - \frac{i_{F_{ss}}}{y_{ss}} - \frac{g_{ss}}{y_{ss}}. \tag{3a.26}
\end{aligned}$$

Shock de productividad:

De (3.35)

$$\begin{aligned}
\bar{A}_t &= e^{z_t}, \\
\bar{A}_{ss} &= e^{z_{ss}}, \\
\ln(\bar{A}_{ss}) &= z_{ss}. \tag{3a.27}
\end{aligned}$$

De (3.36)

$$\begin{aligned}
z_t &= p_z(z_{t-1}) - \epsilon_t, \\
z_{ss} &= p_z(z_{ss}); \epsilon_{ss} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$z_{SS} = 0 . \quad (3a.28)$$

Reemplazando (3a.15) en (3a.12):

$$\frac{k_{SS}}{y_{SS}} = (1 - \tau)\alpha \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right) . \quad (3a.29)$$

Reemplazando (3a.16) en (3a.13):

$$\frac{fv_{SS}}{y_{SS}} = (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) . \quad (3.30)$$

Dado que $B_t = B_0(1+x)^t$, entonces $B_{SS} = B_0(1+x)$. Reemplazando en (3a.14):

$$\frac{w_{SS}}{y_{SS}} = (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)B_0(1+x) . \quad (3a.31)$$

Reemplazando (3a.31) en (3a.20):

$$\frac{i_{K_{SS}}}{y_{SS}} = (1 - \tau)\alpha \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_K)}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right) . \quad (3a.32)$$

Reemplazando (3a.30) en (3a.22):

$$\begin{aligned} \frac{\theta i_{Ft_{SS}}}{y_{SS}} &= [(1+x)(1+n) - (1 - \delta_{FV})] \left\{ (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right\}, \\ \frac{\theta i_{Ft_{SS}}}{y_{SS}} &= (1 - \tau)\gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) . \end{aligned} \quad (3a.33)$$

Reemplazando (3a.33) en (3a.23):

$$\frac{g_{SS}}{y_{SS}} = \tau - \frac{(1-\theta)}{\theta} (1-\tau) \gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right). \quad (3a.34)$$

Reemplazando (3a.33) en (3a.25):

$$\begin{aligned} \frac{fb_{SS}}{y_{SS}} &= \left[\frac{1}{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})} \right] \frac{(1-\theta)}{\theta} (1-\tau) \gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right), \\ \frac{fb_{SS}}{y_{SS}} &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \left[\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})}{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})} \right] \left(\frac{(1-\tau) \gamma}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right). \end{aligned} \quad (3a.35)$$

Reemplazando (3a.32), (3a.33) y (3a.34) en (3a.26):

$$\frac{c_{SS}}{y_{SS}} = 1 - \frac{iK_{SS}}{y_{SS}} - \frac{iF_{SS}}{y_{SS}} - \frac{g_{SS}}{y_{SS}},$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{SS}}{y_{SS}} &= 1 - \left\{ (1-\tau) \alpha \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_K)}{(1+\rho)(1+x)(1+n)-(1-\delta_K)} \right) \right\} - \left\{ \frac{1}{\theta} (1-\tau) \gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right\}, \\ &\quad - \left\{ \tau - \frac{(1-\theta)}{\theta} (1-\tau) \gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{c_{SS}}{y_{SS}} = (1-\tau) - \left\{ (1-\tau) \alpha + \frac{1}{\theta} (1-\tau) \gamma - \frac{(1-\theta)}{\theta} (1-\tau) \gamma \right\} \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right),$$

$$\frac{c_{SS}}{y_{SS}} = (1-\tau) - (1-\tau) \left(\alpha + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1-\theta}{\theta} \right) \gamma \right) \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right),$$

$$\frac{c_{SS}}{y_{SS}} = (1-\tau) \left\{ 1 - (\alpha - \gamma) \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right\}. \quad (3a.36)$$

Reemplazando (3a.38) en (3a.27):

$$\ln(\bar{A}_{SS}) = 0. \quad (3a.37)$$

Por lo tanto:

$$\bar{A}_{ss} = 1 . \quad (3a.38)$$

Reemplazando (3a.38) en (3a.11):

$$y_{ss} = (k_{ss})^{\alpha-\beta} (fv_{ss})^\gamma fb_{ss}^\beta . \quad (3a.39)$$

Reemplazando (3a.29), (3a.30) y (3a.35) en (3a.39): PIB por trabajador efectivo

$$y_{ss} = (h_1 y_{ss})^{\alpha-\beta} (h_2 y_{ss})^\gamma (h_3 y_{ss})^\beta . \quad (3a.40)$$

Donde:

$$\begin{aligned} h_1 &= (1 - \tau)\alpha \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right), \\ h_2 &= (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right), \\ h_3 &= \frac{(1-\theta)}{\theta} \left[\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})}{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})} \right] \left(\frac{(1-\tau)\gamma}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{ss} &= h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta y_{ss}^{\alpha+\gamma}, \\ y_{ss}^{1-\alpha-\gamma} &= h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta, \\ y_{ss} &= \left(h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.29): stock de capital físico por trabajador efectivo

$$k_{ss} = (1 - \tau)\alpha \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_K)} \right) \left(h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.38)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.30): stock de infraestructura público-privada por trabajador efectivo.

$$f_{V_{SS}} = (1 - \tau)\gamma \left(\frac{1}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.39)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.31): remuneración al trabajo.

$$w_{SS} = (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)B_0(1 + x)(h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.40)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.32): inversión en capital por trabajador efectivo

$$i_{K_{SS}} = (1 - \tau)\alpha \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_K)}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.41)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.33): inversión en infraestructura público-privada por trabajador efectivo

$$i_{FV_{SS}} = \theta i_{Ft_{SS}} = (1 - \tau)\gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.42)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.34): gasto corriente de gobierno por trabajador efectivo

$$g_{SS} = \left[\tau - \frac{(1-\theta)}{\theta} (1 - \tau)\gamma \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{FV})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{FV})} \right) \right] (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.37) en (3a.35): infraestructura pública por trabajador efectivo

$$fb_{ss} = \frac{(1-\theta)}{\theta} \left[\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fv})}{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fb})} \right] \left(\frac{(1-\tau)\gamma}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{Fv})} \right) (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.44)$$

Reemplazando (3.37) en (3.36): consumo de las familias por trabajador efectivo

$$c_{ss} = (1-\tau) \left\{ 1 - (\alpha-\gamma) \left(\frac{(1+x)(1+n)-(1-\delta_{Fv})}{(1+\rho)(1+x)^\sigma(1+n)-(1-\delta_{Fv})} \right) \right\} (h_1^{\alpha-\beta} h_2^\gamma h_3^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\gamma}}. \quad (3.45)$$

Anexo N° 3: Derivaciones del Modelo de Economía Abierta

3.1 Las Familias: expresando las ecuaciones principales en términos de trabajador efectivo

A continuación se expresa las principales ecuaciones, que describe el comportamiento de las familias, en términos de trabajador efectivo (Dividiendo todo por BL_j):

- La función de utilidad intertemporal:

$$U = \int_0^\infty \left(\frac{\left(\frac{C_j}{L_j} \right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt,$$

$$U = \int_0^\infty \left(\frac{\left(\frac{BC_j}{BL_j} \right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt,$$

$$U = \int_0^\infty \left(\frac{(BC_j)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt, \quad (4.12)$$

donde $c = \frac{C_j}{BL_j}$ es el consumo por trabajador efectivo.

- La restricción presupuestaria de las familias:

$$C_j + S_j = wL_j + R_K K_j + R_{Fv} Fv_j,$$

$$\frac{C_j}{BL_j} + \frac{S_j}{BL_j} = \frac{wL_j}{BL_j} + R_K \frac{K_j}{BL_j} + R_{FV} \frac{FV_j}{BL_j},$$

$$c_j + s_j = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} f v_j. \quad (4.13)$$

- La ecuación de la ley de movimiento del stock de capital:

$$I_{K_j} = \dot{K}_j + \delta_K K_j,$$

$$\frac{I_{K_j}}{BL_j} = \frac{\dot{K}_j}{BL_j} + \delta_K \frac{K_j}{BL_j},$$

$$i_{K_j} = \frac{\dot{K}_j}{BL_j} + \delta_K k_j.$$

De la definición $k_j = \frac{K_j}{BL_j}$. Derivando:

$$\dot{k}_j = \frac{(BL_j)\dot{K}_j - K_j(BL_j + L_j\dot{B})}{(BL_j)^2} = \frac{(BL_j)\dot{K}}{(BL_j)^2} - \frac{K_j}{BL_j} \left(\frac{\dot{BL}_j}{BL_j} + \frac{L_j\dot{B}}{BL_j} \right) = \frac{\dot{K}_j}{BL_j} - k_j(n + x).$$

Por lo tanto:

$$\frac{\dot{K}_j}{BL_j} = \dot{k}_j + (n + x)k_j.$$

Al reemplazar este resultado en la ecuación anterior, tenemos:

$$i_{K_j} = \dot{k}_j + (n + x)k_j + \delta_K k_j,$$

$$i_{K_j} = \dot{k}_j + (n + x + \delta_K)k_j. \quad (4.14)$$

- La ecuación de la ley de movimiento de la infraestructura público-privada:

$$I_{FV_j} = \dot{FV}_j + \delta_{FV} FV_j,$$

$$\frac{I_{FV_j}}{BL_j} = \frac{\dot{FV}_j}{BL_j} + \delta_{FV} \frac{FV_j}{BL_j},$$

$$i_{FV_j} = \frac{\dot{FV}_j}{BL_j} + \delta_{FV} fV_j.$$

De la definición $fV_j = \frac{FV_j}{BL_j}$. Derivando:

$$\dot{fV}_j = \frac{(BL_j)\dot{FV}_j - FV_j(BL_j + L_j\dot{B})}{(BL_j)^2} = \frac{(BL_j)\dot{FV}_j}{(BL_j)^2} - \frac{FV_j}{BL_j} \left(\frac{\dot{BL}_j}{BL_j} + \frac{L_j\dot{B}}{BL_j} \right) = \frac{\dot{FV}_j}{BL_j} - fV_j(n + x).$$

Por lo tanto:

$$\frac{\dot{FV}_j}{BL_j} = \dot{fV}_j + (n + x)fV_j.$$

Al reemplazar este resultado en la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} i_{FV_j} &= \dot{fV}_j + (n + x)fV_j + \delta_{FV} fV_j, \\ i_{FV_j} &= \dot{fV}_j + (n + x + \delta_{FV})fV_j. \end{aligned} \tag{4.15}$$

- La ecuación del saldo de la deuda:

$$\begin{aligned} SD_{jt} &= (1 + r^*)SD_{jt-1} + D_{jt}, \\ SD_{jt} - SD_{jt-1} &= r^*SD_{jt-1} + D_{jt}. \end{aligned}$$

Expresando la ecuación anterior en tiempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{SD}_j &= r^*SD_j + D_j, \\ \frac{\dot{SD}_j}{BL_j} &= r^* \frac{SD_j}{BL_j} + \frac{D_j}{BL_j}, \\ \frac{\dot{SD}_j}{BL_j} &= r^*sd_j + d_j. \end{aligned}$$

De la definición $sd_j = \frac{SD_j}{BL_j}$. Derivando:

$$\dot{s}d_j = \frac{(BL_j)\dot{S}D_j - SD_j(\dot{B}L_j + L_j\dot{B})}{(BL_j)^2} = \frac{(BL_j)\dot{S}D}{(BL_j)^2} - \frac{SD_j}{BL_j} \left(\frac{\dot{B}L_j}{BL_j} + \frac{L_j\dot{B}}{BL_j} \right) = \frac{\dot{S}D_j}{BL_j} - sd_j(n + x).$$

Por lo tanto:

$$\frac{\dot{S}D_j}{BL_j} = \dot{s}d_j + (n + x)sd_j.$$

Al reemplazar este resultado en la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{s}d_j + (n + x)sd_j &= r^*sd_j + d_j, \\ \dot{s}d_j &= r^*sd_j + d_j - (n + x)sd_j, \\ \dot{s}d_j &= (r^* - n - x)sd_j + d_j. \end{aligned} \tag{4.19}$$

3.2 Teoría del Control Óptimo

Siguiendo al texto Chiang y Wainwright (Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 2006), supongamos que el problema tiene que ver con la maximización de ganancia para un periodo. Para cualquier periodo temporal t , tendremos que escoger el valor de alguna variable de control $u(t)$, que entonces afectará al valor de alguna variable de estado $z(t)$; así se forma la ecuación de movimiento. A su vez $z(t)$ determinará la ganancia $\pi(t)$. Como nuestro objetivo es maximizar la ganancia durante el periodo completo, la función objetivo debe adoptar la forma de una integral definida de π de $t=0$ a $t=T$. El enunciado anterior se puede expresar como un problema sencillo de control óptimo:

$$\text{Maximizar: } \pi = \int_0^T F(t, z, u)dt,$$

$$\text{Sujeto a: } \dot{z}_t = f(t, z, u).$$

Donde la primera ecuación es la función objetivo (maximizar la ganancia), una integral, cuyo integrando $F(t, z, u)$ indica la forma en que afectará la elección de la variable de control u para el tiempo t , junto con la z resultante para el período t .

La segunda ecuación es la ecuación de movimiento. Suministra el mecanismo mediante el cual nuestra elección de la variable de control u puede traducirse a un patrón específico de movimiento de la variable de estado z .

En este problema hay tres variables: el tiempo t , la variable de estado z y la variable de control u . Introduciremos una nueva variable, conocida como la variable de coestado, y denotamos como $\lambda(t)$, al igual que el multiplicador de Lagrange, la variable de coestado mide el precio sombra de la variable de estado.

El Hamiltoniano

La variable de coestado se introduce en el problema de control óptimo vía una función hamiltoniano (abreviada como hamiltoniano). El hamiltoniano se define como:

$$H(t, z, u, \lambda) = F(t, z, u) + \lambda(t)f(t, z, u),$$

donde H denota el hamiltoniano y es una función de cuatro variables: t , z , u y λ .

El principio del máximo

El principio del máximo es una herramienta principal para la solución de problemas de control óptimo, es una condición necesaria de primer orden.

Primero: requiere que escojamos la variable de control u de modo que maximice al hamiltoniano H para todos los instantes de tiempo. Es decir:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Segundo: como H implica que a la variable de estado z y a la variable de coestado λ , el enunciado del principio del máximo estipula que la forma en que z y λ deben cambiar respecto al tiempo, por medio de la ecuación de movimiento para la variable de estado z (abreviada como ecuación de estado), y la ecuación de movimiento de la variable de coestado λ (abreviada como ecuación de coestado), es la siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial z} &= -\dot{\lambda}, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= -\dot{z}.\end{aligned}$$

En el presente trabajo, el problema de las familias es maximizar su utilidad intertemporal sujeto a su restricción. La variable de control es el consumo $c(t)$, la variable de estado es la infraestructura público-privada $fv(t)$, la variable de coestado es $\lambda(t)$ y la variable temporal, t . La variable de control es el consumo porque son las decisiones de consumo que determinan el nivel de ahorro de las familias, y este ahorro determinará el nivel de inversión en infraestructura público-privada. Por lo tanto, las decisiones de consumo determinan la evolución de la infraestructura público-privada en el tiempo. Éste es un problema de control óptimo.

3.3 Demostración de la Proposición 4.2

A continuación se procede a demostrar las ecuaciones anteriores:

Reemplazando (4.14) y (4.15) en (4.21), tenemos la ecuación que resume las restricciones antes expuestas:

$$\begin{aligned} c_j + \dot{k}_j + (n + x + \delta_K)k_j + \dot{fv}_j + (n + x + \delta_{FV})fv_j - [\dot{sd}_j + (n + x)sd_j] \\ = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} fv_j - r^* sd_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{k}_j + \dot{fv}_j - \dot{sd}_j \\ = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} fv_j - r^* sd_j - (n + x + \delta_K)k_j - (n + x + \delta_{FV})fv_j + (n + x)sd_j - c_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{k}_j + \dot{fv}_j - \dot{sd}_j \\ = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} fv_j - (r^* - n - x)sd_j - (n + x + \delta_K)k_j - (n + x + \delta_{FV})fv_j - c_j, \end{aligned}$$

(4a.1)

Reemplazando la restricción de financiamiento, (4.25) y (4.26) en (4a.1), tenemos la restricción a la que se enfrentan las familias:

$$\begin{aligned} \dot{k}_j + \dot{fv}_j - \dot{k}_j \\ = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} fv_j - (r^* - n - x)k_j - (n + x + \delta_K)k_j - (n + x + \delta_{FV})fv_j - c_j, \end{aligned}$$

$$\dot{f}v_j = \frac{w}{B} + R_K k_j + R_{FV} f v_j - (r^* + \delta_K) k_j - (n + x + \delta_{FV}) f v_j - c_j. \quad (4a.2)$$

Ahora, reemplazando las ecuaciones que representan la demanda óptima de factores por parte de la empresa i : la ecuación del salario, la demanda de capital y la demanda de infraestructura público-privada; en (4a.2), tenemos la restricción que interioriza las demandas óptimas de los factores de producción:

$$\begin{aligned} \dot{f}v_j &= (1 - \tau)(1 - \alpha - \gamma)y_i + (1 - \tau)\alpha y_i + (1 - \tau)\gamma y_i - (r^* + \delta_K)k_j \\ &\quad - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j, \\ \dot{f}v_j &= (1 - \tau)y_i - (r^* + \delta_K)k_j - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j. \end{aligned} \quad (4a.3)$$

Dado que $R_K = r_K + \delta$ y $r_K = r^*$; entonces, de la ecuación (4.3):

$$\begin{aligned} k_i &= (1 - \tau)\alpha \frac{y_i}{R_K}, \\ k_i &= (1 - \tau)\alpha \frac{y_i}{r_K + \delta_K}, \\ k_i &= (1 - \tau) \left(\frac{\alpha}{r^* + \delta_K} \right) y_i. \end{aligned} \quad (4a.4)$$

Reemplazando (4a.4) en (4a.3) y dado que $f v_i = f v_j$, expresamos $f v$ en función de “ j ”:

$$\begin{aligned} \dot{f}v_j &= (1 - \tau)y_i - (r^* + \delta_K)(1 - \tau) \left(\frac{\alpha}{r^* + \delta_K} \right) y_i - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j, \\ \dot{f}v_j &= (1 - \tau)(1 - \alpha)y_i - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j. \end{aligned} \quad (4a.5)$$

Respecto a la función de producción, reemplazando (4.3) en la función de producción (4.1) y dado que $f v_i = f v_j$, expresamos $f v$ en función de “ j ”:

$$\begin{aligned} y_i &= \bar{A} \left(\left(\frac{(1-\tau)\alpha}{r^* + \delta_K} \right) y_i \right)^\alpha f v_j^\gamma \left(\frac{fb}{k} \right)^\beta, \\ y_i &= \bar{A} \left(\frac{(1-\tau)\alpha}{r^* + \delta_K} \right)^\alpha y_i^\alpha f v_j^\gamma \left(\frac{fb}{k} \right)^\beta, \\ y_i^{1-\alpha} &= \bar{A} \left(\frac{(1-\tau)\alpha}{r^* + \delta_K} \right)^\alpha f v_j^\gamma \left(\frac{fb}{k} \right)^\beta, \\ y_i &= \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{(1-\tau)\alpha}{r^* + \delta_K} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} f v_j^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \left(\frac{fb}{k} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

$$y_i = \bar{A} f v_j^\varphi \left(\frac{fb}{k} \right)^\eta. \quad (4a.6)$$

Donde $\bar{A} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{(1-\tau)\alpha}{r^* + \delta_K} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, $\varphi = \frac{\gamma}{1-\alpha}$ y $\eta = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Por último reemplazamos y_i , ecuación (4a.6), en (4a.5). En esta ecuación está presente la externalidad positiva de la infraestructura pública fb y se comporta como una constante para la acumulación de la infraestructura público-privada de la familia j :

$$\dot{f}v_j = (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}f v_j^\varphi \left(\frac{fb}{k} \right)^\eta - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j. \quad (4.30)$$

Por lo tanto, el problema de la familia "j", que es maximizar su utilidad intertemporal sujeto a la restricción anterior, es un problema de control óptimo, donde la variable de control es el consumo $c_j(t)$, la variable de estado es la infraestructura público-privada $f v_j(t)$, la variable de coestado es $\lambda(t)$ y la variable temporal, t :

$$\text{Maximizar } U = \int_0^\infty \left(\frac{(Bc_j)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right) e^{-(\rho-n)t} dt,$$

Sujeto a:

$$\dot{f}v_j = (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}f v_j^\varphi \left(\frac{fb}{k} \right)^\eta - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j.$$

La variable de control es el consumo porque son las decisiones de consumo que determinan el nivel de ahorro de las familias, y este ahorro determinará el nivel de inversión en infraestructura público privada. Por lo tanto las decisiones de consumo determinan la evolución de la infraestructura público-privada en el tiempo. Para resolver el problema de maximización, se formula el Hamiltoniano²²:

$$H = \left[\frac{(Bc_j)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right] e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t) \left[(1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}f v_j^\varphi \left(\frac{fb}{k} \right)^\eta - (n + x + \delta_{FV})f v_j - c_j \right]. \quad (4a.7)$$

²² El Hamiltoniano es una función que es afín a la función lagrangiana y a la variable multiplicadora de Lagrange en tiempo discreto. Para los problemas de control óptimo, tiempo continuo, éstas se conocen como la función hamiltoniana y la variable de coestado. Para mayor detalle, ver Anexo N° 3.

Las condiciones de maximización²³ son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = B^{1-\sigma} c_j^{-\sigma} e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t)(-1) = 0, \quad (4a.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial f_{V_j}} = \lambda(t) \left[(1-\tau)(1-\alpha)(\varphi-1)\bar{A}f_{V_j}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\beta} - (n+x+\delta_{FV}) \right] = -\dot{\lambda}(t). \quad (4a.9)$$

De (4a.8):

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= B^{1-\sigma} c_j^{-\sigma} e^{-(\rho-n)t}, \\ \ln \lambda(t) &= (1-\sigma)\ln B - \sigma \ln c_j - (\rho-n)t, \\ \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} &= (1-\sigma)\frac{\dot{B}}{B} - \sigma \frac{\dot{c}_j}{c_j} - (\rho-n), \\ \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} &= (1-\sigma)x - \sigma \frac{\dot{c}_j}{c_j} - (\rho-n). \end{aligned} \quad (4a.10)$$

De (4a.9):

$$(1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}f_{V_j}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\eta} - (n+x+\delta_{FV}) = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}. \quad (4a.11)$$

Reemplazando (4a.10) en (4a.11):

$$\begin{aligned} (1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}f_{V_j}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\eta} - (n+x+\delta_{FV}) &= -(1-\sigma)x + \sigma \frac{\dot{c}_j}{c_j} + (\rho-n), \\ (1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}f_{V_j}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\eta} &= \rho + \sigma x + \delta_{FV} + \sigma \frac{\dot{c}_j}{c_j}, \\ \frac{\dot{c}_j}{c_j} &= \frac{1}{\sigma} \left[(1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}f_{V_j}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\eta} - (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Esta ecuación es la ecuación de Euler²⁴, indica que la tasa de crecimiento del consumo será positiva siempre y cuando la tasa de rendimiento neto de impuestos $(1-\tau)(1-$

²³ El principio del máximo es una herramienta principal para la solución de problemas de control óptimo, es una condición necesaria de primer orden. Para mayor detalle, ver Anexo N° 3.

²⁴ La ecuación de Euler es la ecuación que describe la senda intertemporal del consumo, por lo tanto, al hablar de intertemporalidad (relación encadenada de los períodos) se habla de la evolución de la tasa de crecimiento del consumo, y esta ecuación indica sus determinantes.

$\alpha)\varphi\bar{A}f v_j^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta$ sea mayor que la suma de la preferencia intertemporal de las familias, la tasa ponderada del crecimiento de la tecnología y la tasa de depreciación. Reordenando esta ecuación:

$$\begin{aligned}\sigma \frac{\dot{c}_j}{c_j} &= (1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}f v_j^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (\rho + \sigma x + \delta_{FV}), \\ (1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}f v_j^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta &= \rho + \delta_{FV} + \sigma \left(\frac{\dot{c}_j}{c_j} + x\right), \\ (1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}f v_j^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta &= \rho + \delta_{FV} + \sigma \left[\frac{\left(\frac{\dot{c}_j}{L_j}\right)}{\left(\frac{c_j}{L_j}\right)} \right].\end{aligned}\quad (4a.12)$$

Indica que la tasa de rendimiento, neto de impuestos, $(1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}f v_j^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta$ es determinado a la tasa de preferencia intertemporal de las familias más la tasa de depreciación, la tasa de depreciación de la infraestructura público-privada y la tasa de disminución de la utilidad marginal del consumo debida al incremento del consumo per cápita $\left(\frac{\dot{c}_j}{L_j}\right)$.

3.4 El Gobierno: expresando las principales ecuaciones en términos de trabajador efectivo

Expresando en términos de trabajador efectivo (dividiendo entre BL):

$$i_{Fb} = \frac{Fb}{BL} + \delta_{Fb} fb .$$

De la definición $fb = \frac{Fb}{BL}$. Derivando:

$$\dot{fb} = \frac{(BL)\dot{Fb} - Fb(B\dot{L} + L\dot{B})}{(BL)^2} = \frac{(BL)\dot{Fb}}{(BL)^2} - \frac{Fb}{BL} \left(\frac{B\dot{L}}{BL} + \frac{L\dot{B}}{BL} \right) = \frac{\dot{Fb}}{BL} - fb(n + x) .$$

Por lo tanto:

$$\frac{Fb}{BL} = fb + (n + x)fb.$$

Al reemplazar este resultado en la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} i_{Fb} &= \dot{fb} + (n + x)fb + \delta_{Fb}fb, \\ i_{Fb} &= \dot{fb} + (n + x + \delta_{Fb})fb. \end{aligned} \quad (4.34)$$

3.5 Derivación del estado estacionario de las principales variables del modelo

El estado estacionario es aquella situación donde las diversas variables absolutas crecen a tasas constantes y las variables relativas (medidas en términos per cápita) muestran crecimiento nulo.

- Derivando el consumo de estado estacionario:

Partiendo de la ecuación (4.30), es la siguiente:

$$\frac{\dot{fv}_j}{fv_j} = (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}fv_j^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (n + x + \delta_{Fv}) - \frac{c_j}{fv_j}. \quad (4a.13)$$

En este modelo, el estado estacionario corresponde a $\frac{\dot{fv}_j}{fv_j} = 0$, esto implica que la variable en niveles Fv crece a una tasa constante²⁵ $\frac{\dot{Fv}_j}{Fv_j} = (x + n)$. Entonces, si

²⁵ De la definición $fv_j = \frac{Fv_j}{BL_j}$. Aplicando logaritmos:

$$\begin{aligned} \ln(fv_j) &= \ln(Fv_j) - \ln(BL_j) \\ \ln(\dot{fv}_j) &= \ln(\dot{Fv}_j) - \ln(B) - \ln(L_j) \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{fv}_j}{fv_j} &= \frac{\dot{Fv}_j}{Fv_j} - \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{L}_j}{L_j} \\ \frac{\dot{fv}_j}{fv_j} &= \frac{\dot{Fv}_j}{Fv_j} - x - n \end{aligned}$$

En el estado estacionario $\frac{\dot{fv}_j}{fv_j} = 0$. Entonces la variable en niveles crece a:

$$\frac{\dot{Fv}_j}{Fv_j} = x + n$$

reemplazamos $\frac{\dot{f}_{Vj}}{f_{Vj}} = 0$ en la ecuación (4a.13), se obtiene la relación de largo plazo entre consumo e infraestructura público-privada:

$$\begin{aligned}\frac{c_j^*}{f_{Vj}^*} &= (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}f_{Vj}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (n + x + \delta_{FV}), \\ c_j^* &= (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}f_{Vj}^*{}^\varphi \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - [n + x + \delta_{FV}]f_{Vj}^*.\end{aligned}\quad (4.36)$$

- Derivando la infraestructura público-privada de estado estacionario:

De la ecuación (4.31):

$$\frac{\dot{c}_j}{c_j} = \frac{1}{\sigma} \left[(1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}f_{Vj}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \right]. \quad (4a.14)$$

De igual manera, para esta ecuación, el estado estacionario corresponde a $\frac{\dot{c}_j}{c_j} = 0$, esto implica que la variable en niveles C_j crece a $\frac{\dot{c}_j}{c_j} = (x + n)$. Reemplazando $\frac{\dot{c}_j}{c_j} = 0$ en (4a.14), se tiene la infraestructura público-privada de estado estacionario:

$$\begin{aligned}(1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}f_{Vj}^{\varphi-1} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta &= \rho + \sigma x + \delta_{FV}, \\ \frac{(1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}\left(\frac{fb}{k}\right)^\eta}{\rho + \sigma x + \delta_{FV}} &= f_{Vj}^{1-\varphi}, \\ f_{Vj}^* &= \left[\frac{(1-\tau)(1-\alpha)\varphi\bar{A}\left(\frac{fb}{k}\right)^\eta}{\rho + \sigma x + \delta_{FV}} \right]^{\frac{1}{1-\varphi}}.\end{aligned}\quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) indica que la infraestructura público-privada en el estado estacionario está determinada por los parámetros estructurales de la economía y la externalidad de la infraestructura pública fb que está dado para la familia j .

- Derivando el PIB de estado estacionario:

Reemplazando la infraestructura pública privada por trabajador efectivo de estado estacionario, ecuación (4.37), en la función de producción, ecuación (4a.6), tenemos:

$$\begin{aligned}
y_i &= \bar{A} \left[\frac{(1-\tau)(1-\alpha)\varphi \bar{A} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta}{\rho + \sigma x + \delta_{FV}} \right]^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta, \\
y_i &= \bar{A}^{\frac{1}{1-\varphi}} \left[\frac{(1-\tau)(1-\alpha)\varphi}{\rho + \sigma x + \delta_{FV}} \right]^{\frac{\varphi}{1-\varphi}} \left(\frac{fb}{k}\right)^{\frac{\eta}{1-\varphi}}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Se obtiene así, la producción por trabajador efectivo en estado estacionario que depende de los parámetros estructurales de la economía y del nivel de tecnología y la externalidad sujeta a congestión.

3.6 Derivación de la velocidad de convergencia del modelo

3.6.1 Linealización logarítmica del sistema (modelo)

Linealización logarítmica de la ecuación de restricción de la economía

Expresando la ecuación (4.30) en logaritmos²⁶:

$$\frac{d(\log fv_j)}{dt} = (1-\tau)(1-\alpha)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (n+x+\delta_{FV}) - e^{[\log(c_j)-\log(fv_j)]}. \tag{4a.15}$$

Linealización logarítmica de la ecuación de Euler

Expresando la ecuación (4.31) en logaritmos:

$$\frac{d(\log c_j)}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left\{ (1-\tau)(1-\alpha)\varphi \bar{A} e^{(\varphi-1)\log(fv_j)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \right\}. \tag{4a.16}$$

²⁶ Recordando que $X = e^{\log X}$

3.6.2 El estado estacionario de las variables logarítmicas y la ecuación de relación.

De la ecuación de restricción de la economía

De la ecuación (4a.15), en el estado estacionario se cumple $\frac{d(\log fv_j)}{dt} = 0$; entonces:

$$(1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (n + x + \delta_{FV}) - e^{[\log(c_j) - \log(fv_j)]} = 0 ,$$
$$e^{[\log(c_j^*) - \log(fv_j^*)]} = (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (n + x + \delta_{FV}). \quad (4a.17)$$

De la ecuación de Euler

De la ecuación (4a.16), en estado estacionario se cumple $\frac{d(\log c_j)}{dt} = 0$; entonces:

$$(1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta = \rho + \sigma x + \delta_{FV} , \quad (4a.18)$$

$$(1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta = \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} . \quad (4a.19)$$

Reemplazando (4a.19) en (4a.17), tenemos la ecuación logarítmica que relaciona el consumo y la infraestructura público-privada en el largo plazo (estado estacionario):

$$e^{[\log(c_j^*) - \log(fv_j^*)]} = \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV}) . \quad (4a.20)$$

3.6.3 Aproximación logarítmica al estado estacionario

Aproximación logarítmica de la ecuación de restricción de la economía

Expandiendo la ecuación (4a.15) mediante una aproximación de Taylor de 1er orden alrededor del estado estacionario²⁷:

²⁷ La aproximación de Taylor de primer orden de una función $f(x)$ son las siguientes:

$$\frac{d(\log fv_j)}{dt} = \frac{d(\log fv_j^*)}{dt} + \frac{d\left(\frac{d(\log fv_j^*)}{dt}\right)}{d(\log fv_j)} (\log fv_j - \log fv_j^*) + \frac{d\left(\frac{d(\log fv_j^*)}{dt}\right)}{d(\log c_j)} (\log c_j - \log c_j^*), \quad (4a.21)$$

donde:

- $\frac{d(\log fv_j^*)}{dt}$ es la ecuación (4a.15) en su valor de estado estacionario:

$$\frac{d(\log fv_j^*)}{dt} = (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (n + x + \delta_{FV}) - e^{[\log(c_j^*) - \log(fv_j^*)]}. \quad (4a.22)$$

Sustituyendo los valores de estado estacionario (4a.19) y (4a.20):

$$\begin{aligned} &= \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV}) - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} + (n + x + \delta_{FV}), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4a.23)$$

- $\frac{d\left(\frac{d(\log fv_j^*)}{dt}\right)}{d(\log fv_j)}$ se obtiene derivando la ecuación (4a.15) respecto al logaritmo de fv_j :

$$\begin{aligned} &= (1 - \tau)(1 - \alpha)(\varphi - 1)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta + e^{[\log(c_j) - \log(fv_j)]}, \\ &= (1 - \tau)(1 - \alpha)\varphi\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta - (1 - \tau)(1 - \alpha)\bar{A}e^{(\varphi-1)\log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k}\right)^\eta + e^{[\log(c_j^*) - \log(fv_j^*)]}. \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de estado estacionario (4a.18), (4a.19) y (4a.20) en la ecuación anterior:

$$= \rho + \sigma x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} + \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV}),$$

-
- Caso univariado: $f(x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx} [x - x^*] + q_1$
 - Caso bivariado: $f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{df(x^*, y^*)}{dx} [x - x^*] + \frac{df(x^*, y^*)}{dy} [y - y^*] + q_1$

Donde x^* e y^* corresponden a los valores de x e y en el estado estacionario.

$$= \rho + (\sigma - 1)x - n . \quad (4a.24)$$

- $\frac{d\left(\frac{d(\log fv_j^*)}{dt}\right)}{d(\log c_j)}$, de igual forma, derivando la ecuación (4a.15) respecto al logaritmo de c_j , se tiene:

$$= -e^{[\log(c_j) - \log(fv_j)]} .$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (4a.20):

$$\begin{aligned} &= - \left[\frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV}) \right] , \\ &= (n + x + \delta_{FV}) - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} . \end{aligned} \quad (4a.25)$$

Finalmente, reemplazando estos valores de estado estacionario (4a.23), (4a.24) Y (4a.25) en la ecuación (4a.21), se tiene la aproximación logarítmica al estado estacionario de la restricción de la economía:

$$\frac{d(\log fv_j)}{dt} = [\rho + (\sigma - 1)x - n](\log fv_j - \log fv_j^*) + \left[(n + x + \delta_{FV}) - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} \right] (\log c_j - \log c_j^*) . \quad (4a.26)$$

Aproximación logarítmica de la ecuación de Euler

Ahora se expande la ecuación del consumo (4a.16) mediante la aproximación de Taylor de 1er orden alrededor del estado estacionario:

$$\frac{d(\log c_j)}{dt} = \frac{d(\log c_j^*)}{dt} + \frac{d\left(\frac{d(\log c_j^*)}{dt}\right)}{d(\log fv)} (\log fv_j - \log fv_j^*) + \frac{d\left(\frac{d(\log c_j^*)}{dt}\right)}{d(\log c_j)} (\log c_j - \log c_j^*) , \quad (4a.27)$$

donde:

- $\frac{d(\log c_j^*)}{dt}$ es la ecuación (4a.16) en su valor de estado estacionario:

$$\frac{d(\log c_j^*)}{dt} = \frac{1}{\sigma} \left[(1 - \tau)(1 - \alpha) \varphi \bar{A} e^{(\varphi-1) \log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k} \right)^\eta - (\rho + \sigma_X + \delta_{FV}) \right].$$

Reemplazando los valores de estado estacionario hallados en (4a.18):

$$\frac{d(\log c_j^*)}{dt} = \frac{1}{\sigma} [\rho + \sigma_X + \delta_{FV} - (\rho + \sigma_X + \delta_{FV})],$$

$$\frac{d(\log c_j^*)}{dt} = 0. \quad (4a.28)$$

- $\frac{d\left(\frac{d(\log c_j^*)}{dt}\right)}{d(\log fv)}$ se obtiene derivando la ecuación (4a.16) respecto al logaritmo de fv_j :

$$= \frac{1}{\sigma} \left[(1 - \tau)(1 - \alpha) \varphi (\varphi - 1) \bar{A} e^{(\varphi-1) \log(fv_j^*)} \left(\frac{fb}{k} \right)^\eta \right].$$

Reemplazando su valor de estado estacionario dado en (4a.18):

$$= \left(\frac{\varphi-1}{\sigma} \right) (\rho + \sigma_X + \delta_{FV}). \quad (4a.29)$$

- $\frac{d\left(\frac{d(\log c_j^*)}{dt}\right)}{d(\log c_j)}$, esta derivada es igual a cero debido a que la ecuación (4a.16) no depende del logaritmo del consumo:

$$\frac{d\left(\frac{d(\log c_j^*)}{dt}\right)}{d(\log c_j)} = 0. \quad (4a.30)$$

Ahora, sustituyendo los valores de estado estacionario (4a.28), (4a.29) y (4a.30) en la ecuación (4a.27), se tiene la aproximación logarítmica al estado estacionario de la ecuación de Euler:

$$\frac{d(\log c_j)}{dt} = 0 + \left\{ \frac{(\varphi-1)}{\sigma} (\rho + \sigma_X + \delta_{FV}) \right\} (\log fv_j - \log fv_j^*) + 0(\log c_j - \log c_j^*),$$

$$\frac{d(\log c_j)}{dt} = \left[\frac{(\varphi-1)}{\sigma} (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \right] (\log fv_j - \log fv_j^*). \quad (4a.31)$$

3.6.4 Calculando los autovalores del sistema de aproximaciones logarítmicas al estado estacionario.

Las ecuaciones (4a.26) y (4a.31) conforman el sistema que describe la aproximación logarítmica al estado estacionario del modelo en conjunto. A continuación expresaremos este sistema en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d(\log fv_j)}{dt} \\ \frac{d(\log c_j)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho + (\sigma - 1)x - n & n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} \\ \left(\frac{\varphi-1}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\log fv - \log fv^*) \\ (\log c - \log c^*) \end{bmatrix}, \quad (4a.32)$$

donde la matriz de orden 2x2 es la matriz característica, M , cuyo determinante es igual a

$$- \left[\left(\frac{\varphi-1}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} \right) \right] < 0.$$

Este determinante es negativo, esto quiere decir que los autovalores del sistema tienen signos opuestos; por lo tanto existe una trayectoria estable de punto silla. Para calcular los autovalores, λ , del sistema utilizamos la siguiente condición matemática:

$$\det(M - \lambda I) = 0. \quad (4a.33)$$

Donde M es la matriz característica, λ es la variable de autovalores que queremos hallar e I es una matriz identidad de orden²⁸ 2x2. La condición matemática para encontrar los autovalores indica que el determinante de la matriz $(M - \lambda I)$ tiene que ser igual a cero. A continuación reemplazamos cada uno de estos componentes en la condición (4a.29):

$$\det \left(\begin{bmatrix} \rho + (\sigma - 1)x - n & n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} \\ \left(\frac{\varphi-1}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

²⁸ El orden de esta matriz identidad I tiene que ser necesariamente igual al orden de la M , en caso contrario no se podría hacer la operación.

$$\det \begin{pmatrix} \rho + (\sigma - 1)x - n - \lambda & n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} \\ \left(\frac{\varphi - 1}{\sigma}\right) [\rho + \sigma x + \delta_{FV}] & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$[\rho + (\sigma - 1)x - n - \lambda][-\lambda] - \left[\left(\frac{\varphi - 1}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV})\right] \left[n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi}\right] = 0,$$

$$\lambda^2 - [\rho + (\sigma - 1)x - n]\lambda - \left(\left(\frac{\varphi - 1}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV})\right) \left(n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi}\right) = 0.$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-[-(\rho + (\sigma - 1)x - n)] \pm \sqrt{[-(\rho + (\sigma - 1)x - n)]^2 - 4(1) \left[-\left(\frac{\varphi - 1}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi}\right)\right]}}{2(1)},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho + (\sigma - 1)x - n \pm \sqrt{(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 - 4\left(\frac{1 - \varphi}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(n + x + \delta_{FV} - \frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi}\right)}}{2},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho + (\sigma - 1)x - n \pm \sqrt{(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4\left(\frac{1 - \varphi}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV})\right)}}{2},$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho + (\sigma - 1)x - n + \left[(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4\left(\frac{1 - \varphi}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV})\right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2} > 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho + (\sigma - 1)x - n - \left[(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4\left(\frac{1 - \varphi}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV})\right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2} < 0. \quad (4a.34)$$

3.6.5 El beta convergencia

Donde el negativo de λ_2 es la velocidad de convergencia β_{ss} :

$$\beta_{ss} = -\lambda_2,$$

$$\beta_{ss} = \frac{-\rho + (\sigma - 1)x - n + \left[(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4\left(\frac{1 - \varphi}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV})\right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Si pasamos a multiplicar denominador al lado izquierdo de la ecuación, tenemos:

$$2\beta_{ss} = -\rho + (\sigma - 1)x - n + \left[(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4\left(\frac{1 - \varphi}{\sigma}\right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{\rho + \sigma x + \delta_{FV}}{\varphi} - (n + x + \delta_{FV})\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Reemplazando $\varphi = \frac{\gamma}{1-\alpha}$:

$$2\beta_{ss} = -(\rho + (\sigma - 1)x - n) + \left[(\rho + (\sigma - 1)x - n)^2 + 4 \left(\frac{1}{\sigma} \right) \left(1 - \frac{\gamma}{1-\alpha} \right) (\rho + \sigma x + \delta_{FV}) \left(\frac{(1-\alpha)(\rho + \sigma x + \delta_{FV})}{\gamma} - (n + x + \delta_{FV}) \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.40)$$

Esta velocidad de convergencia β_{ss} depende de los parámetros estructurales de la economía: las preferencias de las familias, la tecnología, la depreciación, la tasa de recaudación por el uso de infraestructura pública y de la tasa de interés externa.

3.7 Solución log-lineal del modelo

3.7.1 Trayectoria temporal de la infraestructura público-privada

La solución log-linealizada para $\log(fv)$ es la siguiente:

$$\log(fv(t)) = \log(fv^*) + \psi_1 e^{\lambda_1 t} + \psi_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4.41)$$

donde $\log(fv^*)$ es la solución particular, representa su valor de largo plazo (el estado estacionario); $\psi_1 e^{\lambda_1 t}$ y $\psi_2 e^{\lambda_2 t}$ son las soluciones complementarias que representan el desvío respecto al equilibrio de largo plazo, ψ_1 y ψ_2 son constantes de integración arbitrarias. Para que $\log(fv(t))$ converja a su estado estacionario $\log(fv^*)$ es necesario que la constante de integración ψ_1 sea igual a cero, dado que $\lambda_1 > 0$; la constante ψ_2 , con $\lambda_2 < 0$, es la asociada a la senda estable y la podemos calcular a partir de la condición inicial:

$$\psi_2 = \log(fv(0)) - \log(fv^*). \quad (4a.35)$$

Reemplazando estas condiciones en la ecuación (4.41), y dado $-\beta_{ss} = \lambda_2$; tenemos:

$$\begin{aligned} \log(fv(t)) &= \log(fv^*) + [\log(fv(0)) - \log(fv^*)] e^{-\beta_{ss} t}, \\ \log(fv(t)) &= \log(fv^*) + \log(fv(0)) e^{-\beta_{ss} t} - \log(fv^*) e^{-\beta_{ss} t}, \\ \log(fv(t)) &= e^{-\beta_{ss} t} \log(fv(0)) + (1 - e^{-\beta_{ss} t}) \log(fv^*). \end{aligned} \quad (4.42)$$

3.7.2 Trayectoria temporal del PIB per-cápita

Y la trayectoria temporal para el PIB vendría dado por la siguiente ecuación:

$$\log(y(t)) = e^{-\beta_{ss} t} \log(y(0)) + (1 - e^{-\beta_{ss} t}) \log(y^*). \quad (4.43)$$

Anexo N° 4: Resultados numéricos de la convergencia a brecha cero en infraestructura

Anexo N° 4. 1: Tabla de resultados numéricos de la convergencia a brecha cero en infraestructura

t	Año	log(fv(t))	log(fv*)	fv(t)	fv*
0	2012	1.8699	3.4667	74	2929
1	2013	2.1862	3.4667	154	2929
2	2014	2.4399	3.4667	275	2929
3	2015	2.6433	3.4667	440	2929
4	2016	2.8064	3.4667	640	2929
5	2017	2.9372	3.4667	865	2929
6	2018	3.0421	3.4667	1102	2929
7	2019	3.1262	3.4667	1337	2929
8	2020	3.1937	3.4667	1562	2929
9	2021	3.2478	3.4667	1769	2929
10	2022	3.2912	3.4667	1955	2929
11	2023	3.3259	3.4667	2118	2929
12	2024	3.3538	3.4667	2259	2929
13	2025	3.3762	3.4667	2378	2929
14	2026	3.3941	3.4667	2478	2929
15	2027	3.4085	3.4667	2562	2929
16	2028	3.4201	3.4667	2631	2929
17	2029	3.4293	3.4667	2687	2929
18	2030	3.4367	3.4667	2733	2929
19	2031	3.4427	3.4667	2771	2929
20	2032	3.4474	3.4667	2802	2929
21	2033	3.4513	3.4667	2827	2929
22	2034	3.4543	3.4667	2847	2929
23	2035	3.4568	3.4667	2863	2929
24	2036	3.4588	3.4667	2876	2929
25	2037	3.4603	3.4667	2886	2929
26	2038	3.4616	3.4667	2895	2929
27	2039	3.4626	3.4667	2901	2929
28	2040	3.4634	3.4667	2907	2929
29	2041	3.4641	3.4667	2911	2929
30	2042	3.4646	3.4667	2915	2929
31	2043	3.4650	3.4667	2918	2929
32	2044	3.4654	3.4667	2920	2929
33	2045	3.4656	3.4667	2922	2929
34	2046	3.4659	3.4667	2923	2929
35	2047	3.4660	3.4667	2924	2929
36	2048	3.4662	3.4667	2925	2929
37	2049	3.4663	3.4667	2926	2929
38	2050	3.4664	3.4667	2927	2929
39	2051	3.4664	3.4667	2927	2929
40	2052	3.4665	3.4667	2928	2929
41	2053	3.4666	3.4667	2928	2929
42	2054	3.4666	3.4667	2928	2929
43	2055	3.4666	3.4667	2928	2929
44	2056	3.4666	3.4667	2928	2929
45	2057	3.4667	3.4667	2929	2929
46	2058	3.4667	3.4667	2929	2929
47	2059	3.4667	3.4667	2929	2929

Anexo N° 5: Resultados numéricos de la convergencia al LPIBpc de EE.UU. del 2014

Anexo N° 5. 1: Tabla de resultados numéricos de la convergencia al LPIBpc de EEUU del 2014

t	Año	log(y(t))	log(y*)	y(t)	y*
0	2014	4.0584	4.7170	11438	52118
1	2015	4.1888	4.7170	15446	52118
2	2016	4.2935	4.7170	19654	52118
3	2017	4.3774	4.7170	23843	52118
4	2018	4.4446	4.7170	27838	52118
5	2019	4.4986	4.7170	31520	52118
6	2020	4.5419	4.7170	34822	52118
7	2021	4.5765	4.7170	37718	52118
8	2022	4.6044	4.7170	40213	52118
9	2023	4.6267	4.7170	42333	52118
10	2024	4.6446	4.7170	44113	52118
11	2025	4.6589	4.7170	45595	52118
12	2026	4.6704	4.7170	46819	52118
13	2027	4.6796	4.7170	47824	52118
14	2028	4.6870	4.7170	48645	52118
15	2029	4.6930	4.7170	49314	52118
16	2030	4.6977	4.7170	49858	52118
17	2031	4.7015	4.7170	50297	52118
18	2032	4.7046	4.7170	50653	52118
19	2033	4.7071	4.7170	50940	52118
20	2034	4.7090	4.7170	51171	52118
21	2035	4.7106	4.7170	51357	52118
22	2036	4.7119	4.7170	51507	52118
23	2037	4.7129	4.7170	51628	52118
24	2038	4.7137	4.7170	51724	52118
25	2039	4.7143	4.7170	51802	52118
26	2040	4.7149	4.7170	51865	52118
27	2041	4.7153	4.7170	51915	52118
28	2042	4.7156	4.7170	51955	52118
29	2043	4.7159	4.7170	51987	52118
30	2044	4.7161	4.7170	52013	52118
31	2045	4.7163	4.7170	52034	52118
32	2046	4.7164	4.7170	52050	52118
33	2047	4.7165	4.7170	52064	52118
34	2048	4.7166	4.7170	52075	52118
35	2049	4.7167	4.7170	52083	52118
36	2050	4.7168	4.7170	52090	52118
37	2051	4.7168	4.7170	52096	52118
38	2052	4.7168	4.7170	52100	52118
39	2053	4.7169	4.7170	52104	52118
40	2054	4.7169	4.7170	52106	52118
41	2055	4.7169	4.7170	52109	52118
42	2056	4.7169	4.7170	52111	52118
43	2057	4.7169	4.7170	52112	52118
44	2058	4.7169	4.7170	52113	52118
45	2059	4.7170	4.7170	52114	52118
46	2060	4.7170	4.7170	52115	52118
47	2061	4.7170	4.7170	52116	52118
48	2062	4.7170	4.7170	52116	52118
49	2063	4.7170	4.7170	52116	52118
50	2064	4.7170	4.7170	52117	52118
51	2065	4.7170	4.7170	52117	52118
52	2066	4.7170	4.7170	52117	52118
53	2067	4.7170	4.7170	52117	52118
54	2068	4.7170	4.7170	52117	52118
55	2069	4.7170	4.7170	52118	52118
56	2070	4.7170	4.7170	52118	52118
57	2071	4.7170	4.7170	52118	52118

Anexo N° 6: Resultados numéricos de la convergencia a la economía de EE.UU.

Anexo N° 6. 1: Tabla de resultados numéricos de la convergencia a la economía de EE.UU.

t	Año	Modelo				Método Alternativo	
		log(y(t))	log(y*(t))	y(t)	y*(t)	y(t)	y*(t)
0	2014	4.0584	4.7170	11438	52118	11438	52118
1	2015	4.1899	4.7222	15483	52743	11862	52743
2	2016	4.2972	4.7273	19822	53376	12302	53376
3	2017	4.3849	4.7325	24260	54017	12759	54017
4	2018	4.4568	4.7377	28628	54665	13232	54665
5	2019	4.5159	4.7429	32802	55321	13723	55321
6	2020	4.5647	4.7481	36700	55985	14232	55985
7	2021	4.6051	4.7533	40279	56657	14760	56657
8	2022	4.6387	4.7584	43524	57337	15308	57337
9	2023	4.6669	4.7636	46442	58025	15876	58025
10	2024	4.6907	4.7688	49054	58721	16465	58721
11	2025	4.7109	4.7740	51390	59426	17076	59426
12	2026	4.7282	4.7792	53480	60139	17709	60139
13	2027	4.7432	4.7843	55357	60860	18366	60860
14	2028	4.7563	4.7895	57052	61591	19048	61591
15	2029	4.7678	4.7947	58593	62330	19754	62330
16	2030	4.7782	4.7999	60006	63078	20487	63078
17	2031	4.7875	4.8051	61313	63835	21247	63835
18	2032	4.7961	4.8102	62532	64601	22035	64601
19	2033	4.8040	4.8154	63680	65376	22853	65376
20	2034	4.8114	4.8206	64771	66160	23701	66160
21	2035	4.8183	4.8258	65817	66954	24580	66954
22	2036	4.8250	4.8310	66827	67758	25492	67758
23	2037	4.8313	4.8361	67810	68571	26438	68571
24	2038	4.8374	4.8413	68771	69394	27419	69394
25	2039	4.8433	4.8465	69717	70226	28436	70226
26	2040	4.8491	4.8517	70653	71069	29491	71069
27	2041	4.8548	4.8569	71582	71922	30585	71922
28	2042	4.8604	4.8620	72507	72785	31720	72785
29	2043	4.8659	4.8672	73431	73658	32896	73658
30	2044	4.8713	4.8724	74357	74542	34117	74542
31	2045	4.8767	4.8776	75285	75437	35383	75437
32	2046	4.8821	4.8828	76218	76342	36695	76342
33	2047	4.8874	4.8879	77157	77258	38057	77258
34	2048	4.8927	4.8931	78103	78185	39469	78185
35	2049	4.8979	4.8983	79056	79124	40933	79124
36	2050	4.9032	4.9035	80018	80073	42451	80073
37	2051	4.9084	4.9087	80989	81034	44026	81034
38	2052	4.9137	4.9138	81970	82006	45660	82006
39	2053	4.9189	4.9190	82960	82990	47354	82990
40	2054	4.9241	4.9242	83962	83986	49111	83986
41	2055	4.9293	4.9294	84974	84994	50933	84994
42	2056	4.9345	4.9346	85998	86014	52822	86014
43	2057	4.9397	4.9397	87033	87046	54782	87046
44	2058	4.9449	4.9449	88080	88091	56814	88091
45	2059	4.9501	4.9501	89139	89148	58922	89148
46	2060	4.9553	4.9553	90210	90218	61108	90218
47	2061	4.9604	4.9605	91294	91300	63375	91300
48	2062	4.9656	4.9657	92391	92396	65727	92396
49	2063	4.9708	4.9708	93501	93505	68165	93505
50	2064	4.9760	4.9760	94623	94627	70694	94627
51	2065	4.9812	4.9812	95760	95762	73317	95762
52	2066	4.9864	4.9864	96909	96911	76037	96911
53	2067	4.9915	4.9916	98072	98074	78858	98074
54	2068	4.9967	4.9967	99250	99251	81783	99251
55	2069	5.0019	5.0019	100441	100442	84817	100442
56	2070	5.0071	5.0071	101646	101647	87964	101647
57	2071	5.0123	5.0123	102866	102867	91228	102867
58	2072	5.0175	5.0175	104101	104102	94612	104102
59	2073	5.0226	5.0226	105350	105351	98122	105351
60	2074	5.0278	5.0278	106615	106615	101763	106615
61	2075	5.0330	5.0330	107894	107894	105538	107894
62	2076	5.0382	5.0382	109189	109189	109453	109189
63	2077	5.0434	5.0434	110499	110499	113514	110499
64	2078	5.0485	5.0485	111825	111825	117726	111825