

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorat:

AUTOMÀTICA, ROBÒTICA I VISIÓ

Tesi Doctoral

**EL MODELO ELÉCTRICO DE CONDUCTANCIAS  
APLICADO AL ISOMORFISMO DE GRAFOS:  
EL MÉTODO DE LA ESTRELLA**

Manuel Igelmo Ganzo

Director: Alberto Sanfeliu Cortés

Septiembre de 2015



*A la memòria de*  
*Ángel Igelmo González*  
*(Palencia 1922-Barcelona 2000)*  
*i de*  
*Joan Amorós Ustrell*  
*(Barcelona 1925-L'Hospitalet de Llobregat 2010)*



# Agradecimientos

Sobre todo dejar constancia del agradecimiento a Alberto Sanfeliu por su infinita paciencia y por saber salir, en una ocasión, de un callejón sin salida y a Horst Bunke por sus inestimables puntos de vista y porque acuñó el término co-resistencia.

Por último, la sincera admiración y reconocimiento a todas las personas que han hecho y están haciendo posible L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.



# Resum

El primer objectiu proposat en la recerca d'aquesta tesi va ser seleccionar i desenvolupar un model (preferentment senzill) per als grafs de forma tal que, en el model, es pugui aplicar i utilitzar una teoria associada al mateix que sigui consolidada, madura, tancada i, en definitiva, acceptada per tots. D'aquesta forma, els resultats que s'obtenen a través del model són extrapolables als objectes modelitzats: els grafs. El segon objectiu proposat en la recerca, una vegada seleccionat i desenvolupat un model, va ser dissenyar i explotar una aplicació del model que permetés abordar el problema de l'isomorfisme de grafs. El tercer i últim objectiu va ser provar experimentalment el model i la aplicació.

El resultat del primer objectiu va ser la selecció i desenvolupament d'un model elèctric on aplica la Teoria de Circuits que compleix els requisits més amunt enunciats. Aquest model serà denominat com a "Model Elèctric de Conductàncies" (CEM en anglès). En el CEM els grafs es transformen en circuits elèctrics de paràmetres concentrats resistius purs (sense fonts, ni inductors, ni condensadors) conservant la topologia del graf. A partir d'aquest punt s'obren multitud de possibilitats amb només contemplar el CEM obtingut d'un o diversos grafs. La complexitat computacional de l'obtenció del CEM a partir d'un graf és sempre polinomial d'ordre dos segons el grau del graf, sent l'algorisme d'obtenció determinista, no iteratiu i no recursiu. Els grafs als quals es pot aplicar el CEM han de ser no dirigits (ponderats o no) i sense etiquetes als nodes. El resultat del segon objectiu va ser el disseny del "Mètode de l'Estel" (SM en anglès) que, a partir del CEM, permet abordar el problema obert de l'isomorfisme de grafs. Abans d'aplicar el SM s'obté el CEM de dos grafs tots dos de grau  $N$ , llavors el SM comença a partir dels dos circuits que modelen, cadascun, un graf. Com a fase prèvia al SM és convenient, però en tot cas opcional, realitzar un filtrat previ amb la finalitat de descartar els parells de grafs que, de forma evident, no podran ser isomorfs. La primera fase del SM consisteix en l'extracció de totes les resistències equivalents dels CEMs vistes des de cada parell de nodes de cada circuit resistiu pur (cadascun amb  $N(N - 1)/2$  valors). En aquesta fase ja s'està en condicions de detectar l'isomorfisme de forma binària excepte falsos positius, aquests seran aquells grafs que, encara no sent isomorfs, presentin el mateix conjunt de resistències equivalents. En una segona fase cadascun dels circuits elèctrics s'aproxima per un circuit elèctric en estel de  $N + 1$  nodes i  $N$  branques amb un resistor en cada branca. En aquesta aproximació s'han d'obtenir els valors de les  $N$  resistències de les branques de l'estel perquè es minimitzi l'error quadràtic mitjà (eqm) entre els valors de les resistències equivalents del circuit original i les resistències equivalents del circuit en estel. En una tercera fase, ordenant aquests valors, s'extreu el mapejat de l'isomorfisme. En la quarta i última fase, amb l'objectiu que el SM sigui exacte, es valida el mapejat obtingut ja que pot haver-se produït un fals positiu.

El SM és sempre exacte si s'arriba fins a la fase de validació. Si en les resistències de l'estel no hi ha valors repetits llavors té una complexitat computacional polinomial d'ordre tres segons el nombre de nodes que, d'altra banda, els experiments corroboren és la majoria dels casos. Però si existeixen valors repetits, el SM ja no té complexitat computacional polinomial, i passa a ser factorial però, en tot cas, ja no segons  $N$  sinó segons el nombre màxim de repeticions que es poden produir en els valors de les resistències de les branques de l'estel. Encara així, de la resta de nodes es pot obtenir el mapejat parcial (gairebé total) amb complexitat computacional polinomial pel que, almenys, el SM no malgasta recursos temporals. Per últim, cal dir que els resultats experimentals han estat satisfactoris.



# Resumen

El primer objetivo propuesto en la investigación de esta tesis fue seleccionar y desarrollar un modelo (preferentemente sencillo) para los grafos de forma tal que, en el modelo, se pueda aplicar y utilizar una teoría asociada al mismo que sea consolidada, madura, cerrada y, en definitiva, aceptada por todos. De esta forma, los resultados que se obtienen a través del modelo son extrapolables a los objetos modelizados: los grafos. El segundo objetivo propuesto en la investigación, una vez seleccionado y desarrollado un modelo, fue diseñar y explotar una aplicación del modelo que permitiera abordar el problema del isomorfismo de grafos. El tercer y último objetivo fue probar experimentalmente el modelo y la aplicación.

El resultado del primer objetivo fue la selección y desarrollo de un modelo eléctrico en donde aplica la Teoría de Circuitos que cumple los requisitos más arriba enunciados. Este modelo será denominado como “Modelo Eléctrico de Conductancias” (CEM en inglés). En el CEM los grafos se transforman en circuitos eléctricos de parámetros concentrados resistivos puros (sin fuentes, ni inductores, ni condensadores) conservando la topología del grafo. A partir de este punto se abren multitud de posibilidades con sólo contemplar el CEM obtenido de uno o varios grafos. La complejidad computacional de la obtención del CEM a partir de un grafo es siempre polinomial de orden dos según el grado del grafo, siendo el algoritmo de obtención determinista, no iterativo y no recursivo. Los grafos a los que se puede aplicar el CEM deben ser no dirigidos (ponderados o no) y sin etiquetas en los nodos. El resultado del segundo objetivo fue el diseño del “Método de la Estrella” (SM en inglés) que, a partir del CEM, permite abordar el problema abierto del isomorfismo de grafos. Antes de aplicar el SM se obtiene el CEM de dos grafos ambos de grado  $N$ , entonces el SM comienza a partir de los dos circuitos que modelan, cada uno, un grafo. Como fase previa al SM es conveniente, pero en todo caso opcional, realizar un filtrado previo con el fin de descartar los pares de grafos que, de forma evidente, no podrán ser isomorfos. La primera fase del SM consiste en la extracción de todas las resistencias equivalentes de los CEMs vistas desde cada par de nodos de cada circuito resistivo puro (cada uno con  $N(N - 1)/2$  valores). En esta fase ya se está en condiciones de detectar el isomorfismo de forma binaria salvo falsos positivos, estos serán aquellos grafos que, aún no siendo isomorfos, presenten el mismo conjunto de resistencias equivalentes. En una segunda fase cada uno de los circuitos eléctricos se aproxima por un circuito eléctrico en estrella de  $N + 1$  nodos y  $N$  ramas con un resistor en cada rama. En esta aproximación se han de obtener los valores de los  $N$  resistores de las ramas de la estrella para que se minimice el error cuadrático medio (ecm) entre los valores de las resistencias equivalentes del circuito original y las resistencias equivalentes del circuito en estrella. En una tercera fase, ordenando dichos valores, se extrae el mapeado del isomorfismo. En la cuarta y última fase, con el objetivo de que el SM sea exacto, se valida el mapeado obtenido ya que puede haberse producido un falso positivo.

El SM es siempre exacto si se llega hasta la fase de validación. Si en las resistencias de la estrella no hay valores repetidos entonces tiene una complejidad computacional polinomial de orden tres según el número de nodos que, por otro lado, los experimentos corroboran es la mayoría de los casos. Pero si existen valores repetidos, el SM ya no tiene complejidad computacional polinomial, y pasa a ser factorial pero, en todo caso, ya no según  $N$  sino según el número máximo de repeticiones que se pueden producir en los valores de las resistencias de las ramas de la estrella. Aún así, del resto de nodos se puede obtener el mapeado parcial (casi total) con complejidad computacional polinomial por lo que, al menos, el SM no malgasta recursos temporales. Por último, hay que decir que los resultados experimentales han sido satisfactorios.



# Summary

The first objective proposed in the research of this thesis was the select and develop a (preferably simple) model for graphs, thus, the results obtained through the model may be extrapolated to the modeled objects: graphs. The theory associated with the model has to be consolidated, mature, closed and, therefore, accepted by all. The second objective proposed in the research, once selected and developed a model, was the design of an application of the model that would address the graph isomorphism problem. The third and final objective was to experimentally test the model and the application.

The first objective resulted in the selection and development of an electric model in which applies the Circuit Theory meeting the requirements above mentioned. This model will be called “Conductance Electrical Model” (CEM). In the CEM graphs are transformed into electrical circuits of pure resistive concentrated parameters (without sources, inductors or capacitors) preserving the topology of the graph. From this point opens lots of possibilities with only contemplate the CEM obtained from one or more graphs. The computational complexity of obtaining of the CEM of a graph is always polynomial of order two according to the graph degree. Obtaining the CEM is always deterministic (it is not probabilistic, is not recursive and is not iterative). Graphs (weighted or not) that apply the CEM should be undirected and unlabeled nodes. The second objective resulted in the design of the “Star Method” (SM) which, from the CEM, allows to approach the open problem of isomorphism of graphs. Before applying the SM gets the CEM of two graphs of degree  $N$ , then SM begins from the two circuits that model, each one of them, a graph. It is advisable (but in any case optional) to perform a previous filter before starting the SM in order to discard pairs of graphs that, clearly, they may not be isomorphic. The first phase of the SM consists of obtaining all the equivalent resistance of the CEMs views from each pair of nodes in each pure resistive circuit (each with  $N(N - 1)/2$  values). At this stage already is if the graphs are isomorphic in binary form except false positive, these are those graphs which, despite not being isomorphic, present the same set of equivalent resistance. In a second phase each of electrical circuits is approximated by an electrical circuit in star with  $N + 1$  nodes and  $N$  branches (with a resistor in each branch). In this approach, they have get the values of the  $N$  resistors of the branches of the star so that minimizes the mean square error (mse) between the values of the equivalent resistance of the original circuit and circuit star equivalent resistances. In a third phase, ordering such values, the mapping of the isomorphism is obtained. In the fourth and final phase the retrieved mapping is validated so that SM is exact (may be caused by a false positive).

SM is always exact if it reaches the phase of validation. If the resistances of the star does not have values repeated then it has a polynomial computational complexity of order three according to the number of nodes that, on the other hand, experiments corroborate is the majority of the cases. But if there are repeated values, SM has no polynomial computational complexity, going to be factorial but, in any case, not as  $N$  but according to the maximum number of repetitions that occur in the values of the resistances of the branches of the star. Even so, the rest of the nodes can be obtained (almost complete) partial mapping with polynomial computational complexity so that, at least, the SM no wasted temporal resources. Finally, it must be said that the experimental results have been satisfactory.



# Prólogo

No existe un ente tan cándido y a la vez tan rebelde como los grafos. La sensación que producen cuando se comienza a profundizar en los grafos es la de su sencillez lo cual induce a creer, erróneamente, que todo sobre ellos está escrito y cerrado. Pero comienza a aparecer la sospecha de su rebeldía cuando se empieza a consultar la literatura al respecto: es ingente, dilatada en el tiempo y variada. Luego los grafos no son tan candidos como parecían y no está dicho todo sobre ellos y ni mucho menos está el tema cerrado. La sospecha se confirma y aparece, como nueva sensación, la curiosidad que es uno de los motores de la investigación científica. Será menester dosificar esta curiosidad porque fácilmente puede derivar en obsesión debido a las décadas de investigación sobre aspectos que al día de hoy siguen abiertos.

Cabe destacar el isomorfismo de grafos. ¿Cómo es posible que un problema de enunciado tan sencillo y simple no tenga respuesta haciendo correr ríos de tinta? ¿Cómo es posible que ni tan siquiera se sepa si puede existir una o varias condiciones que sean necesarias y suficientes para el isomorfismo de grafos en un tiempo razonable? Es el sueño de cualquier investigador responder a las anteriores preguntas, es seguro que su nombre pasaría a los anales de la investigación científica pero, por el momento, también es seguro que, el problema sigue abierto para que alguien, que vendrá detrás, tenga la enorme satisfacción de dar con la respuesta.

Dejando los sueños para otro día y tocando con los pies en el suelo se ha pretendido aportar una contribución más “ingenieril”. Hay una norma no escrita en el “arte” de la ingeniería que viene a decir que si en la resolución de un problema se obtienen diferentes soluciones (o subsoluciones) todas ellas igual de factibles, entonces la mejor de ellas es siempre la más sencilla. Si además se añade que delante de un problema en donde la solución exacta no aparece entonces se da por bienvenida cualquier solución aproximada (mejor dicho cercana a la exacta), entonces queda justificada la presente tesis.

Desde luego que el objetivo fijado de antemano (buscar un modelo para los grafos que permita atacar el isomorfismo de grafos) era extraordinariamente ambicioso. Es evidente que este objetivo no ha sido alcanzado ya que, si así hubiera sido, estarían tañendo las campanas por la gloria de haberlo conseguido. No obstante, la satisfacción es enorme en tanto que el método presentado en esta tesis es absolutamente original y novedoso desde el principio, dando un resultado siempre exacto en tiempo razonable, aunque en algunas ocasiones el resultado ofrecido es parcial (pero casi total).

Finalmente se ha de decir que el autor, con el presente documento, no pretende sólo tener una herramienta que le permita defender este trabajo ante un tribunal y que después quede olvidado en una estantería (ahora son virtuales, pero antes eran físicas). El júbilo sería grande si el presente texto sirviese como un punto de partida a otros estudiantes y futuros investigadores. Si alguno de ellos llega a leer este documento tenga bien seguro que a la hora de redactarlo se ha pensado en ella/él.



# Índice general

Agradecimientos	v
Resum	vii
Resumen	ix
Summary	xi
Prólogo	xiii
Índice general	xviii
Lista de figuras	xix
Lista de tablas	xxi
Lista de algoritmos	xxiii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	1
1.3 Publicaciones . . . . .	2
1.4 Visión general . . . . .	2
1.5 Estructura del texto . . . . .	4
<b>2 Nociones de Teoría de Grafos</b>	<b>7</b>
2.1 Introducción . . . . .	7
2.2 Definiciones básicas en grafos . . . . .	7
2.2.1 Grafo . . . . .	7
2.2.2 Subgrafo . . . . .	9
2.2.3 Grafo dirigido y no dirigido . . . . .	10
2.2.4 Grafo ponderado . . . . .	10
2.2.5 Componentes conexas de un grafo . . . . .	11
2.3 Caracterización matricial de un grafo . . . . .	13
2.3.1 Matriz de adyacencia . . . . .	14
2.3.2 Matriz de incidencia . . . . .	15
2.3.3 Laplaciana . . . . .	16
2.4 Grafos notables . . . . .	16
2.5 Isomorfismo de grafos . . . . .	17
2.5.1 Isomorfismo y matrices de adyacencia . . . . .	18
2.5.2 Isomorfismo y relación de equivalencia . . . . .	20
2.5.2.1 Relación $\mathcal{R}$ de equivalencia . . . . .	20
2.5.2.1.1 Propiedad reflexiva. . . . .	20

2.5.2.1.2	Propiedad simétrica. . . . .	21
2.5.2.1.3	Propiedad transitiva. . . . .	21
2.5.2.2	Clases de equivalencia . . . . .	22
2.5.2.3	Conjunto Cociente . . . . .	22
2.5.2.4	Representante canónico . . . . .	22
2.5.3	Invariantes . . . . .	23
2.5.4	Automorfismo . . . . .	24
2.5.5	Isomorfismo y transformaciones de grafos . . . . .	24
2.6	Caso particular: Grafo en estrella . . . . .	25
2.7	Conclusiones . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Estado del arte del emparejamiento de grafos</b>	<b>31</b>
3.1	Introducción . . . . .	31
3.2	Emparejamiento exacto de grafos . . . . .	33
3.2.1	Casos particulares de emparejamiento exacto en tiempo polinomial . . . . .	33
3.2.2	Caso general de emparejamiento exacto . . . . .	35
3.2.2.1	Enfoque utilizando matrices de permutación . . . . .	35
3.2.2.2	Enfoque utilizando árboles de búsqueda . . . . .	36
3.2.2.3	Enfoque utilizando la teoría de grupos . . . . .	38
3.3	Emparejamiento inexacto . . . . .	39
3.3.1	Métodos basados en un árbol de búsqueda . . . . .	39
3.3.2	Métodos basados en optimización iterativa . . . . .	40
3.3.3	Métodos espectrales . . . . .	40
3.3.4	Distancia de edición . . . . .	41
3.3.5	Algoritmos genéticos . . . . .	43
3.4	Conclusiones . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Aspectos de interés de Teoría de Circuitos</b>	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	45
4.2	Caracterización de un dispositivo eléctrico . . . . .	45
4.3	Caracterización de un circuito eléctrico resistivo . . . . .	46
4.3.1	Matrices de adyacencia de conductancias (resistencias) de un circuito resistivo . . . . .	46
4.3.2	Matriz Indefinida de Admitancias (Impedancias) de un circuito resistivo . . . . .	47
4.3.3	Matriz Definida de Admitancias (Impedancias) de un circuito resistivo . . . . .	48
4.4	Métodos de análisis sistemático de un circuito eléctrico . . . . .	49
4.4.1	Método de los nodos . . . . .	49
4.5	Numeración de los nodos antes y después de referenciar . . . . .	50
4.6	Resistencia equivalente . . . . .	50
4.7	Representación de las resistencias equivalentes . . . . .	55
4.8	Conclusiones . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Modelo Eléctrico de Conductancias de un grafo</b>	<b>59</b>
5.1	Introducción . . . . .	59
5.2	Obtención del CEM . . . . .	60
5.2.1	Función de paso . . . . .	61
5.2.2	Caracterización del grafo modelado mediante la MIA . . . . .	62
5.3	Inversión del CEM . . . . .	63
5.4	Ejemplos ilustrativos de la aplicación del CEM . . . . .	64
5.5	Conclusiones . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Aplicación del CEM al isomorfismo de grafos: Método de la Estrella</b>	<b>67</b>
6.1	Introducción . . . . .	67
6.2	Fase opcional: Filtrado previo . . . . .	68

6.3	Fase de detección: Obtención de las resistencias equivalentes . . . . .	70
6.3.1	Grafo completo de resistencias equivalentes . . . . .	70
6.4	Fase de aproximación: Obtención de un circuito en estrella . . . . .	72
6.4.1	Resistencias equivalentes del circuito en estrella . . . . .	72
6.4.2	Circuito en estrella aproximado . . . . .	78
6.4.3	Forma compacta de la pseudoinversa . . . . .	80
6.4.4	Propiedades de la pseudoinversa . . . . .	80
6.4.5	Interpretación del proceso . . . . .	83
6.4.6	Representación de una estrella . . . . .	88
6.5	Fase de mapeado: Comparación de las estrellas . . . . .	89
6.6	Fase de validación: Detección de falsos positivos . . . . .	90
6.7	Ejemplos ilustrativos de la aplicación del SM . . . . .	91
6.8	Conclusiones . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Características del SM</b>	<b>95</b>
7.1	Introducción . . . . .	95
7.2	Falsos positivos . . . . .	95
7.3	Complejidad computacional . . . . .	97
7.4	Conclusiones . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>101</b>
8.1	Introducción . . . . .	101
8.2	Confirmación experimental de la complejidad computacional . . . . .	101
8.3	Control de calidad y eficiencia . . . . .	102
8.4	Base de datos “Letter” . . . . .	103
8.4.1	Preparación de la base de datos . . . . .	103
8.4.2	Aplicación del SM . . . . .	103
8.4.3	Control de calidad . . . . .	105
8.5	Base de datos “Web” . . . . .	105
8.5.1	Preparación de la base de datos . . . . .	105
8.5.2	Aplicación del SM . . . . .	106
8.5.3	Control de calidad . . . . .	106
8.6	Conclusiones . . . . .	107
<b>9</b>	<b>Conclusiones y futuros trabajos</b>	<b>109</b>
9.1	Aspectos destacables . . . . .	110
9.2	Futuros trabajos . . . . .	110
9.2.1	Alternativas de obtención de las resistencias equivalentes . . . . .	111
9.2.2	Automorfismos en grafos . . . . .	111
9.2.3	Emparejamiento inexacto óptimo . . . . .	113
9.2.4	Extensión del CEM a grafos dirigidos . . . . .	115
9.2.5	Grafos perturbados . . . . .	115
9.2.6	Reiteración del CEM y del SM . . . . .	115
9.2.7	Representante canónico . . . . .	116
	<b>Referencias</b>	<b>129</b>
	<b>Anexos</b>	<b>131</b>
	<b>A Grafos ponderados y no ponderados</b>	<b>133</b>
	<b>B Estrella y matriz de adyacencia</b>	<b>135</b>
	<b>C Forma compacta de la pseudoinversa de <math>K</math></b>	<b>137</b>

<b>D</b>	<b>Compatibilidad del CEM y del SM con el isomorfismo</b>	<b>143</b>
<b>E</b>	<b>Inversión parcial del SM</b>	<b>145</b>
<b>F</b>	<b>Desglose por grados de la base de datos “Web”</b>	<b>151</b>
<b>G</b>	<b>Inversión total del SM</b>	<b>159</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>163</b>

# Lista de figuras

2.1	Ejemplo de hipergrafo. . . . .	9
2.2	Grafo genérico en estrella. . . . .	26
4.1	Obtención de la resistencia equivalente entre dos nodos de un circuito eléctrico. . . . .	50
4.2	Resistencia equivalente del mismo circuito cuando se reenumeran los nodos. . . . .	54
5.1	Extensión del modelo para un grafo dirigido mediante diodos . . . . .	60
5.2	Grafo de ejemplo de aplicación del CEM. . . . .	64
6.1	Diagrama de bloques del SM usando el CEM. . . . .	69
6.2	Grafo completo de resistencias equivalentes. . . . .	71
6.3	Circuito genérico de resistores en estrella de $N + 1$ nodos y $N$ resistores. . . . .	72
6.4	Ejemplos de aplicación del SM. . . . .	91
7.1	Ejemplo de grafo sin automorfismos pero con resistencias equivalentes repetidas. . . . .	99
8.1	Duración temporal normalizada ( $\tau_N$ ) del SM respecto del grado del grafo ( $N$ ). . . . .	102
9.1	Grafo canónico. . . . .	117
A.1	Grafo cuando se interpreta como no ponderado. . . . .	133
A.2	Grafo cuando se interpreta como ponderado. . . . .	134



# Lista de tablas

4.1	Resistencias equivalentes referidas a los nodos antes de fijar la referencia. . . . .	53
7.1	Complejidad computacional en cada fase del SM. . . . .	97
7.2	Complejidad computacional del SM según la situación. . . . .	98
8.1	Control de la calidad de los experimentos. . . . .	102
8.2	Desglose según el grado de los grafos de la base de datos “Letter”. . . . .	103
8.3	Desglose según el grado y el tamaño de los grafos de la base de datos “Letter”. . . . .	104
8.4	Creación de grafos isomorfos y emparejamientos en la base de datos “Letter”. . . . .	104
8.5	Resultados del SM obtenidos sobre la base de datos “Letter”. . . . .	105
8.6	Resultados del SM obtenidos sobre la base de datos “Web”. . . . .	106
F.1	Desglose por grados de la base de datos “Web”. . . . .	157



# Lista de algoritmos

6.1	Inicialización de la matriz de coeficientes $K$ . . . . .	78
6.2	Función que devuelve el valor de un elemento de la matriz $K^+$ . . . . .	83
6.3	Inicialización de la matriz pseudoinversa $K^+$ . . . . .	84
6.4	Validación del mapeado obtenido a efectos de detectar un posible falso positivo. . . . .	90



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

Es conocido que los grafos son usados en muchos campos como la química, bioquímica, genética, transporte, telefonía, redes de computadores, reconocimiento de voz, visión por computador, etc. [BS90] y si su uso no es masivo es debido a la existencia de problemas que aún permanecen abiertos como, por ejemplo, la comparación entre ellos. El trabajo presentado proviene del campo de la visión por computador; en este caso los grafos tienen los vértices y/o los arcos etiquetados [SAA<sup>+</sup>02] y además suelen tener un número elevado de vértices y/o arcos. Como ya se ha dejado entrever los grafos, como estructura de datos, tienen el gran inconveniente de que la comparación entre ellos requiere de unos tiempos de cálculo computacional prohibitivos por lo que existe una vasta y dilatada literatura sobre el tema que intenta encontrar métodos razonablemente rápidos que digan cuando dos grafos, que aún siendo no iguales, son idénticos, esto es, sean isomorfos y además, si procede, extraigan el mapeado entre los vértices. Los métodos para el emparejamiento de grafos o subgrafos están basados en técnicas enumerativas [MB98, UII76], operaciones de edición [NB06b, NB07, SF83], métodos espectrales [Ume98], expectación-maximización [RKH02], caminos aleatorios [GMS05a], algoritmos genéticos [CWH97] y aproximaciones probabilísticas [WH97].

### 1.2 Objetivos

Los objetivos fundamentales propuestos en este trabajo han sido tres:

1. Buscar, proponer, desarrollar y articular un modelo de forma tal que, cuando se aplique a los grafos, se puedan dar resultados sobre ellos a través de la teoría asociada al modelo. En la búsqueda de este modelo se ha impuesto explícitamente un requisito, siendo éste que la teoría asociada al modelo debería ser consolidada, madura, cerrada y, por lo tanto, aceptada universalmente con la prioridad de que, si fuese posible, dicha teoría sea sencilla.
2. Diseñar un método, utilizando el modelo, que aborde el problema del isomorfismo de grafos.
3. Comprobar experimentalmente la idoneidad del modelo adoptado y del método diseñado.

Como resultados de los dos primeros objetivos enunciados anteriormente se presenta y desarrolla en esta tesis el modelo seleccionado y un método, usando el modelo, que ataca el problema del isomorfismo de grafos. Estos son el “Modelo Eléctrico de Conductancias” (de aquí en adelante CEM<sup>1</sup>) para grafos no dirigidos y el “Método de la Estrella” (de aquí en adelante SM<sup>2</sup>) que aborda el problema del isomorfismo de grafos [ISF10]. Tanto el CEM como el SM son totalmente novedosos

---

<sup>1</sup>CEM del inglés “**C**onductance **E**lectrical **M**odel”.

<sup>2</sup>SM del inglés “**S**tar **M**ethod”.

y no derivan ni se inspiran en otros modelos o métodos existentes. Sin embargo, en [KR93] existe otra aproximación aparentemente similar pero orientada a definir una distancia resistiva para el emparejamiento de grafos, en todo caso la idea inicial es diferente porque las aristas son remplazadas por resistencias ( $\Omega$ ) y aquí las aristas son imperativamente reemplazadas por conductancias ( $S$ ). La teoría que aplica sobre el modelo escogido es la Teoría de Circuitos (véase entre otros [DL95]) que todo el mundo reconocerá, sin duda alguna, cumple los requisitos enunciados anteriormente. Respecto a la comprobación experimental (tercer objetivo) no hay más que decir que los resultados han sido satisfactorios.

El alcance de este trabajo es para grafos en general con el único requisito de que sean no dirigidos y sin etiquetas en los nodos. La contribución del presente trabajo está en el filtrado de grafos, descartando grafos no isomorfos siempre en tiempo polinomial de orden tres. En el caso de que este filtrado se efectúe contra una base de datos de grafos, entonces los grafos de esta base de datos pueden estar previamente modelizados con lo que la eficiencia del filtrado se incrementa.

## 1.3 Publicaciones

La primera presentación del CEM y del SM fue hecha en [ISF10].<sup>3</sup> En [IS12] se presentó una mejora que consistía en el cálculo de forma mucho más eficiente de la pseudoinversa utilizada en el SM. En [IS15] (pendiente de publicación) se expone en profundidad el CEM y el SM, culminando con la presentación de un método extraordinariamente eficiente para el cálculo de las resistencias de las ramas de la estrella que hace innecesario el uso de la pseudoinversa.<sup>4</sup> En esta última referencia se da un tratamiento orientado al filtrado de grafos y, además, son presentados los resultados experimentales que se discutirán más adelante en este mismo trabajo.

En resumen, las publicaciones al respecto son:

1. Igelmo, Manuel, Alberto Sanfeliu y Miquel Ferrer: A Conductance Electrical Model for representing and matching weighted undirected graphs. En Proceedings of the 2010 20th International Conference on Pattern Recognition, ICPR '10, páginas 958–961, Washington, DC, USA, Agosto 2010. IEEE Computer Society, ISBN 978-0-7695-4109-9. [ISF10]
2. Igelmo, Manuel y Alberto Sanfeliu: Compact form of the pseudo-inverse matrix in the approximation of a star graph using the Conductance Electrical Model (CEM). En Gimel'farb, Georgy, Edwin Hancock, Atsushi Imiya, Arjan Kuijper, Mineichi Kudo, Shinichiro Omachi, Terry Windeatt y Keiji Yamada (editores): Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition, volumen 7626 de Lecture Notes in Computer Science, páginas 539–547. Springer, Berlin Heidelberg, 2012, ISBN 978-3-642-34165-6. [IS12]
3. Igelmo, Manuel y Alberto Sanfeliu: Filtering graphs to check isomorphism and extracting mapping by using the Conductance Electrical Model (Not yet published). Submitted to Pattern Recognition, 2015. [IS15]

## 1.4 Visión general

Dado un grafo sin etiquetas en los nodos, no dirigido, de orden  $N$  y tamaño  $M$ , el CEM consistente básicamente en modelizar dicho grafo mediante un circuito eléctrico de parámetros concentrados resistivo puro (sin fuentes, capacidades o inductores), con  $N$  nodos y  $M$  resistores<sup>5</sup> cuyos valores

---

<sup>3</sup>En este artículo se afirma erróneamente que la complejidad computacional es  $O(N^2)$ , debería decir  $O(N^3)$ . Además, este artículo está enfocado a grafos ponderados cuando el método también es válido para grafos no ponderados sin modificación alguna del algoritmo.

<sup>4</sup>Este aspecto aún era desconocido cuando se redactó [IS12].

<sup>5</sup>Véase la nota 70 de la página 46.

dependerán de los pesos del grafo, ya sea éste ponderado o no ponderado (tomando en este último caso valores unitarios para todas las ramas). Tal circuito conserva íntegramente la topología del grafo de donde proviene y vendrá caracterizado por alguna herramienta que será proporcionada por la Teoría de Circuitos, tal y como se describirá con más detalle más adelante. Con esto último y, en este punto, ya se dispone (se tiene caracterizado) el modelo del grafo. La complejidad computacional de la obtención del CEM de un grafo cualquiera es siempre polinomial de orden dos según el número de nodos.

Con la intención de abordar el isomorfismo entre dos grafos, ambos del mismo grado  $N$ , se procede a obtener, mediante el CEM, un circuito resistivo puro por cada grafo. Acto seguido se aplica el SM para los circuitos obtenidos mediante el CEM, pero antes es muy conveniente someter a los dos grafos a un filtrado previo que permita descartar aquel par de grafos que, por razones muy evidentes, no podrán ser nunca isomorfos; no obstante, este filtrado previo, aunque muy conveniente, es opcional y no hace falta decir que si se opta por no aplicarlo el SM sigue siendo plenamente funcional. EL SM propiamente dicho, en una primera fase, extrae de cada circuito los valores de las  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes vistas desde cada par de nodos. Si los dos conjuntos de resistencia equivalentes con sus repeticiones no coinciden entonces los dos grafos categóricamente no serán isomorfos y el SM concluye aquí. En el caso contrario, coincidencia de los conjuntos de resistencias equivalentes con sus repeticiones salvo numeración de los nodos, el SM prosigue asumiendo que los dos grafos son isomorfos, aunque pueden existir casos de falsos positivos. Estos casos, no abundantes, de falsos positivos serán debidos a grafos que, aún no siendo isomorfos, presentarán el mismo conjunto de resistencias equivalentes con sus repeticiones salvo numeración de los nodos. A pesar de lo anterior, en esta fase ya se puede afirmar si los grafos son isomorfos salvo falsos positivos (o si se prefiere son candidatos al isomorfismo); de todas formas, si se llega hasta el final (fase de validación) en el SM se podrá dar una respuesta definitiva. En una segunda fase se aproxima cada circuito por un circuito en estrella con  $N + 1$  nodos y  $N$  ramas con un resistor en cada rama. La aproximación se ha de entender como la búsqueda de los  $N$  valores del circuito en estrella tal que minimicen simultáneamente el error cuadrático medio (ecm) de las  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes del circuito original respecto al mismo número de resistencias equivalentes del circuito en estrella aproximado. Una vez obtenidos los  $N$  valores de las ramas de cada circuito en estrella si se verifica que estos valores con sus repeticiones no coinciden entonces los grafos no son isomorfos y el SM concluye aquí. En una tercera fase las resistencias de los dos circuitos en estrella se ordenan, por ejemplo de menor a mayor, y se comparan obteniéndose el mapeado entre los nodos de las estrellas. En la cuarta y última fase este mapeado obtenido debe ser validado sobre los grafos originales ya que, como se ha comentado anteriormente, puede haberse producido un falso positivo.

Para el problema del isomorfismo de grafos el SM es siempre exacto aún habiendo falsos positivos ya que estos son detectados si el SM es llevado hasta el final (fase de validación). Con respecto a la complejidad computacional se ha de decir que si en las ramas de la estrella no aparecen valores de resistencias repetidos entonces la complejidad computacional del SM es polinomial de orden tres según el número de nodos ( $N$ ). En cambio, si aparecen en las ramas de la estrella valores repetidos (que no será el caso en la mayoría de las situaciones), entonces el SM deja de ser polinomial y pasa a ser factorial, pero, ya no según el valor de  $N$ , sino según el número máximo de repeticiones, siendo ello una reducción muy significativa aunque, en pocos casos, insuficiente.

Con el fin de contrastar la teoría con la práctica se han realizado multitud de experimentos (se dedica un capítulo entero a ello) y se adelanta que tanto el CEM como el SM han satisfecho experimentalmente las expectativas depositadas en ellos. Además, en los experimentos realizados, no se ha detectado ningún caso anómalo como repeticiones en las ramas de las estrellas o falsos positivos por lo que se puede afirmar que estos casos son escasos.

## 1.5 Estructura del texto

La división del texto en capítulos y anexos es como sigue.

El Capítulo 2 “Nociones de Teoría de Grafos” se ha incorporado con la intención de situar al lector en el contexto del trabajo. En él se expone un material básico pero seleccionado sobre Teoría de Grafos con el ánimo de facilitar una lectura del resto sin interrupciones. No se ha querido hacer un tratado exhaustivo dado que ocuparía demasiadas páginas, pero otra razón de más peso para no hacerlo es que estaría fuera de lugar. Es evidente que si se tiene un buen dominio sobre el tema este capítulo puede ser ignorado pero se aconseja no hacerlo dado que está enfocado para una rápida asimilación posterior del resto de la tesis.

El Capítulo 3 “Estado del arte del emparejamiento de grafos” complementa al anterior capítulo. Lo ideal hubiera sido elaborar un texto exhaustivo sobre los métodos y técnicas que abordan el emparejamiento (exacto e inexacto) de grafos pero después de cuatro décadas de investigación sobre el tema el material que existe es enorme. Por lo tanto, se ha optado por seleccionar las aportaciones producidas de forma muy compartimentada y destacando aquellas que han generado un gran impacto.

El Capítulo 4 “Aspectos de interés de Teoría de Circuitos” es de obligada incorporación ya que toda la teoría que sustenta el modelo es la Teoría de Circuitos. El capítulo se ha elaborado de forma que sólo se abordan aquellos aspectos que son necesarios para la comprensión del funcionamiento del CEM, así como la aplicación del SM, gracias a ello no será necesario discutir estos aspectos cuando sea presentado el CEM y el SM. Ni que decir tiene que el lector con conocimientos en la materia puede ignorar este capítulo, pero se recomienda no hacerlo ya que de esta manera no será necesario volver atrás cuando se presente el núcleo de la tesis.

En el Capítulo 5 “Modelo Eléctrico de Conductancias de un grafo” reside parte del núcleo de la tesis. En él se presenta a fondo el CEM.

En el Capítulo 6 “Aplicación del CEM al isomorfismo de grafos: Método de la Estrella” reside la otra parte del núcleo de la tesis. En él se presenta a fondo el SM.

En el Capítulo 7 “Características del SM” se realiza exclusivamente una discusión y análisis en profundidad de dos características del CEM y del SM: los falsos positivos y la complejidad computacional.

En el Capítulo 8 “Resultados experimentales” se dan los resultados experimentales de la aplicación práctica del SM sobre diversas bases de datos de grafos.

Por último, en el Capítulo 9 “Conclusiones y futuros trabajos” se sintetizan unas conclusiones junto con recomendaciones para futuros trabajos.

Los anexos aparecen exclusivamente en el mismo orden en que son referidos a lo largo del texto y tratan de los siguientes asuntos.

En el Anexo A “Grafos ponderados y no ponderados” se deja bien claro que los grafos ponderados y no ponderados son objetos diferentes. Los algoritmos aquí presentados no distinguen un tipo del otro y ello puede producir confusión.

En el Anexo B “Estrella y matriz de adyacencia” se realiza un estudio de la relación entre el isomorfismo de estrellas y sus respectivas matrices de adyacencia.

En el Anexo C “Forma compacta de la pseudoinversa de  $K$ ” se demuestra una fórmula que evita el cálculo de una pseudoinversa cuando se presentan unas características muy determinadas.

En el Anexo D “Compatibilidad del CEM y del SM con el isomorfismo” se demuestra que, al aplicar el CEM y el SM, las estrellas obtenidas “arrastran” el isomorfismo de los grafos originales y, además, lo hacen con el mismo mapeado.

En el Anexo E “Inversión parcial del SM” se discute la obtención de un grafo a partir de su modelo.

En el Anexo F “Desglose por grados de la base de datos “Web”” se da el listado de grafos de la base de datos “Web” por número de nodos. Dada su alta dispersión ha sido imposible compactarlo en una tabla.

En el Anexo G “Inversión total del SM” se demuestra que el SM no es invertible por lo que cualquier estudio que se pretenda realizar utilizando tal inversión no será viable.



# Capítulo 2

## Nociones de Teoría de Grafos

### 2.1 Introducción

En este capítulo no se encontrará un tratado sobre Teoría de Grafos, esto requeriría bastantes más páginas que las que hay en esta tesis, pero quizás una razón más importante para no hacerlo es que ello estaría fuera de lugar dada la excelente y abundante literatura existente al respecto. Aquí sólo se expone una selección básica del material relativo a la Teoría de Grafos imprescindible para la comprensión del resto con la finalidad de disponer de un documento autocontenido. Es muy difícil recomendar lecturas adicionales sobre el tema debido a la ingente literatura que existe pero pueden ser consultados [Bol98], [Die12], [Har69], [GR01], [Gou12], [Wil12] y/o [BM08] entre otros muchos. El lector que sea un experto en el tema puede omitir la lectura de este capítulo pero se aconseja no hacerlo dado que se hacen comentarios y se dan enfoques que serán muy útiles para la rápida asimilación del resto del trabajo. Por último, se advierte que el vocabulario utilizado por la comunidad científica sobre grafos no está unificado, llegando a darse casos en los que diferentes autores utilizan el mismo término con significados diferentes, o bien, para un mismo concepto diferentes autores utilizan diferentes términos.

Sirva la presente introducción para rendir tributo de admiración a Leonard Euler (1707-1783) padre de la Teoría de Grafos [Eul41] y a James Joseph Sylvester (1814-1897) que en [Syl78] acuñó el término “graph”.

### 2.2 Definiciones básicas en grafos

La extensa literatura sobre Teoría de Grafos está llena de definiciones diferentes pero que sustancialmente y evidentemente definen el mismo objeto con más o menos fortuna. En los siguientes subapartados se darán algunas definiciones básicas sobre grafos comenzando, como no podría ser otra manera, por la propia definición de grafo.

#### 2.2.1 Grafo

En general para disponer de una buena definición se debería utilizar, a su vez, otras definiciones que cuanto más elementales sean mejor. Teniendo en cuenta que un grafo está situado en la teoría conjuntista de Cantor y ligado al concepto de producto cartesiano de un conjunto consigo mismo se usará este ámbito para definir un grafo. Se define el producto cartesiano de  $V$  por  $W$  ( $V \times W$ ) como el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados  $(x, y)$  tales que  $x \in V$  y  $y \in W$ , habrá en

total  $\text{card}(V) \cdot \text{card}(W)$  pares ordenados en el producto cartesiano.<sup>6 7</sup> Se define una correspondencia como un subconjunto del producto cartesiano, habrá tantas correspondencias como subconjunto se puedan formar de  $V \times W$ , es decir,  $2^{\text{card}(V) \cdot \text{card}(W)}$  correspondencias. Todo lo anterior también se puede aplicar cuando  $V$  y  $W$  sean el mismo conjunto, se hablará, en este caso, del producto cartesiano de un conjunto consigo mismo ( $V^2$ ), bajo esta consideración se dirá grafo a cualquier correspondencia (un subconjunto cualquiera  $E \subseteq V^2$ ) del producto cartesiano de  $V$  consigo mismo,<sup>8</sup> habrá tantos grafos como correspondencias distintas se puedan formar en  $V^2$ , es decir,  $2^{(\text{card}(V))^2}$  grafos. Más formalmente tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.1.** *Sea  $V$  un conjunto finito y no vacío, se define un grafo ( $g$ ) como una correspondencia ( $E$ ) del producto cartesiano de  $V$  consigo mismo ( $E \subseteq V^2$ ). De forma breve se escribirá  $g = (V, E)$ .*

A los elementos del conjunto  $V$  se les denomina vértices, nodos o nudos y al número de ellos ( $\text{card}(V)$ ) grado del grafo. A los pares ordenados se les denomina arcos, aristas<sup>9</sup> y, en algunos contextos, ramas,<sup>10</sup> al número de ellos ( $\text{card}(E)$ ) tamaño del grafo. Si un grafo simple, sin lazos y no dirigido tiene grado  $N$  entonces el número máximo de aristas ( $M_{\text{máx}}$ ) será

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2}N(N - 1) \quad (2.1)$$

en cambio, para un grafo simple, sin lazos y dirigido el número máximo de arcos será el doble que el de aristas del supuesto anterior, esto es

$$M_{\text{máx}} = N(N - 1) \quad (2.2)$$

A los vértices que no son incidentes a ninguna arista se les denomina vértices aislados. Otro concepto, que será usado de forma intensiva más adelante, es el de vértice hoja (o simplemente hoja) que se define como el vértice que tiene exactamente grado uno.

No hace falta destacar lo básico de los conceptos utilizados para la anterior definición 2.1 de grafo, en contraposición a otras definiciones (pero que conducen al mismo objeto) que se pueden encontrar en la literatura sobre el tema. A continuación se muestran dos ejemplos textuales cualesquiera de definición de grafo dadas en [Bol98] y en [BM08] respectivamente.

**Definición 2.2.** *Un grafo  $G$  es un par ordenado de conjuntos disjuntos  $(V, E)$  tales que  $E$  es un subconjunto del conjunto de  $V^{(2)}$  de pares no ordenados de  $V$ .*

**Definición 2.3.** *Un grafo  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$  consiste en un conjunto  $V(G)$  de vértices y un conjunto  $E(G)$ , disjunto con  $V(G)$ , de aristas, junto con una función de incidencia  $\psi_G$  que asocia con cada arista de  $G$  un par no ordenado (no necesariamente distintos) de vértices de  $G$ .*

La definición 2.1 es más rigurosa (entre otras razones por ser más universal) y será por ello la que se seguirá en este trabajo salvo indicación en contra. Pero, en cambio, las definiciones del estilo de 2.2 y de 2.3 están más extendidas. Aunque se comentará más adelante es importante hacer notar que los grafos dados en la definición 2.1 son eminentemente dirigidos y los dados por las definiciones 2.2 y 2.3 son exclusivamente no dirigidos.

---

<sup>6</sup>Obsérvese que  $V \times W \neq W \times V$  al no ser que  $V = W$

<sup>7</sup>Con el mismo significado que  $\text{card}(\cdot)$  también es usada la notación  $|\cdot|$ , ambas para designar el número de elementos de un conjunto, en este documento se hará uso indistinto de una u otra forma.

<sup>8</sup>Es muy importante hacer notar que en la definición de grafo no se tiene en cuenta para nada la “naturaleza” de los elementos del conjunto  $V$  (estos elementos pueden ser “cualquier cosa”). Debido a ello es muy habitual enumerar dichos elementos y trabajar con el número asignado.

<sup>9</sup>Se adelanta que se suele reservar el término arco para grafos dirigidos y el término arista para grafos no dirigidos, aunque esta distinción no es seguida por algunos autores.

<sup>10</sup>En Teoría de Circuitos es muy utilizado el término rama.

Si en un grafo el par ordenado  $(x, y)$  con  $x \neq y$  forma parte de la correspondencia  $((x, y) \in E)$  se dice que el vértice  $x$  es incidente al vértice  $y$  (o más brevemente,  $x$  es incidente a  $y$ ) y se escribe  $x \sim y$  (o más brevemente  $xy$  si la claridad no queda comprometida). Si también es  $yx$  ( $(y, x) \in E$ ) entonces se dice simplemente que  $x$  y  $y$  son incidentes. Por otro lado, se dirá que un arco es incidente de  $x$  hacia  $y$  cuando  $xy$  ( $(x, y) \in E$ ). Si también es  $yx$  ( $(y, x) \in E$ ) se dice simplemente que la arista es incidente a  $x$  y  $y$ . Con esta notación es posible asignar nombres a los arcos, así, por ejemplo, con  $e = xy$  se denotará por  $e$  el arco que es incidente del vértice  $x$  al vértice  $y$ . Por último, si existe al menos un vértice  $x$  tal que  $xx$  ( $(x, x) \in E$ ) entonces se dice que el grafo presenta bucles o lazos.

En ocasiones es necesario considerar unos tipos de estructura que no encajan en ninguna de las definiciones de grafo dadas anteriormente pero que, en algunos contextos, es muy útil considerarlas como tales.<sup>11</sup> Se trata de admitir que puede existir más de un arco que una el vértice  $x$  hacia el vértice  $y$ , entonces se dirá que el grafo presenta multiarcos o multiaristas. Estos son los llamados multigrafos,<sup>12</sup> en contraposición al resto de grafos que se denominan grafos simples (obsérvese que un grafo que sea simple no es un impedimento para que presente lazos<sup>13</sup>). Otra estructura utilizada son los llamados hipergrafos, en ellos al menos una arista es incidente a más de dos vértices como se representa, a modo de ejemplo, en la figura 2.1. Finalmente, existen los grafos infinitos<sup>14</sup> en donde se admite que  $V$  es infinito pero numerable en contraposición a la definición 2.1. Los grafos que se contemplarán en este trabajo no serán ninguno de los enunciados en este párrafo, en lo que sigue, y salvo indicación en contra, sólo se considerarán grafos simples y sin lazos.

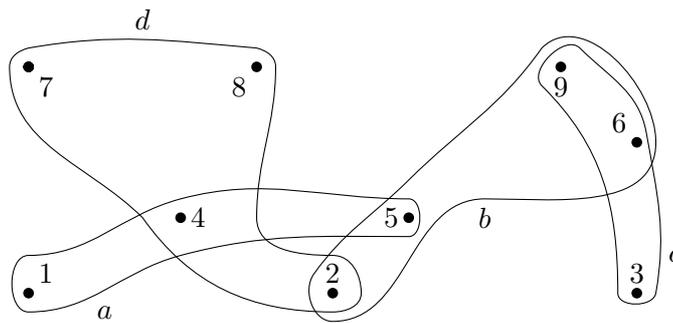


Figura 2.1: Un ejemplo de hipergrafo. Las aristas son  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Los vértices incidentes a la arista  $a$  son 1, 4 y 5; los incidentes a  $b$  son 2, 5, 6 y 9; los de  $c$  son 3, 6 y 9; y finalmente, los de  $d$  son 2, 4, 7 y 8.

### 2.2.2 Subgrafo

En consonancia con la definición 2.1, sea un grafo  $g$  que se obtiene al tomar una correspondencia  $E$  de  $V^2$  ( $E \subseteq V^2$ ). Ahora, considérese otro grafo  $h$  que se obtiene al tomar una correspondencia  $E_1$  de  $V_1^2$ . Si  $V_1 \subseteq V$  con  $V_1 \neq \emptyset$  y  $E_1 \subseteq E$  entonces se dice que  $h$  es un subgrafo de  $g$  siempre y cuando  $E_1$  sea tal que  $E_1 \subseteq V_1^2$ .

Con la misma notación del párrafo anterior se tiene que un caso particular de subgrafo es el subgrafo de  $g$  inducido por  $V_1$  (con  $V_1 \neq \emptyset$ ). En este subgrafo se toma como conjunto de aristas ( $E_1$ ) todas las posibles de  $g$ . Se hace notar que dado un conjunto  $V_1$  sólo hay un subgrafo de  $g$  inducido por  $V_1$  y se suele denotar por  $\langle V_1 \rangle$ .

Finalmente, y con la misma notación de los anteriores párrafos, se tiene otro caso particular de subgrafo es el subgrafo recubridor de  $g$ . En este subgrafo se toma  $V_1 = V$  y  $E$  puede ser cualquiera

<sup>11</sup>Pero se ha de extremar la prudencia en el sentido de que algunas propiedades que se cumplen en los grafos no lo harán en estas estructuras.

<sup>12</sup>Por ejemplo, el famoso problema de los siete puentes de Königsberg enunciado por Leonard Euler es un multigrafo.

<sup>13</sup>Aunque hay autores que imponen a un grafo la ausencia de lazos para catalogarlo de grafo simple.

<sup>14</sup>Este tipo de grafo es profusamente utilizado en teoría de colas usando las cadenas infinitas de Markov.

mientras cumpla las condiciones de subgrafo. Si el tamaño de  $g$  es  $M$  entonces existen  $2^M$  subgrafos recubridores de  $g$ .

### 2.2.3 Grafo dirigido y no dirigido

Como ya se ha dejado entrever en el apartado 2.2.1, estrictamente hablando la definición 2.1 da lugar a los llamados grafos dirigidos<sup>15</sup> en donde se puede producir la situación en la que el par  $(x, y)$  forme parte de la correspondencia pero el par  $(y, x)$  no, es decir, se tiene en cuenta que los pares son ordenados y por lo tanto  $(x, y) \neq (y, x)$ . No obstante, la correspondencia puede ser de tal naturaleza que puede suceder que sea cual fuere el par  $(x, y)$  perteneciente a la correspondencia el par  $(y, x)$  también pertenezca, se está, en este caso, ante un grafo no dirigido. Por lo tanto la definición 2.1 no excluye a los grafos no dirigidos; en otras palabras, un grafo no dirigido siempre puede ser interpretado como un grafo dirigido (pero la inversa no es cierta) y esto está incluido implícitamente en la definición 2.1. En cambio las definiciones del estilo de 2.2 y 2.3 excluyen, de entrada, a los grafos dirigidos, por lo que adolecen de la falta de universalidad del objeto definido. Sin embargo, esto no provoca mayores contratiempos ya que es suficiente con sustituir en dichas definiciones donde dice “pares no ordenados” por “pares ordenados” para alcanzar la universalidad de que adolecen. Resumiendo, los grafos no dirigidos siempre pueden ser interpretados como grafos dirigidos, en cambio no siempre se podrá transformar un grafo dirigido en un grafo no dirigido. Cuando en un grafo aparecen arcos y aristas mezclados el grafo recibe el nombre de grafo mixto aunque este concepto, aún siendo práctico, es poco ortodoxo.

En un grafo dirigido se define grado o valencia saliente del vértice  $k$  al número de arcos que empiezan en el vértice  $k$  y se denotará por  $d^+(k)$ , análogamente se define como grado o valencia entrante del vértice  $k$  al número de arcos que terminan en el vértice  $k$  y se denotará por  $d^-(k)$ . Para un grafo no dirigido la anterior distinción no tiene sentido y se hablará simplemente de grado o valencia del vértice  $k$  y se denotará por  $d(k)$ . En todo caso, para un grafo no dirigido, sería  $d(k) = d^+(k) = d^-(k)$  para  $\forall k = 1, 2, \dots, N$ .

Una representación gráfica habitual de los grafos consiste en dibujar los vértices mediante puntos (cuya posición y grosor es irrelevante) en un plano y en unir mediante una curva o segmento (cuyo grosor, forma, longitud y trayectoria son irrelevantes) acabando en una flecha los vértices si estos forman parte de la correspondencia, yendo la flecha de la primera componente a la segunda del par ordenado. Si el grafo es no dirigido se sustituye la flecha por un trazo. Es una costumbre bastante habitual, arraigada y popular confundir la representación gráfica de un grafo con el concepto mismo de grafo, debido a ello a la representación gráfica de un grafo también se la denomina grafo.

### 2.2.4 Grafo ponderado

La definición 2.1 corresponde a un grafo sin pesos o no ponderado. Es bastante habitual y muy útil en problemas reales trabajar con grafos a cuyos arcos o aristas se les asocia un valor numérico, estos son los llamados grafos con pesos o ponderados.

**Definición 2.4.** Si a un grafo  $g$  se le asocia una aplicación de sus arcos o aristas (denotados por sus vértices adyacentes) al conjunto de números reales positivos se dice que el grafo es ponderado. Esta aplicación es

$$\begin{aligned} f : g &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ e = xy &\longmapsto \omega_{xy} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si  $g$  es un grafo ponderado entonces al grafo que se obtiene al prescindir de sus pesos se denominará grafo asociado al grafo  $g$  y se denotará por  $g_o$ .<sup>16</sup> En un grafo asociado a un grafo dado se

---

<sup>15</sup>A los grafos dirigidos también se les denomina digrafos o grafos orientados.

<sup>16</sup>Esta definición sólo aplicará en el contexto de este trabajo.

retiene la topología y se prescinde de cualquier otra información. Es evidente que el grafo asociado a un grafo dado siempre existe y es único y que el grafo asociado a un grafo no ponderado es el propio grafo ( $g = g_o$ ). Por último, es trivial que es imposible reconstruir un grafo  $g$  si sólo se conoce el grafo asociado.

Se hace observar que todo grafo no ponderado puede ser visto como un grafo ponderado sin más que tomar en todos los arcos o aristas un peso unitario. Se adelanta que de lo anterior se hará un uso intensivo posteriormente, no obstante debe quedar claro que, de forma rigurosa, ambos tipos de grafos son conceptualmente distintos y por lo tanto no comparables (véase el Anexo A “Grafos ponderados y no ponderados” en la página 133 que clarifica este asunto).

Finalmente, se quiere dejar constancia de que, sobre todo en algunos ámbitos muy específicos, los grafos dirigidos y ponderados se denominan redes, en una red no es de extrañar que el conjunto imagen de la aplicación dada en la definición 2.4 pueda ser sustituido por un conjunto finito (por ejemplo, un subconjunto finito de los números enteros).

### 2.2.5 Componentes conexas de un grafo

Un grafo tiene una componente conexa cuando cualquier vértice es alcanzable o accesible desde todos los demás, entonces se dice que el grafo es conexo. Si ello no es posible entonces se dice que el grafo tiene más de una componente conexa o que el grafo es no conexo. La prueba descrita de conectividad en un grafo no tiene sentido aplicarla cuando el grafo tiene sólo un vértice, en este caso se conviene que el grafo es conexo. Hace falta precisar lo que se entiende por alcanzable o accesible por lo que se necesita la definición de camino,<sup>17</sup> esta es

**Definición 2.5.** *Un camino en un grafo es una secuencia alternada, no vacía y finita de vértices y arcos comenzado y terminando en un vértice de forma que cada arco es adyacente desde el vértice que le precede hacia el vértice que le sucede, esto es*

$$x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, \dots, x_{l-2}, e_{l-1}, x_{l-1}, e_l, x_l \quad (2.4)$$

En donde  $e_k = x_{k-1}x_k$  para  $\forall k = 1, 2, \dots, l$ . Este camino se denota por  $x_0 - x_l$ .

Si no es posible la ambigüedad en la secuencia (2.4) se puede omitir la subsecuencia de arcos, que siempre podrá ser deducida de la secuencia de vértices; esto siempre será posible si el grafo es simple. En cambio si se trata de un multigrafo tal ambigüedad (debido a los multiarcos) puede producirse y expresamente se debería especificar la subsecuencia de arcos. Si en la secuencia no se repite ningún vértice entonces el camino se denomina simple y si no se repite ninguna arista se denomina recorrido. Si el camino definido por la secuencia (2.4) es tal que aparecen todas las aristas una, y solamente una, vez el camino se denomina camino euleriano, si lo que aparece una, y solamente una, vez son todos los vértices entonces el camino se denomina camino hamiltoniano. Siempre cualquier camino, de cualquier tipo, es un subgrafo.

Cada camino tiene asociada una distancia que es el número de aristas, o bien, el número de vértices (incluidos los extremos) menos uno, por ejemplo, en la secuencia (2.4) la distancia sería  $l$ . Si el grafo es ponderado la distancia es la suma de los pesos de los arcos atravesados. En un grafo conexo y no dirigido la distancia mínima entre dos vértices ( $d(x, y)$ ) es una métrica ya que para cualesquiera vértices  $x, y$  y  $z$  de un grafo  $g$  cumplen que

1.  $d(x, y) \geq 0$  y  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (esta es la razón por la que el grafo debe ser no dirigido).
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  que es la denominada desigualdad triangular.

<sup>17</sup>En algunos textos, como por ejemplo [Bru09], se reserva la expresión “camino” exclusivamente para grafos dirigidos, utilizándose la expresión “cadena” para grafos no dirigidos. En este texto no se seguirá tal distinción utilizándose el término “camino” tanto para un tipo de grafo como para el otro.

Si el camino es tal que  $x_0 = x_l$ , en general, se denomina camino cerrado (cuando no es el caso anterior y es necesario explicitarlo se dice que el camino es abierto). Pero cuando se trata de un camino simple entonces recibe el nombre específico de ciclo (camino cerrado sin repetir vértices) y cuando se trata de un recorrido recibe el nombre específico de circuito (camino cerrado sin repetir arcos). Un ciclo será euleriano cuando todas las aristas aparecen en la secuencia una, y solamente una, vez y será un ciclo hamiltoniano cuando todas los vértices aparecen una, y solamente una, vez.<sup>18</sup>

Se hace notar que, para grafos no dirigidos, si existe un camino de  $x$  a  $y$  entonces existirá un camino inverso con la secuencia de vértices en orden inverso y si no existe un camino de  $x$  a  $y$  entonces tampoco existirá el camino inverso. En cambio, para grafos dirigidos la existencia de un camino de  $x$  a  $y$  no garantiza la existencia de un camino inverso ni que, en el caso de existir, sea con la secuencia inversa de los vértices (los caminos no tienen porque ser en orden inverso), además no se puede presuponer nada sobre la existencia de un camino de  $y$  a  $x$  en función de la existencia o no de un camino de  $x$  a  $y$ .

Con el preámbulo anterior, que supera lo estrictamente necesario, se está en condiciones de dar para un grafo no dirigido la definición de conexo.

**Definición 2.6.** *Un grafo no dirigido es conexo si para cualquier vértice existe un camino a cualquier otro vértice.*

En cambio, si el grafo es dirigido se distinguirá entre fuertemente y débilmente conexo. Será fuertemente conexo cuando desde cualquier vértice existe un camino a cualquier otro vértice y también exista el camino inverso. Si alguno de estos caminos sólo existe en un sentido entonces el grafo dirigido será débilmente conexo.<sup>19</sup> Entonces la definición 2.6 para grafos dirigidos es

**Definición 2.7.** *Un grafo dirigido es fuertemente conexo si para cualquier vértice existe un camino a cualquier otro vértice y también existe el camino inverso. Cuando exista al menos un par de vértices que sólo los una un camino en un sólo sentido entonces se dice que el grafo es débilmente conexo.*

Si se considera en un grafo  $g = (V, E)$ , de grado  $N$ , la relación  $\mathcal{R}$  en el conjunto  $V$  dada por el enunciado “... está unido por un camino (y también por el camino inverso) con ...” resulta que esta es una relación de equivalencia ya que es trivial demostrar que  $\mathcal{R}$  cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto se podrán definir unas clases de equivalencia, siendo cada una de ellas la formada por todos los vértices que están unidos entre sí mediante un camino (directo e inverso) y, por lo tanto, se podrá hablar del conjunto cociente denotado por  $V/\mathcal{R}$ .

El hecho de verificar esta relación de equivalencia permite establecer una partición de  $V$  dada por los subconjuntos  $V_1, V_2, \dots$ , y  $V_k$  para algún  $k$  entre 1 y  $N$  ambos inclusive ( $k \in \mathbb{N}$ ). Con todo esto en mente se tienen las dos definiciones siguientes.

**Definición 2.8.** *Se dice que un grafo  $g = (V, E)$ , de grado  $N$ , tiene  $k$  componentes conexas y se escribirá  $\kappa(g) = k$  cuando al considerar la relación de equivalencia “... está unido por un camino (y también por el camino inverso) con ...” se obtienen  $k$  subconjuntos de  $V$ , siendo estos subconjuntos,  $V_1, V_2, \dots$  y  $V_k$ , una partición de  $V$  para algún  $k$  tal que  $1 \leq k \leq N$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).*

**Definición 2.9.** *Con la misma notación que en la definición 2.8 se definen cada una de las  $\kappa(g)$  componentes conexas del grafo  $g$  como cada subgrafo  $g_i$  de  $g$  inducido por cada subconjunto  $V_i$  para  $i = 1, \dots, \kappa(g)$ .*

Obsérvese que decir que un grafo  $g$  es conexo es lo mismo que decir que tiene una componente conexa ( $\kappa(g) = 1$ ), y que decir que un grafo es no conexo es lo mismo que decir que tiene  $\kappa(g)$  componentes conexas con  $\kappa(g) \neq 1$ . Por otro lado, es trivial que si un grafo tiene grado  $N$  entonces

<sup>18</sup>Como ya se ha comentado en alguna ocasión, se advierte que no existe un consenso en los términos utilizados en las definiciones anteriores.

<sup>19</sup>Esta distinción no tiene sentido en un grafo no dirigido porque no podrá ser nunca débilmente conexo

el número de componentes conexas ha de ser un número perteneciente a los números naturales desde 1 hasta  $N$  ambos inclusive, para este valor máximo ( $N$ ) de componentes conexas el grafo sería un grafo vacío (todos los vértices aislados).

El tamaño de un grafo simple, sin lazos y no dirigido está acotado superiormente e inferiormente, las cotas son las dadas en el teorema siguiente.

**Teorema 2.1.** *Sea un grafo simple, sin lazos, no dirigido, de grado  $N$  y con  $k$  componentes conexas, entonces el tamaño del grafo ( $M$ ) cumple que*

$$M \leq \frac{1}{2}(N - k)(N - k + 1) \quad (2.5)$$

y simultáneamente que

$$M \geq N - k \quad (2.6)$$

La demostración del anterior teorema puede ser consultado en [Wil12] en las páginas 27 y 28 pero de la cuarta edición. Particularizando la expresión (2.5) y (2.6) para un grafo conexo ( $k = 1$ ) se tendrá que el tamaño ( $M$ ) del grafo cumplirá que

$$N - 1 \leq M \leq N(N - 1)/2 \quad (2.7)$$

Del teorema 2.1 se desprende el siguiente corolario

**Corolario 2.1.** *Sea un grafo simple, sin lazos, no dirigido, de grado  $N$ . Si el tamaño ( $M$ ) es*

$$M > (N - 1)(N - 2)/2 \quad (2.8)$$

entonces el grafo es conexo.

*Demostración.* En efecto, se demuestra por reducción al absurdo. Sea un grafo que cumple la desigualdad (2.5) pero que no es conexo, es decir,  $k > 1$  con la misma notación utilizada hasta ahora. Tomando  $k = 2$  la desigualdad (2.5) pasa a ser  $M \leq \frac{1}{2}(N - 2)(N - 1)$  lo que contradice a (2.8) y por lo tanto a la hipótesis, luego el grafo debe ser conexo. Q.E.D.

Finalmente, merece la pena comentar que existen aristas que su eliminación provoca que se incremente en uno el número de componentes conexas, es decir, si antes de la supresión de la arista se tenían  $\kappa(g_1) = k$  componentes conexas, después de la supresión se tienen  $\kappa(g_2) = k + 1$  de ellas. Estas aristas reciben el nombre de aristas puente o de corte. Similarmente, existen vértices cuya eliminación (y la eliminación de la aristas incidentes a este vértice) también provoca que se incremente en uno el número de componentes conexas. Estos vértices reciben el nombre vértices de corte o de articulación. Este tipo de aristas y vértices son de mucho interés en el estudio de las vulnerabilidades de una red.

## 2.3 Caracterización matricial de un grafo

A un grafo se le puede asociar una matriz de forma que lo caracterice, ello permite trabajar con herramientas algebraicas que son mucho más amigables que los propios grafos. Básicamente existen dos matrices que se pueden asociar a un grafo: la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia. Pero también se utiliza una tercera matriz, la laplaciana, aunque su uso está muy vinculado a la teoría espectral de grafos. La contrapartida de utilizar matrices asociadas a grafos es que los vértices y/o los arcos del grafo se han de numerar si no lo estaban. Se ha de tener presente que tal numeración no tiene porqué ser nativa al grafo y, si éste fuese el caso, tal numeración sería totalmente arbitraria. Por lo tanto, un grafo que nativamente no tenía los vértices y/o arcos numerados se le podrán asignar más de una de estas matrices, no hace falta decir que todas ellas son igualmente válidas.

### 2.3.1 Matriz de adyacencia

Una caracterización muy útil y ampliamente utilizada de un grafo  $g$  de grado  $N$  es mediante su matriz de adyacencia ( $A_g$ ) cuadrada de orden  $N$ . Para un grafo, que no tenía los vértices numerados, se podrán considerar  $N!$  matrices de adyacencia, diferentes entre sí, pero que caracterizan el mismo grafo. Sea  $a_{ij}$  el elemento de la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz  $A_g$ , entonces para un grafo simple y sin lazos (dirigido o no dirigido) es

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si existe un arco saliente por el vértice } i \text{ y entrante al vértice } j \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.9)$$

Para un multigrafo sería

$$a_{ij} = \begin{cases} k; & \text{si existen } k \text{ arcos salientes por el vértice } i \text{ y entrantes al vértice } j \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.10)$$

En ambos casos para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ . Si el grafo fuese ponderado entonces se asigna a la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz de adyacencia el peso del arco incidente desde el vértice  $i$  al vértice  $j$  ( $\omega_{ij}$ ).

Obsérvese que la diagonal de la matriz de adyacencia son todos ceros, pero si el grafo simple y no dirigido presenta un lazo en un vértice  $k$  entonces se pone un 2 en  $a_{kk}$  en vez de un cero. También se hace notar que para un grafo dirigido las filas de la matriz representan los vértices de “salida” y las columnas los vértices de “llegada”. Las propiedades que tiene una matriz de adyacencia son las que a continuación se enumeran.

1. La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es simétrica, en cambio no tiene porqué ser simétrica (pero puede serlo) si el grafo es dirigido. Yendo más allá, si una matriz de adyacencia no es simétrica es imposible dibujar un grafo no dirigido y, por lo tanto, el grafo que se obtiene es exclusivamente dirigido. En cambio, si la matriz es simétrica se puede dibujar un grafo no dirigido pero también un grafo dirigido, por lo tanto en este caso se deberá interpretar si es de uno u otro tipo por el contexto. Lo anterior pone de manifiesto, una vez más, que un grafo no dirigido se puede interpretar (no se está diciendo que sea lo mismo) como dirigido, pero hacer la interpretación inversa (casi siempre) será imposible.
2. Para un grafo dirigido la suma de los elementos de la fila  $k$  es el grado de salida ( $d^+(k)$ ) del vértice  $k$ . La suma los elementos de la columna  $k$  es el grado de entrada ( $d^-(k)$ ) del vértice  $k$ . Esto es

$$d^+(k) = \sum_{j=1}^N a_{kj} \quad (2.11)$$

y

$$d^-(k) = \sum_{i=1}^N a_{ik} \quad (2.12)$$

en ambas para  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Para un grafo no dirigido ambos valores coinciden (recuérdese que la matriz es necesariamente simétrica) y simplemente se habla de grado. En este caso será o la suma por columnas o la suma por filas ya que ambos valores son idénticos. Esto es

$$d(k) = \sum_{j=1}^N a_{kj} = \sum_{i=1}^N a_{ik}; \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N \quad (2.13)$$

3. El elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de  $A_g^l$  con  $l = 1, 2, \dots$  es el número de caminos  $i-j$  de longitud  $l$ . La demostración por inducción de este importante y útil teorema puede ser consultado en la página 112 de [CFSS01].

### 2.3.2 Matriz de incidencia

La matriz de incidencia ( $B_g$ ) de un grafo  $g$  es menos utilizada que la matriz de adyacencia ( $A_g$ ) pero también caracteriza un grafo. Supóngase que para dicho grafo el grado es  $N$  y el tamaño es  $M$ , entonces la matriz de incidencia será, en general, rectangular de orden  $N \times M$ .<sup>20</sup> Si el grafo no tenía los vértices y/o los arcos numerados se les tendrá que asignar alguna numeración de forma independiente y arbitraria, por lo tanto se tendrá que existirán  $N!M!$  matrices de incidencia diferentes que caracterizarán el mismo grafo. Sea  $b_{ij}$  el elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz  $B_g$ , entonces para un grafo simple y dirigidos es

$$b_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si el arco } j \text{ es saliente del vértice } i \\ -1; & \text{si el arco } j \text{ es entrante al vértice } i \\ 2; & \text{si el arco } j \text{ es un lazo en el vértice } i \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.14)$$

mientras que para un grafo simple y no dirigido será

$$b_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si el arco } j \text{ es incidente al vértice } i \\ 2; & \text{si el arco } j \text{ es un lazo en el vértice } i \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.15)$$

en ambos casos para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, M$ .

La matriz de incidencia de un grafo simple y sin lazos tiene las siguientes propiedades.

1. Para un grafo no dirigido:

- (a) La suma de los elementos de cada columna es igual a 2. Esto es  $\sum_{i=1}^N b_{ij} = 2$  para  $j = 1, 2, \dots, M$ .
- (b) La suma de los elementos de cada fila es igual al grado del vértice correspondiente. Esto es  $d(i) = \sum_{j=1}^M b_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

2. Para un grafo dirigido:

- (a) La suma de los elementos de cada columna es igual a cero. Esto es  $\sum_{i=1}^N b_{ij} = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, M$ .
- (b) La suma de los elementos de cada fila es igual a la diferencia entre el grado de entrada y el grado de salida del vértice correspondiente. Esto es  $\sum_{j=1}^M b_{ij} = d^+(i) - d^-(i)$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ . No obstante, si se suman sólo los valores positivos se tendrá el grado de entrada del vértice correspondiente y si se toma el valor absoluto de la suma de sólo los valores negativos se tendrá el grado de salida del vértice correspondiente. Esto es

$$d^+(i) = \sum_{\substack{j=1 \\ b_{ij}>0}}^M b_{i,j} \quad (2.16)$$

$$d^-(i) = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ b_{ij}<0}}^M b_{i,j} \right| \quad (2.17)$$

<sup>20</sup>Obsérvese que el número de matrices de incidencia que determinan un mismo grafo es sustancialmente mayor que el número de matrices de adyacencia.

en ambas para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Para finalizar este apartado, existe una ecuación que liga la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia de un mismo grafo  $g$  no dirigido, esta es

$$A_g = B_g B_g^t - D_g \quad (2.18)$$

en donde  $D_g$  es la matriz diagonal de orden  $N$  cuyo elemento de la fila y columna  $k$  es el grado del vértice  $k$  ( $d(k)$ ). Es evidente que la numeración de las filas y columnas de las tres matrices debe ser coherente entre ellas y con la numeración de los vértices del grafo. En la página 114 de [CFSS01] puede ser encontrada la demostración sencilla de la ecuación (2.18).

### 2.3.3 Laplaciana

La laplaciana ( $L$ ) de un grafo  $g$  no ponderado y no dirigido de grado  $N$  es una matriz cuadrada de orden  $N$  cuyo uso está muy extendido en la teoría espectral de grafos.<sup>21</sup> Si se denota por  $l_{ij}$  el elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz  $L$ , entonces la laplaciana se define como sigue:

$$l_{ij} = \begin{cases} d(i); & \text{si } i = j \\ -1; & \text{si } i \neq j \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.19)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Algunas de las propiedades de la laplaciana de un grafo  $g$  de grado  $N$  son las que se enumeran a continuación que, por brevedad, no se demostrarán. En estas propiedades se asume que  $L$  es la laplaciana,  $A$  es la matriz de adyacencia,  $B$  es la matriz de incidencia,  $D$  es la matriz diagonal cuyo elemento de la fila y columna  $k$  es el grado del vértice  $k$  del grafo  $g$  para  $k = 1, 2, \dots, N$  y que los valores propios (que serán todos no negativos) de  $L$  se ordenan de menor a mayor y se denotan por  $\lambda_i$  con  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  y siendo  $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$ .<sup>22</sup>

1. La matriz  $L$  es semidefinida positiva.
2. Si el vértice  $k$  es un vértice aislado entonces toda la fila y la columna  $k$  de  $L$  son ceros.
3. Se cumple que  $L = D - A$ .
4. Se cumple que  $L = BB^t - 2A$ .
5. Siempre se cumple que  $\lambda_0 = 0$  (al menos con multiplicidad uno).
6. La multiplicidad de  $\lambda_0$  corresponde con el número de componentes conexas de  $g$ . Luego si la multiplicidad es uno el grafo es conexo.
7. Si el grafo es conexo el valor  $\lambda_1$  no es cero.

## 2.4 Grafos notables

Existen subconjuntos de grafos que por sus peculiaridades, o porque despiertan un interés por encima de los demás, o por razones diversas reciben nombres específicos. En este apartado se dejará constancia de ello en forma de lista no exhaustiva pero sin entrar a describir sus propiedades para primar la brevedad, el orden de enumeración no corresponderá con ningún criterio. Si se desea disponer de una compilación completa de subconjuntos de grafos puede ser consultado el

---

<sup>21</sup>También existe y se define la laplaciana normalizada, se deja constancia de ello y, por brevedad, no se profundizará más.

<sup>22</sup>Este conjunto de valores propios con sus multiplicidades se denomina espectro del grafo.

libro [BLS99]. Finalmente, decir que se sobrentiende que el conjunto de vértices es  $V$  y que el grado es  $N$ .

1. Grafo nulo: Grafo sin vértices y por lo tanto sin aristas. Estrictamente hablando no sería un grafo porque no cumple que el conjunto de vértices ( $V$ ) sea no vacío.
2. Grafo vacío: Grafo sin aristas pero con dos o más vértices (si tiene sólo un vértice y no tiene lazos es siempre vacío).
3. Grafo unitario o trivial: Grafo que sólo tiene un vértice y, consecuentemente, no tendrá aristas.
4. Grafo plano: Grafo que puede ser dibujado en un plano sin que sus aristas se intersequen. La representación gráfica (sin intersecciones) de tal grafo recibe el nombre de mapa.
5. Grafo regular: Grafo no dirigido tal que todos los vértices tienen el mismo grado  $k$  para algún  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Se denota por  $k$ -regular.
6. Grafo completo: Si en un grafo regular se considera  $k = N - 1$  se obtiene un grafo completo. Se denota por  $K_N$ .
7. Grafo bipartito: Si se pueden encontrar  $V_1$  y  $V_2$  tales que  $V_1 \cup V_2 = V$  y  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y si todas las aristas  $(x, y)$  son tales que  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$  entonces el grafo recibe el nombre de bipartito. Obsérvese que modificando ligeramente la definición anterior se podría hablar de grafos tripartitos, tetrapartitos, ... y, en general, de  $k$ -partitos.
8. Grafo bipartito completo: Si en un grafo bipartito cada vértice de  $V_1$  es incidente a todos los vértices de  $V_2$  y viceversa entonces se tiene un grafo bipartito completo. Se denota por  $K_{m,n}$  siendo  $m = |V_1|$  y  $n = |V_2|$ .
9. Grafo euleriano: Grafo que admite un ciclo euleriano.
10. Grafo hamiltoniano: Grafo que admite un ciclo hamiltoniano.
11. Grafo circular: Grafo de grado  $N$  igual o superior a tres en el que todos los vértices tienen grado dos. Se denota por  $C_N$ .
12. Clique: Se dice de un subgrafo que es un clique cuando es completo.
13. Árbol: Es el grafo conexo y sin ciclos (acíclico).
14. Bosque: Es el grafo sin ciclos no necesariamente conexo.
15. Pseudografo: Es el grafo con lazos.

## 2.5 Isomorfismo de grafos

Dos grafos  $g$  y  $h$  del mismo grado  $N$  son iguales si, y sólo si, los pesos que unen el vértice  $i$  con el vértice  $j$  tanto del grafo  $g$  como del grafo  $h$  son iguales para  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1, \dots, N$ . Se reservará el signo igual ( $=$ ) exclusivamente para la igualdad de grafos, por lo tanto se tiene que

$$g = h \iff \omega_{ij}^g = \omega_{ij}^h \quad \text{para } i = 1, \dots, N \text{ y } j = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

Si dichos grafos tienen como matrices de adyacencia  $A_g$  y  $A_h$  respectivamente, entonces la igualdad de estos grafos equivaldrá a la igualdad matemática de sus respectivas matrices de adyacencia, es decir

$$g = h \iff A_g = A_h \quad (2.21)$$

Existen casos de pares de grafos no iguales que mediante una permutación de los vértices de uno de ellos, llegan a ser iguales; en este caso se dice que los dos grafos son isomorfos. En cambio,

habrá pares de grafos que será imposible encontrar tal permutación, en este caso los grafos no son isomorfos. Es trivial que dos grafos iguales son isomorfos pues la permutación que se puede efectuar es la identidad, también es trivial que dos grafos isomorfos no tienen porque ser iguales y si dos grafos no son isomorfos es seguro que no serán iguales. Después de esta introducción informal se va a dar la definición de grafos isomorfos para grafos no ponderados.

**Definición 2.10.** *Un grafo  $h$  es isomorfo a un grafo  $g$  (ambos no ponderados y necesariamente del mismo grado  $N$ ) cuando se puede establecer una biyección  $\varphi_{g \leftarrow h}(\cdot)$  desde los vértices de  $h$  hacia los vértices de  $g$  tal que preserva la adyacencia. Es decir, si  $i$  y  $j$  son vértices adyacentes (respectivamente no son adyacentes) en el grafo  $h$  entonces los vértices  $\varphi_{g \leftarrow h}(i)$  y  $\varphi_{g \leftarrow h}(j)$  en el grafo  $g$  también son adyacentes (respectivamente también no son adyacentes) para  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1, \dots, N$ .*

Y para grafos ponderados se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.11.** *Un grafo  $h$  es isomorfo a un grafo  $g$  (ambos ponderados y necesariamente del mismo grado  $N$ ) cuando se puede establecer una biyección  $\varphi_{g \leftarrow h}(\cdot)$  desde los vértices de  $h$  hacia los vértices de  $g$  tal que si el peso del vértice  $i$  al vértice  $j$  en el grafo  $h$  es  $\omega_{ij}^h$  y el peso del vértice  $\varphi_{g \leftarrow h}(i)$  al vértice  $\varphi_{g \leftarrow h}(j)$  en el grafo  $g$  es  $\omega_{\varphi_{g \leftarrow h}(i), \varphi_{g \leftarrow h}(j)}^g$  entonces*

$$\omega_{ij}^h = \omega_{\varphi_{g \leftarrow h}(i), \varphi_{g \leftarrow h}(j)}^g \quad (2.22)$$

para  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1, \dots, N$  tales que  $i$  y  $j$  sean adyacentes.

Se hace notar que la definición 2.10 queda englobada en la definición 2.11 si se toman como pesos de los grafos no ponderados la unidad. Por otro lado, y como se verá más adelante, la relación "... ser isomorfo a ..." cumple la propiedad simétrica por lo que se reservará el signo  $\cong$  en exclusiva para denotar que dos grafos son isomorfos, con esta notación es trivial (como ya se ha comentado antes) que

$$g = h \Rightarrow g \cong h \quad (2.23)$$

pero que

$$g \cong h \not\Rightarrow g = h \quad (2.24)$$

en cambio es

$$g \not\cong h \Rightarrow g \neq h \quad (2.25)$$

Por ultimo, señalar que el uso directo de la definición de isomorfismo de grafos para dar la solución al problema de decidir si dos grafos son isomorfos acarrea unos tiempos de cálculo computacional prohibitivos. La presente tesis está enfocada globalmente a aportar un nuevo método para resolver este problema, en la gran mayoría de los casos, con unos tiempos de computo más que razonables.

### 2.5.1 Isomorfismo y matrices de adyacencia

Se va a dar la relación que existe entre las matrices de adyacencia de dos grafos cuando estos son isomorfos, para ello es necesario primero enunciar la siguiente definición.

**Definición 2.12.** *Una matriz cuadrada de orden  $N$  se dice que es una matriz de permutación y se denotará por  $P_N$  (o simplemente por  $P$  cuando no haya confusión posible sobre el orden) cuando tenga un uno en cada fila y en cada columna (el total de unos es  $N$ ). El resto de elementos serán cero.*

Las matrices de permutación respecto al producto de matrices tiene una estructura algebraica de grupo (no abeliano). Se destacan a continuación las siguientes propiedades.

1. Existen exactamente  $N!$  matrices de permutación  $P_N$  diferentes.
2. La matriz identidad de orden  $N$  siempre es una matriz de permutación.

3. El producto de dos matrices de permutación es siempre una matriz de permutación.
4. Si  $P_N$  es una matriz de permutación entonces  $P_N^t$  también lo es.
5. Si  $P_N$  es una matriz de permutación entonces  $P_N^{-1}$  también lo es.
6. Una matriz de permutación es ortogonal, esto es,  $P_N^{-1} = P_N^t$ .
7. El determinante de una matriz de permutación es 1 ó  $-1$  y además  $|P_N| = |P_N^t| = |P_N^{-1}|$ .

Como ejemplo, se tienen las seis matrices de permutación siguientes para  $N = 3$ .

$$(P_3)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (P_3)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (P_3)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(P_3)_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (P_3)_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (P_3)_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La reenumeración de los vértices de un grafo puede ser efectuada a través de las matrices de permutación sobre la matriz de adyacencia del grafo. Si se desea que el vértice  $i$  se mapee sobre el vértice  $j$  (y, consecuentemente,  $j$  sobre  $i$ ) se ha de escoger una matriz de permutación que en la fila  $i$  tenga un uno en la columna  $j$  (y, consecuentemente, en la fila  $j$  tenga un uno en la columna  $i$ ). Por ejemplo, la matriz  $(P_3)_5$  del ejemplo anterior mapea el vértice 1 en el 3, el 2 en el 1 y el 3 en el 2. Entonces para obtener la matriz de adyacencia del grafo isomorfo con el nuevo mapeado se ha de multiplicar la matriz de adyacencia por la izquierda por la transpuesta de la matriz de permutación y por la derecha por la misma matriz de permutación seleccionada. Si sobre un grafo se efectúa una reenumeración y posteriormente otra se estará componiendo mapeados, su traducción con matrices de permutación consistirá en aplicar en el mismo orden las matrices de permutación correspondientes. No obstante, la composición de mapeados puede ser efectuada de una sola vez si se multiplican la matriz de permutación del primer mapeado con la matriz de permutación del segundo mapeado en este orden.<sup>23</sup>

Sean  $g$  y  $h$  dos grafos del mismo grado  $N$  de los cuales se conocen sus matrices de adyacencia  $A_g$  y  $A_h$  respectivamente, entonces resolver el problema del isomorfismo de grafos algebraicamente se traduce a plantear la siguiente ecuación.

$$A_h = P_N^t A_g P_N \tag{2.26}$$

Si no existe una matriz de permutación ( $P_N$ ) que verifique la ecuación (2.26) entonces los grafos  $g$  y  $h$  no son isomorfos. En caso de que exista alguna matriz de permutación ( $P_N$ ) que sí verifique la ecuación (2.26) entonces los grafos  $g$  y  $h$  sí serán isomorfos, dando el mapeado la única matriz de permutación que verifica (2.26).<sup>24</sup> En resumen, la existencia o no de una matriz de permutación ( $P_N$ ) que verifique la ecuación (2.26) es condición necesaria y suficiente para el isomorfismo de grafos. Utilizar mediante fuerza bruta la ecuación (2.26) para ir probando todas las matrices de permutación hasta encontrar una que la verifique (caso de grafos isomorfos) o no encontrar ninguna que la verifique (caso de grafos no isomorfos) es, en términos de tiempo de cómputo, totalmente inviable.

Desde el punto de vista estrictamente matemático y dentro del álgebra de matrices resulta ser que por cumplir la ecuación 2.26 las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos son matrices

<sup>23</sup>Es importante recordar que la composición de funciones no es conmutativa ni tampoco el producto de matrices

<sup>24</sup>Hasta ahora nadie ha podido “despejar”  $P_N$  de la sencilla ecuación (2.26).

equivalentes,<sup>25</sup> congruentes<sup>26</sup> y semejantes.<sup>27</sup> En muchas ocasiones estos tres importantes hechos, por ser elementales, pasan desapercibidos lo que no permite aprovechar todas las propiedades que tienen las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos por ser equivalentes, semejantes y congruentes.<sup>28</sup>

Una propiedad que será ampliamente utilizada en este trabajo es que si dada la matriz de adyacencia de un grafo se permutan las filas  $i$  y la  $j$  y se permutan las columnas  $i$  y  $j$  se obtiene una matriz de adyacencia de un grafo que es isomorfo al primero en donde los vértices  $i$  y  $j$  quedan intercambiados, permaneciendo el resto de vértices inalterados. En forma de corolario es

**Corolario 2.2.** *Con la permutación de dos filas  $i$  y  $j$  y de dos columnas  $i$  y  $j$ , en este orden u orden inverso, de una matriz de adyacencia de un grafo se obtiene una matriz de adyacencia de un grafo isomorfo al primero en donde los vértices  $i$  y  $j$  han quedado intercambiados y el resto de vértices permanece inalterado. La matriz de permutación asociada a ese isomorfismo es la que se obtiene a partir de la matriz identidad pero los unos de la diagonal de la fila y columna  $i$  y de la fila y columna  $j$  pasan a la fila  $i$  y columna  $j$  y a la fila  $j$  y columna  $i$ .*

Su demostración a partir de lo expuesto anteriormente es trivial.

## 2.5.2 Isomorfismo y relación de equivalencia

Se va a profundizar en la relación de equivalencia que se puede establecer en el conjunto de todos los grafos y sus isomorfos. Para ello, en los siguientes subapartados  $\mathbb{G}_N$  será el conjunto de todos los grafos (y sus isomorfos) de grado  $N$  y  $g_i \in \mathbb{G}_N$ ,  $g_j \in \mathbb{G}_N$  y  $g_k \in \mathbb{G}_N$  serán grafos cualesquiera.

### 2.5.2.1 Relación $\mathcal{R}$ de equivalencia

Si se define la relación  $\mathcal{R}$  como “... es isomorfo a ...” sobre el conjunto  $\mathbb{G}_N$  resulta que esta es una relación de equivalencia, es decir, la relación  $\mathcal{R}$  cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Cada una de estas propiedades se discutirá en los siguientes subapartados, para ello se considerará que los grafos  $g_i$ ,  $g_j$  y  $g_k$  tienen como matrices de adyacencia a  $A_{g_i}$ ,  $A_{g_j}$  y  $A_{g_k}$  respectivamente.

**2.5.2.1.1 Propiedad reflexiva.** La relación  $\mathcal{R}$  cumple la propiedad reflexiva, esto es que todo grafo es isomorfo a sí mismo. Más formalmente se tiene  $\forall i$  que

$$g_i \mathcal{R} g_i \tag{2.27}$$

En efecto, es trivial ver que si escoge en (2.26) como matriz de permutación ( $P_N$ ) la matriz identidad de orden  $N$  ( $\mathbf{I}_N$ ) entonces siempre se cumple que  $\mathbf{I}_N^t A_{g_i} \mathbf{I}_N = A_{g_i}$  y por lo tanto es  $g_i \mathcal{R} g_i$  para  $\forall i$  con lo que queda demostrado que  $\mathcal{R}$  siempre cumple la propiedad reflexiva.

---

<sup>25</sup>Se recuerda que dos matrices  $A$  y  $B$  de las mismas dimensiones, no necesariamente cuadradas, son equivalentes y se denota por  $A \sim B$  cuando se puede obtener una de la otra mediante transformaciones elementales de filas y/o columnas, pudiéndose escribir que  $B = PAQ$  en donde  $P$  es el producto de las matrices elementales de transformación por filas y  $Q$  lo propio pero por columnas.

<sup>26</sup>Se recuerda que dos matrices  $A$  y  $B$  cuadradas y con la misma dimensión son congruentes si existe una matriz con la misma dimensión  $T$  no singular tal que  $B = T^t A T$ . La congruencia es un caso particular de la equivalencia.

<sup>27</sup>Se recuerda que dos matrices  $A$  y  $B$  cuadradas y con la misma dimensión son semejantes si existe una matriz  $Q$  no singular con la misma dimensión tal que  $B = Q^{-1} A Q$ .

<sup>28</sup>Todo lo anterior puede ser consultado en cualquier tratado elemental sobre álgebra de matrices como, por ejemplo, [Ayr89].

**2.5.2.1.2 Propiedad simétrica.** La relación  $\mathcal{R}$  cumple la propiedad simétrica, esto es que si un grafo es isomorfo a otro, entonces este último también lo es al primero. Más formalmente se tiene  $\forall i, j$  que

$$g_i \mathcal{R} g_j \Rightarrow g_j \mathcal{R} g_i \quad (2.28)$$

En efecto, si  $g_i \mathcal{R} g_j$  entonces por (2.26) existe una matriz de permutación ( $P_N$ ) tal que

$$A_{g_i} = P_N^t A_{g_j} P_N \quad (2.29)$$

Si a esta ecuación se multiplica por la izquierda por  $P_N$  y por la derecha por  $P_N^t$  entonces se obtiene

$$P_N A_{g_i} P_N^t = P_N P_N^t A_{g_j} P_N P_N^t \quad (2.30)$$

Ahora bien, por la propiedad 6 (página 19) se tiene que  $P_N P_N^t = P_N^t P_N = \mathbf{I}_N$  y por lo tanto

$$A_{g_j} = P_N A_{g_i} P_N^t \quad (2.31)$$

Tomando  $Q_N = P_N^t$ , que por la propiedad 4 (página 19) también es una matriz de permutación, entonces la anterior ecuación se puede reescribir como

$$A_{g_j} = Q_N^t A_{g_i} Q_N \quad (2.32)$$

de donde es  $g_j \mathcal{R} g_i$  con lo que queda demostrado que la relación  $\mathcal{R}$  siempre cumple la propiedad simétrica.

Este interesante resultado permite corroborar que si se conoce la matriz de permutación ( $P_N$ ) que permite obtener un grafo isomorfo a uno dado, entonces la matriz de permutación inversa ( $P_N^{-1}$ ) que permite obtener el primero a partir de este último grafo es la transpuesta de la matriz de permutación ( $P_N^t$ ).

**2.5.2.1.3 Propiedad transitiva.** La relación  $\mathcal{R}$  cumple la propiedad transitiva, esto es que si un grafo es isomorfo a un segundo, y este es isomorfo a un tercero, entonces el primero también lo es al tercero. Más formalmente se tiene  $\forall i, j, k$  que

$$g_i \mathcal{R} g_j \quad \text{y} \quad g_j \mathcal{R} g_k \Rightarrow g_i \mathcal{R} g_k \quad (2.33)$$

En efecto, por (2.26) se tiene que si  $g_i \mathcal{R} g_j$  entonces existe una matriz de permutación ( $P_N$ ) tal que

$$A_{g_i} = P_N^t A_{g_j} P_N \quad (2.34)$$

y por la misma razón para  $g_j \mathcal{R} g_k$  existirá una matriz de permutación ( $Q_N$ ) tal que

$$A_{g_j} = Q_N^t A_{g_k} Q_N \quad (2.35)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.34) la matriz  $A_{g_j}$  por la expresión de (2.35) se tiene

$$A_{g_i} = P_N^t Q_N^t A_{g_k} Q_N P_N = (Q_N P_N)^t A_{g_k} Q_N P_N \quad (2.36)$$

El producto matricial  $Q_N P_N$  por la propiedad 3 (página 19) también es una matriz de permutación. Sea  $T_N = Q_N P_N$  entonces queda

$$A_{g_i} = T_N^t A_{g_k} T_N \quad (2.37)$$

de donde es  $g_i \mathcal{R} g_k$  con lo que queda demostrado que la relación  $\mathcal{R}$  siempre cumple la propiedad transitiva.

Es interesante destacar que la composición de permutaciones se traduce en el producto de las matrices de permutación, es decir, si a partir de un primer grafo y mediante una matriz de permutación  $P_N$  se obtiene un segundo grafo isomorfo, y mediante otra matriz de permutación  $Q_N$  se obtiene

un tercer grafo isomorfo al segundo, entonces mediante la matriz de permutación dada por  $Q_N P_N$  se obtiene directamente el tercer grafo isomorfo al primero.

Más adelante interesará aplicar la propiedad transitiva de forma encadenada, sea un conjunto finito de  $l$  grafos  $\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{l-1}, g_l\}$  tales que  $g_i \mathcal{R} g_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, l-1$  entonces  $g_1 \mathcal{R} g_l$ , esto es

$$g_1 \mathcal{R} g_2, \quad g_2 \mathcal{R} g_3, \quad \dots, \quad g_{l-2} \mathcal{R} g_{l-1} \quad \text{y} \quad g_{l-1} \mathcal{R} g_l \quad \Rightarrow \quad g_1 \mathcal{R} g_l \quad (2.38)$$

Es obvio que este último resultado se demuestra fácilmente usando la propiedad transitiva de forma reiterada.

### 2.5.2.2 Clases de equivalencia

Si  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia entonces (por definición) la clase de equivalencia del grafo  $g$  es el conjunto de todos los grafos  $x_i$  tales que  $x_i \mathcal{R} g$ . Si una clase de equivalencia se representa por  $[g]$  entonces se tiene que

$$[g] = \{x_i \in \mathbb{G}_N \mid x_i \mathcal{R} g\} \quad (2.39)$$

Estas clases de equivalencia cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cualquier clase de equivalencia su cardinal es  $N!$ , esto es  $\text{card}([g]) = N!$  para  $\forall g$  (todas las clases de equivalencia tienen el mismo número finito de elementos).
2. Se desprende fácilmente de la anterior propiedad que cualquier clase de equivalencia es no vacía, esto es  $[g] \neq \emptyset$  para  $\forall g$ .
3. Dos grafos isomorfos pertenecen a la misma clase de equivalencia, esto es  $[g] = [h]$  si, y sólo si,  $g \mathcal{R} h$  para  $\forall g, h$ .
4. La unión de todas las clases de equivalencia es  $\mathbb{G}_N$ , esto es  $\cup_{\forall x_i \in \mathbb{G}_N} [x_i] = \mathbb{G}_N$ .
5. Las clases de equivalencia son disjuntas dos a dos, esto es si  $[g] \neq [h]$  entonces  $[g] \cap [h] = \emptyset$ , o bien de otra forma, si  $g$  y  $h$  no son isomorfos entonces  $[g] \cap [h] = \emptyset$  para  $\forall g, h$ .

### 2.5.2.3 Conjunto Cociente

La propiedades 4 y 5 enunciadas en el apartado anterior son de capital importancia en tanto que permiten afirmar que el conjunto de clases de equivalencia (familia de conjuntos) es una partición de  $\mathbb{G}_N$ . A esta familia de conjuntos se la denomina conjunto cociente, si se representa por  $\mathbb{G}_N/\mathcal{R}$  se puede escribir

$$\mathbb{G}_N/\mathcal{R} = \{[x_i] \mid x_i \in \mathbb{G}_N\} \quad (2.40)$$

### 2.5.2.4 Representante canónico

Cualquier elemento de una clase puede ser el representante de la clase y, a través de éste representante, sería fácil generar la clase. Si existe algún criterio de escoger un representante de cada clase que sólo él, y nada más él, cumpla este criterio, entonces éste representante será único para su clase de equivalencia y se denominará representante canónico. La existencia de un representante que sea canónico simplifica mucho la representación de las clases, como ejemplo tenemos que en el conjunto de los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ) de todas las clases de equivalencia (fracciones equivalentes) se puede escoger un representante que nada más él cumpla un criterio: que el numerador y el denominador sean primos entre sí.

Desde el punto de vista del isomorfismo de grafos, de cada clase de grafos isomorfos siempre podemos escoger un representante cualquiera, pero, hasta el momento, no se conoce algún criterio o propiedad

(si es que la hay) que determine de forma única, dentro de cada clase, un grafo determinado. Por lo tanto no existe un representante de la clase que sea canónico, o mejor dicho, no existe con tiempos de computo razonables. La reflexión es que si tal representante canónico existiera el isomorfismo de grafos se reduciría a la igualdad de grafos, ya que aplicando la propiedad transitiva el problema se transformaría en afirmar o negar la igualdad de dos grafos (los representantes canónicos).

### 2.5.3 Invariantes

Se dice que una característica o propiedad en un grafo es un invariante para el isomorfismo de grafos (o sencillamente un invariante cuando se tiene claro el contexto) cuando dicha característica o propiedad se mantiene para todos los grafos isomorfos al grafo considerado. Es decir, un invariante es una condición necesaria para el isomorfismo de grafos. Al día de hoy, nadie ha encontrado un invariante o conjunto de invariantes (cuyo coste computacional sea razonable) que sean, además, condición suficiente. Los invariantes son muy utilizados ya que permite un descarte prematuro de pares de grafos que, al no mantener el mismo invariante, ya se sabe de antemano que no podrán ser isomorfos. De forma muy breve se dará a continuación un listado de invariantes por el isomorfismo de grafos, este listado no pretende ser exhaustivo pero esto no será óbice para dejar constancia de aquellos invariantes que sean elementales. Se sobrentiende que los grafos isomorfos ( $g$  y  $h$ ) sobre los cuales se estudia un invariante tendrán el mismo grado  $N$ .

1. Tamaño:

Es evidente que dos grafos no pueden ser isomorfos si no tienen el mismo número de arcos o aristas. Según la definición 2.10 para grafos no ponderados o 2.11 para grafos ponderados el isomorfismo de grafos preserva la adyacencia por lo tanto necesariamente el número de arcos o aristas ha de ser el mismo, entonces

$$g \cong h \quad \Rightarrow \quad M_g = M_h \quad (2.41)$$

En donde  $M_g$  y  $M_h$  denotan el tamaño de los grafos  $g$  y  $h$  respectivamente. La complejidad computacional de comparar los tamaños de dos grafos es  $O(N^2)$ .

2. Rango de las matrices de adyacencia:

Como ya se ha visto en “Isomorfismo y matrices de adyacencia” (apartado 2.5.1 de la página 18) las matrices de adyacencia de dos grafos isomorfos son congruentes y matrices congruentes tienen el mismo rango. Por lo tanto es

$$g \cong h \quad \Rightarrow \quad \text{rang}(A_g) = \text{rang}(A_h) \quad (2.42)$$

En donde  $A_g$  y  $A_h$  son las matrices de adyacencia de  $g$  y  $h$  respectivamente. La complejidad computacional de comparar los rangos de las matrices de adyacencia de dos grafos es  $O(N^3)$ .

3. Determinantes de las matrices de adyacencia:

Con los mismos argumentos del apartado anterior dos matrices congruentes tienen el mismo determinante, entonces

$$g \cong h \quad \Rightarrow \quad |A_g| = |A_h| \quad (2.43)$$

También se demuestra, haciendo uso de que si  $g$  y  $h$  son isomorfos entonces aplicando determinantes a la ecuación (2.26) queda

$$|A_h| = |P_N^t A_g P_N| = |P_N^t| |A_g| |P_N|$$

Ahora bien, por la propiedad 7 (página 19) tenemos que el determinante de cualquier matriz de permutación es 1 ó  $-1$  y que  $|P_N^t| = |P_N|$  por lo tanto la ecuación anterior queda  $|A_g| = |A_h|$ . La complejidad computacional de comparar los determinantes de las matrices de adyacencia de dos grafos es  $O(N^3)$ .

4. Número de componentes conexas:

Se deduce directamente de que el isomorfismo de grafos preserva las adyacencias, entonces.

$$g \cong h \quad \Rightarrow \quad \kappa(g) = \kappa(h)$$

La complejidad computacional de su cálculo y comparación es  $O(N^3)$ .

5. Espectro:

El espectro de un grafo son los valores propios (con sus multiplicidades) de la matriz de adyacencia. El espectro de grafos isomorfos es idéntico, cuando dos grafos, que aún no siendo isomorfos, presentan el mismo espectro se dice de ellos que son coespectrales. La complejidad computacional es  $O(N^3)$  para el cálculo del determinante y también dependerá de la complejidad computacional del cálculo de  $N$  raíces de un polinomio.

6. Conjuntos de los pesos con sus multiplicidades:

Se deduce directamente de la preservación de las adyacencias en un isomorfismo. Su complejidad computacional es  $O(M^2)$  siendo  $M$  el tamaño del grafo (véase el apartado 6.2 más adelante).

7. Conjunto de grados con sus multiplicidades:

Se deduce directamente de la preservación de los grados de cada vértice de forma individual debido a la preservación de las adyacencias en un isomorfismo. Su complejidad computacional es  $O(N^2)$  (véase el apartado 6.2 más adelante).

### 2.5.4 Automorfismo

Si se considera el conjunto de los vértices de un grafo  $g$  con la operación composición de permutaciones entonces se tiene una estructura de grupo (no abeliano). Si se considera el subconjunto de las permutaciones que dejan inalterado el grafo junto con la operación de composición de permutaciones se tiene un subgrupo del anterior denominado el subgrupo de los automorfismos del grafo  $g$  (denotado por  $\text{Aut}(g)$ ). Por lo tanto, un automorfismo en un grafo  $g$  es una permutación de sus vértices tal que preserva las adyacencias (grafo no ponderado) o preserva las adyacencias y los pesos (grafo ponderado). Cualquier grafo presenta, al menos, un automorfismo que consiste en aplicar una permutación a sus vértices de forma que los deje donde estaban (permutación identidad), este automorfismo se puede catalogar como trivial o impropio. En este trabajo, cuando en un grafo sólo se pueda encontrar este automorfismo se considerará que el grafo no presenta automorfismos. Intuitivamente, es claro, que cuando un grafo presente  $k$  "simetrías" se traducirá en el hecho que el grafo tendrá  $k$  automorfismos propios o no triviales.

### 2.5.5 Isomorfismo y transformaciones de grafos

Sea  $\mathbb{G}_N$  el conjunto de todos los grafos (isomorfos o no) de grado  $N$  que para fijar ideas, y sin pérdida de generalidad, se supondrán simples, no dirigidos y conexos. En este conjunto siempre es posible definir una aplicación  $T$  tal que a cualquier grafo  $g \in \mathbb{G}_N$  se le haga corresponder un grafo  $T(g) \in \mathbb{G}_N$ , esto es

$$\begin{aligned} T: \mathbb{G}_N &\rightarrow \mathbb{G}_N \\ g &\rightarrow T(g) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Se hace notar que, en el caso general, una aplicación cualquiera  $T$  puede alterar tanto los pesos como la topología de un grafo. Por otro lado, existe un subconjunto de aplicaciones que corresponden exclusivamente a la permutación de los nodos de un grafo produciendo un grafo isomorfo al original, en este caso se hará uso de la notación específica  $\varphi_k(g)$  para denotar tal situación; ya se ha visto con anterioridad que, en general, existen  $N!$  permutaciones diferentes, estas son  $\varphi_k(\cdot)$  con  $k =$

$1, 2, \dots, N!$ . Más adelante será necesario utilizar la siguiente definición que nada más tiene sentido en el contexto de este trabajo.

**Definición 2.13.** *Se dirá que una aplicación  $T$  de un grafo en otro es compatible con el isomorfismo si para todo  $g \in \mathbb{G}_N$  se cumple que*

$$\varphi_k(T(g)) = T(\varphi_k(g)) \quad (2.45)$$

para  $\forall k = 1, 2, \dots, N!$ .

En otras palabras, si para cualquiera que sea el grafo  $g$  se obtiene cualquier grafo isomorfo  $h$ , esto es  $h = \varphi_k(g)$  entonces la aplicación  $T$  será compatible con el isomorfismo si  $T(g)$  y  $T(h)$  también son isomorfos con la misma permutación  $\varphi_k(\cdot)$ , esto es  $T(h) = \varphi_k(T(g))$  para cualquiera que fuere  $k$  (con  $k = 1, 2, \dots, N!$ ).

Cabe una reformulación de la anterior definición lo que dará otra definición alternativa. Si se observa atentamente la definición anterior lo que se está exigiendo es que la aplicación  $T$  y las permutaciones  $\varphi_k(\cdot)$  con  $k = 1, 2, \dots, N!$  sean conmutativas respecto a la composición de (que en general no lo será), entonces se tiene la siguiente definición alternativa.

**Definición 2.14.** *Se dirá que una aplicación  $T$  de un grafo en otro es compatible con el isomorfismo si para todo  $g \in \mathbb{G}_N$  y cualquier aplicación  $\varphi_k(\cdot)$  la composición de ambas aplicaciones es conmutativa, esto es si se cumple que*

$$\varphi_k \circ T(g) = T \circ \varphi_k(g) \quad (2.46)$$

para  $\forall k = 1, 2, \dots, N!$ .

Como ejemplo considérese la aplicación  $T$  consistente en multiplicar los pesos de las aristas de un grafo por una constante real  $C > 0$ , es evidente que tal aplicación así definida es compatible con el isomorfismo. Otro ejemplo es la aplicación consistente en multiplicar por una constante real  $C > 0$  los pesos de las aristas incidentes al nodo 7 de un grafo, esta transformación no es compatible con el isomorfismo.

En principio, ambas definiciones (2.13 y 2.14) sólo tienen sentido si el grafo original e imagen por la transformación  $T$  tienen el mismo grado. Más adelante se estudiará la compatibilidad del método aquí propuesto respecto al isomorfismo. En dicho método el grafo imagen por la transformación tiene un grado (estrella con  $N + 1$  nodos) superior en uno al grado del grafo origen ( $N$  nodos). No obstante a efectos de considerar la compatibilidad de tal transformación respecto al isomorfismo se considerará que el vértice raíz de la estrella está oculto con lo que dicho valor en ambos grafos (original e imagen) coincidirá.

## 2.6 Caso particular: Grafo en estrella

Un tipo de grafo que se usará hasta la saciedad es el que, en este contexto, será denominado grafo estrella (o simplemente estrella). Primero de todo hace falta una definición para que queden inequívocamente identificados estos grafos.

**Definición 2.15.** *Un grafo no dirigido de grado  $n$  con  $n \geq 3$  recibirá el nombre de grafo estrella (o simplemente estrella) cuando sea conexo, un vértice tenga grado  $n - 1$  y los  $n - 1$  vértices restantes sean hojas.<sup>29</sup> El vértice cuyo grado es  $n - 1$  recibirá el nombre de vértice raíz o central. Una estrella*

---

<sup>29</sup>Esta definición es ligeramente diferente a la aceptada por todos, en ella no se impone la restricción de que  $n \geq 3$ , es decir, para grado 1 y 2 también se debería considerar como una estrella. Esto se ha hecho así porque en este trabajo interesa siempre tener identificado el vértice raíz de forma única, ello no es posible si se admite que el grado es 1 ó 2 (véase más adelante la propiedad 5 de la página 27).

## 2.6. Caso particular: Grafo en estrella

se denotará por  $s_n$  siendo  $n$  el grado del grafo (cuando se sobreentienda el grado simplemente se denotará por  $s$ ).<sup>30</sup>

La representación gráfica de una estrella ponderada genérica de grado  $n$  puede ser observada en la figura 2.2 en donde se ha de tener en cuenta que la numeración de los vértices puede variar. La misma representación también sirve para una estrella no ponderada si se toma para cada uno de los  $n - 1$  pesos el valor unidad ( $\omega_i = 1, \forall i$ ).

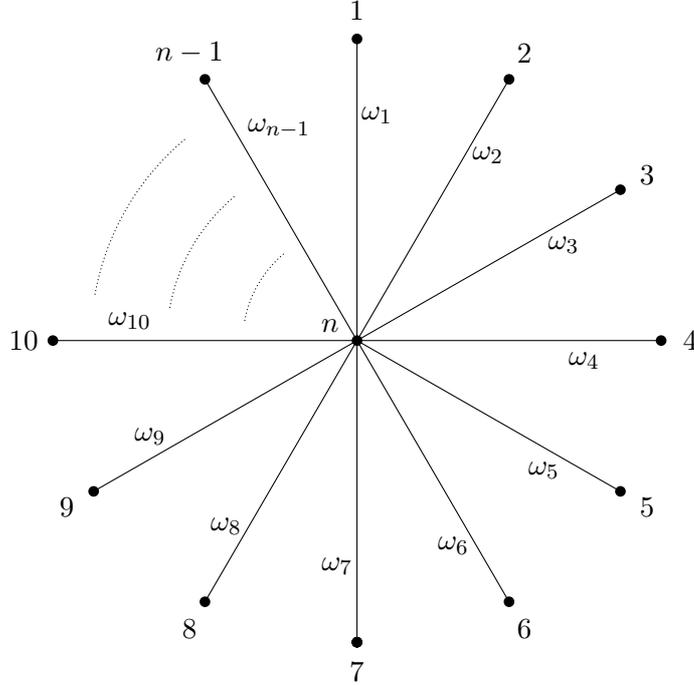


Figura 2.2: Grafo genérico en estrella. Los pesos ( $\omega_z$ ) se denotan por el vértice hoja incidente a su arista (se podría haber utilizado otra notación como  $\omega_{z,n}$ ).

La matriz de adyacencia de una estrella tiene el aspecto mostrado en la expresión (2.47), en donde  $\omega_z$  es el peso asociado a la arista incidente al vértice hoja  $z$ .

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \hline
 \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_{k-1} & 0 & \omega_{k+1} & \omega_{k+2} & \cdots & \omega_n \\
 \hline
 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{k+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{k+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_n & 0 & 0 & \cdots & 0
 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Algunas propiedades importantes de los grafos en estrella no dirigidos y ponderados son las siguientes

1. En su matriz de adyacencia (2.47) sólo existe una fila  $k$  y una columna  $k$  con todos y cada uno de sus elementos necesariamente no nulos (excepto, evidentemente, el elemento de la fila

<sup>30</sup>No todos los autores denotan por  $s_n$  una estrella. Los hay que la denotan por  $s_m$  siendo  $m$  el número de aristas, en todo caso para una estrella será siempre  $n = m + 1$ . En este trabajo (debido a esta ambigüedad) se evitará siempre esta notación y cuando sea necesario anunciar el grado de la estrella se hará explícitamente.

- y columna  $k$ ). Ha de ser necesariamente no nulos porque la estrella, por definición, es conexa. El resto de elementos son todos nulos.
2. Con la notación y consideraciones de la propiedad anterior el vértice raíz es  $k$ .
  3. La estrella es uno de los casos de grafos que puede ser representada, sin pérdida de información, por un vector. Las componentes de este vector (con la misma notación que la primera propiedad) son los elementos de la fila (o columna) del vértice raíz ( $k$ ). Atendiendo a la expresión (2.47) este vector sería  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}, 0, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots, \omega_n)$ .
  4. Todas las aristas siempre tienen como un vértice incidente el vértice raíz. Por lo tanto, cada una de las aristas de una estrella puede ser identificada, sin ambigüedades, por el vértice hoja al que es incidente.
  5. Aunque lo que sigue ya se exige en la definición 2.15 se lo cataloga de propiedad por su importancia. Existe un, y sólo un, vértice (el raíz) con grado  $n - 1$  y exactamente  $n - 1$  vértices con grado uno (las hojas). El vértice raíz siempre se podrá distinguir de los vértices hoja porque su grado nunca será la unidad (recuérdese que en la definición 2.15 se exige que  $n \geq 3$  y por lo tanto el grado del vértice raíz siempre será mayor o igual que dos).
  6. Una estrella es un caso particular de un árbol por lo tanto heredará las propiedades de los árboles. Cabe destacar que una estrella es acíclica.
  7. Una estrella es un grafo bipartito completo  $K_{1,n-1}$  por lo que heredará las propiedades de estos.
  8. En una estrella siempre se cumple que  $n = m + 1$  siendo  $n$  el grado y  $m$  el tamaño.
  9. Una estrella sea del grado que sea siempre admite un etiquetado garboso pero no perfecto.

Las estrellas podrán ser ponderadas o no ponderadas siendo las propiedades radicalmente diferentes entre los dos casos. Una estrella de grado  $n$  no ponderada presentará siempre  $(n - 1)!$  automorfismos que corresponderán a todas las permutaciones de sus hojas. Otro resultado trivial pero muy interesante es que dos estrellas cualesquiera (del mismo grado) no ponderadas siempre serán isomorfas, en otras palabras, es imposible encontrar una estrella no ponderada de grado  $n$  que no sea isomorfa a otra estrella no ponderada del mismo grado. De aquí se tiene que la biyección que transforma una estrella en otra mediante un isomorfismo consiste en asociar entre sí los vértices centrales y para el resto de vértices cualquier asociación de las  $(n - 1)!$  posibles es válida debido a los  $(n - 1)!$  automorfismos que presentan, es decir, entre dos estrellas no ponderadas, que siempre serán isomorfas, existen  $(n - 1)!$  mapeados todos ellos igual de válidos, siempre y cuando, se asocien entre sí sus respectivos vértices raíz.<sup>31</sup> Los anteriores resultados no van a ser demostrados porque las estrellas no ponderadas no son de interés en este trabajo, pero con ello se quiere dejar en evidencia que el tratamiento que se haga de una estrella será muy diferente si esta es ponderada o no como a continuación se irá mostrando. Para ello, y en lo que sigue (salvo mención expresa en contra), se considerará que las estrellas son ponderadas.

Sean dos estrellas  $s_1$  y  $s_2$  ponderados,<sup>32</sup> ambas del mismo grado  $n$ , en contraposición a lo comentado para las estrellas no ponderadas, ahora  $s_1$  y  $s_2$  podrán ser o no isomorfas. Si fuesen isomorfas, es claro que, en todo caso, los vértices raíz se mapean entre sí dado que los grados de los vértices se preservan por un isomorfismo. Por lo tanto, el problema del isomorfismo entre estrellas ponderadas se reduce a encontrar un mapeado válido para los  $n - 1$  hojas de ambas estrellas. En una primera aproximación, supóngase que todos los  $n - 1$  pesos de las aristas de cada una de las estrellas son diferentes entre sí (en cada estrella no hay dos pesos iguales) entonces una condición necesaria y

---

<sup>31</sup>Estas propiedades pueden ser justificadas si se argumenta que, desde el punto de vista de la relación de equivalencia descrita en el apartado 2.5.2, las estrellas no ponderadas de grado  $n$  sólo tienen una clase de equivalencia.

<sup>32</sup>En lo que sigue los subíndices de las estrellas no corresponderán al grado de las mismas tal y como se había enunciado en la definición 2.15, sino que etiquetarán grafos en estrella. En este trabajo nunca se utilizará la notación enunciada en la definición 2.15 respecto del subíndice de  $s$ .

suficiente para el isomorfismo de estrellas ponderadas es que el conjunto de pesos de ambas estrellas coincida, entonces estos pesos pueden ser utilizados para identificar los vértices hoja homólogos entre las dos estrellas y obtener el mapeado.

Ahora, supóngase que cada una de las estrellas presenta  $l$  grupos de pesos repetidos con  $f_1$  repeticiones para el primer grupo,  $f_2$  repeticiones para el segundo grupo, y así sucesivamente hasta el último grupo con  $f_l$  repeticiones (nótese que los pesos no repetidos serán  $n - 1 - f_1 - f_2 - \dots - f_l$ ). Con esto en mente, dos grafos en estrella serán isomorfos si, y sólo si, el conjunto de los pesos con sus repeticiones coincide, entonces el mapeado podrá ser obtenido asociando el vértice raíz de una estrella con el vértice raíz de la otra (esto último siempre es así), asociando las hojas de las dos estrellas que tengan el mismo peso no repetido, para el primer grupo repetido habrá  $f_1!$  submapeados igualmente válidos entre sus hojas, para el segundo grupo de forma similar y así sucesivamente hasta el último grupo. Por lo tanto habrá en total  $f_1! \cdot f_2! \cdot \dots \cdot f_l!$  mapeados posibles e igualmente válidos debido a la presencia de automorfismos en cada uno de los grupos repetidos. En el caso extremo, todos los pesos idénticos, el tratamiento que se ha de dar a la estrella vuelve a ser el de un estrella no ponderada. Con todo ello se dan por demostrados los dos teoremas que siguen cuyo enunciado para este trabajo es de capital importancia.

**Teorema 2.2.** *Dos estrellas  $s_1$  y  $s_2$  ponderadas y ambas de grado  $n$  son isomorfas si, y sólo si, sus respectivos conjuntos de pesos con sus repeticiones coinciden.*

**Teorema 2.3.** *Sean dos estrellas  $s_1$  y  $s_2$  ponderadas, ambas de grado  $n$  e isomorfas, entonces el mapeado o mapeados se obtienen de la siguiente forma:*

1. *El vértice raíz de una estrella corresponde con el vértice raíz de la otra estrella.*
2. *Para cada uno de los pesos no repetidos el vértice hoja incidente a la arista con el peso en cuestión se corresponde con el vértice hoja incidente a la arista con el mismo peso de la otra estrella.*
3. *Para cada grupo con pesos repetidos se hace correspondedor cada vértice hoja incidente a la arista con el peso en cuestión con cualquier otro vértice hoja incidente a la arista con el mismo peso de la otra estrella. Si se desean obtener todos los mapeados será necesario hacer todas las permutaciones para cada grupo de pesos repetidos.*

Respecto a la relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  dada por el enunciado “... es isomorfo a ...” y descrita en el apartado 2.5.2 se vió que, en general, no existe o no se ha encontrado un representante de las clases de equivalencia que sea canónico que pueda ser calculado con tiempos de cómputo razonables. Si el anterior estudio se circunscribe nada más a las estrellas ponderadas resulta que tal representante canónico sí existe. Un criterio para encontrarlo es tan sencillo como ordenar los pesos de una estrella de menor a mayor haciendo coincidir el número del vértice hoja incidente a una arista con el peso en cuestión con el número de orden en la anterior ordenación (de 1 a  $n - 1$ ) y en asignar al vértice central el número  $n$ .<sup>33</sup> Con esto se puede aplicar la propiedad transitiva a cada una del par de estrellas hasta obtener sus representantes canónicos, entonces las estrellas serán isomorfas si, si sólo si, los representantes canónicos son iguales. Por lo tanto el problema del isomorfismo de estrellas se reduce a la igualdad de estrellas, esto último también es cierto si hay repeticiones en los pesos. De esta manera se puede obtener el mapeado simplemente teniendo en cuenta las transformaciones que se han hecho a las dos estrellas isomorfas para obtener sus representantes canónicos, si hubiere pesos repetidos se obtendría uno cualquiera de los posibles mapeados válidos (pero también sería posible obtener todos los mapeados). Con todo lo anterior, más lo dicho en el apartado 2.5.2 “Isomorfismo y relación de equivalencia” (página 20) y lo expuesto en el Anexo B “Estrella y matriz de adyacencia” (página 135) se dan por demostrados los dos teoremas siguientes que, igual que los dos anteriores, son de importancia capital en esta tesis.

---

<sup>33</sup>El criterio para encontrar el representante canónico podría ser otro igualmente válido, como, por ejemplo, ordenar los pesos de mayor a menor.

**Teorema 2.4.** *Sean dos estrellas  $s_1$  y  $s_2$  ponderadas y ambas de grado  $n$  y sus respectivos representantes canónicos denotados por  $(s_1)_c$  y  $(s_2)_c$  obtenidos al aplicar un criterio cualquiera, pero el mismo para ambas estrellas, entonces  $s_1$  y  $s_2$  son isomorfos si, y sólo si,  $(s_1)_c$  y  $(s_2)_c$  son iguales, esto es*

$$s_1 \cong s_2 \quad \Leftrightarrow \quad (s_1)_c = (s_2)_c \quad (2.48)$$

**Teorema 2.5.** *Sean dos estrellas  $s_1$  y  $s_2$  ponderadas, ambas de grado  $n$  e isomorfas. Por ser isomorfas sus representantes canónicos coinciden y será denotado por  $s_c$ . Si la biyección de los vértices de  $s_1$  a los vértices de  $s_c$  ha sido  $\varphi_{s_c \leftarrow s_1}$  y la biyección de los vértices de  $s_2$  a los vértices de  $s_c$  ha sido  $\varphi_{s_c \leftarrow s_2}$  entonces la biyección de los vértices de  $s_1$  a los vértices de  $s_2$  ( $\varphi_{s_2 \leftarrow s_1}$ ) será la composición de la inversa de la primera biyección y de la segunda biyección, esto es*

$$\varphi_{s_2 \leftarrow s_1} = \varphi_{s_2 \leftarrow s_c} \circ (\varphi_{s_1 \leftarrow s_c})^{-1} \quad (2.49)$$

*y la biyección de los vértices de  $s_2$  a los vértices de  $s_1$  ( $\varphi_{s_1 \leftarrow s_2}$ ) será la composición de la inversa de la segunda biyección y de la primera biyección, esto es*

$$\varphi_{s_1 \leftarrow s_2} = \varphi_{s_1 \leftarrow s_c} \circ (\varphi_{s_2 \leftarrow s_c})^{-1} \quad (2.50)$$

*En donde es evidente que  $\varphi_{s_1 \leftarrow s_2} = (\varphi_{s_2 \leftarrow s_1})^{-1}$ .*

Recordando que la composición de permutaciones se traduce en el producto de matrices de permutación, entonces podrán ser usadas dichas matrices para encontrar el mapeado de un isomorfismo.

## 2.7 Conclusiones

En general, nada nuevo se ha aportado en este capítulo, su inclusión obedece a disponer de un documento autocontenido ya que todo el material expuesto será utilizado (directa o indirectamente) en el resto de la tesis. No obstante, se han dado dos definiciones (que no existen en la literatura sobre el tema) que serán clave para la correcta asimilación de la aportación hecha en esta tesis. Estos han sido el grafo asociado y la compatibilidad de una transformación de un grafo respecto al isomorfismo. Se insiste que sin la lectura de estos conceptos (sobre todo el segundo) será muy difícil hacerse una idea del alcance de la aportación hecha. Por otro lado, también es clave el estudio hecho de los grafos en estrella ya que serán utilizados de forma muy intensiva en el SM.



## Capítulo 3

# Estado del arte del emparejamiento de grafos

### 3.1 Introducción

Durante más de cuatro décadas se ha estado investigando el emparejamiento exacto e inexacto de grafos y subgrafos y, al día de hoy, se continúa en ello; luego la literatura que se ha producido, y se está produciendo, es enorme. Si además se añade que a muchos métodos o técnicas otros autores les han incorporado mejoras o han hecho variantes es comprensible que redactar (además de forma sucinta) un estado del arte sobre todo ello es sumamente difícil.<sup>34</sup> En este capítulo se pretende exponer un material claramente compartimentado pero mínimo y ni mucho menos exhaustivo. De aquí que sólo se esbozará aquellos métodos que sean nítidamente diferentes del resto y se obviarán las mejoras o variantes, al no ser que hayan tenido un gran impacto.

Con mucho pesar otros aspectos relacionados con la temática serán dejados de lado ante la imposibilidad material de abordar todos ellos, cabe destacar el homomorfismo de grafos, el isomorfismo de subgrafos y el problema del máximo común subgrafo de dos grafos. Está demostrado y es bien conocido que todos ellos tienen una complejidad computacional **NP**-completo<sup>35</sup> por lo que todos los esfuerzos están siendo volcados en buscar soluciones subóptimas en tiempo polinomial para estos problemas.

Este capítulo no se ceñirá estrictamente al isomorfismo de grafos (emparejamiento exacto de grafos),<sup>36</sup> sino que se comentarán métodos que persiguen encontrar un mapeado entre dos grafos de forma tal que se “parezcan” lo más posible, es lo que se denomina emparejamiento inexacto de grafos. Si se tiene en cuenta que la utilidad práctica de un grafo (en la gran mayoría de los ámbitos que se utiliza) reside en su gran poder de abstracción sería de desear que dos grafos que reflejan la misma realidad sean isomorfos. La praxis es que, en la mayoría de los casos, no serán isomorfos (pero serán “parecidos”) por la dificultad que encierra controlar todos los factores externos a la realidad de interés. Para ilustrar esto último, supóngase dos imágenes fijas tomadas del mismo objeto y en el mismo escenario, después de diferentes etapas de procesado (filtrado, segmentado, extracción de características, etc.) se obtienen sendos grafos que son la abstracción de la misma

---

<sup>34</sup>Para hacerse una idea de la vasta literatura publicada sobre el tema en la página 95 de [MP14] publicado recientemente (año 2013) se asegura que por lo menos existen unos cuantos centenares de algoritmos publicados.

<sup>35</sup>Véase la demostración para el homomorfismo de grafos en [Lev73]. Para el isomorfismo de subgrafos véase [Coo00], aunque existen casos particulares [Rey77] en que la complejidad computacional es polinomial. El problema del máximo común subgrafo es reducible al problema del clique y este es **NP**-completo [Kar09] (aunque la referencia citada es de una reedición del año 2009 el artículo original es de 1972), Para el problema del máximo común subgrafo son recomendables las lecturas de [Kan92], [BFG<sup>+</sup>02] y [AK14].

<sup>36</sup>En todo el texto se hará uso libre e indistinto de la expresión “emparejamiento exacto” y el término “isomorfismo”, en este contexto serán equivalentes aunque el primero tiene connotaciones más prácticas y el segundo más teóricas.

realidad, pero debido al ruido, distorsiones, las condiciones no controlables de las tomas de las imágenes, cambios en la iluminación y a otras razones estos dos grafos, ni mucho menos, serán isomorfos. Es por ello que en la literatura sobre el tema, con la finalidad de revertir la teoría en usos pragmáticos, hay bastante más interés (y por lo tanto más material) sobre el emparejado inexacto de grafos que sobre el exacto (isomorfismo).<sup>37</sup> Una problemática que se produce exclusivamente en el emparejamiento inexacto de grafos es formalizar lo que se entiende por grafos “parecidos”. Es evidente que se deberá, implícita o explícitamente, tener en cuenta una distancia<sup>38</sup> que mida el “parecido” entre grafos a fin y efecto de obtener el “mejor” mapeado. Este hecho abre, más si cabe, las posibilidades a la hora de diseñar algoritmos para el emparejamiento inexacto dado que pueden tomarse diferentes definiciones para la distancia entre grafos.

Para acabar de complicar las cosas no es lo mismo un método, técnica, algoritmo, . . . que decida de forma binaria si dos grafos son isomorfos o que extraiga el mapeado entre ambos grafos, pudiéndose producir la paradoja en la que se puede conocer si dos grafos son isomorfos en un tiempo razonable pero la extracción del mapeado a efectos prácticos es inviable. Una estructura expositiva compartimentada debería desgajar ambos aspectos dándoles un tratamiento diferenciado, pero esto daría lugar a un texto excesivamente extenso por lo que se ha optado por mezclar ambos planteamientos.

Por otro lado, no es lo mismo un grafo ponderado o no ponderado<sup>39</sup> y por lo tanto los métodos, técnicas, algoritmos, . . . serán diferentes según el caso; muchos de los trabajos que se mostrarán serán para grafos no ponderados. No obstante se puede afirmar que el emparejamiento de grafos no ponderados es más “difícil” que para grafos ponderados, ello es debido (de forma muy intuitiva) a que los propios pesos pueden servir para identificar de forma inequívoca las aristas homólogas entre grafos y de carambola los nodos homólogos (esto no es posible en grafos no ponderados).<sup>40</sup>

En los interesantes textos de [CFSV04], [WM03], [Gal06], [Bun00a], [BIN05] y [Bun00b] se exponen sendas descripciones de las aportaciones realizadas en estas últimas décadas sobre el tema, por otra parte la lectura de [GJ90] es muy recomendable, por no decir inexcusable, para la correcta asimilación del presente capítulo, y complementariamente los textos de [AB09], [Gol08] y/o [Pap03]. Un texto de referencia y consulta puede ser [GY05].

Hoy por hoy no se conoce un método, técnica, algoritmo, . . . que resuelva en general el problema del isomorfismo de grafos en tiempo polinomial, además ni siquiera se conoce si puede o no puede existir tal algoritmo.<sup>41</sup> De forma más concisa se afirma en [Coo71] (página 6) que el isomorfismo de grafos es uno de los pocos ejemplos de problema **NP** del que se desconoce si está en **NP**-completo o en **P**.<sup>42</sup> Teniendo en cuenta lo anterior no es de extrañar que ya en el año 1977 en [RC77] se califique el problema del isomorfismo de grafos como “enfermedad”.

En [Tor04] se afirma que el algoritmo más rápido que resuelve el problema del isomorfismo de grafos pero de valencia acotada está propuesto en [BL83] siendo su complejidad computacional de  $\exp \sqrt{cn \log n}$  siendo  $c$  una constante y  $n$  el grado del grafo. Existen pocos<sup>43</sup> trabajos que hagan

---

<sup>37</sup>Otras razones por las que existe más interés sobre el emparejamiento inexacto que sobre el exacto es que

a) El emparejamiento exacto requiere, en general, muchos más recursos temporales, en términos computacionales, que el emparejamiento inexacto.

b) El emparejamiento exacto no garantiza siempre una respuesta en tiempos computacionales razonables.

Es por ello que muchas aplicaciones prácticas que requerirían un emparejamiento exacto es sustituido, si es factible, por uno de inexacto.

<sup>38</sup>O si se prefiere (formalmente más relajado) función de coste.

<sup>39</sup>O si se prefiere, sólo en el contexto de este trabajo, con todos los pesos iguales.

<sup>40</sup>Umeyama en el último párrafo de la introducción de [Ume98] hace la interesante afirmación: “... el problema del emparejamiento de grafos ponderados incluye el problema del isomorfismo de grafos ...”.

<sup>41</sup>Aún así existen numerosos trabajos publicados que afirman que el problema del isomorfismo de grafos es polinomial tal como se comenta de puntillas en la introducción de [MP14]. La comunidad científica suele tratar con muchas reservas todos ellos.

<sup>42</sup>La resolución del problema en general está premiada con una muy importante cantidad económica ofrecida por el “Clay Mathematics Institute”. Véase [CB06] para otros problemas importantes que aún permanecen abiertos y dotados económicamente por el instituto anteriormente citado.

<sup>43</sup>Pocos en relación a la ingente literatura generada al respecto.

comparaciones serias entre las prestaciones de los diferentes algoritmos que se han propuesto, es obvio que, en todo caso, cada uno de estos trabajos no podrá abrazar todos los algoritmos que se han llegado a proponer, al respecto pueden ser consultados [BV99] y [FSV01] entre otros.

La lectura de este capítulo permitirá dejar en clara evidencia que el CEM y el SM (que serán presentados más adelante) son absolutamente novedosos y que ni son una variante ni parten de ninguno de los trabajos presentados en estas cuatro décadas. El resto de este capítulo quedará dividido en dos grandes bloques: emparejamiento exacto e inexacto de grafos.

## 3.2 Emparejamiento exacto de grafos

Hay que distinguir entre el emparejamiento exacto en tiempo polinomial de grafos en general que, como ya se ha comentado, no tiene solución y que ni siquiera se sabe si existe y el mismo asunto pero para un subconjunto de grafos determinado para los que se ha demostrado que sí existe solución. En los dos siguientes apartados se tratan de forma diferenciada ambos asuntos comenzando por el segundo y acabando por el primero.

### 3.2.1 Casos particulares de emparejamiento exacto en tiempo polinomial

Para ciertos subconjuntos de grafos se conocen algoritmos que resuelven el problema del isomorfismo de grafos de forma exacta con complejidad computacional subexponencial. Los casos más interesantes son los enumerados a continuación. En algunos de estos casos, dada su relativa escasa popularidad, se ha dado una muy breve descripción con la intención de facilitar la lectura.

1. **Grafos planos.** El subconjunto de los grafos planos tiene, por sí mismo, multitud de aplicaciones prácticas, es por ello que se han dedicado esfuerzos considerables para encontrar resultados prácticos en épocas muy precoces; un trabajo que identifica estos grafos es [HT74]. Weinberg [Wei66] explota el hecho de que los grafos planos triconectados<sup>44</sup> se pueden representar de forma única en una esfera [Whi92]<sup>45</sup> para elaborar un algoritmo con complejidad computacional  $O(N^2)$  para testear el isomorfismo de grafos planos triconectados. El anterior resultado es extendido a grafos planos arbitrarios con complejidad computacional  $O(N \log N)$  en los trabajos de Hopcroft y Tarjan [HT71, HT72]. El anterior resultado es mejorado por Hopcroft y Wong pasando su complejidad computacional a ser  $O(N)$  en el mejor caso [HW74], no obstante los propios autores reconocen el valor puramente teórico de este resultado y ponen en duda su uso práctico. En [KHC04] se propone un algoritmo con complejidad computacional  $O(N^2)$  pero que tiene la gran ventaja de que es fácilmente implementable en un computador convencional, en este mismo trabajo también se expone un estudio muy interesante de los resultados obtenidos previamente.
2. **Árboles con raíz.** Dado que un árbol siempre es un grafo plano este caso estaría incluido en el caso anterior que es más general, sin embargo debido al alto interés práctico que despiertan los árboles por sí mismos han sido estudiados de forma monográfica. En [AHU74] se da un algoritmo para el isomorfismo de árboles con raíz con complejidad computacional lineal según el número de nodos ( $O(N)$ ), en esencia tal algoritmo asigna un código a cada árbol con raíz y al final lo que se comparan son los códigos. Los anteriores enfoques también sirven para árboles sin raíz, en estos el problema se traslada a la localización de sendos nodos que puedan ejercer la función de raíces para ello se busca el centro de los grafos.

---

<sup>44</sup>Una grafo fuertemente conexo es triconexo cuando al eliminar dos cualesquiera de sus vértices sigue siendo fuertemente conexo.

<sup>45</sup>Aunque la fecha de esta referencia es de una reedición del año 1992 el trabajo original es de 1933.

3. **Grafos de valencia acotada.** Utilizando la teoría de grupos Luks presenta en [Luk82] un método para el testeo del isomorfismo de grafos de valencia acotada con una complejidad computacional polinomial. El enfoque desde la teoría de grupos del isomorfismo de grafos ha sido aplicado por diversos autores para diversos tipos de grafos por lo que es recomendable el libro [Hof82] que cubre aspectos básicos de dicha teoría (en especial el Capítulo II) y el caso de los grafos de valencia acotada (Capítulo V).
4. **Grafos de intervalos.** Sean  $N$  intervalos de la recta real de forma que a cada intervalo se le asocia un nodo de un grafo, entonces dos nodos son adyacentes si, y sólo si, sus respectivos intervalos se intersecan, en este caso se dice que este grafo es de intervalos. En [LB79] se da un algoritmo de decisión para el isomorfismo de grafos de intervalos mediante el uso de unas estructuras llamadas “PQ-tree” con una complejidad computacional de  $O(N + M)$  donde  $M$  es el tamaño del grafo. Sea dicho de paso, en el mismo artículo el autor demuestra que el problema del isomorfismo de grafos cordales<sup>46</sup> es **NP-duro**.
5. **Grafos circulares.** Sea una circunferencia (cuya posición del centro y longitud del radio son irrelevantes) en la que existen  $N$  cuerdas de forma tal que a cada cuerda se la asocia un nodo del grafo, entonces dos nodos son adyacentes si, y sólo si, sus respectivas cuerdas se intersecan, en este caso se dice que el grafo es circular (también es conocido como grafo circular de cuerdas) [EI71].<sup>47</sup> En [GSH89] puede ser encontrado un algoritmo para el reconocimiento de este tipo de grafos y más recientemente en [Spi94] y en [Hsu95], todos los anteriores algoritmos son polinomiales en tiempo. En este último artículo también se ataca el isomorfismo de los grafos circulares de arcos, explotando y generalizando el concepto de la estructura “PQ-tree” utilizada en los grafos de intervalos dando un algoritmo con complejidad computacional de  $O(N + M)$  donde  $M$  es el tamaño del grafo; el resultado obtenido es extendido a los grafos de cuerdas (grafos circulares).
6. **Grafos de género acotado.** Informalmente un grafo es de género  $\gamma$  (con  $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ ) cuando puede ser representado en una esfera con  $\gamma$  “agujeros” sin que las aristas se intersequen (con  $\gamma$  el menor posible), es evidente que para  $\gamma = 0$  se está ante un grafo plano, por lo tanto este tipo de grafos es una generalización de los grafos planos, o si se prefiere los grafos planos son un caso particular de este tipo de grafos (género 0). En [FMR79] se da un método para determinar el género de un grafo. Simultáneamente en el tiempo se presentaron los trabajos de [Mil80] y de [FM80], como se reconoce en el primer trabajo ambos son muy similares. En ellos se presenta un algoritmo para el testeo del isomorfismo de grafos de este tipo. La complejidad computacional del algoritmo es  $N^{O(\gamma)}$  con la notación utilizada más arriba. Después de dos décadas, en el artículo de [Gro00] se tacha de complicados los algoritmos de los dos trabajos anteriores y se propone otro algoritmo basado en lo que el autor denomina “color refinement” siendo la complejidad computacional la misma que los dos anteriores.
7. **Grafos con multiplicidad de los autovalores acotada.** Supóngase que de la matriz de adyacencia de un grafo de grado  $N$  se obtienen sus autovalores y que  $m$  es la multiplicidad mayor de ellos. En [BGM82] se presentan dos algoritmos distintos y sin conexión conceptual alguna entre ellos para el testeo del isomorfismo de este tipo de grafos. El primer algoritmo es determinístico y su complejidad computacional es  $O(N^{4m+c})$  y el segundo es no determinístico y utiliza el algoritmo “Las Vegas”<sup>48</sup> con complejidad computacional  $O(N^{2m+c})$  en donde  $c$  es una constante. En ambos casos la solución aportada sólo es para grafos no dirigidos.

---

<sup>46</sup>Los grafos cordales o triangulados son los grafos que no contienen ciclos inducidos con 4 o más nodos. Los grafos de intervalos y los cordales están relacionados porque los primeros son un subconjunto de los segundos [LB62].

<sup>47</sup>Estos grafos no se han de confundir con los grafos circulares de arcos en donde lo que se intersecan son  $N$  arcos. En general, por grafo circular se debe entender un grafo de cuerdas.

<sup>48</sup>El algoritmo “Las Vegas” fue introducido por László Babai in 1979 para el tratamiento del isomorfismo de grafos como una versión fuerte del algoritmo de “Monte Carlo” (véase [Bab79]).

8.  **$k$ -árboles parciales.** Los  $k$ -árboles son utilizados en multitud de problemas como puede ser la asignación eficiente de memoria a procesadores. Según los autores de [LKT02] los  $k$ -árboles son una generalización natural de los árboles, estos pueden ser definidos<sup>49</sup> de forma recursiva mediante la aplicación de las dos reglas siguientes:<sup>50</sup>

- (a) Un grafo completo de  $k$  vértices ( $k$ -clique) es un  $k$ -árbol.
- (b) Si  $T$  es un  $k$ -árbol, entonces un nuevo  $k$ -árbol se forma añadiendo un nuevo vértice  $v$  y agregando  $k$  aristas entre  $v$  y cada vértice de un  $k$ -clique en  $T$ .

A un subgrafo de un  $k$ -árbol se le denomina un  $k$ -árbol parcial. Caracterización, propiedades e información extra, fuera de lo que aquí se está tratando, puede ser encontrado en los textos de [BP71], [Ros74], [CM93] y [Pat86] entre otros muchos. Ya en 1985 se conjetura en [Joh85] que existe un algoritmo polinomial de decisión sobre el isomorfismo de este tipo de grafos. Poco después, en el trabajo [Bod90] se demuestra que tal algoritmo polinomial existe y se da una descripción del mismo resultando una complejidad computacional de  $O(N^{4,5})$ . El autor del anterior trabajo sugiere en las conclusiones que el mismo algoritmo, con ligeras modificaciones, puede proporcionar el mapeado del isomorfismo pero no da más indicaciones.

### 3.2.2 Caso general de emparejamiento exacto

En los apartados que siguen cuando se hable de emparejamiento exacto sin más, se deberá entender emparejamiento exacto para grafos en general sin presuponer nada acerca de la topología, espectro u otras características de los grafos. Se recuerda, aún a riesgo de ser reiterativo, que en el caso general no existe un algoritmo en tiempo polinomial y que no se sabe si tal algoritmo puede existir. Por lo tanto todos estos algoritmos, en el caso peor, tendrán una complejidad computacional factorial, lo que en la práctica hará que ninguno de ellos garantice siempre una respuesta al problema concreto planteado con un tiempo razonable. En lo que sigue sólo se tendrán en cuenta tres enfoques al problema según el uso de matrices de permutación, árboles de búsqueda y la teoría de grupos.<sup>51</sup>

#### 3.2.2.1 Enfoque utilizando matrices de permutación

Teniendo en cuenta la definición de matriz de permutación (definición 2.12 en la página 18) se tiene que una manera de decidir si dos grafos  $g$  y  $h$  del mismo grado  $N$  son isomorfos es probar cada una de las  $N!$  matrices de permutación ( $P_N$ ) en la igualdad (2.26) de la página 19 hasta encontrar una matriz de permutación que verifique dicha igualdad (fuerza bruta). Si se prueban todas las matrices de permutación sin encontrar alguna que verifique (2.26) entonces los grafos no son isomorfos. Es evidente que en el caso peor, o bien cuando los grafos no son isomorfos, se tendrá que probar  $N!$  matrices de permutación haciendo prohibitivo el uso de este método al no ser que el grado de los grafos sea extraordinariamente bajo (menor que la decena). La fuerza bruta resuelve de forma exacta el emparejamiento de grafos pero la complejidad computacional es de orden factorial según el número de nodos ( $O(N!)$ ).

No obstante, para grados de los grafos muy bajos la fuerza bruta es perfectamente válida,<sup>52</sup> en este caso el tiempo de computo (estadísticamente hablando) se reduce si se tiene en cuenta que en cada comprobación de una matriz de permutación no es necesario realizar integralmente la multiplicación

---

<sup>49</sup>Existen otras maneras equivalentes de definir este tipo de grafos.

<sup>50</sup>En esta definición se ha de tener en cuenta que para un 1-árbol un 1-clique es un vértice.

<sup>51</sup>Existen otros enfoques y algoritmos como pueden ser caminos aleatorios [GMS05a, EWH09], el algoritmo RW2 [GMS05b], redes neuronales [JW03, AFYA92], distancia de edición [BN07], métodos probabilísticos [BES80, Bab79], algoritmos genéticos [WFH97], algoritmos heurísticos [DGMES13], ... comentar, aunque sea de forma breve, todos ellos sería materialmente imposible.

<sup>52</sup>Corneil y Gotlieb en la página 52 de [CG70] no recomendaban sobrepasar los 10 vértices. No hay que perder de vista que este consejo es para los computadores existentes en el año 1970.

de matrices y después comparar las matrices de adyacencia. El sentido común dice que se han de ir obteniendo uno a uno los elementos de la matriz de adyacencia y comparar dicho elemento con el de la otra matriz de adyacencia, en el momento que se detecta que no son iguales ya no son isomorfos y se deja de obtener más elementos de la matriz para ser comparados (como máximo  $N(N-1)/2$  comparaciones para grafos no dirigidos o  $N(N-1)$  para grafos dirigidos). En este caso se descarta la matriz de permutación en curso y se pasa a la siguiente.

### 3.2.2.2 Enfoque utilizando árboles de búsqueda

Todos ellos se basan en la fuerza bruta pero utilizando un árbol de búsqueda del que, de alguna manera, se van eliminando aquellas ramas que no conducen a la solución. De todos los algoritmos que utilizan esta estrategia se destacarán los algoritmos de Ullmann, SD y VF. Una aportación pionera fue la de Corneil y Gotlieb [CG70] que en 1970 propusieron un algoritmo eficiente para el isomorfismo de grafos. Todo su trabajo se basa en una conjetura que ocho años más tarde en [Mat78] se mostró (mediante contraejemplos) que no era cierta; no obstante, por razones históricas, se ha querido dejar constancia de esta reseña.

1. **Algoritmo de Ullmann.** En 1976 Ullmann propone en [Ull76] un algoritmo para el isomorfismo de subgrafos, detección de cliques, isomorfismo de grafos e isomorfismo de grafos dirigidos, como el interés de esta tesis es el isomorfismo de grafos se focalizará el trabajo de Ullmann sobre este problema. El algoritmo de Ullmann es popular, tiene solera y está muy escogido como punto de partida para otros algoritmos, este algoritmo proporciona una solución exacta del isomorfismo de grafos (el algoritmo intrínsecamente proporciona el mapeado) para cualesquieran que sean los grafos. Según el informe técnico [VS09] el algoritmo tiene una complejidad computacional de  $O(N^3)$  y  $O(N! \cdot N^3)$  en los casos mejor y peor respectivamente, por lo tanto el algoritmo de Ullmann es no polinomial (recuérdese que se está buscando la solución exacta para el caso general) y, consecuentemente, en ocasiones será incapaz de proporcionar algún resultado en un tiempo razonable. En esencia el algoritmo de Ullmann utiliza la fuerza bruta y usa la búsqueda en profundidad en un árbol de soluciones. Para reducir el espacio de soluciones utiliza un filtrado de las soluciones candidatas utilizando primero la coherencia del grado entre los vértices homólogos en un isomorfismo, y después la coherencia de los vértices vecinos al nodo en curso abandonando esta solución candidata si se detecta la incoherencia de los dos aspectos anteriores descartando esta vía y volviendo atrás (“backtracking”). Respetando la notación del artículo para dos grafos  $G_\alpha$  y  $G_\beta$  con matrices de adyacencia  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ , grados  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  y tamaños  $q_\alpha$  y  $q_\beta$  respectivamente<sup>53</sup> Ullmann calcula la siguiente expresión (que se sustenta en la igualdad (2.26)):

$$C = [c_{ij}] = M'(M'B)^t \quad (3.1)$$

en donde  $M'$  no es más que una matriz de permutación cuando el algoritmo se aplica al isomorfismo de grafos. Si se cumple que

$$(\forall i \forall j) \quad (a_{ij} = 1) \Rightarrow (c_{ij} = 1) \quad (3.2)$$

$$\begin{matrix} 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N \end{matrix}$$

entonces  $M'$  determina un isomorfismo entre  $G_\alpha$  y  $G_\beta$ , en cuyo caso si es  $[m'_{ij}] = 1$  entonces el  $j$ -ésimo vértice en  $G_\beta$  corresponde con el  $i$ -ésimo vértice en  $G_\alpha$  por este isomorfismo.

Es evidente que al comienzo del algoritmo  $M'$  no es conocida por lo que se construye una matriz  $M^0 = [m^0_{ij}]$  tal que:

- (a) Si el grado del  $j$ -ésimo vértice de  $G_\beta$  es mayor o igual que el grado del  $i$ -ésimo vértice de  $G_\alpha$  entonces  $[m^0_{ij}] = 1$ .

---

<sup>53</sup>En lo que sigue se particularizará el algoritmo de Ullmann exclusivamente para el isomorfismo de grafos y, por lo tanto, será  $p_\alpha = p_\beta$  y  $q_\alpha = q_\beta$ . Los valores anteriores serán denominados en este texto por  $N$  y  $M$  respectivamente.

(b) En caso contrario se toma  $[m_{ij}^0] = 0$ .

Se hace notar que la matriz  $M^0$  así construida no tiene porque ser una matriz de permutación, por otro lado si  $[m_{ij}^0] = 0$  entonces es seguro que el vértice  $j$ -ésimo de  $G_\beta$  no corresponde con el vértice  $i$ -ésimo de  $G_\alpha$ , esto último es lo que permite realizar podas. El algoritmo trabaja enumerando todas las matrices  $M'$  posibles tales que para cada elemento de  $M'$  se cumpla  $(m'_{ij} = 1) \Rightarrow (m_{ij}^0 = 1)$ . Para cada una de las matrices  $M'$  que cumple la condición anterior se comprueba si cumple la condición (3.2). Ullmann introduce lo que denomina “refinement procedure”, con él y para cada matriz  $M$  que no sea terminal en el árbol de búsqueda se comprueba si cada uno de dicha matriz verifica (3.3)

$$\left( \forall x \right)_{1 \leq x \leq N} \left( (a_{ix} = 1) \Rightarrow \left( \exists y \right)_{1 \leq y \leq N} (m_{xy} \cdot b_{yj} = 1) \right) \quad (3.3)$$

Si no se verifica la anterior ecuación entonces se cambia el uno por un cero en la matriz  $M$ . El algoritmo finaliza cuando se encuentra una matriz que no sufre cambios. Es de destacar que se necesita mantener en memoria todas las matrices del árbol de búsqueda que no han sido podadas lo cual tiene un alto coste computacional.

2. **Algoritmo SD.** Este algoritmo toma el nombre de las iniciales de los autores del mismo [SD76]. El título del artículo parece indicar que el algoritmo SD sólo es aplicable a grafos dirigidos pero en una lectura atenta del mismo no se encuentra ningún impedimento explícito para su uso con grafos no dirigidos, por otro lado el problema tratado es exclusivamente el isomorfismo de grafos. El algoritmo SD, igual que el anterior, proporciona intrínsecamente el mapeado del isomorfismo si lo hubiere.<sup>54</sup> También utiliza la fuerza bruta pero con podas y vuelta atrás. La novedad del algoritmo SD respecto al de Ullmann es que realiza una partición de los vértices de los grafos lo cual puede llegar a reducir drásticamente el espacio de soluciones candidatas en el árbol de búsqueda, para ello utiliza una matriz cuadrada de orden  $N$  denominada matriz de distancias ( $D$ ) cuyos elementos ( $d_{ij}$ ) quedan definidos como sigue.

$$d_{ij} = \begin{cases} 0; & \text{para } i = j \\ \infty; & \text{si no existe un camino desde } i \text{ hasta } j \\ \text{la longitud del camino más corto desde } i \text{ hasta } j; & \text{para el resto de casos} \end{cases} \quad (3.4)$$

tomando  $i$  y  $j$  los valores  $1, 2, \dots, N$ . Se hace notar que el segundo supuesto correspondería a un grafo debilmente conexo por lo que este supuesto raramente se producirá. Para la generación de la matriz  $D$  se puede utilizar cualquier algoritmo de cálculo de la distancia mínima entre dos vértices como los enumerados en [Dre69], pero los autores recomiendan el algoritmo de Floyd [Flo62] de orden  $O(N^3)$ . Los autores utilizan una demostración en [HY64] para asegurar que dado un grafo la representación mediante la matriz de distancias es única.<sup>55</sup> A partir de la matriz de distancias se construyen las matrices características por filas ( $XR$ ) y por columnas ( $XC$ ), ambas de orden  $N \times (N - 1)$ , en donde cada fila se identifica con un vértice del grafo y cada columna por una distancia (la columna 1 es la distancia 1, la columna 2 es la distancia 2, ...). El elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz  $XR$  (respectivamente  $XC$ ) es el número de vértices que están a una distancia mínima  $j$  desde (respectivamente hasta) el vértice  $i$ . Operativamente es extraordinariamente sencillo construir estas matrices a partir de la matriz de distancias, para ello del vértice  $i$  se contabilizan los elementos de la fila (respectivamente columna)  $i$  de la matriz  $D$  que valen  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  y se asignan a la fila  $i$  y columna  $k$  de la matriz  $XR$  (respectivamente  $XC$ ).<sup>56</sup> Acto seguido se construye la matriz característica  $X$  de orden  $N \times (N - 1)$  cuyos elementos son la concatenación de

<sup>54</sup>El título del artículo sugiere que el algoritmo SD es sólo un algoritmo de decisión, aspecto que induce a error.

<sup>55</sup>En esta última referencia también se demuestra la inversa siempre y cuando los elementos de  $D$  sean no negativos y satisfagan la desigualdad triangular ( $d_{u,v} + d_{v,w} \geq d_{u,w}$ ).

<sup>56</sup>Si el grafo es no dirigido ambas matrices son iguales.

los elementos de las matrices de características por filas y por columnas, siendo evidente que si dos grafos son isomorfos las correspondientes matrices características son iguales (condición necesaria pero no suficiente). En este punto, la matriz característica permite realizar una partición inicial del conjunto de vértices formado cada subconjunto por los vértices que tienen las filas iguales entre sí en la matriz característica, los articulistas denominan a cada subconjunto celdas. A partir de aquí, y de forma enumerativa, se emparejan vértices y se testea su consistencia con un isomorfismo utilizando la matriz de distancias. El método se reitera y se va calculando un nuevo particionado cada vez que se encuentran un par de nodos homólogos. Se deja constancia que en el artículo comentado hay un ejemplo muy clarificador que permite seguir la evolución del algoritmo. Por último, se destaca que en el caso mejor la complejidad computacional es de orden  $O(N^3)$  y en el caso peor de  $O(N \cdot N!)$ .

3. **Algoritmo VF.** Como los dos anteriores el algoritmo VF [CFSV99]<sup>57</sup> utiliza la fuerza bruta con una búsqueda en profundidad en el árbol de soluciones. La diferencia con respecto a ellos es que usa un conjunto de “reglas” heurísticas para podar el espacio de soluciones. El algoritmo VF puede ser utilizado tanto para el problema del isomorfismo como para el de subgrafos siendo, según afirman los propios autores, la complejidad computacional de  $O(N^2)$  en el mejor caso y de  $O(N!N)$  en el peor caso. Excepto por el hecho de usar un conjunto de reglas no existen diferencias conceptuales muy importantes respecto a los anteriores por lo que no se entrará en comentar más detalles sobre este algoritmo.

### 3.2.2.3 Enfoque utilizando la teoría de grupos

Todas las propuestas que usan este enfoque buscan un etiquetado canónico de los grafos, de forma tal, que después de reetiquetar dos grafos que sean isomorfos serán iguales [McK78], esto es, dados dos grafos  $g$  y  $h$  entonces

$$g \cong h \iff C(g) = C(h) \tag{3.5}$$

en donde  $C(\cdot)$  denota un etiquetado canónico.<sup>58</sup>

Ha de quedar claro desde un principio (como afirma Piperno en la introducción de [Pip08]) que, en términos de complejidad computacional, el estado teórico del etiquetado canónico está todavía sin resolver. Por lo tanto, el problema se traslada en encontrar de forma eficiente este etiquetado canónico dándose diferentes soluciones prácticas. Sin embargo, se tiene que asumir que todas las soluciones aportadas tendrán una complejidad computacional exponencial en el caso peor (recuérdese, aún a riesgo de reiteración, que se está buscando una solución exacta en el caso general).

Todas las estrategias que utilizan este enfoque se han traducido en programas informáticos a los que se les ha dado nombre propio y que han sido ofrecidos a la comunidad científica. Estos son por orden cronológico de aparición “nauty”<sup>59</sup> [McK81], “saucy” [DLSM04], “Bliss” [JK07, JK11], “Traces” [MP14] y “conauto” [LPFA09, LPFANC11]. En [MP14] se muestra un estudio comparativo entre todos ellos pero se ha de tener en cuenta que los autores son los creadores de dos de ellos. En [Miy97] se muestran mediante ejemplos clases de grafos que hacen que “nauty” tenga un comportamiento exponencial.

De forma muy breve, sea  $g$  un grafo de orden  $N$  cuyo conjunto de nodos es  $V = \{1, 2, \dots, N\}$ , entonces para la búsqueda de este etiquetado canónico se parte de una partición ordenada (orden lexicográfico) equitativa de los nodos del grafo  $g$ . A partir de aquí se va construyendo un árbol en donde las hojas serán grafos con un etiquetado isomorfo al grafo  $g$  y sólo una hoja será el etiquetado

---

<sup>57</sup>Existe una versión mejorada: VF2 [CFSV01]. Conceptualmente no añade nada nuevo pero optimiza la forma en que el algoritmo guarda y manipula los datos.

<sup>58</sup>Este grafo con etiquetado canónico no es más que el representante canónico de su clase de equivalencia tal como se definió en la sección 2.5.2.4 “Representante canónico” (página 22).

<sup>59</sup>Nauty: **no automorphisms, yes?**.

canónico buscado. El árbol necesita ser podado bajo pena de tener tiempos de computo prohibitivos para ello si se descubre un automorfismo la rama del árbol correspondiente es abandonada.

### 3.3 Emparejamiento inexacto

Como ya se dejó entrever en la introducción una pieza clave que diferenciará con mucho un método de otro será la forma en que se mida la distancia entre dos grafos, esta medida será denominada función de coste que podrá cumplir los requisitos de una distancia o métrica en sentido matemático. Todos los algoritmos de emparejamiento inexacto pueden ser clasificados en óptimos o subóptimos (estos últimos también son denominados aproximados). Para que un algoritmo puede ser catalogado de óptimo deberá proporcionar un resultado cuando la función de coste alcance el mínimo absoluto, en este caso si los grafos son isomorfos un algoritmo óptimo siempre proporcionará la solución exacta. En este sentido el emparejamiento óptimo e inexacto de grafos es una generalización del emparejamiento exacto. Los algoritmos subóptimos proporcionan un resultado cuando la función de coste alcanza un mínimo local, en este caso si los grafos fuesen isomorfos el algoritmo subóptimo no necesariamente proporcionaría la solución exacta aunque esta existiera. En general, los algoritmos óptimos consumen más recursos temporales que los subóptimos. La distinción hecha con anterioridad, aunque importante, no será tenida en cuenta para clasificar los algoritmos de emparejamiento inexacto que seguirán; el criterio será otro, se agruparán los algoritmos por métodos o familias de funciones de coste.

#### 3.3.1 Métodos basados en un árbol de búsqueda

En esencia se usa un árbol de búsqueda con vuelta atrás (backtracking), para la poda de las ramas se utiliza una función de coste del árbol parcial obtenido y/o una estimación del resto de la rama por explorar, la inmensa mayoría de los trabajos que atacan este problema utilizan algoritmos heurísticos. Dado que existen bastantes propuestas sólo se dará alguna pincelada sobre ellas.

El primer trabajo fue el presentado en [TF79], en él se define la corrección de errores (“error-correcting”) del emparejamiento inexacto de grafos basada en el coste de edición. El algoritmo presentado sólo contempla como operación de edición la modificación tanto de nodos como de aristas. Esto obliga a que los grafos tengan la misma estructura que no deja de ser una restricción demasiado fuerte si se tiene en cuenta que se está buscando un emparejamiento inexacto. La heurística utilizada se basa en el cálculo del futuro coste al correspondiente nodo relajando la restricción de que el mapeado tiene que ser inyectivo. Años más tarde en [TF83], los mismos autores, amplían el mismo método con las operaciones de edición de inserción y borrado de nodos y aristas y, además, abarcan el problema del isomorfismo de subgrafos. En 1990 se propone en [WYC90] una mejora de la heurística utilizada por los autores anteriores. En [SF83] se ataca el problema de forma muy similar a los anteriores utilizando como operaciones de edición la modificación de nodos y aristas, siendo la novedad la utilización (como operaciones de edición) de la división de nodos y mezclado de nodos. En el artículo [EF84] se utiliza una heurística diferente que consiste en descomponer cada grafo en subgrafos, los autores afirman que el emparejamiento del conjunto de subgrafos de los dos grafos puede ser llevado a cabo en tiempo polinomial utilizando programación dinámica. En algunos trabajos más recientes es usado el algoritmo  $A^*$  junto con algún tipo de heurística. Uno de ellos es [DVDGG<sup>+</sup>92] en donde dicho algoritmo es utilizado para calcular una distancia entre grafos, o como son [BDBV00b, BDBV00a, BDBV01] en donde dicho algoritmo está involucrado en la estimación del coste futuro usando el problema del emparejamiento de grafos bipartitos que es un problema mucho más sencillo y, finalmente, como es [GK02] en donde el algoritmo  $A^*$  también es usado y la heurística escogida es la de tener sólo en cuenta el coste futuro de los nodos no emparejados, los autores reconocen que los resultados son más pobres pero la contrapartida del método es su rapidez.

Por último, y sin entrar en más detalles, se quiere dejar constancia de que existen algoritmos de esta categoría que están orientados exclusivamente a ciertas familias de grafos destacando los árboles y los grafos planos.

#### 3.3.2 Métodos basados en optimización iterativa

Todos los algoritmos de este tipo intentan utilizar métodos que son muy conocidos en problemas de optimización con variables continuas. Dado que el problema del emparejamiento de grafos es eminentemente discreto, el primer paso será tratar de usar una o varias variables continuas que se asocien al emparejamiento y/o a los grafos. Ni que decir tiene que el comportamiento de todos estos algoritmos será más o menos dependientes de los valores iniciales que se asignen a las variables objeto de optimización. Todos los algoritmos de esta familia son subóptimos salvo que incorporen técnicas muy específicas que permitan salir de mínimos locales.

En tiempos precoces un gran número de autores se basaron en la relajación de etiquetado (en inglés “relaxation labeling”). En [FE73] la idea básica es que cada nodo de uno de los grafos se le puede asignar una etiqueta de un conjunto discreto de posibles etiquetas, que determina qué nodo del otro grafo le corresponde. En cada iteración se va actualizando un vector de probabilidades de cada candidato a ser la etiqueta “correcta”, para ello se considera, a su vez, las probabilidades de los nodos vecinos. El proceso iterativo termina cuando converge en un punto, o bien, se ha alcanzado el número máximo de iteraciones prefijadas de antemano. En este punto se da como solución las etiquetas con mayor probabilidad. La inicialización de las probabilidades es totalmente heurística (atributos de nodo y conectividad de nodos). Manteniendo la misma idea básica, en [KH89] Kittler y Hancock dieron mayor sustento teórico al trabajo de la anterior referencia. En [WH97] se introduce una medida bayesiana que afianza aún más la idea básica anteriormente expuesta. Una propuesta de mejora del método (consistente en tener en cuenta los atributos de las aristas) es la dada en [HH99].

Una variante de la relajación de etiquetado es la dada en [LH01], en ella se hace distinción expresa entre el grafo de entrada y el grafo modelo (en el método juegan papeles distintos), el primero juega el papel de datos observados y el segundo de datos probabilísticos y ocultos. El emparejamiento es encontrado usando el algoritmo de esperanza-maximización (en inglés “expectation-maximization”) también conocido como algoritmo EM (véase [DLR77]). Como en el anterior caso, este método puede caer en mínimos locales y su compartamiento es dependiente de la inicialización.

#### 3.3.3 Métodos espectrales

De forma muy breve el espectro de un grafo es el conjunto de autovalores y sus multiplicidades de la matriz de adyacencia, el espectro de un grafo es un invariante respecto al isomorfismo de grafos.<sup>60</sup> Como es habitual en grafos también la literatura sobre la teoría espectral de grafos es enorme ya que en tiempos precoces ha despertado mucho interés,<sup>61</sup> como textos monográficos y muy referenciados sobre la temática se recomiendan [Chu97], [CRS97], [CRS10] y, de forma no monográfica, [Big93] (segundo capítulo). En [CS11] se expone un estudio de las aplicaciones prácticas de la teoría espectral de grafos en nueve ámbitos de lo más dispares. Con respecto al tema de interés en este apartado se puede afirmar que existen multitud de trabajos con enfoques diferentes que utilizan el espectro

---

<sup>60</sup>La igualdad de espectros es una condición necesaria para el isomorfismo de grafos pero no es suficiente, cuando dos grafos que no son isomorfos exhiben el mismo espectro se dice de ellos que son coespectrales.

<sup>61</sup>Los vectores propios y los valores propios toman pleno sentido en un automorfismo (aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo) en donde estos vectores propios se transforman en ellos mismos salvo la multiplicación por un escalar (el autovalor), por lo tanto los vectores y valores propios lo son de un automorfismo de un espacio vectorial y se calculan a partir de la matriz asociada al automorfismo. Desde este punto de vista no deja de ser chocante el cálculo de los valores propios de una matriz que no tiene asociado un automorfismo: la matriz de adyacencia de un grafo. Aún es más chocante que de estos valores propios se extraigan algunas propiedades que cumplen los grafos asociados.

de las matrices de adyacencia de dos grafos para atacar el emparejamiento inexacto de grafos, como muestra se pueden consultar los trabajos de [CK04a], [CK04b], [QH06], [KC02] y [BYH04] entre otros muchos. Un trabajo que merece un breve comentario por su originalidad es el de [CH01] que tiene como gran ventaja que no impone la necesidad de que los dos grafos tengan el mismo grado. En este trabajo se usan las características espectrales para agrupar los nodos (“clusters”) que son susceptibles de ser emparejados juntos. El método busca primero un emparejamiento de los “clusters” y después de los nodos de los “clusters”.

A continuación se destaca el trabajo de Umeyama [Ume98] que utiliza un planteamiento al problema del isomorfismo de grafos que hace uso de los valores propios de las matrices de adyacencia. El método es funcional para grafos incluso ponderados, dirigidos o no dirigidos, pero, en este último caso, con dos versiones diferentes del algoritmo. Se parte de la ecuación (2.26) que se reescribe como

$$J(P) = \|PA_gP^t - A_h\|^2 \quad (3.6)$$

en donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea que, para una matriz cualquiera  $A$ , se define como

$$\|A\| = \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

Este método se basa en minimizar (3.6) usando la norma (3.7) para ello usa un teorema dado en [HW<sup>+</sup>53] y dos más que desarrolla y demuestra en el propio artículo. En esencia Umeyama relaja los requisitos para la matriz de permutación admitiendo cualquier matriz que sea ortogonal, calculada esta matriz a partir de los valores propios con una fórmula cerrada y mediante el método húngaro [Kuh55] de complejidad computacional  $O(N^3)$  obtiene la matriz de permutación buscada. El autor en el propio artículo reconoce que el método da resultados más “pobres” en la medida que los grafos son más “diferentes”. En el trabajo posterior [XK01] se ataca el problema de manera similar al de Umeyama, es decir, se parte de una matriz ortogonal pero para la búsqueda de la matriz de permutación se usa el Análisis de Componentes Principales (en inglés PCA) definiendo una función objetivo que es optimizada usando iterativamente la técnica del gradiente descendiente. Los autores sostienen que este método es más rápido y exacto que el de Umeyama.

### 3.3.4 Distancia de edición

La distancia de edición es una de las medidas para determinar la “similitud” entre dos grafos. Existen otras distancias basadas en el máximo común subgrafo [BS98], en la combinación del máximo común subgrafo y el mínimo común supergrafo [FV01] o en la unión de grafos [WSKR01] entre otras muchas. La distancia de edición es con mucho la más utilizada y será por ello por lo que se la dedicará este apartado.

La distancia de edición se inspira en los métodos usados para la comparación de cadenas de símbolos, un estudio sobre esta temática puede ser encontrado en [Nav01]. La distancia de edición se adapta sin restricciones a cualquier grafo (dirigido o no) con etiquetas<sup>62</sup> tanto en los nodos como en los arcos, pero también puede ser aplicado a grafos sin etiquetas. Una ventaja respecto a otros métodos es que no es necesario que los grafos tengan el mismo grado a efectos de calcular esta distancia. Como es de esperar la distancia de edición es exponencial en el caso peor, aún así, es ampliamente utilizada en problemas prácticos dando lugar a diversos algoritmos que la computan; sin embargo, su uso práctico está limitado a grafo con pocos nodos.<sup>63</sup>

---

<sup>62</sup>Por etiquetas se ha de entender símbolos de un alfabeto, pero también pueden ser valores enteros o valores reales (véase [DES09]). Con esta aclaración resulta que los grafos ponderados quedarían incluidos en los grafos etiquetados.

<sup>63</sup>En 1983 se aconsejaba en [DES09] no sobrepasar unas cuantas decenas de nodos.

En esencia la distancia de edición consiste en transformar un grafo en otro mediante la inserción, sustitución y eliminación<sup>64</sup> de aristas o nodos. A cada operación de edición se le asocia un coste,<sup>65</sup> por lo tanto la distancia de edición entre dos grafos sería el coste mínimo de la suma de la secuencia de operaciones de edición que convierten un grafo en otro. Es evidente, que la clave del problema se traslada a la selección de dichos costes para cada operación de edición y a la estrategia de minimización del coste total, es decir, a la selección de la secuencia de operaciones de edición que minimiza el coste total. La idea de la distancia de edición nace con los trabajos de Sanfeliu y Fu [SF83] y de Bunke y Allermann [BA83]. En [SF83] se evalúan la asociación de cada nodo de un grafo con todos los nodos del otro grafo y se calcula una función de coste, después se realiza una asignación considerando los que han dado el mínimo coste; una vez obtenido el emparejamiento se eliminan del grafo, que no es de referencia, todos los nodos y ramas que no hayan sido asignados y se insertan aquellos nodos y ramas que faltaban; todo lo anterior permite obtener la mínima distancia de edición entre dos grafos. Messmer y Bunke, [MB95, MB98], extienden la distancia de edición al problema del máximo común subgrafo. En los trabajos relativamente recientes de [GXTL10] y [SRSS12] pueden ser encontrados sendos estudios sobre la distancia de edición, el segundo de ellos más centrado en la temática de las funciones de coste. Es muy recomendable la lectura del capítulo sexto del libro [DES09] cuyo título es “Graph Edit Distance—Optimal and Suboptimal Algorithms with Applications” [BR09]. Según [GXTL10] cuando los grafos no tienen etiquetas (sólo tienen información estructural) es habitual convertirlos en cadenas y la distancia de edición se convierte en la comparación entre cadenas. Debido a ello y en lo que sigue, se supondrá que los grafos tienen algún tipo de información en los vértices y/o arcos.

Sean  $g_1$  y  $g_2$  dos grafos cualesquiera no necesariamente del mismo grado. Sea  $e_1, e_2, \dots, e_k$  una secuencia de  $k$  operaciones de edición que transforman el grafo  $g_1$  en  $g_2$ , con estas condiciones a la secuencia anterior se la denomina camino de edición. El conjunto de todos los caminos de edición se denotará por  $Y(g_1, g_2)$ . Todos los textos hacen la misma definición de distancia de edición pero la presentada en [BR09] es extraordinariamente breve en la forma si es comparada con los otros textos, esta definición es

**Definición 3.1.** *La distancia de edición entre el grafo  $g_1$  y el grafo  $g_2$  viene dada por*

$$d(g_1, g_2) = \min_{(e_1, \dots, e_k) \in Y(g_1, g_2)} \sum_{i=1}^k c(e_i) \quad (3.8)$$

en donde  $c(e_i)$  denota el coste de la operación de edición  $c_i$ .

Como ya se ha dicho la clave del problema está en encontrar la secuencia y los costes que minimizan la expresión (3.8). Si se pretende un emparejamiento inexacto pero óptimo necesariamente se necesitará trabajar con un árbol de búsqueda (espacio de soluciones) en donde se van construyendo los caminos de edición y contabilizando los costes parciales lo que permitirá realizar podas. Es bastante habitual utilizar el algoritmo  $A^*$  junto a algún tipo de heurística [HNR68]. En todo caso los requerimientos de tiempo y espacio pueden llegar a ser insostenibles incluso para grafos con pocos nodos.

Los requerimientos de tiempo y espacio se relajan si el enfoque es el de un emparejamiento inexacto subóptimo. Con este enfoque existen varias estrategias para minimizar la expresión (3.8). En general, hay que aclarar que la detección automática de la función de coste mínima no es asunto del todo cerrado [GXTL10]. Básicamente existe cuatro familias de algoritmos para el cálculo de la función de coste que por brevedad son listados a continuación de forma sucinta.

1. Algoritmos basados en entrenamiento automático. Estos son los conocidos por algoritmos basados en SOM (“Self-Organizing Map”) que no son más que redes neuronales. Un trabajo que utiliza esta técnica es el aportado por [SK99].

<sup>64</sup>Pueden ser definidas más operaciones de edición que las enunciadas como pueden ser, por ejemplo, el mezclado y la división presentadas en [AFB03]. En lo que sigue no serán tenidas en cuenta.

<sup>65</sup>Cantidad real no negativa.

2. Algoritmos probabilísticos. Esta técnica se ha utilizado en la comparación entre cadenas de símbolos [RY98]. De forma similar se aplica en distancia de edición entre grafos para la obtención de la función de coste. Los detalles pueden ser encontrados en [NB04], aquí sólo se destacará que es necesario seleccionar un conjunto de grafos para el entrenamiento, que el método es iterativo y que se han de seleccionar unas condiciones iniciales.
3. Algoritmos basados en kernels. En [NB06a] introduce una novedosa función de kernel para el cálculo de la función de coste. En [NB05] se usa la técnica de los kernels junto a la técnica de las Máquinas de Vectores Soporte<sup>66</sup> para el cálculo de la función de coste.
4. Algoritmos basados en programación lineal binaria. Esta técnica [JH06] sólo se puede aplicar en grafos con atributos exclusivamente en los nodos.

### 3.3.5 Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos se inspiran en la naturaleza y son utilizados en campos muy dispares destacando en Inteligencia Artificial, como texto básico e introductorio puede ser consultado [Mit98]. En general se adaptan muy bien al procesado paralelo [WI98] pero son grandes consumidores de memoria ya que se ha de mantener en la misma toda una población de individuos. En esencia se crea una población inicial de individuos a los cuales se van aplicando cruzamientos y mutaciones obteniendo la siguiente generación. Estos individuos son evaluados mediante una función de coste y aquellos que se alejan del valor deseado son eliminados, este proceso se itera y se van obteniendo nuevas generaciones. Los cruzamientos consisten en crear un nuevo individuo tomando (en principio de forma aleatoria) parámetros de dos o más individuos. La mutación es el cambio (en principio de forma aleatoria) de algún o algunos parámetros de un individuo. En general la convergencia de estos algoritmos puede no producirse o ser muy lenta y dependerá fuertemente de la selección inicial de la población, en cambio tienen la ventaja de poder salir de los mínimos locales de forma relativamente fácil siempre y cuando se dimensione convenientemente<sup>67</sup> el tamaño de la población. La crítica que se puede hacer a los algoritmos genéticos es la gran cantidad de parámetros de diseño, lo acertado de su elección vendrá determinado, en muchas ocasiones, por la pericia del diseñador de la aplicación.<sup>68</sup> La utilización de los algoritmos genéticos a problemas sobre grafos (básicamente particionado [BM96] y coloreado [FF96] de grafos) es relativamente reciente por lo que el material sobre el tema no es abundante. Para el caso concreto del emparejamiento inexacto de grafos pueden ser consultados [KD94], [CMH00], [MH01], [CWH97] y [Auw07] entre otros. Finalmente se quiere destacar que, en principio, no sería necesario que los grafos tengan el mismo grado cuando se aplica esta técnica.

## 3.4 Conclusiones

Como se ha podido comprobar las soluciones aportadas al emparejamiento exacto e inexacto de grafos son variadas. Salvo contadas excepciones (por ejemplo [Ume98]), muchas de las soluciones aportadas utilizan un árbol de búsqueda de soluciones que si no es podado a un ritmo conveniente hacen intratable el algoritmo, algunas otras soluciones son iterativas. Este capítulo permitirá comprobar que tanto el CEM como el SM (como se verá más adelante) no tienen relación alguna con lo visto en este capítulo. Como característica relevante de la nueva solución aportada es que no hace uso de ningún árbol de búsqueda y ni es un método iterativo. Las fórmulas son cerradas siendo la operación más compleja la inversión de una matriz.

---

<sup>66</sup>En inglés “Support Vector Machine” que se abreviará como SVM. Sea dicho de paso que un SVM no es más un aprendizaje supervisado.

<sup>67</sup>Mejor dicho suficientemente.

<sup>68</sup>Estos parámetros de diseño son el tamaño de la población, la selección inicial de la misma, función de distribución de probabilidad de los cruzamientos y mutaciones, función de coste, tasa de eliminación de individuos, ...



## Capítulo 4

# Aspectos de interés de Teoría de Circuitos

### 4.1 Introduction

Es evidente que no se hará un tratamiento ni exhaustivo ni extensivo sobre la Teoría de Circuitos, sólo se hará hincapié en aquellos aspectos que son de interés para la posterior comprensión del resto ya que se hará un uso intensivo de los mismos. El lector con conocimientos de Teoría de Circuito puede omitir la lectura de este capítulo, pero ello no se recomienda dado que se hacen comentarios y se dan enfoques que permitirán una rápida y correcta asimilación de lo que sigue, en todo caso la lectura de este capítulo dará la comodidad de hacer lo propio con el resto sin interrupciones. Existe una ingente literatura sobre la materia por lo que sugerir una lectura complementaria es difícil, puede ser consultado por ejemplo [DL95], [Irw03] y/o [Con03] entre otros muchos. Por último, se quiere dejar constancia expresa de que la Teoría de Circuitos es una teoría consolidada, madura, cerrada y cuyos resultados son aceptados por todos.

### 4.2 Caracterización de un dispositivo eléctrico

En este trabajo sólo se tratará con circuitos eléctricos cuyos dispositivos serán todos pasivos de parámetros concentrados, por lo tanto los circuitos tratados aquí no tendrán ni fuentes de tensión ni fuentes de corriente (ni independientes ni dependientes). Uno de estos dispositivos vendrá caracterizado por su impedancia ( $Z$ ) o su admitancia ( $Y$ ) siendo ambas cantidades complejas cuyas unidades serán  $\Omega$  y S respectivamente. La impedancia y la admitancia (de un mismo dispositivo) son cantidades inversa una de la otra ( $ZY = 1$ ) y se representan respectivamente por

$$Z = R + jX \quad (\Omega) \quad (4.1)$$

y

$$Y = G + jB \quad (\text{S}) \quad (4.2)$$

en donde  $j$  es la unidad imaginaria y  $R$ ,  $X$ ,  $G$ <sup>69</sup> y  $B$  reciben el nombre de resistencia, reactancia, conductancia y susceptancia respectivamente, todas ellas son cantidades reales y además  $R \geq 0\Omega$  y  $G \geq 0\text{S}$ .

---

<sup>69</sup>La letra habitual en Teoría de Circuitos para la conductancia es la  $g$  o  $G$ , pero que también es habitual para designar un grafo. En el contexto de este trabajo se utilizará la letra  $c$  o  $C$  para las conductancias a fin de evitar confusiones.

Los circuitos eléctricos con los que se tratará sólo tendrán resistores<sup>70</sup> (no habrá ni fuentes ni condensadores ni inductores), por lo tanto su impedancia y admitancia no tendrán parte imaginaria, es decir, siempre se cumplirá  $X = 0 \Omega$  y  $B = 0 S$ . Entonces, y bajo la anterior circunstancia, tendremos que  $R$  y  $C$  de un mismo dispositivo serán una la inversa de la otra. Además se cumplirá que  $Z = R$  y  $Y = C$  con lo que a menudo se tomará la licencia de hablar de la impedancia y de la resistencia como si fuesen sinónimas y la misma licencia se tomará con la admitancia y la conductancia ya que implícitamente se aplicará la anterior restricción. En definitiva, en este trabajo los circuitos eléctricos que se considerarán sólo tendrán resistores (no habrá ni fuentes ni inductores ni condensadores).

### 4.3 Caracterización de un circuito eléctrico resistivo

Sea un circuito resistivo de  $N$  nodos y  $M$  ramas del que se supondrá que cualquier nodo es alcanzable desde cualquier otro;<sup>71</sup> esto, desde un punto de vista circuital, se traduce en el hecho que el circuito no está formado por dos o más circuitos independientes. En este circuito se numeran todos los nodos de forma arbitraria, en el caso que previamente no estuvieran numerados. Bajo estas circunstancias el circuito puede ser caracterizado mediante tres tipos de matrices que son las presentadas en los subapartados siguientes.

#### 4.3.1 Matrices de adyacencia de conductancias (resistencias) de un circuito resistivo

Un circuito resistivo puro puede ser caracterizado por una matriz de adyacencia de conductancias (respectivamente resistencias) de forma que cada elemento de la matriz,  $c_{ij}$  (respectivamente  $r_{ij}$ ), es el valor de la conductancia (respectivamente resistencia) del resistor que une los nodos  $i$  y  $j$  en el circuito. Si entre dos nodos no hay un resistor uniéndolos se pondrá un cero en la matriz, tanto si es de resistencias como si es de conductancias; en la diagonal de ambas matrices se pondrán ceros. Estas matrices son

$$A'_c = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} (S); \text{ con } a_{ij} = \begin{cases} c_{ij}; & \text{si existe resistor entre } i \text{ y } j \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.3)$$

y

$$A'_r = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1,N} \\ b_{21} & 0 & \cdots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,1} & b_{N,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} (\Omega); \text{ con } b_{ij} = \begin{cases} r_{ij}; & \text{si existe resistor entre } i \text{ y } j \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.4)$$

En donde se ha usado prima en  $A'_c$  y  $A'_r$  para evitar la confusión con una matriz de adyacencia de un grafo.

De las dos matrices anteriores (4.3) y (4.4) se destacan las propiedades siguientes:

1. Todos los elementos son no negativos:  $a_{ij} \geq 0$  y  $b_{ij} \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ .

<sup>70</sup>Siempre se hará distinción expresa entre resistor (dispositivo) y resistencia (oposición al paso de la corriente eléctrica medida en  $\Omega$ ), pero en ambientes no tan rigurosos se usa el término resistencia indistintamente para ambos conceptos.

<sup>71</sup>Es decir, el circuito es conexo (tiene una componente conexa) y como consecuencia se tendrá que  $M \geq N - 1$ .

2. Son simétricas:  $a_{ij} = a_{ji}$  y  $b_{ij} = b_{ji}$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ .
3. Aunque no es una matriz la inversa de la otra sus elementos no nulos sí son inversos uno a uno y si son nulos, evidentemente, son iguales:  $b_{ij} = a_{ij}^{-1}$  si  $a_{ij} \neq 0$  y  $b_{ij} = 0$  si  $a_{ij} = 0$  o  $a_{ij} = 0$  si  $b_{ij} = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$ .
4. Si hay un solo circuito (circuito conexo) no puede haber una fila o columna con todos ceros.

Aunque estas matrices no son utilizadas en Teoría de Circuitos, pueden llegar a causar reservas e incluso rechazo aquí serán utilizadas porque formalmente caracterizan un circuito resistivo.

### 4.3.2 Matriz Indefinida de Admitancias (Impedancias) de un circuito resistivo

La Matriz Indefinida de Admitancias (respectivamente Impedancias) que de ahora en adelante se abreviará por MIA (respectivamente MII) y que se denotará por  $Y$  (respectivamente  $Z$ ) será cuadrada de orden  $N$ . Esta matriz se construye de la manera siguiente.

1. Los elementos fuera de la diagonal (fila  $i$  y columna  $j$ ) de la MIA (respectivamente MII) son el valor cambiado de signo de la admitancia (respectivamente impedancia) del dispositivo que une el nodo  $i$  con el nodo  $j$ . Si este elemento no existe se pone un cero tanto en la MIA como en la MII.
2. Los elementos de la diagonal (fila y columna  $k$ ) de la MIA (respectivamente MII) son la suma de los valores de las admitancias (respectivamente impedancias) de todos los dispositivos incidentes al nodo  $k$ .

Si se define  $D_c$  (respectivamente  $D_r$ ) como la matriz cuadrada y diagonal de orden  $N$  cuyos elementos (fila y columna  $k$ ) son la suma de los valores de las admitancias (respectivamente impedancias) de todos los dispositivos incidentes al nodo  $k$  siendo el resto de elementos nulos, entonces se cumple que

$$Y = D_c - A'_c \quad (4.5)$$

y que

$$Z = D_r - A'_r \quad (4.6)$$

Tanto la matriz  $Y$  como la  $Z$  admiten una definición directa como la que sigue

$$Y = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N c_{1,j} & -c_{12} & \cdots & -c_{1,N} \\ -c_{21} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N c_{2,j} & \cdots & -c_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{N,1} & -c_{N,2} & \cdots & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^N c_{N,j} \end{pmatrix} \quad (S) \quad (4.7)$$

y

$$Z = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N r_{1,j} & -r_{12} & \cdots & -r_{1,N} \\ -r_{21} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N r_{2,j} & \cdots & -r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{N,1} & -r_{N,2} & \cdots & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^N r_{N,j} \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (4.8)$$

Las propiedades de la MIA son las mismas que las de la MII, por lo que sólo se escribirá las de la primera, las propiedades más destacables son:

1. La matriz  $Y$  es singular dado que, por construcción, cualquier fila o columna es combinación lineal de las restantes.
2. La matriz  $Y$  es simétrica por tratarse de un circuito resistivo puro.

### 4.3.3 Matriz Definida de Admitancias (Impedancias) de un circuito resistivo

La Matriz Definida de Admitancias (respectivamente Impedancias), de aquí en adelante MDA (respectivamente MDI), puede ser obtenida fácilmente a partir de la MIA (respectivamente MII), basta para ello seleccionar un número natural  $m$  entre 1 y  $N$  ambos inclusive al que se denominará nodo de referencia o nodo de masa y eliminar de la MIA (respectivamente MII) la fila y columna  $m$ , la matriz así obtenida es cuadrada de orden  $N - 1$ . En el contexto de este trabajo a la MDA se la denotará por  $X$ , mientras que a la MDI no se le asignará ningún símbolo en especial porque sencillamente no se hará uso de ella por las razones que se explicarán más adelante.

Se hace notar que existen tantas MDAs (respectivamente MDIs) diferentes como valores de  $m$  se puedan seleccionar, esto es  $N$  matrices diferentes; todas ellas caracterizan el mismo circuito pero la numeración de los nodos en el circuito cambia a partir del nodo de referencia  $m$  seleccionado. Cuando interese dejar constancia de la fila y columna eliminada se hará uso de la notación  $X_m$  en vez de la más general  $X$ . Por lo anterior, se tendrá que, para el proceso inverso, dada una MDA (respectivamente MDI) existirán  $N$  MIAs (respectivamente MIIs) diferentes que representarán el mismo circuito siendo la diferencia entre ellas la diferente numeración de los nodos del circuito. El procedimiento para obtener la MIA (respectivamente MII) es el de insertar una fila y columna en la posición  $m$  si este último valor es conocido y si no es conocido se insertan en una posición arbitraria (pero en la misma posición) de forma tal que los nuevos valores sean tales que las filas (o las columnas) sumen cero. Se insiste, que sólo se recupera exactamente la MIA (respectivamente MII) si el valor de  $m$  es conocido.

Siempre cabe la posibilidad de, a la vista de un circuito, obtener una MDA (respectivamente MDI) de forma directa. Para ello se selecciona un nodo de referencia en el circuito (al que no se le asigna ningún número). Acto seguido se asignan números naturales al resto de nodos de forma arbitraria desde 1 hasta  $N - 1$ . Entonces esta MDA (respectivamente MDI), previa inicialización de la matriz con ceros, se puede construir recorriendo, sin importar el orden, todas las  $M$  ramas del circuito. Para cada rama se procede de la siguiente manera.

1. Si el dispositivo de la rama en cuestión tiene como nodo incidente el nodo de referencia (y suponiendo que el otro nodo incidente es  $k$ ), entonces el valor de la admitancia (respectivamente impedancia) se suma a la fila  $k$  y columna  $k$  de esta MDA (respectivamente MDI).

2. Si el dispositivo de la rama en cuestión no tiene como nodo incidente el nodo de referencia (y suponiendo que los nodos incidentes son  $i$  y  $j$ ), entonces se pone el valor de la admitancia (respectivamente impedancia) cambiado de signo en la fila  $i$  y columna  $j$  y también en la fila  $j$  y columna  $i$  de esta MDA (respectivamente MDI).

## 4.4 Métodos de análisis sistemático de un circuito eléctrico

Existen dos métodos sistemáticos para el análisis de un circuito eléctrico: el método de los nodos y el método de las mallas. El primero se basa en la primera ley de Kirchoff o ley de los nodos y el segundo se basa en la segunda ley de Kirchoff o ley de las mallas. Para el primer método es ideal usar una MDA mientras que para el segundo lo es una MDI. Ambos conducen a resultados idénticos (como no podía ser de otra manera) pero duales: el primero da las tensiones y el segundo da las corrientes.

Sin embargo el método de los mallas tiene una severa restricción<sup>72</sup> y por ello no será utilizado nunca<sup>73</sup> en este trabajo. Por lo tanto, siempre será utilizado exclusivamente el método de los nodos. Como este último método será utilizado de forma intensiva se dará una breve descripción de él en el siguiente subapartado.

### 4.4.1 Método de los nodos

Para el análisis de un circuito por el método de los nodos es necesario fijar un nodo  $m$  de referencia.<sup>74</sup> Si en la MIA se elimina la fila  $m$  y columna  $m$  se obtiene una MDA ( $X_m$ ). Esta matriz cumple que

$$X_m \vec{V} = \vec{I} \quad (4.9)$$

donde el vector  $\vec{I} = (I_1, I_2, \dots, I_{N-1})^t$  corresponde a las corrientes entrantes (asignándoles un valor positivo) o salientes (asignándoles un valor negativo) en los nodos del circuito debido a fuentes de corriente externas (variables independientes) y el vector  $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{N-1})^t$  corresponde a las tensiones, debidas a las fuentes de corriente anteriores, en los nodos referidas al nodo de referencia (variables dependientes). En muchas ocasiones se está interesado en la expresión del vector  $\vec{V}$  en función del vector  $\vec{I}$  y como es sabido que  $X_m$  es siempre no singular<sup>75</sup> y, por lo tanto, siempre existirá su inversa, entonces se tendrá que

$$\vec{V} = X_m^{-1} \vec{I} \quad (4.10)$$

En lo sucesivo y cuando sea necesario se representará de forma expandida la matriz  $X_m^{-1}$  tal y como sigue

$$X_m^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^m & \alpha_{12}^m & \cdots & \alpha_{1,N-1}^m \\ \alpha_{21}^m & \alpha_{22}^m & \cdots & \alpha_{2,N-1}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N-1,1}^m & \alpha_{N-1,2}^m & \cdots & \alpha_{N-1,N-1}^m \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

En donde se ha de tener en cuenta que la anterior matriz, por ser la inversa de una MDA de un circuito con sólo resistores, será siempre simétrica ( $\alpha_{ji}^m = \alpha_{ij}^m$ ). Se advierte que en  $\alpha_{ij}^m$  la  $m$  no es un exponente sino un superíndice y se avisa que, de ahora en adelante, podrá ser omitido y se deberá entender de forma implícita por el contexto.

<sup>72</sup>Esta restricción consiste en que el circuito bajo análisis debe ser plano.

<sup>73</sup>Es por ello, y como se ha comentado anteriormente, que, en el contexto de este trabajo, no se denotaría con ninguna símbolo especial a la MII en contraposición a la MDA que sí será denotada por  $X$ .

<sup>74</sup>Teóricamente los resultados no dependen de la selección del nodo de referencia, pero en la práctica (cuando se utilizan computadores digitales) una selección adecuada del nodo de referencia puede minimizar los errores de redondeo, es recomendable escoger como nodo de referencia a aquel que le lleguen más ramas.

<sup>75</sup>Siempre y cuando el circuito sea conexo, lo cual siempre se supondrá que se verifica en este trabajo.

## 4.5 Numeración de los nodos antes y después de referenciar

Es necesario conocer como se renumeran los nodos de un circuito eléctrico cuando se fija de forma arbitraria un nodo de referencia, además se ha de dejar clara la relación que liga la numeración de los nodos antes y después de referenciar. Para ello, sea un circuito eléctrico de  $N$  nodos y que (antes de referenciar) los nodos están numerados desde 1 hasta  $N$  (se usará las variables  $i$  y  $j$  para los nodos antes de referenciar). Supóngase que se toma arbitrariamente como nodo de referencia el nodo  $m$  entre 1 y  $N$  y se convendrá que el orden de la numeración no queda alterado (se usará las variables  $p$  y  $q$  para los nodos después de referenciar). Entonces los nodos mantienen la numeración hasta  $m$  exclusive, el nodo  $m$  no se numera y para los nodos siguientes se decremента en uno la numeración siendo el último (después de referenciar)  $N - 1$ , de forma más compacta se tendrá

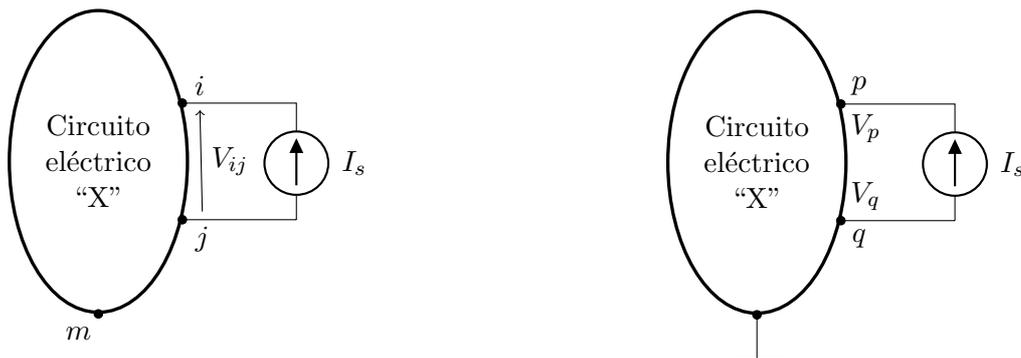
$$p = \begin{cases} i; & 1 \leq i < m \\ i - 1; & m < i \leq N \end{cases} \quad (4.12)$$

En cambio, si se desea obtener la numeración antes de referenciar conociendo la numeración después de referenciar es evidente que se ha de conocer el valor  $m$  (de otra forma sería imposible, de aquí la necesidad de conservar el valor de  $m$ ). Con esto se tendrá que la numeración de los nodos coincide hasta  $m$  exclusive, al nodo de referencia se le asigna el valor de  $m$  y a partir de  $m$  inclusive se incrementa en uno la numeración de los nodos, de forma más compacta se tendrá

$$i = \begin{cases} m; & \text{para el nodo de referencia} \\ p; & 1 \leq p < m \\ p + 1; & m \leq p \leq N - 1 \end{cases} \quad \text{para los otros nodos} \quad (4.13)$$

## 4.6 Resistencia equivalente

Para la obtención de la resistencia equivalente entre dos nodos  $i$  y  $j$  ( $r_{eq_{ij}}$ ) de un circuito eléctrico (véase figura 4.1a) se deben desactivar todas las fuentes independientes de tensión (cortocircuito) y todas las fuentes independientes de corriente (circuito abierto)<sup>76</sup> que existan en el circuito.



(a) Circuito del que se calcula la resistencia equivalente entre los nodos  $i$  y  $j$  sin hacer uso de un nodo de referencia.

(b) Circuito del que se calcula la resistencia equivalente entre los nodos  $p$  y  $q$  haciendo uso de un nodo de referencia.

Figura 4.1: Dos representaciones del mismo circuito del que se calcula la resistencia equivalente entre dos nodos  $i$  y  $j$  sin hacer uso de un nodo de referencia (figura izquierda) y sobre los mismos nodos  $p$  y  $q$  pero haciendo uso de un nodo de referencia  $m$  (figura derecha).

Acto seguido se conecta una fuente de corriente independiente externa al circuito de valor arbitrario  $I_s$  (A) entrante por el nodo  $i$  y saliente por el nodo  $j$ , debido a ello, entre los nodos  $i$  y  $j$ ,

<sup>76</sup>Esto es así en el caso general, pero se recuerda que en los circuitos que en este contexto interesan no existen tales fuentes.

aparecerá una diferencia de potencial de valor  $V_{ij}$  (V). Entonces la resistencia equivalente será el cociente entre  $V_{ij}$  y  $I_s$  que no es más que aplicar ley de Ohm al par de nodos en cuestión. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene la siguiente definición.<sup>77</sup>

**Definición 4.1.** *Sea un circuito eléctrico resistivo puro. Se conecta una fuente independiente de corriente de valor  $I_s$  entrante por el nodo  $i$  y saliente por el nodo  $j$ . Debido a ello se obtendrá una diferencia de potencial entre los nodos  $i$  y  $j$  ( $V_{ij}$ ). Entonces la resistencia equivalente entre los nodos  $i$  y  $j$  es*

$$r_{eqij} = \frac{V_{ij}}{I_s} \quad (\Omega) \quad (4.14)$$

Es de destacar que, atendiendo a la anterior definición, no es necesario fijar un nodo de referencia (de este hecho se hará un uso posterior).

Para el cálculo de la misma resistencia equivalente mediante un método sistemático de análisis será necesario seleccionar un nodo de referencia al cual se referirán todas las tensiones (véase figura 4.1b) por lo tanto es necesario reescribir la expresión (4.14) como sigue.

$$r_{eqij} = \frac{V_{ij}}{I_s} = \frac{V_p - V_q}{I_s} \quad (\Omega) \quad (4.15)$$

siendo  $p$  y  $q$  los nodos homólogos de  $i$  y  $j$  respectivamente después de referenciar. Pero si el nodo  $j$  coincide con el nodo de referencia entonces la ecuación (4.15 se transforma en

$$r_{eqij} = \frac{V_{ij}}{I_s} = \frac{V_p}{I_s} \quad (\Omega) \quad (4.16)$$

pero si es el nodo  $i$  el que coincide con el nodo de referencia entonces la ecuación (4.15 se transformará en

$$r_{eqij} = \frac{V_{ij}}{I_s} = \frac{-V_q}{I_s} \quad (\Omega) \quad (4.17)$$

En lo que sigue se va a obtener la resistencia equivalente entre un par de nodos  $i$  y  $j$  (antes de referenciar) utilizando el método sistemático de análisis por nodos sea cual fuere el nodo de referencia  $m$  seleccionado. Para ello se distinguirán todos los casos que se pueden presentar según la relación entre  $i$  y  $j$ , y de estas respecto  $m$ .

**(i)** Caso  $i > j > m$ :

Esto implica por la ecuación (4.12) que  $p = i$  y  $q = j$ . A partir de la ecuación (4.10) y de la expresión (4.11) se tiene que

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_q \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & \cdots & \alpha_{1q} & \cdots & \alpha_{1,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & \cdots & \alpha_{pq} & \cdots & \alpha_{p,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qp} & \cdots & \alpha_{qq} & \cdots & \alpha_{q,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N-1,1} & \cdots & \alpha_{N-1,p} & \cdots & \alpha_{N-1,q} & \cdots & \alpha_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_s \\ \vdots \\ -I_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

de la cual se obtiene

<sup>77</sup>Esta definición de resistencia equivalente es la que mejor se ajusta al método de análisis por nodos. Existe la versión dual (usando una fuente de tensión) que se ajusta mejor al método de análisis por mallas pero que no será utilizada en este trabajo.

$$V_p = I_s(\alpha_{pp} - \alpha_{pq}) \quad (4.19)$$

$$V_q = I_s(-\alpha_{qq} + \alpha_{qp}) \quad (4.20)$$

incorporando los anteriores resultados en la formula (4.15) se tiene que

$$r_{eqij} = \frac{V_p - V_q}{I_s} = \frac{I_s(\alpha_{pp} - \alpha_{pq} - \alpha_{qp} + \alpha_{qq})}{I_s} \quad (4.21)$$

y como  $\alpha_{qp} = \alpha_{pq}$  será

$$r_{eqij} = \alpha_{pp} - 2\alpha_{pq} + \alpha_{qq} \quad (4.22)$$

haciendo la traducción según (4.13) se obtiene finalmente

$$r_{eqij} = \alpha_{ii} - 2\alpha_{ij} + \alpha_{jj} \quad (4.23)$$

**(ii)** Caso  $i > j = m$ :

Esto implica por la ecuación (4.12) que  $p = i$  y  $j$  es el nodo de referencia. A partir de la ecuación (4.10) y de la expresión (4.11) se tiene que

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & \cdots & \alpha_{1,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & \cdots & \alpha_{p,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N-1,1} & \cdots & \alpha_{N-1,p} & \cdots & \alpha_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

incorporando los anteriores resultados en la formula (4.16) se tiene que

$$r_{eqij} = \frac{V_p}{I_s} = \frac{I_s \alpha_{pp}}{I_s} = \alpha_{pp} \quad (4.25)$$

haciendo la traducción según (4.13) se obtiene finalmente

$$r_{eqij} = \alpha_{ii} \quad (4.26)$$

**(iii)** Caso  $i > m > j$ :

Esto implica por la ecuación (4.12) que  $p = i$  y  $q = j - 1$ . Las expresiones desde (4.18) hasta (4.22) son válidas pero aplicando la traducción mediante la fórmula (4.13) se obtendrá

$$r_{eqij} = \alpha_{ii} - 2\alpha_{i,j-1} + \alpha_{j-1,j-1} \quad (4.27)$$

**(iv)** Caso  $i = m > j$ :

Esto implica por la ecuación (4.12) que  $i$  es el nodo de referencia y  $q = j - 1$ . A partir de la

ecuación (4.10) y de la expresión (4.11) se tiene que

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_q \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} & \cdots & \alpha_{1,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qq} & \cdots & \alpha_{q,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N-1,1} & \cdots & \alpha_{N-1,q} & \cdots & \alpha_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -I_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

incorporando los anteriores resultados en la formula (4.17) se tiene que

$$r_{eqij} = \frac{-V_q}{I_s} = \frac{-(-I_s \alpha_{qq})}{I_s} = \alpha_{qq} \quad (4.29)$$

haciendo la traducción según (4.13) se obtiene finalmente

$$r_{eqij} = \alpha_{j-1,j-1} \quad (4.30)$$

(v) Caso  $m < i < j$ :

Esto implica por la ecuación (4.12) que  $p = i - 1$  y  $q = j - 1$ . Las expresiones desde (4.18) hasta (4.22) son válidas pero aplicando la traducción mediante la fórmula (4.13) se obtendrá

$$r_{eqij} = \alpha_{i-1,i-1} - 2\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{j-1,j-1} \quad (4.31)$$

Todos los resultados anteriores, formulas (4.23), (4.26), (4.27), (4.30) y (4.31), se resumen en la tabla 4.1 de forma más compacta.

Ítem	Caso	Calculo de $r_{eqi,j}$
(i)	$i > j > m$	$\alpha_{ii} - 2\alpha_{ij} + \alpha_{jj}$
(ii)	$i > j = m$	$\alpha_{ii}$
(iii)	$i > m > j$	$\alpha_{ii} - 2\alpha_{i,j-1} + \alpha_{j-1,j-1}$
(iv)	$i = m > j$	$\alpha_{j-1,j-1}$
(v)	$m > i > j$	$\alpha_{i-1,i-1} - 2\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{j-1,j-1}$

Tabla 4.1: Resistencias equivalentes referidas a la numeración de los nodos antes de fijar el nodo de referencia.

Para los dos teoremas que seguirán es muy conveniente dejar bien claros dos aspectos básicos, estos son:

1. Las tensiones entre dos nodos nunca dependen del nodo de referencia seleccionado porque estas tensiones son diferencias de potencial. Estas tensiones siempre se denotarán con dos subíndices que indican los dos nodos en cuestión.
2. Las tensiones referidas a un nodo de referencia dado sí que dependerán del nodo de referencia utilizado. Estas tensiones siempre se denotarán con un subíndice que indica sólo un nodo, el otro nodo se sobreentiende que es el nodo de referencia.

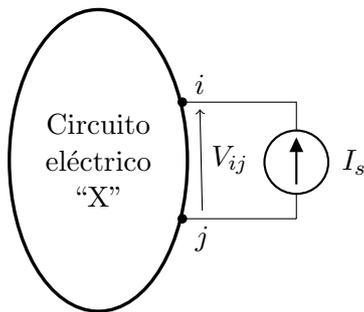
Es evidente y trivial que el valor de la resistencia equivalente entre dos nodos no cambia por el hecho de cambiar la numeración de los nodos (la numeración cambia pero el par de nodos es el mismo). En cualquier circuito eléctrico la numeración de los nodos es un artificio necesario para la correcta aplicación de un método sistemático de análisis de circuitos y por lo tanto sería una aberración asumir que el comportamiento de tal circuito dependiese de la asignación numérica de

los nodos del mismo. No obstante y con el ánimo de despejar cualquier duda al respecto se da el siguiente teorema.

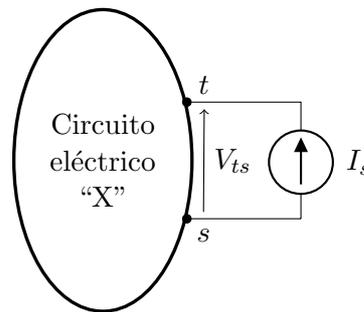
**Teorema 4.1.** *Si en un circuito eléctrico con cierta numeración de los nodos se obtiene la resistencia equivalente entre dos nodos entonces este valor de la resistencia equivalente sobre estos mismos nodos no cambia si se reenumeran los nodos.*

*Demostración.* Utilizando la definición 4.1 se tendrá que la resistencia equivalente entre los nodos  $i$  y  $j$  de un circuito eléctrico como el representado en la figura 4.2a es

$$r_{eq_{ij}} = \frac{V_{ij}}{I_s} \quad (4.32)$$



(a) Cálculo de la resistencia equivalente entre los nodos  $i$  y  $j$ . Estos pasan a etiquetarse como  $t$  y  $s$  en la figura 4.2b



(b) Cálculo de la resistencia equivalente entre los mismos nodos que la figura 4.2a pero etiquetados como  $t$  y  $s$ .

Figura 4.2: Cálculo de la resistencia equivalente de un mismo circuito eléctrico del que se han reenumerado los nodos. El nodo  $i$  es físicamente el mismo que el  $t$  y el nodo  $j$  es físicamente el mismo que el  $s$ .

Al mismo circuito se reenumeran los nodos ( $i$  pasa a ser  $t$  y  $j$  pasa a ser  $s$ ) tal y como se representa en la figura 4.2b, entonces la resistencia equivalente es

$$r'_{eq_{ts}} = \frac{V_{ts}}{I_s} \quad (4.33)$$

Ahora bien como resulta que  $V_{ij} = V_{ts}$  (dado que el circuito no cambia, los nodos son físicamente los mismos y que estas tensiones son diferencias de potencial) entonces

$$r'_{eq_{ts}} = \frac{V_{ts}}{I_s} = \frac{V_{ij}}{I_s} = r_{eq_{ij}} \quad (4.34)$$

Q.E.D.

También es evidente y trivial que la resistencia equivalente entre dos nodos no depende del nodo de referencia escogido (véase figura 4.1b). Como antes, la selección de un nodo de referencia es un artificio que permite aplicar correctamente un método sistemático de análisis de circuitos utilizando una MDA o una MDI. Como antes, también sería una aberración asumir que el comportamiento de un circuito eléctrico depende de la asignación de uno u otro nodo de referencia. Además, si se relea con detenimiento la definición de resistencia equivalente dada en 4.1 (página 51) se puede observar que en ella no interviene para nada la selección de un nodo de referencia. No obstante, y para despejar toda duda al respecto, se enuncia el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.** *Si en un circuito eléctrico con cierta numeración de los nodos se obtiene la resistencia equivalente vista desde dos nodos usando un nodo de referencia  $m_1$ , entonces el valor de esta resistencia equivalente entre los mismos nodos no cambia si se elige otro nodo de referencia diferente  $m_2$ .*

*Demostración.* Se va a demostrar el anterior teorema haciendo uso de dos nodos de referencia  $m_1$  y  $m_2$ . Para fijar ideas y sin pérdida de generalidad se va a suponer que tanto  $m_1$  como  $m_2$  son mayores que los nodos  $i$  y  $j$  (antes de referenciar) con ello se pretende que la problemática de asignación de nodos, que ya fue exhaustivamente tratada en su momento, no distraiga del asunto que se está tratando. Con esto resultará que el mismo par de nodos de los cuales se quiere extraer la resistencia equivalente serán  $p = i$  y  $q = j$  (después de referenciar) y, además, tienen la misma numeración tanto si se escoge  $m_1$  como nodo de referencia como si se escoge  $m_2$ .

En una primera situación se fija como nodo de referencia el nodo  $m_1$  entonces se tendrá que

$$(r_{eqij})_1 = \frac{V_p - V_q}{I_s} \quad (4.35)$$

En una segunda situación se fija como nodo de referencia el nodo  $m_2$  entonces se tendrá que

$$(r_{eqij})_2 = \frac{V'_p - V'_q}{I_s} \quad (4.36)$$

Aunque los nodos no han cambiado las tensiones son diferentes porque el nodo de referencia es otro. Ahora bien, para la primera situación se puede escribir que  $V_p = V_{p,m_2} + V_{m_2}$  y que  $V_q = V_{q,m_2} + V_{m_2}$  sustituyendo en la ecuación (4.35) queda

$$(r_{eqij})_1 = \frac{V_p - V_q}{I_s} = \frac{V_{p,m_2} + V_{m_2} - V_{q,m_2} - V_{m_2}}{I_s} = \frac{V_{p,m_2} - V_{q,m_2}}{I_s} \quad (4.37)$$

Cuando se cambia el nodo de referencia de  $m_1$  al  $m_2$  entonces se tiene que  $V_{p,m_2}$  es  $V'_p$  y que  $V_{q,m_2}$  es  $V'_q$  que sustituidas en la ecuación (4.37) da la expresión (4.35) con lo que es  $(r_{eqij})_1 = (r_{eqij})_2$ . Q.E.D.

## 4.7 Representación de las resistencias equivalentes

Dado un circuito resistivo puro con  $N$  nodos habrá tantas resistencias equivalentes  $(r_{eqij})$  como pares no ordenados de nodos (nodos distintos en el par) se puedan formar,<sup>78</sup> esto es

$$\binom{N}{2} = N(N-1)/2 \quad (4.38)$$

La forma de obtenerlas es la ya explicada en el apartado anterior y aquí sólo se definirá la manera de representar todas las resistencias equivalentes de un circuito resistivo. Se usaran tres representaciones de forma indistinta y se usará la que más convenga según el aspecto que se este tratando en aquel momento. Estas tres representaciones son:

---

<sup>78</sup>En general  $r_{eqij}$  y  $r_{eqji}$  no tienen porque ser iguales y consecuentemente el número de resistencias equivalentes debe ser  $N(N-1)$ . En el contexto de este trabajo (circuito sólo con resistores) es siempre cierto que  $r_{eqij} = r_{eqji}$  y entonces el número de resistencias equivalentes es la mitad:  $N(N-1)/2$ .

1. Mediante una matriz  $R_{eq}$  cuadrada de orden  $N$  y simétrica como la que sigue

$$R_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & r_{eq12} & r_{eq13} & \cdots & r_{eq1,N} \\ r_{eq12} & 0 & r_{eq23} & \cdots & r_{eq2,N} \\ r_{eq13} & r_{eq23} & 0 & \cdots & r_{eq3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{eq1,N} & r_{eq2,N} & r_{eq3,N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (4.39)$$

Más adelante se justificará que estas  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes pueden ser vistas como los pesos de un grafo no dirigido que siempre será completo y cuya matriz de adyacencia vendrá dada por (4.39).

2. Mediante un vector columna  $\vec{R}_{eq}$  con  $N(N - 1)/2$  coordenadas. La secuencia de las coordenadas es tal que se van asignando las resistencias equivalentes según la numeración de los nodos: para cada  $i$  entre 1 y  $N - 1$  se recorre  $j$  desde  $i + 1$  hasta  $N$ . Este vector es

$$\begin{aligned} \vec{R}_{eq} = & (r_{eq12}, r_{eq13}, r_{eq14}, r_{eq15}, \dots, r_{eq1,N-2}, r_{eq1,N-1}, r_{eq1,N}, \\ & r_{eq23}, r_{eq24}, r_{eq25}, \dots, r_{eq2,N-1}, r_{eq2,N}, \\ & r_{eq34}, \dots, r_{eq3,N}, \\ & \dots \\ & \dots \\ & r_{eqN-3,N-2}, r_{eqN-3,N-1}, r_{eqN-3,N}, \\ & r_{eqN-2,N-1}, r_{eqN-2,N}, \\ & r_{eqN-1,N})^t \quad (\Omega) \end{aligned} \quad (4.40)$$

3. Mediante el conjunto  $\widehat{R}_{eq}$  formado por todos los pares ordenados de la forma  $(r_{eq_z}, f_z)$  en donde  $r_{eq_z}$  es un valor de las resistencias equivalentes y  $f_z$  es la frecuencia absoluta de repetición de dicho valor (si el valor  $r_{eq_z}$  no está repetido entonces  $f_z = 1$ ).<sup>79</sup> De forma compacta se tiene que

$$\widehat{R}_{eq} = \{(r_{eq_z}, f_z) | r_{eq_z} \text{ es una } r_{eq_{ij}} \text{ y } f_z \text{ es la frecuencia absoluta de repetición}\} \quad (4.41)$$

Es evidente que si existen  $L$  pares ordenados  $(r_{eq_z}, f_z)$  se cumplirá que  $f_1 + f_2 + \dots + f_L = N(N - 1)/2$ . También es fácil deducir que  $L$  será un número natural desde uno (todas las resistencias equivalentes iguales) hasta  $N(N - 1)/2$  (no existen dos valores de las resistencias equivalentes repetidos). Con esto presente, la representación dada por (4.41) puede ser reformulada de la siguiente manera

$$\widehat{R}_{eq} = \{(r_{eq_z}, f_z) | z = 1, 2, \dots, L\} \quad (4.42)$$

con la definición de  $(r_{eq_z}, f_z)$  hecha anteriormente.

Obsérvese que la primera y segunda representación contienen, en esencia, la misma información y que el paso de una representación a la otra es trivial e intuitivo, así como el paso de cualquiera de ellas a la tercera representación. En cambio en la tercera representación se ha perdido la constancia de los nodos a los cuales se asigna el valor de la resistencia equivalente y, debido a ello, será imposible reconstruir la primera o segunda a partir de la tercera, por lo que, si se utiliza la tercera representación, siempre se deberá tener constancia de al menos una de las de las dos primeras.

<sup>79</sup>El subíndice  $z$  utilizado para definir  $\widehat{R}_{eq}$  no tiene relación alguna con ningún nodo. Este subíndice sólo cumple la función de enumerar, sin criterio alguno, los valores no repetidos de las resistencias equivalentes.

## 4.8 Conclusiones

La Teoría de Circuitos será la que sustentará el modelo propuesto, por lo tanto, en este capítulo se han expuesto y detallado con rigurosidad aquellas herramientas que serán usadas de forma intensiva. La Matriz Indefinida de Admitancias (MIA) será la que caracterizará el modelo propuesto (CEM) de un grafo como se verá más adelante, su presentación y propiedades han sido tratadas sobradamente. Por otro lado, el concepto de resistencia equivalente es crucial para entender el SM por lo que este concepto ha sido tratado con el suficiente detenimiento, además se deja consolidado que el valor de la resistencia equivalente entre dos nodos de un circuito no depende

1. de la numeración de los nodos.
2. del nodo de referencia escogido.

También se ha expuesto como obtener de forma sistemática dichas resistencias equivalentes y las tres representaciones ( $R_{eq}$ ,  $\vec{R}_{eq}$  y  $\hat{R}_{eq}$ ) que serán usadas a lo largo de este trabajo.



## Capítulo 5

# Modelo Eléctrico de Conductancias de un grafo

### 5.1 Introducción

En este capítulo y en el siguiente se presenta el núcleo de la aportación de la tesis. Esta aportación es novedosa y ni es una variante ni está inspirada en otros métodos que persiguen el mismo objetivo. Se extrae un modelo de un grafo de forma tal que toda la teoría que cumple el modelo se puede aplicar al grafo modelizado, el sencillo modelo utilizado es el de un circuito eléctrico compuesto exclusivamente por resistores, este modelo será denominado “Modelo Eléctrico de Conductancias” (de aquí en adelante CEM<sup>80</sup>). Una vez obtenido el modelo es aplicable la Teoría de Circuitos que es reconocida universalmente como una teoría cerrada, consolidada y madura.

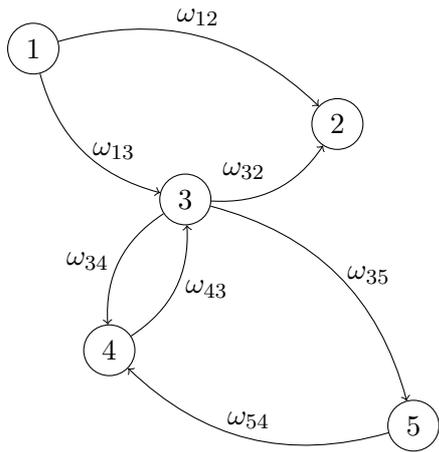
La brevedad de este capítulo puede generar sorpresa pero ello es debido a que en el capítulo anterior “Aspectos de interés de Teoría de Circuitos” ya han sido tratadas todas las herramientas necesarias que se usarán en el modelo. Por otro lado, intencionadamente se ha seleccionado un modelo sencillo por lo que esto repercute, a su vez, en la sencillez de la descripción del mismo (“no hay más cera que la que arde”). Hubiera cabido la posibilidad de integrar este capítulo con el siguiente en donde se presenta una aplicación del modelo (el método de la estrella) pero se ha preferido por claridad separarlos porque una cosa es el modelo y otra una aplicación del modelo a un problema concreto (pueden ser diseñadas otras aplicaciones usando el mismo modelo). Es por lo anterior que se ha optado por establecer una frontera nítida entre ambos.

Se adelanta que no todos los grafos podrán ser modelizados mediante el CEM, debido a que el CEM hará uso exclusivamente de resistores y dado que estos dispositivos carecen de polaridad, entonces los grafos dirigidos no podrán ser modelizados. No obstante, cabe la posibilidad de que este tipo de grafos puedan ser también modelizados por un circuito resistivo siempre que se admita la incorporación de un diodo ideal en serie con el resistor como, por ejemplo, se representa en la figura 5.1. Desafortunadamente esta extensión complica considerablemente el modelo ya que el circuito que se obtiene ya no es lineal (desde un punto de vista circuital) y para su tratamiento sería necesario llenar bastantes más páginas que las de este trabajo lo que daría pie a otro estudio independiente del aquí presentado.

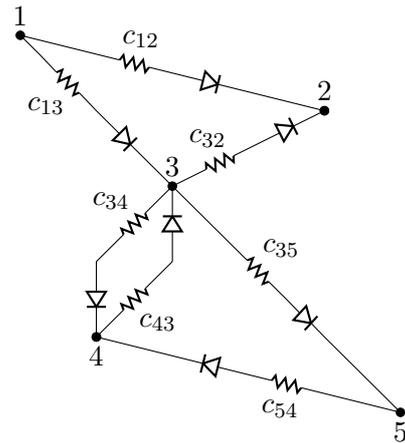
Los grafos con más de una componente conexa no podrán ser tampoco modelizados, sin embargo, esto no produce mayores contratiempos dado que sí puede ser modelizada cada una de sus componentes conexas por separado, por lo tanto si el grafo tiene  $k$  componentes conexas el CEM habrá que aplicarlo  $k$  veces para cada una de ellas. Sin embargo, el problema se traslada a la identificación de cada una de las componentes conexas. Si, por ejemplo, cada una de las componentes conexas tiene

---

<sup>80</sup>Véase la nota 1 de la página 1.



(a) Ejemplo de un grafo dirigido cualquiera  $g$  no modelizable directamente mediante el CEM.



(b) Extensión del CEM del grafo dirigido  $g$  mediante un circuito eléctrico con diodos ideales.

Figura 5.1: Extensión del modelo para un grafo dirigido mediante un circuito eléctrico con un diodo ideal en serie con cada resistor en cada rama.

diferente grado el problema deja de existir, pero si, en el caso peor, cada componente conexa tiene el mismo grado el problema no desaparece ya que no será fácil identificar de forma biunívoca cada una de ellas.

Se ha de decir que el enfoque ha sido sobre grafos ponderados pero ha de quedar claro que los grafos no ponderados también quedan incluidos dado que, en este caso, siempre se puede tomar como peso la unidad en cada rama. En otras palabras, el modelo no distingue entre grafos ponderados y no ponderados si en estos últimos se asigna un peso unidad a todas las ramas. Por lo tanto, a partir de ahora, se tomará la libertad de decir que un grafo no ponderado tiene pesos unitarios.

Finalmente, destacar que el modelo puede ser aplicado perfectamente a multigrafos (grafos no simples) porque cualquier tratamiento posterior que se haga del modelo desde la Teoría de Circuitos tratará a las multiaristas como resistores en paralelo y efectuará la suma de sus conductancias. Lo mismo puede ser dicho de los lazos, pero en este caso cualquier tratamiento posterior del modelo desde la Teoría de Circuitos hará desaparecer el resistor asociado al lazo, ya que este resistor tendrá siempre, entre sus terminales, una diferencia de potencial de 0 V y por lo tanto la corriente que circulará por él será de 0 A con independencia de su valor. Este resistor es lo que se denomina en Teoría de Circuitos un elemento superfluo.

## 5.2 Obtención del CEM

Sea  $g$  un grafo de grado  $N$  y tamaño  $M$  al cual se exigirá simultáneamente que sea:

1. No dirigido
2. Conexo
3. Ponderado
4. Simple
5. Sin lazos

Obsérvese que la primera condición es necesaria para que el modelo pueda ser aplicado, en cambio las restantes condiciones se imponen sólo a efectos de fijar ideas, ya que son fácilmente soslayables como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo.

El CEM del grafo será un circuito eléctrico de  $N$  nodos y  $M$  ramas con un resistor en cada rama (circuito de parámetros concentrados, resistivo puro, sin fuentes de tensión ni de corriente, ni

dependientes ni independientes). Este modelizado mediante un circuito conserva íntegramente la topología del grafo y con la misma numeración de nodos y/o aristas que el grafo si las hubiere. Bajo estas condiciones la caracterización de forma única del CEM de un grafo consiste en dos etapas, estas son las enumeradas en los dos subapartados siguientes.

### 5.2.1 Función de paso

La función de paso permite obtener los valores de las conductancias de los resistores del CEM a partir de los pesos<sup>81</sup> de las aristas del grafo. Cada arista del grafo  $g$  con peso  $\omega_{ij}^g$  incidente a los nodos  $i$  y  $j$  tendrá, en el circuito, su rama homóloga con un resistor entre los mismos nodos cuya conductancia (en siemens) tendrá el valor  $c_{ij}^g$  (S). Con esto en mente se da la siguiente definición de función de paso en el CEM.

**Definición 5.1.** *La función de paso se define para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  y  $j = i + 1, i + 2, \dots, N$  tales que  $i$  y  $j$  sean incidentes como*

$$c_{ij}^g = \phi(\omega_{ij}^g) \quad (\text{S}) \quad (5.1)$$

en donde  $\omega_{ij}^g$  es el peso de la arista incidente a los nodos  $i$  y  $j$  del grafo  $g$  y  $c_{ij}^g$  es la conductancia (en siemens) del resistor en la rama que une los nodos  $i$  y  $j$  en el CEM del grafo  $g$ . Si  $i$  y  $j$  no son incidentes entonces  $c_{ij}^g = \phi(0) = 0$  S.

En la anterior definición ya se ha tenido en cuenta que como es  $\omega_{ji}^g = \omega_{ij}^g$  entonces es  $c_{ji}^g = c_{ij}^g$  por ser nesariamente los grafos, a los que se aplica el modelo, no dirigidos.

Es importante dejar bien claro que el CEM transforma pesos en conductancias (S) y que no es posible (o mejor dicho conveniente) hacerlo en resistencias ( $\Omega$ ). Es conocido que si dos nodos no están conectados en un grafo entonces les corresponde un cero en la matriz de adyacencia esto es consistente<sup>82</sup> con el hecho de que entre los dos nodos homólogos en el circuito eléctrico existe una conductancia nula. Diferente situación se produce si se hubiera admitido la transformación en resistencias ( $\Omega$ ) ya que a estos dos nodos del grafo (no conectados) les hubiera correspondido una resistencia de  $0 \Omega$  convirtiendo, eléctricamente hablando, estos dos nodos en el mismo punto (es decir, el mismo nodo). Esta situación lleva a una inconsistencia y debe ser evitada. En resumen, el CEM siempre transforma imperativamente pesos en conductancias (S) y nunca en resistencias ( $\Omega$ ).

La decisión de cual función de paso escoger depende fuertemente del significado físico de los pesos del grafo y, consecuentemente, depende del contexto del problema, en otras palabras, la función de paso es un parámetro de diseño. Sin conocer el origen físico del grafo se tomará siempre en este trabajo como función de paso la función identidad salvo que explícitamente se indique otra cosa.

A la función de paso se le impondrá dos restricciones, estas son

1. La función de paso debe ser inyectiva. Esta restricción es absolutamente necesaria si se quiere recuperar el grafo a partir de su modelo, es decir, para que exista la inversa de  $\phi$ . Esto permite escribir para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  y  $j = i + 1, i + 2, \dots, N$  la siguiente función de paso inversa

$$\omega_{ij}^g = \phi^{-1}(c_{ij}^g) \quad (5.2)$$

en donde las dimensiones de  $\omega_{ij}^g$  serán las que correspondían al grafo en origen que se tendrán que haber guardado si se hubieran necesitado ya que el modelo no “memoriza” las unidades utilizadas en el grafo si las hubiere.

<sup>81</sup>Se insiste una vez más y por última vez, que el modelo también se puede aplicar a grafos no ponderados, de aquí en adelante cuando se hable de pesos de un grafo no necesariamente se ha de prejulgar que sea ponderado ya que siempre se pueden asignar pesos unitarios a un grafo no ponderado. En definitiva, el CEM no distingue entre grafos ponderados y no ponderados a condición de que a estos últimos se les asigne pesos unitarios.

<sup>82</sup>Para el caso de una función de paso igual a la identidad.

2. Aunque ya ha sido tenido en cuenta en la definición 5.1 se insiste que debe ser  $\phi(0) = 0$  S. Como se ha comentado anteriormente, si dos nodos no están conectados les corresponde un cero en la matriz de adyacencia. Estos dos nodos en el modelo no les corresponde ningún resistor (resistencia infinita) por lo tanto su conductancia debe ser cero.

La primera restricción anteriormente comentada merece una reflexión sosegada. El método que se presentará en este trabajo no requiere en fase de explotación el cálculo de los grafos a partir de sus modelos, por lo tanto la primera restricción puede ser obviada y el método que se presentará podría llegar a ser plenamente operativo. Sin embargo, si lo que se pretende es investigar las características, prestaciones, bondades, debilidades, ... del método en cuestión la restricción comentada debe ser mantenida, pero sólo a efectos de investigación. Por otro lado, si el mismo modelo es utilizado para diseñar otro método diferente y/o con otra finalidad distinta al presentado aquí entonces será su funcionamiento en explotación el que determine si se mantiene o no tal restricción.

### 5.2.2 Caracterización del grafo modelado mediante la MIA

La caracterización del circuito (y por lo tanto del grafo  $g$ ) podría venir dada por la matriz de adyacencia de conductancias del mismo.<sup>83 84</sup>

$$(A'_c)^g = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^g & c_{13}^g & \cdots & c_{1,N}^g \\ c_{12}^g & 0 & c_{23}^g & \cdots & c_{2,N}^g \\ c_{13}^g & c_{23}^g & 0 & \cdots & c_{3,N}^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,N}^g & c_{2,N}^g & c_{3,N}^g & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{S}) \quad (5.3)$$

Se hace notar que esta matriz es simétrica por representar un circuito eléctrico resistivo puro sin fuentes, este aspecto ya se ha tenido en cuenta en la notación de los elementos de la anterior matriz ( $c_{ji}^g = c_{ij}^g$ ).

Pero la anterior matriz (5.3) no es usada en Teoría de Circuitos, es preferible el uso de la Matriz Indefinida de Admitancias (MIA), esta es

$$Y^g = \begin{pmatrix} y_{11}^g & y_{12}^g & y_{13}^g & \cdots & y_{1,N}^g \\ y_{12}^g & y_{22}^g & y_{23}^g & \cdots & y_{2,N}^g \\ y_{13}^g & y_{23}^g & y_{33}^g & \cdots & y_{3,N}^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,N}^g & y_{2,N}^g & y_{3,N}^g & \cdots & y_{N,N}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N c_{1,j}^g & -c_{12}^g & -c_{13}^g & \cdots & -c_{1,N}^g \\ -c_{21}^g & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N c_{2,j}^g & -c_{23}^g & \cdots & -c_{2,N}^g \\ -c_{31}^g & -c_{32}^g & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^N c_{3,j}^g & \cdots & -c_{3,N}^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{N,1}^g & -c_{N,2}^g & -c_{N,3}^g & \cdots & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^N c_{N,j}^g \end{pmatrix} \quad (\text{S}) \quad (5.4)$$

<sup>83</sup>No se ha de confundir la matriz de adyacencia del grafo y la del circuito que sólo coincidirán numéricamente (pero no dimensionalmente) cuando la función de paso sea la identidad. En todo caso se usará  $(A'_c)^g$  para evitar la confusión con la matriz de adyacencia del grafo  $A^g$

<sup>84</sup>Similarmente (de forma dual) puede ser utilizada la matriz de adyacencia de resistencias del circuito  $(A'_r)^g$ , los elementos  $(r_{ij}^g)$  de esta matriz son inversos, uno a uno, de los elementos homólogos  $(c_{ij}^g)$  de la matriz  $(A'_c)^g$ . Esta matriz tampoco es utilizada en Teoría de Circuitos.

Esta matriz será simétrica (por ser un circuito resistivo puro sin fuentes) de donde se cumple que  $y_{ij}^g = y_{ji}^g$  y por lo tanto se puede usar indistintamente una u otra expresión ( $y_{ij}^g$  o  $y_{ji}^g$ ). En lo sucesivo podrá no advertirse más este extremo (para esta matriz u otras) y se hará uso de una notación u otra según convenga.

Se hace notar que en el caso de una función de paso igual a la identidad la matriz (5.4) coincide numéricamente (pero no dimensionalmente) con la laplaciana del grafo  $g$ .

De forma análoga (pero dual) queda caracterizado el circuito si se usa la Matriz Indefinida de Impedancias (MII), esta es

$$Z^g = \begin{pmatrix} z_{11}^g & z_{12}^g & z_{13}^g & \cdots & z_{1,N}^g \\ z_{12}^g & z_{22}^g & z_{23}^g & \cdots & z_{2,N}^g \\ z_{13}^g & z_{23}^g & z_{33}^g & \cdots & z_{3,N}^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1,N}^g & z_{2,N}^g & z_{3,N}^g & \cdots & z_{N,N}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^N r_{1,j}^g & -r_{12}^g & -r_{13}^g & \cdots & -r_{1,N}^g \\ -r_{21}^g & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^N r_{2,j}^g & -r_{23}^g & \cdots & -r_{2,N}^g \\ -r_{31}^g & -r_{32}^g & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^N r_{3,j}^g & \cdots & -r_{3,N}^g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_{N,1}^g & -r_{N,2}^g & -r_{N,3}^g & \cdots & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq N}}^N r_{N,j}^g \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (5.5)$$

en donde  $r_{ij}^g = (c_{ij}^g)^{-1}$  para  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1, \dots, N$  pero con  $i \neq j$  en todo caso.<sup>85</sup>

Con la expresión (5.4), o alternativamente con (5.5), se da por terminada la obtención del CEM del grafo  $g$  y se recalca que a partir de aquí es aplicable la Teoría de Circuitos. Por último decir que, en el futuro, se prescindirá del subíndice o sobreíndice que indica el grafo origen del CEM (en este caso  $g$ ) y sólo se volverá a usarlo cuando se pueda producir confusión o se necesite mayor claridad.

### 5.3 Inversión del CEM

El CEM debería permitir el proceso inverso,<sup>86</sup> esto es poder obtener el grafo que dió origen al circuito mediante el modelo. El proceso es tan sencillo como aplicar la función inversa de la función de paso dada en (5.1) al valor absoluto de los elementos de la parte triangular superior (o inferior) de la MIA dada por (5.4). Esto dará los pesos de las aristas del grafo que son incidentes a los nodos en cuestión.

Todo lo anterior nada más es posible si se ha tenido precaución en dos cuestiones, estas son:

1. Se ha diseñado o escogido una función de paso que sea invertible, en caso contrario no se podrá obtener los pesos de las aristas o bien habrá más de una solución.<sup>87</sup>
2. Se ha conservado la numeración de los nodos del grafo en la numeración de filas y columnas de la MIA, en este caso se obtiene exactamente el grafo del cual se partió, en caso contrario

<sup>85</sup>No es cierto que  $r_{kk}^g = (c_{kk}^g)^{-1}$  para ningún  $k = 1, 2, \dots, N$ .

<sup>86</sup>Sólo a efectos de investigación. El método de la estrella (SM) que se propondrá más adelante no necesita invertir el CEM para nada.

<sup>87</sup>No obstante véase el último párrafo del apartado 5.2.1 "Función de paso" (página 62).

se puede encontrar el grafo origen pero será uno de los  $N!$  grafos isomorfos (incluido el grafo origen).

## 5.4 Ejemplos ilustrativos de la aplicación del CEM

En este apartado se ofrecen algunos ejemplos de obtención del CEM de un grafo. Es evidente que todos tendrán un grado muy bajo con el propósito de poder incorporarlos en este documento, no obstante serán útiles en tanto ilustrarán el modelo.

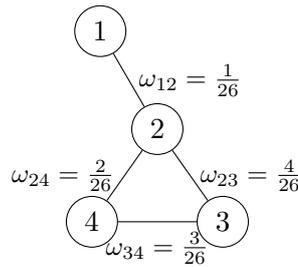


Figura 5.2: Grafo de ejemplo de aplicación del CEM.

Sea el grafo  $g$  de la figura 5.2 su matriz de adyacencia será

$$A^g = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Tomando como función de paso la identidad se tiene

$$Y_1^g = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (S) \quad (5.7)$$

Para el mismo grafo  $g$  (figura 5.2) con matriz de adyacencia dada por (5.6) se obtiene su CEM pero usando la siguiente función de paso

$$c_{ij} = \phi(\omega_{ij}) = \begin{cases} 0; & \text{si } \omega_{ij} = 0 \\ 1/\omega_{ij}; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se obtiene como matriz de adyacencia de conductancias del circuito la siguiente expresión.

$$(A_c^g)_2 = 26 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{13}{6} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (S)$$

Y finalmente

$$Y_2^g = \frac{13}{6} \begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 21 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 17 & -4 \\ 0 & -6 & -4 & 10 \end{pmatrix} \quad (S) \quad (5.8)$$

## 5.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una de las aportaciones originales de esta tesis: el CEM. A la vista del Capítulo 3 “Estado del arte del emparejamiento de grafos” (página 31) se puede afirmar que, de las contribuciones hechas sobre grafos, ninguna hace un enfoque como el aquí presentado. El CEM por sí mismo no resuelve ningún problema sobre grafos, simplemente es un modelo circuital de un grafo, pero a partir de este modelo podrán ser diseñadas aplicaciones concretas que resuelvan algún problema planteado en grafos. Más adelante, se presentará el método de la estrella (SM) que permite abordar un problema concreto sobre grafos a través del CEM. Una ventaja del modelo adoptado es que la teoría que lo sustenta (la Teoría de Circuitos) es uno de los bagajes básicos que son enseñados en los primeros cursos de prácticamente todos los estudios universitarios politécnicos, por lo tanto, no se podrá tachar de rebuscado el modelo seleccionado. Finalmente, en la obtención del CEM de un grafo se destaca que

1. Tiene una complejidad computacional muy competitiva, esta es siempre de  $O(N^2)$  siendo  $N$  el grado del grafo.
2. Se utilizan fórmulas cerradas y directas (no es iterativo, no es probabilístico, no es recursivo, ...).



## Capítulo 6

# Aplicación del CEM al isomorfismo de grafos: Método de la Estrella

### 6.1 Introducción

En este capítulo junto con el anterior reside el núcleo de la presente tesis. En él se aproximará el circuito obtenido mediante el CEM de un grafo por un circuito en estrella compuesto exclusivamente por resistores, a este proceso se le denominará el “Método de la Estrella” (de aquí en adelante SM<sup>88</sup>). Esta aproximación se efectuará de forma tal que minimice el error cuadrático medio (ecm) que se comete entre los conjuntos de resistencias equivalentes de la estrella y del circuito original con los detalles que se comentarán de seguida en este mismo capítulo. Una vez obtenidas las respectivas estrellas, el problema del isomorfismo entre los grafos originales se traslada al isomorfismo entre estrellas cuya solución está resuelta con complejidad computacional polinomial de grado tres<sup>89</sup> salvo repeticiones en los valores de la estrella. Ello permite extraer el mapeado entre los nodos de las estrellas y extrapolarlo a los grafos originales. Finalmente, dado que se pueden producir falsos positivos, siempre será necesario validar el resultado obtenido.

En todo el capítulo se asumirá que los grafos a comparar son  $g$  y  $h$  ambos del mismo grado  $N$ , no dirigidos y sin etiquetas en los nodos. Además, para fijar ideas, se les supondrá simples, sin lazos, conexos y ponderados. Se presupone que a estos dos grafos ya se les ha aplicado el modelizado mediante el CEM utilizando para ambos la misma función de paso que, también para fijar ideas, se asumirá que fue la identidad. Con ello ya se dispone de sendos circuitos eléctricos resistivos puros que vendrán caracterizados por sus respectivas MIAs:  $Y^g$  y  $Y^h$ . Con esto último se da por concluido la modelización de ambos grafos mediante el CEM.<sup>90</sup>

A lo largo del capítulo se dará un tratamiento práctico al asunto y se enfocará como si de un filtrado de grafos se tratase. La descripción en profundidad del SM será dividida en una fase previa y opcional más cuatro fases propias del SM. Estas fases, por orden de aplicación, son filtrado opcional, detección, aproximación, mapeado y validación, todas ellas se irán desgranando en los sucesivos apartados. En una sola hoja se ha dispuesto un diagrama de bloques del proceso que permitirá hacer un seguimiento de lo expuesto en este capítulo (figura 6.1 de la página 69), en dicha figura el bloque denominado “Prefiltrado (opcional)” corresponde obviamente al filtrado opcional en el texto, el bloque denominado “Primer filtrado” corresponde a la detección en el texto y el bloque denominado “Segundo filtrado” corresponde, en el texto, a la aproximación, mapeado

---

<sup>88</sup>Véase la nota 2 de la página 1.

<sup>89</sup>Globalmente la complejidad computacional es de grado tres porque domina la complejidad computacional del SM sobre la obtención del CEM que era de grado dos.

<sup>90</sup>Véase el capítulo anterior (Capítulo 5 “Modelo Eléctrico de Conductancias de un grafo”) en la página 59 dedicado íntegramente a la obtención del CEM.

y validación.

## 6.2 Fase opcional: Filtrado previo

Esta fase consiste, en esencia, en eliminar aquel par de grafos que, de entrada, se sabe no pueden ser isomorfos por algún motivo, por lo tanto y si esto sucede el método de la estrella no llega a aplicarse. Esta es una fase opcional pero muy recomendable en entornos de explotación del método en sí, si esta fase no se aplica el método propuesto sigue siendo plenamente operativo. La ventaja de su aplicación no sólo reside en el hecho de eliminar en estadios tempranos las parejas de grafos que por alguna razón no podrán ser nunca isomorfos sino que también reduce la probabilidad de producirse falsos positivos. Para la discusión de esta fase se necesita introducir la definición siguiente que sólo tendrá sentido en este contexto y sólo en él. Esta fase queda identificada como “Prefiltrado (opcional)” en la figura 6.1 de la página 69.

**Definición 6.1.** *Se dirá que dos grafos  $g$  y  $h$  no dirigidos y del mismo grado  $N$  son  $k$ -candidatos cuando cumplen con un subconjunto (determinado de antemano) de todas las condiciones necesarias para el isomorfismo de grafos comprobables con complejidad computacional inferior o igual al de una polinomial de orden  $k$  según el grado  $N$  ( $O(N^k)$ ).*

Hay que aclarar que el subconjunto de condiciones necesarias es un parámetro de diseño, cuya correcta elección está íntimamente ligado al previo conocimiento estadístico que se tenga del conjunto de grafos que se sometan al SM. Como se verá más adelante todo el proceso tiene globalmente una complejidad computacional polinomial de grado tres según el número de nodos, se escoge un filtrado previo con 2-candidatos y se toman el subconjunto de condiciones necesarias que a continuación se enumeran.

1. Ambos grafos tienen el mismo tamaño  $M$ .

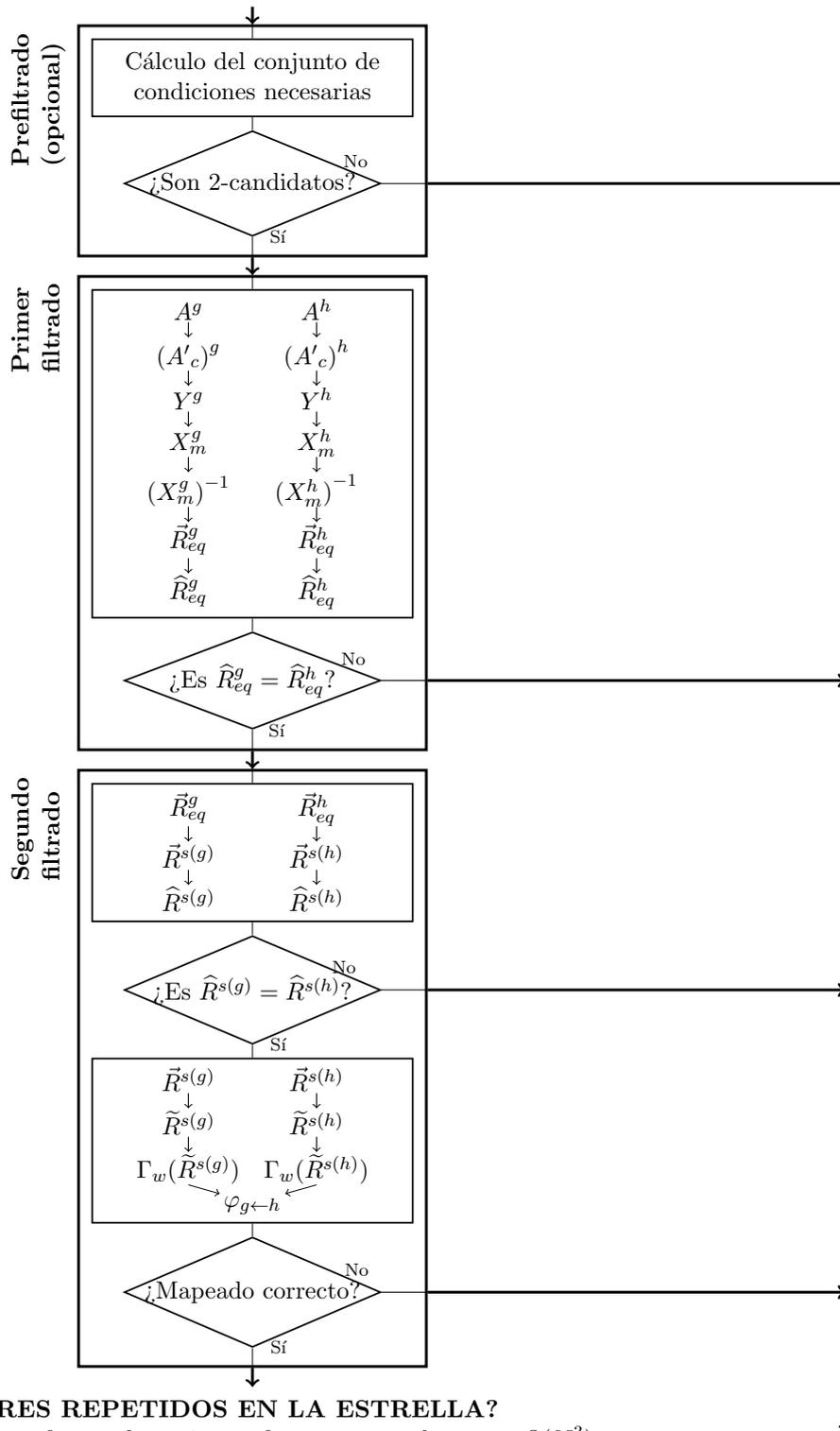
A partir de la matriz de adyacencia del grafo se hace un recorrido por columnas y por cada una de ellas se hace un recorrido por filas (exclusivamente en la parte triangular superior o inferior de la matriz de adyacencia) y se contabilizan aquellos elementos diferentes de cero. La complejidad computacional es  $O(N^2)$ . De aquí en adelante se supondrá que el par de grafos que se someten al SM tendrán el mismo tamaño  $M$  salvo indicación en contra.

2. Ambos grafos tienen el mismo conjunto de valencias con sus repeticiones.

Para la obtención de las valencias y sus repeticiones se recorre la matriz de adyacencia por filas y para cada fila se contabiliza los valores diferentes de cero obteniéndose la valencia del nodo de la fila. Posteriormente se comparan las dos tablas. La complejidad computacional es  $O(N^2)$ . De aquí en adelante se supondrá que el par de grafos que se someten al SM tendrán el mismo conjunto de valencias con sus repeticiones salvo indicación en contra.

Existe otra condición necesaria muy productiva a efectos prácticos ya que descarta muchos pares de grafos que no serán isomorfos. Se trata de comprobar que el conjunto de los pesos con sus repeticiones es el mismo. Para obtener el conjunto de los pesos con sus repeticiones se recorre la matriz de adyacencia por filas y columnas (exclusivamente en la parte triangular superior o inferior de la matriz de adyacencia) y se va actualizando una tabla de frecuencias absolutas, esta tabla tendrá como máximo  $M$  valores en el caso de que no existan repeticiones. Por lo tanto la comparación de las dos tablas tendrá una complejidad computacional de  $O(M^2)$ . Ahora bien, en el peor caso es  $M = N(N - 1)/2$  (grafo completo), y por lo tanto la complejidad computacional según el número de nodos será  $O(N^4)$ . Esta es la razón por la que no se ha incorporado esta condición necesaria: su complejidad computacional es superior a la de todo el proceso en sí y esto no tendría sentido. No obstante, se ha querido dejar constancia de esta condición necesaria ya que si se sabe de antemano que los grafos que se están manipulando tienen un valor bajo de  $M$ , es decir  $M \ll N(N - 1)/2$ , entonces su incorporación a efectos prácticos aumenta la productividad del SM.

Par de grafos  $g$  y  $h$  de grado  $N$  (Entradas:  $A^g$  y  $A^h$ )



**¿VALORES REPETIDOS EN LA ESTRELLA?**

- NO:** Los grafos  $g$  y  $h$  son isomorfos con mapeado  $\varphi_{g \leftarrow h}$ :  $O(N^3)$ . Los grafos  $g$  y  $h$  no son isomorfos:  $O(N^3)$ .  
**SÍ:** Los grafos  $g$  y  $h$  pueden ser isomorfos con  
 a) mapeado parcial:  $O(N^3)$ .  
 b) mapeado total: el peor caso entre  $O(N^3)$  y  $O(J!)$ .

Figura 6.1: Diagrama de bloques del SM usando el CEM. El máximo número de repeticiones (si las hubiere) en la estrella es denotado por  $J$ . El bloque denominado “Prefiltrado (opcional)” corresponde obviamente al filtrado opcional en el texto, el bloque denominado “Primer filtrado” corresponde a la detección en el texto y el bloque denominado “Segundo filtrado” corresponde a la aproximación, mapeado y validación en el texto.

## 6.3 Fase de detección: Obtención de las resistencias equivalentes

Aplicando la Teoría de Circuitos tal y como se ha descrito en el Capítulo 4 (página 45) se obtienen las  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes de ambos circuitos, por lo que se dispondrá de  $R_{eq}^g$ ,  $\vec{R}_{eq}^g$  y  $\widehat{R}_{eq}^g$  para el grafo  $g$  y de  $R_{eq}^h$ ,  $\vec{R}_{eq}^h$  y  $\widehat{R}_{eq}^h$  para el grafo  $h$  (véase el apartado 4.7 en la página 55 para las definiciones de  $R_{eq}$ ,  $\vec{R}_{eq}$  y  $\widehat{R}_{eq}$ ). Esta fase corresponde con el bloque denominado “Primer filtrado” en la figura 6.1 de la página 69.

Es evidente que si  $g$  y  $h$  son grafos isomorfos entonces sus circuitos eléctricos obtenidos mediante el CEM son idénticos salvo la numeración de los nodos, por lo tanto se cumplirá que sus resistencias equivalentes coincidirán excepto en la numeración de los nodos. Con mayor precisión se da el siguiente corolario de los teoremas 4.1 y 4.2 (página 54).

**Corolario 6.1.** *Si los grafos  $g$  y  $h$  son isomorfos entonces  $\widehat{R}_{eq}^g$  y  $\widehat{R}_{eq}^h$  son iguales, esto es*

$$g \cong h \quad \Rightarrow \quad \widehat{R}_{eq}^g = \widehat{R}_{eq}^h \quad (6.1)$$

en donde  $\cong$  indica isomorfismo de grafos.

El corolario anterior permite afirmar que el conjunto  $\widehat{R}_{eq}$  extraído de cualquier grafo es un invariante para el isomorfismo de grafos. La igualdad  $\widehat{R}_{eq}^g = \widehat{R}_{eq}^h$  es una condición necesaria pero no suficiente para el isomorfismo de grafos, por lo tanto se pueden producir falsas detecciones (falsos positivos). No obstante, si el SM es llevado hasta el final (fase de validación) esta situación será detectada, pudiéndose afirmar que el método globalmente es exacto (esto será tratado con más detalle en apartados posteriores). Finalmente, se advierte que si se cumple que  $\widehat{R}_{eq}^g = \widehat{R}_{eq}^h$  no implica que sea  $R_{eq}^g = R_{eq}^h$  ni que sea  $\vec{R}_{eq}^g = \vec{R}_{eq}^h$  incluso en el caso de que  $g$  y  $h$  sean isomorfos (las dos anteriores sólo serán ciertas cuando los grafos sean iguales).

En definitiva, si en este punto es  $\widehat{R}_{eq}^g \neq \widehat{R}_{eq}^h$  entonces  $g$  y  $h$  categóricamente no son isomorfos y el SM concluye aquí, en caso contrario el SM debe continuar para hallar el mapeado y posteriormente validarlo. Por último, se hace notar que en el SM se distingue claramente entre el problema de decisión y de asignación en el isomorfismo de grafos (esto siempre es una ventaja), ya que en este punto se está en condiciones de detectar el isomorfismo salvo falsos positivos.

### 6.3.1 Grafo completo de resistencias equivalentes

Considérense las  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes que se obtienen de un circuito resistivo puro conexo con  $N$  nodos. Entonces se tiene que:

1. Si el circuito de donde se extraen estas resistencias equivalentes es conexo entonces ninguna de estas resistencias equivalentes podrá tener una conductancia cero, es decir, resistencia infinita (entre dos nodos, por ser conexo, siempre existe un camino).
2. Ninguna resistencia equivalente podrá tener un valor óhmico de cero. Por reducción al absurdo admítase que esto puede suceder, entonces los nodos entre los cuales esta resistencia equivalente es nula son, eléctricamente hablando, el mismo nodo luego el grafo tiene  $N - 1$  nodos y esto está en contradicción con la hipótesis inicial de que el grafo tiene  $N$  nodos.
3. Atendiendo a la definición de resistencia equivalente resulta que cualquiera de ellas entre dos nodos de un circuito resistivo puro nunca es negativa.
4. Por ser el circuito resistivo puro la resistencia equivalente entre los nodos  $i$  y  $j$  será la misma que entre los nodos  $j$  y  $i$ . Por lo tanto será  $r_{eqij} = r_{eqji}$  y se podrá usar, según convenga, tanto  $r_{eqij}$  como  $r_{eqji}$ .

Los  $N(N - 1)/2$  valores de las resistencias equivalentes pueden ser interpretados por los puntos 1 y 3 como los pesos de las aristas de un nuevo grafo conexo de  $N$  nodos.<sup>91</sup> Cada uno de estos pesos por el punto 2 no podrá ser cero, luego este nuevo grafo siempre será un grafo ponderado completo. Por el punto 4 el grafo ponderado completo será no dirigido y su matriz de adyacencia será simétrica. Esta matriz de adyacencia ( $R_{eq}$ ) será la dada por la expresión (4.39) de la página 56. En lo que sigue se denotará un grafo completo de resistencias equivalentes proveniente de un grafo  $g$  por  $q(g)$ .

Como ejemplo de grafo de resistencias equivalentes se representa en la figura 6.2 uno cualquiera de grado seis, cerca de cada nodo se representan los valores de la resistencias equivalentes adyacentes al resto de nodos por lo que estos valores aparecen dos veces. La matriz de adyacencia de este ejemplo será

$$R_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & r_{eq12} & r_{eq13} & r_{eq14} & r_{eq15} & r_{eq16} \\ r_{eq21} & 0 & r_{eq23} & r_{eq24} & r_{eq25} & r_{eq26} \\ r_{eq31} & r_{eq32} & 0 & r_{eq34} & r_{eq35} & r_{eq36} \\ r_{eq41} & r_{eq42} & r_{eq43} & 0 & r_{eq45} & r_{eq46} \\ r_{eq51} & r_{eq52} & r_{eq53} & r_{eq54} & 0 & r_{eq56} \\ r_{eq61} & r_{eq62} & r_{eq63} & r_{eq64} & r_{eq65} & 0 \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (6.2)$$

en donde  $r_{eqij} = r_{eqji}$  y  $0 < r_{eqij} < \infty$  para  $i = 1, 2, \dots, 6$  y  $j = 1, 2, \dots, 6$  con  $i \neq j$ .

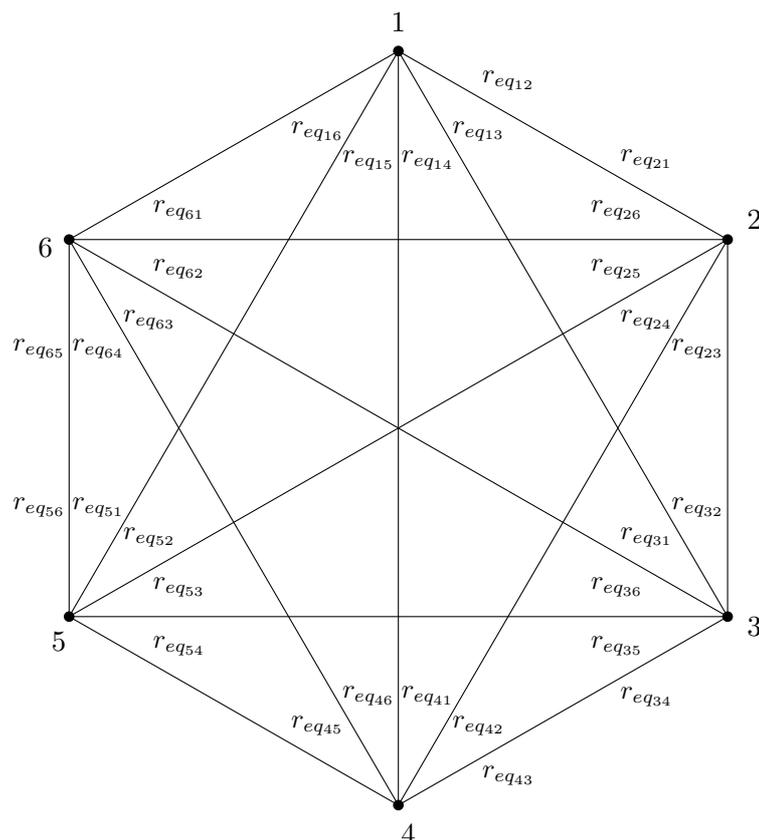


Figura 6.2: Grafo completo de resistencias equivalentes de grado 6. Intencionadamente cerca de cada nodo  $i$  se ha representado la resistencia equivalente ( $r_{eqij}$ ) de cada arista adyacente al nodo. Por lo tanto cada valor aparecerá dos veces aunque ambos sean el mismo ( $r_{eqij} = r_{eqji}$  con  $i \neq j$ ).

<sup>91</sup>Desde un punto de vista circuital la relación entre este nuevo grafo y el circuito del cual proviene tiene escaso uso práctico por no decir ninguno.

## 6.4 Fase de aproximación: Obtención de un circuito en estrella

Esta fase corresponde con parte del bloque identificado como “Segundo filtrado” en la figura 6.1 de la página 69. En lo que sigue se considerará un circuito eléctrico resistivo puro en estrella como el mostrado en la figura 6.3.

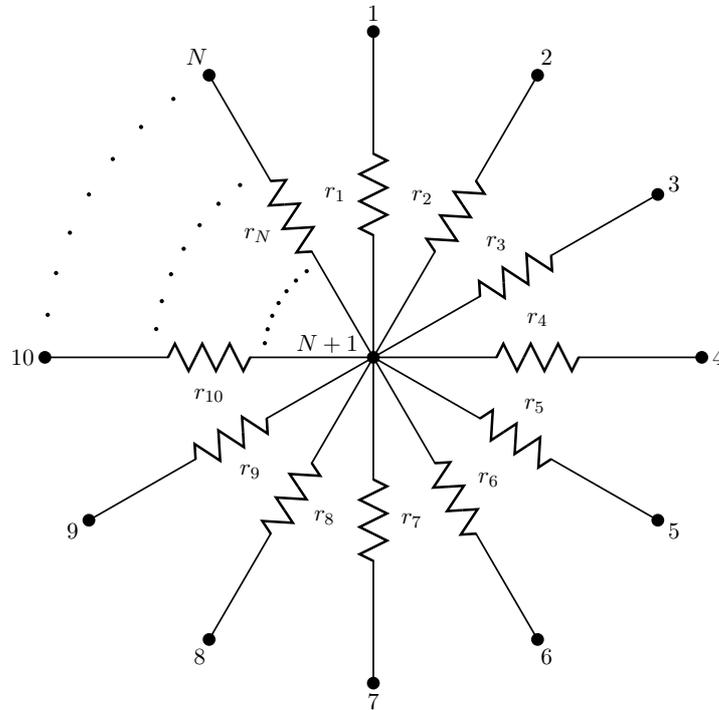


Figura 6.3: Circuito genérico de resistores en estrella de  $N + 1$  nodos y  $N$  resistores.

Genéricamente tendrá  $N + 1$  nodos,  $N$  ramas y sendos resistores con resistencia  $r_k$  ( $\Omega$ ) para  $k = 1, \dots, N$ . Sólo por conveniencia y sin pérdida de generalidad se supondrá que el último nodo ( $N + 1$ ) es el raíz o central y la numeración del resto de nodos será totalmente arbitraria. La numeración de cada resistor se hará en consonancia con la numeración del nodo hoja al que es adyacente. Por último, se va a considerar que el nodo central está oculto (como si no existiera) y no se tendrá en cuenta en lo que sigue.

El circuito eléctrico (modelo del grafo) se va a aproximar por un circuito en estrella de las características enunciadas anteriormente, para ello se va a proceder como se indica en los dos siguientes subapartados.

### 6.4.1 Resistencias equivalentes del circuito en estrella

Recordando que no se va a considerar el nodo central del circuito en estrella se tendrá que el número de resistencias equivalentes es  $N(N - 1)/2$ . Es extremadamente fácil ver (asociación serie de resistores) que la resistencia equivalente de la estrella entre los nodos  $i$  y  $j$  ( $r'_{eqij}$ )<sup>92</sup> es  $r_i + r_j$ , con  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  y  $j = i + 1, i + 2, \dots, N$  en donde se tiene en cuenta implícitamente que  $r'_{eqji} = r'_{eqij}$ .

En forma matricial, la obtención de las resistencias equivalentes de la estrella en función de los

<sup>92</sup>En lo que seguirá se usará prima para las resistencias equivalentes de la estrella para distinguirlas de las resistencias equivalentes del circuito original.

valores óhmicos de las ramas de la estrella viene dado por

$$\begin{pmatrix} r'_{eq12} \\ r'_{eq13} \\ r'_{eq14} \\ r'_{eq15} \\ \vdots \\ r'_{eq1,N-1} \\ r'_{eq1,N} \\ r'_{eq23} \\ r'_{eq24} \\ r'_{eq25} \\ \vdots \\ r'_{eq2,N-1} \\ r'_{eq2,N} \\ r'_{eq34} \\ r'_{eq35} \\ \vdots \\ r'_{eq3,N-1} \\ r'_{eq3,N} \\ r'_{eq45} \\ r'_{eq46} \\ \vdots \\ r'_{eq4,N-1} \\ r'_{eq4,N} \\ \vdots \\ \vdots \\ r'_{eqN-1,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

En donde la matriz de coeficientes de orden  $N(N-1)/2 \times N$  será denotada, de aquí en adelante, por  $K$ . La igualdad anterior (6.3) se podrá escribir, en forma más compacta, como

$$\vec{R}'_{eq} = K \vec{R} \quad (6.4)$$

Concluyendo, las  $N(N-1)/2$  resistencias equivalentes del circuito en estrella descrito con anterioridad vienen dadas por la ecuación matricial (6.3) o en forma más compacta por la ecuación (6.4).

Es muy interesante observar la estructura peculiar que adquiere la matriz  $K$  de  $N(N-1)/2$  filas y  $N$  columnas. Se van a destacar las tres siguientes peculiaridades (o mejor dicho propiedades).

1. La primera peculiaridad de la matriz  $K$  es muy evidente. Consiste en que cada uno de los elementos de la matriz sólo puede tener dos valores: o cero o uno. Esto es así sea cual fuere el valor de  $N$ , y por lo tanto sea cual fuere las dimensiones de la matriz  $K$ .
2. Otro detalle de la matriz  $K$  es que cada fila tiene exactamente dos unos y, por lo tanto,  $N-2$  ceros y cada columna tiene exactamente  $N-1$  unos y, por lo tanto,  $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$  ceros. Es evidente que la suma de cada fila es dos y que cada columna suma  $N-1$ .
3. Por último, la matriz  $K$  está formada por bloques que repiten un patrón, para dejar esto último en clara evidencia se dispone más adelante, en una página separada, la expresión (6.7) de la matriz  $K$  con los detalles que se han querido destacar. Después de la inspección de (6.7)

se destaca que las  $N - 1$  primeras filas forman un bloque con un patrón característico, este patrón se repite desplazado una columna a la derecha para el siguiente bloque formado por  $N - 2$  filas, una vez más se vuelve a repetir el patrón en el siguiente bloque pero desplazado dos columnas a la derecha para  $N - 3$  filas y así sucesivamente hasta el último bloque formado siempre por una sola fila (la última fila). La división en bloques es consistente con el hecho de que la matriz tenga  $N(N - 1)/2$  filas, en efecto el número total de filas es la suma de las filas por bloques, esto es

$$(N - 1) + (N - 2) + (N - 3) + \dots + 3 + 2 + 1 = \sum_{l=1}^{N-1} l \quad (6.5)$$

que corresponde con una progresión aritmética finita con diferencia unidad cuya suma, en general, es el primer término más el último multiplicado por el número de términos dividido por dos, esto es

$$\frac{(1 + N - 1)(N - 1)}{2} = \frac{N(N - 1)}{2} \quad (6.6)$$

Este resultado es precisamente el número de filas.<sup>93</sup>

---

<sup>93</sup>El detallismo en este punto no es gratuito ya que tiene una razón escondida y es que pronto se hará un uso más interesante de una progresión aritmética de diferencia  $d$ .



Gracias a que la matriz  $K$  tiene esta estructura peculiar se producirán consecuencias trascendentes porque se podrá obtener los elementos de esta matriz según se necesiten (“al vuelo”) y, por lo tanto, no será necesario consumir memoria en un computador para almacenar dicha matriz, sin embargo se tendrá que pagar el precio de un ligero incremento de la carga de cálculo,<sup>94</sup> aún así es evidente que esto representa una enorme ventaja máxime si se tiene en cuenta las dimensiones de la matriz  $K$  (del orden de  $N^3$  elementos).

Exclusivamente con el propósito de abreviar las expresiones que vendrán a continuación se denotará por  $Q$  el valor  $N(N-1)/2$ . Sea un elemento cualquiera  $k_{ij}$  con  $i = 1, 2, \dots, Q$  y  $j = 1, 2, \dots, N$  de la matriz  $K$ , en un primer momento interesará obtener el bloque  $b$  al cual pertenece dicho elemento en función de la fila  $i$  que ocupa (puede ir viéndose la expresión (6.7)). Para este propósito se necesitarán de forma auxiliar las variables  $b'$  y  $i'$  que representarán el número de bloque y el número de fila respectivamente pero contados a partir de la parte inferior de la matriz  $K$  siendo ambas crecientes hacia arriba. Como la matriz en cuestión tiene  $N-1$  bloques y  $Q$  filas entonces se verificará que

$$i' = Q - i + 1 \quad \Rightarrow \quad i' = Q + 1 - i \quad (6.8)$$

y que

$$b' = (N-1) - b + 1 \quad \Rightarrow \quad b' = N - b \quad (6.9)$$

También se usará de forma auxiliar la función  $u'(b')$  que denota la última fila de cada bloque  $b'$  pero contabilizando ambos valores (la fila y el bloque) desde la parte inferior de la matriz  $K$ . Con lo anterior y no perdiendo de vista que se contarán las filas y bloques desde la parte inferior de la matriz  $K$  se tiene que  $u'(b')$  coincide con la suma de las filas de los bloques anteriores al propio bloque más las filas del propio bloque ( $b'$ ), y esto es la suma de los  $b'$  primeros términos de una progresión aritmética de diferencia la unidad cuyo primer término es uno y el último término es  $b'$ , por lo tanto será

$$u'(b') = \frac{(1+b')b'}{2} \quad (6.10)$$

Es fácil calcular la inversa de (6.10) ya que se trata de una ecuación de segundo grado, con ello se obtiene el número de bloque conocida la última fila del bloque que ahora será un dato, esto es

$$b' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2u'}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1+8u'}}{2} \quad (6.11)$$

La anterior expresión siempre será un número natural. Ahora bien, si se sustituye  $u'$  por cualquier otra fila ( $i'$ ) pero del mismo bloque entonces se cumplirá que  $i' \leq u'$ , por lo tanto el valor de la expresión (6.11) por ser una función creciente será inferior a  $b'$  pero superior al número natural inmediatamente inferior porque dicho valor correspondería a la última fila del bloque anterior. De todo lo anterior resulta que la expresión (6.11) puede ser ampliada a cualquier fila ( $i'$ ) a condición de tomar la función techo, esto es

$$b' = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1+8i'}}{2} \right\rceil \quad (6.12)$$

en donde la función techo ( $\lceil \cdot \rceil$ ) se define como

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\} \quad (6.13)$$

Falta expresar (6.12) mediante  $i$  y  $b$ , teniendo en cuenta las relaciones dadas por (6.8) y por (6.9) se tendrá que la mencionada expresión pasa a ser

$$b = N - \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1+8(Q+1-i)}}{2} \right\rceil \quad (6.14)$$

<sup>94</sup>Será un ligero incremento porque las operaciones involucradas serán sencillas como se verá más adelante.

Sustituyendo  $Q$  por  $N(N-1)/2$  y realizando las oportunas simplificaciones queda

$$b = N - \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{4N(N-1) - 8i + 9}}{2} \right\rceil \quad (6.15)$$

Con este resultado ya se conoce en que bloque ( $b$ ) se halla la fila ( $i$ ) que contiene el elemento  $k_{ij}$  de la matriz  $K$ .

Ahora se necesita buscar la expresión de una fila distinguida dentro del mismo bloque para poder ubicar de forma relativa la fila que contiene el elemento  $k_{ij}$  respecto a esta fila distinguida. Esta fila distinguida podría ser la primera o la última de cada bloque, se va a escoger la primera pero el resultado final no puede depender de esta elección. Para ello, se va a utilizar la función  $p(b)$  que denotará la primera fila del bloque  $b$  ambos contabilizados de forma convencional (desde el principio de la matriz  $K$ ). Se hace notar que  $p(\cdot)$  y  $u'(\cdot)$  para un mismo bloque son la misma fila aunque sus valores no coincidan, es decir, para cada bloque la primera fila de un bloque contada desde la parte superior es la misma fila que la última fila del mismo bloque contada desde la parte inferior. Por ser la misma fila pero contabilizada desde extremos opuestos y teniendo en cuenta la expresión (6.8) se podrá escribir

$$p(b) = Q + 1 - u'(b') \quad (6.16)$$

con la condición de que, aún pudiendo ser diferentes,  $b$  y  $b'$  referencien el mismo bloque. Sustituyendo en (6.16) el valor de  $u'(b')$  por el dado en (6.10) se obtiene

$$p(b) = Q + 1 - \frac{(1+b')b'}{2} \quad (6.17)$$

Como ya se ha dicho  $b$  y  $b'$  referencian al mismo bloque por lo que se puede aplicar el cambio de variable dado por (6.9) a la anterior expresión (6.17), quedando

$$p(b) = Q + 1 - \frac{(N+1-b)(N-b)}{2} \quad (6.18)$$

Sustituyendo  $Q$  por  $N(N-1)/2$  y realizando las oportunas simplificaciones se obtiene finalmente

$$p(b) = (b-1)N - \frac{1}{2}(b-2)(b+1) \quad (6.19)$$

Después de todo lo anterior y para destacar lo fundamental de lo accesorio se tendrá que la fila  $i$  del elemento  $k_{ij}$  de la matriz  $K$  está en el bloque  $b$  dado por (6.15) y que la primera fila de este bloque será  $p(b)$  que vendrá dada por (6.19).

Si se observa una vez más  $K$  en la expresión (6.7) se detecta que para cada fila  $i$  hay dos situaciones en las que aparecen unos. En la primera situación aparece un uno en la columna  $b$  (o mejor dicho en  $j = b$ ) donde  $b$  es el bloque donde está el elemento  $k_{ij}$  (de hecho aparecen unos en toda la columna de bloque). En la segunda situación aparece un uno en una columna a la derecha de la columna de la primera situación desplazada, a la derecha de ella, tantas posiciones como posiciones separen la fila donde esta  $k_{ij}$  respecto de la primera fila del bloque más uno, de forma más sintética y clarificadora, aparece un uno en la columna  $j = b(i) + i - p(b(i)) + 1$  donde  $b$  es el bloque y  $p(b(i))$  es la primera fila del bloque donde está el elemento  $k_{ij}$ . El resto de elementos son cero. Con todo lo anterior queda demostrado el siguiente teorema.

**Teorema 6.1.** *El elemento  $k_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$  y  $j = 1, 2, \dots, N$  de la matriz  $K$  cuya estructura es la representada en (6.7) vale 0 excepto si  $j = b(i)$  o si  $j = b(i) + i - p(b(i)) + 1$  que vale 1 (ambas posibilidades mutuamente excluyentes) en donde  $b(\cdot)$  y  $p(\cdot)$  son las funciones dadas por*

$$b(i) = N - \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{4N(N-1) - 8i + 9}}{2} \right\rceil \quad (6.20)$$

y

$$p(b) = (b - 1)N - \frac{1}{2}(b - 2)(b + 1) \quad (6.21)$$

respectivamente.

Si se necesita la matriz  $K$  en memoria no tiene sentido utilizar el teorema anterior, ya que éste sirve para obtener los elementos de la matriz  $K$  bajo demanda. Por lo tanto el problema reside ahora en la inicialización de los elementos de la matriz  $K$ . El algoritmo mostrado en 6.1 permite realizar esta tarea, en él se asume que  $N$  es el valor de entrada. Obsérvese que en dicho algoritmo se usa como fila distinguida la última fila de cada bloque que viene denominada como “FinalBloque” por lo demás su sencillez extrema hace innecesario cualquier otro comentario.

---

**Algoritmo 6.1** Inicialización de la matriz de coeficientes  $K$ .

---

**Entrada:**  $N$

```

1:  $NumBloque \leftarrow 1$ 
2:  $FilasBloque \leftarrow N - 1$ 
3:  $FinalBloque \leftarrow N - 1$ 
4: para  $i \leftarrow 1$  hasta  $N(N - 1)/2$  hacer
5:   para  $j \leftarrow 1$  hasta  $N$  hacer
6:     si  $j = NumBloque$  o  $j = i + NumBloque + FilasBloque - FinalBloque$  entonces
7:        $K(i, j) \leftarrow 1$ 
8:     sino
9:        $K(i, j) \leftarrow 0$ 
10:    fin si
11:  fin para
12:  si  $i > FinalBloque$  entonces
13:     $NumBloque \leftarrow NumBloque + 1$ 
14:     $FilasBloque \leftarrow FilasBloque - 1$ 
15:     $FinalBloque \leftarrow FinalBloque + FilasBloque$ 
16:  fin si
17: fin para

```

---

### 6.4.2 Circuito en estrella aproximado

La aproximación que se pretende del circuito original por un circuito en estrella con las características enunciadas anteriormente se ha de entender como la búsqueda de los valores resistivos de la estrella tal que minimicen el ecm de las resistencias equivalentes del circuito en estrella respecto de las resistencias equivalentes del circuito original de forma simultánea.

Con más concreción, la aproximación que se hará es sustituir la resistencias equivalentes de la estrella ( $r'_{eq_{ij}}$ ) por la resistencia equivalente del circuito original ( $r_{eq_{ij}}$ ) y, acto seguido, calcular la resistencias  $r_k$  de las ramas de la estrella minimizando el ecm para los  $N(N - 1)/2$  valores de las resistencias equivalentes simultáneamente.

El sistema a minimizar es el que resulta de sustituir en (6.3) las  $r'_{eq_{ij}}$  por las  $r_{eq_{ij}}$  y en (6.4) el

vector  $\vec{R}'_{eq}$  por el vector  $\vec{R}_{eq}$  con lo que se obtienen las siguientes respectivas expresiones

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 r_4 \\
 r_5 \\
 \vdots \\
 r_{N-1} \\
 r_N
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 r_{eq12} \\
 r_{eq13} \\
 r_{eq14} \\
 r_{eq15} \\
 \vdots \\
 r_{eq1,N-1} \\
 r_{eq1,N} \\
 r_{eq23} \\
 r_{eq24} \\
 r_{eq25} \\
 \vdots \\
 r_{eq2,N-1} \\
 r_{eq2,N} \\
 r_{eq34} \\
 r_{eq35} \\
 \vdots \\
 r_{eq3,N-1} \\
 r_{eq3,N} \\
 r_{eq45} \\
 r_{eq46} \\
 \vdots \\
 r_{eq4,N-1} \\
 r_{eq4,N} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 r_{eqN-1,N}
 \end{pmatrix}
 \quad (6.22)$$

y

$$K\vec{R} = \vec{R}_{eq} \quad (6.23)$$

Se hace notar que mientras en las igualdades (6.3) y (6.4) las incógnitas eran las resistencias equivalentes de la estrella  $r'_{eqij}$  y el vector  $\vec{R}'_{eq}$  respectivamente y los datos eran las resistencias de las ramas de la estrella  $r_k$  y el vector  $\vec{R}$  respectivamente. Ahora en las igualdades (6.22) y (6.23) se intercambian los papeles, esto es las incógnitas son las  $r_k$  y  $\vec{R}$  respectivamente y los datos son las  $r_{eqij}$  y  $\vec{R}_{eq}$  respectivamente.

La expresión (6.22) es un sistema de ecuaciones lineales de  $N(N-1)/2$  ecuaciones y  $N$  incógnitas y por lo tanto, por ser siempre  $N(N-1)/2 > N$  para  $N > 3$ , será un sistemas sobredimensionado.<sup>95</sup> Este sistema en general no tiene solución salvo que existan suficientes ecuaciones linealmente dependientes.

En cualquier tratado de Cálculo Numérico básico se puede encontrar que la solución aproximada que minimiza el ecm viene dada por la expresión

$$\vec{R} = (K^t K)^{-1} K^t \vec{R}_{eq} \quad (6.24)$$

en donde la matriz  $(K^t K)^{-1} K^t$  de  $N$  filas y  $N(N-1)/2$  columnas es la conocida como pseudoinversa de Moore-Penrouse<sup>96</sup> (de ahora en adelante simplemente pseudoinversa) y será denotada por  $K^+$ ,

<sup>95</sup>Obsérvese que para  $N \leq 3$  no es sobredimensionado y será considerado un caso degenerado.

<sup>96</sup>También conocida como la inversa generalizada.

de forma explícita esta matriz es

$$K^+ = (K^t K)^{-1} K^t \quad (6.25)$$

quedando de forma más compacta la siguiente expresión

$$\vec{R} = K^+ \vec{R}_{eq} \quad (6.26)$$

Con lo anterior se resuelve el problema en forma general, en el proceso se realiza una inversión, dos productos y una transpuesta de matrices. Se debe destacar que la pseudoinversa es la misma para todos los grafos que tengan el mismo grado con independencia de cualesquiera otras consideraciones (la pseudoinversa sólo cambia si cambia  $N$  y por lo tanto sólo se ha de calcular una vez y esto siempre es una ventaja).

### 6.4.3 Forma compacta de la pseudoinversa

Haciendo uso de que la matriz  $K$  tiene una forma peculiar (que ya ha sido analizado en el apartado anterior) en [IS12] se demuestra la expresión siguiente para la obtención de  $K^+$  que es mucho más compacta (también véase el Anexo C en la página 137).

$$K^+ = \frac{1}{(N-1)(N-2)} [(N-1)K^t - \mathbb{1}_{N, N(N-1)/2}] \quad (6.27)$$

para  $N \neq 1$  y  $N \neq 2$  y en donde  $\mathbb{1}_{N, N(N-1)/2}$  es la matriz todos unos de orden  $N \times N(N-1)/2$ . Si el elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de las matrices  $K$  y  $K^+$  se denotan por  $k_{ij}$  y  $k_{ij}^+$  respectivamente entonces la expresión 6.27 pero elemento a elemento es como sigue

$$k_{ij}^+ = \frac{1}{(N-1)(N-2)} [(N-1)k_{ji} - 1] \quad (6.28)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$ .

El uso de (6.27) en vez de la forma general dada por (6.25) aporta enormes ventajas, cabe citar como las más importantes la disminución del coste computacional tanto en tiempo como en espacio.

### 6.4.4 Propiedades de la pseudoinversa

Las peculiaridades analizadas en el apartado anterior de la matriz de coeficientes  $K$  también afloran en la matriz pseudoinversa  $K^+$ , aunque se debe tener en cuenta que el número de filas y columnas de ambas matrices quedan intercambiados. Tomando el patrón de las peculiaridades de  $K$ , ya analizadas, y sin perder de vista tanto la expresión (6.27) como la (6.28) entonces se tendrá las siguientes peculiaridades (o mejor dicho propiedades) para  $K^+$

1. La primera peculiaridad de la matriz  $K^+$  es muy evidente y además directamente emana del hecho que cualquier elemento de la matriz  $K$  sólo podía tener dos valores: o cero o uno. En efecto, a la vista de la expresión (6.28) es evidente que dicha expresión sólo tendrá dos valores, uno de ellos para cuando  $k_{ji} = 0$  siendo entonces  $k_{ij}^+$  igual a

$$C_N = \frac{-1}{(N-1)(N-2)} \quad (6.29)$$

en donde la anterior constante ha sido denominada por  $C_N$  con la intención de poder abreviar en el futuro. El otro valor será cuando  $k_{ji} = 1$  siendo entonces  $k_{ij}^+$  igual a

$$U_N = \frac{1}{N-1} \quad (6.30)$$

en donde la anterior constante ha sido denominada<sup>97</sup> por  $U_N$  por la misma razón que se ha hecho para  $C_N$ . Se hace notar una diferencia substancial con respecto al hecho de que los dos valores (0 ó 1) que podían tomar los elementos de la matriz  $K$  eran independientes de la dimensión de dicha matriz. Ahora, en cambio, los dos valores ( $C_N$  y  $U_N$ ) que pueden tomar los elementos de  $K^+$  dependen de  $N$  y, por lo tanto, de las dimensiones de  $K^+$  porque, a su vez, dependen de  $N$ .

- Otro detalle de la matriz  $K^+$  es que cada fila tiene exactamente  $N - 1$  constantes  $U_N$  y, por lo tanto,  $\frac{1}{2}(N - 1)(N - 2)$  constantes  $C_N$  y cada columna tiene exactamente 2 constantes  $U_N$  y, por lo tanto,  $N - 1$  constantes  $C_N$ . La suma de cualquier fila es

$$(N-1)U_N + \frac{1}{2}(N-1)(N-2)C_N = (N-1)\frac{1}{N-1} + \frac{1}{2}(N-1)(N-2)\frac{-1}{(N-1)(N-2)} = \dots = \frac{1}{2} \quad (6.31)$$

y la suma de cualquier columna es

$$2U_N + (N-2)C_N = (N-1) = 2\frac{1}{N-1} + (N-2)\frac{-1}{(N-1)(N-2)} = \dots = \frac{1}{N-1} \quad (6.32)$$

Finalmente se ha de comentar que si se busca el valor de  $N$  para que sea  $C_N = U_N$  se obtiene como única solución que  $N = 1$  (resultado que no tiene sentido en el contexto que nos ocupa) por lo que se puede afirmar que  $C_N \neq U_N$  para  $\forall N > 1$ . Esto viene a corroborar la primera propiedad.

- Por último, la matriz  $K^+$  está formada por bloques que repiten un patrón de forma similar a como se describió en la propiedad 3 (página 73) para la matriz  $K$ . De hecho, si se vuelve a releer la citada propiedad cambiando  $K$  por  $K^+$ , fila o filas por columna o columnas, derecha por abajo y “a la derecha” por “hacia abajo” se tiene exactamente el texto que aplica en la presente propiedad para  $K^+$ , por lo tanto se remite a ello y aquí no se repetirá.

Con anterioridad, en el subapartado 6.4.1 “Resistencias equivalentes del circuito en estrella”, se describió y justificó que las propiedades de la matriz  $K$  permitían encontrar los valores de sus elementos “al vuelo”. Realmente, esto sólo tiene un interés académico ya que la matriz que se utilizaría en el SM en ambientes productivos sería la matriz  $K^+$  pero nunca la matriz  $K$ .<sup>98</sup> No obstante, desde el punto de vista teórico, todas las conclusiones que se han extraído para la matriz  $K$  son aplicables, directa o indirectamente, a la matriz  $K^+$ . En otras palabras y de forma práctica se tiene que las ventajas que se han enunciado debidas a las propiedades de la matriz  $K$  no se utilizarían nunca porque simplemente  $K$  no se usa, ahora bien, como estas ventajas son heredadas por la matriz  $K^+$ , que sí se utiliza en el SM, entonces dichas ventajas sí serán susceptibles de ser aprovechadas, por lo que el estudio hecho sobre  $K$  en su momento no ha sido en balde. En lo que sigue se van a precisar y fijar estas conclusiones sobre la matriz  $K^+$  pero aprovechando las ya extraídas, en su momento, sobre la matriz  $K$  por lo que se advierte que se harán constantes referencias a dicho caso.

A la vista de la expresión (6.28) se obtiene un resultado trivial pero muy importante. Este es que, para un mismo valor de  $N$ , la matriz transpuesta de  $K^+$  (denotada por  $(K^+)^t$ ) es exactamente la matriz  $K$  si se cambia  $C_N$  por 0 y  $U_N$  por 1. Con esto se dispone de la llave que permitirá extrapolar las propiedades de  $K$  a  $K^+$ . La primera concreción es que la fórmula (6.15), tal y como está, es aplicable sobre  $(K^+)^t$ , entonces para que lo sea sobre  $K^+$  es suficiente con cambiar, en dicha fórmula, la fila por la columna ( $i$  por  $j$ ). Concluyendo, el bloque<sup>99</sup>  $b$  en donde se encuentra el

<sup>97</sup>La regla mnemotécnica es la “U” de uno y la “C” de cero.

<sup>98</sup>Se ha de tener en cuenta que para la obtención de la matriz  $K^+$  no es necesario el cálculo previo de la matriz  $K$ . Existen mecanismos que permiten la obtención directa de los elementos de la matriz  $K^+$ .

<sup>99</sup>Ahora, en  $K^+$ , los bloques van de izquierda a derecha, mientras que en  $K$  iban de arriba a bajo.

elemento  $k_{ij}^+$  que está en la columna  $j$  de la matriz  $K^+$  es el dado por la siguiente expresión.<sup>100</sup>

$$b = N - \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{4N(N-1) - 8j + 9}}{2} \right\rceil \quad (6.33)$$

con  $j = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$ . Se ha optado por utilizar el mismo símbolo  $b$  tanto para la expresión (6.15) para  $K$  como en la anterior (6.33) para  $K^+$ , distinguiéndose uno u otro caso según el contexto. Sin embargo, se detecta fácilmente que la primera expresión es para  $K$  porque depende de una fila y la segunda es para  $K^+$  porque depende de una columna. En el caso de que quedara comprometida la claridad se usaría  $b(i)$  para el primer caso y  $b(j)$  para el segundo.

La segunda concreción es que la expresión (6.19) que daba la primera fila de un bloque ( $p(b)$ ) en función del número de bloque<sup>101</sup>  $b$  de la matriz  $K$  se puede aplicar directamente a la matriz  $(K^+)^t$ . Como esta expresión no depende ni de  $i$  ni de  $j$  no se ha realizar ningún cambio para que se pueda aplicar a  $K^+$  pero, ahora, la lectura es que la nueva fórmula da la primera columna (y ya no la primera fila) del bloque  $b$  de la matriz  $K^+$ . Concluyendo, la primera columna del bloque en la posición  $b$  de la matriz  $K^+$  viene dada por

$$p(b) = (b-1)N - \frac{1}{2}(b-2)(b+1) \quad (6.34)$$

con  $b = 1, 2, \dots, N-1$ . Las expresiones (6.19) y (6.34) son matemáticamente idénticas pero la  $p$  representa para el primer caso una fila de  $K$  y para el segundo una columna de  $K^+$ . sin embargo, se ha optado por no designar una nueva letra distinguiéndose uno u otro caso por el contexto,<sup>102</sup> en todo caso siempre queda el recurso de hacer un comentario expreso.

Por lo tanto, para la matriz  $K^+$  también se tienen dos resultados muy útiles similares a los obtenidos para la matriz  $K$ . El primero es que el elemento  $k_{ij}^+$  ocupa el bloque  $b$  dado por la expresión (6.33) en donde  $j$  es la columna del elemento  $k_{ij}^+$  y el segundo resultado es que la primera fila de cada bloque  $b$  de la matriz  $K^+$  viene dada por (6.34). Si se observa la expresión (6.7) pero transpuesta y en vez de unos y ceros las constantes  $U_N$  y  $C_N$  entonces lo que se está viendo ya no es la matriz  $K$  sino que es la matriz  $K^+$ . Con esto en mente se detecta que para cada columna  $j$  hay dos situaciones en las que aparecen la constante  $U_N$ . En la primera situación aparece la constante  $U_N$  en la fila  $b$  (o mejor dicho en  $i = b$ ) donde  $b$  es el bloque donde está el elemento  $k_{ij}^+$  (de hecho aparece la constante  $U_N$  en toda la fila de bloque).

En la segunda situación aparece la constante  $U_N$  en una fila hacia abajo de la fila de la primera situación desplazada, a hacia abajo de ella, tantas posiciones como posiciones separen la columna donde esta  $k_{ij}$  respecto de la primera columna del bloque más uno, de forma más sintética y clarificadora, aparece la constante  $U_N$  en la fila  $i = b(j) + j - p(b(j)) + 1$  donde  $b$  es el bloque y  $p(b(j))$  es la primera columna del bloque donde está el elemento  $k_{ij}$ . El resto de elementos son la constante  $C_N$ . Con todo lo anterior queda demostrado el siguiente teorema para la matriz  $K^+$  de forma similar al teorema 6.1 para la matriz  $K$ .

**Teorema 6.2.** *El elemento  $k_{ij}^+$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$  de la matriz  $K^+$  cuya estructura sería la traspuesta de la representada en (6.7) cambiando 0 y 1 por las constantes  $U_N$  y  $C_N$  respectivamente vale la constante  $C_N$  excepto si  $i = b(j)$  o si  $i = b(j) + j - p(b(j)) + 1$*

---

<sup>100</sup>El resultado es choerente con el hecho de que el bloque  $b$  que ocupaba el elemento  $k_{ij}$  de la matriz  $K$  dependía exclusivamente de la fila  $i$  ocupada por él. Ahora, en  $K^+$ , el bloque  $b$  que ocupa el elemento  $k_{ij}^+$  depende exclusivamente de la columna  $j$ .

<sup>101</sup>Se hace notar que en esta expresión el valor de  $p$  no depende ni del número de fila ni del número de columna. Sólo depende del número de bloque.

<sup>102</sup>Aunque se debe reconocer que el riesgo de ambigüedad es mayor que en la primera concreción porque mediante la variable independiente no se puede distinguir un caso del otro, ya que en ambos, la variable independiente, es el número de un bloque.

(ambas posibilidades mutuamente excluyentes) que vale la constante  $U_N$  en donde  $b(\cdot)$  y  $p(\cdot)$  son las funciones dadas por

$$b(i) = N - \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{4N(N-1) - 8j + 9}}{2} \right\rceil \quad (6.35)$$

y

$$p(b) = (b-1)N - \frac{1}{2}(b-2)(b+1) \quad (6.36)$$

respectivamente y las constantes  $C_N$  y  $U_N$  son

$$C_N = \frac{-1}{(N-1)(N-2)} \quad (6.37)$$

y

$$U_N = \frac{1}{N-1} \quad (6.38)$$

respectivamente.

La traducción algorítmica del anterior teorema 6.2 sería el mostrado en el algoritmo 6.2. Se trata de una sencilla función que devuelve el valor del elemento  $k_{ij}^+$ . Las constantes  $C_N$  y  $U_N$  no sería necesario calcularlas en cada llamada a la función, pueden estar precalculadas ya que, además, estas constantes no cambian nunca (sólo cambian si cambia  $N$ ).

---

**Algoritmo 6.2** Función que devuelve el valor del elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz  $K^+$  bajo demanda.

---

**Entrada:**  $N$ , fila  $i$  y columna  $j$

- 1:  $C \leftarrow \frac{-1}{(N-1)(N-2)}$
  - 2:  $U \leftarrow \frac{1}{N-1}$
  - 3:  $b \leftarrow N - \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{4N(N-1) - 8j + 9}}{2} \right\rceil$
  - 4:  $p \leftarrow (b-1)N - \frac{1}{2}(b-2)(b+1)$
  - 5: **si**  $i = b$  **o**  $i = b + j - p + 1$  **entonces**
  - 6:     **devuelve**  $U$
  - 7: **sino**
  - 8:     **devuelve**  $C$
  - 9: **fin si**
- 

En computación los recursos tiempo y espacio, en la mayoría de las situaciones, son prestaciones antagónicas. La mejora aportada por el teorema 6.2 potencia el recurso espacio en detrimento del recurso tiempo. No obstante, si se dispone de memoria holgada se puede ubicar la matriz  $K^+$  directamente en ella, en este caso el teorema anteriormente mencionado no tiene sentido utilizarlo. En cambio, surge el problema de llenar dicha matriz con los valores convenientes, el algoritmo 6.3 permite realizar esta tarea,<sup>103</sup> en él se asume que  $N$  es el valor de entrada, por otro lado su sencillez extrema hace innecesario cualquier otro comentario.

### 6.4.5 Interpretación del proceso

El uso de las rigurosas pero necesarias herramientas matemáticas ha eclipsado el proceso por el cual se obtiene la aproximación de la estrella cuando se minimiza el ecm. Para entender este proceso se va a retomar el ejemplo del grafo completo de resistencias equivalentes con  $N = 6$  expuesto en el subapartado 6.3.1 “Grafo completo de resistencias equivalentes” (véase la expresión (6.2) y la

---

<sup>103</sup>El algoritmo aún podría optimizarse más pero se ha optado por no hacerlo para primar la claridad

**Algoritmo 6.3** Inicialización de la matriz pseudoinversa  $K^+$ .

**Entrada:**  $N$

```

1:  $C \leftarrow \frac{-1}{(N-1)(N-2)}$ 
2:  $U \leftarrow \frac{1}{N-1}$ 
3:  $NumBloque \leftarrow 1$ 
4:  $ColumnasBloque \leftarrow N - 1$ 
5:  $FinalBloque \leftarrow N - 1$ 
6: para  $j \leftarrow 1$  hasta  $N(N - 1)/2$  hacer
7:   para  $i \leftarrow 1$  hasta  $N$  hacer
8:     si  $i = NumBloque$  o  $i = j - NumBloque + ColumnasBloque - FinalBloque$  entonces
9:        $K^+(i, j) \leftarrow U$ 
10:    sino
11:       $K^+(i, j) \leftarrow C$ 
12:    fin si
13:  fin para
14:  si  $j > LimiteBloque$  entonces
15:     $NumBloque \leftarrow NumBloque + 1$ 
16:     $ColumnasBloque \leftarrow ColumnasBloque - 1$ 
17:     $FinalBloque \leftarrow FinalBloque + ColumnasBloque$ 
18:  fin si
19: fin para

```

figura 6.2 de la página 71). De dicho ejemplo se van a obtener los seis valores de las resistencias de las ramas de la estrella que minimizan el ecm mediante el uso de la expresión (6.26) en donde  $K^+$  será la matriz dada por (6.27) que para este ejemplo puede ser inspeccionada en la expresión (6.39) que sigue.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{eq12} \\ r_{eq13} \\ r_{eq14} \\ r_{eq15} \\ r_{eq16} \\ r_{eq23} \\ r_{eq24} \\ r_{eq25} \\ r_{eq26} \\ r_{eq34} \\ r_{eq35} \\ r_{eq36} \\ r_{eq45} \\ r_{eq46} \\ r_{eq56} \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Si se observa con detenimiento la anterior expresión (6.39) es fácil constatar que para la obtención de cualquier  $r_k$  se tiene que:

1. Todos los valores están afectados por una misma constante de valor  $\frac{1}{20}$ .
2. Todas las resistencias equivalentes, antes de ser sumadas, quedan afectadas por un factor de 4 o de  $-1$  esto permitirá extraer factor común estas constantes.

Además por razones que serán evidentes de inmediato interesará sustituir  $r_{eqij}$  por  $r_{eqji}$  sólo en el caso de que se verifique que  $j = k$  (se recuerda una vez más que  $r_{eqij} = r_{eqji}$ ). Con todo lo anterior

los seis valores son, de forma muy explicita, los siguientes.

$$r_1 = \frac{1}{20} \left[ 4(r_{eq12} + r_{eq13} + r_{eq14} + r_{eq15} + r_{eq16}) - (r_{eq23} + r_{eq24} + r_{eq25} + r_{eq26} + r_{eq34} + r_{eq35} + r_{eq36} + r_{eq45} + r_{eq46} + r_{eq56}) \right] \quad (6.40)$$

$$r_2 = \frac{1}{20} \left[ 4(r_{eq21} + r_{eq23} + r_{eq24} + r_{eq25} + r_{eq26}) - (r_{eq13} + r_{eq14} + r_{eq15} + r_{eq16} + r_{eq34} + r_{eq35} + r_{eq36} + r_{eq45} + r_{eq46} + r_{eq56}) \right] \quad (6.41)$$

$$r_3 = \frac{1}{20} \left[ 4(r_{eq31} + r_{eq32} + r_{eq34} + r_{eq35} + r_{eq36}) - (r_{eq12} + r_{eq14} + r_{eq15} + r_{eq16} + r_{eq24} + r_{eq25} + r_{eq26} + r_{eq45} + r_{eq46} + r_{eq56}) \right] \quad (6.42)$$

$$r_4 = \frac{1}{20} \left[ 4(r_{eq41} + r_{eq42} + r_{eq43} + r_{eq45} + r_{eq46}) - (r_{eq12} + r_{eq13} + r_{eq15} + r_{eq16} + r_{eq23} + r_{eq25} + r_{eq26} + r_{eq35} + r_{eq36} + r_{eq56}) \right] \quad (6.43)$$

$$r_5 = \frac{1}{20} \left[ 4(r_{eq51} + r_{eq52} + r_{eq53} + r_{eq54} + r_{eq56}) - (r_{eq12} + r_{eq13} + r_{eq14} + r_{eq16} + r_{eq23} + r_{eq24} + r_{eq26} + r_{eq34} + r_{eq36} + r_{eq46}) \right] \quad (6.44)$$

$$r_6 = \frac{1}{20} \left[ 4(r_{eq61} + r_{eq62} + r_{eq63} + r_{eq64} + r_{eq65}) - (r_{eq12} + r_{eq13} + r_{eq14} + r_{eq15} + r_{eq23} + r_{eq24} + r_{eq25} + r_{eq34} + r_{eq35} + r_{eq45}) \right] \quad (6.45)$$

En forma más compacta las ecuaciones desde la (6.40) hasta la (6.45) pueden ser escritas como

$$r_1 = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^6 r_{eq1j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq 1}}^6 r_{eqij} \right) \right) \quad (6.46)$$

$$r_2 = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^6 r_{eq2j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq 2}}^6 r_{eqij} \right) \right) \quad (6.47)$$

$$r_3 = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^6 r_{eq3j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq 3}}^6 r_{eqij} \right) \right) \quad (6.48)$$

$$r_4 = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^6 r_{eq4j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq 4}}^6 r_{eqij} \right) \right) \quad (6.49)$$

$$r_5 = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 5}}^6 r_{eq_{5j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 5}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq 5}}^6 r_{eq_{ij}} \right) \right) \quad (6.50)$$

$$r_6 = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 6}}^6 r_{eq_{6j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 6}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq 6}}^6 r_{eq_{ij}} \right) \right) \quad (6.51)$$

Las ecuaciones de la (6.46) hasta la (6.51) se pueden compactar más aún mediante una sola expresión de la siguiente manera.

$$r_k = \frac{1}{20} \left( 4 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^6 r_{eq_{kj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^5 \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k}}^6 r_{eq_{ij}} \right) \right) \text{ para } k = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ y } 6 \quad (6.52)$$

La generalización del ejemplo anterior para cualquier  $N$  es trivial. Si se observa la expresión (6.28) se tiene que para la obtención de cada valor  $r_k$  de  $\vec{R}$  con  $k = 1, 2, \dots, N$  se ha de multiplicar el vector  $\vec{R}_{eq}$  por la  $k$ -ésima fila de la matriz  $K^+$ . Excepto por la constante  $((N-1)(N-2))^{-1}$  (que será denotada como  $Q_1$  en lo que sigue) habrá  $N-1$  resistencias equivalentes de  $\vec{R}_{eq}$  que serán multiplicadas por menos uno y el resto  $((N-1)(N-2)/2$  valores) serán multiplicadas por  $N-2$ . Esto permite extraer factor común estas constantes, es fácil ver que para el primer caso las resistencias equivalentes afectadas por el factor común son aquellas que es  $i = k$  o  $j = k$  y que para el segundo caso son aquellas que es  $i \neq k$  y  $j \neq k$ . Con todo lo anterior se puede escribir para cualquier  $N$  que los valores de las resistencias de las ramas de la estrella son:

$$r_k = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( (N-2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N r_{eq_{kj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k}}^N r_{eq_{ij}} \right) \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.53)$$

en donde no se ha de perder de vista que  $r_{eq_{ij}} = r_{eq_{ji}}$ .

Hay que decir que en el primer sumatorio de la expresión (6.53) se ha impuesto que la variable  $j$  sea diferente de  $k$  para evitar la suma del término  $r_{eq_{kk}}$ , esta restricción puede ser obviada ya que este término es siempre cero. Esto no es posible hacerlo en el segundo y tercer sumatorio de la misma expresión porque la restricción de que  $i \neq k$  y que  $j \neq k$  obedece a otra razón: se excluyen las resistencias equivalentes adyacentes al nodo  $k$  del grafo completo de resistencias equivalentes. Con lo dicho la expresión (6.53) puede ser reescrita de la siguiente forma.

$$r_k = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( (N-2) \sum_{j=1}^N r_{eq_{kj}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k}}^N r_{eq_{ij}} \right) \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.54)$$

Este interesante resultado permite calcular las resistencias de las ramas de la estrella a partir de las resistencias equivalentes sin necesidad de calcular la pseudoinversa ni de multiplicar matrices (el cálculo es directo a partir de las resistencias equivalentes). Como consecuencia importante es que, mientras con el uso de la pseudoinversa en este paso del SM<sup>104</sup> se tenía una complejidad

<sup>104</sup>Aún así el SM tiene una complejidad computacional global de orden tres debido a la inversión de la MDA.

computacional de orden tres, ahora con el cálculo directo se tiene una complejidad computacional de orden dos para este paso del SM.

La expresión (6.54) permitirá dar una descripción del proceso mucho más gráfica para ello es necesario introducir las tres definiciones siguientes:

1. Sea  $\Psi(k)$  la suma de todas las resistencias equivalentes que sean adyacentes al nodo  $k$  del grafo completo de resistencias equivalentes, esto es

$$\Psi(k) = \sum_{j=1}^N r_{eq_{kj}} \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.55)$$

2. Sea  $\bar{\Psi}(k)$  la suma de todas las resistencias equivalentes que no sean adyacentes al nodo  $k$  del grafo completo de resistencias equivalentes, esto es

$$\bar{\Psi}(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \left( \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k}}^N r_{eq_{ij}} \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.56)$$

3. Y sea  $\Psi_t$  la suma de todas las resistencias equivalentes, esto es

$$\Psi_t = \sum_{i=1}^{N-1} \left( \sum_{j=i+1}^N r_{eq_{ij}} \right) \quad (6.57)$$

siendo evidente que

$$\Psi(k) + \bar{\Psi}(k) = \Psi_t \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.58)$$

Con las definiciones anteriores la expresión (6.53) puede ser reescrita como

$$r_k = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( (N-2)\Psi(k) - \bar{\Psi}(k) \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.59)$$

o bien, teniendo en cuenta la ecuación (6.58), como

$$r_k = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \left( (N-1)\Psi(k) - \Psi_t \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (6.60)$$

El criterio para encontrar las resistencias de las ramas de la estrella ha sido minimizar el error cuadrático medio, esto da lugar a la introducción de la pseudoinversa lo que ha ocultado hasta ahora como se asignan estos valores. El proceso por el cual se obtienen estos valores es extraordinariamente sencillo y puede ser resumido como sigue:

“Para el cálculo de cada resistencia  $r_k$  de cada rama de la estrella se agrupan todas las resistencias equivalentes en dos subconjuntos disjuntos: las que son adyacentes al nodo  $k$  del grafo completo de resistencias equivalentes y las que no son adyacentes. Para cada subconjunto se suman sus elementos. La suma del primer subconjunto se pondera por  $N-2$  y se le resta el valor de la suma del segundo subconjunto. Finalmente se divide por  $(N-1)(N-2)$ ” (ecuación 6.59)

Pero también puede ser explicado como sigue:

“Previamente se obtiene la suma de todas las resistencias equivalentes. Para el cálculo de cada resistencia  $r_k$  de cada rama de la estrella se suman todas las resistencias equivalentes que son adyacentes al nodo  $k$  del grafo completo de resistencias equivalentes. Esta última suma se la pondera por  $N-1$  y se le resta el valor de la suma total previamente obtenida. Finalmente se divide por  $(N-1)(N-2)$ ” (ecuación 6.60)

Ahora el cálculo de una resistencia  $r_k$  de la rama de la estrella puede ser obtenido directamente a partir de la matriz de adyacencia  $R_{eq}$  del grafo de resistencias equivalentes  $g(g)$ . A la vista de (4.39) se tiene que calcular previamente (un solo cálculo para todas las resistencias de la estrella) la suma de todos los elementos de la parte superior (o inferior) de la matriz  $R_{eq}$ , esto es  $\Psi_t$ . A continuación para cada valor  $r_k$  se suma la fila (o la columna)  $k$  de dicha matriz ( $\Psi(k)$ ) y a continuación se procede a efectuar las operaciones ya indicadas. Por lo tanto la complejidad computacional de este paso es  $O(N^2)$ .

### 6.4.6 Representación de una estrella

Para ir terminando se recuerda que en este punto ya son conocidos los  $N$  valores de las  $N$  resistencias del circuito en estrella que minimiza el ecm entre las resistencias equivalentes del circuito original y el circuito en estrella. Se usarán tres representaciones para dichos valores y se utilizará una u otra según convenga en función del aspecto que se esté tratando. Estas representaciones son, para un grafo  $s$  de grado  $N + 1$  y con topología en estrella tal y como se ha descrito anteriormente, las siguientes:

1. Mediante un vector columna  $\vec{R}^s$  (o simplemente  $\vec{R}$ ) con  $N$  coordenadas. La secuencia de las coordenadas es tal que se van asignando las resistencias según la numeración de los nodos de la estrella para cada nodo  $i$  entre 1 y  $N - 1$  será el vector con componentes  $r_i^s$  como el que sigue

$$\vec{R}^s = (r_1^s, r_2^s, \dots, r_{N-1}^s)^t \quad (\Omega) \quad (6.61)$$

2. Mediante el conjunto  $\hat{R}^s$  (o simplemente  $\hat{R}$ ) formado por todos los pares ordenados de la forma  $(r_z^s, f_z)$  en donde  $r_z^s$  es un valor de las resistencias de la estrella y  $f_z$  es la frecuencia absoluta de repetición de dicho valor (si el valor  $r_z^s$  no está repetido entonces  $f_z = 1$ ).<sup>105</sup> De forma compacta se tendrá que

$$\hat{R}^s = \{(r_z^s, f_z) | r_z^s \text{ es una resistencia de la estrella y } f_z \text{ es la frecuencia absoluta de repetición}\} \quad (6.62)$$

Es evidente que si existen  $L$  pares ordenados  $(r_z^s, f_z)$  se cumplirá que  $f_1 + f_2 + \dots + f_L = N$ . También es fácil deducir que  $L$  será un número natural desde uno (todas las resistencias de la estrella iguales) hasta  $N$  (no existen dos valores de las resistencias de la estrella repetidos). Con esto presente, la representación dada por (6.62) puede ser reformulada de la siguiente manera

$$\hat{R}^s = \{(r_z^s, f_z) | z = 1, 2, \dots, L\} \quad (6.63)$$

con la definición de  $(r_z^s, f_z)$  hecha anteriormente.

3. Mediante una sucesión finita  $\tilde{R}^s$  (o simplemente  $\tilde{R}$ ) de siempre y exactamente  $N$  pares ordenados de la forma  $(r_k, k)$  ordenada por el valor creciente de  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), donde  $k$  es el nodo hoja de la estrella y  $r_k$  es el valor resistivo cuyo nodo hoja es  $k$ . En el caso que existieran valores repetidos en las resistencias se tomará una cualquiera de las posibles sucesiones (esta situación será discutida más adelante).

Básicamente la primera y tercera representación contienen la misma información pero en la segunda se ha perdido el nodo correspondiente a la resistencia perteneciente al conjunto  $\hat{R}^s$ . El paso de la primera representación o la tercera a la segunda es trivial e intuitivo, sin embargo es imposible obtener la primera o la tercera representación a partir de la segunda por lo que si se utiliza esta deberá ir siempre acompañada de alguna de las otras dos. Más adelante se necesitará una función que atañe a la segunda representación, esta es la dada en la definición que sigue.

<sup>105</sup>El subíndice  $z$  utilizado para definir  $\hat{R}^s$  no tiene relación alguna con ningún nodo. Este subíndice sólo cumple la función de enumerar, sin criterio alguno, los valores no repetidos de las resistencias de la estrella.

**Definición 6.2.** Se define la función  $\Gamma_w(\tilde{R}^s)$  como la que aplicada sobre la sucesión  $\hat{R}^s$  da el valor de la segunda componente (nodo de la estrella) del par ordenado que ocupa la posición  $w$ -ésima en la sucesión  $\hat{R}^s$ .

Finalmente, y en lo que sigue, al circuito en estrella (que siempre puede ser interpretado como un grafo en estrella) que proviene mediante la aplicación del CEM a un grafo  $g$  se denotará por  $s(g)$ .

## 6.5 Fase de mapeado: Comparación de las estrellas

Esta fase corresponde con parte del bloque identificado como “Segundo filtrado” en la figura 6.1 de la página 69. Teniendo en cuenta el apartado 2.5.5 “Isomorfismo y transformaciones de grafos” de la página 24 antes de nada hay que justificar que la transformación de dos grafos en sus respectivas estrellas es compatible con el isomorfismo de grafos. El asunto queda resuelto y justificado en el Anexo D de la página 143 titulado “Compatibilidad del CEM y del SM con el isomorfismo” al cual se remite.

Como ya se ha comentado la letra  $s$  queda reservada para denominar un grafo en estrella, en lo que sigue también se usará para nombrar al correspondiente circuito eléctrico en estrella, llegando, en ocasiones, a denotar una u otra cosa de forma indistinta y simultánea, en definitiva ambos conceptos llegarán intencionadamente a confundirse. Por otro lado, cuando interese dejar constancia de que una estrella (o, por lo dicho anteriormente, circuito en estrella)  $s$  proviene de aplicar el SM mediante el CEM a un grafo  $g$  se escribirá  $s(g)$ .

Recapitulando en este punto y antes de comenzar esta fase se tiene que

1. Se dispone de las aproximaciones, en el sentido ya descrito, en estrella (grafos y/o circuitos) de dos grafos  $g$  y  $h$  ambos no dirigidos y del mismo grado  $N$ . Por lo dicho anteriormente, estas estrellas serán denotadas por  $s(g)$  y  $s(h)$ .
2. Ambas estrellas estarán caracterizadas por  $\vec{R}^{s(g)}$ ,  $\hat{R}^{s(g)}$  y  $\tilde{R}^{s(g)}$  para  $s(g)$  y por  $\vec{R}^{s(h)}$ ,  $\hat{R}^{s(h)}$  y  $\tilde{R}^{s(h)}$  para  $s(h)$ .
3. Se ha verificado y cumplido en una fase anterior que  $\hat{R}_{eq}^g = \hat{R}_{eq}^h$ .

Para poder encontrar el mapeado se necesitan dos corolarios que se desprenden de lo apuntado en el apartado 2.6 “Caso particular: Grafo en estrella” de la página 25 y en particular de los cuatro teoremas enunciados en dicho apartado, estos son

**Corolario 6.2.** Dos grafos no dirigidos  $s_1$  y  $s_2$  de grado  $N + 1$ , nodo central  $N + 1$ , con topología en estrella y que, por lo tanto, tendrán  $N$  ramas son isomorfos si, y solo si, coinciden el conjunto de sus pesos con sus repeticiones de los dos grafos, esto es

$$s_1 \cong s_2 \Leftrightarrow \hat{R}^{s_1} = \hat{R}^{s_2} \quad (6.64)$$

**Corolario 6.3.** Sean dos grafos ( $s_1$  y  $s_2$ ) no dirigidos con topología en estrella y de grado  $N + 1$ , nodo central  $N + 1$ , y que, por lo tanto, tendrán  $N$  ramas con pesos  $\omega_k^{s_1}$  para  $k = 1, \dots, N$  y  $\omega_l^{s_2}$  para  $l = 1, \dots, N$ . Si  $s_1$  y  $s_2$  son isomorfos entonces para las  $N$  igualdades  $\omega_i^{s_1} = \omega_j^{s_2}$  se tendrá que el nodo  $i$  de  $s_1$  se mapea en el nodo  $j$  de  $s_2$  y viceversa.

Para obtener el mapeado del isomorfismo se ordenan de menor a mayor los valores de las resistencias de las ramas de las dos estrellas. Necesariamente estos valores han de coincidir dos a dos en ambas estrellas si los grafos son isomorfos, si este no fuese el caso los grafos categóricamente no serán isomorfos y el SM concluye aquí. El mapeado se obtendrá asociando los subíndices de los pares de resistencias de valores iguales. Con más detenimiento, recordando que se cumple  $\hat{R}_{eq}^g = \hat{R}_{eq}^h$  y  $\hat{R}^{s(g)} = \hat{R}^{s(h)}$ , teniendo presentes las definiciones de  $\tilde{R}$  y de  $\Gamma_w(\tilde{R})$  dadas anteriormente y teniendo

en cuenta los dos corolarios anteriores, entonces se tiene que el mapeado de los nodos del grafo  $g$  en  $h$  es

$$\varphi_{h \leftarrow g} \left( \Gamma_w(\tilde{R}^{s(g)}) \right) = \Gamma_w(\tilde{R}^{s(h)}); \quad \text{para } w = 1, 2, \dots, N \quad (6.65)$$

y del grafo  $h$  en  $g$  es

$$\varphi_{g \leftarrow h} \left( \Gamma_w(\tilde{R}^{s(h)}) \right) = \Gamma_w(\tilde{R}^{s(g)}); \quad \text{para } w = 1, 2, \dots, N \quad (6.66)$$

en donde, evidentemente, es  $\varphi_{h \leftarrow g} = \varphi_{g \leftarrow h}^{-1}$ .

## 6.6 Fase de validación: Detección de falsos positivos

Esta fase corresponde con parte del bloque identificado como “Segundo filtrado” en la figura 6.1 de la página 69. Como ya se ha venido comentando en más de una ocasión en la fase de detección se pueden producir falsas detecciones (falsos positivos), en este caso, en la fase de mapeado se obtendrá una biyección entre nodos que no será válida. Por lo tanto se ha de certificar (validación) si el mapeado obtenido es válido o no. El pseudocódigo utilizado para la validación es el presentado en el algoritmo 6.4, en él la función (arista(grafo,nodo1,nodo2)) es una función que devuelve el valor de la arista del grafo “grafo” entre el nodo “nodo1” y el nodo “nodo2” y la función mapa(grafo1,grafo2,nodo) devuelve el nodo del nodo “nodo” del grafo “grafo1” mapeado sobre el grafo “grafo2”.

---

**Algoritmo 6.4** Validación del mapeado obtenido a efectos de detectar un posible falso positivo.

---

**Entrada:** Grado de los grafos  $N$ , grafo  $G$  y grafo  $H$

**Salida:** Variable lógica  $FP$  indicando falso positivo

```

1:  $FP \leftarrow$  falso
2:  $N_1^g \leftarrow 1$  // Variable que identifica un nodo de  $G$ 
3:  $N_2^g \leftarrow 2$  // Variable que identifica otro nodo de  $G$ 
4: mientras (no  $FP$  y  $N_1^g < N$  y  $N_2^g \leq N$ ) hacer
5:   si (arista( $G, N_1^g, N_2^g$ ) = arista( $H, \text{mapa}(H, G, N_1^g), \text{mapa}(H, G, N_2^g)$ )) entonces
6:      $N_2^g \leftarrow N_2^g + 1$ 
7:     si ( $N_2^g > N$ ) entonces
8:        $N_1^g \leftarrow N_1^g + 1$ 
9:        $N_2^g \leftarrow N_1^g + 1$ 
10:    fin si
11:   sino
12:      $FP \leftarrow$  cierto // Se ha detectado un falso positivo. El mapeado no era correcto
13:   fin si
14: fin mientras

```

---

La complejidad computacional del pseudocódigo del algoritmo 6.4 es polinomial de orden  $N^2$ , dicho algoritmo sólo es funcional para grafos dirigidos, pero esto no es un problema porque el SM sólo trabaja con grafos de este tipo.

En este punto el SM concluye dictaminando de forma exacta si los grafos  $g$  y  $h$  eran isomorfos o no, y si lo eran proporcionando el mapeado (o uno de ellos si había automorfismos) entre los nodos de los grafos.

## 6.7 Ejemplos ilustrativos de la aplicación del SM

Se va a ilustrar (véase figura 6.4) el SM que se ha presentado emparejando el grafo de la figura 6.4a con los grafos de las figuras 6.4b y 6.4c. La primera pareja ( $g$  y  $h$ ) sí son isomorfos y la segunda ( $g$  y  $q$ ) no son isomorfos como bien puede ser comprobado a simple vista, se hace notar que ambas parejas son 2-candidatos y que incluso en los tres grafos coinciden el conjunto de sus pesos con sus repeticiones.

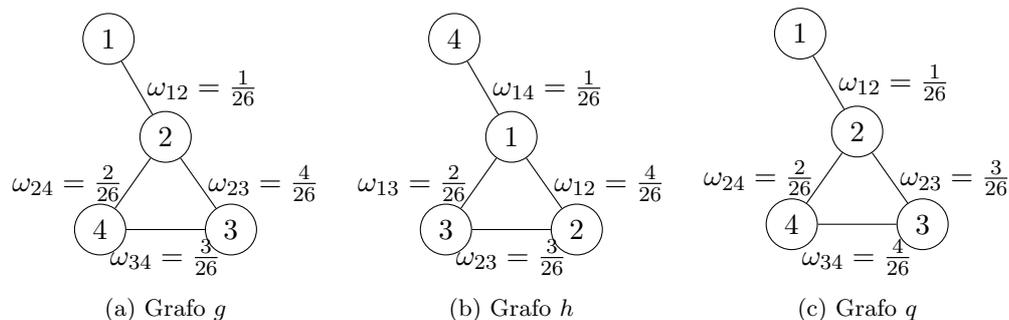


Figura 6.4: Ejemplo de aplicación del SM a las parejas de grafos  $g$  con  $h$  y  $g$  con  $q$ . El grafo  $g$  es isomorfo al grafo  $h$ , en cambio, no lo es al grafo  $q$ .

Las correspondientes matrices de adyacencia para  $g$ ,  $h$  y  $q$  son respectivamente

$$A^g = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^h = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^q = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

Una vez aplicado el CEM se obtienen las correspondientes MIAs, estas son

$$Y^g = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad Y^h = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y^q = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad (6.68)$$

en donde se ha usado como función de paso (5.1) la identidad. En los tres casos se toma arbitrariamente como nodo de referencia el último nodo ( $m = 4$ ). Entonces, eliminando la cuarta fila y la cuarta columna de las anteriores matrices, se obtienen las MDAs. Estas matrices son respectivamente

$$X^g = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad X^h = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X^q = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

en donde se ha omitido por claridad el subíndice  $m$ . Sus respectivas inversas son

$$(X^g)^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad (X^h)^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & 26 & 26 \\ 26 & 31 & 29 \\ 26 & 29 & 33 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (X^q)^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & 7 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

Para cada una de las matrices anteriores se aplica las formulas de la tabla 4.1 y se obtienen las respectivas resistencias equivalentes, estas se muestran a continuación

$$\vec{R}_{eq}^g = \begin{pmatrix} 26 \\ 31 \\ 33 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (6.71) \quad \vec{R}_{eq}^h = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 26 \\ 6 \\ 31 \\ 33 \end{pmatrix} \quad (6.72) \quad \vec{R}_{eq}^q = \begin{pmatrix} 26 \\ 32 \\ 33 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (6.73)$$

De donde se construyen los conjuntos  $\widehat{R}_{eq}^g$ ,  $\widehat{R}_{eq}^h$  y  $\widehat{R}_{eq}^q$ , más explítamente se tendrá

$$\widehat{R}_{eq}^g = \{(5, 1), (6, 1), (7, 1), (26, 1), (31, 1), (33, 1)\} \quad (6.74)$$

$$\widehat{R}_{eq}^h = \{(5, 1), (6, 1), (7, 1), (26, 1), (31, 1), (33, 1)\} \quad (6.75)$$

$$\widehat{R}_{eq}^q = \{(5, 1), (6, 1), (7, 1), (26, 1), (32, 1), (33, 1)\} \quad (6.76)$$

en donde se han ordenado, sólo a efectos de claridad, los elementos de cada conjunto por su primera componente.

Como puede observarse es  $\widehat{R}_{eq}^g \neq \widehat{R}_{eq}^q$  por lo que el par de grafos  $g$  y  $q$  no son isomorfos de forma categórica y el método concluye aquí para este par de grafos. En cambio, es  $\widehat{R}_{eq}^g = \widehat{R}_{eq}^h$  por lo que el par de grafos  $g$  y  $h$  sí son isomorfos (salvo falsos positivos) y el método continúa con la extracción del mapeado, para ello se calcula directamente la pseudoinversa utilizando (6.27) y no es necesario ni recomendable usar (6.25). La pseudoinversa para  $N = 4$  es

$$K^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

Se hace notar que la pseudoinversa calculada es la misma para los dos grafos. Multiplicando la pseudoinversa (6.77) por la derecha por los vectores  $\vec{R}_{eq}^g$  (6.71) y  $\vec{R}_{eq}^h$  (6.72) se obtiene los valores de las resistencias de las ramas de las estrella respectivas, estas son

$$\vec{R}^{s(g)} = \begin{pmatrix} r_1^{s(g)} \\ r_2^{s(g)} \\ r_3^{s(g)} \\ r_4^{s(g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (6.78) \quad \vec{R}^{s(h)} = \begin{pmatrix} r_1^{s(h)} \\ r_2^{s(h)} \\ r_3^{s(h)} \\ r_4^{s(h)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 27 \end{pmatrix} \quad (6.79)$$

Los mismos resultados pueden ser obtenidos de forma mucho más rápida usando la ecuación (6.60), entonces  $\Psi_t^g$  y  $\Psi_t^h$  son

$$\Psi_t^g = 26 + 31 + 33 + 5 + 7 + 6 = 108 \quad (6.80)$$

$$\Psi_t^h = 5 + 7 + 26 + 6 + 31 + 33 = 108 \quad (6.81)$$

Ambos valores coinciden necesariamente entre ellos por ser  $g$  y  $h$  isomorfos y serán denotados en este ejemplo por simplemente  $\Psi_t$ . Las resistencias de la estrella  $s(g)$  tienen los siguientes valores

$$\begin{aligned} r_1^{s(g)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^g(1) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(26 + 31 + 33) - 108) = 27 \\ r_2^{s(g)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^g(2) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(26 + 5 + 7) - 108) = 1 \\ r_3^{s(g)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^g(3) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(31 + 5 + 6) - 108) = 3 \\ r_4^{s(g)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^g(4) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(33 + 7 + 6) - 108) = 5 \end{aligned} \quad (6.82)$$

y las resistencias de la estrella  $s(h)$  tienen los valores

$$\begin{aligned}
 r_1^{s(h)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^h(1) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(5 + 7 + 26) - 108) = 1 \\
 r_2^{s(h)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^h(2) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(5 + 6 + 31) - 108) = 3 \\
 r_3^{s(h)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^h(3) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(7 + 6 + 33) - 108) = 5 \\
 r_4^{s(h)} &= \frac{1}{6}(3\Psi^h(4) - \Psi_t) = \frac{1}{6}(3(26 + 31 + 33) - 108) = 27
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

Estos últimos resultados, expresiones (6.82) y (6.83), coinciden respectivamente con los obtenidos anteriormente en (6.78) y (6.79) pero de forma mucho más eficiente.

Las respectivas sucesiones son (obsérvese como necesariamente la primera componente de cada par ordenado coinciden en las dos sucesiones)

$$\tilde{R}^{s(g)} = ((1, 2), (3, 3), (5, 4), (27, 1)) \tag{6.84}$$

$$\tilde{R}^{s(h)} = ((1, 1), (3, 2), (5, 3), (27, 4)) \tag{6.85}$$

Aplicando la ecuación (6.65) para  $w$  igual a 1, 2, 3 y 4 se tiene respectivamente que

$$\varphi_{h \leftarrow g}(\Gamma_1(\tilde{R}^{s(g)})) = \Gamma_1(\tilde{R}^{s(h)}) \Rightarrow \varphi_{h \leftarrow g}(2) = 1 \tag{6.86}$$

$$\varphi_{h \leftarrow g}(\Gamma_2(\tilde{R}^{s(g)})) = \Gamma_2(\tilde{R}^{s(h)}) \Rightarrow \varphi_{h \leftarrow g}(3) = 2 \tag{6.87}$$

$$\varphi_{h \leftarrow g}(\Gamma_3(\tilde{R}^{s(g)})) = \Gamma_3(\tilde{R}^{s(h)}) \Rightarrow \varphi_{h \leftarrow g}(4) = 3 \tag{6.88}$$

$$\varphi_{h \leftarrow g}(\Gamma_4(\tilde{R}^{s(g)})) = \Gamma_4(\tilde{R}^{s(h)}) \Rightarrow \varphi_{h \leftarrow g}(1) = 4 \tag{6.89}$$

de forma alternativa, procediendo similarmente con la ecuación (6.66) para  $w$  igual a 1, 2, 3 y 4 se tiene el mapeado inverso del anterior, este es

$$\varphi_{g \leftarrow h}(\Gamma_1(\tilde{R}^{s(h)})) = \Gamma_1(\tilde{R}^{s(g)}) \Rightarrow \varphi_{g \leftarrow h}(1) = 2 \tag{6.90}$$

$$\varphi_{g \leftarrow h}(\Gamma_2(\tilde{R}^{s(h)})) = \Gamma_2(\tilde{R}^{s(g)}) \Rightarrow \varphi_{g \leftarrow h}(2) = 3 \tag{6.91}$$

$$\varphi_{g \leftarrow h}(\Gamma_3(\tilde{R}^{s(h)})) = \Gamma_3(\tilde{R}^{s(g)}) \Rightarrow \varphi_{g \leftarrow h}(3) = 4 \tag{6.92}$$

$$\varphi_{g \leftarrow h}(\Gamma_4(\tilde{R}^{s(h)})) = \Gamma_4(\tilde{R}^{s(g)}) \Rightarrow \varphi_{g \leftarrow h}(4) = 1 \tag{6.93}$$

Cualquiera de los dos mapeados anteriores es el resultado buscado, que puede ser contrastado, a simple vista, comparando los grafos de las figuras 6.4a y 6.4b.

## 6.8 Conclusiones

Con este capítulo de esta tesis se aporta la segunda contribución original y novedosa: el SM. Con ello se ha dado una aplicación práctica que ataca el isomorfismo de grafos. El SM hace uso del CEM por lo tanto la utilidad del CEM queda salvaguardada. El SM ha sido diseñado pensando en terminos de la teoría que sustenta el modelo y haciendo uso de una herramienta matemática

muy popular que ha sido la minimización del ecm lo que ha introducido el concepto de pseudo-inversa. Como ambos aspectos (la Teoría de Circuitos y la minimización del ecm) están más que sobradamente consolidados se puede afirmar, sin duda alguna, que el SM se sustenta en bases teóricas sólidas y robustas. Pero la aplicación estricta de las anteriores herramientas sólo hubiera conducido al uso de la pseudoinversa y, en todo caso, a la forma compacta de la misma [IS12]. El análisis posterior de todo el proceso ha permitido descubrir<sup>106</sup> cual es el algoritmo subyacente por el que se asignan valores a las ramas de las estrellas. El resultado ha sido que no es necesario utilizar para nada la pseudoinversa (en forma compacta o no) y la asignación de los valores de las ramas de la estrella se reduce a sumatorios finitos usando directamente las resistencias equivalentes [IS15], lo que permite reducir la complejidad computacional de orden tres a dos en este paso. Pero quizás, lo más importante ha sido que, mediante estas sumas finitas, ha sido posible probar que el SM, como transformación, es compatible con el isomorfismo de grafos (véase el Anexo D) “Compatibilidad del CEM y del SM con el isomorfismo”). Globalmente en el SM la complejidad computacional es polinomial de orden tres porque domina la inversión de una matriz (la inversa de una MDA).

---

<sup>106</sup>En [IS12] este extremo aún no había sido descubierto.

# Capítulo 7

## Características del SM

### 7.1 Introducción

Dos aspectos son de interés en este capítulo: los falsos positivos y la complejidad computacional. Para el primero de ellos, los falsos positivos, quedarán caracterizados en un apartado de este capítulo. No representan ningún problema dado que en la última fase del SM (fase de validación) estos falsos positivos son detectados y el SM será siempre un método exacto en la detección del isomorfismo de grafos. Del estudio de los falsos positivos se desprenderá que, teóricamente, es un fenómeno poco frecuente, siendo este extremo corroborado por los resultados experimentales obtenidos. Para el segundo de ellos, la complejidad computacional, se dará un desglose por fases y se estudiará bajo que condiciones la complejidad computacional se desvía de una polinomial.

### 7.2 Falsos positivos

Como ya se ha visto en el corolario 6.1 (página 70) dos grafos isomorfos tienen el mismo conjunto de resistencias equivalentes pero la inversa no es cierta, esto dará lugar a falsos positivos. Se va a caracterizar los grafos que, aún no siendo isomorfos, tienen el mismo conjunto de resistencias equivalentes, para ello se va a usar la siguiente definición.

**Definición 7.1.** *Se dirá que dos grafos no isomorfos  $g$  y  $h$  (necesariamente del mismo grado  $N$ ) son co-resistencia cuando coincide el conjunto de resistencias equivalentes con sus repeticiones, esto es, cuando se cumple que  $\widehat{R}_{eq}^g = \widehat{R}_{eq}^h$ .*

Sea un grafo  $g$  de grado  $N$ , ya se sabe que este grafo tiene  $N(N - 1)/2$  valores de resistencias equivalentes y que estas resistencias equivalentes vienen caracterizadas por la matriz  $R_{eq}^g$  (véase la expresión 4.39 en la página 56), de esta matriz se extrae el conjunto  $\widehat{R}_{eq}^g$ . Si ahora se contemplan las  $[N(N - 1)/2]!$  permutaciones de los elementos de la parte triangular superior (o inferior) de la matriz  $R_{eq}^g$  se tendrá que en todos los casos el conjunto  $\widehat{R}_{eq}^g$  no varía. De estas permutaciones existen  $N!$  que corresponden a grafos isomorfos a  $g$  el resto tendrán su origen en grafos que, necesariamente, son co-resistencia. Por lo tanto, el primer resultado importante es que el número de grafos co-resistencia es finito y el segundo resultado importante es que el número de grafos co-resistencia es igual o menor que  $[N(N - 1)/2]! - N!$ . Puede ser menor dado que algunas de las matrices de adyacencia correspondientes a los grafos que podrían ser co-resistencia no reúnen las condiciones para ser grafos (como por ejemplo no tener los pesos positivos). Con lo anterior se da por demostrado el siguiente teorema

**Teorema 7.1.** *El número de grafos co-resistencia a un grafo dado de orden  $N$  es finito e igual o menor que  $[N(N - 1)/2]! - N!$ .*

Un hecho a destacar es que la cota dada en el teorema 7.1 sólo depende del grado del grafo (no depende de los pesos del grafo), por lo tanto todos los grafos del mismo grado  $N$  tendrán no más que  $[N(N-1)/2]! - N!$  grafos co-resistencia. Es claro que, en función de los valores de los pesos, el número de grafos co-resistencia variará pero nunca superará dicha cota.

Como ejemplo ilustrativo de lo anterior sea el grafo  $g$  completo de orden cuatro con los pesos dados por la siguiente matriz de adyacencia

$$A^g = \frac{1}{556} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Aplicando el SM mediante el CEM se llega a la siguiente matriz de resistencias equivalentes

$$R_{eq}^g = \begin{pmatrix} 0 & r_{eq12}^g & r_{eq13}^g & r_{eq14}^g \\ r_{eq12}^g & 0 & r_{eq23}^g & r_{eq24}^g \\ r_{eq13}^g & r_{eq23}^g & 0 & r_{eq34}^g \\ r_{eq14}^g & r_{eq24}^g & r_{eq34}^g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 132 & 115 & 104 \\ 132 & 0 & 75 & 68 \\ 115 & 75 & 0 & 59 \\ 104 & 68 & 59 & 0 \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (7.2)$$

De la matriz anterior se extrae el conjunto de resistencias equivalentes con sus repeticiones

$$\widehat{R}_{eq}^g = \{(59, 1), (68, 1), (75, 1), (104, 1), (115, 1), (132, 1)\} \quad (7.3)$$

Cualquier grafo que presente el mismo conjunto que  $\widehat{R}_{eq}^g$  o bien es isomorfo (o igual) a  $g$ , o bien, es co-resistencia con  $g$ . El número de matrices de resistencias equivalentes diferentes que generarían el mismo conjunto  $\widehat{R}_{eq}^g$  es el número de permutaciones que se pueden realizar con los elementos de la parte triangular superior (o inferior) de la matriz  $R_{eq}^g$  dada en (7.2), esto es,  $6! = 720$  (en general  $[N(N-1)/2]!$ ). Ahora bien resulta que  $4! = 24$  (en general  $N!$ ) permutaciones corresponden a grafos isomorfos (incluido el mismo grafo) al grafo  $g$ . Los 696 restantes corresponden a grafos co-resistencia. Si además, se tiene en cuenta que se están contabilizando no sólo los grafos co-resistencia sino que también los isomorfos a estos, se tendrá que el número de grafos co-resistencia no isomorfos entre sí es de  $696/24 = 29$  grafos.

Considérese, por ejemplo, la permutación siguiente de las resistencias equivalentes

$$R_{eq}^h = \begin{pmatrix} 0 & r_{eq12}^h & r_{eq13}^h & r_{eq14}^h \\ r_{eq12}^h & 0 & r_{eq23}^h & r_{eq24}^h \\ r_{eq13}^h & r_{eq23}^h & 0 & r_{eq34}^h \\ r_{eq14}^h & r_{eq24}^h & r_{eq34}^h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 115 & 132 & 59 \\ 115 & 0 & 59 & 75 \\ 132 & 59 & 0 & 68 \\ 59 & 75 & 68 & 0 \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (7.4)$$

A partir de (7.4) y utilizando el método en forma inversa, es decir, encontrar la matriz de adyacencia dada la matriz de resistencias equivalentes (véase el Anexo E de la página 145), se obtiene la siguiente matriz de adyacencia, en principio, de un nuevo grafo al que se ha denominado  $h$ .

$$A^h = \frac{1}{75268} \begin{pmatrix} 0 & 334 & 39 & 461 \\ 334 & 0 & 932 & 402 \\ 39 & 932 & 0 & 723 \\ 461 & 402 & 723 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

De forma clara, el grafo  $h$  no es isomorfo (ni siquiera coinciden numéricamente los pesos) a  $g$ , pero que como da el mismo conjunto de resistencias equivalentes que (7.3) se ha de admitir es co-resistencia con  $g$ . Estos dos grafos provocarían un falso positivo.

Considérese ahora, por ejemplo, otra permutación de las resistencias equivalentes como la que sigue

$$R_{eq}^q = \begin{pmatrix} 0 & r_{eq12}^q & r_{eq13}^q & r_{eq14}^q \\ r_{eq12}^q & 0 & r_{eq23}^q & r_{eq24}^q \\ r_{eq13}^q & r_{eq23}^q & 0 & r_{eq34}^q \\ r_{eq14}^q & r_{eq24}^q & r_{eq34}^q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 104 & 115 & 68 \\ 104 & 0 & 59 & 132 \\ 115 & 59 & 0 & 75 \\ 68 & 132 & 75 & 0 \end{pmatrix} \quad (\Omega) \quad (7.6)$$

Procediendo de forma similar al ejemplo anterior se obtendría la siguiente matriz de adyacencia de, en principio, un nuevo grafo al que se denominará  $q$  que generaría la matriz de resistencias equivalentes de (7.6) y que por lo tanto presentará el mismo conjunto de resistencias equivalentes que  $g$ , siendo por tanto co-resistencia con  $g$ .

$$A^q = \frac{1}{50404} \begin{pmatrix} 0 & 641 & -426 & 891 \\ 641 & 0 & 1090 & -505 \\ -426 & 1090 & 0 & 1004 \\ 891 & -505 & 1004 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, en este ejemplo se produce un fenómeno importante: algunos elementos de  $A^q$  son negativos (véase, por ejemplo, la fila 1 y columna 3). Esto está en contradicción con la presunción inicial para una matriz de adyacencia de que los pesos son positivo por lo que este grafo nunca hubiera sido contemplado (nunca hubiera existido). Por lo tanto, la conclusión importante es que el número de grafos co-resistencia dado por  $[N(N-1)/2]! - N!$  es una cota superior. Yendo más lejos, se investigó todas las 720 matrices de adyacencia que darían el mismo conjunto de resistencias equivalentes que  $g$  y se encontró 456 grafos (19 grafos no isomorfos) con matrices de adyacencia con algún elemento negativo, siendo co-resistencia 264 grafos (11 grafos no isomorfos).

### 7.3 Complejidad computacional

Como ya se ha visto, en la fase de mapeado, se ordenan de menor a mayor los valores de las resistencias de las ramas de la estrella del par de grafos  $g$  y  $h$ , las dos listas han de coincidir uno a uno permitiendo extraer el mapeado. Supongamos que en una lista (y por lo tanto en la otra) no existen valores repetidos entonces el método propuesto es de complejidad computacional polinomial de grado tres según el número de nodos.

El desglose de la complejidad computacional por cada una de las fases del SM haciendo uso del CEM puede ser observada en la tabla 7.1. En ella se destaca que la fase dominante, a efectos de complejidad computacional, es la obtención de la matriz inversa de una MDA ( $X_m^{-1}$ ).

Obtención de	$A'$	$Y$	$X_m$	$X_m^{-1}$	$\vec{R}_{eq}$	$\vec{R}$	$\tilde{R}$
Complejidad computacional	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^3)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$

Tabla 7.1: Complejidad computacional de cada una de las fases del SM.

En cambio, si en la lista existen valores repetidos, asumiendo que los grafos no presentan automorfismos, entonces el método ya no es polinomial y pasa a ser **NP**-Completo pero, ya no según el número de nodos sino, según el máximo número de valores repetidos. Entonces para acabar de encontrar todo el mapeado hay que entrar a enumerar todas las permutaciones sólo de los valores repetidos.

Como ya se comento en su momento supóngase que existen dos grupos de valores repetidos, el primero con  $f_1$  repeticiones y el segundo con  $f_2$  repeticiones. Para el primer grupo habrá que

buscar el submapeado correcto de entre las  $f_1!$  posibles combinaciones del subconjunto de nodos involucrado en las repeticiones y del segundo grupo habrá que buscar la solución correcta del submapeado de entre las  $f_2!$  posibles combinaciones. Aún así, una ventaja del SM es que, del resto de nodos, se puede obtener un submapeado. Resumiendo, en caso de repeticiones se puede dar un mapeado parcial del posible isomorfismo.

Pero si existen automorfismos la repetición de los valores de las ramas de la estrella es una consecuencia de la repetición de los valores de las resistencias equivalentes del circuito original que, a su vez, son una consecuencia obligada de las simetrías (automorfismos) del grafo. De donde, esta situación es natural e inevitable y, por lo tanto, cualquier permutación de las repeticiones dará un mapeado válido. En resumen, si las repeticiones de los valores de las ramas de las estrellas son debidas a automorfismos en el grafo, a todos los efectos, el SM sigue siendo de complejidad computacional polinomial de orden tres ya que todos los mapeados de las permutaciones de los valores repetidos serán válidos.

De la discusión anterior se deduce que el núcleo de la cuestión está en la aparición de valores repetidos en las ramas de la estrella. A efectos de analizar este aspecto se ha confeccionado la tabla 7.2 para todas las situaciones posibles.

$\hat{A}$ Automorfismo?	$\hat{A}^{eq_{ij}}$ repetidas?	$\hat{A}^{T_k}$ repetidas?	Caso	Complejidad computacional	Observaciones
No	No	No	<b>(i)</b>	Polinomial ( $O(N^3)$ )	Ideal
		Sí	<b>(ii)</b>	NP-Completo	No ideal
	Sí	No	<b>(iii)</b>	Polinomial ( $O(N^3)$ )	Ideal
		Sí	<b>(iv)</b>	NP-Completo	No ideal
Sí	No	n/a	<b>(v)</b>	n/a	Imposible por inconsistente.
	Sí	No	<b>(vi)</b>	n/a	Imposible por inconsistente.
		Sí	<b>(vii)</b>	Polinomial ( $O(N^3)$ )	Ideal (más de un mapeado válido)

Tabla 7.2: Complejidad computacional del SM desglosada según las situaciones que se produzcan.

Para los casos de que existan automorfismos (simetrías) en el grafo entonces necesariamente habrá valores de resistencias equivalentes repetidos por lo que el caso **(v)** no se dará nunca. Esta simetría también se reflejará en el circuito en estrella presentando necesariamente valores repetidos en sus ramas por lo que el caso **(vi)** tampoco aparecerá nunca. Para grafos con automorfismos sólo queda el caso **(vii)** pero no presenta mayores contratiempos porque con un análisis más detallado se tendrá que los valores repetidos son consecuencia de que existe más de un mapeado válido entre los grafos candidatos al isomorfismo, en este caso el SM da como solución el primer mapeado que encuentra o bien, si se programa para ello, todos los válidos. La conclusión es que por el hecho de presentar los grafos automorfismos no es impedimento para que el SM siga siendo polinomial.

Para los casos de grafos sin automorfismos lo primero que se mostrará es que pueden existir valores de las resistencias equivalentes repetidos. En efecto, si se observa el grafo (sin automorfismos<sup>107</sup>) del ejemplo de la figura 7.1 por simple inspección visual se observa que  $r_{eq23}$  deberá tener el mismo valor que  $r_{eq34}$ .

<sup>107</sup>Aunque se debe reconocer que sospechosamente su grafo asociado sí presenta automorfismos.

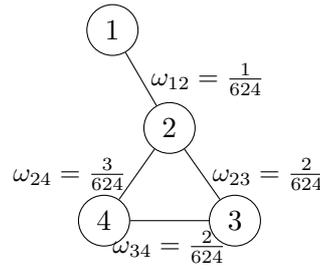


Figura 7.1: Ejemplo de grafo sin automorfismos pero que tiene valores de resistencias equivalentes repetidas.

La matriz de adyacencia del grafo del ejemplo es

$$A^g = \frac{1}{624} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

dando la matriz de resistencias equivalentes que sigue

$$R_{eq}^g = \begin{pmatrix} 0 & 624 & 819 & 780 \\ 624 & 0 & 195 & 156 \\ 819 & 195 & 0 & 195 \\ 780 & 156 & 195 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

En esta matriz se puede observar lo ya anunciado:  $r_{eq23}^g = r_{eq34}^g = 195 \Omega$ . Luego queda confirmado y demostrado que un grafo sin automorfismos puede presentar resistencias equivalentes repetidas.

Aclarado este punto y volviendo a la tabla 7.2 se tendrá que en los casos **(i)** y **(iii)** el método funciona perfectamente y no se van a comentar más. En cambio en los casos **(ii)** y **(iv)** el método acaba siendo **NP-Completo** según el número de valores repetidos, en estos casos, mediante dos ejemplos, se va a confirmar que tales situaciones pueden llegar a producirse.

Considérese para el caso **(ii)** un grafo  $g$  cuya matriz de adyacencia es como sigue

$$A^g = \frac{1}{324} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 2 & 6 \\ 18 & 0 & 9 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

En donde por observación directa de esta matriz se deduce que el grafo no presenta automorfismos (todos los pesos son diferentes). Su correspondiente matriz de resistencias equivalentes será

$$R_{eq}^g = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 27 & 30 \\ 15 & 0 & 24 & 33 \\ 27 & 24 & 0 & 21 \\ 30 & 33 & 31 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

En la anterior matriz no hay dos valores iguales lo que certifica que la situación es la del caso **(ii)**. El vector correspondiente de resistencias de la ramas de la estrella es

$$\vec{R}^g = (11, 11, 11, 17)^t \quad (7.11)$$

en donde se observa que existen valores repetidos ( $r_1^g = r_2^g = r_3^g = 11 \Omega$ ).

Para el otro caso (caso **(iv)**) sea el grafo  $g$  cuya matriz de adyacencia es

$$A^g = \frac{1}{843} \begin{pmatrix} 0 & 29 & 9 & 14 \\ 29 & 0 & 22 & 3 \\ 9 & 22 & 0 & 30 \\ 14 & 3 & 30 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

En donde por observación directa de esta matriz se deduce que el grafo no presenta automorfismos (todos los pesos son diferentes). Su correspondiente matriz de resistencias equivalentes será

$$R_{eq}^g = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 27 & 30 \\ 21 & 0 & 24 & 33 \\ 27 & 24 & 0 & 21 \\ 30 & 33 & 31 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

En la anterior matriz se tiene que los valores de  $r_{eq_{12}}$  y  $r_{eq_{34}}$  son iguales ( $r_{eq_{12}} = r_{eq_{34}} = 21 \Omega$ ). El vector correspondiente de resistencias de la rama de la estrella es

$$\vec{R}^g = (13, 13, 10, 16)^t \quad (7.14)$$

en donde se observa que existen valores repetidos ( $r_1^g = r_2^g = 13 \Omega$ ) certificando que el caso **(iv)** puede existir.

Los dos anteriores ejemplos ponen de manifiesto (para un grafo sin automorfismos) un hecho importante: No se puede presuponer nada sobre las repeticiones de los valores de la estrella en función de si los valores de las resistencias equivalentes están repetidos o no.

En resumen, para un grafo sin automorfismos pueden presentarse los cuatro casos de la tabla 7.2. Dos de ellos son ideales (casos **(i)** y **(iii)**) y los otros dos son no deseados (casos **(ii)** y **(iv)**).

## 7.4 Conclusiones

Los falsos positivos (grafos co-resistencia) no son ningún contratiempo, pero su existencia obliga a validar el resultado. En última instancia será la validación quien aceptará o rechazará el mapeado obtenido. Aún así el SM es un método exacto para el isomorfismo de grafos si es llevado hasta la fase de validación. No obstante, dos grafos de los que se pretende esclarecer si son isomorfos y que casualmente sean co-resistencia parece (intuitivamente) una situación harto difícil de producirse, máxime si se tiene en cuenta que el número de grafos co-resistencia es finito. De todas formas, un filtrado previo descartaría bastantes grafos co-resistencia, de hecho en todos los casos tratados en este trabajo ni siquiera coinciden el conjunto de los pesos con sus repeticiones de los grafos co-resistencia.<sup>108</sup>

Aunque en la mayoría de los casos la complejidad computacional es polinomial según el número de nodos, no lo es en general. En general la complejidad computacional es factorial pero según el máximo número de repeticiones.<sup>109</sup> Ello es debido a la posible aparición de valores repetidos en la estrella que hacen que el SM deje de ser polinomial. Estas repeticiones son “naturales” si el grafo presenta automorfismos en cuyo caso el SM continúa siendo polinomial. Pero si los grafos no presentan automorfismos, existen ejemplos en donde las repeticiones también pueden producirse sin que exista una relación de causa-efecto con las repeticiones de las resistencias equivalentes como se vio en su momento mediante ejemplos.

<sup>108</sup>En el ejemplo del apartado 7.2 “Falsos positivos” las expresiones (7.1) y (7.5) corresponden a dos matrices de adyacencia de grafos co-resistencia, si se observan los pesos de dichas matrices se puede comprobar que no hay ni un sólo peso que coincida, luego es seguro que no son isomorfos. Estos grafos podrían haber sido descartados precozmente con un prefiltrado.

<sup>109</sup>Consecuentemente con el SM, aún siendo exacto, no se puede afirmar que el problema del isomorfismo de grafos está en **P** que, por otro lado, hubiera zanjado décadas de discusiones.

## Capítulo 8

# Resultados experimentales

### 8.1 Introducción

Sería inexcusable no ofrecer unos resultados experimentales que corroboren la complejidad computacional teórica y que certifiquen la utilidad del CEM y el buen comportamiento del SM en la práctica, este capítulo está íntegramente dedicado a ello. El aspecto más delicado es la selección de las bases de datos para los experimentos que debe ser impermeable a cualquier tipo de sospecha. Las bases de datos sintéticas, aunque son muy flexibles, quedan descartadas porque siempre son tachadas de ser creadas pensando expresamente en el método propuesto. Por lo tanto, la elección ha sido sobre bases de datos externas y consecuentemente fuera del control de esta investigación y que, además, sean conocidas públicamente por todos con notoriedad, en concreto se ha escogido la “IAM Graph Database” [RB08].

Ahora, elegida las bases de datos, queda el dilema de si “muchos nodos” o “pocos nodos”, claro está que si se escogen pocos nodos el número de experimentos puede ser muy alto pero se corre el riesgo de que sean poco representativos. En cambio si se escogen grafos con muchos nodos el número de los experimentos se reduce drásticamente debido a los tiempo de cómputo superiores pero, en cambio, aporta más convencimiento. En el caso objeto de este estudio se ha optado por los dos extremos, se ha escogido una base de datos con “pocos nodos” (base de datos “Letter”) expresamente para poder realizar muchos experimentos y, por otro lado, se ha escogido otra base de datos con “muchos nodos” (base de datos “Web”) para mayor persuasión.

Los resultados obtenidos mediante el SM aplicando el CEM han cumplido las expectativas depositadas en ellos, como se podrá comprobar en seguida, pudiéndose evaluar los resultados obtenidos como satisfactorios.

### 8.2 Confirmación experimental de la complejidad computacional

A efectos de ratificar que la complejidad computacional del SM es polinomial de grado tres ( $O(N^3)$ ) se sometió un grafo completo<sup>110</sup> de orden  $N$  hasta obtener su aproximación por una estrella utilizando el SM. Este proceso se repitió desde  $N = 90$  hasta 2110 en incrementos de uno en uno. En el proceso se extrajeron los tiempos de proceso ( $T_N(s)$ ) y se normalizaron respecto a la duración para  $N = 90$  ( $\tau_N = T_N/T_{90}$ ). En la figura 8.1 puede observarse la gráfica obtenida de  $\tau_N$  en función de  $N$ .

---

<sup>110</sup>El tiempo de proceso para el SM es determinista, no iterativo y sólo depende del número de nodos (no depende del número de ramas, ni de los pesos asignados, ni de otros factores) por lo que la elección de un grafo completo y sus pesos, a efectos de corroborar la complejidad computacional, es totalmente irrelevante y por lo tanto es arbitraria.

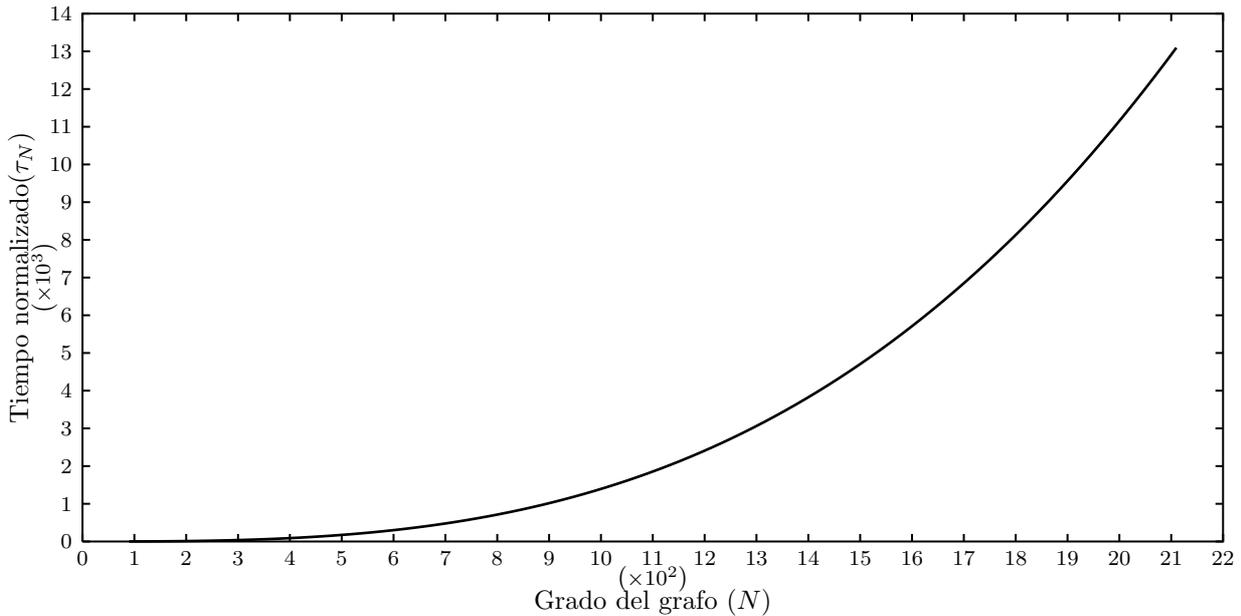


Figura 8.1: Duración temporal normalizada ( $\tau_N$ ) del SM respecto del grado del grafo ( $N$ ).

De todos los datos obtenidos (2021 puntos) se extrajo la curva de regresión, esta fue

$$\tau_N = 1,362\,429\,342\,894\,19 \cdot 10^{-6} N^{3,004\,069\,985\,4} \tag{8.1}$$

El resultado anterior corrobora la complejidad computacional teóricamente anunciada (polinomial de orden tres).

### 8.3 Control de calidad y eficiencia

En todos los experimentos se tiene constancia de la realidad, es decir, si el par de grafos que se someten al SM son isomorfos o no y, si lo son, cual es el mapeado que permite obtener uno a partir del otro (es evidente que el algoritmo del SM ignora esta información). Un par de grafos se someten al SM y el método dictaminará si son isomorfos y, si lo son, cual es el mapeado. Teniendo lo anterior presente, en todos los experimentos se efectuó un control de calidad comparando de forma sistemática los resultados obtenidos por el SM y la realidad. Todas las situaciones teóricas que se pueden producir son las presentadas en la tabla 8.1, cuando los experimentos particulares sean presentados se utilizará la terminología de dicha tabla.

Caso	Nombre	Realidad	Dictamen del SM y control de calidad				Observaciones
		¿Isomorfos?	Detección	Mapeado	Validación	Calidad	
1	“acierto”	Sí	positiva	correcto	positiva	acierto	
2	“imposible”	Sí	positiva	incorrecto	negativa	error	Situación imposible.
3	“pánico”	Sí	negativa	n/a	n/a	error	Situación imposible.
4	“acierto”	No	negativa	n/a	n/a	acierto	
5	“FP”	No	positiva	incorrecto	negativa	acierto	Falso positivo. Previsto en el SM.

Tabla 8.1: Dictamen del SM y control de calidad conociendo la realidad. En el caso de producirse un “imposible” o un “pánico” en algún experimento invalidaría el SM. La abreviación n/a se ha de leer como “no aplica”.

Los casos “imposible” y “pánico” son situaciones que de producirse un solo caso en los experimentos invalidaría el SM.

Por otro lado, en los experimentos realizados el SM ha sido programado para abandonar la búsqueda total de un mapeado e indicar tal situación cuando en la estrella aparezcan valores repetidos. A efectos de disponer de una orientación cuantitativa de este fenómeno se define una eficiencia ( $\eta$ ) del método y será utilizada en cada batería de experimentos. Esta eficiencia se define como

$$\eta = 1 - \frac{\text{Pares de grafos con mapeado parcial}}{\text{Todos los pares de grafos}} \quad (8.2)$$

## 8.4 Base de datos “Letter”

Esta es una base de datos proporcionada por [RB08]. Básicamente consiste en caracteres manuscritos existiendo diferentes implementaciones de cada carácter. Tienen pocos nodos pero hay bastantes grafos. En estos grafos la información está en los nodos y consiste en las coordenadas cartesianas de los nodos, las aristas no tiene información alguna.

### 8.4.1 Preparación de la base de datos

Se sustituyó en todos los grafos de la base de datos “Letter” la información de los nodos por otra en las aristas. El nuevo valor que se utiliza en las aristas es la distancia euclídea obtenida entre la posición de cada par de nodos si el grafo origen tenía una arista incidente a los nodos en cuestión. Durante este proceso se descartan aquellos grafos con más de una componente conexa.

Resultaron en total 1708 grafos que quedan desglosados, atendiendo a su grado, según la tabla 8.2.

Grado	3	4	5	6	7	8	9
Número de grafos	167	411	678	337	106	8	1

Tabla 8.2: Desglose según el grado de los grafos de la base de datos “Letter”.

El desglose según su tamaño es el mostrado en la tabla 8.3 en donde  $D$  es la densidad del grafo ( $0 \leq D \leq 1$ ) definida como

$$D = \frac{|V|}{|E|(|E| - 1)/2} \quad (8.3)$$

con  $|E|$  el grado y  $|V|$  el tamaño del grafo.

Se hace notar que se comprobó y resulto ser que todos los grafos son diferentes (no hay dos iguales ni siquiera isomorfos). Por otro lado, es sabido que no tiene sentido detectar si dos grafos con diferente tamaño son isomorfos ya que el tamaño es un invariante por el isomorfismo y por tanto condición necesaria para el mismo. Aún así se realizaron los experimentos ignorando esta información sólo a efectos de probar el SM. Es más, no se utilizó prefiltrado alguno y no se obligó a que los grafos fueran 2-candicatos tal como se describe en el apartado 6.2 “Fase opcional: Filtrado previo)” (página 68).

### 8.4.2 Aplicación del SM

De cada grafo se produjo el número de grafos isomorfos según se muestra en la tabla 8.4 en donde en el ítem “isomorfos generados” está incluido el grafo origen. El total fue de 23 293 grafos.

Grado	Tamaño	Densidad ( $D$ )	Grafos	
			Subtotal	Total
3	3	1	167	167
4	4	0,66	256	
	5	0,83	135	
	6	1	20	411
5	4	0,40	161	
	5	0,50	265	
	6	0,60	205	
	7	0,70	47	678
6	5	0,33	90	
	6	0,40	158	
	7	0,47	79	
	8	0,53	9	
	9	0,60	1	337
7	6	0,29	44	
	7	0,33	43	
	8	0,38	15	
	9	0,43	4	106
8	8	0,29	8	8
9	9	0,25	1	1

Tabla 8.3: Desglose según el grado y el tamaño de los grafos de la base de datos “Letter”.

Grado	Grafos en origen (no isomorfos)	Para cada grafo en origen			Para cada pareja de grafos		
		Isomorfos generados	Máximo isomorfos	Subtotal grafos	Parejas isomorfas	Parejas no isomorfas	Subtotal parejas
3	167	6	6	1 002	2 505	498 996	501 501
4	411	24	24	9 864	113 436	48 530 880	48 644 316
5	678	10	120	6 780	30 510	22 950 300	22 980 810
6	337	13	720	4 381	26 286	9 568 104	9 594 390
7	106	11	5 040	1 166	5 830	673 365	679 195
8	8	11	40 320	88	440	3 388	3 828
9	1	12	362 880	12	66	0	66
Total	1 708	n/a	n/a	23 293	179 073	82 225 033	82 404 106

Tabla 8.4: Creación de grafos isomorfos de la base de datos “Letter” y cómputo de emparejamientos. En el ítem “isomorfos generados” está incluido el grafo origen. La abreviación n/a se ha de leer como “no aplica”.

Se formaron todas las parejas de grafos (todos con todos) para un mismo grado. El desglose de parejas isomorfas y no isomorfas puede ser consultado en la tabla 8.4. El número total de emparejamientos fue de 82 404 106 emparejamientos (cantidad no desdeñable). De cada grafo se obtuvieron sus resistencias equivalentes y se controló si existían grupos de resistencias equivalentes repetidas en cada grafo siendo el resultado negativo, de donde se puede inferir que ningún grafo presentaba automorfismos. De cada emparejamiento que superó la fase de detección se obtuvieron sus respectivas aproximaciones por estrellas, en ningún caso se encontró resistencias en las estrellas repetidos, por lo que todos los mapeados extraídos fueron siempre totales. Finalmente se validó el resultado.

### 8.4.3 Control de calidad

Se sometió los resultados del SM al control de calidad descrito en el apartado 8.3 resultando que no se presentó ningún caso “imposible” ni “pánico”. No se encontro ningún caso “FP” aunque su presencia no hubiera invalidado el SM. Todos los resultados finales pueden ser observados en la tabla 8.5 en donde se puede comparar la realidad con lo dictaminado por el SM. Estos resultados se puede calificar como satisfactorios.

Grado	Realidad		Resultados con el SM			
	Parejas isomorfas	Parejas no isomorfas	Parejas isomorfas	Parejas no isomorfas	Mapeado parcial	$\eta$ (%)
3	2 505	498 996	2 505	498 996	0	100
4	113 436	48 530 880	113 436	48 530 880	0	100
5	30 510	22 950 300	30 510	22 950 300	0	100
6	26 286	9 568 104	26 286	9 568 104	0	100
7	5 830	673 365	5 830	673 365	0	100
8	440	3 388	440	3 388	0	100
9	66	0	66	0	0	100

Tabla 8.5: Comparación de la realidad y de los resultados del SM obtenidos sobre la base de datos “Letter”.

## 8.5 Base de datos “Web”

Esta es un base de datos proporcionada por [RB08]. Esta base de datos contiene 2340 grafos dirigidos, con multiarcos y no conexos. El mínimo grado es 43 y el máximo 834 ambos inclusive, el grado de los grafos está muy disperso.<sup>111</sup> Para un grado dado entre 43 y 834 pueden haber 0, 1, 2, ... ó 25 grafos en la base de datos. Se comprobó, y resulto, que no hay dos grafos ni iguales ni isomorfos.

### 8.5.1 Preparación de la base de datos

Estos grafos fueron modificados conectando sus componentes conexas, convirtiéndolos en dirigidos e integrando los multiarcos. Durante el proceso aquellos grafos con un sólo representante para un

<sup>111</sup>Esta es la razón por lo que no se adjuntará aquí una tabla desglosada por tamaño como se hizo para la base de datos “Letter”.

grado dado fueron descartados. Al final de este proceso fueron obtenidos un total de 2239 grafos con un grado mínimo de 57 y un máximo de 635 ambos inclusive. El número de representantes, dado un grado, quedó en 2, 3, . . . ó 25 (véase el Anexo F “Desglose por grados de la base de datos “Web”” en la página 151).

### 8.5.2 Aplicación del SM

Para cada grafo se generaron tres grafos isomorfos (cuatro grafos en total si se cuenta el original), el número total de grafos, isomorfos o no, fue de 8956 grafos. Para un mismo grado se formaron todas las parejas posibles, isomorfas o no, dando la importante cantidad de 189 626 emparejamientos de los cuales 176 192 pares corresponden (en la realidad) a pares no isomorfos de grafos y el resto, 13 434 pares, corresponden (en la realidad) a pares de grafos isomorfos. Todos los pares de grafos (189 626 emparejamientos) fueron sometidos al SM, los resultados obtenidos fueron los de la tabla 8.6; en dicha tabla, dado el gran volumen de información generado, han sido agrupados los grafos por franjas de grado sin ninguna otra intención más que la de compactar la información.

Grado	Realidad		Resultados con el SM			
	Parejas isomorfas	Parejas no isomorfas	Parejas isomorfas	Parejas no isomorfas	Mapeado parcial	$\eta$ (%)
57-99	1 884	24 992	1 884	24 992	0	100
100-199	7 392	120 816	7 392	120 816	0	100
200-299	3 252	27 952	3 252	27 952	0	100
300-399	762	2 240	762	2 240	0	100
400-499	120	160	120	160	0	100
500-599	12	16	12	16	0	100
600-635	12	16	12	16	0	100

Tabla 8.6: Comparación de la realidad y de los resultados del SM obtenidos sobre la base de datos “Web”. Debido a la dispersión de los grados los grafos han sido agrupados en franjas con el único objetivo de compactar la información.

Sólo a efectos de probar el SM, no se realizó prefiltrado alguno ni se exigió que el par de grafos fueran 2-candidatos (véase el apartado 6.2 “Fase opcional: Filtrado previo” en la página 68). No se encontraron grafos con resistencias equivalentes repetidas luego ningún grafo presentaba automorfismos. Tampoco se encontraron estrellas con valores repetidos luego todos los mapeados fueron totales.

### 8.5.3 Control de calidad

Como se describió en el apartado 8.3 se sometieron los resultados del SM al control de calidad reultando que no se presentó ningún caso “imposible” ni “pánico”. Tampoco se encontró ningún caso “FP” aunque su presencia no hubiera invalidado el SM. Todos los resultados finales pueden ser observados en la tabla 8.6 en donde se puede comparar la realidad con lo dictaminado por el SM.<sup>112</sup> Estos resultados se puede calificar como satisfactorios.

<sup>112</sup>Por la gran dispersión de los grados de la base de datos “Web” no es posible (por razones obvias) un desglose por grado de los resultados.

## 8.6 Conclusiones

Con los experimentos realizados se concluye que:

1. Queda comprobado experimentalmente que la complejidad computacional del CEM y el SM es polinomial de grado tres según el número de nodos, este resultado coincide con el predicho teóricamente.
2. Después de someter al SM a 82 404 106 emparejamientos de grafos de la base de datos “Letter” y a 189 626 emparejamientos de la base de datos “Web” no hubo ningún error ni en la detección del isomorfismo ni en el mapeado.
3. No se encontró ningún falso positivo (“FP”).<sup>113</sup> Tampoco se encontró ningún caso con valores de las resistencias de las estrellas repetidos lo que hubiera apartado al SM de un comportamiento polinomial.
4. Por último, y no por ello menos importante, no se encontró ninguna situación anómala (“imposible” o “pánico”) que hubiera puesto en duda (hubiera invalidado) el SM.

Como conclusión global se puede extraer que tanto el CEM como el SM han cumplido las expectativas depositadas en ellos. El comportamiento del CEM y el SM pueden ser catalogados como satisfactorios.

---

<sup>113</sup>Aunque la aparición de un “FP” está contemplada desde un punto de vista teórico.



## Capítulo 9

# Conclusiones y futuros trabajos

Los objetivos propuestos en esta tesis y expuestos en el apartado 1.2 “Objetivos” del Capítulo 1 “Introducción” (página 1) han sido completados. Las contribuciones que lo han hecho posible han sido las aportaciones originales y novedosas del CEM y del SM para grafos en general pero no dirigidos y sin atributos en los nodos.

En esta tesis los dos capítulos dedicados a un desarrollo teórico del CEM y del SM han sido: El Capítulo 5 “Modelo Eléctrico de Conductancias de un grafo” (página 59) para el CEM. El Capítulo 6 “Aplicación del CEM al isomorfismo de grafos: Método de la Estrella” (página 67) para el SM.

En el Capítulo 8 “Resultados experimentales” (página 101) se ha corroborado la complejidad computacional teórica y se ha comprobado las prestaciones prácticas de las anteriores aportaciones, lo que ha permitido confirmar la buena sintonía entre la teoría y la práctica. A la vista de los resultados de dicho capítulo se puede concluir que los resultados experimentales son satisfactorios y confirman el buen comportamiento del CEM y del SM.

El SM, globalmente, es un método exacto para el problema del isomorfismo de grafos no dirigidos y sin atributos en los nodos. Los problemas de detección y mapeado de un isomorfismo quedan claramente separados salvo falsos positivos que en todo caso serán detectados en la fase de validación. Si dos grafos no son isomorfos la situación será detectada prematuramente sin necesidad de llegar al final del SM,<sup>114</sup> esto puede apreciarse en las salidas laterales del diagrama de bloques de la figura 6.1 en la página 69. En realidad el SM da tres respuestas ante un par de grafos: no son isomorfos, son isomorfos dando un mapeado concreto o son isomorfos para un subconjunto de vértices dando un mapeado concreto pero parcial,<sup>115</sup> todo ello con tiempos de computo más que razonables. Es de destacar que como el SM siempre dará una respuesta aunque ésta sea parcial, al menos, el recurso temporal habrá sido aprovechado.

La más importante de las restricciones del SM es la aparición de valores repetidos en las ramas de la estrella<sup>116</sup> que hacen que el SM se aparte de la complejidad computacional polinomial. Una manera muy útil de investigar bajo que condiciones se produce este fenómeno (caracterizar el fenómeno) sería la de invertir el SM. Es decir, a partir de una estrella genérica pero con valores repetidos encontrar los valores de las resistencias equivalentes y, entonces, extraer conclusiones. Desgraciadamente el SM no es invertible como se demuestra en el Anexo G “Inversión total del SM” (página 159) por lo tanto el estudio de las repeticiones debe ser llevado a cabo por otras vías. Para no crear confusión debe quedar claro que en el SM no se utiliza para nada tal inversión y, por lo

---

<sup>114</sup>No existen los falsos negativos.

<sup>115</sup>Es decir, son isomorfos los grafos inducidos por un subconjunto de vértices, aunque siempre pendiente de validación.

<sup>116</sup>No obstante, este fenómeno se ha predicho teóricamente y se han obtenidos casos con simulaciones por computador. No se ha encontrado un sólo caso en los experimentos realizados.

tanto, su existencia o inexistencia es irrelevante de cara al filtrado de grafos isomorfos. La discusión anteriormente hecha sobre la inversión del SM es sólo a efectos de investigación y no de explotación del SM.

## 9.1 Aspectos destacables

En forma de lista se dan los aspectos destacables del CEM y del SM aplicados al filtrado de grafos isomorfos. Estos son:

1. La detección y el mapeado del isomorfismo de grafos (salvo grafos co-resistencia) quedan claramente separados. Desde un punto de vista de filtrado esto permite realizar un filtro en etapas (en cascada).
2. El descarte de grafos no isomorfos es precoz. Desde un punto de vista de filtrado no es necesario llegar al final del filtrado para grafos no isomorfos.
3. Si hay valores repetidos en las ramas de la estrella, al menos, se puede extraer un mapeado parcial del posible isomorfismo (tercera salida del filtro).
4. El proceso de filtrado no es iterativo ni recursivo, tampoco es probabilístico. Es determinista y su complejidad computacional sólo depende del número de nodos (y del número máximo de repeticiones en las ramas de la estrella si hubiera tales repeticiones).
5. Para el cálculo de las resistencias de las ramas de la estrella no es necesario el cálculo de la pseudoinversa, este paso queda sustituido por el cálculo de sumas de finitos términos.
6. Si se desea comparar de forma repetida grafos incógnita contra una base de datos de grafos, entonces los grafos de dicha base de datos pueden estar precalculados y guardados en la memoria de un computador (se debería almacenar las resistencias equivalentes y los valores de las ramas de la estrella aproximada de cada grafo de la base de datos).
7. El cálculo de la inversa de una matriz puede introducir errores de redondeo sobre todo en grafos grandes que pueden repercutir en la comparación entre  $\widehat{R}_{eq}^g$  y  $\widehat{R}_{eq}^h$ . Este fenómeno no deseado puede ser minimizado utilizando alguna o algunas de las técnicas siguientes:
  - (a) Escogiendo convenientemente el nodo de referencia.
  - (b) Incrementando la resolución numérica del computador.
  - (c) Dando una tolerancia más relajada en la comparación entre  $\widehat{R}_{eq}^g$  y  $\widehat{R}_{eq}^h$ .

## 9.2 Futuros trabajos

Un aspecto importante que se desea destacar y que ha quedado diluido es que el SM es sólo una de las posibilidades que ofrece el CEM. Debido a la superior complejidad conceptual relativa del SM respecto al CEM, en este trabajo se ha dado más protagonismo al SM que al CEM.<sup>117</sup> Las puertas quedan abiertas para investigar, diseñar, probar y estudiar otras aplicaciones basadas en el CEM. El resto de este capítulo estará dividido en apartados que tratarán de diferentes aspectos sin conexión alguna entre ellos y, por lo tanto, sin que el orden de exposición implique alguna prelación.<sup>118</sup> Estos aspectos sugieren futuros trabajos que pueden consistir en mejoras y/o extensiones del SM, así como nuevas aplicaciones del CEM.

---

<sup>117</sup>Por otro lado el CEM, como modelo seleccionado, desarrollado y articulado, es extraordinariamente sencillo.

<sup>118</sup>Se expondrán en orden alfabético del título del apartado.

### 9.2.1 Alternativas de obtención de las resistencias equivalentes

Como se expuso en su momento en el cálculo del conjunto de resistencias equivalentes del circuito original se utilizaba el método sistemático de análisis por nodos lo cual implica la inversión de una matriz. En el SM es indistinto como son obtenidas este conjunto de resistencias equivalentes y, por lo tanto, queda abierta cualquier otra vía que permita dicha obtención. Pudiendo llegar incluso a quedar sustituido el cálculo por su medición. Por ejemplo, si los grafos son cambiantes con el tiempo puede ser implementado un dispositivo que se asociaría al grafo de forma transparente y que midiera (y ya no calculase) en tiempo real las “resistencias equivalentes”<sup>119</sup> del grafo. Sea dicho de paso, de lo anterior se desprende, como otra conclusión, que el SM es fácilmente adaptable a grafos cambiantes con el tiempo lo cual deja abiertas nuevas líneas de investigación al respecto.

Como la obtención de las resistencias equivalente requiere una inversión de una matriz y como la complejidad computacional de dicha inversión es dominante en el SM, entonces cualquier otra vía de cálculo de las resistencias equivalentes alterará la complejidad computacional del SM sin que se pueda descartar que esta nueva vía tenga una complejidad computacional inferior a orden tres.

### 9.2.2 Automorfismos en grafos

El presente apartado no forma parte de la aportación dada en esta tesis, pero es un ejemplo de que el CEM puede tener otras aplicaciones. Su incorporación atiende a un anhelo de abrir puertas a nuevas aplicaciones del CEM en futuras investigaciones.

Un grafo presenta automorfismos (“simetrías”) cuando al permutar los vértices de un subconjunto (o subconjuntos) de vértices el grafo queda inalterado (no se pueden distinguir los grafos), a nivel de matrices de adyacencia dicha permutación no modifican para nada las matrices de adyacencia, matemáticamente las matrices de adyacencia son iguales. Supóngase que un grafo tiene dos vértices distintos ( $p$  y  $q$ ) que al permutarlos entre sí deja inalterado el grafo. Una vez obtenido el CEM y razonando en términos de Teoría de Circuitos se tiene que la resistencia equivalente entre el nodo  $p$  y cualquier otro nodo  $k$  no puede ser diferente que la resistencia equivalente entre el nodo  $q$  ( $q \neq p$ ) y el mismo nodo  $k$  por la sencilla razón de que  $p$  y  $q$  son indistinguibles circuitalmente hablando. El anterior razonamiento se mantiene para cualquiera que sea el nodo  $k$ . Concretando aún más, sea  $g$  un grafo tal que al permutar dos nodos distintos  $p$  y  $q$  entre sí el grafo permanece inalterado, entonces para  $k = 1, 2, \dots, N$  se tiene para la fila  $p$  de la matriz de adyacencia ( $R_{eq}^g$ ) del grafo completo de resistencias equivalentes que

$$\begin{cases} r_{eqpk}^g = 0 \text{ para } k = p \\ r_{eqpk}^g = r_{eqqp}^g \text{ para } k = q \\ r_{eqpk}^g = r_{eqqk}^g \text{ para } k \neq p \text{ y } k \neq q \end{cases} \quad (9.1)$$

y para la fila  $q$

$$\begin{cases} r_{eqqk}^g = 0 \text{ para } k = q \\ r_{eqqk}^g = r_{eqpq}^g \text{ para } k = p \\ r_{eqqk}^g = r_{eqpk}^g \text{ para } k \neq p \text{ y } k \neq q \end{cases} \quad (9.2)$$

en donde no hay que perder de vista que siempre es  $r_{eqij}^g = r_{eqji}^g$ . La conclusión que se extrae a la vista de las expresiones (9.1) y (9.2) es que las filas (y columnas)  $p$  y  $q$  serán idénticas excepto en dos valores, uno de ellos es el cero en la diagonal y el otro, asumiendo que sea  $p < q$ , será el valor de  $r_{eqqp}^g$  para la fila  $p$  y el valor de  $r_{eqpq}^g$  para la fila  $q$  aunque entre ellos serán idénticos. Las filas y columnas  $p$  y  $q$  de la matriz de adyacencia del grafo de resistencias equivalentes ( $R_{eq}^g$ ) tendrán el

---

<sup>119</sup>O alguna otra magnitud que pueda “jugar” el mismo papel.



columnas) cuasiiguales en las posiciones  $p_1, p_2, \dots$  y  $p_k$ . Esto es

$$\left. \begin{array}{l} \text{Los } k \text{ vértices} \\ V_{p_1}, V_{p_2}, \dots \text{ y } V_{p_k} \\ \text{del grafo } g \text{ definen} \\ \text{un automorfismo} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Las } k \text{ filas (y columnas)} \\ p_1, p_2, \dots \text{ y } p_k \text{ de} \\ \text{la matriz de adyacencia} \\ \text{del grafo } g \text{ son cuasiiguales} \end{array} \right. \quad (9.6)$$

La anterior es una condición necesaria pero no es suficiente. La suficiencia debería ser probada o la no suficiencia, en este último caso, mediante un ejemplo. Sin embargo esto no es necesario, dado que para certificar el automorfismo sería tan sencillo como comprobar que la matriz de adyacencia permanece idéntica cuando se permuta dos nodos, por lo tanto para validar un automorfismo es suficiente con validar permutaciones de dos en dos vértices, ya que la composición de permutaciones en un automorfismo cumple la propiedad transitiva. En resumen, habría que verificar  $k - 1$  automorfismos.

### 9.2.3 Emparejamiento inexacto óptimo

El objetivo en esta tesis ha sido el emparejamiento exacto de grafos, lo que ha generado un nuevo modelo (CEM) y un nuevo método (SM). Cuando se comparan los valores ordenados de las ramas de las estrellas dos a dos se asume que entre ellas son iguales. Si esto no fuera así se dictaminaría que los grafos no son isomorfos y el SM concluiría. Ahora bien en este punto, si no se exige que estos valores sean iguales se podrían emparejar los nodos dando un emparejamiento inexacto de grafos que, a todas luces, sería óptimo.<sup>120</sup> La anterior idea (muy primitiva) habría que desarrollarla y, sobre todo, probarla de forma práctica. Pero las dimensiones de este reto darían pié a otro trabajo independiente y aquí sólo se dejará constancia de esta sugerencia de mejora con una discusión teórica básica del asunto y un ejemplo.

Con un enfoque de emparejamiento exacto se exige que  $\widehat{R}_{eq}^g = \widehat{R}_{eq}^h$  y que  $\widehat{R}^{s(g)} = \widehat{R}^{s(h)}$  como condición necesaria para el isomorfismo de grafos. Ahora, para el emparejamiento inexacto óptimo, estas dos condiciones no se imponen.<sup>121</sup> Por lo tanto se llegará a obtener la secuencia finita  $\widetilde{R}^{s(g)}$  para  $g$  y  $\widetilde{R}^{s(h)}$  para  $h$  ambas de  $N$  pares ordenados de la forma  $(r_k^{s(g)}, k)$  y  $(r_k^{s(h)}, k)$  respectivamente siendo  $k = 1, 2, \dots, N$ . Se recuerda que ambas secuencias están ordenadas, de menor a mayor, según la primera componente del par. Una vez obtenidas ambas secuencias se puede aplicar, sin más, la expresión (6.65) o, alternativamente, la expresión (6.66) (véase la página 90) con lo que se obtiene un mapeado aproximado.

Como medida de similitud se abre una gama de posibilidades quedando supeditada la elección (o rechazo de todas) a una posterior investigación. La descripción cualitativa de estas posibilidades (podrían haber más) es:

1. Tomar el ecm entre las resistencias equivalentes de los grafos originales una vez aplicado el mapeado obtenido en la aproximación
2. Tomar el ecm entre las resistencias equivalentes de las estrellas una vez aplicado el mapeado obtenido en la aproximación.
3. Tomar el ecm entre los valores de las resistencias de las ramas de las estrellas una vez aplicado el mapeado obtenido en la aproximación.

Observéese que todas las posibilidades enunciadas son coherentes con el hecho de que si los grafos son isomorfos entonces el ecm es cero.

---

<sup>120</sup>El emparejamiento inexacto pero óptimo de grafos incluye al emparejamiento exacto. Desde este punto de vista el emparejamiento inexacto óptimo es siempre “mejor” que el emparejamiento exacto de grafos.

<sup>121</sup>Para el emparejamiento inexacto el CEM sigue siendo plenamente válido y el SM requeriría unos cambios mínimos en el algoritmo.

Se va a retomar el ejemplo del apartado 6.7 “Ejemplos ilustrativos de la aplicación del SM” (página 91). En concreto se van considerar los grafos  $g$  y  $q$  que en dicho ejemplo no eran isomorfos, los vectores  $\vec{R}_{eq}^g$  y  $\vec{R}_{eq}^q$  se reproducen en las expresiones (9.7) y (9.8) respectivamente por comodidad.

$$\vec{R}_{eq}^g = (26, 31, 33, 5, 7, 6)^t \quad (9.7)$$

$$\vec{R}_{eq}^q = (26, 32, 33, 6, 7, 5)^t \quad (9.8)$$

Es evidente que  $\widehat{R}_{eq}^g \neq \widehat{R}_{eq}^h$  luego no son isomorfos. Pero como se está realizando un emparejamiento inexacto se continúa calculando las resistencias de las ramas de las estrellas  $s(g)$  y  $s(q)$ . Estas son respectivamente

$$\vec{R}^{s(g)} = (27, 1, 3, 5)^t \quad (9.9)$$

y

$$\vec{R}^{s(q)} = \frac{1}{3} (82, 4, 10, 13)^t \quad (9.10)$$

Con lo anterior se obtienen las secuencias  $\widetilde{R}^{s(g)}$  para  $g$  y  $\widetilde{R}^{s(q)}$  para  $q$ . Estas son respectivamente

$$\widetilde{R}^{s(g)} = ((1, 2), (3, 3), (5, 4), (27, 1)) \quad (9.11)$$

y

$$\widetilde{R}^{s(q)} = ((\frac{4}{3}, 2), (\frac{10}{3}, 3), (\frac{13}{3}, 4), (\frac{82}{3}, 1)) \quad (9.12)$$

Aplicando la ecuacion (6.65) para  $w$  igual a 1, 2, 3 y 4 se tiene respectivamente que

$$\varphi_{q \leftarrow g} \left( \Gamma_1(\widetilde{R}^{s(g)}) \right) = \Gamma_1(\widetilde{R}^{s(q)}) \Rightarrow \varphi_{q \leftarrow g}(2) = 2 \quad (9.13)$$

$$\varphi_{q \leftarrow g} \left( \Gamma_2(\widetilde{R}^{s(g)}) \right) = \Gamma_2(\widetilde{R}^{s(q)}) \Rightarrow \varphi_{q \leftarrow g}(3) = 3 \quad (9.14)$$

$$\varphi_{q \leftarrow g} \left( \Gamma_3(\widetilde{R}^{s(g)}) \right) = \Gamma_3(\widetilde{R}^{s(q)}) \Rightarrow \varphi_{q \leftarrow g}(4) = 4 \quad (9.15)$$

$$\varphi_{q \leftarrow g} \left( \Gamma_4(\widetilde{R}^{s(g)}) \right) = \Gamma_4(\widetilde{R}^{s(q)}) \Rightarrow \varphi_{q \leftarrow g}(1) = 1 \quad (9.16)$$

Si son comparados los grafos de las subfiguras 6.4a y 6.4c de la figura 6.4 no parece descabellado el emparejamiento obtenido.

Se va a calcular la medida de similitud utilizando las tres propuestas enunciadas anteriormente sin que ello prejuzgue nada sobre su idoneidad. Sólo se efecturán los cálculos sin más comentarios en el mismo orden en que fueron enunciadas.

$$1. \sqrt{(26 - 26)^2 + (32 - 31)^2 + (33 - 33)^2 + (6 - 5)^2 + (7 - 7)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{3} \approx 1,732050808$$

$$2. \sqrt{(28 - \frac{86}{3})^2 + (30 - \frac{92}{3})^2 + (32 - \frac{95}{3})^2 + (4 - \frac{14}{3})^2 + (6 - \frac{17}{3})^2 + (8 - \frac{23}{3})^2} = \sqrt{\frac{15}{9}} \approx 1,290994449$$

$$3. \sqrt{(1 - \frac{4}{3})^2 + (3 - \frac{10}{3})^2 + (5 - \frac{13}{3})^2 + (27 - \frac{82}{3})^2} = \sqrt{\frac{7}{9}} \approx 0,881917104$$

### 9.2.4 Extensión del CEM a grafos dirigidos

El SM sólo es aplicable a grafos no dirigidos pero en la introducción del Capítulo 5 se apuntó la posibilidad de ampliar el CEM a grafos dirigidos mediante la inserción de un diodo ideal en serie con cada resistencia haciendo coincidir la polaridad del diodo con el sentido del arco del grafo dirigido (véase la figura 5.1). Sin entrar en profundizar en ello se dará un esbozo, en forma de lista, de los cambios más significativos<sup>122</sup> que se deberían tener en cuenta con respecto al SM expuesto en este trabajo antes de la aproximación por una estrella.

1. La matriz de adyacencia de conductancias dada por (4.3) del circuito obtenido mediante el CEM extendido ya no es simétrica.
2. La MIA dada por (5.4) que caracteriza el CEM del grafo ya no es simétrica en el CEM extendido.
3. El conjunto de resistencias equivalentes que era de  $N(N-1)/2$  valores pasa a ser de  $N(N-1)$  valores (se dobla su cantidad) porque ya no son necesariamente  $r_{eq_{ij}}$  y  $r_{eq_{ji}}$  iguales.

Para la aproximación por una estrella con el modelo extendido caben investigar, al menos, dos posibles alternativas:

1. Mantener la estrella tal y como se describió para el SM sin extensión. En este caso el sistema de ecuaciones dado por (6.3) pasaría a doblar el número de ecuaciones y mantendría el número de incógnitas.
2. Modificar la estrella para que refleje la nueva situación. En primera aproximación, se propone utilizar una “estrella” multiarco con  $N+1$  nodos y  $2N$  aristas de forma que cada nodo hoja tenga dos aristas incidentes (una entrante y otra saliente), estas dos aristas serían incidentes al nodo raíz. Entonces el sistema de ecuaciones dado por (6.3) pasaría a doblar tanto el número de ecuaciones ( $N(N-1)$ ) como el número de incógnitas ( $2N$ ).

En ambos casos la nueva matriz de coeficientes  $K$  ya no es la dada por (6.7).

### 9.2.5 Grafos perturbados

Se trataría de dar solución al problema de las repeticiones en las ramas de la estrella lo que provoca que el SM se aparte de un comportamiento polinomial en tiempo. Es una sospecha que tal fenómeno es debido a algún tipo de singularidad lo que explicaría su escasa aparición. Si este fuese el caso se propone para un futuro trabajo la viabilidad de perturbar ligeramente los grafos para apartarlos de esa supesta singularidad. Claro está que esta perturbación se debería ejercer en ambos grafos de forma tal que si eran isomorfos lo sigan siendo, por lo tanto la perturbación debe ser efectuada con idéntico valor en alguna o algunas aristas entre nodos de los cuales ya se conozca el posible mapeado parcial.

### 9.2.6 Reiteración del CEM y del SM

Con el fin de reducir los casos en que aparecen valores repetidos en las resistencias de las ramas de las estrellas se propone repetir el SM sólo para los vértices implicados en la repetición. Sea un grafo  $g = (V, E)$  simple, sin lazos, no dirigido y ponderado. Se obtiene su CEM y se aplica el SM resultando que un subconjunto de vértices ( $V_1$ ) de la estrella tienen los valores de sus ramas repetidos. La propuesta de mejora consiste en repetir el CEM y volver a aplicar el SM sólo para los  $|V_1|$  vértices (y sus correspondientes aristas) del subconjunto  $V_1$  del grafo original, es decir, del subgrafo  $g_1$  inducido de  $g$  por  $V_1$  siempre y cuando  $g_1$  resulte conexo. Si tal mejora tiene éxito y

---

<sup>122</sup>Todo lo que no se comente permanecerá sustancialmente sin cambios.

el número de repeticiones se reduce se puede volver a repetir esta mejora. Otra manera de intentar eliminar las repeticiones, combinada o no con la anterior, sería proceder de forma similar pero con el grafo asociado a  $g$ .

Se va a ilustrar lo anterior mediante un ejemplo, considérese el grafo cuya matriz de adyacencia venía dada por 7.9 de la página 99, en dicho ejemplo aparecieron tres valores de la estrella repetidos (en los nodos 1, 2 y 3) de un total de cuatro. La mejora consiste en repetir el CEM y el SM sólo para cada grupo de valores repetidos, entonces la nueva matriz de adyacencia es

$$A^{g_1} = \frac{1}{324} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 2 \\ 18 & 0 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

cuya MIA, según el CEM, es

$$Y^{g_1} = \frac{1}{324} \begin{pmatrix} 20 & -18 & -2 \\ -18 & 27 & -9 \\ -2 & -9 & 11 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

Al aplicar de nuevo el SM se tiene la matriz de resistencias equivalentes siguiente

$$R_{eq}^{g_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 33 & 81 \\ 33 & 0 & 60 \\ 81 & 60 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

y finalmente el vector de resistencias de las ramas de la nueva estrella

$$\vec{R}^{g_1} = \frac{1}{2}(33, 81, 60)^t \quad (9.20)$$

En donde se puede apreciar que ya no aparecen valores repetidos.

### 9.2.7 Representante canónico

En el apartado 2.5.2.4 “Representante canónico” (página 22) se trató ampliamente el tema del representante canónico de un grafo. Sean los  $N!$  grafos isomorfos a un grafo dado  $g$  de grado  $N$ , si se selecciona uno de ellos mediante algún criterio, este grafo sería el representante canónico de la clase, luego el isomorfismo de grafos se reduciría a la igualdad de grafos: sus representantes canónicos. Para poder hablar de representante canónico el criterio de obtención debe garantizar que se cumplan dos condiciones teóricas:

1. Siempre ha de existir.
2. Debe ser único.

Pero, en la práctica, se impone un criterio más por el cual se obtiene el representante canónico, este criterio es que debe ser viable su computo en términos temporales.

El CEM y el SM podría ser utilizado para la búsqueda del representante canónico de un grafo  $g$  con tiempos razonable, para ello se realizan los mismos pasos para un sólo grafo tal y como se ha explicado a lo largo de esta tesis hasta la obtención de la estrella aproximada. Una vez obtenida la estrella se extrae la secuencia  $\hat{R}^{s(g)}$ . Entonces al nodo resultante de  $\Gamma_1(\hat{R}^{s(g)})$  se le asigna el nodo 1, al nodo resultante de  $\Gamma_2(\hat{R}^{s(g)})$  se le asigna el 2, al resultante de  $\Gamma_3(\hat{R}^{s(g)})$  el 3 y así sucesivamente hasta asignar al nodo resultante de  $\Gamma_N(\hat{R}^{s(g)})$  el nodo  $N$  (de forma más general sería asignar al nodo resultante de  $\Gamma_w(\hat{R}^{s(g)})$  el nodo  $w$  con  $w = 1, 2, \dots, N$ ). El grafo así obtenido con esta reenumeración sería el grafo canónico. Es evidente que, por construcción, el grafo canónico existe siempre y será único siempre y cuando en las ramas de la estrella no aparezcan valores repetidos.

Si este fenómeno aparece entonces se pierde la unicidad del representante canónico, y éste deja de serlo. Así si existen  $k$  repeticiones de valores los representantes canónicos serían  $k!$  grafos, y esto rompería la unicidad. Todo el anterior planteamiento admitiría un futuro estudio que no puede ser abarcado en el presente trabajo.

Para terminar, se muestra un ejemplo de obtención del representante canónico, para ello se va a retomar el ejemplo del apartado 6.7 “Ejemplos ilustrativos de la aplicación del SM” (página 91). En concreto se va a considerar el grafo  $g$  cuya secuencia  $\hat{R}^{s(g)}$  era

$$\tilde{R}^{s(g)} = ((1, 2), (3, 3), (5, 4), (27, 1)) \quad (9.21)$$

Entonces el grafo canónico es el que resulta al reasignar los nodos de  $g$  de la siguiente manera:

- al nodo  $\Gamma_1(\tilde{R}^{s(g)}) = 2$  de  $g$  se le asigna el nodo 1,
- al nodo  $\Gamma_2(\tilde{R}^{s(g)}) = 3$  de  $g$  se le asigna el nodo 2,
- al nodo  $\Gamma_3(\tilde{R}^{s(g)}) = 4$  de  $g$  se le asigna el nodo 3 y
- al nodo  $\Gamma_4(\tilde{R}^{s(g)}) = 1$  de  $g$  se le asigna el nodo 4.

Con lo anterior se obtiene el grafo canónico representado en la figura 9.1 en donde con formato de subíndice se ha anotado la numeración del grafo  $g$ .

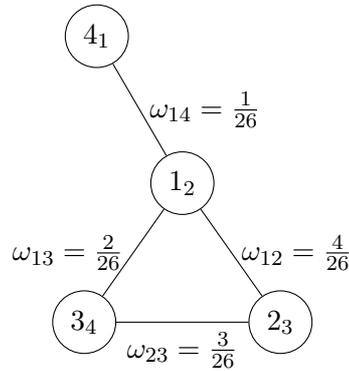


Figura 9.1: Ejemplo de grafo canónico del grafo  $g$  de la subfigura 6.4a de la página 91. Con formato de subíndice se ha anotado la numeración del grafo  $g$ .



# Referencias

- [AB09] Arora, Sanjeev y Boaz Barak: *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1ª edición, 2009, ISBN 978-0-521-42426-4.
- [AFB03] Ambauen, R., S. Fischer y H. Bunke: *Graph edit distance with node splitting and merging, and its application to diatom identification*. En Hancock, Edwin R. y Mario Vento (editores): *Graph Based Representations in Pattern Recognition*, volumen 2726 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 95–106. Springer Berlin Heidelberg, 2003, ISBN 978-3-540-40452-1.
- [AFYA92] Agusa, K., S. Fujita, M. Yamashita y T. Ae: *On neural networks for graph isomorphism problem*. En *Neuroinformatics and Neurocomputers, 1992., RNNS/IEEE Symposium on*, volumen 2, páginas 1142–1148, Octubre 1992.
- [AHU74] Aho, Alfred V., John E. Hopcroft y D. Jeffrey Ullmann: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1ª edición, 1974, ISBN 0-20100-029-6.
- [AK14] Abu-Khazam, Faisal N.: *Maximum common induced subgraph parameterized by vertex cover*. Information Processing Letters, 114(3):99–103, Marzo 2014, ISSN 0020-0190.
- [Auw07] Auwatanamongkol, Surapong: *Inexact graph matching using a genetic algorithm for image recognition*. Pattern Recognition Letters, 28(12):1428–1437, 2007.
- [Ayr89] Ayres, Frank: *Teoría y problemas de matrices*. Serie de compendios Schaum. Mac Graw-Hill de España, 1989, ISBN 978-9-684-51190-3.
- [BA83] Bunke, H. y G. Allermann: *Inexact graph matching for structural pattern recognition*. Pattern Recognition Letters, 1(4):245–253, 1983, ISSN 0167-8655.
- [Bab79] Babai, László: *Monte-Carlo algorithms in graph isomorphism testing*. D.M.S. Technical Report, (79-10), 1979.
- [BDBV00a] Berretti, S., A. Del Bimbo y E. Vicario: *The computational aspect of retrieval by spatial arrangement*. En *Pattern Recognition, 2000. Proceedings. 15th International Conference on*, volumen 1, páginas 1047–1051, 2000.
- [BDBV00b] Berretti, S., A. Del Bimbo y E. Vicario: *A look-ahead strategy for graph matching in retrieval by spatial arrangement*. En *Multimedia and Expo, 2000. ICME 2000. 2000 IEEE International Conference on*, volumen 3, páginas 1721–1724, 2000.
- [BDBV01] Berretti, S., A. Del Bimbo y E. Vicario: *Efficient matching and indexing of graph models in content-based retrieval*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 23(10):1089–1105, Octubre 2001, ISSN 0162-8828.
- [BES80] Babai, László., Paul Erdős y Stanley M. Selkow: *Random graph isomorphism*. SIAM Journal on Computing, 9(3):628–635, 1980.

- [BFG<sup>+</sup>02] Bunke, Horst, Pasquale Foggia, Corrado Guidobaldi, Carlo Sansone y Mario Vento: *A comparison of algorithms for maximum common subgraph on randomly connected graphs*. En Caelli, Terry, Adnan Amin, Robert P.W. Duin, Dick De Ridder y Mohamed Kamel (editores): *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, volumen 2396 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 123–132. Springer Berlin Heidelberg, 2002, ISBN 978-3-540-44011-6.
- [BGM82] Babai, László, D. Yu Grigoryev y David M. Mount: *Isomorphism of graphs with bounded eigenvalue multiplicity*. En *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '82, páginas 310–324, New York, NY, USA, 1982. ACM, ISBN 0-89791-070-2.
- [Big93] Biggs, Norman: *Algebraic graph theory*. Cambridge mathematical Library. Cambridge university press, 2<sup>a</sup> edición, 1993.
- [BIN05] Bunke, Horst, Christophe Irmiger y Michel Neuhaus: *Graph matching—challenges and potential solutions*. En Roli, Fabio y Sergio Vitulano (editores): *Image Analysis and Processing – ICIAP 2005*, volumen 3617 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 1–10. Springer Berlin Heidelberg, 2005, ISBN 978-3-540-28869-5.
- [BL83] Babai, László y Eugene M. Luks: *Canonical labeling of graphs*. En *Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '83, páginas 171–183, New York, NY, USA, 1983. ACM, ISBN 0-89791-099-0.
- [BLS99] Brandstädt, Andreas, Van Bang Le y Jeremy P. Spinrad: *Graph Classes: A Survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999, ISBN 0-89871-432-X.
- [BM96] Bui, Thang Nguyen y Byung Ro Moon: *Genetic algorithm and graph partitioning*. Computers, IEEE Transactions on, 45(7):841–855, 1996.
- [BM08] Bondy, Adrian y U. S. R. Murty: *Graph theory*, volumen 244 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2008, ISBN 978-1-84628-969-9.
- [BN07] Bunke, Horst y Michel Neuhaus: *Graph matching. exact and error-tolerant methods and the automatic learning of edit costs*. Mining graph data, páginas 17–32, 2007.
- [Bod90] Bodlaender, Hans L.: *Polynomial algorithms for graph isomorphism and chromatic index on partial  $k$ -trees*. Journal of Algorithms, 11(4):631 – 643, 1990, ISSN 0196-6774.
- [Bol98] Bollobás, Béla: *Modern graph theory*, volumen 184 de *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1998, ISBN 978-1-4612-0619-4.
- [BP71] Beineke, L. W. y R. E. Pippert: *Properties and characterizations of  $k$ -trees*. Mathematika, 18:141–151, Junio 1971, ISSN 2041-7942.
- [BR09] Bunke, Horst y Kaspar Riesen: *Graph Edit Distance—Optimal and Suboptimal Algorithms with Applications*, páginas 113–143. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2009, ISBN 978-3-527-62798-1.
- [Bru09] Brualdi, Richard A.: *Introductory combinatorics*. Pearson, 5<sup>a</sup> edición, Enero 2009, ISBN 0-13602-040-2.
- [BS90] Bunke, Horst y Alberto Sanfeliu: *Syntactic and structural pattern recognition: theory and applications*, volumen 8 de *Computer science series*. World Scientific Publishing, 1990, ISBN 978-9-971-50566-0.
- [BS98] Bunke, Horst y Kim Shearer: *A graph distance metric based on the maximal common subgraph*. Pattern Recognition Letters, 19(3–4):255–259, 1998, ISSN 0167-8655.

- [Bun00a] Bunke, Horst: *Graph matching: Theoretical foundations, algorithms, and applications*. En *International Conference on Vision Interface*, páginas 82–84, Mayo 2000.
- [Bun00b] Bunke, Horst: *Recent developments in graph matching*. En *Pattern Recognition, 2000. Proceedings. 15th International Conference on*, volumen 2, páginas 117–124, 2000.
- [BV99] Bunke, Horst y Mario Vento: *Benchmarking of graph matching algorithms*. En *Proceedings 2nd IAPR-TC15 Workshop on Graph-based Representations*, páginas 109–114, Handhorf, 1999.
- [BYH04] Bai, Xiao, Hang Yu y Edwin R. Hancock: *Graph matching using spectral embedding and alignment*. En *Pattern Recognition, 2004. ICPR 2004. Proceedings of the 17th International Conference on*, volumen 3, páginas 398–401. IEEE, Agosto 2004.
- [CB06] Clay, Landon T. y The Scientific Advisory Board: *The millennium prize problems contents*, 2006.
- [CFSS01] Comellas, Francesc, Josep Fàbregas, Ana Sànchez y Oriol Serra: *Matemàtica discreta*. Politext 99. Edicions UPC, Barcelona, Febrero 2001, ISBN 84-8301-456-4.
- [CFSV99] Cordella, Luigi Pietro, Pasquale Foggia, Carlo Sansone y Mario Vento: *Performance evaluation of the VF graph matching algorithm*. En *Image Analysis and Processing, 1999. Proceedings. International Conference on*, páginas 1172–1177, 1999.
- [CFSV01] Cordella, Luigi Pietro, Pasquale Foggia, Carlo Sansone y Mario Vento: *An improved algorithm for matching large graphs*. En *3rd IAPR-TC15 workshop on graph-based representations in pattern recognition*, páginas 149–159, 2001.
- [CFSV04] Conte, Donatello, Pasquale Foggia, Carlo Sansone y Mario Vento: *Thirty years of graph matching in pattern recognition*. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 18(3):265–298, 2004.
- [CG70] Corneil, Derek Gordon y Calvin C. Gotlieb: *An efficient algorithm for graph isomorphism*. *Journal of the ACM (JACM)*, 17(1):51–64, 1970.
- [CH01] Carcassoni, Marco y Edwin R. Hancock: *Weighted graph-matching using modal clusters*. En *Computer Analysis of Images and Patterns*, páginas 142–151. Springer, 2001.
- [Chu97] Chung, Fan R. K.: *Spectral graph theory*, volumen 92 de *Conference Board of the Mathematical Sciences. Regional Conference in Mathematics*. American Mathematical Society, 1997.
- [CK04a] Caelli, Terry y Serhiy Kosinov: *Inexact graph matching using eigen-subspace projection clustering*. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 18(03):329–354, 2004.
- [CK04b] Caelli, Tweey y Serhiy Kosinov: *An eigenspace projection clustering method for inexact graph matching*. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 26(4):515–519, Abril 2004, ISSN 0162-8828.
- [CM93] Cai, Leizhen Cai y Frédéric Maffray: *On the spanning  $k$ -tree problem*. *Discrete Applied Mathematics*, 44(1–3):139–156, 1993, ISSN 0166-218X.
- [CMH00] Cross, Andrew D. J., Richard Myers y Edwin R. Hancock: *Convergence of a hill-climbing genetic algorithm for graph matching*. *Pattern Recognition*, 33(11):1863–1880, 2000.

- [Con03] Conejo, A.: *Circuitos eléctricos para la ingeniería*. Limusa Wesley, México, 6ª edición, 2003, ISBN 9-68186-295-3.
- [Coo71] Cook, Stephen A.: *The complexity of theorem-proving procedures*. En *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '71, páginas 151–158, New York, NY, USA, 1971. ACM.
- [Coo00] Cook, Stephen A.: *The P versus NP problem*. En *Clay Mathematical Institute; The Millennium Prize Problem*, 2000.
- [CRS97] Cvetković, Dragoš, Peter Rowlinson y Slobodan Simić: *Eigenspaces of graphs*, volumen 66 de *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 1ª edición, 1997.
- [CRS10] Cvetković, Dragoš, Peter Rowlinson y Slobodan Simić: *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge-New York, 2010.
- [CS11] Cvetković, Dragoš y Slobodan Simić: *Graph spectra in computer science*. Linear Algebra and its Applications, 434(6):1545 – 1562, Marzo 2011, ISSN 0024-3795.
- [CWH97] Cross, Andrew D. J., Richard C. Wilson y Edwin R. Hancock: *Inexact graph matching using genetic search*. Pattern Recognition, 30(6):953–970, 1997.
- [DES09] Dehmer, Matthias y Frank Emmert-Streib (editores): *Analysis of complex networks: from biology to linguistics*. Wiley-VCH, 2009, ISBN 978-3-527-32345-6.
- [DGMES13] Dehmer, Matthias, Martin Grabner, Abbe Mowshowitz y Frank Emmert-Streib: *An efficient heuristic approach to detecting graph isomorphism based on combinations of highly discriminating invariants*. Advances in Computational Mathematics, 39(2):311–325, 2013, ISSN 1019-7168.
- [Die12] Diestel, Reinhard: *Graph theory*, volumen 173 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, 4ª edición, 2012, ISBN 978-3-642-14278-9.
- [DL95] DeCarlo, Raymond A. y P. Lin: *Linear Circuit Analysis*. Prentice Hall, 1995.
- [DLR77] Dempster, A. P., N. M. Laird y D. B. Rubin: *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 39(1):1–38, 1977, ISSN 00359246.
- [DLSM04] Darga, Paul T., Mark H. Liffiton, Kareem A. Sakallah y Igor L. Markov: *Exploiting structure in symmetry detection for CNF*. En *Proceedings of the 41st Annual Design Automation Conference*, DAC '04, páginas 530–534, New York, NY, USA, 2004. ACM, ISBN 1-58113-828-8.
- [Dre69] Dreyfus, Stuart E.: *An appraisal of some shortest-path algorithms*. Operations Research, 17(3):395–412, 1969.
- [DVDGG<sup>+</sup>92] Dumay, A. C. M., R. J. Van Der Geest, J. J. Gerbrands, E. Jansen y J. Reiber: *Consistent inexact graph matching applied to labelling coronary segments in arteriograms*. En *Pattern Recognition. Conference C: Image, Speech and Signal Analysis, Proceedings., 11th IAPR International Conference on*, volumen III, páginas 439–442, Agosto 1992.
- [EF84] Eshera, M. A. y K. S. Fu: *A graph distance measure for image analysis*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 14(3):398–408, 1984.
- [EI71] Even, S. y A. Itai: *Queues, stacks and graphs*. En Paz, Zvi KohaviAzaria (editor): *Theory of Machines and Computations*, páginas 71–86. Academic Press, 1971, ISBN 978-0-12-417750-5.

- [Eul41] Euler, Leonard: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 8:128–140, 1741.
- [EWH09] Emms, David, Richard C. Wilson y Edwin R. Hancock: *Graph matching using the interference of discrete-time quantum walks*. Image and Vision Computing, 27(7):934 – 949, 2009, ISSN 0262-8856.
- [FE73] Fischler, Martin A. y R. A. Elschlager: *The representation and matching of pictorial structures*. Computers, IEEE Transactions on, C-22(1):67–92, Enero 1973, ISSN 0018-9340.
- [FF96] Fleurent, Charles y Jacques A. Ferland: *Genetic and hybrid algorithms for graph coloring*. Annals of Operations Research, 63(3):437–461, 1996.
- [Flo62] Floyd, Robert W.: *Algorithm 97: Shortest path*. Commun. ACM, 5(6):345–, Junio 1962, ISSN 0001-0782.
- [FM80] Filotti, I. S. y Jack N. Mayer: *A polynomial-time algorithm for determining the isomorphism of graphs of fixed genus*. En *Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '80, páginas 236–243, New York, NY, USA, 1980. ACM, ISBN 0-89791-017-6.
- [FMR79] Filotti, I. S., Gary L. Miller y John Reif: *On determining the genus of a graph in  $O(VO(G))$  steps (preliminary report)*. En *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '79, páginas 27–37, New York, NY, USA, 1979. ACM.
- [FSV01] Foggia, Pasquale, Carlo Sansone y Mario Vento: *A performance comparison of five algorithms for graph isomorphism*. En *in Proceedings of the 3rd IAPR TC-15 Workshop on Graph-based Representations in Pattern Recognition*, páginas 188–199, 2001.
- [FV01] Fernández, Mirtha Lina y Gabriel Valiente: *A graph distance metric combining maximum common subgraph and minimum common supergraph*. Pattern Recognition Letters, 22(6–7):753 – 758, 2001, ISSN 0167-8655.
- [Gal06] Gallagher, Brian: *Matching structure and semantics: A survey on graph-based pattern matching*. AAAI FS, 6:45–53, 2006.
- [GJ90] Garey, Michael R. y David S. Johnson: *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990, ISBN 0-71671-045-5.
- [GK02] Gregory, Lee y Josef Kittler: *Using graph search techniques for contextual colour retrieval*. En Caelli, Terry, Adnan Amin, Robert P. W. Duin, Dick de Ridder y Mohamed Kamel (editores): *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, volumen 2396 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 186–194. Springer Berlin Heidelberg, 2002, ISBN 978-3-540-44011-6.
- [GMS05a] Gori, Marco, Marco Maggini y Lorenzo Sarti: *Exact and approximate graph matching using random walks*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 27(7):1100–1111, Julio 2005, ISSN 0162-8828.
- [GMS05b] Gori, Marco, Marco Maggini y Lorenzo Sarti: *The RW2 algorithm for exact graph matching*. En *Proceedings of the Third International Conference on Advances in Pattern Recognition*, volumen Part I de *ICAPR'05*, páginas 81–88, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag, ISBN 3-540-28757-4, 978-3-540-28757-5.

- [Gol08] Goldreich, Oded: *Computational Complexity: A Conceptual Perspective*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1ª edición, 2008, ISBN 0-52188-473-X.
- [Gou12] Gould, Ronald: *Graph Theory*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2012, ISBN 978-0-486-49806-5.
- [GR01] Godsil, Chris y Gordon Royle: *Algebraic graph theory*, volumen 207 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, Abril 2001, ISBN 978-0-387-95241-3.
- [Gro00] Grohe, Martin: *Isomorphism testing for embeddable graphs through definability*. En *Proceedings of the Thirty-second Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '00, páginas 63–72, New York, NY, USA, 2000. ACM, ISBN 1-58113-184-4.
- [GSH89] Gabor, Csaba P., Kenneth J. Supowit y Wen Lian Hsu: *Recognizing circle graphs in polynomial time*. J. ACM, 36(3):435–473, Julio 1989, ISSN 0004-5411.
- [GXTL10] Gao, Xinbo, Bing Xiao, Dacheng Tao y Xuelong Li: *A survey of graph edit distance*. Pattern Analysis and Applications, 13(1):113–129, 2010, ISSN 1433-7541.
- [GY05] Gross, J. L. y J. Yellen: *Graph Theory and Its Applications*. Textbooks in Mathematics. Taylor & Francis, 2ª edición, 2005, ISBN 978-1-584-88505-4.
- [Har69] Harary, Frank: *Graph theory*. Series in mathematics. Addison-Wesley, 1969.
- [HH99] Huet, Benoit y Edwin R. Hancock: *Shape recognition from large image libraries by inexact graph matching*. Pattern Recogn. Lett., 20(11-13):1259–1269, Noviembre 1999, ISSN 0167-8655.
- [HNR68] Hart, P. E., N. J. Nilsson y B. Raphael: *A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths*. Systems Science and Cybernetics, IEEE Transactions on, 4(2):100–107, Julio 1968, ISSN 0536-1567.
- [Hof82] Hoffmann, C.M.: *Group-theoretic algorithms and graph isomorphism*. Lecture notes in computer science. Springer, 1982, ISBN 9783540114932.
- [Hsu95] Hsu, W.:  *$O(M \cdot N)$  algorithms for the recognition and isomorphism problems on circular-arc graphs*. SIAM Journal on Computing, 24(3):411–439, 1995.
- [HT71] Hopcroft, John y Robert Tarjan: *A  $V^2$  algorithm for determining isomorphism of planar graphs*. Information Processing Letters, 1(1):32–34, 1971, ISSN 0020-0190.
- [HT72] Hopcroft, John y Robert Tarjan: *Isomorphism of planar graphs (working paper)*. En Miller, Raymond E., James W. Thatcher y Jean D. Bohlinger (editores): *Complexity of Computer Computations*, The IBM Research Symposia Series, páginas 131–152. Springer US, 1972, ISBN 978-1-4684-2003-6.
- [HT74] Hopcroft, John y Robert Tarjan: *Efficient planarity testing*. J. ACM, 21(4):549–568, Octubre 1974, ISSN 0004-5411.
- [HW<sup>+</sup>53] Hoffman, Alan J., Helmut W. Wielandt y cols.: *The variation of the spectrum of a normal matrix*. Duke Mathematical Journal, 20(1):37–39, Marzo 1953.
- [HW74] Hopcroft, John E. y Jin Kue Wong: *Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (preliminary report)*. En *Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '74, páginas 172–184, New York, NY, USA, 1974. ACM.
- [HY64] Hakimi, S. Louis y Stephen S. Yau: *Distance matrix of a graph and its realizability*. Quarterly of Applied Mathematics, 22:305–317, 1964.

- [Irw03] Irwin, J. David: *Análisis básico de circuitos en ingeniería*. Limusa Wiley, 2003, ISBN 978-9-681-86295-4.
- [IS12] Igelmo, Manuel y Alberto Sanfeliu: *Compact form of the pseudo-inverse matrix in the approximation of a star graph using the Conductance Electrical Model (CEM)*. En Gimel'farb, Georgy, Edwin Hancock, Atsushi Imiya, Arjan Kuijper, Mineichi Kudo, Shinichiro Omachi, Terry Windeatt y Keiji Yamada (editores): *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, volumen 7626 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 539–547. Springer, Berlin Heidelberg, 2012, ISBN 978-3-642-34165-6.
- [IS15] Igelmo, Manuel y Alberto Sanfeliu: *Filtering graphs to check isomorphism and extracting mapping by using the Conductance Electrical Model (Not yet published)*. Submitted to Pattern Recognition, 2015.
- [ISF10] Igelmo, Manuel, Alberto Sanfeliu y Miquel Ferrer: *A Conductance Electrical Model for representing and matching weighted undirected graphs*. En *Proceedings of the 2010 20th International Conference on Pattern Recognition, ICPR '10*, páginas 958–961, Washington, DC, USA, Agosto 2010. IEEE Computer Society, ISBN 978-0-7695-4109-9.
- [JH06] Justice, Derek y Alfred Hero: *A binary linear programming formulation of the graph edit distance*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 28(8):1200–1214, 2006.
- [JK07] Junttila, Tommi y Petteri Kaski: *Engineering an efficient canonical labeling tool for large and sparse graphs*. En Applegate, David, Gerth S. Brodal, Daniel Panario y Robert Sedgewick (editores): *Proceedings of the Ninth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the Fourth Workshop on Analytic Algorithms and Combinatorics*, páginas 135–149. SIAM, 2007.
- [JK11] Junttila, Tommi y Petteri Kaski: *Conflict propagation and component recursion for canonical labeling*. En Marchetti-Spaccamela, Alberto y Michael Segal (editores): *Theory and Practice of Algorithms in (Computer) Systems*, volumen 6595 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 151–162. Springer Berlin Heidelberg, 2011, ISBN 978-3-642-19753-6.
- [Joh85] Johnson, David S.: *The NP-completeness column: an ongoing guide*. Journal of Algorithms, 6(3):434–451, 1985.
- [JW03] Jain, Brijnesh J. y Fritz Wysotzki: *A novel neural network approach to solve exact and inexact graph isomorphism problems*. En *Proceedings of the 2003 Joint International Conference on Artificial Neural Networks and Neural Information Processing, ICANN/ICONIP'03*, páginas 299–306, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer-Verlag, ISBN 3-540-40408-2.
- [Kan92] Kann, Viggo: *On the approximability of the maximum common subgraph problem*. En Finkel, Alain y Matthias Jantzen (editores): *Proc. 9th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, volumen 577 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 375–388. Springer Berlin Heidelberg, 1992, ISBN 978-3-540-55210-9.
- [Kar09] Karp, Richard M.: *Reducibility among combinatorial problems*. 50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art, página 219, 2009.

- [KC02] Kosinov, Serhiy y Terry Caelli: *Inexact multisubgraph matching using graph eigenspace and clustering models*. En *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, páginas 133–142. Springer, 2002.
- [KD94] Krcmar, Martin y Atam P. Dhawan: *Application of genetic algorithms in graph matching*. En *Neural Networks, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., 1994 IEEE International Conference on*, volumen 6, páginas 3872–3876. IEEE, 1994.
- [KH89] Kittler, J. y Edwin R. Hancock: *Combining evidence in probabilistic relaxation*. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 3(1):29–51, 1989.
- [KHC04] Kukluk, Jacek P., Lawrence B. Holder y Diane J. Cook: *Algorithm and experiments in testing planar graphs for isomorphism*. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 8(3):313–356, 2004.
- [KR93] Klein, D. J. y M. Randić: *Resistance distance*. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12(1):81–95, 1993, ISSN 0259-9791.
- [Kuh55] Kuhn, Harold W.: *The hungarian method for the assignment problem*. *Naval research logistics quarterly*, 2(1-2):83–97, 1955.
- [LB62] Lekkerkerker, Cornelis G. y J. Ch. Boland: *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*. *Fundamenta Mathematicae*, 51(1):45–64, 1962.
- [LB79] Lueker, George S. y Kellogg S. Booth: *A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism*. *J. ACM*, 26(2):183–195, Abril 1979, ISSN 0004-5411.
- [Lev73] Levin, Leonid A.: *Universal sorting problems*. *Problems of Information Transmission*, 9:265–266, 1973.
- [LH01] Luo, Bin y Edwin R. Hancock: *Structural graph matching using the EM algorithm and singular value decomposition*. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 23(10):1120–1136, Octubre 2001.
- [LKT02] Lu, Chin Lung, Ming Tat Ko y Chuan Yi Tang: *Perfect edge domination and efficient edge domination in graphs*. *Discrete Applied Mathematics*, 119(3):227–250, 2002, ISSN 0166-218X.
- [LPFA09] López-Presa, José Luis y Antonio Fernández Anta: *Fast algorithm for graph isomorphism testing*. En Vahrenhold, Jan (editor): *Experimental Algorithms*, volumen 5526 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 221–232. Springer Berlin Heidelberg, 2009, ISBN 978-3-642-02010-0.
- [LPFANC11] López-Presa, José Luis, Antonio Fernández Anta y Luis Núñez Chiroque: *Conauto-2.0: Fast isomorphism testing and automorphism group computation*. arXiv preprint arXiv:1108.1060, 2011.
- [Luk82] Luks, Eugene M.: *Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time*. *Journal of Computer and System Sciences*, 25(1):42 – 65, 1982, ISSN 0022-0000.
- [Mat78] Mathon, Rudi: *Sample graphs for isomorphism testing*. *Congressus Numerantium*, 21:499–517, 1978.
- [MB95] Messmer, Bruno T y Horst Bunke: *Efficient error-tolerant subgraph isomorphism detection*. En Dori, D. y A. Bruckstein (editores): *Shape, Structure and Pattern Recognition*, páginas 231–240. World Scientific, 1995.

- [MB98] Messmer, Bruno T. y Horst Bunke: *A new algorithm for error-tolerant subgraph isomorphism detection*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 20(5):493–504, Mayo 1998, ISSN 0162-8828.
- [McK78] McKay, Brendan D.: *Computing automorphisms and canonical labellings of graphs*. En Holton, D. A. y Jennifer Seberry (editores): *Combinatorial Mathematics*, volumen 686 de *Lecture Notes in Mathematics*, páginas 223–232. Springer Berlin Heidelberg, 1978, ISBN 978-3-540-08953-7.
- [McK81] McKay, Brendan D.: *Practical graph isomorphism*. Congressus Numerantium, 30:45–87, 1981.
- [MH01] Myers, Richard y Edwin R. Hancock: *Least-commitment graph matching with genetic algorithms*. Pattern recognition, 34(2):375–394, 2001.
- [Mil80] Miller, Gary: *Isomorphism testing for graphs of bounded genus*. En *Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '80, páginas 225–235, New York, NY, USA, 1980. ACM, ISBN 0-89791-017-6.
- [Mit98] Mitchell, Melanie: *An introduction to genetic algorithms*. MIT press, 1998.
- [Miy97] Miyazaki, Takunari: *The complexity of McKay's canonical labeling algorithm*. En *Groups and Computation II*, volumen 28, páginas 239–256. Aer. Math. Soc.: Providence, RI, 1997.
- [MP14] McKay, Brendan D. y Adolfo Piperno: *Practical graph isomorphism, II*. Journal of Symbolic Computation, 60(0):94 – 112, 2014, ISSN 0747-7171.
- [Nav01] Navarro, Gonzalo: *A guided tour to approximate string matching*. ACM Comput. Surv., 33(1):31–88, Marzo 2001, ISSN 0360-0300.
- [NB04] Neuhaus, Michel y Horst Bunke: *A probabilistic approach to learning costs for graph edit distance*. En *Pattern Recognition, 2004. ICPR 2004. Proceedings of the 17th International Conference on*, volumen 3, páginas 389–393. IEEE, 2004.
- [NB05] Neuhaus, Michel y Horst Bunke: *Edit distance based kernel functions for attributed graph matching*. En *Graph-Based Representations in Pattern Recognition*, páginas 352–361. Springer, 2005.
- [NB06a] Neuhaus, Michel y Horst Bunke: *A convolution edit kernel for error-tolerant graph matching*. En *Pattern Recognition, 2006. ICPR 2006. 18th International Conference on*, volumen 4, páginas 220–223. IEEE, 2006.
- [NB06b] Neuhaus, Michel y Horst Bunke: *Edit distance-based kernel functions for structural pattern classification*. Pattern Recognition, 39(10):1852–1863, 2006.
- [NB07] Neuhaus, Michel y Horst Bunke: *Automatic learning of cost function for graph edit distance*. Information Sciences, 177(1):239–247, 2007.
- [Pap03] Papadimitriou, Christos H.: *Computational complexity*. En *Encyclopedia of Computer Science*, páginas 260–265. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, 2003, ISBN 0-470-86412-5.
- [Pat86] Patil, H. P.: *On the structure of  $k$ -trees*. Journal of Combinatorics, Information and System Sciences, 11(24):57–64, 1986.
- [Pip08] Piperno, Adolfo: *Search space contraction in canonical labeling of graphs (preliminary version)*. CoRR, abs/0804.4881, 2008.
- [QH06] Qiu, Huaijun y Edwin R. Hancock: *Graph matching and clustering using spectral partitions*. Pattern Recognition, 39(1):22–34, 2006, ISSN 0031-3203.

- [RB08] Riesen, Kaspar y Horst Bunke: *IAM graph database repository for graph based pattern recognition and machine learning*. En Vitoria Lobo, Niels, Takis Kasparis, Fabio Roli, James T. Kwok, Michael Georgiopoulos, Georgios C. Anagnostopoulos y Marco Loog (editores): *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, volumen 5342 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 287–297. Springer Berlin Heidelberg, 2008, ISBN 978-3-540-89688-3.
- [RC77] Read, Ronald C. y Derek G. Corneil: *The graph isomorphism disease*. *Journal of Graph Theory*, 1(4):339–363, 1977, ISSN 1097-0118.
- [Rey77] Reyner, S.: *An analysis of a good algorithm for the subtree problem*. *SIAM Journal on Computing*, 6(4):730–732, 1977.
- [RKH02] Robles-Kelly, Antonio y Edwin R. Hancock: *An expectation-maximisation framework for segmentation and grouping*. *Image and Vision Computing*, 20(9-10):725–738, 2002.
- [Ros74] Rose, Donald J.: *On simple characterizations of  $k$ -trees*. *Discrete Mathematics*, 7(3-4):317–322, 1974, ISSN 0012-365X.
- [RY98] Ristad, Eric Sven y Peter N. Yianilos: *Learning string-edit distance*. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 20(5):522–532, 1998.
- [SAA<sup>+</sup>02] Sanfeliu, A., R. Alquézar, J. Andrade, J. Climent, Serratosa, F. y J. Vergés: *Graph-based representations and techniques for image processing and image analysis*. *Pattern Recognition*, 35(3):639–650, 2002.
- [SD76] Schmidt, Douglas C. y Larry E. Druffel: *A fast backtracking algorithm to test directed graphs for isomorphism using distance matrices*. *J. ACM*, 23(3):433–445, Julio 1976, ISSN 0004-5411.
- [SF83] Sanfeliu, Alberto y King Sun Fu: *A distance measure between attributed relational graphs for pattern recognition*. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-13(3):353–362, Mayo 1983, ISSN 0018-9472.
- [SK99] Somervuo, Panu y Teuvo Kohonen: *Self-organizing maps and learning vector quantization for feature sequences*. *Neural Processing Letters*, 10(2):151–159, 1999.
- [Spi94] Spinrad, J.: *Recognition of circle graphs*. *Journal of Algorithms*, 16(2):264–282, 1994, ISSN 0196-6774.
- [SRSS12] Solé-Ribalta, Albert, Francesc Serratosa y Alberto Sanfeliu: *On the graph edit distance cost: Properties and applications*. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 26(05):1260004, 2012.
- [Syl78] Sylvester, James Joseph: *On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics*. *American Journal of Mathematics, Pure and Applied*, 1878.
- [TF79] Tsai, Wen Hsiang y King Sun Fu: *Error-correcting isomorphisms of attributed relational graphs for pattern analysis*. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 9(12):757–768, Diciembre 1979, ISSN 0018-9472.
- [TF83] Tsai, Wen Hsiang y King Sun Fu: *Subgraph error-correcting isomorphisms for syntactic pattern recognition*. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (1):48–62, 1983.
- [Tor04] Torán, Jacobo: *On the hardness of graph isomorphism*. *SIAM J. Comput.*, 33(5):1093–1108, Mayo 2004, ISSN 0097-5397.

- [Ull76] Ullmann, J. R.: *An algorithm for subgraph isomorphism*. Journal of the Association for Computing Machinery, 23(1):31–42, Enero 1976.
- [Ume98] Umeyama, Shinji.: *An eigendecomposition approach to weighted graph matching problems*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 10(5):695–703, Septiembre 1998, ISSN 0162-8828.
- [VS09] Voss, Sara y Jaspal Subhlok: *Performance of general graph isomorphism algorithms*. Informe técnico UH-CS-09-07, University of Houston, Houston, TX, 77204, USA, Marzo 2009.
- [Wei66] Weinberg, L.: *A simple and efficient algorithm for determining isomorphism of planar triply connected graphs*. Circuit Theory, IEEE Transactions on, 13(2):142–148, Junio 1966, ISSN 0018-9324.
- [WFH97] Wang, Yuan Kai, Kuo Chin Fan y Jorng Tzong Horng: *Genetic-based search for error-correcting graph isomorphism*. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on, 27(4):588–597, 1997.
- [WH97] Wilson, Richard C. y Edwin R. Hancock: *Structural matching by discrete relaxation*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 19(6):634–648, Junio 1997, ISSN 0162-8828.
- [Whi92] Whitney, Hassler: *A set of topological invariants for graphs*. En Eells, James y Domingo Toledo (editores): *Hassler Whitney Collected Papers*, Contemporary Mathematicians, páginas 111–115. Birkhäuser Boston, 1992, ISBN 978-1-4612-7740-8.
- [WI98] Wang, Yong y Naohiro Ishii: *A genetic algorithm and its parallelization for graph matching with similarity measures*. Artificial Life and Robotics, 2(2):68–73, 1998.
- [Wil12] Wilson, R. J.: *Introduction to graph theory*. Longman Scientific & Technical. Longman, 5ª edición, 2012.
- [WM03] Washio, Takashi y Hiroshi Motoda: *State of the art of graph-based data mining*. SIGKDD Explor. Newsl., 5(1):59–68, Julio 2003, ISSN 1931-0145.
- [WSKR01] Wallis, W. D., P. Shoubridge, M. Kraetz y D. Ray: *Graph distances using graph union*. Pattern Recognition Letters, 22(6–7):701–704, 2001, ISSN 0167-8655.
- [WYC90] Wong, A. K. C., M. You y S. C. Chan: *An algorithm for graph optimal monomorphism*. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, 20(3):628–638, 1990, ISSN 0018-9472.
- [XK01] Xu, Lei y Irwin King: *A PCA approach for fast retrieval of structural patterns in attributed graphs*. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on, 31(5):812–817, Octubre 2001, ISSN 1083-4419.



# Anexos



## Anexo A

# Grafos ponderados y no ponderados

A lo largo de este trabajo se ha insistido en la idea que, desde el punto de vista del CEM y del SM, los grafos no ponderados pueden interpretarse como grafos ponderados sin más que tomar como pesos la unidad para todas las aristas.<sup>123</sup> De lo anterior puede deducirse erróneamente que ambos objetos son idénticos. Este anexo aclarará este punto ya que desde un punto de vista formal los grafos ponderados y no ponderados son objetos diferentes y por lo tanto no ha lugar compararlos. Otro asunto diferente es que, interpretando los grafos no ponderados como ponderados, permita utilizar sin cambio alguno el mismo modelo (CEM) y el mismo algoritmo (SM) aquí presentados para ambos tipos de grafos. Se va a dejar en evidencia la diferencia entre ambos objetos a través de un ejemplo, supóngase que se proporciona la matriz de adyacencia de un grafo  $g$  como la presentada seguidamente (A.1) que sin pérdida de generalidad y sólo para fijar ideas corresponde a un grafo no dirigido.

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Si se pide dibujar el grafo  $g$  afirmando que el grafo es no ponderado el resultado que se obtiene es el mostrado en la figura A.1.

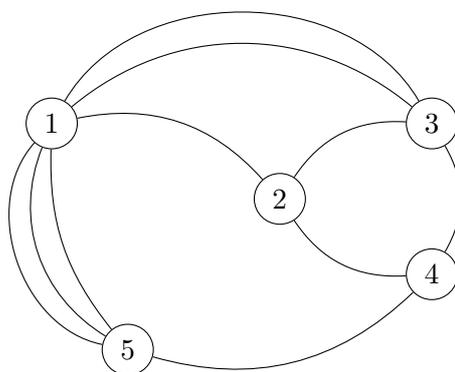


Figura A.1: Representación gráfica del grafo  $g$  con matriz de adyacencia dada por (A.1) asumiendo que es no ponderado. Compárese con la figura A.2 en donde se asume que es ponderado.

En cambio, si se pide lo mismo pero afirmando que el grafo  $g$  es ponderado entonces el resultado es el presentado en la figura A.2.

<sup>123</sup>Siempre y cuando los grafos no ponderados sean simples.

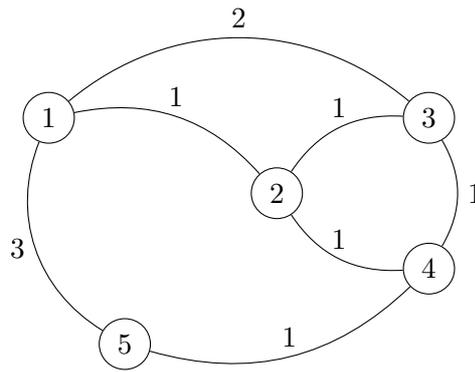


Figura A.2: Representación gráfica del grafo  $g$  con matriz de adyacencia dada por (A.1) asumiendo que es ponderado. Compárese con la figura A.1 en donde se asume que es no ponderado.

Si se observan los dos dibujos (figuras A.1 y A.2) de las dos representaciones del grafo  $g$  obtenidos a partir de la misma matriz de adyacencia (A.1) se observa que:

1. Para el caso del grafo ponderado cada arista debe ser acompañada por su peso aunque este sea la unidad, esta información forma parte de la representación gráfica del grafo. En cambio en el grafo no ponderado no es necesario adjuntar tal información porque como tal no existe (o hay multiples aristas, o hay una arista o no hay).
2. El valor en la matriz de adyacencia de la fila 1 y columna 3 es 2 y entre la fila 1 y la columna 5 es 3. Estos valores corresponden a los peso de las únicas aristas que unen los nodos 1 y 3 y el 1 con el 5 en el dibujo A.2 del grafo ponderado. En cambio, este valor corresponde a 2 aristas para el primer caso y 3 aristas para el segundo en el dibujo A.1 del grafo no ponderado.

Las dos anteriores consideraciones (sobre todo la segunda) dejan en clara y contundente evidencia que los grafos ponderados y no ponderados son objetos diferentes y, por lo tanto, no comparables.

Otro ejemplo, que da más fuerza a lo expuesto anteriormente, es el grafo  $h$  representado por la matriz de adyacencia  $A_h$  dada por la expresión (A.2).

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2,5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2,5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

En este caso el grafo sólo puede ser un grafo ponderado ya que es imposible dibujar un grafo no ponderado con dos aristas y media (véase la fila 1 y columna 3 de la matriz de adyacencia  $A_h$ ).

## Anexo B

# Estrella y matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia de un grafo de grado  $n$  en estrella ( $s$ ) no dirigido y ponderado tiene ceros en todas las posiciones menos en la fila y columna del vértice raíz (sin contar la intersección de ambas en donde habrá también un cero). El aspecto de esta matriz de adyacencia es el mostrado a continuación.

$$A_s = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \omega_1 & \cdots & \omega_{k-1} & 0 & \omega_{k+1} & \cdots & \omega_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \omega_{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad (\text{B.1})$$

En donde  $\omega_z$  es el peso asociado a la arista incidente al vértice hoja  $z$ .

Si se permutan dos filas ( $i$  y  $j$ ) y dos columnas ( $i$  y  $j$ ), por este orden o en el orden inverso, entonces por el corolario 2.2 (página 20) la matriz de adyacencia que se obtiene es la de una estrella isomorfa a la anterior en donde los vértices  $i$  y  $j$  quedan permutados y el resto inalterado. Reiterando este proceso las veces que haga falta se puede siempre obtener una matriz de adyacencia en la que

1. El nodo raíz quede en la última fila (y columna)
2. Los pesos queden ordenados crecientemente en el mismo orden que las filas (y columnas)

La matriz de adyacencia así construida tendrá el siguiente aspecto

$$A_{s_c} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & \omega'_1 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \omega'_2 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \omega'_{n-1} & & & \\ \hline \omega'_1 & \cdots & \omega'_{n-1} & 0 & & & \end{array} \right) \quad (\text{B.2})$$

en donde  $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1}$  y cada valor de  $\omega'_z$  para  $z = 1, 2, \dots, n-1$  corresponde biyectivamente con un valor de los pesos de la expresión (B.1).

Esta matriz de adyacencia que siempre existirá y que por construcción será única es la matriz de adyacencia del representante canónico ( $s_c$ ) de la clase de equivalencia de las estrellas isomorfas a la estrella  $s$ .

En la propiedad 3 (página 27) se comentó que los grafos en estrella permiten de forma inequívoca representarlos mediante un vector de  $n$  componentes que para la matriz de adyacencia dada por la expresión (B.1) dicho vector tiene el siguiente aspecto

$$(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, 0, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n) \quad (\text{B.3})$$

en donde la única coordenada nula (el grafo es conexo) corresponde al nodo raíz.

Ahora bien, si se conviene que el representante canónico es construido tal y como se ha descrito anteriormente, entonces el vector correspondiente a este representante canónico tendrá (siempre) un cero en la última coordenada y las restantes quedarán ordenadas de menor a mayor. Esta última coordenada puede ser omitida por lo que el vector asociado a un grafo en estrella que sea canónico se puede escribir con  $n - 1$  coordenadas. Así el vector correspondiente a la expresión (B.2) de un grafo en estrella canónico sería

$$(\omega'_1, \dots, \omega'_{n-1}) \quad (\text{B.4})$$

con la notación antes comentada y en donde se ha de sobreentender que el nodo raíz queda numerado con  $n$ .

Como conclusión de todo lo anterior se deduce que el isomorfismo de dos estrellas de grado  $n$  se reduce a la comparación de dos vectores de  $n - 1$  coordenadas. Además se puede obtener el vector asociado a la estrella canónica (B.4) directamente del vector (B.3) sin hacer uso para nada de las matrices de adyacencia.

## Anexo C

# Forma compacta de la pseudoinversa de $K$

Sea la matriz  $K$  de  $N$  columnas con la estructura mostrada en la expresión (6.7) de la página 75 y que por comodidad se reproduce a continuación pero con menos detalles.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Por observación de su estructura es inmediato ver que el número de filas ha de ser necesariamente

$$(N-1) + (N-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{N-1} k = N(N-1)/2 \quad (\text{C.2})$$

Con esta matriz en mente se tratará de construir la matriz denominada pseudoinversa de  $K$ , es decir,  $K^+ = (K^t K)^{-1} K^t$ . El objetivo propuesto se ha de obtener haciendo uso de la estructura peculiar de  $K$ .

Antes de enunciar el teorema, que dará solución a los requisitos anteriormente enunciados, es necesario dar dos teoremas y un lema auxiliares.

Sea  $Q$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con la siguiente forma

$$Q = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

con  $k \in \mathbb{R}$ .

Sobre esta matriz se cumplen los dos teoremas y el corolario siguientes

**Teorema C.1.** *El determinante de la matriz  $Q$  es*

$$|Q| = (k + n - 1)(k - 1)^{n-1} \quad (\text{C.4})$$

*Demostración.* Se va a obtener la matriz triangulas superior de (C.3). Para ello se suman todas las columnas menos la primera a la primera columna quedando

$$|Q| = \begin{vmatrix} k+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k+n-1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ k+n-1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k+n-1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{vmatrix} = (k+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{vmatrix} \quad (\text{C.5})$$

A todas las filas menos la primera se les resta la primera fila obteniéndose

$$|Q| = (k + n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-1 \end{vmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Como el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal queda

$$|Q| = (k + n - 1)(k - 1)^{n-1} \quad (\text{C.7})$$

Q.E.D.

**Corolario C.1.** *El determinante de  $Q$  es no singular si, y sólo si,  $k \neq 1$  y  $k \neq 1 - n$ .*

A la vista de (C.4) la demostración del anterior corolario es trivial.

**Teorema C.2.** *La matriz adjunta ( $Q^*$ ) de la matriz  $Q$  es*

$$Q^* = (k - 1)^{n-2} \begin{pmatrix} k+n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & k+n-2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & k+n-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & k+n-2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

*Demostración.* Para demostrar el teorema se dividirá en dos partes: **(i)** cálculo de los adjuntos de los elementos de la diagonal ( $Q_{ii}$ ) y **(ii)** cálculo de los adjuntos de los elementos fuera de la diagonal ( $Q_{ij}$ ).

**(i)** Cálculo de los adjuntos de los elementos de la diagonal ( $Q_{ii}$ ).

El adjunto de un elemento de la diagonal (todos los adjuntos de los elementos de la diagonal son idénticos) será un determinante de orden  $n - 1$ . Aplicando la fórmula (C.4) del teorema C.1 se obtiene la siguiente expresión

$$Q_{ii} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{vmatrix} = (k + n - 2) \cdot (k - 1)^{n-2} \quad (\text{C.9})$$

**(ii)** Cálculo de los adjuntos de los elementos fuera de la diagonal ( $Q_{ij}$ ).

Como se muestra en (C.10) para el cálculo del adjunto  $Q_{ij}$  ( $i \neq j$ ) debe ser eliminada la fila  $i$  y la columna  $j$  (resaltadas entre dos líneas) de  $Q$

$$Q = \begin{pmatrix} k & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & | & 1 & | & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & k & 1 & 1 & \cdots & 1 & | & 1 & | & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & k & 1 & \cdots & 1 & | & 1 & | & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 1 & k & \cdots & 1 & | & 1 & | & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & k & | & 1 & | & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & | & k & | & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & | & 1 & | & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & | & 1 & | & 1 & \cdots & k \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

Después de ello, es fácil ver que en el adjunto  $Q_{ij}$  (C.11) sólo aparece una fila y una columna con todos los elementos con valor uno (resaltadas entre dos líneas).

$$Q_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} k & \cdots & 1 & | & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & k & | & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & | & k & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & | & 1 & 1 & \cdots & k & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & | & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & | & 1 & \cdots & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & | & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{vmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Esta fila con todos unos se va permutando hasta llevarla a la primera fila, similarmente con la columna; por cada permutación el determinante cambiará de signo.

Si se supone que  $i < j$  entonces la columna con todos unos aparece en la posición  $i$  mientras que la fila con todos unos aparece en la posición  $j - 1$ . Por lo tanto el número de permutaciones (y consecuentes cambios de signo) de la fila y columna con todos unos será  $j - 2$  y  $i - 1$  respectivamente,

quedando el determinante afectado por  $(-1)^{i+j-3}$ . Análogo resultado se obtiene si se supone  $j < i$ . En definitiva, el coeficiente que multiplica al determinante es  $(-1)^{i+j}(-1)^{i+j-3}$  que siempre valdrá  $-1$  por ser el exponente siempre impar, en efecto

$$(-1)^{i+j}(-1)^{i+j-3} = (-1)^{2i+2j-3} = (-1)^{2(i+j)-3} = -1 \quad (\text{C.12})$$

Queda pues el adjunto de la siguiente manera

$$Q_{ij} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{vmatrix} \quad (\text{C.13})$$

El cálculo de este determinante es similar al calculado en la demostración del teorema C.1, entonces para  $i \neq j$  es

$$Q_{ij} = -(k-1)^{n-2} \quad (\text{C.14})$$

Y finalmente se obtiene

$$Q^* = (k-1)^{n-2} \begin{pmatrix} k+n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & k+n-2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & k+n-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & k+n-2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

Q.E.D.

Con estos dos teoremas y el corolario se está en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente teorema

**Teorema C.3.** *Sea  $K$  la matriz con las dimensiones y estructura mostradas en (C.1) con  $N \neq 1$  y  $N \neq 2$ , entonces su pseudoinversa es*

$$K^+ = \frac{1}{(N-1)(N-2)} [(N-1)K^t - \mathbb{1}_{N, N(N-1)/2}] \quad (\text{C.16})$$

en donde  $N$  es el número de columnas de la matriz  $K$  y  $\mathbb{1}_{N, N(N-1)/2}$  es la matriz con todo unos de  $N$  filas y  $N(N-1)/2$  columnas.

*Demostración.* Si se denota por  $M$  al resultado de  $K^t K$  se obtiene la expresión (C.17).

$$M = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 N-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 1 & N-1 & 1 & \cdots & 1 \\
 1 & 1 & N-1 & \cdots & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & 1 & 1 & \cdots & N-1
 \end{pmatrix} \tag{C.17}$$

en donde la matriz  $M$  es cuadrada de orden  $N$ .

Para calcular  $M^{-1}$  se usará que

$$M^{-1} = \frac{M^*}{|M|} \quad (\text{C.18})$$

donde  $M^*$  es la matriz de adjuntos y  $|M|$  es el determinante de  $M$  que necesariamente debe ser no nulo para que la inversa exista, pero esto queda garantizado por el corolario C.1 para  $N \neq 1$  y  $N \neq 2$ . Aplicando la fórmula (C.4) del teorema C.1 pero sustituyendo  $n$  por  $N$  y  $k$  por  $N - 1$  se obtiene

$$|M| = 2(N - 1)(N - 2)^{N-1} \quad (\text{C.19})$$

Realizando similares sustituciones en (C.8) del teorema C.2 para la matriz adjunta se obtiene lo siguiente

$$M^* = (N - 2)^{N-2} \begin{pmatrix} 2N - 3 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2N - 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 2N - 3 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2N - 3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Dividiendo la expresión (C.20) entre (C.19) se tiene

$$M^{-1} = \frac{1}{2(N - 1)(N - 2)} \begin{pmatrix} 2N - 3 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2N - 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 2N - 3 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 2N - 3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Se hace notar que  $M^{-1}$  puede ser escrita como

$$M^{-1} = \frac{1}{2(N - 1)(N - 2)} [2(N - 1)\mathbf{I}_N - \mathbf{1}_{N,N}] \quad (\text{C.22})$$

donde  $\mathbf{I}_N$  es la matriz identidad de orden  $N$  y  $\mathbf{1}_{N,N}$  es la matriz cuadrada de orden  $N$  con todos unos.

Finalmente, se tiene

$$K^+ = M^{-1}K^t = \frac{1}{2(N - 1)(N - 2)} [2(N - 1)\mathbf{I}_N - \mathbf{1}_{N,N}] K^t = \quad (\text{C.23})$$

$$= \frac{1}{2(N - 1)(N - 2)} [2(N - 1)\mathbf{I}_N K^t - \mathbf{1}_{N,N} K^t] = \quad (\text{C.24})$$

$$= \frac{1}{2(N - 1)(N - 2)} [2(N - 1)K^t - 2 \cdot \mathbf{1}_{N,N(N-1)/2}] = \quad (\text{C.25})$$

$$= \frac{1}{(N - 1)(N - 2)} [(N - 1)K^t - \mathbf{1}_{N,N(N-1)/2}] \quad (\text{C.26})$$

En el penúltimo paso (C.25) se ha tenido en cuenta que todas las columnas de  $K^t$  suman dos. Q.E.D.

## Anexo D

# Compatibilidad del CEM y del SM con el isomorfismo

Se va a demostrar que todo el proceso (CEM y SM) es compatible con el isomorfismo según se definió en el apartado 2.5.5 “Isomorfismo y transformaciones de grafos” de la página 24.

En efecto, sea un grafo  $g$  conexo, ponderado, simple y no dirigido de grado  $N$ , con cierta numeración en los nodos desde 1 hasta  $N$ . Ya se ha visto que mediante el CEM se modela este grafo mediante un circuito eléctrico resistivo puro cuyas características ya han sido enunciadas con anterioridad. Sea  $\varphi(\cdot)$  una permutación cualquiera de los nodos de  $g$ , el nuevo grafo obtenido ( $h$ ) será isomorfo a  $g$ ; de este grafo ( $h$ ) también se obtiene mediante el CEM su modelo eléctrico. De ambos circuitos se extraen sus  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes, entonces se cumple que por ser circuitos idénticos<sup>124</sup>

$$r_{eq_{i,j}}^h = r_{eq_{\varphi(i),\varphi(j)}}^g \quad (\text{D.1})$$

para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  y  $j = i + 1, 2, \dots, N$ . Por lo tanto la transformación del grafo origen en un grafo completo de resistencias equivalentes es compatible con el isomorfismo.

Se verá a continuación que también la transformación del grafo completo de resistencias equivalentes en un grafo en estrella es compatible con el isomorfismo.<sup>125</sup> Para ello se simplificará la notación tomando  $Q_1 = ((N - 1)(N - 2))^{-1}$  y  $Q_2 = (N - 1)$  con el objeto de reducir el tamaño de las expresiones que vendrán a continuación. En efecto, para el grafo  $g$  se tendrá que el valor de las resistencias de las ramas de la estrella vendrá dada por (6.60), esto es

$$r_k^g = Q_1 \left( Q_2 \sum_{j=1}^N r_{eq_{kj}}^g - \Psi_t^g \right) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.2})$$

y para el grafo  $h$  será

$$r_l^h = Q_1 \left( Q_2 \sum_{q=1}^N r_{eq_{lq}}^h - \Psi_t^h \right) \quad \text{para } l = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.3})$$

en donde se han explicitado los valores de  $\Psi^g(\cdot)$  y de  $\Psi^h(\cdot)$  de la expresión (6.60), mientras que  $\Psi_t^g$  y  $\Psi_t^h$  vienen dadas por la expresión (6.57).

Para lo que sigue es necesario hacer notar que la variable  $j$  para la expresión (D.2) y la variable  $q$  para la expresión (D.3) son variables mudas y serán sustituidas por una misma variable  $w$ . Además  $\Psi_t^g = \Psi_t^h$  por ser  $g$  y  $h$  isomorfos por lo que ambos (idénticos) valores serán denotados por  $\Psi_t$ . Con

<sup>124</sup>Véase también al respecto el apartado 4.6 “Resistencia equivalente” de la página 50.

<sup>125</sup>Véase el último párrafo del apartado 2.5.5 “Isomorfismo y transformaciones de grafos” de la página 24.

esto en mente las expresiones (D.2) y (D.3) quedan como siguen para las estrella proveniente del grafo  $g$

$$r_k^g = Q_1 \left( Q_2 \sum_{w=1}^N r_{eq_{kw}}^g - S_t \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.4})$$

y para la estrella proveniente del grafo  $h$

$$r_l^h = Q_1 \left( Q_2 \sum_{w=1}^N r_{eq_{lw}}^h - S_t \right) \text{ para } l = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.5})$$

Esta última expresión (D.5) puede ser reescrita en funcion de las resistencias equivalentes del grafo  $g$ , esto es

$$r_l^h = Q_1 \left( Q_2 \sum_{w=1}^N r_{eq_{\varphi^{-1}(l),w}}^g - S_t \right) \text{ para } l = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.6})$$

En donde se hace notar que la variable  $w$  no se ha sustituido por ser una variable muda y recorrer todos los valores enteros desde 1 hasta  $N$ . Haciendo el cambio de variable  $l = \varphi(k)$  se obtiene que

$$r_{\varphi(k)}^h = Q_1 \left( Q_2 \sum_{w=1}^N r_{eq_{kw}}^g - S_t \right) \text{ para } k = \varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(N) \quad (\text{D.7})$$

Ahora bien, el orden en que se obtienen las  $N$  ecuaciones de la expresión anterior (D.7) es indiferente por lo que esta expresión puede ser reescrita como

$$r_{\varphi(k)}^h = Q_1 \left( Q_2 \sum_{w=1}^N r_{eq_{kw}}^g - S_t \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.8})$$

Si se comparan los miembros derechos de las ecuaciones (D.4) y (D.8) fácilmente se comprueba que son idénticos luego sus miembros izquierdos son iguales, esto es

$$r_k^g = r_{\varphi(k)}^h \text{ para } k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{D.9})$$

La conclusión muy importante es que el isomorfismo entre grafos es “coherente” con el isomorfismo de sus aproximación en estrellas. De forma más rigurosa, las aproximaciones en estrellas de dos grafos isomorfos son isomorfas y además el mapeado que existe entre los grafos es el mismo que existe entre las estrellas.

## Anexo E

# Inversión parcial del SM

Como ya se expuso en el Capítulo 4 “Aspectos de interés de Teoría de Circuitos” las  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes de un circuito resistivo de  $N$  nodos se podían obtener a partir de la inversa de la MDA. Para ello, con la notación dada por la expresión (4.11) de la página 49, se utilizaba la tabla 4.1 (página 53).

En este anexo se va a invertir el proceso, es decir, dados  $N(N - 1)/2$  valores de resistencias equivalentes se van a obtener los elementos de la inversa de la MDA ( $X^{-1}$ ). Una vez obtenida esta matriz es extraordinariamente fácil caracterizar el grafo  $g$ , mediante su matriz de adyacencia, que daría este conjunto de resistencias equivalentes. Para ello se calcularía la inversa de  $X^{-1}$ , después se obtendría cualquier MIA ( $Y$ ) y finalmente, aplicando la función de paso inversa, la matriz de adyacencia. Se ha de tener en cuenta que una vez obtenida la matriz de adyacencia mediante este procedimiento puramente matemático se deberá analizar si tal matriz de adyacencia verdaderamente lo es.<sup>126</sup>

Sea el vector columna de resistencias equivalentes  $\vec{R}_{eq}$  cuyas  $N(N - 1)/2$  coordenadas son los valores de las resistencias equivalentes entre los nodos  $i$  y  $j$  para todo  $i$  y  $j$  tal que  $1 \leq i < j \leq N$ . Este vector se representa en la expresión (4.40) de la página 56 y que, por comodidad, se reproduce a continuación.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{eq} = & (r_{eq12}, r_{eq13}, r_{eq14}, r_{eq15}, \dots, r_{eq1,N-2}, r_{eq1,N-1}, r_{eq1,N}, \\ & r_{eq23}, r_{eq24}, r_{eq25}, \dots, r_{eq2,N-1}, r_{eq2,N}, \\ & r_{eq34}, \dots, r_{eq3,N}, \\ & \dots \\ & \dots \\ & r_{eqN-3,N-2}, r_{eqN-3,N-1}, r_{eqN-3,N}, \\ & r_{eqN-2,N-1}, r_{eqN-2,N}, \\ & r_{eqN-1,N})^t \quad (\Omega) \end{aligned} \tag{E.1}$$

Sea el vector columna  $\vec{\alpha}$  cuyas  $N(N - 1)/2$  coordenadas son los valores de los elementos de la inversa de la matriz definida de admitancias ( $X^{-1}$ ) tal y como se muestra en la expresión (4.11). Las coordenadas corresponden con el orden creciente de las filas de la matriz  $X_m^{-1}$  (concretamente para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ) y para cada fila en el orden creciente de sus columnas (concretamente para

---

<sup>126</sup>No todo conjunto de  $N(N - 1)/2$  valores de resistencias equivalentes escogidos al azar corresponden con un circuito de  $N$  nodos realizable.

$j = i, i + 1 \dots N - 1$ ). Este vector es el representado a continuación.

$$\vec{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \dots, \alpha_{1,N-3}, \alpha_{1,N-2}, \alpha_{1,N-1}, \\ \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \dots, \alpha_{2,N-2}, \alpha_{2,N-1}, \\ \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3,N-1}, \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_{N-3,N-3}, \alpha_{N-3,N-2}, \alpha_{N-3,N-1}, \\ \alpha_{N-2,N-2}, \alpha_{N-2,N-1}, \\ \alpha_{N-1,N-1})^t \quad (\text{E.2})$$

Con lo dicho anteriormente se tiene que las  $N(N - 1)/2$  ecuaciones que permiten obtener las  $N(N - 1)/2$  resistencias equivalentes ( $r_{eq_{ij}}$ ) de un circuito con  $N$  nodos a partir de los elementos ( $\alpha_{ij}$ ) de la matriz  $X^{-1}$  son

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{eq_{12}} = \alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22} \\ r_{eq_{13}} = \alpha_{11} - 2\alpha_{13} + \alpha_{33} \\ r_{eq_{14}} = \alpha_{11} - 2\alpha_{14} + \alpha_{44} \\ \vdots \\ r_{eq_{1,N-1}} = \alpha_{11} - 2\alpha_{1,N-1} + \alpha_{N-1,N-1} \\ r_{eq_{1,N}} = \alpha_{11} \\ r_{eq_{23}} = \alpha_{22} - 2\alpha_{23} + \alpha_{33} \\ r_{eq_{24}} = \alpha_{22} - 2\alpha_{24} + \alpha_{44} \\ r_{eq_{25}} = \alpha_{22} - 2\alpha_{25} + \alpha_{55} \\ \vdots \\ r_{eq_{2,N-1}} = \alpha_{22} - 2\alpha_{2,N-1} + \alpha_{N-1,N-1} \\ r_{eq_{2,N}} = \alpha_{22} \\ r_{eq_{34}} = \alpha_{33} - 2\alpha_{34} + \alpha_{44} \\ r_{eq_{35}} = \alpha_{33} - 2\alpha_{35} + \alpha_{55} \\ r_{eq_{36}} = \alpha_{33} - 2\alpha_{36} + \alpha_{66} \\ \vdots \\ r_{eq_{3,N-1}} = \alpha_{33} - 2\alpha_{3,N-1} + \alpha_{N-1,N-1} \\ r_{eq_{3,N}} = \alpha_{33} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_{eq_{N-2,N-1}} = \alpha_{N-2,N-2} - 2\alpha_{N-2,N-1} + \alpha_{N-1,N-1} \\ r_{eq_{N-2,N}} = \alpha_{N-2,N-2} \\ r_{eq_{N-1,N}} = \alpha_{N-1,N-1} \end{array} \right. \quad (\text{E.3})$$

en donde se ha tomado, para fijar ideas y sin pérdida de generaldad, como nodo de referencia el último nodo ( $m = N$ ).

En forma matricial se tiene

$$\vec{R}_{eq} = M_N \vec{\alpha} \quad (\text{E.4})$$

en donde  $M_N$  es una matriz cuadrada de orden  $N/(N - 1)/2$  formada con los coeficientes de (E.3) y los vectores columna son los presentados anteriormente mediante las expresiones (E.1) y (E.2).

La matriz  $M_N$  puede ser obtenida recursivamente, en efecto:

Para  $N = 2$  se tiene

$$M_2 = (1) \tag{E.5}$$

Para  $N = 3$  se tiene

$$M_3 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{E.6}$$

que puede ser reescrita como

$$M_3 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{array} \right) \tag{E.7}$$

Para  $N = 4$  se tiene

$$M_4 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

que puede ser reescrita como

$$M_4 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & M_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right) \tag{E.8}$$

Para  $N = 5$  se tiene

$$M_5 = \left( \begin{array}{cccc|ccccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{E.9}$$

que puede ser reescrita como

$$M_5 = \left( \begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & M_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array} \right) \tag{E.10}$$

Iterando el proceso se tiene para  $N > 2$  la expresión siguiente

$$M_N = \left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \right) \quad (E.11)$$

y para  $N = 2$  es  $M_2 = (1)$ . Con lo anterior se da por demostrado el siguiente teorema.

**Teorema E.1.** *La matriz  $M_N$  cuadrada de orden  $N(N-1)/2$  que satisface la ecuación  $\vec{R}_{eq} = M_N \vec{\alpha}$  viene dada por la expresión E.11 para  $N > 2$  y por  $M_2 = (1)$  para  $N = 2$ .*

El siguiente teorema permitirá siempre calcular la inversa de la matriz  $M_N$  porque nunca será singular.

**Teorema E.2.** *Para cualquier valor de  $N \geq 2$  el determinante de la matriz  $M_N$  cuadrada de dimensión  $N(N-1)/2$  dada por (E.11) para  $N > 2$  y por  $M_2 = (1)$  para  $N = 2$  es no singular.*

*Demostración.* En efecto, por inducción sobre  $N$  se tiene:

1. Para  $N = 2$  es

$$M_2 = (1) \quad (E.12)$$

cuyo determinante es

$$|M_2| = 1 \quad (E.13)$$

que, evidentemente, es no singular.

2. Se asume que el determinante de  $M_{N-1}$  es no singular, es decir, se cumple que

$$|M_{N-1}| \neq 0 \quad (E.14)$$

3. Para  $N$  se desarrolla el determinante aplicado a la matriz (E.11) por los adjuntos de las columnas  $N-1, N-2, \dots, 2, 1$  (por este orden). En las primeras  $N-2$  columnas todas las

filas menos una (con valor  $-2$ ) son cero y para la última columna todas las filas menos una (con valor  $1$ ) son cero. Esto permite escribir

$$|M_N| = (-1)^{2N-3}(-2)(-1)^{2N-5}(-2) \cdots (-1)^5(-2)(-1)^3(-2)|M_{N-1}| \quad (\text{E.15})$$

en donde hay  $N - 2$  factores de la forma  $(-1)^k(-2)$  por lo tanto se puede escribir

$$|M_N| = (-1)^{(2N-3)+(2N-5)+\cdots+5+3}(-2)^{N-2}|M_{N-1}| \quad (\text{E.16})$$

Usando que en general es

$$(2n - 1) + (2n - 3) + \cdots + 3 + 1 = n^2 \quad (\text{E.17})$$

se tiene que

$$|M_N| = (-1)^{N^2-(2N-1)-1}(-1)^{N-2}2^{N-2}|M_{N-1}| = \quad (\text{E.18})$$

$$= (-1)^{N^2-N-2}|M_{N-1}| = \quad (\text{E.19})$$

$$= (-1)^{(N-2)(N+1)}2^{N-2}|M_{N-1}| \quad (\text{E.20})$$

Como el producto de un numero par por un impar o viceversa es siempre par entonces  $(N - 2)(N + 1)$  será siempre par por lo tanto

$$|M_N| = 2^{N-2}|M_{N-1}| \quad (\text{E.21})$$

Como el coeficiente  $2^{N-2}$  es no nulo para  $N \geq 2$  y por hipótesis  $|M_{N-1}|$  es no nulo su producto será no nulo con lo que el teorema queda demostrado.

Q.E.D.

Del anterior teorema se desprende el siguiente corolario.<sup>127</sup>

**Corolario E.1.** Para cualquier valor de  $N \geq 2$  el determinante de la matriz  $M_N$  cuadrada de dimensión  $N(N - 1)/2$  dada por (E.11) para  $N > 2$  y por  $M_2 = (1)$  para  $N = 2$  es

$$|M_N| = 2^{(N-1)(N-2)/2} \quad (\text{E.22})$$

*Demostración.* En efecto, de la ecuación (E.21) se desprende iterando que

$$|M_N| = 2^{N-2}|M_{N-1}| = \quad (\text{E.23})$$

$$= 2^{N-2}2^{N-3}|M_{N-2}| = \quad (\text{E.24})$$

$$= 2^{N-2}2^{N-3}2^{N-4}|M_{N-3}| = \quad (\text{E.25})$$

$$= 2^{N-2}2^{N-3}2^{N-4} \cdots 2^2 2^1 |M_2| = \quad (\text{E.26})$$

$$= 2^{N-2}2^{N-3}2^{N-4} \cdots 2^2 2^1 = \quad (\text{E.27})$$

$$= 2^{(N-2)+(N-3)+(N-4)+\cdots+2+1} = \quad (\text{E.28})$$

$$= 2^{(N-2)(N-1)/2} \quad (\text{E.29})$$

Q.E.D.

Como conclusión de este anexo se tiene que siempre existirá la inversa de la matriz  $M_N$  dada por (E.11) para  $N > 2$  y por  $M_2 = (1)$  para  $N = 2$  que permite obtener los elementos de la matriz inversa de  $X$  a partir de las resistencias equivalentes, esto es, se tendrá que

$$\vec{\alpha} = M_N^{-1} \vec{R}_{eq} \quad (\text{E.30})$$

con  $M_N$ ,  $\vec{\alpha}$  y  $\vec{R}_{eq}$  los ya descritos con anterioridad y, además, quedando garantizado que la inversa de  $M_N$  siempre existirá.

---

<sup>127</sup>Se deja constancia de este corolario pero no será utilizado en este trabajo.



## Anexo F

# Desglose por grados de la base de datos “Web”

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
57	5	20	190
58	3	12	66
61	6	24	276
62	2	8	28
63	5	20	190
64	2	8	28
65	2	8	28
66	3	12	66
67	2	8	28
68	2	8	28
71	4	16	120
72	7	28	378
73	4	16	120
74	5	20	190
75	12	48	1 128
76	4	16	120
77	8	32	496
78	8	32	496
79	5	20	190
80	13	52	1 326
81	10	40	780
82	11	44	946
83	12	48	1 128
84	10	40	780
85	17	68	2 278
86	4	16	120
87	10	40	780
88	8	32	496
89	6	24	276
90	10	40	780
91	10	40	780
92	25	100	4 950
93	14	56	1 540

(sigue en la página siguiente)

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
94	7	28	378
95	14	56	1 540
96	12	48	1 128
97	12	48	1 128
98	11	44	946
99	9	36	630
100	13	52	1 326
101	14	56	1 540
102	11	44	946
103	14	56	1 540
104	9	36	630
105	11	44	946
106	10	40	780
107	15	60	1 770
108	18	72	2 556
109	11	44	946
110	14	56	1 540
111	9	36	630
112	10	40	780
113	12	48	1 128
114	13	52	1 326
115	8	32	496
116	11	44	946
117	17	68	2 278
118	13	52	1 326
119	18	72	2 556
120	11	44	946
121	10	40	780
122	15	60	1 770
123	11	44	946
124	7	28	378
125	17	68	2 278
126	8	32	496
127	14	56	1 540
128	13	52	1 326
129	16	64	2 016
130	7	28	378
131	13	52	1 326
132	15	60	1 770
133	14	56	1 540
134	14	56	1 540
135	11	44	946
136	11	44	946
137	10	40	780
138	15	60	1 770
139	9	36	630
140	9	36	630
141	12	48	1 128
142	7	28	378
143	14	56	1 540

(sigue en la página siguiente)

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
144	12	48	1 128
145	10	40	780
146	15	60	1 770
147	13	52	1 326
148	3	12	66
149	17	68	2 278
150	16	64	2 016
151	15	60	1 770
152	14	56	1 540
153	12	48	1 128
154	9	36	630
155	9	36	630
156	14	56	1 540
157	12	48	1 128
158	16	64	2 016
159	11	44	946
160	17	68	2 278
161	12	48	1 128
162	20	80	3 160
163	7	28	378
164	16	64	2 016
165	11	44	946
166	13	52	1 326
167	17	68	2 278
168	12	48	1 128
169	18	72	2 556
170	9	36	630
171	13	52	1 326
172	22	88	3 828
173	19	76	2 850
174	10	40	780
175	9	36	630
176	13	52	1 326
177	13	52	1 326
178	19	76	2 850
179	13	52	1 326
180	13	52	1 326
181	11	44	946
182	8	32	496
183	14	56	1 540
184	9	36	630
185	9	36	630
186	11	44	946
187	13	52	1 326
188	14	56	1 540
189	6	24	276
190	14	56	1 540
191	9	36	630
192	13	52	1 326
193	13	52	1 326

(sigue en la página siguiente)

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
194	4	16	120
195	10	40	780
196	14	56	1 540
197	8	32	496
198	13	52	1 326
199	11	44	946
200	8	32	496
201	15	60	1 770
202	8	32	496
203	9	36	630
204	4	16	120
205	10	40	780
206	8	32	496
207	9	36	630
208	14	56	1 540
209	13	52	1 326
210	8	32	496
211	11	44	946
212	10	40	780
213	9	36	630
214	8	32	496
215	8	32	496
216	2	8	28
217	6	24	276
218	5	20	190
219	15	60	1 770
220	8	32	496
221	6	24	276
222	13	52	1 326
223	9	36	630
224	10	40	780
225	4	16	120
226	9	36	630
227	6	24	276
228	4	16	120
229	8	32	496
230	4	16	120
231	5	20	190
232	9	36	630
233	7	28	378
234	8	32	496
235	5	20	190
236	3	12	66
237	5	20	190
238	2	8	28
239	11	44	946
240	7	28	378
241	5	20	190
242	6	24	276
243	5	20	190

(sigue en la página siguiente)

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
244	6	24	276
245	3	12	66
246	5	20	190
247	4	16	120
248	8	32	496
249	4	16	120
250	6	24	276
251	4	16	120
252	10	40	780
253	7	28	378
254	7	28	378
255	4	16	120
256	5	20	190
257	6	24	276
258	2	8	28
259	2	8	28
260	2	8	28
261	3	12	66
262	4	16	120
263	5	20	190
264	4	16	120
265	7	28	378
266	4	16	120
267	3	12	66
268	3	12	66
269	4	16	120
270	2	8	28
271	2	8	28
272	3	12	66
273	6	24	276
274	6	24	276
275	5	20	190
277	6	24	276
278	5	20	190
279	3	12	66
280	3	12	66
282	3	12	66
283	2	8	28
284	2	8	28
285	2	8	28
286	4	16	120
287	3	12	66
288	2	8	28
289	2	8	28
291	2	8	28
292	3	12	66
293	3	12	66
294	3	12	66
295	3	12	66
296	3	12	66

(sigue en la página siguiente)

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
298	3	12	66
300	3	12	66
302	3	12	66
303	6	24	276
304	2	8	28
306	3	12	66
307	3	12	66
308	5	20	190
309	3	12	66
310	3	12	66
311	2	8	28
312	2	8	28
315	3	12	66
319	4	16	120
322	2	8	28
324	2	8	28
325	3	12	66
331	2	8	28
332	2	8	28
334	3	12	66
335	2	8	28
336	2	8	28
337	2	8	28
340	3	12	66
341	4	16	120
344	2	8	28
350	6	24	276
351	2	8	28
353	2	8	28
357	2	8	28
360	2	8	28
361	4	16	120
365	2	8	28
367	4	16	120
369	2	8	28
371	4	16	120
372	4	16	120
373	3	12	66
379	2	8	28
381	3	12	66
383	2	8	28
387	3	12	66
389	2	8	28
391	3	12	66
393	2	8	28
398	2	8	28
400	2	8	28
402	2	8	28
403	2	8	28
415	2	8	28

(sigue en la página siguiente)

Grado	Grafos	Total grafos ( $\times 4$ )	Emparejamientos
416	2	8	28
423	2	8	28
428	2	8	28
446	2	8	28
464	2	8	28
492	2	8	28
577	2	8	28
635	2	8	28
Total	2 239	8 956	189 626

Tabla F.1: Desglose por grados de la base de datos “Web”.



## Anexo G

# Inversión total del SM

Como ya se ha comentado en más de una ocasión el punto débil del SM es la aparición de valores repetidos en las ramas de la estrella sin que el grafo presente automorfismos. Sería muy interesante invertir el proceso a fin de estudiar bajo que condiciones este fenómeno se presenta. Algunas de las fases del SM sí que son invertibles, una de ellas se comenta en el Anexo E “Inversión parcial del SM” (página 145) que describe como encontrar la inversa de una MDA a partir de las resistencias equivalentes. Pero una de las fases no es invertible, es el proceso por el cual se obtienen las resistencias de la estrella a partir de las resistencias equivalentes, por lo tanto, globalmente, el SM no se puede invertir. Desgraciadamente, al no poder invertir una de las fases, el estudio anteriormente apuntado nunca podrá ser llevado a cabo, al menos por esta vía. A continuación se razonará y justificará porque la inversa no existe.

Desde el punto de vista del álgebra lineal el paso de las resistencias equivalentes al valor de las resistencias de las ramas de la estrella es una transformación que será denominada por  $T$

$$T: \mathbb{R}^{N(N-1)/2} \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (\text{G.1})$$

Existe una matriz (ya comentada en su momento) asociada a esta transformación que permite el calculo de las imagenes de la transformación  $T$ , siendo

$$\vec{R} = K^+ \vec{R}_{eq} \quad (\text{G.2})$$

Esta transformación para  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  cumple

$$T(\alpha \vec{R}_{eq1} + \beta \vec{R}_{eq2}) = \alpha T(\vec{R}_{eq1}) + \beta T(\vec{R}_{eq2}) \quad (\text{G.3})$$

y por lo tanto es lineal, como fácilmente se puede comprobar utilizando la matriz  $K^+$  asociada a la transformación ya que para  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se verifica que

$$K^+(\alpha \vec{R}_{eq1} + \beta \vec{R}_{eq2}) = \alpha K^+ \vec{R}_{eq1} + \beta K^+ \vec{R}_{eq2} \quad (\text{G.4})$$

utilizando propiedades muy conocidas de matrices.

Como ya se ha dicho sería muy interesante y útil encontrar la transformación inversa de  $T$  pero primero se ha de demostrar que esta transformación inversa existe (o no existe) y, si procede, es única. En general en una transformación lineal se define una inversa ( $S_x$ ) como aquella que compuesta con  $T$  da la identidad. Como la composición no es conmutativa pueden existir dos inversas por la izquierda ( $S_l(T(\vec{R}_{eq})) = \vec{R}_{eq}$ ) y por la derecha ( $T(S_r(\vec{R})) = \vec{R}$ ) y además pueden,

de forma independientemente, no ser únicas o no existir. La condición necesaria y suficiente para que la inversa exista, coincida por la izquierda y por la derecha y sea única es que  $T$  sea biyectiva. Por lo tanto la existencia y unicidad de la inversa de  $T$  equivale a la biyectividad de  $T$ .

Existen dos condiciones independientes que indican cuando una transformación lineal es biyectiva, esta son

$$\dim(\text{Img}(T)) = \dim(\mathbb{R}^{N(N-1)/2}) = N(N-1)/2 \quad (\text{G.5})$$

y que

$$\dim(\text{Ker}(T)) = 0 \quad (\text{G.6})$$

Teniendo en cuenta que  $\text{Img}(T) = \text{rang}(K^+) = N$  es claro que la primera condición (G.5) sólo se cumple para  $N = 3$  (caso en que  $K^+$  es cuadrada), en el resto de los casos es siempre  $N(N-1)/2 > N$ .

Este resultado se puede confirmar utilizando la segunda condición (G.6), para ello se usará que

$$\dim(\mathbb{R}^{N(N-1)/2}) = \dim(\text{Img}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) \quad (\text{G.7})$$

teniendo presente que

$$\dim(\mathbb{R}^{N(N-1)/2}) = N(N-1)/2 \quad (\text{G.8})$$

y que

$$\dim(\text{Img}(T)) = \text{rang}(K^+) = N \quad (\text{G.9})$$

queda

$$\dim(\text{Ker}(T)) = N(N-1)/2 - N \quad (\text{G.10})$$

obligando a la última expresión a que sea cero (condición de biyectividad) se tiene

$$N^2 = 3N \quad (\text{G.11})$$

que nada más se cumple para  $N = 3$ .

Se concluye, de todo lo anterior, que la inversa de  $T$  no existe excepto para el caso particular pero trivial de  $N = 3$  en donde, de forma no casual, la matriz  $K^+$  es cuadrada. La traducción al SM es que dado los valores de las ramas de las estrellas es imposible obtener la resistencias equivalentes que las produjeron.

No obstante la conclusión anterior, se deja constancia de que existe una inversa por la derecha de la transformación lineal  $T$ . Para ello se usará la siguiente propiedad de la pseudoinversa

$$K^+K = \mathbb{I}_N \quad (\text{G.12})$$

en donde  $\mathbb{I}_N$  es la matriz identidad de orden  $N$ ; se hace notar que conmutando las dos matrices no se obtiene  $\mathbb{I}_{N(N-1)/2}$ , existen multitud de ejemplos que así lo corroboran. Por otro lado, la transformación inversa por la derecha debe cumplir

$$\vec{R}_{eq} = S_r \vec{R} \quad (\text{G.13})$$

siendo necesariamente  $S_r$  una matriz de dimensión  $N(N-1)/2 \times N$ .

Multiplicando por la izquierda ambos miembros de la anterior expresión por  $K^+$  se tiene

$$K^+ \vec{R}_{eq} = K^+ S_r \vec{R} \quad (\text{G.14})$$

siendo fácilmente constatable que las dimensiones son consistentes para la multiplicación y la igualdad de matrices, siendo estas, en el mismo orden que aparecen en la expresión,  $N \times N(N-1)/2$  y

$N(N - 1)/2 \times 1$  para el miembro izquierdo y  $N \times N(N - 1)/2$ ,  $N(N - 1)/2 \times N$  y  $N \times 1$  para el miembro derecho.

En la última expresión es evidente que  $K^+ \vec{R}_{eq}$  es  $\vec{R}$  y por lo tanto

$$K^+ S_r = \mathbb{I}_N \tag{G.15}$$

Finalmente, utilizando la propiedad anteriormente enunciada para una pseudoinversa, hay que admitir que

$$S_r = K \tag{G.16}$$



# Índice alfabético

- árbol, 17, 27, 38, 40
  - $k$ -árbol, 35
  - parcial, 35
  - con raíz, 33
  - de búsqueda, 35–39, 42, 43
  - sin raíz, 33
- acíclico, 17
- admitancia, 45
- algoritmo
  - $A^*$ , 39, 42
  - basado en kernels, 43
  - basado en programación lineal binaria, 43
  - basado en SOM, 42
  - de esperanza-maximización, 40
  - de Floyd, 37
  - de la pseudoinversa, 83
  - de Monte Carlo, 34
  - de Ullmann, 36
  - EM, 40
  - genético, 43
  - heurístico, 35, 39
  - inicialización de la pseudoinversa, 78
  - Las Vegas, 34
  - probabilístico, 43
  - RW2, 35
  - SD, 37
  - validación del mapeado, 90
  - VF, 38
  - VF2, 38
- arco
  - etiquetado, 1
  - incidente, 9
  - número máximo, 8
  - secuencia, 11
- arista, 8
  - de corte, 13
  - incidente, 9
  - número máximo, 8
  - punto, 13
- automorfismo, 24, 39, 90, 97–100, 105, 106, 111, 159
  - en estrellas, 27
  - impropio, 24
  - subgrupo, 24
  - trivial, 24
- base de datos de grafos
  - “Letter”, 103
  - “Web”, 105
- bliss, 38
- bosque, 17
- bucle, 9
- cadena, 11
  - de Markov, 9
  - de símbolos, 41–43
- camino, 11, 70
  - abierto, 12
  - aleatorio, 1, 35
  - cerrado, 12
  - de edición, 42
  - distancia, 11
    - mínima, 11
  - euleriano, 11
  - hamiltoniano, 11
  - inverso, 12
  - simple, 11
- CEM, 59
  - reiteración, 115
- ciclo, 12, 34
  - euleriano, 12, 17
  - hamiltoniano, 12, 17
- circuito (en grafos), 12
- clases de equivalencia, 22
- clique, 31
- co-resistencia, 95
- columnas
  - cuasiiguales, 112
- componentes conexas, 12
- composición de permutaciones, 21
- conauto, 38
- conductancia, 45
- conjunto cociente, 22
- correspondencia, 8
- cuasiiguales, 112
- digrafo, 10
- dispositivo

- de parámetros concentrados, 45
  - pasivo, 45
- distancia, 11
  - de edición, 41
- emparejamiento
  - exacto, 33
  - inexacto, 39
    - óptimo, 39
    - subóptimo, 39
- emparejamiento de grafos, 31
- estrella, 25
  - matriz de adyacencia, 135
  - representante canónico, 136
- experimentos
  - “FP”, 105
  - “Letter”, 103
  - “Web”, 105
  - “acierto”, 103
  - “imposible”, 105
  - “pánico”, 105
  - control de calidad, 105
  - eficiencia, 103
- familia de conjuntos, 22
- filas
  - cuasiiguales, 112
- función de paso, 61–64, 67, 91, 145
- grado, 10
  - entrante, 10
  - saliente, 10
- grafo
  - $k$ -partito, 17
  - $k$ -regular, 17
  - arco, 8
  - arista, 8
  - asociado, 10
  - automorfismo, 24
    - impropio, 24
    - subgrupo, 24
    - trivial, 24
  - bipartito, 17
    - completo, 17
  - cadena, 11
  - camino, 11
    - distancia, 11
  - circular, 34
  - completo, 17
  - componente conexa, 11
  - conexo, 11, 12
  - débilmente conexo, 12
  - de género acotado, 34
  - de intervalos, 34
  - de valencia acotada, 34
  - definición, 7, 8
  - densidad, 103
  - dirigido, 8, 10, 115
  - estrella, 25
  - euleriano, 17
  - fuertemente conexo, 12
  - grado, 8
  - hamiltoniano, 17
  - igualdad, 18
  - infinito, 9
  - mixto, 10
  - no conexo, 11
  - no dirigido, 8, 10
  - no ponderado, 10, 133
    - isomorfismo, 18
  - nodo, 8
  - nudo, 8
  - nulo, 17
  - orientado, 10
  - pesos, 10
  - plano, 17, 33, 40
  - ponderado, 10, 133
    - isomorfismo, 18
  - rama, 8
  - regular, 17
  - representación gráfica, 10
  - simple, 9
  - tamaño, 8, 23
  - trivial, 17
  - unitario, 17
  - vértice, 8
  - vacío, 13, 17
- grafos
  - co-resistencia, 95
  - emparejamiento, 31
    - exacto, 31, 33
    - inexacto, 31, 39
    - inexacto y óptimo, 39, 113
    - inexacto y subóptimo, 39
  - igualdad, 17
  - isomorfismo, 17
  - notables, 16
  - perturbados, 115
  - transformación, 24
    - compatibilidad, 25
- hipergrafo, 9
- hoja, 8, 25
- homomorfismo, 31
- impedancia, 45

- invariante, 23
- inversión
  - parcial del SM, 145
  - total del SM, 159
- isomorfismo
  - compatibilidad, 25, 143
  - de grafos, 17
    - no ponderados, 18
    - ponderados, 18
  - invariante, 23
    - componentes conexas, 24
    - conjunto de grados, 24
    - conjunto de pesos, 24
    - determinante, 23
    - espectro, 24
    - rango, 23
    - tamaño, 23
  - matriz de adyacencia, 18
  - relación de equivalencia, 20
    - clases de equivalencia, 22
    - conjunto cociente, 22
    - representante, 22
- laplaciana, 16
- lazo, 9, 17
- máximo común subgrafo, 31
- Método
  - de las mallas, 49
  - de los nodos, 49
- métodos espectrales, 40
- métrica, 11
- mapa, 17
- mapeado, 19
- matrices
  - congruentes, 20
  - equivalentes, 20
  - semejantes, 20
- matriz
  - $X$ , 48
  - $X_m$ , 48
  - $Y$ , 47
  - $Z$ , 47
  - de adyacencia, 14
    - de conductancias, 46
    - de resistencias, 46
    - determinante, 23
    - rango, 23
  - de incidencia, 15
  - de permutación, 18
    - propiedades, 18
  - definida
    - de admitancias, 48
    - de impedancias, 48
  - identidad, 20
  - indefinida
    - de admitancias, 47
    - de impedancias, 47
  - ortogonal, 19
- MDA, 47, 48
- MDI, 48
- MIA, 47
- multiarcos, 9
- multiaristas, 9
- multigrafo, 9
- nauty, 38
- nodo
  - de masa, 49
  - incidente, 9
- par ordenado, 9
- pares ordenados, 7
- partición, 12, 22
- peso
  - unitario, 11
- producto cartesiano, 7
- propiedad transitiva, 21
  - encadenada, 22
- pseudografo, 17
- pseudoinversa
  - forma compacta, 137
- reactancia, 45
- recorrido, 11
- red, 11, 13
- relación de equivalencia, 12, 20
  - clases de equivalencia, 22
  - conjunto cociente, 22
  - estrella, 28
  - propiedad
    - reflexiva, 12, 20
    - simétrica, 12, 21
    - transitiva, 12, 21
  - representante, 22
    - canónico, 22, 116
- representante, 22
  - canónico, 22
- resistencia, 45
  - equivalente, 50
- resistencia equivalente
  - medición, 111
- resistor, 46
- saucy, 38
- SM, 67
  - inversión parcial, 145

- inversión total, 159
- reiteración, 115
- subgrafo, 9
  - inducido, 9
  - isomorfismo, 31
  - recubridor, 10
- susceptancia, 45
  
- tamaño, 23
- teoría
  - de Cantor, 7
  - de circuitos, 45
  - de grafos, 7
  - de grupos, 38
- topología, 11
- traces, 38
- transformación
  - de grafos, 24
  
- vértice
  - aislado, 8, 13
  - central, 25
  - de articulación, 13
  - de corte, 13
  - hoja, 8, 25
  - incidente, 9
  - raíz, 25
  - secuencia, 11
- valencia, 10
  - entrante, 10
  - saliente, 10