



**UNIVERSITAT
JAUME·I**

TESIS DOCTORAL

**Simulación del engrane y análisis del
contacto en sistemas de transmisión por
engranajes mediante la modelización
avanzada del conjunto ejes-engranajes**

Autor:

Víctor Roda Casanova

Directores de tesis:

Francisco Sánchez Marín

José Luíís Iserte Vilar

Grupo de Investigación en Transmisiones de Engranajes

Departamento de Ingeniería Mecánica y Construcción

Diciembre 2015

“Qui entropessa i no cau avança una passa.”

Dita popular

UNIVERSITAT JAUME I

Resumen

Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales
Departamento de Ingeniería Mecánica y Construcción

**Simulación del engrane y análisis del contacto en sistemas de transmisión
por engranajes mediante la modelización avanzada del conjunto
ejes-engranajes**

por Víctor Roda Casanova

La determinación de las tensiones a las que están sometidos los engranajes es una parte importante del proceso de cálculo de la capacidad de carga de una transmisión de engranajes, que se realiza habitualmente mediante métodos analíticos, semianalíticos o numéricos. Para que estos métodos proporcionen resultados precisos, es importante que se apliquen bajo escenarios tan realistas como sea posible. No obstante, las limitaciones de estos métodos, que pueden estar impuestas por sus hipótesis de cálculo o por su coste computacional, hacen que en ocasiones se desprecien algunos efectos que pueden tener cierta influencia sobre el estado tensional de la transmisión. Entre estos efectos, uno de especial relevancia es la desalineación de los engranajes producida por la deformación bajo carga de los ejes que los soportan.

En este trabajo, se han estudiado las limitaciones de los métodos analíticos, semianalíticos y numéricos utilizados habitualmente para la determinación del estado tensional de transmisiones de engranajes de ejes paralelos, y se han propuesto nuevos métodos de cálculo, o modificaciones de los existentes, para vencer estas limitaciones y tener en cuenta el comportamiento elástico de los ejes en el cálculo de las tensiones a las que están sometidos los engranajes. Posteriormente, haciendo uso de los métodos propuestos, se ha propuesto un nuevo procedimiento de modificación de la geometría de los dientes de los engranajes, que permite compensar los efectos negativos de la desalineación del engrane.

Agradecimientos

Como pasa a menudo, al finalizar un trabajo de estas características hay tantas cosas que agradecer a tanta gente que uno necesitaría varias páginas para poder hacerlo por escrito. Puesto que en este caso el espacio es limitado, lo que espero es haber sabido transmitir mi agradecimiento en todo momento a cada una de las personas que se han detenido su camino para ayudarme en el mio. Sin embargo, espero que se entienda que aproveche este pequeño espacio para manifestar públicamente mi agradecimiento a algunas de estas personas, sin las cuales este trabajo nunca hubiese llegado a su fin.

Quiero expresar mi gratitud a mis directores de tesis, Francisco Sánchez Marín y José Luís Iserte Vilar. Después de todo este tiempo puedo decir que son unos profesores excepcionales, unos tutores infatigables, unos compañeros de trabajo formidables, y sobretodo, unas magníficas personas. Su ayuda no sólo me ha permitido llevar a cabo esta tesis doctoral, sino también me ha permitido encontrar esta profesión, que me encanta y me llena. Jamás sabré como agradecer todo lo que han hecho por mi.

Gracias a todos los compañeros que me han ayudado y apoyado, especialmente al profesor Ignacio González Pérez, cuyo conocimiento y dedicación siempre serán un ejemplo a seguir para mi.

Quiero dar mi más sentido agradecimiento a mis padres, por haberse esforzado siempre en darme todo cuanto he podido necesitar, especialmente todo aquello que no se puede pagar con dinero. A mi hermana, Inés, por su incansable sonrisa y por haber cuidado de todo y de todos siempre que yo no he podido. A mis queridos abuelos, por haberme enseñado todas las cosas que realmente merecían ser aprendidas. Gracias a vosotros hoy me puedo sentir orgulloso del tipo de persona que soy.

Por último, y no por ello menos importante, quiero expresar mi agradecimiento a mi pareja, María. Ninguno de mis humildes logros hubiese sido posible sin su apoyo. Me siento tremendamente afortunado de que forme parte de mi vida.

Índice general

Resumen	iii
Agradecimientos	iv
Índice general	v
Lista de Figuras	xi
Lista de Tablas	xvii
1 Introducción	1
1.1 Máquinas, mecanismos y transmisiones	1
1.2 Transmisiones de engranajes	3
1.2.1 Tipos de transmisiones de engranajes	4
1.2.2 Tipos de parejas de engranajes	6
1.2.3 Principales criterios de diseño de transmisiones de engranajes	10
1.2.4 Nomenclatura de interés	14
1.3 Aspectos a considerar en la determinación de la capacidad de carga de transmisiones de engranajes	16
1.3.1 Principales modos de fallo de una transmisión	17
1.3.2 Determinación de la capacidad de carga de una transmisión de engranajes	20
1.3.2.1 Estado tensional de los dientes de engranaje bajo carga	20
1.3.2.2 Tensiones admisibles	27
1.4 Objetivos de la tesis	28
1.5 Modelo físico de una transmisión de engranajes básica	30
2 Estado del arte	33
2.1 Introducción	33
2.2 Determinación de las tensiones admisibles	34
2.2.1 Tensiones de contacto admisibles	34
2.2.2 Tensiones de flexión admisibles	36
2.3 Análisis de fenómenos físicos que pueden influir en el fallo de una transmisión	37
2.4 Métodos analíticos para la determinación del estado tensional de transmisiones de engranajes	41

2.5	Métodos semianalíticos para la determinación del estadio tensional de transmisiones de engranajes	50
2.6	Métodos numéricos para la determinación del estadio tensional de transmisiones de engranajes	53
3	Cálculo de la deformación de los ejes de engranajes	59
3.1	Introducción	59
3.2	Teoría de vigas aplicada al cálculo de la deflexión de ejes sometidos a cargas tridimensionales	62
3.2.1	Ecuaciones de equilibrio estático	62
3.2.2	Fuerzas internas y tensiones en la viga	64
3.2.3	Cinemática de la deformación de la viga	66
3.2.4	Relaciones constitutivas de una viga elástica	69
3.2.5	Ecuaciones diferenciales que gobiernan la deformación de la viga bajo carga	71
3.3	Modelo analítico SHAFT1 para el cálculo de la deformación de ejes de engranajes	72
3.4	Modelo analítico SHAFT2 para el cálculo de la deformación de ejes de engranajes	74
3.4.1	Obtención del valor óptimo del ángulo ϕ	77
3.4.2	Comprobación del modelo SHAFT2 en casos alternativos	80
3.4.3	Modelo de elementos finitos	81
3.5	Funciones generalizadas para el cálculo de la deformación de vigas	86
3.5.1	Función de impulso unitario o delta de Dirac	87
3.5.2	Funciones de generalizadas o funciones de Macaulay	87
3.5.3	Aplicación de cargas en vigas utilizando funciones de Macaulay	88
3.6	Conclusiones	89
4	Modelos de elementos finitos para el análisis tensional de transmisiones por engranaje	93
4.1	Introducción	93
4.2	Análisis por elementos finitos de transmisiones por engranaje. Consideraciones previas.	97
4.2.1	Consideraciones previas sobre el uso de elementos finitos sólidos tridimensionales	100
4.2.2	Consideraciones previas sobre el uso de elementos finitos viga tridimensionales	102
4.2.3	Consideraciones previas sobre la definición del contacto	104
4.2.3.1	Selección del rol que desempeña cada superficie del contacto	105
4.2.3.2	Selección del tipo de discretización del contacto	105
4.2.3.3	Selección del tipo seguimiento del estado del contacto	107
4.3	Discretización en elementos finitos de las geometrías de contacto de los engranajes	107
4.4	Modelo de elementos finitos <i>FEM0</i> para el estudio tensional de transmisiones por engranaje	111
4.5	Modelo de elementos finitos <i>FEM1</i> para el estudio tensional de transmisiones por engranaje	113

4.6	Modelo de elementos finitos <i>FEM2</i> para el estudio tensional de transmisiones por engranaje	116
4.6.1	Modelo de elementos finitos <i>FEM2.2</i> para tener en cuenta los cambios bruscos de sección en las zonas cercanas al engranaje	117
4.7	Definición de las posiciones de análisis de los modelos de elementos finitos de la transmisión	119
4.8	Obtención de resultados a partir de los modelos de elementos finitos propuestos	121
4.8.1	Determinación del error de transmisión	121
4.8.2	Determinación de la función de intensidad de carga	124
4.8.3	Determinación de la función de reparto de carga entre dientes	126
4.8.4	Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga	128
4.8.5	Determinación de la desalineación natural de los engranajes	128
4.9	Comparación de los modelos de elementos finitos propuestos	131
4.9.1	Influencia del número de dientes considerados en los modelos de elementos finitos	143
4.10	Conclusiones	146
5	Modelo analítico para el análisis tensional de transmisiones por engranaje. Análisis del factor de distribución longitudinal de la carga	151
5.1	Introducción	151
5.2	Fundamentos de la norma ISO-6336	154
5.3	Factores de influencia	155
5.4	Factor de distribución longitudinal de la carga	157
5.5	Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga por el método B	159
5.5.1	Cálculo de la distribución de carga según el método B	159
5.5.2	Procedimiento de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método B	162
5.6	Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga por el método C	163
5.6.1	Caso 1: Perfil bajo de carga con desalineaciones grandes	164
5.6.2	Caso 2: Perfil alto de carga con desalineaciones pequeñas	166
5.7	Determinación de la desalineación equivalente del engrane	168
5.7.1	Determinación de la desalineación inicial equivalente del engrane por el método C	168
5.7.2	Determinación de la componente de desalineación equivalente producida por deformaciones elásticas por el método C	170
5.8	Determinación de la constante de rigidez del engrane	171
5.9	Ejemplos numéricos	174
5.9.1	Consideraciones para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método C de la norma ISO-6336	175
5.9.2	Consideraciones para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método de los elementos finitos	176
5.10	Resultados	177
5.10.1	Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga con la desalineación de los engranajes	181

5.10.2	Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y el diámetro de los ejes	183
5.10.3	Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y ancho de cara de los engranajes	185
5.10.4	Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y longitud de los ejes	187
5.10.5	Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y posición de montaje de los engranajes sobre los ejes	187
5.10.6	Diferencia relativa entre factores de distribución longitudinal de la carga y el ratio b/L	189
5.11	Conclusiones	193
6	Modelo semianalítico para el cálculo de la distribución de presión de contacto en transmisiones por engranaje	197
6.1	Introducción	197
6.2	Deformación producida en la superficie de un sólido por una distribución de presión. Elementos de presión.	199
6.2.1	Deformación en el vértice de un elemento de presión triangular producida por una distribución uniforme de presión	201
6.2.2	Deformación en un punto cualquiera de la superficie de un sólido producida por una distribución uniforme de presión aplicada sobre un elemento de presión rectangular	204
6.2.3	Deformación en un punto cualquiera de la superficie de un sólido producida por una distribución uniforme de presión aplicada sobre un elemento de presión triangular	205
6.2.4	Deformación en un punto cualquiera de la superficie de un sólido producida por una distribución arbitraria de presión	207
6.3	Modelo semianalítico para resolver el problema de contacto entre dos sólidos en ausencia de fricción	208
6.3.1	Estudio del contacto entre sólidos con dimensiones finitas	212
6.4	Implementación del algoritmo de contacto	215
6.4.1	Rutina principal del algoritmo de contacto	215
6.4.2	Algoritmo para el cálculo de la distancia normal entre superficies	218
6.4.3	Algoritmo para el cálculo de los coeficientes de influencia acumulados	222
6.4.3.1	Algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia acumulado	224
6.4.3.2	Algoritmo para la determinación de coeficientes de influencia	224
6.4.4	Validación del algoritmo y estudio de parámetros	227
6.4.4.1	Configuración del algoritmo de contacto	228
6.4.4.2	Resultados y discusión	229
6.4.4.3	Estudio de la influencia en los resultados del cálculo aproximado de coeficientes de influencia	231
6.4.4.4	Estudio de la influencia en los resultados del número de elementos de presión dentro de la zona de contacto	233
6.5	Implementación del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla	236
6.5.1	Estructuras basadas en el Quadtree	238

6.5.2	Rutina principal del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla	239
6.5.3	Algoritmo para determinar los elementos a dividir	241
6.5.4	Algoritmo para dividir elementos	245
6.5.5	Validación del algoritmo y estudio de parámetros	246
6.6	Algoritmo de contacto para transmisiones por engranaje considerando la desalineación natural de los ejes	253
6.7	Ejemplos numéricos	258
6.8	Resultados y discusión	260
6.8.1	Desalineación de los ejes de los engranajes	260
6.8.2	Presión de contacto y distribución de carga a lo largo del ancho de cara del diente	262
6.8.3	Convergencia del algoritmo	265
6.8.4	Estudio de la influencia de la flexión del diente en los resultados del problema contacto	267
6.9	Conclusiones	269
7	Modificaciones en las geometrías de los engranajes cilíndricos rectos para compensar las deformaciones de los ejes	275
7.1	Introducción	275
7.2	Generación de engranajes cilíndricos rectos con geometría estándar	277
7.3	Generación de los engranajes con geometría compensada	280
7.4	Ejemplos numéricos	283
7.5	Resultados y discusión	286
7.6	Conclusiones	291
8	Conclusiones y trabajos futuros	295
8.1	Conclusiones	295
8.2	Trabajos futuros	311
	Bibliografía	313

Lista de Figuras

1.1	Transmisiones de engranajes de relación de transmisión constante	5
1.2	Esquema de una caja de cambios	6
1.3	Transmisiones de engranajes para ejes paralelos	7
1.4	Transmisiones de engranajes para ejes que se intersectan	8
1.5	Transmisiones de engranajes para ejes que se cruzan en el espacio	9
1.6	Proceso de selección de engranajes	12
1.7	Geometría del engranaje	15
1.8	Geometría de contacto y ángulo de presión en dientes de engranaje	16
1.9	Distribución de tensiones obtenida experimentalmente en por Dolan y Broghamer	21
1.10	Estudio del contacto entre dientes de engranajes	21
1.11	Análisis teórico de la distribución de tensiones en la raíz de un diente de engranaje cilíndrico recto	23
1.12	Ejemplo de curvas de Wöhler para un acero al carbono de alta dureza obtenidas de la referencia [1]	28
1.13	Modelo físico de una transmisión de engranajes cilíndricos	31
2.1	Deformaciones en el diente	40
2.2	Cálculo analítico de la tensión nominal de contacto	42
2.3	Cálculo analítico de la tensión nominal de flexión	45
2.4	Modelos de cálculo de la tensión nominal de flexión utilizadas por (a) AGMA e (b) ISO	48
3.1	Deformación de una viga por (a) flexión y por (b) cortante	61
3.2	Viga en el estado de referencia	62
3.3	Cargas sobre elemento diferencial de la viga	63
3.4	Tensiones y esfuerzos resultantes sobre la sección de la viga	65
3.5	Componentes del tensor tridimensional de tensiones	65
3.6	Componentes de deformación	67
3.7	Tensiones cortantes en la viga deformada: (a) deformación en la teoría de vigas y (b) deformación real	68
3.8	Modelización del eje de la transmisión como una viga y división en segmentos	73
3.9	Eje de sección circular escalonado	75
3.10	Diámetros del eje de engranaje: (a) dimensiones reales del eje escalonado, y (b) dimensiones del diámetro equivalente.	77
3.11	Parámetros definitorios de los casos analizados.	78
3.12	Caso con carga distribuida lineal	80

3.13	Resultados de deformación para el caso de eje escalonado con carga distribuida lineal	80
3.14	Casos combinados	81
3.15	Resultados de deformación para los ejes con dos escalones	82
3.16	Modelo tridimensional de un eje escalonado	83
3.17	Deflexión según FEM, SHAFT1 y SHAFT2 para (a) caso 1, (b) caso 22 y (c) caso 13 optimizados individualmente	84
3.18	Deflexión según FEM, SHAFT1 y SHAFT2 con ángulo $\phi = 40.0$	85
3.19	Cargas más comunes en vigas	89
4.1	(a) Modelo de elementos finitos propuesto por Handschuh y (b) modelo de elementos finitos propuesto por Bibel.	94
4.2	Modelo de elementos finitos de la transmisión	95
4.3	Elemento finito sólido tridimensional de primer orden	100
4.4	Elemento finito de tipo viga tridimensional	102
4.5	(a) Geometría del engranaje, (b) superficies auxiliares, (c) determinación de los nodos y (d) discretización del volumen en elementos finitos	109
4.6	Parámetros de control de la densidad de la malla	110
4.7	Modelo de elementos finitos <i>FEM0</i> del piñón y de su eje	112
4.8	Modelo de elementos finitos de la transmisión	114
4.9	Modelo de elementos finitos <i>FEM1</i>	115
4.10	Modelo de elementos finitos <i>FEM2</i>	117
4.11	Diámetros del eje para su comportamiento ante esfuerzos a flexión para (a) el caso donde no se alcanza el diámetro primitivo y (b) el caso que se alcanza el diámetro primitivo.	119
4.12	Definición de la posición angular el piñón y de la rueda	120
4.13	Definición de ciclo de engrane	120
4.14	Distribución de carga teórica y distribución de carga real en un engranaje cilíndrico recto	125
4.15	Numeración de los nodos asociados a una coordenada v	126
4.16	Valores típicos de la función de reparto de carga	128
4.17	Componentes de desalineación de los engranajes. (a) Desalineación angular en el plano de paso, (b) desalineación angular en el plano axial y (c) variación en la distancia entre centros	130
4.18	Cálculo de la desalineación angular en (a) el plano de paso y (b) el plano axial	131
4.19	Formación del contacto y distribución de presiones de contacto para la posición $i = 11$ del caso I obtenida según (a) modelo <i>FEM0</i> , (b) modelo <i>FEM1</i> , (c) modelo <i>FEM2.1</i> y (d) modelo <i>FEM2.2</i>	135
4.20	Evolución de la presión máxima de contacto en los modelos de elementos finitos del caso de estudio I	136
4.21	Función de intensidad de carga en la posición de análisis $i = 11$ de los distintos modelos de elementos finitos del caso de estudio I	136
4.22	Función de intensidad de carga en la posición de análisis $i = 11$ de los modelos de elementos finitos del (a) caso de estudio II y (b) caso de estudio III	137
4.23	Evolución del factor de reparto de carga para el caso de estudio I	138

4.24	Distribución de tensiones de von Mises en la geometría del piñón para la posición $i = 11$ del caso I obtenida según (a) modelo <i>FEM0</i> , (b) modelo <i>FEM1</i> , (c) modelo <i>FEM2.1</i> y (d) modelo <i>FEM2.2</i>	139
4.25	Evolución de la tensión máxima de flexión en los modelos de elementos finitos del caso de estudio I en la base del diente (a) del piñón y (b) de la rueda	140
4.26	Función de errores de transmisión en los distintos modelos de elementos finitos	141
4.27	Evolución de las desalineaciones en los distintos modelos de elementos finitos	142
4.28	Función de intensidad de carga en la posición de contacto $i = 11$ considerando modelos de tres y cinco parejas de dientes.	144
4.29	Evolución de las presiones máximas de contacto al considerar modelos de tres y cinco parejas de dientes.	144
4.30	Evolución de la tensión máxima de flexión al considerar modelos de tres y cinco parejas de dientes.	145
4.31	Evolución de la función de error de transmisión bajo carga al considerar modelos de tres y cinco dientes.	146
5.1	Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-B}$	160
5.2	Método de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga propuesto por la norma ISO-6336	162
5.3	Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga cuando el perfil de carga es bajo y las desalineaciones son grandes	165
5.4	Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga cuando el perfil de carga es alto y las desalineaciones son pequeñas	167
5.5	Desalineación del engrane en el plano de acción. (a) Desalineación real y (b) desalineación simplificada.	170
5.6	Distribución de tensiones de von Mises en los casos de estudio donde $b = 40 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$, $d_{sh1} = 25 \text{ mm}$ y (a) $z_g = 0.4 \cdot L$, (b) $z_g = 0.5 \cdot L$, (c) $z_g = 0.6 \cdot L$ and (d) $z_g = 0.7 \cdot L$	178
5.7	Formación del contacto y distribución de presiones de contacto en los casos de estudio donde $b = 40 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$, $d_{sh1} = 25 \text{ mm}$ y (a) $z_g = 0.4 \cdot L$, (b) $z_g = 0.5 \cdot L$, (c) $z_g = 0.6 \cdot L$ and (d) $z_g = 0.7 \cdot L$	179
5.8	Función de intensidad de carga en los casos de estudio donde $b = 40 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$, $d_{sh1} = 25 \text{ mm}$ y (a) $z_g = 0.4 \cdot L$, (b) $z_g = 0.55 \cdot L$, (c) $z_g = 0.6 \cdot L$ and (d) $z_g = 0.7 \cdot L$	180
5.9	Desalineación angular del engrane	182
5.10	Comparación de la variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con: (a) y (c) desalineación angular y (b) y (d) error en distancia entre centros	183
5.11	Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores del diámetro del eje del piñón (d_{sh1}) para algunos casos de diseño	184
5.12	(a) Diagrama de evolución del diámetro considerado para el comportamiento a flexión en el modelo <i>FEM2.2</i> y (b) función de intensidad de carga determinada a partir del modelo <i>FEM2.2</i> cuando $b = 80 \text{ mm}$ y $L = 300 \text{ mm}$	185

5.13	Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores de ancho de cara (b) para algunos casos de diseño	186
5.14	Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores de longitud de los ejes (L) para algunos casos de diseño	188
5.15	Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores de la posición relativa que ocupan los engranajes sobre los ejes (z_g/L) para algunos casos de diseño	189
5.16	Regresiones lineales entre ϵ_{rel} y el cociente $\frac{b}{L}$ para cuatro valores representativos de $\frac{z_g}{L}$	190
5.17	Curvas envolventes de (a) valores mínimos y (b) valores máximos de ϵ_{rel} cuando $\frac{z_g}{L} = 0.4L$	191
5.18	Mapeado de valores envolventes (a) mínimos y (b) máximos de valores de ϵ_{rel} para cada par de valores de $(\frac{z_g}{L}, \frac{b}{L})$	192
6.1	Semiespacio elástico sometido a distribución de presión	200
6.2	Geometría de un elemento de presión triangular Δ_j	202
6.3	Geometría de un elemento de presión triangular Δ_j cuando $\phi_1 = 0^\circ$ y $\epsilon_{2i-1} = 90^\circ$	203
6.4	Geometría de un elemento de presión rectangular Δ_j	205
6.5	Geometría de un elemento de presión triangular Δ_j	206
6.6	Descomposición de un elemento de presión triangular cuando el punto H está dentro de la geometría del elemento de presión	206
6.7	Descomposición de un elemento de presión triangular cuando el punto H está fuera de la geometría del elemento de presión	207
6.8	Contacto sin carga entre los sólidos P y W	209
6.9	Contacto bajo carga entre los sólidos P y W	209
6.10	Discretización del área potencial de contacto sobre el plano Π en (a) elementos de presión rectangulares y (b) elementos de presión triangulares	210
6.11	Proceso de eliminación de tensiones cortantes	213
6.12	Sólidos de contacto con dimensiones finitas	214
6.13	Mallas simétricas para eliminación de tensiones cortantes	215
6.14	Diagrama de flujo del algoritmo de contacto	216
6.15	Determinación de la zona de interferencia Γ	217
6.16	Cálculo de la distancia normal a partir de superficies de contacto facetadas	219
6.17	Cálculo de la distancia normal entre superficies asociada al elemento de presión Δ_j planteada como un problema no lineal	220
6.18	Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de la distancia normal entre superficies	221
6.19	Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de coeficientes de influencia acumulados	223
6.20	Diagrama de flujo del algoritmo para la determinación del coeficiente de influencia acumulado	225
6.21	Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia de un elemento	226
6.22	Casos de estudio para validación algoritmo de contacto	227
6.23	Discretización de la zona potencial de contacto en (a) rectángulos y (b) triángulos para la aplicación del algoritmo de contacto	228

6.24	Huellas de contacto obtenidas mediante el algoritmo de contacto para (a y b) caso I y (c y d) caso II	230
6.25	Áreas de influencia en función del parámetro Ω_{max} para mallas regulares	232
6.26	Criterio de cálculo propuesto para el cálculo de Ω_{max}	233
6.27	Tiempos de cálculo del algoritmo: (a) tiempo total y (b) tiempo invertido en el cálculo de los coeficientes de influencia	235
6.28	Descomposición en quadtree	238
6.29	Estructura de datos del <i>quadtree</i> mostrado en la figura 6.28d	239
6.30	Diagrama de flujo del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo	240
6.31	Diagrama de flujo para el algoritmo de determinación de elementos a dividir	244
6.32	Algoritmo para la división de elementos	246
6.33	Evolución de la huella de contacto a través de las iteraciones del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo para el caso I.8.0	247
6.34	Huellas de contacto y mallas resultantes para (a y c) el caso I.8.0 y (b y d) caso I.10.0	249
6.35	Huellas de contacto y mallas resultantes para (a y c) el caso II.8.0 y (b y d) caso II.10.0	250
6.36	Distribución de presiones a lo largo de los ejes de coordenadas locales al contacto	251
6.37	Resumen de tiempos totales consumidos por el algoritmo para resolver distintos casos de estudio	253
6.38	Sección transversal de los sólidos de contacto	254
6.39	Discretización de la zona de interferencia en (a) un <i>quadtree</i> y (b) tres <i>quadtrees</i>	255
6.40	Determinación del par torsor producido por una presión uniforme aplicada sobre un área A_j	256
6.41	Diagrama de flujo del algoritmo para el algoritmo de contacto para transmisiones por engranaje considerando la desalineación natural de los ejes	257
6.42	Resultados de huella de contacto en el diente del piñón para (a y b) caso III.1, (c y d) caso III.3 y (e y f) caso III.5	263
6.43	Función de intensidad de carga a lo largo del ancho de cara del diente del piñón para (a) caso III.1, (b) caso III.3 y (c) caso III.5	264
6.44	Resultados de huella de contacto en el diente del piñón para (a y b) caso IV.3 y (c y d) caso V.3	266
6.45	Estudio de la influencia de la flexión del diente en los resultados. (a) Modelo de elementos finitos $FEM2.1_{MOD}$ y (b) distribución de tensiones de von Mises	268
6.46	Estudio de la influencia de la flexión del diente en la distribución de carga sobre el diente del piñón en el caso 3c	269
7.1	Métodos de Maag.	278
7.2	Perfil de la herramienta de corte	279
7.3	Posición de la cremallera de corte en (a) posición estándar, (b) posición con $\Delta\gamma_s$, (c) posición con $\Delta\nu_s$ y (d) con cremallera de corte desplazada	281
7.4	Definición de los perfiles modificados de la cremallera de corte con (a) ambombamiento parabólico del perfil y (b) acuerdos parabólicos en las partes superior e inferior del perfil	283

7.5	Formación del contacto y tensiones máximas de contacto y de flexión en la posición $i = 11$ para (a) la geometría estándar Σ_s y (b) la geometría compensada Σ_{c1}	286
7.6	Funciones de intensidad de carga para la geometría estándar (Σ_s) y las geometrías compensadas ($\Sigma_{c1}, \Sigma_{c2}, \Sigma_{c3}$) en la posición de contacto 11	287
7.7	Funciones de intensidad de carga para la geometría estándar (Σ_s) y las geometrías compensadas ($\Sigma_{c1}, \Sigma_{c4}, \Sigma_{c5}$) en la posición de contacto 11	288
7.8	Funciones de intensidad de carga en la posición de contacto 11 para distintos niveles de par en la (a) geometría estándar Σ_s y (b) en la geometría compensada Σ_{c1}	288
7.9	Funciones de error de transmisión para la geometría estándar Σ_s y la geometría compensada Σ_{c1}	289
7.10	Funciones de error de transmisión (en ausencia de carga, bajo carga y total) para las geometrías (a) Σ_{c1m1} , (b) Σ_{c1m2} y (c) Σ_{c1m3}	291
7.11	Funciones de error de transmisión (a) en ausencia de carga, (b) bajo carga y (c) totales, para las geometrías $\Sigma_{c1m4}, \Sigma_{c1m5}, \Sigma_{c1m6}$ y Σ_{c1m7}	292
7.12	Funciones de error de transmisión (a) en ausencia de carga, (b) bajo carga y (c) totales, para las geometrías $\Sigma_{c1m8}, \Sigma_{c1m9}, \Sigma_{c1m10}$ y Σ_{c1m11}	293
7.13	Evolución de las tensiones máximas para las geometrías $\Sigma_s, \Sigma_{c1}, \Sigma_{c1m2}$ y Σ_{c9} : (a) tensión de contacto y (b) tensión de flexión	293
7.14	Funciones de intensidad de carga a lo largo del ciclo de engrane para las geometrías: (a) Σ_{c1} y (b) Σ_{c1m2}	294

Lista de Tablas

1.1	Tipos de transmisiones mecánicas y frecuencia de uso. Datos extraídos de la referencia [2].	2
1.2	Frecuencia en la que se produce cada modo de fallo. Datos extraídos de la referencia [2].	18
2.1	Valores de referencia para el cálculo del límite de fatiga por contacto y el factor de vida	35
2.2	Valores aproximados para los factores de influencia de la ecuación 2.1. Valores obtenidos de la referencia [2]	36
2.3	Valores de referencia para el cálculo de σ_{Hlim} y Z_{NT}	37
2.4	Valores aproximados para los factores de influencia de la ecuación 2.1. Valores obtenidos de la referencia [2]	38
3.1	Dimensiones y resultados para los casos analizados según SHAFT2	79
4.1	Elementos sólidos tridimensionales en Abaqus	101
4.2	Datos de diseño para los casos de estudio	132
4.3	Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos	133
4.4	Tamaño de los modelos de elementos finitos propuestos para cada caso de estudio	133
4.5	Condiciones de contorno aplicadas a los modelos de elementos finitos	134
4.6	Error relativo entre funciones de distribución longitudinal de la carga	138
4.7	Factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-FEM}$	139
4.8	Tiempo de cálculo medio empleado para resolver los casos de estudio planteados con los distintos modelos de elementos finitos	143
4.9	Resumen de los modelos de elementos finitos de la transmisión propuestos	147
5.1	Coefficientes para el cálculo de la flexibilidad del engrane	173
5.2	Datos de diseño para los casos de estudio	175
5.3	Coefficientes de rigidez del engrane ($c_{\gamma\beta}$) para cada ancho de cara considerado en el estudio	176
5.4	Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos	177
5.5	Condiciones de contorno aplicadas al modelo de elementos finitos	177
6.1	Resultados de contacto para el caso I	229
6.2	Resultados de contacto para el caso II	230
6.3	Parámetros mallado uniforme	234
6.4	Resultados de contacto al variar el número de elementos en el caso I	234

6.5	Resultados de contacto al variar el número de elementos en el caso II . . .	235
6.6	Parámetros de control de refinamiento de malla	246
6.7	Resultados de contacto del caso de estudio I obtenidos mediante las configuraciones mostradas en la tabla 6.8.	248
6.8	Resultados de contacto del caso de estudio II obtenidos mediante las configuraciones mostradas en la tabla 6.8.	250
6.9	Tabla de equivalencias entre casos de mallado uniforme y casos con refinamiento adaptativo	251
6.10	Coste computacional asociado a cada caso de estudio	252
6.11	Datos de diseño para los casos de estudio de la transmisión mostrada en la figura 1.13	258
6.12	Configuraciones de transmisión	259
6.13	Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos	259
6.14	Condiciones de contorno aplicadas al modelo de elementos finitos	260
6.15	Desalineación en los ejes para el caso III calculadas mediante el modelo de elementos finitos y diferencias relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto	261
6.16	Desalineación en los ejes para el caso IV calculadas mediante el modelo de elementos finitos y diferencias relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto	261
6.17	Desalineación en los ejes para el caso V calculadas mediante el modelo de elementos finitos y diferencias relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto	261
6.18	Resultados de presión de contacto máxima para el caso III obtenidos a partir del modelo de elementos finitos y desviaciones relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto	262
6.19	Resultados de presión de contacto máxima para los casos IV y V obtenidos a partir del modelo de elementos finitos y desviaciones relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto	265
6.20	Convergencia del algoritmo para el caso III.3 cuando L_{max} se mantiene constante	266
6.21	Convergencia del algoritmo para el caso III.3 cuando L_{max} se varía entre iteraciones	267
6.22	Resultados de contacto para el caso III.3 cuando no se tiene en cuenta el efecto de la flexión del diente	268
6.23	Resultados de contacto para el caso IV.3 cuando no se tiene en cuenta el efecto de la flexión del diente	269
7.1	Parámetros que definen la geometría de la herramienta de corte	280
7.2	Datos de diseño para los casos de estudio	284
7.3	Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos	284
7.4	Condiciones de contorno aplicadas al modelo de elementos finitos	285
7.5	Datos de diseño para los casos de estudio	285
7.6	Geometrías compensadas modificadas aplicando un abombado completo utilizando perfiles parabólicos	289

7.7 Geometrías compensadas modificadas aplicando un abombado parcial utilizando redondeos parabólicos	290
---	-----

Esta tesis doctoral está dedicada a mis abuelos:

*Teresa Sos y Emilio Casanova,
Francisca Herrera y Emilio Roda.*

Capítulo 1

Introducción

1.1 Máquinas, mecanismos y transmisiones

Una máquina industrial es un sistema electromecánico que convierte la energía que le es suministrada, habitualmente en forma de energía eléctrica, en trabajo útil [3]. Generalmente se compone de una fuente de potencia, un sistema electrónico capaz de controlar dicha potencia y un sistema mecánico capaz de transformarla en una combinación útil de fuerza y movimiento.

En dicho sistema mecánico se puede identificar habitualmente un punto de entrada, sobre el cual se aplica la potencia, y uno o varios puntos de salida, en los que se sitúan los actuadores. Entre estos puntos, los sistemas mecánicos pueden estar compuestos por distintos elementos, que serán los encargados de transmitir y transformar la potencia desde el punto de entrada al mecanismo hasta el punto de salida. Será el diseñador quien escoja la mejor combinación de estos elementos para la composición del sistema mecánico, en función de las características que éste deba cumplir.

Las transmisiones mecánicas se encuentran entre esos elementos que componen habitualmente los sistemas mecánicos, y se utilizan para transmitir potencia mediante movimientos, generalmente de rotación. Suelen disponer de un eje de entrada, sobre el que se aplica la potencia, y uno o varios ejes de salida. La principal ventaja de las transmisiones mecánicas, frente a otros tipos de transmisiones, es que su eficiencia es muy elevada, y en el mundo industrial actual, esta característica es cada día más importante.

Entre los motivos por los que habitualmente se incluyen transmisiones mecánicas en un sistema mecánico se pueden citar los siguientes:

TABLA 1.1: Tipos de transmisiones mecánicas y frecuencia de uso. Datos extraídos de la referencia [2].

Tipo transmisión	Método transmisión	Tipo interacción	Frecuencia
Ruedas de fricción	Fricción	Contacto directo	2%
Correa	Fricción	Transmisión flexible	5%
Engranaje	Engrane	Contacto directo	80%
Cadena	Engrane	Transmisión flexible	13%

- (i) El eje de entrada y el eje de salida no son coaxiales y no permiten la conexión directa entre la fuente de potencia y el actuador.
- (ii) La velocidad requerida en el punto de salida del mecanismo difiere de la velocidad con la que se mueve en el punto de entrada.
- (iii) El punto de salida requiere de fuerzas muy distintas de las que se aplican en el punto de entrada.
- (iv) La velocidad en el punto de salida se debe cambiar de forma frecuente, mientras que se dispone de una velocidad constante en el punto de entrada.
- (v) En ocasiones, por motivos de seguridad, facilidad de mantenimiento, o simplemente por las dimensiones de la máquina.

Un parámetro fundamental de toda transmisión es su eficiencia (η). El eje de entrada de la transmisión mecánica recibe una potencia P_E a una velocidad de giro n_E , y proporciona en su eje de salida una potencia P_S ($P_S < P_E$) a una velocidad de giro n_S . La relación entre la potencia de entrada y la potencia de salida (P_S/P_E) es la eficiencia de la transmisión, y es un parámetro importante, pues ofrece información de la cantidad de potencia que se pierde en procesos no productivos.

Otro parámetro fundamental para caracterizar una transmisión mecánica es la relación de transmisión (u), que representa la relación entre la velocidad de rotación del eje de entrada y la velocidad de rotación del eje de salida (n_E/n_S). Cuando $n_E > n_S$, se dice que la transmisión es reductora; por el contrario, si $n_S > n_E$ se dice que la transmisión es multiplicadora.

La transmisión de potencia entre distintos ejes se puede realizar por fricción o por interferencia mecánica entre sus componentes (engrane), por contacto directo o a través de una conexión flexible. Las transmisiones más utilizadas resultantes de la combinación de estas posibilidades se muestran en la tabla 1.1, junto con la frecuencia aproximada con la que se utilizan en la industria.

Las transmisiones de engranajes tienen ventajas sobre los otros tipos de transmisiones en muchos aspectos, especialmente en la seguridad, la duración, la eficiencia y sus dimensiones reducidas. Este es el motivo por el que las transmisiones de engranajes constituyen cerca del 80% de las transmisiones mecánicas utilizadas en la industria, y constituyen el objeto del presente trabajo.

1.2 Transmisiones de engranajes

Un engranaje se define como un elemento dentado diseñado para recibir o transmitir movimiento a otro elemento dentado, a través de la interferencia entre sus dientes. Los dos engranajes pueden girar alrededor de ejes cuyas posiciones relativas están fijadas en el espacio, formando lo que se conoce como una pareja de engranajes. Las parejas de engranajes transmiten potencia desde el eje conductor al eje conducido a través de la presión que ejercen los dientes del engranaje conductor (habitualmente el de menor tamaño o piñón) sobre los dientes del engranaje conducido (habitualmente el de mayor tamaño o rueda). Para conseguir una relación de transmisión constante entre el eje conductor y el eje conducido, los dientes de las ruedas dentadas que transmiten el movimiento deben poseer perfiles conjugados.

Las principales ventajas que ofrecen las transmisiones de engranajes con respecto a otros tipos de transmisiones son:

- (i) Poseen una alta fiabilidad, y sus componentes son duraderos.
- (ii) Permiten transmitir cargas grandes utilizando dispositivos de tamaño reducido.
- (iii) Tienen un alto grado de eficiencia mecánica.
- (iv) La transferencia de potencia del eje conductor al eje conducido se produce sin grandes deslizamientos. Además, pueden soportar picos de carga elevados.
- (v) Su mantenimiento es sencillo comparado con el de otros tipos de transmisión.

Algunos de los inconvenientes que presentan este tipo de transmisiones es que pueden ser ruidosas e introducen vibraciones en el sistema mecánico. Además, tienen altos costes de producción, debido a que deben satisfacer requerimientos elevados en cuanto a la potencia que transmiten, en la velocidad a la que giran, en la precisión de su fabricación y en la precisión de trabajo. Por ese motivo, no es fácil fabricar transmisiones de alta calidad, y a tal efecto será necesario disponer de un alto grado de conocimiento y de experiencia.

En transmisiones de engranajes, se cumple que la relación de transmisión es inversamente proporcional a la relación entre el número de dientes del piñón y de la rueda (z_2/z_1).

1.2.1 Tipos de transmisiones de engranajes

Las transmisiones de engranajes se pueden dividir entre aquellas que ofrecen una relación de transmisión constante y las que ofrecen una relación de transmisión variable. A continuación se describen las características principales de estos tipos de transmisiones de engranajes.

Transmisiones de engranajes de relación de transmisión constante

En las transmisiones mecánicas de relación de transmisión constante, la velocidad de giro constante del eje de entrada (n_E) produce una velocidad de giro constante en el eje de salida (n_S). En general, el diseño de este tipo de transmisiones se realiza considerando los datos de la potencia disponible en el eje de entrada o la potencia requerida en el eje de salida, las velocidades de giro de los ejes de entrada y salida, la posición relativa de los ejes y las distancias entre ellos, y las condiciones de operación de la transmisión. Las transmisiones mecánicas de relación de transmisión constante se dividen en:

- (i) Transmisiones de ejes fijos (figura 1.1a). En este tipo de transmisiones de engranajes, el único movimiento que pueden realizar los ejes es el giro sobre su propio eje de revolución.
- (ii) Transmisiones de ejes móviles (figura 1.1b). En este tipo de transmisiones de engranajes, al menos uno de sus ejes, además de la rotación sobre su eje de revolución, tiene un movimiento de traslación.

En su forma más básica, las transmisiones de engranajes de ejes fijos están compuestas por una pareja de ruedas dentadas instaladas sobre sus respectivos ejes, dotados exclusivamente de movimientos relativos de rotación. Pueden operar de forma individual, o se pueden acompañar de otros componentes para formar un sistema de transmisión, albergado en una caja especial, como en el caso de las cajas de engranajes. También se pueden acompañar de otras parejas de engranajes, de manera que alguno de los ejes soporte a más de un engranaje, formando lo que se conoce como un tren de engranajes, como el que se muestra en la figura 1.1a. Los trenes de engranajes sirven para conseguir relaciones de transmisión elevadas en espacios reducidos.

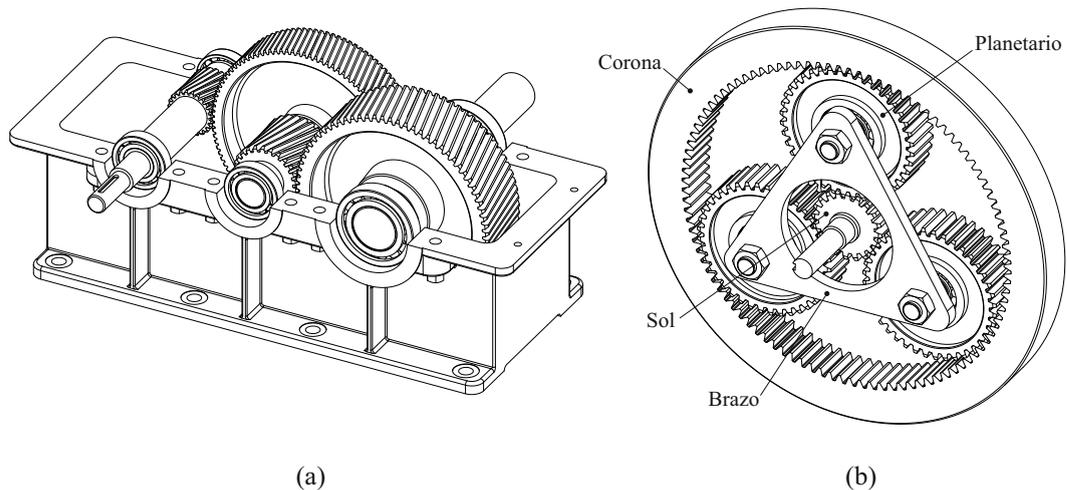


FIGURA 1.1: Transmisiones de engranajes de relación de transmisión constante

Por otro lado, las transmisiones de engranajes de ejes móviles (planetarios) son aquellas en las que al menos una rueda está dotada de un movimiento combinado de rotación y traslación. Habitualmente están compuestas por uno o varios engranajes solares, una corona, uno o varios engranajes planetarios, y un brazo que une a los distintos engranajes planetarios, como se muestra en la figura 1.1b.

Los planetarios tienen varias ventajas sobre las transmisiones de ejes fijos, entre las cuales está el hecho de que se pueden obtener razones de transmisión más grandes en espacios más pequeños y siempre son reversibles. Además, ofrecen la posibilidad de disponer de salidas bidireccionales, concéntricas y simultáneas, a partir de una única entrada unidireccional. Estas características los hacen populares en el sector de la automoción.

Transmisiones de engranajes de relación de transmisión variable

En las transmisiones con relación de transmisión variable, la velocidad constante en el eje de entrada (n_E) resulta en una velocidad variable en el eje de salida (n_S).

La forma más común de transmisiones de engranajes de relación de transmisión variable son las cajas de cambios. Estas transmisiones funcionan por el principio de intercambiabilidad de los engranajes fabricados a partir de la misma cremallera de corte. Los engranajes se desplazan axialmente, produciendo relaciones de transmisión distintas en función de la pareja de engranajes que transmitan el movimiento. En la figura 1.2 se muestra un esquema del funcionamiento de este tipo de transmisiones. En este ejemplo, los engranajes 1 y 4 tienen exactamente el doble de dientes que los engranajes 2 y 3. En la figura 1.2a, la potencia se transmite desde el eje de entrada al eje de salida a través del contacto entre las ruedas 1 – 3, obteniendo en este caso una relación de transmisión $u = 1/2$. En la figura 1.2b se observa como al desplazar axialmente el eje de entrada,

la potencia se transmite desde el eje de entrada al eje de salida a través de las ruedas 2 – 4, obteniendo en este caso una relación de transmisión $u = 2$.

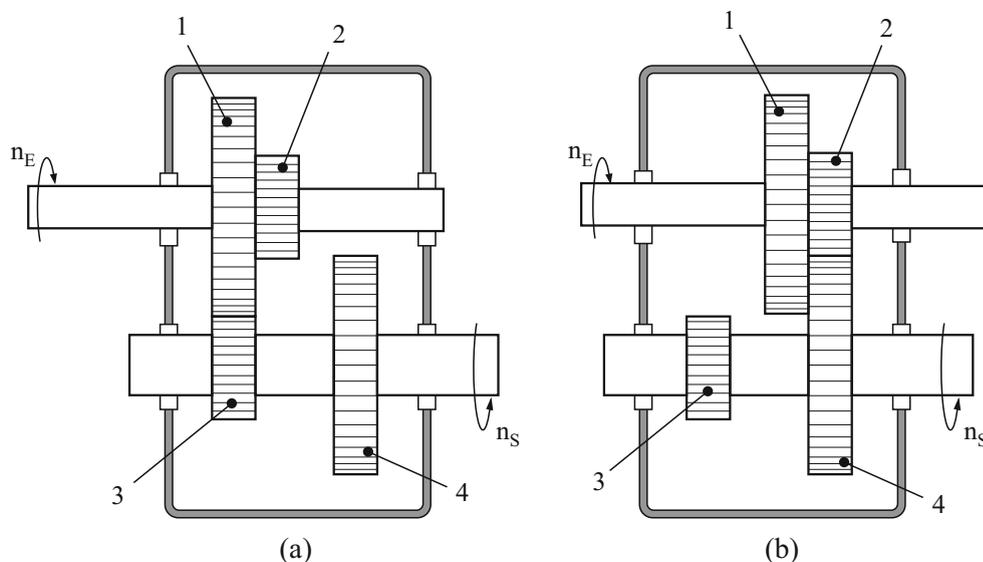


FIGURA 1.2: Esquema de una caja de cambios

Este tipo de transmisiones se utiliza frecuentemente para los cambios de marcha en automoción y en máquinas herramientas.

1.2.2 Tipos de parejas de engranajes

Una transmisión de engranajes se compone por una o varias parejas de ruedas dentadas. A continuación se detallan algunos de los tipos de parejas de ruedas dentadas más utilizados en la industria, agrupadas según la posición relativa que ocupan sus respectivos ejes.

Cuando las ruedas dentadas se utilizan para transmitir potencia entre ejes paralelos se pueden clasificar en:

- (i) Engranajes cilíndricos rectos (figura 1.3a). Este tipo de engranajes se utiliza para transmitir potencia entre ejes paralelos o entre un eje y una cremallera. Los dientes de un engranaje cilíndrico recto se disponen radialmente, espaciados uniformemente a lo largo de la periferia de la rueda dentada y paralelos al eje sobre el que el engranaje va instalado. El contacto teórico entre una pareja de dientes resulta en una línea recta, que es paralela a los ejes de rotación de las ruedas dentadas. Generalmente son concebidos para trabajar a velocidades bajas, pero cuando el ruido no es un problema, pueden trabajar prácticamente a la misma velocidad que cualquier otro tipo de engranajes.

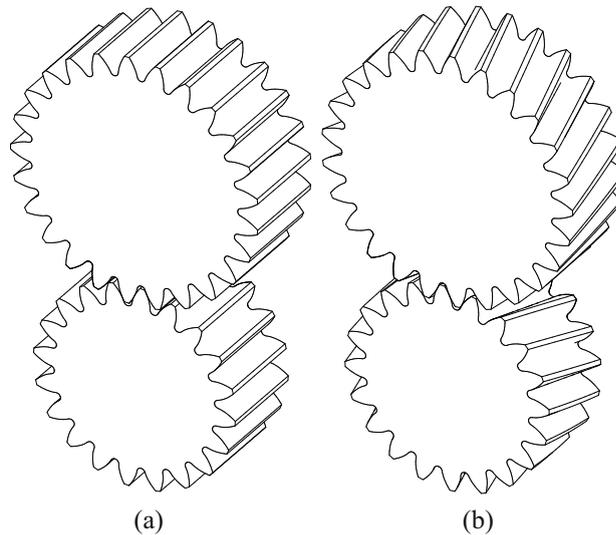


FIGURA 1.3: Transmisiones de engranajes para ejes paralelos

- (ii) Engranajes cilíndricos helicoidales (figura 1.3b). Igual que los engranajes cilíndricos rectos, este tipo de engranajes se utiliza para transmitir movimiento entre ejes paralelos o entre un eje y una cremallera. Los dientes de estos engranajes están inclinados con respecto al eje de giro del engranaje. Debido a esta inclinación, el proceso de engrane se produce de manera que siempre hay dos o más parejas de dientes en contacto. Esto permite un funcionamiento más suave que en los engranajes cilíndricos rectos. Sin embargo, a diferencia de los engranajes cilíndricos rectos, en los engranajes cilíndricos helicoidales aparece una fuerza axial, que repercute en la necesidad de instalarlos sobre rodamientos capaces de soportar cargas axiales.

Las parejas de engranajes más habituales para transmitir potencia entre ejes que se cortan son:

- (i) Engranajes cónicos. Este tipo de engranajes transmite potencia entre dos ejes que se cortan (normalmente a un ángulo de 90°). En general ofrecen unos elevados grados de eficiencia, que pueden superar el 98%. En función de la forma de sus dientes, se pueden clasificar en dos tipos:
- (i.a) Engranajes cónicos de dientes rectos (figura 1.4a). Estos engranajes poseen dientes rectos, que si se extendiesen hacia el centro del engranaje, intersectarían en su eje. Por este motivo, la acción conjugada entre dientes es similar a la de un cono girando sobre otro cono. El uso de este tipo de engranajes se limita generalmente a transmisiones que trabajan a velocidades bajas, y cuando el exceso de ruido no resulta un problema.
- (i.b) Engranajes cónicos espirales. Estos engranajes poseen dientes que son curvos y oblicuos, como se muestra en la figura 1.4b. La inclinación de los dientes

resulta en un engrane gradual, en el que las líneas de contacto son continuas, habiendo en todo momento más de una pareja de dientes en contacto. Debido a esta continuidad en el engrane, la carga se transmite desde el engranaje conductor al engranaje conducido de una forma más gradual que en los engranajes cónicos de dientes rectos. Estos engranajes tienen habitualmente una capacidad de carga más elevada que los de dientes rectos. Además, su uso es preferible cuando la transmisión trabaja a velocidades más elevadas y cuando los engranajes son muy pequeños.

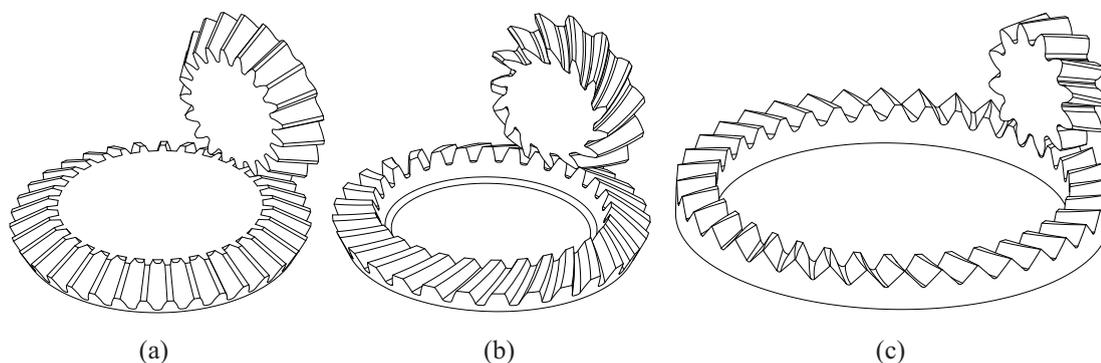


FIGURA 1.4: Transmisiones de engranajes para ejes que se intersectan

- (ii) Engranajes encarados (figura 1.4c). En este tipo de parejas de engranajes, una de las ruedas dentadas tiene los dientes mecanizados en una de las caras perpendiculares a su eje de giro. La otra rueda dentada (piñón), generalmente cilíndrica recta o helicoidal, está instalada sobre un eje que se intersecta con el de la rueda. Los rodamientos del piñón soportan la mayor parte de la carga axial, mientras que los rodamientos de la rueda soportan carga axial y radial. La distancia de montaje no es tan crítica como en engranajes cónicos. Aunque no se consideran engranajes cónicos, el funcionamiento de ambos es muy similar.

Por último, las parejas de engranajes más comunes para transmitir potencia entre ejes que se cruzan en el espacio son:

- (i) Tornillo sin fin. Este tipo de transmisiones consisten en un tornillo sin fin y una rueda dentada, como se muestra en la figura 1.5a. Transmiten potencia entre ejes que se cruzan, usualmente dispuestos en ángulos rectos. Su eficiencia es más bien reducida, raramente supera el 90%, debido al gran deslizamiento que se produce en el contacto. Sin embargo, producen relaciones de transmisión muy elevadas en un volumen muy compacto. Además, tienen la capacidad de autobloquearse, y por lo tanto, pueden utilizarse para sostener cargas. Para incrementar el área de contacto entre los dientes se utilizan perfiles de dientes de envolvente simple o de

envolvente doble. En un conjunto de envolvente simple los dientes del engranaje envuelven parcialmente al tornillo sin fin. En un conjunto de envolvente doble el tornillo sin fin también envuelve al engranaje, haciendo que la forma del tornillo sin fin se asemeje a la de un reloj de arena en lugar de a la de un cilindro. Esta configuración incrementa la complejidad y el coste de fabricación, pero también incrementa la capacidad de carga de la transmisión.

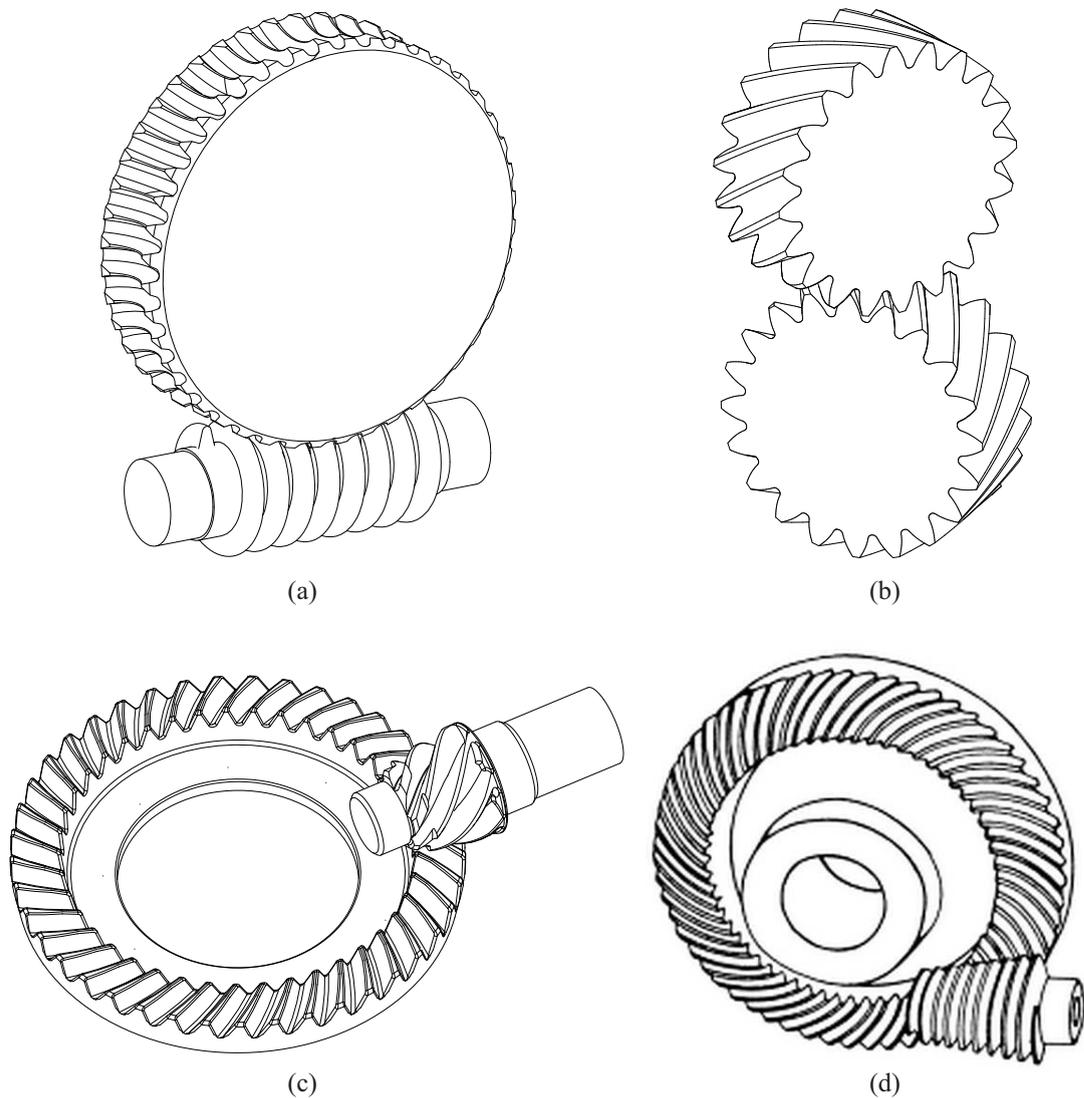


FIGURA 1.5: Transmisiones de engranajes para ejes que se cruzan en el espacio

- (ii) Engranajes helicoidales para ejes cruzados (figura 1.5b). Los engranajes helicoidales para ejes cruzados tienen la misma geometría que los engranajes cilíndricos helicoidales, pero se utilizan para transmitir potencia entre ejes que se cruzan en el espacio. En su funcionamiento, existe una gran componente de movimiento de deslizamiento entre las superficies en contacto, por lo que es importante realizar una buena selección de los materiales y los lubricantes utilizados, para reducir al mínimo la fricción. Mientras que las parejas de engranajes cilíndricos helicoidales

para transmitir potencia entre ejes paralelos deben tener sentidos de hélice opuestos, cuando se utilizan para ejes cruzados no es necesario cumplir con esta premisa. La relación de transmisión de estos engranajes depende del número de dientes, pero no del diámetro de paso de las ruedas dentadas, lo que proporciona mucha flexibilidad en la elección de la relación de transmisión, distancia entre centros y dimensiones de los engranajes. Puesto que el contacto relativo entre parejas de engranajes es en teoría como el de dos cilindros cruzados, la capacidad de carga de estos engranajes no dependerá de su ancho de cara, siempre que éste sea suficiente para cubrir todo el patrón de contacto.

- (iii) Engranajes hipoides (figura 1.5c). Este tipo de engranajes son, en apariencia, similares a los engranajes cónicos espirales. En cambio, su funcionamiento es distinto, pues los ejes de giro de las ruedas dentadas no se intersectan, sino que se cruzan en el espacio, proporcionando una mayor flexibilidad en el diseño de la transmisión. Cuando están en funcionamiento, los engranajes hipoides funcionan incluso de forma más suave y silenciosa que los cónicos espirales, y su capacidad de carga es superior, aunque su eficiencia es generalmente más reducida.
- (iv) Engranajes espiroides (figura 1.5d). Consisten de un piñón cónico, cuya forma se asemeja a un tornillo, y una rueda con dentado curvado mecanizado sobre una de las caras del engranaje perpendiculares a su eje de rotación. Ofrecen relaciones de transmisión muy elevadas en montajes compactos, tienen costes bajos de fabricación y una elevada capacidad de carga, que los hace aptos para muchas aplicaciones.

Este trabajo está centrado en las transmisiones de potencia entre ejes paralelos. No obstante, algunos de los métodos desarrollados serán aplicables a otros tipos de transmisiones de engranajes.

1.2.3 Principales criterios de diseño de transmisiones de engranajes

Cuando se diseña una transmisión de engranajes, es habitual realizar un diseño preliminar de la misma antes de proceder con el costoso diseño de detalle de todos los elementos que la compondrán. En esta fase preliminar de diseño se involucran acciones como la determinación de las tensiones a las que estará sometida la transmisión en condiciones de trabajo, la estimación del tipo y el tamaño de los engranajes teniendo en cuenta las restricciones de espacio y peso de la transmisión, así como otros parámetros de funcionamiento de relevancia para la transmisión.

En la figura 1.6 se muestra un diagrama de flujo del proceso habitual de diseño preliminar de los engranajes, tal y como lo propone Childs [4]. De acuerdo con esta propuesta, el proceso de diseño empieza con la recopilación de los datos de partida y los requerimientos para los cuales se diseña la nueva transmisión (paso **A1**). Aunque en algunos casos pueden existir otros datos de relevancia, los más comunes pueden resumirse en:

- (i) La potencia o el par de salida requerido.
- (ii) La relación de transmisión.
- (iii) La velocidad de entrada o la velocidad requerida a la salida.
- (iv) La vida útil esperada para la transmisión.
- (v) Las condiciones en las que trabajará la transmisión.
- (vi) La naturaleza de las cargas a las que la transmisión de engranajes estará sometida durante su funcionamiento.
- (vii) Otras consideraciones, como requerimientos de espacio o peso, distancias y posiciones relativas entre ejes, etc.

Una vez conocidos estos datos, el siguiente paso es determinar el número de dientes del piñón (z_1) y de la rueda (z_2) (paso **A2**). Esta decisión vendrá gobernada por la relación de transmisión deseada, pues como se ha comentado anteriormente, en transmisiones de engranajes esta relación viene determinada por el cociente z_2/z_1 . Maitra [5] hizo algunas recomendaciones sobre la elección del número de dientes del piñón y de la rueda:

- (i) Es aconsejable escoger un número de dientes que asegure que el grado de recubrimiento de la transmisión sea superior a $\varepsilon_\alpha = 1.1$, entendiendo grado de recubrimiento como el número medio de dientes que hay en contacto durante un ciclo de engrane. Cuando la velocidad de giro de la transmisión es elevada, es recomendable que el grado de recubrimiento sea superior a $\varepsilon_\alpha = 1.5$. Dudley [1] propone algunas ecuaciones que permiten determinar el grado de recubrimiento en engranajes cilíndricos rectos y helicoidales.
- (ii) Se recomienda que el cociente z_2/z_1 no sea un número entero, para evitar que dos dientes entren en contacto de forma repetida durante el funcionamiento de la transmisión.
- (iii) En engranajes cilíndricos, se recomienda que entre el piñón y la rueda sumen más de 24 dientes en engranajes con dentado externo, y que la diferencia entre el número de dientes del piñón y de la rueda sea superior a 10 en engranajes con dentado interno.

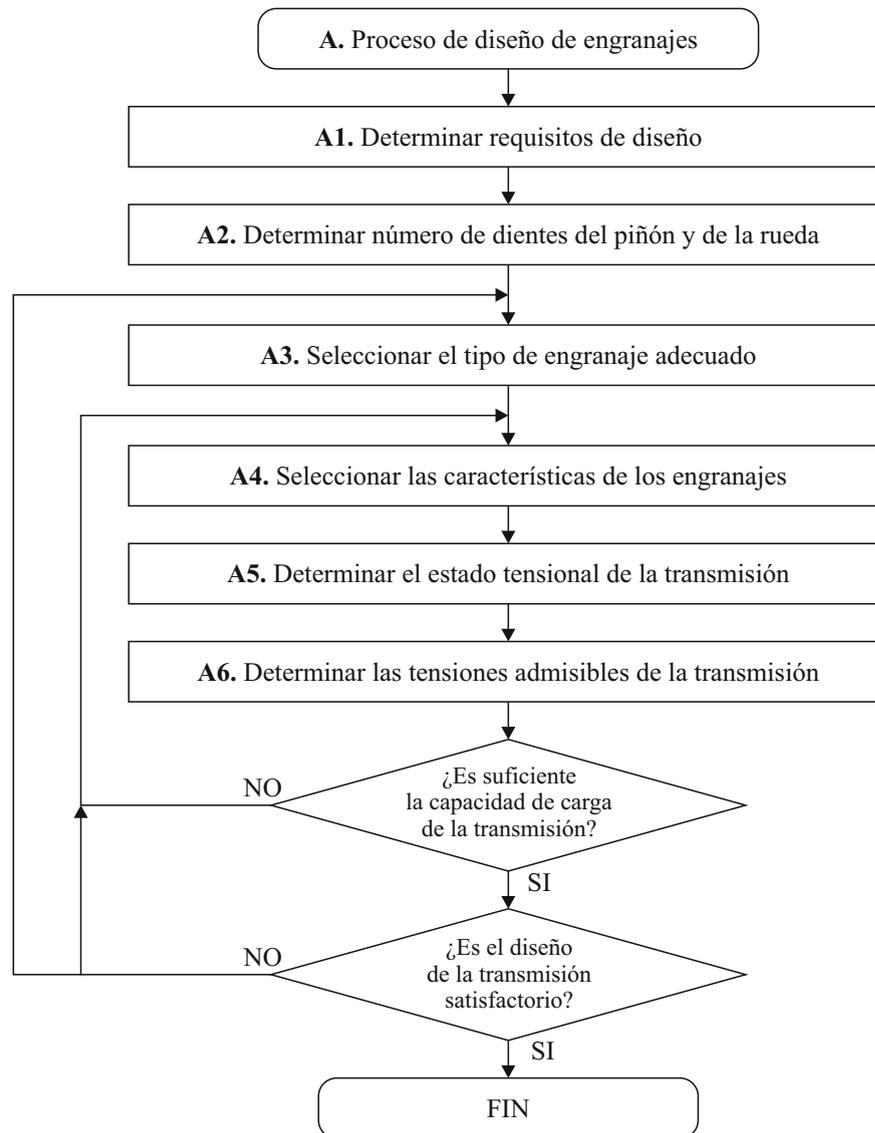


FIGURA 1.6: Proceso de selección de engranajes

- (iv) El número mínimo de dientes debe garantizar que no se produzcan interferencias entre las ruedas dentadas. En tal caso, será necesario hacer modificaciones en la geometría de los dientes.

El siguiente paso es escoger el tipo de parejas de engranajes que compondrá la transmisión (paso **A3**). En la mayoría de las ocasiones esta elección viene impuesta por la posición relativa de los ejes de entrada y de salida de la transmisión. En el apartado 1.2.2 se han descrito los distintos tipos de parejas de engranajes, así como cuáles se utilizan en función de la posición relativa de sus ejes. La elección del tipo de pareja de engranajes más adecuada se hace después de contemplar las ventajas y desventajas de las distintas posibilidades.

Cuando se ha decidido cuál es la pareja de engranajes más apropiada para la transmisión de potencia, es necesario elegir las características que definen a los engranajes (paso **A4**). El diseñador deberá escoger, entre otros parámetros que afectan al diseño, las siguientes características:

- (i) El material con el que se fabricarán los engranajes. Además de las consideraciones que afectarán a la resistencia del engranaje, la elección del material también depende de los requerimientos de espacio, de peso y de precio impuestos para el nuevo diseño.
- (ii) El módulo de la transmisión (m). Suponiendo que el número de dientes de las ruedas dentadas se mantiene constante, a medida que se incrementa la magnitud del módulo de la transmisión, también aumenta la cantidad de potencia que ésta es capaz de transmitir. El límite inferior del módulo vendrá impuesto por la resistencia a la flexión del diente y por la tecnología disponible para fabricar el engranaje. Por otra parte, incrementar el módulo repercute en el incremento del diámetro primitivo del engranaje, pues ambos parámetros están relacionados a través del número de dientes. Esto impondrá un límite superior a la magnitud del módulo, relacionado entre otras cosas con el tamaño, el peso, el precio y el aumento de la velocidad de los engranajes en la línea de paso.
- (iii) El ancho de cara de los engranajes (b). A medida que se incrementa el ancho de cara de los engranajes, se reduce la intensidad de carga que recae sobre ellos. No obstante, existen distintas recomendaciones sobre la relación entre el ancho de cara escogido y el resto de dimensiones del engranaje. Generalmente se recomienda que la relación entre el ancho de cara y el diámetro primitivo del piñón (d_1) sea inferior a 1.2. Normalmente, se especifica un ancho de cara del piñón unos pocos milímetros superior al de la rueda, para asegurar un buen engrane en condiciones de servicio, y disminuir los efectos que las desalineaciones de los engranajes tiene sobre el funcionamiento de la transmisión.

Cuando se han fijado estos parámetros, es posible realizar una estimación de las tensiones a las que estará sometida la transmisión durante su funcionamiento (paso **A5**). De cara a obtener un buen diseño, es importante que la estimación de estas tensiones sea tan cercana a la realidad como sea posible, contemplando todos aquellos efectos que alteren el estado tensional de los engranajes. En el apartado [1.3.2.1](#) se describen los métodos más relevantes utilizados para la estimación de las tensiones producidas en una transmisión de engranajes durante su funcionamiento.

De la misma manera, también se puede realizar una estimación de las tensiones admisibles para que ese diseño de la transmisión no lleve a un fin prematuro de su vida útil

(paso **A6**). En el apartado 1.3.2.2 se proporciona más información sobre el cálculo de la magnitud de estas tensiones admisibles.

El conjunto de operaciones enmarcadas en los pasos **A4** – **A6** van encaradas a determinar si un diseño dado de la transmisión es capaz de transmitir la potencia requerida, y a este proceso se le conoce como la determinación de la capacidad de carga de la transmisión. Los niveles de tensión a los que se encuentra un diseño dado de la transmisión, determinados en paso **A5**, se comparan con los valores de tensión admisibles obtenidos del paso **A6**. En el caso de que las tensiones máximas sean mayores que las tensiones admisibles, es necesario repetir los pasos **A4** – **A6**, variando algunos de los parámetros de diseño especificados en el paso **A4**.

Si por el contrario las tensiones máximas a las que está sometida la transmisión diseñada son inferiores a las tensiones admisibles, el diseño escogido será capaz de transmitir la carga para la que es diseñado. En ese caso, habrá que determinar si las características de la transmisión resultante son apropiadas.

Dentro de estas comprobaciones, será necesario verificar que se cumplen todas las condiciones impuestas por los requisitos de diseño, incluidas aquellas referentes al tamaño, peso y precio de la transmisión resultante. Por otra lado, será necesario comprobar que el comportamiento de la transmisión durante su funcionamiento sea el apropiado, ofreciendo buena sincronía entre el eje de entrada y el eje de salida, manteniendo los niveles de vibración y ruido bajos, etc.

Si estas comprobaciones llevan a resultados insatisfactorios, será necesario modificar los valores de diseño escogidos en el paso **A4** y verificar si el nuevo diseño obtenido es capaz de satisfacer todos los requerimientos de diseño. En caso contrario, es posible que la solución pase por cambiar el tipo de parejas de engranajes seleccionados, y volver a empezar el proceso a partir del paso **A2**.

El procedimiento descrito en este apartado no siempre es lineal, y puede reordenarse de distintas formas, en función del desarrollo del proceso de diseño.

1.2.4 Nomenclatura de interés

En la figura 1.7 se muestra una porción de un engranaje cilíndrico recto. El *número de dientes* del engranaje se denota por z_1 y z_2 , donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia al piñón y a la rueda, respectivamente. Los cálculos referidos al engranaje se realizan en base a un circunferencia teórica denominada *circunferencia de paso*. El diámetro de la circunferencia de paso es el *diámetro de paso* y se denota por d_1 y d_2 .

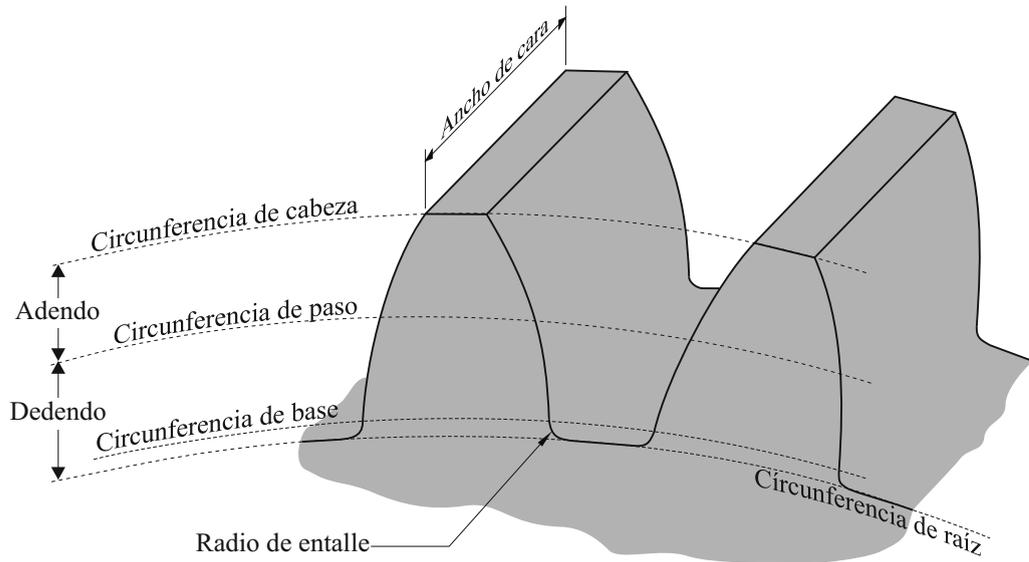


FIGURA 1.7: Geometría del engranaje

La relación existente entre el diámetro de paso y el número de dientes se denomina *módulo*, y se denota por m .

La *circunferencia de base* es la circunferencia a partir de la cual se desarrolla el perfil de evolvente. La *circunferencia de raíz* es una circunferencia que coincide con la parte más baja de los espacios entre dientes. La *circunferencia de cabeza* es una circunferencia que coincide con la parte más alta de los dientes del engranaje.

El *adendo* representa la altura del diente por encima de la circunferencia de paso, y se determina por la distancia radial entre la circunferencia de cabeza y la circunferencia de paso. El *dedendo* representa la profundidad del diente por debajo de la circunferencia de paso, y se determina por la distancia radial entre la circunferencia de paso y la circunferencia de raíz. La *altura total del diente* es la suma del adendo y del dedendo. Habitualmente estos parámetros se expresan en función del módulo del diente.

La figura 1.8 muestra los principales planos que se pueden definir en una transmisión formada por una pareja de engranajes de ejes paralelos:

- (i) El plano axial es el plano que contiene a los ejes de rotación de los dos engranajes.
- (ii) El plano de acción es tangente a las circunferencias de base de los dos engranajes.
- (iii) El plano de paso es perpendicular al plano axial y tangente a las circunferencias de paso.
- (iv) El plano transversal es perpendicular al plano axial y al plano de paso. En transmisiones de ejes paralelos, el plano transversal coincide con el plano de rotación de los engranajes.

- (v) El plano de tangente común es tangente a las superficies de los dientes y perpendicular al plano de acción.
- (vi) El plano normal es normal a la superficie del diente en el punto de paso, y perpendicular al plano de paso. En engranajes cilíndricos rectos el plano normal coincide con el plano transversal.

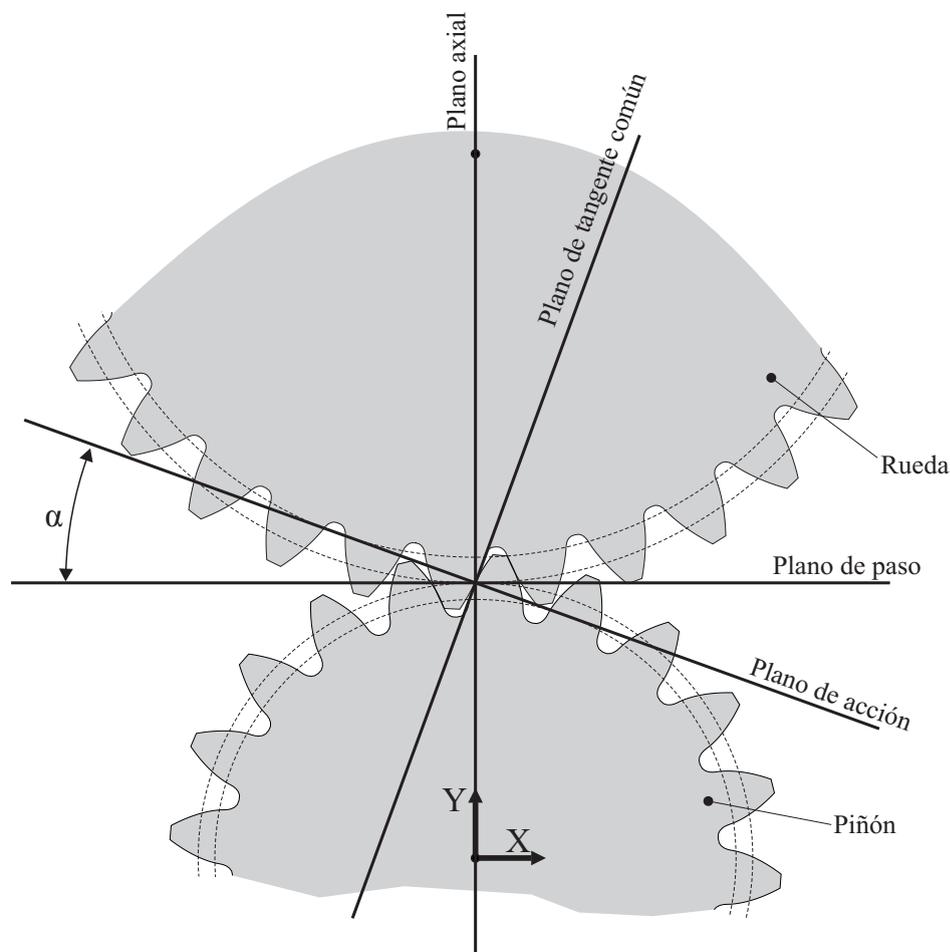


FIGURA 1.8: Geometría de contacto y ángulo de presión en dientes de engranaje

1.3 Aspectos a considerar en la determinación de la capacidad de carga de transmisiones de engranajes

Como se ha comentado en el apartado anterior, una parte fundamental dentro del proceso de desarrollo de una nueva transmisión de engranajes es determinar si un diseño dado será capaz de transmitir la potencia para la que se diseña sin que ello repercuta en un fin prematuro de la vida útil de la transmisión.

Durante su funcionamiento los engranajes están sometidos a distintos tipos de sollicitaciones, especialmente en forma de tensión. El diseñador debe ser capaz de obtener una estimación precisa de estas tensiones, para diseñar unos engranajes capaces de mantenerlas en todo momento dentro de unos límites admisibles. Estos límites admisibles vienen impuestos por los modos de fallo habituales de las transmisiones de engranajes.

En este apartado se describen en primer lugar los principales modos de fallo que se manifiestan habitualmente en transmisiones de engranajes. Posteriormente se realiza un análisis de aquellos métodos utilizados para estimar el estado tensional al que están sometidos los engranajes de una transmisión bajo carga, así como de los niveles admisibles de tensión que permiten que la transmisión funcione correctamente durante toda su vida útil. Por último, se analizan distintos fenómenos que influyen en el estado tensional de los engranajes y que pueden repercutir en una reducción de la vida útil de la transmisión.

1.3.1 Principales modos de fallo de una transmisión

Durante la vida útil para la que son diseñadas, las transmisiones de engranajes deben mantener un nivel de integridad que permita que su funcionamiento no se interrumpa ni se deteriore. Esto se consigue mediante un dimensionado correcto de los elementos que la componen, la elección adecuada del material con el que se fabrican, una fabricación experimentada y un control severo de la calidad. Para conseguir esta meta es necesario, entre otras cosas, conocer los tipos de fallo que se pueden producir en los engranajes, así como las causas que los producen.

De acuerdo con Jelaska [2], estos modos de fallo se pueden clasificar en dos grupos fundamentales: fallos de la transmisión por rotura de los engranajes y fallos de la transmisión por daños en las superficies de contacto de los dientes de los engranajes. A continuación se describen algunos de los principales fenómenos asociados a cada modo de fallo, resumidos en la tabla 1.2 junto con algunos datos estadísticos de la frecuencia en la que se produce cada uno.

Fallos de la transmisión por roturas de los engranajes

Los fallos de las transmisiones de engranajes como consecuencia de la rotura de alguna de las ruedas dentadas que las componen representan aproximadamente el 60% de las causas por lo que la vida útil de este tipo de transmisiones llega a su fin. Estos modos de fallo se pueden clasificar de la siguiente manera:

TABLA 1.2: Frecuencia en la que se produce cada modo de fallo. Datos extraídos de la referencia [2].

Modo de fallo	Fenómeno	Frecuencia
Rotura engranaje	Fractura por fatiga en la base del diente	33%
	Fractura en base del diente debido a sobrecargas	20%
	Fractura en las esquinas superiores del engranaje	5%
	Otros tipos de rotura	2%
Daño superficial	Picaduras	14%
	Desgaste y abrasión	20%
	Deformación plástica	6%
	Micropicaduras	—

- (i) Fractura por fatiga en la raíz del diente. Ocurre debido a la variación de las tensiones normales que se producen en la raíz del diente como consecuencia del momento flector. La grieta inicial se produce en el radio de entalle y se propaga hacia el radio de entalle del otro flanco del diente siguiendo las leyes de la mecánica de la fractura.
- (ii) Fractura en la base del diente debido a excesos de carga. Ocurre cuando la tensión de flexión máxima en la raíz del diente supera la tensión de rotura del material con el que se fabrica el engranaje.
- (iii) Fractura en alguno de los bordes de la superficie de contacto del diente. Ocurren como consecuencia de un montaje defectuoso o por malas condiciones de trabajo de la transmisión. Estos tipos de roturas se pueden evitar de forma sencilla mediante modificaciones en la geometría de los dientes.
- (iv) Otros tipos de rotura, que están principalmente relacionadas con la fractura del cuerpo del engranaje, cuando las grietas originadas en el radio de entalle del diente del engranaje, en lugar de propagarse tangencialmente se propagan radialmente.

Fallos de la transmisión por daños en las superficies de contacto de los dientes de los engranajes

Los fallos de las transmisiones de engranajes como consecuencia de daños en las superficies de contacto de los dientes de los engranajes representan aproximadamente el 40% de las causas por lo que la vida útil de este tipo de transmisiones llega a su fin. Estos modos de fallo se pueden clasificar de la siguiente manera:

- (i) Picaduras en la superficie de contacto. Este modo de fallo se produce debido a la fatiga superficial del material producida como consecuencia de tensiones de

contacto cíclicas que se producen en la superficie activa de los dientes. La grieta se inicia bajo la superficie del flanco en aquellos puntos en los que la tensión tangencial provocada por la presión de contacto excede los valores permisibles. Cuando esa grieta se propaga hacia la superficie, se arranca una pequeña porción de material, dejando un hoyo en la superficie del diente. A medida que este proceso se repite, aparecen más picaduras en la superficie, hasta que llega el momento en el que el diente está severamente dañado.

- (ii) **Desgaste.** El desgaste se define como una pérdida de material de las superficie de contacto. En transmisiones correctamente lubricadas, existe una fina capa de lubricante que evita el contacto directo entre los dientes del engranaje y la eliminación de asperezas. Cuando debido a presiones de contacto muy elevadas, a bajas velocidades de funcionamiento, a temperaturas elevadas o a lubricantes poco densos se produce una interrupción de la capa de lubricante, se produce el contacto directo entre los dientes de los engranajes, produciéndose el desgaste de las superficies de contacto. Existen dos tipos principales de desgaste: el desgaste adhesivo y el desgaste abrasivo. El primero se produce cuando, en ausencia de lubricante y debido a las altas presiones de contacto, se producen microsoldaduras en las superficies de los dientes en contacto que repercuten en el arranque de material de una de las superficies de contacto. El segundo se produce debido a la presencia de partículas de elevada dureza que se presionan y se arrastran contra la superficie de los engranajes, produciendo el deterioro de éstas.
- (iii) **Deformación plástica.** Este modo de fallo ocurre como consecuencia de la fluencia del material de la superficie de contacto de los dientes de los engranajes provocada por un exceso de carga. Como consecuencia de las fuerzas de fricción, las partículas de la capa superficial de los dientes del engranaje conductor tienden a alejarse del punto de paso, mientras que las del diente conducido tienden a aproximarse a este punto. De esta manera, se produce un surco en los dientes del engranaje conductor y una cresta en los dientes del engranaje conducido, que repercute en un funcionamiento defectuoso de la transmisión.
- (iv) **Micropicaduras.** Las micropicaduras son un fenómeno que ocurre en los contactos con rodadura y deslizamiento que operan en condiciones deficientes de lubricación. Este fenómeno empieza cuando las tensiones normales que se producen como consecuencia del deslizamiento provocan tensiones cortantes cíclicas bajo las superficies, que bajo el efecto cíclico de las tensiones de contacto, causan una acumulación de deformaciones plásticas. Estas deformaciones plásticas originan tensiones residuales que, después de cierto tiempo y como consecuencia de la fatiga, originan grietas. Las micropicaduras empiezan cuando estas grietas se propagan hacia la

superficie, y eliminan porciones diminutas de material. En general, la aparición de micropicaduras no supone un problema para la mayoría de transmisiones de engranajes. Sin embargo, la aparición progresiva de micropicaduras puede llevar a una pérdida de la precisión de la transmisión, a la aparición de cargas dinámicas y ruido. Si la aparición de micropicaduras continúa, puede resultar en picaduras de mayor tamaño y en situaciones de desgaste adhesivo.

1.3.2 Determinación de la capacidad de carga de una transmisión de engranajes

Determinar la capacidad de carga de una transmisión es verificar si un diseño dado de la transmisión es capaz de transmitir la potencia para la que se diseña sin que ello repercuta en un fin prematuro de su vida útil.

A tal efecto, el diseñador deberá ser capaz de estimar las tensiones a las que estarán sometidos los engranajes de la transmisión, así como los valores máximos que pueden alcanzar estas tensiones sin que comprometan la integridad de la transmisión. Como resulta obvio, un diseño apropiado de la transmisión deberá mantener los niveles máximos de tensión por debajo de los niveles admisibles.

1.3.2.1 Estado tensional de los dientes de engranaje bajo carga

En las transmisiones de engranajes, la potencia se transmite a través del contacto entre los dientes de las ruedas dentadas. Como consecuencia de este contacto, se produce una distribución de presión, que actúa sobre las superficies de los dientes del piñón y de la rueda.

Esta distribución de presión genera una serie de tensiones en la geometría de las ruedas dentadas. En la figura 1.9 se muestra una distribución de tensión típica sobre un diente de engranaje cilíndrico recto, obtenida a partir de ensayos experimentales de fotoelasticidad por Dolan y Broghamer [6]. Como se puede apreciar en esta imagen, y así se ha confirmado a lo largo de los años por multitud de autores, las tensiones más relevantes y que deben ser tenidas en cuenta en el diseño de una transmisión de engranajes son:

- (i) La tensión que se produce en el radio de entalle debido a la flexión del diente, denominada tensión de flexión.
- (ii) La tensión que se genera en la zona en la que se produce el contacto, denominada tensión de contacto.



FIGURA 1.9: Distribución de tensiones obtenida experimentalmente en por Dolan y Broghamer

La aproximación clásica que se ha utilizado para estudiar el contacto entre dientes puede ayudar a entender la naturaleza de las tensiones que este fenómeno induce en los dientes de engranaje. El contacto teórico entre una pareja de dientes de una transmisión de engranajes cilíndricos con perfil de evolvente es una línea recta. A medida que las superficies de contacto se mueven una con respecto a la otra, dicha línea de contacto se desplaza sobre las superficies de los dientes. Como se muestra en la figura 1.10b, este movimiento relativo entre las superficies es de rodadura pura (R) cuando los dientes contactan en la circunferencia de paso. Por debajo de la línea de paso el movimiento entre las superficies es una combinación de rodadura (R) y deslizamiento (S). Por encima de la línea de paso, el movimiento entre superficies también es de rodadura y deslizamiento, pero en este caso el deslizamiento se produce en el sentido opuesto.

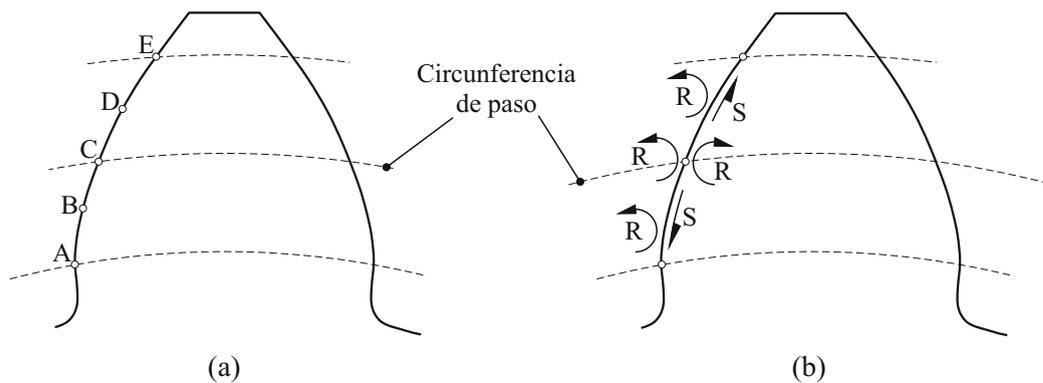


FIGURA 1.10: Estudio del contacto entre dientes de engranajes

La figura 1.10a muestra algunos puntos de interés que se producen como consecuencia del engrane sobre la superficie de contacto del diente de un piñón cilíndrico recto. El punto A indica el primer punto en el que este diente entra en contacto con el diente conjugado de la rueda y el punto E indica el último punto en el que se produce el contacto entre esta pareja de dientes. Entre el punto A y el punto B , la carga transmitida se divide

entre esta pareja de dientes y la pareja de dientes que la precede en el ciclo de engrane, siendo el punto B el primer punto en el que el contacto se produce únicamente en esta pareja de dientes (LPSTC, lowest point of single tooth contact). Entre el punto D y el punto E , la carga transmitida se divide entre esta pareja de dientes y la pareja de dientes que la sucede en el ciclo de engrane, siendo D el último punto en el cual el contacto se produce únicamente en esta pareja de dientes (HPSTC, highest point of single tooth contact). Cuando el contacto entre dientes se produce entre el punto B y el punto D , toda la carga se transmite a través de esta pareja de dientes.

La naturaleza del contacto entre dientes de engranajes cilíndricos es similar a la del contacto entre dos cilindros, cuyo radio coincide con el radio de curvatura de las superficies de los dientes en el punto en el que se produce el contacto. La curvatura de estas superficies varía en función de las dimensiones del perfil de los dientes engranados y de la zona de los dientes en la que se produce el contacto. Aunque teóricamente el contacto se produce en una línea, debido a las fuerzas de compresión esta línea se convierte en una banda de cierta anchura, que se extiende a lo largo del ancho de cara de los engranajes.

Las tensiones de contacto más elevadas se producen cuando los dientes contactan en las cercanías de la circunferencia de paso, debido a que toda la carga se transmite, habitualmente, a través de una única pareja de dientes. Generalmente, el efecto del deslizamiento es despreciable en estas zonas de contacto, por lo que tradicionalmente se ha estudiado este contacto bajo las hipótesis de Hertz [7]. La distribución de tensiones que se produce debido a este contacto es bastante compleja. De acuerdo con Dudley [1], la tensión de compresión máxima se puede localizar en la zona central del área de contacto. Justo debajo de este punto, en el interior de los dientes, se produce el valor máximo de la tensión tangencial, causante de fallos como la picadura.

Cuando la lubricación de la transmisión es deficiente, el movimiento de deslizamiento combinado con el efecto de la fricción introduce unas tensiones adicionales en el engranaje: en la dirección del deslizamiento, se desarrolla una tensión de compresión, mientras que la dirección contraria al deslizamiento se produce una tensión de tracción.

No obstante, es importante destacar que este análisis del contacto entre dos engranajes cilíndricos rectos corresponde a una situación ideal, y las tensiones de contacto pueden variar sustancialmente debido a la concentración de tensiones que se produce como consecuencia del contacto en el borde de las superficies, a errores de alineación, etc.

Por otra parte, la figura 1.11 muestra un análisis teórico de las tensiones que se producen en la raíz de un diente de un engranaje cilíndrico recto bajo carga. En esta aproximación clásica, el engranaje se considera como una viga viga en voladizo, sometida a una carga

(F) que se considera uniformemente distribuida a lo largo de todo el ancho de cara del engranaje.

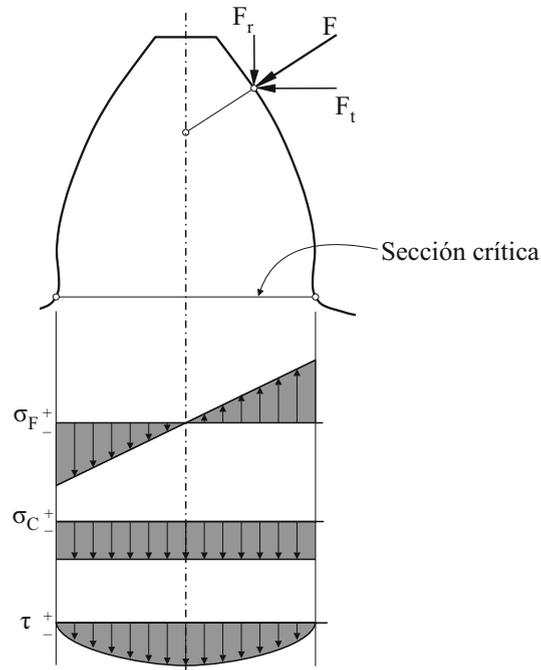


FIGURA 1.11: Análisis teórico de la distribución de tensiones en la raíz de un diente de engranaje cilíndrico recto

Aunque este tipo de análisis no es una representación fiel del estado tridimensional de tensiones que se produce en la raíz del diente, permite obtener una descripción simplificada de como se distribuyen las tensiones en la raíz del diente. Generalmente, la componente tangencial de la carga (F_t) provoca la aparición de un momento flector que origina unas tensiones de flexión (σ_F) que introducen esfuerzos de tracción en la parte del diente donde se aplica la carga, y esfuerzos de compresión en la parte opuesta. Esta misma carga también produce una serie de tensiones cortantes (τ), que teóricamente se distribuyen de forma parabólica a lo largo de la sección del diente. Por otra parte, la componente radial de la carga (F_r) provoca la aparición de esfuerzos de compresión (σ_C), que en el análisis teórico se distribuyen uniformemente en la sección del diente.

Estudios enmarcados en el campo de la mecánica y resistencia de materiales han puesto de manifiesto que cuando hay un cambio brusco en la sección de un cuerpo elástico sometido a tensión, se produce en esa zona un efecto de concentración de tensión que repercute en un incremento localizado de la tensión nominal. En los engranajes, estas concentraciones de tensión se producen principalmente en los radios de entalle en la base de los dientes, como se puede apreciar en la figura 1.11. La magnitud de la concentración de tensión en este punto del engranaje es difícil de estimar, y dependerá del tamaño del radio de entalle, del material utilizado para la fabricación del engranaje, del espesor del diente, de la posición de la carga, etc.

Como ocurre con las tensiones de contacto, las tensiones de flexión descritas corresponden a un caso ideal, y se pueden incrementar, por ejemplo, a causa de distribuciones no uniformes de la carga, producidas por una desalineación del engrane.

La determinación de las tensiones de contacto y de flexión que se producen en los dientes de los engranajes bajo carga se ha abordado desde distintas perspectivas en la literatura. Los distintos métodos desarrollados se pueden clasificar en tres grandes grupos:

- (i) **Métodos analíticos.** Estos métodos suelen aplicar directamente las teorías de la elasticidad bajo ciertas hipótesis y condiciones de contorno. Ofrecen la ventaja de ser computacionalmente muy eficientes, pero habitualmente su aplicabilidad está limitada por el cumplimiento de una serie de hipótesis, que en su aplicación al cálculo tensional de engranajes no siempre es posible cumplir. Generalmente, estos métodos se centran en la obtención de los valores máximos de tensión de contacto y de flexión. A lo largo de los años se han propuesto multitud de aproximaciones analíticas al problema tensional en transmisiones de engranajes; las más extendidas se utilizan en las normas ISO-6336 [8, 9] y AGMA-2001-D04 [10] para la determinación de la capacidad de carga de la transmisión.
- (ii) **Métodos numéricos.** Estos métodos utilizan una aproximación computacional basada en un modelo de los dientes de engranajes que se basa en métodos de discretización del dominio, como el método de los elementos finitos o el método de los elementos de contorno, entre otros. Los métodos numéricos son los más versátiles para el cálculo tensional de componentes mecánicos, pues sus limitaciones de aplicación son escasas, aunque normalmente llevan asociado un elevado coste computacional.
- (iii) **Métodos semianalíticos.** Estos métodos representan una solución intermedia entre los métodos analíticos y los métodos numéricos. Permiten superar algunas de las limitaciones de los métodos analíticos, a un coste computacional inferior que el de los métodos puramente numéricos.

A continuación se describen los métodos habituales para la determinación de las tensiones de contacto y de flexión.

Determinación de las tensiones de contacto

La determinación de las tensiones derivadas del contacto entre los dientes de los engranajes implica la resolución de lo que se conoce en la literatura especializada como

problema de contacto. Resolver el problema de contacto significa, en la mayoría de casos, la determinación de:

- (i) El área de contacto, que implica la determinación del tamaño, la forma y la localización de las zonas de contacto en cada uno de los sólidos en contacto.
- (ii) Las tensiones de contacto, que implica la determinación de la distribución de presión que se produce como consecuencia del contacto en la superficie de los sólidos, así como las tensiones internas en los sólidos.
- (iii) La deformación de los sólidos como consecuencia de la presión de contacto.

En la bibliografía se pueden encontrar distintas aproximaciones que permiten resolver el problema de contacto entre dientes de engranaje, que como se ha comentado anteriormente, se pueden clasificar en métodos analíticos, métodos semianalíticos y métodos numéricos.

Los métodos analíticos para la resolución del problema de contacto se basan habitualmente en la teoría de Hertz [7]. En estos métodos, las zonas de las superficies de los dientes de los engranajes cercanas al contacto se aproximan a superficies cuadráticas (cilíndricas, esféricas, etc.), para las que la teoría de Hertz, bajo ciertas hipótesis, propone soluciones analíticas que en general dependen únicamente de la fuerza de compresión, las propiedades de los materiales de los sólidos en contacto, y los radios de curvatura principales de dichas superficies. Las principales ventajas de este método analítico son que el problema de contacto se resuelve completamente y sus algoritmos son computacionalmente eficientes. Sus desventajas más relevantes son las limitaciones impuestas por las hipótesis del método y las condiciones de contorno.

Por otro lado, resolución del problema de contacto también se puede abordar mediante métodos numéricos, como por ejemplo el método de los elementos finitos. Estos métodos son capaces de superar las limitaciones impuestas por las hipótesis de los métodos analíticos, pero como contrapartida, el coste computacional que llevan asociado es muy elevado.

Los métodos semianalíticos representan un paso intermedio entre los métodos analíticos y los métodos numéricos. Estos métodos son capaces de superar algunas de las limitaciones de los métodos analíticos, pero a un coste computacional inferior al de los métodos numéricos. En el caso de la resolución del problema de contacto aplicado a transmisiones de engranaje, habitualmente se utiliza el método de los coeficientes de influencia. En este método, coeficientes de influencia relacionan las presiones de contacto con los desplazamientos que producen sobre las superficies de los cuerpos en contacto.

La principal desventaja de estos métodos es que no resuelven completamente el problema de contacto, pues necesitan de operaciones adicionales para determinar las tensiones que se producen en el interior de los sólidos.

Determinación de las tensiones de flexión en la raíz del diente

La determinación de las tensiones de flexión en la raíz del diente se conoce habitualmente en la literatura especializada como la solución del problema estructural. Como ocurre con el problema de contacto, el problema estructural se puede resolver mediante métodos analíticos, semianalíticos y numéricos.

Habitualmente, el cálculo analítico de las tensiones de flexión en la raíz de los dientes se aborda considerándolos como vigas en voladizo y aplicando la ley de Navier. Si bien este método analítico ofrece la gran ventaja de ser muy eficiente desde el punto de vista computacional, está basado en una serie de hipótesis que no siempre se cumplen, y que pueden llevar a resultados de reducida precisión.

Actualmente, uno de los métodos de cálculo más extendido para determinar las tensiones de flexión en la raíz de los dientes es el método de los elementos finitos. Este método permite calcular con precisión las tensiones que se producen en la raíz del diente, contemplando todos los efectos que afectan al estado tensional de los engranajes. La dificultad en la aplicación de este método reside en la determinación de la distribución de carga a tener en cuenta. Para tener una descripción precisa de esta distribución de carga, es necesario resolver el problema de contacto. En ocasiones, se resuelve primero el problema de contacto, y la distribución de presiones resultante se aplica sobre un modelo de elementos finitos del diente de engranaje. En otras ocasiones, el problema de contacto y el problema estructural se resuelven conjuntamente utilizando el método de los elementos finitos.

Los métodos semianalíticos también se han aplicado para la resolución del problema estructural en transmisiones de engranajes. Los más relevantes son el método de las bandas finitas y el método de los prismas finitos. Ambos métodos son simplificaciones del método de los elementos finitos, que permiten la resolución del problema bajo ciertas hipótesis simplificadoras, en un menor coste computacional. Las dificultades en la aplicación de la carga que tiene el método de los elementos finitos se mantienen, pero en estos casos, resolver el problema de contacto y el problema estructural al mismo tiempo no es una práctica que se realice habitualmente.

1.3.2.2 Tensiones admisibles

En el apartado 1.3.1 se han descrito los principales modos de fallo por los cuales la vida útil de una transmisión de engranajes llega a su fin. Algunos de estos modos de fallo se producen debido a las tensiones de contacto, y otros se producen como consecuencia de las tensiones de flexión en la raíz del diente.

En ocasiones, el fin de la vida útil de una transmisión llega debido a excesos de carga, que inducen en los dientes de los engranajes unas tensiones que superan el límite de fluencia del material con el que están fabricados, provocando en éstos deformaciones permanentes o incluso su rotura. Otros modos de fallo están relacionados con la pérdida de resistencia que experimentan los materiales cuando son sometidos a tensiones fluctuantes que se repiten en el tiempo. Éstos últimos se denominan fallos por fatiga, y habitualmente son los que determinan los valores admisibles de tensión de flexión y de contacto en una transmisión de engranajes.

Estos valores admisibles de tensión de flexión y de contacto se determinan para un número determinado de ciclos de carga. Cuando se dispone de los medios necesarios, es recomendable determinar los valores admisibles de tensión a partir de ensayos experimentales, utilizando las parejas de engranajes que se deseen estudiar como piezas de ensayo. A medida que los ensayos se acerquen a las condiciones reales de trabajo, más precisos serán los resultados y las conclusiones obtenidas de los experimentos. No obstante, el coste requerido por estos ensayos es elevado, y en escasas ocasiones es justificable.

Por este motivo, es habitual la utilización de métodos de cálculo de las tensiones admisibles basados en funciones que relacionan los niveles de tensión alcanzados con el número de ciclos que la transmisión puede realizar en esas circunstancias antes de producirse el fallo. En estos métodos, un engranaje de referencia es sometido a ciclos constantes de carga, bajo unas condiciones dadas. Para cada nivel de carga, se evalúa la tensión generada en el engranaje, así como el número de ciclos de carga que éste es capaz de soportar. El conjunto de los valores obtenidos experimentalmente se representa en un gráfico, conocido como curva de Wöhler. En la figura 1.12 se muestra un ejemplo de las curvas de Wöhler, que relacionan las tensiones de flexión y de contacto con el número de ciclos que puede realizar un engranaje de referencia antes del fallo.

Estas curvas permiten obtener los valores de tensión máximos que puede soportar la rueda dentada de referencia para un número dado de ciclos de carga. Para obtener las tensiones en otro diseño de la transmisión, los valores admisibles de tensión obtenidos a partir de las curvas de Wöhler deben multiplicarse por una serie de factores de corrección, que tienen en cuenta las diferencias entre las condiciones en las que se han obtenido los resultados experimentales, y las condiciones de servicio de la transmisión estudiada.

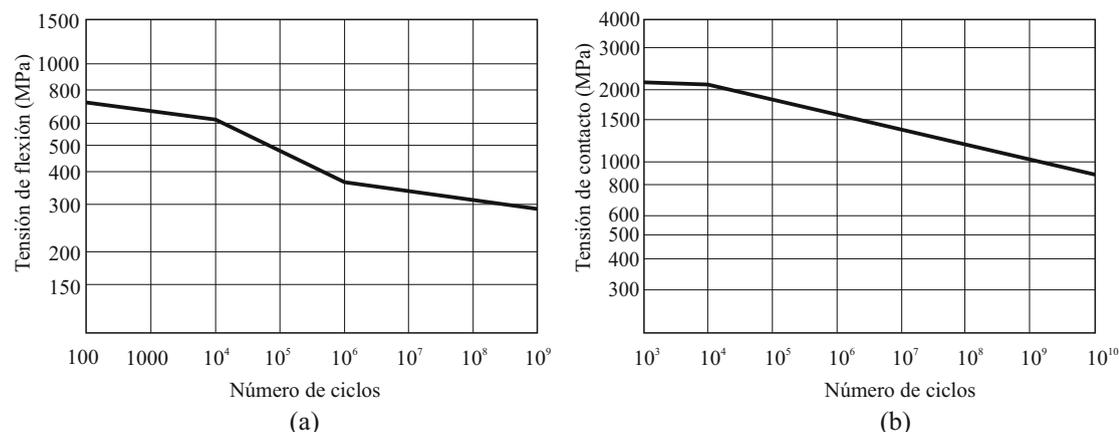


FIGURA 1.12: Ejemplo de curvas de Wöhler para un acero al carbono de alta dureza obtenidas de la referencia [1]

1.4 Objetivos de la tesis

La determinación de la capacidad de carga es un paso fundamental en el desarrollo de una nueva transmisión de engranajes en el que se comprueba si la transmisión es capaz de transmitir la potencia para la que es diseñada sin que ello repercuta en un fin prematuro de su vida útil. Habitualmente este paso comprende la predicción de las tensiones a las que estarán sometidos los engranajes en condiciones de trabajo, y la verificación de que estas tensiones son inferiores a las tensiones admisibles de los engranajes.

La predicción de las tensiones a las que estarán sometidos los engranajes se puede abordar mediante métodos analíticos, semianalíticos y numéricos. Estos métodos poseen algunas limitaciones, impuestas por sus hipótesis o por su coste computacional, que hacen que algunos fenómenos de cierta relevancia no se tengan habitualmente en consideración al determinar las tensiones a las que estará sometida la transmisión. Entre estos fenómenos se encuentran las deformaciones de los ejes de los engranajes bajo carga. Estas deformaciones producen una desalineación del engrane que puede tener una influencia significativa sobre el estado tensional de la transmisión.

El objeto de este trabajo es, por tanto, proponer nuevos modelos, o mejorar los modelos ya existentes, para la resolución del problema tensional y deformacional en transmisiones de engranajes durante la transmisión de potencia, que permitan tener en consideración el comportamiento de los ejes bajo carga. A tal efecto, se proponen los siguientes subobjetivos.

Obtención de un modelo analítico que permita determinar la deformación de un eje de engranaje bajo carga. Los ejes de los engranajes se caracterizan por tener una relación muy elevada entre su diámetro y su longitud, y por presentar cambios de diámetro en forma de escalón que permiten la localización axial de los engranajes. Estas

características hacen que su modelización mediante la teoría clásica de vigas presente algunas dificultades que es necesario vencer. El objetivo será desarrollar nuevos modelos de los ejes que permitan superar estas dificultades y calcular con precisión su deformación bajo carga.

Generación de un modelo eficiente de elementos finitos para tener en cuenta el comportamiento de los ejes de engranaje bajo carga. El método de los elementos finitos se ha utilizado en muchas ocasiones para determinar el estado tensional en transmisiones de engranajes. No obstante, los modelos de elementos finitos desarrollados raras veces tienen en cuenta el comportamiento de los ejes. El objetivo será desarrollar nuevos modelos de elementos finitos para el análisis tensional de transmisiones de engranajes que sean capaces de tener en cuenta el comportamiento elástico de los ejes que soportan a los engranajes. Uno de estos modelos deberá estar modelizado sin ninguna simplificación significativa, para que pueda ser utilizado como modelo de referencia. El resto de modelos propuestos deberán combinar la precisión con la eficiencia computacional. Se propondrán métodos que permitan al diseñador de engranajes obtener resultados de interés a partir de los modelos de elementos finitos propuestos. Se realizará una comparación de los distintos modelos de elementos finitos propuestos, en términos de precisión y de coste computacional.

Estudio de los factores de corrección utilizados en los métodos analíticos para tener en cuenta los efectos de las deformaciones elásticas de los ejes. Los métodos analíticos propuestos en las normas ISO-6336 [11] y AGMA-2001-D04 [10] para el cálculo de las tensiones máximas de contacto y de flexión incluyen una serie de factores de influencia que permiten tener en cuenta efectos no contemplados en las hipótesis iniciales de cálculo. Uno de estos factores es el factor de distribución longitudinal de la carga y tiene en cuenta los incrementos de tensión que se producen como consecuencia de la desalineación del engrane. El objetivo será estudiar los procedimientos propuestos por la norma ISO-6336 para el cálculo de este factor. Posteriormente se realizará un análisis de la evolución de este factor con distintos parámetros de diseño de la transmisión, y los valores obtenidos se compararán con los obtenidos a partir del análisis de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión. Por último, se hará uso de los resultados de esta comparación para establecer recomendaciones sobre los límites de aplicación de este procedimiento de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga.

Planteamiento de un modelo semianalítico para el cálculo de las presiones de contacto capaz de tener en cuenta las desalineaciones de los engranajes. En la literatura se pueden encontrar distintos métodos semianalíticos para determinar la distribución de presiones que se produce cuando dos dientes de engranaje entran en contacto. La mayoría de estos métodos se basan en el método de los coeficientes

de influencia, en el que coeficientes de influencia relacionan las presiones aplicadas con los desplazamientos que producen sobre las superficies de contacto. El objetivo será proponer un modelo semianalítico para el cálculo de la distribución de presión que se produce entre los dientes de los engranajes teniendo en cuenta la desalineación natural de los ejes. Este modelo deberá ofrecer resultados precisos, comparados con los obtenidos a partir del análisis de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión, pero en este caso la reducción del coste computacional prevalecerá como prioridad.

Planteamiento de modificaciones en la geometría de los dientes para compensar los errores de alineación de los engranajes. La modificación de las geometrías de los dientes de los engranajes se ha utilizado comúnmente para optimizar distintas características de las transmisiones de engranajes y evitar indeseados contactos en los bordes de las superficies. No obstante, muchos de estos procedimientos pueden mejorar el funcionamiento de la transmisión en un aspecto, pero al mismo tiempo empeoran otros. El objetivo será proponer un procedimiento de modificación de los dientes de los engranajes que permitan compensar los efectos negativos de las desalineaciones del engrane producidas por las deformaciones elásticas de los elementos que componen la transmisión sin que ello repercuta en una merma significativa del funcionamiento de la misma.

1.5 Modelo físico de una transmisión de engranajes básica

A lo largo de este trabajo, se proponen diversos modelos y métodos cuyo funcionamiento se ejemplifica posteriormente mediante ejemplos numéricos. Dichos ejemplos numéricos se basan en un modelo físico de una transmisión de engranajes cilíndricos para ejes paralelos, como el que se muestra en la figura 1.13. En favor de la brevedad, este modelo físico se describe en este apartado, y a lo largo del trabajo se recurrirá a él para definir los distintos ejemplos numéricos. Aunque la figura muestra una transmisión de engranajes cilíndricos rectos, sirve para transmisiones con otros tipos de engranajes cilíndricos.

Este modelo físico representa una transmisión de una única etapa formada por un piñón, una rueda y sus respectivos ejes. Se considera que los ejes son rectos y están perfectamente alineados. Se considera también que los engranajes forman un conjunto sólido con sus propios ejes. La longitud de los ejes se denota por L , y la posición de instalación de los engranajes se fija mediante la distancia z_g .

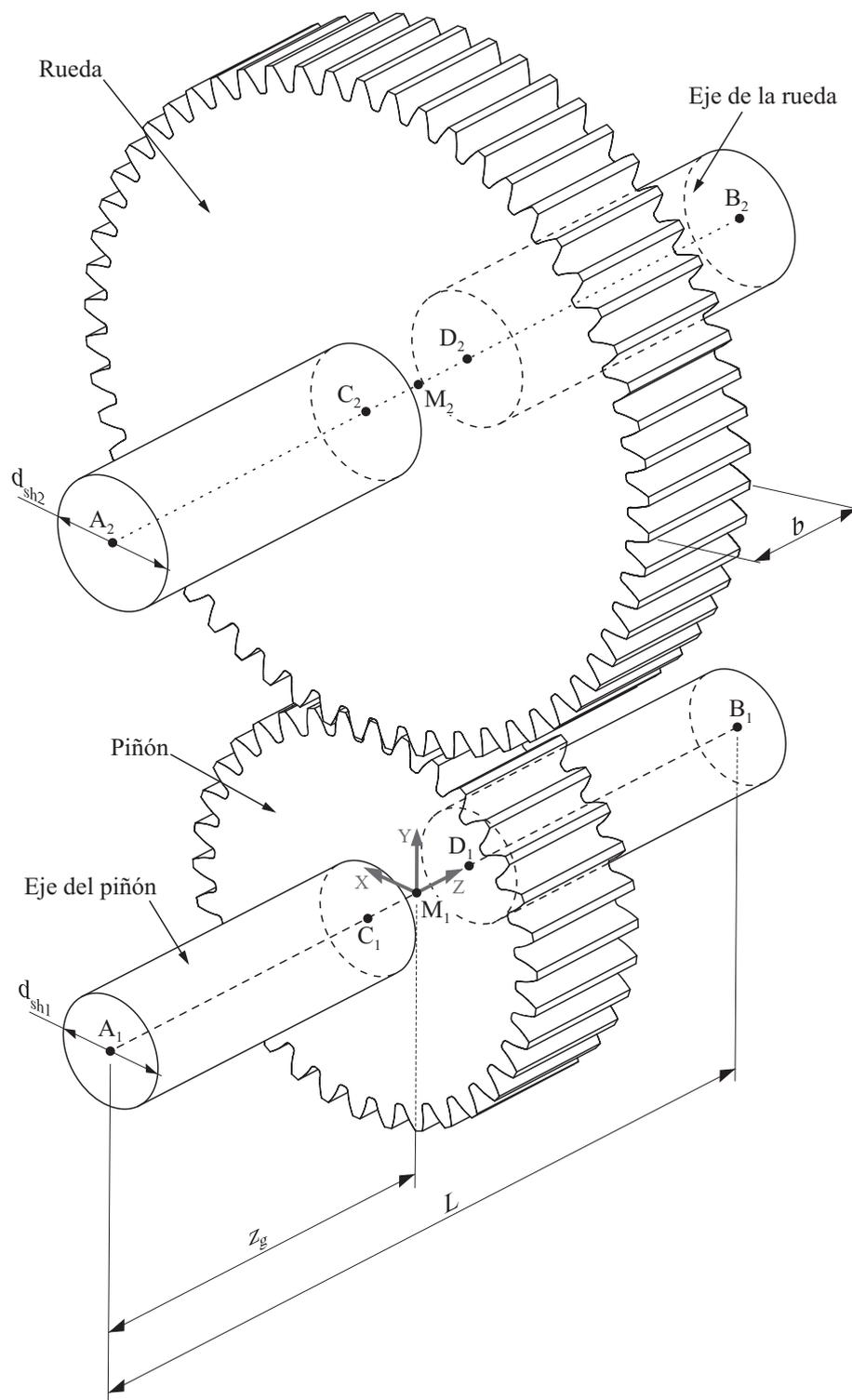


FIGURA 1.13: Modelo físico de una transmisión de engranajes cilíndricos

Los ejes están apoyados en sus extremos, denotados por A_1 , B_1 , A_2 y B_2 . El par se aplica en el extremo A_1 , mientras que el movimiento de la transmisión se puede restringir en el extremo A_2 o B_2 .

Los puntos C_1 , D_1 , C_2 y D_2 denotan los puntos de intersección de la fibra neutra del eje con los planos que limitan al engranaje en la dirección paralela al eje. Los puntos M_1 y M_2 representan la intersección del plano que divide en dos partes iguales al engranaje en la dirección paralela al eje con la fibra neutra de éste.

El origen de coordenadas del modelo se encuentra sobre la posición teórica del eje del piñón, centrado sobre el ancho de cara de la rueda dentada. El eje Z es paralelo al eje del piñón y el eje Y está contenido en el plano axial de la transmisión.

Por último, se considera que el conjunto formado por los ejes y los engranajes es de acero, con un módulo de elasticidad de 210 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.3.

Capítulo 2

Estado del arte

2.1 Introducción

Como se ha comentado en el capítulo anterior, determinar de la capacidad de carga de una transmisión de engranajes comprende, en la mayoría de los casos:

- (i) Predecir el estado tensional de los engranajes bajo carga.
- (ii) Determinar las tensiones admisibles en los engranajes para que no se produzca el fallo prematuro de la transmisión.
- (iii) Verificar que las tensiones a las que están sometidos los engranajes sean inferiores a las tensiones admisibles.

Típicamente, las tensiones que resultan de interés para el diseñador de engranajes son aquellas producidas en el contacto entre los dientes de las ruedas dentadas, y las tensiones de flexión que se producen en la raíz de los dientes.

La determinación de las tensiones derivadas del contacto entre los dientes de las ruedas dentadas implica la resolución de lo que se conoce como problema de contacto. Por otra parte, la obtención de las tensiones de flexión en la raíz del diente implica la resolución de un problema estructural elástico, en el que se determinan las tensiones producidas debido a las cargas transmitidas en el contacto.

Por otra parte, determinar las tensiones admisibles implica determinar, para un número de ciclos de carga dados, el nivel de tensión que son capaces de soportar los engranajes para que no se produzca el fallo prematuro de la transmisión.

En este capítulo se presenta, en primer lugar, la metodología propuesta por la norma ISO-6336 [12] para la determinación de las tensiones admisibles por los engranajes que componen la transmisión. En segundo lugar, se exponen algunas de los fenómenos que afectan al estado tensional de la transmisión, y por último, se realiza una revisión del estado del arte de los distintos métodos de predicción del estado tensional de los engranajes: analíticos, semianalíticos y numéricos.

2.2 Determinación de las tensiones admisibles

Como se ha comentado en el apartado 1.3.2.2, el cálculo de las tensiones admisibles de flexión (σ_{FP}) y de contacto (σ_{HP}) se realiza habitualmente utilizando las curvas de Wöhler. Estas curvas se obtienen experimentalmente a partir de engranajes de referencia, y relacionan el nivel de tensión al que está sometido un engranaje con el número de ciclos de carga (N) que puede soportar antes de que se produzca el fallo.

De esta manera, para un número determinado de ciclos de carga, las curvas de Wöhler permiten estimar el nivel de tensión admisible para el engranaje de referencia. Habitualmente este nivel de tensión admisible se multiplica por una serie de factores de penalización, que permiten adaptar los datos obtenidos a partir del engranaje de referencia, al caso analizado.

Esté método de cálculo de las tensiones admisibles es el utilizado por las principales normas aplicables al cálculo de la capacidad de carga de transmisiones de engranajes [8–10], así como por las principales referencias bibliográficas [1, 2, 13, 14].

Aunque el cálculo de los valores de tensión admisibles no forma parte del objeto de este trabajo, a continuación se muestra un ejemplo del cálculo propuesto por la norma ISO-6336 [12] para las tensiones de contacto admisibles (apartado 2.2.1) y las tensiones de flexión admisibles (apartado 2.2.2).

2.2.1 Tensiones de contacto admisibles

De acuerdo con la norma ISO-6336 [8], la tensión de contacto admisible (σ_{HP}) para un engranaje dado sometido a (N) ciclos de carga se puede determinar mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_{HP} \cdot S_{Hmin} = (\sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT}) \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (2.1)$$

TABLA 2.1: Valores de referencia para el cálculo del límite de fatiga por contacto y el factor de vida

Material	A_H	B_H	Dureza superficial	N_H	m_H
Acero baja aleación	0.386	147	HBW 110-210	$1 \cdot 10^9$	16
Acero al carbono	0.283	202	HV 115-215	$5 \cdot 10^7$	13.2

En la ecuación 2.1, S_{Hmin} es el coeficiente de seguridad mínimo para el cálculo de la tensión de contacto permisible. De acuerdo a las recomendaciones de la referencia [2], su valor puede oscilar, en circunstancias normales, entre $S_{Hmin} = 1.0$ y $S_{Hmin} = 1.2$. En el estudio de la durabilidad de las superficies de contacto es permisible la utilización de coeficientes de seguridad bajos, pues el deterioro de la superficie no supone el fallo inmediato de la transmisión.

Por otra parte, el producto $\sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT}$ permite interpolar en la curva de Wöhler la tensión de contacto admisible del engranaje de referencia para un número dado de ciclos de carga (N):

$$\sigma_{Hlim} \cdot Z_{NT} = [A_H \cdot x + B_H] \cdot \left(\frac{N_H}{N}\right)^{\frac{1}{m_H}} \quad (2.2)$$

En la ecuación 2.2, A_H y B_H son coeficientes que dependen del tipo de material utilizado para la fabricación de los engranajes, y x hace referencia a la dureza superficial de dicho material. Por otra parte, N_H y m_H representan el número de ciclos en el que se alcanza el límite de fatiga a contacto en el engranaje de referencia (σ_{Hlim}) y el pendiente logarítmico de la curva de Wöhler, respectivamente. N denota el número de ciclos de trabajo para el que se diseña la transmisión. En la tabla 2.1 se muestran algunos valores de referencia para estos parámetros; la lista completa se puede encontrar en la norma ISO-6336 [12].

El resto de parámetros de la ecuación 2.1 son factores de influencia cuya función es adaptar los resultados obtenidos para el engranaje de referencia utilizado en el ensayo al engranaje estudiado. En favor de la brevedad, el cálculo de la magnitud de estos factores de influencia no se expone en este trabajo, pero puede ser consultado en la norma ISO-6336 [8], así como en otras referencias bibliográficas [1, 2]. No obstante, en la tabla 2.2 se proponen algunos valores de referencia para estos parámetros, extraídos de la referencia [2]:

- (i) Z_L es un factor que tiene en cuenta la influencia de la viscosidad del lubricante utilizado sobre el espesor de la capa de lubricante.

TABLA 2.2: Valores aproximados para los factores de influencia de la ecuación 2.1. Valores obtenidos de la referencia [2]

Factor	Valor mínimo	Valor máximo
$Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R$	0.85	1.0
Z_W	1.0	1.2
Z_X	0.75	1

- (ii) Z_V es un factor que tiene en cuenta la influencia que tiene la velocidad relativa de los engranajes en la línea de paso sobre el espesor de la capa de lubricante.
- (iii) Z_R es un factor que tiene en cuenta la influencia de la rugosidad superficial de las superficies de contacto sobre el espesor de la capa de lubricante.
- (iv) Z_W es un factor que tiene en cuenta la influencia de que la dureza superficial de uno de los engranajes sea superior a la del otro engranaje.
- (v) Z_X es un factor que tiene en cuenta la influencia de las dimensiones del diente sobre la tensión permisible de contacto.

2.2.2 Tensiones de flexión admisibles

De acuerdo con la norma ISO-6336 [9], la tensión de flexión admisible (σ_{FP}) para un engranaje dado sometido a (N) ciclos de carga se puede determinar mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_{HP} \cdot S_{Fmin} = (\sigma_{Flim} \cdot Y_{NT}) \cdot Y_{ST} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_{RrelT} \cdot Y_X \quad (2.3)$$

En la ecuación 2.3, S_{Fmin} es el factor de seguridad mínimo para el cálculo de la tensión de flexión permisible. En este caso, se recomienda que el factor de seguridad sea superior que el contemplado para el cálculo de la tensión de contacto admisible, pues el fallo por flexión tiene consecuencias más severas que el desgaste de las superficies. De acuerdo con las recomendaciones de la referencia [2], su valor puede oscilar, en circunstancias normales, entre $S_{Fmin} = 1.2$ y $S_{Fmin} = 1.5$.

Por otra parte, el producto $\sigma_{Flim} \cdot Y_{NT}$ permite interpolar en la curva de Wöhler la tensión de flexión admisible del engranaje de referencia para un número dado de ciclos de carga (N):

TABLA 2.3: Valores de referencia para el cálculo de σ_{Hlim} y Z_{NT}

Material	A_F	B_F	Dureza superficial	N_F	m_F
Acero baja aleación	0.386	147	HB 110-210	$2 \cdot 10^6$	5.8
Acero al carbono	0.253	202	HV 135-210	$2 \cdot 10^6$	5.8

$$\sigma_{Flim} = (A_F \cdot x + B_F) \cdot \left(\frac{N_F}{N} \right)^{\frac{1}{m_F}} \quad (2.4)$$

En la ecuación 2.4, A_F y B_F son coeficientes que dependen del tipo de material utilizado para la fabricación de los engranajes, y x hace referencia a la dureza superficial de dicho material. Por otra parte, N_F y m_F representan el número de ciclos en el que se alcanza el límite de fatiga a flexión en el engranaje de referencia y el pendiente logarítmico de la curva de Wöhler, respectivamente. N denota el número de ciclos de trabajo para el que se diseña la transmisión. En la tabla 2.1 se muestran algunos valores de referencia para estos parámetros; la lista completa se puede encontrar en la norma ISO-6336 [12].

El resto de parámetros de la ecuación 2.3 son factores de influencia. En favor de la brevedad, el cálculo de la magnitud de estos factores de influencia no se expone en este trabajo, y puede ser consultado en la norma ISO-6336 [9], así como en otras referencias bibliográficas. No obstante, en la tabla 2.4 se proponen algunos valores de referencia, extraídos de la referencia [2]:

- (i) Y_{ST} es un factor que tiene en cuenta las dimensiones de los engranajes de referencia. La norma ISO-6336 [9] recomienda fijar su valor en $Y_{ST} = 2$.
- (ii) $Y_{\delta relT}$ es un factor que tienen en cuenta la influencia de la sensibilidad a entalla del material de los engranajes.
- (iii) Y_{RrelT} es un factor que tiene en cuenta la influencia la rugosidad superficial de los engranajes.
- (iv) Y_X es un factor que tiene en cuenta las dimensiones del diente.

2.3 Análisis de fenómenos físicos que pueden influir en el fallo de una transmisión

El análisis del estado tensional de una pareja de engranajes se realiza en muchos casos suponiendo que la carga que se transmite en el contacto entre dientes se distribuye de

TABLA 2.4: Valores aproximados para los factores de influencia de la ecuación 2.1.
Valores obtenidos de la referencia [2]

Factor	Valor mínimo	Valor máximo
$Y_{\delta rel T}$	0.70	1.80
$Y_{R rel T}$	0.94	1.12
Y_X	0.70	1.00

forma uniforme a lo largo del ancho de cara de los engranajes. Llevada a la práctica, esta suposición implica que la geometría de los engranajes debe estar libre de errores de fabricación, que la fabricación de todos los componentes y el ensamblaje de la transmisión son perfectos (la posición real de los ejes y engranajes coincide con la posición teórica), que los engranajes se instalan sobre ejes indeformables, apoyados sobre rodamientos y soportes rígidos, etc.

Sin embargo, estas hipótesis difícilmente se cumplen en la realidad. Las tolerancias de fabricación pueden hacer que los rodamientos sobre los que se instalan los ejes no estén correctamente alineados. También es posible que a pesar del avance de la tecnología de manufactura, las geometrías de los engranajes posean errores o desviaciones de fabricación. Por descontado, los ejes de los engranajes, los rodamientos y los soportes se deforman bajo carga. Estos y otros efectos hacen que la posición real de los engranajes no coincida con la posición teórica, de manera que se produce una desalineación del engrane que lleva a patrones de contacto defectuosos.

En un completo artículo sobre este tema, el profesor Houser [15] enumeró las principales causas que producen la desalineación del engrane, citadas a continuación:

- (i) Errores en la fabricación de los elementos que conforman la transmisión y en el montaje de la misma.
- (ii) Deformaciones elásticas bajo carga de los elementos que componen la transmisión.
- (iii) Holguras en las acanaladuras que fijan los engranajes a los ejes y en los rodamientos.
- (iv) Deformaciones de los elementos que componen la transmisión debido a dilataciones térmicas.
- (v) Fuerzas centrífugas, especialmente en engranajes de alma adelgazada.

Afortunadamente para el diseñador de transmisiones de engranajes, las magnitudes de desalineación provocadas por los efectos anteriormente mencionados son generalmente

pequeñas, y suelen tener una influencia moderada sobre el estado tensional de los engranajes. Si alguno de estos efectos debe despertar la inquietud del diseñador es la desalineación del engrane producida por las deformaciones elásticas de los elementos que componen la transmisión. La norma AGMA-2001-D04 [10] clasifica estas deformaciones en:

- (i) Deformaciones de los ejes que soportan a los engranajes.
- (ii) Deformaciones de los cuerpos de los engranajes.
- (iii) Deformaciones de los rodamientos.
- (iv) Deformaciones de los apoyos.

Como se explica en la norma ISO-6336 [11], las deformaciones de los rodamientos y de los apoyos producen, generalmente, una separación entre las superficies de contacto de los engranajes que se incrementa de forma lineal a lo largo de su ancho de cara. La rigidez de los rodamientos se incrementa a medida que aumenta la carga, y por ese motivo, su deformación no es proporcional a la carga que recae sobre ellos. Por otra parte, las deformaciones de los alojamientos pueden ser superiores a las que se producen en los rodamientos, y en este caso la magnitud de las deformaciones suele ser proporcional a la carga que soportan.

Por el contrario, las deformaciones de los ejes y de los engranajes producen una separación de las superficies de contacto que se incrementa de forma no lineal a lo largo del ancho de cara de los engranajes. La deformación de los ejes se produce, principalmente, debido a la flexión provocada por los esfuerzos transversales, derivados generalmente del contacto entre engranajes. Cuando hay únicamente un engranaje sobre el eje, la deformación por flexión de éste estará contenida, principalmente, dentro del plano de acción de la transmisión. Cuando hay varios engranajes montados sobre el mismo eje, o actúan sobre él otras fuerzas externas, esta deformación por flexión no tendrá una dirección preferente. La magnitud de la deformación es aproximadamente proporcional a la carga transversal que la provoca. Los ejes de los engranajes también se deforman por el efecto de la torsión y de los esfuerzos axiales, aunque este tipo de deformaciones tiene una influencia menor sobre la desalineación del engrane en transmisiones de engranajes de ejes paralelos.

Por último, en los cuerpos de los engranajes se producen distintas deformaciones que influyen en la desalineación del engrane, que se muestran de forma simplificada en la figura 2.1. De acuerdo con Weber y Banaschek [16], estas deformaciones se pueden clasificar en:

- (i) Deformaciones locales producidas por el contacto entre dientes (figura 2.1a).
- (ii) Deformaciones del diente del engranaje, especialmente como consecuencia de su flexión (figura 2.1b).
- (iii) Deformaciones del cuerpo del engranaje, especialmente como consecuencia de la torsión (figura 2.1c).

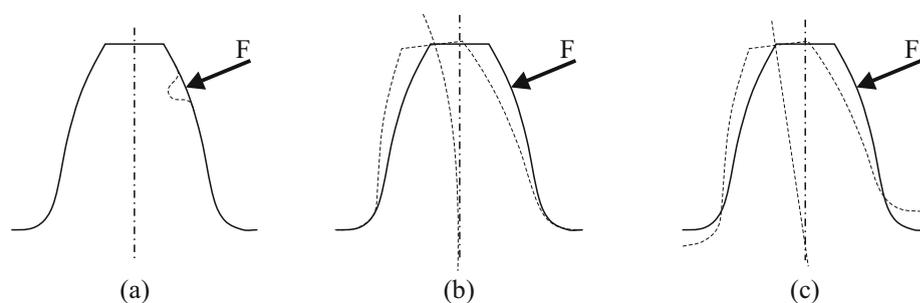


FIGURA 2.1: Deformaciones en el diente

Se han llevado a cabo múltiples investigaciones experimentales para determinar la influencia de las desalineaciones de los engranajes sobre su comportamiento y su capacidad de carga. Kubo [17] estudió el efecto de los errores de fabricación y de montaje sobre el estado tensional de una transmisión de engranajes cilíndricos helicoidales. Haigh [18] investigó la influencia que tienen las desalineaciones en la distribución de la carga en transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales con anchos de cara grandes. Das [19] estudió la relación entre las desalineaciones y los distintos modos de fallo de las ruedas dentadas. Hotait investigó los efectos de las desalineaciones en las tensiones de flexión en la raíz de los dientes de engranajes helicoidales [20, 21] y hipoides [22]. Recientemente, Pau [23] ha realizado estudios sobre la influencia que tienen las desalineaciones de los engranajes sobre la distribución de presión de contacto en transmisiones de piñón-cremallera.

Estas investigaciones ponen de manifiesto que la principal consecuencia de la desalineación del engrane es que la distribución de carga, que en teoría es uniforme, resulta en una distribución de carga no uniforme a lo largo del ancho de cara. Esto provoca que en algunas partes del diente la intensidad de la carga sea muy elevada, mientras que en otras partes la intensidad de carga sea baja o nula. Esta distribución irregular de la carga provoca que las tensiones de contacto y de flexión en la zona en la que recae más carga sean superiores a las tensiones nominales que se producirían en condiciones ideales de engrane, consideradas habitualmente en la fase de diseño de la transmisión para el cálculo de su capacidad de carga. Esto supone que, a menudo, este incremento lleva a las tensiones fuera de los límites admisibles, provocando el fallo prematuro de la

transmisión. Esta distribución no uniforme de la carga también tiene otros efectos negativos sobre la transmisión, como el aumento del desgaste de las superficies de contacto, el incremento de la generación de calor, la introducción de errores de transmisión y la generación de vibraciones y ruido.

A la vista de estas consecuencias, parece importante tener en cuenta todas las causas que producen la desalineación del engrane al realizar el análisis tensional de una transmisión, incluyendo todos los tipos de deformación anteriormente mencionados.

2.4 Métodos analíticos para la determinación del estado tensional de transmisiones de engranajes

Generalmente, los métodos analíticos utilizados para la resolución del problema de contacto entre dientes de engranajes se basan en la teoría de Hertz [7]. Esta teoría considera una distribución semi-elíptica de presiones aplicada en un semiespacio elástico bajo la hipótesis de deformación plana. Las asunciones en las que se basa su aplicación son las siguientes:

- (i) Las deformaciones de los sólidos en contacto son pequeñas y dentro del rango elástico del material.
- (ii) Las superficies de los sólidos en contacto son continuas y no conformes. Esto implica que las dimensiones del área de contacto serán pequeñas comparadas con los radios de curvatura de las superficies de los sólidos en las proximidades del contacto.
- (iii) Los sólidos en contacto se pueden aproximar a semiespacios elásticos.
- (iv) Las fuerzas de fricción que se producen entre los sólidos en contacto son despreciables.

En estos métodos, el problema de contacto se ha resuelto tradicionalmente aproximando la geometría de los dientes de engranaje a dos cilindros perfectamente alineados, cuyos radios coinciden con el radio de curvatura de la superficie de los dientes de los engranajes en el punto de contacto (ρ_1 y ρ_2), como se muestra en la figura 2.2. Esta aproximación ofrece resultados razonablemente buenos cuando el contacto teórico entre dientes es una línea recta, como en el caso de transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales.

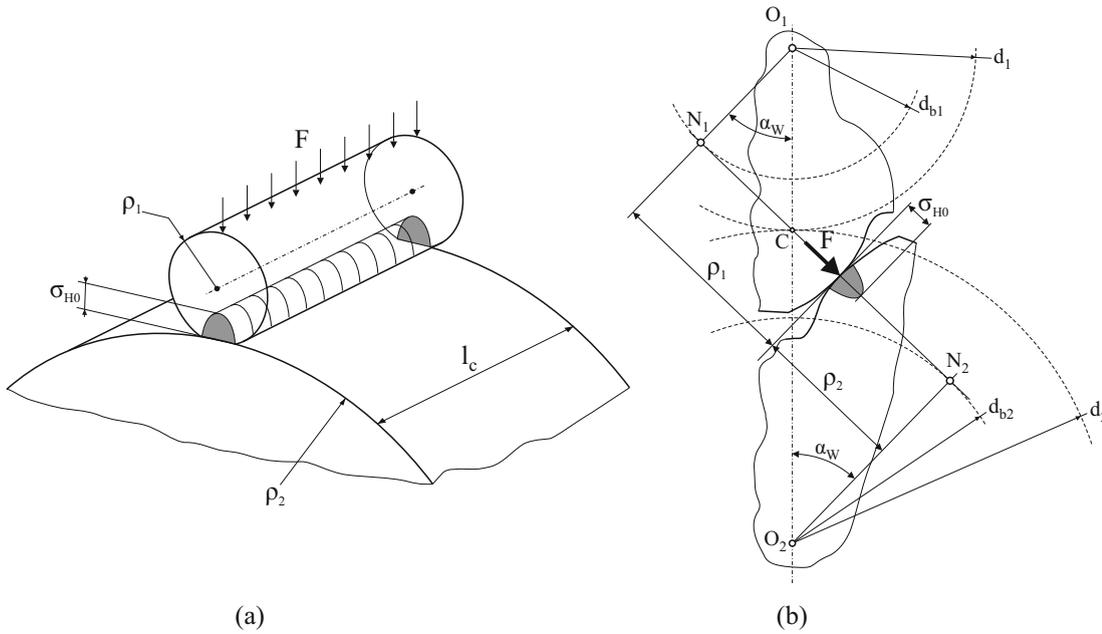


FIGURA 2.2: Cálculo analítico de la tensión nominal de contacto

Según la teoría de Hertz [7], la tensión de contacto que se produce entre dos cilindros de radio ρ_1 y ρ_2 comprimidos entre sí por una fuerza F (figura 2.2a) se puede determinar mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_{HO} = Z_E \cdot \sqrt{\frac{F}{l_c} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)} \quad (2.5)$$

En la ecuación 2.5, l_c denota la longitud total del contacto, y Z_E es la constante de elasticidad de los materiales, que se define mediante la ecuación 2.6. En esta ecuación, E_1 y E_2 son los módulos de elasticidad del piñón y de la rueda, y ν_1 y ν_2 son sus respectivos coeficientes de Poisson.

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (2.6)$$

Para ejemplificar el cálculo, considere una pareja de engranajes cilíndricos helicoidales perfectamente alineados, cuyos dientes contactan en el círculo de paso. La fuerza que comprime a los dientes de engranaje entre sí (F) se puede calcular a partir del par considerado (T), del diámetro primitivo del piñón (d_1), del ángulo de presión medido en el plano transversal (α_t) y del ángulo de hélice en la circunferencia base (β_b):

$$F = \frac{2 \cdot T}{d_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_t \cdot \cos \beta_b} \quad (2.7)$$

La longitud del contacto se calcula a partir del ancho de cara del engranaje (b) y del ángulo de hélice en la circunferencia base:

$$l_c = \frac{b}{\cos \beta_b} \quad (2.8)$$

Sustituyendo las expresiones 2.7 y 2.8 en la ecuación 2.5 se obtiene:

$$\sigma_{HO} = Z_E \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot b \cdot \cos \alpha_t} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)} \quad (2.9)$$

Los radios de curvatura de las superficies de contacto de los dientes de engranaje en el punto de paso (figura 2.2a), medidos en el plano normal, se pueden determinar a partir del diámetro de las circunferencias base (d_{b1} y d_{b2}), del ángulo de presión en la circunferencia de paso (α_{wt}) y del ángulo de hélice en la circunferencia base:

$$\rho_{1C} = \frac{1}{\cos \beta_b} \frac{d_{b1}}{2} \cdot \sin \alpha_{wt} = \frac{1}{\cos \beta_b} \frac{d_1}{2} \cdot \tan \alpha_{wt} \cdot \cos \alpha_t \quad (2.10a)$$

$$\rho_{2C} = \frac{1}{\cos \beta_b} \frac{d_{b2}}{2} \cdot \sin \alpha_{wt} = \frac{1}{\cos \beta_b} \frac{d_2}{2} \cdot \tan \alpha_{wt} \cdot \cos \alpha_t \quad (2.10b)$$

Sustituyendo las expresiones 2.10a y 2.10b en la ecuación 2.9 se obtiene:

$$\sigma_{HO} = Z_E \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot b \cdot \cos \alpha_t} \cdot \frac{2 \cdot \cos \beta_b}{\tan \alpha_{wt} \cdot \cos \alpha_t} \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2}} \quad (2.11)$$

Habitualmente, la ecuación 2.11 incluye dos factores de influencia, cuyo objetivo es corregir y adaptar dicha ecuación a condiciones de trabajo no contempladas en las hipótesis del método analítico. De esta manera, se incluye un factor Z_ϵ que tiene en cuenta la longitud efectiva de las líneas de contacto, y un factor Z_β , que tiene en cuenta la influencia del ángulo de hélice. Por brevedad, el cálculo de estos factores no se expone en este trabajo, pero puede consultarse en la norma ISO-6336 [8]. De esta forma, la ecuación 2.11 se puede reescribir, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\sigma_{HO} = Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2}} \quad (2.12)$$

donde Z_H se denomina el factor de zona:

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta_b}{\tan \alpha_{wt} \cdot \cos^2 \alpha_t}} \quad (2.13)$$

Este procedimiento de cálculo de la tensión nominal de contacto es aplicable también a engranajes cilíndricos rectos, considerando un ángulo de hélice nulo ($\cos \beta = 0$).

Los valores de tensión obtenidos a partir de la ecuación 2.12 corresponden a valores nominales, calculados a partir de ciertas hipótesis que no siempre representan correctamente la realidad. La simulación del contacto entre los dientes de los engranajes mediante cilindros perfectamente alineados no permite tener en cuenta las posibles desalineaciones que pueden ocurrir en una transmisión. Como consecuencia, la distribución de la carga resultante de este análisis siempre será uniforme. Por este motivo, es habitual el uso de un factor de corrección, que adapte el resultado de tensión obtenido bajo condiciones ideales de análisis al que se obtendría en condiciones reales. El uso de estos factores de corrección se expone más adelante.

Las normas ISO-6336 [8] y AGMA-2001-D04 [10], así como en las principales guías de diseño de engranajes [1, 2, 13, 14], proponen métodos analíticos para resolver el problema de contacto entre dientes de engranaje basados en esta aproximación. Houser [15] la utilizó para estudiar los efectos de las desalineaciones en engranajes cilíndricos helicoidales. Sobre este mismo tipo de engranajes, Patil [24] ha utilizado esta aproximación para estudiar los efectos que tiene la fricción sobre las tensiones máximas que se producen en el contacto.

Cuando se desea aplicar la teoría de Hertz para estudiar el contacto entre dientes en aquellos tipos de engranajes en los que el contacto teórico es un punto, es habitual aproximar las zonas de las superficies de los dientes de los engranajes cercanas al contacto mediante elipsoides. De esta forma, Gosselin [25] pudo aplicar la teoría de Hertz para determinar las deformaciones que se producen en el contacto entre dientes de engranajes cónicos espirales e hipoides, con el objetivo de estudiar los errores de transmisión bajo carga. Litvin [26] utilizó esta aproximación para resolver el problema de contacto entre dientes de engranajes, y aplicar la distribución de presión de contacto resultante a un modelo de elementos finitos del diente para resolver el problema estructural y determinar las tensiones en la raíz del diente. Sheveleva [27] aplicó esta solución para estudiar el contacto entre dientes de engranajes cónicos espirales en aquellas posiciones del ciclo de engrane en las que el contacto se produce en una zona alejada de los bordes de la superficie. Recientemente, González-Pérez [28] se basó en la teoría de Hertz para resolver completamente el problema de contacto en engranajes modificados con doble abombamiento de la superficie de contacto de los dientes del piñón.

Por otra parte, los métodos analíticos también se han utilizado para predecir las tensiones que se producen en la raíz de los dientes de los engranajes. En la mayoría de estos métodos, el diente de engranaje se simula como si fuese una viga en voladizo, sometida

a una carga que se supone uniformemente distribuida a lo largo del ancho de cara del diente, como se muestra en la figura 2.3.

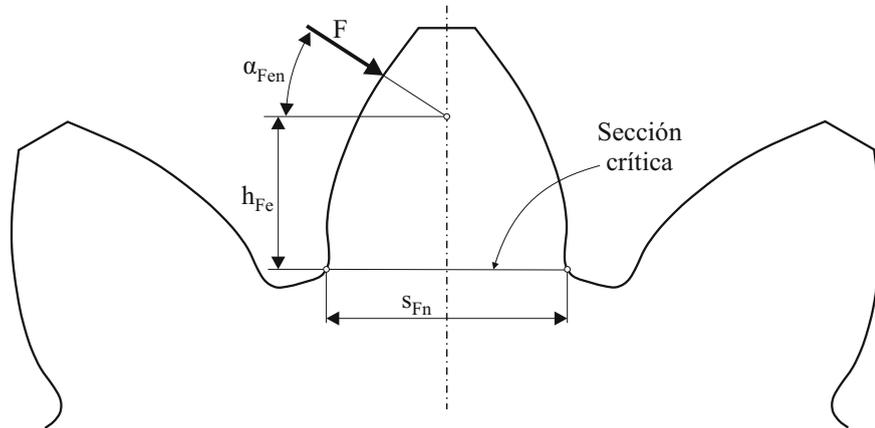


FIGURA 2.3: Cálculo analítico de la tensión nominal de flexión

Como explica Maitra [5], la investigación en este campo ha permitido concluir que las tensiones a compresión (σ_C) y cortantes (τ) se pueden despreciar (figura 1.11), pues sus efectos sobre la resistencia de los dientes de engranaje son despreciables. Por lo tanto, es habitual considerar únicamente las tensiones de tracción producidas por el efecto del momento flector. Estas tensiones alcanzan su valor máximo cuando la carga se aplica en el punto más elevado en el que se produce contacto en un único diente. Determinar la posición de este punto es uno de los retos de este cálculo analítico, y generalmente se obtiene por procesos iterativos.

Considerando el diente de engranaje como una viga en voladizo, la tensión de flexión que se produce en la raíz del diente se puede estimar mediante la fórmula de Navier. Esta fórmula determina la tensión de flexión máxima (σ_{F0}) a la que está sometida una sección cualquiera de la viga a partir del momento interno que actúa en la sección (M_z), su momento de inercia (I_z) y la distancia desde la fibra neutra de la viga al punto más alejado de la sección (y_{max}):

$$\sigma_{F0} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max} \quad (2.14)$$

Para poder calcular la tensión de flexión máxima, es necesario determinar la sección crítica del diente. Como se comentará más adelante, existen distintas propuestas para la localización de la sección crítica. El momento flector (M_z) al que está sometida la sección crítica se puede determinar a partir de la fuerza considerada (F) y su ángulo de aplicación medido en el plano normal (α_{Fen}), así como a la distancia que esta fuerza actúa con respecto al punto sobre el que se desea calcular la magnitud del momento (h_{Fe}):

$$M_z = F \cdot \cos \alpha_{Fen} \cdot h_{Fe} \quad (2.15)$$

La fuerza total considerada en el cálculo a flexión se puede calcular a partir del par aplicado a la transmisión (T), el diámetro primitivo del piñón (d_1) y el ángulo de presión normal de la transmisión (α_n):

$$F = \frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot \cos \alpha_n} \quad (2.16)$$

Si se considera un diente de engranaje cilíndrico recto, la sección transversal a cualquier altura del diente tiene forma rectangular, y su momento de inercia (I_z) se puede determinar a partir del ancho de cara (b) y de la anchura del diente en la sección crítica (s_{Fn}):

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot b \cdot s_{Fn}^3 \quad (2.17)$$

Por último, la distancia entre la fibra neutra y el punto más alejado de la sección crítica (y_{max}) es:

$$y_{max} = \frac{s_{Fn}}{2} \quad (2.18)$$

Sustituyendo las expresiones 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 en la ecuación 2.14 se obtiene:

$$\sigma_{F0} = 6 \cdot \frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{\cos \alpha_{Fen}}{\cos \alpha_n} \cdot \frac{h_{Fe}}{s_{Fn}^2} \quad (2.19)$$

Multiplicando y dividiendo la expresión anterior por el módulo normal (m_n), se puede reescribir como:

$$\sigma_{F0} = \frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot b \cdot m_n} \cdot Y_F \quad (2.20)$$

En la ecuación anterior, Y_F es el factor de forma, y tiene en cuenta las características geométricas del diente contenidas en la ecuación 2.19 que afectan al cálculo de la sección crítica del diente y al punto y a la dirección de aplicación de la carga:

$$Y_F = \frac{6 \cdot h_{Fe} \cdot \cos \alpha_{Fen} \cdot m_n}{\cos \alpha_n \cdot s_{Fn}^2} \quad (2.21)$$

La ecuación 2.20 para el cálculo de la tensión nominal de flexión se completa habitualmente con otros factores que tienen en cuenta características de diseño no contempladas en el desarrollo actual. De esta manera, es habitual incluir los siguientes factores en el cálculo de la tensión nominal del contacto:

- (i) Un factor Y_S para tener en cuenta la influencia de la concentración de tensiones que se produce en el radio de entalle. Existen diversas propuestas para realizar el cálculo de este factor, pero sin duda, es la de Dolan y Broghamer [6] la más utilizada en la literatura, y la considerada tanto en la norma ISO-6336 como en la AGMA-2001-D04.
- (ii) Un factor Y_β que corrige la intensidad del momento flector en la raíz del diente cuando el cálculo se aplica a engranajes helicoidales.

En favor de la brevedad, el cálculo de los factores anteriormente descritos no se expone en este trabajo. Si bien se pueden encontrar distintos métodos de cálculo en la literatura, los más extendidos en la industria aparecen en la norma ISO-6336 [9]. De esta manera, la ecuación para el cálculo de la tensión nominal en la base del diente quedará:

$$\sigma_{F0} = \frac{2 \cdot T}{d_1 \cdot b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \quad (2.22)$$

Como ocurría en el método analítico propuesto para el cálculo de la tensión de contacto, los valores de tensión obtenidos a partir de la ecuación 2.22 corresponden a valores nominales, calculados a partir de ciertas hipótesis que no siempre representan correctamente la realidad. Una de estas hipótesis es la asunción de que la carga se reparte de forma uniforme en todo el ancho de cara del engranaje. Como se ha comentado en el apartado 2.3, es habitual que la desalineación del engrane repercuta en distribuciones de carga no uniformes. En esta aproximación, la distribución no uniforme de la carga se tiene en cuenta mediante factores de penalización, como se explica más adelante.

Las normas ISO-6336 [9] y AGMA-2001-D04 [10] se basan en esta aproximación para predecir la tensión nominal que se produce en la raíz de los dientes. Los modelos de cálculo utilizados por estas normas se muestran en la figura 2.4. Aunque ambas normas simulan el diente del engranaje como si fuese una viga en voladizo, existen algunas diferencias importantes entre ellas que merecen ser mencionadas:

- (i) La primera diferencia hace referencia a los esfuerzos considerados para el cálculo de la tensión nominal. La norma ISO-6336 considera únicamente el esfuerzo de tracción introducido por el momento flector (σ_F) en el radio de entalle de la parte

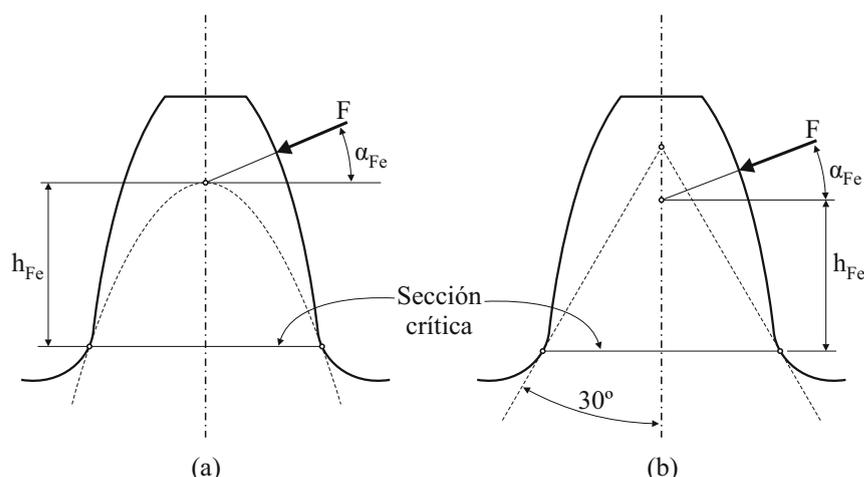


FIGURA 2.4: Modelos de cálculo de la tensión nominal de flexión utilizadas por (a) AGMA e (b) ISO

del diente en la que se aplica la carga (figura 1.11). En cambio, la norma AGMA-2001-D04 considera la combinación del esfuerzo de tracción introducido por el momento flector (σ_F) y el esfuerzo de compresión generado por la carga radial (σ_C), que tienden a compensarse entre sí.

- (ii) La segunda diferencia destacable son los criterios que utilizan para la localización de la sección crítica del diente. La norma AGMA-2001-D04 se basa en las ideas propuestas por Lewis [29], quien concibió la idea de inscribir una parábola de resistencia uniforme dentro de la geometría del diente. Como explica Dudley [1], una parábola de resistencia uniforme es aquella que cuando se considera como una viga en voladizo, la tensión de flexión máxima es igual en todas sus secciones. Inscribiendo esta parábola dentro de la geometría del diente, se puede localizar inmediatamente la posición de la sección crítica del mismo, que coincide con el punto en el que la parábola de resistencia uniforme es tangente con la superficie del diente, como se muestra en la figura 2.4a. Por el contrario, la norma ISO-6336 utiliza un método simplificado y considera la sección crítica del diente aquella en la que el perfil es tangente a una línea inclinada 30° con respecto al eje de simetría del diente, como se puede observar en la figura 2.4b.
- (iii) Por último, también difieren en los criterios para la localización del punto y la dirección de aplicación de la carga. Mientras que en la norma AGMA-2001-D04 la carga se aplica en el ápice de la parábola de resistencia uniforme, en la norma ISO-6336 se calcula, de forma aproximada, el punto más alto de contacto en un único diente y se considera que la carga está aplicada en ese punto.

En ambas normas, todos estos variables se contemplan dentro del factor de forma (denotado por Y_F en la ecuación 2.20). Este factor ha sido objeto de distintas investigaciones, siendo las más relevantes las realizadas por Pedrero [30, 31] y Arikan [32].

Además de en las normas, la modelización del diente mediante la teoría de vigas es una práctica común en la literatura. En ella se basó Errichelo [33] para proponer un método en el que el diente del engranaje se simula mediante un prisma triangular. También lo hizo Chen [34], aproximando el perfil del diente del engranaje a un arco circular. No obstante, ha habido autores que han explorado otras alternativas, como Wellauer [35], que simuló el comportamiento del diente mediante la teoría de placas, permitiendo de esta forma contemplar distribuciones de carga no uniformes a lo largo del diente.

Factores de corrección aplicados en métodos analíticos

Los métodos analíticos descritos anteriormente suelen ir acompañados de una serie de factores de corrección que penalizan los valores nominales de tensión obtenidos para tener en cuenta efectos que no es posible contemplar en la formulación analítica del problema. Uno de los factores de corrección que más interés ha despertado entre los investigadores es el factor de distribución longitudinal de la carga. Este factor, incluido en las formulaciones de la norma ISO-6336 y de la norma AGMA-2001-D04, tiene en cuenta los incrementos de tensión que se producen como consecuencia de un reparto irregular de la carga provocado por la desalineación del engrane. Generalmente se define como el cociente entre la intensidad de carga máxima dividida entre la intensidad de carga media.

Tobe [36] fue uno de los primeros autores en centrar su atención sobre este factor. Este autor utilizó un modelo de elementos finitos de un diente de un engranaje cilíndrico helicoidal para determinar el factor de distribución longitudinal de la carga considerando errores de alineación en los engranajes. El modelo propuesto por Tobe aproximaba la geometría del diente mediante elementos finitos de tipo placa de sección variable. Con ayuda de los resultados obtenidos propuso una ecuación empírica, que permite determinar el factor de distribución longitudinal de la carga en transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales.

Smith [37] estimó el factor de distribución de carga en engranajes helicoidales. Utilizando una rutina simple de programación, investigó el efecto de un amplio rango de desalineaciones del engrane y modificaciones del perfil del diente sobre el factor de distribución longitudinal de la carga. Mediante esta investigación, pudo demostrar que incluso en configuraciones de diseño habituales bien alineadas, el factor de distribución longitudinal de la carga era un 50% superior al estimado.

Marunic [38] define el factor de distribución longitudinal de la carga como el cociente entre la tensión de flexión máxima y la tensión de flexión nominal. Utilizando un modelo de elementos finitos de un diente de un engranaje cilíndrico recto de cuerpo macizo, sometido a una distribución uniforme de la carga, calculó este factor para distintas geometrías de engranajes. Con los resultados obtenidos pudo demostrar que incluso cuando la distribución de la carga es uniforme a lo largo del ancho de cara del diente, la distribución de tensiones de flexión en la raíz del diente es irregular.

Atanasovska [39] propuso un método de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga basado en un modelo de elementos finitos de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos. Posteriormente utilizó este método para el cálculo del factor de distribución de la carga bajo distintas configuraciones arbitrarias de desalineación de un engranaje cilíndrico recto. Los resultados obtenidos los comparó con los obtenidos a partir de un modelo basado en la fundación elástica de Winkler, obteniendo un buen grado de correlación.

Feng [40] propuso un método basado en la fundación elástica de Winkler para calcular el factor de distribución longitudinal de la carga en transmisiones de engranajes cilíndricos. El método propuesto considera las deformaciones en los rodamientos, los errores de fabricación y montaje, las fuerzas axiales de los engranajes cilíndricos helicoidales y el efecto de la rodadura. Según el autor, este nuevo método es capaz de ofrecer valores del factor de distribución longitudinal de la carga más precisos que los obtenidos por otros métodos existentes en la literatura.

2.5 Métodos semianalíticos para la determinación del estado tensional de transmisiones de engranajes

En la literatura consultada, los métodos semianalíticos se han utilizado principalmente para resolver el problema de contacto entre dientes de engranajes. Entre estos métodos, se puede decir que el más utilizado en este ámbito es el método de los coeficientes de influencia. Este método consiste en la discretización del dominio del problema en una serie de elementos de presión. Los coeficientes de influencia relacionan las presiones aplicadas en cada uno de estos elementos con los desplazamientos que producen en el resto del dominio. La solución al problema de contacto, en forma de distribución de presión, se puede obtener numéricamente utilizando principios variacionales, según las directrices de Kalker [41].

Si bien dichos coeficientes de influencia pueden tener distinta naturaleza, habitualmente se calculan analíticamente a partir de la solución de Boussinesq [42] y Cerruti [43] para

cargas puntuales aplicadas en semiespacios elásticos. El uso de estos coeficientes permite obtener resultados precisos cuando las superficies de los engranajes se pueden aproximar a semiespacios elásticos en las zonas cercanas al contacto. Sin embargo, cuando se aplican para el cálculo de presiones de contacto entre dientes de engranajes, la aproximación de la superficie de contacto a un semiespacio elástico no siempre es buena, pues el contacto se puede producir en zonas cercanas a los bordes de la superficie. En esos casos, la resolución del problema de contacto utilizando los coeficientes de influencia calculados a partir de la solución de Boussinesq no siempre ofrece resultados precisos. No obstante, es posible aplicar métodos de corrección de los coeficientes de influencia, como los propuestos por deMul [44] y Guilbault [45], que permiten aproximar la geometría de los engranajes mediante la superposición de cuartos de espacio elásticos, y de esa forma, obtener soluciones precisas al problema de contacto incluso cuando éste se encuentra cerca de un borde.

Somprakit [46] fué uno de los primeros autores en aplicar el método de los coeficientes de influencia para el cálculo de las tensiones de contacto que se producen en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos. Este método le permitió obtener soluciones rápidas al problema de contacto en aquellos casos en los que la solución de Hertz no es aplicable, como cuando las geometrías de los engranajes en las inmediaciones del contacto no se pueden aproximar mediante superficies cuadráticas.

Mahanta [47] investigó las limitaciones de la aplicación de las soluciones analíticas de Hertz para el cálculo de distribuciones de presión de contacto en engranajes cilíndricos rectos. Utilizando ensayos experimentales demostró que existen grandes diferencias entre las tensiones de contacto predichas por la solución analítica y las reales. Posteriormente resolvió el problema de contacto en los mismos casos de estudio utilizando el método de los coeficientes de influencia, y demostró que este último ofrece resultados de presión más parecidos a los obtenidos experimentalmente.

Guilbault [48] desarrolló un modelo rápido para la estimación de las distribuciones de tensión en dientes de engranajes cilíndricos helicoidales. En este modelo, el problema de contacto se resuelve mediante el método de los coeficientes de influencia, realizando las correcciones oportunas para tener en cuenta el efecto de los bordes de las superficies sobre las presiones de contacto. También consideró una modificación de la magnitud de los coeficientes de influencia para tener en cuenta los desplazamientos adicionales que se producen debido a la flexión de los dientes, calculada mediante el método de las bandas finitas (FSM, finite strip method). En la referencia [49], el autor utilizó este modelo semianalítico para investigar la influencia de las desalineaciones en transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales.

Sheveleva [27] aplicó el método de los coeficientes de influencia para calcular la distribución de presión de contacto que se produce en una transmisión de engranajes cónicos espirales, realizando las correcciones oportunas para tener en cuenta el efecto de los bordes de las superficies de contacto sobre la distribución de presión. El autor propone un método combinado en el cual se utiliza la solución analítica de Hertz cuando el contacto se produce lejos de los bordes de las superficies, y el método de los coeficientes de influencia cuando el contacto se produce cerca de alguna de los bordes. De esta manera, se puede resolver de forma eficaz el problema de contacto en todo el ciclo de engrane.

Wink [50] estudió las ventajas y desventajas de tres estrategias distintas utilizadas para la solución numérica del problema de contacto utilizando el método de los coeficientes de influencia. Obtuvo la conclusión que el método de Cholesky era capaz de resolver el problema de contacto más rápido que las otras técnicas analizadas, obteniendo resultados de la misma precisión. Este autor utilizó en la referencia [51] uno de estos métodos semianalíticos para estudiar como afectan las desalineaciones en el error de transmisión bajo carga en transmisiones cilíndricas rectas y helicoidales.

Wu [52] aplicó el método de los coeficientes de influencia para calcular la distribución de presión de contacto que se produce en una transmisión de engranajes hipoides con dientes rectos, en los que el contacto es aproximadamente lineal. En este caso, los coeficientes de influencia calculados se modifican para considerar los desplazamientos adicionales producidos por la flexión de los dientes. Esta modificación de los coeficientes de influencia se realiza de acuerdo con el método propuesto por Linke [53], basado en resultados obtenidos a partir del análisis por el método de los elementos finitos de un diente de engranaje. Los resultados obtenidos del modelo de Wu fueron comparados con los obtenidos a partir del análisis de un modelo de elementos finitos de la transmisión, obteniendo desviaciones relativas inferiores al 5% en resultados de presión de contacto.

Recientemente Pop [54] ha utilizado el método de los coeficientes de influencia para resolver el problema de contacto en engranajes cilíndricos rectos con doble abombamiento de la superficie de contacto. Utilizando este método, realizó distintos análisis, con el fin de cuantificar la influencia del abombamiento de la superficie del diente sobre las presiones de contacto resultantes.

Por otra parte, y en menor medida, los métodos semianalíticos también se han utilizado para predecir las tensiones de flexión en la raíz del diente. Guingand [55] utilizó el método de los prismas finitos (FPM, finite prism method) para calcular las tensiones de contacto en engranajes cilíndricos helicoidales. Los resultados de tensión de flexión obtenidos fueron comparados con los resultados obtenidos a partir de un análisis experimental, mostrando un buen grado de correlación.

En su modelo de estimación rápida del estado tensional de una transmisión, Guibault [48] utilizó el método de las diferencias finitas (FDM, finite difference method) para el estudio de las tensiones de flexión en la base de los dientes, bajo la asunción de deformación plana. De acuerdo con el autor, los resultados obtenidos tienen un buen grado de parecido a los obtenidos a partir del análisis de un modelo de elementos finitos del diente.

2.6 Métodos numéricos para la determinación del estado tensional de transmisiones de engranajes

Entre los distintos métodos numéricos disponibles en la literatura para realizar el análisis tensional, el método de los elementos finitos es, sin duda, el que ha despertado mayor interés entre los investigadores de transmisiones de engranajes.

Aunque otros autores relacionados con este campo utilizaron previamente este método, fue Coy [56] en 1985 quien destacó la necesidad de incluir este tipo de análisis en los procesos de diseño de transmisiones de engranajes. Este autor puntualizó algunas de las dificultades que era necesario superar para poder incorporar este método de forma satisfactoria en la industria, dando lugar a tres grandes líneas de investigación: *(i)* la generación de modelos matemáticos de las geometrías de los engranajes, *(ii)* la discretización de estas geometrías en elementos finitos y *(iii)* la aplicación de condiciones de contorno al modelo de elementos finitos.

La generación de modelos matemáticos de las geometrías de los engranajes fue liderada por Handschuh y Litvin [57]. Estos autores propusieron un método que, basándose en los parámetros básicos de diseño de los engranajes y en la cinemática de sus procesos de fabricación, permitía obtener una descripción analítica de la geometría de engranajes cónicos espirales. Este método sentó las bases para la generación computerizada de la gran mayoría de geometrías de engranajes, y ha sido utilizado posteriormente por múltiples autores [28, 58, 59].

Por lo que refiere a la discretización de las geometrías de los engranajes en elementos finitos, Argyris [60] y Litvin [61] fueron los primeros en proponer un método para la generación automatizada de las mallas de elementos finitos de los engranajes. Si bien en la literatura se pueden encontrar autores que generan las mallas de elementos finitos a partir de geometrías CAD, la gran mayoría de las referencias consultadas siguen el método de mallado propuesto por Litvin.

Por último, la aplicación de las condiciones de contorno al modelo de elementos finitos ha sido otro campo extensamente investigado, y en el que todavía quedan muchos

avances por hacer. Como explica Hotait [62] en su tesis doctoral, existen dos problemas principales en la aplicación de las condiciones de contorno a los modelos de elementos finitos de la transmisión:

- (i) Por una parte, la manera en la que las cargas se aplican en los modelos de elementos finitos.
- (ii) Por otra parte, la generación de las condiciones de contorno necesarias para simular la geometría completa de los engranajes.

La aplicación de las cargas en los modelos de elementos finitos de transmisiones de engranajes se ha abordado desde dos perspectivas distintas. Algunos autores, optan por considerar un único engranaje en el modelo de elementos finitos, y resolver el problema estructural aplicando directamente la carga sobre su superficie de contacto. Dentro de esta línea, algunos autores, como Handschuh [57] o Kawalec [63], especifican la carga arbitrariamente sobre la superficie de contacto. Otros autores resuelven el problema de contacto por métodos analíticos o semianalíticos, y aplican las distribuciones de carga resultantes sobre los modelos de elementos finitos del engranaje. En este sentido, Litvin [26] utilizó la teoría de Hertz para resolver el problema de contacto entre una pareja de engranajes cónicos espirales y aplicar la distribución de presión resultante sobre un modelo de elementos finitos del engranaje. Un procedimiento similar utilizó Hotait [22], aunque en este caso se sirvió del modelo propuesto por Kolivand [64] para determinar la distribución de la carga en una pareja de engranajes hipoides.

Sin embargo, en la mayoría de las referencias consultadas, los autores optan por seguir los pasos de Bibel [65], y resolver el problema de contacto como parte del problema de elementos finitos. De esta forma, la aplicación de las cargas al problema de elementos finitos se simplifica, generalmente especificando un par torsor que actúa sobre uno de los engranajes, mientras el otro engranaje permanece fijo en el espacio.

El otro problema refiere a la generación de las condiciones de contorno necesarias para simular la geometría completa de los engranajes. Por motivos relacionados con el coste computacional, resulta poco eficiente considerar la geometría completa de los engranajes y de los ejes en los modelos de elementos finitos de la transmisión. Por este motivo, la mayoría de los trabajos consultados únicamente consideran una porción de la geometría de los engranajes en los modelos de elementos finitos, que generalmente comprende entre tres y cinco parejas de dientes. De todas las referencias consultadas en la elaboración de este trabajo, únicamente los estudios realizados por Mao [66] consideran la geometría completa de los engranajes en los modelos de elementos finitos de la transmisión.

Bajo este amplio abanico de posibilidades en la generación y configuración de los modelos de elementos finitos de la transmisión, éstos se han utilizado con múltiples propósitos.

Viajayakar [67] combinó la solución del problema de contacto mediante la integral de superficie de Boussinesq con un modelo estructural de elementos finitos. El funcionamiento del modelo resultante lo ejemplificó con el análisis de una transmisión de engranajes hipoides, sujetos a distintos tipos de desalineación.

Kawalec [63] comparó los resultados de tensión de flexión obtenidos a partir de los procedimientos analíticos descritos en las normas ISO-6336 [8] y AGMA-2001-D04 [10], con los obtenidos a partir de un modelo de elementos finitos de un diente de engranaje bajo la acción de una carga distribuida, aplicada en el punto más alto de contacto en un único diente. A partir de este estudio pudo concluir que los niveles de tensión obtenidos por la norma ISO-6336 tienden a ser mayores que los obtenidos a partir del modelo de elementos finitos, mientras que los obtenidos a partir de la norma AGMA-2001-D04 tienden a ser menores.

Por otra parte, Hwang [68] comparó los resultados de tensión de contacto obtenidos a partir del procedimiento analítico descrito en la norma AGMA-2001-D04 [10] con los obtenidos a partir de un modelo de elementos finitos de la transmisión. A partir de esta investigación pudo concluir que los valores de tensión de contacto obtenidos a partir del análisis del modelo de elementos finitos tienden a ser inferiores a los obtenidos a partir del procedimiento analítico descrito en la norma AGMA-2001-D04.

Li utilizó el método de los elementos finitos para analizar el efecto de ciertas variaciones en la geometría de los engranajes, como los cambios en la magnitud del adendo [69] o la utilización de engranajes de alma adelgazada [70], sobre las tensiones de flexión y de contacto. Este mismo autor realizó otras investigaciones [71, 72] en las que se utilizaba un modelo de elementos finitos de la transmisión para estudiar la influencia de los errores de fabricación y montaje sobre el error de transmisión y la capacidad de carga de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos. Posteriormente extendió estos estudios para tener en cuenta el impacto de las desalineaciones de los engranajes [73], considerando distintos niveles arbitrarios de desalineación.

Atanasovska utilizó el método de los elementos finitos para investigar en qué medida varía la capacidad de carga de las transmisiones de engranajes cilíndricos rectos al modificar el coeficiente de adendo [74], como consecuencia de los errores en la especificación de la circunferencia de base de los engranajes que componen la transmisión [75] y debido a la variación de la carga nominal a la que están sometidos [76]. En otro estudio [39], utilizó el método de los elementos finitos para proponer una estrategia de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga.

Chen [77] propuso un modelo de elementos finitos para determinar la distribución de tensiones que se produce en transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales, en las que la geometría de los engranajes se modifica con un doble abombamiento de las superficies de contacto. Mediante este modelo de elementos finitos el autor consiguió demostrar la influencia que tiene la cantidad de abombamiento, en dirección del perfil del diente y en dirección longitudinal, sobre las tensiones máximas de contacto y de flexión.

Hotait [22] utilizó un modelo de elementos finitos de un engranaje para investigar la influencia de distintos tipos de desalineación del engrane sobre las tensiones de flexión que se producen en la raíz del diente de engranajes hipoides bajo carga. Comparó los resultados de tensión de flexión obtenidos a partir del análisis de este modelo de elementos finitos con los obtenidos mediante ensayos experimentales, mostrando un buen grado de correlación entre ambos.

Mermoz [78] utilizó el método de los elementos finitos para plantear una estrategia de optimización de la topología de las superficies de contacto de engranajes cónicos espirales, permitiendo mejorar los patrones de contacto y reducir los niveles máximos de presión de contacto.

Patil [24] utilizó el método de los elementos finitos para investigar los efectos de la fricción en el contacto entre dientes de engranajes rectos y helicoidales. Considerando distintos valores de ángulo de hélice y de coeficiente de fricción, pudo obtener ciertas correlaciones entre estos parámetros y el nivel de tensión de contacto alcanzado.

Barone [79] estudió la influencia de las desalineaciones en el estado tensional de transmisiones de engranajes encarados. A tal efecto, generó un modelo de elementos finitos de la transmisión, consistente en tres parejas de dientes. Dicho modelo se analizó considerando tres valores arbitrarios de desalineación angular. Los resultados obtenidos de los análisis mostraron que la desalineación de los engranajes repercute en un incremento de las tensiones de flexión y de contacto, pero en cambio, reduce el error de transmisión.

Wink [80] y Lias [81] utilizaron el método de los elementos finitos para el estudio de la influencia de la desalineación axial en transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales. De sus investigaciones se puede concluir que escoger correctamente el ancho de cara de cada uno de los engranajes, así como la dirección de desalineación axial, puede ayudar a incrementar la vida útil de las transmisiones.

Prabhakaran [82] utilizó el método de los elementos finitos para estudiar la influencia de las desalineaciones en el estado tensional de transmisiones de engranajes cilíndricos rectos. El autor estudió distintos casos de diseño, considerando modificaciones en el perfil de los dientes, bajo distintas cantidades arbitrarias de desalineación de los engranajes.

Los resultados obtenidos mediante el análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión son comparados con los obtenidos a partir de métodos analíticos, mostrando en este caso un escaso nivel de aproximación.

Aunque en menor medida, el método de los elementos de contorno también se ha utilizado para realizar el cálculo tensional de transmisiones de engranajes. Vecchiato [83] utilizó este método de análisis para el cálculo de las tensiones de contacto y de flexión en la raíz de los dientes de engranajes cónicos espirales. Gakwaya [84] utilizó el método de los elementos de contorno para el cálculo del estado tensional de engranajes cilíndricos rectos. Sun [85] comparó los resultados obtenidos a partir del análisis de la transmisión por el método de los elementos de contorno con los obtenidos a partir del análisis por el método de los elementos finitos.

Capítulo 3

Cálculo de la deformación de los ejes de engranajes

3.1 Introducción

Un eje es un elemento giratorio, generalmente de sección transversal circular, que se utiliza para transmitir potencia o movimiento [13]. Sirve de soporte y de eje de rotación para elementos como engranajes, poleas, volantes de inercia, etc. Habitualmente consiste en una serie de porciones cilíndricas de diversos diámetros que acomodan a los rodamientos y proporcionan apoyos para posicionar axialmente los elementos que van montados sobre él.

De acuerdo con las principales guías de diseño mecánico [4, 13, 14], el diseño de un eje debe estar basado en criterios de resistencia y de rigidez. Para satisfacer los criterios de resistencia, el eje debe ser capaz de resistir los esfuerzos a los que está sometido sin romperse, adquirir deformaciones permanentes o deteriorarse. Para satisfacer los criterios de rigidez, se debe garantizar que las deformaciones producidas en el eje por los esfuerzos a los que está sometido deben mantenerse dentro de unos límites admisibles, cuya magnitud vendrá determinada por el tipo de aplicación a la que vaya a ser destinado el eje y por las características de los elementos que conforman la transmisión.

En la mayoría de casos, el criterio de diseño más estricto es la deformación del eje bajo carga, debido a que habitualmente las condiciones impuestas por este criterio se alcanzan a niveles de carga inferiores que aquellas impuestas por los criterios de resistencia. Los valores máximos permitidos de deformación en el eje se basan habitualmente en la obtención de velocidades críticas mínimas, en parámetros requeridos para conseguir un engrane óptimo y en requerimientos impuestos por los rodamientos.

Los ejes pueden estar sujetos a distintas combinaciones de esfuerzos, que provocan distintos tipos de deformación:

- (i) Los momentos flectores y las cargas transversales soportadas por el eje producen su deformación en el plano transversal.
- (ii) Los momentos torsores soportados por el eje deforman al eje torsionalmente.
- (iii) Los esfuerzos alineados con la dirección del eje producen deformaciones axiales.

El cálculo de las distintas deformaciones que se producen en los ejes se realiza habitualmente utilizando la teoría clásica de vigas [4, 13, 14, 86–88]. La hipótesis fundamental de la teoría clásica de vigas es que las secciones transversales de la viga permanecen planas e indeformables durante su deformación, de manera que la posición de cualquier punto de la viga en su estado deformado se puede describir a partir de la posición longitudinal que ocupaba dicho punto antes de la deformación. Esta hipótesis ha dado lugar a distintas teorías de vigas, entre las que destacan, por su extenso grado de aplicación, la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y la teoría de vigas de Timoshenko [89].

Por una parte, la teoría de vigas de Euler-Bernoulli asume que dichas secciones transversales, además de planas e indeformables, permanecen perpendiculares al eje neutro de la viga en su estado deformado. De esta manera, la rotación de la sección transversal está estrictamente relacionada con la curvatura de la viga en el estado deformado, que se produce debido al efecto del momento flector, como se muestra en la figura 3.1a. En la teoría de vigas de Euler-Bernoulli se desprecian las deformaciones originadas por los esfuerzos cortantes, lo que hace que la aplicabilidad de los modelos de cálculo desarrollados a partir de ella se limite a vigas en las que la deformación por cortante sea pequeña en comparación con la deformación por flexión. Esto ocurre principalmente en vigas esbeltas, en las que la longitud característica de las vigas sea superior a diez veces su diámetro [14].

El uso de la teoría de vigas de Timoshenko supone una mejora con respecto a la teoría de Euler-Bernoulli, pues permite que las secciones transversales de la viga se inclinen con respecto su eje neutro debido a la presencia de deformaciones originadas por el efecto de esfuerzos cortantes, como se ilustra en la figura 3.1b. De esta manera, se aumenta el rango de aplicación de esta teoría frente a la teoría de Euler-Bernoulli, a vigas cuya longitud sea inferior a diez veces su diámetro.

Ambas teorías se pueden aplicar utilizando distintos métodos, cuya elección dependerá del caso de estudio considerado. Por una parte están los métodos basados en la integración sucesiva de las ecuaciones que gobiernan la deformación del eje, que pueden

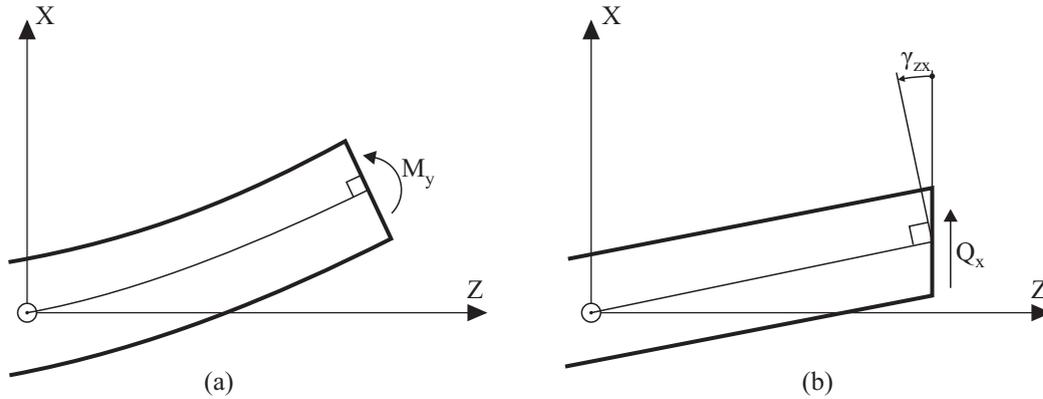


FIGURA 3.1: Deformación de una viga por (a) flexión y por (b) cortante

utilizar integración directa, gráfica [90] o numérica [91, 92]. Otros procedimientos se basan en los teoremas de Mohr [93], las matrices de transferencia [94], el teorema de Castigliano [87] o el método de los elementos finitos [91, 95]. Algunas recomendaciones sobre la elección del método más apropiado para cada caso se ven reflejadas en el trabajo de Wilson [96].

Estas teorías de vigas y métodos de aplicación también se han utilizado para realizar el cálculo de las deformaciones que se producen en los ejes de las transmisiones por engranaje durante la transmisión de potencia. Las normas ISO-6336 [9] y AGMA-2001-D04 [10], cuya finalidad es la determinación de la capacidad de carga de las transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales, proponen la utilización de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli para el cálculo de la desalineación equivalente del engrane producida por la deformación de los ejes. Las mismas ideas fueron utilizadas por Koide [97] para proponer una herramienta informática para realizar el cálculo de la desalineación equivalente del engrane. Ajmi [98] utilizó elementos finitos para estudiar el comportamiento dinámico de los ejes. No obstante, el cálculo de las deformaciones de los ejes de las transmisiones por engranaje no ha sido un campo intensivo de estudio, y en consecuencia, escasas referencias pueden ser encontradas en la literatura.

En este capítulo se presentan dos modelos para el cálculo de las deformaciones que se producen en los ejes de las transmisiones de engranajes bajo carga, denominados *SHAFT1* y *SHAFT2*. Estos modelos se basan en la teoría de vigas de Timoshenko, y proporcionan soluciones analíticas para obtener las deformaciones de los ejes bajo carga. Si las cargas derivadas del contacto entre los dientes de los engranajes son conocidas, estos modelos serán capaces de ofrecer resultados precisos de deformación de los ejes, que resultarán útiles en la aplicación de los métodos expuestos en capítulos posteriores. Con esta finalidad, en la primera parte del capítulo se expone la teoría clásica de vigas bajo las hipótesis de Timoshenko. Posteriormente se describen los modelos de cálculo de la deformación de los ejes *SHAFT1* y *SHAFT2*, y su funcionamiento se demuestra

con distintos ejemplos numéricos. Por último, se describen las funciones de Macaulay, que pueden ser de utilidad en la especificación de las cargas externas que actúan en los modelos *SHAFT1* y *SHAFT2*.

3.2 Teoría de vigas aplicada al cálculo de la deflexión de ejes sometidos a cargas tridimensionales

En este apartado se detallan los principios y las hipótesis fundamentales de la teoría de vigas de Timoshenko. A tal efecto, se considera una viga recta libre de cargas, que permanece en lo que se denomina *estado de referencia*, como se ilustra en la figura 3.2. La posición que ocupan los puntos que pertenecen a la viga se describen en un sistema de coordenadas de referencia. El origen de coordenadas O de dicho sistema se sitúa en un extremo de la viga, el eje Z es coincidente con el eje de la viga y los ejes X e Y definen su sección transversal. Los vectores unitarios correspondientes a cada uno de los ejes se denotan por \mathbf{u}_X , \mathbf{u}_Y y \mathbf{u}_Z .

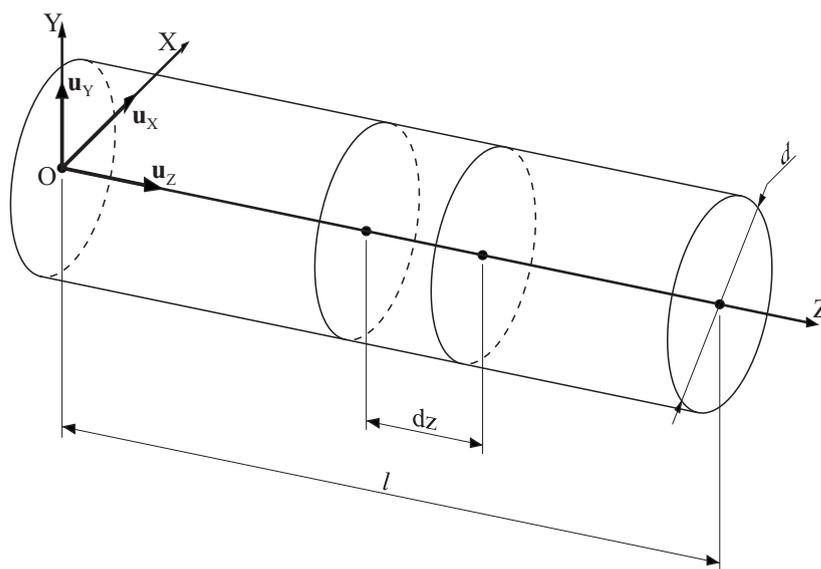


FIGURA 3.2: Viga en el estado de referencia

En el estado de referencia la viga es cilíndrica, y su longitud (l) y su diámetro (d) son conocidos. Se considera que la viga es homogénea y está conformada de un material elástico con comportamiento lineal.

3.2.1 Ecuaciones de equilibrio estático

Se considera que sobre la viga mostrada en la figura 3.2 actúa una carga distribuida, definida por el campo vectorial $\mathbf{q} = \mathbf{q}(z)$, y un momento distribuido, definido por el

campo vectorial $\mathbf{m} = \mathbf{m}(z)$. Las componentes de \mathbf{q} y \mathbf{m} expresadas en el sistema de coordenadas de referencia son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Como consecuencia de dichas cargas externas, la viga se deforma, dando lugar a lo que se conoce como *estado deformado*. En este estado, las fuerzas externas \mathbf{q} y \mathbf{m} se compensan con las fuerzas internas $\mathbf{F} = \mathbf{F}(z)$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}(z)$. Estos vectores actúan sobre la sección transversal de la viga, y sus componentes en el sistema de referencia son:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En estas expresiones $N = N(z)$ es el *esfuerzo axial*, mientras que las componentes $Q_x = Q_x(z)$ y $Q_y = Q_y(z)$ son las componentes de *esfuerzo cortante* en las direcciones X e Y . La componente $M_z = M_z(z)$ representa el *momento torsor* y las componentes $M_x = M_x(z)$ y $M_y = M_y(z)$ representan los *momentos flectores*.

En el dominio de las pequeñas deformaciones, las ecuaciones de equilibrio estático se pueden definir en el sistema de coordenadas de referencia. Si se tiene en cuenta una porción diferencial de la viga, como la mostrada en la figura 3.3, las cargas externas que actúan sobre esta porción serán $\mathbf{q} \cdot dz$ y $\mathbf{m} \cdot dz$.

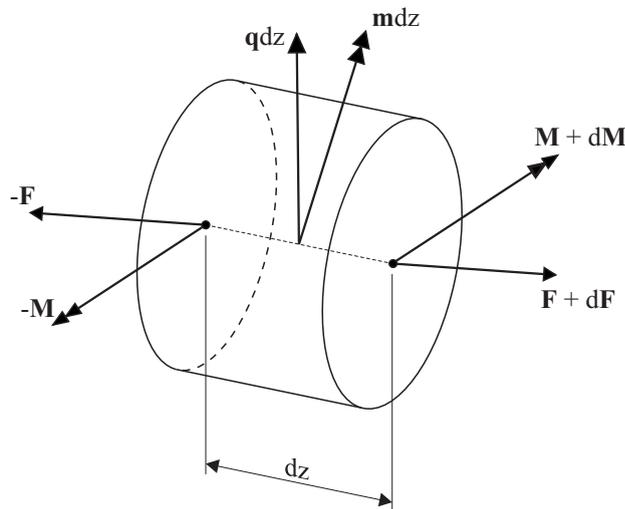


FIGURA 3.3: Cargas sobre elemento diferencial de la viga

Sobre la sección izquierda del elemento diferencial se considera una carga interna $-\mathbf{F}$ y un momento interno $-\mathbf{M}$. En la sección derecha, estas cargas se modifican diferencialmente a $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$ y $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$, respectivamente. Las relaciones de equilibrio serán, por tanto:

$$-\mathbf{F} + \mathbf{F} + d\mathbf{F} + \mathbf{q} dz = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{F}}{dz} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.3a)$$

$$-\mathbf{M} + \mathbf{M} + d\mathbf{M} + dz \cdot \mathbf{u}_Z \times (\mathbf{F} + d\mathbf{F}) + \mathbf{m} dz = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\mathbf{M}}{dz} + \mathbf{u}_Z \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.3b)$$

Si se descompone la ecuación 3.3a en sus componentes cartesianas, descritas en las ecuaciones 3.1 y 3.2, se obtienen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los ejes del sistema de referencia:

$$\frac{dQ_x}{dz} + q_x = 0 \quad (3.4a)$$

$$\frac{dQ_y}{dz} + q_y = 0 \quad (3.4b)$$

$$\frac{dN}{dz} + q_z = 0 \quad (3.4c)$$

Por otra parte, descomponiendo la ecuación 3.3b en sus componentes cartesianas, descritas en las ecuaciones 3.1 y 3.2, se obtienen las ecuaciones de equilibrio de momentos en cada uno de los ejes del sistema de referencia:

$$\frac{dM_x}{dz} - Q_y + m_x = 0 \quad (3.5a)$$

$$\frac{dM_y}{dz} + Q_x + m_y = 0 \quad (3.5b)$$

$$\frac{dM_z}{dz} + m_z = 0 \quad (3.5c)$$

3.2.2 Fuerzas internas y tensiones en la viga

Considere una sección transversal cualquiera de la viga, contenida en un plano paralelo al definido por XY , como se muestra en la figura 3.4. Los esfuerzos internos anteriormente descritos generan en esta sección una tensión normal σ_z y unas tensiones cortantes τ_{zx} y τ_{zy} .

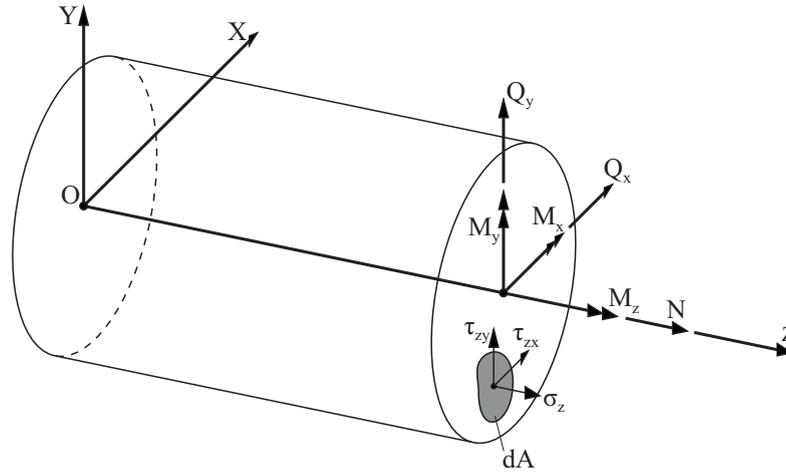


FIGURA 3.4: Tensiones y esfuerzos resultantes sobre la sección de la viga

La figura 3.5 muestra las tensiones en las secciones ortogonales a los ejes X e Y en un elemento diferencial cúbico. Dichas tensiones dan lugar al tensor tridimensional de tensiones σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

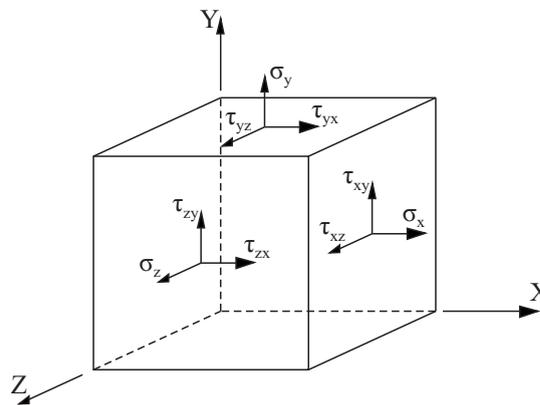


FIGURA 3.5: Componentes del tensor tridimensional de tensiones

Para cumplir con el equilibrio de momentos se deben satisfacer las siguientes relaciones, dando lugar a un tensor de tensiones σ simétrico:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.7)$$

Las tensiones producidas en la sección de la viga deben ser estáticamente equivalentes a las componentes del vector de esfuerzo interno \mathbf{F} , como se muestra en las siguientes

relaciones:

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA \quad (3.8a)$$

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA \quad (3.8b)$$

$$N = \int_A \sigma_z dA \quad (3.8c)$$

Por otra parte, el momento generado por dichas tensiones debe ser estáticamente equivalente a las componentes del vector de momento interno \mathbf{M} que actúa sobre la sección de la viga, como se muestra en las siguientes relaciones:

$$M_x = \int_A y \cdot \sigma_z dA \quad (3.9a)$$

$$M_y = - \int_A x \cdot \sigma_z dA \quad (3.9b)$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) dA \quad (3.9c)$$

3.2.3 Cinemática de la deformación de la viga

Para describir la cinemática de la deformación de la viga se hace uso de la hipótesis propuesta por Timoshenko [89] para el cálculo de vigas, según la cual la sección transversal de la viga perpendicular al eje Z se comporta como un sólido rígido, permaneciendo plana e indeformable durante la deformación. Mediante esta hipótesis, se desprecian las contracciones en las direcciones transversales al eje producidas por el efecto Poisson. Esta simplificación permite describir completamente la posición deformada de cualquier punto de la sección transversal mediante un vector que describe su traslación $\mathbf{w} = \mathbf{w}(z)$ y un vector que describe su rotación $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(z)$, cuyas componentes únicamente dependen de la coordenada z que ocupa dicha sección transversal en el estado de referencia:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Bajo el dominio de las pequeñas deformaciones, las traslaciones w_x , w_y y w_z de la ecuación 3.10 serán pequeñas comparadas con la longitud de la viga l . Además, las rotaciones θ_x , θ_y y θ_z también serán pequeñas y por lo tanto se podrá asumir que

sin $\theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$, donde θ representa cualquiera de las rotaciones de la sección expresada en radianes. Dichas traslaciones y rotaciones se representan en la figura 3.6.

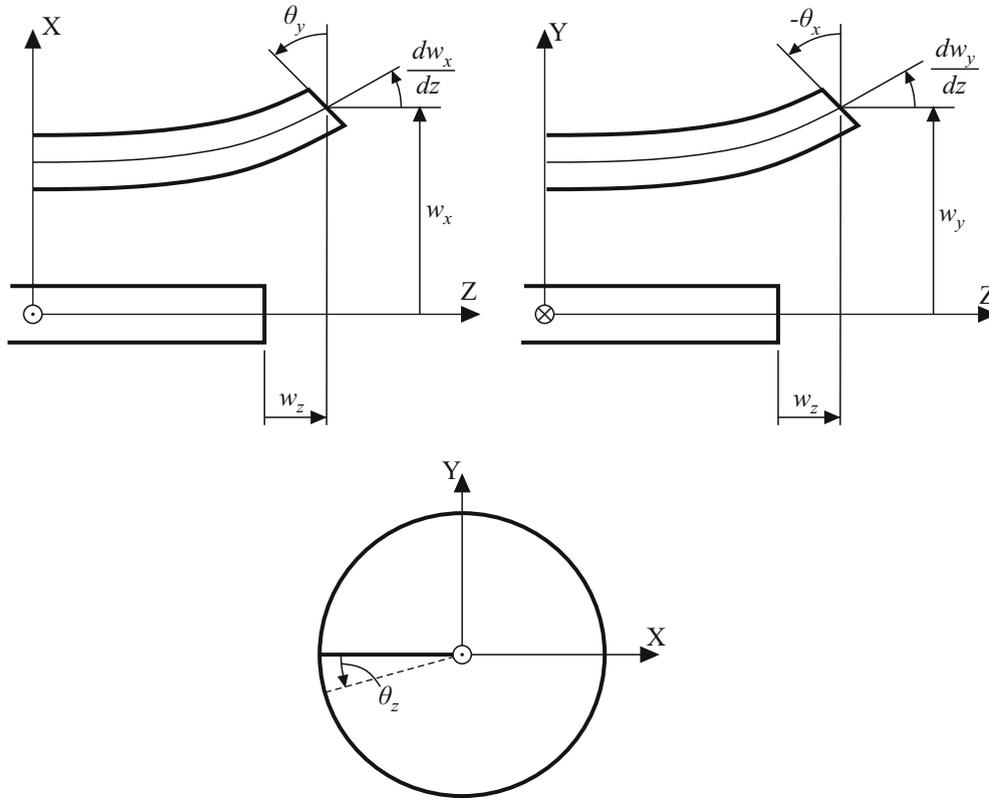


FIGURA 3.6: Componentes de deformación

El desplazamiento $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ de un punto material cualquiera de la sección transversal de la viga se podrá expresar como la suma del movimiento de traslación (\mathbf{w}) y de rotación ($\boldsymbol{\theta}$) de la sección:

$$u_x(x, y, z) = w_x(z) - y \cdot \theta_z(z) \quad (3.11a)$$

$$u_y(x, y, z) = w_y(z) + x \cdot \theta_z(z) \quad (3.11b)$$

$$u_z(x, y, z) = w_z(z) - x \cdot \theta_y(z) + y \cdot \theta_x(z) \quad (3.11c)$$

Las deformaciones de la viga en un punto dado se podrán expresar a partir de los desplazamientos mediante las siguientes ecuaciones:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{dw_x}{dz} - y \frac{d\theta_z}{dz} - \theta_y \quad (3.12a)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{dw_y}{dz} + x \frac{d\theta_z}{dz} + \theta_x \quad (3.12b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{dw_z}{dz} - x \frac{d\theta_y}{dz} + y \frac{d\theta_x}{dz} \quad (3.12c)$$

Como consecuencia de la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas en el estado deformado de la viga, se puede observar en la ecuación 3.12 que γ_{zx} es independiente de la coordenada x , y por lo tanto la tensión cortante τ_{zx} será constante a lo largo de la sección transversal, llevando a valores de τ_{zx} distintos de cero en las partes superiores e inferiores de la sección, como se muestra en la figura 3.7a. Sin embargo, si la superficie cilíndrica está libre de tracciones superficiales, entonces la tensión τ_{zx} debe ser nula en las aristas, llevando a una situación que contradice las igualdades impuestas en la ecuación 3.7, puesto que τ_{zx} y τ_{xz} no son iguales.

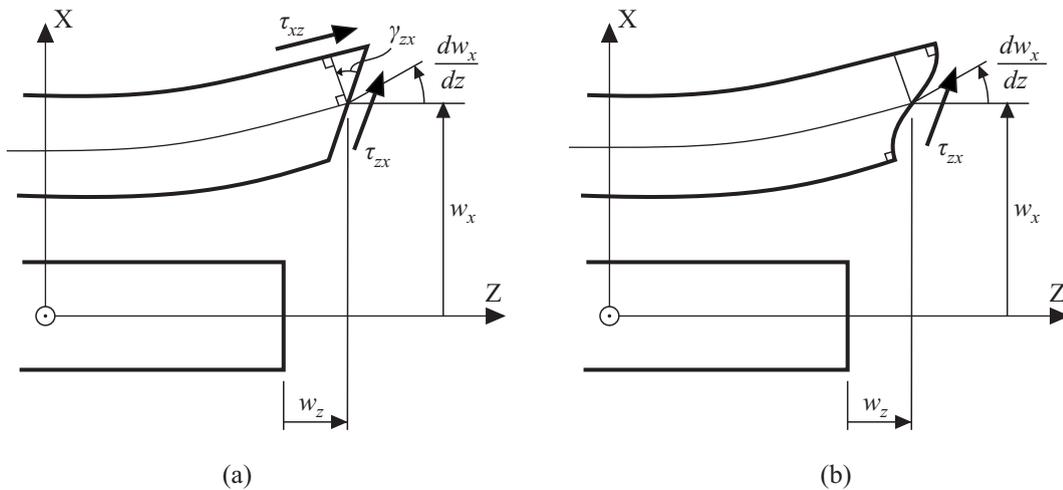


FIGURA 3.7: Tensiones cortantes en la viga deformada: (a) deformación en la teoría de vigas y (b) deformación real

Sin embargo, se sabe que en realidad las igualdades descritas en la ecuación 3.7 se cumplen. Por tanto se cumplirá que en las partes superiores e inferiores de la sección la tensión τ_{zx} es nula, y por tanto la deformación γ_{zx} será nula también. Esto indica que la sección transversal forma un ángulo recto con la superficie cilíndrica, como se muestra en la figura 3.7b. Este será un efecto a tener en cuenta cuando se utilice la teoría de vigas bajo las hipótesis de Timoshenko.

La diferencia entre la teoría de vigas de Timoshenko y la de Euler-Bernoulli reside en que la segunda incluye restricciones adicionales en el movimiento de las secciones transversales de la viga. Además de considerar que éstas permanecen planas e indeformables en el estado deformado de la viga, se asume que permanecen perpendiculares a su eje

neutro. De esta manera, la rotación de la sección transversal está estrictamente relacionada con la curvatura de la viga en el estado deformado, despreciando la deformación producida por los esfuerzos cortantes. Por este motivo, las hipótesis de Euler-Bernoulli únicamente son aplicables cuando las deformaciones cortantes de la viga son pequeñas comparadas con las deformaciones por flexión, como ocurre en vigas esbeltas.

En este trabajo se favorece el uso de la teoría de vigas basada en las hipótesis de Timoshenko, pues sus asunciones hacen que sea aplicable tanto para vigas esbeltas, en las que la deformación por cortante es despreciable en comparación con la deformación por flexión, como en vigas cortas, en las que la deformación por cortante puede tener especial importancia.

3.2.4 Relaciones constitutivas de una viga elástica

Las deformaciones de la viga se relacionan con las tensiones que las producen a través de la ley de Hooke. Considerando que los módulos de elasticidad y de cizalladura se denotan por E y G , respectivamente, la tensión normal σ_z y las tensiones cortantes τ_{zx} y τ_{zy} producidas en la sección de la viga se podrán expresar como:

$$\tau_{zx} = G \cdot \gamma_{zx} = G \cdot \left(\frac{dw_x}{dz} - y \frac{d\theta_z}{dz} - \theta_y \right) \quad (3.13a)$$

$$\tau_{zy} = G \cdot \gamma_{zy} = G \cdot \left(\frac{dw_y}{dz} + x \frac{d\theta_z}{dz} + \theta_x \right) \quad (3.13b)$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot \left(\frac{dw_z}{dz} - x \frac{d\theta_y}{dz} + y \frac{d\theta_x}{dz} \right) \quad (3.13c)$$

Considerando la ecuación 3.8 se pueden obtener las componentes del vector de esfuerzos internos \mathbf{Q} a partir de las tensiones en la sección de la viga, obtenidas en la ecuación 3.13:

$$Q_x = G \left[A_x \left(\frac{dw_x}{dz} - \theta_y \right) - S_x \frac{d\theta_z}{dz} \right] \quad (3.14a)$$

$$Q_y = G \left[A_y \left(\frac{dw_y}{dz} + \theta_x \right) - S_y \frac{d\theta_z}{dz} \right] \quad (3.14b)$$

$$N = E \left[A \frac{dw_z}{dz} + S_x \frac{d\theta_x}{dz} - S_y \frac{d\theta_y}{dz} \right] \quad (3.14c)$$

Considerando las ecuaciones 3.9 se pueden obtener las componentes del vector de momentos internos \mathbf{M} a partir de las tensiones en la sección de la viga, obtenidas en la ecuación 3.13:

$$M_x = E \left[S_x \frac{dw_z}{dz} + I_{xx} \frac{d\theta_x}{dz} - I_{xy} \frac{d\theta_y}{dz} \right] \quad (3.15a)$$

$$M_y = E \left[-S_y \frac{dw_z}{dz} - I_{xy} \frac{d\theta_x}{dz} + I_{yy} \frac{d\theta_y}{dz} \right] \quad (3.15b)$$

$$M_z = G \left[-S_x \left(\frac{dw_x}{dz} - \theta_y \right) + S_y \left(\frac{dw_y}{dz} + \theta_x \right) + (I_{xx} + I_{yy}) \frac{d\theta_z}{dz} \right] \quad (3.15c)$$

A continuación se describen algunas de las variables que aparecen en las ecuaciones 3.14 y 3.15. Puesto que la sección transversal de la viga considerada es circular, se pueden realizar algunas simplificaciones adicionales, también mencionadas a continuación:

- A es el área de la sección transversal de la viga.

$$A = \int_A dA = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad (3.16)$$

- A_x y A_y son las áreas a cortante de la viga. Como se ha visto anteriormente, la teoría de vigas asume una variación constante en las tensiones cortantes producidas por la flexión de la viga, cuando realmente esta variación es, al menos, cuadrática. La asunción de una variación constante supone una sobreestimación de la rigidez de la viga frente a deformaciones cortantes, que se compensa mediante el factor de reducción de área (k).

$$A_c = A_x = A_y = k \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad (3.17)$$

Como explica Dong [99], la determinación de la magnitud del factor de reducción de área ha sido un campo extensamente investigado en la literatura, y a pesar de ello, no hay un acuerdo general sobre qué valores resultan más apropiados para este factor. No obstante, para vigas de sección transversal circular es comúnmente aceptada la utilización de una magnitud de $k = 0.89$, según propuso Cowper [100].

- S_x y S_y son los momentos estáticos de la sección transversal respecto a los ejes X e Y . Los momentos estáticos de una sección transversal circular son nulos.

$$S_x = \int_A y \, dA = 0 \quad (3.18a)$$

$$S_y = \int_A x \, dA = 0 \quad (3.18b)$$

- I_{xx} y I_{yy} son los momentos de inercia de la sección transversal de la viga, y I_{xy} es el producto de inercia de esta misma sección. El producto de inercia de una sección circular es nulo.

$$I = I_{xx} = I_{yy} = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \quad (3.19a)$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y dA = 0 \quad (3.19b)$$

$$I_o = I_{xx} + I_{yy} = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 \quad (3.19c)$$

En base a estas consideraciones, la ecuación 3.14 que relaciona la magnitud de las cargas internas en la sección transversal de la viga con sus deformaciones se reescribe, dando lugar a la siguiente expresión:

$$Q_x = G \cdot A_c \left(\frac{dw_x}{dz} - \theta_y \right) \quad (3.20a)$$

$$Q_y = G \cdot A_c \left(\frac{dw_y}{dz} + \theta_x \right) \quad (3.20b)$$

$$N = E \cdot A \cdot \frac{dw_z}{dz} \quad (3.20c)$$

La ecuación 3.15 que relaciona los momentos internos en la sección transversal de la viga con sus rotaciones también se puede reescribir, dando lugar a la siguiente expresión:

$$M_x = E \cdot I \frac{d\theta_x}{dz} \quad (3.21a)$$

$$M_y = E \cdot I \frac{d\theta_y}{dz} \quad (3.21b)$$

$$M_z = G \cdot I_o \frac{d\theta_z}{dz} \quad (3.21c)$$

3.2.5 Ecuaciones diferenciales que gobiernan la deformación de la viga bajo carga

A partir de la ecuación 3.4c y considerando la ecuación 3.20c se puede definir la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la viga frente a esfuerzos axiales:

$$\frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw_z}{dz} \right) + q_z = 0 \quad (3.22)$$

A partir de las ecuaciones 3.4a y 3.5b, y considerando las ecuaciones 3.20a y 3.21b, se puede definir el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el comportamiento de la viga frente a esfuerzos contenidos en el plano XZ :

$$\frac{d}{dz} \left(EI \frac{d\theta_y}{dz} \right) + GA_c \left(\frac{dw_x}{dz} - \theta_y \right) + m_y = 0 \quad (3.23a)$$

$$\frac{d}{dz} \left[GA_c \left(\frac{dw_x}{dz} - \theta_y \right) \right] + q_x = 0 \quad (3.23b)$$

A partir de las ecuaciones 3.4b y 3.5a, y considerando las ecuaciones 3.20b y 3.21a, se puede definir el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el comportamiento de la viga frente a esfuerzos contenidos en el plano YZ :

$$\frac{d}{dz} \left(EI \frac{d\theta_x}{dz} \right) - GA_c \left(\frac{dw_y}{dz} + \theta_x \right) + m_x = 0 \quad (3.24a)$$

$$\frac{d}{dz} \left[GA_c \left(\frac{dw_y}{dz} + \theta_x \right) \right] + q_y = 0 \quad (3.24b)$$

Por último, a partir de la ecuación 3.5c y considerando la ecuación 3.21c se puede definir la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la viga frente a esfuerzos a torsión:

$$\frac{d}{dz} \left(GI_o \frac{d\theta_z}{dz} \right) + m_z = 0 \quad (3.25)$$

En las ecuaciones 3.22, 3.23, 3.24 y 3.25, el área de la sección transversal (A), el área de la sección transversal a cortante (A_c), el momento de inercia (I) y el momento polar de inercia (I_o) son variables que dependen de la posición z .

3.3 Modelo analítico SHAFT1 para el cálculo de la deformación de ejes de engranajes

En este apartado se presenta el modelo *SHAFT1*, que permitirá realizar el cálculo de la deformación bajo carga de un eje de engranaje. En este modelo, basado en el modelo físico de la figura 1.13, la geometría del conjunto formado por el eje y el engranaje se aproxima mediante tres tramos cilíndricos concéntricos, como se muestra en la figura 3.8.

Los cilindros exteriores, de longitud l_1 y l_2 , simulan la geometría de un eje circular de diámetro d_{sh} . Por otra parte, el engranaje se simula mediante un cilindro cuyo diámetro coincide con el diámetro primitivo del engranaje (d), y su longitud con su ancho de cara (b).

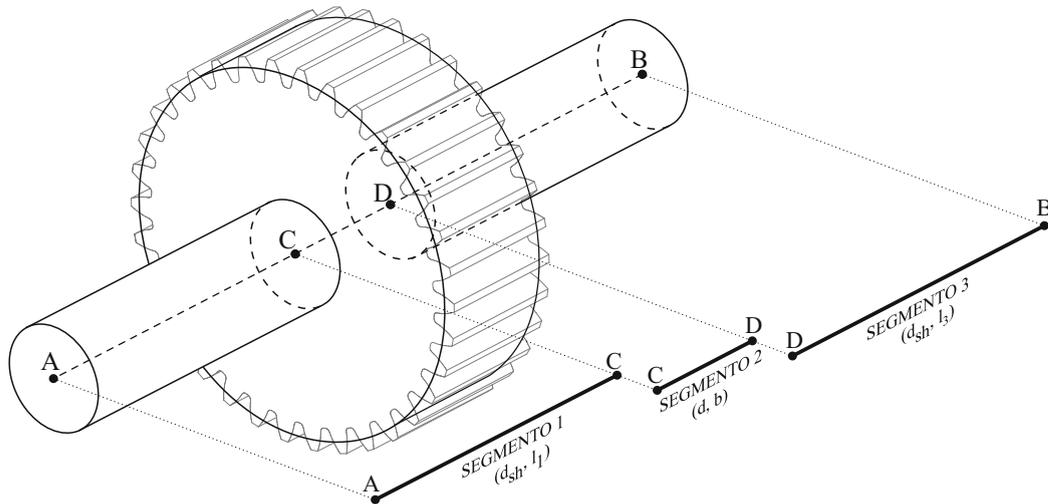


FIGURA 3.8: Modelización del eje de la transmisión como una viga y división en segmentos

La deformación bajo carga de este conjunto se puede estudiar mediante la teoría de vigas de Timoshenko, utilizando las ecuaciones diferenciales presentadas en el apartado 3.2.5. A tal efecto, el conjunto formado por los tres cilindros se simula mediante una viga que se extiende desde el punto A hasta el punto B , cuyo módulo de elasticidad (E) y módulo de cizalladura (G) son constantes en toda su longitud.

Según describe Wilson [96], cuando se desea conocer la deformación en diversos puntos de una viga, es aconsejable utilizar el método de la integración sucesiva de las ecuaciones que gobiernan esta deformación. Sin embargo, la presencia del engranaje sobre el eje hace que se produzca una discontinuidad en las propiedades de la sección transversal de la viga, que dificulta la aplicación de este método. La aparición de discontinuidades en la sección transversal de una viga se ha tratado de formas distintas en la literatura [86–88, 101–105]. Entre estos métodos, en este trabajo se utilizará el conocido método de los segmentos, tal y como lo describe Rencis [105]. Este método consiste en los siguientes pasos:

1. La viga AB mediante la cual se modeliza el comportamiento del eje se divide en tres segmentos de sección transversal constante (AC, CD, DB), como se ilustra en la figura 3.8.
2. Para cada uno de los nuevos segmentos de sección constante se plantean las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de la viga bajo carga, descritas en el apartado 3.2.5. Las propiedades de la sección transversal de cada segmento se determinan a partir del diámetro considerado para dicha sección.
3. Se especifican las cargas externas que actúan sobre cada segmento considerado. En general, las cargas derivadas del contacto entre engranajes se aplican sobre

el segmento 2, mediante el cual se simula el comportamiento del engranaje. No obstante, es posible incluir cargas externas en otras localizaciones del eje. Para la especificación de las funciones que describen las cargas externas se utilizan funciones de discontinuidad, descritas en el apartado 3.5.

4. Como resultado de la integración sucesiva de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la viga bajo carga, aparecerá un conjunto de constantes de integración, cuyo valor es necesario determinar para calcular la deformación de la viga. El valor de estas constantes de integración se puede determinar considerando las condiciones de contorno y condiciones de continuidad entre segmentos. Las condiciones de contorno se establecen en los puntos A y B , y habitualmente se referirán a un apoyo o a un empotramiento. Las condiciones de continuidad se establecen en los puntos C y D .
5. Una vez obtenidas las constantes de integración, se puede obtener la posición deformada de cualquier punto perteneciente a la viga.

Las cargas consideradas en el modelo pueden tener distintas procedencias. Por una parte, se pueden derivar a partir de la propia geometría de los dientes de engranaje y de las condiciones de carga de la transmisión, tal como se expone en las principales guías de diseño de máquinas [4, 13, 14] o en la literatura específica de engranajes [1, 2, 61]. Por otra parte, pueden provenir de modelos de contacto entre dientes de engranaje, como el descrito en el apartado 6.6, o de modelos para el cálculo de la distribución de la carga, como el descrito en el apartado 5.5.

La desalineación que se produce entre engranajes debido a la deformación bajo carga de los ejes se puede determinar considerando la posición deformada de los puntos C y D de los ejes del piñón y de la rueda, como se muestra en el apartado 4.8.5

3.4 Modelo analítico SHAFT2 para el cálculo de la deformación de ejes de engranajes

En la sección anterior se ha presentado el modelo *SHAFT1* siguiendo la teoría de Timoshenko. La hipótesis fundamental de esta teoría de vigas es que las secciones transversales de la viga permanecen planas e indeformables tras la deformación. Sin embargo, esta hipótesis no es del todo satisfactoria cuando se consideran ejes escalonados, en los que se producen cambios bruscos de la sección transversal. Realmente, en las proximidades de las variaciones abruptas de sección, que aparecen en los escalones, la asunción de que las secciones transversales de la viga permanecen planas tras la

deformación puede estar lejos de la realidad. Puede verse que, de hecho, la rigidez de la viga en la proximidad del escalón, en el tramo con sección mayor, es menor de lo que se asume en la realidad, ya que una parte de la sección no está realmente oponiéndose a la flexión.

En el desarrollo del modelo *SHAFT1* se han despreciado los efectos que aparecen debido a los cambios de sección. Ésta puede ser una aproximación válida cuando las longitudes de los tramos son grandes comparadas con las diferencias de diámetros en los escalones, puesto que los efectos locales en el escalón no influyen en el conjunto, pero puede ser una mala aproximación cuando dicha condición no se da. Una mejora en el modelo *SHAFT1* puede conseguirse introduciendo cambios en el modelo que tengan en cuenta dicha disminución de rigidez en los escalones.

En el modelo que se presenta a continuación, denominado *SHAFT2*, se intenta tener en cuenta dicha disminución de rigidez mediante la consideración de un diámetro equivalente (d_{eq}) de sección variable diferente del real, en las proximidades de los cambios abruptos de sección. Este diámetro equivalente tan sólo se tendrá en cuenta para el cálculo del momento de inercia (I), pero no para el cálculo del área resistente a cortante (A_c). La disminución de rigidez se consigue en el modelo al considerar que el diámetro equivalente varía linealmente en lugar de hacerlo de forma abrupta. De esta forma, si se estudia un eje escalonado de sección circular como el mostrado en la figura 3.9, que tiene un tramo intermedio de diámetro d y longitud b en un eje de diámetro constante de valor d_{sh} , siendo $d > d_{sh}$, se considerará que el diámetro equivalente, para el cálculo del momento de inercia varía linealmente desde el valor d_{sh} , hasta el valor de d con una pendiente m .

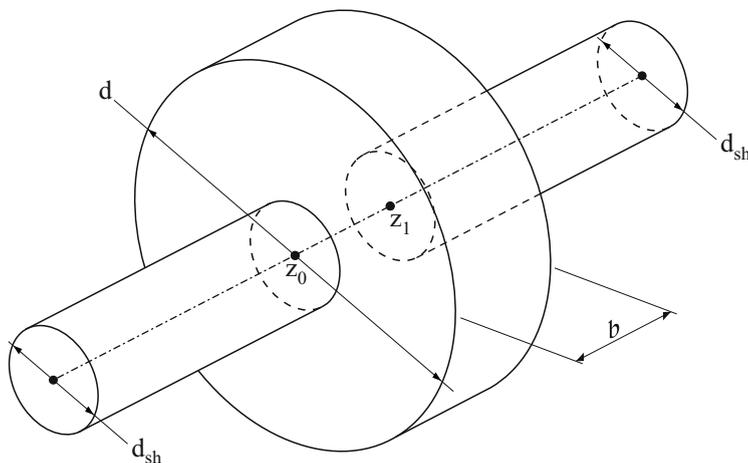


FIGURA 3.9: Eje de sección circular escalonado

En el caso de que se cumpla que $(d - d_{sh}) > m \cdot b/2$, el valor del diámetro equivalente no alcanzará el valor del diámetro d , si no que su valor máximo será $d_{sh} + m \cdot b/2$. De esta

forma el diámetro equivalente para el cálculo de la inercia de la sección vendrá dado por la siguiente expresión:

$$d_{eq}(z) = \begin{cases} d_{sh} & \text{si } z < z_0 \\ \min(d_{sh} + m(z - z_0), d) & \text{si } z_0 < z < z_0 + W/2 \\ \min(d_{sh} + m(z_1 - z), d) & \text{si } z_0 + W/2 < z < z_1 \\ d_{sh} & \text{si } z > z_1 \end{cases}, \quad (3.26)$$

En la ecuación 3.26, z es la coordenada longitudinal del eje, y z_0 y z_1 coinciden con la posición de los cambios bruscos de sección. Con este valor del diámetro equivalente se calcula el momento de inercia de la sección, que en este caso viene dado por:

$$I(z) = \frac{\pi}{64} \cdot d_{eq}(z)^4 \quad (3.27)$$

Puede decirse de otra forma que, únicamente con lo que respecta al cálculo del momento de inercia de la sección, en vez de considerar una salto abrupto entre dos tramos cilíndricos de diferente diámetro, se considera un tramo cónico de transición, de tal modo que el valor del diámetro es continuo a lo largo del eje, disminuyendo la rigidez teórica. Esto puede verse gráficamente en la figura 3.10. De esta forma, el modelo queda definido por el valor del semiángulo del tramo cónico de transición (ϕ), directamente relacionado con la pendiente m definida en 3.26, cumpliéndose que $m = 2 \cdot \tan(\phi)$.

La utilidad práctica de este modelo se basa en la suposición de que para un amplio espacio de trabajo existe un valor del ángulo ϕ (único parámetro del modelo *SHAFT2*) que permite una mejora general de resultados a la hora de calcular las deflexiones del eje con respecto al modelo *SHAFT1*.

Para la obtención del modelo *SHAFT2* se considera el desarrollo de la teoría de vigas de Timoshenko expuesto en apartado 3.2, pero por simplicidad se asumen únicamente cargas de fuerza cortante en la dirección X , $q_x(z)$. De esta forma, considerando la ecuación 3.23a, y suponiendo que no existen momentos externos ($m_y = 0$), se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{dw_x}{dz} = \theta_y - \frac{1}{GA_c} \frac{d}{dz} \left(EI \frac{d\theta_y}{dz} \right) \quad (3.28)$$

Por otra parte, sustituyendo el primer término de la relación 3.29

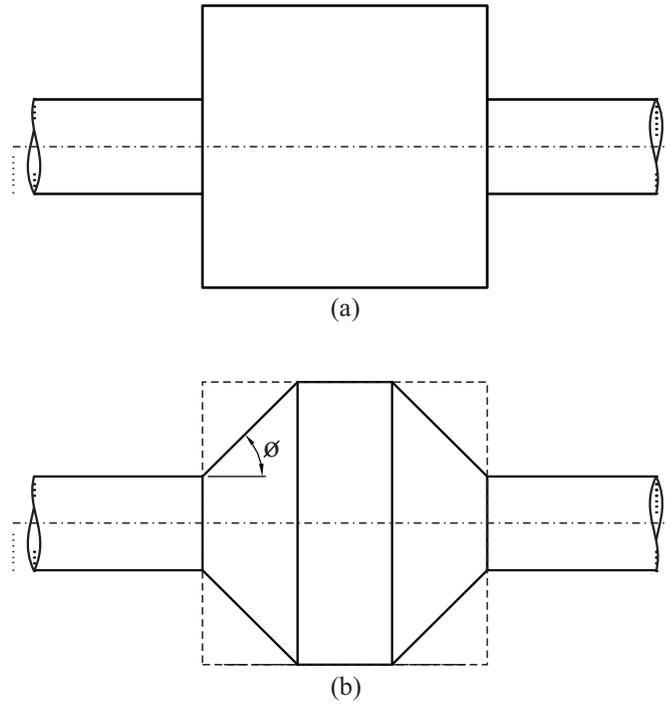


FIGURA 3.10: Diámetros del eje de engranaje: (a) dimensiones reales del eje escalonado, y (b) dimensiones del diámetro equivalente.

$$GA_c \left(\frac{dw_x}{dz} - \theta_y \right) = -\frac{d}{dz} \left(EI \frac{d\theta_y}{dz} \right) \quad (3.29)$$

que se sigue directamente de 3.23a, y teniendo en cuenta que $m_y = 0$, en la ecuación 3.23b, se obtiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d\theta_y}{dz} \right) = -q_x(z). \quad (3.30)$$

Para una carga dada $q_x(z)$ de variación lineal, y un momento de inercia dado por la expresión 3.26, el sistema formado por las ecuaciones 3.30 y 3.28 puede resolverse analíticamente. Entonces, siguiendo un procedimiento análogo al presentado para el modelo *SHAFT1* en el apartado 3.3, se puede obtener la deflexión de la viga $w_x(z)$ teniendo en cuenta las condiciones de contorno y de continuidad entre tramos de la viga.

3.4.1 Obtención del valor óptimo del ángulo ϕ

Para comprobar la hipótesis de que puede obtenerse un valor del ángulo ϕ válido para un amplio rango de variables de diseño de ejes escalonados se han estudiado 30 casos diferentes del modelo representado por la figura 3.11. Se trata de un eje simétrico simplemente apoyado en sus extremos, con dos tramos exteriores de sección circular

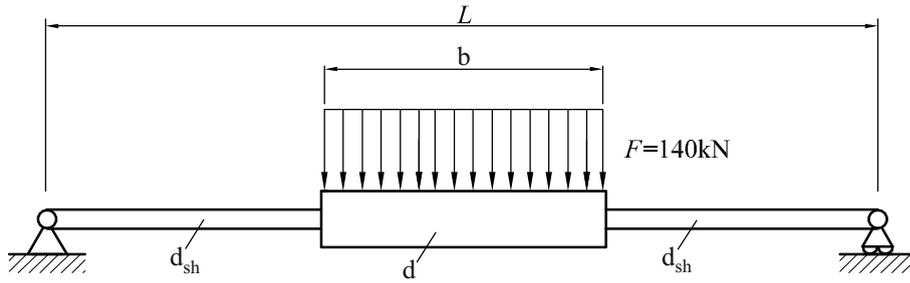


FIGURA 3.11: Parámetros definitorios de los casos analizados.

constante de diámetro d_{sh} y un tramo central de sección circular constante de diámetro d , siendo $d > d_{sh}$. Se considera una carga uniformemente distribuida en su tramo central. Los 30 casos se han obtenido variando la relación entre d/d_{sh} y b/L manteniendo el valor de la longitud total del eje $L = 200\text{mm}$, el diámetro de los tramos extremos de menor diámetro $d_{sh} = 50\text{mm}$, y el valor total la carga uniformemente distribuida, $F = 140\text{ kN}$. La tabla 3.1 recoge los datos de b y d para cada uno de los 30 casos analizados siguiendo el modelo *SHAFT2*.

En un primer paso, se ha estimado para cada caso analizado el valor óptimo del ángulo ϕ que mejor se ajusta a los datos de referencia que se obtienen de analizar el mismo eje con un modelo de elementos finitos tridimensional. Dicho modelo de elementos finitos se describe en el apartado 3.4.3. El modelo de elemento finitos está generado de tal forma que se pueden obtener los valores de la deflexión sobre el eje en una serie discreta de puntos z_i . Se considera que el valor óptimo del ángulo ϕ es aquel que minimiza el error cuadrático medio (ECM), entendido éste como la diferencia entre los valores de deflexión $w_{SHAFT2}(z_i)$ obtenidos en los puntos de coordenadas z_i por la aplicación del modelo *SHAFT2*, y los valores en estos mismos puntos z_i obtenidos con el análisis del modelo de elementos finitos $w_{FEM}(z_i)$. De esta forma se intenta minimizar el valor medio obtenido por la siguiente expresión:

$$EMC = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [w_{FEM}(z_i) - w_{SHAFT2}(z_i)]^2. \quad (3.31)$$

En la tabla 3.1 se recogen los valores del ángulo ϕ calculado para cada caso analizado junto con los valores del ECM. Puede observarse la proximidad entre los valores del ángulo ϕ óptimo, variando entre un valor mínimo de 37.2° y un valor máximo de 42.9° , con un valor medio de 40.0° .

En la figura 3.17 se recogen, a modo de ejemplo, los resultados obtenidos en tres de los casos analizados. En concreto, son los casos con menor ECM (caso 1), con mayor ECM (caso 13), y con un valor intermedio de ECM (caso 28). En la figura se representan los valores de deflexión obtenidos con el análisis por elementos finitos (FEM), mediante el

TABLA 3.1: Dimensiones y resultados para los casos analizados según SHAFT2

Caso	d (mm)	b (mm)	Ángulo ($^{\circ}$)	EMC (μm^2)
1	75	25	40.5	0.196
2	100	25	41.6	0.441
3	125	25	41.7	0.609
4	150	25	41.6	0.705
5	175	25	41.5	0.765
6	200	25	41.5	0.804
7	75	50	37.2	0.673
8	100	50	37.6	0.280
9	125	50	37.8	0.289
10	150	50	37.8	0.398
11	175	50	37.8	0.487
12	200	50	37.8	0.559
13	75	75	39.4	1.275
14	100	75	38.2	0.851
15	125	75	38.7	0.578
16	150	75	38.7	0.385
17	175	75	38.6	0.330
18	200	75	38.6	0.325
19	75	100	42.8	1.174
20	100	100	39.8	0.773
21	125	100	39.9	0.665
22	150	100	40.0	0.606
23	175	100	40.0	0.526
24	200	100	39.9	0.492
25	75	125	42.9	0.868
26	100	125	41.8	0.502
27	125	125	41.3	0.519
28	150	125	41.3	0.594
29	175	125	41.3	0.670
30	200	125	41.2	0.727

modelo *SHAFT2*, y mediante el modelo *SHAFT1*. Esto permite comprobar la mejora que se obtiene utilizando *SHAFT2* frente a la utilización de *SHAFT1*.

Como se ha indicado, la utilidad del modelo *SHAFT2*, sólo tiene sentido si puede utilizarse un único valor del ángulo ϕ para un amplio espacio de diseño. De este modo, se propone utilizar el valor de $\phi = 40^{\circ}$ para todos los casos de ejes escalonados. Como muestra de los resultados que se obtienen de esta forma, la figura 3.18 muestra los valores de 3 casos analizados utilizando como parámetro del modelo *SHAFT2* el valor de $\phi = 40^{\circ}$. Al igual que antes se representan los casos con valores con menor ECM (caso 7), con mayor ECM (caso 22), y un valor intermedio de ECM (caso 2). De esta forma, se puede observar que los resultados siguen ofreciendo una buena aproximación

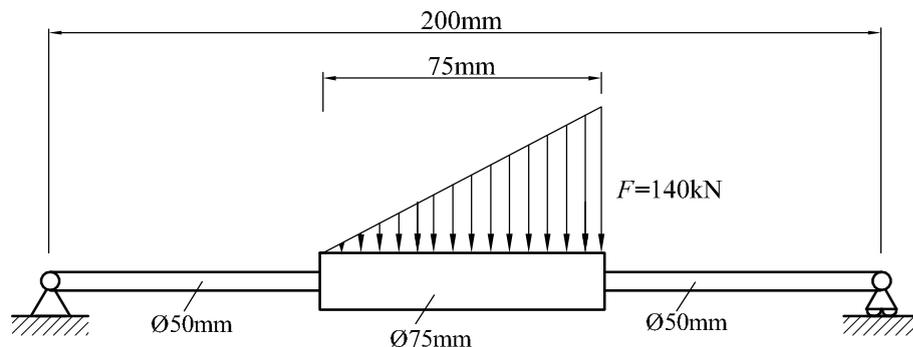


FIGURA 3.12: Caso con carga distribuida lineal

a los resultados obtenidos mediante el análisis por elementos finitos, y una mejora sustancial con respecto al modelo *SHAFT1*.

3.4.2 Comprobación del modelo *SHAFT2* en casos alternativos

A modo de validación de la propuesta del modelo *SHAFT2*, se han estudiado 3 nuevos casos no utilizados en la obtención del ángulo ϕ óptimo. El primer caso, cuyos datos se recogen en la figura 3.12, consiste en un eje con un único tramo escalonado pero con una carga distribuida de variación lineal en vez de una carga de distribución uniforme. La carga total aplicada sigue siendo de 140 kN. Los resultados de la deflexión obtenida utilizando el modelo *SHAFT2* con el ángulo $\phi = 40^\circ$ se recogen en la figura 3.13.

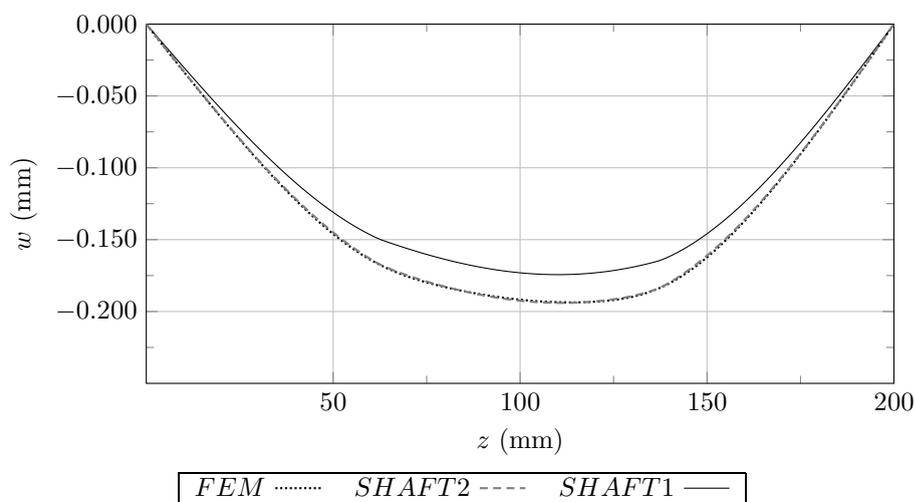


FIGURA 3.13: Resultados de deformación para el caso de eje escalonado con carga distribuida lineal

Los dos otros casos estudiados consisten en un eje con dos tramos escalonados, pero con diferente tipo de carga. En el primero de estos dos casos, se consideran dos cargas uniformes en el mismo sentido sobre los tramos escalonados, ver figura 3.14a. En el otro caso, las cargas distribuidas tienen sentidos opuestos, ver figura 3.14b. Los resultados

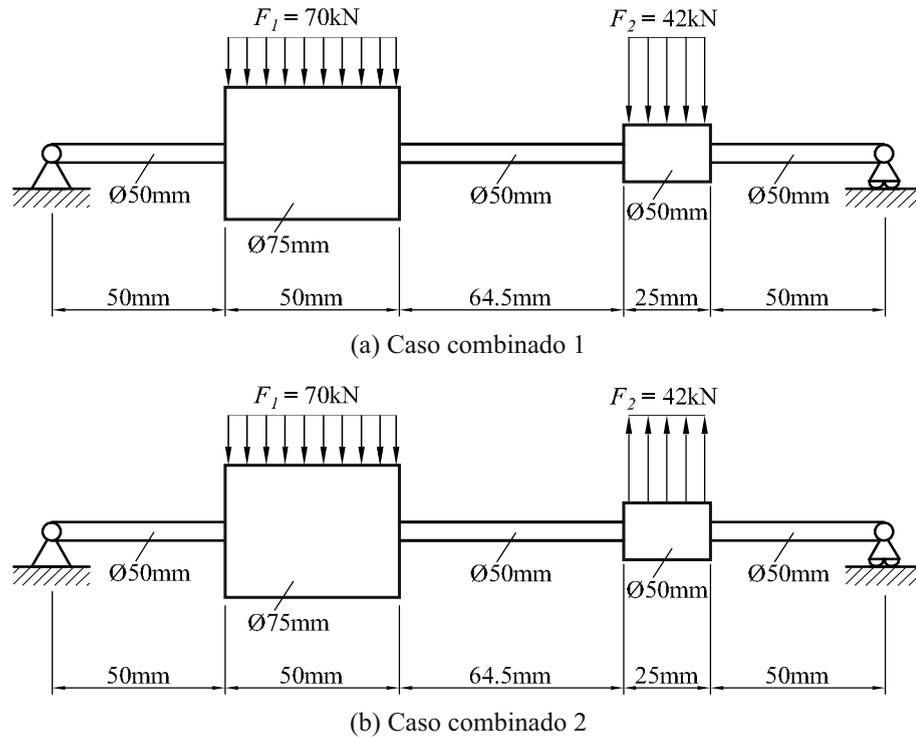


FIGURA 3.14: Casos combinados

de la deflexión del eje que se obtiene de aplicar el modelo *SHAFT2* con un valor del ángulo $\phi = 40.0^\circ$ quedan recogidos en la figura 3.15. Al igual que en los anteriores casos, se representan también los valores obtenidos mediante el modelo de referencia de elementos finitos y mediante el modelo *SHAFT1*. Como puede apreciarse, se consigue una buena aproximación de los resultados obtenidos con modelo *SHAFT2* al valor obtenido mediante el análisis por elementos finitos. También se pone de manifiesto la mejora que se obtiene con respecto al método *SHAFT1*.

3.4.3 Modelo de elementos finitos

Como modelo para la obtención de resultados de referencia, se ha generado un modelo tridimensional de elementos finitos para cada una de las geometrías de eje escalonado investigadas. Los pasos seguidos para la generación de cada uno de los modelos se describen a continuación:

- (i) Se genera un modelo computacional tridimensional del eje escalonado investigado. La geometría de dicho eje consta de tres tramos cilíndricos concéntricos, como se muestra en la figura 3.16, caracterizados por los parámetros d_{sh} , d , L y b . Los tramos cilíndricos de menor diámetro poseen la misma longitud.

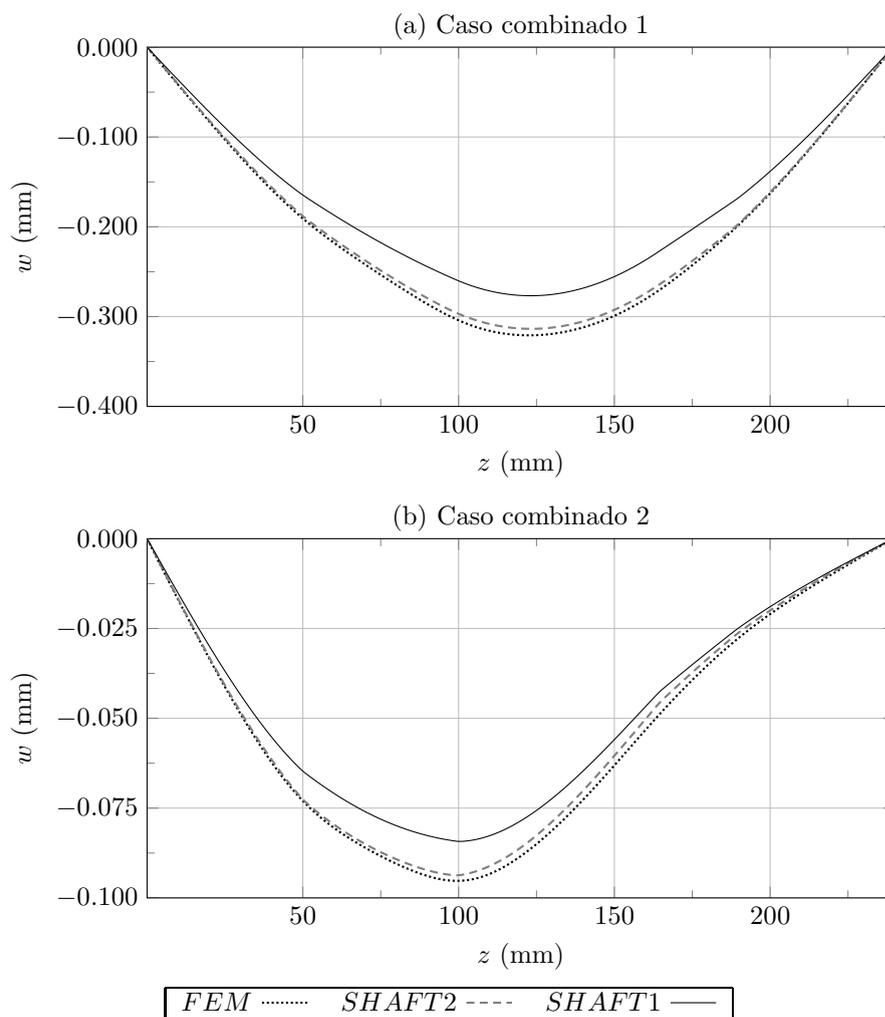


FIGURA 3.15: Resultados de deformación para los ejes con dos escalones

- (ii) El modelo computacional generado se discretiza en elementos finitos tetraédricos de segundo orden utilizando un algoritmo genérico de mallado. El tamaño característico de estos elementos viene definido por la longitud media de sus aristas, que en este caso se han especificado de 3 mm . Se han incluido restricciones de mallado para que parte de los nodos estén contenidos en la línea neutra del eje.
- (iii) Se definen sendas superficies rígidas en los extremos del eje. Los movimientos de estas superficies, que contienen a todos los nodos contenidos en dicha sección, se acoplan a los movimientos de los nodos de referencia A y B . Estos nodos están situados en el punto de intersección entre la línea neutra del eje y las superficies rígidas.
- (iv) Las condiciones de contorno se aplican directamente en los nodos de referencia. En el nodo de referencia A se restringen todos los movimientos de traslación, mientras que en el nodo de referencia B se restringen únicamente los movimientos de traslación en las direcciones perpendiculares al eje. Adicionalmente y con el

fin de garantizar la convergencia del problema de elementos finitos, se restringe la rotación en la dirección del eje de la superficie rígida asociada al nodo de referencia *A*.

- (v) Se introduce una carga distribuida de magnitud total *F*, como se muestra en la figura 3.16.

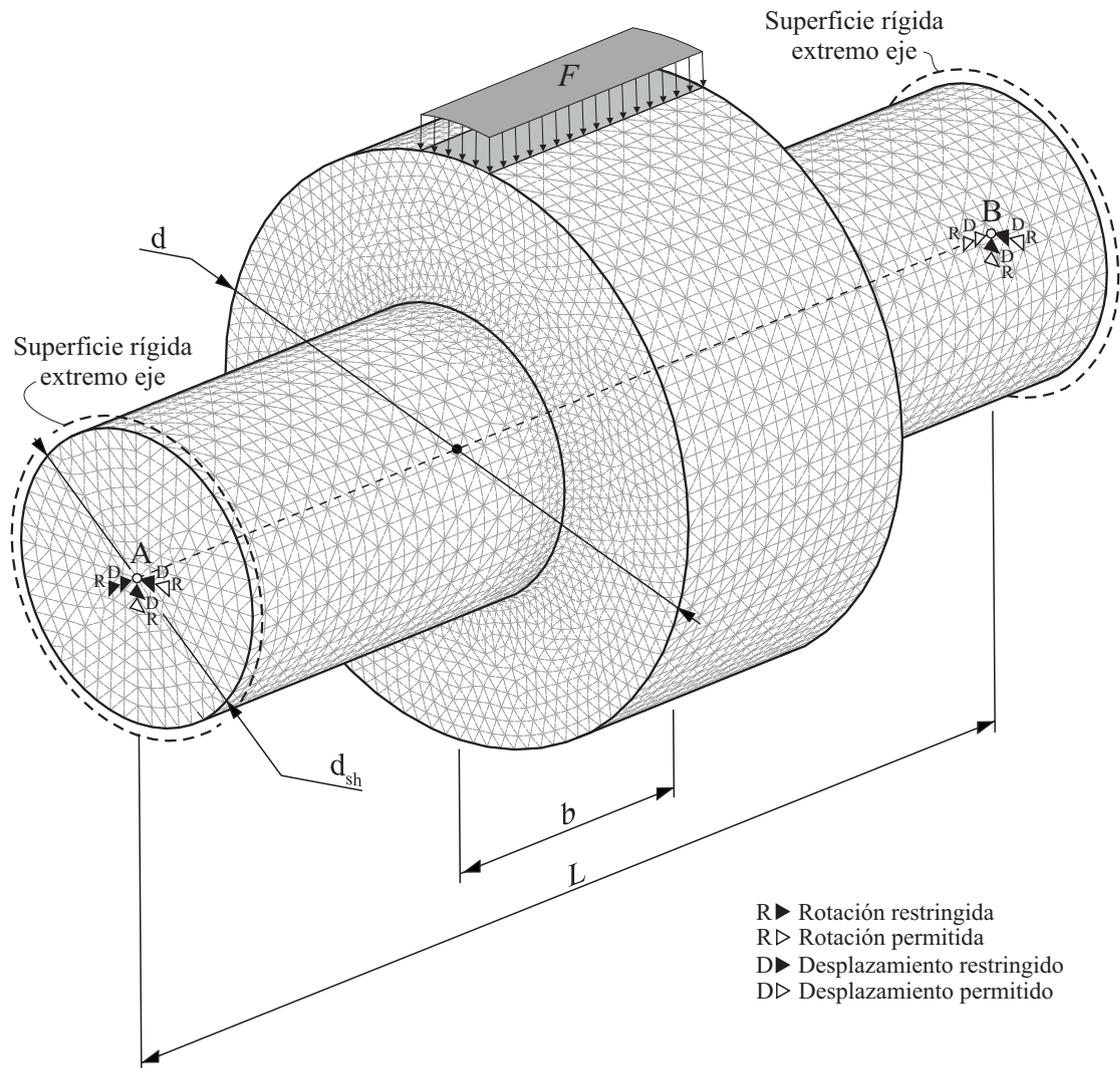


FIGURA 3.16: Modelo tridimensional de un eje escalonado

El modelo de elementos finitos generado se analiza utilizando el programa comercial Abaqus. Como resultado, se obtienen los desplazamientos de los nodos del modelo coincidentes con la línea neutra del eje.

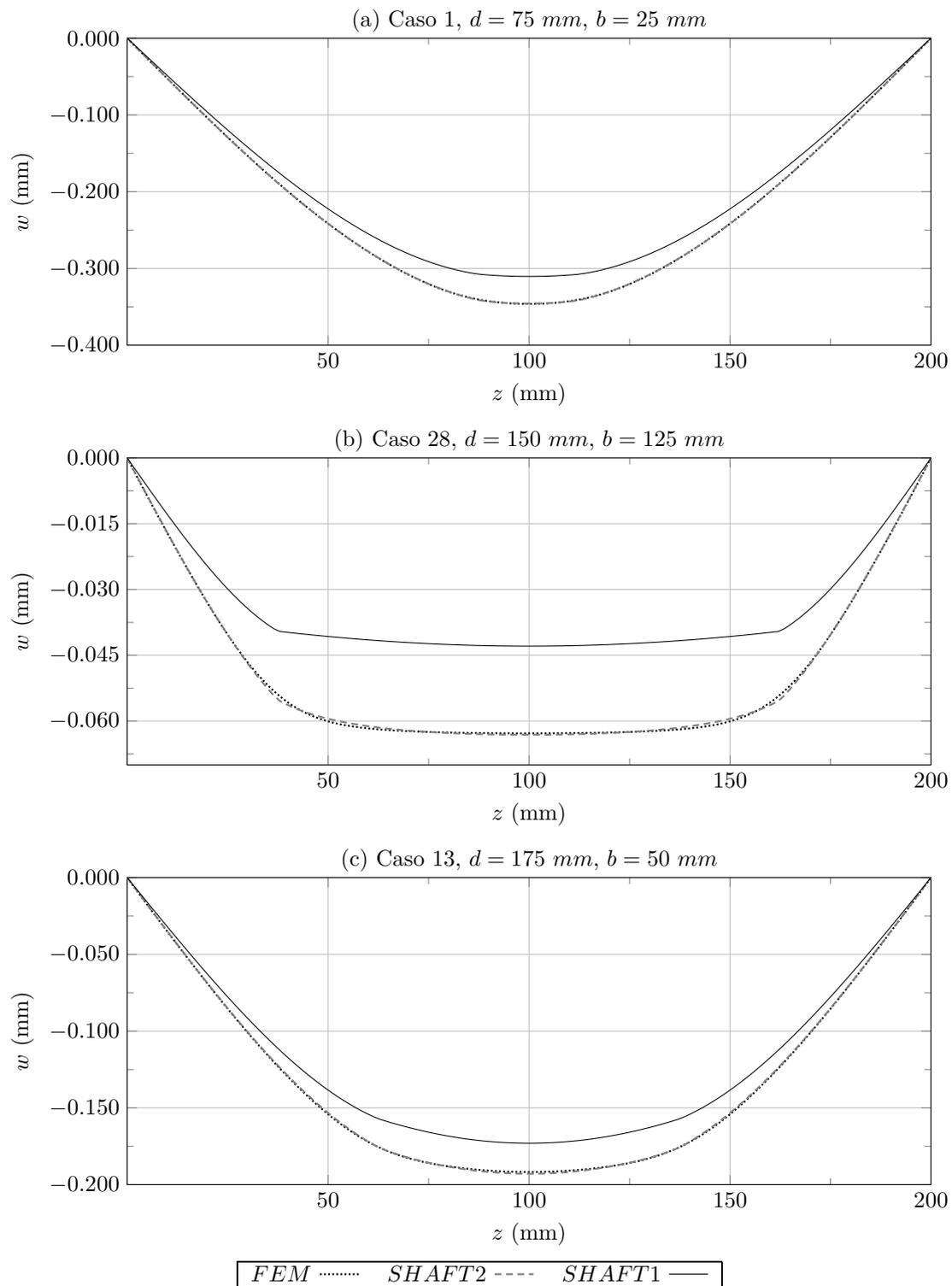


FIGURA 3.17: Deflexión según FEM, SHAFT1 y SHAFT2 para (a) caso 1, (b) caso 22 y (c) caso 13 optimizados individualmente

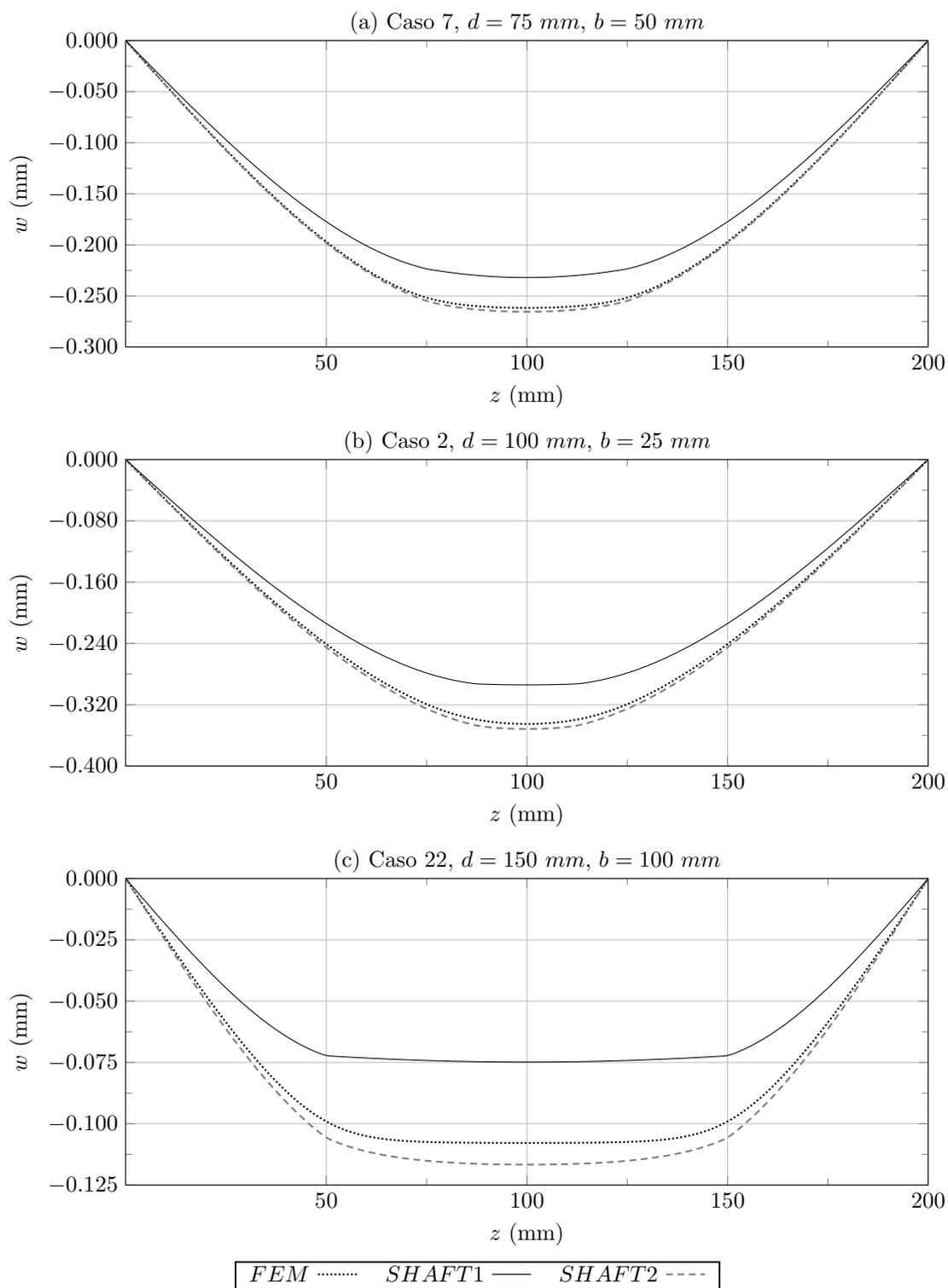


FIGURA 3.18: Deflexión según FEM, SHAFT1 y SHAFT2 con ángulo $\phi = 40.0$

3.5 Funciones generalizadas para el cálculo de la deformación de vigas

Considere que sobre la viga mostrada en la figura 3.2 actúan una serie de cargas externas que se pueden expresar matemáticamente mediante funciones que son continuas a lo largo de toda la longitud de la viga. En ese caso, la determinación de las constantes de integración que aparecen durante la integración sucesiva de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de la viga bajo carga se puede realizar considerando únicamente las condiciones de contorno de la viga.

En cambio, cuando la función que describe la carga que actúa sobre la viga es discontinua (por ejemplo, debido a la presencia de cargas puntuales), la solución tradicional consiste en considerar las ecuaciones de comportamiento de la viga para cada segmento de la misma en el que la carga sea continua. Consecuentemente, por cada nuevo segmento considerado, aparecerán nuevas constantes de integración, que para ser determinadas requerirán de condiciones de continuidad entre tramos adyacentes, además de las condiciones de contorno. Por lo tanto, si la función de carga cuenta con muchas discontinuidades, aparecerán un número elevado de constantes de integración que será necesario determinar, resultando en un método poco apropiado desde un punto de vista práctico.

El método de Macaulay [106] es un método alternativo que permite evitar la aparición de nuevas constantes de integración cuando la carga es discontinua. Este método utiliza funciones generalizadas para considerar distribuciones de carga discontinuas como si fuesen continuas. Esto implica que, para un tramo de viga homogéneo con cualquier distribución de carga aplicada (continua o discontinua), la deformación de la viga se puede determinar únicamente teniendo en cuenta las condiciones de contorno de la misma. Por este motivo, este método ha sido ampliamente utilizado en el análisis de la deformación de vigas con cargas discontinuas [107–110] para realizar las integraciones sucesivas de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de la viga.

Una de las funciones generalizadas más conocida es la delta de Dirac [111], expuesta en el apartado 3.5.1. El resto de funciones generalizadas utilizadas en el método de Macaulay son las integrales y derivadas generalizadas de dicha función, y se exponen en el apartado 3.5.2.

Otros autores [86–88, 102–104] también hacen uso de estas funciones para considerar discontinuidades en las propiedades de la sección transversal de la viga, y de esta manera analizar ejes escalonados. No obstante, en este trabajo únicamente se hará uso del método de Macaulay para la especificación de las cargas externas, pues los cambios en

las propiedades de la sección transversal de la viga se abordan mediante el método de los segmentos.

3.5.1 Función de impulso unitario o delta de Dirac

La función de impulso unitario o delta de Dirac es una función que tiene un valor nulo en todo su dominio excepto en el punto de singularidad descrito por $z = a$, donde su valor es infinito. En términos generales, se define mediante la siguiente expresión:

$$\langle z - a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq a \\ +\infty & \text{si } z = a \end{cases} \quad (3.32)$$

En esta expresión, z es la variable independiente y a es el valor de z en el que la función posee valor infinito. Los corchetes son el símbolo matemático que representa una función discontinua, e indican que la función tiene un valor nulo en todo el dominio excepto cuando $z = a$, donde su valor es infinito.

Esta función cumple con dos propiedades importantes, que se señalan a continuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle z - a \rangle^{-1} dz = 1 \quad (3.33a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle z - a \rangle^{-1} \cdot f(z) dz = f(a) \quad (3.33b)$$

La función delta de Dirac no es continua ni derivable en $z = a$. Sin embargo, sí se puede integrar, dando lugar a la primera función de Macaulay, $\langle z - a \rangle^0$, descrita a continuación.

3.5.2 Funciones de generalizadas o funciones de Macaulay

Las funciones de Macaulay [106] se utilizan para representar funciones discontinuas, que tienen un valor nulo cuando $z < a$, pero tienen un valor definido cuando $z \geq a$. Estas funciones son las integrales generalizadas de la función delta de Dirac. En términos generales, se pueden definir mediante la siguiente expresión:

$$\langle z - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{si } z < a \\ (z - a)^n & \text{si } z \geq a \end{cases} \quad (3.34)$$

En esta expresión, z es la variable independiente y a es el valor de la coordenada z en el que la función deja de tener valor nulo. Los corchetes son el símbolo matemático que representa una función discontinua, e indican que la función tiene un valor nulo cuando z es menor o igual que a , y un valor igual a $x - a$ cuando x es mayor o igual que a .

La ecuación 3.34 es válida para todos los valores de n positivos. No obstante, cuando $n = 0$, dicha expresión se modifica:

$$\langle z - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq a \\ 1 & \text{si } z \geq a \end{cases} \quad (3.35)$$

Esta función consiste en un escalón vertical en el punto de discontinuidad $z = a$, y por lo tanto, $z = a$ tiene dos valores: cero y uno.

Las funciones de Macaulay se pueden integrar y derivar. La regla general para integrar dichas funciones se muestra a continuación:

$$\int_{-\infty}^z \langle z - a \rangle^n dz = \frac{\langle z - a \rangle^{n+1}}{n + 1} \quad \text{para } n = 0, \dots, +\infty \quad (3.36)$$

En el apartado siguiente se muestran algunos ejemplos de la aplicación del método de Macaulay para la aplicación de cargas en vigas.

3.5.3 Aplicación de cargas en vigas utilizando funciones de Macaulay

Las funciones de Macaulay expuestas anteriormente resultan apropiadas para representar cargas externas que actúan sobre vigas, tales como pares de fuerzas, fuerzas puntuales o fuerzas distribuidas. Únicamente es necesario multiplicar el valor de la función por la intensidad de carga considerada, para obtener la representación matemática de la carga. A continuación se expone la aplicación de las funciones de discontinuidad para definir algunos de los tipos de carga que aparecen a menudo en el cálculo de vigas:

- Momento puntual de magnitud M_0 aplicado en el punto a (figura 3.19a).

$$m(z) = M_0 \cdot \langle z - a \rangle^{-1} \quad (3.37)$$

- Carga puntual de magnitud P aplicada en el punto a (figura 3.19b).

$$q(z) = P \cdot \langle z - a \rangle^{-1} \quad (3.38)$$

- Carga distribuida uniforme con intensidad máxima q_0 , punto de inicio a_1 y punto de fin a_2 (figura 3.19c).

$$q(z) = q_0 \cdot \langle z - a_1 \rangle^0 - q_0 \cdot \langle z - a_2 \rangle^0 \quad (3.39)$$

- Carga distribuida con crecimiento lineal de intensidad máxima q_0 , punto de inicio a_1 , punto de fin a_2 y longitud de aplicación b (figura 3.19d).

$$q(z) = \frac{q_0}{b} \cdot \langle z - a_1 \rangle^1 - \frac{q_0}{b} \cdot \langle z - a_2 \rangle^1 - q_0 \cdot \langle z - a_2 \rangle^0 \quad (3.40)$$

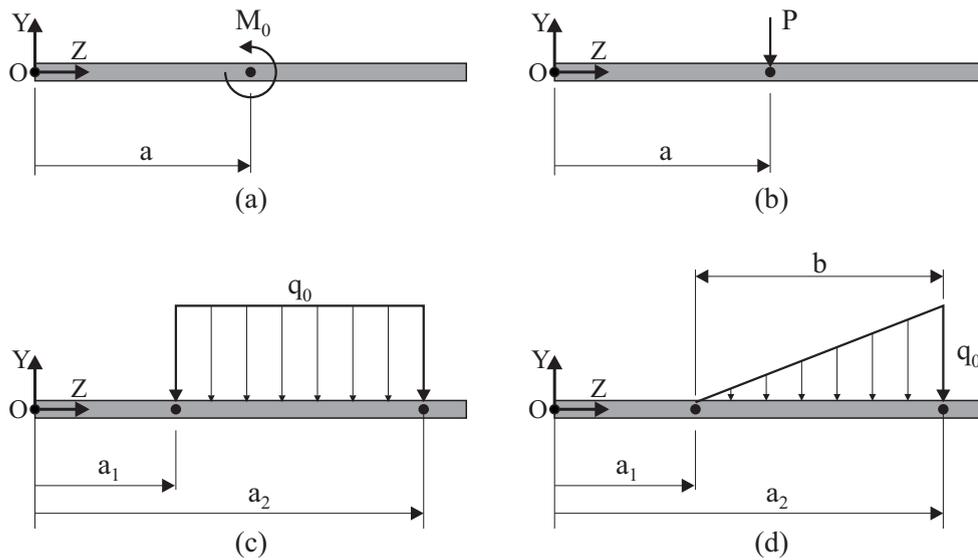


FIGURA 3.19: Cargas más comunes en vigas

Dichas funciones de carga se pueden superponer. De esta forma, la función que consideraría dos cargas puntuales de magnitud P y Q aplicadas sobre dos puntos distintos de la viga a_1 y a_2 , respectivamente, se expresaría como:

$$q(z) = P \cdot \langle z - a_1 \rangle^{-1} + Q \cdot \langle z - a_2 \rangle^{-1} \quad (3.41)$$

3.6 Conclusiones

En este capítulo se han descrito dos modelos que permiten calcular de forma analítica la deformación de un eje de engranaje sometido a cargas externas, denominados *SHAFT1* y *SHAFT2*. Estos modelos se basan en la utilización de la teoría clásica de vigas, formulada bajo las hipótesis de Timoshenko. Para unas cargas externas dadas, estos modelos permitirán determinar la deformación que producen sobre un eje de engranaje.

En la primera parte del capítulo se ha descrito la teoría de vigas de Timoshenko, y se han obtenido las ecuaciones diferenciales que gobiernan la deformación de una viga bajo carga. La hipótesis fundamental de esta teoría es que las secciones transversales de la viga permanecen planas durante su deformación. A diferencia de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, la teoría de Timoshenko permite tener en cuenta las deformaciones que se producen debido a los esfuerzos cortantes. Estas deformaciones pueden tener cierta relevancia en vigas de baja esbeltez. Por este motivo, es recomendable utilizar la teoría de Timoshenko cuando se desea determinar la deformación de un eje de engranaje, cuya esbeltez es habitualmente baja.

A continuación se ha descrito el modelo de cálculo *SHAFT1*. En este modelo, la geometría del conjunto formado por un engranaje montado sobre un eje se ha aproximado mediante tres tramos cilíndricos concéntricos y consecutivos. Los dos tramos cilíndricos exteriores poseen el diámetro del eje (d_{sh}), mientras que el tramo cilíndrico central posee el diámetro primitivo del engranaje (d), que será mayor que el del eje ($d > d_{sh}$).

La deformación bajo carga de estos tres tramos cilíndricos se ha estudiado bajo la teoría de vigas de Timoshenko. Para cada uno de estos tramos, se han planteado las ecuaciones diferenciales que gobiernan su deformación. La deformación del conjunto se ha determinado mediante la integración sucesiva de las ecuaciones diferenciales, considerando las condiciones de contorno y las condiciones de continuidad entre tramos.

No obstante, el modelo *SHAFT1* tiene algunos puntos débiles que es necesario superar si se quiere obtener un buen grado de precisión en el cálculo de la deformación del eje. Estos puntos débiles están relacionados con el cambio brusco de la sección transversal que se produce como consecuencia de la consideración del engranaje montado sobre el eje. En las zonas donde se produce este cambio brusco, la hipótesis de que las secciones transversales del eje permanecen planas durante su deformación puede estar lejos de la realidad. Se puede observar que en las proximidades del cambio brusco de sección, la rigidez del tramo de mayor diámetro es menor de lo que se asume en el modelo *SHAFT1*, ya que parte de la sección no se opone a la flexión.

El objetivo del modelo *SHAFT2* ha sido tener en cuenta este efecto de disminución de la rigidez. En este modelo, cuya aplicación es similar a la del modelo *SHAFT1*, a la hora de calcular el momento de inercia de la sección transversal del eje, en lugar de considerar un salto abrupto entre dos tramos cilíndricos de diferente diámetro, se ha considerado un tramo cónico de transición. El único parámetro que incorpora el modelo *SHAFT2* con respecto al modelo *SHAFT1* es el ángulo que hay entre la generatriz de estos tramos cónicos y sus ejes de revolución (ϕ).

La determinación del valor óptimo generalizado del ángulo ϕ , que se incorporará al modelo, se ha realizado considerando 30 casos de diseño distintos de un eje formado por tres tramos cilíndricos. El eje se ha considerado biapoyado, y con una carga uniforme aplicada en su porción central. Para cada caso de diseño:

- (i) Se ha generado un modelo de elementos finitos, que se ha analizado bajo las condiciones de contorno requeridas, y que ha permitido obtener los desplazamientos que se producen en la línea neutra del eje.
- (ii) Se ha planteado el modelo *SHAFT2* para la simulación del caso considerado.
- (iii) Se ha buscado el valor óptimo del ángulo ϕ , considerándose este como aquel que minimiza el error cuadrático medio entre los desplazamientos calculados por el modelo de elementos finitos y los desplazamientos calculados por el modelo *SHAFT2*.

Como resultado de estos análisis, se ha obtenido un conjunto de valores óptimos de ϕ , cuyo valor mínimo ha sido de 37.2° y el valor máximo de 42.9° . Se ha decidido entonces definir el valor óptimo de ϕ como el valor medio obtenido de los distintos casos estudiados, obteniendo un valor de $\phi = 40^\circ$.

El funcionamiento de los modelos *SHAFT1* y *SHAFT2* (considerando $\phi = 40^\circ$) se ha ilustrado mediante un conjunto de ejemplos numéricos, en los que se ha determinado la deformación bajo carga de distintos casos de diseño de ejes escalonados con distintas hipótesis de carga. Estos ejemplos numéricos incluyen:

- (i) Casos en los que el engranaje se sitúa en la porción central del eje, con una carga uniformemente distribuida sobre él.
- (ii) Casos en los que el engranaje se sitúa en la porción central del eje, con una carga no uniforme aplicada sobre él.
- (iii) Casos en los que se considera más de un engranaje montado sobre el eje, sobre los que actúan cargas en el mismo sentido, y en sentidos contrarios.

Para cada uno de los casos estudiados, se ha generado un modelo tridimensional de elementos finitos, y los resultados obtenidos a partir de su análisis se han considerado como resultados de referencia. La comparación de estos resultados de referencia con los resultados obtenidos a partir de los modelos *SHAFT1* y *SHAFT2* ha mostrado que:

- (i) Cuando la relación entre d/d_{sh} y b/d_{sh} es pequeña, siendo b el ancho de cara del engranaje, el modelo *SHAFT1* puede ofrecer resultados parecidos a los del modelo de referencia.
- (ii) En cambio, a medida que la relación ente d/d_{sh} y b/d_{sh} crece, los resultados obtenidos a partir del modelo *SHAFT1* tienden a divergir de los resultados obtenidos a partir del modelo de referencia.
- (iii) En todos los casos estudiados, el modelo *SHAFT2* ha demostrado ofrecer resultados más parecidos a los del modelo de referencia que los obtenidos a partir del modelo *SHAFT1*.

Capítulo 4

Modelos de elementos finitos para el análisis tensional de transmisiones por engranaje

4.1 Introducción

El análisis por el método de los elementos finitos [95] se ha utilizado extensamente para realizar estudios tensionales y deformacionales de transmisiones de engranajes, investigar la formación del contacto entre dientes de engranaje y detectar aquellas áreas que durante el ciclo de engrane están sometidas a niveles elevados de tensión [22, 24, 28, 39, 52, 56, 57, 60, 61, 65, 66, 68, 71, 77, 78, 82, 112–117].

Si bien las bases de este método de análisis estructural se establecieron a mitades del siglo XX, las ventajas de su uso no fueron evidentes hasta que se incrementaron las capacidades computacionales de los ordenadores.

Aunque algunos autores utilizaron previamente esta técnica de análisis, fue Coy [56], a finales de los años 80, quien destacó la necesidad de implementar el análisis por el método de los elementos finitos en los procesos de diseño de las transmisiones por engranaje. No obstante, puntualizaba que la aplicación de este método estaba sujeta a una serie de dificultades que tenían que ser vencidas, y que marcaron las líneas de trabajo de los futuros investigadores. Estas dificultades se resumían en:

- (i) Conseguir una descripción precisa de las geometrías que intervienen en los análisis.
- (ii) Facilitar la aplicación de las condiciones de contorno del problema.

(iii) Automatizar la discretización en elementos finitos de las geometrías generadas.

La primera de estas dificultades fue superada en primer lugar por Handschuh y Litvin [57], los cuales propusieron una técnica para la determinación analítica de las superficies que conforman la geometría de los engranajes. Las geometrías generadas mediante esta técnica eran posteriormente discretizadas en elementos finitos con la ayuda de un programa de modelado geométrico (MSC Patran), dando lugar al modelo mostrado en la figura 4.1a. Este modelo de elementos finitos de la transmisión estaba formado por una única geometría de engranaje compuesta de varios dientes. Los movimientos de la base de dicha geometría se restringían en el espacio y la carga se aplicaba arbitrariamente en forma de distribución de presiones sobre los dientes modelizados. Esta aproximación superaba la dificultad de la generación de las geometrías, pero requería de un programa adicional para la generación de la malla de elementos finitos, y mantenía la dificultad en la aplicación de las condiciones de contorno del problema, al ser necesaria una suposición de la distribución de presiones sobre la cara del engranaje.

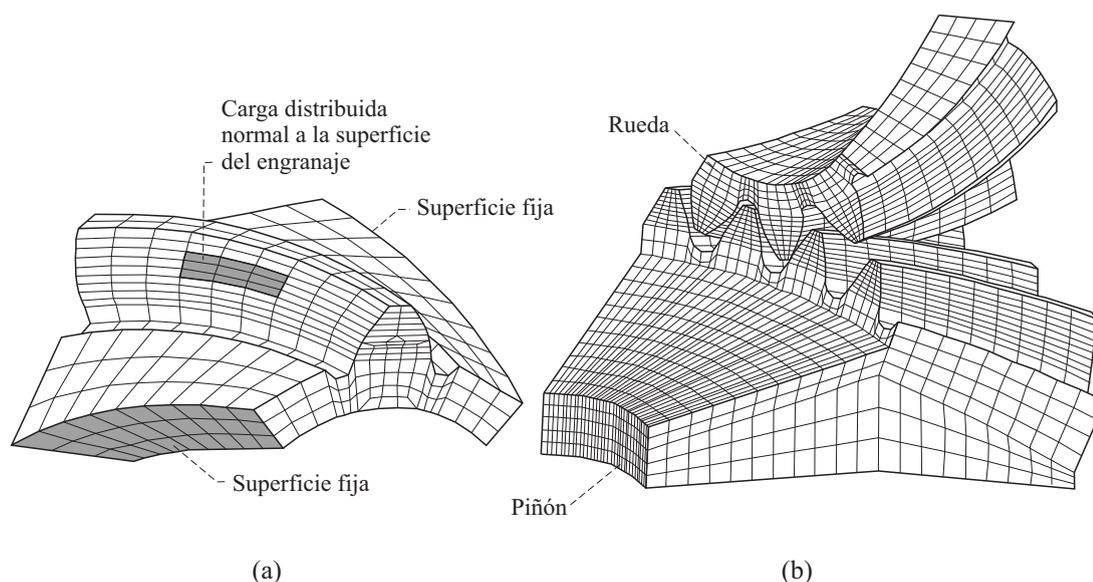


FIGURA 4.1: (a) Modelo de elementos finitos propuesto por Handschuh y (b) modelo de elementos finitos propuesto por Bibel.

La segunda de las dificultades, que hacía referencia a la aplicación de las condiciones de contorno, fue superada en primer lugar por Bibel [65]. Junto con Handschuh, propusieron un modelo de elementos finitos de la transmisión (figura 4.1b) que además de considerar las geometrías del piñón y de la rueda, tenía en cuenta el contacto producido entre ellas. Los movimientos y las rotaciones de la base de los dientes del piñón se restringían en el espacio, mientras que los correspondientes a la rueda se limitaban al giro con respecto a su eje. El momento torsor se aplicaba en forma de carga sobre la geometría de la rueda. Con esta nueva propuesta se simplificaba considerablemente la

aplicación de las condiciones de contorno en los modelos de elementos finitos de la transmisión, al no requerir de suposiciones sobre la distribución de las presiones producidas en el contacto entre dientes. No obstante, el mallado de las geometrías seguía siendo manual, llevado a cabo utilizando un programa externo de mallado.

La última de las dificultades, referida a la automatización de la generación de las mallas de elementos finitos de las geometrías de los engranajes, fue abordada por Argyris [60] y Litvin [61]. Estos autores propusieron la automatización de la generación de modelos de elementos finitos, basada en la generación computerizada de las superficies del piñón y de la rueda y la posterior generación de una malla estructurada de elementos finitos. Los modelos de elementos finitos generados por esta técnica no sólo contemplan la geometría de los dientes de engranaje, sino que también incluyen las porciones del anillo del piñón y de la rueda, como se muestra en la figura 4.2. Las condiciones de contorno y la carga se aplican utilizando unas superficies rígidas que acoplan los grados de libertad de los nodos que pertenecen a las partes laterales e inferior a puntos de referencia (M_1 y M_2 en la figura 4.2) localizados en la posición de los ejes. El par se aplica directamente en el nodo de referencia M_1 , mientras que la rotación del conjunto se restringe en el nodo M_2 . Mediante esta aproximación se simplifica el proceso de la generación de los modelos de elementos finitos de las transmisiones de engranajes.

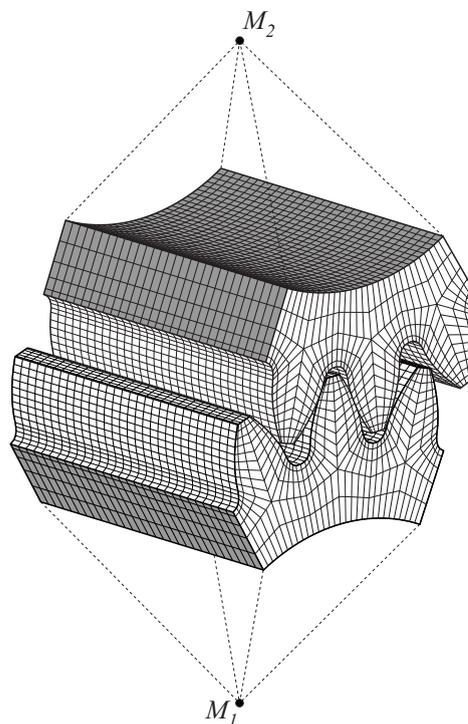


FIGURA 4.2: Modelo de elementos finitos de la transmisión

Si bien han habido muchos otros autores que han investigado la aplicación del método de los elementos finitos al cálculo tensional de las transmisiones por engranaje, los trabajos

citados anteriormente son los que han definido las pautas del estado del arte actual. No obstante, a pesar de que estos modelos de elementos finitos representan avances importantes en la industria, siguen manteniendo algunas necesidades que es necesario cubrir.

Una de ellas es la necesidad de tener en cuenta en los modelos de elementos finitos la desalineación que se produce en los engranajes debido a las deformaciones elásticas de los elementos que los sustentan cuando se transmite potencia. Desde los primeros modelos propuestos por Handschuh hasta las investigaciones más recientes, la gran mayoría de autores optan por incluir únicamente las geometrías de contacto en los modelos de elementos finitos, compuestas por unas pocas parejas de dientes [22, 24, 28, 39, 52, 56, 57, 60, 65, 68, 71, 77, 78, 82, 112–117]. Los casos en los que se considera la geometría completa de los engranajes son escasos [66], y raramente se ha observado que se hayan incluido el resto de elementos de la transmisión en los modelos de elementos finitos. Esto se debe a varios factores, siendo uno de ellos el compromiso necesario entre precisión y coste computacional; para un mismo nivel de coste computacional, es necesario decidir entre utilizar una malla fina de elementos finitos incluyendo únicamente una porción del engranaje, o una malla basta incluyendo la geometría completa del mismo.

Estas desalineaciones pueden suponer reducciones importantes de la capacidad de carga de los engranajes y tener un impacto negativo en el funcionamiento de la transmisión. Las causas y las consecuencias que tienen las desalineaciones en las transmisiones por engranaje han sido estudiadas anteriormente por otros autores. Algunos de estos autores utilizan ensayos experimentales [17–23], mientras que otros utilizan métodos analíticos o numéricos [15, 49, 51, 97]. En los trabajos más recientes realizados en este campo se observa que se ha incrementado el uso del análisis por el método de los elementos finitos en el estudio de las desalineaciones de los engranajes [22, 66, 71–73, 79–82]. Estos trabajos centran sus esfuerzos en el modelizado de los dientes de engranaje y de las superficies de contacto, pero raramente incluyen al resto de componentes de la transmisión. En general, los modelos de elementos finitos del piñón y de la rueda se ensamblan en posiciones prefijadas obtenidas a partir de la aplicación de análisis de contacto entre dientes (TCA, Tooth Contact Analysis), contemplando habitualmente valores arbitrarios de desalineación. Consecuentemente, los resultados obtenidos a partir de los análisis de estos modelos de elementos finitos no siempre representan escenarios realistas, y pueden llevar a diseños de la transmisión expuestos a fallos prematuros, con elementos sobredimensionados o que presenten anomalías en su funcionamiento.

Para minimizar estos riesgos, es necesario avanzar en la generación de los modelos de elementos finitos utilizados para el estudio de las transmisiones de engranajes, e incluir en ellos al resto de elementos que componen la transmisión. Esto permitirá minimizar

las asunciones requeridas en la configuración de los modelos de elementos finitos e incrementar el grado de realismo de los resultados obtenidos. Entre los elementos deformables que componen la transmisión, aquellos cuya deformación representa una contribución más significativa a la desalineación de los engranajes son los ejes sobre los que estos van montados.

En base a estas premisas, el objetivo de este capítulo será proponer nuevos modelos de elementos finitos de las transmisiones que permitan considerar el comportamiento de los ejes que soportan a los engranajes. A tal efecto, se propondrá en primer lugar un modelo de elementos finitos de la transmisión compuesto íntegramente por elementos sólidos tridimensionales, que se utilizará como modelo de referencia. Posteriormente se propondrán otros modelos de elementos finitos simplificados de la transmisión, cuyo objetivo será la obtención de resultados precisos sin que ello suponga una reducción significativa de la eficiencia computacional de los modelos existentes. A continuación se detallarán los procedimientos necesarios para obtener, a partir de los modelos de elementos finitos propuestos, aquellos resultados que tradicionalmente han sido de interés para los diseñadores de engranajes. Por último, se realizará una comparación entre los modelos de elementos finitos simplificados de la transmisión y el modelo de referencia, en términos de precisión de los resultados y tiempos de cálculo, que permitirá obtener conclusiones y guías de aplicación de los modelos propuestos.

4.2 Análisis por elementos finitos de transmisiones por engranaje. Consideraciones previas.

El concepto básico del método de los elementos finitos es la subdivisión del modelo físico en un conjunto de componentes de geometría simple llamados elementos finitos. Dentro de cada elemento finito, la magnitud física que se desea estudiar, denominada variable primaria de campo, se expresa en función de un número finito de grados de libertad, alojados en los puntos nodales del elemento. En el resto del elemento la variable primaria de campo se aproxima de forma sencilla utilizando funciones polinómicas. La respuesta del modelo físico se puede considerar aproximada a la obtenida a partir del modelo discreto que se obtiene al ensamblar o conectar el conjunto de elementos finitos. A medida que la discretización del modelo físico se hace más fina, la solución obtenida del análisis por el método de los elementos finitos converge hacia la solución real.

Los elementos finitos en los que se divide un modelo físico tienen una serie de información asociada que los define, y cuyos parámetros fundamentales son los siguientes:

- (i) Dimensionalidad del elemento. Los elementos pueden tener una dimensionalidad intrínseca de cero, una, dos o tres dimensiones. Esta dimensionalidad intrínseca se puede expandir utilizando transformaciones cinemáticas. Por ejemplo, elementos con una dimensionalidad intrínseca unitaria pueden ser utilizados para construir modelos tridimensionales.
- (ii) Nodos de los elementos. Cada elemento está formado por un conjunto de puntos, llamados nodos. Los nodos tienen un doble propósito: por una parte definen la geometría del elemento, y por otra parte albergan los grados de libertad del elemento.
- (iii) Geometría del elemento. La geometría del elemento se define ubicando sus nodos en el espacio. Los elementos utilizados habitualmente poseen geometrías simples. En una dimensión, son generalmente segmentos rectos o curvos. En dos dimensiones, suelen adoptar formas triangulares o cuadradas. En tres dimensiones, las geometrías más habituales son los tetraedros y los hexaedros.
- (iv) Grados de libertad (GDL) del elemento. Los grados de libertad del elemento se definen como los valores que adopta la variable primaria de campo en los nodos del elemento. En los elementos finitos utilizados para el cálculo tensional, la variable primaria es el campo de desplazamientos de la pieza analizada y los grados de libertad son las componentes Cartesianas del desplazamiento en los nodos.
- (v) Orden de un elemento. El valor de la variable primaria de campo se determina en los nodos del elemento, y se interpola mediante polinomios para calcular el valor de esta variable en puntos del elemento no coincidentes con los nodos. El orden del elemento hace referencia al orden de los polinomios utilizados para realizar la interpolación, y está relacionado con el número de nodos presentes en el elemento.
- (vi) Propiedades constitutivas del elemento. Son las relaciones que especifican el comportamiento del material asociado al elemento, como por ejemplo, el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson.
- (vii) Otras propiedades. Algunos elementos requieren información adicional para ser definidos, como por ejemplo, las propiedades de la sección transversal en elementos viga o el espesor en elementos placa.

De acuerdo con Shih [118], la resolución de cualquier problema tensional por el método de los elementos finitos se divide en una serie de pasos que se agrupan en tres fases:

- (i) Fase de preprocesado del modelo de elementos finitos.

- (i.a) Representación matemática del modelo físico de las geometrías contempladas en el análisis.
 - (i.b) Discretización del modelo matemático en elementos finitos.
 - (i.c) Elección del modelo constitutivo considerado para los elementos y de sus propiedades mecánicas.
 - (i.d) Especificación de las condiciones de contorno del modelo de elementos finitos, incluyendo tipos de soportes y cargas externas aplicadas sobre los nodos.
- (ii) Fase de solución del modelo de elementos finitos.
- (ii.a) Generación la matriz de rigidez de cada elemento finito presente en el modelo.
 - (ii.b) Ensamblado de las matrices de rigidez de cada elemento en la matriz de rigidez global del problema.
 - (ii.c) Resolución del sistema global de ecuaciones y calculo de los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones producidas por las cargas externas.
- (iii) Fase de postprocesado de resultados del modelo de elementos finitos.

Existen múltiples programas cuyo propósito es ayudar a realizar los análisis por el método de los elementos finitos siguiendo los pasos comentados anteriormente. En este trabajo, y como se explicará más adelante, la fase de preprocesado del modelo de elementos finitos se realiza utilizando métodos propios. En esta fase destaca el paso de la obtención de un modelo discreto de elementos finitos a partir de un modelo matemático de la transmisión (mallado). Este proceso tiene una gran importancia en la aplicación del método de los elementos finitos, pues el tiempo empleado para solucionar el problema y la calidad de la solución obtenida estarán directamente relacionados con el número y la distribución de los nodos presentes en el modelo discreto. Como criterio general de mallado para análisis tensional, se aconseja utilizar una malla de elementos finitos lo más fina posible en aquellas regiones del modelo donde se prevean gradientes elevados de tensión o de deformación. Para mejorar el coste computacional, la malla debe ser lo más basta posible en aquellas zonas donde el gradiente se prevea bajo.

Para la fase de solución, entre las distintas opciones disponibles, en este trabajo se ha utilizado el programa comercial Abaqus [119]. Este programa también se ha utilizado en la fase de postprocesado para la visualización de resultados de tensión y deformación. No obstante, se han desarrollado métodos propios para la obtención de resultados específicos utilizados en el diseño de transmisiones de engranajes.

4.2.1 Consideraciones previas sobre el uso de elementos finitos sólidos tridimensionales

Los elementos sólidos tridimensionales se pueden considerar la forma más general de todos los elementos finitos, debido a que todas sus variables se expresan en función de la posición tridimensional (x, y, z) en la que se miden. Con este tipo de elementos, se puede discretizar cualquier sólido tridimensional, independientemente de su forma, sus propiedades constitutivas o sus condiciones de contorno.

Los elementos sólidos tridimensionales más comunes tienen forma de tetraedro o hexaedro. Mientras que los de primer orden poseen un nodo en cada uno de sus vértices (ver figura 4.3), en los elementos de mayor orden pueden existir nodos en la mitad de las aristas, de las caras e incluso dentro del elemento.

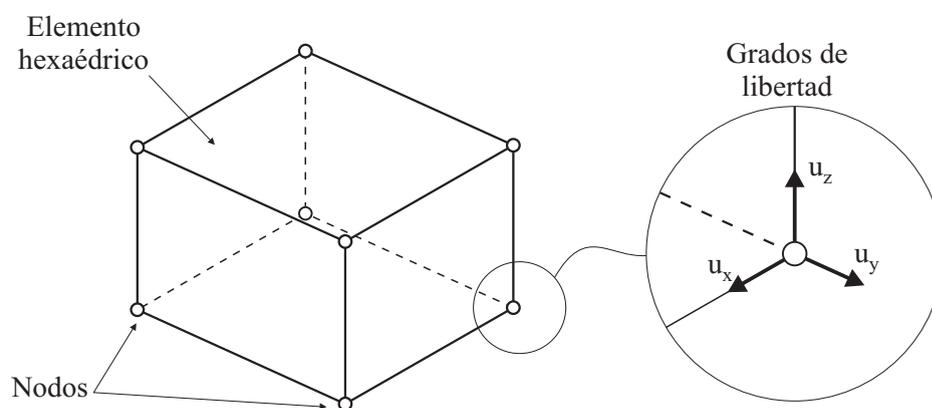


FIGURA 4.3: Elemento finito sólido tridimensional de primer orden

Cada nodo de los elementos sólidos tridimensionales utilizados para el cálculo estructural tiene asociados tres grados de libertad, que hacen referencia a los movimientos de traslación (u_x, u_y, u_z) que puede realizar el nodo en cada una de las direcciones cartesianas, y que permiten al elemento deformarse en cualquiera de las tres dimensiones del espacio.

La mayoría de los programas de análisis por el método de los elementos finitos ofrecen extensas librería de elementos sólidos tridimensionales que pueden ser utilizados para realizar cálculos tensionales. En general, estos elementos pueden ser de primer o de segundo orden, y sus geometrías tetraédricas o hexaédricas. Algunas de estas combinaciones también presentan formas modificadas, que mejoran el comportamiento de los elementos frente a uno o varios aspectos, como por ejemplo, el bloqueo volumétrico. Las características de algunos de los elementos sólidos tridimensionales más destacables en el programa comercial Abaqus [119] se muestran en la tabla 4.1. Elementos finitos con características similares se pueden encontrar en otros programas comerciales de análisis por el método de los elementos finitos.

TABLA 4.1: Elementos sólidos tridimensionales en Abaqus

Ref. Abaqus	C3D4	C3D10	C3D8	C3D20	C3D8I
Geometría	Tetraedro	Tetraedro	Hexaedro	Hexaedro	Hexaedro
Orden	Primer	Segundo	Primer	Segundo	Primer
Número de nodos	4	10	8	20	8
Número de GDL	12	30	24	60	37

Como se puede observar en algunos de los estudios disponibles en la literatura [120–122], los autores suelen llegar a conclusiones similares en cuanto a los criterios para la elección del tipo de elemento a utilizar:

- (i) En general, no se recomienda el uso de elementos tetraédricos de primer orden en análisis tensionales de geometrías tridimensionales, pues suelen presentar una respuesta excesivamente rígida ante esfuerzos de flexión. Este comportamiento de los elementos tetraédricos puede ser corregido utilizando elementos de mayor orden.
- (ii) Los elementos hexaédricos de primer orden son capaces de obtener soluciones con un grado de precisión equivalente al que se obtendría con elementos tetraédricos de segundo orden, pero el coste computacional que llevan asociado es menor.
- (iii) Aunque el grado de precisión obtenido con los elementos hexaédricos de segundo orden es superior al de los otros elementos mostrados en la tabla 4.1, su uso es más bien escaso, pues el coste computacional que llevan asociado es muy elevado.

Una solución de compromiso es el uso de elementos hexaédricos con modos incompatibles (ref. C3D8I en Abaqus [119]), que se basan en las ideas propuestas por Simo [123]. Éstos son elementos de primer orden que poseen grados de libertad internos adicionales que mejoran su comportamiento frente a los esfuerzos de flexión. Puesto que poseen 13 grados de libertad adicionales, tienen un coste computacional asociado mayor que los elementos hexaédricos de primer orden, aunque siguen siendo sustancialmente más eficientes que los elementos de segundo orden. Además, estos elementos son especialmente recomendables cuando se estudia el contacto entre geometrías modelizadas con elementos sólido tridimensionales [124].

Cuando poseen la geometría adecuada, el comportamiento a flexión de los elementos con modos incompatibles es casi tan bueno como el de los elementos equivalentes de segundo orden. En cambio, su precisión se reduce a medida que se alejan de la forma rectangular convirtiéndose en un paralelepípedo. Esta reducción de precisión es drástica

cuando la forma rectangular degenera en trapezoidal. En estos casos su funcionamiento no es mucho mejor que el de un elemento de primer orden, volviéndose excesivamente rígidos frente a esfuerzos a flexión. Por este motivo, la elección de este tipo de elemento va ligada a la necesidad de garantizar la calidad de la malla, especialmente en aquellas zonas donde los gradientes de deformación se prevean elevados.

4.2.2 Consideraciones previas sobre el uso de elementos finitos viga tridimensionales

Un elemento viga es un elemento en forma de línea que une dos nodos en el espacio, como se muestra en la figura 4.4, y que representa una aproximación unidimensional a un continuo tridimensional. La ventaja principal que aportan los elementos viga es que poseen una geometría simple y tienen pocos grados de libertad, lo que los hace muy eficientes en comparación con otros tipos de elementos. Esta simplicidad se consigue asumiendo que la deformación en cualquier punto del sólido al que se aproximan se puede estimar completamente a partir de variables que únicamente dependen de la posición a lo largo del eje de la viga.

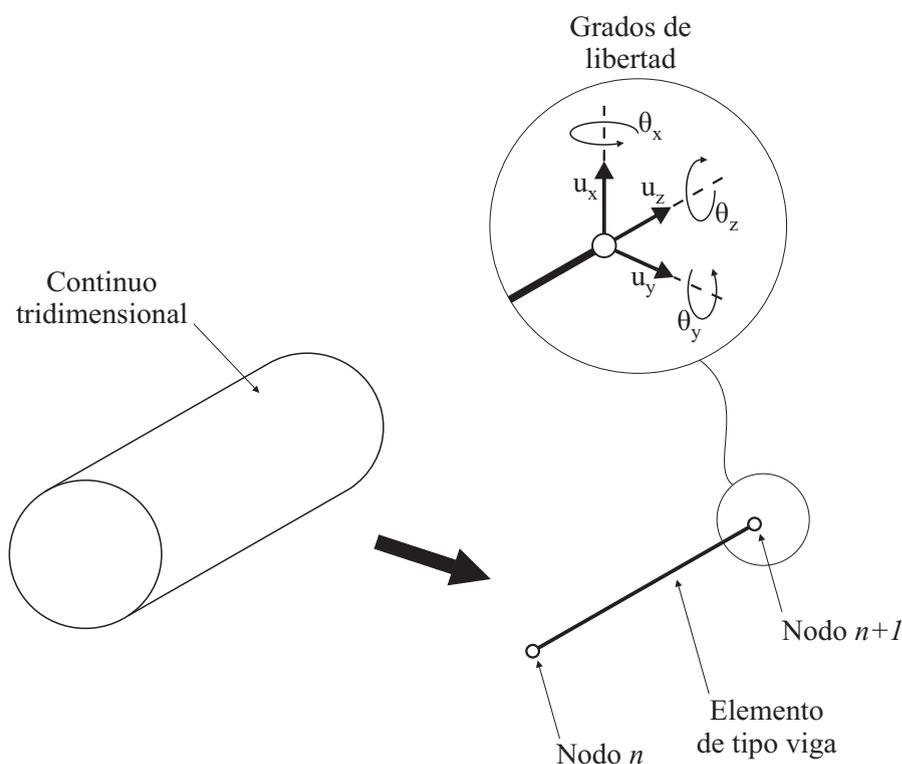


FIGURA 4.4: Elemento finito de tipo viga tridimensional

La hipótesis fundamental de estos elementos es que la sección transversal de la viga no puede deformarse en su propio plano. Las implicaciones de esta hipótesis se deben

considerar en cualquier uso de elementos viga, especialmente cuando la deformación por flexión es elevada comparada con otras deformaciones.

Los elementos finitos de tipo viga de primer orden poseen un nodo en cada uno de los extremos. Sin embargo, en elementos de tipo viga de orden superior pueden existir nodos en la parte central del elemento.

Cada uno de los nodos de los elementos viga tridimensionales tiene asociados seis grados de libertad, que representan los movimientos de traslación (u_x, u_y, u_z) y de rotación $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ del nodo en cada uno de los ejes de coordenadas locales del elemento. Cada grado de libertad posee una rigidez asociada con las deformaciones de la línea. Estas deformaciones comprenden la deformación en el sentido axial, el cambio de curvatura de la línea provocado por el efecto de la flexión, y la torsión. Adicionalmente, algunos elementos ofrecen una flexibilidad adicional asociada con la deformación transversal por cortante.

Habitualmente, los programas comerciales de análisis por el método de los elementos finitos disponen de un amplio rango de elementos de tipo viga, divididos fundamentalmente entre aquellos que se formulan bajo las hipótesis de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y los que han sido formulados bajo las hipótesis de la teoría de vigas de Timoshenko, ambas descritas en el apartado 3.2.3.

Los elementos viga derivados de la teoría de Euler-Bernoulli cumplen con la hipótesis de que las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje de la viga, y por lo tanto, no permiten deformación por cortante. Por este motivo, utilizar este tipo de elementos únicamente es recomendable en aquellos casos en los que la deformación por cortante sea negligible, como ocurre en vigas esbeltas, en las que las dimensiones características de la sección transversal son muy inferiores a la longitud de la viga.

Por otra parte, los elementos viga formulados a partir de la teoría de Timoshenko (ref. B31 en Abaqus [119]) contemplan la deformación por cortante, y por lo tanto, se pueden utilizar para modelizar tanto vigas esbeltas como vigas cortas. De acuerdo con Oñate [125], este tipo de elementos es aplicable para el análisis de vigas en las que la longitud de la viga sea al menos 10 veces superior a las dimensiones de la sección transversal. No obstante, por debajo de ese ratio las aproximaciones que permiten describir el comportamiento del eje únicamente en función de la posición axial dejan de proporcionar una precisión aceptable.

Las rigideces que definen el comportamiento del elemento viga se calculan a partir de las propiedades de la sección transversal del continuo al que se aproximan. Si este continuo posee una sección transversal circular, estas propiedades son:

- (i) Área de la sección transversal del elemento (A_e), que se obtiene a partir del diámetro de la sección circular considerada para el comportamiento a cortante de dicho elemento (d_{Ae}) según la siguiente ecuación:

$$A_e = \frac{\pi}{4} \cdot d_{Ae}^2 \quad (4.1)$$

- (ii) Momento de inercia de la sección transversal del elemento (I_e), que se obtiene a partir del diámetro de la sección circular considerada para el comportamiento a flexión de dicho elemento (d_{Ie}) según la siguiente ecuación:

$$I_e = \frac{\pi}{64} \cdot d_{Ie}^4 \quad (4.2)$$

- (iii) Rigidez torsional de la sección transversal del elemento (J_e), que se obtiene a partir del diámetro de la sección transversal considerada para el comportamiento a cortante de dicho elemento (d_{Ae}) y del módulo de rigidez a cizalladura (G) según la siguiente ecuación:

$$J_e = \frac{G \cdot \pi}{32} \cdot d_{Ae}^4 \quad (4.3)$$

- (iv) Rigidez a cortante de la sección transversal del elemento (K_e), que se obtiene a partir del área de la sección transversal considerada para dicho elemento (A_e), del módulo de rigidez a cizalladura (G) y de un factor adimensional (k) que previene al elemento de poseer un comportamiento excesivamente rígido a cortante. Para secciones transversales circulares, Abaqus [119] recomienda utilizar un valor de $k = 0.89$, de acuerdo con los estudios realizados por Cowper [100].

$$K_e = k \cdot [G \cdot A_e] \quad (4.4)$$

4.2.3 Consideraciones previas sobre la definición del contacto

La mayoría de los programas comerciales actuales de cálculo tensional por el método de los elementos finitos incluyen herramientas que permiten estudiar el contacto entre dos sólidos. Sin embargo, la consideración del contacto entre sólidos puede hacer que la solución de los modelos de elementos finitos sea mucho más compleja, puesto que la zona en la que éstos contactan no se conoce a priori, y se debe determinar como parte de la solución. Esto hace que el problema sea casi siempre no lineal, aunque se especifique un modelo constitutivo lineal para los sólidos en contacto.

En estos programas, el contacto entre dos sólidos se define considerando una pareja de superficies (una de cada uno de los sólidos) que podrán entrar en contacto, generando lo que se conoce como una pareja de contacto. A cada pareja de contacto se le asigna una formulación de contacto, que se basa habitualmente en la elección de una combinación de las siguientes características:

- (i) El rol que desempeña cada una de las superficies que intervienen en el contacto: superficie maestra o superficie esclava (apartado 4.2.3.1).
- (ii) El tipo de discretización del contacto: contacto nodo-a-superficie o contacto superficie-a-superficie (apartado 4.2.3.2).
- (iii) El método de seguimiento del estado del contacto: deslizamientos pequeños o deslizamientos finitos (apartado 4.2.3.3).

En base a los criterios que se describen a continuación, la combinación que se ajusta más a los requisitos del problema de contacto entre dientes de engranaje es utilizar una discretización de tipo superficie-a-superficie con un seguimiento del contacto basado en desplazamientos finitos. En este caso, la selección del rol de cada superficie no es relevante, puesto que ambas tendrán un nivel de rigidez y refinamiento de malla similar. Además, el impacto de esta elección se minimiza al utilizar una discretización de tipo superficie-a-superficie.

4.2.3.1 Selección del rol que desempeña cada superficie del contacto

Una superficie que interviene en el contacto puede realizar el rol de superficie maestra o de superficie esclava. Tal y como explica Bower [126], con el fin de favorecer la convergencia de la solución del problema de elementos finitos, es conveniente elegir como superficie maestra aquella que corresponde al cuerpo más rígido. Si ambos sólidos poseen rigideces semejantes, entonces es conveniente elegir como superficie maestra aquella que tiene la malla más basta en la zona del contacto, pues como se explica en el apartado 4.2.3.2, esta elección favorece la reducción del error por penetración derivado de la discretización del contacto.

4.2.3.2 Selección del tipo de discretización del contacto

Los programas actuales de cálculo tensional por el método de los elementos finitos simulan el contacto entre las superficies que conforman la pareja de contacto aplicando restricciones condicionales en distintos puntos de dichas superficies. La posición y las

condiciones impuestas por estas restricciones dependen del tipo de discretización del contacto escogido para la pareja de contacto. Generalmente se dispone de dos tipos de discretización del contacto: nodo-a-superficie y superficie-a-superficie.

Cuando se utiliza la discretización nodo-a-superficie las condiciones de contacto se establecen de manera que cada nodo perteneciente a la superficie esclava interactúa con su proyección sobre la superficie maestra. De esta forma, cada condición de contacto involucra a un nodo de la superficie esclava y a un grupo de los nodos cercanos de la superficie maestra, a partir de los cuales se interpola el punto de proyección. La consecuencia directa de esto es que no se permite que los nodos de la superficie esclava penetren en la superficie maestra, pero en cambio, los nodos de la superficie maestra sí pueden penetrar en la superficie esclava.

En cambio, la discretización superficie-a-superficie considera la forma de ambas superficies en la zona de contacto. Más que en los propios nodos, las condiciones de penetración se extienden sobre las regiones cercanas a los nodos de la superficie esclava. Estas regiones están centradas en cada uno de los nodos considerados, de manera que la condición de contacto se aplica predominantemente al nodo en cuestión, pero también afecta a los nodos circundantes.

Por otra parte, en la discretización nodo-a-superficie la dirección del contacto se basa únicamente en la normal de la superficie maestra. Por el contrario, en la discretización superficie-a-superficie la normal de contacto se basa en la normal ponderada de la superficie esclava en la zona cercana a cada nodo perteneciente a ella.

En general, la discretización superficie-a-superficie ofrece resultados más precisos de presiones y tensiones de contacto que la discretización nodo-a-superficie, siempre y cuando las geometrías de las superficies en contacto estén bien representadas por la discretización en elementos finitos. Debido a las condiciones anteriormente comentadas, las fuerzas de contacto tienden a concentrarse en los nodos de la superficie esclava cuando se utiliza una discretización nodo-a-superficie. Esta concentración conlleva picos y depresiones en la distribución de presiones a lo largo de la superficie, que no ocurren al utilizar una discretización superficie-a-superficie, que posee un efecto de suavizado. A medida que la malla de elementos finitos se refina, las discrepancias entre ambos modelos se reducen. Sin embargo, para un nivel de refinamiento dado, la discretización superficie-a-superficie tiende a ofrecer mejores resultados.

Por el contrario, la discretización superficie-a-superficie involucra generalmente más nodos por restricción, y por lo tanto, incrementa el coste computacional de la solución. No obstante, en la mayoría de casos el incremento de coste es pequeño, pero puede ser significativo cuando se involucran áreas muy grandes en el contacto o cuando la superficie

maestra está mucho más refinada que la superficie esclava. La formulación de superficie-a-superficie está pensada para situaciones convencionales en las que las normales de las superficies de contacto tienen direcciones aproximadamente opuestas. La formulación nodo-a-superficie es más conveniente cuando las superficies de contacto poseen aristas o esquinas.

4.2.3.3 Selección del tipo seguimiento del estado del contacto

El seguimiento del estado del contacto tiene en cuenta los movimientos relativos que se producen entre los sólidos que intervienen en el contacto. Generalmente se disponen de dos alternativas distintas para realizar el seguimiento del estado del contacto: una basada en pequeños deslizamientos y otra basada en deslizamientos finitos.

El seguimiento del contacto basado en deslizamientos finitos es el más general, pues considera la separación, el deslizamiento y la rotación de una superficie de contacto respecto a la otra. En los contactos en los que el seguimiento del contacto se realiza considerando deslizamiento finitos, la conectividad de las restricciones de contacto activas cambia con el movimiento relativo tangencial de las superficies en contacto.

Por otra parte, cuando el seguimiento del estado del contacto se basa en pequeños deslizamientos, se asume que el deslizamiento entre superficies es pequeño, y se basa en aproximaciones lineales de la superficie maestra para cada restricción. Los grupos de nodos involucrados en cada restricción de contacto son fijos en todo el análisis, aunque su estado puede variar. Se puede considerar utilizar este tipo de seguimiento del contacto cuando las aproximaciones son razonables, debido al ahorro computacional y la robustez que aporta.

4.3 Discretización en elementos finitos de las geometrías de contacto de los engranajes

Como se ha comentado anteriormente, un paso importante a la hora de aplicar el método de los elementos finitos es la discretización de las geometrías consideradas en el modelo a analizar.

Algunos autores [24, 39, 57, 65, 66, 68, 79, 82] han utilizado programas CAD (Computer Aided Design) para generar las geometrías de contacto de los engranajes y discretizarlas en elementos finitos para someterlas a análisis. A pesar de la sencillez y la inmediatez que proporciona esta estrategia, ofrece algunos inconvenientes importantes, como la escasa

precisión de las geometrías generadas, la dificultad a la hora de aplicar condiciones de contorno o el bajo nivel de automatización y repetitibilidad de los análisis realizados.

Un enfoque más interesante es utilizar algoritmos computacionales para la generación y la discretización en elementos finitos de las geometrías de contacto de los engranajes, de manera que los puntos que definen la malla de elementos se obtengan a partir de las ecuaciones analíticas de las superficies del diente y del anillo [22, 28, 52, 52, 60, 63, 71, 77, 78, 112–117, 127]. Además del incremento de la precisión en la definición de la geometría que ello supone, con la utilización de este método de mallado se consigue facilitar y automatizar la creación de distintos casos de estudio, garantizando la repetitibilidad entre ellos.

Entre estas estrategias automatizadas de mallado destaca la propuesta por Argyris [60] y Litvin [116], y utilizada posteriormente por múltiples autores [22, 28, 52, 78, 113–115, 117, 127] para la discretización en elementos finitos de geometrías de contacto de engranajes. Con ella se consiguen mallas estructuradas de elementos sólidos hexaédricos. Las líneas principales de este método de mallado se detallan a continuación:

1. El volumen del cuerpo a estudiar se representa analíticamente utilizando las ecuaciones de las superficies de ambas partes de los dientes del piñón o de la rueda y la porción correspondiente del anillo. La figura 4.5a muestra la geometría de un diente de engranaje cilíndrico recto.
2. Se determinan analíticamente las superficies intermedias 1 a 6 mostradas en la figura 4.5b. Estas superficies permiten dividir el diente en seis volúmenes, y de esta manera controlar la discretización de estos subvolúmenes en elementos finitos.
3. Las coordenadas de los nodos se determinan analíticamente teniendo en cuenta el número de elementos deseados en la dirección longitudinal y la dirección del perfil del diente (figura 4.5c). Es importante enfatizar que la posición de todos los nodos del modelo de elementos finitos se determina de forma analítica, incluso la de los nodos que pertenecen a las superficies auxiliares.
4. Por último, se realiza la discretización del modelo en elementos finitos utilizando los nodos determinados en el paso anterior, como se muestra en la figura 4.5d. Como resultado, se obtiene una malla estructurada de elementos sólidos hexaédricos. En este caso, se utilizan elementos hexaédricos con modos incompatibles (ref. C3D8I en Abaqus [119]), pues por sus características, detalladas en el apartado 4.2.1, resultan ser los más eficientes para abordar el análisis tensional en transmisiones de engranajes.

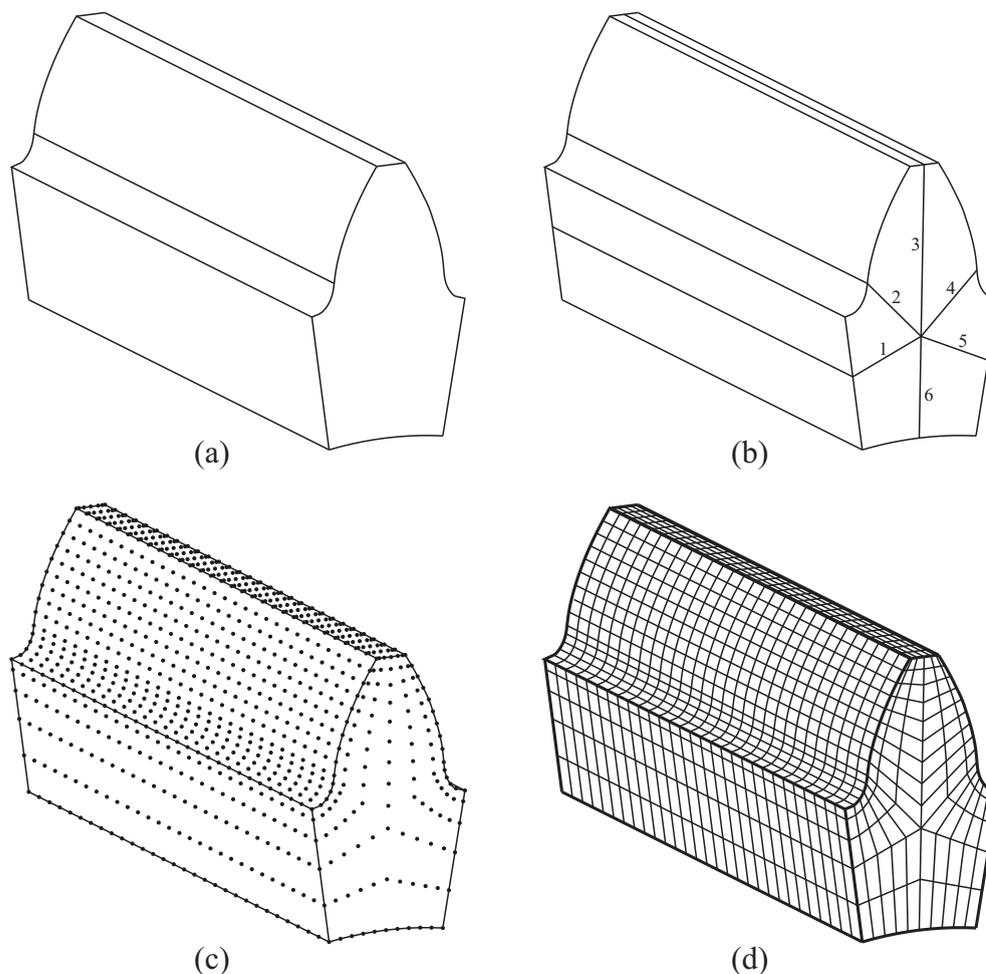


FIGURA 4.5: (a) Geometría del engranaje, (b) superficies auxiliares, (c) determinación de los nodos y (d) discretización del volumen en elementos finitos

La densidad de la malla y la geometría de los elementos se modifican variando el número de nodos incluidos en cada una de las dimensiones que se describen en la figura 4.6. En el caso mostrado en la imagen, se ha considerado un nodo en la zona inferior del anillo y dos nodos en la zona superior. En el radio de entalle se han especificado cuatro nodos, y ocho nodos en la dirección del perfil. Por último, se han especificado 28 nodos en la dirección longitudinal. El punto de posicionamiento, donde confluyen las superficies auxiliares del mallado está situado a una distancia de la cabeza del diente de 1.2 veces su módulo.

El volumen completo a considerar en el modelo de elementos finitos se obtiene mediante la clonación del diente generado, de manera que es posible considerar modelos de varios dientes.

A pesar de que este método de mallado es el más extendido en la literatura consultada, posee algunas limitaciones que es necesario mencionar. Estas limitaciones vienen principalmente impuestas por las siguientes condiciones:

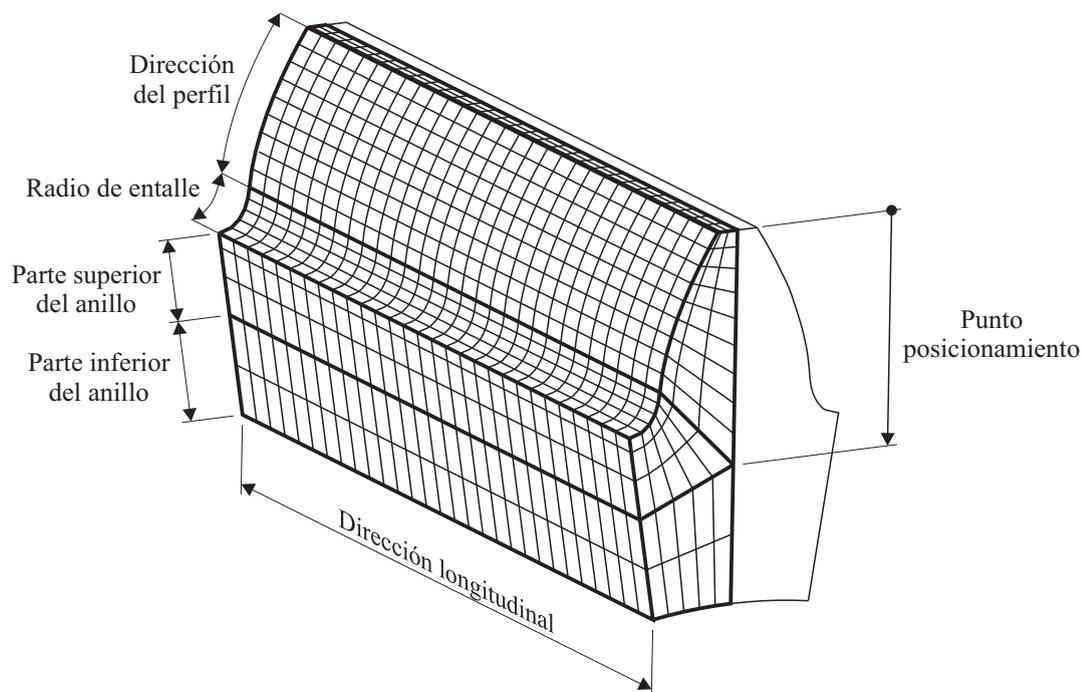


FIGURA 4.6: Parámetros de control de la densidad de la malla

- (i) Como se ha comentado en el apartado 4.2, un modelo de elementos finitos eficiente es aquel que utiliza una malla densa en las zonas en las que los gradientes de tensión y de deformación son elevados, mientras que reduce la densidad de las mallas en aquellas zonas en las que los gradientes son menos elevados.
- (ii) Por otra parte, la utilización de los elementos finitos hexaédricos con modos incompatibles (ref. Abaqus C3D8I) para la discretización del modelo está sujeta a la obtención de mallas de elevada calidad, evitando la presencia de elementos distorsionados, especialmente en las zonas donde los gradientes de tensión son elevados, como se ha comentado en el apartado 4.2.1.

Como fruto de la transmisión de potencia, es habitual que las geometrías de los engranajes estén sometidas a gradientes elevados de tensión en la zona de la raíz del diente y en la zona en la que se produce el contacto. Conseguir un mallado eficiente implicaría concentrar un número elevado de nodos en la zona de la raíz del diente y en la zona en la que se produce el contacto, y reducir la densidad de la malla en el resto de la geometría del engranaje sometida a análisis. En cambio, con este método de mallado no se puede realizar un refinamiento localizado de la malla, pues reducir el tamaño de los elementos en una zona del modelo de elemento finitos implica reducirlo también en las zonas cercanas, como efecto de la propagación de la malla, incrementando rápidamente el coste computacional asociado al modelo. Además, el incremento de la densidad de la malla puede llevar a la aparición de elementos finitos con geometrías degeneradas en

otras zonas del diente, que como se ha comentado, implican una reducción drástica de la precisión del modelo. Estos efectos se incrementan a medida que crece el número de dientes considerados en el análisis. Por lo tanto, será necesario tener en cuenta estas limitaciones cuando se generen las mallas de elementos finitos de las geometrías de contacto de los engranajes por este método.

4.4 Modelo de elementos finitos *FEM0* para el estudio tensional de transmisiones por engranaje

Como se ha comentado anteriormente, la mayoría de los autores que han utilizado el método de los elementos finitos para el análisis tensional de transmisiones de engranajes han centrado sus esfuerzos en modelizar las geometrías de los engranajes y sus superficies de contacto, sin incluir en los modelos de elementos finitos al resto de componentes de la transmisión. De esta manera, desprecian la influencia que las deformaciones elásticas de estos componentes tienen sobre el estado tensional de los engranajes.

Entre las deformaciones elásticas que se producen en los componentes de la transmisión, aquellas producidas en los ejes que soportan a los engranajes son las que suelen tener una mayor influencia sobre el engrane. Por ese motivo, de cara a obtener resultados precisos a partir de su análisis, es deseable que los modelos de elementos finitos creados para el estudio de la transmisión tengan en cuenta el comportamiento de los ejes sobre los que se colocan los engranajes.

La manera más sencilla de incluir los ejes en dichos modelos es mallándolos con elementos finitos sólidos tridimensionales conjuntamente con las geometrías de contacto, consiguiendo un único volumen que contenga al eje y al engranaje. Esta estrategia da lugar al modelo denotado por *FEM0*, cuyas ideas principales se muestran en la figura 4.7.

Este nuevo modelo de elementos finitos está basado en el modelo físico mostrado en la figura 1.13, y los pasos de su generación se describen a continuación:

1. La geometría de contacto del piñón se discretiza en elementos finitos mediante el método descrito en el apartado 4.3. Si bien es posible generar tantos dientes como se desee, en la mayoría de los casos será suficiente la inclusión de tres dientes en el modelo de elementos finitos. De esta forma se consigue que la definición de las superficies de contacto sea automatizada, con las ventajas que ello supone, descritas anteriormente.
2. A partir de la geometría de contacto generada, se malla el resto del volumen del eje del piñón y de la parte restante de su cuerpo con elementos hexaédricos (ref. C3D8I

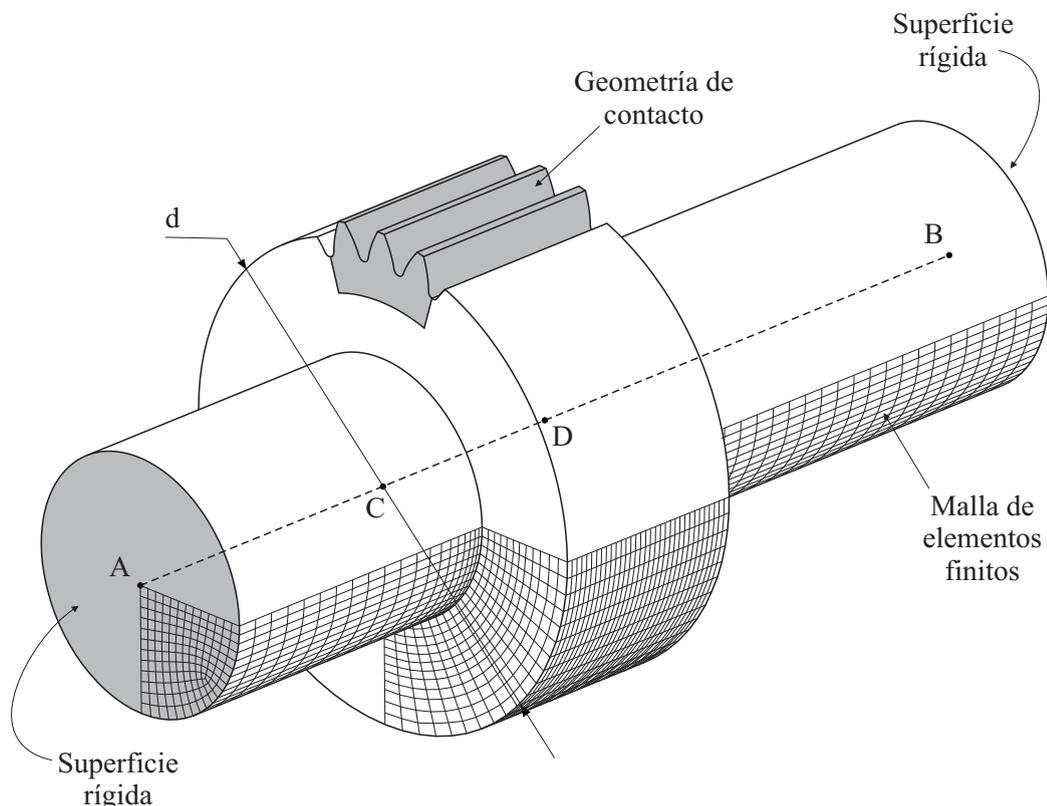


FIGURA 4.7: Modelo de elementos finitos *FEM0* del piñón y de su eje

en Abaqus [119]). A tal efecto, se utiliza un algoritmo de mallado genérico, incluido en cualquier programa de preproceso de modelos de elementos finitos. Durante el proceso de mallado, es necesario imponer la restricción de que el algoritmo de mallado sitúe nodos en las posiciones de los puntos *C* y *D* del modelo físico. Para simplificar el mallado, se considera que la porción del engranaje que no coincide con la geometría de contacto se asemeja a un cilindro con un diámetro igual al de el diámetro de paso del engranaje (*d*), como se muestra en la figura 4.7.

3. Se define una superficie rígida en cada extremo del eje, que incluye a todos los nodos de esa sección, como se muestra en la figura 4.7. Se considera una superficie rígida aquella que no puede deformarse, pero si puede realizar rotaciones y traslaciones como un sólido rígido. Dichos movimientos se acoplan a los de los nodos de referencia *A* y *B*, respectivamente. Mediante esta operación se consigue disponer en los extremos del eje de nodos con seis grados de libertad asociados, de manera que será posible aplicar un par sobre ellos, así como restringir la rotación de toda la sección.
4. El modelo de elementos finitos del piñón y de su eje se ensambla en el modelo global de elementos finitos.

5. Los pasos 1 – 4 se repiten para generar el modelo de elementos finitos de la rueda y del eje que la soporta, e incluirlos en el modelo global de elementos finitos.
6. Se aplican las condiciones de contorno directamente sobre los nodos A_1 , B_1 , A_2 y B_2 del modelo físico descrito en la figura 1.13, donde los rodamientos estarían situados. El par se aplica sobre el nodo A_1 , y la rotación de la transmisión se restringe en el nodo B_1 o B_2 .

Este modelo de elementos finitos no contempla ninguna simplificación significativa del modelo físico. Como consecuencia, el coste computacional que lleva asociado será elevado, pero al mismo tiempo, hará posible la obtención de resultados de elevada precisión. Por este motivo, los resultados obtenidos a partir de este modelo de elementos finitos se utilizarán como referencia en las comparaciones con los modelos descritos a continuación.

4.5 Modelo de elementos finitos *FEM1* para el estudio tensional de transmisiones por engranaje

El modelo *FEM0* descrito en el apartado anterior puede predecir de forma precisa resultados tensionales relacionados con el funcionamiento de la transmisión bajo carga, teniendo en cuenta las deformaciones elásticas de los ejes. No obstante, el coste computacional asociado al modelo *FEM0* hace que éste modelo sea poco apropiado para ser utilizado en la industria, especialmente en las fases iniciales de diseño, cuando los tiempos son muy importantes. Por ese motivo, es interesante disponer de un modelo de elementos finitos que siendo computacionalmente más eficiente, consiga una precisión similar en cuanto a los resultados obtenidos.

En este apartado se propone un nuevo modelo de elementos finitos, denotado por *FEM1*, que partiendo de las geometrías de contacto generadas mediante el procedimiento descrito en el apartado 4.3, incluye el comportamiento de los ejes utilizando elementos finitos de tipo viga (cuyas características principales se han descrito en el apartado 4.2.2). Utilizar este tipo de elementos para la modelización de los ejes en lugar de mallarlos con elementos sólidos tridimensionales repercute en un menor coste computacional, mientras que su comportamiento es muy similar, como quedó demostrado [128].

El modelo *FEM1* está basado en el modelo físico mostrado en la figura 1.13, y los pasos para su generación se describen a continuación:

1. Las geometrías de contacto del piñón y de la rueda se discretizan en elementos finitos mediante el método descrito en el apartado 4.3.

2. Los modelos de elementos finitos de las geometrías de contacto se ensamblan en el modelo global de elementos finitos, como se ilustra en la figura 4.8. Los detalles de la unión entre las geometrías de contacto y la porción de los ejes bajo los engranajes se exponen en el paso 5.

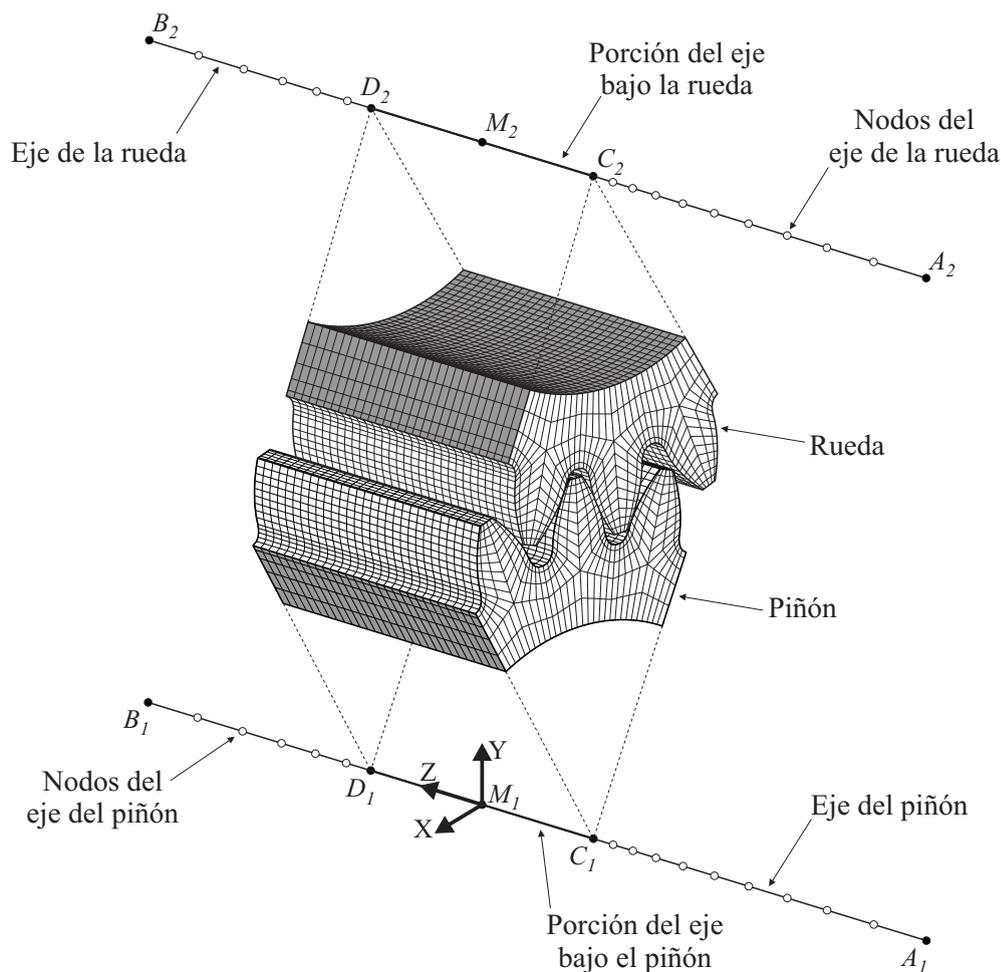


FIGURA 4.8: Modelo de elementos finitos de la transmisión

3. Los ejes del piñón y de la rueda se modelizan utilizando elementos finitos tridimensionales de tipo viga. Se seleccionan elementos viga formulados bajo las hipótesis de Timoshenko (ref. B31 en Abaqus [119]), pues como se ha descrito en el apartado 4.2.2, resultan más apropiados para la modelización de ejes de engranajes, en los que el ratio entre longitud y diámetro suele ser pequeño. Las propiedades de la sección transversal de los elementos viga se definen en el paso 8.
4. Las condiciones de contorno se aplican directamente sobre los nodos que coinciden con los puntos A_1 , B_1 , A_2 y B_2 del modelo físico descrito en la figura 1.13, donde los rodamientos estarían situados. Esto simplifica la aplicación de las condiciones de contorno con respecto a los modelos tradicionales, y permite considerar distintos tipos de apoyos.

- Se define una superficie rígida que comprende todos los nodos de la superficie inferior y de las superficies laterales del anillo del piñón, como se ilustra en la figura 4.9. Los movimientos de esta superficie rígida están asociados al nodo de referencia M_1 , situado sobre el eje de rotación del piñón.

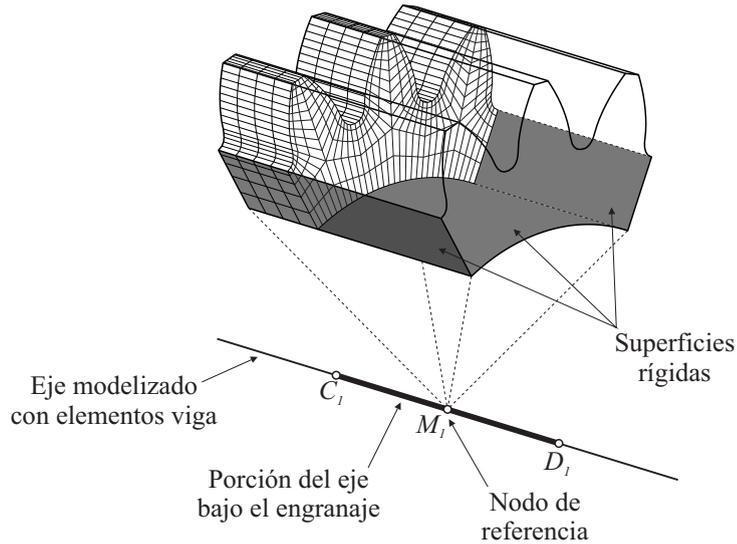


FIGURA 4.9: Modelo de elementos finitos *FEM1*

- Se establecen condiciones de contorno similares a las expuestas en el paso 5 para el modelo de la rueda, en este caso utilizando el nodo de referencia M_2 .
- Se considera una progresión geométrica para definir la posición de los nodos de los ejes situados fuera de la porción del eje bajo los engranajes, incrementando la longitud de los elementos desde los engranajes hasta los apoyos y reduciendo el número de nodos en los ejes. Dos nodos consecutivos, denotados por n y $n + 1$, se unen mediante un elemento viga, denotado por e .
- Las propiedades de la sección transversal de los elementos que conforman los ejes se calculan a partir de los diámetros d_{Ae} y d_{Ie} (ver apartado 4.2.2), que dependen del valor de las funciones que definen el diámetro del eje $d_A(z)$ y $d_I(z)$ en la posición z de los nodos n y $n + 1$:

$$d_{Ae} = \frac{d_A(z_n) + d_A(z_{n+1})}{2} \quad (4.5)$$

$$d_{Ie} = \frac{d_I(z_n) + d_I(z_{n+1})}{2} \quad (4.6)$$

En el modelo *FEM1*, el valor de las funciones que definen el diámetro del eje en función de la posición se define según la ecuación 4.7. En esta ecuación, el valor del diámetro

especificado en la porción del eje bajo los engranajes se define de acuerdo a las recomendaciones de la norma ISO 6336-1 [11].

$$d_A(z) = d_I(z) = \begin{cases} d_{sh} & \text{si } -z_g \leq z < -b/2 \\ \frac{d_{sh}+d}{2} & \text{si } -b/2 \leq z \leq b/2 \\ d_{sh} & \text{si } b/2 < z \leq L - z_g \end{cases} \quad (4.7)$$

4.6 Modelo de elementos finitos *FEM2* para el estudio tensional de transmisiones por engranaje

En el apartado 4.5 se describe la generación del modelo de elementos finitos *FEM1* que permite tener en cuenta la deformación de los ejes cuando se analiza una transmisión de engranajes bajo carga. En este modelo se define una superficie rígida alrededor de las geometrías de contacto que impide que estas se retuerzan, despreciando así cualquier efecto derivado de este comportamiento.

A medida que se incrementa el cociente entre el ancho de cara y el diámetro primitivo de alguno de los engranajes, los efectos derivados de la deformación por torsión de las geometrías del engranaje pueden cobrar especial importancia, y por lo tanto, no tenerlos en cuenta en los análisis puede dar lugar a pérdidas importantes de la precisión de los resultados. A tal efecto, se plantea un nuevo modelo de elementos finitos (*FEM2*), que además de tener en cuenta las deformaciones de los ejes, permite considerar la torsión de las geometrías de los engranajes.

El modelo *FEM2* está basado en el modelo *FEM1*, pero se realizan cambios en la manera en la que las geometrías de contacto se relacionan con la porción de los ejes bajo los engranajes. Estos cambios se representan en la figura 4.9, donde se muestra la relación entre la geometría de contacto y el eje en el modelo *FEM2*. En este caso la superficie rígida que unía los nodos de las partes laterales e inferior del anillo a un nodo de referencia se sustituye por un grupo de aristas rígidas independientes que rodean el anillo del engranaje. Estas aristas rígidas están conectadas rígidamente a nodos de referencia que se encuentran sobre el eje de dicho engranaje, y que se unen unos a otros mediante elementos finitos de tipo viga. Como consecuencia, cada una de las secciones transversales de la rueda dentada puede tener movimiento relativo respecto a las secciones contiguas.

A partir del modelo *FEM2* se derivan dos submodelos de elementos distintos, denominados *FEM2.1* y *FEM2.2*. Las diferencias entre ambos modelos residen en las funciones $d_I(z)$ y $d_A(z)$ consideradas, a partir de las cuales, y utilizando las ecuaciones 4.5 y 4.6,

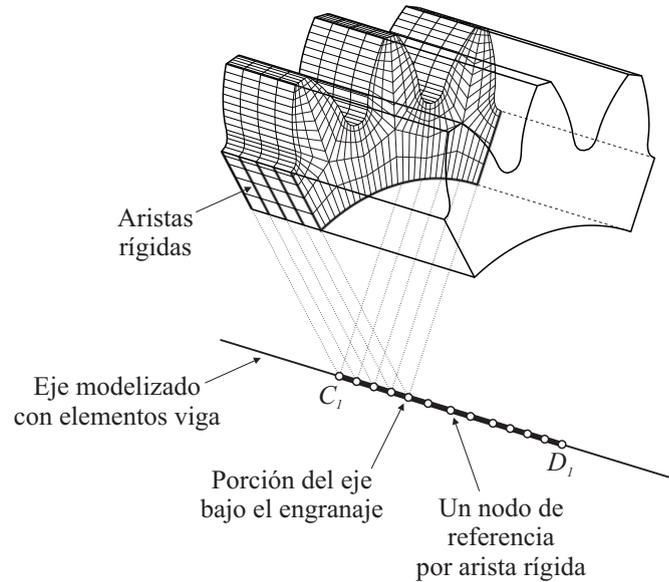


FIGURA 4.10: Modelo de elementos finitos *FEM2*

se calculan los diámetros d_{Ie} y d_{Ae} que se utilizan para el cálculo de las propiedades de la sección transversal de cada uno de los elementos que conforman el eje.

En el modelo de elementos finitos *FEM2.1*, las funciones $d_I(z)$ y $d_A(z)$ se definen mediante la expresión 4.7, utilizada previamente en el modelo *FEM1*. Las características del modelo *FEM2.2* se exponen a continuación.

4.6.1 Modelo de elementos finitos *FEM2.2* para tener en cuenta los cambios bruscos de sección en las zonas cercanas al engranaje

En los modelos de elementos finitos de la transmisión *FEM1* y *FEM2.1*, los ejes de las transmisiones de engranajes se modelizan mediante el uso de elementos finitos de tipo viga, consiguiendo de esta forma una ventaja computacional sobre el modelo *FEM0*, en el que los ejes se modelizan mediante elementos sólidos tridimensionales, sin que ello repercuta en una pérdida significativa de la precisión global del modelo. Como se ha comentado en el apartado 4.2.2, los elementos finitos de tipo viga utilizados en este trabajo para simular el comportamiento bajo carga de los ejes se formulan bajo las hipótesis de la teoría de vigas de Timoshenko (ref. Abaqus B31).

En el apartado 4.2.2 se ha descrito como las propiedades de la sección transversal asociada a los elementos viga dependen de las magnitudes d_{Ie} y d_{Ae} . La magnitud d_{Ie} representa el diámetro de la sección circular considerada para el comportamiento a flexión del elemento viga, y se calcula mediante la ecuación 4.5 a partir de la función $d_I(z)$. La magnitud d_{Ae} representa el diámetro de la sección circular considerada para el comportamiento a cortante del elemento viga, y se calcula mediante la ecuación 4.6 a partir

de la función $d_A(z)$. En los modelos $FEM1$ y $FEM2.1$, las funciones $d_I(z)$ y $d_A(z)$ se definen mediante la expresión 4.7, que incluye una variación brusca del diámetro en los puntos $z = -b/2$ y $z = b/2$, que da lugar a cambios bruscos en la sección transversal de los ejes.

Como se ha observado en el apartado 3.4, cuando un eje de engranaje se estudia bajo la teoría de vigas de Timoshenko, en las partes extremas del engranaje, en las que se produce un cambio brusco de la sección transversal de la viga, la rigidez a flexión es menor de lo que se asume en realidad, ya que parte de la sección no se opone realmente a la flexión. En dicho apartado se han propuesto medidas que permiten corregir los errores que se cometen cuando existen estos cambios bruscos de sección, que consisten en la consideración de un diámetro equivalente para el cálculo del momento de inercia de la sección, que varía linealmente en lugar de hacerlo de forma abrupta, dando lugar a unos tramos cónicos de transición cuyo ángulo de apertura es de $\phi = 40^\circ$.

En este apartado se propone un nuevo modelo de elementos finitos ($FEM2.2$). Este modelo es idéntico al modelo $FEM2.1$ expuesto en el apartado anterior, pero en este caso la función $d_I(z)$ no se define mediante la expresión 4.7, sino que se utiliza una nueva definición cuyo propósito es tener en cuenta la disminución de la rigidez a flexión que se produce debido a los cambios bruscos de sección. Siguiendo las conclusiones obtenidas en el apartado 3.4, la función $d_I(z)$ considerada en el modelo $FEM2.2$ se define mediante la expresión 4.8:

$$d_I(z) = \begin{cases} d_{sh} & \text{si } -z_g \leq z < -b/2 \\ \min(d_{sh} + (b + 2 \cdot z) \cdot \tan 40^\circ, d) & \text{si } -\frac{b}{2} \leq z < 0 \\ \min(d_{sh} + (b - 2 \cdot z) \cdot \tan 40^\circ, d) & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{b}{2} \\ d_{sh} & \text{si } b/2 < z \leq L - z_g \end{cases} \quad (4.8)$$

En función de la magnitud del diámetro de paso del engranaje (d), del diámetro del eje (d_{sh}) y del ancho de cara del engranaje (b), la expresión 4.8 mediante la que se define la función $d_I(z)$ da lugar a dos situaciones distintas:

- (i) Cuando $d \geq d_{sh} + b \cdot \tan 40^\circ$, la función $d_I(z)$ no alcanza el valor del diámetro primitivo del engranaje, como se ilustra en la figura 4.11a.
- (ii) Cuando $d < d_{sh} + b \cdot \tan 40^\circ$, la función $d_I(z)$ alcanza el valor del diámetro primitivo del engranaje, como se ilustra en la figura 4.11b.

Por otra parte, en el modelo $FEM2.2$ la función $d_A(z)$ mantiene el valor definido por la expresión 4.7.

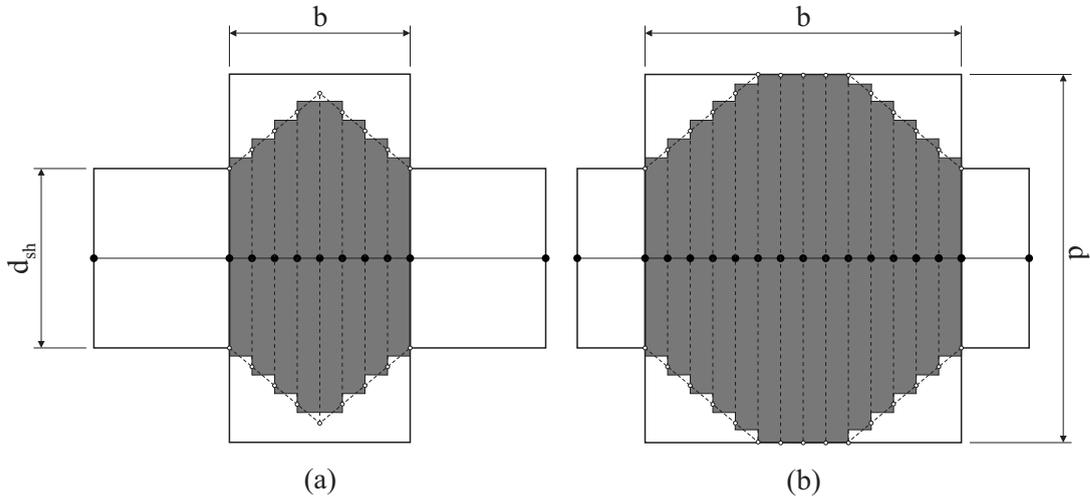


FIGURA 4.11: Diámetros del eje para su comportamiento ante esfuerzos a flexión para (a) el caso donde no se alcanza el diámetro primitivo y (b) el caso que se alcanza el diámetro primitivo.

4.7 Definición de las posiciones de análisis de los modelos de elementos finitos de la transmisión

Habitualmente, los análisis tensionales de transmisiones de engranajes por el método de los elementos finitos se realizan para una pareja específica de dientes, denotada por $T^{(0)}$, pues los resultados de estos análisis tienden a repetirse cíclicamente para cada una de las parejas de dientes que entran en contacto durante el funcionamiento de la transmisión. La pareja de dientes que precede a $T^{(0)}$ en el ciclo de engrane se denota por $T^{(-1)}$, mientras que la pareja de dientes que la sigue en el ciclo de engrane se denota por $T^{(+1)}$. Para realizar el análisis tensional de la pareja de dientes denotada por $T^{(0)}$, se definen análisis estáticos en distintas posiciones de análisis o de contacto, repartidas a lo largo de dos ciclos completos de engrane. Cada ciclo de engrane corresponde a una rotación del piñón igual a su paso angular (θ_{N1}), definido según la siguiente expresión [61]:

$$\theta_{N1} = \frac{2\pi}{z_1} \quad (4.9)$$

La posición angular del piñón se define por la variable $\phi^{(1)}$, que mide el ángulo existente entre el plano medio del diente $T^{(0)}$ del piñón y el plano axial, como se ilustra en la figura 4.12. La posición angular de la rueda viene definida por la variable $\phi^{(2)}$, que mide el ángulo existente entre el plano medio del diente $T^{(0)}$ de la rueda y el plano axial. La magnitud de $\phi^{(1)}$ se considera positiva si dicha posición se alcanza debido a la acción de un par aplicado en el piñón en dirección Z^+ . Debido a la acción conjugada de los

dientes, dicho movimiento lleva a la rueda a una posición denotada por un valor negativo de $\phi^{(2)}$.

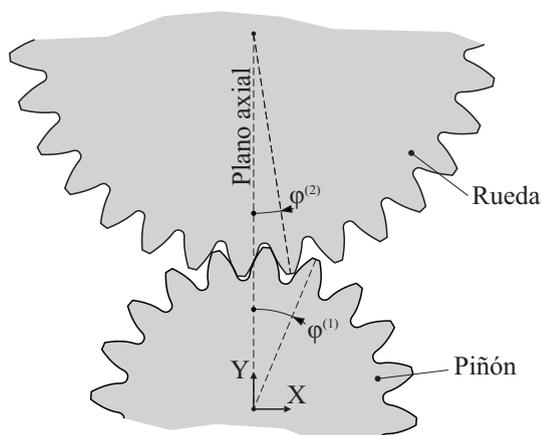


FIGURA 4.12: Definición de la posición angular el piñón y de la rueda

La posición inicial del estudio vendrá definida por la posición del piñón $\phi_{ini}^{(1)}$, correspondiente a la posición en la que el contacto rígido de la pareja de dientes $T^{(-1)}$ se produce en el plano axial, como se ilustra en la figura 4.13a. La posición final del estudio vendrá determinada por la posición del piñón $\phi_{fin}^{(1)}$, correspondiente a la posición en la que el contacto rígido de la pareja de dientes $T^{(+1)}$ se produce en el plano axial, como se ilustra en la figura 4.13b. La magnitud de la rotación total considerada (θ) vendrá dada por:

$$\theta = \phi_{fin}^{(1)} - \phi_{ini}^{(1)} = \frac{4\pi}{z_1} \quad (4.10)$$

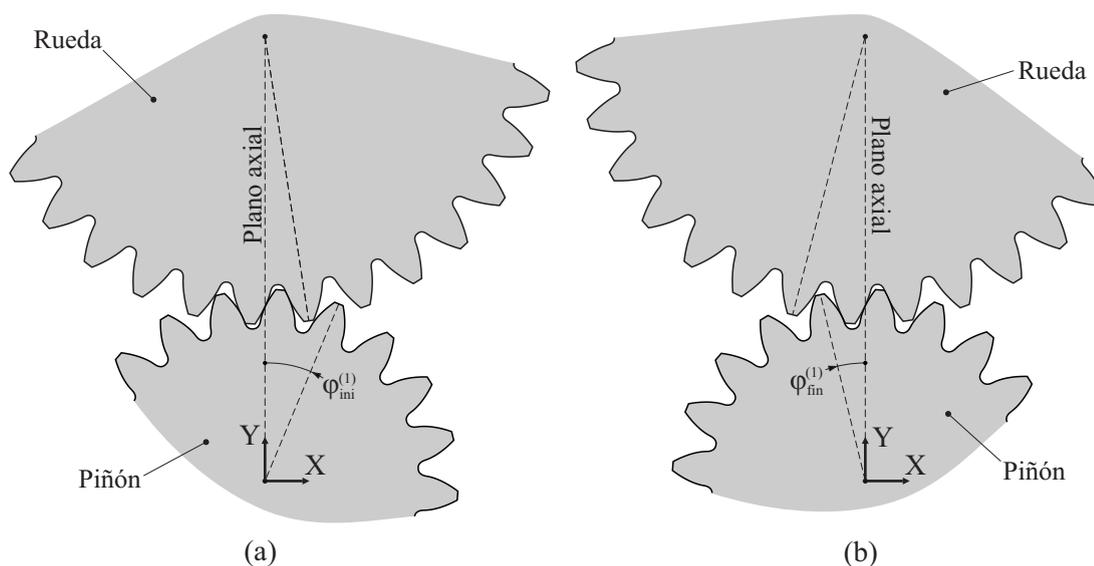


FIGURA 4.13: Definición de ciclo de engrane

La rotación total se divide en n posiciones de análisis equidistantes, denotadas por i ($i = 1..n$). La posición angular del piñón en cada posición de análisis vendrá determinada

por la ecuación 4.11. La posición angular de la rueda para cada posición de análisis se determinará mediante un análisis de contacto TCA, considerando la posición definida para el piñón.

$$\phi_i^{(1)} = \phi_{ini}^{(1)} + (i - 1) \cdot \frac{\theta}{n - 1} \quad (4.11)$$

Si se especifica un número impar de posiciones de contacto, en la posición central del análisis el contacto rígido de la pareja de dientes $T^{(0)}$ se producirá en el plano axial.

4.8 Obtención de resultados a partir de los modelos de elementos finitos propuestos

El resultado primario obtenido a partir de un análisis tensional realizado por el método de los elementos finitos es la magnitud del desplazamiento asociado a cada uno de los grados de libertad de los nodos que componen el modelo. A partir de estos desplazamientos, los algoritmos de postprocesado presentes en los programas de análisis son capaces de proporcionar otros resultados relevantes que se derivan a partir de los desplazamientos en los nodos, como las distribuciones de tensión o de deformación.

No obstante, existen otros resultados que son de interés para el diseñador de engranajes que no se pueden obtener de forma directa a partir de los programas convencionales de análisis por el método de los elementos finitos, como el error de transmisión, el factor de distribución longitudinal de la carga o la desalineación entre engranajes. En este apartado se describen los procedimientos que permiten obtener estos resultados a partir de los modelos de elementos finitos descritos anteriormente.

4.8.1 Determinación del error de transmisión

El error de transmisión describe en qué medida una transmisión por engranajes se desvía de ofrecer una relación constante entre la velocidad angular de su eje de entrada y la velocidad angular de su eje de salida. Puede representarse en el dominio del tiempo como una función dependiente de la posición angular de uno de los ejes de la transmisión, generalmente del eje de entrada.

El concepto de error de transmisión fue introducido por Harris [129], definiéndolo como la diferencia angular entre la posición que ocupa la rueda y la posición teórica que debería ocupar con respecto al piñón si el movimiento entre los engranajes fuese perfectamente conjugado.

Considere una pareja de ruedas dentadas, cuyas superficies de contacto describen un perfil de evolvente perfecto, girando sobre sus respectivos ejes, perfectamente alineados. Si se asume que ambos engranajes se comportan como sólidos rígidos, su posición angular para una posición de contacto i del ciclo de engrane puede definirse por las variables $\phi_i^{(1)}$ y $\phi_i^{(2)}$, para el piñón y la rueda, respectivamente, que estarán relacionadas por la siguiente ecuación:

$$\phi_i^{(2)} = \pm \phi_i^{(1)} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad (4.12)$$

En la ecuación 4.12, z_1 y z_2 representan el número de dientes del piñón y de la rueda, respectivamente. Por otra parte, la magnitud de $\phi_i^{(1)}$ se considera negativa cuando las dos ruedas tienen dentado exterior, y positiva cuando una de las ruedas tiene dentado interior.

Si se permite que las superficies de contacto de los engranajes posean desviaciones de sus posiciones teóricas y se tienen en cuenta las deformaciones elásticas de los componentes de la transmisión, la igualdad mostrada en la ecuación 4.12 deja de ser cierta, apareciendo un desfase o error de transmisión ($\Delta\phi_i$), de manera que:

$$\Delta\phi_i + \phi_i^{(2)} = \pm \phi_i^{(1)} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad (4.13)$$

La magnitud del error de transmisión se considera positiva cuando la posición real de la rueda se avanza a su posición teórica, y negativa si la posición real de la rueda se atrasa con respecto a su posición teórica [129].

De acuerdo con Mark [130], para una posición de contacto dada, existen dos contribuciones aditivas que afectan al error de transmisión: una debida al error de transmisión en ausencia de carga ($\Delta\phi_i^{(u)}$) y otra debida al error de transmisión bajo carga ($\Delta\phi_i^{(l)}$):

$$\Delta\phi_i = \Delta\phi_i^{(u)} + \Delta\phi_i^{(l)} \quad (4.14)$$

donde el superíndice (u) significa que la magnitud se mide en ausencia de carga y el superíndice (l) significa que la magnitud se mide bajo carga.

La diferencia entre el error de transmisión máximo y el error de transmisión mínimo determinará el valor máximo entre picos de la función de error de transmisión ($\Delta\phi_{max}$):

$$\Delta\phi_{max} = \max(\Delta\phi_i) - \min(\Delta\phi_i) \quad (4.15)$$

El prediseño de la función de error de transmisión en ausencia de carga puede ayudar a reducir el valor máximo entre picos de la función de error de transmisión, de manera que el error de transmisión en ausencia de carga compense en parte al error de transmisión bajo carga.

Determinación del error de transmisión en ausencia de carga

El error de transmisión en ausencia de carga ($\Delta\phi_i^{(u)}$) se origina por las desviaciones geométricas de las superficies de contacto de los dientes de engranaje. Estas desviaciones pueden ser intencionadas [131–136] o fruto de errores de fabricación y montaje. Cuando las superficies de contacto corresponden a perfiles de evolvente sin desviaciones y las ruedas están perfectamente alineadas, el error de transmisión en ausencia de carga es nulo ($\Delta\phi_i^{(u)} = 0$).

Existen diversos métodos para el cálculo del error de transmisión en ausencia de carga, basados en la simulación del engrane entre el piñón y la rueda, asumiendo que sus superficies de contacto experimentan un movimiento de sólido rígido.

En este trabajo, la simulación del engrane entre piñón y rueda se ha realizado mediante el método propuesto por Sheveleva [27]. Éste es un método numérico que tiene en cuenta la posición que ocupan las superficies de contacto de los engranajes y minimiza la distancia entre ellas hasta que se alcanza el contacto. Este método permite analizar transmisiones con contacto lineal, puntual o en los bordes, y se ha utilizado comúnmente para el cálculo de errores de transmisión en otros trabajos similares [59, 117].

La relación entre el ángulo girado por el piñón ($\phi^{(1)}$) y el ángulo girado por la rueda para alcanzar el contacto ($\phi^{(2)}$) proporcionará la función de errores de transmisión en ausencia de carga, que dependerá únicamente de las geometrías de los dientes del piñón y de la rueda y de la posición relativa de las ruedas.

A partir de este método el error de transmisión sin carga se obtiene como una función discreta utilizando la siguiente expresión:

$$\Delta\phi_i^{(u)} = -\phi_i^{(2)} \pm \phi_i^{(1)} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad (4.16)$$

En la ecuación 4.16, $\phi_i^{(1)}$ y $\phi_i^{(2)}$ son las rotaciones angulares que hacen que el piñón y la rueda, respectivamente, estén en contacto en ausencia de carga para cada posición de estudio i . El signo de $\phi_i^{(1)}$ se considera negativo cuando las dos ruedas poseen dentado exterior, y positivo cuando una de las ruedas posee dentado interior.

El conjunto de valores de $\Delta\phi_i^{(u)}$ representa la función del error de transmisión en ausencia de carga. Esta función se debe añadir a la función de error de transmisión bajo carga ($\Delta\phi_i^{(l)}$) para obtener la función del error de transmisión total ($\Delta\phi_i$).

Determinación del error de transmisión bajo carga

El error de transmisión bajo carga ($\Delta\phi_i^{(l)}$) se origina por las deformaciones elásticas de los componentes de la transmisión.

El procedimiento para la determinación del error de transmisión bajo carga es el siguiente:

1. Para cada posición de análisis i , se determina mediante el análisis del modelo de elementos finitos considerando la rotación del nodo A_1 , denotada por $\theta_i^{(A_1)}$, sobre el que se aplica el par (figura 1.13).
2. El error de transmisión bajo carga para la posición de contacto i se obtiene mediante la ecuación 4.17.

$$\Delta\phi_i^{(l)} = \pm\theta_i^{(A_1)} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad (4.17)$$

En la ecuación 4.17 no se tiene en cuenta el giro del eje de salida, pues su rotación se considera restringida en los modelos de elementos finitos descritos. La magnitud de $\theta_i^{(A_1)}$ se considera negativa cuando los dos engranajes tienen dentado exterior, y positiva cuando uno de los engranajes tiene dentado interior.

El conjunto de valores de $\Delta\phi_i^{(l)}$ representa la función del error de transmisión bajo carga. Esta función se debe añadir a la función de error de transmisión en ausencia de carga ($\Delta\phi_i^{(u)}$) para obtener el error de transmisión total ($\Delta\phi_i$).

4.8.2 Determinación de la función de intensidad de carga

Los transmisiones de engranajes transmiten potencia a través del contacto entre los dientes de las ruedas dentadas. Como consecuencia de este contacto, se genera una distribución de presión de contacto sobre las superficies de los dientes de la rueda y del piñón, que se puede describir mediante la función $p(u, v)$. En esta función, la variable v es la coordenada intrínseca de la superficie de contacto en la dirección longitudinal del diente y la variable u es la coordenada intrínseca de la superficie de contacto en la dirección del perfil del diente, como se ilustra en la figura 4.14.

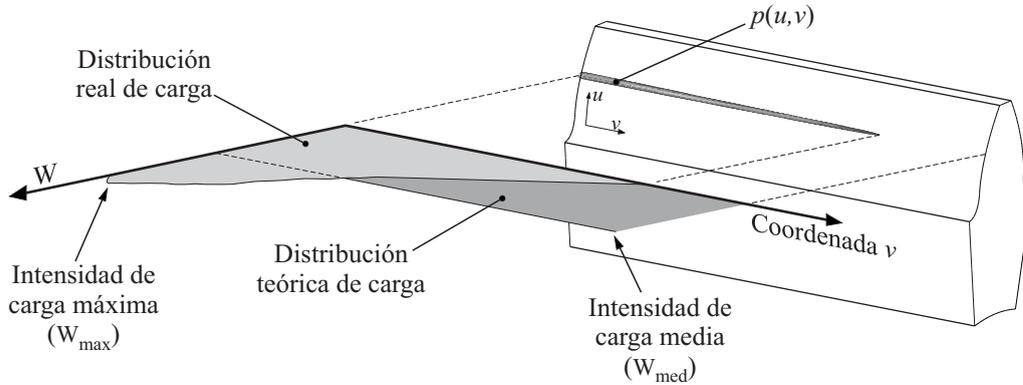


FIGURA 4.14: Distribución de carga teórica y distribución de carga real en un engranaje cilíndrico recto

La determinación de la distribución de presión de contacto en las superficies de los engranajes cuando estos transmiten potencia, y especialmente de sus valores máximos, es de interés para los diseñadores de engranajes, pues de ella son dependientes la durabilidad de las superficies de contacto y la resistencia a la flexión de los dientes del engranaje, que junto con otros parámetros determinan la capacidad de carga de una transmisión dada. Como explica Hotait [20], los valores que adopta la función de distribución de presión de contacto están relacionados con la forma en la que la cargas se distribuyen a lo largo de las superficies de contacto. Por ese motivo, la obtención de la distribución de las fuerzas de contacto a lo largo del ancho de cara del engranaje ha sido un problema extensamente abordado en la literatura [50, 64, 70, 127, 137, 138].

La forma en la que las fuerzas de contacto se distribuyen a lo largo del ancho de cara del engranaje se caracteriza habitualmente por la función de intensidad de carga [10, 11], denotada por $W(v)$. La intensidad de la carga representa la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre cada una de las secciones de la superficie del diente a lo largo de su ancho de cara. La figura 4.14 muestra un ejemplo de la variación de la intensidad de carga en un caso en el que la huella de contacto no cubre la totalidad del ancho de cara.

La función de intensidad de carga se puede calcular integrando la función de distribución de presión de contacto en la dirección del perfil del diente entre el punto inferior (u_o) y el punto superior (u_f) de la superficie de contacto en cada posición v :

$$W(v) = \int_{u_o}^{u_f} p(u, v) du \quad (4.18)$$

Como resultado del análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión, se obtiene un conjunto de valores de presión de contacto en los nodos presentes en la huella de contacto, que definen la función $p(u, v)$. Por ese motivo, cuando se desee calcular la

función de intensidad de carga a partir de los resultados obtenidos de un análisis por el método de los elementos finitos, la integral presente en las ecuación 4.18 deberá evaluarse numéricamente. Entre los distintos métodos numéricos de integración disponibles, para este propósito se ha favorecido la utilización de la conocida regla del trapecio [139].

De esta manera, para cada coordenada v , en la que hay situados n_v nodos, el valor de la función de intensidad de carga se puede aproximar mediante la ecuación 4.19. En esta ecuación \mathbf{r}_n y \mathbf{r}_{n+1} son los vectores de posición de los nodos n y $n + 1$, como se ilustra en la figura 4.15. Por otra parte, p_n y p_{n+1} son los valores de presión de contacto asociados a esos nodos, obtenidos a partir del análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión.

$$W(v) \simeq \sum_{n=1}^{n_v-1} \left[|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n| \cdot \frac{p_{n+1} + p_n}{2} \right] \quad (4.19)$$

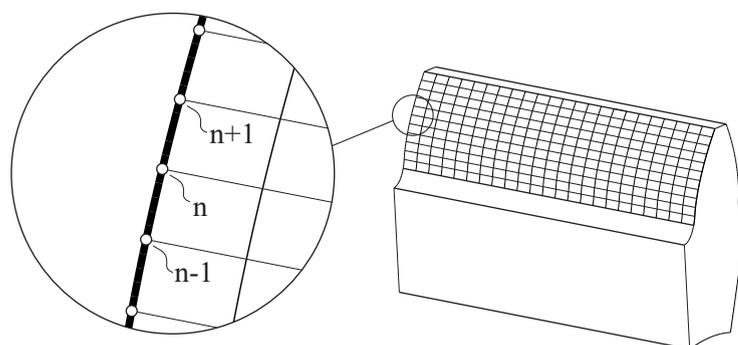


FIGURA 4.15: Numeración de los nodos asociados a una coordenada v

Para facilitar la interpretación de los datos, resulta interesante hacer un cambio de variable y sustituir la coordenada intrínseca v de la superficie de contacto del diente por la coordenada Cartesiana z , correspondiente al sistema global de coordenadas ($W(u) \rightarrow W(z)$).

La calidad de la definición de la función de intensidad de carga obtenida por este método a partir del análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión dependerá de la densidad de la malla de elementos finitos dentro de la huella de contacto.

4.8.3 Determinación de la función de reparto de carga entre dientes

La razón de contacto se puede considerar como el número medio de parejas de dientes en contacto durante un ciclo de engrane [1]. En transmisiones por engranaje con razones de contacto inferiores a 2, el contacto se produce de forma simultanea entre una o dos parejas de dientes. Cuando el contacto se produce entre dos parejas de dientes, la carga

total transmitida se reparte entre los dientes engranados, y la cantidad de carga que recae sobre cada diente se cuantifica mediante un factor adimensional llamado factor de reparto de carga (LSF).

Para una posición de contacto dada (i), el coeficiente de reparto de carga se puede calcular a partir de la carga transmitida por una pareja de dientes (F_i) y de la carga total transmitida por el engranaje (F_T) mediante la ecuación 4.20.

$$LSF_i = \frac{F_i}{F_T} \quad (4.20)$$

La carga total transmitida por un diente (F_i) se puede calcular integrando la función de intensidad de carga a lo largo de todo el ancho de cara del diente:

$$F_i = \int_{-b/2}^{b/2} W(z) dz \quad (4.21)$$

Cuando la función de intensidad de carga se determina a partir del método descrito en el apartado 4.8.2, es conveniente evaluar la integral anterior utilizando métodos numéricos. A tal efecto, en este trabajo se ha utilizado la regla del trapecio [139].

La carga total transmitida por el engranaje (F_T) se puede obtener como la suma de las cargas transmitidas por todos los dientes del engranaje:

$$F_T = \sum_{i=1}^z F_i \quad (4.22)$$

El conjunto de valores de LSF_i representa la función de reparto de carga. La figura 4.16 muestra una función típica de reparto de carga, obtenida por Spitas [140] a partir de ensayos experimentales. Las funciones de reparto de carga tienen carácter no lineal, puesto que su valor dependerá del diseño de la transmisión y de la carga transmitida.

Para un diente dado del engranaje, la primera posición del ciclo de engrane en la que $LSF = 100\%$ se denota por $LPSTC$, y se define por la posición angular del piñón ϕ_{LPSTC} . La última posición del ciclo de engrane en la que $LSF = 100\%$ se denota por $HPSTC$, y se define por la posición angular del piñón ϕ_{HPSTC} . Entre estas dos posiciones la carga es transmitida por una única pareja de dientes.

Los conceptos función de reparto de carga, así como las posiciones inicial y final de contacto único, se utilizan habitualmente como parámetros de diseño de engranajes [10, 11].

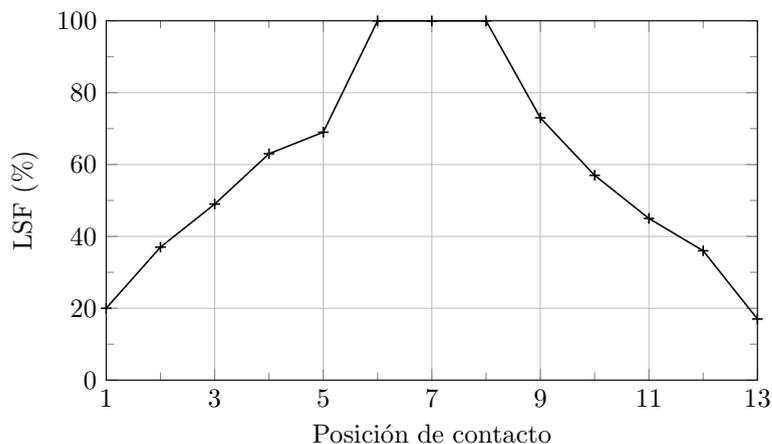


FIGURA 4.16: Valores típicos de la función de reparto de carga

4.8.4 Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga

El factor de distribución longitudinal de la carga es un coeficiente que se utiliza comúnmente en las guías de diseño de engranajes [8–11] y que tiene en cuenta el efecto de la distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara del diente debido a la desalineación del engrane. Representa el cociente entre el valor máximo y el valor medio de la función de intensidad carga:

$$K_{H\beta-FEM} = \frac{W_{max}}{W_{med}} \quad (4.23)$$

En la ecuación 4.23, W_{max} representa el valor máximo de la función de intensidad de carga, mientras que W_{med} representa el valor medio de la función de intensidad de carga, y se puede calcular dividiendo la carga transmitida por la pareja de dientes estudiada (F_i) entre el ancho de cara del engranaje (b).

4.8.5 Determinación de la desalineación natural de los engranajes

La desalineación de las ruedas dentadas es un problema común en las transmisiones de engranajes que reduce su vida útil y tiene importantes consecuencias negativas en la transmisión de potencia. Han sido varios los autores que han estudiado la influencia de las desalineaciones de los engranajes sobre el funcionamiento de la transmisión [15, 19, 20, 22, 51, 72, 73]. La mayoría de autores se basan en la imposición de cantidades arbitrarias de desalineación en los engranajes para estudiar qué consecuencias tienen en el funcionamiento y la capacidad de carga de la transmisión.

A la vista de estas consecuencias, parece importante poder estimar, para un diseño dado de la transmisión, la desalineación a la que estarán sometidos los engranajes durante su funcionamiento. Aunque existen varios motivos por los cuales dos engranajes pueden estar desalineados (por ejemplo, errores de fabricación y montaje), una de las contribuciones más importantes a la desalineación de los engranajes viene dada por las deformaciones elásticas que se producen en los elementos que conforman la transmisión durante la transmisión de potencia, también conocida como desalineación natural de los engranajes. Los trabajos que se pueden encontrar en la literatura sobre este tema son escasos [97], y esto se debe parcialmente a que la mayoría de los modelos de elementos finitos presentes en la literatura únicamente consideran las geometrías de contacto, y por lo tanto, no permiten estudiar las deformaciones elásticas del resto de componentes de la transmisión.

En este trabajo se han propuesto nuevos modelos de elementos finitos que incluyen el comportamiento elástico de los ejes que soportan a los engranajes, y que por lo tanto permiten estudiar la desalineación natural que se produce en una transmisión dada bajo unas condiciones de carga determinadas. En estos modelos de elementos finitos la desalineación natural que se produce entre el piñón y la rueda se puede determinar considerando los desplazamientos que experimentan los nodos situados en las posiciones C_1 , D_1 , C_2 y D_2 (figura 4.18) debido a la transmisión de carga.

Habitualmente, la desalineación de los engranajes se divide en tres categorías [15, 20]:

- (i) Desalineación angular en el plano de paso (figura 4.17a).
- (ii) Desalineación angular en el plano axial (figura 4.17b).
- (iii) Desalineación en paralelo provocada por un cambio en la distancia entre los centros de los engranajes (figura 4.17c).

La desalineación de la rueda respecto al piñón en el plano de paso se considera mediante la magnitud $\Delta\gamma_d$, mostrada en la figura 4.18a. El subíndice d indica que esta desalineación está producida por la deflexión de los ejes. Esta magnitud se determina de la siguiente forma:

$$\Delta\gamma_d = \arctan \left(\frac{|\mathbf{v}_\gamma^{(1)} \times \mathbf{v}_\gamma^{(2)}|}{\mathbf{v}_\gamma^{(1)} \cdot \mathbf{v}_\gamma^{(2)}} \right) \quad (4.24)$$

donde $\mathbf{v}_\gamma^{(1)}$ es el vector que une las posiciones deformadas de los puntos C_1 y D_1 en el plano de paso y $\mathbf{v}_\gamma^{(2)}$ es el vector que une las posiciones deformadas de los puntos C_2 y D_2 en el mismo plano, como se muestra en la figura 4.18a.

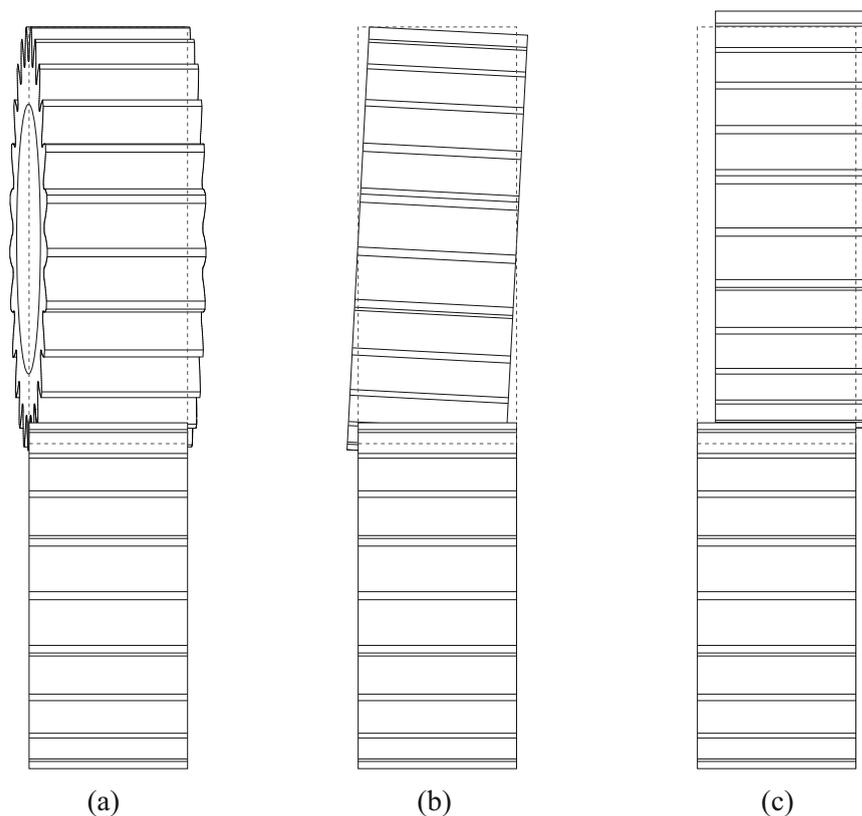


FIGURA 4.17: Componentes de desalineación de los engranajes. (a) Desalineación angular en el plano de paso, (b) desalineación angular en el plano axial y (c) variación en la distancia entre centros

La desalineación de la rueda respecto al piñón en el plano axial se considera mediante la magnitud $\Delta\nu_d$, mostrada en la figura 4.18b. Esta magnitud se determina de la siguiente forma:

$$\Delta\nu_d = \arctan \left(\frac{|\mathbf{v}_\nu^{(1)} \times \mathbf{v}_\nu^{(2)}|}{\mathbf{v}_\nu^{(1)} \cdot \mathbf{v}_\nu^{(2)}} \right) \quad (4.25)$$

donde $\mathbf{v}_\nu^{(1)}$ es el vector que une las posiciones deformadas de los puntos C_1 y D_1 en el plano axial y $\mathbf{v}_\nu^{(2)}$ es el vector que une las posiciones deformadas de los puntos C_2 y D_2 en el mismo plano, como se muestra en la figura 4.18b.

Los desplazamientos relativos de la rueda con respecto al piñón se tienen en cuenta mediante las magnitudes Δx_d , Δy_d y Δz_d , que se obtienen de la siguiente forma:

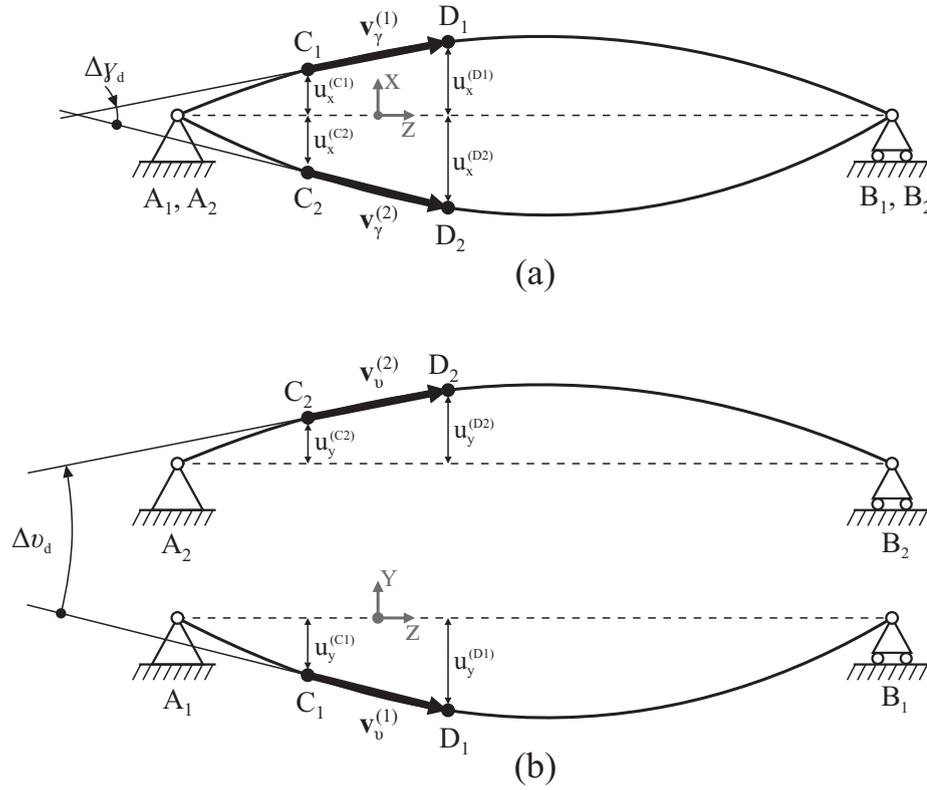


FIGURA 4.18: Cálculo de la desalineación angular en (a) el plano de paso y (b) el plano axial

$$\Delta x_d = \left[\frac{u_x^{(D_2)} + u_x^{(C_2)}}{2} \right] - \left[\frac{u_x^{(D_1)} + u_x^{(C_1)}}{2} \right] \quad (4.26a)$$

$$\Delta y_d = \left[\frac{u_y^{(D_2)} + u_y^{(C_2)}}{2} \right] - \left[\frac{u_y^{(D_1)} + u_y^{(C_1)}}{2} \right] \quad (4.26b)$$

$$\Delta z_d = \left[\frac{u_z^{(D_2)} + u_z^{(C_2)}}{2} \right] - \left[\frac{u_z^{(D_1)} + u_z^{(C_1)}}{2} \right] \quad (4.26c)$$

Cuantificar la magnitud de la desalineación entre los engranajes puede ayudar a proponer modificaciones que mejoren sus condiciones de trabajo y su duración [141].

4.9 Comparación de los modelos de elementos finitos propuestos

En este capítulo se han propuesto nuevos modelos de elementos finitos para realizar el análisis tensional y deformacional de transmisiones de engranajes, considerando la deformación natural de los ejes que los sustentan.

TABLA 4.2: Datos de diseño para los casos de estudio

Magnitudes	Caso I	Caso II	Caso III
Módulo normal, m [mm]	1.5	1.5	1.5
Ángulo de presión normal, α [grados]	25	25	25
Número de dientes del piñón, z_1	20	20	31
Número de dientes de la rueda, z_2	31	20	31
Ancho de cara, $b = b_1 = b_2$ [mm]	20	20	20
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} [mm]	20	20	20
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} [mm]	25	20	25
Par nominal aplicado, T [Nm]	50	50	50
Distancia entre apoyos, L [mm]	100	100	100
Posición de montaje de los engranajes, z_g [mm]	40	40	40

De los modelos propuestos, uno no contempla simplificaciones significativas de las geometrías que conforman los modelos de elementos finitos analizados (modelo *FEM0*). Como consecuencia, la precisión de los resultados obtenidos dependerá, principalmente, del grado de refinamiento y de la calidad de la malla de elementos finitos con la que se discretizan las geometrías estudiadas. Aunque es previsible que el coste computacional asociado a este modelo de elementos finitos sea elevado, el hecho de que no contemple simplificaciones en las geometrías analizadas permitirá que sea utilizado como modelo de referencia en comparaciones con los otros modelos propuestos.

El resto de modelos de elementos finitos propuestos (*FEM1*, *FEM2.1* y *FEM2.2*), se basan en un conjunto de simplificaciones que permitirán reducir el coste computacional asociado al modelo de elementos finitos *FEM0*. No obstante, esta reducción de coste computacional tendrá asociada una reducción de la precisión de los resultados obtenidos con estos modelos, que dependerá, principalmente, del grado de cumplimiento de las hipótesis en las que se basan las simplificaciones realizadas.

En esta apartado se realizará una comparación de los distintos modelos de elementos finitos presentados en este capítulo para el análisis tensional de transmisiones por engranaje. La investigación se realiza considerando tres casos de estudio distintos, basados en el modelo físico mostrado en la figura 1.13, y cuyos datos de diseño se resumen en la tabla 4.2. El estudio se ha realizado considerando una transmisión de engranajes cilíndricos rectos, aunque los métodos descritos son aplicables a cualquier tipo de engranaje.

El caso de estudio I corresponde a un caso estándar de diseño. El caso de estudio II corresponde a un caso de diseño donde la deformación torsional de la geometría del piñón tendrá una gran influencia sobre el estado tensional resultante, puesto que el cociente entre ancho de cara y diámetro de paso es elevado. Por último, el caso de diseño III

TABLA 4.3: Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos

Magnitudes	Piñón	Rueda
Nodos en dirección longitudinal	65	65
Nodos en la parte inferior del anillo	1	1
Nodos en la parte superior del anillo	2	2
Nodos en el redondeo	4	4
Nodos en la dirección del perfil	35	35
Punto de posicionamiento	1.2	1.2

TABLA 4.4: Tamaño de los modelos de elementos finitos propuestos para cada caso de estudio

Caso	<i>FEM0</i>		<i>FEM1</i>		<i>FEM2</i>	
	Nodos	Elementos	Nodos	Elementos	Nodos	Elementos
I	661450	623148	127648	105548	127648	105548
II	547978	513072	127648	105548	127648	105548
III	774922	733224	127648	105548	127648	105548

corresponde a un caso de diseño donde la deformación torsional tendrá un bajo impacto sobre el estado tensional de la transmisión, y por tanto, será despreciable.

Los parámetros que definen la densidad de la malla de los distintos modelos de elementos finitos (ver figura 4.6) se detallan en la tabla 4.3. Considerando un modelo de elementos finitos con tres parejas de dientes, estos parámetros de mallado implican la presencia de 63717 nodos y 52668 elementos en la geometría de contacto del piñón y 63717 nodos y 52668 elementos en la geometría de contacto de la rueda.

La totalidad de nodos y elementos considerados en cada uno de los modelos de elementos finitos de los distintos casos estudiados se resume en la tabla 4.4. Se muestra un valor único (*FEM2*) para los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2* puesto que el número de nodos y elementos del modelo es el mismo en ambos casos, debido a que la única diferencia entre ellos reside en las propiedades asignadas a los elementos finitos de tipo viga que conforman el eje. Se puede observar como en todos los casos de estudio el modelo de elementos finitos *FEM0* tiene un mayor tamaño, en términos de número de nodos y elementos, que el resto de los modelos. Esto se debe a la necesidad de mallar con elementos sólidos tridimensionales los volúmenes de las geometrías de los ejes y de los cuerpos de los engranajes. Esta necesidad hace que el número de nodos y de elementos del modelo *FEM0* también varíe en función del volumen a mallar, mientras que en los modelos *FEM1* y *FEM2* el número de nodos y elementos permanece constante en todos los casos.

TABLA 4.5: Condiciones de contorno aplicadas a los modelos de elementos finitos

Nodo	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
A_1	R	R	R	L	L	L
B_1	R	R	L	L	L	L
A_2	R	R	R	L	L	L
B_2	R	R	L	L	L	R

(R=Restringido, L=Libre)

Las condiciones de contorno aplicadas en los modelos de elementos finitos se resumen en la tabla 4.5. Las variables u_x , u_y y u_z hacen referencia a los grados de libertad de traslación en cada uno de los ejes del sistema global de coordenadas. Las variables θ_x , θ_y y θ_z hacen referencia a los grados de libertad de rotación en dichos ejes.

En los nodos A_1 y A_2 se restringen todos los movimientos de traslación, mientras que en los nodos B_1 y B_2 únicamente se restringen aquellas translaciones en el plano transversal al eje, dejando el movimiento axial libre. Los movimientos de rotación se dejan libres en todos los apoyos, excepto la rotación θ_z del nodo B_2 , que restringe el giro de la transmisión. De esta manera se simula que la transmisión está instalada sobre rodamientos autoalineantes. Se considera un par torsor de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ aplicado sobre el nodo A_1 .

Los diferentes casos de estudio se han investigado considerando dos ciclos completos de engrane, correspondientes a una rotación del piñón sobre el eje de magnitud θ , cuyo valor se define mediante la ecuación 4.10. Se han considerado 21 posiciones de análisis, uniformemente espaciadas a lo largo de los dos ciclos de engrane.

La figura 4.19 muestra las distribuciones de presiones de contacto a partir del análisis de los distintos modelos de elementos finitos presentados anteriormente, para el caso de estudio I, cuando la pareja de dientes $T^{(0)}$ contacta en la línea de paso ($i = 11$).

En la figura 4.19a, correspondiente a los resultados obtenidos mediante el modelo $FEM0$, se puede observar que se produce una concentración de las presiones de contacto en la zona anterior del diente, donde la presión de contacto alcanza un valor de 1836 MPa . Este fenómeno se repite en los resultados obtenidos a partir de los modelos $FEM1$ (figura 4.19b), $FEM2.1$ (figura 4.19c) y $FEM2.2$ (figura 4.19d). Mientras que los modelos $FEM2.1$ y $FEM2.2$ los resultados obtenidos son muy similares al modelo de referencia ($FEM0$), el modelo $FEM1$ predice una magnitud inferior para la presión de contacto máxima, debido a que este modelo no considera el efecto de la torsión de la geometría del engranaje. Como consecuencia de las superficies rígidas que envuelven a las geometrías de contacto en el modelo $FEM1$, estas geometrías presentan un comportamiento más rígido que el resto de modelos, que tiende a favorecer un mejor reparto de

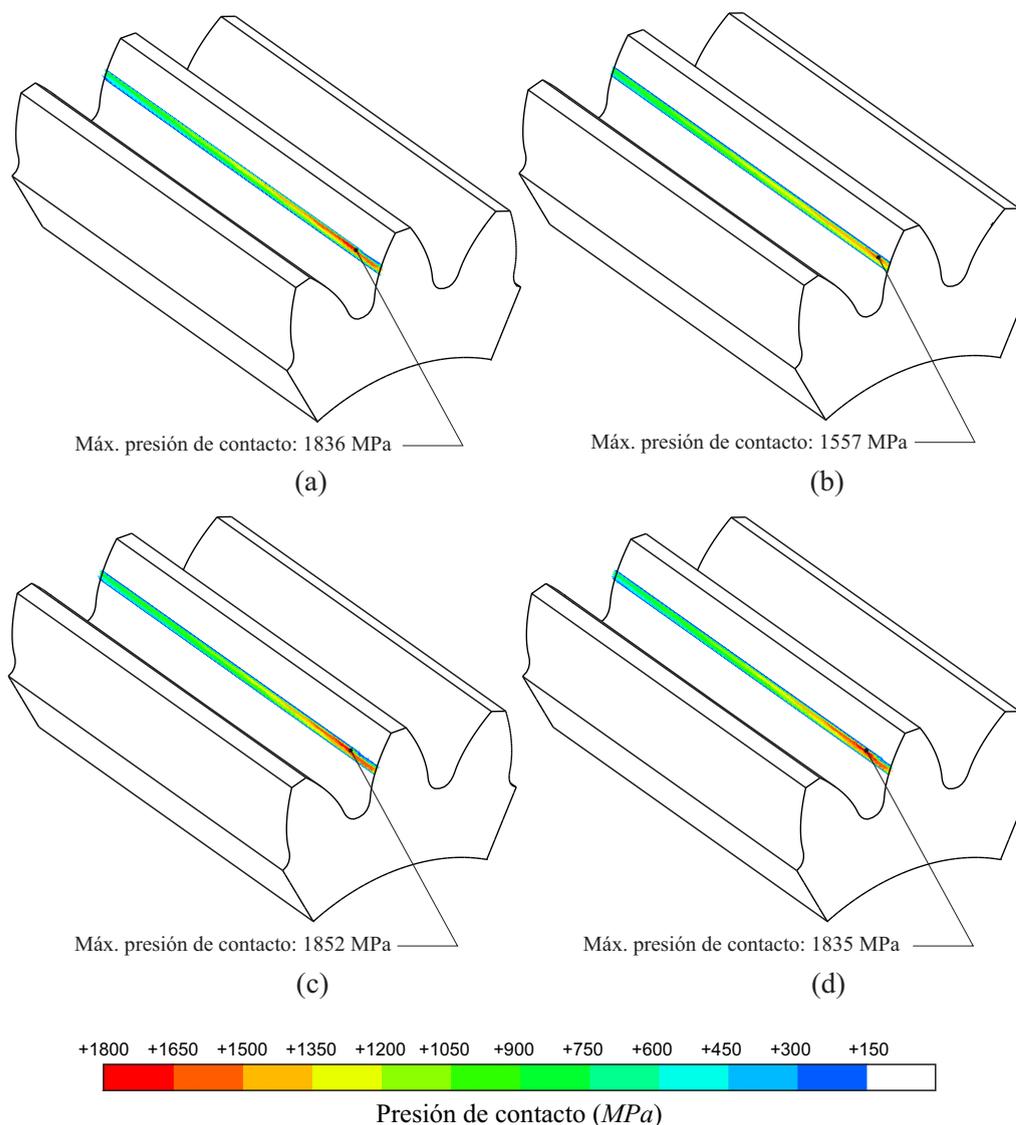


FIGURA 4.19: Formación del contacto y distribución de presiones de contacto para la posición $i = 11$ del caso I obtenida según (a) modelo $FEM0$, (b) modelo $FEM1$, (c) modelo $FEM2.1$ y (d) modelo $FEM2.2$

las fuerzas de contacto en la dirección longitudinal del diente, reduciendo de esta manera los valores máximos de presión de contacto.

La evolución de la presión máxima de contacto a través de las posiciones de contacto investigadas del caso de estudio I se muestra en la figura 4.20. Se puede observar como los modelos $FEM2.1$ y $FEM2.2$ presentan un buen ajuste al modelo de referencia $FEM0$ a lo largo de la mayoría de las posiciones de contacto investigadas. Por el contrario, el modelo $FEM1$ presenta un peor ajuste en todo el ciclo de engrane, siguiendo la tendencia observada en la figura 4.19 para la posición $i = 11$, y ofreciendo presiones de contacto más bajas en todas las posiciones de contacto investigadas.

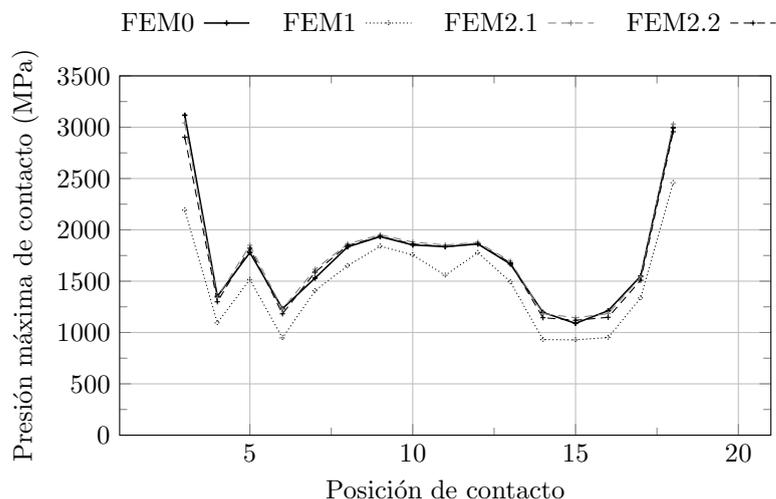


FIGURA 4.20: Evolución de la presión máxima de contacto en los modelos de elementos finitos del caso de estudio I

La figura 4.21 muestra la función de intensidad de carga, obtenida mediante el procedimiento descrito en el apartado 4.8.2, para el caso de estudio I, cuando la pareja de dientes $T^{(0)}$ contacta en la línea de paso ($i = 11$). Suponiendo un entorno ideal, sin tener en cuenta posibles desalineaciones iniciales del engrane, la función de intensidad de carga debería tener un valor constante de 184 N/mm a lo largo de todo el ancho de cara del diente. En cambio, se observa en la función obtenida a partir del modelo $FEM0$ que esta distribución de carga no es uniforme a lo largo del ancho de cara, debido a que las deformaciones elásticas de los elementos que componen la transmisión desalinean el engrane. El uso de los modelos de elementos finitos $FEM2.1$ y $FEM2.2$ lleva a funciones de intensidad de carga muy similares a la que se obtienen utilizando el modelo $FEM0$. En cambio, la función obtenida mediante el modelo $FEM1$ presenta una desviación mayor con respecto a los otros modelos, principalmente debido a que no contempla los efectos derivados de la torsión del cuerpo del engranaje.

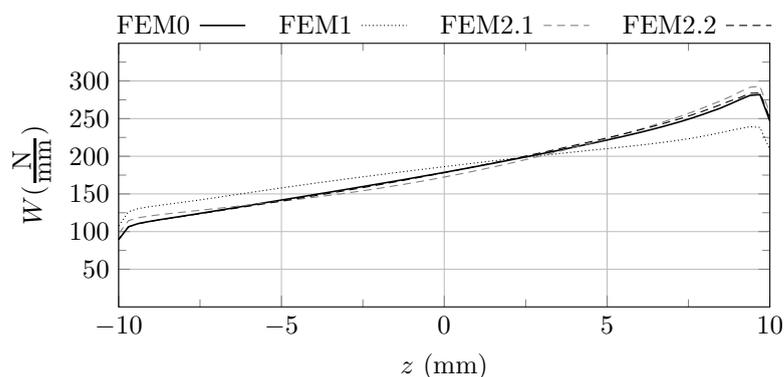


FIGURA 4.21: Función de intensidad de carga en la posición de análisis $i = 11$ de los distintos modelos de elementos finitos del caso de estudio I

Las funciones de intensidad de carga para la posición de contacto $i = 11$ de los casos

de estudio II y III se muestran en la figura 4.22. En los resultados obtenidos para el caso de estudio II (figura 4.22a) se observa como los modelos $FEM2.1$ y $FEM2.2$ ofrecen un buen ajuste al modelo de referencia ($FEM0$). En cambio, la función obtenida mediante el modelo $FEM1$ muestra grandes diferencias entre éste y el resto de modelos estudiados. Esta diferencia se debe a que el modelo $FEM1$ no tiene en cuenta los efectos derivados de la torsión del cuerpo del engranaje, que en el caso de estudio II tiene una gran influencia.

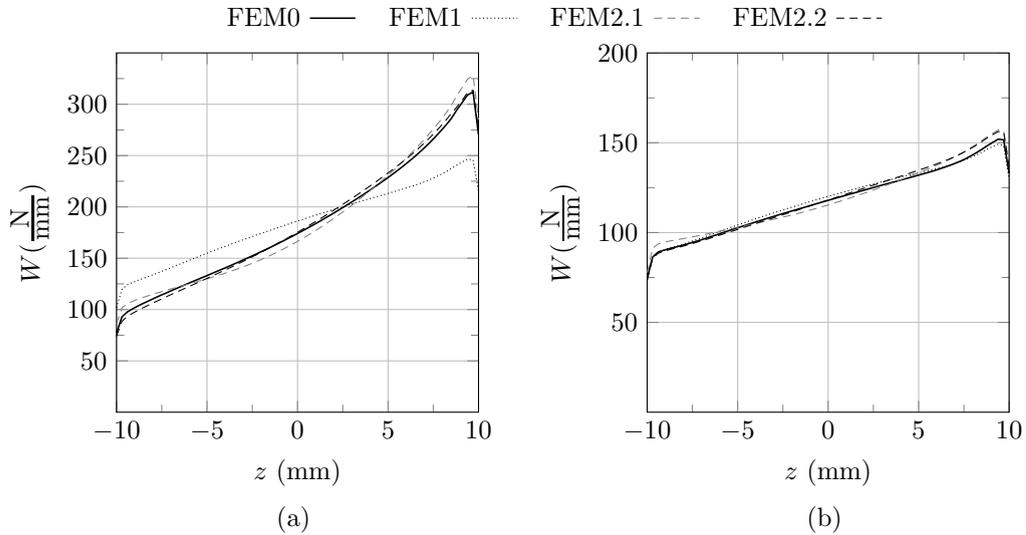


FIGURA 4.22: Función de intensidad de carga en la posición de análisis $i = 11$ de los modelos de elementos finitos del (a) caso de estudio II y (b) caso de estudio III

Por otra parte, en la figura 4.22b se muestran las funciones de intensidad de carga correspondientes al caso de estudio III. En este caso, suponiendo un entorno ideal sin desalineaciones iniciales del engrane, la función de intensidad de carga debería poseer un valor constante de 119 N/mm . Debido al mayor cociente entre el diámetro primitivo del piñón y el ancho de cara, la deformación por torsión del cuerpo del piñón es menor, y en consecuencia la función calculada mediante el modelo $FEM1$ tiene un mayor parecido con la que se obtiene con los modelos $FEM0$, $FEM2.1$ y $FEM2.2$. Además, debido al incremento de rigidez en los ejes, que reduce la desalineación entre los engranajes, las funciones de intensidad de carga tienen una distribución más regular, alcanzándose valores máximos de intensidad de carga de menor magnitud que en los otros casos de estudio.

Para obtener una medida del error cometido en el cálculo de las funciones de intensidad de carga, se define el error relativo entre esas funciones como el área comprendida entre la función a comparar y la función de referencia, que en este caso es la obtenida mediante el modelo $FEM0$. Para hacer este parámetro adimensional, esta área se divide entre el área bajo la función de referencia. De acuerdo con esta definición, la tabla 4.6 muestra los errores relativos entre los modelos $FEM1$, $FEM2.1$ y $FEM2.2$ y el modelo de

TABLA 4.6: Error relativo entre funciones de distribución longitudinal de la carga

Caso	<i>FEM1</i>	<i>FEM2.1</i>	<i>FEM2.2</i>
I	8.47%	2.67%	0.90%
II	11.98%	3.32%	1.65%
III	1.27%	2.08%	1.37%

referencia *FEM0*. Se puede observar que los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2* cometen errores pequeños (por debajo del 4%) en los tres casos, indicando que el ajuste entre estas curvas es bueno en todo su dominio. En cambio, el modelo *FEM1* solo ofrece buen ajuste en el caso III, en el que la influencia de la torsión de los engranajes es menor.

La figura 4.23 muestra la evolución del factor de reparto de carga, obtenido mediante el procedimiento descrito en el apartado 4.8.3, para el caso de estudio I a lo largo de las 21 posiciones de contacto investigadas. Todos los modelos sitúan el primer punto de contacto en un único diente (*LPSTC*) en la posición de contacto $i = 9$, y el último punto de contacto en un único diente (*HPSTC*) en la posición de contacto $i = 12$. El modelo *FEM1* ofrece un elevado grado de aproximación para este caso en todo el ciclo de engrane, mientras que los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2* presentan cierta desviación en las zonas donde el *LSF* es inferior a 1.

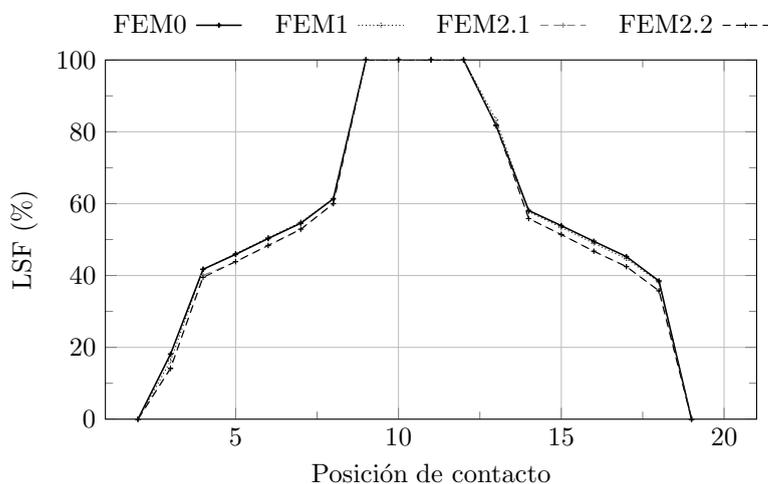


FIGURA 4.23: Evolución del factor de reparto de carga para el caso de estudio I

Por otra parte, la tabla 4.7 muestra los valores del factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-FEM}$ para cada caso de diseño, obtenidos según el procedimiento descrito en el apartado 4.8.4 en la posición de contacto $i = 11$. Se observa como para este caso de estudio el modelo *FEM2.2* proporciona los valores más cercanos a los del modelo de referencia *FEM0*. Por el contrario, el modelo *FEM2.1* proporciona valores más elevados, mientras que el modelo *FEM1* proporciona valores de $K_{H\beta-FEM}$ más bajos que el modelo *FEM0*.

TABLA 4.7: Factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-FEM}$

Caso	$FEM0$	$FEM1$	$FEM2.1$	$FEM2.2$
I	1.54	1.30	1.59	1.54
II	1.70	1.34	1.78	1.70
III	1.29	1.26	1.32	1.32

La figura 4.24 muestra la distribución de tensiones de von Mises en el diente del piñón para la posición de contacto $i = 11$ del caso de estudio I, obtenida a partir del análisis de los distintos modelos de elementos finitos propuestos.

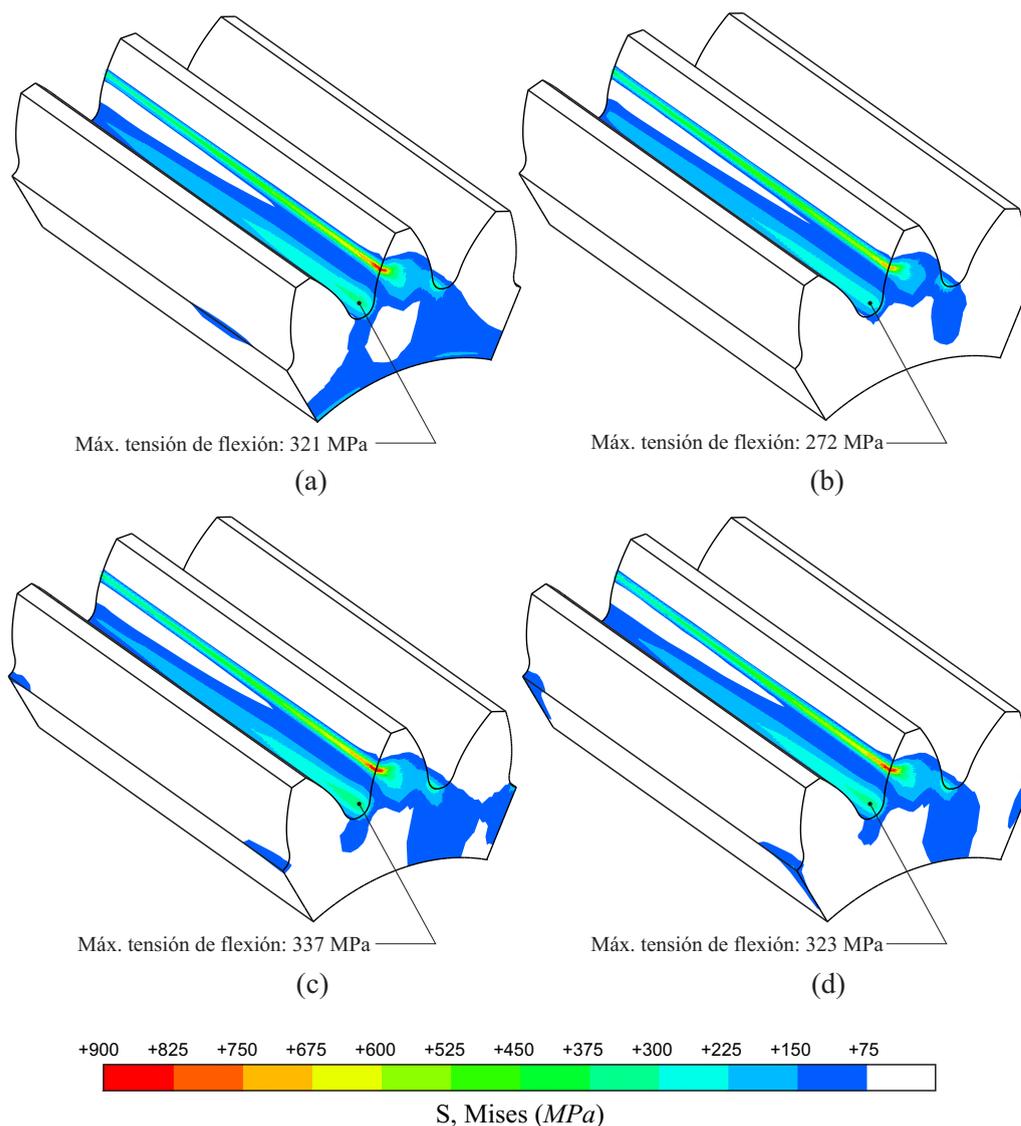


FIGURA 4.24: Distribución de tensiones de von Mises en la geometría del piñón para la posición $i = 11$ del caso I obtenida según (a) modelo $FEM0$, (b) modelo $FEM1$, (c) modelo $FEM2.1$ y (d) modelo $FEM2.2$

Se puede apreciar en la figura 4.24a que el modelo $FEM0$ predice una distribución

de tensiones de von Mises correspondiente a una distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara del diente, repercutiendo en zonas elevadas de tensión en su zona anterior. Este comportamiento se puede observar también en las imágenes correspondientes a los modelos *FEM1* (figura 4.24b), *FEM2.1* (figura 4.24c) y *FEM2.2* (figura 4.24d).

Los niveles máximos de tensión de flexión en la base del diente alcanzados con el modelo *FEM1* son inferiores a los alcanzados por los otros modelos, debido a que en este caso no se tienen en cuenta los incrementos de tensión provocados por la torsión de los engranajes. Por otra parte, los valores máximos obtenidos con los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2* son similares a los obtenidos con el modelo *FEM0*, aunque se aprecian diferencias en las distribuciones de tensión de niveles más bajos.

La evolución de estas tensiones máximas de flexión a lo largo de las posiciones de contacto investigadas se muestra en la figura 4.25. En general, y como ocurre en en el caso de las presiones máximas de contacto (ver figura 4.20), los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2* son los que presentan un mejor ajuste al modelo de referencia a lo largo de todas las posiciones de contacto investigadas. El modelo *FEM1* presenta un peor ajuste en general, obteniéndose a partir de él tensiones de flexión inferiores a las del modelo de referencia en todo el ciclo de engrane.

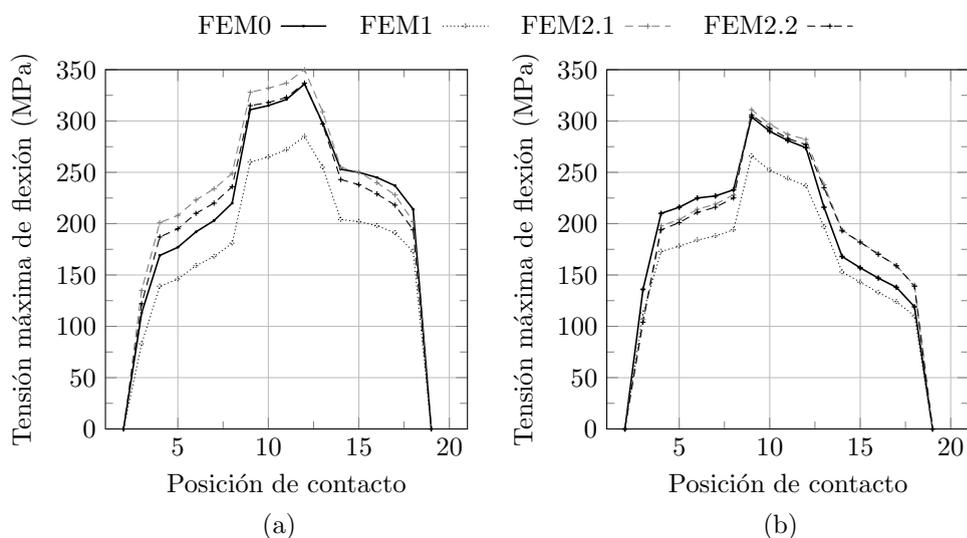


FIGURA 4.25: Evolución de la tensión máxima de flexión en los modelos de elementos finitos del caso de estudio I en la base del diente (a) del piñón y (b) de la rueda

Por otra parte, se aprecia como los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2* predicen tensiones de flexión en la base del diente del piñón más elevadas que las que se producen en el modelo de referencia para las posiciones iniciales de contacto, y tensiones de flexión más bajas en las posiciones finales de contacto. Este efecto se invierte en la evolución de las tensiones en la rueda.

En las posiciones de contacto centrales, cuando hay únicamente un diente en contacto y las tensiones son más elevadas, el mejor ajuste se produce utilizando el modelo *FEM2.2*, puesto que el modelo *FEM2.1*, a pesar de ofrecer resultados más precisos que el modelo *FEM1*, ofrece peores resultados que el modelo *FEM2.1*.

La figura 4.26a muestra la función del error de transmisión $\Delta\phi_i$, calculado mediante el procedimiento descrito en el apartado 4.8.1, a lo largo de las posiciones de contacto estudiadas para el caso de estudio I. En este caso la función del error de transmisión en ausencia de carga ($\Delta\phi_i^{(u)}$) es nula, debido a la acción conjugada de las superficies de engranaje sin modificar, por lo que toda la contribución a la función del error de transmisión se debe al error de transmisión bajo carga ($\Delta\phi_i^{(l)}$).

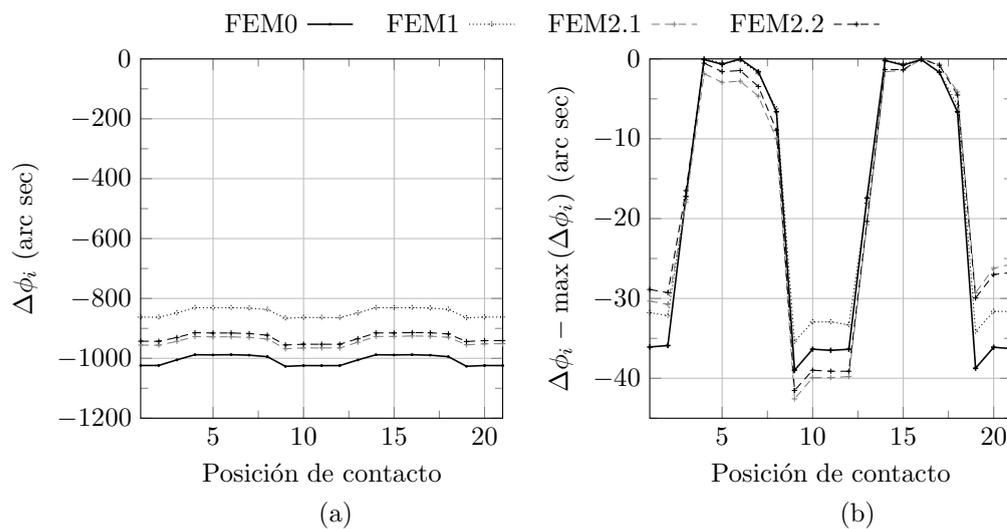


FIGURA 4.26: Función de errores de transmisión en los distintos modelos de elementos finitos

La figura 4.26b muestra la función pico a pico del error de transmisión ($\Delta\phi_i$) a lo largo de las posiciones de contacto investigadas para el caso de estudio I. Se puede observar que el modelo *FEM0* ofrece un alto grado de repetitibilidad a lo largo de los dos ciclos de engrane estudiados, puesto que el valor de la función se repite cada ciclo de engrane (cada 11 posiciones de contacto estudiadas). Por otra parte, se observa que el resto de modelos presenta irregularidades en este aspecto, especialmente en las posiciones de contacto iniciales y finales, cuando la carga recae principalmente en los dientes $T^{(-1)}$ y $T^{(+1)}$. Esto se debe principalmente a la diferencia de rigidez entre los distintos dientes, provocada por la presencia de superficies o aristas rígidas en los modelos de elementos finitos.

La figura 4.27 muestra la evolución de las desalineaciones de la rueda con respecto al piñón para el caso de estudio I, a lo largo de todas las posiciones de contacto investigadas. Por lo que refiere a las desalineaciones angulares, mostradas en las figuras 4.27a y 4.27b,

alcanzan sus valores máximos en aquellas posiciones donde el contacto recae en un único diente. La desalineación angular calculada mediante el modelo *FEM1* es inferior a la calculada por los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2*, que a su vez son inferiores a la obtenida a partir del modelo *FEM0*.

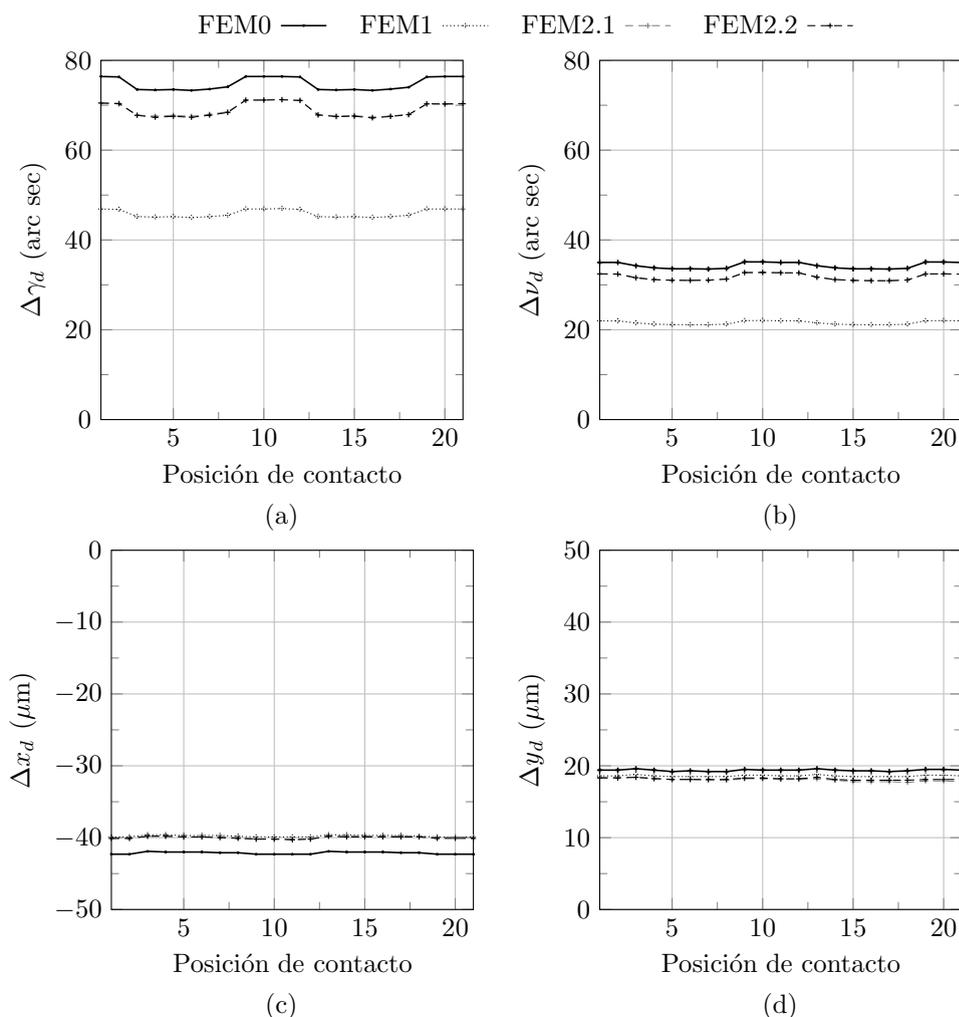


FIGURA 4.27: Evolución de las desalineaciones en los distintos modelos de elementos finitos

La separación de la rueda con respecto al piñón, mostrada en las figuras 4.27c y 4.27d, muestra que su valor permanece prácticamente constante en todas las posiciones de contacto investigadas, independientemente del modelo de elementos finitos utilizado para calcularla. En este caso, los modelos *FEM1*, *FEM2.1* y *FEM2.2* proporcionan los mismos valores de desalineación, siendo su comportamiento más rígido que el del modelo *FEM0*.

Por último, la tabla 4.8 muestra un resumen del tiempo empleado para resolver los casos de estudio planteados con los distintos modelos de elementos finitos. Los valores mostrados corresponden a la media aritmética del tiempo invertido para resolver las 21 posiciones de análisis en cada caso, en una estación de trabajo convencional. Los

TABLA 4.8: Tiempo de cálculo medio empleado para resolver los casos de estudio planteados con los distintos modelos de elementos finitos

Caso	<i>FEM0</i>	<i>FEM1</i>	<i>FEM2.1</i>	<i>FEM2.2</i>
I	9348 s	149 s	153 s	168 s
II	4994 s	131 s	132 s	141 s
III	14034 s	154 s	158 s	166 s

casos de estudio resueltos con el modelo *FEM0* son los que más tiempo de cálculo han necesitado. Los modelos *FEM1*, *FEM2.1* y *FEM2.2* requieren de un tiempo similar para resolver los modelos de los distintos casos de estudio. En el peor de los casos, el tiempo de cálculo empleado por estos modelos es de varios órdenes de magnitud inferior al empleado por el modelo *FEM0* para resolver el mismo caso de estudio.

Se puede observar que el tiempo empleado por el modelo *FEM0* depende de las características de la transmisión empleada, mientras que en los otros modelos el tiempo de cálculo permanece prácticamente constante.

4.9.1 Influencia del número de dientes considerados en los modelos de elementos finitos

El número de parejas de dientes considerados en los modelos de elementos finitos *FEM2.1* y *FEM2.2* puede tener cierta influencia sobre los resultados obtenidos a partir de su análisis. Por ese motivo, se ha investigado cómo varían los resultados obtenidos a partir de los modelos de elementos finitos al considerar 3 y 5 parejas de dientes en el caso de estudio I, propuesto en la tabla 4.2.

Las condiciones de contorno expuestas en la tabla 4.5 se mantienen, así como los parámetros de mallado detallados en la tabla 4.3. Como consecuencia del incremento de dientes, los modelos de elementos finitos incrementan el número de nodos en 84420 nodos y el número de elementos en 70224 elementos.

La figura 4.28 muestra la función de intensidad de carga obtenida para la posición de contacto $i = 11$ según el modelo de elementos finitos *FEM2.1* (figura 4.28a) y el modelo de elementos finitos *FEM2.2* (figura 4.28b). En ambos casos se muestran las curvas obtenidas mediante los modelos de elementos finitos que consideran 3 y 5 dientes, así como la curva obtenida mediante el modelo de referencia *FEM0*. En general, se observa que en este caso utilizar modelos de elementos finitos con 3 o 5 parejas de dientes tiene un impacto menor sobre las funciones de intensidad de carga. No obstante, se aprecia como los modelos de elementos finitos que contemplan 5 dientes producen valores máximos de

intensidad de carga levemente inferiores a los obtenidos con los modelos de 3 dientes. Esta diferencia se ve más acentuada en los resultados obtenidos a partir del modelo *FEM2.1* que en los obtenidos a partir del modelo *FEM2.2*.

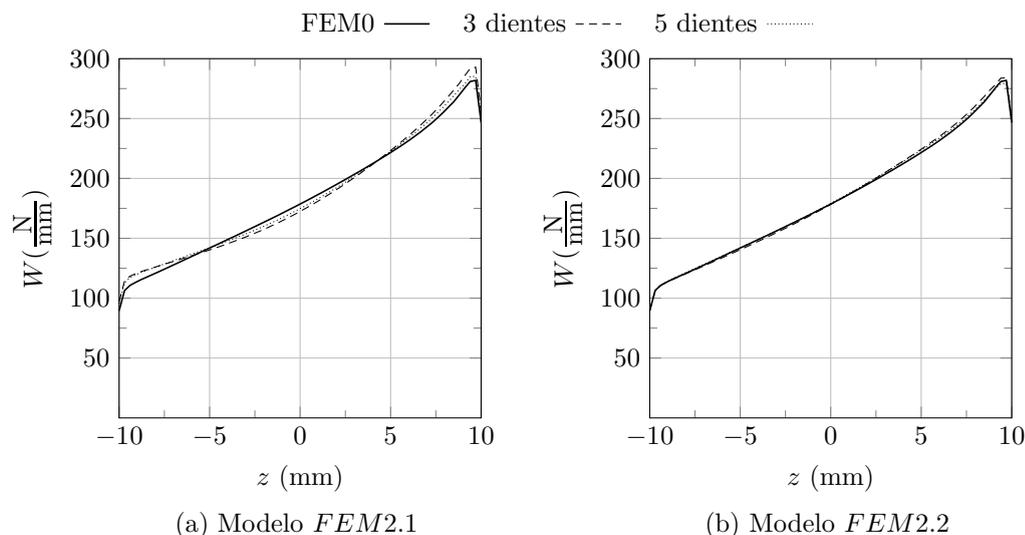


FIGURA 4.28: Función de intensidad de carga en la posición de contacto $i = 11$ considerando modelos de tres y cinco parejas de dientes.

La figura 4.29 muestra la evolución de las presiones de contacto obtenidas a partir del modelo de elementos finitos *FEM2.1* (figuras 4.29a) y del modelo de elementos finitos *FEM2.2* (figuras 4.29b). En ambos casos se muestran las curvas obtenidas mediante los modelos de elementos finitos que consideran 3 y 5 dientes, así como la curva obtenida mediante el modelo de referencia *FEM0*. Los resultados obtenidos a partir de los modelos de 3 y 5 dientes muestran que el número de dientes considerados en los modelos de elementos finitos tienen un impacto menor sobre los resultados de presión de contacto.

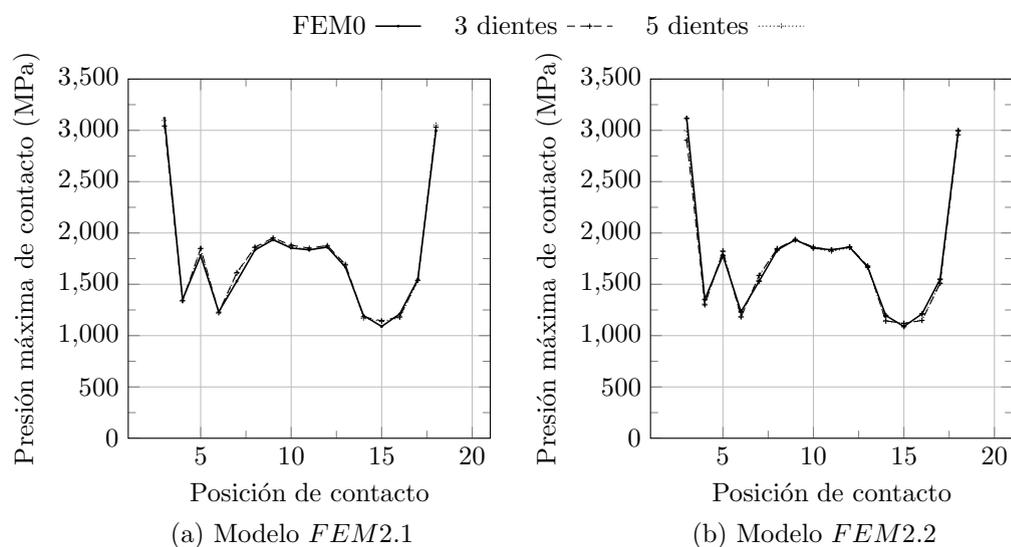


FIGURA 4.29: Evolución de las presiones máximas de contacto al considerar modelos de tres y cinco parejas de dientes.

La figura 4.30 muestra la evolución de las tensiones de flexión en el piñón y la rueda obtenidas a partir del modelo de elementos finitos $FEM2.1$ (figuras 4.30a y 4.30b) y del modelo de elementos finitos $FEM2.2$ (figuras 4.30c y 4.30d). En ambos casos se muestran las curvas obtenidas mediante los modelos de elementos finitos que consideran 3 y 5 dientes, así como la curva obtenida mediante el modelo de referencia $FEM0$. En este caso sí aparecen diferencias sustanciales entre los resultados obtenidos al considerar 3 o 5 dientes. En general se observa que los modelos de 5 dientes predicen tensiones de flexión más similares a las obtenidas a partir del modelo de referencia $FEM0$.

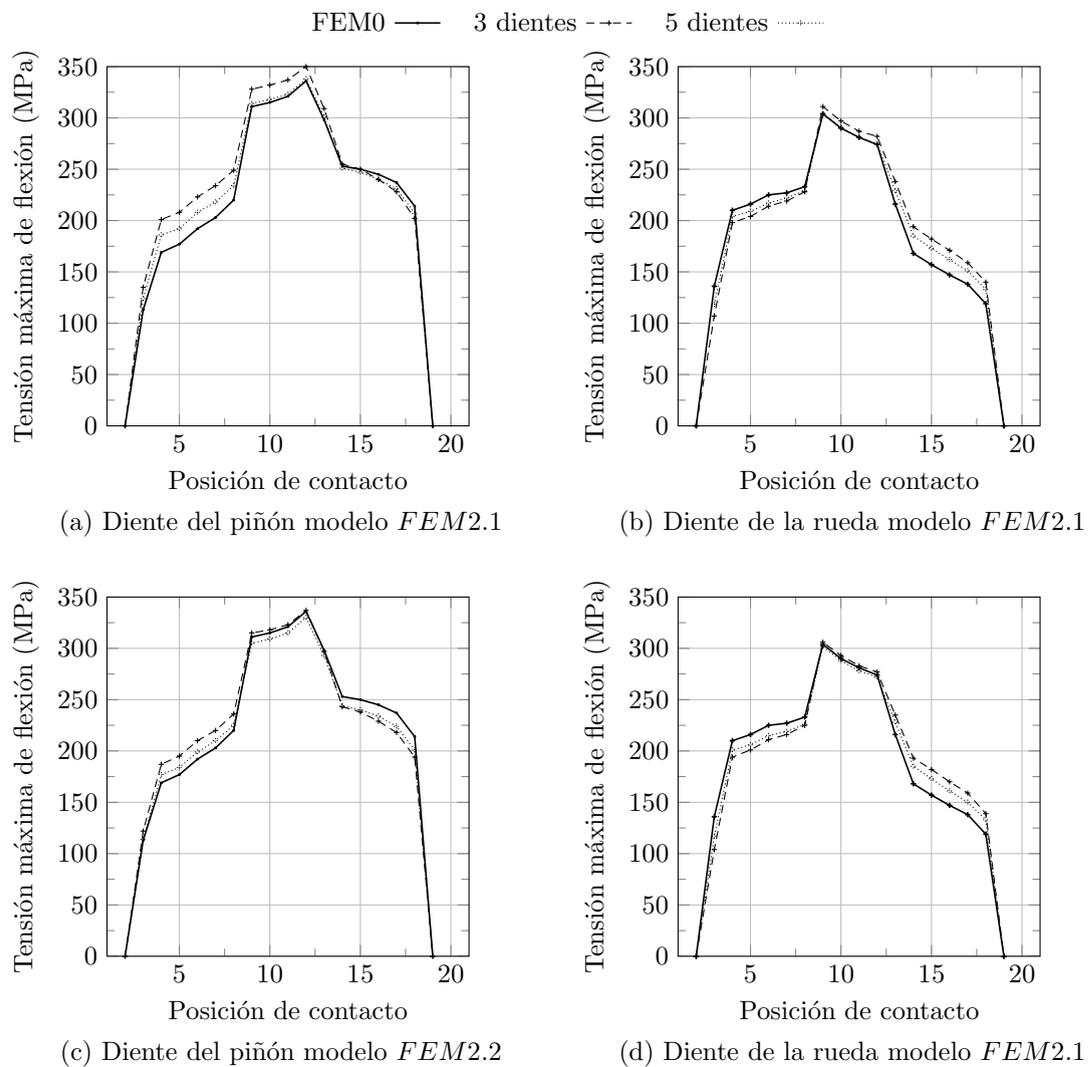


FIGURA 4.30: Evolución de la tensión máxima de flexión al considerar modelos de tres y cinco parejas de dientes.

La figura 4.31 muestra las funciones del error de transmisión obtenidas a partir del modelo de elementos finitos $FEM2.1$ (figuras 4.31a) y del modelo de elementos finitos $FEM2.2$ (figuras 4.31b). En ambos casos se muestran las curvas obtenidas mediante los modelos de elementos finitos que consideran 3 y 5 dientes, así como la curva obtenida mediante el modelo de referencia $FEM0$. Se puede observar como en ambos casos

se obtiene un mejor ajuste a la función de referencia obtenida con el modelo *FEM0* cuando se consideran 5 parejas de dientes en los modelos de elementos finitos. Las funciones de error de transmisión obtenidas en estos modelos ofrecen, además, una mejor repetitibilidad entre ciclos de engrane, debido a que la rigidez de los dientes $T^{(-1)}$, $T^{(0)}$ y $T^{(+1)}$ es más similar, al no verse influenciada directamente por la presencia de aristas rígidas.

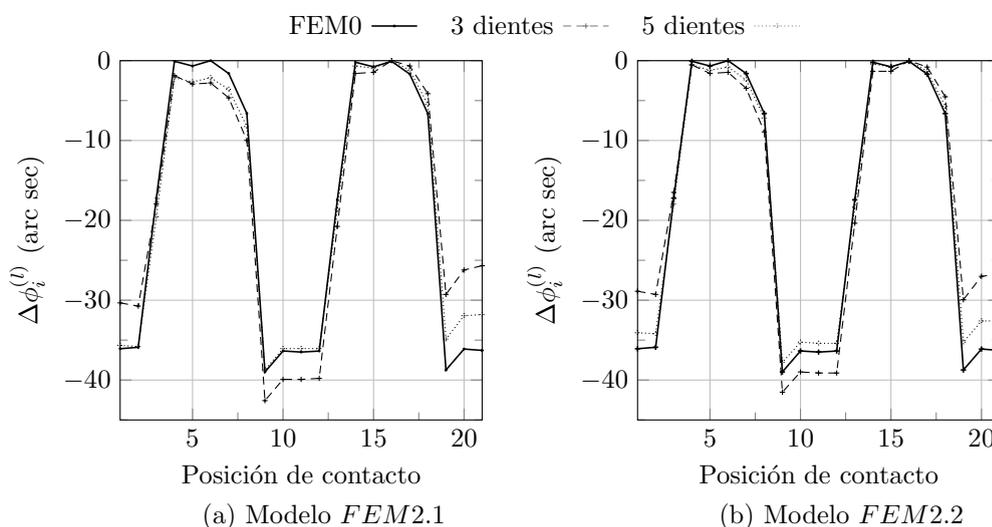


FIGURA 4.31: Evolución de la función de error de transmisión bajo carga al considerar modelos de tres y cinco dientes.

En cuanto a tiempos de cálculo, se observa que los tiempos de cálculo empleados para resolver los modelos de elementos finitos de 5 dientes es, en general, un 76% superior al utilizado para resolver los modelos de 3 dientes, debido a la presencia de un mayor número de nodos y de elementos en los modelos. Aún así, el tiempo sigue siendo varios órdenes de magnitud inferior al empleado para resolver el modelo *FEM0*.

A la vista de estos resultados, se puede decir que cuando los resultados de interés están relacionados con la distribución de presiones de contacto o con la desalineación de los ejes, es suficiente con considerar tres parejas de dientes en los modelos de elementos finitos, obteniendo de esta forma un beneficio en el coste computacional de los mismos. En cambio, si los resultados de interés están relacionados con las tensiones de flexión o los errores de transmisión, es interesante utilizar modelos con cinco parejas de dientes para minimizar la pérdida de precisión con respecto al modelo de referencia *FEM0*.

4.10 Conclusiones

En este capítulo se han propuesto nuevos modelos de elementos finitos para el cálculo tensional de transmisiones por engranajes. A diferencia de los modelos utilizados hasta

TABLA 4.9: Resumen de los modelos de elementos finitos de la transmisión propuestos

Característica	<i>FEM0</i>	<i>FEM1</i>	<i>FEM2.1</i>	<i>FEM2.2</i>
Modelización geometría de contacto	3D (realista)	3D (realista)	3D (realista)	3D (realista)
Modelización ejes	3D (realista)	1D (Timoshenko)	1D (Timoshenko)	1D (Timoshenko)
Modelización unión eje-engranaje	3D (realista)	Superficie rígida	Múltiples aristas rígidas	Múltiples aristas rígidas
Evolución propiedades eje	3D (realista)	Cambio brusco	Cambio brusco	Cambio progresivo

ahora, los nuevos modelos no se limitan a considerar las geometrías de los engranajes, sino que también tienen en cuenta a los ejes que los soportan. Esto permite tener en cuenta el comportamiento de dichos ejes en los estudios de la transmisión, pues los efectos derivados de sus deformaciones pueden tener un impacto importante sobre el estado tensional de los engranajes.

Se han propuesto cuatro modelos de elementos finitos distintos, cuyos detalles se resumen en la tabla 4.9. Todos ellos comparten la forma en la que se modelizan las geometrías de contacto, pero difieren en la forma en la que se considera el comportamiento de los ejes.

El modelo *FEM0* considera los ejes mediante su modelizado utilizando elementos finitos sólidos tridimensionales. En este modelo, no se realizan modificaciones significativas, y por lo tanto, la calidad de los resultados obtenidos con él dependerá principalmente del refinamiento de la malla de elementos finitos.

Los modelos de elementos finitos *FEM1* y *FEM2* son modelos simplificados, cuyo propósito es reducir los tiempos de cálculo minimizando la pérdida en la precisión de los resultados:

- (i) El modelo *FEM1* incluye a los ejes utilizando elementos finitos de tipo viga. De esta manera es posible considerar la deformación de los ejes. Una superficie rígida acopla los movimientos de las geometrías de contacto con sus respectivos ejes. Esta superficie rígida impide que las geometrías de contacto de los engranajes se retuerzan.
- (ii) El modelo *FEM2* también incluye a los ejes utilizando elementos finitos de viga. En este caso, las geometrías de contacto se unen al eje mediante un conjunto de aristas rígidas. De esta manera, se permite que las geometrías de los engranajes

se retuerzan, considerando de esta forma, además de la deformación de los ejes, la deformación torsional de los engranajes.

Las consideraciones tenidas en cuenta para definir las propiedades de la sección transversal de los elementos viga mediante los que se modeliza la porción del eje bajo el engranaje en los modelos *FEM1* y *FEM2* pueden tener cierto impacto en los resultados obtenidos. Por este motivo, se han propuesto dos criterios distintos para definir estas propiedades, que llevan a los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2*:

- (i) En el modelo *FEM2.1* se han seguido las recomendaciones propuestas por la norma ISO-6336, y la porción del eje bajo el engranaje se ha modelizado considerando un diámetro constante igual a la semisuma del diámetro del eje y el diámetro primitivo del engranaje instalado sobre dicho eje.
- (ii) En el modelo *FEM2.2* se han aplicado las conclusiones obtenidas del capítulo 3, y se han considerado diámetros distintos para definir las propiedades de los elementos viga que rigen el comportamiento frente a esfuerzos de flexión y frente a esfuerzos por cortante.

Se han propuesto métodos que permiten obtener parámetros importantes para el diseñador de engranajes a partir de los resultados obtenidos del análisis de los modelos de elementos finitos propuestos. Estos parámetros son:

- (i) El error de transmisión en ausencia de carga, bajo carga y total.
- (ii) La función de intensidad de carga.
- (iii) La función de reparto de carga entre dientes.
- (iv) El factor de distribución longitudinal de la carga.
- (v) La desalineación natural de los ejes.

Las capacidades de los distintos modelos de elementos finitos se han investigado considerando tres transmisiones de engranajes cilíndricos rectos distintas. A partir de la investigación realizada, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- (i) El modelo de elementos finitos *FEM0* ofrece un elevado grado de precisión, pues no incluye modificaciones significativas de la geometría analizada, pero su coste computacional es muy elevado.

- (ii) Los modelos *FEM1* y *FEM2* poseen un coste computacional inferior, pero están sujetos a simplificaciones que pueden llevar a imprecisiones en los resultados obtenidos.
- (iii) Cuando la deformación torsional de las geometrías de los engranajes no es significativa, los modelos *FEM1* y *FEM2* ofrecen resultados similares. En cambio, cuando la deformación torsional es elevada, el modelo *FEM2* ofrece resultados más parecidos a los del modelo *FEM0* que los ofrecidos por el modelo *FEM1*.
- (iv) Cuando los resultados buscados refieren a la distribución de presiones de contacto o a las desalineaciones de los engranajes, se puede conseguir un mejor tiempo computacional considerando únicamente tres parejas de dientes en los modelos de elementos finitos. Sin embargo, cuando se buscan resultados referentes a las tensiones de flexión o al error de transmisión, los modelos de cinco parejas de dientes son más apropiados.

Por lo que refiere a los modelos *FEM2.1* y *FEM2.2*, en todos los casos estudiados se observa que los resultados obtenidos mediante el modelo *FEM2.2* se aproximan más a los obtenidos mediante el modelo de referencia (*FEM0*) que los obtenidos mediante el modelo *FEM2.1*.

Los resultados expuestos en este capítulo están incluidos en las referencias [128, 142, 143].

Capítulo 5

Modelo analítico para el análisis tensional de transmisiones por engranaje. Análisis del factor de distribución longitudinal de la carga

5.1 Introducción

Uno de los primeros problemas a los que se enfrentan los diseñadores cuando desarrollan una nueva transmisión de engranajes es encontrar un diseño que sea capaz de soportar la potencia que deberá transmitir. Generalmente, este procedimiento comprende la estimación de las tensiones a las que estarán sometidos los engranajes que componen la transmisión durante su funcionamiento, y la comprobación de que estas tensiones no superen ciertos valores límites, impuestos por la resistencia de los materiales con los que éstos se fabricarán. Este proceso requiere habitualmente de varias iteraciones hasta que se encuentra un diseño de la transmisión capaz de satisfacer los requerimientos para los que es diseñada.

En las etapas iniciales del diseño, en las que los tiempos son muy importantes y la información disponible más bien escasa, es preferible el uso de métodos de cálculo analíticos para determinar las tensiones a las que estarán sometidos los engranajes. Esto se debe a que la eficiencia computacional de estos métodos permite realizar un gran número de iteraciones de diseño en periodos cortos de tiempo. Por este motivo, los métodos

analíticos se siguen utilizando en la industria para predecir la capacidad de carga de las transmisiones de engranajes.

Generalmente, la capacidad de carga de las transmisiones se relaciona con las tensiones máximas de contacto y de flexión en la raíz del diente. Los métodos analíticos utilizados para estimar estas tensiones se basan habitualmente en la teoría de la elasticidad. Tradicionalmente, la tensión de flexión en la raíz del diente se ha estimado utilizando la metodología propuesta por Lewis [29], en la que el diente del engranaje se estudia como si fuese una viga en voladizo sometida a una carga que se supone uniforme. Por otra parte, la tensión de contacto se ha estimado utilizando la teoría de Hertz [7], simulando el contacto entre dientes de engranajes como si fuesen dos cilindros perfectamente alineados, cuyos radios coinciden con el radio de curvatura de los dientes en el diámetro de paso.

A través de los años las soluciones analíticas derivadas de estos métodos se han completado con distintos factores de influencia, que permiten tener en cuenta influencias que no se incluyen en las hipótesis iniciales de los cálculos analíticos. Por ejemplo, se han obtenido factores de corrección que permiten tener en cuenta la concentración de tensión que se produce en la raíz del diente como consecuencia del radio de entalle [6], o factores que tienen en cuenta distribuciones no uniformes de la carga que modifican las tensiones de contacto [36, 37] y de flexión, dando lugar a un gran variedad de métodos analíticos para la estimación del estado tensional de las transmisiones de engranajes.

Con el fin de unificar las distintas metodologías de cálculo utilizadas en la industria, las principales organizaciones de estandarización han elaborado guías para el diseño de engranajes basadas en el uso de factores de influencia, como la conocida norma ISO-6336 [8, 9, 11, 12, 144] o la norma AGMA-2001-D04 [10]. En estas guías, la capacidad de carga de los engranajes se relaciona con los valores máximos de tensión de contacto y de tensión de flexión en la base del diente, que al igual que en los métodos tradicionales, se estiman penalizando mediante una serie de factores de influencia los valores nominales obtenidos a partir de procedimientos analíticos. Los factores de influencia propuestos en las normas han sido objeto de investigaciones exhaustivas, especialmente en referencia a su cálculo y a su impacto sobre la capacidad de carga de los engranajes [30–32, 36–40, 63, 97, 145].

Entre los factores de influencia presentes en las formulaciones propuestas en las normas, uno de los más interés ha despertado entre los autores [36–40, 145] es el factor de distribución longitudinal de la carga, denominado $K_{H\beta}$ por la norma ISO-6336, y K_m en la norma AGMA-2001-D04. El factor de distribución longitudinal de la carga se define como el cociente entre la intensidad máxima y la intensidad media de carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes. Este factor de influencia tiene en cuenta

los efectos que se derivan de una distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes, originada por una desalineación del engrane en el plano de acción. Esta desalineación del engrane puede estar causada por las deformaciones elásticas de los engranajes, ejes, rodamientos y de la caja, así como por desviaciones en la fabricación y el montaje de los engranajes, holguras en los apoyos, efectos dinámicos, etc.

Debido a su complejidad, algunos autores han escrito guías para ayudar a los diseñadores en el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga [37, 40, 145]. Tobe [36] calculó el factor de distribución longitudinal de la carga en engranajes helicoidales desalineados. Atanasovska [39] propuso un método basado en elementos finitos para calcular el factor de distribución longitudinal de la carga, y estudió otras causas que originan variaciones en la capacidad de carga de los engranajes, como la rigidez del engrane [75], el coeficiente de adendo [74], o la carga nominal transmitida [76]. Otros han contribuido investigando como se distribuye la carga a lo largo del ancho de cara [127, 146], y han estudiado numéricamente, analíticamente o empíricamente las deformaciones elásticas de los dientes de engranaje [147, 148] y el efecto de las desviaciones de fabricación y montaje [71, 72]. No obstante, son menos los autores que han estudiado las deformaciones elásticas de los elementos que soportan a los engranajes [20, 97], y cómo éstas deformaciones influyen en la capacidad de carga de la transmisión.

Algunos de los autores mencionados anteriormente utilizan análisis bidimensionales de modelos de elementos finitos [74, 76, 147], mientras que solo unos pocos utilizan modelos de elementos finitos tridimensionales más avanzados [39, 71, 72]. Generalmente estos trabajos están focalizados en el modelizado de los engranajes y de las superficies de engrane, pero raramente tienen en cuenta el comportamiento de los ejes o de los apoyos.

Gracias a los avances propuestos en capítulos anteriores sobre la generación y el análisis de modelos de elementos finitos que tengan en cuenta el comportamiento elástico de los ejes, es posible llevar a cabo una investigación más exhaustiva sobre este factor. Los objetivos principales de esta investigación son:

- (i) Conocer en profundidad los principios e ideas que rigen el cálculo del factor de distribución longitudinal de carga.
- (ii) Comparar el factor de distribución longitudinal de la carga obtenido mediante el análisis de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión con el obtenido mediante la aplicación del método basado en factores de influencia propuesto por la norma ISO-6336.

- (iii) Investigar la influencia de la posición de montaje de los engranajes sobre los ejes, el ancho de cara de los engranajes y el diámetro y la longitud de los ejes sobre el factor de distribución longitudinal de la carga.

5.2 Fundamentos de la norma ISO-6336

La norma ISO-6336 es un compendio de documentos [8, 9, 11, 12, 144] que proporciona un sistema coherente de procedimientos para la determinación de la capacidad de carga de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales. Además, proporciona un marco dentro del cual se puede realizar una comparación razonada de distintos diseños de engranajes.

Incluye procedimientos basados en pruebas y estudios teóricos como los realizados por Hirt [149], Strasser [150] y Brossmann [151]. Los resultados obtenidos aplicando los métodos propuestos en esta norma muestran un buen grado de correlación con los obtenidos con los métodos aceptados utilizados anteriormente [152–155].

En su formulación incorpora factores de influencia que representan aquellos fenómenos conocidos que afectan al fallo por picadura y al fallo por flexión en la base del diente. Otras tipologías de fallo resultantes de concentradores de tensiones en el flanco de los dientes, astillamientos de la cabeza del diente y fallos del cuerpo del engranaje por el alma o el anclaje quedan fuera del alcance de esta norma, y deben ser analizados utilizando otros métodos de ensayo.

Está diseñada para facilitar la incorporación de nuevos conocimientos y desarrollos futuros, así como para favorecer el intercambio de la información obtenida a partir de la experiencia. Para su aplicación requiere de ingenieros experimentados y especializados en el diseño de engranajes, capaces de seleccionar valores razonables para los factores de influencia presentes en las fórmulas propuestas. La elección del valor de estos coeficientes de influencia debe estar basada en la experiencia y teniendo en cuenta los efectos colaterales que su elección implica.

La aplicación de la norma ISO-6336 está sujeta a una serie de restricciones, que los engranajes deben cumplir para que los resultados obtenidos sean aceptables:

- (i) La norma ISO-6336 es aplicable a engranajes cilíndricos rectos y helicoidales.
- (ii) El grado de recubrimiento de los engranajes debe estar comprendido entre 1 y 2.5. El grado de recubrimiento define el número medio de parejas de dientes que están en contacto desde que una pareja de dientes inician su contacto hasta que dejan de estar en contacto.

- (iii) El proceso de engrane se debe producir sin interferencias y sin que se produzca apuntalamiento entre los dientes de los engranajes.
- (iv) Debe existir holgura entre los dientes del piñón y de la rueda.

5.3 Factores de influencia

De acuerdo con los principios propuesto por la norma ISO-6336, la capacidad de carga de los engranajes viene determinada por la duración de las superficies de contacto de los dientes [8] y por su resistencia a la flexión [9]. Por una parte, la duración de las superficies de contacto dependerá de los valores máximos de tensión de contacto (σ_H) alcanzados durante el funcionamiento de la transmisión. Por otra parte, la resistencia a la flexión de los dientes de engranaje dependerá de la tensión máxima de flexión alcanzada en la base del diente (σ_F).

La determinación de los valores máximos de tensión de contacto y de flexión se realiza a partir de los valores nominales de tensión, calculados analíticamente para unas condiciones dadas, que se penalizan con una serie de factores de influencia que tienen en cuenta efectos no contemplados en el cálculo analítico inicial.

Siguiendo estas directrices, el cálculo de la tensión de contacto, utilizado para determinar la duración de la superficie de contacto, se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_H = Z_B \cdot \sigma_{HO} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \quad (5.1)$$

donde:

- σ_{HO} es la tensión nominal de contacto en el punto de paso, calculada a partir de la teoría de Hertz [7]. El contacto entre dientes de engranaje se simula como si éstos fuesen dos cilindros perfectamente alineados, cuyos radios coinciden con los radios de curvatura de los dientes de los engranajes en el círculo de paso. El procedimiento de cálculo de la tensión nominal de contacto se ha expuesto en el apartado 1.3.2.1. También se puede encontrar descrito en la norma ISO-6336 [8] y en otras referencias especializadas en el diseño de engranajes [1, 2].
- Z_B es un factor de influencia que convierte la presión de contacto en la superficie a la tensión que se produce en el interior de los dos dientes en contacto [8].
- K_A es un factor de influencia que tiene en cuenta los incrementos de la carga debido al tipo de aplicación para el que se va a utilizar la transmisión [144].

- K_V es un factor de influencia que tiene en cuenta los incrementos de la carga debido a efectos dinámicos [11].
- $K_{H\beta}$ es un factor de influencia que tiene en cuenta las distribuciones no uniformes de la carga a lo largo del ancho de cara del engranaje [11].
- $K_{H\alpha}$ es un factor de influencia que tiene en cuenta las distribuciones no uniformes de carga en la dirección transversal [11].

Por otra parte, el cálculo de la tensión de flexión en la base del diente, determinada para calcular la resistencia a la flexión de los dientes del engranaje, se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_F = \sigma_{FO} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \quad (5.2)$$

donde:

- σ_{FO} es la tensión nominal de flexión en la raíz del diente. Esta tensión se calcula simulando el diente como si fuese una viga en voladizo, con una carga, que se supone uniforme a lo largo de todo el ancho de cara del engranaje, aplicada en el punto más alto en el que el contacto se produce en un solo diente. El procedimiento de cálculo de la tensión nominal de flexión se ha expuesto en el apartado 1.3.2.1. También se puede encontrar descrito en la norma ISO-6336 [9] y en otras referencias especializadas en el diseño de engranajes [1, 2].
- $K_{F\beta}$ es un factor de influencia que tiene en cuenta las distribuciones no uniformes de la carga a lo largo del ancho de cara del engranaje [11].
- $K_{F\alpha}$ es un factor de influencia que tiene en cuenta las distribuciones no uniformes de carga en la dirección transversal [11].

Los factores de influencia presentes en las ecuaciones 5.1 y 5.2 se derivan de resultados obtenidos de la investigación y la experiencia de campo. La norma ISO-6336 clasifica los distintos métodos de obtener los factores de influencia en tres categorías diferenciadas:

- (i) Método A. Este método de obtener el valor de los factores de influencia se basa en ensayos experimentales a gran escala, realización de medidas de precisión, análisis matemáticos exhaustivos o combinaciones de todas ellas. Requiere de la disposición de gran cantidad de datos sobre la transmisión y las condiciones de ensayo. En muchas ocasiones, el coste de estos análisis no justifica el valor de los resultados obtenidos.

- (ii) Método B. Este método de obtener la magnitud de los factores de influencia se basa en un método analítico cuya formulación se obtiene de datos empíricos resultantes de la evaluación de determinados sistemas de engranajes. Los factores de influencia determinados por este método ofrecen resultados de elevada precisión en la mayoría de aplicaciones.
- (iii) Método C. Este método de obtener el valor de los factores de influencia se basa en una simplificación del método B. Cuando se utilice este método, será necesario realizar una valoración sobre si sus hipótesis son compatibles con las características de la transmisión a estudiar.

En general, el método A es más preciso que el método B, y el método B más preciso que el C. En la norma ISO-6336 se proporciona una extensa formulación para el cálculo de los factores de influencia mencionados anteriormente. Algunos de estos factores se calculan en el marco del método B, mientras que otros se enmarcan dentro del método C. La norma ISO-6336 también ofrece algunas directrices para el cálculo de los factores de influencia a través del método A, pero éstas tienden a ser escasas, y es necesario recurrir a la literatura para obtener descripciones más precisas de los métodos comúnmente utilizados.

5.4 Factor de distribución longitudinal de la carga

Entre los factores de influencia presentes en las ecuaciones 5.1 y 5.2 se encuentra el factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$ y $K_{F\beta}$). Este factor de influencia tiene en cuenta los efectos que produce una distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara de los dientes de engranaje sobre las tensiones de contacto y las tensiones en la base del diente. La forma en la que la carga se distribuye sobre la superficie del diente depende, principalmente, de las siguientes influencias:

- (i) Geometría de los engranajes, incluyendo modificaciones en la geometría del diente. Las deformaciones de las superficies de los engranajes que se producen como consecuencia de los incrementos de calor, las fuerzas de centrífugas y el desgaste por fatiga también influyen en la forma en la que se reparte la carga.
- (ii) Carga total que recae sobre el diente del engranaje, incluyendo aumentos de carga debidos al tipo de aplicación o a efectos dinámicos.
- (iii) Errores en la fabricación y el montaje de los engranajes, incluyendo las holguras en los rodamientos.

- (iv) Deformaciones elásticas de los elementos que conforman la transmisión: engranajes, ejes, rodamientos y alojamientos.

Cuando el factor de distribución longitudinal de la carga afecta a las tensiones de contacto, se denomina $K_{H\beta}$ y se define como:

$$K_{H\beta} = \frac{\text{Intensidad de carga máxima}}{\text{Intensidad de carga media}} = \frac{W_{max}}{W_m} \quad (5.3)$$

Cuando el factor de distribución longitudinal de la carga afecta a las tensiones de flexión en la base del diente, se denomina $K_{H\alpha}$. En este caso depende de las variables determinadas para el cálculo de $K_{H\beta}$, y también del cociente entre el ancho de cara y la profundidad del diente.

Igual que ocurre con otros factores de influencia, la norma ISO-6336 clasifica los métodos de cálculo de la magnitud del factor de distribución longitudinal de carga en tres categorías distintas:

- (i) En el método A, el factor de distribución longitudinal de la carga se evalúa a partir de medidas experimentales de las deformaciones producidas en la base del diente en condiciones de trabajo, o en algunas situaciones, mediante una observación exhaustiva del patrón de contacto.
- (ii) En el cálculo de este factor mediante el método B se implementan procesos de ingeniería asistida por ordenador basados en las deformaciones elásticas producidas bajo carga, los desplazamientos estáticos y en la rigidez de los elementos elásticos de la transmisión.
- (iii) En el cálculo de este factor mediante el método C se realizan asunciones adicionales que permiten simplificar el método de cálculo propuesto por el método B. La asunción principal del método C con respecto al método B es que la desalineación del engranaje en el plano de acción originada por las deformaciones elásticas de los componentes de la transmisión pierde su carácter no lineal, pudiéndose aproximar a una línea recta.

En la norma ISO-6336 se exponen dos metodologías distintas para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga, una enmarcada dentro del método B (descrita en el apartado 5.5) y otra que se enmarca del método C (descrita en el apartado 5.6). En cambio, la norma no proporciona directrices concretas sobre como calcular el factor de distribución longitudinal de la carga según el método A. No obstante, en la literatura

se pueden encontrar algunos ejemplos de como lo han hecho otros autores utilizando procedimientos experimentales. Por citar algunos ejemplos, Hotait [21] utilizó galgas extensiométricas para determinar la deformación en la raíz de los dientes de un engranaje helicoidal, y a partir de ahí obtener resultados relacionados con la distribución de la carga. Por otra parte, Pau [23] utilizó técnicas de inspección por ultrasonidos para la determinación de los patrones de contacto y distribuciones de carga en transmisiones de piñón-cremallera.

5.5 Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga por el método B

Cuando no se dispone de capacidad para calcular el factor de distribución longitudinal de la carga por otros métodos mejores, la norma propone una formulación para su cálculo según el método B (en adelante $K_{H\beta-B}$). El método propuesto es un método iterativo que se basa en la reducción del problema de contacto a las dos dimensiones correspondientes al plano de acción de la transmisión y la posterior resolución del problema de contacto entre dientes de engranajes aproximando su comportamiento al de una fundación elástica de Winkler [7]. Como resultado, se obtiene una función a tramos que describe la intensidad de la carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes, a partir de la cual se determinará el factor de distribución longitudinal de la carga. Aunque el estudio del método B propuesto por la norma para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga no es uno de los objetivos de esta investigación, a continuación se describe su base teórica y su método de aplicación para un mejor entendimiento de los subsecuentes apartados de este trabajo.

5.5.1 Cálculo de la distribución de carga según el método B

Considere una pareja de dientes de engranajes en su posición inicial de contacto, como se ilustra en la figura 5.1a. En el plano de acción, la función que denota la distancia entre las superficies de contacto de los engranajes en la dirección de la línea de acción se denota por $\delta(x_L)$ (figura 5.1b). Esta distancia tiene en cuenta la separación producida por las deformaciones elásticas de los diferentes elementos que componen la transmisión, modificaciones de los dientes y defectos de fabricación y montaje.

El ancho de cara del engranaje se divide en n segmentos iguales, siendo n un número a elección del diseñador. La longitud de cada segmento se denota por $b_L = b/n$ (figura 5.1c). A cada una de estas partes se le asigna un valor de distancia entre flancos (δ_i), que coincide con el valor de la función $\delta(x_L)$ en el punto central del segmento.

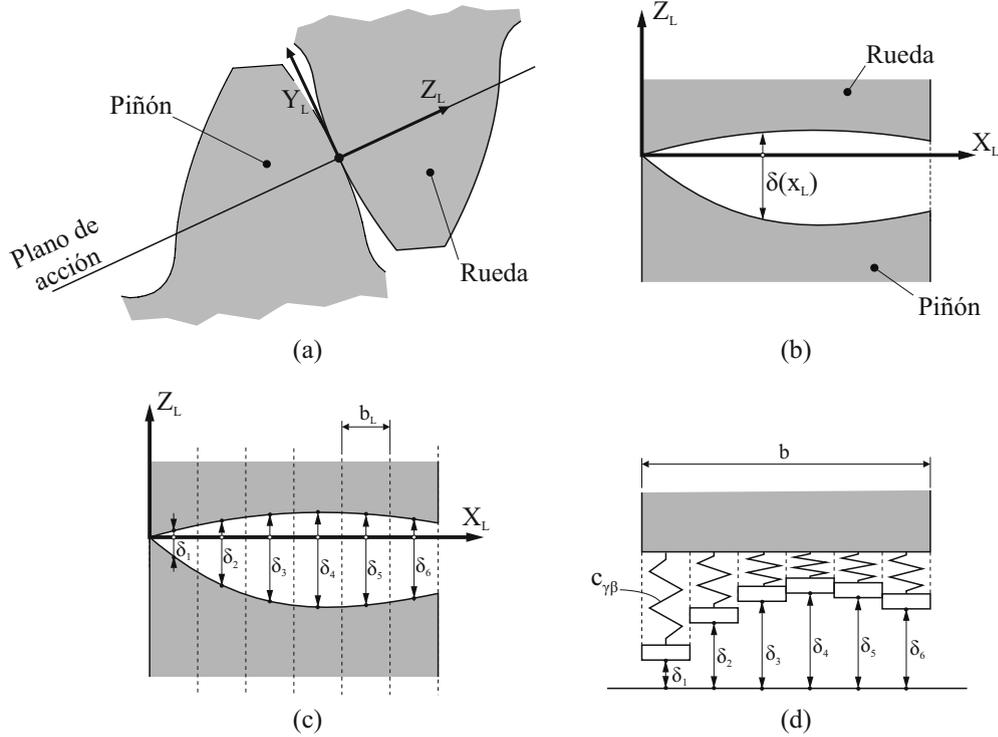


FIGURA 5.1: Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-B}$

El engrane se simula entonces mediante un modelo discreto de n muelles. La rigidez asociada a cada muelle se denota por $c_{\gamma\beta i}$. El modelo discreto se configura en base al valor de δ_i asociado a cada segmento, como se ilustra en la figura 5.1d. La deformación que se producirá en cada muelle (δ_{ti}) dependerá de la intensidad de carga recaiga sobre él (W_i) y de la rigidez asociada a dicho muelle ($c_{\gamma\beta i}$):

$$\delta_{ti} = \frac{W_i}{c_{\gamma\beta i}} \quad (5.4)$$

La intensidad de carga en cada muelle se define como la fuerza que ejerce el muelle (F_i) dividida entre la longitud del segmento al que corresponde:

$$W_i = \frac{F_i}{b_L} \quad (5.5)$$

La rigidez que se asigna a cada muelle se estima en función de la rigidez del engrane en la posición del muelle. Si bien el valor de la rigidez del engrane puede presentar variaciones a lo largo del ancho de cara del engranaje, la norma ISO-6336 permite obviar estas variaciones y considerar un valor de rigidez del engrane constante en todo el ancho de cara ($c_{\gamma\beta}$). Esta aproximación permite considerar un valor de rigidez común para todos los muelles presentes en el modelo discreto ($c_{\gamma\beta i} = c_{\gamma\beta}$). En el apartado 5.8 se

describe el procedimiento propuesto por la norma ISO-6336 para determinar la rigidez del engrane.

La diferencia entre la intensidad de carga entre dos muelles cualquiera i y j de la discretización es proporcional a la diferencia de distancia entre flancos asociada a cada uno de estos muelles, siendo la rigidez del engrane el factor de proporcionalidad:

$$W_i - W_j = (\delta_i - \delta_j) \cdot c_{\gamma\beta} \quad (5.6)$$

La ecuación 5.6 se puede reescribir en términos de fuerzas en lugar de intensidades de carga:

$$\frac{F_i}{b_L} - \frac{F_j}{b_L} = (\delta_i - \delta_j) \cdot c_{\gamma\beta} \quad (5.7)$$

Tomando como referencia el primer segmento $j = 1$ y sumando la contribución de todos los segmentos se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{F_i}{b_L} - \frac{F_1}{b_L} \right) = \sum_{i=1}^n [\delta_i - \delta_1] \cdot c_{\gamma\beta} \rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{F_i}{b_L} \right) - \frac{n \cdot F_1}{b_L} = \sum_{i=1}^n [\delta_i - \delta_1] \cdot c_{\gamma\beta} \quad (5.8)$$

La carga total transmitida en el contacto entre dientes de engranaje (F_m) será igual a la suma de las contribuciones individuales de carga de cada uno de los muelles. Teniendo en cuenta que $\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{F_i}{b_L} \right) = \frac{F_m}{n} \right]$, se puede despejar F_1 de la ecuación 5.8:

$$F_1 = \frac{F_m}{n} - \frac{c_{\gamma\beta} \cdot b_L}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [\delta_i - \delta_1] \quad (5.9)$$

Una vez obtenida F_1 , las fuerzas que ejercen el resto de muelles del modelo discreto se pueden calcular mediante la siguiente ecuación, derivada a partir de la ecuación 5.7:

$$F_i = b_L \cdot \left[\frac{F_1}{b_L} - (\delta_i - \delta_1) \cdot c_{\gamma\beta} \right] \quad (5.10)$$

La aparición de fuerzas F_i con signo negativo al aplicar la ecuación 5.10 implica que el contacto no se extiende a lo largo de todo el ancho de cara. Para corregir el cálculo, se obtiene la media aritmética de todas las fuerzas con un valor negativo. El valor obtenido se resta a aquellas fuerzas que tenían signo positivo, y las que tenían signo negativo se definen como nulas.

5.5.2 Procedimiento de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método B

El diagrama de flujo del procedimiento propuesto por la norma ISO-6336 para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método B se muestra en la figura 5.2. El proceso de cálculo se inicia calculando la rigidez del engrane mediante el método descrito en el apartado 5.8 (paso **A1**). A continuación, el ancho de cara del engranaje se divide en n segmentos iguales, siendo n un número elegido por el diseñador (paso **A2**). Posteriormente se define una distancia entre flancos nula para cada uno de los segmentos ($\delta_i = 0$), asumiendo que los dientes están perfectamente alineados (paso **A3**).

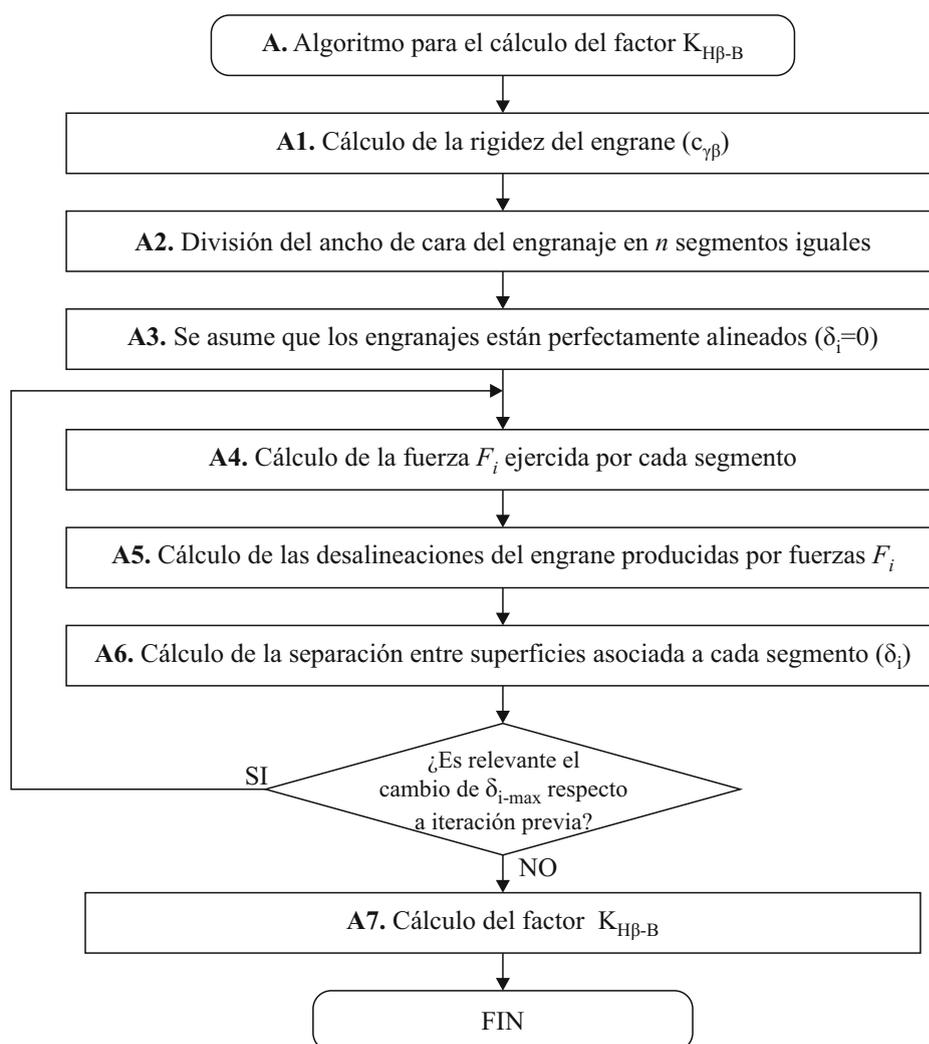


FIGURA 5.2: Método de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga propuesto por la norma ISO-6336

Entonces empieza un proceso iterativo (pasos **A4-A6**) cuyo primer paso es calcular las fuerzas de contacto ejercidas en cada segmento, utilizando las ecuaciones 5.9 y 5.10 (paso

A4). A continuación, se determinan las desalineaciones del engrane provocadas por las fuerzas determinadas en el paso **A5**. Para tal propósito, la norma ISO-6336 propone un modelo de cálculo basado en la teoría de vigas de Bernoulli. No obstante, es posible utilizar otros modelos de cálculo, como los modelos *SHAFT1* y *SHAFT2* descritos en el capítulo 3 de este trabajo. En el siguiente paso, se calcula la separación entre las superficies de contacto de los engranajes asociada a cada segmento (δ_i), producida como consecuencia de la desalineación del engrane (paso **A6**).

El valor máximo de δ_i obtenido se compara con el valor máximo obtenido en la iteración anterior del algoritmo. Si la variación entre estos valores está por encima de una magnitud arbitraria especificada por el diseñador, el algoritmo realiza otra iteración. Si por el contrario, la variación entre estos valores está por debajo de dicho valor, el proceso iterativo termina y el factor de distribución de la carga se calcula utilizando la ecuación 5.11 (paso **A7**). La norma recomienda establecer el valor máximo permitido para la variación de separación en $3 \mu m$.

$$K_{H\beta-B} = \frac{W_{max}}{W_m} = \frac{\max(F_i)}{F_m/n} \quad (5.11)$$

5.6 Determinación del factor de distribución longitudinal de la carga por el método C

En el apartado anterior se describe el procedimiento de cálculo propuesto por la norma ISO-6336 para la determinación del factor de distribución longitudinal de la carga según el método B. Éste es un método iterativo que requiere, entre otras cosas, de procedimientos de ingeniería asistida por ordenador y de conocimientos relacionados con la resistencia de materiales. En ocasiones, estas necesidades no están cubiertas en las oficinas donde se desarrollan nuevos diseños de transmisiones. En otras ocasiones, pueden ser requeridos métodos capaces de ofrecer resultados con mayor inmediatez. Por estos motivos, la norma ISO-6336 proporciona un procedimiento de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método C (en adelante $K_{H\beta-C}$).

El cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método C consiste en una simplificación del método B, descrito en el apartado anterior. Esta simplificación se basa en la asunción de que las deformaciones elásticas de los componentes de la transmisión producen una desalineación del engrane que hace que la distancia entre las superficies de contacto de los engranajes medida en el plano de acción varíe linealmente a lo largo del ancho de cara de los engranajes, como se muestra en la figura 5.5. Gracias

a esta simplificación se podrán obtener expresiones analíticas para el cálculo de $K_{H\beta-C}$, que facilitarán su cálculo y permitirán prescindir de procesos iterativos.

No obstante, a medida que se incremente la curvatura de la línea de deformación elástica, como ocurre cuando los engranajes están muy cargados o cuando el cociente entre el ancho de cara y el diámetro primitivo es muy grande, esta suposición conllevará un incremento de error entre las distribuciones de carga calculadas y las reales, pues las hipótesis en las que se basa la simplificación dejarán de representar una buena aproximación. Por este motivo la norma ISO-6336 aconseja realizar un análisis minucioso en aquellos casos en los que la relación entre el ancho de cara y el diámetro primitivo del engranaje sea superior a 1.5.

El factor de distribución longitudinal de carga $K_{H\beta-C}$ se calcula a partir de la intensidad de carga media a lo largo del ancho de cara del engranaje (W_m), el coeficiente de rigidez del engrane ($c_{\gamma\beta}$) y la desalineación equivalente del engrane en el plano de acción ($F_{\beta y}$). En función de la magnitud de estas variables, la norma ISO-6336 propone dos estrategias de cálculo distintas, dependiendo de si se estima que el contacto entre dientes se produce a lo largo de todo el ancho de cara del engranaje o no:

- (i) Transmisiones con un perfil bajo de carga y desalineaciones grandes del engrane, en las que se asume que el contacto entre dientes se produce únicamente en una porción del ancho de cara del diente, consideradas en el apartado 5.6.1.
- (ii) Transmisiones con un perfil alto de carga y desalineaciones pequeñas del engrane, en las que se asume que el contacto entre dientes de engranaje se extiende a lo largo de todo su ancho de cara., consideradas en el apartado 5.6.2.

En los respectivos apartados se explica en qué casos de diseño es aplicable cada uno de los métodos propuestos. El método de cálculo propuesto por la norma ISO-6336 para determinar la desalineación equivalente del engrane en el plano de acción se describe en el apartado 5.7, mientras que el método propuesto por la norma ISO-6336 para determinar el coeficiente de rigidez del engrane se describe en el apartado 5.8.

5.6.1 Caso 1: Perfil bajo de carga con desalineaciones grandes

Este caso asume que el contacto entre dientes de engranaje se produce únicamente en una porción del ancho de cara del diente. Esta situación corresponde al caso en el que los engranajes se encuentran sometidos a una carga ligera o cuando existe una desalineación del engrane elevada.

La figura 5.3a muestra el contacto sin carga en el plano de acción entre las superficies de contacto del piñón y de la rueda. Como se ha comentado anteriormente, se asume que la distancia entre las superficies de contacto de los engranajes, medida en el plano de acción, varía linealmente a lo largo del ancho de cara de los engranajes. El valor máximo de la separación entre flancos resultante, conocido como la desalineación equivalente del engrane en el plano de acción, se denota por $F_{\beta y}$.

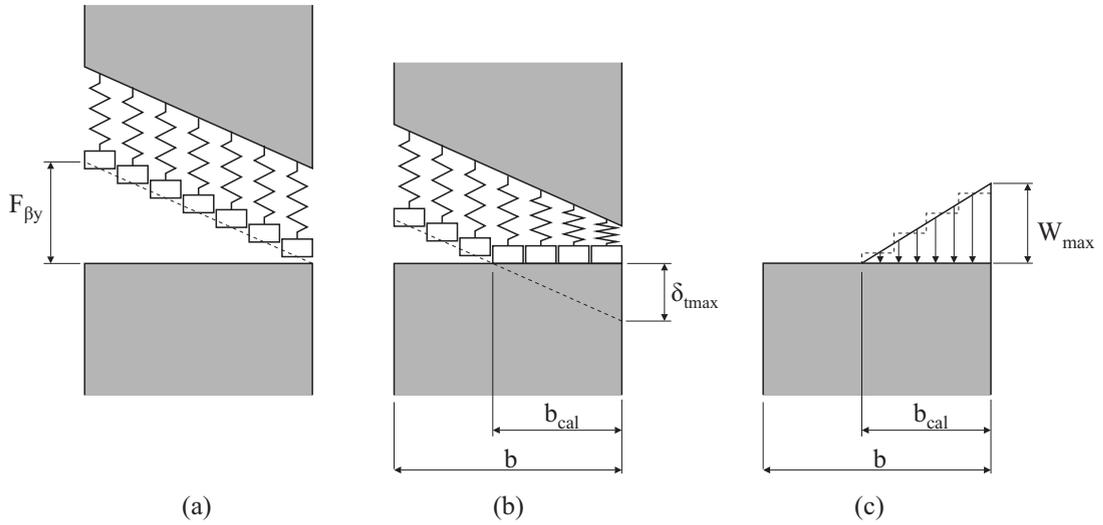


FIGURA 5.3: Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga cuando el perfil de carga es bajo y las desalineaciones son grandes

Al introducir una aproximación entre flancos de magnitud δ_{tmax} como la mostrada en la figura 5.3b, aparecerá una distribución triangular de fuerzas de contacto como la mostrada en la figura 5.3c, que se extenderá una longitud b_{cal} , denominada longitud aparente del contacto. La intensidad máxima de carga (W_{max}) se podrá determinar a partir de la aproximación entre cuerpos y la constante de rigidez del engrane:

$$W_{max} = \delta_{tmax} \cdot c_{\gamma\beta} \rightarrow \delta_{tmax} = \frac{F_{max}/b}{c_{\gamma\beta}} \quad (5.12)$$

El área bajo la función lineal de distribución de carga (mostrada en la figura 5.3c) será igual a la fuerza total considerada (F_m):

$$F_m = \frac{1}{2} \cdot b_{cal} \cdot \frac{F_{max}}{b} \rightarrow F_{max} = 2 \cdot F_m \cdot \frac{b}{b_{cal}} \quad (5.13)$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos se deduce que:

$$\frac{F_{\beta y}}{b} = \frac{\delta_{tmax}}{b_{cal}} \rightarrow \delta_{tmax} = F_{\beta y} \cdot \frac{b_{cal}}{b} \quad (5.14)$$

Igualando las ecuaciones 5.14 y 5.12 y sustituyendo la igualdad obtenida en 5.13 se determina la relación entre el ancho de cara del engranaje y la longitud aparente del contacto:

$$\frac{b}{b_{cal}} = \sqrt{\frac{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{2 \cdot \frac{F_m}{b}}} \quad (5.15)$$

Por otra parte, considerando las ecuaciones 5.11 y 5.13:

$$K_{H\beta-C} = \frac{\frac{F_{max}}{b}}{\frac{F_m}{b}} = \frac{2 \cdot F_m \cdot \frac{b}{b_{cal}}}{F_m} = 2 \cdot \frac{b}{b_{cal}} \quad (5.16)$$

Por último, sustituyendo 5.15 en 5.16 se obtiene la expresión para el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-C}$ para aquellas transmisiones con un perfil bajo de carga y grandes desalineaciones:

$$K_{H\beta-C} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{F_m/b}} \quad (5.17)$$

Esta ecuación será aplicable cuando $b/b_{cal} \geq 1$.

5.6.2 Caso 2: Perfil alto de carga con desalineaciones pequeñas

Este caso asume que el contacto entre dientes de engranaje se extiende a lo largo de todo su ancho de cara. Esto se produce en aquellos casos dónde la carga es elevada o la desalineación equivalente es pequeña.

La figura 5.4a muestra el contacto sin carga entre la superficie de contacto del piñón y de la rueda. Se asume que la distancia entre las superficies de contacto de los engranajes, medida en el plano de acción, varía linealmente a lo largo del ancho de cara de los engranajes. Es variación produce una desalineación equivalente del engrane en el plano de acción de magnitud $F_{\beta y}$.

En este caso la aproximación total entre los dientes de engranaje (δ_{tmax}) supera la magnitud de la desalineación equivalente ($F_{\beta y}$). Esto provoca que, al considerar una distribución lineal de la carga, ésta exceda el ancho de cara del engranaje, dando lugar a una longitud aparente del contacto (b_{cal}) mayor que el ancho de cara real (b), como se aprecia en la figura 5.4b. Como en el caso anterior, la intensidad máxima de carga (W_{max}) se determinará mediante la ecuación 5.12.

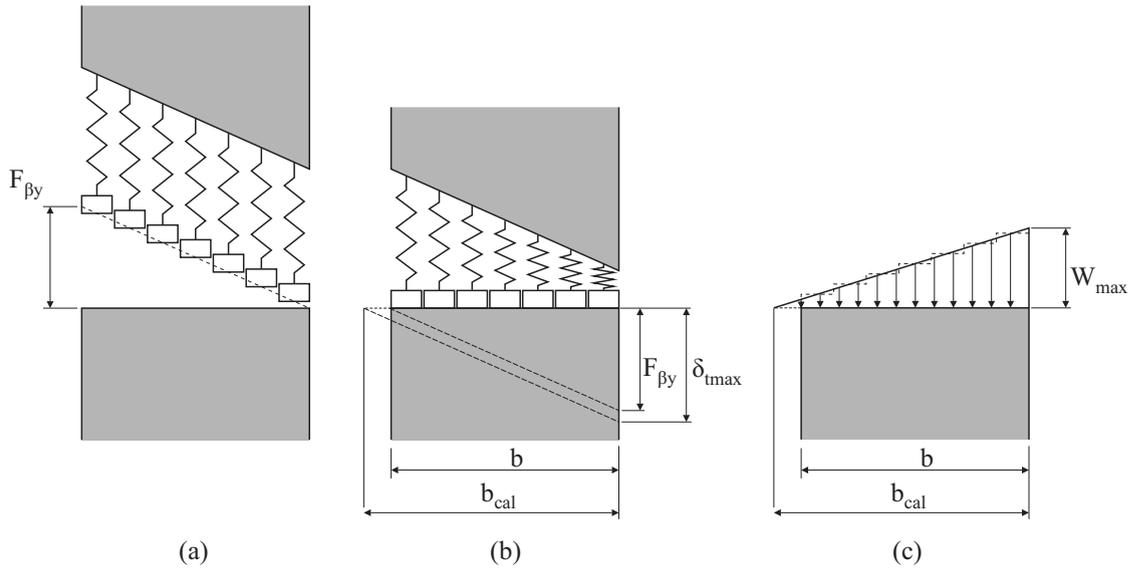


FIGURA 5.4: Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga cuando el perfil de carga es alto y las desalineaciones son pequeñas

De esta manera, y por semejanza de triángulos, se demuestra que la deformación total será igual a la desalineación equivalente más una cantidad que se mantiene constante a lo largo de todo del ancho de cara:

$$\frac{\delta_{tmax} - F_{\beta y}}{b_{cal} - b} = \frac{\delta_{tmax}}{b_{cal}} \rightarrow \delta_{tmax} = F_{\beta y} + \frac{b_{cal} - b}{b_{cal}} \cdot \delta_{tmax} \quad (5.18)$$

En este caso se produce una distribución trapezoidal de carga, como se muestra en la figura 5.4c. El área bajo la función lineal de distribución de carga será igual a la carga transmitida (F_m):

$$F_m = b \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F_{max}}{b} + \frac{F_{max}}{b} \frac{b_{cal} - b}{b_{cal}} \right) \rightarrow F_{max} = F_m \cdot \frac{b_{cal}}{b_{cal} - \frac{b}{2}} \quad (5.19)$$

A partir del sistema formado por las ecuaciones 5.12, 5.18 y 5.19, se obtiene el valor de la relación entre el ancho de cara del engranaje y la longitud aparente del contacto:

$$\frac{b_{cal}}{b} = \frac{F_m/b}{F_{\beta y} \cdot C_{\gamma\beta}} + \frac{1}{2} \quad (5.20)$$

Por otra parte, y considerando la ecuación 5.19:

$$K_{H\beta-C} = \frac{\frac{F_{max}}{b}}{\frac{F_m}{b}} = \frac{\frac{F_m}{b} \frac{b_{cal}}{b_{cal} - \frac{b}{2}}}{\frac{F_m}{b}} = \frac{\frac{b_{cal}}{b}}{\frac{b_{cal}}{b} - \frac{1}{2}} \quad (5.21)$$

Por último, sustituyendo 5.20 en 5.21 se obtiene la expresión para el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-C}$ para aquellas transmisiones con un perfil alto de carga y desalineaciones pequeñas:

$$K_{H\beta-C} = 1 + \frac{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{2 \cdot F_m/b} \quad (5.22)$$

Esta ecuación será aplicable cuando $b/b_{cal} < 1$.

5.7 Determinación de la desalineación equivalente del engrane

Según la norma ISO-6336, la desalineación equivalente del engrane ($F_{\beta y}$) se puede determinar mediante la siguiente expresión:

$$F_{\beta y} = F_{\beta x} \cdot \chi_{\beta} \quad (5.23)$$

donde:

- $F_{\beta x}$ es la desalineación inicial equivalente del engrane, que corresponde al valor absoluto de la suma de deformaciones, desplazamientos y errores de fabricación del piñón y de la rueda, medidos en el plano de acción. El procedimiento de cálculo de este parámetro se describe en el apartado 5.7.1.
- χ_{β} es el factor que caracteriza la reducción de la desalineación inicial equivalente debido a la rodadura. En caso de que no exista rodadura, o de que esta no suponga una reducción de la desalineación equivalente inicial, $\chi_{\beta} = 1$.

5.7.1 Determinación de la desalineación inicial equivalente del engrane por el método C

La magnitud de la desalineación inicial equivalente del engrane ($F_{\beta x}$) corresponde al valor absoluto de la suma de las desviaciones de fabricación y las deformaciones elásticas de los elementos de la transmisión, medida en el plano de acción.

En la literatura existen distintos trabajos centrados en el cálculo y el estudio de la desalineación inicial equivalente del engrane [20, 72, 97, 156]. La norma ISO-6336 propone diversos métodos simplificados para el cálculo de $F_{\beta x}$, cuyo caso más general viene determinado por la siguiente ecuación:

$$F_{\beta x} = 1.33 \cdot B_1 \cdot f_{sh1} + f_{sh2} + f_{ma} + f_{ca} + f_{be} \quad (5.24)$$

donde:

- B_1 es una constante que tiene en cuenta las modificaciones de hélice en el piñón,
- f_{sh1} es la componente de desalineación inicial equivalente producida por las deformaciones elásticas del piñón y de su eje,
- f_{sh2} es la componente de desalineación inicial equivalente producida por las deformaciones elásticas de la rueda y de su eje,
- f_{ma} es la componente de desalineación inicial equivalente debido a desviaciones de fabricación y montaje,
- f_{ca} es la componente de desalineación inicial equivalente debido a las deformaciones de la caja de engranajes, y
- f_{be} es la componente de desalineación inicial equivalente debido a deformaciones de los rodamientos.

La constante 1.33 presente en la ecuación 5.24 es un factor introducido para compensar la hipótesis de que la separación entre las superficies de contacto provocada por las deformaciones elásticas de los elementos que componen la transmisión varía linealmente a lo largo del ancho de cara. La figura 5.5a muestra un ejemplo de como sería en realidad la variación de la separación entre dientes medida en el plano de acción de la transmisión. La figura 5.5b muestra esta misma variación simplificada en una línea recta. Para que ambas repercutan en un mismo valor de $K_{H\beta}$ se debe cumplir que el cociente entre f_{max} y f_{med} sea el mismo en ambos casos:

$$\frac{f_{max}}{f_{med}} = \frac{f_{med,l} + \Delta f_{sh,l}}{f_{med,l}} = 1 + \frac{\Delta f_{sh,l}}{f_{med,l}} \quad (5.25a)$$

$$\frac{f_{max}}{f_{med}} = \frac{f_{med,p} + \Delta f_{sh,p}}{f_{med,p}} = 1 + \frac{\Delta f_{sh,p}}{f_{med,p}} \quad (5.25b)$$

Para simplificar el cálculo, la norma ISO-6336 considera que la variación real de la separación entre los dientes de engranaje en el plano de acción se puede aproximar mediante una función parabólica. Bajo esta suposición, para un valor dado de f_{sh} , el valor medio de la desalineación será aproximadamente $\Delta f_{sh,p} = \frac{2}{3} \cdot f_{sh}$. En cambio, si se asume que la desalineación crece linealmente, el valor medio de la desalineación será $\Delta f_{sh,l} = \frac{1}{2} \cdot f_{sh}$.

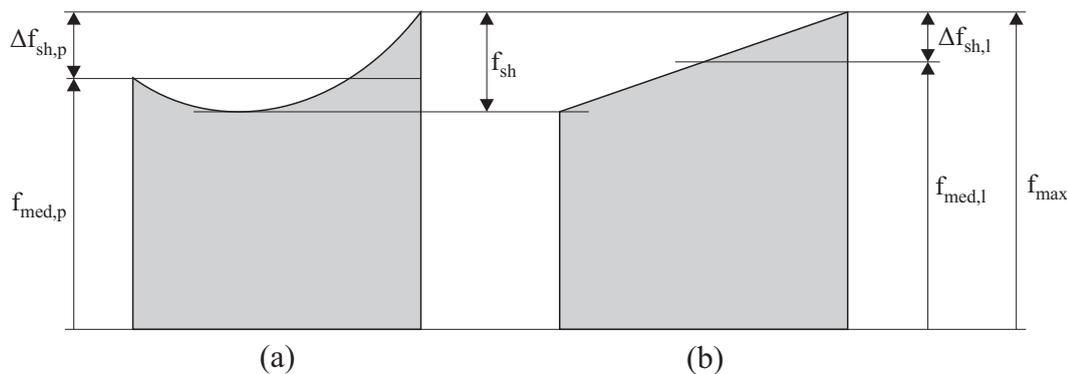


FIGURA 5.5: Desalineación del engrane en el plano de acción. (a) Desalineación real y (b) desalineación simplificada.

Teniendo en cuenta estas consideraciones e igualando las ecuaciones 5.25a y 5.25b se obtiene que:

$$\frac{f_{max}}{f_{med,p}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{f_{max}}{f_{med,l}} \quad (5.26)$$

La ecuación 5.26 implica que, si se considera que la separación entre superficies de contacto de los engranajes varía linealmente a lo largo de lancho de cara del engranaje, es necesario multiplicar el valor de la desalineación inicial equivalente por $4/3$ para obtener resultados equivalentes a los que se obtendrían asumiendo una desalineación parabólica.

5.7.2 Determinación de la componente de desalineación equivalente producida por deformaciones elásticas por el método C

El valor de la desalineación equivalente producida por las deformaciones elásticas de los elementos de la transmisión (f_{sh}) tiene en cuenta las componentes de desalineación equivalente resultantes de la deformación por flexión y por torsión de los cuerpos de los engranajes y de los ejes. En la norma ISO-6336 el cálculo de este factor se realiza bajo las siguientes hipótesis:

- (i) Los elementos de la transmisión poseen el módulo elástico y el coeficiente de Poisson del acero.
- (ii) La componente de desalineación debida a la flexión del eje se calcula como el producto de la deflexión en el punto central del eje por el ancho de cara el engranaje. Se considera que la carga transmitida actúa sobre el borde de los dientes del engranaje.

- (iii) La componente debida a la torsión se calcula para un cilindro sólido de diámetro d , considerando una carga uniformemente distribuida sobre el ancho de cara de los dientes del engranaje.

De acuerdo con estas hipótesis, la norma ISO-6336 propone determinar el cálculo de este factor según la siguiente ecuación:

$$f_{sh} = \frac{F_m}{b} \cdot 0.023 \cdot \left[\left| B^* + K' \cdot \frac{l \cdot s}{d^2} \cdot \left(\frac{d}{d_{sh}} \right)^4 - 0.3 \right| + 0.3 \right] \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^2 \quad (5.27)$$

donde:

- B^* es un factor que tiene en cuenta el número de etapas a través de los cuales se transmite la potencia. Si la potencia se transmite a través de una única etapa, $B^* = 1$.
- d y d_{sh} son el diámetro primitivo del engranaje y el diámetro del eje, respectivamente.
- K' es un factor que tiene en cuenta la posición relativa del engranaje con respecto a la posición de entrada/salida del par, así como la relación entre el diámetro primitivo del engranaje y el diámetro del eje. Su signo depende de si las desalineaciones por torsión y por flexión son compensatorias (signo negativo) o aditivas (signo positivo). Su magnitud depende del grado de rigidez aportada por el engranaje al eje; si se considera que el engranaje rigidiza el comportamiento a flexión del eje ($d/d_{sh} \geq 1.15$), su magnitud es 0.48, mientras que en el caso contrario su magnitud es 0.8.
- s es un factor que tiene en cuenta la distancia de montaje de los engranajes con respecto al centro de los ejes. Se puede determinar como $s = |0.5 \cdot l - z_g|$.

5.8 Determinación de la constante de rigidez del engrane

La constante de rigidez del engrane ($c_{\gamma\beta}$) representa el valor medio de la rigidez del engrane.

Considere una transmisión formada por una pareja de engranajes perfectamente alineados. La rotación de uno de los engranajes está bloqueada, y sobre el otro engranaje se aplica un par, que genera una distribución de fuerzas de contacto de una intensidad determinada. Como consecuencia de estas fuerzas de contacto, ambos engranajes se

deforman elásticamente, y hacen que el engranaje sobre el que se aplica el par realice un giro, cuya magnitud se mide como la longitud del arco, medida en el círculo de base, correspondiente al ángulo girado.

Bajo estas condiciones, la rigidez del engrane se define como la intensidad de la carga necesaria, dirigida en la dirección de acción, para producir un giro del engranaje sobre el que se aplica el par equivalente a una longitud de arco de $1 \mu m$, considerando uno o más dientes en un contacto ideal.

Los principales aspectos que influyen en la rigidez de los dientes son:

- (i) Características del diente de engranaje (número de dientes, perfil de la cremallera de corte, modificaciones de adendo, ángulo de hélice, grado de recubrimiento transversal).
- (ii) Diseño del cuerpo del engranaje (espesor del anillo, espesor del alma).
- (iii) Carga específica normal al flanco del diente.
- (iv) Conexión entre el engranaje y el eje.
- (iv) Rugosidad y ondulación de la superficie del diente
- (v) Desalineación del engrane
- (vi) Módulo de elasticidad de los materiales

Aunque se han propuesto diversos métodos para determinar la rigidez del engrane [157–161], la norma ISO 6336-1 [11] proporciona una metodología de cálculo de la rigidez del engrane englobada dentro del método B. Según esta metodología, la rigidez del engrane se calcula a partir de la rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes (c'), que a su vez se obtiene de la rigidez teórica de contacto entre una pareja de dientes (c'_{th}).

La obtención de la rigidez teórica de contacto se basa en estudios del comportamiento elástico de engranajes cilíndricos rectos macizos, fabricados a partir de un perfil de cremallera básica de corte (descrito en la norma ISO-50 [162]), y considerando una carga de $300 N/mm$. La rigidez máxima de contacto teórica entre dos engranajes es igual a la inversa del valor mínimo de su flexibilidad (q'):

$$c'_{th} = \frac{1}{q'} \tag{5.28a}$$

$$q' = C_1 + \frac{C_2}{z_1} + \frac{C_3}{z_2} + C_4 \cdot x_1 + \frac{C_5 \cdot x_1}{z_1} + C_6 \cdot x_2 + \frac{C_7 \cdot x_2}{z_2} + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 \tag{5.28b}$$

TABLA 5.1: Coeficientes para el cálculo de la flexibilidad del engrane

Coeficiente	Valor
C_1	0.04723
C_2	0.15551
C_3	0.25791
C_4	-0.00635
C_5	-0.11654
C_6	-0.00193
C_7	-0.24188
C_8	0.00529
C_9	0.00182

En la ecuación 5.28b los coeficientes C_1 a C_9 se obtienen mediante aproximación, y se resumen en la tabla 5.1. Los coeficientes x_1 y x_2 corresponden a la desalineación de la cremallera de corte durante la generación.

La rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes se obtiene entonces como:

$$c' = c'_{th} \cdot C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos \beta \quad (5.29)$$

donde:

- (i) Las diferencias entre los valores de rigidez teóricos y los valores de rigidez medidos en engranajes cilíndricos rectos se tienen en cuenta mediante el factor C_M . Su valor es $C_M = 0.8$.
- (ii) La flexibilidad de cuerpo del engranaje se tiene en cuenta mediante el factor C_R . Para engranajes macizos su valor es $C_R = 1$.
- (iii) Las desviaciones del perfil de la cremallera de corte utilizada en la generación de los engranajes con respecto al perfil básico de cremallera de corte descrito en la norma ISO 53 [162] se tienen en cuenta mediante el factor adimensional C_B . Su valor se puede determinar mediante la ecuación 5.30, en la que interviene el módulo normal de la transmisión (m_n), y el dedéndo (h_{fP}) y el ángulo de presión normal (α_{Pn}) de la cremallera de corte con la que se fabrica la pareja de engranajes.

$$C_B = \left[1 + 0.5 \cdot \left(1.25 - \frac{h_{fP}}{m_n} \right) \right] [1 - 0.02(20^\circ - \alpha_{Pn})] \quad (5.30)$$

- (iv) Por último, β es el ángulo de hélice de la transmisión. En la ecuación 5.29, mediante el coseno de este ángulo se tiene en cuenta la inclinación de los dientes de los engranajes helicoidales, con el fin de obtener su rigidez en el plano transversal.

No obstante, cuando la carga específica es inferior a 100 N/mm , la ecuación 5.29 se modifica de la siguiente forma:

$$c' = c'_{th} \cdot C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{F_t \cdot K_A / b}{100} \right)^{0.25} \quad (5.31)$$

Una vez obtenida la rigidez máxima de contacto en una pareja de dientes, la rigidez del engrane se calcula mediante la ecuación 5.32. En esta ecuación, ϵ_α es el grado de recubrimiento, que se puede calcular, entre otras formas, como propone Radzevic [1].

$$c_{\gamma\beta} = 0.85 \cdot c' \cdot (0.75 \cdot \epsilon_\alpha + 0.25) \quad (5.32)$$

5.9 Ejemplos numéricos

En este apartado se investiga la relación existente entre el valor del factor de distribución longitudinal de la carga calculado por el método C propuesto en la norma ISO-6336 ($K_{H\beta-C}$) y el valor de este mismo factor obtenido a partir del análisis de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión ($K_{H\beta-FEM}$). La investigación se lleva a cabo sobre la transmisión de engranajes cilíndricos rectos mostrada en la figura 1.13. Los datos de diseño considerados para esta transmisión se muestran en la tabla 5.2.

Con el fin de estudiar la variación del factor de distribución longitudinal de la carga con algunos parámetros de diseño, se han considerado:

- (i) 4 valores distintos ancho de cara (b),
- (ii) 4 valores distintos de longitud de los ejes (L),
- (iii) 3 valores distintos de diámetro del eje del piñón (d_{sh1}), y
- (iv) 11 valores distintos de posición de montaje de los engranajes sobre los ejes (z_g).

Considerando las combinaciones posibles de los valores de la tabla 5.2 y las restricciones de ensamblaje de los engranajes sobre los ejes (debidas a la posición del engranaje con respecto los apoyos y los anchos de cara), finalmente se han investigado 456 casos de diseño. Los 11 valores elegidos para la variable z_g cubren el rango de aplicación sugerido por la norma ISO-6336. Se ha considerado que los engranajes contactan en la línea de paso en todos los casos de diseño, puesto que el factor de carga se determina en la norma ISO-6336 a partir de la fuerza tangencial, que se calcula para el par nominal en el plano transversal del cilindro de referencia.

TABLA 5.2: Datos de diseño para los casos de estudio

Magnitudes	Valores
Módulo normal, m [mm]	4
Ángulo de presión normal, α [grados]	25
Número de dientes del piñón, z_1	17
Número de dientes de la rueda, z_2	34
Ancho de cara, $b = b_1 = b_2$ [mm]	20, 40, 60, 80
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} [mm]	25, 30, 35
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} [mm]	35
Par nominal aplicado, T [Nm]	140
Distancia entre apoyos, l [mm]	100, 150, 200, 300
Posición de montaje, z_g [mm]	0.2L, 0.25L, 0.3L, 0.4L, 0.45L, 0.5L, 0.55L, 0.6L, 0.7L, 0.75L, 0.8L

Se ha considerado que los ejes están apoyados en los puntos A_1 , B_1 , A_2 y B_2 . El tipo de apoyo especificado no es capaz de absorber momentos flectores, simulando el comportamiento de un rodamiento autoalineante.

Se considera un par de 140 $N \cdot m$ aplicado sobre el punto A_1 del eje del piñón. El punto de salida del par es el punto B_2 del eje de la rueda. Este par proporciona una fuerza tangencial de $F_t = 4117.64 N$.

5.9.1 Consideraciones para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método C de la norma ISO-6336

El factor de distribución longitudinal de la carga se ha calculado según el método C expuesto en la norma ISO-6336 para los casos de diseño mostrados en la tabla 5.2. A tal efecto, se han realizado las siguientes consideraciones:

- (i) La desalineación equivalente del engrane ($F_{\beta y}$) se calcula mediante la ecuación 5.23. Se supone que las superficies de los dientes de engranaje no experimentan ninguna modificación por efecto de la rodadura ($\chi_\beta = 1$).
- (ii) La desalineación inicial equivalente ($F_{\beta x}$) se calcula mediante la ecuación 5.24. En su calculo se han despreciado las contribuciones por errores de fabricación ($f_{ma} = 0$), así como las contribuciones originadas por deformaciones en los rodamientos ($f_{be} = 0$) y en la caja de engranajes ($f_{ca} = 0$). Aunque la norma contempla la posibilidad de considerar modificaciones en los dientes de los engranajes en el cálculo del factor longitudinal de la carga (ambombado de las superficies de contacto, modificaciones en la cabeza del diente, etc.), en este trabajo no se han considerado modificaciones en la geometría del diente, y por lo tanto $B_1 = 1$.

TABLA 5.3: Coeficientes de rigidez del engrane ($c_{\gamma\beta}$) para cada ancho de cara considerado en el estudio

Ancho de cara (mm)	$c_{\gamma\beta} N/(mm \cdot \mu m)$
20	15.52
40	15.52
60	14.13
80	13.15

- (iii) La componente de desalineación inicial equivalente producida por las deformaciones elásticas de los engranajes y de sus ejes (f_{sh}) se determina mediante la ecuación 5.27. En los casos de estudio investigados, se asume que los engranajes rigidizan a los ejes, y por lo tanto, el parámetro K' toma el valor $K' = 0.48$ o $K' = -0.48$, en función de la posición de los engranajes sobre los ejes con respecto al punto de entrada del par. La potencia se transmite a través de una única etapa, y por lo tanto $B^* = 1$.
- (iv) El coeficiente de rigidez del engrane ($c_{\gamma\beta}$) se calcula mediante la ecuación 5.32. Para el cálculo de la rigidez máxima de contacto entre una pareja de dientes (c') se considera que ambos engranajes son macizos ($C_M = 0.8$, $C_R = 1$). Además, no se presupone ninguna modificación en la posición del perfil teórico de la cremallera básica durante su proceso de fabricación ($x_1 = x_2 = 0$). La tabla 5.3 muestra los valores del coeficiente de rigidez del engrane para los distintos anchos de cara considerados.
- (v) Se considera que la transmisión de potencia se realiza de forma uniforme y suave, despreciando impactos o efectos dinámicos en el funcionamiento ($K_A = K_V = 1$).

5.9.2 Consideraciones para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga por el método de los elementos finitos

La determinación del factor de distribución longitudinal de la carga por el método de los elementos finitos $K_{H\beta-FEM}$ se ha realizado utilizando el modelo $FEM2.2$, descrito en el capítulo 4, siguiendo la metodología descrita en el apartado 4.8.4.

El estudio se ha realizado considerando un modelo de elementos finitos con tres parejas de dientes. Se ha investigado una única posición de contacto, en la que el contacto sin carga de la pareja de dientes central se produce en el plano axial, pues en esta posición toda la carga se transmite a través de una única pareja de dientes.

TABLA 5.4: Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos

Magnitudes	Piñón	Rueda
Nodos en dirección longitudinal	75	75
Nodos en la parte inferior del anillo	2	2
Nodos en la parte superior del anillo	3	3
Nodos en el redondeo	8	8
Nodos en la dirección del perfil	58	57
Punto de posicionamiento	1.2	1.2

TABLA 5.5: Condiciones de contorno aplicadas al modelo de elementos finitos

Nodo	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
A_1	R	R	R	L	L	L
B_1	R	R	L	L	L	L
A_2	R	R	R	L	L	L
B_2	R	R	L	L	L	R

(R=Restringido, L=Libre)

La densidad de la malla de las geometrías de contacto viene determinada por los parámetros especificados en la figura 4.6. A estos parámetros de mallado se les ha asignado los valores mostrados en la tabla 5.4. Como resultado, el modelo resultante de elementos finitos cuenta con 304955 nodos y 263964 elementos.

Las condiciones de contorno aplicadas en los apoyos del modelo de elementos finitos se resumen en la tabla 5.5. En los nodos A_1 y A_2 se restringen todos los movimientos de traslación, mientras que en los nodos B_1 y B_2 únicamente se restringen aquellas translaciones en el plano transversal al eje, dejando libre el movimiento axial. Los movimientos de rotación se dejan libres en todos los apoyos, excepto la rotación θ_z del nodo B_2 , que restringe el giro de la transmisión. De esta manera se simula que la transmisión está montada sobre rodamientos autoalineantes. Se considera un par torsor de $140 \text{ N} \cdot \text{m}$ aplicado sobre el nodo A_1 .

5.10 Resultados

En este apartado se presenta un resumen de aquellos resultados más destacables obtenidos a partir del análisis de los casos de estudio mostrados en la tabla 5.2. Además, se realiza una comparación de la evolución del factor de distribución longitudinal de la carga, calculado por el método C de la norma ISO-6336 y por el método de los elementos finitos, con los distintos parámetros anteriormente mencionados.

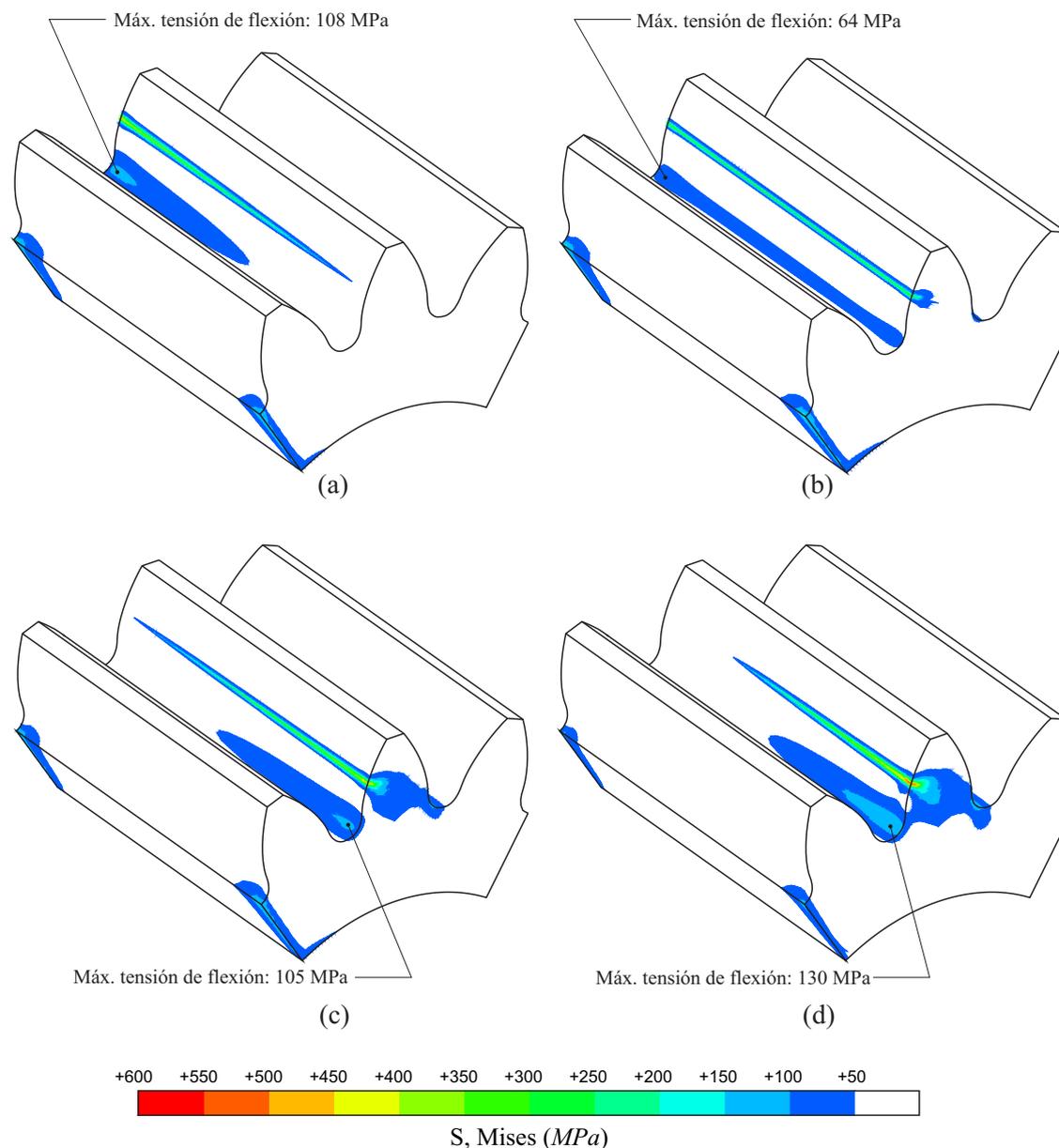


FIGURA 5.6: Distribución de tensiones de von Mises en los casos de estudio donde $b = 40 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$, $d_{sh1} = 25 \text{ mm}$ y (a) $z_g = 0.4 \cdot L$, (b) $z_g = 0.5 \cdot L$, (c) $z_g = 0.6 \cdot L$ and (d) $z_g = 0.7 \cdot L$

En la figura 5.6 se muestran las distribuciones de tensiones de von Mises sobre el diente del piñón para algunos casos de estudio, obtenidas a partir del análisis del modelo de elementos finitos. Se puede observar que la tensión de flexión máxima se incrementa a medida que la posición de montaje de los engranajes se aleja de la porción central de los ejes. En los casos simétricos (figuras 5.6a y 5.6c), se puede observar que las tensiones de flexión máximas son mayores cuando los engranajes están montados en la posición más cercana del punto de entrada del par ($z_g < 0.5 \cdot L$). Este incremento de la tensión de flexión está relacionado con el hecho de que en función de la configuración del punto de entrada y de salida de la potencia en la transmisión, las desalineaciones del engrane

producidas por la deflexión de los ejes y las deformaciones torsionales sean aditivas o compensatorias. Este efecto está contemplado por el parámetro K' de la ecuación 5.27 del método C de la norma ISO-6336.

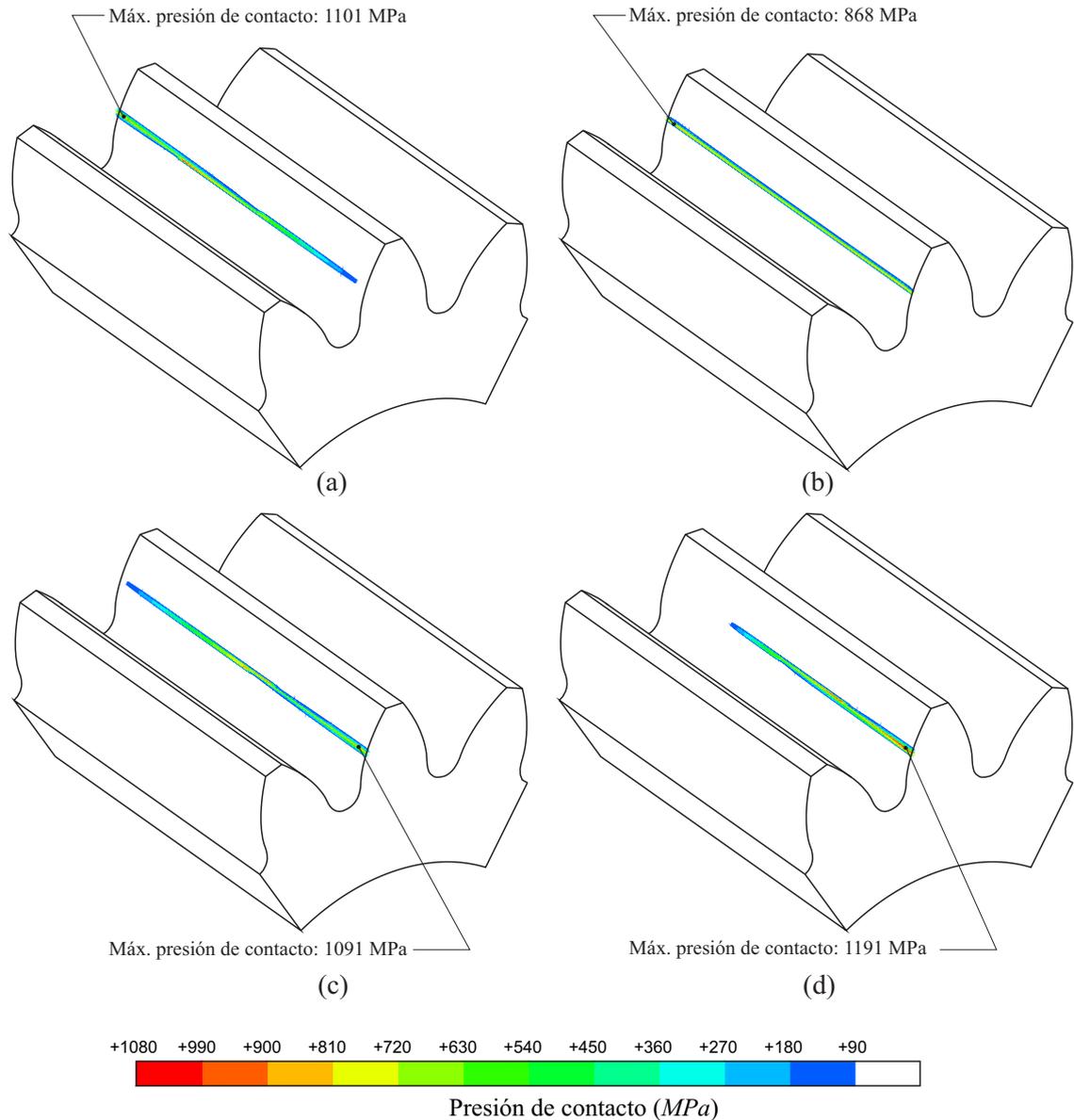


FIGURA 5.7: Formación del contacto y distribución de presiones de contacto en los casos de estudio donde $b = 40 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$, $d_{sh1} = 25 \text{ mm}$ y (a) $z_g = 0.4 \cdot L$, (b) $z_g = 0.5 \cdot L$, (c) $z_g = 0.6 \cdot L$ and (d) $z_g = 0.7 \cdot L$

Efectos similares se pueden observar en la figura 5.7, donde se muestra la formación del contacto sobre el diente del piñón y las distribuciones de presiones de contacto para algunos casos de diseño, obtenidas a partir del análisis del modelo de elementos finitos. Se puede apreciar como a medida que la posición de montaje de los engranajes se aleja de la porción central del eje, las presiones de contacto máximas aumentan, y la longitud de la huella de contacto se reduce. Si se consideran dos casos de estudio simétricos (figuras 5.7a y 5.7c), se puede observar que las presiones de contacto máximas son

mayores cuando los engranajes están montados en la posición más cercana del punto de entrada del par ($z_g < 0.5 \cdot L$).

En la figura 5.8 se muestran las funciones de intensidad de carga para algunos casos de diseño, calculadas a partir del análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión (utilizando el método descrito en el apartado 4.8.2), y a partir del método C de la norma ISO-6336. También se muestra la función de intensidad de carga uniforme, considerando que las fuerzas de contacto se distribuyen uniformemente sobre todo el ancho de cara del engranaje.

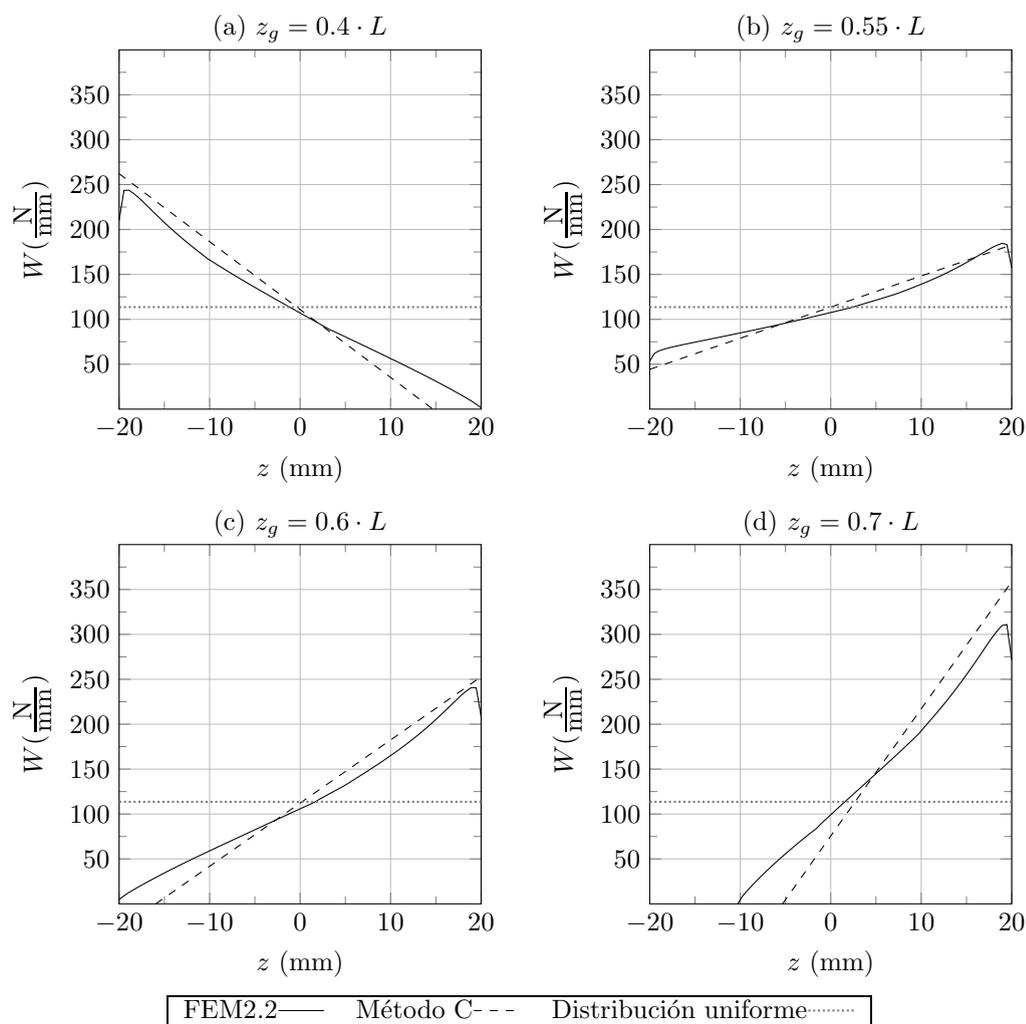


FIGURA 5.8: Función de intensidad de carga en los casos de estudio donde $b = 40 \text{ mm}$, $L = 150 \text{ mm}$, $d_{sh1} = 25 \text{ mm}$ y (a) $z_g = 0.4 \cdot L$, (b) $z_g = 0.55 \cdot L$, (c) $z_g = 0.6 \cdot L$ and (d) $z_g = 0.7 \cdot L$

Para el cálculo de la función de intensidad de carga a partir de los resultados obtenidos del método C de la norma ISO-6336 se han seguido los siguientes pasos:

1. Se determina el valor del ancho de cara aparente (b_{cal}), según el método descrito en el apartado 5.6.

2. Se determina el valor del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta-C}$), según el método descrito en el apartado 5.6.
3. Se calcula la intensidad de carga uniforme, determinando la fuerza total transmitida en el contacto y dividiéndola entre el ancho de cara del engranaje.
4. Debido a la asunción de distribución lineal de la carga, la intensidad de carga máxima se producirá en el extremo del engranaje más cercano a un apoyo, y su magnitud será la de la intensidad de carga uniforme multiplicada por $K_{H\beta-C}$.
5. La función de intensidad de carga decrecerá linealmente hasta alcanzar un valor nulo a una distancia b_{cal} del punto en el que se ha considerado la intensidad máxima de carga.

Se puede observar que para los casos mostrados, en los que el cociente entre ancho de cara y longitud es $b/d_1 \simeq 0.6$, utilizar la hipótesis de distribución lineal de la carga permite obtener resultados precisos con respecto a los obtenidos a partir del modelo de los elementos finitos. Se observa que las diferencias se incrementan a medida que la posición de montaje de los engranajes se aleja de la porción central del eje.

5.10.1 Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga con la desalineación de los engranajes

Como se ha visto en la formulación expuesta anteriormente, se espera que exista una relación entre el factor de distribución longitudinal de la carga y la desalineación de los ejes de los engranajes en el plano de acción. A continuación se investiga esta relación considerando dos tipos de errores de alineación:

- (i) Por un lado, el incremento de la distancia entre centros de los engranajes.
- (ii) Por otro lado, la desalineación angular de los engranajes en el plano de acción ($\Delta\phi$).

Los valores de desalineación ($\Delta\gamma_d, \Delta\nu_d, \Delta x_d, \Delta y_d, \Delta z_d$) se calculan a partir de los resultados obtenidos del análisis del modelo de elementos finitos, teniendo en cuenta los desplazamientos de los nodos de referencia (C_1, D_1, C_2, D_2), como se muestra en el apartado 4.8.5.

La desalineación angular de los engranajes ($\Delta\phi$) se define como el ángulo formado por los vectores que unen las posiciones deformadas de los puntos C_1 y D_1 ($\mathbf{v}^{(1)}$) y C_2 y D_2

($\mathbf{v}^{(2)}$) descritos en el modelo físico de la figura 1.13, como se muestra en la figura 5.9, y se calcula a partir de las magnitudes de desalineación $\Delta\gamma_d$ y $\Delta\nu_d$ mediante la siguiente expresión:

$$\Delta\phi = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{\tan^2(\Delta\gamma_d) + \tan^2(\Delta\nu_d) + 1}} \right] \quad (5.33)$$

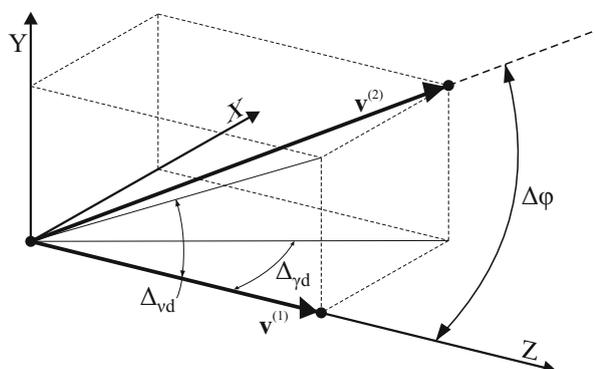


FIGURA 5.9: Desalineación angular del engrane

En las figuras 5.10a y 5.10c se muestra la relación entre la desalineación angular del engrane y el factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta-FEM}$) para algunos casos de diseño. Se puede observar que existe una relación entre estas magnitudes. A medida que la posición de montaje de los engranajes se aleja de la porción central de los ejes, tanto la desalineación angular como el factor de distribución longitudinal de la carga aumentan. Cuando se alcanza un máximo en la variación de la desalineación de los engranajes, se obtiene un máximo en la variación del factor longitudinal de carga. Este comportamiento se produce debido a la existencia de dos efectos opuestos, relacionados con la posición de montaje de los engranajes sobre los ejes:

- (i) La desalineación angular de los engranajes aumenta a medida que éstos se instalan en una posición más alejada del centro del eje. Como consecuencia, la desalineación equivalente del engrane aumenta, incrementando de esta forma el factor de distribución longitudinal de la carga.
- (ii) La desalineación angular de los ejes decrece, puesto que la carga total se sitúa más cerca de los apoyos y la magnitud del momento interno que provoca la flexión de los ejes se reduce. Como consecuencia, se reduce la desalineación equivalente del engrane, reduciéndose también el factor de distribución longitudinal de la carga.

Por otra parte, las figuras 5.10b y 5.10d muestran la variación del error en la distancia entre centros y el factor de distribución longitudinal de la carga para algunos casos de diseño. En este caso no se observa ninguna relación entre ambas magnitudes.

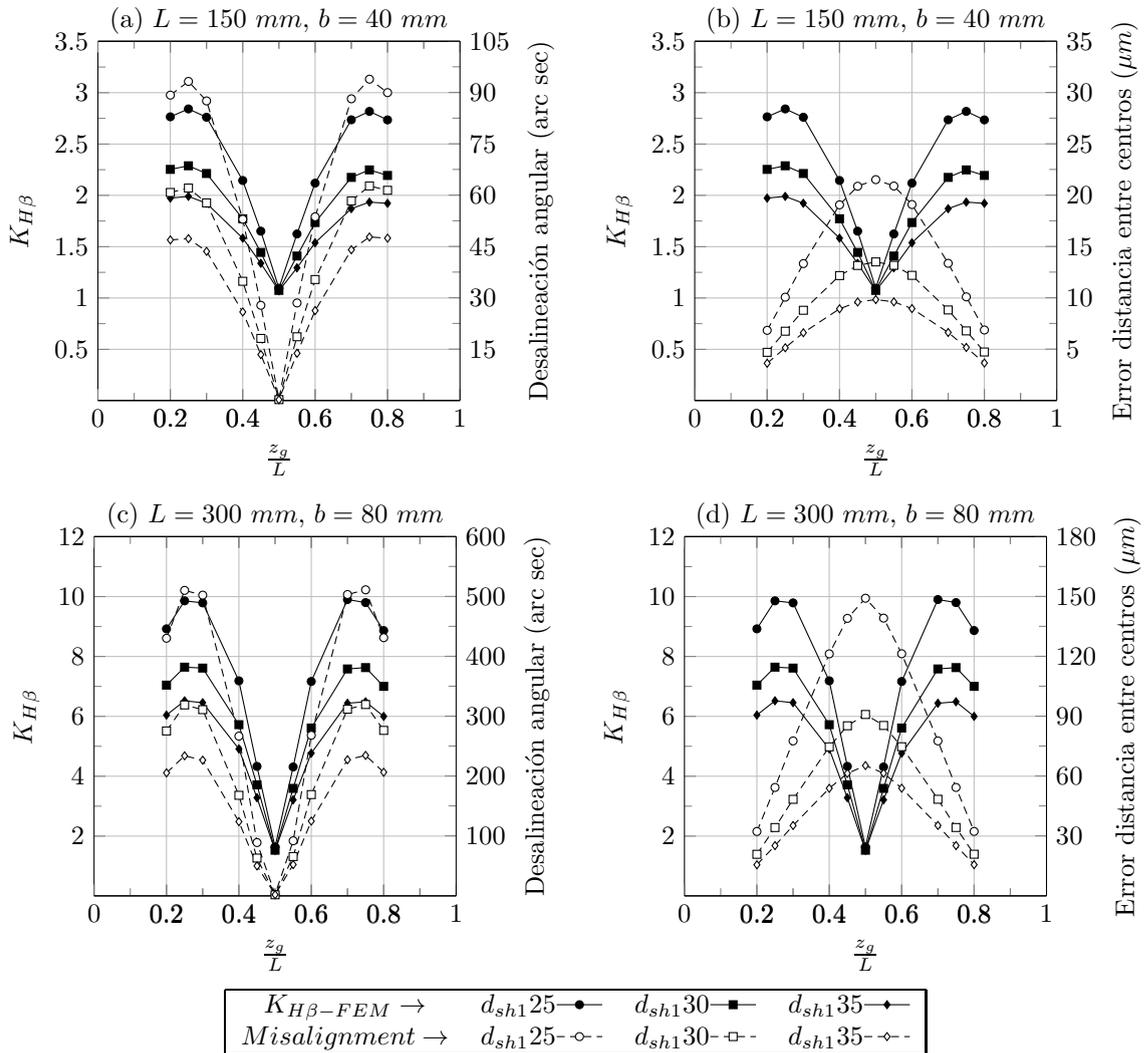


FIGURA 5.10: Comparación de la variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con: (a) y (c) desalineación angular y (b) y (d) error en distancia entre centros

5.10.2 Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y el diámetro de los ejes

La figura 5.11 muestra la variación del factor de distribución longitudinal de la carga, calculado por el método de los elementos finitos y por el método C propuesto por la norma ISO-6336, con el diámetro del eje del piñón (d_{sh1}), para algunos casos de diseño.

Independientemente del método usado para su cálculo, las figuras 5.11a, 5.11b y 5.11c muestran que el factor de distribución longitudinal de la carga decrece a medida que el diámetro de los ejes aumenta. Esto se debe a un incremento en la rigidez de la transmisión que hace que la desalineación del engrane en el plano de acción producida por la deflexión de los ejes se reduzca.

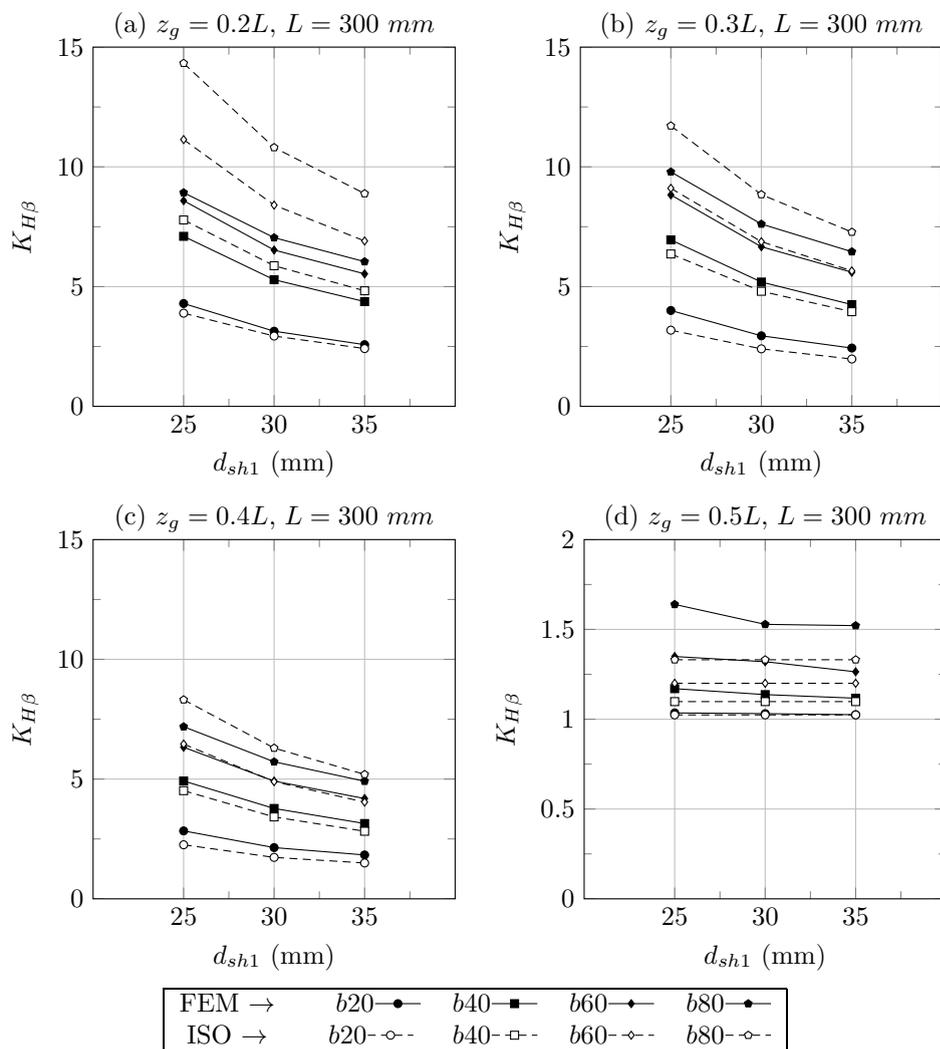


FIGURA 5.11: Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores del diámetro del eje del piñón (d_{sh1}) para algunos casos de diseño

Por el contrario, la figura 5.11d muestra que cuando los engranajes se instalan en una posición coincidente con el centro del eje ($z_g = 0.5L$), en la que se minimiza la desalineación angular de los engranajes, el factor de distribución longitudinal de la carga permanece constante cuando se calcula según el método C propuesto por la norma ISO-6336. Sin embargo, cuando el factor de distribución longitudinal de la carga se calcula mediante el método de los elementos finitos, se observa una leve disminución de su magnitud a medida que se incrementa el diámetro del eje. Esta disminución es más acentuada en aquellos casos donde el ancho de cara de los engranajes es mayor.

Como se ha descrito en el capítulo 3, los cambios bruscos de la sección transversal de la viga mediante la que se modeliza el conjunto eje-engranaje pueden tener cierta influencia sobre su comportamiento a flexión. La influencia de estos cambios bruscos se ha tenido en cuenta en el modelo de elementos finitos *FEM2.2*, descrito en el apartado 4.6.1, y utilizado para llevar a cabo este estudio. En este modelo de elementos finitos, el eje y el

cuerpo del engranaje se modelizan mediante elementos finitos de tipo viga. El módulo resistente de la sección de los elementos viga mediante los que se simula el cuerpo de los engranajes se calcula a partir de un diámetro equivalente, cuyo valor en el extremo del engranaje es igual al diámetro del eje sobre el que va montado, y crece linealmente hasta alcanzar el diámetro primitivo del engranaje. Este incremento del diámetro equivalente se muestra en la figura 5.12a para un piñón cuyo ancho de cara es $b = 80 \text{ mm}$ y distintos diámetros de eje.

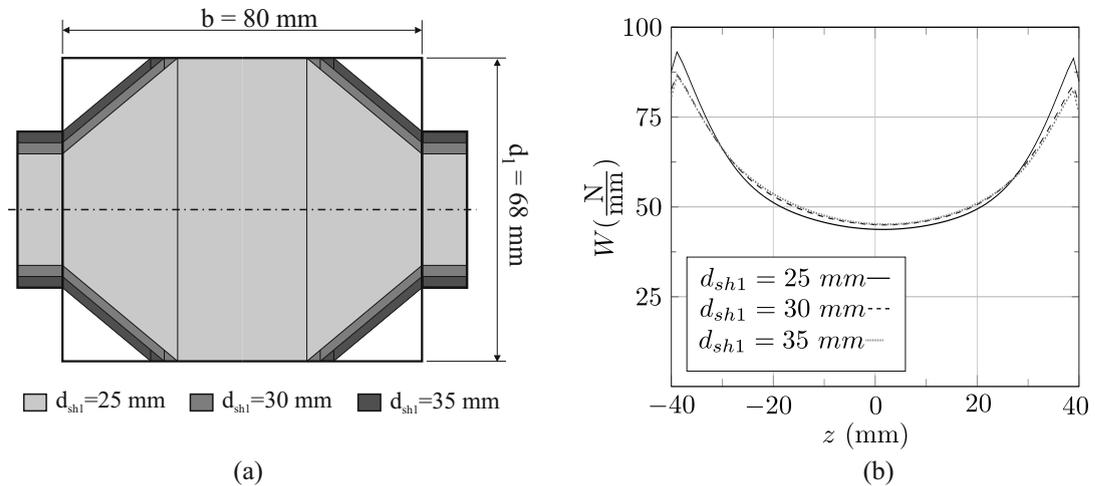


FIGURA 5.12: (a) Diagrama de evolución del diámetro considerado para el comportamiento a flexión en el modelo *FEM2.2* y (b) función de intensidad de carga determinada a partir del modelo *FEM2.2* cuando $b = 80 \text{ mm}$ y $L = 300 \text{ mm}$

Esta consideración hace que la rigidez a flexión del cuerpo del engranaje dependa del diámetro del eje sobre el que va instalado. Esto provoca que la función de distribución de la carga tenga cierta dependencia sobre el diámetro considerado de los ejes, como se puede observar en la figura 5.12b. Se puede apreciar una correlación entre el diámetro equivalente considerado para el cálculo del módulo resistente de las secciones transversales del engranaje y la distribución resultante de intensidad de carga, que afecta al valor calculado del factor de distribución longitudinal de la carga, y que justifica las conclusiones extraídas de la observación de la figura 5.11d.

5.10.3 Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y ancho de cara de los engranajes

La figura 5.13 muestra la variación del factor de distribución longitudinal de la carga, calculado por el método de los elementos finitos y por el método C propuesto por la norma ISO-6336, con el ancho de cara de los engranajes (b), para algunos casos de diseño.

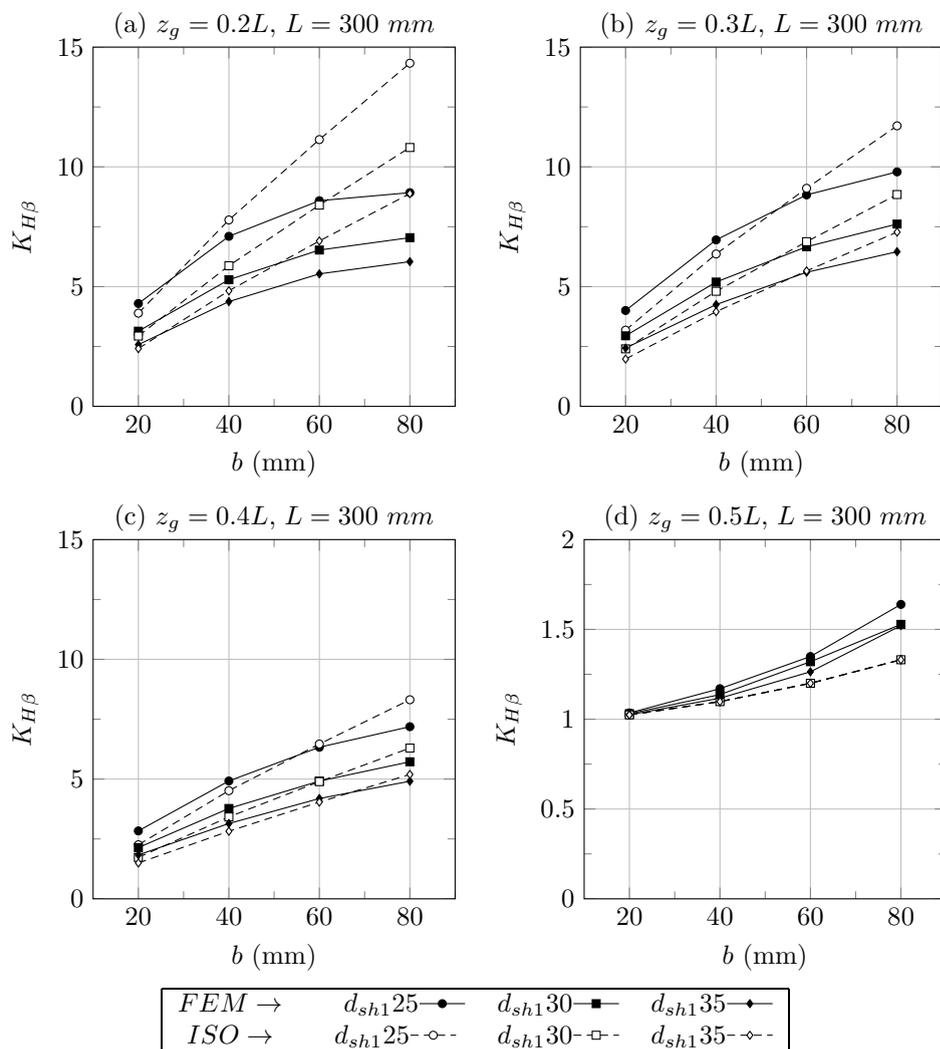


FIGURA 5.13: Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores de ancho de cara (b) para algunos casos de diseño

En las figuras 5.13a, 5.13b y 5.13c se observa que cuando el factor de distribución longitudinal de la carga se calcula por el método de los elementos finitos, se produce una variación no lineal de su magnitud a medida que se incrementa el ancho de cara de los engranajes. Por el contrario, la relación entre el factor de distribución longitudinal de la carga y el ancho de cara es prácticamente lineal cuando se calcula utilizando el método C de la norma ISO-6336. En ambos casos los valores del factor de distribución longitudinal de la carga se incrementan a medida que lo hace el ancho de cara de los engranajes. Estas tendencias se mantienen cuando la posición de montaje de los engranajes coincide con el centro de los ejes ($z_g = 0.5L$), como se muestra en la figura 5.13d.

La comparación entre los valores obtenidos mediante el método de los elementos finitos y el método C de la norma ISO-6336 muestra que el factor de distribución longitudinal de la carga calculado utilizando las ecuaciones propuestas en la norma ISO-6336 tiende a ser más pequeño que el obtenido mediante el método de los elementos finitos cuando el

ancho de cara es pequeño. En cambio, los valores del factor de distribución longitudinal obtenidos a partir del método C de la norma ISO-6336 tienden a ser mayores que los obtenidos con el modelo de elementos finitos cuando el ancho de cara es grande.

No obstante, cuando los engranajes se instalan en la posición central de los ejes, el factor de distribución longitudinal de la carga calculado a partir del modelo de elementos finitos siempre es mayor que el calculado por el método C de la norma ISO-6336. Como se deduce de la ecuación 5.27, en esta posición la componente de desalineación del engrane correspondiente a la flexión del eje es nula, y únicamente se considera la componente de desalineación del engrane producida por la torsión de las geometrías de los engranajes. Esto indica que en estos casos, la formulación propuesta por la norma ISO-6336 subestima el efecto de la desalineación del engrane producida por la torsión de los engranajes en el incremento de la intensidad de carga.

5.10.4 Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y longitud de los ejes

La figura 5.14 muestra la variación del factor de distribución longitudinal de la carga, calculado por el método de los elementos finitos y por el método C propuesto por la norma ISO-6336, con la longitud de los ejes (L), para algunos casos de diseño.

Por una parte, se observa un incremento no lineal del factor de distribución longitudinal de la carga cuando este se calcula mediante el método de los elementos finitos. Por otra parte, este incremento es lineal cuando el factor de distribución longitudinal de la carga se calcula siguiendo la norma ISO-6336.

Cuando los engranajes se instalan en la porción central de los ejes ($z_g = 0.5L$, no mostrado en la figura), los factores de carga permanecen constantes, siendo menor el obtenido mediante el método de los elementos finitos.

5.10.5 Evolución y comparación del factor de distribución longitudinal de la carga y posición de montaje de los engranajes sobre los ejes

La figura 5.15 muestra la variación del factor de distribución longitudinal de la carga, calculado por el método de los elementos finitos y por el método C propuesto por la norma ISO-6336, con la posición relativa de los engranajes sobre los ejes (z_g), para algunos casos de diseño.

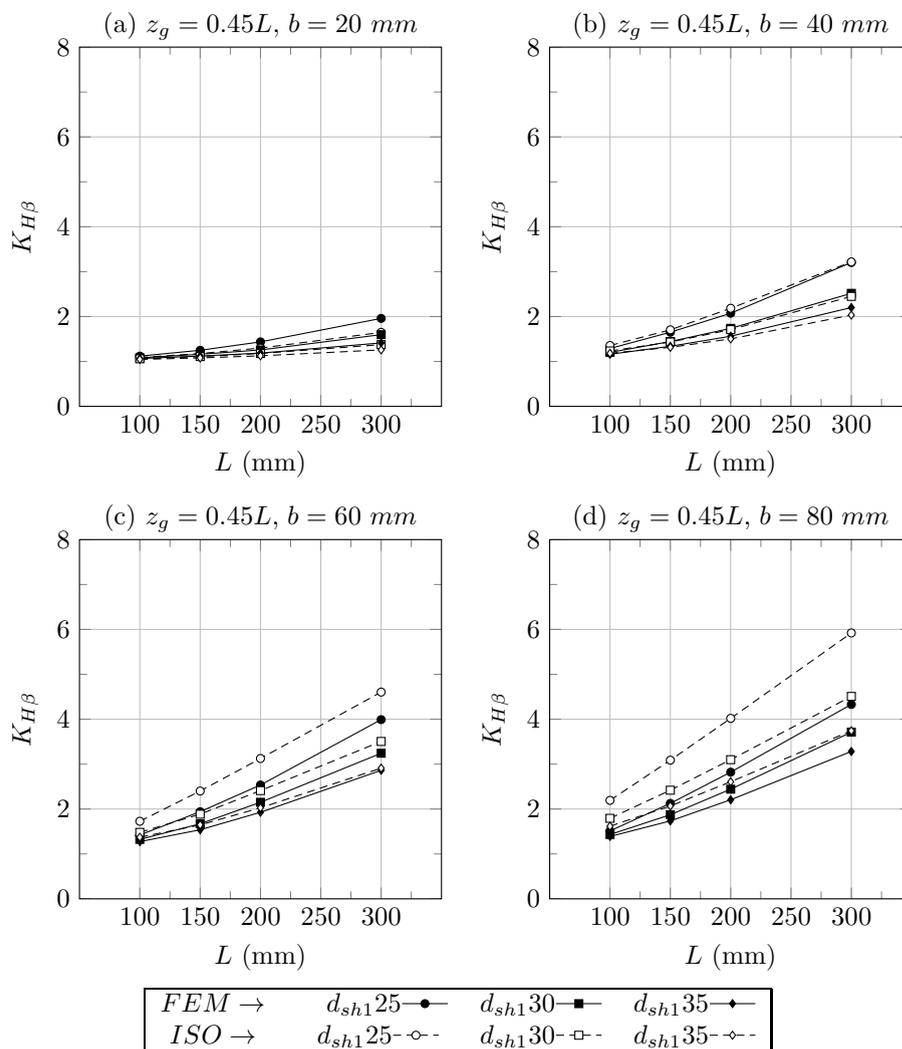


FIGURA 5.14: Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores de longitud de los ejes (L) para algunos casos de diseño

En ambos casos, se observa que se produce un incremento de la magnitud del factor de distribución longitudinal de la carga a medida que la posición de montaje de los engranajes se aleja del plano medio del eje. Estas variaciones están relacionadas con la variación de la desalineación angular mostrada en las figuras 5.10a y 5.10c.

Por otra parte, se observa que se alcanza un máximo en la variación del factor de distribución longitudinal de la carga cuando éste se calcula a partir del modelo de elementos finitos. Este máximo se produce cuando la posición de montaje de los engranajes sobre el eje está en la parte central comprendida entre el plano medio del eje y los apoyos ($z_g = 0.25L$ y $z_g = 0.75L$). En cambio, ese máximo no se alcanza cuando el factor de carga se calcula utilizando el método propuesto en la norma ISO.

Para anchos de cara del engranaje pequeños, el factor de carga calculado por el método C de la norma ISO-6336 tiende a ser menor que el obtenido a partir del análisis del

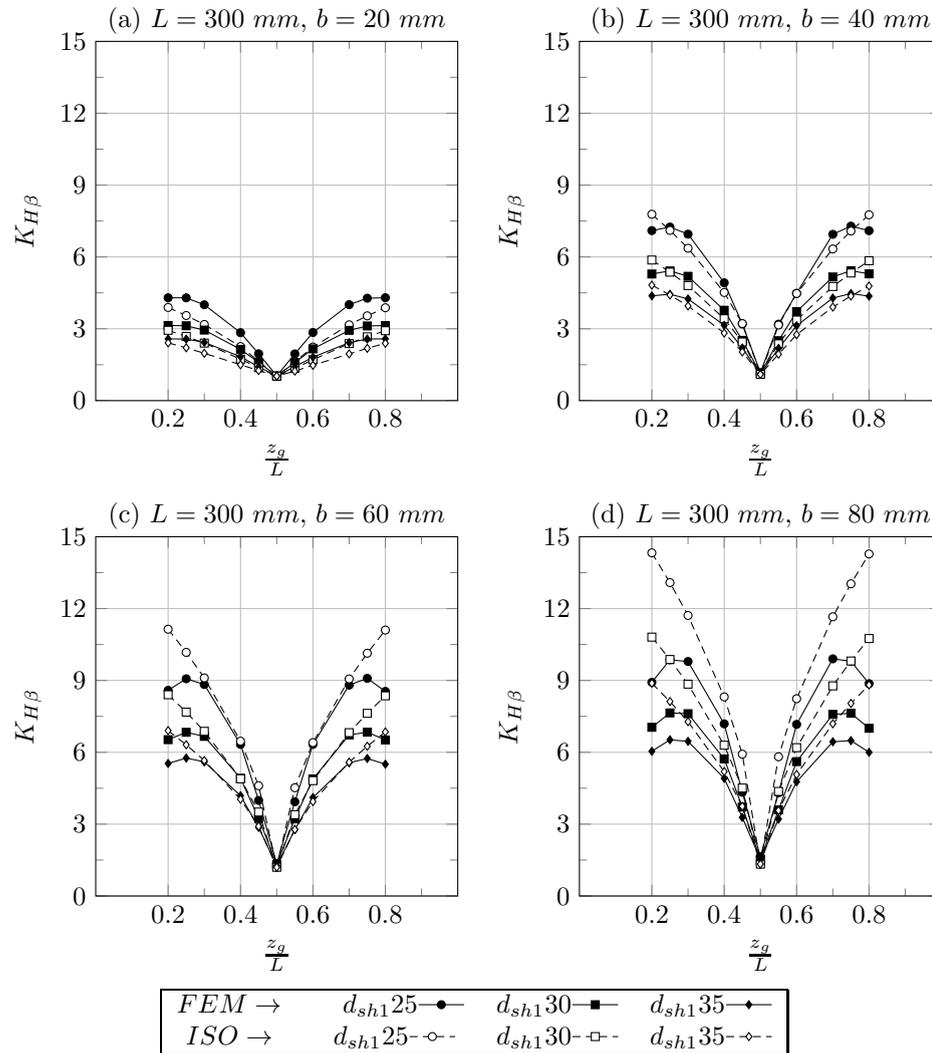


FIGURA 5.15: Variación del factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) con distintos valores de la posición relativa que ocupan los engranajes sobre los ejes (z_g/L) para algunos casos de diseño

modelo de elementos finitos. Por otra parte, en anchos de cara grandes (figura 5.15a), el factor de carga calculado por el método C de la norma ISO-6336 tiende a ser más grande que el calculado a partir del análisis del modelo de elementos finitos (figura 5.15d).

5.10.6 Diferencia relativa entre factores de distribución longitudinal de la carga y el ratio b/L

Para cada uno de los casos de diseño investigados, se ha calculado la diferencia relativa (ϵ_{rel}) entre el factor de distribución longitudinal de la carga calculado por el método C de la norma ISO-6336 ($K_{H\beta-C}$) y el obtenido a partir del análisis del modelo de elementos finitos ($K_{H\beta-FEM}$), utilizando la siguiente expresión:

$$\epsilon_{rel} = \frac{K_{H\beta-C} - K_{H\beta-FEM}}{K_{H\beta-FEM}} \cdot 100 \quad (5.34)$$

La figura 5.16 muestra los resultados de diferencia relativa obtenidos para cuatro valores representativos del ratio z_g/L . Para cada caso representativo de z_g/L se ha investigado la variación de ϵ_{rel} con el ratio de b/L . Se ha obtenido una regresión lineal entre ϵ_{rel} y b/L , que muestra una tendencia creciente con el ratio b/L , aunque con cierta dispersión.

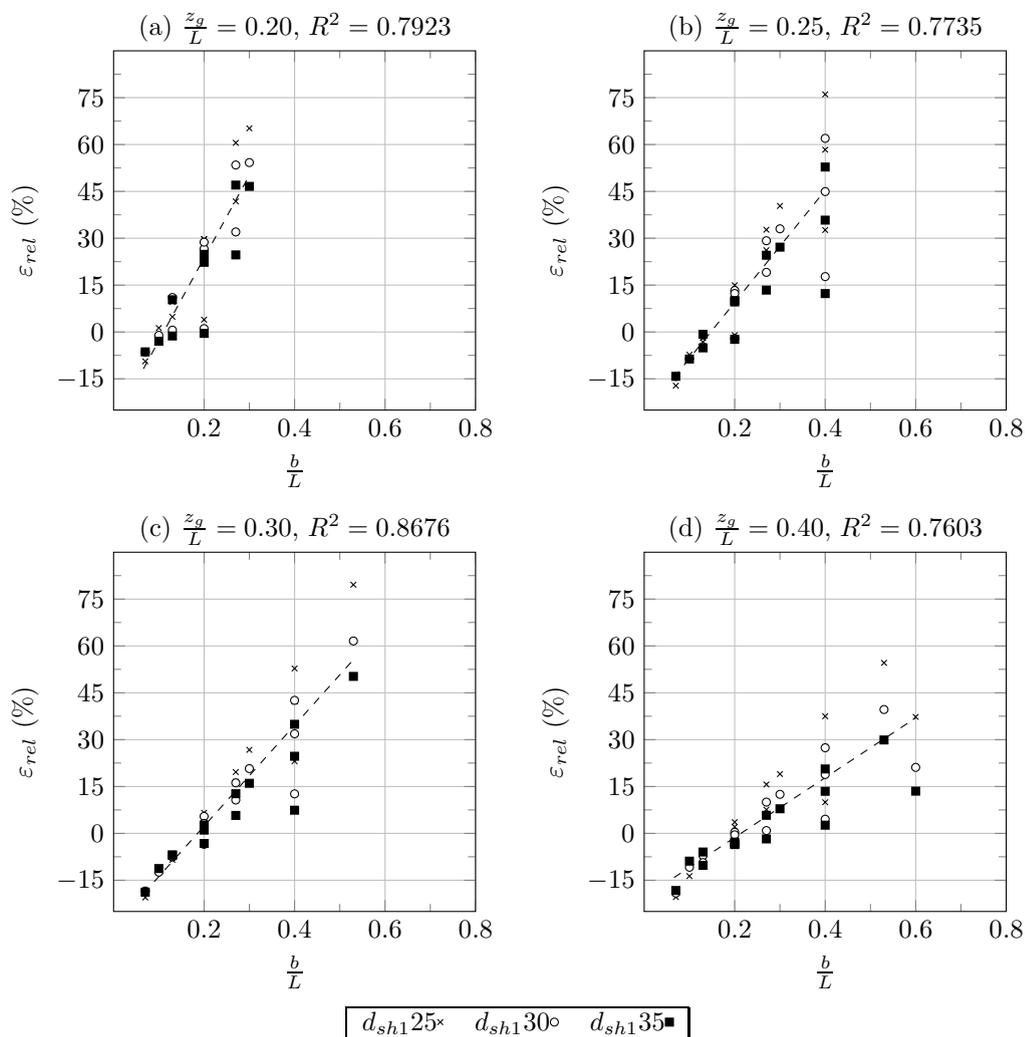


FIGURA 5.16: Regresiones lineales entre ϵ_{rel} y el cociente $\frac{b}{L}$ para cuatro valores representativos de $\frac{z_g}{L}$

Por otro lado, es posible obtener una curva envolvente de valores mínimos de ϵ_{rel} y una curva envolvente de valores máximos de ϵ_{rel} para cada caso representativo de z_g/L . La figura 5.17a muestra la curva envolvente de valores mínimos de ϵ_{rel} para el caso $z_g = 0.4L$. La figura 5.17b muestra la curva envolvente de valores máximos de ϵ_{rel} para el mismo caso.

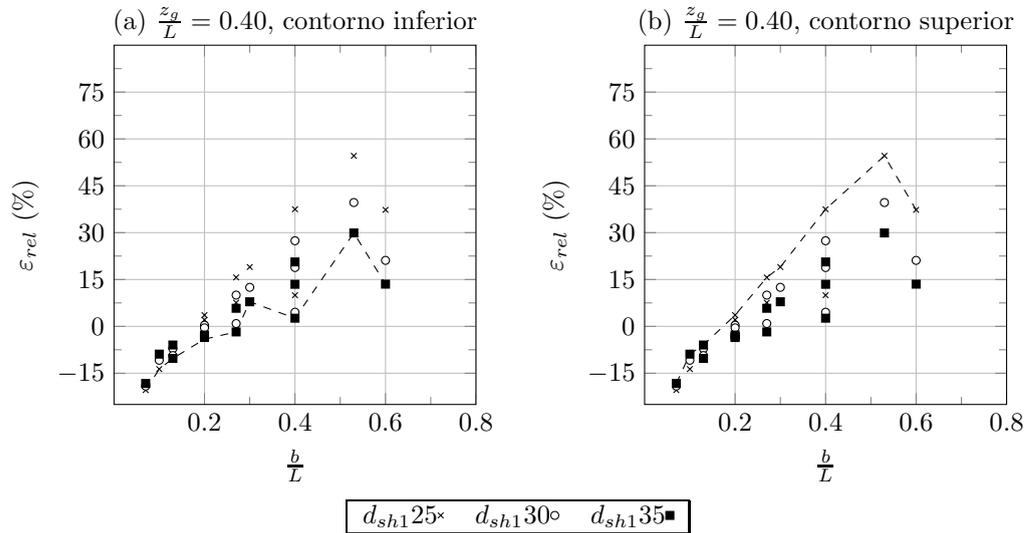


FIGURA 5.17: Curvas envolventes de (a) valores mínimos y (b) valores máximos de ϵ_{rel} cuando $\frac{z_g}{L} = 0.4L$

Toda la información obtenida sobre los valores máximos y mínimos de ϵ_{rel} se ha resumido en la figura 5.18, donde se comprenden todos los casos estudiados. La figura 5.18a muestra los valores mínimos de ϵ_{rel} , mientras la figura 5.18b muestra los valores máximos de ϵ_{rel} para cada par de valores $(z_g/L, b/L)$. Las líneas sólidas indican que han ido obtenidas a partir de la interpolación de los valores obtenidos a partir los casos de estudio investigados. Las líneas discontinuas indican que han sido obtenidas mediante extrapolación de los valores obtenidos a partir los casos de estudio investigados. Las zonas rayadas representan casos de diseño con incompatibilidades geométricas, como por ejemplo, casos en los que por su posición de montaje, una porción del engranaje quedaría fuera de la longitud del eje. Los puntos marcados con una aspa hacen referencia a las combinaciones investigadas.

La zona con sombreado gris claro de la figura 5.18a representa las combinaciones de valores $(\frac{z_g}{L}, \frac{b}{L})$ donde los valores mínimos de ϵ_{rel} son negativos. La zona con sombreado gris claro de la figura 5.18b muestra las combinaciones de valores de $(\frac{z_g}{L}, \frac{b}{L})$ donde los valores máximos de ϵ_{rel} son negativos. La zona con sombreado gris oscuro de la figura 5.18a representa las combinaciones en las que tanto los valores mínimos de ϵ_{rel} como los valores máximos son negativos.

En las figuras se observa que la norma tiende a ofrecer valores poco conservadores del factor de distribución longitudinal de la carga cuando el ancho de cara de los engranajes es pequeño comparado con la longitud de los ejes ($b/L < 0.3$). Para este rango de relaciones de b/L , los diseñadores deben prestar especial interés a las zonas sombreadas con gris oscuro, pues en estas zonas los valores obtenidos de $K_{H\beta-C}$ siempre son inferiores que los de $K_{H\beta-FEM}$. En el resto de esta zona, las diferencias relativas del factor de

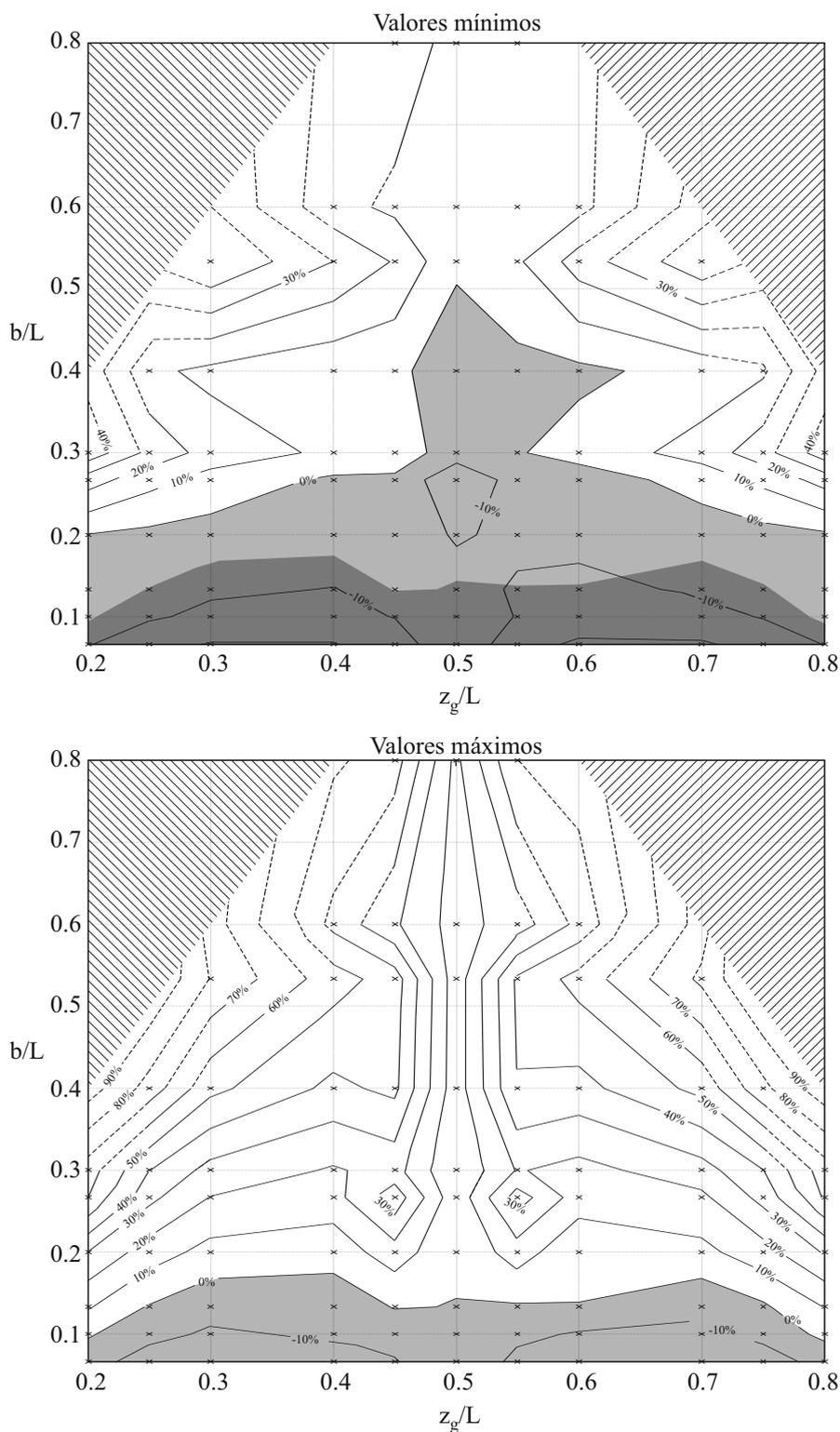


FIGURA 5.18: Mapeado de valores envolventes (a) mínimos y (b) máximos de valores de ϵ_{rel} para cada par de valores de $(\frac{z_g}{L}, \frac{b}{L})$

distribución longitudinal de la carga calculado mediante el método C de la norma con respecto al obtenido mediante el análisis del modelo de elementos finitos oscilan entre -10% y $+50\%$.

Cuando la relación entre el ancho de cara de los engranajes y la longitud de los ejes es moderada ($0.3 < b/L < 0.6$), las diferencias relativas entre el factor de distribución longitudinal de la carga calculado por el método C de la norma ISO-6336 con respecto al obtenido a partir del análisis del modelo de elementos finitos oscilan entre -10% y $+90\%$.

Cuando los anchos de cara de los engranajes son grandes comparados con la longitud de los ejes sobre los que van instalados ($b/L > 0.7$), el factor de distribución longitudinal de la carga calculado a partir del método C de la norma ISO-6336 siempre es mayor que el obtenido a partir del análisis del modelo de elementos finitos, llevando a diseños de la transmisión conservativos.

Por otra parte, se observa como el factor de distribución de la carga calculado a través de la norma ISO-6336 tiene a ser más grande que el calculado a través del análisis del modelo de elementos finitos en las posiciones de montaje extremas, mientras que cuando los engranajes se instalan en posiciones centradas sobre los ejes estas diferencias tienden a reducirse.

En general, y para los diseños habituales de transmisiones de engranajes, con relaciones entre anchos de cara de engranajes y longitudes de ejes moderadas ($0.3 < b/L < 0.6$), y posiciones de montaje centradas sobre el eje ($0.4 < z_g/L < 0.6$), puede concluirse que el método C de la norma ISO-6336 tiende a ofrecer valores conservadores del factor de distribución longitudinal de la carga, cuyas diferencias relativas con respecto a los valores obtenidos a partir del análisis del modelo de elementos finitos oscilan entre un valor mínimo de -5% y un valor máximo de $+50\%$.

5.11 Conclusiones

En este capítulo se ha investigado el factor de distribución longitudinal de la carga ($K_{H\beta}$) presente en la conocida norma ISO-6336, que tiene en cuenta los efectos que produce una distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara de los dientes de engranaje sobre las tensiones de contacto y las tensiones de flexión en la raíz del diente.

La norma propone dos metodologías distintas para el cálculo de este factor, denominadas método B y método C. El método B es un método iterativo, mientras que el método C es un método analítico basado en una simplificación del método B. Ambos métodos de

cálculo han sido expuestos y analizados en este capítulo, aunque por su utilidad en la industria, ha sido el método C el que ha sido el objetivo principal del estudio.

Dicho método ha sido utilizado para realizar un extenso estudio en el que se ha calculado el factor de distribución longitudinal de la carga por el método C de la norma ISO-6336 ($K_{H\beta-C}$) para 456 casos de diseño de una transmisión de engranajes, que incluyen variaciones de los parámetros principales de diseño que influyen en este parámetro: la posición de los engranajes sobre los ejes, el ancho de cara de los engranajes, el diámetro del eje del piñón y la longitud de los ejes.

Los valores del factor de distribución longitudinal de la carga obtenidos utilizando el método C propuesto en la norma ISO-6336 se han comparado con los calculados a partir del análisis de un modelo avanzado de elementos finitos ($K_{H\beta-FEM}$). Esta comparación ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

- (i) Se observa una correlación entre el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta-FEM}$ y la desalineación angular en el plano de acción, proporcionando máximos relativos de $K_{H\beta-FEM}$ cuando se ha variado la posición de montaje de los engranajes sobre los ejes.
- (ii) Se observa que el factor de distribución longitudinal de la carga tiende a disminuir a medida que se incrementa el diámetro de los ejes de los engranajes. El incremento de rigidez que supone el aumento del diámetro de los ejes hace que las desalineaciones del engrane se reduzcan, y con ellas, el factor de distribución longitudinal de la carga.
- (iii) Se observa que el factor de distribución longitudinal de la carga tiende a incrementarse a medida que aumenta el ancho de cara de los engranajes. Cuando los anchos de cara son pequeños, $K_{H\beta-C}$ tiende a ser menor que $K_{H\beta-FEM}$. En cambio, cuando los anchos de cara son grandes, $K_{H\beta-C}$ tiende a ser mayor que $K_{H\beta-FEM}$.
- (iv) Se observa que el factor de distribución longitudinal de la carga se incrementa con la longitud de los ejes. Las diferencias entre $K_{H\beta-FEM}$ y $K_{H\beta-C}$ se reducen cuando los ejes son cortos, y aumentan a medida que lo hace la longitud de los ejes.
- (v) Se observa que el factor de distribución longitudinal de la carga aumenta a medida que los engranajes se desplazan de la posición central del eje. Mientras que $K_{H\beta-FEM}$ alcanza un máximo en las posiciones $z_g = 0.25L$ y $z_g = 0.75L$, no se observa ningún máximo en la evolución de $K_{H\beta-C}$ al variar la posición de montaje de los engranajes sobre los ejes.

- (vi) Se ha obtenido un mapeado de valores máximos y mínimos de las diferencias relativas entre $K_{H\beta-FEM}$ y $K_{H\beta-C}$, considerando como variables la posición de montaje de los engranajes sobre los ejes y el cociente entre el ancho de cara y la longitud de los ejes, proporcionando información de interés para los diseñadores de engranajes.

Los resultados presentados en este capítulo están incluidos en la referencia [163].

Capítulo 6

Modelo semianalítico para el cálculo de la distribución de presión de contacto en transmisiones por engranaje

6.1 Introducción

Uno de los objetivos principales a cumplir cuando se diseña una nueva transmisión de engranajes es conseguir transmitir la mayor cantidad de potencia sin perder durabilidad de la transmisión [1]. En este tipo de transmisiones, la potencia se transmite a través del contacto que se produce entre los dientes del piñón y de la rueda, y como consecuencia de este contacto se genera una distribución de presión que actúa sobre las superficies del piñón y de la rueda.

La forma en la que esta presión de contacto se distribuye sobre las superficies de contacto, y especialmente los valores máximos de presión alcanzados, tienen una gran influencia sobre la durabilidad de las superficies de los engranajes y sobre la resistencia a los esfuerzos de flexión en la raíz de los dientes [20, 77]. Por ese motivo, estos dos parámetros se suelen considerar determinantes cuando se calcula la capacidad de carga de una transmisión de engranajes [1, 2].

La determinación de la distribución de la presión de contacto, y especialmente de los valores máximos de presión alcanzados, ha sido de gran interés para las principales guías de diseño de engranajes utilizadas en la industria, entre las que destacan la norma ISO-6336 [9] y la norma AGMA-2001-D4 [10]. Como se ha descrito en el capítulo 5, en estas

normas se proponen métodos de cálculo basados en factores de influencia que permiten realizar una estimación de los valores máximos de presión de contacto, y a partir de ellos, estimar la capacidad de carga de los engranajes.

Sin embargo, más allá de los modelos simplificados de cálculo propuestos por estas normas, hay situaciones en las que se requiere un análisis más exhaustivo del proceso de engrane bajo carga para ayudar al diseñador a mejorar el diseño de la transmisión. Para satisfacer este requerimiento, se han desarrollado distintas aproximaciones que además de los valores máximos de presión de contacto son capaces de proporcionar otra información relevante para el diseñador, como la distribución de presión o el error de transmisión.

Algunas de estas aproximaciones utilizan soluciones analíticas [28, 164], generalmente basadas en la teoría de contacto de Hertz [7], para determinar la distribución de presión que se generan como consecuencia del contacto entre los dientes de los engranajes. Otras aproximaciones se basan en métodos numéricos basados en la discretización del dominio, como el método de los elementos finitos. Como se ha comentado en el capítulo 4, han sido varios los autores que han utilizado este método de análisis para investigar el comportamiento bajo carga de las transmisiones de engranajes [39, 82, 138]. Comparadas con el método de los elementos finitos, se puede decir que las aproximaciones analíticas son más eficientes en términos de coste computacional, pero tienen algunas limitaciones de aplicación derivadas de las hipótesis bajo las que se han formulado, que hace que no sean apropiadas para algunos casos de estudio. Por otra parte, las aproximaciones basadas en el método de los elementos finitos pueden superar estas limitaciones, pero a un coste computacional muy superior.

Como una alternativa intermedia a estas dos aproximaciones se han propuesto distintos métodos semianalíticos, cuyo propósito principal es la estimación rápida de la distribución de presión resultante del contacto entre dientes de engranaje bajo carga. La mayoría de estos métodos se basan en la utilización de un dominio discretizado, en el que coeficientes de influencia relacionan las presiones de contacto con los desplazamientos que producen en las superficies los sólidos involucrados en el contacto. Entre ellos, los más relevantes son los propuestos por Sheveleva [27], Guilbault [48], Wu [52], Wink [50], Mahanta [47] y Pop [54]. Sin embargo, en estos trabajos los modelos de cálculo no se considera la desalineación de los engranajes producida por la deformación de los ejes bajo carga, que puede tener una importancia significativa en la formación del contacto y en la distribución de presión resultante. Además, efectos que generan incrementos de la presión de contacto, como la presencia cercana de bordes de las superficie de contacto, no siempre son tenidos en cuenta en estos estudios.

Por lo tanto, el objetivo de este capítulo será proponer un método capaz de realizar una estimación rápida de la distribución de presión que se produce en el contacto entre los dientes de los engranajes de una transmisión bajo carga teniendo en cuenta la desalineación de los engranajes que se produce como consecuencia de la deformación de los ejes bajo carga. A tal efecto, en primer lugar se expondrán los principios teóricos que permiten resolver el problema de contacto sin fricción entre dos sólidos. Posteriormente se describirá la implementación de los algoritmos que permiten aplicar dichos principios teóricos a casos generales de contacto, y se formulará una nueva estrategia de refinamiento adaptativo que permitirá reducir el coste computacional del algoritmo. Por último, el método se particularizará para la resolución de problemas de contacto en transmisiones de engranajes. La investigación realizada se ilustrará con ejemplos numéricos, y los resultados obtenidos serán validados con la ayuda de los modelos de elementos finitos propuestos en el capítulo 4.

6.2 Deformación producida en la superficie de un sólido por una distribución de presión. Elementos de presión.

La base teórica de los métodos utilizados en este capítulo corresponde a la aproximación clásica que da solución al problema tensional y deformacional resultante al aplicar una carga puntual en un semiespacio elástico. Esta solución fue propuesta inicialmente por Boussinesq [42] (para cargas normales) y Cerruti [43] (para cargas tangenciales), y posteriormente extendida por Love [165], y sus líneas principales se exponen a continuación.

Considérese un sólido cuyas características permitan estudiarlo bajo las hipótesis de semiespacio elástico, como el mostrado en la figura 6.1. Sobre este sólido se define un sistema de coordenadas de referencia, cuyos ejes X e Y definen un plano coincidente con su superficie, y el eje Z apunta hacia su interior. Sobre la superficie de este sólido se aplica una distribución de presión normal (p) que actúa sobre un área denotada por S .

Considérese un punto genérico C perteneciente al área S , cuya posición viene definida por el vector $\mathbf{r}'(\xi, \eta)$, donde las variables (ξ, η) corresponden a las coordenadas de puntos superficiales dentro del área S . Considérese otro punto genérico H perteneciente a la superficie del sólido, cuya posición viene definida por el vector $\mathbf{r}(x, y)$. Cuando el área de S tiende a cero, la distribución de presión se convierte en una carga puntual (P), normal a la superficie y aplicada en el punto C . El desplazamiento normal elástico en un punto H de la superficie producido por dicha carga puntual se denota por $\omega(\mathbf{r})$, y se puede calcular mediante la conocida relación de Boussinesq [42]:

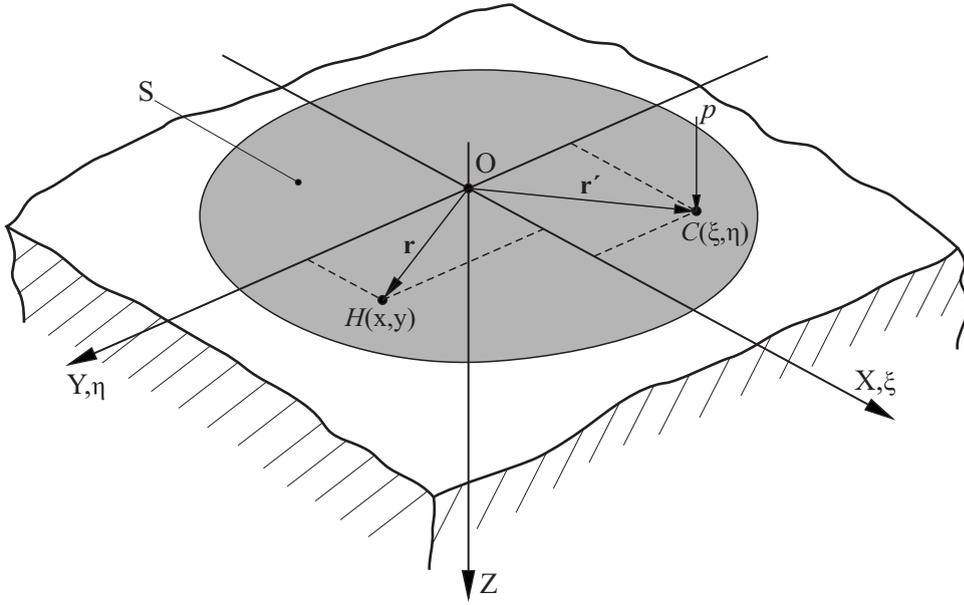


FIGURA 6.1: Semiespacio elástico sometido a distribución de presión

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \frac{P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.1)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson y G el módulo de cizalladura.

El desplazamiento normal que se produce en el punto H debido a una distribución de presión normal aplicada sobre el área S se puede determinar a partir de la ecuación 6.1 aplicando el principio de superposición:

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\xi d\eta \quad (6.2)$$

La solución a la ecuación 6.2 requiere de la evaluación de una integral sobre el área S donde está aplicada la presión, que puede tener distinto grado de dificultad, dependiendo de la tipología del área y de la distribución de presión considerada.

De acuerdo con Svec [166], evaluar esta integral de forma numérica no es una alternativa apropiada, pues al ser una integral impropia repercute en resultados de poca precisión. Por este motivo, a lo largo de los años se han obtenido diversas soluciones explícitas de esta integral para ciertas distribuciones de presión aplicadas sobre áreas S con geometrías determinadas, llamadas elementos de presión y denotadas por Δ_j . Cada elemento de presión tiene una área asociada, denotada por A_j .

De esta manera, Love [167] obtuvo una solución explícita de esta integral para elementos de presión rectangulares sometidos a una distribución de presión uniforme. Sobre este

mismo tipo de elementos de presión, Dydo y Busby [168] consideraron distribuciones de presión descritas por polinomios de primer orden. Por otra parte, Svec y Gladwell [166] obtuvieron la solución para distribuciones de presión descritas por polinomios y aplicadas sobre elementos triangulares. Otras distribuciones de presión aplicadas sobre geometrías triangulares fueron estudiados por Kalker [41] y Li [169].

Aunque se han propuesto soluciones para elementos de presión con otros tipos de geometría, como las circulares [167] o hexagonales [7], en este trabajo únicamente se han contemplado elementos de presión con geometrías rectangulares y triangulares, puesto que son los que ofrecen una mayor versatilidad a la hora de realizar la discretización de un dominio plano.

En cuanto a la topología de las distribución de presión, en este trabajo se supondrá que sobre cada elemento de presión actúa una distribución de presión uniforme, de manera que $p(\mathbf{r}) = p_j$. De acuerdo con deMul [44] la utilización de aproximaciones más precisas de la distribución de presión repercute en expresiones muy complejas e incrementos del tiempo computacional, sin que ello suponga una ganancia notable en la precisión de los resultados. Bajo estos supuestos, la ecuación 6.2 para el cálculo del desplazamiento normal que se produce en un punto cualquiera de la superficie del sólido debido a una distribución de presión uniforme aplicada sobre un elemento de presión se reescribe de la siguiente manera:

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} p_j \iint_{A_j} \frac{d\xi d\eta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.3)$$

En los apartados siguientes se exponen las soluciones explícitas de la ecuación 6.3 para elementos de presión rectangulares (apartado 6.2.2) y triangulares (apartado 6.2.3) sobre los que actúa una distribución de presión uniforme. Ambas soluciones se derivan a partir de la expresión que permite calcular el desplazamiento normal en el vértice de un elemento de presión triangular sobre el que actúa una distribución uniforme de presión, cuyo desarrollo se expone a continuación.

6.2.1 Deformación en el vértice de un elemento de presión triangular producida por una distribución uniforme de presión

Considere un elemento de presión triangular Δ_j como el mostrado en la figura 6.2, cuyo vértice coincide con el punto H de la superficie del sólido. La distancia mínima entre el punto H y la arista opuesta del triángulo se denota por N_i .

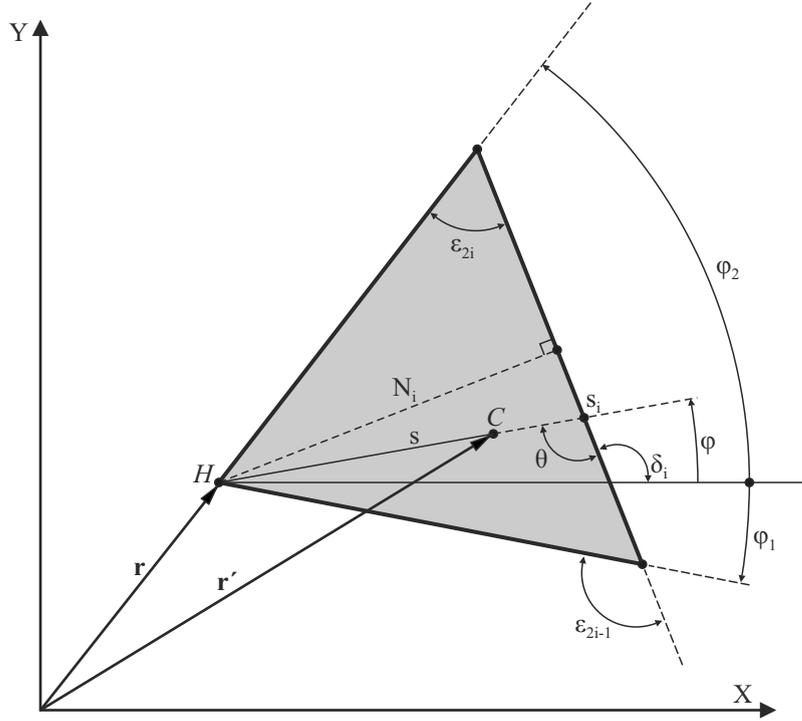


FIGURA 6.2: Geometría de un elemento de presión triangular Δ_j

El desplazamiento normal elástico que se produce en el punto H al aplicar una distribución de presión uniforme sobre el elemento de presión Δ_j se puede determinar mediante la expresión 6.3. En este caso, la evaluación de la integral presente en esta ecuación es conveniente realizarla utilizando un sistema de coordenadas polares (s, φ) con origen en el punto H . En este sistema de coordenadas, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\varphi = \delta_i - \theta \quad (6.4a)$$

$$s_i = \frac{N_i}{\sin \theta} = N_i \csc \theta \quad (6.4b)$$

En este sistema de coordenadas, dicha integral se puede expresar como:

$$\iint_{A_j} \frac{d\xi d\eta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \iint_{A_j} \frac{s ds d\varphi}{s} = \iint_{A_j} ds d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{s_i} ds \quad (6.5)$$

Aplicando las relaciones descritas en 6.4 a la ecuación 6.5:

$$\int_{\epsilon_{2i-1}}^{\epsilon_{2i}} d(\delta_i - \theta) \int_0^{N_i \csc \theta} ds = \int_{\epsilon_{2i}}^{\epsilon_{2i-1}} N_i \csc \theta d\theta \quad (6.6)$$

La resolución analítica de la integral presente en la ecuación anterior es conocida:

$$\int_{\epsilon_{2i}}^{\epsilon_{2i-1}} N_i \csc \theta \, d\theta = N_i \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_{2i}}^{\epsilon_{2i-1}} \quad (6.7)$$

Y por lo tanto la ecuación 6.3 se puede reescribir de la siguiente forma, obteniéndose así una solución explícita para el desplazamiento normal producido en el vértice H del elemento de presión Δ_j debido a una distribución uniforme de presión aplicada sobre él:

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1-\nu}{2\pi G} p_j N_i \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_{2i}}^{\epsilon_{2i-1}} \quad (6.8)$$

Esta expresión se atribuye a Svec y Gladwell [166].

Un caso particular de esta tipología de elemento de presión es cuando $\varphi_1 = 0^\circ$ y $\epsilon_{2i-1} = 90^\circ$, obteniéndose como resultado un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 6.3. En este caso, uno de los límites de integración de la ecuación 6.8 está definido y ésta se simplifica, quedando:

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1-\nu}{2\pi G} p_j \frac{N_i}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi_2}{1 - \sin \varphi_2} \right) \quad (6.9)$$

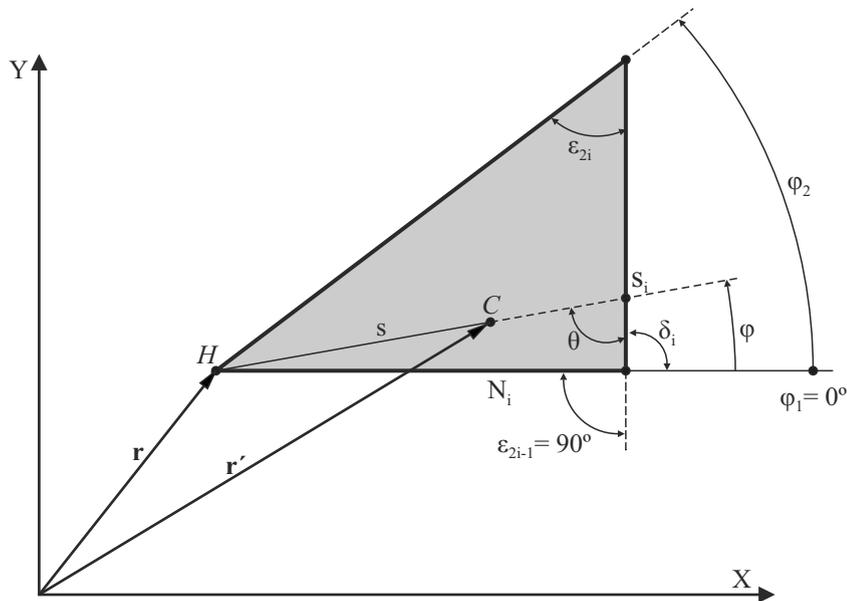


FIGURA 6.3: Geometría de un elemento de presión triangular Δ_j cuando $\phi_1 = 0^\circ$ y $\epsilon_{2i-1} = 90^\circ$

El desplazamiento normal elástico de un punto de la superficie del sólido debido a una presión uniforme aplicada en una área poligonal cualquiera se podrá determinar por la

adición algebraica de elementos de presión triangulares como los mostrados anteriormente, rectángulos o no, según convenga.

6.2.2 Deformación en un punto cualquiera de la superficie de un sólido producida por una distribución uniforme de presión aplicada sobre un elemento de presión rectangular

Considere ahora un elemento de presión rectangular Δ_j de área $A_j = 2a \cdot 2b$, cuyas dimensiones principales son paralelas al sistema de coordenadas de referencia, como se muestra en la figura 6.4. El desplazamiento normal elástico que se produce en el punto H de la superficie del sólido al aplicar una distribución de presión uniforme sobre el elemento de presión rectangular Δ_j se puede determinar mediante la adición algebraica de los desplazamientos producidos por una distribución de presión uniforme que actúa sobre ocho elementos de presión en forma de triángulo rectángulo cuyo vértice coincide con el punto H . El resultado de esta adición fue obtenido en primer término por Love [167], según la ecuación 6.10:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi G}{1-\nu} \frac{\omega(\mathbf{r})}{p_j} = & (d_x + a) \ln \left[\frac{(d_y + b) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x + a)^2}}{(d_y - b) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x + a)^2}} \right] \\ & + (d_y + b) \ln \left[\frac{(d_x + a) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x + a)^2}}{(d_x - a) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x - a)^2}} \right] \\ & + (d_x - a) \ln \left[\frac{(d_y - b) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x - a)^2}}{(d_y + b) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x - a)^2}} \right] \\ & + (d_y - b) \ln \left[\frac{(d_x - a) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x - a)^2}}{(d_x + a) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x + a)^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

La ecuación 6.10 se puede reescribir, de manera que el desplazamiento normal elástico en el punto H se exprese según la siguiente ecuación:

$$\omega(\mathbf{r}) = f_j(\mathbf{r}) \cdot p_j \quad (6.11)$$

donde $f_j(\mathbf{r})$ es el coeficiente de influencia del elemento de presión rectangular Δ_j sobre el punto H . Este coeficiente de influencia representa el desplazamiento normal elástico producido en el punto H por una distribución de presión unitaria aplicada sobre el elemento de presión Δ_j , que se calcula según la siguiente ecuación:

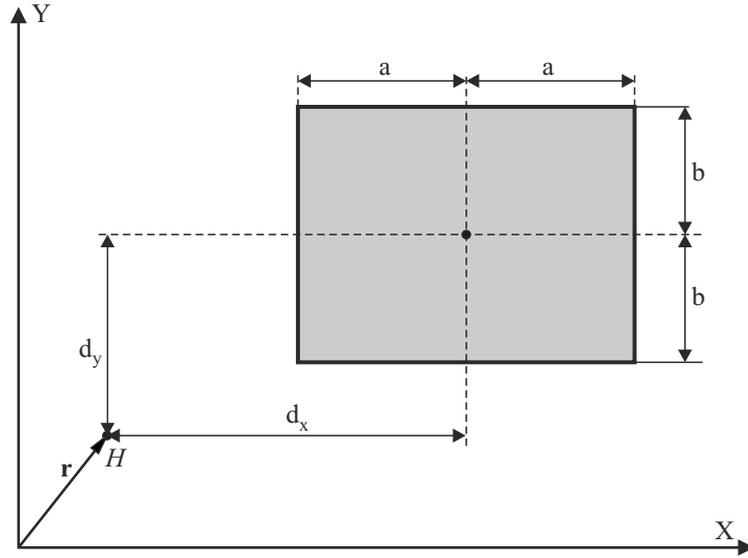


FIGURA 6.4: Geometría de un elemento de presión rectangular Δ_j

$$f_j(\mathbf{r}) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \left[\begin{aligned} &(d_x + a) \ln \left[\frac{(d_y + b) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x + a)^2}}{(d_y - b) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x + a)^2}} \right] \\ &+ (d_y + b) \ln \left[\frac{(d_x + a) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x + a)^2}}{(d_x - a) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x + a)^2}} \right] \\ &+ (d_x - a) \ln \left[\frac{(d_y - b) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x - a)^2}}{(d_y + b) + \sqrt{(d_y + b)^2 + (d_x - a)^2}} \right] \\ &+ (d_y - b) \ln \left[\frac{(d_x - a) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x - a)^2}}{(d_x + a) + \sqrt{(d_y - b)^2 + (d_x + a)^2}} \right] \end{aligned} \right] \quad (6.12)$$

6.2.3 Deformación en un punto cualquiera de la superficie de un sólido producida por una distribución uniforme de presión aplicada sobre un elemento de presión triangular

Por último, considere un elemento de presión triangular Δ_j como el mostrado en la figura 6.5.

El desplazamiento normal elástico que se produce en el punto H de la superficie del sólido al aplicar una distribución de presión uniforme sobre el elemento de presión triangular Δ_j se puede determinar mediante la adición algebraica de los desplazamientos producidos por una distribución de presión uniforme que actúa sobre tres elementos de presión triangulares cuyo vértice coincide con el punto H , como se ilustra en la figura 6.6.

De esta manera y teniendo en cuenta la ecuación 6.8, el desplazamiento normal elástico en H se determinará mediante la siguiente ecuación:

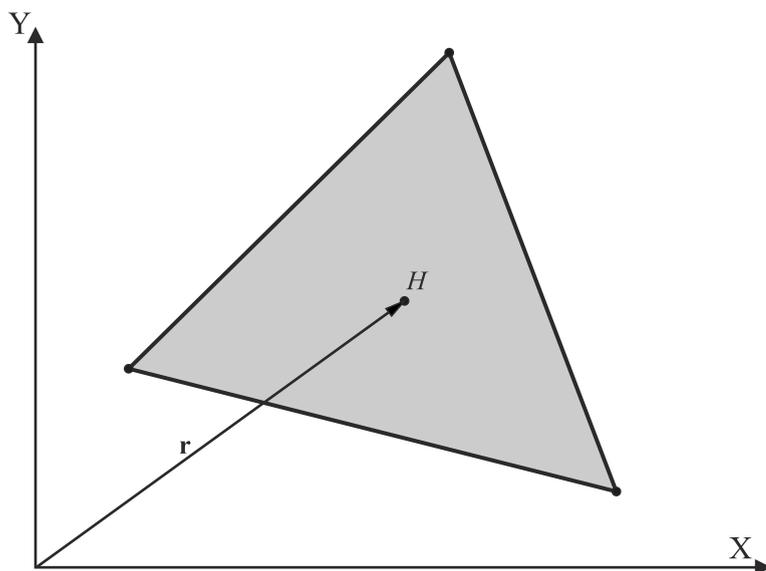


FIGURA 6.5: Geometría de un elemento de presión triangular Δ_j

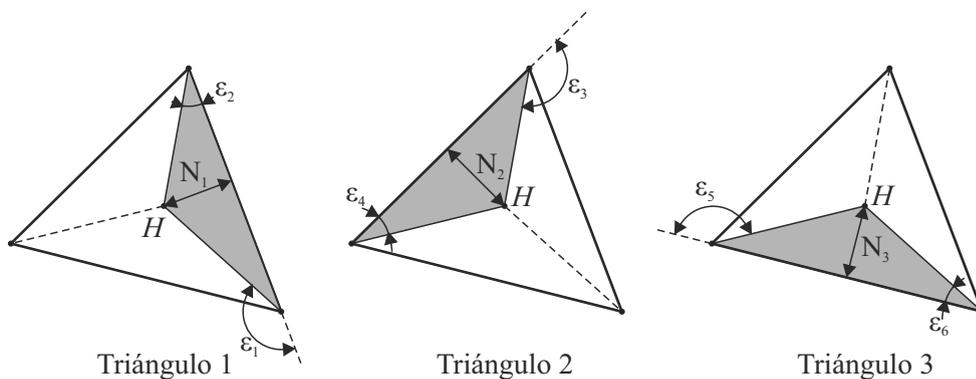


FIGURA 6.6: Descomposición de un elemento de presión triangular cuando el punto H está dentro de la geometría del elemento de presión

$$\frac{2\pi G}{1-\nu} \frac{\omega(\mathbf{r})}{p_j} = N_1 \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} + N_2 \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_4}^{\epsilon_3} + N_3 \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_6}^{\epsilon_5} \quad (6.13)$$

La ecuación 6.13 se puede reescribir, de manera que el desplazamiento normal elástico en un punto H de la superficie del sólido sea:

$$\omega(\mathbf{r}) = f_j(\mathbf{r}) \cdot p_j \quad (6.14)$$

Donde $f_j(\mathbf{r})$ es el coeficiente de influencia del elemento de presión triangular Δ_j sobre el punto H , calculado según la siguiente ecuación:

$$f_j(\mathbf{r}) = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \left[\begin{array}{l} n_1 \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \\ + n_2 \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_3}^{\epsilon_4} \\ + n_3 \left[\ln \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} \right) \right| \right]_{\epsilon_5}^{\epsilon_6} \end{array} \right] \quad (6.15)$$

Svec y Gladwell [166] demostraron que esta formulación también es válida cuándo el punto H está situado fuera del triángulo de presión. En ese caso, será necesario tener en cuenta los signos correctos en la adición de los triángulos para el cálculo del desplazamiento normal elástico en el punto H . Por ejemplo, considere que se desea determinar el desplazamiento normal elástico en un punto H que se encuentra fuera de la geometría del elemento de presión, como se ilustra en la figura 6.7. En este caso, el desplazamiento normal elástico producido en este punto se determina mediante la suma de los desplazamientos producidos al aplicar una distribución uniforme de presión en los triángulos 1 y 2, y restando el desplazamiento producido al aplicar la misma distribución de presión sobre el triángulo 3.

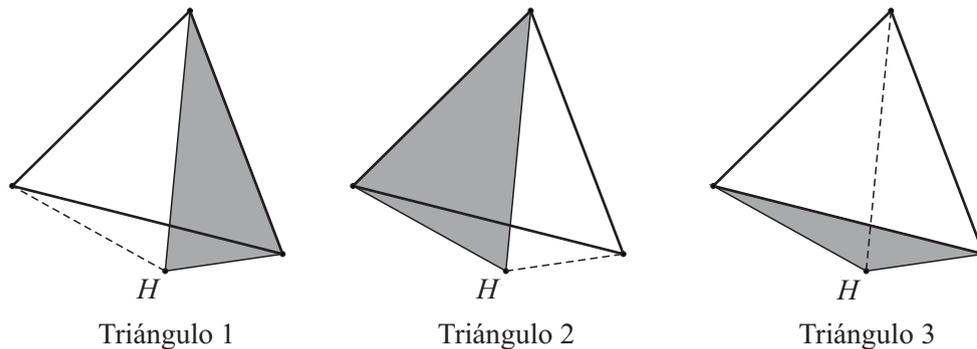


FIGURA 6.7: Descomposición de un elemento de presión triangular cuando el punto H está fuera de la geometría del elemento de presión

Por lo tanto, antes de realizar el cálculo del coeficiente de influencia de un elemento de presión triangular sobre un punto H situado fuera de su geometría, será necesario determinar la descomposición del elemento de presión en triángulos con vértice en H , y ver si su coeficiente de influencia contribuye sumando o restando al coeficiente de influencia global del elemento de presión triangular.

6.2.4 Deformación en un punto cualquiera de la superficie de un sólido producida por una distribución arbitraria de presión

En ocasiones, la distribución de presión y el área sobre la que ésta se aplica no se ajustan a ningún caso para el cual se haya propuesto una solución explícita. En estos casos, la evaluación de la ecuación 6.2 se puede realizar discretizando el área S donde se aplica la presión en n elementos de presión Δ_j del tamaño y forma adecuados, para los cuales

sí exista una solución explícita de la ecuación 6.2. El desplazamiento normal elástico en cualquier punto H de la superficie del sólido se determinará mediante superposición de los desplazamientos originados por distribuciones uniformes de presión aplicadas sobre los distintos elementos de presión Δ_j que conforman el área, de manera que:

$$\omega(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n p_j f_j(\mathbf{r}) \quad (6.16)$$

De esta forma es posible considerar áreas de presión con formas complejas, así como distribuciones de presión no uniformes.

6.3 Modelo semianalítico para resolver el problema de contacto entre dos sólidos en ausencia de fricción

Los principios expuestos anteriormente se pueden aplicar para obtener la distribución de presión de contacto que se produce cuando dos sólidos, que por sus características se pueden estudiar bajo las hipótesis de semiespacio elástico, se presionan el uno contra el otro en ausencia de fricción.

Considérese dos sólidos (P y W) en su posición inicial de contacto, como se ilustra en la figura 6.8. El punto inicial de contacto se denota por O_L . En este punto, se define un plano de tangente común Π , que es tan cercano a las superficies de los sólidos en la zona de contacto que la deformación de los mismos se puede referir a él bajo la teoría de elasticidad de pequeñas deformaciones. Asimismo, se define un sistema de coordenadas Cartesiano local al contacto, cuyo eje Z_L es normal al plano Π y apunta hacia el exterior del sólido P . Los ejes X_L e Y_L están contenidos en el plano Π . Los vectores unitarios asociados a este sistema de coordenadas se denotan por \mathbf{u}_{X_L} , \mathbf{u}_{Y_L} y \mathbf{u}_{Z_L} .

Se considera un punto genérico Q contenido en el plano Π , cuya posición se define por el vector $\mathbf{r}(x_L, y_L, z_L)$, con $z_L = 0$. La distancia perpendicular entre las dos superficies de contacto en el punto Q , medida en la dirección normal al plano Π , se denota por la función $B(\mathbf{r})$, que en principio será continua y suave.

Considere ahora que los sólidos se presionan el uno contra el otro en ausencia de fricción y bajo el efecto de una carga F_T , como se ilustra en la figura 6.9.

Puesto que la penetración es físicamente inadmisibles, se generará una presión $p(\mathbf{r})$ en el área de contacto (S), que deformará las superficies de los sólidos. De esta manera, se provocan desplazamientos normales elásticos en las superficies de P y W , denotados por $\omega^P(\mathbf{r})$ y $\omega^W(\mathbf{r})$, respectivamente. El desplazamiento total $\omega(\mathbf{r})$ será:

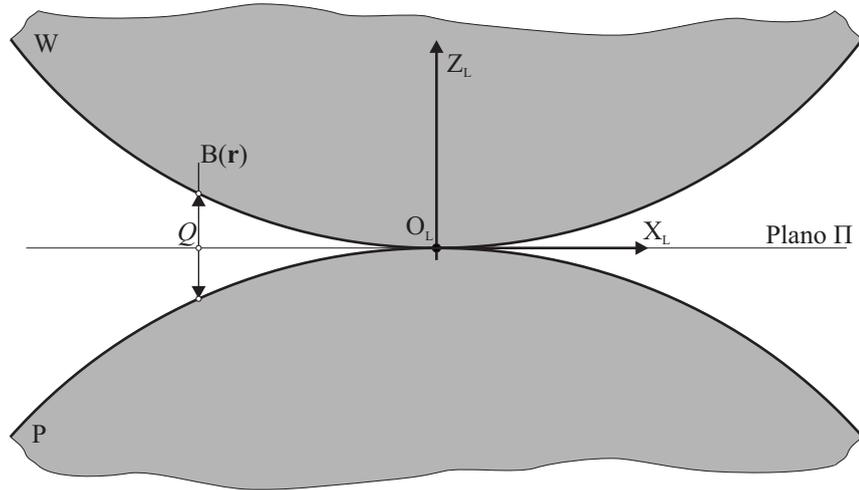


FIGURA 6.8: Contacto sin carga entre los sólidos P y W

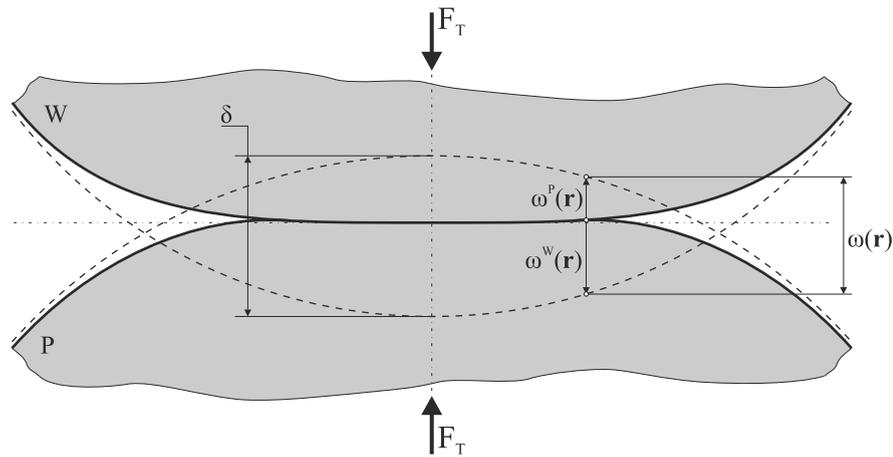


FIGURA 6.9: Contacto bajo carga entre los sólidos P y W

$$\omega(\mathbf{r}) = \omega^P(\mathbf{r}) + \omega^W(\mathbf{r}) \quad (6.17)$$

La aproximación total entre dos puntos de referencia de los dos sólidos se denota por δ . Las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos en las superficies de los sólidos en la interfase del contacto serán:

$$\omega(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) - \delta = 0 \quad \text{dentro del área de contacto} \quad (6.18a)$$

$$\omega(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) - \delta > 0 \quad \text{fuera del área de contacto} \quad (6.18b)$$

La esencia del problema de contacto resultante es determinar la distribución de presiones que satisface las condiciones de contorno en la interfase tanto dentro como fuera de la área de contacto, cuya forma y tamaño también son desconocidas. Kalker [170]

demostró que la solución al problema de contacto se puede obtener minimizando la energía complementaria total (C) bajo la condición de que la presión de contacto sea mayor o igual que cero en todo el dominio. La energía complementaria total se define como la suma de la energía complementaria de deformación (U^*) y de la energía potencial complementaria de las fuerzas externas (V^*):

$$C = U^* + V^* \quad (6.19)$$

La energía potencial complementaria de las fuerzas externas es función de la distancia normal entre superficies y de la distribución de presiones:

$$V^* = \int_S B(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) dS \quad (6.20)$$

Por otra parte, en materiales elásticos con comportamiento lineal, la energía complementaria interna es numéricamente equivalente a la energía de deformación elástica. Por lo tanto, ambas se pueden determinar en función de la distribución de presiones y de los desplazamientos en las superficies de los sólidos:

$$U^* = U = \frac{1}{2} \int_S p(\mathbf{r}) \omega(\mathbf{r}) dS \quad (6.21)$$

Para permitir la solución numérica, el área potencial de contacto se discretiza en una serie de n elementos de presión Δ_j , sobre los que se asume que la presión de contacto es uniforme $p(\mathbf{r}) = p_j$, tal como se muestra en la figura 6.10. La posición del centroide (Q_j) de cada elemento de presión Δ_j se denota mediante el vector \mathbf{r}_j .

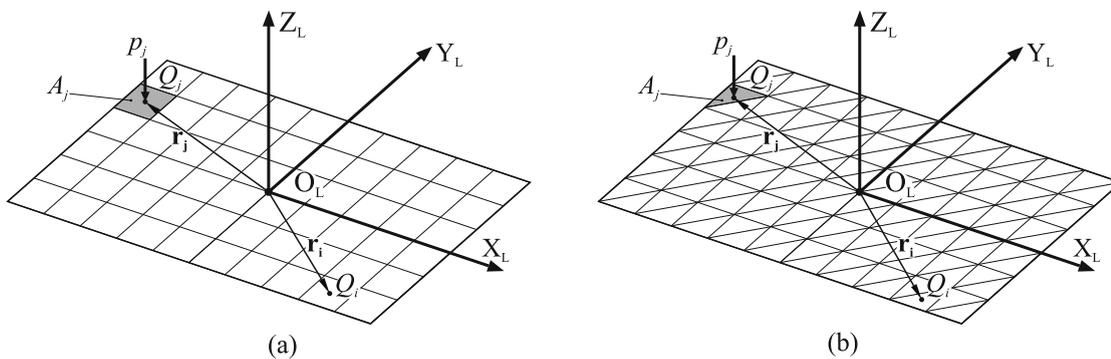


FIGURA 6.10: Discretización del área potencial de contacto sobre el plano Π en (a) elementos de presión rectangulares y (b) elementos de presión triangulares

Bajo un dominio discretizado, la ecuación 6.17 se puede reescribir teniendo en cuenta la ecuación 6.16:

$$\omega(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n p_j f_j^P(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^n p_j f_j^W(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n p_j t_j(\mathbf{r}) \quad (6.22)$$

donde a $t_j(\mathbf{r})$ se le denomina coeficiente de influencia acumulado del elemento Δ_j sobre el punto Q , y se define como:

$$t_j(\mathbf{r}) = f_j^P(\mathbf{r}) + f_j^W(\mathbf{r}) \quad (6.23)$$

Teniendo en cuenta el dominio discretizado en n elementos de presión Δ_j , la ecuación 6.19 quedará:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[p_i \iint_{A_i} \omega(\mathbf{r}) dx_L dy_L \right] + \sum_{i=1}^n \left[p_i \iint_{A_i} B(\mathbf{r}) dx_L dy_L \right] \quad (6.24)$$

Para reducir el tiempo de cálculo, la distancia entre superficies $B(\mathbf{r})$ también se asume constante en todo el elemento de presión, y su magnitud igual a la distancia entre superficies en el centroide del elemento, de manera que $B_i = B(\mathbf{r}_i)$. De esta forma, la ecuación 6.24 se reescribe:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[p_i \iint_{A_i} \omega(\mathbf{r}) dx_L dy_L \right] + \sum_{i=1}^n \left[p_i B_i \iint_{A_i} dx_L dy_L \right] \quad (6.25)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 6.22:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[p_i \sum_{j=1}^n p_j \iint_{A_i} t_j(\mathbf{r}) dx_L dy_L \right] + \sum_{i=1}^n p_i B_i A_i \quad (6.26)$$

Para aumentar la velocidad del cálculo, la integral presente en la ecuación anterior se puede determinar de forma aproximada evaluando $t_j(\mathbf{r})$ en el centroide del elemento de presión y multiplicando el resultado por el área del mismo, de manera que:

$$\iint_{A_i} t_j(\mathbf{r}) dx_L dy_L = t_{j,i} A_i \quad (6.27)$$

En la expresión anterior $t_{j,i}$ puede definirse como el coeficiente de influencia acumulado del elemento de presión Δ_j sobre el centroide del elemento de presión Δ_i :

$$t_{j,i} = f_{j,i}^P + f_{j,i}^W \quad (6.28)$$

De manera que la ecuación 6.26 se puede reescribir como:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j t_{j,i} A_i + \sum_{i=1}^n A_i p_i B_i \quad (6.29)$$

La solución al problema de contacto se puede obtener minimizando la energía complementaria total (C) en 6.29 bajo las siguientes restricciones [41]:

$$\frac{\partial C}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^n p_j t_{j,i} A_i + A_i B_i = 0 \quad \text{si } p_i > 0 \quad (6.30a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^n p_j t_{j,i} A_i + A_i B_i \geq 0 \quad \text{si } p_i = 0 \quad (6.30b)$$

$$F_T = \sum_{j=1}^n p_j A_j \quad (6.30c)$$

La restricción impuesta por 6.30c asegura el equilibrio de fuerzas en el contacto.

6.3.1 Estudio del contacto entre sólidos con dimensiones finitas

El modelo semianalítico descrito anteriormente para resolver el problema de contacto se basa en la utilización de una serie de coeficientes de influencia [165, 169] que relacionan las presiones generadas en el contacto con los desplazamientos que producen sobre las superficies de los sólidos que intervienen en el contacto. Si bien estos coeficientes de influencia pueden tener distinta naturaleza, en la mayoría de los ejemplos disponibles en la literatura [169, 171–177] se calculan analíticamente a partir de la solución de Boussinesq para cargas puntuales que actúan en un semiespacio elástico.

Como se ha descrito en el apartado 6.2, el cálculo de dichos coeficientes de influencia a partir de la solución de Boussinesq está sujeto a la hipótesis de que los sólidos se puedan aproximar a semiespacios elásticos en las zonas cercanas al contacto. Cuando los sólidos de contacto no se pueden aproximar a semiespacios elásticos, la utilización de estos coeficientes de influencia puede generar soluciones erróneas del problema de contacto.

Uno de los motivos habituales por los cuales no se cumple la hipótesis de semiespacio elástico es la presencia de superficies libres de los sólidos cerca de la zona de contacto, como la que se muestra en la figura 6.11a. Cuando esto ocurre, la utilización de coeficientes de influencia calculados a partir de la solución de Boussinesq supone la aparición

de tensiones normales (σ) y cortantes (τ) en las superficies libres (figura 6.11b), cuando en realidad estas deben estar libres de tensión.

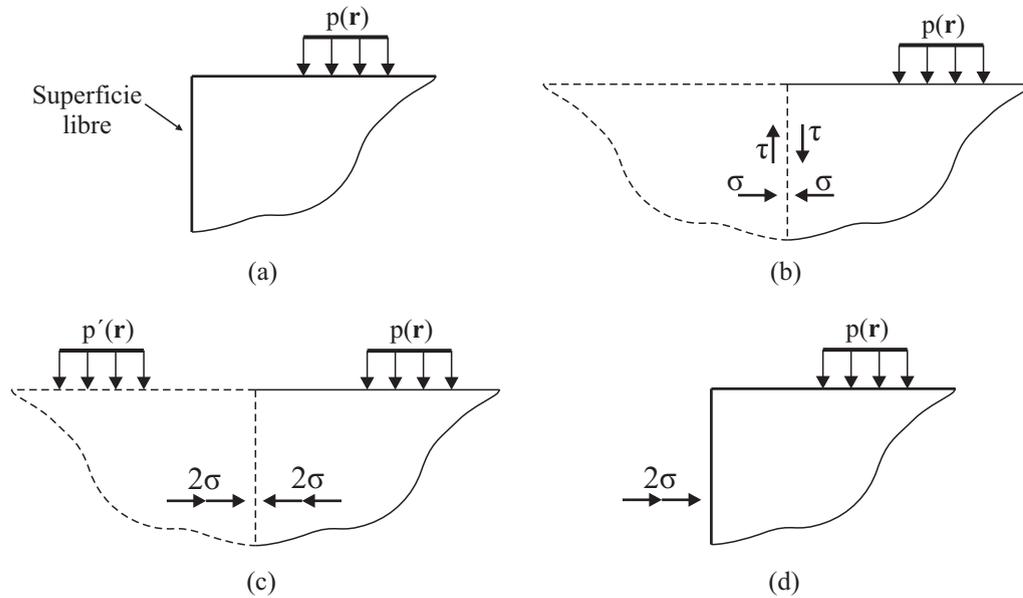


FIGURA 6.11: Proceso de eliminación de tensiones cortantes

Las tensiones normales y cortantes introducidas por los modelos de contacto basados en la solución de Boussinesq en las superficies libres fueron estudiadas y corregidas inicialmente por Hetényi [178, 179], y posteriormente por Keer [180, 181], aproximando el sólido a un cuarto de espacio elástico y adaptando a esta aproximación la solución formulada por Boussinesq. Los métodos de corrección propuestos por estos autores son exactos y llevan a una liberación total de estas tensiones en las superficies libres. La técnica requiere de repetidas superposiciones de la solución para el semiespacio elástico, y consecuentemente, grandes costes computacionales.

Por otra parte, Reusner [182] observó que la influencia que tienen las tensiones normales introducidas en las superficies libres del sólido sobre los desplazamientos producidos en la superficie bajo carga es pequeña comparada con la influencia de las tensiones cortantes. Consecuentemente, afirmó que se podría obtener una solución suficientemente precisa para el cuarto de espacio elástico realizando una corrección parcial, en la que únicamente se corrigiesen las tensiones cortantes. A tal efecto, propuso considerar una distribución de presión simétrica (p') con respecto al plano que delimita el cuarto de espacio, como se ilustra en la figura 6.11c, y de esta manera hacer desvanecer las tensiones tangenciales que aparecen en las superficies libres como consecuencia de la hipótesis de semiespacio elástico. El principal problema de esta corrección parcial es que las tensiones normales en las superficies libres de los sólidos no se compensan, sino que multiplican por dos su intensidad (figura 6.11d), pudiendo originar errores en el cálculo de presiones y desplazamientos en las zonas cercanas a las superficies libres. Siguiendo estas ideas,

deMul [44] propuso un método de corrección en el cual se modifican los coeficientes de influencia para tener en cuenta estas presiones simétricas.

Por otra parte, Guilbault [45] ha introducido recientemente una nueva aproximación capaz de corregir las tensiones cortantes y normales que aparecen en las superficies libres de los cuartos de espacio, sin que ello suponga un incremento de los tiempos de cálculo en comparación con la corrección parcial realizada por deMul. En esta nueva aproximación, las presiones simétricas se multiplican por un factor de corrección, denotado por ψ^g , que introduce una sobrecorrección en las presiones simétricas que permite corregir también las tensiones normales. Aunque este método de corrección sigue siendo una aproximación, la precisión general del método se ve incrementada. El factor de corrección viene determinado por la ecuación 6.31.

$$\psi^g = 1.29 - \frac{1}{1 - \nu^g} (0.08 - 0.5\nu^g) \quad (6.31)$$

En la presente aproximación, los sólidos de contacto han sido modelizados mediante la superposición de dos cuartos de espacio, contemplando de esta manera la posibilidad de que cada uno de estos sólidos posea dos superficies libres, como se muestra en la figura 6.12. La modelización del cuarto de espacio se ha realizado utilizando el método de las presiones de contacto simétricas combinado con el factor de corrección propuesto por Guilbault.

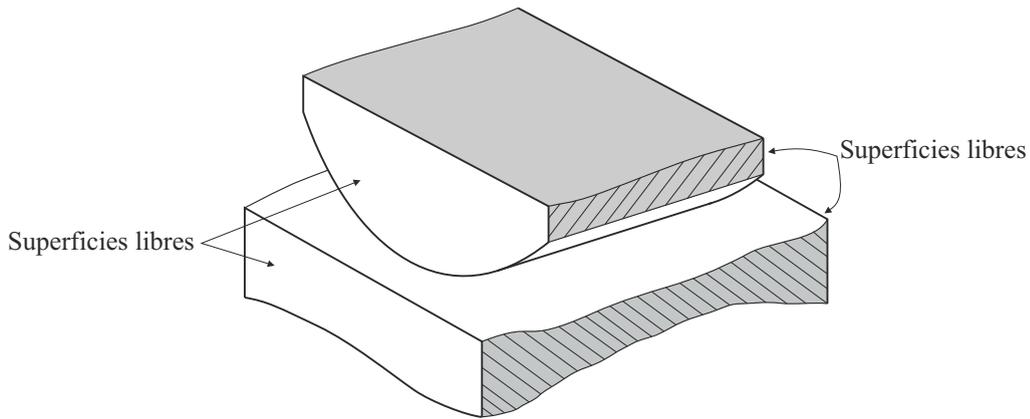


FIGURA 6.12: Sólidos de contacto con dimensiones finitas

Bajo estas premisas, las ecuaciones para el cálculo de coeficientes de influencia se extienden para tener en cuenta las dimensiones finitas de los cuerpos en contacto:

$$f_{j,i}^g = f_{jo,i}^g + \psi^g (f_{je,i}^g + f_{jw,i}^g) \quad (6.32)$$

donde $f_{jo,i}^g$ es el coeficiente de influencia del elemento original Δ_{jo} (ver figura 6.13), $f_{je,i}^g$ es el coeficiente de influencia del elemento de presión simétrico Δ_{je}^g y $f_{jw,i}^g$ es el coeficiente de influencia del elemento de presión simétrico Δ_{jw}^g .

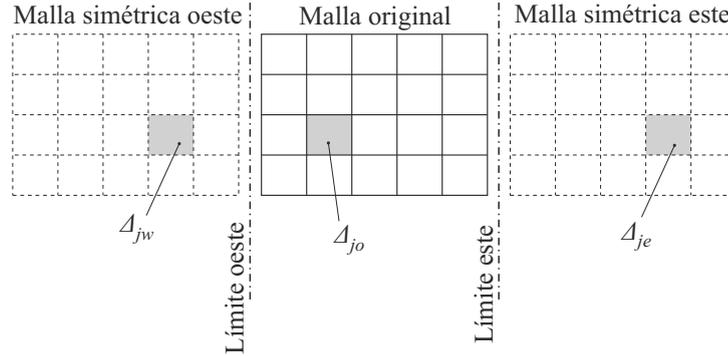


FIGURA 6.13: Mallas simétricas para eliminación de tensiones cortantes

De acuerdo a estas ideas, la ecuación 6.28 para el cálculo del coeficiente de influencia acumulado se modifica para tener en cuenta las contribuciones de los seis elementos de presión:

$$t_{j,i} = f_{jo,i}^P + \psi^P (f_{je,i}^P + f_{jw,i}^P) + f_{jo,i}^W + \psi^W (f_{je,i}^W + f_{jw,i}^W) \quad (6.33)$$

Fácilmente se reconoce que el elemento de presión Δ_{jo} mantiene la misma posición para el sólido P y para el sólido W , por lo que el cómputo de su coeficiente de influencia tendrá el mismo valor independientemente del elemento que se considere, Δ_{jo}^P o Δ_{jo}^W , y por lo tanto, el cálculo se simplifica:

$$f_{jo,i} = f_{jo,i}^P + f_{jo,i}^W \quad (6.34)$$

6.4 Implementación del algoritmo de contacto

En base al modelo de contacto expuesto anteriormente, se ha desarrollado un algoritmo que implementa cada uno de los pasos necesarios para determinar las presiones que se producen en el contacto sin fricción entre dos sólidos.

6.4.1 Rutina principal del algoritmo de contacto

El algoritmo para la resolución del contacto entre dos sólidos P y W se basa en el modelo de contacto descrito en el apartado 6.3 y su diagrama de flujo se muestra en la figura 6.14.

Para la implementación del algoritmo de contacto se supone que los siguientes datos son conocidos:

- (i) Funciones paramétricas que definen las superficies de contacto de los sólidos P y W en su posición inicial de contacto. La superficie de contacto de cada sólido se considera definida por una función paramétrica $(\vec{S} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ que proporciona las coordenadas espaciales (x, y, z) de un punto de la superficie a partir de sus coordenadas paramétricas (u, v) . Además, los límites de las superficies vendrán dados por los puntos de un polígono cerrado con coordenadas (u, v) .
- (ii) Punto inicial de contacto (O_L) .
- (iii) Vector unitario correspondiente a la normal común de contacto.
- (iv) Parámetros que definen la malla de elementos de presión.

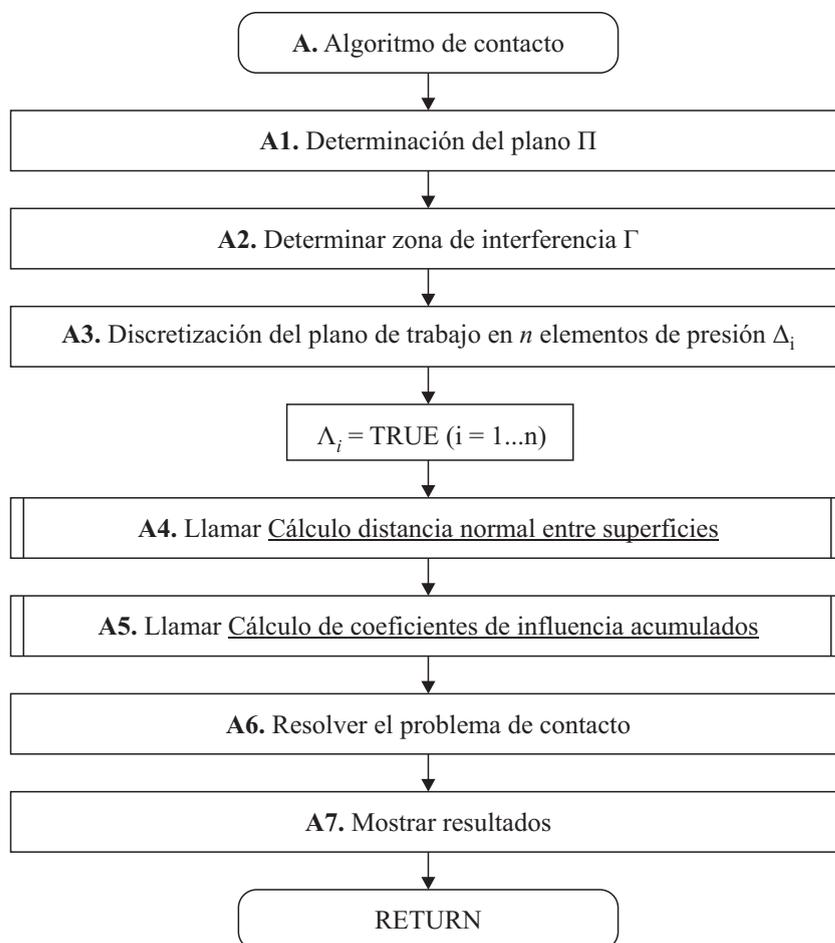


FIGURA 6.14: Diagrama de flujo del algoritmo de contacto

El algoritmo empieza determinando el plano de tangente común Π , sobre el que se define un sistema de coordenadas local al contacto, cuyo origen se sitúa el punto O_L y el eje Z_L es perpendicular al plano Π (paso **A1**).

Seguidamente, se determina la zona de interferencia (paso **A2**), denotada por Γ . Esta zona se define como la intersección booleana de las áreas obtenidas al proyectar los contornos de las superficies de contacto de los sólidos P y W sobre el plano Π , según la dirección del vector \mathbf{u}_{Z_L} , como se ilustra en la figura 6.15.

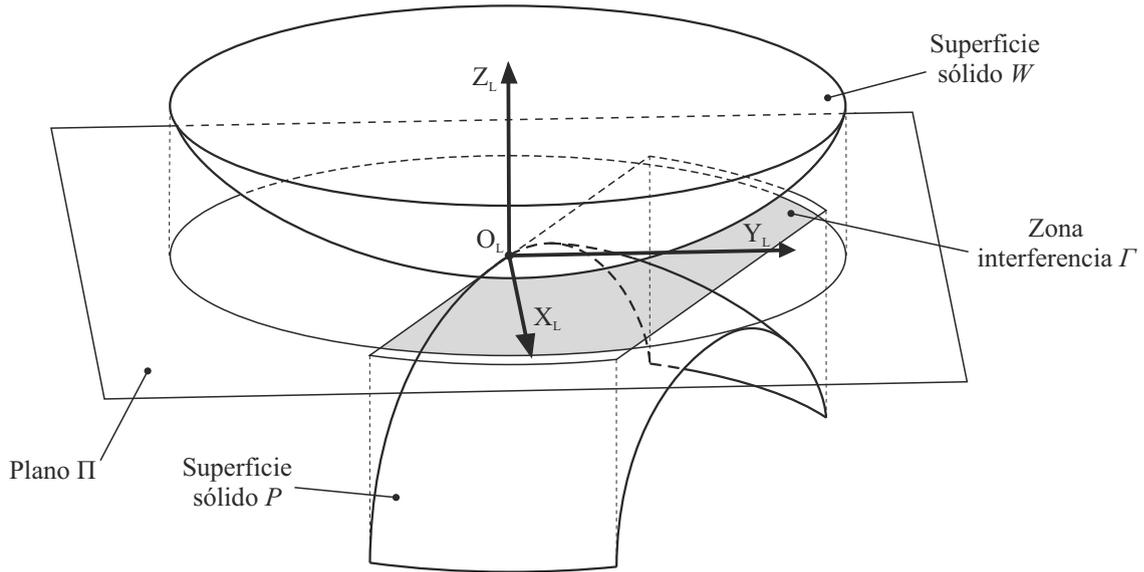


FIGURA 6.15: Determinación de la zona de interferencia Γ

La zona de interferencia se encierra dentro del rectángulo de menor área que contenga todos sus puntos (MBR, minimum bounding rectangle), utilizando el algoritmo descrito por Chaudhuri [183]. El sistema de coordenadas local se gira alrededor del eje Z_L , de manera que los ejes X_L e Y_L queden alineados con las direcciones principales del MBR. Entonces, el MBR se discretiza en una malla de n elementos de presión Δ_j (triangulares o rectangulares, según convenga) de acuerdo con los parámetros de mallado especificados (paso **A3**). Cada elemento de presión tiene asociada un área (A_j) y un vector que indica la posición de su centroide (Q_j), con respecto al sistema de coordenadas local.

Para todos estos elementos, se define la bandera (también denominada *flag* en lenguaje computacional) $\Lambda_j = TRUE$, que indica la necesidad de calcular las características del elemento de presión Δ_j (área, distancia normal entre superficies de contacto y coeficientes de influencia asociados a dicho elemento de presión) necesarias para resolver el problema de contacto. Las n banderas se almacenan en el vector $\mathbf{\Lambda}$. En este caso, las características de todos los elementos de presión en los que se ha discretizado la zona potencial de contacto necesitan ser calculadas, pero puede haber casos para los cuales las características de uno o varios elementos sean conocidas y no sea necesario recalcularlas, evitando el sobrecoste computacional que ello supondría.

A continuación se determina la distancia normal entre superficies (B_j) asociada a cada uno de los elementos de presión Δ_j que componen la malla (paso **A4**), utilizando el

algoritmo descrito en el apartado 6.4.2. Además de la distancia normal entre superficies, este algoritmo también devuelve un vector $\boldsymbol{\gamma}$ que contiene las n banderas que definen si el centroide de cada elemento está contenido dentro del área de interferencia (γ_j). El número de elementos para los cuales $\gamma_j = TRUE$ se denota por n_c , e indica el número de elementos de presión que intervienen en el cálculo del contacto.

Posteriormente se determinan los coeficientes de influencia acumulados ($t_{j,i}$) de todos los elementos de presión que intervienen en el contacto (paso **A5**), utilizando el algoritmo descrito en el apartado 6.4.3.

Cuando se han determinado las áreas (A_j), las distancias normales entre superficies (B_j) y los coeficientes de influencia acumulados ($t_{j,i}$) asociados a todos los elementos presentes en la zona de interferencia, la distribución de presiones que se produce entre ambos sólidos en contacto se determina minimizando la energía complementaria bajo las restricciones impuestas por 6.30 (paso **A6**). El problema de contacto se puede resolver mediante métodos lineales de programación, como los utilizados por Kalker [41, 184], considerando únicamente aquellos elementos de presión que pertenecen al área de interferencia, marcados con la bandera $\gamma_j = TRUE$. Manteniendo $p_j > 0$ dentro del área de contacto y $p_j = 0$ fuera de ella, las presiones y el tamaño del área de contacto se adaptan hasta que se cumplen las condiciones de la ecuación 6.18. El resultado es un conjunto de presiones uniformes de contacto (p_j) correspondientes a cada uno de los elementos de presión de la discretización.

Por último, se muestran los resultados de presiones de contacto (paso **A7**), y si es necesario, se obtienen los resultados derivados que puedan ser de interés, como por ejemplo, la aproximación total de los cuerpos o la magnitud del área de contacto.

6.4.2 Algoritmo para el cálculo de la distancia normal entre superficies

En este apartado se describe el algoritmo utilizado para determinar la distancia normal (B_j) entre las superficies en contacto asociada a cada uno de los elementos de presión pertenecientes a la zona de interferencia.

Para realizar el cálculo de esta distancia se han contemplado dos alternativas:

- (i) La primera alternativa consiste en discretizar las superficies que intervienen en el contacto en caras triangulares y plantear el cálculo de distancias como un problema geométrico de intersección de la recta que pasa por el centroide del elemento de presión (Q_j) y cuyo vector director es \mathbf{u}_{ZL} con las caras facetadas de las superficies de contacto.

- (ii) La segunda alternativa consiste en plantear el cálculo de distancias como un problema de optimización, en el que se involucran las superficies paramétricas de los sólidos de contacto, el vector \mathbf{u}_{Z_L} y el punto definido por \mathbf{r}_j .

La principal ventaja de la primera alternativa es que el problema se puede resolver mediante un sistema lineal de ecuaciones, en contraposición con la segunda alternativa, en la que la resolución requiere de iteraciones cuya rapidez de convergencia dependerá de los valores iniciales seleccionados y de la complejidad de las superficies. En cambio, la segunda alternativa ofrece resultados más precisos que la primera, puesto que en este caso dependerán del grado de discretización de las superficies de contacto. Este hecho se ilustra en la figura 6.16, en la que la distancia normal entre sólidos se evalúa para dos puntos simétricos frente a la misma superficie pero con distinto nivel de discretización. Se observa que cuando la discretización es más fina, el valor calculado para B_j se aproxima en mayor medida al valor teórico, mientras que el error cometido crece a medida que la discretización se hace más basta. Cuando el área de las caras en las que se discretiza la superficie de contacto tiende a cero, ambas soluciones convergen.

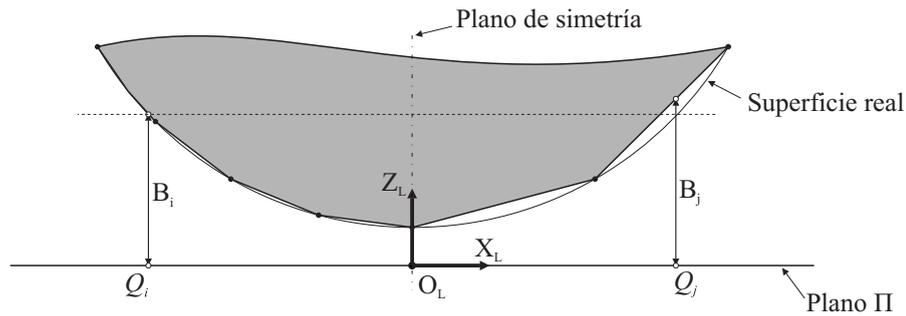


FIGURA 6.16: Cálculo de la distancia normal a partir de superficies de contacto facetadas

Puesto que las superficies involucradas en el problema de contacto tenderán a ser simples y por lo tanto la resolución del problema de optimización se obtendrá con pocas iteraciones, se decide escoger esta opción, en favor de una mejora en la precisión del cálculo a cambio de poco coste computacional.

Para el cálculo de esta distancia normal entre superficies de contacto planteada como un problema de optimización, en primer lugar, se obtiene un punto P_W perteneciente a la superficie del sólido W (como se ilustra en la figura 6.17), cuya posición viene definida por el vector $\mathbf{r}_{P_W}(u_W, v_W)$, que cumpla que:

$$[\mathbf{r}_{P_W}(u_W, v_W) - \mathbf{r}_j] \times \mathbf{u}_{Z_L} = 0 \quad (6.35)$$

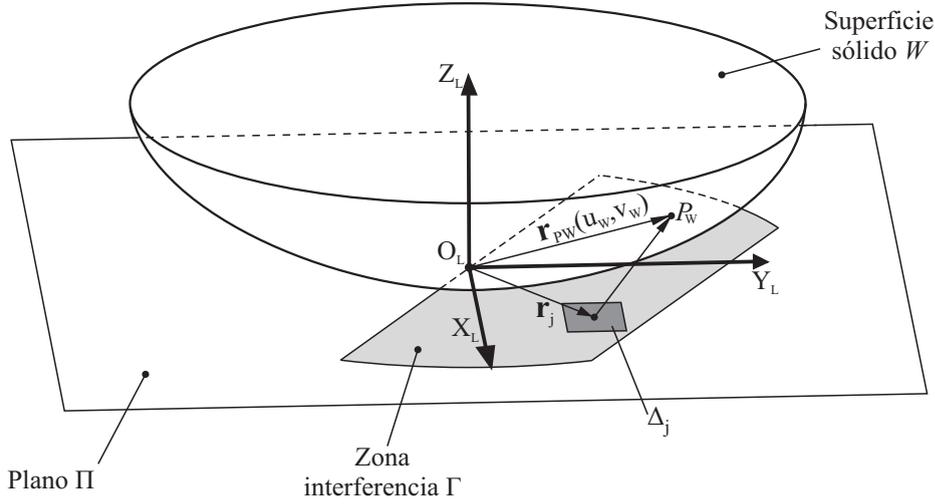


FIGURA 6.17: Cálculo de la distancia normal entre superficies asociada al elemento de presión Δ_j planteada como un problema no lineal

Posteriormente, se obtiene un punto P_P perteneciente a la superficie del sólido P , cuya posición viene definida por el vector $\mathbf{r}_{P_P}(u_P, v_P)$, que cumpla que:

$$[\mathbf{r}_{P_P}(u_P, v_P) - \mathbf{r}_j] \times \mathbf{u}_{Z_L} = 0 \quad (6.36)$$

Una vez obtenidos los puntos P_W y P_P que cumplan con las ecuaciones 6.35 y 6.36, la distancia normal entre superficies (B_j) se calcula de la siguiente forma:

$$B_j = [\mathbf{r}_{P_W}(u_W, v_W) - \mathbf{r}_{P_P}(u_P, v_P)] \cdot \mathbf{u}_{Z_L} \quad (6.37)$$

En la figura 6.18 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo utilizado para el cálculo de la distancia normal entre superficies de contacto asociada a cada elemento de presión. Además de la información necesaria para definir las superficies de los sólidos de contacto, este algoritmo requiere de la siguiente información de partida:

- (i) Polígono cerrado sobre el plano Π que define de la zona de interferencia (Γ).
- (ii) Posición del centroide (Q_j) de cada uno de los elementos de presión presentes en la malla .
- (iii) Vector $\mathbf{\Lambda}$, que contiene las banderas Λ_j que indican cuando las propiedades de un elemento de presión deben ser calculadas.

El algoritmo consta de un bucle iterativo que recorre todos los n elementos de presión presentes en la discretización, evaluando en primer lugar el valor de Λ_j . Si $\Lambda_j = TRUE$,

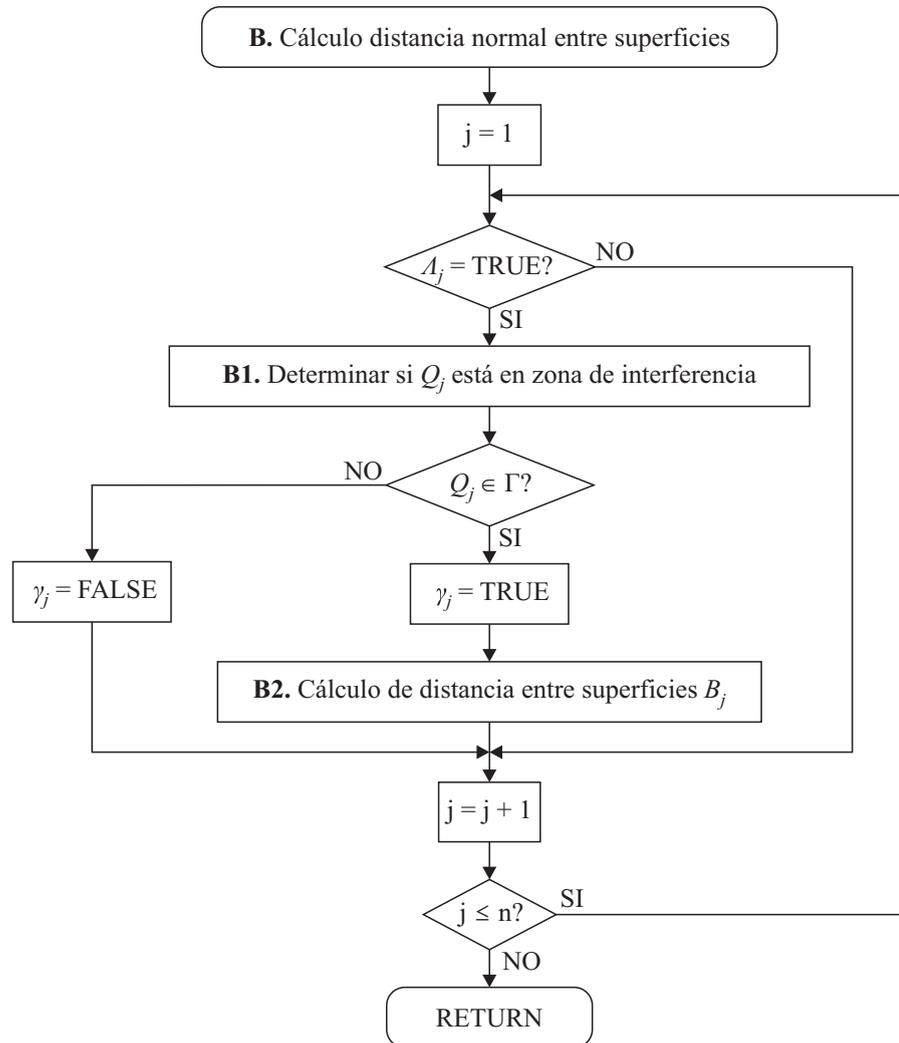


FIGURA 6.18: Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de la distancia normal entre superficies

la distancia normal entre superficies necesita ser calculada para este elemento, y se continúa con las operaciones del bucle. Si por contra $\Lambda_j = FALSE$, no es necesario determinar la distancia normal entre superficies asociada a este elemento y se procede a la evaluación del siguiente elemento de presión.

En el caso de que la distancia normal entre superficies requiera ser calculada para el elemento de presión Δ_j , se evalúa si el centroide de dicho elemento, cuya posición está definida por el vector \mathbf{r}_j , está contenido dentro de la zona de interferencia (paso **B1**). En caso negativo, se define $\gamma_j = FALSE$, y se procede a la evaluación del elemento siguiente. Si está contenido dentro de la zona de interferencia, se define $\gamma_j = TRUE$, y se calcula la distancia normal entre superficies asociada al elemento de presión Δ_j (paso **B2**).

Cuando el bucle iterativo ha realizado n iteraciones, el algoritmo llega a su fin, devolviendo la distancia normal entre superficies (B_j) asociada a cada elemento de presión, y un vector $\boldsymbol{\gamma}$ que contiene los n valores de la bandera γ_j .

6.4.3 Algoritmo para el cálculo de los coeficientes de influencia acumulados

El algoritmo descrito en este apartado se encarga de optimizar el número de coeficientes de influencia acumulados ($t_{j,i}$) calculados para poder resolver el problema de contacto. Como se verá más adelante, el cálculo de los coeficientes de influencia acumulados es la operación computacionalmente más costosa del algoritmo. Por ese motivo es necesario minimizar el número de coeficientes de influencia acumulados que se calculan, de manera que únicamente se realice el cálculo de aquellos coeficientes de influencia que sean estrictamente necesarios para la resolución del problema de contacto.

En este sentido, por una parte es necesario comprobar si el elemento de presión Δ_j interviene en el contacto, o si por el contrario, está situado fuera de la zona de interferencia, y por lo tanto, nunca tendrá un valor de presión asociado. Esta información viene dada por la bandera γ_j . Si $\gamma_j = TRUE$, significa que el elemento pertenece a la zona de interferencia, y por lo tanto es necesario disponer de los coeficientes de influencia relacionados con él. En cambio, si $\gamma_j = FALSE$, significa que el elemento no pertenece a la zona de interferencia, y por tanto no intervendrá en el problema de contacto y los coeficientes de influencia relacionados con él no serán necesarios.

Por otra parte, hay que determinar si es necesario calcular los coeficientes de influencia relacionados con el elemento de presión Δ_j . Esta información viene dada por la bandera Λ_j . Si $\Lambda_j = TRUE$, significa que es necesario calcular los coeficientes de influencia relacionados con este elemento de presión. Por el contrario, si $\Lambda_j = FALSE$, significa que no es necesario calcular los coeficientes de influencia relacionados con este elemento.

Cuando se cumplen las condiciones necesarias, este algoritmo llama al algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia acumulado, descrito en el apartado 6.4.3.1. Esta medida evita el cálculo de coeficientes de influencia acumulados que no sea necesario calcular ($\Lambda_j = FALSE$), o que posteriormente no intervengan en el cálculo ($\gamma_j = FALSE$).

El diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de los coeficientes de influencia acumulados se muestra en la figura 6.19. Este algoritmo requiere de la siguiente información de partida:

- (i) Vector $\mathbf{\Lambda}$, que contiene las banderas Λ_j que indican cuando las propiedades de un elemento de presión deben ser calculadas.

- (ii) Vector $\boldsymbol{\gamma}$, que contiene las banderas γ_j que indican cuando el centroide de un elemento de presión pertenece a la zona de interferencia.

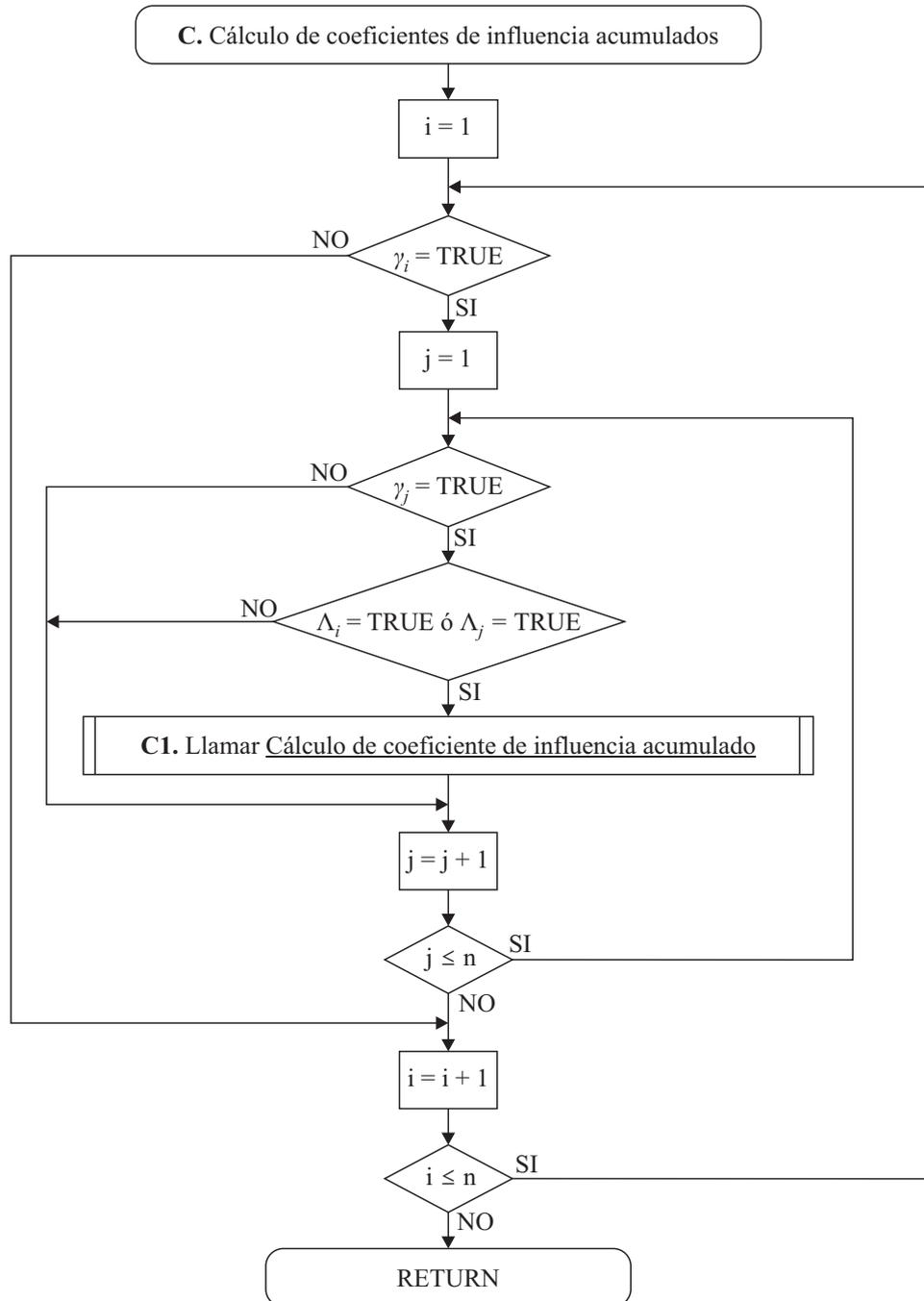


FIGURA 6.19: Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo de coeficientes de influencia acumulados

Para cada elemento de presión Δ_i , se verifica si este elemento forma parte de la zona de interferencia evaluando el valor de la bandera γ_i . En caso afirmativo, se realiza un bucle que recorre todos los elementos de presión Δ_j . Si el elemento de presión Δ_j también pertenece a la zona de interferencia, se comprueba si se deben determinar las propiedades

de alguno de los elementos Δ_i y Δ_j , evaluando Λ_i y Λ_j . En caso de que alguno de los dos requiera evaluación, se llamará al algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia acumulado de Δ_j sobre Δ_i (paso **C1**), detallado en el apartado 6.4.3.1.

El algoritmo devuelve una matriz que contiene todos los coeficientes de influencia acumulados necesarios para resolver el problema.

6.4.3.1 Algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia acumulado

En este apartado se describe el algoritmo encargado de determinar el coeficiente de influencia acumulado ($t_{j,i}$) del elemento de presión Δ_j sobre el elemento de presión Δ_i , definido por la ecuación 6.28. Este algoritmo aplica las ideas expuestas en el apartado 6.3.1 para tener en cuenta la presencia de superficies libres de los sólidos que intervienen en el contacto en las zonas cercanas al contacto.

El diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia acumulado del elemento de presión Δ_j sobre el elemento Δ_i se muestra en la figura 6.20. El proceso empieza calculando el coeficiente de influencia ($f_{j_0,i}$) del elemento Δ_{j_0} sobre el elemento Δ_i utilizando el principio propuesto en la ecuación 6.34 (paso **D1**). El valor obtenido se define como el coeficiente de influencia acumulado, el cual será completado mediante la suma del resto de coeficientes de influencia (paso **D2**).

Entonces empieza un proceso iterativo (pasos **D3-D8**) para calcular los coeficientes de influencia de los elementos simétricos $\Delta_{j_e}^g$ y $\Delta_{j_w}^g$ del piñón (primera iteración) y de la rueda (segunda iteración). En primera instancia se calcula el factor de corrección de la tensión normal mediante la ecuación 6.31 (paso **D3**). Entonces se determina la posición de los elementos simétricos $\Delta_{j_e}^g$ y $\Delta_{j_w}^g$ (paso **D4**). Por último, se calcula el coeficiente de influencia de $\Delta_{j_e}^g$ y $\Delta_{j_w}^g$ (pasos **D5** y **D7**) y su valor se añade al coeficiente de influencia acumulado (pasos **D6** y **D7**).

El algoritmo devuelve la magnitud del coeficiente de influencia acumulado ($t_{j,i}$) del elemento Δ_j sobre el elemento Δ_i .

6.4.3.2 Algoritmo para la determinación de coeficientes de influencia

El algoritmo descrito en este apartado se encarga de realizar el cálculo del coeficiente de influencia del elemento de presión Δ_j sobre el elemento de presión Δ_i .

Los coeficientes de influencia de los elementos de presión triangulares y rectangulares se evalúan mediante las ecuaciones 6.12 y 6.15, respectivamente. Estas ecuaciones llevan a la evaluación exacta del coeficiente de influencia, pero al mismo tiempo, exigen un

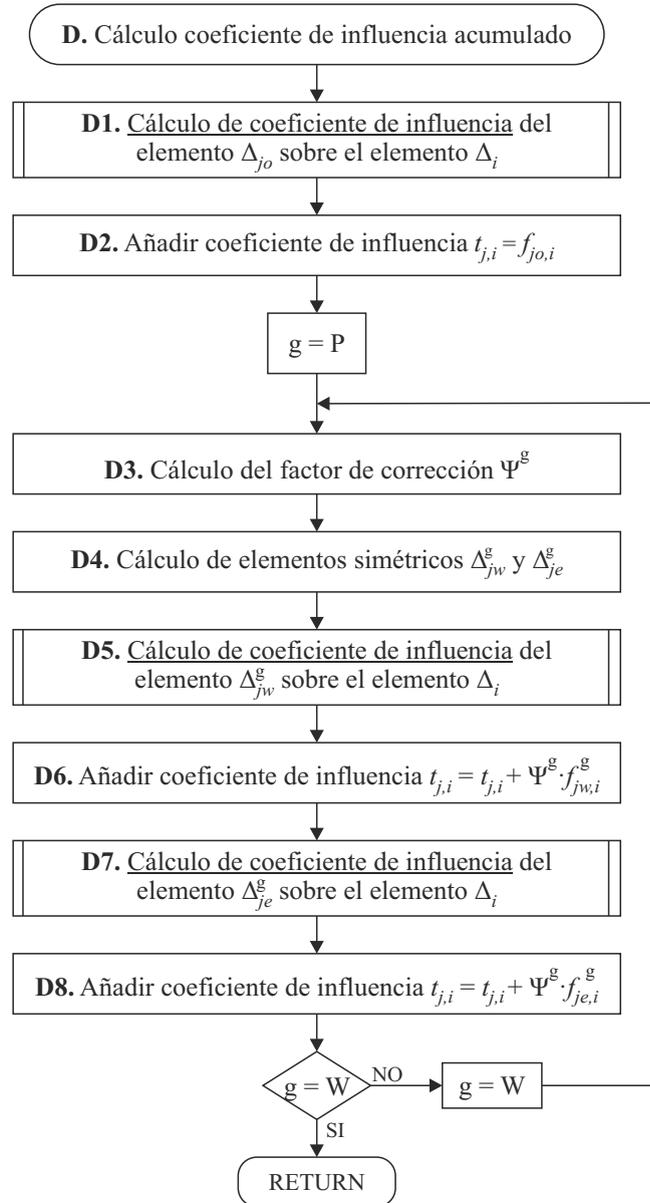


FIGURA 6.20: Diagrama de flujo del algoritmo para la determinación del coeficiente de influencia acumulado

elevado esfuerzo computacional. En cambio, tal y como propuso deMul [44], cuando la influencia del elemento de presión Δ_j sobre el elemento de presión Δ_i es relativamente pequeña, se puede obtener una aproximación más eficiente considerando que la distribución de presión está concentrada en una carga puntual de magnitud $(p_j \cdot A_j)$ aplicada sobre el centroide de Δ_j . Entonces el coeficiente de influencia $f_{j,i}$ se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$f_{j,i} \simeq \frac{1 - \nu}{2\pi G} \frac{A_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (6.38)$$

El coeficiente de influencia de un elemento de presión disminuye cuando:

- (i) El área del elemento de presión Δ_j es pequeña
- (ii) La distancia entre el elemento de presión y el punto de cálculo es grande

En base a estas consideraciones, se define un parámetro discriminatorio $\Omega_{j,i}$ que es función del radio de una área circular equivalente al área del elemento Δ_j y de la distancia entre los centroides de ambos elementos de presión:

$$\Omega_{j,i} = \sqrt{\frac{A_j}{\pi}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (6.39)$$

El valor de $\Omega_{j,i}$ se compara con el del parámetro Ω_{max} , definido por el usuario. Cuando $\Omega_{j,i}$ es menor que Ω_{max} , la evaluación del coeficiente de influencia se realiza de forma aproximada. Cuando $\Omega_{j,i}$ es mayor o igual que el parámetro Ω_{max} , la evaluación del coeficiente de influencia se realiza de forma exacta.

El diagrama de flujo del algoritmo para calcular el coeficiente de influencia del elemento de presión Δ_j sobre el elemento Δ_i se muestra en la figura 6.21.

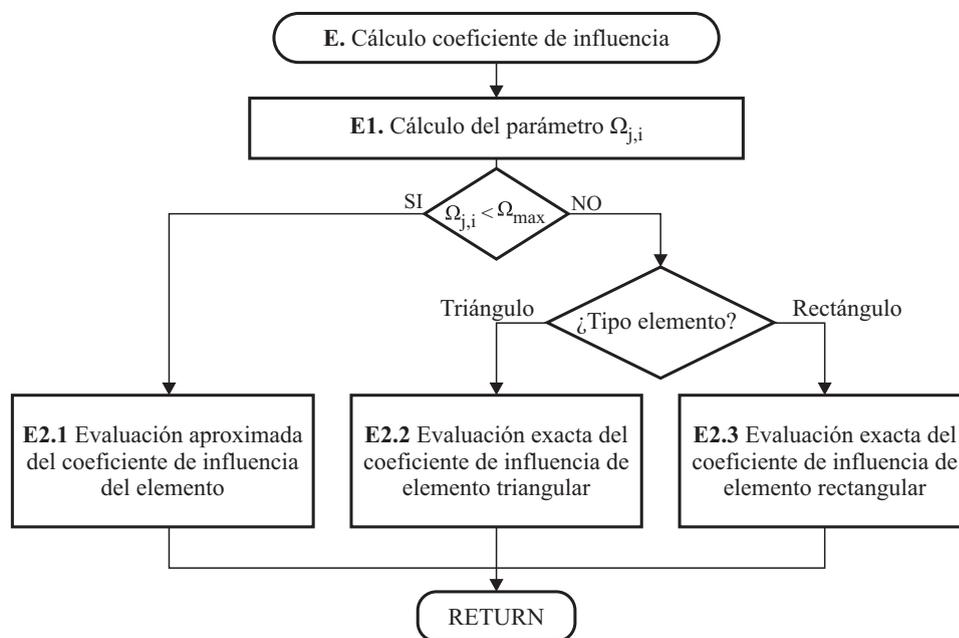


FIGURA 6.21: Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo del coeficiente de influencia de un elemento

El algoritmo empieza con el cálculo del parámetro $\Omega_{j,i}$ mediante la ecuación 6.39 (paso E1). El valor de $\Omega_{j,i}$ se compara con el valor definido para Ω_{max} . Si $\Omega_{j,i}$ es menor que

Ω_{max} , la evaluación del coeficiente de influencia de Δ_j sobre Δ_i se puede realizar de forma aproximada utilizando la ecuación 6.16 (paso E2.1).

Por el contrario, si $\Omega_{j,i}$ es mayor o igual que Ω_{max} , la evaluación del coeficiente de influencia debe ser exacta. En ese caso, si el elemento de presión es rectangular la evaluación de su coeficiente de influencia se realiza mediante la ecuación 6.12 (paso E2.2). Si el elemento de presión es triangular, la evaluación de su coeficiente de influencia se realiza mediante la ecuación 6.15 (paso E2.3).

El algoritmo devuelve la magnitud del coeficiente de influencia ($f_{j,i}$) del elemento Δ_j sobre el elemento Δ_i .

6.4.4 Validación del algoritmo y estudio de parámetros

El funcionamiento del algoritmo de contacto descrito en este apartado se ha validado mediante dos casos de estudio. El caso de estudio I consiste en el estudio de un contacto puntual entre un plano y un indentador de cabeza esférica, cuyas dimensiones se muestran en la figura 6.22a. En este caso, los dos sólidos que intervienen en el contacto pueden aproximarse a semiespacios elásticos en las zonas cercanas al contacto, y por lo tanto, es posible resolver el problema de contacto mediante la solución analítica propuesta por Hertz [7], cuyo resultado servirá de referencia para la validación del algoritmo de contacto.

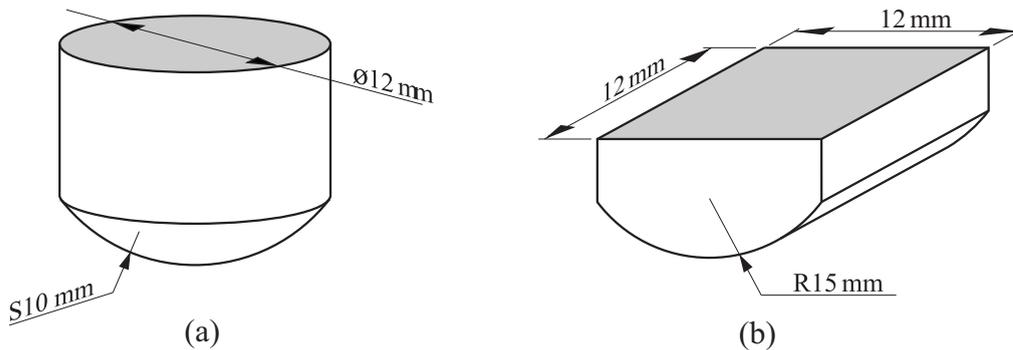


FIGURA 6.22: Casos de estudio para validación algoritmo de contacto

El caso de estudio II consiste en el estudio de un contacto lineal entre un plano y un indentador de cabeza cilíndrica, cuyas dimensiones se muestran en la figura 6.22b. En este caso el contacto entre los sólidos no se puede estudiar bajo las hipótesis de semiespacio elástico, pues uno de los sólidos posee dos superficies libres que tienen influencia sobre el contacto. Como consecuencia no se puede aplicar la teoría de Hertz para obtener resultados que sirvan de referencia para la validación del modelo. Por este motivo, se ha analizado un modelo de elementos finitos validado del indentador y el plano con

el fin de obtener resultados que puedan utilizarse como referencia para validar el funcionamiento del algoritmo cuando alguno de los sólidos que interviene en el contacto tiene dimensiones finitas.

En ambos casos se ha considerado que los sólidos están sometidos a una carga de compresión $F_T = 40 \text{ kN}$. Los indentadores tienen un módulo de elasticidad de 210 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.3. El plano tiene un módulo de elasticidad 70 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.35.

6.4.4.1 Configuración del algoritmo de contacto

El algoritmo de contacto se ha aplicado para resolver el problema de contacto en los casos de estudio I y II, considerando en ambos casos elementos de presión rectangulares y triangulares. En el primer caso, la zona potencial de contacto se ha discretizado en 1024 elementos de presión (figura 6.23a), mientras que para el segundo caso se han utilizado 968 elementos de presión (figura 6.23b). Todos los coeficientes de influencia se han evaluado de forma exacta ($\Omega_{max} = 0$).

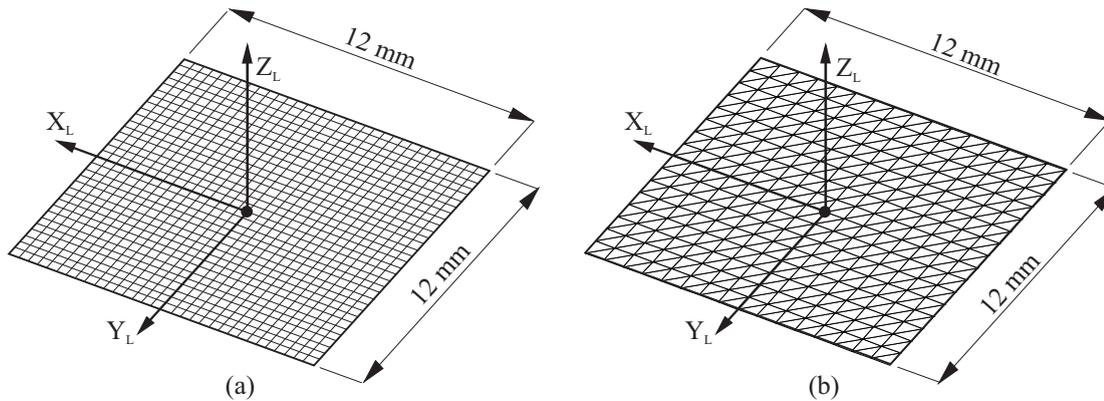


FIGURA 6.23: Discretización de la zona potencial de contacto en (a) rectángulos y (b) triángulos para la aplicación del algoritmo de contacto

Las dimensiones del MBR, que dan lugar al tamaño de la malla utilizada, vienen impuestas por el tamaño de la zona de interferencia. En estos casos, los MBR tienen una dimensión de $12 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$, como se aprecia en la figura 6.23. En el caso de estudio I la zona de interferencia es más pequeña que el MBR, mientras que en el caso de estudio II ambas coinciden. Esto significa que, mientras en el caso I habrá elementos de presión en los que $\gamma_j = FALSE$, en el caso de estudio II todos los elementos presión cumplirán que $\gamma_j = TRUE$.

Para cada caso de estudio, se evalúa la presión máxima de contacto (p_{max}), el área de contacto (A) y la aproximación entre cuerpos (δ).

TABLA 6.1: Resultados de contacto para el caso I

Tipo elemento	n	n_c	p_{max} (MPa)	A (mm ²)	δ (μ m)	t (s)
Rectángulos	1024	812	6440.16	9.56	295	6.22
Triángulos	968	768	6449.90	9.52	294	120.33
Hertz	-	-	6478.28	9.26	295	-

El coste computacional del algoritmo también se ha evaluado. A tal efecto, se investiga el número de elementos presentes en la discretización (n), el número de elementos involucrados en el contacto (n_c) y el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto (t). Los valores mostrados de t corresponden a la media aritmética de 10 ejecuciones consecutivas del algoritmo realizadas en la misma estación de trabajo.

6.4.4.2 Resultados y discusión

La tabla 6.1 muestra los resultados obtenidos mediante el algoritmo de contacto descrito para el caso de estudio I, cuando el dominio se discretiza en elementos de presión rectangulares y triangulares. La última fila de la tabla muestra los resultados de referencia obtenidos mediante la teoría de Hertz. Las huellas de contacto obtenidas a partir del algoritmo de contacto para el caso de estudio I se muestran en las figuras 6.24a (elementos de presión rectangulares) y 6.24b (elementos de presión triangulares). Se puede observar como la elección del tipo de elemento de presión utilizado para discretizar el dominio condiciona la forma del área de contacto predicha por el algoritmo. Sin embargo, en este caso los resultados de presión máxima de contacto, área de contacto y aproximación entre sólidos obtenidos por el algoritmo y por el modelo de referencia son muy parecidos.

Mediante estos resultados, se puede validar la capacidad de algoritmo de contacto para predecir resultados precisos cuando los sólidos de contacto cumplen con la hipótesis de semiespacio elástico, independientemente de si el problema se discretiza en elementos de presión rectangulares o triangulares.

Por otra parte, la tabla 6.2 muestra los resultados obtenidos mediante el algoritmo de contacto descrito para el caso de estudio II, cuando el dominio se discretiza en elementos de presión rectangulares y triangulares. La última fila de la tabla muestra los resultados de referencia obtenidos a partir del análisis de un modelo de elementos finitos validado del caso de estudio. Las huellas de contacto obtenidas a partir del algoritmo de contacto para el caso de estudio II se muestran en las figuras 6.24c (elementos de presión rectangulares) y 6.24d (elementos de presión triangulares). Se puede observar como, de la misma forma que ocurre en el caso de estudio I, la elección del tipo de elemento de presión utilizado

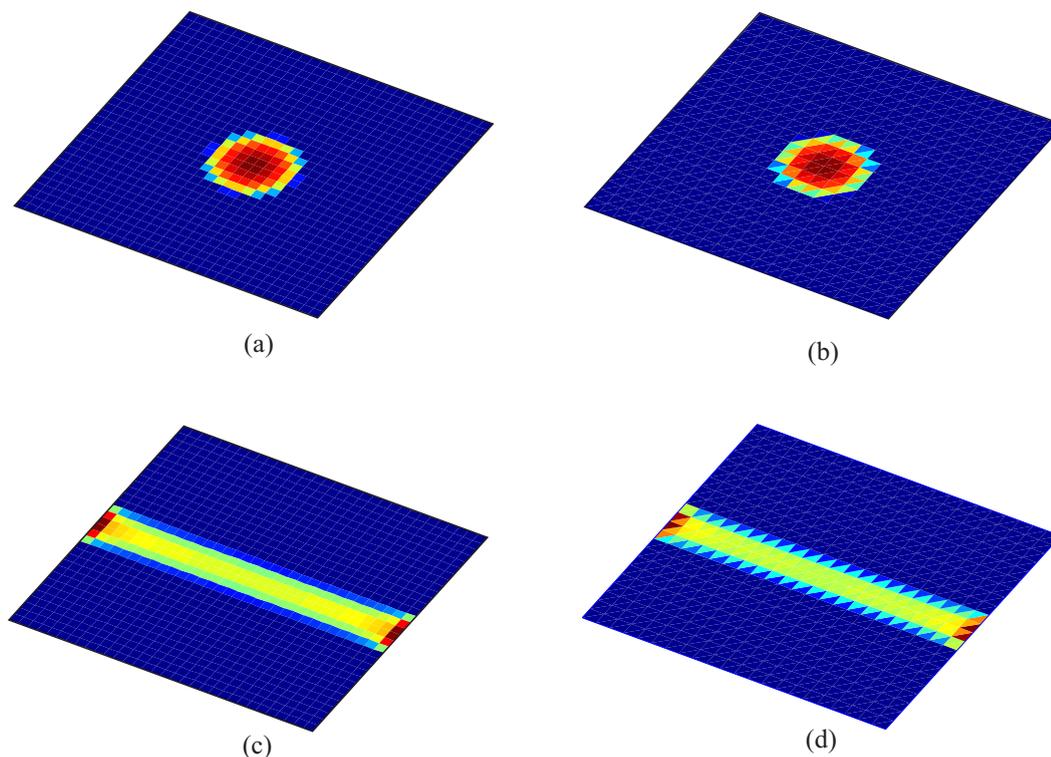


FIGURA 6.24: Huellas de contacto obtenidas mediante el algoritmo de contacto para (a y b) caso I y (c y d) caso II

TABLA 6.2: Resultados de contacto para el caso II

Tipo elemento	n	n_c	p_{max} (MPa)	A (mm ²)	δ (μ m)	t (s)
Rectángulos	1024	1024	3240.31	27.00	137	25.37
Triángulos	968	968	3403.04	26.18	137	1024.25
FEM	-	-	5586.00	24.89	135	556.00

para discretizar el problema tiene influencia sobre la forma del área de contacto predicha por el algoritmo.

En este caso, se aprecia como los resultados máximos de presión de contacto difieren del valor predicho por el modelo de elementos finitos analizado. Esto se debe a la necesidad de una malla más refinada en la zona donde el gradiente de presiones es más elevado. Los resultados de área de contacto y de aproximación entre sólidos tienen valores similares a los obtenidos a partir del análisis del modelo de elementos finitos. En cualquier caso, los resultados obtenidos a partir del algoritmo de contacto cuando se utilizan elementos de presión triangulares y rectangulares tienen un gran parecido, indicando que el tipo de elemento de presión escogido para discretizar el dominio no condiciona la calidad de los resultados, siempre que la malla de elementos sea suficientemente densa.

Por último, si se observa la última columna de las tablas 6.1 y 6.2 se puede ver que

la principal diferencia entre los resultados obtenidos mediante ambas discretizaciones reside básicamente en el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto. Para un grado similar de discretización, utilizar elementos de presión rectangulares implica un incremento de la eficiencia respecto a los elementos triangulares, debido principalmente a que el cálculo de los coeficientes de influencia de los elementos de presión triangulares requiere de un mayor número de operaciones que el de los elementos de presión rectangulares.

En resumen, los elementos de presión rectangulares demuestran ser más eficientes computacionalmente que los elementos de presión triangulares, ofreciendo el mismo grado de precisión. Por este motivo, los elementos de presión rectangulares serán los elegidos para las subsecuentes etapas de este trabajo.

6.4.4.3 Estudio de la influencia en los resultados del cálculo aproximado de coeficientes de influencia

Una de las opciones para reducir el tiempo de cálculo del algoritmo propuesto es evaluar un mayor número de coeficientes de influencia de forma aproximada. La decisión de si un coeficiente de influencia se calcula de forma exacta o aproximada está gobernada por la elección del parámetro Ω_{max} , tal y como se describe en el apartado 6.4.3.2. La correcta elección de este parámetro será clave a la hora de minimizar el tiempo de cálculo del algoritmo de contacto sin que ello repercuta en una pérdida significativa de precisión:

- (i) Por una parte, escoger un valor de Ω_{max} excesivamente grande repercutirá en una reducción elevada del tiempo de cálculo, pero en una pérdida importante de la precisión.
- (ii) Por otra parte, escoger un valor de Ω_{max} pequeño, conllevará mayores tiempos de cálculo, pero la pérdida de precisión será mínima.

En discretizaciones regulares como las mostradas en la figura 6.25, en las que todos los elementos de presión poseen la misma forma y tamaño, es posible establecer una relación entre el valor escogido para Ω_{max} y la desviación máxima cometida en la evaluación de coeficientes de influencia de forma aproximada.

En la figura 6.25a se muestra una discretización del dominio basada en una malla regular de elementos de presión rectangulares, que cumplen que $a = b$ (ver figura 6.4). En esta discretización, si se considera un valor de $\Omega_{max} = 0.188$, la desviación máxima que se cometerá al evaluar de forma aproximada un coeficiente de influencia de un elemento de presión que cumpla que $\Omega_{j,i} < \Omega_{max}$ será del 0.5%. Como se aprecia en la imagen, esto

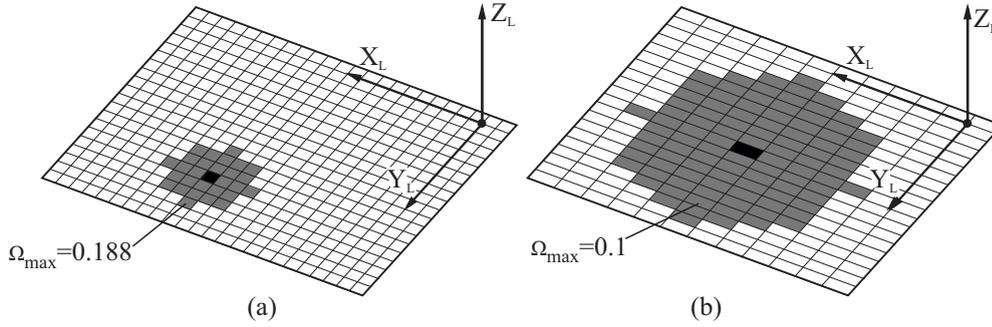


FIGURA 6.25: Áreas de influencia en función del parámetro Ω_{max} para mallas regulares

implica que para el cálculo de los coeficientes de influencia de los elementos de presión de la malla sobre el elemento de presión sombreado, se evaluarán de forma exacta 29 coeficientes de influencia, y el resto de forma aproximada.

La figura 6.25b muestra una discretización del dominio basada en una malla regular de rectángulos que cumplen que $a = 2b$. En este caso, se necesita especificar un valor de $\Omega_{max} = 0.1$ para que la desviación máxima al determinar de forma aproximada un coeficiente de influencia que cumpla que $\Omega_{j,i} < \Omega_{max}$ sea del 0.5%. Como se aprecia en la imagen, esto implica que para el cálculo de los coeficientes de influencia de los elementos de presión de la malla sobre el elemento de presión sombreado, se evaluarán de forma exacta 97 coeficientes de influencia, y el resto de forma aproximada.

A medida que la diferencia entre la dimensión a y la dimensión b se haga más grande, el valor de Ω_{max} para mantener la desviación máxima por debajo del 0.5% deberá ser menor, y por lo tanto, se calcularán un mayor número de coeficientes de influencia de forma exacta. Además, es importante puntualizar que con este criterio se controla el error cometido al calcular un coeficiente de influencia de forma aproximada, pero no al error cometido en el resultado final del algoritmo de contacto, que dependerá también de otros factores, como la forma y el tamaño del área de contacto.

Cuando la discretización no es regular, la experiencia demuestra que los errores en el cálculo de presiones de contacto se incrementan sustancialmente utilizando los mismos valores de Ω_{max} que en mallas regulares. Por este motivo, en este tipo de discretizaciones se aconseja utilizar criterios conservativos en la elección del valor de Ω_{max} . En esta línea, un criterio que ha demostrado ser válido es determinar el valor de Ω_{max} de la siguiente forma:

$$\Omega_{max} = \frac{\sqrt{A_j |_{min}}}{\sqrt{\pi} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|_{max}} \quad (6.40)$$

donde $A_j|_{min}$ es el área del elemento más pequeño presente en la discretización y $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|_{max}$ es la máxima distancia entre centroides en la malla original, como se observa en la figura 6.26. Mediante este criterio, se asegura que todos los coeficientes de influencia de los elementos presentes en la malla original se calculen de forma exacta. La reducción de tiempos se consigue al determinar de forma exacta únicamente los elementos de las mallas simétricas con mayor influencia.

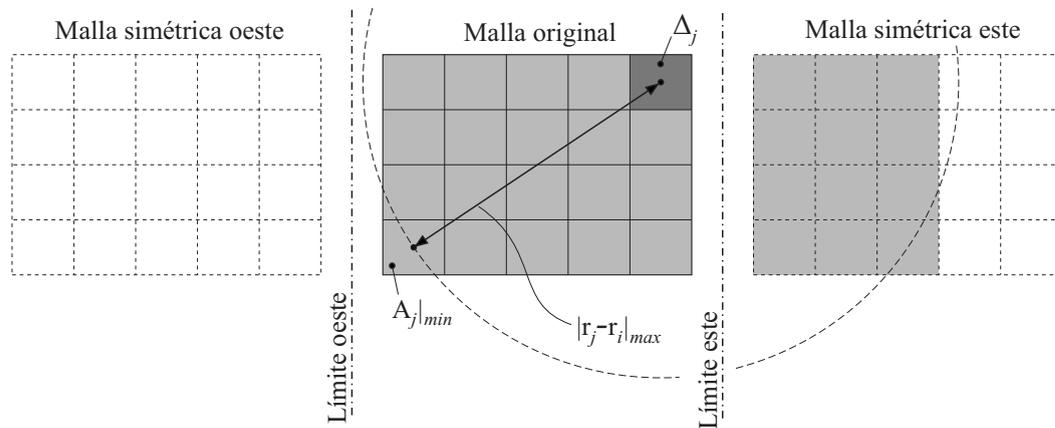


FIGURA 6.26: Criterio de cálculo propuesto para el cálculo de Ω_{max}

En la figura 6.26 se muestra un ejemplo del cálculo de los coeficientes de influencia de los elementos de presión de una discretización en la que se han considerado dos superficies libres sobre el elemento de presión Δ_j , sombreado en gris intenso. Por simplicidad, se ha considerado una malla uniforme de elementos de presión. Al calcular Ω_{max} mediante el criterio impuesto por la ecuación 6.40, se consigue que únicamente los coeficientes de influencia de los elementos sombreados se calculen de forma exacta, calculándose el resto de coeficientes de influencia de forma aproximada. Se puede observar que con este criterio el coeficiente de influencia de todos los elementos de la malla original se calcula de forma exacta, mientras que únicamente se calcula de forma exacta la influencia de aquellos elementos de las mallas simétricas más cercanos a Δ_j .

6.4.4.4 Estudio de la influencia en los resultados del número de elementos de presión dentro de la zona de contacto

De acuerdo con Kalker [41], el número de elementos de presión incluidos en la zona de interferencia es un factor determinante a la hora de obtener resultados precisos cuando se utiliza el algoritmo de contacto descrito. Por una parte, considerar un número elevado de elementos favorecerá la obtención de resultados precisos, pero por otra parte, incrementará los costes computacionales. Por ese motivo, es crucial adoptar una decisión de compromiso que permita obtener resultados suficientemente precisos en tiempos de cálculo pequeños.

TABLA 6.3: Parámetros mallado uniforme

Configuración	1	2	3	4
n	64	256	1024	4096

TABLA 6.4: Resultados de contacto al variar el número de elementos en el caso I

Caso	n_c	p_{max} (MPa)	A (mm ²)	δ (μ m)	t (s)
I.1.0	52	4444.44	9.00	283	0.13
I.1.1	52	4444.44	9.00	283	0.10
I.2.0	208	6299.38	9.00	294	0.48
I.2.1	208	6299.37	9.00	294	0.47
I.3.0	812	6440.16	9.56	295	6.22
I.3.1	812	6440.16	9.56	295	6.53
I.4.0	3228	6481.24	9.42	295	93.49
I.4.1	3228	6481.28	9.42	295	91.32
Hertz	-	6479.28	9.26	295	-

En este apartado se investiga la influencia de la densidad de la malla de elementos de presión utilizada para discretizar el problema de contacto sobre los resultados obtenidos, así como la relación entre el número de elementos considerados y el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto. Se han considerado los casos de estudio I y II, descritos anteriormente, con distintas discretizaciones uniformes del MBR, caracterizadas por el número de elementos de presión presentes en la discretización. Los detalles de cada configuración se muestran en la tabla 6.3.

Las configuraciones mostradas en la tabla 6.3 se han investigado considerando un valor de $\Omega_{max} = 0$ (dando lugar a las configuraciones 1.0, 2.0, 3.0 y 4.0), y un valor de Ω_{max} calculado, para cada caso, según la ecuación 6.40 (dando lugar a las configuraciones 1.1, 2.1, 3.1 y 4.1). Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 6.4 (caso de estudio I) y 6.5 (caso de estudio II), junto con los valores de referencia utilizados para validar el funcionamiento del algoritmo.

En ambos casos se observa como los resultados obtenidos por el algoritmo de contacto tienden a los valores de referencia a medida que se incrementa el número de elementos de presión incluidos en la discretización. Por otra parte, el tiempo de cálculo empleado por el algoritmo para resolver el problema de contacto también aumenta a medida que se incrementa el número de elementos de presión.

Si se comparan los resultados obtenidos al evaluar todos los coeficientes de influencia de forma exacta ($\Omega_{max} = 0$) con los resultados obtenidos al evaluar algunos de los coeficientes de influencia de forma aproximada ($\Omega_{max} \neq 0$), se observa que si el

TABLA 6.5: Resultados de contacto al variar el número de elementos en el caso II

Caso	n_c	p_{max} (MPa)	A (mm ²)	δ (μ m)	t (s)
II.1.0	64	1376.84	36.00	132	0.15
II.1.1	64	1376.84	36.00	132	0.15
II.2.0	256	2721.45	36.00	140	1.79
II.2.1	256	2721.45	36.00	139	1.63
II.3.0	1024	3240.31	27.00	137	25.37
II.3.1	1024	3240.31	27.00	137	22.32
II.4.0	4096	4055.15	24.47	137	384.99
II.4.1	4096	4055.15	24.46	137	366.99
FEM	-	5586.00	24.89	135	556

parámetro Ω_{max} se calcula mediante la ecuación 6.40, la evaluación aproximada de algunos coeficientes de influencia no tiene ninguna influencia destacable sobre la precisión del algoritmo. En cambio, puede repercutir en reducciones del tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto.

La figura 6.27a muestra la evolución del tiempo total consumido por el algoritmo para resolver los casos de estudio I y II en función del número de elementos presentes en la zona de interferencia (n_c). Se puede observar que el tiempo total consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto se incrementa de forma aproximadamente cuadrática con el número de elementos presentes en la zona de interferencia.

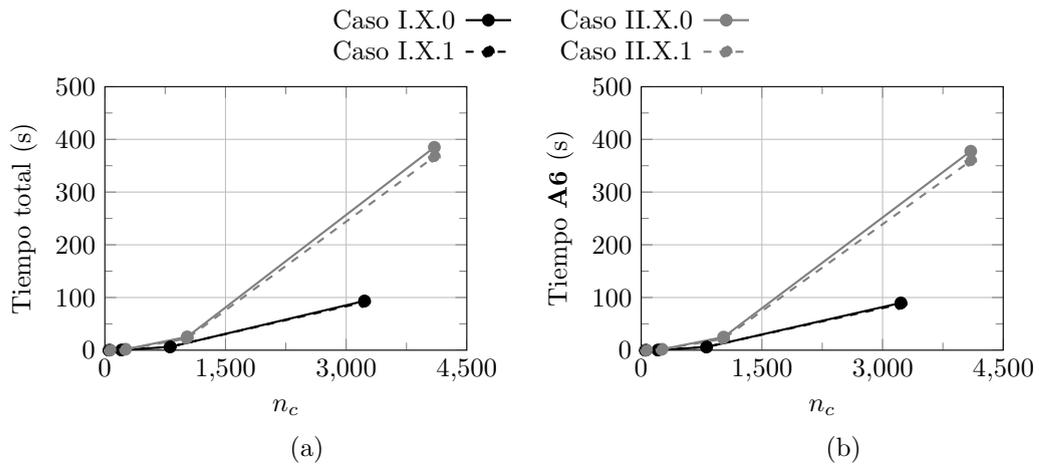


FIGURA 6.27: Tiempos de cálculo del algoritmo: (a) tiempo total y (b) tiempo invertido en el cálculo de los coeficientes de influencia

En general, el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el caso de estudio I es inferior al consumido para resolver el caso II. Esto se debe a que en el caso de estudio I no se considera la influencia de superficies libres sobre el contacto, mientras que en el caso de estudio II se considera la influencia de dos superficies libres sobre el contacto. Esto repercute en un incremento del coste computacional del algoritmo, debido a que es

necesario calcular los coeficientes de influencia de las mallas simétricas, como se describe en el apartado 6.3.1.

Cuando no se considera la influencia de superficies libres en el contacto (caso de estudio I), el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto es el mismo independientemente de si se establece un valor de $\Omega_{max} = 0$, como si el valor de este parámetro se calcula mediante la ecuación 6.40. Sin embargo, cuando sí intervienen superficies libres en el contacto (caso de estudio II), la utilización de la ecuación 6.40 para fijar el valor de este parámetro repercute en un descenso del tiempo de cálculo. Esto se debe a que este criterio para fijar la magnitud del parámetro Ω_{max} hace que los coeficientes de influencia de la malla original se calculen de forma exacta, mientras que los coeficientes de influencia de los elementos de las mallas simétricas más alejados se evalúan de forma aproximada. Esta reducción del tiempo consumido por el algoritmo se hace más notable a medida que el número de elementos se incrementa, así como a medida que se incrementa el número de dimensiones finitas a considerar por el algoritmo.

La figura 6.27b muestra el tiempo consumido por el algoritmo para determinar todos los coeficientes de influencia (paso A6 del algoritmo de contacto) en función del número de elementos presentes en la zona de interferencia (n_c). Se puede observar como los valores mostrados en esta figura coinciden con los que aparecen en la figura 6.27a, indicando que prácticamente la totalidad del tiempo consumido por el algoritmo se invierte en este paso. Por este motivo, esta operación será la que determine el coste computacional del algoritmo. Por lo tanto, se puede afirmar que el coste computacional del algoritmo vendrá determinado por n_c^2 . Cuando el algoritmo tenga que tener en cuenta la influencia de superficies libres sobre el contacto, este coste computacional se multiplicará por $(M + 1)$, donde M es el número de superficies libres a considerar. Estas conclusiones están en concordancia con las obtenidas por Kalker [41] para problemas de contacto discretizados en elementos de presión triangulares.

Estos resultados ponen de manifiesto que si se desea reducir el coste computacional del algoritmo, será necesario aplicar medidas que reduzcan el número y el tiempo empleado en el cálculo de coeficientes de influencia.

6.5 Implementación del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla

Como se ha comentado anteriormente, la aplicación del algoritmo de contacto requiere de la discretización del área potencial de contacto en un conjunto de n elementos de presión Δ_j . Como es habitual en métodos numéricos basados en la discretización del

dominio, la elección del número de elementos de presión en que se divide el dominio del problema requiere una decisión de compromiso entre precisión y coste computacional.

Como demostró Kalker [41] (ver apartado 6.4.4.4), el coste computacional del algoritmo es proporcional a n_c^2 , que es el número de coeficientes de influencia $(f_{j,i})$ que es necesario calcular para resolver el problema de contacto.

Por otra parte, Kalker también mostró que la precisión del modelo para predecir los resultados de contacto depende del refinamiento de la malla, especialmente en aquellas zonas cercanas al borde del área de contacto. Consecuentemente, una mejora de la precisión de los resultados implica necesariamente un incremento del coste computacional.

Cuando el tamaño y la posición del área de contacto son conocidos de antemano (como ocurre en los ejemplos del apartado 6.4.4), la eficiencia del modelo puede ser maximizada de forma sencilla discretizando únicamente la porción del dominio que se ajuste al área de contacto. Pero cuando estos parámetros son desconocidos, se debe discretizar toda la zona de interferencia, para poder tener en cuenta cualquier posición y forma del área de contacto. En esos casos, es habitual utilizar una malla de elementos de presión uniformes para todo el dominio, que será más o menos densa, dependiendo de la precisión deseada y de las capacidades de cálculo disponibles. En estos casos la eficacia del método se vuelve peor a medida que se reduce el tamaño del área de contacto comparado con el tamaño de la zona de interferencia. Y este efecto se acentúa cuando es necesario tener en cuenta la influencia de alguna superficie libre de los cuerpos sobre el contacto, debido a que se requieren operaciones adicionales para tener en cuenta la influencia de las superficies libres sobre el área de contacto, como se ha detallado en el apartado 6.3.1.

Para superar estos inconvenientes, se ha desarrollado un algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla de elementos de presión. Este algoritmo utiliza una discretización del dominio basada en la descomposición en *quadtree* (ver apartado 6.5.1) para resolver el problema de contacto. La utilización de una estructura de datos basada en el *quadtree* ofrece dos características fundamentales al algoritmo: en primer lugar, la división recursiva de las celdas proporciona una buena estrategia de refinamiento local de la malla. En segundo lugar, hace que las operaciones transversales, como la búsqueda de vecinos, sean eficientes computacionalmente y fáciles de implementar. En este caso, el dominio que se encuadra dentro de la raíz del *quadtree* es la zona de interferencia (Γ). Todas las celdas vacías del *quadtree* se consideran elementos de presión.

6.5.1 Estructuras basadas en el Quadtree

La descomposición en *quadtree* es una estructura de datos en forma de árbol ideada por Finkel [185]. De acuerdo con Samet [186], el concepto básico de este método consiste en encuadrar el dominio del problema en una celda contenedora, generalmente cuadrada, que se identifica como la raíz del *quadtree* (figura 6.28a). Esta celda se subdivide en cuatro celdas del mismo tamaño (figura 6.28b), una en cada una de las direcciones: noreste (NE), noroeste (NW), suroeste (SW) y sureste (SE). Cada una de estas celdas se divide de forma recursiva hasta que se alcanza un criterio de pausa (figuras 6.28c y 6.28d), que puede estar basado en la geometría local del dominio o en parámetros definidos por el usuario. A las celdas nuevas se les llama hijos de la celda descompuesta (padre).

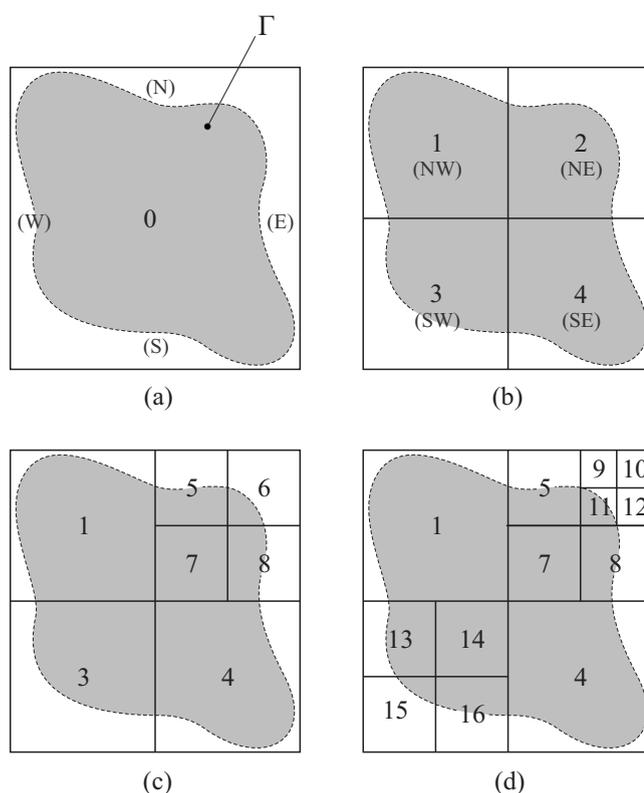


FIGURA 6.28: Descomposición en quadtree

La información referente al *quadtree* se almacena en una estructura jerárquica en forma de árbol, como se muestra en la figura 6.29. Para cada celda, se almacena un puntero hacia su padre y un puntero hacia sus hijos. Este tipo de estructura facilita la realización de un gran número de operaciones, como por ejemplo, la búsqueda de vecinos en una dirección dada, que tendrá un papel importante en el algoritmo propuesto.

Cada una de las esquinas de una celda se llama vértice. Las aristas que conectan vértices consecutivos son los lados de la celda. El nivel que ocupa una celda dentro de

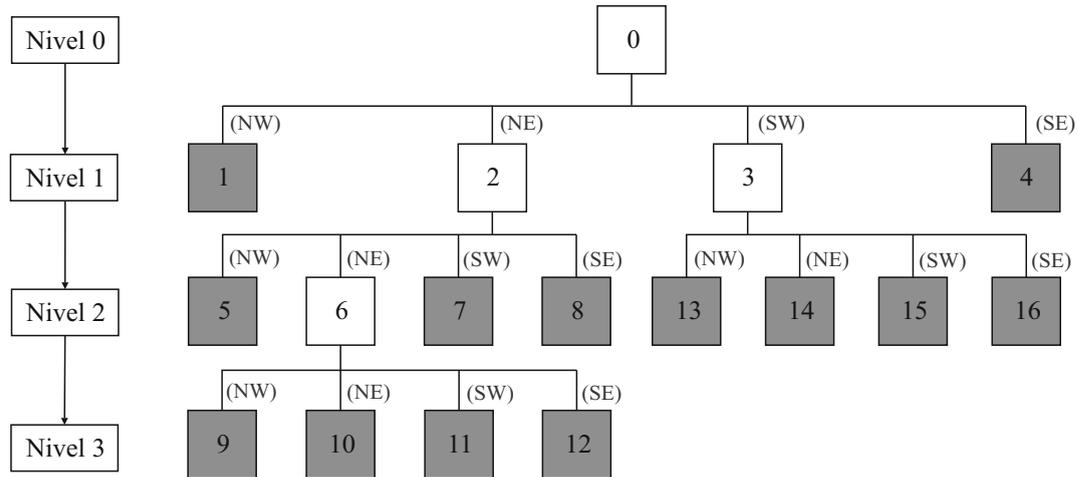


FIGURA 6.29: Estructura de datos del *quadtree* mostrado en la figura 6.28d

la estructura se denota por L_j y representa el número de divisiones realizadas desde la raíz hasta obtener dicha celda. De acuerdo con esta definición, L_j está también relacionado con el tamaño relativo que tiene una celda dentro de la estructura, y el grado de refinamiento que ese tamaño representa. Dado un tamaño para la celda inicial, el tamaño de cualquier celda se puede determinar si se conoce su grado de refinamiento L_j . Generalmente, la celda raíz ocupa el nivel 0.

Cualquier celda que no haya sido dividida (mostradas en gris en la figura 6.29) es una celda vacía. Las celdas que ya han sido divididas son celdas llenas.

6.5.2 Rutina principal del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla

En la figura 6.30 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo. Además de la información que define a las superficies de contacto, el algoritmo requiere de los siguientes parámetros de entrada:

- (i) El punto inicial de contacto (O_L).
- (ii) Un vector que defina la normal de contacto.
- (iii) La magnitud de la fuerza total de contacto (F_T).
- (iv) El nivel inicial de discretización (L_{ini}).

Como se puede apreciar, este algoritmo es una evolución del algoritmo de contacto descrito en el apartado 6.4.1. Las operaciones **F1**, **F2**, **F3**, **F4**, **F5** y **F6** se corresponden

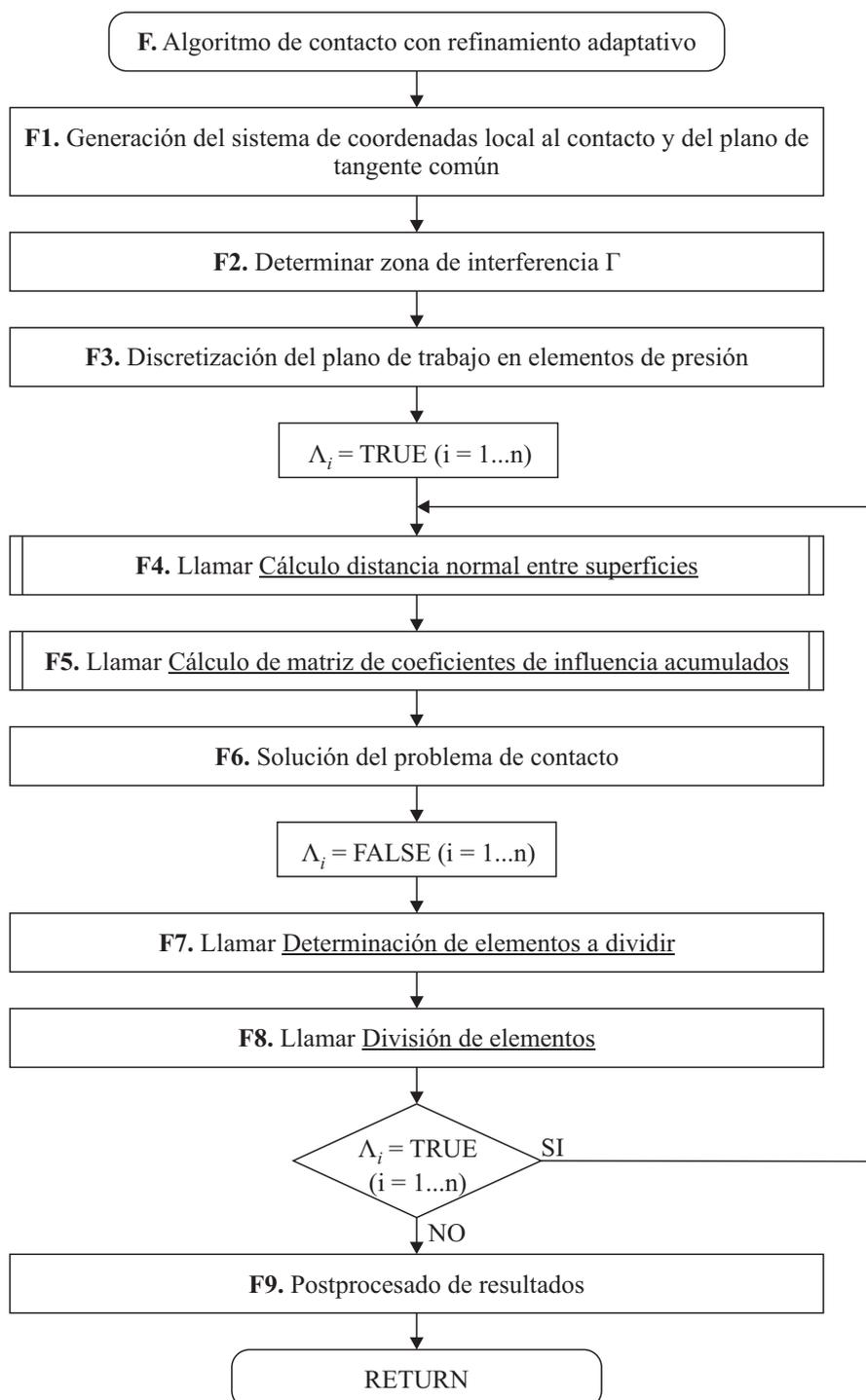


FIGURA 6.30: Diagrama de flujo del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo

con las operaciones **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A5** y **A6** del algoritmo de contacto (figura 6.14), y están detalladas en el apartado 6.4.

En este caso, la operación **F3** hace referencia al proceso de encuadrar la zona de interferencia dentro de la celda raíz del *quadtree*, coincidente con el MBR, que se determina utilizando el algoritmo propuesto por Chaudhuri [183]. La celda raíz del *quadtree* se subdivide hasta que todas las celdas presentes alcanzan el nivel inicial de discretización L_{ini} , obteniendo una malla uniforme de n elementos de presión. Este nivel base de discretización tiene que ser suficiente para encuadrar la ubicación de la zona de contacto.

Una vez completadas estas operaciones (**F1** – **F6**), el algoritmo define para todos los elementos la bandera $\Lambda_i = FALSE$, indicando que las propiedades de todos los elementos de presión presentes en la discretización son conocidas. Posteriormente, se llama al algoritmo encargado de determinar los elementos a dividir (paso **F7**), cuyo funcionamiento se detalla en el apartado 6.5.3. Una vez conocidos los elementos a dividir, se llama al algoritmo que se encarga de la división de estos elementos (paso **F8**), cuyo funcionamiento se detalla en el apartado 6.5.4. Este algoritmo marca con la bandera $\Lambda_i = TRUE$ a todos los elementos creados a partir de la división de elementos existentes. Cuando ha finalizado el proceso, se comprueba si alguno de los elementos presentes en el modelo cumple con la condición $\Lambda_i = TRUE$. En caso afirmativo, el algoritmo vuelve a iterar volviendo al paso **F4**. En caso negativo, el algoritmo termina y se muestran los resultados (paso **F9**).

La ventaja principal de este algoritmo es que a partir de la segunda iteración del mismo, la operación **F4**, y especialmente la operación **F5**, únicamente se realizan para los elementos nuevos resultantes de la operación **F8** de la iteración anterior. El número de coeficientes de influencia calculados, que define el coste computacional del algoritmo, se puede calcular a posteriori con la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^t [n_{(i)} \cdot n_{new(i)} + n_{new(i)} (n_{(i-1)} - n_{split(i-1)})] \quad (6.41)$$

donde t es el número de iteraciones realizadas por el algoritmo, n_{new} es el número de elementos nuevos en la iteración i y n_{split} es el número de elementos divididos en la iteración anterior ($i - 1$).

6.5.3 Algoritmo para determinar los elementos a dividir

El refinamiento adaptativo se puede basar en varios criterios, como por ejemplo la geometría local del dominio o la tasa de cambio de magnitudes físicas. En un problema

de contacto bajo el dominio de las pequeñas deformaciones, el área de contacto es generalmente pequeña comparada con las dimensiones de los sólidos que intervienen en el contacto y el gradiente de presiones es habitualmente elevado en parte del área de contacto. Además, para un nivel dado de precisión, la aproximación a la distribución de presiones con elementos discretos de presión constante requiere elementos pequeños en aquellas áreas donde el gradiente es grande, pero los elementos pueden ser más grandes en aquellas zonas en las que el gradiente de presiones es pequeño. Por esta razón, en este algoritmo se utiliza el gradiente de las presiones de contacto como criterio para el refinamiento.

Pero, debido a que el algoritmo trabaja en un dominio discreto, el gradiente se estima como la tasa de variación de la presión de contacto ($\varphi_{j,i}$) entre dos elementos adyacentes Δ_i y Δ_j . Finalmente, para hacer este parámetro adimensional, se define como la diferencia absoluta de presión de contacto entre el elemento Δ_i y el elemento Δ_j dividida por el valor medio de sus valores:

$$\varphi_{j,i} = \frac{|p_j - p_i|}{\frac{p_j + p_i}{2}} = 2 \cdot \frac{|p_j - p_i|}{p_j + p_i} \quad (6.42)$$

El valor obtenido para $\varphi_{j,i}$ se compara con un valor definido arbitrariamente φ_{max} , que representa la tolerancia del gradiente, para decidir si los elementos relacionados deben ser divididos o no. Por lo tanto, cuando $\varphi_{j,i} > \varphi_{max}$ los elementos se marcarán como candidatos para ser divididos.

Sin embargo, al utilizar la ecuación 6.42 para calcular la tasa de variación entre la presión de contacto de un elemento Δ_i que pertenece al área de contacto (y por lo tanto $p_i > 0$) y un elemento adyacente Δ_j que esté fuera del área de contacto (donde no existe presión de contacto, $p_j = 0$), el resultado siempre será $\varphi_{j,i} = 2$, independiente del valor de p_i . Puesto que habitualmente el valor especificado para φ_{max} será menor que 1, se puede concluir que esta estrategia de refinamiento basada en la tasa de variación de las presiones de contacto refinará la malla en el borde del área de contacto sin parar.

Para limitar el número de iteraciones realizadas por el algoritmo, se incluye un criterio de parada adicional, basado en el tamaño mínimo que puede alcanzar un elemento de presión. Como se ha mencionado en el apartado 6.5.1, el nivel L_j que un elemento de presión ocupa en la estructura quadtree está relacionado con su tamaño. Por lo tanto, al limitar el nivel que puede alcanzar un elemento también limitará su tamaño. Este límite viene impuesto por un parámetro definido por el usuario L_{max} , denominado máximo grado de refinamiento de malla.

Es importante especificar que φ_{max} es un valor objetivo y no siempre se alcanzará. Si el máximo grado de refinamiento de malla L_{max} se alcanza antes que se alcance el valor objetivo de φ_{max} , el algoritmo terminará. Esto garantiza que el grado máximo de refinamiento se alcanzará siempre en el borde del área de contacto, por lo que la precisión en la que éste se define se especifica de antemano por L_{max} , independientemente del nivel inicial de discretización.

En la figura 6.31 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo de determinación de elementos a dividir. El algoritmo requiere de los siguientes parámetros:

- (i) Un vector que contenga las presiones de contacto p_j asociadas a cada elemento de presión de la malla actual.
- (ii) La estructura de datos quadtree.
- (iii) El máximo grado de refinamiento de malla L_{max} .
- (iv) La tasa máxima permitida para la variación de la presión de contacto φ_{max} .

El algoritmo empieza definiendo la bandera $K_i = FALSE$ para los n elementos presentes en la malla. La bandera K_i especifica la necesidad de un elemento de ser dividido, y por lo tanto, al inicio del algoritmo se asume que ninguno de los elementos requiere de división.

Posteriormente empieza un bucle iterativo en el que se buscan los k vecinos de cada elemento de presión con un valor positivo de presión asociado (paso **G1**). Para este paso se utiliza el algoritmo propuesto por Samet [187], que se basa en estructuras de datos tipo *quadtree*. De esta manera, se pueden encontrar los vecinos de un elemento de presión dado aunque no compartan ningún nodo.

La tasa de variación de la presión de contacto $\varphi_{j,i}$ entre un elemento de presión Δ_i y cualquiera de sus vecinos Δ_j se calcula utilizando la ecuación 6.42. Si $\varphi_{j,i}$ es menor que el valor definido para φ_{max} , se evalúa el siguiente elemento de presión Δ_{j+1} . En cambio, si la diferencia relativa de presiones de contacto entre ambos elementos es mayor que φ_{max} , ambos elementos son candidatos para ser divididos. Se pueden dar tres situaciones distintas:

- (i) Ambos elementos de presión tienen el mismo nivel ($L_i = L_j$) y su valor es menor que L_{max} . Entonces, ambos elementos se marcan para ser divididos definiendo $K_i = K_j = TRUE$.

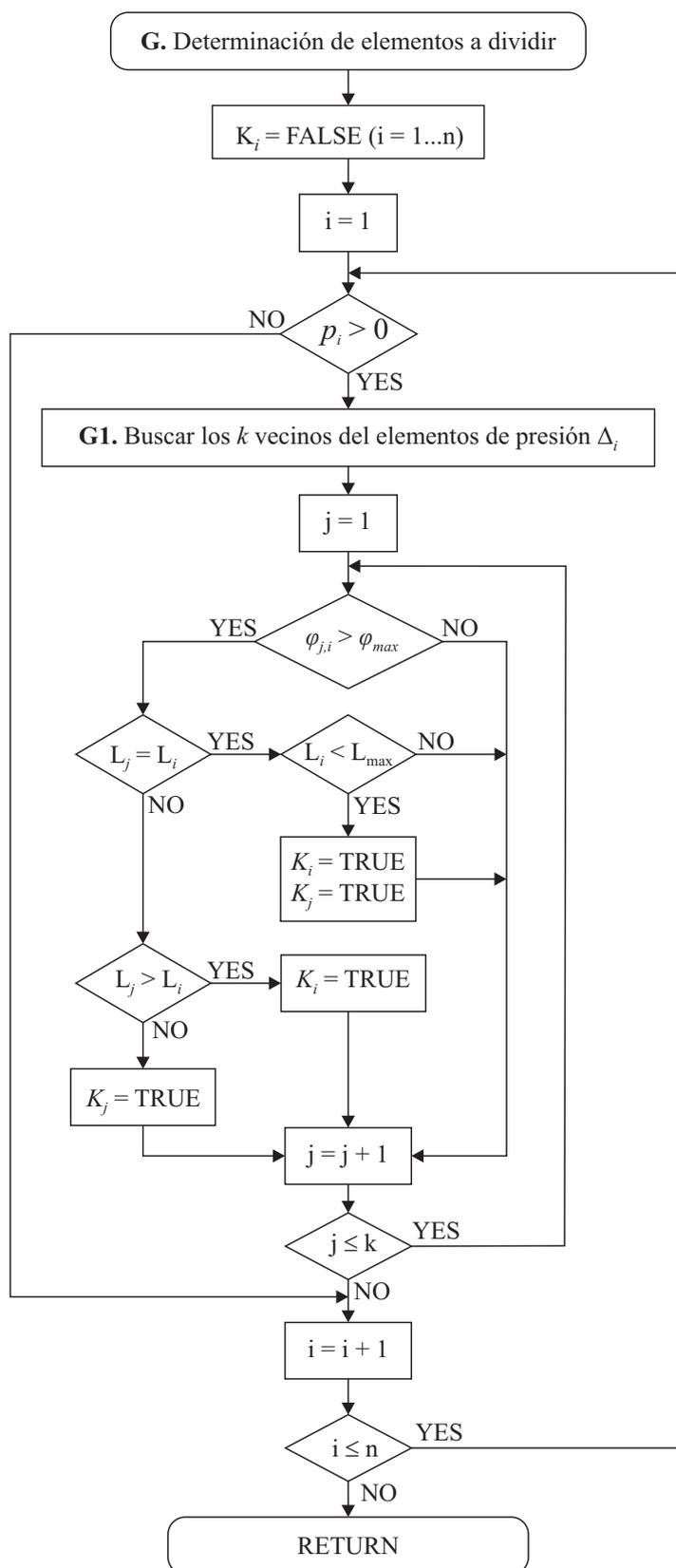


FIGURA 6.31: Diagrama de flujo para el algoritmo de determinación de elementos a dividir

- (ii) Ambos elementos de presión tiene el mismo nivel ($L_i = L_j$) y su valor es igual que L_{max} . En ese caso, ninguno de los elementos se marca para ser dividido y se evalúa el siguiente elemento de presión.
- (iii) Los elementos de presión tienen niveles distintos ($L_j \neq L_i$). Si $L_i < L_j$ el elemento de presión Δ_i se marca para ser dividido definiendo $K_i = TRUE$. De otra manera, el elementos de presión Δ_j se marca para ser dividido, definiendo $K_j = TRUE$.

Mediante estas condiciones se garantiza un correcto balance en las proporciones de las celdas del *quadtree*, de manera que celdas contiguas con valores positivos de presión, como máximo puedan diferir en un nivel dentro de la estructura *quadtree*. Este balance se conoce como condición 2 : 1, y su concepto fue introducido por Yerri [188].

El algoritmo termina cuando todos los elementos han sido evaluados, devolviendo un vector \mathbf{K} que contiene los índices de aquellos elementos en los que $K_i = TRUE$.

6.5.4 Algoritmo para dividir elementos

En la figura 6.32 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo de división de elementos. El algoritmo requiere de los siguientes parámetros:

- (i) La estructura de datos *quadtree*.
- (ii) Vector \mathbf{K} , que contiene las banderas K_i que indican cuando elemento necesita ser dividido.
- (iii) Vector $\mathbf{\Lambda}$, que contiene las banderas Λ_j que indican cuando las propiedades de un elemento de presión deben ser calculadas.

Para cada uno de los elementos de presión presentes en el modelo, se evalúa el valor de la bandera K_i . Si $K_i = TRUE$, el elemento requiere ser dividido. Si por el contrario $K_j = FALSE$, el elemento no necesita ser dividido, y se evalúa el siguiente elemento.

Cuando un elemento requiere ser dividido, origina cuatro nuevos elementos de presión del mismo tamaño (paso **H1**). Para cada uno de estos elementos se define $\Lambda_i = TRUE$ (paso **H2**), para indicar que deben ser calculados en el caso de que exista una próxima iteración del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo. Por último, se actualiza la estructura del *quadtree* (paso **H3**) para tener en cuenta los elementos recién creados.

El algoritmo devuelve el vector $\mathbf{\Lambda}$ y la estructura *quadtree* actualizados con la información de los nuevos elementos de presión.

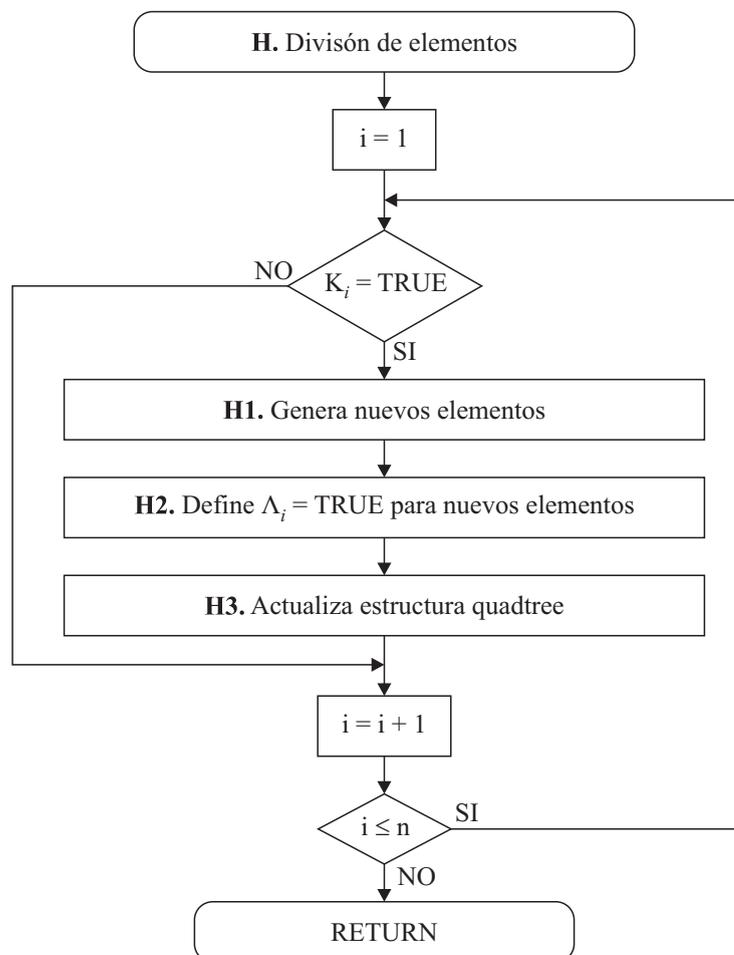


FIGURA 6.32: Algoritmo para la división de elementos

TABLA 6.6: Parámetros de control de refinamiento de malla

Configuración	5	6	7	8	9	10
L_{ini}	2	2	2	2	2	2
L_{max}	4	5	6	7	7	7
φ_{max}	15%	15%	15%	15%	35%	65%

6.5.5 Validación del algoritmo y estudio de parámetros

El algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla se ha validado utilizando los casos de estudio I y II descritos en el apartado 6.4.4. El funcionamiento del algoritmo se ha probado utilizando distintas configuraciones de los parámetros de refinamiento adaptativo, que se han conseguido variando los parámetros L_{max} y φ_{max} , como se muestra en la tabla 6.6. En todos los casos, el nivel de refinamiento inicial es $L_{ini} = 2$.

Las configuraciones mostradas en la tabla 6.6 se han investigado considerando un valor de $\Omega_{max} = 0$ (dando lugar a las configuraciones 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0 y 10.0), y un valor de Ω_{max} calculado, para cada caso, según la ecuación 6.40 (dando lugar a las configuraciones 5.1, 6.1, 7.1, 8.1, 9.1 y 10.1).

Para cada caso, se evalúa la presión máxima de contacto (p_{max}), el área de contacto (A), la aproximación entre cuerpos (δ) y el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto (t). Los valores mostrados de t corresponden a la media aritmética de 10 ejecuciones consecutivas del algoritmo realizadas en la misma estación de trabajo.

En la figura 6.33 se ilustra gráficamente el funcionamiento del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla. Se puede observar la evolución de la huella de contacto y de la malla de elementos de presión a través de las iteraciones realizadas por el algoritmo para resolver el caso de estudio I.8.0. Con cada iteración, la malla de elementos de presión se adapta para cumplir el objetivo de gradiente máximo entre elementos vecinos, hasta que se alcanza el máximo grado de refinamiento, impuesto por el parámetro L_{max} .

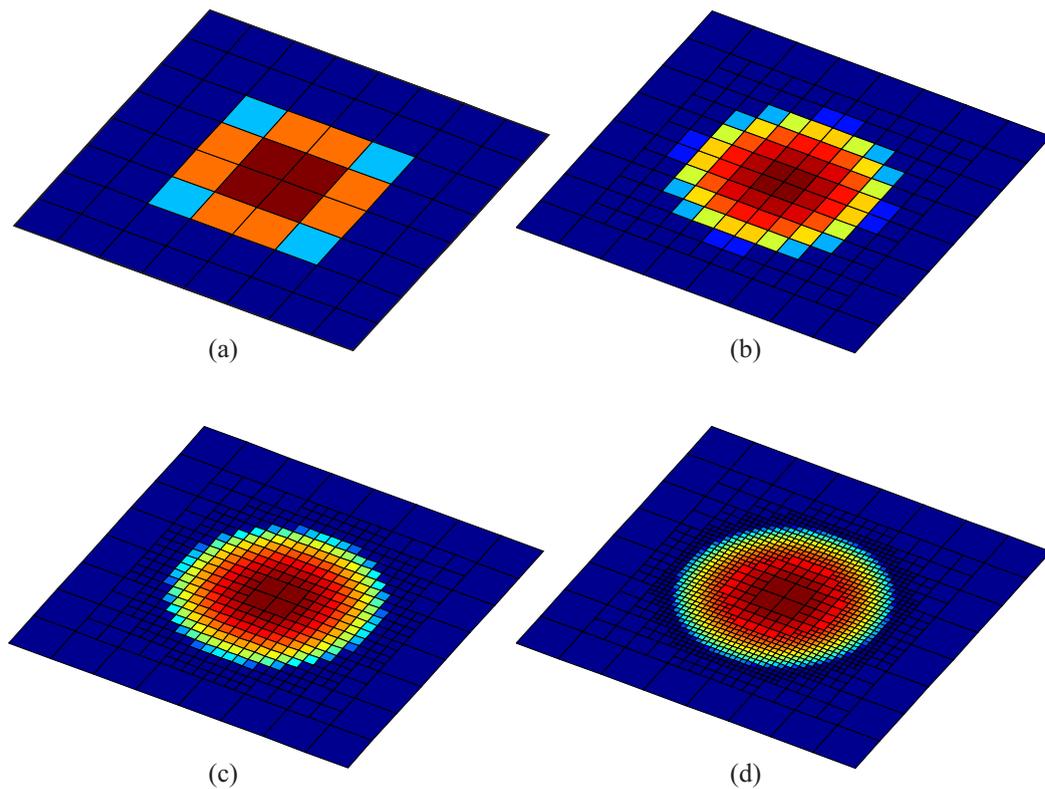


FIGURA 6.33: Evolución de la huella de contacto a través de las iteraciones del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo para el caso I.8.0

La tabla 6.7 muestra los resultados del caso de estudio I obtenidos mediante las distintas configuraciones del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo mostradas en

TABLA 6.7: Resultados de contacto del caso de estudio I obtenidos mediante las configuraciones mostradas en la tabla 6.8.

Caso	p_{max} (MPa)	A (mm ²)	δ (μ m)	t (s)
I.5.0	6299.38	9.00	294	0.19
I.5.1	6299.38	9.00	294	0.18
I.6.0	6440.16	9.56	295	0.59
I.6.1	6440.16	9.56	295	0.60
I.7.0	6416.67	9.42	295	3.04
I.7.1	6416.68	9.42	295	3.08
I.8.0	6417.87	9.25	295	17.60
I.8.1	6417.87	9.25	295	17.45
I.9.0	6441.59	9.25	295	11.61
I.9.1	6441.59	9.25	295	11.71
I.10.0	6441.07	9.25	295	9.75
I.10.1	6441.07	9.25	295	9.87
Hertz	6478.28	9.26	295	-

la tabla 6.6. A efectos de comparación, también se muestra la solución analítica del problema de contacto proporcionada por la teoría de Hertz [7].

Se puede apreciar como la precisión con la que el algoritmo calcula el tamaño del área de contacto y la aproximación entre cuerpos no depende del valor φ_{max} , puesto que en los casos de estudio en los que se mantiene constante el valor de L_{max} (casos I.8, I.9 y I.10), se obtienen los mismos resultados independientemente del valor escogido para este parámetro. En cambio, se aprecia una variación en estos resultados en aquellos casos en los que el valor de L_{max} varía (casos I.5, I.6, I.7 y I.8). Esto se debe a que la precisión con la que se calcula el borde del área de contacto depende únicamente del grado máximo de refinamiento permitido L_{max} .

Por otra parte, para un mismo grado de refinamiento (casos I.8, I.9 y I.10), el valor máximo de presión de contacto obtenido varía con el parámetro φ_{max} especificado. Esto ocurre debido a que el valor de la presión de contacto depende de la configuración que adopta la malla dentro de la huella de contacto.

Si se comparan los resultados obtenidos considerando un valor de $\Omega_{max} = 0$, y los obtenidos considerando un valor de Ω_{max} calculado según la ecuación 6.40, se puede observar como los resultados permanecen prácticamente constantes.

Los resultados gráficos y la malla de elementos de presión resultante se muestran en la figura 6.34 para algunas configuraciones del caso I. En esta figura únicamente se muestra una porción del MBR, para facilitar la visualización. Se puede ver como el algoritmo

adapta la malla de elementos de presión para cumplir los requisitos de tasa máxima de variación de la presión de contacto.

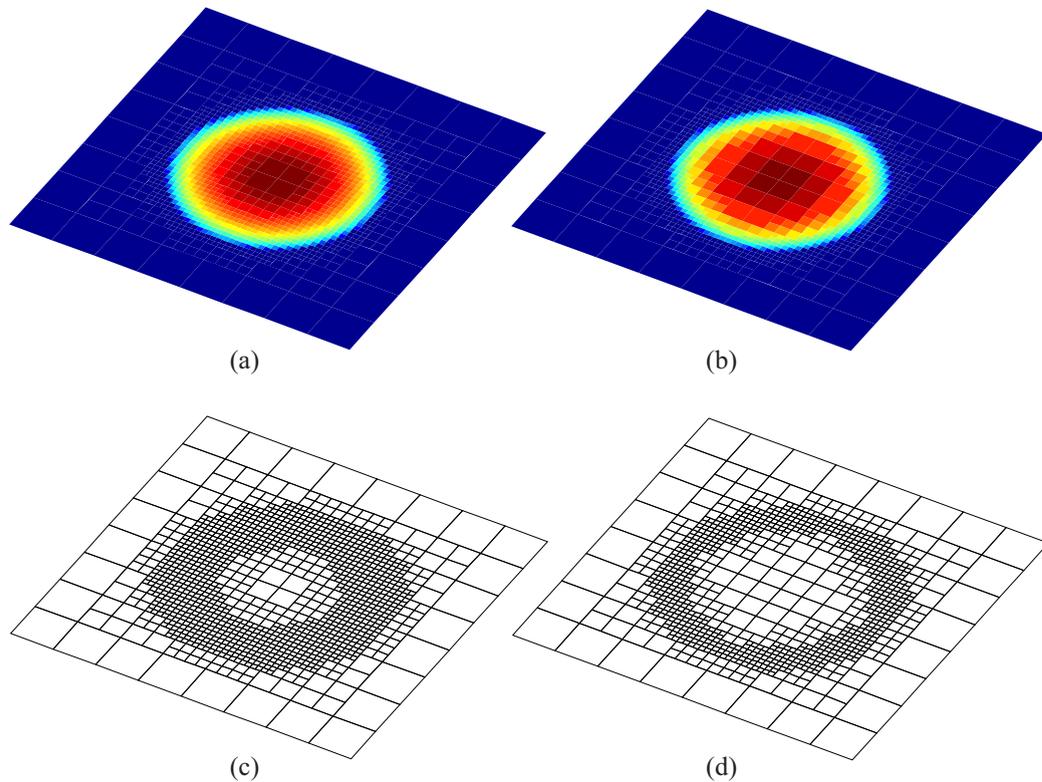


FIGURA 6.34: Huellas de contacto y mallas resultantes para (a y c) el caso I.8.0 y (b y d) caso I.10.0

La tabla 6.8 muestra los resultados del caso de estudio II obtenidos mediante las distintas configuraciones del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo mostradas en la tabla 6.6. A efectos de comparación, también se muestra la solución obtenida a partir del análisis del modelo de elementos finitos.

Se puede observar que, como ocurre en los resultados del caso de estudio I, el valor especificado para φ_{max} no afecta a la precisión con el que el algoritmo calcula la magnitud del área de contacto o la aproximación entre cuerpos. En cambio, sí tiene una gran influencia en los valores máximos de presión obtenidos, puesto que éstos dependen de la configuración de la malla dentro del área de contacto. No se observan diferencias entre los casos resueltos con un valor de $\Omega_{max} = 0$ y los casos en los que el valor de Ω_{max} se ha calculado mediante la ecuación 6.40.

La figura 6.35 muestra los resultados gráficos del área de contacto y de la malla de elementos de presión resultante para algunas configuraciones del caso de estudio II. En esta figura únicamente se muestra una porción del MBR, para facilitar el visionado. En los contactos lineales, en los que una dimensión es mucho más grande que la otra, el refinado de la malla tiene una gran relevancia, puesto que es muy difícil capturar

TABLA 6.8: Resultados de contacto del caso de estudio II obtenidos mediante las configuraciones mostradas en la tabla 6.8.

Caso	p_{max} (MPa)	A (mm ²)	δ (μ m)	t (s)
II.5.0	2721.45	36.00	139	0.85
II.5.1	2721.45	36.00	139	0.76
II.6.0	3240.31	27.00	138	6.13
II.6.1	3240.30	27.00	137	5.30
II.7.0	4055.15	24.47	137	40.19
II.7.1	4055.15	24.47	137	35.64
II.8.0	5117.00	25.06	137	241.08
II.8.1	5117.01	25.07	137	209.56
II.9.0	5117.03	25.06	137	152.86
II.9.1	5117.04	25.07	137	120.45
II.10.0	4503.31	25.06	137	123.38
II.10.1	4503.35	25.07	137	102.13
FEM	6027.00	24.89	135	556

la variación de la presión de contacto en la dirección transversal utilizando una malla uniforme.

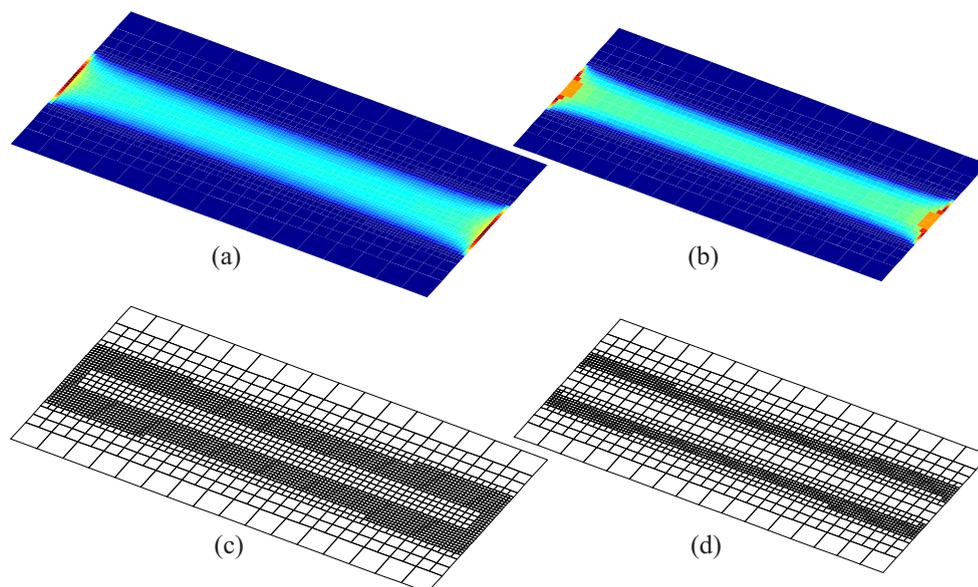


FIGURA 6.35: Huellas de contacto y mallas resultantes para (a y c) el caso II.8.0 y (b y d) caso II.10.0

En todos los casos estudiados se observa que a medida que se incrementa el grado máximo de refinamiento permitido (L_{max}) y se reduce la tolerancia del gradiente (φ_{max}), los resultados obtenidos a partir del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo convergen hacia los valores de referencia.

TABLA 6.9: Tabla de equivalencias entre casos de mallado uniforme y casos con refinamiento adaptativo

Malla uniforme		Refinamiento adaptativo	
Configuración	n	Configuración	L_{max}
1	64	-	3
2	256	5	4
3	1024	6	5
4	4096	7	6
-	16384	8, 9 y 10	7

En la figura 6.36 se muestran las distribuciones de presiones a lo largo de los semiejes principales del contacto, obtenidos de las configuraciones II.3.0 (mallado uniforme) y II.8.0 (mallado adaptativo) y de los resultados obtenidos a partir del análisis del modelo de elementos finitos. Para obtener el valor sobre un punto concreto, se realiza una interpolación bilineal de los resultados discretos del algoritmo de contacto. Se puede observar que con la incorporación del mallado adaptativo, los resultados tienden a los resultados de referencia proporcionados por el modelo de elementos finitos.

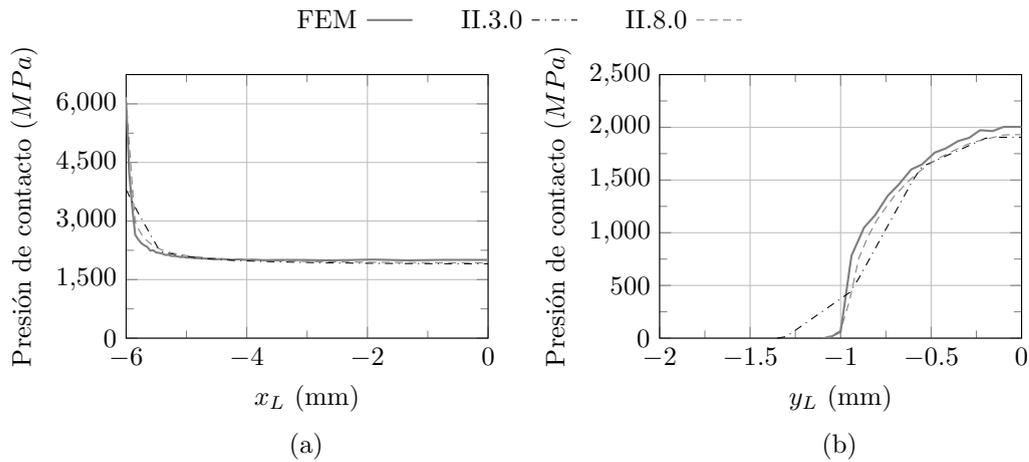


FIGURA 6.36: Distribución de presiones a lo largo de los ejes de coordenadas locales al contacto

Existe cierta equivalencia entre los casos resueltos en este apartado y los casos resueltos en el apartado 6.4.4 (donde se utilizan mallas uniformes de elementos de presión). Esta equivalencia viene dada por el tamaño mínimo alcanzado por los elementos de presión durante el refinamiento adaptativo (gobernado por el parámetro L_{max}), y el tamaño de los elementos de presión en mallas uniformes. Las equivalencias en estos términos se muestran en la tabla 6.9. Esta equivalencia se manifiesta en los resultados obtenidos, que en casos equivalentes, son prácticamente idénticos. Para la configuración 8 no existe equivalencia en malla uniforme, pues no se dispone de capacidad computacional suficiente para resolver ese caso.

TABLA 6.10: Coste computacional asociado a cada caso de estudio

Caso	Coste computacional	Coste computacional relativo
I.5	11408	26.30%
I.6	50576	7.60%
I.7	323600	3.10%
I.8	2038800	1.20%
I.9	1369104	0.82%
I.10	1145104	0.69%
II.5	86018	43.75%
II.6	675840	21.48%
II.7	5001216	9.90%
II.8	30459264	11.35%
II.9	17510016	6.52%
II.10	13946880	5.20%

Como se ha comentado anteriormente, el coste computacional del algoritmo está directamente relacionado con el número de coeficientes de influencia calculados. El coste computacional del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo para los casos de estudio I y II, calculado según se propone en la ecuación 6.41, se muestra en la tabla 6.10. Para facilitar la comparación, también se muestra el coste computacional relativo, que es el coste computacional del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo dividido entre el coste computacional del algoritmo de contacto con una malla uniforme equivalente (ver tabla 6.9).

Se puede observar como, en el peor de los casos, se consigue una reducción del coste computacional del 56.25%. En general, el coste computacional relativo del algoritmo con refinamiento adaptativo es menor a medida que se incrementa el grado de refinamiento máximo (L_{max}) y se incrementa la tolerancia del gradiente de presión (φ_{max}).

Por otra parte, se observa que el caso de estudio II tiene un coste computacional relativo mayor al del caso de estudio I. Esto se debe a que el área de contacto del caso II corresponde a un 17.28% de la zona de interferencia, mientras que en el caso I el área de contacto corresponde a un 6.40% de la zona de interferencia. Esto indica que la ventaja de utilizar el algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo es mayor a medida que el área de contacto es más pequeña comparada con el área de la zona de interferencia.

Por último, la figura 6.37 muestra una comparación de los tiempos consumidos por el algoritmo para resolver algunas configuraciones del caso de estudio II, con el algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo, y con una malla uniforme equivalente (ver tabla 6.9). El tiempo relativo expresa la relación entre el tiempo consumido por el algoritmo para resolver un caso de estudio, comparado con el tiempo consumido por el

algoritmo para resolver ese mismo caso utilizando una discretización uniforme equivalente. Se puede observar como a medida que la malla se vuelve más fina, la utilización del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de malla reporta mayores beneficios en cuanto a tiempo de cálculo, especialmente cuando se configura para que calcule coeficientes de influencia de forma aproximada.

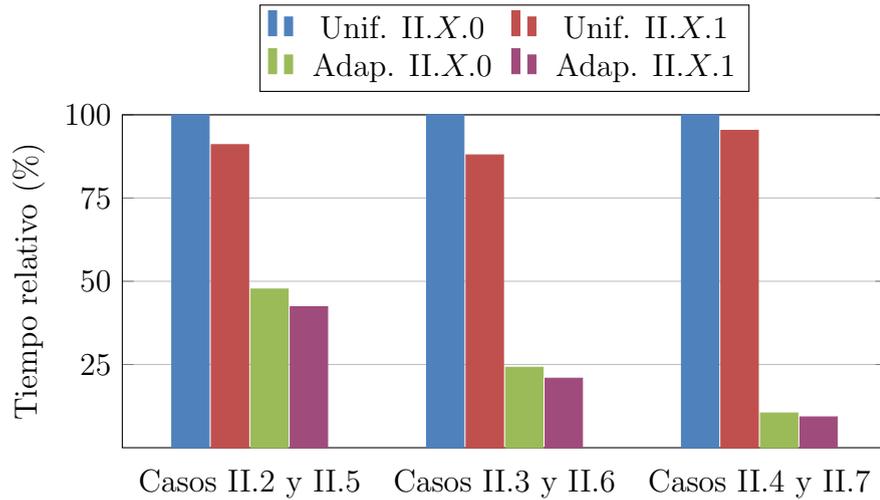


FIGURA 6.37: Resumen de tiempos totales consumidos por el algoritmo para resolver distintos casos de estudio

6.6 Algoritmo de contacto para transmisiones por engranaje considerando la desalineación natural de los ejes

El algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo presentado en el apartado anterior es una alternativa interesante para resolver problemas de contacto en transmisiones por engranaje por dos motivos fundamentales:

- (i) Mientras que es fácil determinar el punto inicial de contacto (O_L), la forma y el tamaño del área de contacto es impredecible de antemano, de manera que para resolver el problema de contacto por el método de los coeficientes de influencia es necesario discretizar toda la zona de interferencia.
- (ii) Las dimensiones finales de la zona de contacto son pequeñas comparadas con la zona de interferencia.

En la figura 6.38 se muestra una sección transversal de los sólidos en contacto en una transmisión de engranajes. De acuerdo con la notación descrita en el apartado 6.3, el diente del piñón se considerará como el sólido P , y el diente de la rueda se considerará como el sólido W .

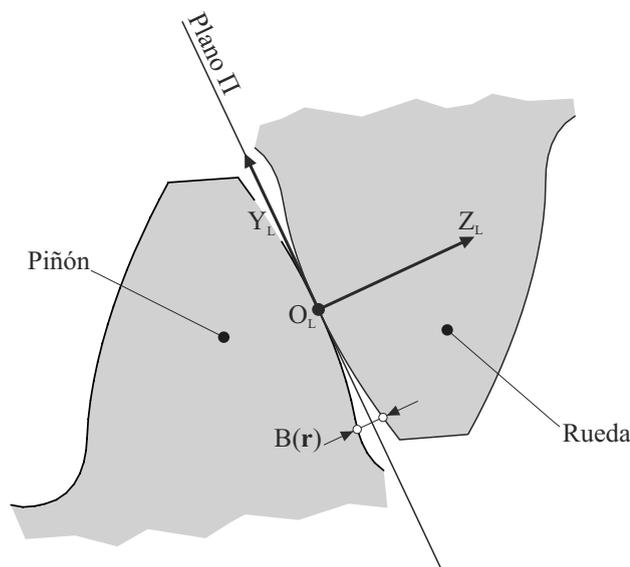


FIGURA 6.38: Sección transversal de los sólidos de contacto

Para la aplicación del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de malla, además de la información que define a las superficies de los sólidos en contacto (en este caso los dientes de engranaje), es necesario conocer el punto inicial de contacto O_L y la normal común de contacto. Esta información se puede determinar mediante un algoritmo de análisis de contacto entre dientes (TCA, Tooth Contact Analysis). Si bien existen varias propuestas de algoritmo TCA, en este trabajo se ha utilizado la metodología propuesta por Sanchez [189], pues es la desarrollada en el grupo de investigación en el que se ha realizado este trabajo. Estos datos sirven de partida para la generación del plano II y del sistema de coordenadas local al contacto. El eje Z_L de este sistema de coordenadas local coincide con el vector unitario correspondiente a la normal común de contacto, apuntando hacia el interior de la geometría del diente de la rueda.

Habitualmente, las superficies de contacto de los dientes de los engranajes poseen una dimensión que predomina sobre la otra. Por este motivo, al aplicar el algoritmo de contacto propuesto, si se intenta cubrir la zona de interferencia con una celda raíz cuadrada, como se muestra en la figura 6.39a, se requerirá llegar a un nivel muy elevado de la estructura *quadtree* hasta conseguir un tamaño de elemento aceptable para la zona de interferencia.

Por esta razón, resulta conveniente utilizar de forma simultánea varias celdas raíz del *quadtree* a la hora de discretizar la zona potencial de contacto, como se muestra en la figura 6.39b. Con esta medida se consigue, por una parte, que la zona discretizada no coincidente con la zona de interferencia sea mínima, y por otra parte, que se obtenga una buena discretización de la zona de interferencia con pocas divisiones de las celdas raíz. Esto repercute en una mejora notable del coste computacional.

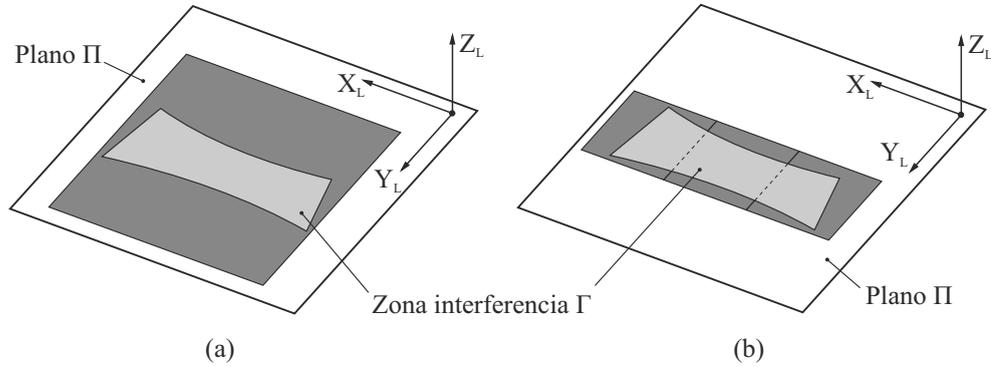


FIGURA 6.39: Discretización de la zona de interferencia en (a) un *quadtree* y (b) tres *quadtrees*

La utilización de varias celdas raíz simultáneas requiere realizar modificaciones en el método de búsqueda de vecinos utilizado en el algoritmo para la determinación de elementos a dividir (apartado 6.5.3), inicialmente propuesto por Samet [187]. Esta modificación consiste en que cuando en la búsqueda de vecinos se alcance el nivel $L_j = 0$ de una estructura *quadtree*, el algoritmo debe ser capaz de saltar a la estructura *quadtree* contigua y continuar la búsqueda dentro de ella.

Por último, la restricción impuesta por 6.29c en la solución del problema de contacto deberá ser modificada para tener en cuenta que ahora la compresión entre los sólidos de contacto no se genera por la acción de una fuerza F_T , sino de un par torsor (T) aplicado sobre el eje del engranaje. De esta manera, la nueva restricción será:

$$\mathbf{q}_j = [p_j \cdot A_j] \cdot \mathbf{u}_{Z_L} \quad (6.43a)$$

$$T = \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_{OQ_j} \times \mathbf{q}_j) \cdot \mathbf{u}_z \quad (6.43b)$$

donde \mathbf{r}_{OQ_j} es un vector que va desde el origen de coordenadas, situado sobre el eje del piñón, hasta el centroide del elemento de presión (Q_j) y \mathbf{u}_z es el vector unitario asociado al eje global Z , coincidente con el eje del piñón, como se muestra en la figura 6.40.

En base a estos criterios, es posible aplicar el algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de malla para resolver el problema de contacto en transmisiones de engranajes. Como resultado, se obtienen una serie de presiones de contacto uniformes (p_j). Cada presión genera una carga (\mathbf{q}_j) y un momento (\mathbf{m}_j) puntuales, que actúan sobre los ejes de los engranajes. El conjunto de fuerzas y momentos puntuales representa la función de carga externa $\mathbf{q}(z)$ y de momentos externos $\mathbf{m}(z)$. Estas funciones se aplican utilizando las funciones de Macaulay (apartado 3.5) sobre el modelo de eje *SHAFT1*,

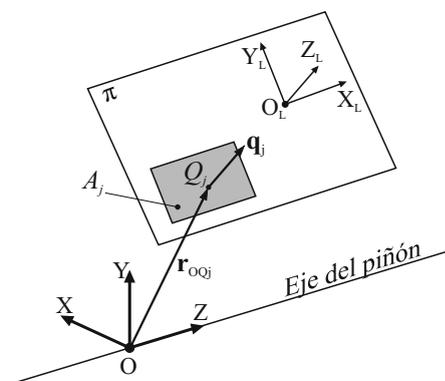


FIGURA 6.40: Determinación del par torsor producido por una presión uniforme aplicada sobre un área A_j

descrito en el apartado 3.3, para determinar la deflexión que producen sobre el eje del engranaje.

La figura 6.41 muestra el diagrama de flujo del algoritmo de contacto para transmisiones por engranaje considerando la desalineación natural de los ejes. Este algoritmo requiere de los siguientes datos de partida:

- (i) Datos de los engranajes que componen la transmisión.
- (ii) Datos de los ejes de los engranajes.
- (iii) Par transmitido (T).
- (iv) Tolerancia de desalineación de los engranajes.

El algoritmo empieza considerando que la fuerza total producida en el contacto (F_T) por el par transmitido (T) se distribuye de forma uniforme a lo largo del ancho de cara del engranaje (paso **I1**). De esta forma, el algoritmo empieza considerando que los engranajes están perfectamente alineados.

Bajo esta suposición, se aplica la teoría de vigas para calcular la deformación de los ejes debido a la carga distribuida. A tal efecto se puede utilizar el modelo *SHAFT1* propuesto para el cálculo de la deflexión del eje, descrito en el apartado 3.3. La desalineación de los ejes se calcula en base a los desplazamientos que se producen en los puntos C_1 , D_1 , C_2 y D_2 como consecuencia de la deformación de los ejes (paso **I2**), utilizando el procedimiento descrito en el apartado 4.8.5.

Entonces empieza un proceso iterativo cuyo primer paso es la generación de un conjunto de superficies de engranaje desalineadas (paso **I3**), teniendo en cuenta las magnitudes de desalineación calculadas en el paso **I2**. La generación de las geometrías se realiza según la teoría moderna del engrane propuesta por Litvin [61].

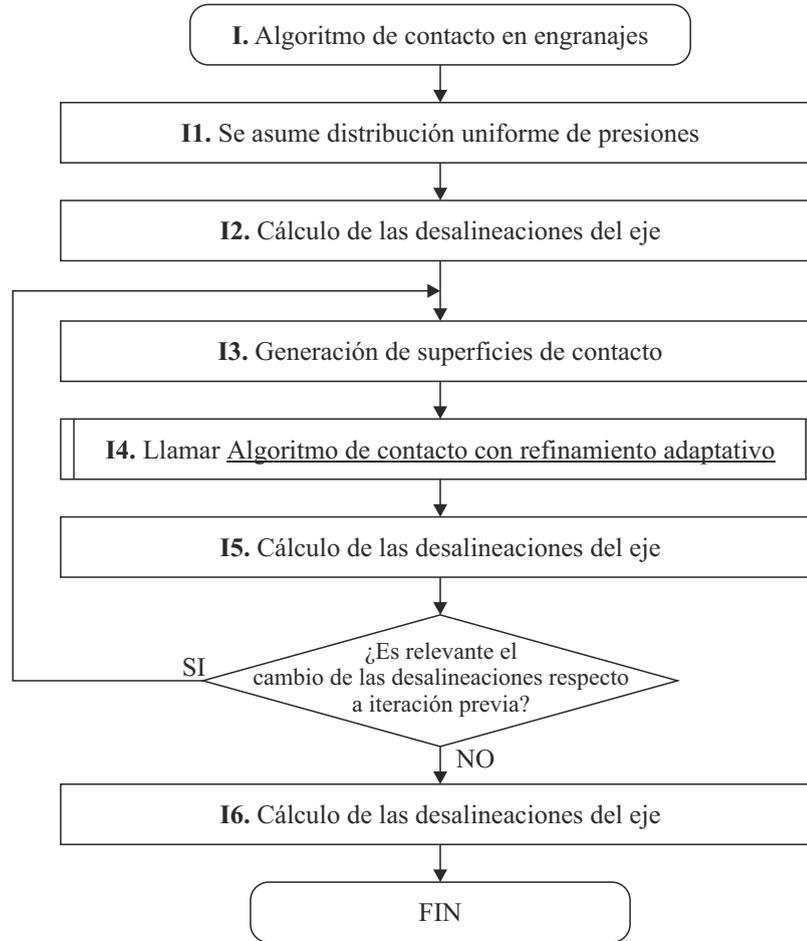


FIGURA 6.41: Diagrama de flujo del algoritmo para el algoritmo de contacto para transmisiones por engranaje considerando la desalineación natural de los ejes

El algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla se aplica considerando las geometrías generadas (paso **I4**). Como resultado, se obtiene un conjunto de presiones p_j en el área de contacto. A partir de estas presiones, es posible conocer las fuerzas producidas en el contacto (\mathbf{q}_j), así como el momento que estas fuerzas generan sobre el eje del engranaje (\mathbf{m}_j).

La teoría de vigas se vuelve a aplicar para calcular los desplazamientos que se producen en los puntos C_1 , D_1 , C_2 y D_2 como consecuencia de la deformación de los ejes causada por el conjunto de fuerzas \mathbf{f}_j y de momentos \mathbf{m}_j puntuales. A partir de estos desplazamientos, se calculan nuevos valores de desalineación (paso **I5**).

Los valores de desalineación son comparados a los obtenidos en la iteración previa (paso **I2** para la primera iteración, paso **I5** de la iteración previa en otros casos), obteniendo el incremento de desalineación. Si el incremento de desalineación es menor que un valor dado de tolerancia, se considera que el algoritmo ha convergido y se muestran los resultados (paso **I6**). En cambio, si el incremento de desalineación es mayor que el valor de tolerancia especificado, el proceso iterativo empieza otra vez generando un conjunto de

TABLA 6.11: Datos de diseño para los casos de estudio de la transmisión mostrada en la figura 1.13

Magnitudes	Caso III	Caso IV	Caso V
Módulo normal, m [mm]	3	3	3
Ángulo de presión normal, α [grados]	20	20	20
Ángulo de hélice, β [grados]	0	15	15
Sentido de hélice del piñón	-	Derechas	Izquierdas
Número de dientes del piñón, z_1	34	34	34
Número de dientes de la rueda, z_2	57	57	57
Ancho de cara, $b = b_1 = b_2$ [mm]	25	25	25
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} [mm]	30	30	30
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} [mm]	35	35	35
Par nominal aplicado, T [Nm]	290	290	290

superficies de contacto de engranaje (paso **I3**) con los valores de desalineación obtenidos en el paso **I5** de la iteración anterior. El proceso se repite hasta que el incremento de desalineación es menor que el valor de tolerancia.

6.7 Ejemplos numéricos

Para ilustrar el funcionamiento del algoritmo, se ha aplicado a un conjunto de casos de estudio basados en el modelo físico de la figura 1.13. Las principales características de diseño de los casos de estudio se resumen en la tabla 6.11. El caso III corresponde a un engranaje cilíndrico recto, mientras que los casos IV y V corresponden a engranajes cilíndricos helicoidales. En el caso de estudio IV el sentido de la hélice del piñón es a derechas y en el caso de estudio V el sentido de la hélice del piñón es a izquierdas.

Los ejes se consideran articulados en sus apoyos A_1 , B_1 , A_2 y B_2 . El piñón gira en el sentido de las agujas del reloj (Z^+) por el efecto de un par de torsión T aplicado en el apoyo A_1 . La rotación del conjunto está fijada en el apoyo B_2 .

La posición de montaje de los engranajes sobre los ejes se define mediante la distancia z_g . Cada uno de los casos de diseño mostrados en la tabla 6.11 se estudia utilizando distintos casos de desalineación de los engranajes, obtenidos variando la longitud de los ejes, manteniendo la posición relativa de montaje de los engranajes sobre ellos $z_g = 0.25L$ constante. Las configuraciones seleccionadas se muestran en la tabla 6.12.

Los casos de estudio resultantes se han analizado y comparado utilizando el algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo y un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión, cuyos detalles se exponen a continuación.

TABLA 6.12: Configuraciones de transmisión

Configuración	1	2	3	4	5
L [mm]	100	125	150	175	200
z_g [mm]	25.00	31.25	37.50	43.75	50.00

TABLA 6.13: Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos

Magnitudes	Piñón	Rueda
Nodos en dirección longitudinal	75	75
Nodos en la parte inferior del anillo	2	2
Nodos en la parte superior del anillo	3	3
Nodos en el redondeo	8	8
Nodos en la dirección del perfil	58	57
Punto de posicionamiento	1.2	1.2

Modelo de elementos finitos de la transmisión

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo descrito a los distintas configuraciones de los casos de estudio descritos se han comparado con los obtenidos a partir del análisis de un método avanzado de elementos finitos de la transmisión.

En este caso, el comportamiento de la transmisión bajo carga se ha estudiado utilizando modelo de elementos finitos del tipo *FEM2.1*, descrito en el apartado 4.6. Se han considerado 3 dientes en cada una de las geometrías de contacto. La densidad de la malla de las geometrías de contacto viene determinada por los parámetros especificados en la figura 4.6, a los que se les han asignado los valores mostrados en la tabla 6.13. Como resultado, el modelo de elementos finitos consta de 304955 elementos y 263964 nodos.

La tabla 6.14 resume las condiciones de contorno aplicadas en los apoyos del modelo de elementos finitos. En los nodos A_1 y A_2 se restringen todos los movimientos de traslación, mientras que en los nodos B_1 y B_2 únicamente se restringen aquellas translaciones en el plano transversal al eje, dejando el movimiento axial libre. Los movimientos de rotación se dejan libres en todos los apoyos, excepto la rotación θ_z del nodo B_2 , que restringe el giro de la transmisión. De esta manera se simula que la transmisión está montada sobre rodamientos autoalineantes. El par se aplica directamente sobre el nodo A_1 .

Se ha estudiado una única posición de contacto, en la que el contacto sin carga de la pareja de dientes central se produce en la circunferencia de paso, pues en esta posición toda la carga se transmite por esta pareja de dientes.

TABLA 6.14: Condiciones de contorno aplicadas al modelo de elementos finitos

Node	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
A_1	R	R	R	L	L	L
B_1	R	R	L	L	L	L
A_2	R	R	R	L	L	L
B_2	R	R	L	L	L	R

(R=Restringido, L=Libre)

Datos del algoritmo de contacto

La discretización base aplicada a todos los casos estudiados consta de 5 quadtrees alineados de 6.5 mm de lado, que se han dividido hasta llegar al nivel $L_{min} = 2$, de manera que en la primera iteración del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo cada quadtree está dividido en 16 elementos. Se ha especificado un valor objetivo de gradiente máximo entre elementos vecinos del $\varphi_{max} = 15\%$, y un nivel máximo de refinamiento $L_{max} = 6$. Con estas condiciones, el área mínima de los elementos no podrá ser inferior a $0.01mm^2$.

El valor de Ω_{max} se ha modificado para cada iteración del algoritmo de acuerdo con el valor obtenido mediante la ecuación 6.40.

6.8 Resultados y discusión

A continuación se exponen los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo de contacto para transmisiones por engranaje a los casos de estudio descritos en el apartado 6.7.

6.8.1 Desalineación de los ejes de los engranajes

Las tablas 6.15, 6.16 y 6.17 muestran los resultados de desalineación de los ejes para los casos de estudio III, IV y V, respectivamente, según las magnitudes consideradas en el apartado 4.8.5. Los resultados obtenidos mediante el modelo de elementos finitos se presentan como valores de referencia, mientras que los obtenidos mediante el algoritmo de contacto se presentan como desviaciones relativas (ε_R).

Los valores de desalineación calculados por el método de los elementos finitos permanecen prácticamente constantes en las distintas configuraciones de los casos III, IV y V. Las diferencias que se originan se deben principalmente al efecto del momento generado por la fuerza axial en engranajes helicoidales, que tiende a compensar o a magnificar la

TABLA 6.15: Desalineación en los ejes para el caso III calculadas mediante el modelo de elementos finitos y diferencias relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto

Caso	$\Delta\gamma_d$ (arc sec)		$\Delta\nu_d$ (arc sec)		Δx_d (μm)		Δy_d (μm)	
	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R
III.1	43.2	-2.7%	14.4	-3.2%	-8	-1.5%	3	-1.7%
III.2	72.0	-3.5%	25.2	-3.7%	-15	-2.0%	7	-2.2%
III.3	108.0	-4.2%	39.6	-4.5%	-27	-2.4%	10	-2.7%
III.4	147.6	-4.1%	54.0	-4.4%	-44	-2.4%	16	-2.6%
III.5	194.4	-3.4%	72.0	-3.2%	-68	-1.9%	25	-1.5%

TABLA 6.16: Desalineación en los ejes para el caso IV calculadas mediante el modelo de elementos finitos y diferencias relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto

Caso	$\Delta\gamma_d$ (arc sec)		$\Delta\nu_d$ (arc sec)		Δx_d (μm)		Δy_d (μm)	
	FEM1	ε_R	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R
IV.1	43.2	-1.5%	18.0	-0.6%	-7	-0.8%	3	+0.2%
IV.2	68.4	-5.7%	28.8	-5.4%	-15	-3.4%	6	-3.1%
IV.3	104.4	-5.2%	39.6	-5.0%	-26	-3.1%	10	-2.9%
IV.4	144.0	-5.3%	57.6	-5.2%	-43	-3.1%	17	-3.0%
IV.5	190.8	-4.7%	75.6	-4.4%	-65	-2.7%	26	-2.4%

TABLA 6.17: Desalineación en los ejes para el caso V calculadas mediante el modelo de elementos finitos y diferencias relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto

Caso	$\Delta\gamma_d$ (arc sec)		$\Delta\nu_d$ (arc sec)		Δx_d (μm)		Δy_d (μm)	
	FEM1	ε_R	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R	FEM2.1	ε_R
V.1	43.2	-0.9%	14.4	-0.4%	-7	-0.4%	3	+0.1%
V.2	68.4	-4.7%	25.2	-4.2%	-15	-2.8%	5	-2.2%
V.3	104.4	-5.4%	36.0	-6.5%	-26	-3.2%	9	-4.1%
V.4	144.0	-5.4%	50.4	-5.4%	-43	-3.2%	15	-3.0%
V.5	190.8	-4.8%	68.4	-5.3%	-65	-2.8%	24	-3.1%

deformación en el plano axial ($\Delta\nu_d$). De esta forma y para las configuraciones resueltas, cuando el sentido de la hélice del piñón es a izquierdas (caso V), las desalineaciones en el plano axial tienden a compensarse, mientras que cuando el sentido de la hélice del piñón es a derechas (caso IV), tienden a ser levemente superiores.

Se observa que las desviaciones relativas de los resultados obtenidos mediante el algoritmo de contacto no exceden el 6%, y en general están comprendidas entre el 2% y el 5%. Se puede apreciar como estas desviaciones mantienen principalmente un valor negativo, indicando que las deflexiones de los ejes calculadas por el algoritmo de contacto son inferiores a las obtenidas a partir del modelo de elementos finitos. Estas diferencias

TABLA 6.18: Resultados de presión de contacto máxima para el caso III obtenidos a partir del modelo de elementos finitos y desviaciones relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto

Configuración	Caso III	
	<i>FEM2.1</i>	ε_R
1	1059 MPa	+0.1%
2	1128 MPa	+1.4%
3	1212 MPa	+3.0%
4	1301 MPa	+5.7%
5	1393 MPa	+8.4%

en las desalineaciones de los ejes se atribuyen a las desviaciones de las distribuciones de carga, como se verá en el apartado 6.8.2.

6.8.2 Presión de contacto y distribución de carga a lo largo del ancho de cara del diente

La tabla 6.18 muestra los resultados de presión máxima de contacto obtenidos mediante el modelo de elementos finitos y las desviaciones relativas de los resultados obtenidos mediante el algoritmo de contacto para las diversas configuraciones del caso III. En la primera columna de la tabla se muestran los resultados de presión máxima de contacto obtenidos mediante el modelo de elementos finitos, que se han tomado como referencia. En la segunda columna se muestran como diferencias relativas los resultados obtenidos a partir del algoritmo de contacto. Se puede observar como para los casos estudiados las desviaciones máximas en cuanto a presión máxima de contacto no exceden el 9%. La desviación es generalmente positiva, indicando que las presiones de contacto calculadas mediante el algoritmo de contacto son superiores a las obtenidas mediante el método de los elementos finitos.

En la figura 6.42 se muestran las huellas de contacto para los casos III.1, III.3 y III.5 obtenidas mediante el algoritmo de contacto propuesto y por el análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión. El código de color se ha modificado en consecuencia con cada caso mostrado, correspondiendo el color rojo intenso con la presión de contacto máxima obtenida por el algoritmo de contacto, y el color azul con la ausencia de presión de contacto. En general se aprecia una buena correlación entre las huellas de contacto predichas por el algoritmo de contacto y por el análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión. Los resultados obtenidos a partir del análisis del modelo de elementos finitos indican que en realidad la huella de contacto se extiende longitudinalmente en mayor medida que en los resultados obtenidos mediante el algoritmo de contacto. Como

se verá en el apartado 6.8.4, este efecto se debe a que en la resolución del problema de contacto mediante el algoritmo propuesto no se tiene en cuenta el efecto de la flexibilidad del diente, que favorece una mejor distribución longitudinal de las presiones de contacto. También se aprecia una mayor resolución en la definición de las distribuciones de presión de contacto obtenidas por el algoritmo de contacto, justificada por el uso del algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo.

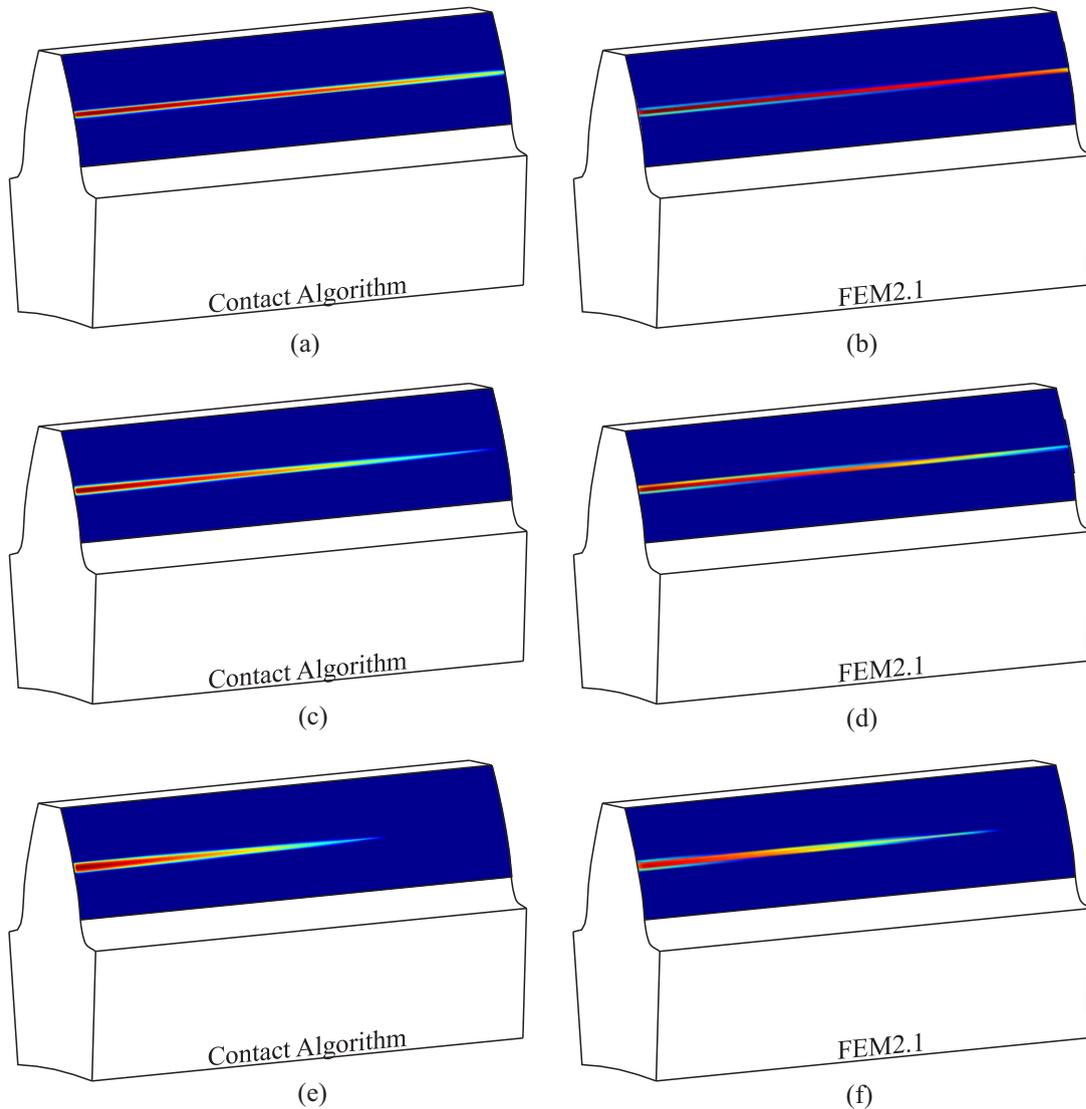


FIGURA 6.42: Resultados de huella de contacto en el diente del piñón para (a y b) caso III.1, (c y d) caso III.3 y (e y f) caso III.5

Por último, en la figura 6.43 se muestra las funciones de intensidad de carga a lo largo del ancho de cara del diente del piñón para los casos III.1, III.3 y III.5, obtenidas a partir de los resultados del análisis del modelo de elementos finitos de la transmisión (utilizando el método descrito en el apartado 4.8.2), y del algoritmo de contacto. En esta imagen se aprecia como para los casos en los que la desalineación es pequeña (caso III.1)

ambas funciones de intensidad de carga son muy similares, y van divergiendo a medida que la desalineación aumenta. Se observa que a medida que crece la desalineación entre los engranajes, la longitud sobre la que se extiende la función de intensidad de carga calculada a partir de los resultados del algoritmo de contacto se reduce, en comparación con la longitud de esta función calculada a partir de los resultados del modelo de elementos finitos. Puesto que la fuerza total transmitida por la pareja de dientes estudiada, que corresponde al área bajo la función de intensidad de carga, debe ser la misma en ambos casos, este acortamiento de la longitud sobre la que se extiende la función de intensidad de carga provoca que los valores máximos de la función obtenida a partir de los resultados del algoritmo de contacto se vean incrementados. Este hecho mantiene la concordancia con los resultados de distribución de presión de contacto mostrados en la figura 6.42. Además, estas diferencias repercuten sobre los resultados de desalineación en los ejes, pues se observa en los resultados del algoritmo de contacto que la carga tiende a concentrarse en la parte del engranaje cercana al apoyo, y por tanto las desalineaciones de los ejes provocadas por estas distribuciones de carga tenderán a ser menores.

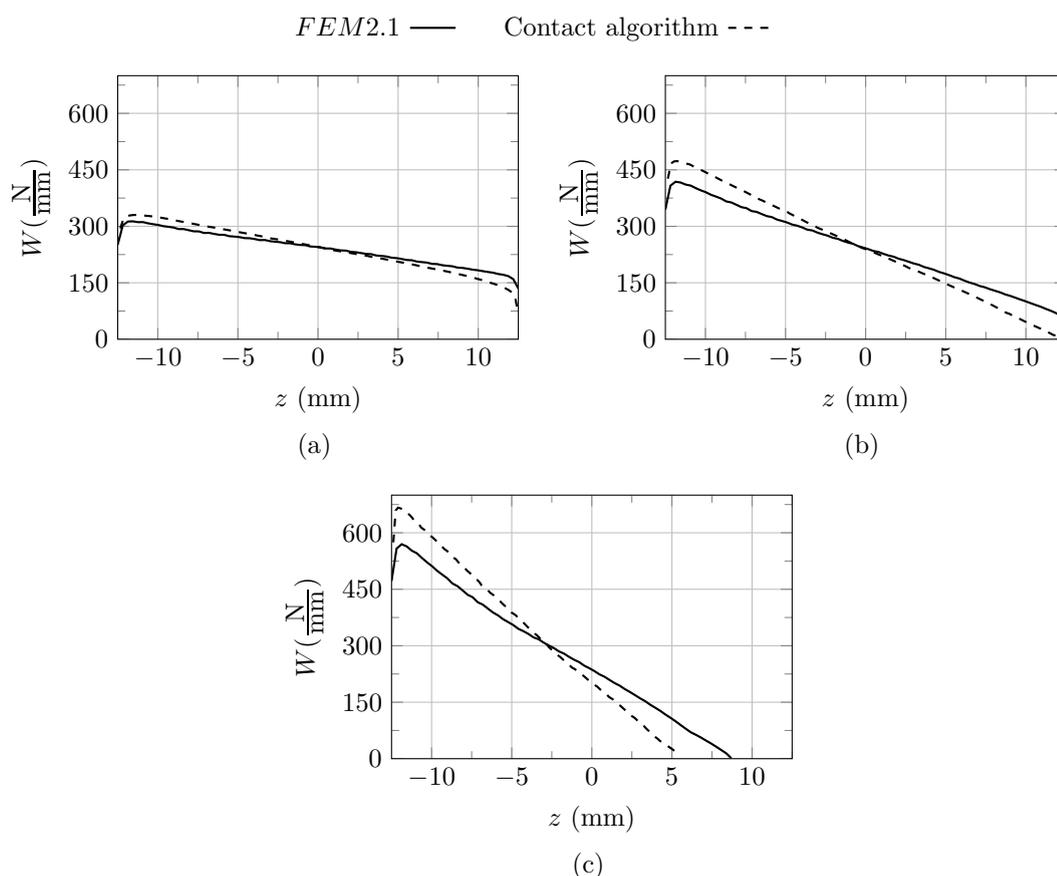


FIGURA 6.43: Función de intensidad de carga a lo largo del ancho de cara del diente del piñón para (a) caso III.1, (b) caso III.3 y (c) caso III.5

Resultados similares se obtienen al estudiar engranajes cilíndricos helicoidales (casos IV y V). La tabla 6.19 muestra los resultados de presión máxima obtenidos mediante el

TABLA 6.19: Resultados de presión de contacto máxima para los casos IV y V obtenidos a partir del modelo de elementos finitos y desviaciones relativas obtenidas mediante el algoritmo de contacto

Configuración	Caso IV		Caso V	
	<i>FEM2.1</i>	ε_R	<i>FEM2.1</i>	ε_R
1	1061 MPa	-3.6%	982 MPa	+4.8%
2	1118 MPa	+5.1%	1013 MPa	+12.0%
3	1164 MPa	+8.2%	1061 MPa	+13.6%
4	1212 MPa	+11.4%	1136 MPa	+16.6%
5	1293 MPa	+15.1%	1207 MPa	+19.3%

modelo de elementos finitos y las desviaciones relativas de los resultados del algoritmo de contacto para las diversas configuraciones de los casos IV y V. En este caso, se mantiene la tendencia de incremento de diferencia relativa a medida que aumenta la desalineación de los ejes, siendo mayores estas diferencias en el caso en el que el sentido de la hélice del piñón es a izquierdas (caso de estudio V).

En la figura 6.44 se muestran las huellas de contacto obtenidas a partir del análisis de un modelo de elementos finitos de la transmisión y a partir del algoritmo de contacto para los casos IV.3 y V.3. Como ocurre en el caso de engranaje cilíndrico recto mostrado en la figura 6.43, las huella de contacto poseen un buen nivel de similitud, y se observa como una vez más, la huella obtenida mediante el modelo de elementos finitos se extiende longitudinalmente en mayor medida que la obtenida mediante el algoritmo de contacto.

6.8.3 Convergencia del algoritmo

La tabla 6.20 muestra los incrementos de desalineación obtenidos a través de las iteraciones realizadas para resolver el caso III.3. En la segunda columna se muestran los valores de desalineación calculados asumiendo una distribución uniforme de presiones a lo largo del ancho de cara del engranaje. En las columnas siguientes, se muestran los incrementos de desalineación con respecto a iteraciones previas. Se puede comprobar como, después de tres iteraciones del algoritmo, el incremento de desalineación es menor del 0.5%. Este efecto se extiende a todos los casos estudiados, incluso a aquellos en los que los valores de desalineación son más grandes.

En los casos estudiados anteriormente, los parámetros L_{max} y φ_{max} se han mantenido constantes en todas las iteraciones realizadas por el algoritmo para resolver el problema de contacto. En cambio, es posible variar los parámetros del algoritmo de refinamiento adaptativo especificando valores distintos de L_{max} y φ_{max} en cada iteración, con el fin de mejorar la eficiencia del mismo. En la tabla 6.21 se muestran los incrementos de

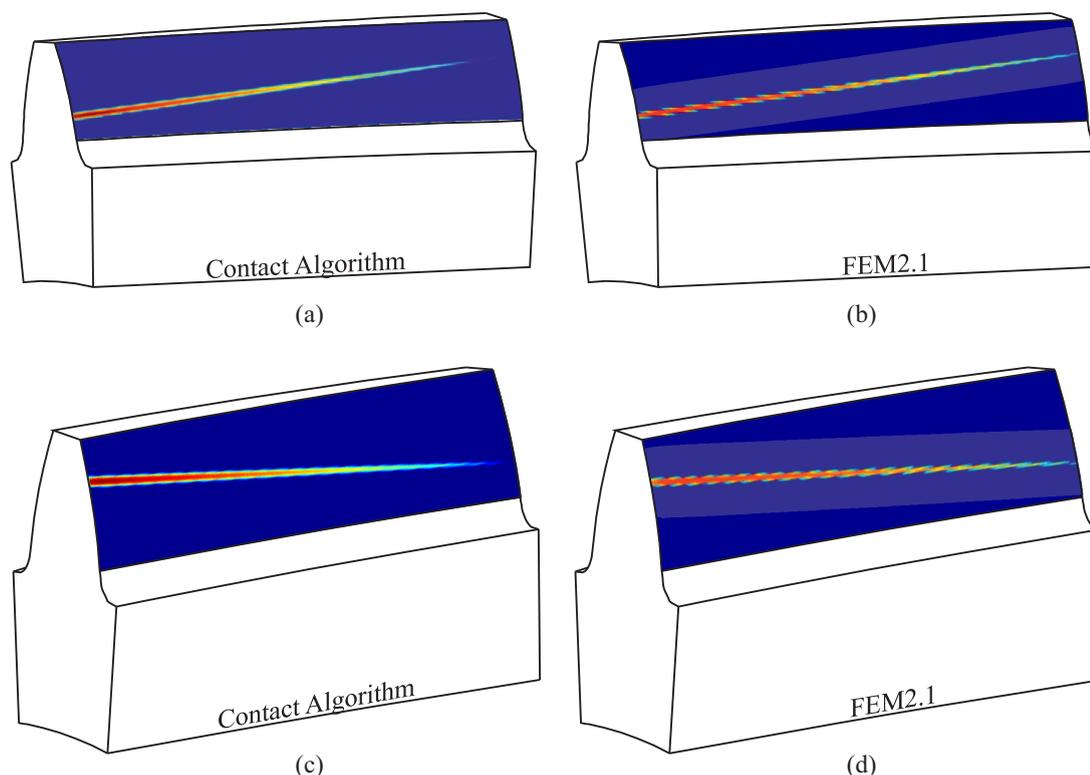


FIGURA 6.44: Resultados de huella de contacto en el diente del piñón para (a y b) caso IV.3 y (c y d) caso V.3

TABLA 6.20: Convergencia del algoritmo para el caso III.3 cuando L_{max} se mantiene constante

Magnitud	Valor inicial	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3
$\Delta\gamma_d$	118.8 arc sec	-14.4%	+2.2%	-0.3%
$\Delta\nu_d$	43.2 arc sec	-14.5%	+2.2%	-0.3%
Δx_d	-29 μm	-9.2%	+1.3%	-0.2%
Δy_d	11 μm	-9.3%	+1.4%	-0.2%

desalineación a través de las iteraciones realizadas para resolver el caso III.3. En este caso, se ha utilizado un valor $L_{max} = 4$ para las dos primeras iteraciones, y un valor $L_{max} = 6$ para la última iteración del algoritmo. Se aprecia como con este criterio, la convergencia del algoritmo se consigue también en tres iteraciones. El tiempo total de cálculo se reduce en un 40%, mientras que los errores relativos cometidos con respecto al modelo de elementos finitos tienen una variación máxima inferior al 1% con respecto al cálculo realizado manteniendo L_{max} constante en todas las iteraciones. Esto se debe a que la reducción del nivel de discretización afecta principalmente a la distribución de presiones en el sentido del perfil del diente, pero no en el sentido longitudinal del diente, que es la que afecta en mayor medida a las desalineaciones provocadas en los ejes. Por lo tanto, es posible realizar las dos primeras iteraciones con un nivel bajo de discretización,

TABLA 6.21: Convergencia del algoritmo para el caso III.3 cuando L_{max} se varía entre iteraciones

Magnitud	Valor inicial	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3
$\Delta\gamma_d$	118.8 <i>arc sec</i>	-14.1%	+2.1%	-0.6%
$\Delta\nu_d$	43.2 <i>arc sec</i>	-14.2%	+2.1%	-0.6%
Δx_d	-29 μm	-9.1%	+1.3%	-0.3%
Δy_d	11 μm	-9.1%	+1.3%	-0.3%

y elevar este nivel en la última iteración, con el fin de obtener buena precisión en el resultado de presión de contacto.

6.8.4 Estudio de la influencia de la flexión del diente en los resultados del problema contacto

Como se ha comentado con anterioridad, la aplicación de este método de resolución del problema de contacto está sujeta al cumplimiento de una serie de hipótesis, como por ejemplo, la necesidad de que los cuerpos en contacto se puedan aproximar a semiespacios elásticos en las zonas cercanas al área de contacto. Cuando estas hipótesis no se cumplen, los resultados obtenidos mediante este método de contacto pueden dejar de ser precisos, y por tanto, las limitaciones del método vienen impuestas por el cumplimiento de dichas hipótesis.

En la aplicación de este método de resolución del problema de contacto al estudio del contacto entre dientes de engranajes, algunas de las hipótesis a las que está sujeto el método no se cumplen. Los dientes de los engranajes tienen superficies libres cerca del área de contacto que hacen que el contacto no se pueda estudiar aproximando los sólidos a semiespacios elásticos. Esta limitación se ha podido superar satisfactoriamente mediante la superposición de dos cuartos de espacio, como se ha detallado en el apartado 6.3.1. Sin embargo, hay otras características de los dientes de engranaje que no se tienen en cuenta mediante el método de contacto propuesto y que pueden afectar a la forma en la que se produce el contacto, como por ejemplo, la flexibilidad de los dientes del engranaje.

Para cuantificar la influencia de la flexibilidad de los dientes de los engranajes en los modelos propuestos, se ha elaborado un modelo de elementos finitos ($FEM2.1_{MOD}$) en el cual se minimiza el efecto de la flexión del diente (figura 6.45a), como se observa en la distribución de tensiones de von Mises mostrada en la figura 6.45b. De esta manera, comparando los resultados obtenidos mediante este modelo con los obtenidos mediante el modelo convencional, es posible estudiar el impacto de la flexión del diente en los resultados de contacto.

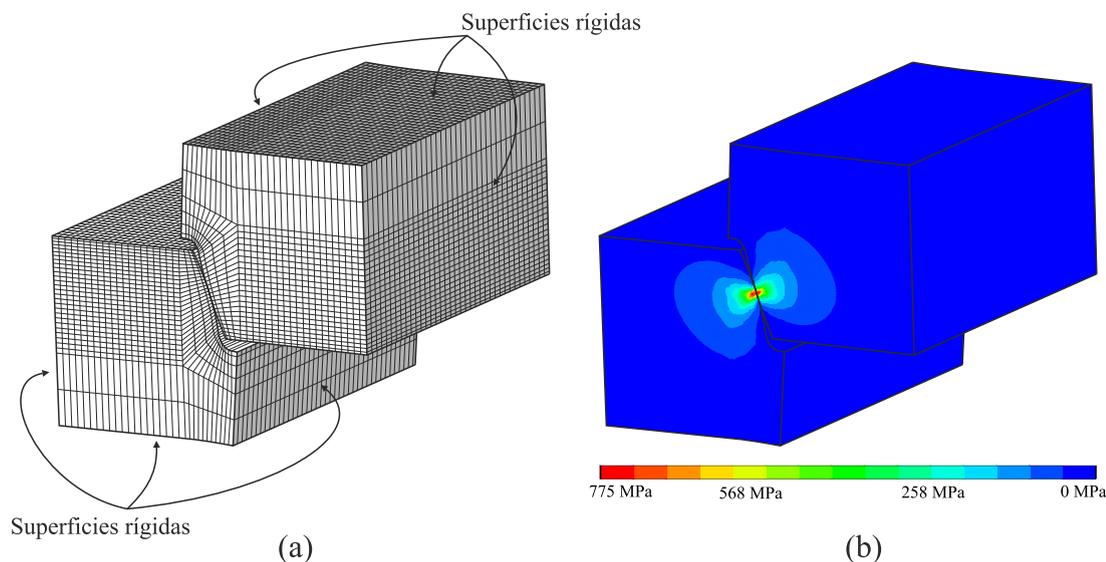


FIGURA 6.45: Estudio de la influencia de la flexión del diente en los resultados. (a) Modelo de elementos finitos $FEM2.1_{MOD}$ y (b) distribución de tensiones de von Mises

TABLA 6.22: Resultados de contacto para el caso III.3 cuando no se tiene en cuenta el efecto de la flexión del diente

Magnitud	$FEM2.1_{MOD}$	ε_R
p_{max}	1285 MPa	-2.8%
$\Delta\gamma_d$	100.8 arc sec	+0.1%
$\Delta\nu_d$	36 arc sec	+0.0%
Δx_d	-27 μm	+0.3%
Δy_d	10 μm	+0.3%

La tabla 6.22 muestra los resultados de presión de contacto y desalineación de los ejes obtenidos para el caso III.3 obtenidos mediante el modelo de elementos finitos $FEM2.1_{MOD}$ y las diferencias relativas de los resultados obtenidos a partir del algoritmo de contacto. Se puede apreciar como a medida que las geometrías estudiadas se acercan a las hipótesis del método, los resultados obtenidos mediante el análisis por elementos finitos y el algoritmo de contacto tienden a converger.

La figura 6.46 muestra las distribuciones de carga a lo largo del diente para el caso III.3 obtenidas mediante el modelo de elementos finitos $FEM2.1$, el modelo de elementos finitos $FEM2.1_{MOD}$ y por el algoritmo de contacto. Resulta evidente que las diferencias que se observaban en la figura 6.43 se deben al efecto de la flexión del diente.

En engranajes helicoidales la flexión del diente tiene una mayor influencia sobre los resultados de contacto. La tabla 6.23 muestra las diferencias relativas entre el algoritmo de contacto y el modelo de elementos finitos $FEM2.1_{MOD}$ en el caso IV.3. De la misma manera, las diferencias relativas se reducen de una manera más sustancial que

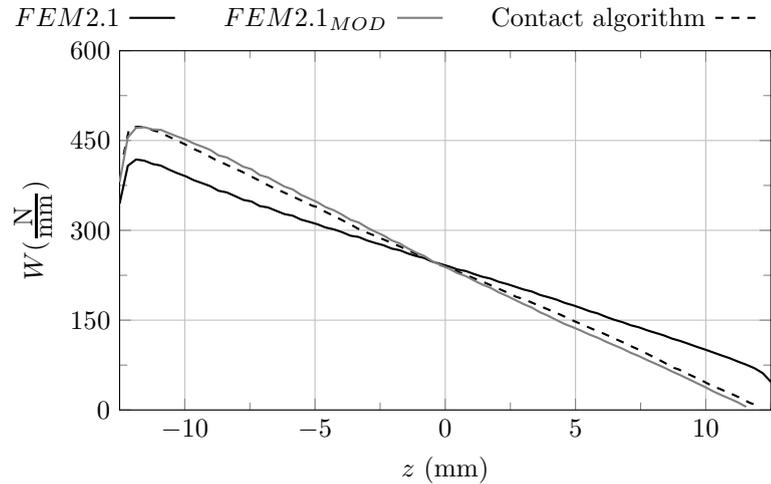


FIGURA 6.46: Estudio de la influencia de la flexión del diente en la distribución de carga sobre el diente del piñón en el caso 3c

TABLA 6.23: Resultados de contacto para el caso IV.3 cuando no se tiene en cuenta el efecto de la flexión del diente

Magnitud	$FEM2.1_{MOD}$	ε_R
p_{max}	1231 MPa	+2.3%
$\Delta\gamma_d$	97.2 arc sec	-1.4%
$\Delta\nu_d$	39.6 arc sec	-1.2%
Δx_d	-26 μm	-0.6%
Δy_d	10 μm	-0.3%

en engranajes rectos, pues los resultados de contacto en engranajes helicoidales son más sensibles al efecto de la flexión que en dientes rectos.

6.9 Conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado un método semianalítico para dar solución al problema de contacto en transmisiones de engranajes teniendo en cuenta la desalineación de los engranajes que se produce como consecuencia de la deformación de los ejes bajo carga. La idea fundamental del método se basa en desacoplar la resolución del problema de contacto, del cálculo de la desalineación de los engranajes.

En la primera parte del capítulo se ha descrito el método semianalítico utilizado para resolver el problema de contacto entre dientes de engranajes. Este método, conocido como método de los coeficientes de influencia, se basa en la discretización del dominio del problema de contacto en un conjunto de n elementos de presión. Los coeficientes de influencia relacionan la presión aplicada sobre cada uno de los elementos de presión Δ_j

con el desplazamiento que esta presión produce en el centroide del resto de elementos de presión Δ_i . La solución al problema de contacto se obtiene, en forma de distribución de presión, utilizando métodos variacionales.

Los coeficientes de influencia utilizados para la aplicación de este método se han calculado analíticamente mediante la superposición de la solución de Boussinesq para cargas puntuales aplicadas en un semiespacio elástico. En este capítulo se han presentado los métodos analíticos que permiten determinar los coeficientes de influencia asociados a elementos de presión rectangulares y triangulares.

La utilización de la relación de Boussinesq para el cálculo de los coeficientes de influencia implica la necesidad de que los sólidos en contacto se puedan aproximar a semiespacios elásticos en las zonas cercanas al área de contacto. Esta premisa no siempre se cumple, pues en ocasiones existen superficies libres cerca de las zonas de contacto, que pueden tener cierta influencia sobre la forma en la que se distribuye la presión de contacto. En esos casos, se ha propuesto aproximar los sólidos de contacto mediante la superposición de cuartos de espacio elásticos, realizando ciertas modificaciones en el cálculo de los coeficientes de influencia.

Puesto que el cálculo analítico de los coeficientes de influencia es una operación costosa, se ha estudiado un método para evaluar de forma aproximada los coeficientes de influencia. La utilización de esta aproximación puede conllevar reducciones del coste computacional, pero por contra, suele llevar asociada una pérdida de la precisión. Por este motivo, su utilización únicamente es recomendable cuando la magnitud del coeficiente de influencia del elemento Δ_j sobre el elemento Δ_i es pequeña en comparación con el resto de coeficientes de influencia. Esta distinción se realiza mediante el parámetro $\Omega_{j,i}$, que hace referencia a la relación entre un radio equivalente correspondiente al área del elemento Δ_j y la distancia entre los centroides de Δ_j y Δ_i . El parámetro $\Omega_{j,i}$ se compara con un parámetro Ω_{max} , definido arbitrariamente por el usuario del algoritmo, y que gobernará la decisión de cuándo un coeficiente de influencia se debe determinar de forma exacta, y cuando es posible determinarlo de forma aproximada.

Se ha propuesto un algoritmo computacional que recoge todos los pasos necesarios para resolver el problema de contacto mediante este método semianalítico. En la implementación del algoritmo se han contemplado las siguientes posibilidades:

- (i) Discretización del dominio del problema de contacto en una malla uniforme de elementos de presión rectangulares o triangulares.
- (ii) Contemplar la existencia de superficies libres en los sólidos que intervienen en el contacto.

- (iii) Cálculo de los coeficientes de influencia de forma exacta o evaluación de forma aproximada.
- (iv) Resolución del problema de contacto por principios variacionales, proporcionando la distribución de presión de contacto, el área de contacto y la aproximación entre los cuerpos en contacto.

El algoritmo resultante se ha aplicado para resolver dos tipos distintos de problemas de contacto: el contacto puntual entre una esfera y un plano, y el contacto lineal entre un cilindro y un plano. A partir de los resultados obtenidos de estos análisis es posible extraer las siguientes conclusiones:

- (i) El algoritmo es capaz de resolver el problema de contacto y determinar la distribución de presión de contacto, el área de contacto y la aproximación entre los sólidos.
- (ii) Los resultados obtenidos mediante el algoritmo de contacto tienen un buen nivel de precisión cuando son comparados con los resultados obtenidos a partir de modelos de referencia.
- (iii) Resolver el problema de contacto utilizando una discretización de elementos de presión rectangulares o triangulares ofrece resultados con un nivel similar de precisión. Sin embargo, la utilización de elementos de presión rectangulares supone una ventaja en el coste computacional y por este motivo se ha decidido utilizarlos en el resto de este trabajo.
- (iv) El cálculo de coeficientes de influencia de forma aproximada permite reducir el coste computacional del algoritmo, a cambio de una pérdida de precisión. Se ha propuesto una estrategia para la selección de un valor óptimo del parámetro Ω_{max} .
- (v) La precisión del algoritmo está relacionada con el número de elementos de presión que se consideran en el área de contacto. Un mayor número de elementos de presión conlleva un aumento de la precisión del algoritmo, pero por contra, repercute en un incremento del coste computacional, que aumenta cuadráticamente con el número de elementos considerados.

En base a estas conclusiones, y con la finalidad de reducir el coste computacional del algoritmo de contacto, se ha propuesto una modificación del algoritmo que incluye la capacidad de realizar un refinamiento adaptativo de la malla de elementos de presión. El refinamiento de la malla se realiza en base a dos criterios distintos:

- (i) La máxima tasa permitida de variación de las presiones de contacto entre elementos adyacentes, definida por el parámetro φ_{max} .
- (ii) El grado máximo de refinamiento de malla, definido por el parámetro L_{max} .

El funcionamiento de este nuevo algoritmo se ha probado con los mismos casos de estudio definidos anteriormente, y con distintas configuraciones de los valores de φ_{max} y L_{max} . Los resultados obtenidos permiten sacar las siguientes conclusiones:

- (i) El algoritmo es capaz de predecir distribuciones de presión de contacto, tamaño de área de contacto y la aproximación entre los cuerpos con la misma precisión que la aproximación tradicional utilizando una malla uniforme.
- (ii) La precisión con la que se calcula el area de contacto y la aproximación entre los cuerpos depende únicamente del parámetro L_{max} .
- (iii) La precisión del método para calcular la presión máxima de contacto depende del parámetro φ_{max} .
- (iv) El coste computacional de la resolución del problema de contacto se ha reducido considerablemente. En general, el tiempo consumido por el algoritmo para resolver el problema de contacto se reduce hasta en un 90% comparado con una solución equivalente con malla uniforme.

Por último, el algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo de la malla se ha aplicado para resolver el problema de contacto en transmisiones por engranaje, teniendo en cuenta la desalineación natural de los ejes. El método propuesto desacopla el problema de contacto del problema de desalineación de los ejes, y formula un algoritmo iterativo que permite obtener soluciones precisas en un tiempo reducido, comparado con otros métodos de análisis tensional.

Este nuevo método se ha probado con distintos ejemplos numéricos, basados en una transmisión de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales. Los resultados obtenidos utilizando el algoritmo de contacto se han comparado con los obtenidos a partir de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión, y se han obtenido las diferencias relativas ente los resultados de un método y los del otro. Como fruto de esta comparación se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- (i) El método propuesto es apropiado para determinar la distribuciones de presión de contacto que se produce en una transmisión de engranajes cilíndricos en condiciones de trabajo. En los casos estudiados, las desviaciones relativas en las presiones máximas de contacto no exceden el 9% cuando se trata de transmisiones

de engranajes cilíndricos rectos. Estos errores se incrementan en transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales, llegando casi al 20%.

- (ii) El método es capaz de predecir las desalineaciones de los engranajes. En los casos estudiados, la diferencia relativa máxima con respecto a las desalineaciones calculadas a partir del modelo de elementos finitos no excede el 6%.
- (iii) El método tiene una convergencia rápida, que lo hace especialmente apropiado para las etapas iniciales de diseño, cuando el tiempo computacional es muy valioso.

Cuando el grado de cumplimiento de las hipótesis a las que está sujeto el método es elevado, los resultados obtenidos poseen un gran nivel de concordancia con los resultados obtenidos mediante un modelo de elementos finitos, pero con una reducción sustancial de los tiempos de cálculo. Esto hace que el método sea comparable al método de los elementos finitos en cuanto a precisión, pero con el coste computacional propio de los métodos semianalíticos.

Los resultados de este capítulo se incluyen en la referencia [190].

Capítulo 7

Modificaciones en las geometrías de los engranajes cilíndricos rectos para compensar las deformaciones de los ejes

7.1 Introducción

Las modificación de las superficies de contacto de los dientes de las ruedas dentadas puede ser un buen recurso para optimizar algunas de las características de una transmisión de engranajes. A lo largo de los años, han sido muchos los investigadores que han centrado sus esfuerzos en proponer modificaciones en las geometrías de los dientes de los engranajes con el fin de mejorar su capacidad de carga y sus condiciones de engrane.

Harris [129] fue el primer autor en proponer modificaciones en los perfiles de evolvente de los engranajes. Estas modificaciones consistían en la eliminación de un poco de material de los bordes de las superficies de contacto de los engranajes, cuyo fin era minimizar los errores de transmisión bajo carga. Este mismo principio se ha aplicado en muchas otras contribuciones [131–135], todas ellas enfocadas a obtener transmisiones silenciosas y con niveles bajos de vibración.

La sustitución de los perfiles convencionales de evolvente por otros tipos de perfiles ha sido otro campo en el que se ha investigado intensivamente. Wildhaber [136] propuso la utilización de perfiles circulares para la generación de las cremalleras de corte. Novikov [191] propuso desplazar estos perfiles circulares con respecto a su posición teórica con el fin de optimizar la posición de la huella de contacto dentro del engranaje, y de esta

forma evitar indeseables contactos en los bordes de las superficies de los engranajes. Con la misma finalidad, Litvin [192] propuso la modificación de la superficie de contacto de los dientes del piñón, utilizando perfiles parabólicos en las cremalleras de corte en lugar de perfiles rectos. La utilización de estas técnicas permite reducir la sensibilidad de las transmisiones a los posibles errores de alineación, pero como contrapartida, incrementan las tensiones de flexión y de contacto, de manera que para un mismo nivel de carga, la vida útil de la transmisión se reduce, y se acentúan los errores de transmisión.

Otro tipo de modificación, consistente en el doble abombamiento de las superficies de contacto del diente del piñón, fue propuesta por Litvin [58]. Mediante este tipo de modificación se puede optimizar la posición de la huella de contacto, así como prediseñar la función parabólica de errores de transmisión en ausencia de carga, y de esta forma controlar la función de transferencia de carga. En trabajos posteriores, Litvin [193] obtuvo soluciones de compromiso, en las que se combinaba un perfil recto para la mayor parte de la superficie de corte de la cremallera, rodeada por perfiles parabólicos situados en los bordes de las superficies de corte de la herramienta.

Se han hecho muchas otras contribuciones sobre la modificación de las superficies de los engranajes. Esto se debe a que, tal y como explica Hohn [194], existen varias soluciones válidas en la definición de la topología del diente de engranaje, pues depende del criterio de diseño que se desee optimizar en cada caso (incremento de la capacidad de carga, disminución de la vibración y ruido, aumento de la eficacia, etc.).

La deslocalización de la huella de contacto se puede producir por diversos factores. Sin embargo, uno de los principales motivos por los que se produce este fenómeno es por la deformación bajo carga de los ejes que soportan a los engranajes, especialmente cuando dichos engranajes se instalan en las zonas más alejadas del plano medio de los ejes. La deformación de los ejes contribuye a la desalineación del engrane, que provoca que la huella de contacto se desplace hacia los bordes de las superficies del engranaje, y como consecuencia, se incrementen las tensiones máximas de contacto y de flexión.

En este capítulo se tendrán en cuenta las deformaciones en los ejes de los engranajes, que se pueden predecir con los distintos modelos propuestos en este trabajo, y se determinará una superficie para el diente del piñón que sea capaz de proporcionar, para la carga de trabajo, una acción prácticamente conjugada con la superficie de los dientes de la rueda. Esta idea permitirá obtener una distribución uniforme de carga cuando la transmisión trabaje a su par nominal. Sin embargo, esta modificación en la superficie del piñón únicamente es válida cuando la transmisión está sometida a cierto par, de manera que el contacto se deslocalizará si el par transmitido es distinto al par para el que se ha diseñado. No obstante, cuando el par aplicado sea inferior al par de diseño, las presiones máximas de contacto serán inferiores y no provocarán el fallo prematuro de la transmisión.

También se propondrán otras modificaciones de la superficie del diente del piñón que permitan reducir la sensibilidad de la transmisión frente a errores de transmisión. Estas modificaciones se podrán completar con otras que permitan la compensación de errores de fabricación y montaje de los engranajes. El funcionamiento de las modificaciones propuestas se ilustrará con ejemplos numéricos.

7.2 Generación de engranajes cilíndricos rectos con geometría estándar

Como describe Jelaska [2], la fabricación de un engranaje se puede dividir en tres fases principales:

- (i) Generación de las geometrías de engrane.
- (ii) Aplicación del tratamiento térmico.
- (iii) Acabado.

En la primera fase, se consiguen las geometrías básicas de los engranajes. En la segunda fase se aplican tratamientos térmicos cuya finalidad es mejorar las propiedades de los materiales que conforman los engranajes. En la última fase, se aplican operaciones de acabado que permiten conseguir superficies de mejor calidad, así como modificaciones en la geometría de los dientes.

Existen distintos métodos en la industria que permiten generar la geometría de los engranajes cilíndricos rectos. Algunos de estos métodos se basan en procesos de fundición, pulvimetalurgia, prensado, extrusión, y otros métodos similares. No obstante, la mayoría de engranajes metálicos fabricados para soportar grandes cargas se obtienen por procesos de mecanizado, en los que una herramienta de corte genera la geometría del engranaje sobre una pieza de trabajo.

Entre estos procesos de mecanizado, uno de los más extendidos en la industria es el método Maag. Para entender los fundamentos de este método de generación, considere el sistema mostrado en la figura 7.1, en el que:

- (i) Uno de los engranajes, en lugar de tener flancos convencionales, posee aristas de corte con la forma de la evolvente. En el caso del método de Maag, este engranaje posee un diámetro primitivo infinito, y se denomina cremallera de corte.

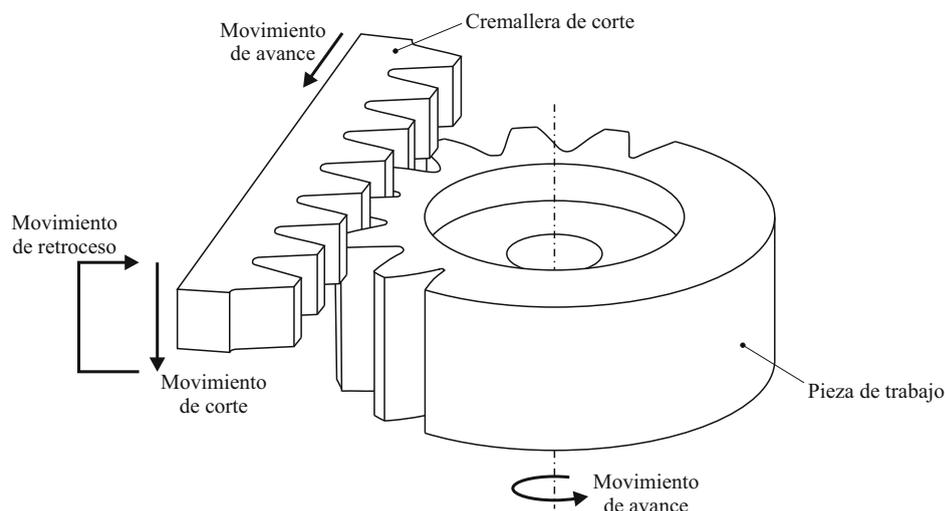


FIGURA 7.1: Métodos de Maag.

- (ii) El otro engranaje todavía no tiene los dientes formados, siendo una pieza de trabajo con la forma de un disco cilíndrico. El diámetro exterior de este disco es igual al diámetro del círculo de cabeza del engranaje que se desea generar.
- (iii) Ambos elementos (cremallera de corte y pieza de trabajo) se instalan en una máquina herramienta que impone movimientos de avance equivalentes a los de dos engranajes conjugados, de acuerdo con la ley fundamental del engrane.
- (iv) La máquina herramienta permite dos movimientos adicionales para la cremallera de corte:
 - (iv.a) Un movimiento de corte en la dirección del eje del engranaje, que hace que la cremallera de corte genere una porción del flanco.
 - (iv.b) Un movimiento de retroceso, que devuelve a la cremallera de corte a la posición inicial después de haber realizado el corte.

Bajo las condiciones descritas anteriormente, la cremallera de corte, fijada a una deslizadera vertical, se mueve alternativamente arriba y abajo, en un movimiento paralelo al perfil del diente que se genera sobre la pieza de trabajo. Cuando se mueve hacia abajo, corta la pieza de trabajo, y en el movimiento alternante hacia arriba, se separa de la pieza para volver a la posición inicial. La distancia entre la cremallera de corte y la pieza se reduce progresivamente hasta que se consigue la geometría del engranaje deseado.

Después de cada movimiento de corte, durante el movimiento de retroceso, la cremallera de corte se mueve tangencialmente con respecto a la pieza de trabajo. Este movimiento tangencial está sincronizado con un movimiento de giro de la pieza de trabajo, que simula el proceso de engrane y sitúa nuevo material enfrente de la cremallera de corte para el

siguiente movimiento de corte. De esta forma, se genera la geometría de un engranaje cilíndrico recto.

En la figura 7.2 se muestra una sección típica de una cremallera de corte para la generación de perfiles de evolvente. Como se ha comentado anteriormente, la cremallera de corte es un engranaje cilíndrico recto con un diámetro primitivo infinito, que hace que la circunferencia de paso se convierta en una línea de paso. El perfil de los flancos de la cremallera de corte forman una línea recta, inclinada un ángulo α con respecto a una línea perpendicular a la línea de paso, correspondiente al ángulo de presión de la transmisión. La posición de la línea de paso con respecto a la cremallera de corte es tal, que los segmentos que define en su intersección con los perfiles de los flancos tienen la misma longitud cuando corresponden a espacios entre dientes que cuando corresponden al espesor del diente. El módulo de la transmisión (m) corresponde a la distancia entre dos partes homólogas de la cremallera de corte, medida en la línea de paso.

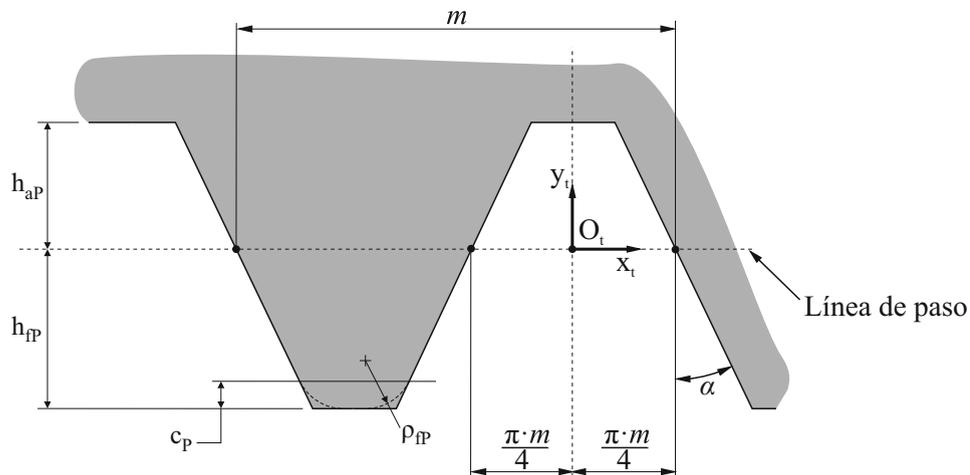


FIGURA 7.2: Perfil de la herramienta de corte

La distancia entre la base del hueco entre dientes de la cremallera de corte y la línea de paso se denomina adendo (h_{aP}), y la distancia entre la línea de paso y el plano que define la cabeza de los dientes se denomina dedendo (h_{fP}). La distancia de dedendo incluye la holgura (c_P), que corresponde a la distancia que quedaría entre la base de la cremallera de corte y la parte superior de una cremallera generada con ella. Por último, existe un radio de acuerdo en la cabeza de los dientes (ρ_{fP}), que generará el radio de entalle de los engranajes.

En su afán de estandarización, las principales organizaciones de estandarización, como la AGMA e ISO, proporcionan unos valores estándar para la definición de los parámetros de la cremallera de corte, que permiten estandarizar la forma de los dientes generados

TABLA 7.1: Parámetros que definen la geometría de la herramienta de corte

Magnitudes	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tipo D
α (deg)	20	20	20	20
h_{aP} (mm)	$1 \cdot m$	$1 \cdot m$	$1 \cdot m$	$1 \cdot m$
h_{fP} (mm)	$1.25 \cdot m$	$1.25 \cdot m$	$1.25 \cdot m$	$1.4 \cdot m$
ρ_{fP} (mm)	$0.38 \cdot m$	$0.3 \cdot m$	$0.25 \cdot m$	$0.39 \cdot m$
c_P (mm)	$0.25 \cdot m$	$0.25 \cdot m$	$0.25 \cdot m$	$0.4 \cdot m$

con ellos, dando lugar a las cremalleras básicas de corte. De esta manera, la norma ISO-53 [162] propone cuatro tipos de perfiles para las cremalleras básicas de corte, cuyos parámetros se muestran en la tabla 7.1.

7.3 Generación de los engranajes con geometría compensada

En el apartado anterior se ha descrito la generación de las geometrías de los engranajes cilíndricos rectos mediante el método Maag. En la configuración estándar de este método, los flancos de la cremallera de corte están perfectamente alineados con el eje de giro del engranaje generado, como se muestra en la figura 7.3a.

No obstante, la cremallera de corte se puede instalar en una posición desalineada, teniendo en cuenta las magnitudes angulares de desalineación $\Delta\gamma_s$ y $\Delta\nu_s$ que se muestran en las figuras 7.3b y 7.3c, respectivamente. En estas figuras, el sistema de coordenadas S_m es un sistema de coordenadas auxiliar fijo, cuyo eje z_m es paralelo al eje de giro del engranaje, y el eje y_m corta a este mismo eje de giro. El sistema S'_c es un sistema de coordenadas solidario a la cremallera de corte, que cuando ésta está instalada en su configuración estándar, es coincidente con S_m .

La cremallera de corte también se puede configurar con los valores de desplazamiento Δx_s , Δy_s y Δz_s , como se muestra en la figura 7.3d. Como consecuencia de utilizar una de estas configuraciones para la cremallera de corte se obtiene una superficie del diente del piñón compensada.

El propósito de la generación del piñón utilizando una cremallera de corte con una configuración desalineada es tener la capacidad de obtener una superficie de contacto del piñón que, cuando la rueda tenga una posición desalineada con respecto al piñón debido a las deformaciones de sus respectivos ejes bajo carga, la acción entre ambas ruedas dentadas sea conjugada.

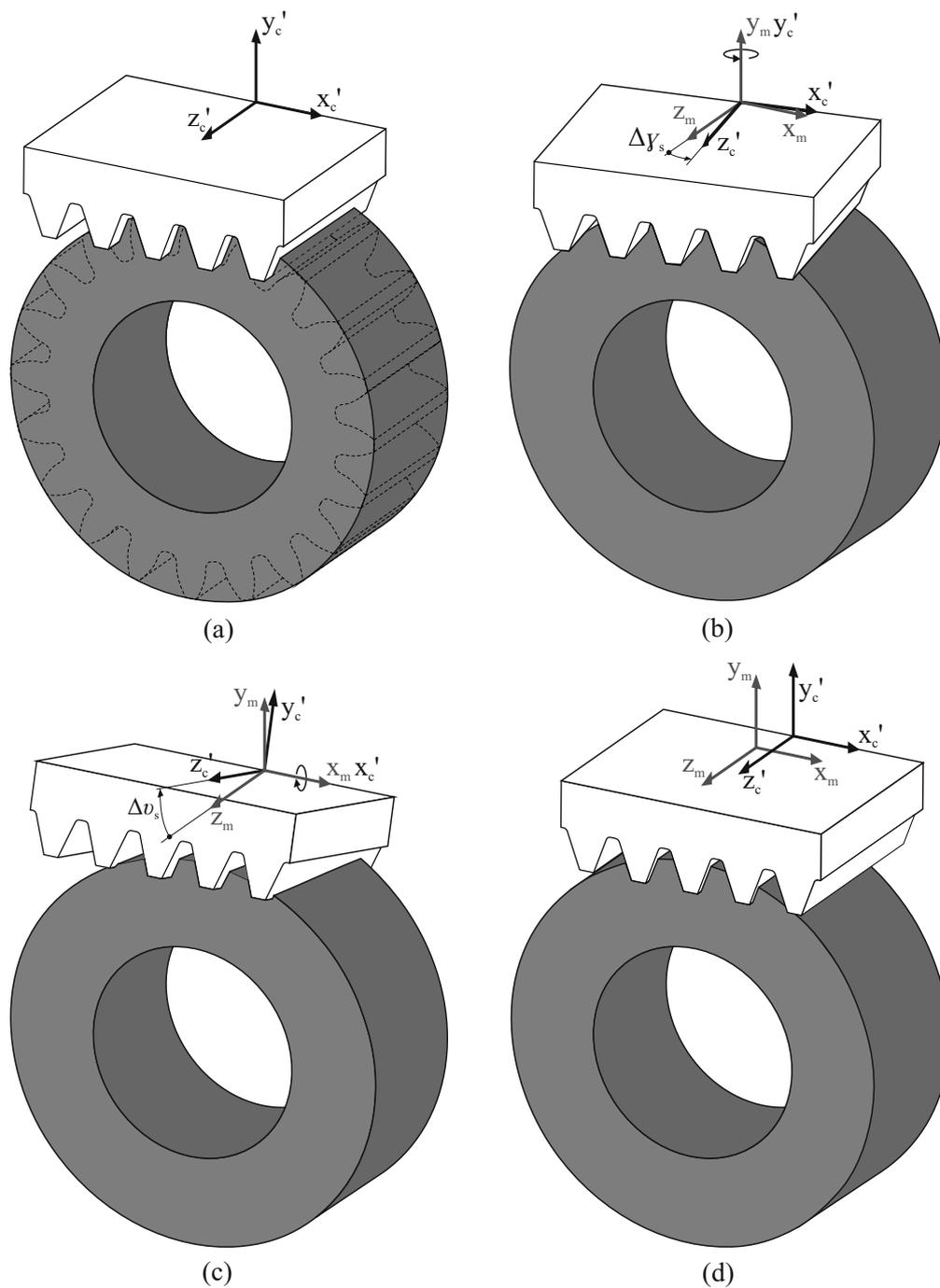


FIGURA 7.3: Posición de la cremallera de corte en (a) posición estándar, (b) posición con $\Delta\gamma_s$, (c) posición con $\Delta\nu_s$ y (d) con cremallera de corte desplazada

Para un nivel de carga dado, las desalineaciones de la rueda con respecto al piñón ($\Delta\gamma_d$, $\Delta\nu_d$, Δx_d , Δy_d y Δz_d) se pueden obtener, por ejemplo, a partir del análisis de un modelo de elementos finitos, como se explica en el apartado 4.8.5. Estos valores de desalineación se considerarán para configurar la posición desalineada de la cremallera de corte para la generación del piñón, de manera que:

$$\Delta\gamma_s = \Delta\gamma_d \quad (7.1a)$$

$$\Delta\nu_s = \Delta\nu_d \quad (7.1b)$$

$$\Delta x_s = \Delta x_d \quad (7.1c)$$

$$\Delta y_s = \Delta y_d \quad (7.1d)$$

$$\Delta z_s = \Delta z_d \quad (7.1e)$$

De esta manera, los dientes de la cremallera de corte están en la misma posición relativa con respecto al piñón que la rueda desalineada.

Adicionalmente, la superficie del diente del piñón se puede generar con una cremallera cuyo perfil de corte esté modificado. En ese caso, las superficies de los dientes del piñón se pueden modificar mediante dos acciones:

- (i) La instalación desalineada de la cremallera de corte para obtener una geometría compensada.
- (ii) La utilización de perfiles modificados de la cremallera de corte, para obtener una geometría modificada.

Mientras que las máquinas modernas de fabricación de engranajes permiten libertad en la instalación de la herramienta de corte sin costes adicionales de fabricación, la aplicación de estos perfiles modificados de la herramienta de corte puede conllevar costes adicionales.

La figura 7.4 muestra dos ejemplos de definición de un perfil modificado en la sección normal de la cremallera de corte. La figura 7.4a muestra la definición de un perfil parabólico para la cremallera de corte, según se describe en la referencia [192]. La parábola se define por el coeficiente de parábola (a_p) y por el parámetro del perfil (u_o), que sitúa el ápice de la parábola con respecto a la línea de paso. La coordenada paramétrica del perfil (u) se mide a lo largo del perfil recto de referencia, mientras que la coordenada paramétrica (v) no se muestra en la figura 7.4a.

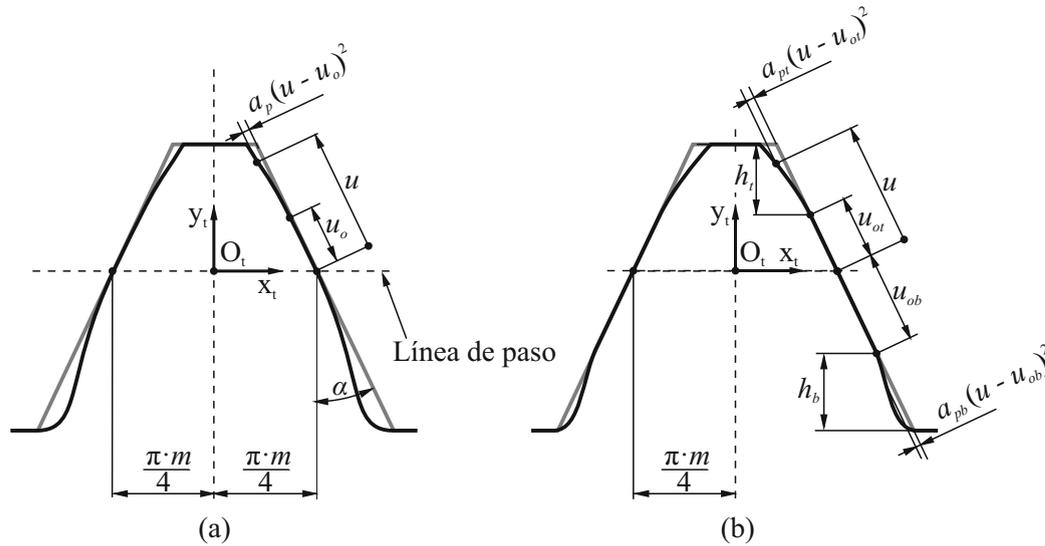


FIGURA 7.4: Definición de los perfiles modificados de la cremallera de corte con (a) ambombamiento parabólico del perfil y (b) acuerdos parabólicos en las partes superior e inferior del perfil

Por otra parte, la figura 7.4b muestra otro tipo de perfil modificado de cremallera de corte, que se basa en un perfil recto con acuerdos parabólicos en las partes superior e inferior [193]. Se consideran los coeficientes de parábola a_{pb} y a_{pt} para la definición de las parábolas en las partes superior e inferior del perfil, respectivamente. Los ápices de la parábola se sitúan mediante las magnitudes u_{ot} y u_{ob} o, de forma alternativa, por las distancias h_t y h_b .

7.4 Ejemplos numéricos

En este apartado se ilustra el funcionamiento de las modificaciones propuestas sobre una transmisión de engranajes cilindros rectos basada en el modelo físico de la figura 1.13. Los datos de diseño de la transmisión investigada se muestran en la tabla 7.2. Los engranajes se instalan en una posición que no coincide con el plano medio entre los apoyos, con el fin de que las deformaciones producidas en los ejes de los engranajes al transmitir potencia produzcan un patrón de contacto defectuoso. El piñón gira en sentido Z^+ por la acción de un par torsor (T), que se aplica sobre el punto A_1 .

La investigación se ha realizado mediante el análisis del modelo de elementos finitos *FEM2.1* de la transmisión, descrito en el apartado 4.6. En este caso se han considerado 5 dientes en cada una de las geometrías de contacto de los engranajes, con el fin de poder estudiar de forma precisa los errores de transmisión en dos ciclos de engrane. La densidad de la malla de elementos finitos de las geometrías de contacto viene determinada por los parámetros especificados en la figura 4.6, a los que se les han asignado los valores

TABLA 7.2: Datos de diseño para los casos de estudio

Magnitudes	Valores
Módulo normal, m [mm]	3
Ángulo de presión normal, α [grados]	20
Número de dientes del piñón, z_1	34
Número de dientes de la rueda, z_2	57
Ancho de cara, $b = b_1 = b_2$ [mm]	25
Diámetro del eje del piñón, d_{sh1} [mm]	30
Diámetro del eje de la rueda, d_{sh2} [mm]	35
Par nominal aplicado, T [Nm]	290
Distancia entre apoyos, L [mm]	140
Posición de montaje de los engranajes, z_g [mm]	40

TABLA 7.3: Parámetros para la discretización de las geometrías de contacto en elementos finitos

Magnitudes	Piñón	Rueda
Nodos en dirección longitudinal	58	53
Nodos en la parte inferior del anillo	1	1
Nodos en la parte superior del anillo	1	1
Nodos en el redondeo	4	4
Nodos en la dirección del perfil	33	28
Punto de posicionamiento	1.2	1.2

mostrados en la tabla 7.3. Como resultado, el modelo de elementos finitos consta de 94211 elementos y 121523 nodos.

Las condiciones de contorno aplicadas en los apoyos del modelo de elementos finitos se resumen en la tabla 7.4. En los nodos A_1 y A_2 se han restringido todos los movimientos de traslación, mientras que en los nodos B_1 y B_2 únicamente se han restringido aquellas traslaciones en el plano transversal al eje, dejando el movimiento axial libre. Los movimientos de rotación se dejan libres en todos los apoyos, excepto la rotación θ_z del nodo B_2 , que restringe el giro de la transmisión. De esta manera se simula que la transmisión está montada sobre rodamientos autoalineantes. El par se aplica directamente sobre el nodo A_1 .

En el estudio se han considerado dos ciclos completos de engrane, correspondientes a una rotación del piñón sobre su eje de magnitud θ , cuyo valor se define mediante la ecuación 4.10. Se han considerado 21 posiciones de análisis, uniformemente espaciadas a lo largo de los dos ciclos de engrane. La primera posición de estudio ($i = 1$) viene determinada por la posición ϕ_{ini} del piñón, como se muestra en la figura 4.13. La última

TABLA 7.4: Condiciones de contorno aplicadas al modelo de elementos finitos

Nodo	u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
A_1	R	R	R	L	L	L
B_1	R	R	L	L	L	L
A_2	R	R	R	L	L	L
B_2	R	R	L	L	L	R

(R=Restringido, L=Libre)

TABLA 7.5: Datos de diseño para los casos de estudio

Magnitudes	Valores máximos	Valores mínimos	Valores medios
$\Delta\gamma_d$ [arc sec]	87.358	83.974	84.784
$\Delta\nu_d$ [arc sec]	31.759	30.380	30.766
Δx_d [μm]	-26.187	-25.650	-25.776
Δy_d [μm]	9.536	9.311	9.378
Δz_d [μm]	0	0	0

posición de estudio ($i = 21$) viene determinada por la posición ϕ_{fin} del piñón. En la posición central ($i = 11$) la pareja de dientes $T^{(0)}$ contacta en la línea de paso.

Las desalineaciones de la rueda sobre el piñón se obtienen mediante el procedimiento propuesto en el apartado 4.8.5, a partir de los resultados del análisis del modelo de elementos finitos. En este análisis se ha considerado la geometría estándar del piñón (Σ_s) y una carga de diseño de $T = 290 N \cdot m$. La determinación de la geometría estándar se ha realizado teniendo en cuenta una herramienta de corte con perfiles rectos instalada con una configuración estándar. Entre los resultados de desalineación de los engranajes obtenidos del análisis de las 21 posiciones de contacto, se consideran los valores máximos, mínimos y medios, mostrados en la tabla 7.5.

Las desalineaciones mostradas en la tabla 7.5 han sido consideradas como parámetros de instalación de la cremallera de corte para obtener varias geometrías compensadas para el piñón. Para la generación de estas geometrías se ha considerado una herramienta con perfiles de corte rectos. Como resultado, se han obtenidos cinco tipos de geometrías:

- (i) La geometría Σ_{c1} se ha generado considerando los valores medios de desalineación mostrados en la tabla 7.5.
- (ii) La geometría Σ_{c2} se ha generado considerando los valores máximos de desalineación mostrados en la tabla 7.5.
- (iii) La geometría Σ_{c3} se ha generado considerando los valores mínimos de desalineación mostrados en la tabla 7.5.

- (iv) La geometría Σ_{c4} se ha generado considerando el valor medio de $\Delta\nu_d$ mostrado en la tabla 7.5.
- (v) La geometría Σ_{c5} se ha generado considerando el valor medio de $\Delta\gamma_d$ mostrado en la tabla 7.5.

7.5 Resultados y discusión

La figura 7.5 muestra la formación del contacto en el diente del piñón en la posición $i = 11$, para las geometrías Σ_s y Σ_{c1} , cuando la transmisión se encuentra bajo la carga para la que ha sido diseñada ($T = 290 \text{ N} \cdot \text{m}$). La figura 7.5a muestra que cuando se considera la geometría estándar (Σ_s) el contacto se distribuye de manera no uniforme a lo largo del ancho de cara del diente, desplazándose hacia la cara frontal del piñón. Sin embargo, cuando se considera la geometría compensada Σ_{c1} (figura 7.5b), el contacto se distribuye de manera uniforme a lo largo del ancho de cara del diente, proporcionando para esta posición de contacto una reducción de las tensiones de von Mises de contacto cercana al 8.85% y una reducción de las tensiones de von Mises de flexión cercana al 26.5%.

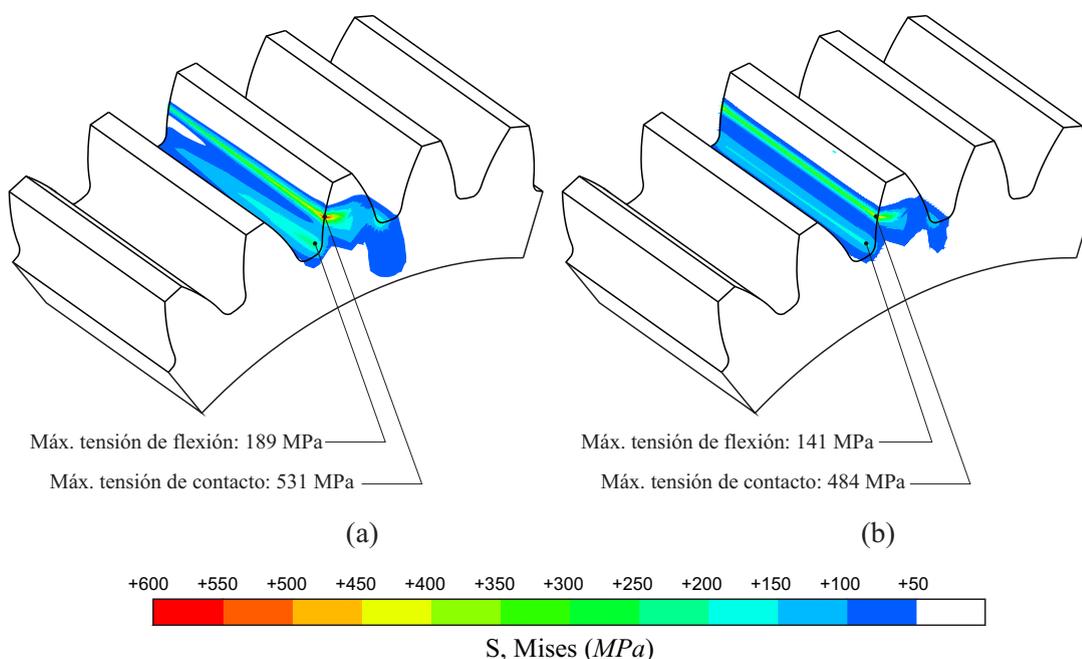


FIGURA 7.5: Formación del contacto y tensiones máximas de contacto y de flexión en la posición $i = 11$ para (a) la geometría estándar Σ_s y (b) la geometría compensada Σ_{c1}

La geometría estándar y las geometrías compensadas mencionadas anteriormente se comparan mediante las funciones de intensidad de carga, obtenidas para la posición de contacto $i = 11$. La figura 7.6 muestra las funciones de intensidad de carga, obtenidas a

partir del análisis de los modelos de elementos finitos de las geometrías Σ_s , Σ_{c1} , Σ_{c2} y Σ_{c3} utilizando el procedimiento descrito en el apartado 4.8.2. La función de intensidad de carga proporcionada por la geometría Σ_s muestra un incremento importante de la intensidad de carga, que se produce debido a la desalineación del engrane provocada por las deformaciones de los ejes. Sin embargo, la función de intensidad de carga obtenida de la geometría Σ_{c1} muestra una distribución uniforme de la intensidad de carga. La figura 7.6 también muestra que las funciones de distribución de carga obtenidas a partir de las geometrías Σ_{c1} , Σ_{c2} y Σ_{c3} son muy similares entre ellas.

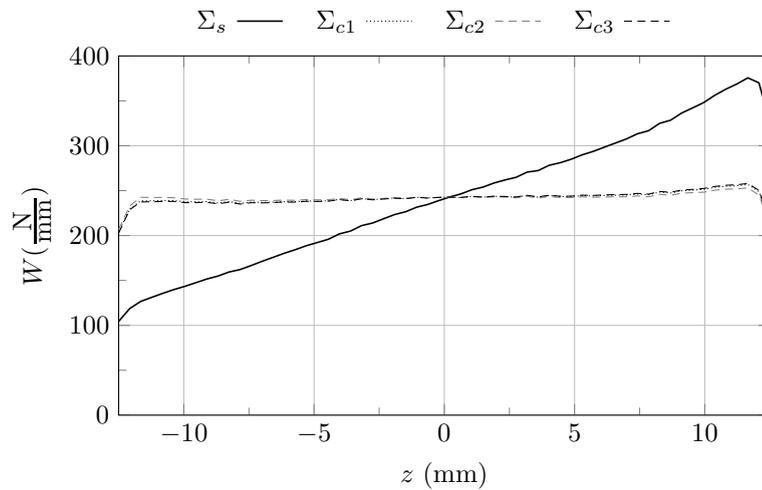


FIGURA 7.6: Funciones de intensidad de carga para la geometría estándar (Σ_s) y las geometrías compensadas (Σ_{c1} , Σ_{c2} , Σ_{c3}) en la posición de contacto 11

La figura 7.7 muestra las funciones de intensidad de carga, obtenidas a partir del análisis de los modelos de elementos finitos de las geometrías Σ_s , Σ_{c1} , Σ_{c4} y Σ_{c5} . En este caso se puede observar que la contribución principal para obtener una distribución uniforme de la intensidad de carga y compensar el efecto de la deflexión de los ejes se debe a la magnitud $\Delta\gamma_d$, puesto que la función de intensidad de carga obtenida a partir de la geometría Σ_{c5} es muy parecida a la proporcionada por Σ_{c1} . Sin embargo, la función de intensidad de carga obtenida a partir de la geometría Σ_{c4} es muy parecida a la que se obtiene a partir de la función Σ_s , mostrando una influencia menor de la magnitud $\Delta\nu_d$ en la compensación de las deflexiones de los ejes.

Por lo que refiere al comportamiento de las geometrías Σ_s y Σ_{c1} cuando la carga de trabajo es distinta de la carga de diseño (para la que se obtiene la geometría compensada), la figura 7.8 muestra las funciones de intensidad de carga para ambas geometrías y distintos valores del par aplicado, que varían desde $0.1T$ hasta $1.0T$. Los resultados muestran que para un nivel bajo de carga, la intensidad de carga se distribuye mejor en la geometría estándar Σ_s que en la geometría compensada Σ_{c1} . Sin embargo, y tal como se esperaba, la intensidad de carga se distribuye de forma más uniforme a medida que se incrementa la carga, hasta llegar a la carga de diseño de la geometría Σ_{c1} . Este

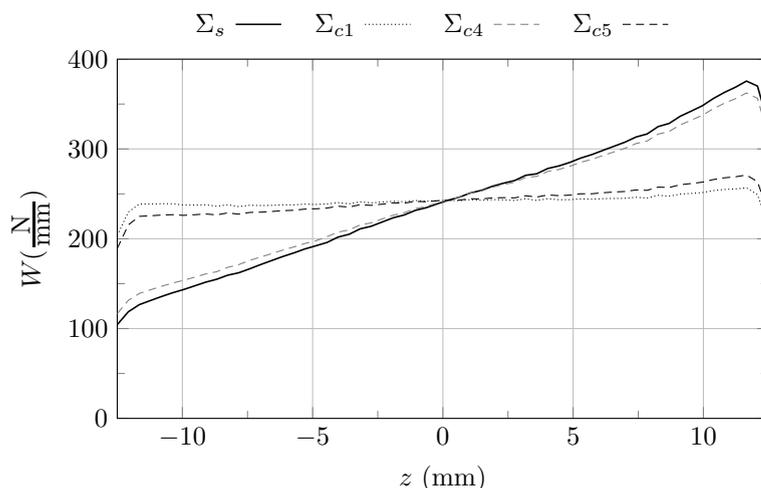


FIGURA 7.7: Funciones de intensidad de carga para la geometría estándar (Σ_s) y las geometrías compensadas ($\Sigma_{c1}, \Sigma_{c4}, \Sigma_{c5}$) en la posición de contacto 11

hecho no repercute en efectos negativos, pues cuando el nivel de carga es inferior al de diseño, las tensiones a las que está sometida la transmisión son también inferiores.

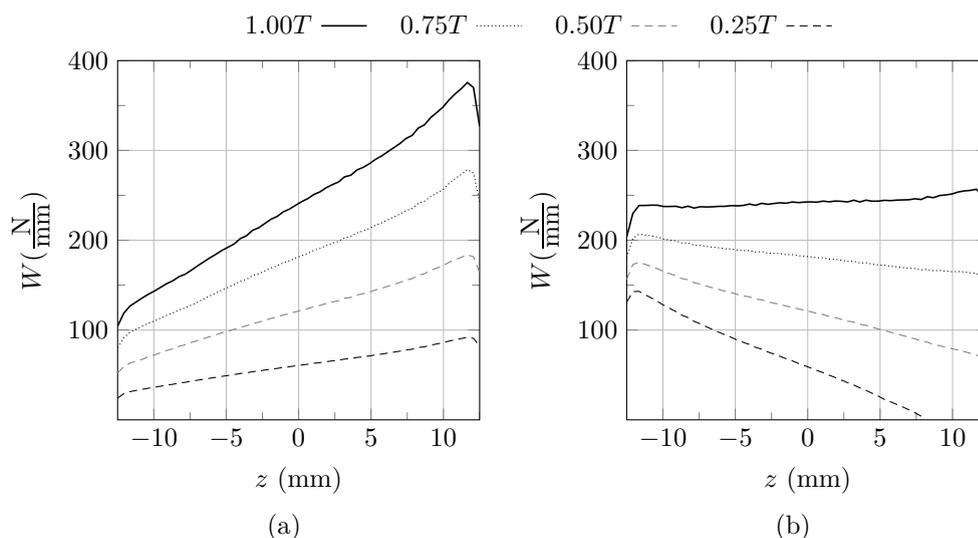


FIGURA 7.8: Funciones de intensidad de carga en la posición de contacto 11 para distintos niveles de par en la (a) geometría estándar Σ_s y (b) en la geometría compensada Σ_{c1}

Con respecto a los resultados de engrane, la geometría estándar y la geometría compensada Σ_{c1} ofrecen una función nula de error de transmisión en ausencia de carga debido a la acción conjugada de las superficies cuando no se aplica carga. Por lo tanto, la función de error de transmisión total será igual a la función de error de transmisión bajo carga. La figura 7.9 muestra la función de error de transmisión de las geometrías Σ_s y Σ_{c1} a lo largo de los dos ciclos de engrane considerados, obtenida mediante el procedimiento descrito en el apartado 4.8.1. El valor del error de transmisión pico a pico es

TABLA 7.6: Geometrías compensadas modificadas aplicando un abombado completo utilizando perfiles parabólicos

Geometría	a_p (mm^{-1})	u_o (m)
Σ_{c1m1}	0.001	-0.4
Σ_{c1m2}	0.002	-0.4
Σ_{c1m3}	0.003	-0.4

cercano a 14.08 *arc sec* para la geometría estándar Σ_s y 12.94 *arc sec* para la geometría compensada Σ_{c1} .

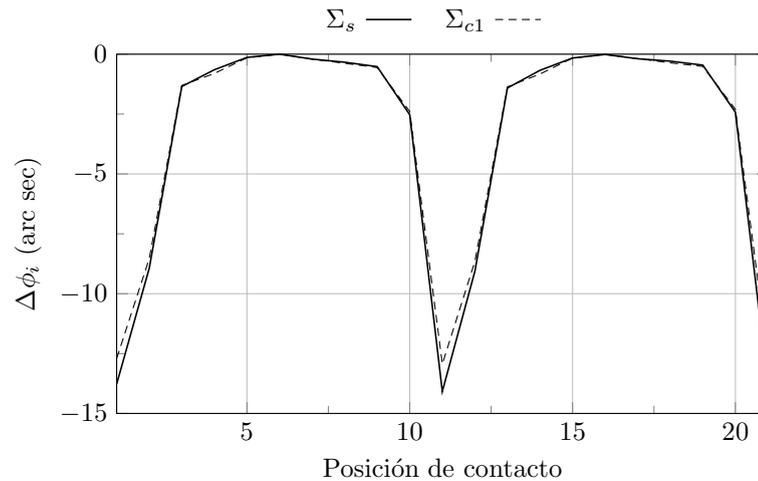


FIGURA 7.9: Funciones de error de transmisión para la geometría estándar Σ_s y la geometría compensada Σ_{c1}

Se han generado diversas geometrías compensadas modificadas para investigar el efecto del prediseño de la función de error de transmisión en ausencia de carga en la reducción del error de transmisión pico a pico. Las tablas 7.6 y 7.7 muestran los parámetros principales de diseño de las geometrías compensadas modificadas. Las tres geometrías compensadas modificadas, cuyos parámetros se muestran en la tabla 7.6, están basadas en el abombamiento completo de las superficies de los dientes del piñón, obtenidos a partir de una cremallera de corte con perfil parabólico (figura 7.4a). Las ocho geometrías compensadas modificadas restantes, cuyos parámetros se muestran en la tabla 7.7, se basan en un abombamiento parcial de la superficie del diente del piñón, obtenido mediante una cremallera de corte con perfil recto y redondeos parabólicos en la parte inferior y superior del perfil (figura 7.4b).

La figura 7.10 muestra las funciones de error de transmisión en ausencia de carga ($\Delta\phi_i^{(u)}$), bajo carga ($\Delta\phi_i^{(l)}$) y total ($\Delta\phi_i$) para las geometrías Σ_{c1m1} , Σ_{c1m2} y Σ_{c1m3} . El error de transmisión pico a pico de menor magnitud se consigue con la geometría Σ_{c1m2} , lo que indica que esta geometría es la mejor solución de las tres consideradas.

TABLA 7.7: Geometrías compensadas modificadas aplicando un abombado parcial utilizando redondeos parabólicos

Geometría	a_{pt} (mm^{-1})	h_t (m)	a_{pb} (mm^{-1})	h_b (m)
Σ_{c1m4}	0.005	2.5	0.005	2.5
Σ_{c1m5}	0.010	2.5	0.010	2.5
Σ_{c1m6}	0.015	2.5	0.015	2.5
Σ_{c1m7}	0.020	2.5	0.020	2.5
Σ_{c1m8}	0.004	3.0	0.004	3.0
Σ_{c1m9}	0.008	3.0	0.008	3.0
Σ_{c1m10}	0.012	3.0	0.012	3.0
Σ_{c1m11}	0.016	3.0	0.016	3.0

La figura 7.11 muestra las funciones de error de transmisión de las geometrías Σ_{c1m4} , Σ_{c1m5} , Σ_{c1m6} y Σ_{c1m7} , en las que $h_t = h_b = 2.5$ mm (ver figura 7.4a). La figura 7.11a ilustra como el valor pico a pico del error de transmisión en ausencia de carga se incrementa a medida que se incrementa el coeficiente de parábola, mientras que la figura 7.11b muestra que el valor pico a pico del error de transmisión bajo carga se reduce con el incremento del coeficiente de parábola, en parte, por la reducción de la razón de contacto que se produce. Por último, la figura 7.11c muestra que el valor mínimo del error de transmisión total de todas las geometrías consideradas se obtiene con la geometría Σ_{c1m5} .

Resultados similares se pueden observar en la figura 7.12 para las geometrías compensadas Σ_{c1m8} , Σ_{c1m9} , Σ_{c1m10} y Σ_{c1m11} , en las que $h_t = h_b = 3.0$ mm. De las cuatro geometrías consideradas, el valor mínimo pico a pico del error de transmisión se consigue con la geometría Σ_{c1m9} .

Por lo que refiere a los resultados tensionales, es importante remarcar que esta investigación se ha llevado a cabo a lo largo de dos ciclos completos de engrane y no únicamente en una posición de análisis. La figura 7.13 muestra la evolución de las presiones de contacto y de las tensiones de flexión para las geometrías Σ_s , Σ_{c1} , Σ_{c1m2} , Σ_{c1m5} y Σ_{c1m9} . Se observa que con las geometrías compensadas se obtiene una reducción de las tensiones de contacto y de flexión con respecto a la geometría estándar en todo el ciclo de engrane. Teniendo en cuenta las geometrías compensadas modificadas, el abombamiento del perfil es útil incluso para eliminar algunos picos de tensión provocados por la descarga inmediata de los dientes en contacto. Sin embargo, el nivel de tensiones de flexión se incrementa en las geometrías compensadas modificadas con respecto a las geometrías compensadas. La principal ventaja de las geometrías modificadas compensadas es la reducción del error de transmisión pico a pico.

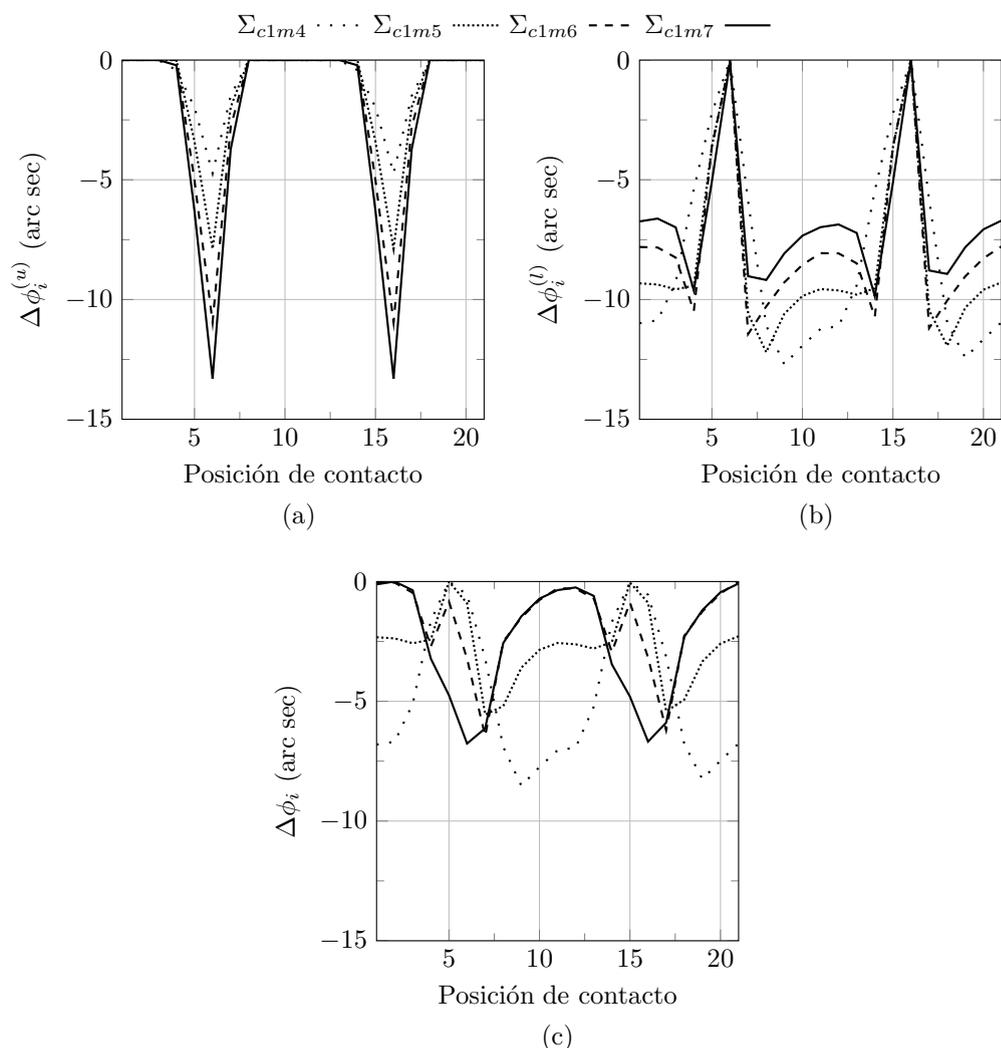


FIGURA 7.11: Funciones de error de transmisión (a) en ausencia de carga, (b) bajo carga y (c) totales, para las geometrías Σ_{c1m4} , Σ_{c1m5} , Σ_{c1m6} y Σ_{c1m7}

El procedimiento propuesto consiste en la generación de la geometría del piñón mediante el método Maag, pero instalando la cremallera de corte en una posición desalineada. Las cantidades de desalineación impuestas a la cremallera de corte hacen que ésta ocupe la misma posición relativa con respecto al piñón que ocupa la rueda cuando la transmisión transmite el par nominal. El piñón generado posee una geometría compensada.

Esta modificación de la geometría del piñón se puede completar con la sustitución de las cremalleras de corte con un perfil recto por cremalleras de corte con perfiles parabólicos, obteniendo de esta forma engranajes compensados modificados. Esta sustitución permite prediseñar la función de errores de transmisión en ausencia de carga.

El procedimiento propuesto se ha ilustrado con distintos ejemplos numéricos. Se ha analizado un modelo de elementos finitos *FEM2.1* de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos sometida al par nominal. A partir de los resultados del análisis, se

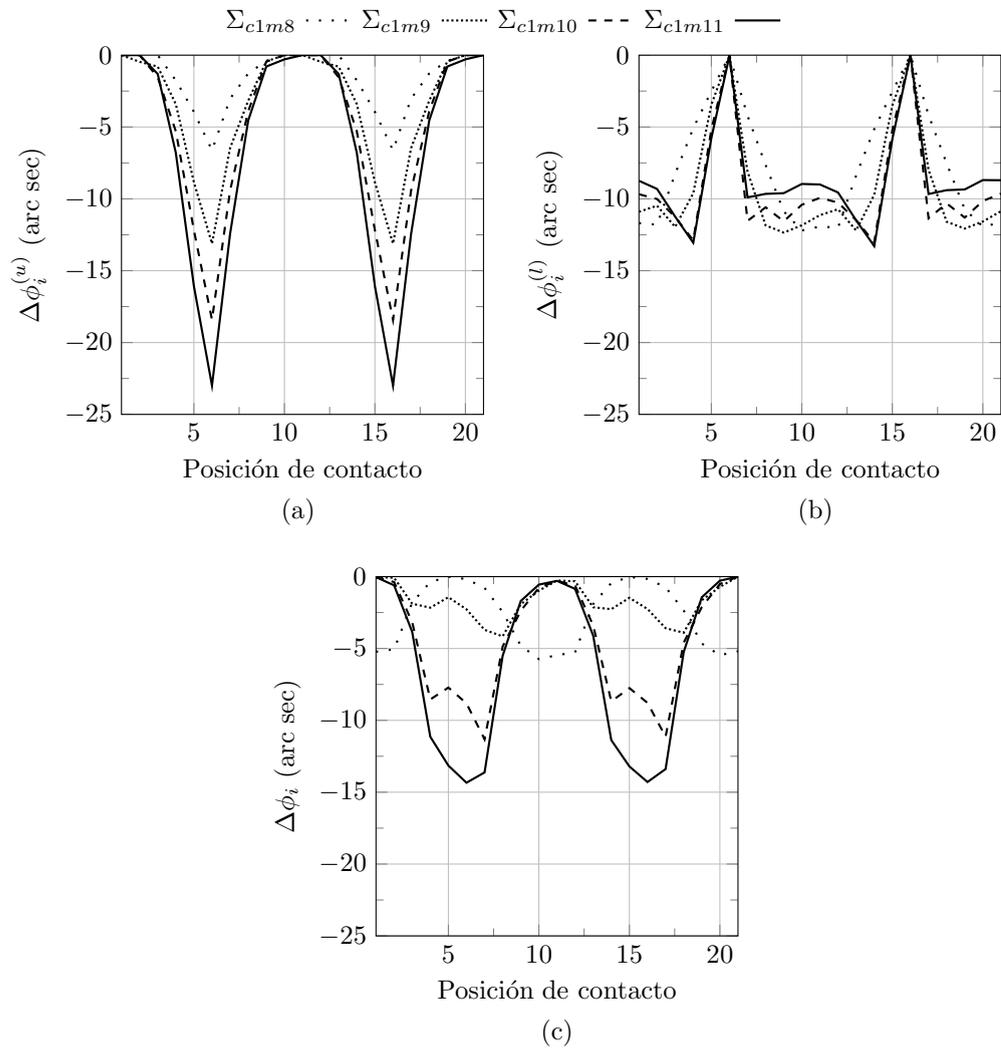


FIGURA 7.12: Funciones de error de transmisión (a) en ausencia de carga, (b) bajo carga y (c) totales, para las geometrías Σ_{c1m8} , Σ_{c1m9} , Σ_{c1m10} y Σ_{c1m11}

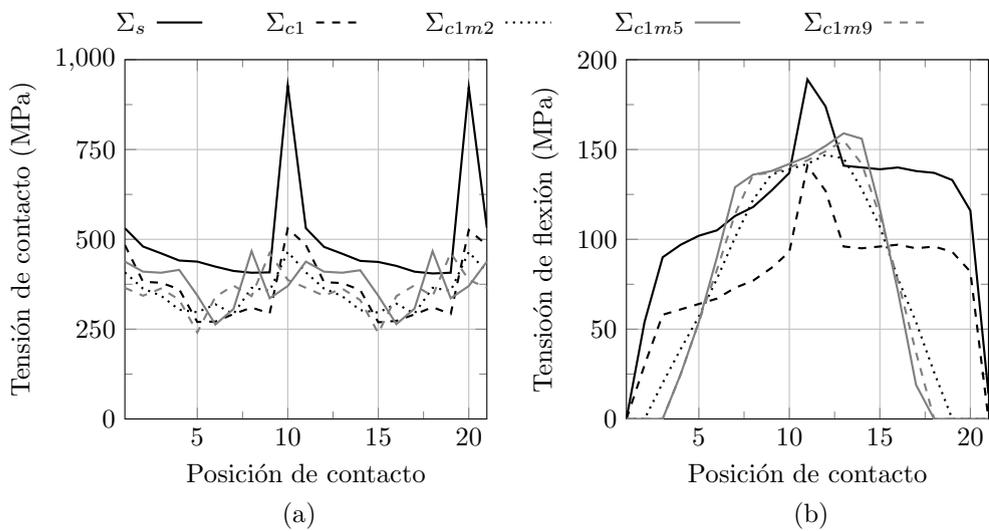


FIGURA 7.13: Evolución de las tensiones máximas para las geometrías Σ_s , Σ_{c1} , Σ_{c1m2} y Σ_{c1m9} : (a) tensión de contacto y (b) tensión de flexión

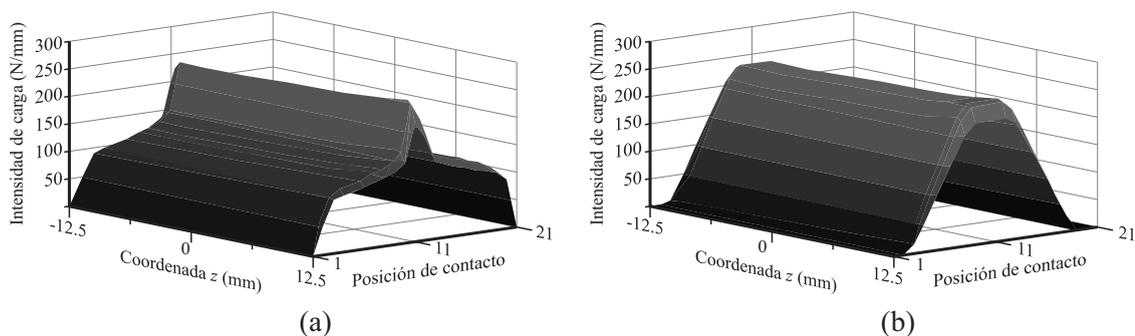


FIGURA 7.14: Funciones de intensidad de carga a lo largo del ciclo de engrane para las geometrías: (a) Σ_{c1} y (b) Σ_{c1m2}

han obtenido las desalineaciones que se producen en los engranajes. Estas desalineaciones se han considerado para generar distintas geometrías compensadas y compensadas modificadas del piñón. Las nuevas transmisiones han sido analizadas, y los resultados obtenidos de estos análisis permiten obtener las siguientes conclusiones:

- (i) La utilización de engranajes con geometría compensada permite la obtención de distribuciones de carga uniformes cuando la transmisión trabaja al par nominal. Una mejor distribución de la carga repercute en la reducción de las tensiones máximas de contacto y las tensiones máximas de flexión.
- (ii) La utilización de perfiles parabólicos en la cremallera de corte utilizada para la generación de la geometría compensada del piñón permite reducir, además, la magnitud del error de transmisión pico a pico.
- (iii) Mediante la investigación de dos ciclos completos de engrane se ha podido observar que las modificaciones propuestas consiguen reducir el valor máximo de las tensiones de contacto y de flexión en todas las posiciones del ciclo de engrane, proporcionando una evolución suave tanto de las tensiones de flexión como de las tensiones de contacto. De esta forma, se consigue incrementar la vida útil de las transmisiones al mismo tiempo que se reduce su error de transmisión.

Esta investigación se ha centrado en la compensación de los errores de alineación provocados por la deformación de los ejes para una dirección dada de rotación del piñón. Esto significa que las caras de contacto del piñón no conductoras se sacrifican. De hecho, un análisis por el método de los elementos finitos de la transmisión considerando el contacto en la cara no conductora proporciona funciones de intensidad de carga peores para la geometría compensada que para la estándar. Se recomienda que se determinen las holguras en las caras no conductoras de los engranajes para asegurar un funcionamiento adecuado de las transmisiones.

Los resultados expuestos en este capítulo están incluidos en la referencia [141].

Capítulo 8

Conclusiones y trabajos futuros

8.1 Conclusiones

Una fase importante durante el diseño de una nueva transmisión de engranajes es la determinación de su capacidad de carga. En esta fase se verifica que la nueva transmisión es capaz de transmitir la potencia para la que es diseñada de forma fiable, sin que ello suponga el fin prematuro de su vida útil. Generalmente, este proceso consiste en tres pasos:

- (i) La determinación de los niveles admisibles de tensión en los engranajes para que estos soporten un número dado de ciclos de carga.
- (ii) La predicción de las tensiones a las que estarán sometidos los engranajes en condiciones de trabajo.
- (iii) La verificación que estas tensiones son inferiores a las tensiones admisibles.

Habitualmente, las tensiones que son de interés para el diseñador de engranajes son las tensiones de contacto y las tensiones de flexión en la raíz del diente, pues en la mayoría de los casos son las causantes del fallo de la transmisión. En la bibliografía se ha podido observar que la predicción de estas tensiones se suele llevar a cabo por métodos analíticos, semianalíticos o numéricos. Para que los resultados obtenidos utilizando estos métodos tengan un buen nivel de precisión, los procedimientos de cálculo deben considerar escenarios tan realistas como sea posible, teniendo en cuenta todos aquellos fenómenos que tengan influencia en el estado tensional de la transmisión. Entre estos fenómenos, uno de reconocida importancia es la desalineación del engrane que se produce como consecuencia de la deformación de los ejes de los engranajes bajo carga.

No obstante, los métodos utilizados habitualmente para la predicción del estado tensional de los engranajes tienen ciertas limitaciones, que pueden venir impuestas por sus hipótesis de cálculo o por su coste computacional, que en muchas ocasiones impiden tener en cuenta estas desalineaciones del engrane, llevando a escenarios de análisis poco realistas.

En este trabajo se han estudiado las distintas limitaciones que aparecen en algunos métodos analíticos, semianalíticos y numéricos para el cálculo tensional de transmisiones de engranajes, y se han propuesto nuevos modelos, o mejoras de los modelos ya existentes, para tener en cuenta los efectos de las deformaciones de los ejes de los engranajes bajo carga. Adicionalmente, y haciendo uso de los nuevos modelos de cálculo desarrollados, se ha desarrollado un procedimiento de modificación de las geometrías de los engranajes que permite reducir los efectos adversos de la desalineación del engrane. Las conclusiones que se pueden extraer del trabajo realizado se enumeran a continuación.

Conclusiones sobre el modelo analítico para el cálculo de la deformación de los ejes de los engranajes bajo carga

El cálculo de la deformación de los ejes de los engranajes bajo carga se realiza habitualmente utilizando la teoría clásica de vigas. La hipótesis básica de esta teoría es que las secciones transversales de la viga permanecen planas e indeformables durante la deformación de la misma. Entre las distintas teorías formuladas bajo esta hipótesis, destacan la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y la teoría de vigas de Timoshenko.

En la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, la sección transversal de la viga, además de plana e indeformable, permanece perpendicular al eje neutro de la viga durante la deformación. En la teoría de Timoshenko, por contra, esta sección puede inclinarse con respecto a este eje. Esto permite que en la segunda se puedan considerar, además de las deformaciones por flexión, las deformaciones por cortante. Estas deformaciones pueden cobrar especial importancia cuando las vigas a considerar son poco esbeltas, como ocurre habitualmente en los ejes de engranaje.

Por este motivo, en la primera parte de este trabajo se ha expuesto la teoría de vigas de Timoshenko, y se han obtenido las ecuaciones diferenciales que permiten calcular la deformación de una viga sujeta a distintos tipos de carga. Posteriormente, y utilizando esta teoría de vigas, se han propuesto dos modelos analíticos distintos para el cálculo de la deformación de un eje de engranaje, denominados *SHAFT1* y *SHAFT2*.

En el modelo *SHAFT1*, la geometría del conjunto formado por un engranaje montado sobre su eje se ha aproximado mediante tres tramos cilíndricos concéntricos y consecutivos. Los dos tramos cilíndricos exteriores poseen el diámetro del eje (d_{sh}), mientras que el tramo cilíndrico central posee el diámetro primitivo del engranaje (d), que será mayor que el del eje ($d > d_{sh}$). La deformación bajo carga de estos tres tramos cilíndricos se ha estudiado utilizando la teoría de vigas de Timoshenko. Para cada uno de estos tramos, se plantean las ecuaciones diferenciales que gobiernan su deformación. La deformación del conjunto se determina mediante la integración sucesiva de estas ecuaciones diferenciales, considerando las condiciones de contorno y las condiciones de continuidad entre tramos.

No obstante, el modelo *SHAFT1* tiene algunos puntos débiles que es necesario superar si se quiere obtener un buen grado de precisión en el cálculo de la deformación del eje. Estas dificultades están relacionadas con el cambio brusco de la sección transversal que se produce en la transición entre los distintos tramos cilíndricos mediante los que se modeliza el eje. En las zonas donde se produce este cambio brusco, la hipótesis de que las secciones transversales del eje permanecen planas e indeformables durante su deformación puede estar lejos de la realidad. Se ha podido observar que en las proximidades del cambio brusco de sección, la rigidez del tramo de mayor diámetro es menor de lo que se asume en el modelo *SHAFT1*, ya que parte de la sección no se opone a la flexión.

El objetivo del modelo *SHAFT2* es tener en cuenta este efecto de disminución de la rigidez. En este modelo, a la hora de calcular el momento de inercia de la sección transversal del eje, en lugar de considerar un salto abrupto entre dos tramos cilíndricos de diferente diámetro, se ha considerado un tramo cónico de transición. El único parámetro que incorpora el modelo *SHAFT2* con respecto al modelo *SHAFT1* es el ángulo que hay entre la generatriz de estos tramos cónicos y sus ejes de revolución (ϕ).

La determinación del valor óptimo del ángulo ϕ se ha realizado considerando 30 casos de diseño de un eje escalonado formado por tres tramos cilíndricos, simplemente apoyado en sus extremos y con una carga uniforme en el tramo central, en los que se ha variado el diámetro (d) y la anchura (b) del tramo central, manteniendo el diámetro del eje (d_{sh}) y su longitud constantes. Para cada caso de diseño:

- (i) Se ha generado un modelo tridimensional de elementos finitos a partir de los parámetros de diseño del caso de estudio. Este modelo de elementos finitos se ha analizado bajo las condiciones de contorno consideradas, y se han determinado los desplazamientos que se producen sobre la línea neutra del eje.
- (ii) Se ha planteado el modelo *SHAFT2* para la simulación del caso considerado.

- (iii) Se ha buscado el valor óptimo del ángulo ϕ , considerándose este como aquel que minimiza el error cuadrático medio entre los desplazamientos calculados por el modelo de elementos finitos y los desplazamientos calculados por el modelo *SHAFT2*.

Como resultado de este análisis, se ha obtenido un conjunto de valores óptimos del ángulo ϕ , cuyo valor mínimo es de 37.2° y el valor máximo es de 42.9° . Se ha decidido entonces definir el valor óptimo del ángulo ϕ como el medio obtenido de los distintos casos estudiados, siendo este de $\phi = 40^\circ$.

El funcionamiento de los modelos *SHAFT1* y *SHAFT2* (considerando $\phi = 40^\circ$) se ha ilustrado mediante un conjunto de ejemplos numéricos, en los que se ha determinado la deformación bajo carga de distintos casos de diseño de ejes escalonados con distintas hipótesis de carga. Estos ejemplos numéricos incluyen:

- (i) Casos en los que el engranaje se sitúa en la porción central del eje, con una carga uniformemente distribuida sobre él.
- (ii) Casos en los que el engranaje se sitúa en la porción central del eje, con una carga no uniforme aplicada sobre él.
- (iii) Casos en los que se considera más de un engranaje montado sobre el eje, sobre los que actúan cargas en el mismo sentido, y en sentidos contrarios.

Para cada uno de los casos estudiados, se ha generado un modelo tridimensional de elementos finitos, y los resultados obtenidos a partir de su análisis se han considerado como resultados de referencia. La comparación de estos resultados de referencia con los resultados obtenidos a partir de los modelos *SHAFT1* y *SHAFT2* ha mostrado que:

- (i) Cuando la relación entre d/d_{sh} y b/d_{sh} es pequeña, el modelo *SHAFT1* puede ofrecer resultados parecidos a los del modelo de referencia.
- (ii) En cambio, a medida que la relación entre d/d_{sh} y b/d_{sh} crece, los resultados obtenidos a partir del modelo *SHAFT1* tienden a divergir de los resultados obtenidos a partir del modelo de referencia.
- (iii) En todos los casos estudiados, el modelo *SHAFT2* ha demostrado ofrecer resultados más parecidos a los del modelo de referencia que los obtenidos a partir del modelo *SHAFT1*.

Conclusiones sobre los modelos de elementos finitos propuestos para el cálculo tensional de transmisiones de engranajes

El método de los elementos finitos se ha utilizado extensamente en la industria para estudiar las tensiones que se producen en transmisiones de engranajes bajo carga. Los modelos de elementos finitos utilizados habitualmente están compuestos por entre tres y cinco parejas de dientes, con sus respectivas porciones del anillo del engranaje. Las condiciones de contorno del modelo se suelen imponer mediante un conjunto de superficies rígidas, que envuelven las porciones inferiores del anillo, y acoplan sus movimientos a unos nodos de referencia, situados sobre la posición teórica de los ejes. Sobre estos nodos se aplican las correspondientes restricciones de movimiento del modelo, así como las cargas a las que está sometida la transmisión. Estos modelos de elementos finitos permiten contemplar las deformaciones locales producidas en el contacto entre dientes y las deformaciones producidas por la flexión del diente. Sin embargo, las condiciones de contorno impuestas al modelo no permiten que éste tenga en consideración las deformaciones del cuerpo de los engranajes y del resto de elementos que componen la transmisión.

En este trabajo se han propuesto cuatro nuevos modelos de elementos finitos para el análisis tensional de transmisiones de engranajes cuyo objetivo es que, además de las deformaciones locales producidas en el contacto y de la deformación por flexión del diente, permitan considerar las deformaciones del cuerpo de los engranajes, así como las deformaciones de los ejes que los soportan.

El primer modelo propuesto, denominado *FEM0*, está compuesto exclusivamente por elementos finitos sólidos tridimensionales. En este modelo, la totalidad de las geometrías del conjunto formado por el eje y el engranaje se han mallado con estos elementos, de manera que en el modelo no se han contemplado simplificaciones significativas de las mismas.

En los otros modelos propuestos, denominados *FEM1* y *FEM2*, el comportamiento elástico de los ejes y del cuerpo de los engranajes se ha simulado mediante elementos finitos de tipo viga. La utilización de este tipo de elementos finitos ha permitido reducir el coste computacional asociado al modelo, sin que ello repercuta en una pérdida significativa de precisión. Los movimientos de las geometrías de contacto se han acoplado a los movimientos de los ejes mediante restricciones cinemáticas. Son estas restricciones cinemáticas las que definen las diferencias entre el modelo *FEM1* y el modelo *FEM2*:

- (i) En el modelo *FEM1*, se ha definido un conjunto de superficies rígidas que envuelven la parte inferior de las geometrías de contacto. Los movimientos de estas superficies se han acoplado a los movimientos de un nodo de referencia, perteneciente a los elementos finitos de tipo viga que conforman el eje.
- (ii) En el modelo *FEM2*, las superficies rígidas del modelo *FEM1* se han sustituido por un conjunto de aristas rígidas que rodean el anillo del engranaje. Los movimientos de cada una de estas aristas se han acoplado a los movimientos de los nodos de los elementos finitos tipo viga que conforman el eje, permitiendo el movimiento relativo de cada sección respecto las secciones contiguas.

Utilizando el modelo de elementos finitos *FEM1*, es posible tener en cuenta las deformaciones de los ejes en el análisis. Cuando se utiliza el modelo *FEM2*, además de las deformaciones de los ejes es posible tener en cuentas la deformación por torsión de los cuerpos de los engranajes.

Se han propuesto dos variantes distintas del modelo *FEM2*, denominadas *FEM2.1* y *FEM2.2*. Las diferencias entre ambos modelos radican en las propiedades de la sección transversal asignada a los elementos viga que simulan el cuerpo del engranaje. Mientras en el modelo *FEM2.1* se ha asignado a estos elementos viga las propiedades de una sección circular cuyo diámetro es la semisuma del diámetro del eje y el diámetro primitivo del engranaje, en el modelo *FEM2.2* se han seguido las conclusiones obtenidas en el capítulo 3, y se han especificado transiciones suaves del diámetro considerado para el cálculo de la deformación por flexión del eje.

A continuación se han propuesto métodos que han permitido obtener, además de los resultados convencionales de un análisis tensional por el método de los elementos finitos, otros resultados que pueden ser de interés para el diseñador de engranajes. Estos resultados son:

- (i) El error de transmisión en ausencia de carga, el error de transmisión bajo carga y el error de transmisión total.
- (ii) La función de intensidad de carga y el factor de distribución longitudinal de la carga.
- (iii) La función de reparto de carga entre dientes.
- (iv) La desalineación de los engranajes provocada por la deformación de los ejes bajo carga.

Los distintos modelos de elementos finitos de la transmisión propuestos ($FEM0$, $FEM1$, $FEM2.1$ y $FEM2.2$) se han comparado utilizando tres configuraciones distintas de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos. La comparación se ha realizado en términos de presión de contacto, tensión de flexión en la raíz del diente, función de intensidad de carga, función de reparto de carga, factor de distribución longitudinal de la carga, error de transmisión y desalineación natural de los ejes, a lo largo de dos ciclos completos de engrane. Esta comparación ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

- (i) Aunque con un coste computacional asociado elevado, el modelo de elementos finitos $FEM0$ puede ofrecer resultados de un alto grado de precisión, debido a la ausencia de simplificaciones significativas de las geometrías consideradas. Esto hace que los resultados obtenidos a partir del modelo $FEM0$ puedan ser utilizados como marco de referencia en las comparaciones con otros modelos.
- (ii) Los modelos $FEM1$ y $FEM2$ permiten reducir el coste computacional del modelo $FEM0$, pero las simplificaciones a las que están sujetos (modelizado de los ejes con elementos finitos de tipo viga, restricciones cinemáticas entre los elementos finitos del eje y las geometrías de contacto, etc.) pueden llevar a pérdidas de precisión de los resultados obtenidos. El tiempo empleado en los análisis de ambos modelos de elementos finitos es similar.
- (iii) Cuando la deformación torsional del cuerpo del engranaje no es significativa (lo que ocurre habitualmente cuando el diámetro primitivo de ambas ruedas es grande comparado con su ancho de cara), los resultados de los modelos $FEM1$ y $FEM2$ son prácticamente equivalentes, y parecidos a los obtenidos a partir del modelo $FEM0$. En cambio, cuando la deformación por torsión de los cuerpos de los engranajes cobra importancia, únicamente el modelo $FEM2$ ofrece resultados parecidos a los del modelo $FEM0$.
- (iv) Cuando se comparan los modelos $FEM2.1$ y $FEM2.2$, se observa que los resultados obtenidos a partir del segundo se aproximan en mayor grado a los obtenidos a partir del modelo de referencia ($FEM0$) en todos los casos estudiados.
- (v) En condiciones similares de mallado, considerar en el análisis cinco parejas de dientes en lugar de tres parejas representa un incremento del coste computacional asociado al modelo que no siempre es necesario afrontar. Cuando los resultados de interés están relacionados con las presiones de contacto o las desalineaciones de los engranajes, considerar cinco parejas de dientes no reporta ningún beneficio apreciable con respecto a considerar tres parejas de dientes. En cambio, cuando se buscan resultados relacionados con las tensiones de flexión o el error de transmisión,

se observa que considerar cinco análisis proporciona resultados de mayor precisión que cuando únicamente se consideran tres.

Conclusiones sobre el análisis del factor de distribución longitudinal de la carga

Los métodos analíticos utilizados habitualmente para determinar las tensiones de contacto y de flexión en la raíz de los dientes se basan en la aplicación de las teorías de la elasticidad bajo ciertas hipótesis y condiciones de contorno. Cuando estos métodos se aplican para determinar la capacidad de carga de transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales, es común adoptar la hipótesis de que las ruedas dentadas están perfectamente alineadas durante la transmisión de potencia, y en consecuencia, la carga transmitida en el contacto entre dientes se distribuye de forma uniforme a lo largo del ancho de cara de los engranajes.

En realidad, debido a las desalineaciones que se producen en el engrane, esta carga raramente se reparte de forma uniforme. Como consecuencia se producen incrementos localizados de la intensidad de carga, que repercuten en aumentos de los niveles máximos de tensión en los dientes de los engranajes. Por tanto, la hipótesis de que la carga se transmite de forma uniforme lleva a que los métodos analíticos mencionados proporcionen resultados de tensión poco conservadores, que pueden llevar a diseños de la transmisión con una capacidad de carga inferior a la requerida. Por ese motivo, habitualmente se incluyen factores de penalización en los métodos analíticos utilizados para la determinación de las tensiones de contacto y de flexión, cuya finalidad es tener en cuenta los incrementos de tensión provocados por distribuciones no uniformes de la carga.

Entre los distintos métodos analíticos para el cálculo de las tensiones de contacto y de flexión disponibles en la literatura, uno de los más utilizados hoy en día en la industria es el incluido en la conocida norma ISO-6336 [11]. En este método, la tensión de contacto se determina mediante la teoría de Hertz, simulando el contacto entre dientes de engranaje mediante el contacto entre dos cilindros perfectamente alineados, cuyos radios coinciden con los radios de curvatura de las superficies de los engranajes en el punto de contacto. Por otra parte, las tensiones de flexión se determinan aproximando el comportamiento del diente al de una viga en voladizo, y aplicando la ley de Navier. En esta norma, el incremento de las tensiones producido como consecuencia de la desalineación del engrane se tiene en cuenta mediante el factor de distribución longitudinal de la carga, denotado por $K_{H\beta}$. Este factor se define como el cociente entre la intensidad de carga máxima y la intensidad de carga media.

En la norma se proponen dos métodos distintos para el cálculo de este factor, ambos expuestos en profundidad en este trabajo:

- (i) El primero de ellos, y el que conlleva una mayor precisión en los resultados, consiste en un método iterativo basado en la teoría de la fundación elástica de Winkler.
- (ii) El segundo es un método analítico, que se basa en la hipótesis de que las distintas deformaciones de los elementos que componen la transmisión producen una separación de las superficies de los dientes de los engranajes que se incrementa linealmente a lo largo del ancho de cara, cuando ésta se mide en la dirección del plano de acción.

Por su simplicidad, es este último método el que se utiliza habitualmente en la industria. No obstante, las simplificaciones que se asumen para su aplicación pueden llevar a errores en el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga.

En este trabajo, el método analítico propuesto por la norma se ha utilizado para realizar un extenso estudio de la evolución del factor de distribución longitudinal de la carga con distintos parámetros de diseño de la transmisión. El estudio se ha basado en una transmisión de engranajes cilíndricos rectos, sobre la que se han realizado variaciones de los valores de:

- (i) Diámetro del eje del piñón (3 valores).
- (ii) Ancho de cara de los engranajes (4 valores).
- (iii) Longitud de los ejes que soportan a los engranajes (4 valores).
- (iv) Posición relativa de montaje de los engranajes sobre los ejes (11 valores).

En total, se han considerado 456 casos de estudio distintos. Para cada caso, el factor de distribución longitudinal de la carga se ha calculado a partir del método analítico propuesto en la norma y partir del análisis de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión. La comparación entre los resultados obtenidos por ambos métodos ha permitido obtener algunas conclusiones de interés sobre cómo y en qué medida los parámetros estudiados afectan al factor de distribución longitudinal de la carga, siendo las más remarcables las siguientes:

- (i) El factor de distribución longitudinal de la carga tiende a disminuir a medida que se incrementa el diámetro de los ejes de los engranajes. El incremento de rigidez que supone el aumento del diámetro de los ejes hace que las desalineaciones del engrane se reduzcan, favoreciendo un mejor reparto de la carga.

- (ii) El factor de distribución longitudinal de la carga tiende a aumentar a medida que se incrementa el ancho de cara de los engranajes. Cuando el ancho de cara del engranaje es pequeño, el factor de distribución longitudinal de la carga obtenido a partir del método analítico propuesto por la norma tiende a ser menor que el obtenido a partir del modelo de elementos finitos. Este efecto se invierte cuando el ancho de cara tiende a ser grande.
- (iii) El factor de distribución longitudinal de la carga tiende a aumentar a medida que se incrementa la longitud de los ejes que soportan a los engranajes. Cuando los ejes son cortos, los resultados obtenidos a partir del método analítico propuesto por la norma tienden a converger con los obtenidos a partir del modelo de elementos finitos. A medida que la longitud de los ejes crece, las diferencias entre los resultados de ambos métodos crecen.
- (iv) Se observa que el factor de distribución longitudinal de la carga aumenta a medida que los engranajes se desplazan de la posición central del eje. El valor del factor de distribución longitudinal de la carga alcanza un máximo cuando se calcula por el método de los elementos finitos. Sin embargo, este máximo no se alcanza al calcularlo mediante el procedimiento descrito en la norma.

Como conclusión a este estudio, se han elaborado unas gráficas, mostradas en la figura 5.18, en las que considerando el cociente entre el ancho de cara de los engranajes y longitud de los ejes, y la posición de montaje de los engranajes sobre los ejes, permiten estimar las diferencias relativas máximas y mínimas entre ambos modelos, obtenidas a partir de los estudios realizados. Estas gráficas pueden ser de utilidad para el diseñador de engranajes, como complemento al método analítico propuesto en la norma para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga.

Conclusiones sobre el modelo semianalítico propuesto para la determinación de la distribución de presión de contacto en transmisiones de engranajes

Los métodos semianalíticos para el cálculo tensional representan una alternativa intermedia entre los métodos analíticos y los métodos numéricos: son capaces de superar algunas de las limitaciones que tienen los métodos analíticos, pero con costes computacionales generalmente inferiores a los de los métodos numéricos. Por este motivo, a menudo se han utilizado para resolver el problema de contacto entre dientes de engranaje. No obstante, entre otras limitaciones, los métodos semianalíticos encontrados en la literatura no permiten contemplar la influencia que tienen sobre el estado tensional

las desalineaciones de los engranajes producidas por las deformaciones elásticas de los ejes bajo carga.

Para subsanar esta importante limitación, en este trabajo se ha planteado un nuevo método semianalítico para el cálculo de la distribución de presión de contacto en transmisiones de engranajes. El objetivo principal de este nuevo método es incluir la capacidad de considerar la desalineación de los engranajes que se produce debido a la deformación de los ejes bajo carga. La idea básica del método propuesto es la utilización de un algoritmo iterativo que desacople la resolución del problema de contacto entre dientes de engranaje de la determinación de la desalineación de los engranajes producida por la deformación de los ejes bajo carga. La investigación realizada para la implementación de este método se ha estructurado en tres partes principales:

- (i) Propuesta de un método semianalítico genérico para la resolución del problema de contacto entre dos sólidos sin fricción y de algoritmos computacionales que permitan su aplicación.
- (ii) Implementación de estrategias que permitan mejorar la eficiencia computacional del método semianalítico propuesto para resolver el problema de contacto.
- (iii) Implementación del método semianalítico propuesto para la resolución del problema de contacto en transmisiones de engranajes considerando la desalineación de los engranajes producida por la deformación de los ejes bajo carga.

El método utilizado para la resolución del problema de contacto ha sido el método de los coeficientes de influencia. En este método, el dominio del problema de contacto se discretiza en un conjunto de n elementos de presión. Coeficientes de influencia relacionan la presión que actúa sobre cada elemento de presión Δ_j ($j = 1..n$), con el desplazamiento que esta presión produce en el centroide de los elementos Δ_i ($i = 1..n$) de la discretización. La solución al problema de contacto se obtiene, en forma de distribución de presión, mediante métodos variacionales.

En este trabajo, los coeficientes de influencia en los que se basa el método se han calculado analíticamente mediante la superposición de la conocida relación de Boussinesq, que da solución al problema de una carga puntual aplicada en un semiespacio elástico. En función de la geometría considerada para los elementos de presión en los que se discretiza el problema, los procedimientos y las ecuaciones utilizadas para el cálculo de los coeficientes de influencia varían. En este trabajo se han considerado dos alternativas posibles para la geometría de los elementos de presión: triangular y rectangular.

La correcta utilización de la relación de Boussinesq para el cálculo de coeficientes de influencia requiere que la geometría de los sólidos en las cercanías de la zona de contacto

se pueda aproximar a un semiespacio elástico. Esta aproximación no siempre es posible, especialmente cuando los sólidos tienen superficies libres en las proximidades de la zona de contacto, entendida una superficie libre como aquella que produce una dimensión finita a la superficie de contacto. Cuando eso ocurre, en este trabajo se ha propuesto aproximar la geometría de los sólidos mediante la superposición de cuartos de espacio elásticos. Esta aproximación requiere la realización de ciertas modificaciones en el cálculo de los coeficientes de influencia determinados a partir de la relación de Boussinesq, que incrementan el coste computacional del método.

Puesto que el cálculo de los coeficientes de influencia de elementos de presión triangulares y rectangulares es una operación costosa, se ha contemplado la posibilidad de realizar una evaluación aproximada de los coeficientes de influencia. En esta aproximación, en lugar de considerar la deformación que se produce en el centroide de Δ_i debido a una distribución de presión uniforme aplicada sobre Δ_j , el coeficiente de influencia del elemento Δ_j sobre el elemento Δ_i se calcula considerando una carga puntual aplicada en el centroide de Δ_j , obteniéndose de esta forma una expresión más sencilla para su cálculo. Esta aproximación puede dar resultados satisfactorios siempre y cuando la magnitud del coeficiente de influencia aproximado sea pequeña en comparación al resto de coeficientes de influencia, permitiendo así una mejora en el coste computacional global del algoritmo. Además, se ha propuesto un criterio para gobernar la decisión de si el cálculo de un coeficiente de influencia se realiza de forma exacta o aproximada, basada en la especificación de un valor límite Ω_{max} para la relación entre un radio equivalente calculado a partir del área de Δ_j y la distancia entre Δ_j y Δ_i . Cuando Ω_{max} es mayor que dicha relación, el cálculo de dicho coeficiente de influencia se puede realizar de forma aproximada; en caso contrario, es necesario evaluarlo de forma exacta.

Se ha propuesto un algoritmo computacional que recoge todos los pasos necesarios para la aplicación de este método semianalítico para el estudio del contacto entre dos sólidos sin fricción. Este algoritmo permite:

- (i) Discretizar el dominio del problema de contacto en una malla uniforme de elementos de presión rectangulares o triangulares.
- (ii) Contemplar un máximo de dos superficies libres en cada uno de los dos sólidos que intervienen en el contacto.
- (iii) Calcular los coeficientes de influencia tanto de forma exacta como de forma aproximada.
- (iv) Resolver el problema de contacto por principios variacionales, proporcionando la distribución de presión de contacto, el área de contacto y la aproximación entre los cuerpos.

El algoritmo resultante se ha aplicado para resolver dos casos típicos de contacto: el contacto puntual entre una esfera y un plano, y el contacto lineal entre un cilindro y un plano. Los resultados obtenidos de estos análisis han permitido extraer las siguientes conclusiones:

- (i) El algoritmo propuesto es capaz de determinar la distribución de presión de contacto, el área de contacto y la aproximación entre sólidos. Comparados con los resultados obtenidos a partir de modelos de referencia, se puede decir que los resultados obtenidos por este algoritmo tienen un buen grado de precisión.
- (ii) Mientras que la precisión de los resultados obtenidos es similar, la utilización de elementos de presión rectangulares supone una ventaja computacional con respecto a la utilización de elementos de presión triangulares. Por este motivo, los elementos de presión rectangulares se utilizarán en el resto del trabajo.
- (iii) El cálculo de coeficientes de influencia de forma aproximada puede llevar asociada una reducción del coste computacional del algoritmo, pero habitualmente lleva también implícita una reducción de su precisión. Se ha propuesto una estrategia para una selección óptima del parámetro Ω_{max} . Esta estrategia permite reducir el coste computacional sin pérdidas significativas de la precisión.
- (iv) La precisión del algoritmo está relacionada con el número de elementos de presión considerados en el área de contacto. Un mayor número de elementos de presión implicará una mejora de la precisión. Por contra, se ha podido observar que el coste computacional del algoritmo se incrementa cuadráticamente con el número de elementos de presión. Por este motivo, la elección del número de elementos de presión presentes en la discretización del problema supondrá una decisión de compromiso entre precisión y coste computacional.

Con la finalidad de reducir su coste computacional, se ha propuesto una modificación del algoritmo de contacto que permite realizar un refinamiento adaptativo de la malla de elementos de presión, basado en las estructuras de datos *quadtree*. El refinamiento adaptativo se ha realizado en base a criterios de tasa máxima de la variación relativa (gradiente) de presión de contacto entre elementos de presión adyacentes (φ_{max}) y de nivel máximo de refinamiento permitido (L_{max}). Este algoritmo se ha aplicado a los mismos casos de estudio mencionados anteriormente, y los resultados obtenidos permiten concluir que:

- (i) El algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo es capaz de predecir las distribución de presión de contacto, el tamaño del área de contacto y la aproximación

entre los sólidos con la misma precisión que el planteamiento tradicional utilizando una malla uniforme.

- (ii) La precisión con la que el algoritmo calcula el área de contacto y la aproximación entre los sólidos de contacto depende únicamente del nivel máximo de refinamiento permitido (L_{max}).
- (iii) La precisión con la que el algoritmo calcula la presión máxima de contacto depende del gradiente máximo permitido para el algoritmo (φ_{max}).
- (iv) La utilización de la estrategia de refinamiento adaptativo supone una reducción del tiempo de cálculo empleado por el algoritmo en comparación con la aproximación tradicional utilizando una malla uniforme, que en ocasiones puede llegar hasta el 90%.

Por último, el algoritmo de contacto con refinamiento adaptativo se ha incluido dentro de un algoritmo que permite resolver el problema de contacto en transmisiones de engranajes teniendo en cuenta la desalineación natural de los engranajes. El algoritmo resuelve iterativamente el problema de contacto, actualizando en cada iteración la posición relativa de las superficies de contacto de los dientes del piñón y de la rueda, de acuerdo con la desalineación del engranaje calculada a partir de la deformación de los ejes. Entre iteración e iteración, el algoritmo determina el incremento de la desalineación de los engranajes, y cuando este incremento es menor que cierta tolerancia, el algoritmo se detiene y muestra los resultados en pantalla.

El funcionamiento de este algoritmo se ha demostrado con distintos diseños de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales. Los resultados obtenidos se han comparado con los resultados obtenidos a partir de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión, permitiendo obtener las siguientes conclusiones:

- (i) El algoritmo descrito permite determinar la distribución de presiones que se produce en transmisiones de engranajes considerando las deformaciones de los ejes de los engranajes bajo carga. En el caso de engranajes cilíndricos rectos, las desviaciones máximas con respecto a los resultados obtenidos a partir del modelo de elementos finitos no exceden el 9%. En transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales estas diferencias se incrementan, pudiendo llegar al 20% en los casos estudiados.
- (ii) El algoritmo descrito es capaz de determinar las desalineaciones que se producen en los engranajes debido a la deformación de los ejes bajo carga. En los casos estudiados, las desviaciones máximas respecto a las calculadas a partir del modelo de elementos finitos no exceden el 6%.

- (iii) La convergencia del método es rápida, lo que lo hace especialmente adecuado para etapas iniciales de diseño, en las que el tiempo computacional es muy valioso.

Mediante estos casos de estudio se ha demostrado que cuando el grado de cumplimiento de las hipótesis del método es elevado, los resultados obtenidos mediante este método semianalítico tienen un buen nivel de concordancia con los obtenidos a partir de un modelo de elementos finitos de la transmisión. Esto hace que el método pueda ser comparable al método de los elementos finitos en precisión, pero con un coste computacional propio de los métodos semianalíticos.

Conclusiones sobre las modificaciones propuestas en la geometría de los engranajes para compensar los efectos negativos de la desalineación del engrane

En transmisiones de engranajes cilíndricos, las desalineaciones del engrane hacen que la carga que se transmite en el contacto entre dientes de engranajes se reparta de forma no uniforme a lo largo del ancho de cara de los dientes. Esto produce incrementos de las tensiones de contacto y de las tensiones de flexión, que pueden llevar a un fin prematuro de la vida útil de la transmisión. Además, las desalineaciones del engrane llevan asociados otros tipos de efectos negativos, como el aumento de la generación de calor, la introducción de errores de transmisión, etc.

La modificación de las geometrías de los dientes de los engranajes es una práctica común en la industria. En la literatura se han propuesto distintos tipos de modificaciones de los dientes de engranaje, cada una de ellas con un propósito concreto. Habitualmente, estas modificaciones consiguen mejorar un aspecto del funcionamiento de la transmisión, pero al mismo tiempo, pueden empeorar otros.

En este trabajo se ha propuesto un procedimiento de modificación de las geometrías de los dientes de los engranajes cilíndricos rectos, cuyo objetivo principal es compensar los efectos negativos de las desalineaciones del engrane que se producen como consecuencia de las deformaciones de los ejes bajo carga. Por tanto, el propósito principal de esta modificación ha sido conseguir que en condiciones de trabajo, cuando los engranajes están desalineados, la distribución de la carga transmitida en el contacto sea tan uniforme como sea posible.

La base de esta modificación consiste en la generación de la geometría del piñón utilizando una cremallera de corte cuya posición está desalineada con respecto a su posición teórica. El objetivo de desalinear la cremallera de corte es generar una geometría del

piñón compensada, de tal manera que cuando los ejes que soportan a los engranajes se deformen, la acción entre los dientes del piñón compensado y de la rueda sea prácticamente conjugada. Por tanto, las magnitudes de desalineación impuestas en la cremallera de corte corresponden a las magnitudes de desalineación que tiene la rueda con respecto al piñón en condiciones de trabajo, bajo la acción del par nominal. Se han considerado tres tipos de desalineación:

- (i) Desalineación de los engranajes en el plano de paso ($\Delta\gamma_d$).
- (ii) Desalineación de los engranajes en el plano axial ($\Delta\nu_d$).
- (iii) Variación de la distancia entre centros de los engranajes ($\Delta x_d, \Delta y_d$).

Estas desalineaciones se pueden determinar de distintas maneras, pero en este trabajo se ha favorecido la utilización de un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión.

Para ilustrar su funcionamiento, este método de compensación se ha aplicado a una transmisión de engranajes cilíndricos rectos. La transmisión se ha analizado utilizando un modelo avanzado de elementos finitos de la misma, considerando distintas geometrías compensadas del piñón. Los resultados obtenidos permiten concluir que:

- (i) Cuando se utiliza un piñón con geometría modificada se consigue una distribución de carga más uniforme que cuando se utiliza un piñón con geometría estándar.
- (ii) El mejor reparto de la carga repercute en una disminución de las tensiones máximas de contacto y de flexión, que se extiende a todo el ciclo de engrane.
- (iii) En la generación de la geometría compensada del piñón, la influencia de la desalineación de la cremallera de corte en el plano de paso ($\Delta\gamma_d$) es elevada, mientras que la desalineación en el plano axial ($\Delta\nu_d$) tiene una influencia reducida.
- (iv) Al utilizar una geometría compensada para el piñón, se consigue una distribución uniforme de la carga cuando la transmisión trabaja a par nominal. Por debajo de este par, la distribución de carga se vuelve menos uniforme, aunque los efectos negativos de esta distribución no uniforme son poco relevantes, pues las tensiones disminuyen con la reducción de la carga.

La generación de los piñones con geometría compensada se ha completado con la instalación de cremalleras de corte con perfiles modificados, que incluyen el abombamiento parcial y total del perfil. Mediante estas modificaciones se consigue, además de reducir las tensiones de contacto y de flexión, prediseñar la función de error de transmisión en

ausencia de carga. De esta manera, se puede prediseñar una función de error de transmisión en ausencia de carga que tienda a compensar a la función del error de transmisión bajo carga, obteniéndose valores inferiores en el error de transmisión total.

Estas nuevas geometrías se han analizado utilizando un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión, a lo largo de dos ciclos completos de engrane. Como resultado de estos análisis, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- (i) Mediante el uso de geometrías compensadas modificadas para el piñón, la reducción de las tensiones máximas de contacto y de flexión conseguida con la geometría compensada se mantiene.
- (ii) La modificación de los perfiles de evolvente conlleva un incremento de los errores de transmisión en ausencia de carga.
- (ii) Escogiendo los niveles adecuados de abombamiento de los perfiles, se consigue que el error de transmisión en ausencia de carga y bajo carga tiendan a compensarse, reduciéndose de esta forma el error de transmisión total. Se ha ilustrado la elección de la cantidad óptima de abombamiento, que se realiza mediante procesos iterativos.

8.2 Trabajos futuros

A continuación se enumeran algunos trabajos a desarrollar en el futuro para completar el trabajo presentado en esta tesis:

- (i) En este trabajo se ha conseguido tener en cuenta el comportamiento elástico de los ejes en los análisis tensionales de transmisiones de engranajes, cuando éstos se realizan a través de métodos analíticos, semianalíticos y numéricos. En un futuro, sería interesante poder completar estos análisis incluyendo el comportamiento elástico de los rodamientos y de sus apoyos. Es posible que en diseños de la transmisión en los que la rigidez del conjunto formado por los ejes y los engranajes sea elevada, la influencia de la deformación de estos elementos sobre el estado tensional del engrane cobre especial importancia.
- (ii) En este trabajo se ha estudiado el factor de distribución longitudinal de la carga. Este factor se utiliza en los métodos analíticos utilizados para determinar las tensiones de contacto y de flexión en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales bajo carga. Tiene en cuenta los incrementos que se producen, con respecto a la tensión nominal, en las tensiones de flexión y de contacto debido

- a las desalineaciones del engrane. Tradicionalmente, este factor se define como el cociente entre la intensidad de carga máxima y la intensidad de carga media. En cambio, su significado real representa el cociente entre la tensión máxima (de flexión o de contacto), y la tensión nominal. Resultaría interesante extender la comparación realizada en este trabajo para tener en cuenta esta definición alternativa del factor de distribución longitudinal de la carga, y ver en qué medida existe una relación real entre una definición y la otra.
- (iii) En este trabajo se ha descrito un modelo semianalítico para el cálculo de la distribución de presión que se produce sobre la superficie de los engranajes como consecuencia del contacto, teniendo en cuenta las deformaciones de los ejes bajo carga. Como se ha descrito anteriormente, la resolución del problema de contacto se ha realizado utilizando el método de los coeficientes de influencia. Los coeficientes de influencia se han calculado a partir de la relación de Boussinesq, con ciertas modificaciones, de manera que la geometría de los dientes de engranaje se aproximan mediante la superposición de dos cuartos de espacio elásticos. No obstante, estos coeficientes se pueden completar para que además de tener en cuenta la deformación local de los dientes de engranaje que se produce como consecuencia del contacto, tengan en cuenta también las deformaciones del diente debido a su flexión, así como las deformaciones debido a la torsión del cuerpo del engranaje. La inclusión de estos comportamientos incrementaría las capacidades y la precisión del modelo.
- (iv) El modelo semianalítico presentado en este trabajo tiene como objetivo principal la determinación de la distribución de presión de contacto en la posición más desfavorable del ciclo de engrane, que es cuando la carga se transmite a través de una única pareja de dientes. Para poder realizar el análisis de contacto en todo el ciclo de engrane, sería necesario implementar la posibilidad de contemplar el contacto de forma simultánea en más de un diente. Si bien esta operación no representa ninguna dificultad adicional, y es compatible con los algoritmos presentados, es necesaria una investigación más profunda del comportamiento de este modelo en dicha situación.
- (v) Se ha propuesto un procedimiento de modificación de los dientes de los engranajes cilíndricos rectos que permite compensar los efectos negativos de la desalineación de los engranajes producida por las deformaciones de los ejes bajo carga. Resultaría interesante extender este procedimiento de modificación a transmisiones de engranajes cilíndricos helicoidales, y realizar una investigación sobre las consecuencias de aplicar esta modificación en este tipo de engranajes.

Bibliografía

- [1] Stephen Radzevic. *Theory of gearing*. CRC Press, Florida, 2012.
- [2] D.T. Jelaska. *Gears and Gear Drives*. Wiley, 2012.
- [3] J. M. McCarthy and Sohm G. S. *Geometric Design of Linkages*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 2011.
- [4] P. Childs. *Mechanical Design, 2nd ed.* Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2004.
- [5] G.M. Maitra. *Handbook of Gear Design*. Tata McGraw-Hill, 1994.
- [6] T.J. Dolan and E.L. Broghamer. *A Photoelastic Study of Stresses in Gear Tooth Fillets*. Engineering Experiment Station bulletin: Engineering Experiment Station. University of Illinois, 1942.
- [7] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985. Cambridge Books Online.
- [8] Standard ISO 6336-2. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Technical Report Part 2, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [9] Standard ISO 6336-3. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Technical Report Part 3, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [10] ANSI/AGMA 2001-D04. Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth. Technical report, American gear manufacturers association, Alexandria, USA, 2004.
- [11] Standard ISO 6336-1. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Technical Report Part 1, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.

- [12] Standard ISO 6336-5. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Technical Report Part 5, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [13] R. Budynas and K. Nisbett. *Shigley's Mechanical Engineering Design, 8th ed.* McGraw-Hill, New York, 2006.
- [14] R.L. Norton. *Machine Design, 4th ed.* Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, NJ, 2010.
- [15] D.R. Houser, J. Harianto, and D. Talbot. Gear mesh misalignment. *Gear solutions*, 6:34–43, 2006.
- [16] C. Weber and K. Banaschek. The deformation of loaded gears and the effect on their load-carrying capacity. part 5. Technical Report 6, Department of Scientific and Industrial Research, 1950.
- [17] A. Kubo. Stress condition, vibrational exciting force, and contact pattern of helical gears with manufacturing and alignment error. *J Mech Des Trans ASME*, 100(1): 77–84, 1978.
- [18] J. Haigh and J.N. Fawcett. Effects of misalignment on load distribution in large facewidth helical gears. *Journal of MultiBody Dynamics, Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, 217(2):93–98, 2003.
- [19] C.R. Das, S.K. Albert, A.K. Bhaduri, and S.K. Ray. Failure analysis of a pinion. *Engineering Failure Analysis*, 12(2):287–298, 2005.
- [20] M. A. Hotait, D. Talbot, and A. Kahraman. An Investigation of the Influence of Shaft Misalignments on Bending Stresses of Helical Gear With Lead Crown. In *Volume 7: 10th International Power Transmission and Gearing Conference*, volume 7, pages 929–937. ASME, 2007.
- [21] M. Hotait and A. Kahraman. Experiments on root stresses of helical gears with lead crown and misalignments. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 130(7):0745021–0745025, 2008.
- [22] M.A. Hotait, A. Kahraman, and T. Nishino. An investigation of root stresses of hypoid gears with misalignments. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 133(7), 2011.
- [23] M. Pau, B. Leban, A. Baldi, and F. Ginesu. Experimental contact pattern analysis for a gear-rack system. *Meccanica*, 47(1):51–61, 2012.
- [24] S.S. Patil, S. Karuppanan, I. Atanasovska, and A.A. Wahab. Contact stress analysis of helical gear pairs, including frictional coefficients. *International Journal of Mechanical Sciences*, 85:205–211, 2014.

- [25] C. Gosselin, L. Cloutier, and Q.D. Nguyen. A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears. *Mechanism and Machine Theory*, 30(3):433–450, 1995.
- [26] F.L. Litvin, J.-S. Chen, J. Lu, and R.F. Handschuh. Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 118(4):561–567, 1996.
- [27] G.I. Sheveleva, A.E. Volkov, and V.I. Medvedev. Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 42(2):198–215, 2007.
- [28] I. Gonzalez-Perez, J.L. Iserte, and A. Fuentes. Implementation of hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact. *Mechanism and Machine Theory*, 46(6):765–783, 2011.
- [29] W. Lewis. Investigation of the Strength of Gear Teeth. In *Proceeding of the Engineers Club*. Philadelphia, PA, 1893.
- [30] J. I. Pedrero, A. Rueda, and A. Fuentes. Determination of the ISO tooth form factor for involute spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*, 34(1):89–103, 1999.
- [31] J.I. Pedrero, A. Fuentes, and M. Estrems. Approximate method for the determination of the bending strength geometry factor for external spur and helical gear teeth. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 122(3):331–336, 2000.
- [32] M.A.Sahir Arıkan. Direct calculation of AGMA geometry factor J by making use of polynomial equations. *Mechanics Research Communications*, 29(4):257–268, 2002.
- [33] R. Errichello. Bending stress in gear teeth having circular arc profiles - part 1 analysis. *American Society of Mechanical Engineers (Paper)*, (77 -DET-52), 1977.
- [34] M.-H. Chen and W.-J. Wu. Bending stress in gear teeth for variable surface pressure distribution. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 167(1):182–202, 1992.
- [35] E. J. Wellauer and A. Seireg. Bending strength of gear teeth by cantilever-plate theory. *Journal of Engineering for Industry*, 82(3):213–220, 1960.

- [36] T. Tobe and K. Inoue. Longitudinal load distribution factor of helical gears. *Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design*, 107(1):17–24, 1985.
- [37] JD Smith. Estimation of the static load distribution factor for helical gears. *Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part C-Journal Of Mechanical Engineering Science*, 209(3):193–199, 1995.
- [38] G. Marunic. Comparison of solid spur gear face load factors. In *Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures - Proceedings of the 16th European Conference of Fracture*, pages 1229–1230, 2006.
- [39] I Atanasovska and V Nikolic. 3D spur gear FEM model for the numerical calculation of face load factor. *Mechanics, automatic control and robotics*, (6):131–143, 2006.
- [40] D.C. Feng. An accurate method for calculating load distribution factor kb of involute gears. *Key Engineering Materials*, 339:458–462, 2007.
- [41] J. J. Kalker and Y. Van Randen. A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems. *Journal of Engineering Mathematics*, 6(2):193–206, April 1972.
- [42] J. Boussinesq. Application des potentials a l’etude de l’equilibre et du mouvement des solides elastiques. 1885.
- [43] V. Cerruti. Mem. fis. mat. 1882.
- [44] J.M. de Mul, J.J. Kalker, and B. Fredriksson. The contact between arbitrarily curved bodies of finite dimensions. *Journal of Tribology*, 108(1):140–148, 1986.
- [45] R. Guilbault. A fast correction for elastic quarter-space applied to 3d modeling of edge contact problems. *Journal of Tribology*, 133(3), 2011.
- [46] P. Somprakit and Huston R. L. Contact stresses in gear teeth - a new method of analysis. Technical Report 91-C-001, NASA, june 1991.
- [47] P.K. Mahanta and L. Nayak. Non-hertzian approach to predict pressure distribution in gear tooth contact problem. *Journal of Scientific and Industrial Research*, 59:400–406, 2000.
- [48] R. Guilbault, C. Gosselin, and L. Cloutier. Express model for load sharing and stress analysis in helical gears. *Journal of Mechanical Design*, 127(6):1161–1172, 2005.

- [49] R. Guilbault, C. Gosselin, and L. Cloutier. Helical gears, effects of tooth deviations and tooth modifications on load sharing and fillet stresses. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 128(2):444–456, 2006.
- [50] C.H. Wink and A.L. Serpa. Performance assessment of solution methods for load distribution problem of gear teeth. *Mechanism and Machine Theory*, 43(1):80–94, 2008.
- [51] C.H. Wink and A.L. Serpa. Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 219(5):501–509, 2005.
- [52] S.-H. Wu and S.-J. Tsai. Contact stress analysis of skew conical involute gear drives in approximate line contact. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9):1658–1676, 2009.
- [53] H. Linke. *Stirnradverzahnung*. Hanser, 1994.
- [54] N. Pop, S. Cretu, and A. Tufescu. Non Hertzian Contact Model for Tooth Contact Analysis of Spur Gear with Lead Crowning. *Applied Mechanics and Materials*, pages 351–356, October 2014.
- [55] M. Guingand, J.P. de Vaujany, and Y. Icard. Fast three-dimensional quasi-static analysis of helical gears using the finite prism method. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 126(6):1082–1088, 2004.
- [56] J.J. Coy, D.P. Townsend, and E.W. Zaretsky. Gearing. Technical Report 84-C-15, NASA, dec 1985.
- [57] R.F. Handschuh and F.L. Litvin. A method for determining spiral-bevel gear tooth geometry for finite element analysis. Technical Report 91-C-020, NASA, aug 1991.
- [58] F.L. Litvin, A. Fuentes, I. Gonzalez-Perez, L. Carvenali, K. Kawasaki, and R.F. Handschuh. Modified involute helical gears: Computerized design, simulation of meshing and stress analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(33-34):3619–3655, 2003.
- [59] A. Fuentes, J.L. Iserte, I. Gonzalez-Perez, and F.T. Sanchez-Marin. Computerized design of advanced straight and skew bevel gears produced by precision forging. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(29-32):2363–2377, 2011.

- [60] J. Argyris, A. Fuentes, and F.L. Litvin. Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(11-12):1057–1095, 2002.
- [61] F.L. Litvin and A. Fuentes. *Gear geometry and applied theory; 2nd ed.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [62] M. Hotait. *A Theoretical and Experimental Investigation on Bending Strength and Fatigue Life of Spiral Bevel and Hypoid Gears.* PhD thesis, Graduate School of The Ohio State University, Columbus, 2011.
- [63] A. Kawalec, J. Wiktor, and D. Ceglarek. Comparative analysis of tooth-root strength using iso and agma standards in spur and helical gears with fem-based verification. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 128(5):1141–1158, 2006.
- [64] M. Kolivand and A. Kahraman. A load distribution model for hypoid gears using ease-off topography and shell theory. *Mechanism and Machine Theory*, 44(10):1848–1865, 2009.
- [65] G.D. Bibel, A. Kumar, and S. Reddy. Contact stress analysis of spiral bevel gears using nonlinear finite element static analysis. Technical Report 106176, NASA, june 1993.
- [66] K. Mao. Gear tooth contact analysis and its application in the reduction of fatigue wear. *Wear*, 262(11-12):1281–1288, 2007.
- [67] Sandeep Vijayakar. Combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(3):525–545, 1991.
- [68] S.-C. Hwang, J.-H. Lee, D.-H. Lee, S.-H. Han, and K.-H. Lee. Contact stress analysis for a pair of mating gears. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(1-2):40–49, 2013.
- [69] S. Li. Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears. *Mechanism and Machine Theory*, 43(12):1557–1584, 2008.
- [70] S. Li. Gear contact model and loaded tooth contact analysis of a three-dimensional, thin-rimmed gear. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 124(3):511–517, 2002.

- [71] Shuting Li. Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications. *Mechanism and Machine Theory*, 42(1):88–114, January 2007.
- [72] Shuting Li. Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears. *Mechanism and Machine Theory*, 42(6):698–726, June 2007.
- [73] S. Li. Effects of misalignment error, tooth modifications and transmitted torque on tooth engagements of a pair of spur gears. *Mechanism and Machine Theory*, 83:125–136, 2015.
- [74] I. Atanasovska and V. Nikoli-Stanojevi. Influence of addendum modification coefficient on the gear's load capacity. In *Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures - Proceedings of the 16th European Conference of Fracture*, pages 787–788. Kluwer Academic Publishers, 2006.
- [75] I Atanasovska. Influence of stiffness and base pitch deviation on load distribution between tooth pairs and involute gear load capacity. *Machine Design*, pages 259–264, 2007.
- [76] I. Atanasovska, R. Mitrović, D. Momčilović, and A. Subic. Analysis of the nominal load effects on gear load capacity using the finite-element method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 224(11):2539–2548, November 2010.
- [77] Y.-C. Chen and C.-B. Tsay. Stress analysis of a helical gear set with localized bearing contact. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(8):707–723, 2002.
- [78] E. Mermoz, J. Astoul, M. Sartor, J.M. Linares, and A. Bernard. A new methodology to optimize spiral bevel gear topography. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 62(1):119–122, 2013.
- [79] S. Barone, L. Borgianni, and P. Forte. Evaluation of the effect of misalignment and profile modification in face gear drive by a finite element meshing simulation. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 126(5):916–924, 2004.
- [80] C.H. Wink. Tooth root stresses of helical gear pairs with unequal and offset face widths. In *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, volume 8, pages 121–126, 2011.
- [81] M.R. Lias, M. Awang, and T.V.V.L.N. Rao. A numerical fem solution of gear root stress in offset axial mesh misalignment. *Applied Mechanics and Materials*, 393:375–380, 2013.

- [82] S. Prabhakaran, D.S. Balaji, and C. Joel. Stress analysis and effect of misalignment in spur gear. *International Journal of Applied Engineering Research*, 9(22):13061–13072, 2014.
- [83] D. Vecchiato. *Design and Simulation of Face-Hobbed Gears and Tooth Contact Analysis by Boundary Element Method*. PhD thesis, University of Illinois, Chicago, 2005.
- [84] A. Gakwaya, A. Cardou, and G. Dhatt. Evaluation of stresses and deflection of spur and helical gears by the boundary element method. In *American Society of Mechanical Engineers*, 1984.
- [85] H. Sun, D. Mavriplis, R.L. Huston, and F.B. Oswald. Comparison of boundary element and finite element methods in spur gear root stress analysis. pages 163–166, 1989.
- [86] Alfredo Cueva-Zepeda. Deflection of stepped shafts using macaulay functions. *Computer Applications in Engineering Education*, 4(2):109–115, 1996.
- [87] E.M. Odom and C. Egelhoff. Stepping through shaft-deflection calculations. *Machine Design*, 82(22):8–10, 2010.
- [88] C. Egelhoff and E.M. Odom. On calculating the slope and deflection of a stepped and tapered shaft. 2014.
- [89] J.N. Goodier S. Timoshenko. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 3rd edn. edition, 1951.
- [90] V.M. Faires. *Design of Machine Elements, 4th ed.* Macmillan, New York, 1965.
- [91] J.E. Shigley and C.R. Mischke. *Standard Handbook of Machine Design*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [92] A.D. Deutschman, W.J. Michels, and C.E. Wilson. *Machine Design - Theory and Practice*. Macmillan, New York, 1975.
- [93] A.H. Burr and J.B. Cheatham. *Mechanical Analysis and Design, 2nd ed.* Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, NJ, 1995.
- [94] E.C. Pestel and F.A. Leckie. *Matrix Methods in Elastomechanics*. McGraw-Hill, New York, 1963.
- [95] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and R.L. Taylor. *The Finite Element Method: The basis*. Referex Engineering. Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 9780750650496.
- [96] Wilson C.D. and M.W. Renfro. Shaft deflection—a very, very long example. 2013.

- [97] Takao Koide, Satoshi Oda, Shogo Matsuura, and Aizoh Kubo. Equivalent misalignment of gears due to deformation of shafts, bearings and gears (model proposal and development of calculation program). *JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, 46:1563–1571, 2003.
- [98] Mondher Ajmi and Philippe Velex. A model of simulating the quasi-static and dynamic behaviour of double helical gears. In *Proceedings of International Conference on Motion and Power Transmission*, Japan, 2001.
- [99] S.B. Dong, C. Alpdogan, and E. Taciroglu. Much ado about shear correction factors in timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 47(13):1651–1665, 2010.
- [100] G. R. Cowper. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 33:335, 1966.
- [101] N. Sanderson and R. Kitching. Flexibility of shafts with abrupt changes of section. *International Journal of Mechanical Sciences*, 20(3):189–199, 1978.
- [102] A. Yavari, S. Sarkani, and J.N. Reddy. On nonuniform euler-bernoulli and timoshenko beams with jump discontinuities: Application of distribution theory. *International Journal of Solids and Structures*, 38(46-47), 2001.
- [103] B. Biondi and S. Caddemi. Closed form solutions of euler-bernoulli beams with singularities. *International Journal of Solids and Structures*, 42(9-10):3027–3044, 2005.
- [104] G. Falsone. The use of generalised functions in the discontinuous beam bending differential equations. *International Journal of Engineering Education*, 18(3):337–343, 2002.
- [105] J.J. Rencis and H.T. Grandin Jr. Solving beam deflections problems using the traditional approach to solve axial and torsion problems. 2006.
- [106] W.H. Macaulay. Note on deflection of beams. *Messenger of mathematics*, 48:129–130, 1919.
- [107] R.J. Brungraber. Singularity functions in the solution of beam-deflection problems. *Journal of Engineering Education*, 155(9):278–280, 1965.
- [108] W. H. Wittrick. A generalization of macaulay's method with applications in structural mechanics. *AIAA Journal*, 3(2):326–330, 1965.
- [109] J. T. Weissenburger. Integration of discontinuous expressions arising in beam theory. *AIAA Journal*, 2(1):106–108, 1964.

- [110] N.G. Stephen. Macaulay's method for a timoshenko beam. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 35(4):285–292, 2007.
- [111] P. Dirac. *The principles of quantum mechanics, 4th ed.* Clarendon Press, Oxford, 1958.
- [112] J. Hedlund and A. Lehtovaara. Modeling of helical gear contact with tooth deflection. *Tribology International*, 40(4):613–619, 2007.
- [113] T. Lin, H. Ou, and R. Li. A finite element method for 3d static and dynamic contact/impact analysis of gear drives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(9-12):1716–1728, 2007.
- [114] J. Brauer. A general finite element model of involute gears. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(13-14):1857–1872, 2004.
- [115] C. Zanzi and J.I. Pedrero. Application of modified geometry of face gear drive. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(27-29):3047–3066, 2005.
- [116] F.L. Litvin, A. Fuentes, Q. Fan, and R.F. Handschuh. Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled formate generated spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 37(5):441–459, 2002.
- [117] A. Fuentes, R. Ruiz-Orzaez, and I. Gonzalez-Perez. Computerized design, simulation of meshing, and finite element analysis of two types of geometry of curvilinear cylindrical gears. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 272:321–339, 2014.
- [118] Randy Shih. *Introduction to Finite Element Analysis Using SolidWorks Simulation 2014.* SDC publications, Kansas City, 2014.
- [119] Dassault Systemes. *Analysis user's manual.* Simulia, Pantucket, 2010.
- [120] S. E. Benzley, E. Perry, K. Merkley, B. Clark, and G. Sjaardema. A comparison of all-hexahedral and all-tetrahedral finite element meshes for elastic and elastoplastic analysis. In *Proceedings, 4th International Meshing Roundtable*, pages 179–191. Sandia National Laboratories, 1995.
- [121] Michael Bussler and Anapathur Ramesh. Eight-node hexahedral element in fea of part designs. *Foundry Management and Technology*, 121(11):26–28, 1993.
- [122] A.O. Cifuentes and A. Kalbag. A performance study of tetrahedral and hexahedral elements in 3-d finite element structural analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 12(3-4):313–318, 1992.

- [123] J.C. Simo and M.S. Rifai. Class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(8):1595–1638, 1990.
- [124] Dassault Systemes. *Getting started with Abaqus*. Simulia, Pantucket, 2010.
- [125] Eugenio Oñate. *Structural Analysis by the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*. Springer, 2013.
- [126] A. F. Bower. *Applied mechanics of solids*. CRC press, 2009.
- [127] J.I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Artés, and J.A. Antona. Load distribution model along the line of contact for involute external gears. *Mechanism and Machine Theory*, 45(5):780–794, 2010.
- [128] V. Roda-Casanova, J.L. Iserte-Vilar, F. Sanchez-Marin, A. Fuentes-Aznar, and I. Gonzalez-Perez. Development and comparison of shaft-gear models for the computation of gear misalignments due to power transmission. In *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, volume 8, pages 279–287, 2011.
- [129] S.L. Harris. Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears. In *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, volume 172, pages 87–112. ASME, 1958.
- [130] W.D. Mark. *Performance-Based Gear Metrology: Kinematic - Transmission - Error Computation and Diagnosis*. Wiley, 2012. ISBN 9781118357897.
- [131] RW Gregory, SL Harris, and RG Munro. Dynamic behaviour of spur gears. *Proceedings of the institution of mechanical engineers*, 178(1):207–218, 1963.
- [132] H. Opitz. Noise of gears. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 263(1142):369–380, 1968. ISSN 0080-4614. doi: 10.1098/rsta.1968.0024.
- [133] William A. Bradley. How to design noise out of gears. *Machine Design*, 45(30):149–153, 1973.
- [134] D.B. Welbourn. Fundamental knowledge of gear noise - a survey. *Institution of Mechanical Engineers, Conference Publications*, pages 9–14, 1979. cited By 33.
- [135] Raymond J. Drago. How to design quiet transmissions. *Machine Design*, 52(28):175–181, 1980.
- [136] E. Wildhaber. Method of and machine for producing crowned teeth, July 31 1962. US Patent 3,046,844.

- [137] V. Simon. Load distribution in spiral bevel gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 129(2):201–209, 2007.
- [138] Y. Zhang and Z. Fang. Analysis of tooth contact and load distribution of helical gears with crossed axes. *Mechanism and Machine Theory*, 34(1):41–57, 1999.
- [139] G.A. Korn and T.M Korn. *Mathematics handbook for scientists and engineers*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [140] V. Spitas, G.A. Papadopoulos, C. Spitas, and T. Costopoulos. Experimental investigation of load sharing in multiple gear tooth contact using the stress-optical method of caustics. *Strain*, 47(SUPPL. 1):e227–e233, 2011.
- [141] I. Gonzalez-Perez, V. Roda-Casanova, and A. Fuentes. Modified geometry of spur gear drives for compensation of shaft deflections. *Meccanica*, 2015.
- [142] I. Gonzalez-Perez, V. Roda-Casanova, A. Fuentes, F.T. Sanchez-Marin, and J.L. Iserte. A finite element model for consideration of the torsional effect on the bearing contact of gear drives. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 134(7), 2012.
- [143] I. Gonzalez-Perez, A. Fuentes, V. Roda-Casanova, F. Sanchez-Marin, and J.L. Iserte. A finite element model for stress analysis of lightweight spur gear drives based on thin-webbed and thin-rimmed gears. In *Proceedings of the VDI international conference on gears*. VDI, 2013.
- [144] Standard ISO 6336-6. Calculation of load capacity of spur and helical gears. Technical Report Part 6, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2006.
- [145] S. Glodez and Z. Ren. Computational determination of the face load factor K-F beta for spur gears. In *Proceedings of the 5th International Design Conference*, pages 133–138, 1998. 5th International Design Conference, DUBROVNIK, CROATIA, MAY 19-22, 1998.
- [146] M Stegic and N Vrankovic. Assessment of the non-uniform load distribution on gear pair. In *PROCEEDINGS OF THE 6TH INTERNATIONAL DESIGN CONFERENCE: DESIGN 2000*, pages 787–792, 2000. 6th International Design Conference (DESIGN 2000), CAVTAT, CROATIA, MAY 23-26, 2000.
- [147] V. Senthil Kumar, D.V. Muni, and G. Muthuveerappan. Optimization of asymmetric spur gear drives to improve the bending load capacity. *Mechanism and Machine Theory*, 43(7):829–858, July 2008.

- [148] F. M. Khoshnaw and N. M. Ahmed. Effect of the load location along the involute curve of spur gears on the applied stress at the fillet radius. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 39(6):407–414, June 2008.
- [149] M. Hirt. *Einfluß der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern*. PhD thesis, Technische Universität München, 1976.
- [150] H. Strasser. *Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahnfußtragfähigkeit*. PhD thesis, Technische Universität München, 1984.
- [151] U. Brossmann. *Über den Einfluß der Zahnfußausrundung und des Schrägungswinkels auf Beanspruchung und Festigkeit schrägverzahnter Stirnräder*. PhD thesis, Technische Universität München, 1979.
- [152] ANSI/AGMA 2001-C95. Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth. Technical report, American gear manufacturers association, Alexandria, USA, 1995.
- [153] DIN 3990. Grundlagen für die tragfähigkeitsberechnung von gerad- und schrägstirnrädern. Technical report, Beuth Verlag GmbH, Berlin, Köln, 1987.
- [154] JGMA 6101-01. Calculation of bending strength for spur and helical gears. Technical report, Japan gears manufacturers association, Japan, 1988.
- [155] JGMA 6102-01. Calculation of surface durability. Technical report, Japan gears manufacturers association, Japan, 1989.
- [156] Z. Fang, X. Cao, and J. Zhang. Inverse evaluation of equivalent misalignment under real operating mode and redesign of aviation spiral bevel gears. *Zhongguo Jixie Gongcheng/China Mechanical Engineering*, 18(24):3001–3005, 2007.
- [157] P. Velez and L. Flamand. Dynamic response of planetary trains to mesh parametric excitations. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 118(1):7–14, 1996.
- [158] J. Hedlund and A. Lehtovaara. A parameterized numerical model for the evaluation of gear mesh stiffness variation of a helical gear pair. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 222(7):1321–1327, 2008.
- [159] T. Kiekbusch, D. Sappok, B. Sauer, and I. Howard. Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical fe models. *Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering*, 57(11):810–818, 2011.

- [160] Z. Chen and Y. Shao. Mesh stiffness of an internal spur gear pair with ring gear rim deformation. *Mechanism and Machine Theory*, 69:1–12, 2013.
- [161] J. Meagher, X. Wu, D. Kong, and C.H. Lee. A comparison of gear mesh stiffness modeling strategies. In *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, volume 3, pages 255–263, 2011.
- [162] Standard ISO 53. Cylindrical gears for general and heavy engineering - standard basic rack tooth profile. Technical report, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1998.
- [163] V. Roda-Casanova, F.T. Sanchez-Marin, I. Gonzalez-Perez, J.L. Iserte, and A. Fuentes. Determination of the iso face load factor in spur gear drives by the finite element modeling of gears and shafts. *Mechanism and Machine Theory*, 65:1–13, 2013.
- [164] M.B. Sánchez, J.I. Pedrero, and M. Pleguezuelos. Contact stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gear teeth. *Mechanism and Machine Theory*, 64:93–100, 2013.
- [165] A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge: University Press, 4th edn. edition, 1952.
- [166] G.M.L. Gladwell O.J. Svec. An explicit boussinesq solution for a polynomial distribution of pressure over a triangular region. *Journal of Elasticity*, 1(2):167–170, 1971.
- [167] A. E. H. Love. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 228(659-669):377–420, 1929.
- [168] James R. Dydo and Henry R. Busby. Elasticity solutions for constant and linearly varying loads applied to a rectangular surface patch on the elastic half-space. *Journal of Elasticity*, 38(2):153–163, February 1995.
- [169] E.J. Berger J. Li. A boussinesq-cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area. *Journal of Elasticity*, 63(2):137–151, 2001.
- [170] J.J. Kalker. Variational principles of contact elastostatics. *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*, 20(2):199–219, 1977.
- [171] C. Y. Poon and R. S. Sayles. Numerical contact model of a smooth ball on an anisotropic rough surface. *Journal of Tribology*, 116(2):194–201, 1994.

- [172] X. Tian and B. Bhushan. A numerical three-dimensional model for the contact of rough surfaces by variational principle. *Journal of Tribology*, 118(1):33–42, 1996.
- [173] K. Willner. Fully Coupled Frictional Contact Using Elastic Halfspace Theory. *Journal of Tribology*, 130(3):031405, 2008.
- [174] W.W. Chen and Q.J. Wang. A Numerical Static Friction Model for Spherical Contacts of Rough Surfaces, Influence of Load, Material, and Roughness. *Journal of Tribology*, 131(2):021402, 2009.
- [175] S. Liu and D. Y. Hua. Three-Dimensional Semiperiodic Line Contact–Periodic in Contact Length Direction. *Journal of Tribology*, 131(2):021408, 2009.
- [176] M. J. Hartnett. A general numerical solution for elastic body contact problems, 1980.
- [177] J. Li and E. J. Berger. A semi-analytical approach to three-dimensional normal contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 30(4):310–322, March 2003.
- [178] M. Hetényi. A method of solution for the elastic quarter-plane. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 27(2):289–296, 1960.
- [179] M. Hetényi. A general solution for the elastic quarter space. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 37 Ser E(1):70–76, 1970.
- [180] L.M. Keer, J.C. Lee, and T. Mura. Hetényi’s elastic quarter space problem revisited. *International Journal of Solids and Structures*, 19(6):497–508, 1983.
- [181] L.M. Keer, J.C. Lee, and T. Mura. A contact problem for the elastic quarter space. *International Journal of Solids and Structures*, 20(5):513–524, 1984.
- [182] H. Reusner. Druckflächenbelastung und ober flächenverschiebung im wälzkontakt von rotationskörpern, May 1977. Dissertation, University of Karlsruhe, West Germany.
- [183] D. Chaudhuri and A. Samal. A simple method for fitting of bounding rectangle to closed regions. *Pattern Recognition*, 40(7):1981–1989, 2007.
- [184] J. J. Kalker. Two algorithms for the contact problem in elastostatics. In *Proceedings International Symposium on Contact Mechanics and Wear of Rail-Wheel systems*, pages 103–120. Univ of Waterloo Press, Solid Mechanics Div, 1983.
- [185] R. A. Finkel and J. L. Bentley. Quad trees a data structure for retrieval on composite keys. *Acta Informatica*, 4(1):1–9, 1974.

-
- [186] H. Samet and R.E. Webber. Hierarchical data structures and algorithms for computer graphics. I: Fundamentals, 1987.
- [187] H. Samet. Neighbor finding techniques for images represented by quadtrees. *Computer Graphics and Image Processing*, 18(1):37–57, January 1982.
- [188] M. Yerry and M. Shephard. A Modified Quadtree Approach To Finite Element Mesh Generation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3(1):39–46, January 1983.
- [189] F. Sanchez-Marin, A. Fuentes, J.L. Iserte, and I. Gonzalez-Perez. A new geometrically adaptive approach for tooth contact analysis of gear drives. In *International gear conference*, volume 2, Aug. 2014.
- [190] V. Roda-Casanova, F. Sanchez-Marin, and J.L. Iserte. An approach for solving the contact problem in spur gear transmissions considering gear misalignments. In *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, volume 1, pages 001–001, 2015.
- [191] M.L. Novikov, 1956. USSR Patent No 109750.
- [192] F.L. Litvin, J. Lu, D.P. Townsend, and M. Howkins. Computerized simulation of meshing of conventional helical involute gears and modification of geometry. *Mechanism and Machine Theory*, 34(1):123–147, 1999.
- [193] F.L. Litvin, I. Gonzalez-Perez, A. Fuentes, K. Hayasaka, and K. Yukishima. Topology of modified surfaces of involute helical gears with line contact developed for improvement of bearing contact, reduction of transmission errors, and stress analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, 42(9-10):1063–1078, 2005.
- [194] B.-R. Höhn. Improvements on noise reduction and efficiency of gears. *Meccanica*, 45(3):425–437, 2010.