UNIVERSITAT JAUME I

Departament de Matemàtiques

APROXIMACIÓN POR SERIES EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

TESIS DOCTORAL presentada por Esptiben Rojas Bernilla, para optar el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, elaborada bajo la dirección del Dr. D. Salvador Hernández Muñoz de la Universidad Jaume I, y de la Dra. D(a). María Teresa Gassó Matoses de la Universidad Politécnica de Valencia.

Castellón, 22 de marzo de 2010

D. SALVADOR HERNÁNDEZ MUÑOZ, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Jaume I y D(a). MARÍA TERESA GASSÓ MATOSES, Profesora Titular de Universidad de la Universidad Politécnica de Valencia.

CERTIFICAMOS: Que la presente Tesis *Aproximación por Series en Espacios de Funciones Continuas*, ha sido elaborada bajo nuestra dirección por D. Esptiben Rojas Bernilla, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Jaume I, y constituye su tesis para optar el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste, presento la referida tesis, firmando el presente certificado.

Salvador Hernández Muñoz — María Teresa Gassó Matoses

Castellón, 22 de marzo de 2010

Agradecimientos

La realización de esta Memoria ha sido posible gracias a la ayuda y el apoyo constante de los Directores de la misma, Dr. D. Salvador Hernández Muñoz y la Dra. D(a) María Teresa Gassó Matoses. Su rigor científico y dedicación me han enriquecido a nivel profesional y humano, sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Mi agradecimiento a cada uno de los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad Jaume I, por haberme acogido en su seno y darme la oportunidad de poder cumplir mi sueño.

A mis hijos Joaquín y Karina, por
estar siempre junto a mi.
A Nancy que ha venido a iluminar
mi camino de amor y esperanza.

Introducción

Dado un espacio topológico X, se denota por $C(X)$ la subálgebra de las funciones continuas sobre X con valores reales, y por $C^*(X)$ la subálgebra de $C(X)$ formada por las funciones acotadas.

El conjunto de los números complejos, reales, enteros y naturales será denotados por C, R, Z y N, respectivamente.

Un problema general que se estudia en esta memoria es el siguiente : Dada una familia $\Im$ de funciones con valores reales sobre un conjunto X, sastifaciendo ciertas condiciones algebraicas, hallar condiciones necesarias y suficientes para que una función $f \in C(X)$ se encuentre en la clausura uniforme de $\Im$.

Los anillos de funciones continuas con valores reales están dotados de una notable riqueza estructural. En efecto, en ellos se solapan aspectos algebraicos (derivados de las operaciones con funciones), aspectos topológicos (derivados de la topología del espacio base), los relativos a la estructura de orden, así como los relacionados con el análisis funcional (derivados de la topología del anillo).

M. H. Stone (1937), e independientemente Gelfand y Kolmogoroff (1939) inician el estudio de los anillos de funciones continuas. Haciendo uso del supremo, Stone estudia el conjunto $C^*(X)$ de las funciones continuas y acotadas sobre un espacio topológico X. Posteriormente, Gelfand y Kolmogoroff mostraron que algunos de los resultados obtenidos por Stone se podían probar sin hacer uso de la métrica, lo que permitió su generalización a $C(X)$.

Fue Hewitt quien en su trabajo de 1948, *Ring of real-valued continuous functions*, profundiza en el estudio de los anillos de funciones continuas (no acotadas), abriendo el camino para posteriores estudios en el tema.

En la obra *Ring of continuous functions* de L. Gillman y M. Jerison, aparecida en 1960, se hace una excelente recopilación de los resultados obtenidos hasta ese momento en relación con los anillos de funciones continuas con valores reales.

Durante los últimos 20 años en el estudio de los anillos de funciones continuas se ha hecho especialmente énfasis en los aspectos topológicos. En general, para el caso en que el espacio topológico X sea no compacto, no existe un método general conocido de generar directamente $C(X)$ a partir de una familia de funciones que contenga a las constantes y separe puntos, puesto que no se conoce una caracterización de la estructura algebraica interna de $C(X)$. Sin embargo, distintos autores han contribuido e intentado caracterizar esta aproximación uniforme.

El objetivo fundamental de la memoria es abordar el problema planteado anteriormente mediante el método de las series infinitas. Para ello, primeramente hacemos un estudio exhaustivo de la aproximación uniforme en espacios de funciones continuas con valores reales para funciones no necesariamente acotadas. Fundamentalmente nos hemos basado en los resultados obtenidos por J. Blasco - A. Moltó (véase [5, 6, 7, 8]) y F. Montalvo - M. I. Garrido (véase [34]) cuyos aportes han sido muy significativos. A continuación pasamos a tratar el tema central de esta memoria, introduciendo un nuevo método topológico para aproximar funciones con valores reales y vectoriales, mediante la técnica de las series infinitas de funciones. En particular presentamos algunas condiciones suficientes para representar cada función continua en un espacio topológico X como la suma de una serie infinita de funciones perteneciente a una determinada subfamilia de $C(X)$. Abordaremos el caso cuando el espacio topológico X es localmente compacto, paracompacto o un espacio de Lindelöf. Posteriormente, extendemos estos resultados a funciones con valores vectoriales.

Pasemos a describir el contenido de la memoria, que está dividido en tres Capítulos.

1. **El primer Capítulo**

   Este Capítulo contiene una recopilación de resultados, que hasta 1990 fueron estudiados y sistematizados por F. Montalvo y M. I. Garrido (véase [34]), junto con artículos de investigación más recientes. Se incluirán algunas demostraciones sencillas de los casos más relevantes para el resto de la memoria.

El Capítulo está dividido en tres secciones.

La Sección 1.1 trata el famoso Teorema de Stone - Weierstrass para subálgebras. En 1885 K.Weierstrass prueba que cualquier función continua con valores reales definida sobre un intervalo cerrado y acotado de la recta puede ser aproximado uniformemente por un polinomio. Esto significa que para cada función continua $f : [a, b] \longrightarrow R$, y para todo $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p(x)$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in [a, b].$$

En 1937 M. H. Stone generaliza el Teorema de Weierstrass de la siguiente manera:

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea G la familia de funciones continuas con valores reales sobre X que separa puntos de X (es decir, para cada par de puntos distintos $s \neq t$ de X, entonces existe una función $g \in G$ tal que $g(s) \neq g(t)$). Si A denota el álgebra lineal generada por G (es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de funciones con valores reales del tipo

$$h(x) = g_1(x)^{n_1} \cdot \ldots \cdot g_m(x)^{n_m}, \quad \forall x \in X$$

donde $g_i \in G$ y $n_i > 0$ son enteros) y las constantes, entonces M. H. Stone prueba que cada función continua de valores reales f sobre X puede ser aproximada por A. Es decir, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un elemento $p \in A$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall\, x \in X.$$

Aquí presentamos una versión de este resultado para subálgebras y retículos.

La Sección 1.2 se dedica al estudio de la aproximación uniforme para $C^*(X)$ de funciones continuas y acotadas en donde X no es necesariamente un espacio topológico compacto. Se aprovecha el isomorfismo existente entre $C(X)$ y $C(\beta X)$ (βX es la compactación de Stone-Cěch de X). Las distintas condiciones que ahora se obtienen para que una función esté en la clausura uniforme de un retículo, subálgebra o espacio vectorial, se expresan en términos de ciertas formas de separación de conjuntos de Lebesgue o de conjuntos cero del espacio, y no como sucedía en el caso compacto, con separación de puntos. Así damos, en términos de separación de conjuntos de Lebesgue y mediante el paso a βX, una caracterización de la clausura uniforme de un álgebra de funciones continuas y acotadas.

En las generalizaciones del Teorema de Stone - Weierstrass dadas hasta ahora se observa que la clave de las mismas radica en la sustitución de la *separación de puntos* del caso compacto por la *separación de conjuntos cero*. Hewitt (véase [24]) prueba además, que si X no es compacto entonces tal sustitución no puede evitarse.

Teorema (Hewitt) *Si X es un espacio topológico no compacto, existe una subálgebra de $C^*(X)$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes, pero que no es uniformemente densa en $C^*(X)$.*

Finalmente, para el caso de espacios vectoriales, nos hemos orientado de los resultados obtenidos por J. Blasco - M. Moltó en [5].

En la sección 1.3 estudiamos la aproximación uniforme de $C(X)$, el anillo de las funciones continuas no necesariamente acotadas, que es el caso más general y en el que existen aún problemas abiertos que abordar. Siguiendo un estudio paralelo al de J. Blasco - M. Moltó (véase [5]), F. Montalvo - M. I. Garrido han generalizado estas técnicas de aproximación (véase [29, 30, 34]), obteniendo una condición necesaria y suficiente de densidad uniforme para espacios vectoriales de funciones reales continuas.

2. **El segundo Capítulo**

Este Capítulo está dedicado al estudio de la representación y aproximación de funciones por series de funciones continuas, donde hemos generando un nuevo método topológico de aproximación de funciones, el cual es el mayor aporte de esta memoria. En particular, lo estudiamos en los espacios paracompactos, localmente compactos y de Lindelöff.

La sección 2.1 se fundamenta en el concepto de series localmente convergentes.

Dada una serie $\sum_{i \in I} f_i$ de funciones continuas sobre un espacio topológico X, se dice que es **localmente convergente** cuando, para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que la serie converge uniformemente sobre U. Este es el concepto más importante del Capítulo.

Denotamos por $\sum\langle E\rangle$ al conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ tal que $f = \sum_{i \in I} f_i$ es localmente convergente con $f_i \in E$ para cada $i \in I$, siendo E un subconjunto de $C(X)$.

Proporcionaremos condiciones suficientes para que una función $f \in C(X)$ esté en $\overline{\sum\langle E\rangle}$ y para que $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ esté contenido en $\overline{\sum\langle E\rangle}$. Finalmente, como aplicación obtenemos una demostración del Teorema de Stone - Weierstrass utilizando las técnicas introducidas en este Capítulo.

En la sección 2.2 se demuestra una extensión del Teorema de Stone - Weierstrass para espacios de Lindelöff localmente compactos y posteriormente para espacios paracompactos localmente compactos. También se aplica este resultado para un espacio $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ paracompacto localmente compacto, siendo $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de espacios topológicos.

En la sección 2.3 se introduce el concepto de S**- separación local de conjuntos cero,** que nos permitirá entre otros resultados demostrar que si X es un espacio de Lindelöff y $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ que contiene las constantes y separa localmente conjuntos cero, entonces

$C(X) = \overline{\sum\langle\mathcal{A}\rangle}$.

3. **El tercer Capítulo**

Este Capítulo está dedicado al estudio de la aproximación por series de funciones continuas cuyo rango es un espacio vectorial normado E.

En el Capítulo II resultó fundamental el concepto de series $\sum_{i\in I} f_i$ localmente convergentes, donde $f_i \in C(X)$, para obtener resultados de aproximación. En este Capítulo este concepto será extendido a un conjunto de funciones continuas vectoriales.

En la sección 3.1 introducimos los siguientes conceptos básicos.

a) Sean $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ y $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$. Definimos $\sum\langle\mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle$ como el conjunto de series localmente convergentes $\sum_{i\in I} h_i G_i$, donde $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{G}$ y $\{h_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$, siendo $\{sop\ h_i\}_{i\in I}$ una familia localmente finita de conjuntos sobre X.

b) Sean $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ y $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$. Diremos que $\mathcal{A}$ **refina** $\mathcal{G}$ cuando para cada recubrimiento abierto de la forma $\mathcal{U}_\epsilon = \{\mathcal{U}_\epsilon(S)\}_{S\in\mathcal{A}(X)}$ de X, donde $\mathcal{U}_\epsilon(S) = G_S^{-1}(B_\epsilon(G_S(S)))$ para algún $G_S \in \mathcal{G}$, existe una partición de la unidad localmente finita $\{h_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$ que está subordinada a $\mathcal{U}_\epsilon$.

En la sección 3.2, para $C^*(X, E)$ el conjunto de funciones continuas de X en E con rango precompacto, se obtienen resultados semejantes a los obtenidos previamente para funciones con valores reales.

Sean $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ y $F \in C^*(X, E)$. Se dice que $\mathcal{A}$ **separa débilmente** a F cuando para toda $B(a, r) \subseteq E$ y $\delta > 0$, existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que:

a) $0 \leq f \leq 1$,

b) $f(F^{-1}(B(a, r))) = 1 \quad$ y $\quad f(X \setminus F^{-1}(B(a, r + \delta))) = 0$.

Con ello se demuestra el siguiente resultado.

Teorema Si $\mathcal{A}$ separa débilmente a $F \in C^*(X, E)$ y $\mathcal{G} \subseteq C(X, E)$ es una subálgebra que contiene a las constante, entonces $\sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F.

En la sección 3.3 buscamos aproximar funciones de rango paracompacto y de rango separable. Para ello se definen los siguientes conceptos.

a) Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$. Diremos que $\mathcal{A}$ Z**- separa a** $F \in C(X, E)$ cuando $\forall\, U$ abierto de E, existe $h \in \mathcal{A}$ tal que

$$h \geq 0 \quad \text{y} \quad Z(h) = \{x \in X : h(x) = 0\} = X \setminus F^{-1}(U).$$

b) Se dice que $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ **separa totalmente** a $F \in C(X, E)$ cuando para toda $B(a, r) \subseteq E$, y para cada $\epsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que

1) $f(F^{-1}(B(a, r))) \subseteq (0, 1]$ y

2) $f(X \setminus F^{-1}(B(a, r + \epsilon))) = 0$.

El conjunto de todas las funciones continuas de rango paracompacto se denota por $\widetilde{C(X,E)}$ y el conjunto de todas las funciones continuas de rango separable se denota por $\widehat{C(X,E)}$.

Se demuestran los siguientes resultados.

Teorema Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ tal que $\mathcal{A}$ Z- separa a $F \in \widetilde{C(X,E)}$. Si $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ es una subálgebra que contiene a las constantes, entonces $\sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F.

Teorema Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ uniformemente cerrada por inversos. Si $\mathcal{G} \subseteq \widehat{C(X,E)}$, $F \in \widehat{C(X,E)}$ y $\mathcal{A}$ separa totalmente a F, entonces

$$d(F, \sum\langle\mathcal{F},\mathcal{G}\rangle) \leq \sup\{d_S(F,\mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}.$$

Índice general

Capítulo 1

Aproximación en Espacios de Funciones Continuas

En el presente Capítulo se trata fundamentalmente algunos resultados básicos en dos líneas de investigación esenciales en esta memoria: la primera se relaciona con el clásico Teorema de Stone - Weierstrass y varias de sus generalizaciones más cercanas a nuestro trabajo; en la segunda, se recoge básicamente los resultados obtenidos por J. Blasco - A. Motó (véase [5, 6, 7, 8]) y F. Montalvo - M. I. Garrido (véase [34]) que son algunas de las aportaciones recientes más destacadas a la teoría de la aproximación uniforme en espacios de funciones continuas.

Además de establecer las definiciones y conceptos básicos, incluiremos algunos resultados que son necesarios para el desarrollo del trabajo.

A lo largo de la memoria se considera que X es un espacio topológico completamente regular.

En todo el Capítulo sólo se darán las pruebas más inmediatas, por ser resultados conocidos.

1.1. Teorema de Stone-Weierstrass

Denotaremos por $C(X)$ el conjunto de funciones continuas de X en R y por $C^*(X)$ al subconjunto de $C(X)$ formado por las funciones continuas y acotadas.

La suma y el producto de funciones de $C(X)$ definidas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

y

$$(f.g)(x) = f(x).g(x),$$

dotan a $C(X)$ de estructura de anillo conmutativo y unitario.

Se identificará cada número real r con la función idénticamente igual a r, dotando de este modo al anillo $C(X)$ de estructura de R- álgebra.

Definición 1.1. *Se dice que $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ es una **subálgebra** de $C(X)$ si cumple.*

- $f+g \in \mathcal{A}, \forall\ f, g \in \mathcal{A},$
- $f.g \in \mathcal{A}, \forall\ f, g \in \mathcal{A},$
- $\lambda.f \in \mathcal{A}, \forall\ f \in \mathcal{A}\ \ y\ \lambda \in R.$

La relación de orden parcial

$$f \geq g, \text{ si y sólo si, } f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in X,$$

determina sobre $C(X)$ una estructura de anillo ordenado.

Definición 1.2. *Se dice que* $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ *es un* ***retículo*** *si dadas* $f, g \in \mathcal{A}$ *entonces* $\text{máx}\{f, g\} \in \mathcal{A}$ *y* $\text{mín}\{f, g\} \in \mathcal{A}$.

Es importante estudiar la relación existente entre las propiedades topológicas de X, y las propiedades algebraicas de $C(X)$ y $C^*(X)$. Es obvio que el anillo $C(X)$ está completamente determinado por el espacio topológico X. Uno de los problemas más interesantes es el problema inverso, es decir, cuándo X es determinado como espacio topológico por la estructura algebraica de $C(X)$ o $C^*(X)$.

Uno de los resultados más significativos sobre la densidad de funciones continuas fue dado por K. Weierstrass en 1885, en donde afirma que toda función continua definida en un compacto puede ser siempre aproximada por una función polinómica. El Teorema de Weierstrass ha dado lugar a numerosas generalizaciones, una de las más importantes fue dada por M. H. Stone (véase [44]), quien caracteriza en términos muy sencillos las subálgebras de funciones continuas que son uniformemente densas en $C(X)$ para un espacio topológico compacto X.

Existen diferentes demostraciones del Teorema de Stone - Weierstrass (véase [45, 9, 25, 3]). En particular, la monografía [38] proporciona una metodología que puede aplicarse a módulos, retículos, y subconjuntos en general.

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff. El espacio $C(X)$ denota el espacio vectorial sobre R de todas las funciones continuas de X en R. Dicho espacio puede dotarse de la topología de la convergencia uniforme sobre X, que está determinada por la norma del supremo

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x\ \in\ X\}$$

para cada $f \in C(X)$.

Daremos algunas definiciones y resultados previos antes de demostrar el Teorema de Stone - Weierstrass.

Definición 1.3.

- *Diremos que una subálgebra $\mathcal{B} \subseteq C(X)$* ***separa puntos*** *si, dados $x \neq y$ en X, existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

- *La familia $\mathcal{F}$se dice que* ***separa puntos fuertemente*** *si para cada par de puntos distintos $x \neq y$ de X, y para cada par de números reales α y β, existe alguna función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = \alpha \quad y \quad f(y) = \beta$.*

Lema 1.1. *Todo subespacio vectorial $\mathcal{F}$de $C(X)$ que separa puntos de X y contiene las funciones constantes, también separa puntos fuertemente.*

Demostración:

Dados $x,\ y$ dos puntos diferentes de X y $\alpha,\ \beta$ dos números reales diferentes, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que separa x de y . Es suficiente observar que el sistema:

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + \mu &= \alpha \\ \lambda f(y) + \mu &= \beta \end{aligned}$$

tiene solución única puesto que $f(x) \neq f(y)$. ■

Demostraremos a continuación una versión del Teorema de Kakutani-Stone que nos permitirá probar con sencillez el Teorema de Stone - Weierstrass. En lo sigue, dado $\mathcal{F} \subseteq C(X)$, el símbolo $\overline{\mathcal{F}}$ denotará a la clausura con respecto a topología de la convergencia uniforme.

El siguiente resultado es esencial en la prueba del Teorema de Kakutani-Stone (para la demostración ver [40]).

Teorema 1.2. *Sean X un espacio compacto, $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ un retículo y una función $f \in C(X)$. Entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$, si y sólo si, para cualquier $x_1 \neq x_2$ en X y $\epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_1) < g(x_1) + \epsilon$ y $f(x_2) > g(x_2) - \epsilon$.*

Como Corolario, se obtiene la versión más conocida del Teorema de Kakutani-Stone.

Teorema 1.3 (Kakutani-Stone)**.** *Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ un retículo vectorial que separa puntos de X y contiene a las funciones constantes. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente denso en $C(X)$.*

Demostración:

Dados $f \in C(X)$ y $x_1 \neq x_2$ en X, tomando $\alpha = f(x_1)$ y $\beta = f(x_2)$, por el

Lema 1.1, existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $g(x_1) = f(x_1)$ y $g(x_2) = f(x_2)$. Luego $\forall\, \epsilon > 0$ se tiene que

$$f(x_1) < g(x_1) - \epsilon \quad \text{y} \quad f(x_2) > g(x_2) + \epsilon.$$

En virtud del Teorema 1.2, se obtiene que $f \in \overline{\mathcal{F}}$. ■

Teorema 1.4. *(Teorema de Stone - Weierstrass). Toda subálgebra $\mathcal{F}$ de $C(X)$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes. Entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente densa en $C(X)$.*

Demostración:

Es suficiente demostrar que la clausura uniforme de una subálgebra de $C(X)$ es un retículo vectorial. Puesto que de ser así, aplicando el Teorema de Kakutani-Stone 1.3, $\overline{\mathcal{F}}$ sería un conjunto denso de $C(X)$ y, como consecuencia, $\overline{\mathcal{F}} = C(X)$.

En efecto, sabemos que

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \text{ínf}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Teniendo en cuenta que en todo espacio normado la adherencia de un subespacio vectorial es un espacio vectorial, sólo falta probar que

$$f \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow |f| \in \overline{\mathcal{F}}.$$

Sea $f \in \overline{\mathcal{F}}$, entonces $\forall\, \epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $\|g - f\| < \epsilon$, luego

$$\||g| - |f|\| \leq \|g - f\| < \epsilon.$$

Por lo tanto, sólo necesitamos demostrar que $g \in \mathcal{F} \Rightarrow |g| \in \overline{\mathcal{F}}$.

Como g es una función continua definida en un compacto, existe M tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Por el Teorema de Weierstrass la función $t \longrightarrow |t|$ puede aproximarse uniformemente por polinomios, es decir, para $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$ tal que

$$||t| - P(t)| \leq \epsilon \quad \forall\, t \in [-M, M].$$

Luego tenemos que:

$$||g(x)| - (a_0 + a_1 g(x) + \ldots + a_k g^k(x))| \leq \epsilon \quad \forall x \in X.$$

Como $\mathcal{F}$ es un subálgebra que contiene a las funciones constantes, la función $a_0 + a_1 g + \ldots + a_k g^k \in \mathcal{F}$, lo que significa que $|g| \in \overline{\mathcal{F}}$. ■

Existe una versión del Teorema de Stone - Weierstrass para funciones de valores complejos. El requerimiento adicional que hay que exigir a una subálgebra $\mathcal{B}$, para que sea densa en $C(X, C)$, es que sea *autoadjunta*. Es decir, si $f \in \mathcal{B}$, también $\overline{f} \in \mathcal{B}$. Para la demostración de este resultado ver [40].

Teorema 1.5. *(Teorema de Stone - Weierstrass, versión compleja). Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea $\mathcal{B} \subseteq C(X, C)$ una subálgebra (compleja) cerrada, con unidad, que separa puntos, y autoadjunta. Entonces $\mathcal{B} = C(X, C)$.*

Definición 1.4. *Si $\mathcal{A}$ está contenido en $C(X)$ o $C(X, C)$, un subconjunto no vacío S de X se llamará un* ***$\mathcal{A}$-conjunto antisimétrico*** *si para cualquier elemento f de $\mathcal{A}$ tal que la restricción de f a S es un valor real, entonces la restricción de f a S es constante.*

Así, para álgebras reales $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ un conjunto antisimétrico es igual a un conjunto donde todas las funciones del álgebra son constantes.

Para $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, definiremos la siguiente relación de equivalencia sobre X. Dados p , $q \in X$, decimos que $p \sim q$ cuando existe un conjunto $\mathcal{A}$-antisimétrico que contiene a p y q.

Definición 1.5. *Cada clase de equivalencia definida anteriormente sobre X será llamada $\mathcal{A}$-* ***conjunto antisimétrico maximal*** *de X.*

Denotamos por $\mathcal{A}(X)$ la familia de todos los $\mathcal{A}$- *conjuntos antisimétricos maximales* de X. Notemos que $\mathcal{A}(X)$ define una única descomposición de X en $\mathcal{A}$- conjuntos antisimétricos maximales disjuntos dos a dos, no vacíos (véase [10]).

Otra forma de demostrar el Teorema anterior es mediante el Teorema de Bishop siguiente.

Teorema 1.6. *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra cerrada de $C(X)$ que contenga a las funciones constantes. Si $g \in C(X)$ cumple que $g|_E \in \mathcal{A}_E$ para todo conjunto $\mathcal{A}$- antisimétrico maximal E, entonces $g \in \mathcal{A}$.*

Enunciada de otra manera, la hipótesis sobre g significa que, para cada conjunto $\mathcal{A}$- antisimétrico maximal E, exista una función $f \in \mathcal{A}$ que coincide con g sobre E. La conclusión es que existe una función f que verifique esta condición simultámeamente para todo E: la función $f = g$.

La demostración usa los Teoremas de Krein-Milman, Hahn-Banach y Banach-Alaoglu del análisis funcional (véase [41]).

Un caso particular del Teorema de Bishop es el Teorema de Stone-Weierstrass (caso complejo). En efecto, en este caso las funciones reales de $\mathcal{A}$ separan puntos de X, ningún conjunto antisimétrico contiene más de un punto, y toda $g \in C(X)$ cumple la hipótesis del Teorema de Bishop.

1.2. Aproximación Uniforme para $C^*(X)$

Para cada función $f \in C^*(X)$, tomando la imagen por f de X, se tiene que el conjunto $\overline{f(X)}$ es un compacto de R que contiene a $f(X)$, y por lo tanto el producto $\prod\limits_{f \in C^*(X)} \overline{f(X)}$ es un espacio compacto.

Consideraremos la evaluación

$$\begin{aligned} \phi : X &\longrightarrow \prod_{f \in C^*(X)} \overline{f(X)} \\ x &\longmapsto \phi(x) = (f(x))_{f \in C^*(X)} \end{aligned}$$

Esta aplicación es una inmersión con lo cual, la clausura de $\phi(X)$ en el producto $\prod\limits_{f \in C^*(X)} \overline{f(X)}$ es una compactificación de X, que se denota por βX, y se denomina la Compactificación de Stone-Cech de X.

Un resultado clásico al respecto es el siguiente:

Teorema 1.7 (Stone-Čech). *Un espacio X es de Tychonoff, si y sólo si, existe un espacio βX tal que:*

1. *βX es compacto.*

2. *X es un subespacio denso de βX.*

3. *Si* $f : X \longrightarrow [0,1]$ *es continua, entonces existe una extensión continua* $f^\beta : \beta X \longrightarrow [0,1]$ *de* f*, es decir,* $f^\beta|_X = f$.

Nota 1.1. *Se puede comprobar que cada función* f *de* $C^*(X)$ *admite una única extensión continua* $f^\beta : \beta X \longrightarrow R$*. Por tanto, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} C^*(X) & \longrightarrow & C(\beta X) \\ f & \longmapsto & f^\beta \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras.

1.2.1. Aproximación Uniforme para Subálgebras de $C^*(X)$

Recordaremos algunas definiciones previas que permitirán generalizar el concepto de separación de puntos en un espacio X, las cuales han sido extraídas de [29] y [34].

Definición 1.6. *Definimos los siguientes conjuntos:*

- *El conjunto* $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ *es llamado* ***conjunto cero de*** f.
- *Los conjuntos*

  $$L_\alpha(f) = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

  y

  $$L^\beta(f) = \{x \in X : f(x) \geq \beta\}$$

  son llamados ***conjuntos de Lebesgue de*** f.

Definición 1.7. *Sean* $E \subseteq C(X, C)$ *y* A , B *dos subconjuntos de* X. *Diremos que*

- E ***separa*** A *y* B, *si existe* $g \in E$ *tal que* $\overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} = \phi$.
- E *es* **completamente separante** *de* A *y* B, *si existe* $g \in E$ *tal que* $0 \leq g \leq 1,\ g(x) = 0 \quad si \ \ x \in A, \ \ y \quad g(x) = 1 \ si \ \ x \in B.$
- E ***separa completamente los conjuntos de Lebesgue de la función*** f *si para cada par de números reales* $a < b$, E *es completamente separante de* $L_a(f)$ *y* $L^b(f)$.

En lo que sigue desarrollaremos algunas ideas de [30].

Si $\mathcal{F}$ es una subálgebra o un retículo de $C^*(X)$, caracterizaremos su clausura uniforme dando condiciones necesarias y suficientes para la densidad uniforme de $C^*(X)$. Sabemos además que βX es la única compactación que tiene la siguiente propiedad:

Cada función en $C^*(X)$ *puede ser continuamente extendida a* βX.

Así, si $f \in C^*(X)$ y f^β es su extensión a βX, la función $f \longmapsto f^\beta$ es un isomorfismo del anillo $C^*(X)$ en $C(\beta X)$. En consecuencia, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^\beta$ tienen las mismas propiedades algebraicas, siendo $\mathcal{F}^\beta$ el conjunto de extensiones continuas a βX de funciones de $\mathcal{F}$.

1.2.2. Aproximación Uniforme para retículos de $C^*(X)$

F. Montalvo en [30] generaliza los Teoremas de Kakutani- Stone siguientes.

Teorema 1.8. *Sea* $\mathcal{F}$ *un retículo de* $C^*(X)$ *y sea* $f \in C^*(X)$. *Suponiendo que para cada par de números reales* $a < b$, *y* $\epsilon > 0$, *existe* $g \in \mathcal{F}$ *tal que* $|g(x) - a| < \epsilon$ *si* $x \in L_a(f)$, *y* $|g(x) - b| < \epsilon$ *si* $x \in L^b(f)$, *entonces* $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Teorema 1.9. *Sea* $\mathcal{F}$ *un retículo de* $C^*(X)$. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\mathcal{F}$ *es uniformemente denso en* $C^*(X)$.

2. *Para cada par de conjuntos cero disjuntos en* X, Z_1 *y* Z_2, *para cualquier par de numeros reales* $a < b$ *y para cualquier* $\epsilon > 0$ *existe* $g \in \mathcal{F}$ *tal que*

$$|g(x) - a| < \epsilon \textit{ si } x \in Z_1$$

$$|g(x) - b| < \epsilon \textit{ si } x \in Z_2.$$

Demostración:

Por el Teorema 1.8 anterior, 2) implica 1).

Para probar 1) implica 2) obsérvese que $Z_1 = Z(f_1)$ y $Z_2 = Z(f_2)$ son conjuntos cero disjuntos de X. Entonces la función

$$g = a + \frac{(b-a)f_1^2}{f_1^2 + f_2^2}$$

pertenece a $\mathcal{F}$ y toma los valores de a y b sobre Z_1 y Z_2, respectivamente. ■

Si $\mathcal{F}$ contiene todas las constantes, la condición del Teorema 1.8 anterior es suficiente.

Teorema 1.10. *Sea $\mathcal{F}$ un retículo de $C^*(X)$ conteniendo todas las funciones constantes reales y sea $f \in C^*(X)$. Entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$, si y sólo si, para cada par de números reales $a < b$ y $\epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{F}$ tal que:*

$$|g(x) - a| < \epsilon \ \ si \ \ x \in L_a(f),$$

$$|g(x) - b| < \epsilon \ \ si \ \ x \in L^b(f).$$

Demostración:

Es suficiente probar la condición necesaria.

Sea $f \in \overline{\mathcal{F}}$ y $\epsilon > 0$. Tomando $0 < \delta < \dfrac{b-a}{3}$, existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $|h - f| < \delta$, luego

$a \leq (h(x) \vee a) \wedge b \leq a + \delta$, si $x \in L_a(f)$ y,

$b - \delta \leq (h(x) \vee a) \wedge b \leq b$, si $x \in L^b(f)$.

Si $\delta < \epsilon$ y $g = (h \vee a) \wedge b$, entonces $g \in \mathcal{F}$ es la función requerida. ■

1.2.3. Aproximación Uniforme para Subalgebras de $C^*(X)$

En esta subsección generalizamos el Teorema de Stone - Weierstrass, y obtenemos como consecuencia el Teorema de Hewitt.

F. Montalvo y M. I. Garrido (véase [29]) obtienen los siguientes resultados de densidad para subálgebras de $C^*(X)$.

Teorema 1.11. *Sea $\mathcal{F}$ una subálgebra de $C^*(X)$ y f una función en $C^*(X)$. Entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$, si y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *$\mathcal{F}$ separa los conjuntos de Lebesgue de f.*

2. *Para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *y una función* $g \in \mathcal{F}$ *tal que*

   $L^{\epsilon}(|f|) \subseteq L^{\delta}(g)$.

Para la prueba véase [34].

Teorema 1.12. *Sea* $\mathcal{F}$ *una subálgebra de* $C^*(X)$*. Entonces* $\mathcal{F}$ *es uniformemente denso en* $C^*(X)$*, si y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. $\mathcal{F}$ *separa cada par de conjuntos cero disjuntos en* X.

2. $\mathcal{F}$ *contiene una unidad de* $C^*(X)$.

Demostración:

La condición suficiente es obvia por el Teorema 1.11.

Por otro lado, si $\overline{\mathcal{F}} = C^*(X)$, entonces la condición 2) es inmediata. Para probar la condición 1) notemos que si $Z_1 = Z(f_1)$ y $Z_2 = Z(f_2)$ son conjuntos cero disjuntos, entonces $g = \dfrac{f_1^2}{f_1^2 + f_2^2} \in \overline{\mathcal{F}}$ y es igual a 0 sobre Z_1, y a 1 sobre Z_2. ■

Los Teoremas anteriores generalizan el Teorema de Stone - Weierstrass. Se observa que la clave de los mismos radica en la sustitución de la *separación de puntos* del caso compacto por la *separación de conjuntos cero.*

Hewitt (véase [24]) prueba además, que si X no es compacto, tal sustitución no puede evitarse.

Teorema 1.13 (Hewitt, [24]). *Si* X *es un espacio topológico no compacto, entonces existe una subálgebra de* $C^*(X)$ *que separa puntos y contiene a las funciones constantes, pero no es uniformemente densa en* $C^*(X)$.

Demostración:

Puesto que X no es compacto, entonces $\beta X \setminus X \neq \phi$. Consideramos dos elementos fijos $x \in X,\ p \in \beta X \setminus X$ y definimos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{f \in C^*(X) : f^\beta(p) = f(x)\}.$$

Claramente $\mathcal{F}$ es una subálgebra de $C^*(X)$ que separa puntos de X y contiene a las funciones constantes. Sin embargo, $\mathcal{F}$ no puede ser uniformemente densa en $C^*(X)$, puesto que en caso contrario $\mathcal{F}^\beta$ sería uniformemente densa en $C(\beta X)$. Pero esto es imposible puesto que no separa los puntos x y p. ■

Hewitt demuestra el resultado anterior sin utilizar la extensión βX.

En [34] se dan otros resultados de densidad, para el caso en que $\mathcal{F}$ sea un retículo o un retículo semiafin de $C^*(X)$.

1.2.4. Aproximación Uniforme para espacios vectoriales de $C^*(X)$

La generalización obtenida para retículos y subálgebras en el caso no compacto no es posible transladarla para espacios vectoriales, como se verá a continuación.

Los autores que más han contribuido al estudio de la aproximación uniforme para espacios vectoriales son S. Mrowka (véase [28]) J. Blasco y A. Moltó (véase [5]).

En efecto, las condiciones de separación que se dieron para subálgebras y retículos son sólo necesarias; para espacios vectoriales (incluso para X compacto), el siguiente ejemplo debido a J. Blasco y A. Moltó, [5] lo confirma.

Ejemplo 1.1. *Sea $X = [0,2]$ y $\mathcal{F} = Ker\psi$, donde $\psi : C^*([0,2]) \to R$ es el funcional lineal y continuo definido por $\psi(f) = \int_0^1 (f) - \int_1^2 (f)$.*

El conjunto $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial que contiene a todas las constantes y satisface que cada par de cerrados no vacíos, disjuntos F_1 y F_2 de X existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(F_1) = 0$ y $f(F_2) = 1$. Sin embargo, puesto que $\mathcal{F}$ es un hiperplano cerrado, el conjunto $\mathcal{F}$ no es uniformemente denso en $C^*(X)$.

Para la estructura algebraica que vamos a considerar ahora no se disponen de resultados como en el caso compacto. Es por eso que trabajaremos desde el principio con funciones acotadas sobre un conjunto X, es decir en $F^*(X)$.

Daremos las siguientes definiciones debida a Blasco- Moltó (veáse [5]).

Definición 1.8.

- *Se dice que una familia $\mathcal{F} \in F^*(X)$ **S- separa los conjuntos** A **y** B si para cada $0 < \delta < \frac{1}{2}$ existe $g \in \mathcal{F}$, $0 \leq g \leq 1$, tal que $g(A) \subseteq [0, \delta]$ y $g(B) \subseteq [1-\delta, 1]$.*

  *Si la función g satisface la condición menos restrictiva, $-\delta \leq g \leq 1+\delta$, es decir, $g(A) \subseteq [-\delta, \delta]$, $g(B) \subseteq [1-\delta, 1+\delta]$, diremos que $\mathcal{F}$ **S'- separa los conjuntos** A **y** B.*

- *Diremos que E **S- separa a la función f** si para todo par de números reales $a < b$, S- separa los conjuntos de Lebesgue $L_a(f)$ y $L^b(f)$.*

- *Los espacios vectoriales que S- separan los conjuntos de Lebesgue de to-*

das sus funciones se denominan espacios vectoriales con la ***propiedad S****.*

Para $\mathcal{F}$ subespacio vectorial de $C^*(X)$, la S- separación y la S'- separación son equivalentes, resultado demostrado en [34].

Proposición 1.14. *Sea $\mathcal{F}$ un subespacio vectorial de $F^*(X)$ y $f \in F^*(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ S- separa los conjuntos de Lebesgue de f.*

2. *$\mathcal{F}$ S'- separa los conjuntos de Lebesgue de f.*

Los siguientes resultados enunciados, son debidos a J. Blasco y A. Moltó.

Teorema 1.15. *Sea $\mathcal{F}$ un subespacio vectorial de $F^*(X)$ y $f \in F^*(X)$. Si $\mathcal{F}$ S-separa los conjuntos de Lebesgue de f entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$.*

Para la demostración véase [34].

El siguiente resultado nos permite caracterizar los espacios vectoriales uniformemente densos en $C^*(X)$.

Teorema 1.16. *Sea $\mathcal{F}$ un subespacio vectorial de $C^*(X)$. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{F}$ sea uniformemente denso en $C^*(X)$ es que $\mathcal{F}$ S- separe cada par de conjuntos cero disjuntos.*

Demostración:

La condición suficiente se sigue del Teorema 1.15 anterior. La condición necesaria es inmediata, puesto que si $Z_1 = Z(f_1)$ y $Z_2 = Z(f_2)$ son dos conjuntos cero disjuntos, entonces la función $g = \dfrac{f_1^2}{f_1^2 + f_2^2} \in \overline{\mathcal{F}}$. ■

J. Blasco y A. Moltó en [5] dan un ejemplo de un espacio vectorial de funciones sobre un compacto, al que no se le puede aplicar los Teoremas clásicos de Stone-Weierstarss ni de Kakutani-Stone, por no tratarse de una subálgebra ni de un retículo.

Ejemplo 1.2. *Sea $X = [0,1]$ y $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de $C^*([0,1])$ generado por las funciones*

$$\{e^{(x+\mu)^n} : \mu \in R,\ x \in [0,1], n = 0,1,2,3,...,2k+1,...\}$$

Entonces $\mathcal{F}$ S- separa conjuntos cero disjuntos de X y por lo tanto, $\mathcal{F}$ es uniformemente denso en $C^*([0,1])$.

La condición del Teorema 1.15 es también necesaria, debida al siguiente resultado:

Teorema 1.17. *Sean $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de $F^*(X)$ con la propiedad S y $f \in F^*(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

2. $\mathcal{F}$ *S- separa conjuntos de Lebesgue de* f.

3. $\mathcal{F}$ *S'- separa conjuntos de Lebesgue de* f.

Para la demostración véase [34].

Teorema 1.18. *Para un espacio vectorial $\mathcal{F}$ de $F^*(X)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ tiene la Propiedad S.*

2. *$\overline{\mathcal{F}}$ es un anillo que contiene a las funciones reales constantes.*

3. *$\overline{\mathcal{F}}$ es un retículo vectorial que contiene a las funciones reales continuas.*

Para su demostración véase [34]

Como consecuencia veremos que la propiedad S caracteriza la densidad de los espacios vectoriales $\mathcal{F} \subseteq C^*(X)$.

Corolario 1.19. *Si $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial de $C^*(X)$ que tiene la propiedad S, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente denso en $C^*(X)$, si y sólo si, $\mathcal{F}$ separa conjuntos cero disjuntos de X. Además, si X es compacto la separación de conjuntos cero puede ser sustituida por la separación de puntos.*

Demostración:

Como $\mathcal{F}$ tiene la propiedad S por el Teorema 1.18 se tiene que $\overline{\mathcal{F}}$ es un anillo que contiene a las funciones constantes. Si además $\mathcal{F}$ separa conjuntos ceros, entonces $\mathcal{F}$ es denso por el Teorema de Hewitt (Stone- Weierstrass). ■

1.3. Aproximación Uniforme para $C(X)$

Si X es un espacio topológico completamente regular, los Teoremas de aproximación uniforme para subconjuntos de $C^*(X)$ no son directamente traducibles a $C(X)$. En este caso sólo se disponen de ciertas técnicas de aproximación, como el uso de particiones de la unidad, y de algunas condiciones suficientes de densidad.

1.3.1. Aproximación Uniforme para espacios vectoriales de $C(X)$

Siguiendo la estructura análoga de [5], F. Montalvo y M. I. Garrido dan una caracterización de aquellos espacios vectoriales que poseen lo que llamaremos *propiedad C* y que son los que se corresponden de manera natural con los espacios vectoriales con la propiedad S del caso acotado. Además de la citada *propiedad C*, consideraremos generalizaciones de la misma, así como algunas implicaciones algebraicas que de ellas se derivan.

En lo que sigue, sigueremos las ideas de [34].

Definición 1.9. *Sea $f \in F(X)$, llamaremos* ***cadena de Lebesgue para*** *f a todo recubrimiento numerable de X, $\{C_n\}_{n\in Z}$, donde*

$$C_n = \{x \in X : \alpha_{n-1} < f(x) < \alpha_{n+1}\}$$

y $\{\alpha_n\}_{n\in Z}$ es una sucesión monótona creciente en $\overline{R}$ ($\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$) para la cual, existe un número real $r > 0$ con la condición

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} \geq r, \text{ si } \alpha_n \in R.$$

Teorema 1.20. *Sea $\mathcal{F}$ un subespacio vectorial de $F(X)$ y f una función de $F(X)$. Si existe $k > 0$ tal que para cada cadena de Lebesgue de f, $\{C_n\}_{n\in Z}$, existe una función $g \in \mathcal{F}$ verificando*

$$|g(x) - n| < k, \ x \in C_n,$$

entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Tomando $\alpha_n = n\epsilon$, para la cadena de Lebesgue $\{C_n\}_{n\in Z}$ de f asociada a la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in Z}$, existe $g \in \mathcal{F}$ tal que

$$|g(x) - n| < k, \text{ si } x \in C_n.$$

Para $x \in C_n$, tenemos $|\epsilon g(x) - \epsilon n| < \epsilon k$ y

$$|\epsilon g(x) - f(x)| \leq |\epsilon g(x) - \epsilon n| + |f(x) - \epsilon n| < (k+1)\epsilon.$$

Como $\{C_n\}_{n\in Z}$ es un recubrimiento de X, se tiene que

$$|\epsilon g(x) - f(x)| < (k+1)\epsilon \quad \text{para todo } x \in X$$

y por lo tanto, $f \in \overline{\mathcal{F}}$. ■

Definición 1.10. *Una familia $\mathcal{F}$ de $F(X)$ se dice que verifica la* ***condición de cadena para una función*** *$f \in F(X)$, cuando existe $k > 0$ tal que para toda cadena de Lebesgue de f, $\{C_n\}_{n\in Z}$, existe $g \in \mathcal{F}$ con $|g(x) - n| < k$ si $x \in C_n$.*

De esta definición se deduce que:

Una condición suficiente para que una función f de $C(X)$ esté en la clausura uniforme de un espacio vectorial $\mathcal{F}$, es que $\mathcal{F}$ verifique la condición de cadena para f.

Como en el caso acotado, una condición necesaria y suficiente para que un espacio vectorial sea uniformemente denso en $C(X)$ se obtiene en el siguiente resultado debido a J. Blasco y A. Moltó (véase [5]).

El siguiente resultado prueba que la condición de cadena es, en el caso acotado, la condición de S- separación.

Proposición 1.21. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de $F^*(X)$ y sea $f \in F^*(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ verifica la condición de cadena para f.*

2. *$\mathcal{F}$ S'- separa los conjuntos de Lebesgue de f.*

3. *$\mathcal{F}$ S- separa los conjuntos de Lebesgue de f.*

Para la demostración véase [34].

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.20 y de la Proposición 1.21 es el siguiente resultado:

Corolario 1.22. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de $F^*(X)$ y sea $f \in F^*(X)$. Si $\mathcal{F}$ S- separa los conjuntos de Lebesgue de f entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$*

Para la demostración véase [34].

Teorema 1.23. *Para un espacio vectorial $\mathcal{F}$ de $C(X)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es uniformemente denso en $C(X)$.*

2. *Para cada recubrimiento numerable de X por coceros, $\{C_n\}_{n\in Z}$, tal que $C_n \cap C_m = \phi$ si $|n-m| > 1$ (recubrimiento 2-finito), existe una función $g \in \mathcal{F}$ con*

$$|g(x) - n| < 2, \quad \forall\, x \in C_n.$$

Para la demostración véase [34].

Como en el caso acotado, hemos obtenido una condición necesaria y suficiente para que un espacio vectorial sea uniformemente denso en $C(X)$ y una condición suficiente para que una función esté en su clausura uniforme.

Proposición 1.24. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de $C(X)$. Si se verifica la condición de cadena para alguna función f de $C(X)$, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ contiene a las funciones constantes.*

Demostración:

Dado cualquier $\lambda \in R$, es sencillo comprobar que se cumple la condición de cadena para $f+\lambda$. Por el Teorema 1.20 se deduce que tanto f como $f+\lambda \in \mathcal{F}$. Luego $\lambda = (f+\lambda) - f \in \overline{\mathcal{F}}$. ■

Ejemplo 1.3. *El espacio vectorial de las funciones lineales en R es uniformemente cerrado y no contiene a las funciones constantes, por lo tanto, no puede verificar la condición de cadena para ninguna función de $C(R)$.*

Definición 1.11. *Diremos que una familia de funciones de $F(X)$ tiene la **propiedad C** cuando verifica la condición de cadena para todas sus funciones.*

El siguiente resultado de equivalencia será utilizado para obtener densidades para subespacios vectoriales de $C(X)$.

Teorema 1.25. *Sean $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de $F(X)$ y $f \in F(X)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{F}$ verifica la condición de cadena para f.

2. $\varphi \circ f \in \overline{\mathcal{F}}$ para cualquier $\varphi \in C(R)$ uniformemente continua y monótona.

3. $\varphi \circ f \in \overline{\mathcal{F}}$ cualquiera que sea $\varphi \in C(X)$ uniformemente continua.

Para la demostración véase [34].

Lema 1.26. *Sea $\mathcal{T}$ el espacio de todas las funciones uniformemente continuas sobre R y sea $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de $C(R)$ generado por las funciones de $\mathcal{T}$ que son monótonas. Se verifica entonces que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{T}$.*

Para la prueba véase [34].

El siguiente Teorema demuestra que la condición de cadena caracteriza la clausura uniforme de aquellos espacios vectoriales que tienen la propiedad C.

Teorema 1.27. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de $F(X)$ con la propiedad C y $f \in F(X)$. Entonces $f \in \overline{\mathcal{F}}$, si y sólo si, $\mathcal{F}$ verifica la condición de cadena para f.*

Demostración:

La condición suficiente es consecuencia del Teorema 1.20.

Recíprocamente, sea $f \in \overline{\mathcal{F}}$, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in N}$ que converge uniformemente a f. Sea φ una función uniformemente continua sobre R, por el Teorema 1.25, $\varphi \circ f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ para $n \in N$, luego $\{\varphi \circ f\}_{n\in N}$

converge uniformemente a la función $\varphi \circ f$. Aplicando de nuevo el Teorema 1.25 se deduce que $\mathcal{F}$ satisface la condición de cadena para f. ■

Teorema 1.28. *Para un espacio vectorial $\mathcal{F}$ de $F(X)$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ tiene la propiedad C.*

2. *$\overline{\mathcal{F}}$ es cerrada por composición con funciones uniformemente continuas y monótonas sobre R.*

3. *$\overline{\mathcal{F}}$ es cerrada por composición con funciones uniformemente continuas sobre R.*

4. *$\overline{F}$ tiene la propiedad C.*

5. *Existe $k > 0$ tal que $\mathcal{F}$ verifica la condición de cadena para todas sus funciones y para el mismo k.*

Para la prueba véase [34]

Corolario 1.29. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial uniformemente denso en $C(X)$ entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad C.*

Demostración:

Como $C(X)$ es obviamente cerrado con respecto a la composición de funciones continuas, si $\overline{\mathcal{F}} = C(X)$ entonces, por el Teorema 1.28, $\mathcal{F}$ tiene la propiedad C. ■

Ejemplo 1.4. *(Un espacio vectorial con la propiedad C que no es uniformemente denso). Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones uniformemente continuas sobre R.*

$\mathcal{F}$ es un espacio vectorial uniformemente cerrado y cerrado por composición con funciones uniformemente continuas sobre R. Por consiguiente posee la propiedad C.

Una alternativa ha sido estudiada por A. Hager (véase [19] y [20]) para caracterizar algebraicamente a $C(X)$, a través de álgebras uniformemente cerradas, y cerradas por inversión de funciones continuas sobre X.

Capítulo 2

Representación y Aproximación por Series en Espacios de Funciones Continuas Reales

2.1. Resultados básicos

Los resultados obtenidos hasta 1990 sobre Aproximación en Espacios de Funciones Continuas y descritos en el Capítulo I han sido estudiados en la tesis doctoral de M. I. Garrido (véase [34]). Últimamente, usando las técnicas de generación de álgebras de funciones y la caracterización algebraica de subretículos $\mathcal{F}$ de $C(X)$, se han obtenido algunos avances (véase [31]). Otra posibilidad es a través de series de funciones continuas (véase [20, 28]), que es la dirección que abordaremos en este Capítulo. La representación y aproximación de funciones continuas por series infinitas de funciones pertenecientes a un subconjunto de $C(X)$ proporcionan un método de representación, que está basado en operaciones relativamente simples y extiende la conocida teoría de aproximación de funciones continuas definidas sobre subespacios de R^n por series de polinomios.

A lo largo de este Capítulo, usando principalmente métodos topológicos, presentamos algunas condiciones suficientes para representar cada función continua como la suma de una serie infinita de funciones perteneciente a una determinada subfamilia E de $C(X)$ cuando el espacio topológico X sea localmente compacto, paracompacto o un subespacio de un espacio polaco. Asimismo, se obtienen algunas aplicaciones al clásico Teorema de Stone - Weierstrass y a varias de sus extensiones topológicas (véase [5, 33, 31, 28]).

Al igual que en el Capítulo anterior $F(X)$ denotará el conjunto de todas las funciones sobre X con valores reales.

Sea $f \in F(X)$, denotamos por

$$f^+ = \sup\{f, O\}$$

$$f^- = \sup\{-f, O\}$$

La siguiente definición juega un rol esencial en todo el trabajo.

Definición 2.1. *Dada una serie* $\sum_{i\in I} f_i$ *de funciones continuas sobre un espacio topológico* X *se dice que es* ***localmente convergente*** *cuando, para cada* $x \in X$*, existe una vecindad* U *de* x *tal que la serie converge uniformemente sobre* U*.*

Para $E \subseteq C(X)$, denotamos por $\sum\langle E\rangle$ al conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ tal que $f = \sum_{i \in I} f_i$ es localmente convergente, con $f_i \in E$ para cada $i \in I$.

Es importante establecer la estructura vectorial de $\sum\langle E\rangle$.

Lema 2.1. *Para $E \subseteq C(X)$ se tiene que $\sum\langle E\rangle$ es un subespacio vectorial de $C(X)$.*

Demostración:

Dado $f = \sum_{i \in I} f_i \in \sum\langle E\rangle$ y $g = \sum_{j \in J} g_j \in \sum\langle E\rangle$, entonces para todo $x \in E$ existen vecindades U y V de x tal que la serie $\sum_{i \in I} f_i$ es convergente en U y la serie $\sum_{j \in J} g_j$ es convergente en V. Así, para todo $x \in U \cap V$, tomando $T = I \cup J$ (considerada como unión disjunta) y

$$h_l = \begin{cases} f_l & \text{si} \quad l \in I \\ g_l & \text{si} \quad l \in J \end{cases}$$

se obtiene que $f + g = \sum_{l \in T} h_l$ es convergente en $U \cap V$, luego $f + g \in \sum\langle E\rangle$. Además es obvio que $\lambda.f = \sum_{i \in I} \lambda.f_i$ es convergente en U, luego $\lambda.f \in \sum\langle E\rangle$.

■

El siguiente resultado establece que sólo una cantidad numerable de índices es relevante en la definición de series localmente convergentes.

Lema 2.2. *Si $E \subseteq C(X)$ y $f = \sum_{I \in I} f_i \in \sum\langle E\rangle$ entonces, $f_i = 0$ salvo una cantidad numerable de índices.*

Demostración:

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $L \subseteq I$ no numerable donde $f_i \neq 0 \quad \forall\ i \in L$. Por lo tanto, para cada $i \in L$ existe $x_i \in X$ tal que $f_i(x_i) \neq 0$. Como $\{|f_i(x_i)|\}_{i\in L} \subseteq\ ]0, +\infty[= \bigcup_{n\in N} [\frac{1}{n}, +\infty[$, existirá $n_0 \in N$ tal que $|f_i(x_i)| \in [\frac{1}{n_0}, +\infty[$ para un conjunto no numerable de índices. Supondremos sin pérdida de generalidad que este conjunto de índices es L. Tomando $\epsilon_0 = \frac{1}{n_0}$ se tiene que $|f_i(x_i)| \geq \epsilon_0,\ \forall\ i \in L$.

Notemos por otra parte que, identificando los elementos iguales, el conjunto $A = \{x_i\}_{i\in I}$ puede ser numerable o no numerable. Si A es numerable, como L es no numerable, entonces habrá una cantidad no numerable de x_i que serán iguales, es decir, existe $L' \subseteq L$ no numerable tal que $x_i = a,\ \forall\ i \in L'$. Luego en este punto $x_i = a$ la serie $\sum_{i\in I} |f_i(a)| \geq \sum_{i\in L'} |f_i(a)|$ y no será convergente puesto que $|f_i(a)| = |f_i(x_i)| \geq \epsilon_0,\ \forall\ i \in L'$, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, A debe de ser no numerable.

Como X es un espacio compacto, el conjunto A tiene un punto de acumulación $x_0 \in X$. Por hipótesis, existe un entorno U_{x_0} de x_0 y un conjunto $I_0 \subseteq I$ finito de índices tales que $\sum_{i\in I \setminus I_0} |f_i(x)| < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \forall\ x \in U_{x_0}$. Como consecuencia, U_{x_0} contiene una cantidad infinita de elementos distintos de A, $\forall\ x_j \in U_{x_0} \cap A$, $|f_j(x_j)| \leq \sum_{i\in L \setminus I_0} |f_i(x_j)| \leq \sum_{i\in I \setminus I_0} |f_i(x_j)| < \frac{\epsilon_0}{2}$, lo que también nos lleva a una contradicción puesto que $|f_j(x_j)| \geq \epsilon_0$. ■

Definición 2.2. *Dada una serie* $\sum_{i\in I} f_i$ *de funciones continuas sobre* X*, decimos que la serie es* ***localmente absolutamente convergente*** *cuando, para* *cada $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que la serie $\sum_{i \in I} |f_i|$ converge uniformemente sobre U.*

Para $E \subseteq C(X)$, denotamos por $\sum\langle E\rangle_a$ el conjunto de todas las funciones $f \in C(X)$ tal que $f = \sum_{i \in I} f_i$ es localmente absolutamente convergente, con $f_i \in E$ para cada $i \in I$.

En este Capítulo también usaremos las definiciones 1.6 , 1.7 y 1.8 del Capítulo anterior.

Proposición 2.3. *Sea X un espacio topológico y E un subespacio vectorial de $F(X)$. Si $f \in F(X)$ es semicontinua superiormente y E S- separa f, entonces f y $|f|$ pertenecen a $\overline{\sum\langle E\rangle_a}$*

Demostración:

Tomemos $0 < \delta < 1$ arbitrariamente y supongamos que $f \geq 0$. Se consideran los conjuntos de Lebesgue $F_n = L_{(n-1)\delta}(f)$ y $H_n = L^{n\delta}(f)$ para cada $n \in N$. Por hipótesis, existe $\alpha_n \in E$ tal que $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $\alpha_n(F_n) \subseteq [0, \delta/2^n]$ y $\alpha(H_n) \subseteq [1-\delta/2^n, 1]$, $n \in N$. Probaremos que la serie $\sum_{n \in N} \delta\alpha_n$ es localmente convergente.

En efecto, para cada $x \in X$, existe $n_1 \in N$ tal que $(n_1 - 1)\delta \leq f(x) < n_1\delta$. En consecuencia $f(x) \in]-\infty, n_1\delta[$ y, como f es semicontinua superiormente, se tiene que

$$f^{-1}(]-\infty, n_1\delta[) = X \setminus L^{n_1\delta}(f) = U_x$$

es un entorno abierto de x.

Por otro lado, para cada $y \in U_x$ se tiene que $y \in F_j$ para todo $j \geq n_1 + 1$.

Por lo que tenemos

$$\sum_{n \in N} \delta\alpha_n(y) = \sum_{j=1}^{n_1} \delta\alpha_j(y) + \sum_{j=n_1+1}^{\infty} \delta\alpha_j(y).$$

Puesto que $\|\delta\alpha_j\|_{U_x} \leq \dfrac{\delta^2}{2^j}$ para todo $j \geq n_1 + 1$ podemos aplicar el test de Weierstrass y obtener que la serie converge uniformemente sobre U_x, lo que significa que $\sum\limits_{n \in N} \delta\alpha_n \in \sum \langle E \rangle_a$.

Ahora probaremos que $f \in \overline{\sum \langle E \rangle_a}$. Para ello es suficiente demostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \sum_{n \in N} \delta\alpha_n(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in X.$$

En efecto, procediendo como antes para $x \in X$ existe $n_1 \in N$ tal que $(n_1 - 1)\delta \leq f(x) < n_1\delta$. Luego tenemos que

$$|f(x) - \sum_{n \in N} \delta\alpha_n(x)| \leq | f(x) - \sum_{j=1}^{n_1-1} \delta\alpha_n(x) \mid + \mid \delta\alpha_{n_1}(x) \mid + \mid \sum_{j=n_1+1}^{\infty} \delta\alpha_n(x) \mid$$

En vista que

$$\sum_{j=n_1+1}^{\infty} \delta\alpha_j(x) = \frac{\delta^2}{2^{n_1}} \leq \frac{\delta^2}{2} < \delta^2$$

y como $x \in L^{(n_1-1)\delta}(f) = H_{n_1-1}$, se cumple que $\alpha_j(x) \geq 1 - \dfrac{\delta}{2^j}$, $1 \leq j < n_1$, luego

$$\sum_{j=1}^{n_1-1} \delta\alpha_j(x) \geq \delta \sum_{j=1}^{n_1-1} (1 - \delta/2^j) \geq n_1\delta - \delta - \delta^2.$$

Además, $0 \leq \alpha_{n_1} \leq 1$.

Se deduce entonces que

$$|f(x) - \sum_{n \in N} \delta\alpha_n(x)| < n_1\delta - (n_1\delta - \delta - \delta^2) + \delta + \delta^2 = 2(\delta + \delta^2)$$

Tomando $\delta = \text{mín}(\epsilon/2, 1/2)$, se obtiene que

$$\|f - \sum_{n\in N} \delta\alpha_n\| < \epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

Por lo tanto, la Proposición es cierta para $f \geq 0$.

Para el caso en que f no fuera necesariamente positiva tenemos que $f = f^+ - f^-$ (respectivamente $|f| = f^+ + f^-$). Es sencillo comprobar que, si E S- separa a f, entonces también S- separa a f^+ y f^-, puesto que f^+ y f^- son positivas. Se deduce que f^+ y f^- pertenecen a $\overline{\sum\langle E\rangle}$, luego $|f| \in \overline{\sum\langle E\rangle}$ y $f \in \overline{\sum\langle E\rangle}_a$ ■

Nota 2.1. *En la Proposición 2.3 podemos usar la descomposición $f = f^+ - f^-$ para aproximar f por funciones $g \in \sum\langle E\rangle_a$ tales que $g = \sum_{n\in Z} g_n$, $g_n \in E$ para todo $n \in Z$.*

Corolario 2.4. *Sea A un subconjunto de $C(X)$ y sea E un subespacio vectorial de $C(X)$ que S-separa conjuntos Lebesgue de A. Entonces, el retículo generado por A esta contenido en $\overline{\sum\langle E\rangle}$.*

En particular si $A = C(X)$ se tiene que $C(X) = \overline{\sum\langle E\rangle}$

Para la demostración del Teorema de Stone - Weierstrass necesitaremos los siguientes Lemas.

Lema 2.5. *Sea X un espacio topológico y sea E un subretículo vectorial de $C(X)$ que contiene las constantes. Sean A y B subconjuntos de X S-separados por E, entonces también ellos están completamente separados por E.*

Demostración:

Como E S- separa A y B, dado $0 < \delta < 1/2$, existe $g \in E$, $\ 0 \leq g \leq 1$, tal que

$$g(A) \subseteq [0, \delta] \text{ y } g(B) \subseteq [1 - \delta, 1]$$

Definimos la función

$$f = \text{mín}\{\text{máx}\{\frac{g - \delta}{1 - 2\delta}, 0\}, 1\}$$

Luego si $x \in A$ tenemos que $f(x) = 0$ y, si $x \in B$ tenemos que $f(x) = 1$.

En consecuencia A y B están completamente separados por E. ■

Lema 2.6. *Sea X un espacio topológico y sea E un subretículo vectorial de $C(X)$ que contiene las constantes y separa completamente puntos y conjuntos cerrados disjuntos de X, entonces E separa completamente conjuntos compactos y cerrados disjuntos de X.*

Demostración:

Sea K un subconjunto compacto de X y F un subconjunto cerrado de X disjunto con K.

Como E separa completamente puntos y conjuntos cerrados se tiene que, para cada $x \in K$ existe $h_x \in E$, tal que $0 \leq h_x \leq 1$, $h_x(x) = 1$ y $h_x|_F = 0$.

Luego la familia de conjuntos $\{h_x^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) : x \in K\}$ es un recubrimiento abierto de K, y como K es compacto podemos extraer un subrecubrimiento abierto finito $\{h_i^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) : 1 \leq i \leq n\}$.

Se define

$$g = \text{mín}\{\sum_{i=1}^{n} 2h_i, 1\}$$

donde $0 \leq g \leq 1$.

Por tanto si $x \in F$ tenemos que $g(x) = 0$ y, si $x \in K$ tenemos que $g(x) = 1$.

En consecuencia, E separa completamente conjuntos compactos y cerrados disjuntos de X. ■

Nota 2.2. *Como $\{x\}$ es un cerrado en X, con las mismas hipótesis del Lema 2.6 se deduce que E separa completamente compactos y puntos de X.*

Lema 2.7. *Sea X un espacio topológico y sea E un retículo vectorial de $C(X)$ que contiene las constantes y separa completamente puntos y conjuntos cerrados de X, entonces E separa completamente conjuntos compactos disjuntos de X.*

Demostración:

Sean K_1 y K_2 compactos disjuntos de X.

En virtud del Lema 2.6 y Nota 2.2, si $x \in K_2$ existe $g_x \in E$ tal que

$$0 \leq g_x \leq 1, \quad g_x(x) = 1 \quad \text{y} \quad g_x\,|_{K_1} = 0$$

Luego la familia de conjuntos $\{g_x^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) : x \in K_2\}$ es un recubrimiento abierto de K_2 y como K_2 es compacto podemos extraer un subrecubrimiento abierto finito $\{g_i^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) : 1 \leq i \leq n\}$.

Se define

$$\alpha = \text{mín}\{\sum_{i=1}^{n} 2g_i, 1\}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Además, si $x \in K_1$ tenemos que $\alpha(x) = 0$ y, si $x \in K_2$ tenemos que $\alpha(x) = 1$.

En consecuencia E separa completamente conjuntos compactos disjuntos de X.

$\blacksquare$

Una interesante consecuencia de los Lemas anteriores es la obtención de una nueva demostración del Teorema de Stone - Weierstrass sin usar el Teorema de Kakutani- Stone (véase Teorema 1.3).

Corolario 2.8. *[Stone-Weierstrass]. Sea X un espacio topológico compacto y sea E una subálgebra de $C(X)$ que contiene las constantes y separa puntos de X. Entonces $\overline{E} = C(X)$.*

Demostración:

Notemos que si E es una subálgebra de $C(X)$ que contiene las constantes y separa puntos de X, entonces $\overline{E}$ es un subretículo vectorial de $C(X)$ que también contiene a las constantes y separa puntos y cerrados de X.

Como X es compacto, por el Lema 2.7, se deduce que $\overline{E}$ separa completamente conjuntos cerrados, luego S- separa conjuntos de Lebesgue de $C(X)$. Usando el Corolario 2.4 tenemos que $C(X) \subseteq \overline{\sum E}$, por lo tanto, $\overline{\sum E} = C(X)$.

Para concluir es suficiente demostrar que $\overline{\sum E} = \overline{E}$.

En efecto, si $f \in \sum\langle E\rangle$, entonces $f = \sum\limits_{i\in I} f_i$, con $f_i \in E$ para todo $i \in I$. Puesto que la serie es localmente convergente, por el Lema 2.2, existe un subconjunto numerable $J \subseteq I$, tal que $f_i = 0$ si $i \notin J$. Luego tenemos que $f = \sum_{n \in N} f_n$, con $f_n \in E$ para todo $n \in N$, es uniformemente convergente en una vecindad de cada punto de X. Razonando por compacidad también se deduce que la serie es uniformemente convergente en X. Por tanto $f \in \overline{E}$.

En consecuencia tenemos $\sum\langle E\rangle \subseteq \overline{E}$, y como $E \subseteq \sum\langle E\rangle$, concluimos que $\overline{\sum\langle E\rangle} = \overline{E}$. ∎

Nota 2.3. *Se prueba como en el Corolario 2.8, que cuando X es un espacio topológico de Lindelöf, solamente son relevantes las series $\sum\langle E\rangle$ definidas sobre un conjunto numerable de índices.*

2.2. Espacios Paracompactos Localmente Compactos

En esta sección presentamos algunos resultados que relacionan propiedades locales y globales de aproximación para espacios paracompactos localmente compactos.

Primero daremos algunas definiciones básicas que usaremos en el resto del trabajo.

Definición 2.3. *Una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se llama* ***localmente finita*** *si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U de x, tal que el conjunto $\{s \in S : U \cap A_s \neq \phi\}$ es finito.*

Definición 2.4. *Sean* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *y* $\{B_\beta\}_{\beta \in J}$ *dos recubrimientos de un espacio topológico* X. *Se dice que* $\{A_\alpha\}$ ***refina a*** *(o es un* ***refinamiento*** *de)* $\{B_\beta\}$ *si para cada* A_α *existe algún* B_β *con* $A_\alpha \subseteq B_\beta$. *Lo escribimos* $\{A_\alpha\} \prec \{B_\beta\}$.

Definición 2.5. *Un espacio topológico* X *se llama* ***paracompacto*** *si* X *es un espacio de Hausdorff y cada recubrimiento abierto de* X *tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Definición 2.6. *Una familia de funciones continuas* $\{f_s\}_{s \in S}$ *del espacio topológico* X *en* $I = [0,1]$ *se llama* ***partición de la unidad sobre el espacio*** X *si* $\displaystyle\sum_{s \in S} f_s(x) = 1 \;\; \forall x \in X$.

La igualdad anterior significa que para cada $x_0 \in X$ sólo una catidad numerable de funciones f_s no se anula en x_0. Además la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{s_i}(x_0), \text{ donde } \{s_i\}_{i=1}^{n} = \{s \in S : f_s(x_0) \neq 0\}, \text{ converge a } 1.$$

Definición 2.7. *Diremos que una* ***partición de la unidad*** $\{f_s\}_{s \in S}$ *sobre un espacio topológico* X *es* ***localmente finita*** *si el recubrimiento* $\{f_s^{-1}((0,1])\}_{s \in S}$ *del espacio* X *es localmente finito.*

Lo anterior significa que, para cada $x_0 \in X$ existe una vecindad $\mathcal{U}_{x_0}$ y un conjunto finito $S_0 = \{s_1, s_2, ..., s_k\} \subseteq S$ tal que para cada $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ se tiene $f_s(x) = 0$, donde $s \in S \setminus S_0$ y $f_{s_1}(x) + f_{s_2}(x) + ... + f_{s_k}(x) = 1$

Definición 2.8. *Una* ***partición de la unidad*** $\{f_s\}_{s \in S}$ *sobre el espacio topológico* X *se dice que está* ***subordinada al recubrimiento*** $\mathcal{U}$ *de* X *si el recubrimiento* $\{f_s^{-1}((0,1])\}_{s \in S}$ *del espacio* X *es un refinamiento de* $\mathcal{U}$.

Los siguientes resultados, que se usarán en el resto del trabajo, se encuentran demostrados en [15, pag 301].

Teorema 2.9. *Para cualquier familia localmente finita* $\{A_s\}_{s\in S}$ *de un espacio topológico* X *se tiene la igualdad* $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A_s}$.

Teorema 2.10. *Para cualquier espacio topológico* X *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El espacio* X *es paracompacto.*

2. *Cada recubrimiento abierto del espacio* X *tiene una partición localmente finita de la unidad subordinada a él.*

3. *Cada recubrimiento del espacio* X *tiene una partición de la unidad subordinada a él.*

Presentamos una variante de la Proposición 2.3.

Lema 2.11. *Sea* X *un espacio topológico y sea* E *una subálgebra de* $C(X)$. *Si* $f \in C(X)$ *es tal que existe una partición localmente finita de la unidad* $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subseteq E$ *de manera que* $E|_{coz(\alpha_i)}$ S*-separa* $f|_{coz(\alpha_i)}$ *para todo* $i \in I$, *entonces* $f \in \overline{\sum\langle E\rangle}$.

Demostración:

Para simplificar la notación, denotaremos por

$$A_i = coz(\alpha_i) = \{x \in X : \alpha_i(x) \neq 0\}.$$

Por hipótesis, dado $a < b$, y $0 < \delta < \frac{1}{2}$, existe $g_i \in E$ tal que,

$$0 \leq g_i|_{A_i} \leq 1, \; g_i(L_a(f) \cap A_i) \subseteq [0, \delta] \quad \text{y} \quad g_i(L^b(f) \cap A_i) \subseteq [1-\delta, 1].$$

Con todo, la función

$$g = \sum_{i \in I} \alpha_i g_i$$

satisface las siguientes tres condiciones:

1. $0 \leq g \leq 1$.

2. Si $x \in L^b(f)$ entonces

$$g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) g_i(x) \geq \sum_{i \in I} \alpha_i(x)(1-\delta) = 1-\delta$$

3. Si $x \in L_a(f)$ entonces

$$g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) g_i(x) \leq \sum_{i \in I} \alpha_i(x)\delta = \delta.$$

Esto significa que $\sum\langle E\rangle$ S- separa a $L_a(f)$ y $L^b(f)$ para todo $a < b$. Por la Proposición 2.3, para cada $\epsilon > 0$ existe una serie localmente convergente $\sum\limits_{n \in Z} h_n \in \sum(\sum\langle E\rangle)$ tal que

$$h_n = \sum_{i \in I} \alpha_i g_{i_n} \in \sum\langle E\rangle \;\; \text{y} \;\; \|f - \sum_{n \in Z} h_n\| < \epsilon$$

Para finalizar la prueba será suficiente probar que

$$\sum_{n \in Z} h_n = \sum_{n \in Z}(\sum_{i \in I} \alpha_i g_{i_n}) = \sum_{n \in Z, i \in I} \alpha_i g_{i_n}$$

es localmente convergente.

Sea x es un elemento arbitrario de X. Puesto que $\sum\limits_{n\in Z} h_n$ es localmente convergente, existe una vecindad U de x tal que $\sum\limits_{n\in Z} h_n|_U$ es uniformemente convergente. Por otro lado, la familia $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, por tanto existe otra vecindad V de x y un subconjunto finito J de I tal que $V \cap A_i = \phi$ para todo $i \in I \setminus J$. Luego tenemos

$$\sum_{n\in Z} h_n|_{U\cap V} = \sum_{n\in Z, i\in I} (\alpha_i g_{i_n})|_{U\cap V} = \sum_{n\in Z, i\in I} (\alpha_i g_{i_n})|_{U\cap V}.$$

Puesto que J es finito y $\sum\limits_{n\in Z} h_n|_U$ es uniformemente convergente, se sigue que $\sum\limits_{n\in Z, i\in I} \alpha_i g_{i_n}$ converge uniformemente sobre $U \cap V$, lo cual completa la prueba. ■

Definición 2.9. *Se dice que un espacio topológico X es un* ***espacio de Lindelöf****, o tiene la* ***propiedad de Lindelöf****, si X es regular y cada recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento numerable.*

Definición 2.10. *Un espacio topológico X se llama* ***espacio localmente compacto*** *si para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que $\overline{U_x}$ es un subespacio compacto de X.*

El siguiente resultado es una extensión del Teorema de Stone - Weierstrass para espacios Lindelöf localmente compactos.

Lema 2.12. *Sea X es un espacio topológico Lindelöf localmente compacto y E una subálgebra de $C(X)$ que contiene las constantes y separa puntos de X. Entonces $\sum\langle E\rangle = C(X)$*

Demostración:

Como X es localmente compacto $\forall\ x \in X$ existe un abierto V_x tal que $\overline{V_x}$ es compacto. Claramente $\{V_x : x \in X\}$ es un recubrimiento de abiertos de X. Como X es de Lindelöf existe un subrecubrimiento numerable $\{V_n\}_{n\in N} \subseteq \{V_x\}_{x\in X}$.

Tomando $A_k = \overline{V_1} \bigcup \overline{V_2} \bigcup \cdots \bigcup \overline{V_k}$ $(\forall\ k \in N)$ se obtiene una sucesión de conjuntos compactos $\{A_n\}_{n\in N}$ de X tal que $A_n \subseteq int(A_{n+1})$ para cada $n \in N$ y además $\displaystyle\bigcup_{n\in N} A_n = X$.

Dado $\epsilon > 0$, puesto que E contiene las constantes y separa puntos de X, por el Teorema de Stone - Weierstrass, para toda $f \in C(X)$ existe una función $f_1 \in E$ tal que $\|f - f_1\|_{A_1} < \dfrac{\epsilon}{2}$, luego si $g_1 = f - f_1$, usando de nuevo el Teorema de Stone - Weierstrass, existe $f_2 \in E$ tal que $\|g_1 - f_2\|_{A_2} < \dfrac{\epsilon}{2^2}$ o, equivalentemente, $\|f - (f_1 + f_2)\|_{A_2} < \dfrac{\epsilon}{2^2}$.

En general, si $g_n = f - (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ con $\|g_n\|_{A_n} < \dfrac{\epsilon}{2^n}$, por el Teorema de Stone - Weierstrass, existe una función $f_{n+1} \in E$ tal que $\|g_n - f_{n+1}\|_{A_{n+1}} < \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}}$, equivalentemente $\|f - (f_1 + f_2 + \cdots + f_{n+1})\|_{A_{n+1}} < \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}}$.

Razonando por inducción obtenemos una sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ en E tal que la serie $\displaystyle\sum_{n\in N} f_n$ es localmente convergente y además $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in N} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto $f \in \sum\langle E\rangle$, lo que completa la prueba. ■

Una consecuencia directa del Lema 2.12 es el siguiente Corolario.

Corolario 2.13. *Cada función con valores reales definida sobre R puede ser expresada como la suma de una serie localmente convergente de polinomios.*

Otra consecuencia del Lema 2.12 es el siguiente resultado.

Corolario 2.14. *Sea X un espacio topológico completamente regular y E una subálgebra de $C(X)$ tal que E contiene las constantes y E^* separa débilmente conjuntos cero en X. Entonces $\sum\langle E\rangle = C(X)$.*

Demostración:

Sea $f \in C(X)$. Por la propiedad universal de compactificación de Stone-Čech βX, la función f puede ser extendida por una función continua $\widetilde{f} : \beta X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$.

Sea $Y = \beta X \setminus f^{-1}(\infty)$ y $\widehat{f} = \widetilde{f}\mid_Y$. Tenemos pues que Y es un espacio de Lindelöf localmente compacto y $\widehat{f} \in C(Y)$.

Por otro lado, se define $\widehat{E} = \{\widehat{g} : g \in E$ y $\widetilde{g}|_Y$ tiene valores en R $\}$ y, puesto que $E^* \subseteq \widehat{E}$ separa débilmente conjuntos cero de X, entonces $\widehat{E}$ separa débilmente puntos de Y.

Luego por el Lema 2.12 existe una serie $\displaystyle\sum_{n\in N}\widehat{g_n}$ localmente convergente, con $g_n \in E$ para todo $n \in N$, tal que $\widehat{f} = \displaystyle\sum_{n\in N}\widehat{g_n}$. Por lo tanto, $f = \displaystyle\sum_{n\in N} g_n \in \sum\langle E\rangle$ ■

Ahora probamos el resultado principal de aproximación de esta sección para espacios paracompactos localmente compactos. Para ello recordaremos el siguiente resultado de topología general.

Teorema 2.15. *Cada espacio topológico paracompacto localmente compacto X puede ser representado como la unión de una familia disjunta de subespacios clopen de X, donde cada uno de ellos tiene la propiedad de Lindelöf.*

Para la prueba ver Teorema 5.1.27 de [15].

Teorema 2.16. *Sea X un espacio topológico paracompacto localmente compacto y sea E una subálgebra de $C(X)$ que contiene a las constantes, que es un retículo y separa puntos y cerrados de X. Entonces $\sum\langle E\rangle = C(X)$.*

Demostración:

Si X es un espacio paracompacto localmente compacto por el Teorema 2.15 existe una familia $\{X_i\}_{i\in N}$ de subespacios Lindelöf clopen disjuntos dos a dos de X tal que $X = \bigcup_{i\in N} X_i$.

Para cada $i \in I$, X_i es un espacio de Lindelöf y localmente compacto, luego existe una sucesión de subconjuntos compactos $\{A_{n,i}\}_{n\in N}$ de X_i tal que $\bigcup_{n\in N} A_{n,i} = X_i$, y además $A_{n,i} \subseteq int_X(A_{(n+1),i})$ para cada $n \in N,\ i \in I$.

Definiremos inductivamente la partición de la unidad siguiente $\{\alpha_{n,i} : n \in N,\ i \in I\} \subseteq E$ tal que

$$\|1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,i}\|_{A_{n,i}} \leq \frac{1}{2^n};\ \text{ y } \quad coz(\alpha_{n,i}) \subseteq X_i. \tag{2.1}$$

En efecto, por el Teorema de Stone - Weierstrass, existe $g_{1,i} \in E$ tal que $\|1 - g_{1,i}\|_{A_{1,i}} \leq \frac{1}{2}$, y aplicando el argumento del Lema 2.5, existe $r_{1,i} \in E$ tal que $r_{1,i}(A_{1,i}) = \{1\}$ y $coz(r_{1,i}) \subseteq X_i$. Luego se toma $\alpha_{1,i} = r_{1,i}.g_{1,i}$.

Por otro lado, supongamos que para cada $i \in I$, tenemos definidas funciones $\{\alpha_{1,i}, \ldots, \alpha_{n,i}\}$ que cumplen (2.1) y de nuevo usando el Teorema de Stone - Weierstrass y el Lema 2.5 existen funciones $g_{n+1,i}$ y $r_{n+1,i}$ en $E|_{A_{n+1}}$

tales que

$$\|(1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,i})-g_{n+1,i}\|_{A_{n+1,i}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad r_{n+1,i}(A_{n+1,i}) = \{1\} \text{ y } coz(r_{n+1,i}) \subseteq X_i.$$

Por tanto, si definimos $\alpha_{n+1,i} = r_{n+1,i}.g_{n+1,i}$ hemos obtenido la partición de la unidad $\{\alpha_{n,i}\}$ tal que $coz(\alpha_{n,i})$ es un espacio de Lindelöf localmente compacto para todo par $(n,\ i)$. Luego, aplicando el Lema 2.12, tenemos que

$$\sum\langle E\rangle|_{coz(\alpha_{n,i})} = C(X)|_{coz(\alpha_{n,i})}.$$

Así razonando como en la demostración del Lema 2.11 se prueba que $f \in \sum\langle E\rangle$, lo que completa la prueba. ■

Corolario 2.17. *Sean X e Y espacios topológicos tales que $X \times Y$ sea paracompacto localmente compacto. Entonces, para cada $f \in C(X \times Y)$, existen $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq C(X)$ y $\{g_j\}_{j\in J} \subseteq C(Y)$ tales que $f = \sum_{(i,j)\in I\times J} f_i.g_j$ es una serie localmente convergente.*

Demostración:
Si $C(X) \otimes C(Y) = \{\sum_{i=1}^{n} f_i g_i \,:\, f_i \in C(X),\ g_i \in C(Y),\ n \in N\}$, entonces $C(X) \otimes C(Y)$ es una subálgebra de $C(X \times Y)$ que contiene a las constantes y separa puntos de $X \times Y$.

Por otro lado, como X (respectivamente Y) es un espacio paracompacto localmente compacto, usando el Teorema 2.15, existe una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ (respectivamente $\{Y_j\}_{j\in J}$) de espacios Lindelöf clopen disjuntos dos a dos de X (Y respectivamente) tal que $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ (respectivamente $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$).

Entonces para cada $i \in I$ (respectivamente $j \in J$), existe una sucesión $\{A_{n,i}\}_{n \in N}$ (respectivamente $\{B_{n,j}\}_{n \in N}$) de subconjuntos compactos de X (respectivamente Y) tales que $\bigcup\limits_{n \in N} A_{n,i} = X_i$ y $A_{n,i} \subseteq int_X(A_{(n+1),i})$ para cada $n \in N,\ i \in I$ (respectivamente $\bigcup\limits_{n \in N} B_{n,j} = Y_j$ y $B_{n,j} \subseteq int_Y(B_{(n+1),j})$ para cada $n \in N,\ j \in J$).

Se define inductivamente la partición de la unidad siguiente

$$\{\alpha_{n,i,j} : n \in N,\ i \in N,\ j \in J\} \subseteq C(X) \otimes C(Y)$$

tal que

$$\|1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,i,j}\|_{A_{n,i} \times B_{n,j}} \leq \frac{1}{2^n} \text{ y } coz(\alpha_{n,i,j}) \subseteq X_i \times Y_j. \tag{2.2}$$

En efecto, usando el Teorema de Stone - Weierstrass, existe la función $g_{1,i,j} \in C(X) \otimes C(Y)$ tal que $\|1 - g_{1,i,j}\|_{A_{1,i} \times B_{1,j}} \leq \frac{1}{2}$, y luego usando el argumento del Lema 2.5, existe $r_{1,i} \in C(X)$ (respectivamente $s_{1,j} \in C(Y)$) tal que $r_{1,i}(A_{1,i}) = \{1\}$ y $coz(r_{1,i}) \subseteq X_i$ (respectivamente $s_{1,j}(B_{1,j}) = \{1\}$ y $coz(s_{1,j}) \subseteq Y_j$). Notemos que la función $\alpha_{1,i,j} = r_{1,i}s_{1,j}g_{1,i,j} \in C(X) \otimes C(Y)$.

Ahora supongamos que, para cualquier $(i,j) \in I \times J$, tenemos funciones definidas $\{\alpha_{1,i,j}, \ldots, \alpha_{n,i,j}\}$ cumpliendo la propiedad 2.2, luego por el Teorema de Stone - Weierstrass existen funciones

$$g_{n+1,i,j} \in C(X) \otimes C(Y),\ r_{n+1,i} \in C(X),\ s_{n+1,j} \in C(Y)$$

tales que

$$\|(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,i,j}) - g_{n+1,i,j}\|_{A_{n+1,i} \times B_{n+1,j}} \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$r_{n+1,i}(A_{n+1,i}) = \{1\}, \;\; s_{n+1,j}(B_{n+1,j}) = \{1\}$$

y

$$coz(r_{n+1,i}) \subseteq X_i, \;\; coz(s_{n+1,j}) \subseteq Y_j.$$

Por lo tanto, si definimos $\alpha_{n+1,i,j} = r_{n+1,i}s_{n+1,j}g_{n+1,i,j} \in C(X) \otimes C(Y)$, la familia $\{\alpha_{n,i,j}\}$ forma una partición de la unidad tal que $coz(\alpha_{n,i,j})$ es un espacio Lindelöf localmente compacto, para cada tripleta (n, i, j). Aplicando el Lema 2.11 tenemos que

$$\sum \langle C(X) \otimes C(Y) \rangle|_{coz(\alpha_{n,i,j})} = C(X \times Y)|_{coz(\alpha_{n,i,j})}.$$

Finalmente, razonando como en la demostración del Lema 2.8 se obtiene que $f \in \sum \langle C(X) \otimes C(Y) \rangle$, con lo que se completa la prueba. ■

Obviamente este resultado se extiende para productos finitos.

Corolario 2.18. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^m$ una familia finita de espacios topológicos tal que $\prod_{n=1}^{m} X_n$ es un espacio paracompacto localmente compacto. Entonces, para cada $f \in C(\prod_{n=1}^{m} X_n)$ existe $\{f_{n,i_n} : i_n \in I_n\} \subseteq C(X_n), \;\; 1 \leq n \leq m$, tal que $f = \sum_{(i_1,\ldots,i_m) \in \prod_{n=1}^m I_n} f_{i_1} \ldots f_{i_m}$ es una serie localmente convergente.*

2.3. Aproximación en Espacios Lindelöf

En esta sección consideramos el caso en el que los espacios no son necesariamente localmente compactos. Presentamos aquí algunos resultados sobre aproximación de funciones para espacios de Lindelöf.

Las siguientes definiciones son esenciales para la obtención del resultado principal de la sección.

Definición 2.11. *Una familia* $\{A_s\}_{s\in S}$ *de subconjuntos de un conjunto* X *se llama* ***estrella-finita*** *si para todo* $s_0 \in S$ *el conjunto* $\{s \in S : A_s \bigcap A_{s_0} \neq \phi\}$ *es finito.*

Definición 2.12. *Sea* E *un subespacio vectorial de* $C(X)$. *Diremos que* E S ***separa localmente conjuntos cero*** *si cumple las siguientes condiciones.*

- *Para cada par* $Z_1,\ Z_2 \in Z(X)$ *con* $Z_1 \cap Z_2 = \phi$ *y cada* $x \in X$ *existe una vecindad* U *de* x *tal que* E S*- separa a* $Z_1 \cap U$ *y* $Z_2 \cap U$.

- *Para cada par de subconjuntos* C *y* V *tal que* $C \subseteq V \subseteq U$, *donde* C *es cerrado y* V *es abierto en* X, *y para todo* $0 < \delta < 1/2$ *existe una función* $h \in E$ *tal que* $0 \leq h \leq 1,\ h(C) \subseteq (1-\delta, 1],$ *y* $h(X \setminus V) \subseteq [0, \delta)$.

El siguiente resultado de topología general se utilizará en lo que sigue.

Teorema 2.19. *Cada recubrimiento abierto de un espacio de Lindelöf tiene un refinamiento estrella finito de abiertos.*

Para la prueba ver Teorema 3.8.11 de [15].

Teorema 2.20. *Sea* X *un espacio topológico de Lindelöf. Si* E *es una subálgebra de* $C(X)$ *la cual es un retículo que contiene las constantes y* S *separa localmente conjuntos cero, entonces* $C(X) = \overline{\sum\langle E\rangle}$.

Demostración:

Sea $f \in C(X)$. Tomemos $0 < \epsilon < 1/2$ y un par de números reales $a < b$ fijos. Por hipótesis E S- separa localmente conjuntos cero, luego como $L_a(f)$ y $L^b(f)$ son dos conjuntos Lebesgue disjuntos de f, para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x tal que E separa $L_a(f) \cap U_x$ y $L^b(f) \cap U_x$. Como la familia $\{U_x\}_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto de X, por el Teorema 2.19, existe un refinamiento $\{A_i\}_{i \in I}$ localmente finito de abiertos.

Puesto que X es un espacio Lindelöf podemos asumir que la familia $\{A_i\}_{\in I}$ es estrella-finita, esto es, para cada A_j el conjunto $\{i \in I : A_i \bigcap A_j \neq \phi\}$ es finito, digamos de cardinal $n_j \in N$.

Por otro lado, como $E|_{A_i}$ S-separa $L_a(f) \cap A_i$ y $L^b(f) \cap A_i$, existe $h \in E_{A_i}$ tal que $0 \leq h_i \leq 1,\ h_i(L_a(f) \cap A_i) \subseteq [0, \epsilon)$ y $h_i(L^b(f) \cap A_i) \subseteq (1-\epsilon, 1]$.

Además, como todo espacio de Lindelöf es paracompacto, existe $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$. Luego, tomando $j \in I$ arbitrariamente y como E S- separa $Z(X) \cap A_i$, aplicando la Proposición 2.3 se sigue que α_j puede ser aproximado por funciones de $E|_{A_j}$. Por tanto, existe $\beta_j \in E|_{A_j}$ tal que $0 \leq \beta_j \leq 1$ y $\|\alpha_j - \beta_j\|_{A_j} < \dfrac{\epsilon}{n_j}$.

Además, como E S separa localmente conjuntos cero, existe $r_j \in E|_{A_j}$ tal que $0 \leq r_j \leq 1, \quad r_j(sop\ \alpha_j) \subseteq (1 - \dfrac{\epsilon}{n_j}, 1] \quad$ y $\quad r_j(X \setminus A_j) \subseteq [0, \dfrac{\epsilon}{n_j})$.

Definimos la función

$$\phi = \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i \in I} \beta_i r_i h_i.$$

Es claro que $\phi \geq 0$. Por otro lado, supongamos que x es un elemento arbitrario de A_j, entonces A_j intercepta a una subfamilia finita, es decir, $\{A_{i_1} \ldots A_{i_{n_j}}\}$. Entonces

$$\phi(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} \beta_{i_k}(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} (\alpha_{i_k}(x) + \frac{\epsilon}{n_j}) = 1$$

Por lo tanto, $0 \leq \phi \leq 1$.

Finalmente, suponiendo que x es un punto en $A_j \cap L^b(f)$,

$$\phi(x) = \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} (\beta_{i_k} r_{i_k} h_{i_k})(x) \geq$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} \{(\alpha_{i_k} r_{i_k} h_{i_k})(x) - \frac{\epsilon}{n_j}(r_{i_k} h_{i_k})(x)\} \geq$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} \{\alpha_{i_k}(x)(1-\epsilon)^2 - \frac{\epsilon}{n_j}\} \geq$$

$$\frac{(1-\epsilon)^2 - \epsilon}{1+\epsilon} = l_1(\epsilon).$$

De igual manera, si x pertenece a $A_j \cap L_a(f)$,

$$\phi(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} \{(\alpha_{i_k} r_{i_k} h_{i_k})(x) + \frac{\epsilon}{n_j}(r_{i_k} h_{i_k})(x)\} \leq$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} \sum_{1 \leq k \leq n_j} \{(\alpha_{i_k} r_{i_k})(x)\epsilon + \frac{\epsilon}{n_j} r_{i_k}(x)\epsilon\} \leq$$

$$\frac{\epsilon + \epsilon^2}{1+\epsilon} = l_2(\epsilon).$$

donde $\lim_{\epsilon \to 0} l_1(\epsilon) = 1$ y $\lim_{\epsilon \to 0} l_2(\epsilon) = 0$

Por todo lo anterior, concluimos que, para cada par de números reales $a < b$ y $\rho > 0$ existe una función

$$\phi_{(a,b,\rho)} = \sum_{i \in I} g_i = \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i \in I} \beta_i r_i h_i$$

definida por una suma localmente finita, tal que $g_i \in E$ para cada $i \in I$ y además, $0 \leq \phi_{(a,b,\rho)} \leq 1$, $\phi_{(a,b,\rho)}(L_a(f)) \subseteq [0,\rho)$, y $\phi_{(a,b,\rho)}(L^b(f)) \subseteq (1-\rho, 1]$.

Ahora, para cada $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < 1$ y $\forall\, n \in N$, tomemos una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$ y números $\{\rho_n\}$, donde

$$a_n = \frac{(n-1)\epsilon}{2}, \quad b_n = \frac{n\epsilon}{2} \text{ y } \rho_n = \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

y construimos la sucesión de funciones,

$$\phi_n = \phi_{(a_n,b_n,h_n)} = \sum_{i\in I} g_{n_i} \ \in E.$$

Finalmente, la serie

$$\phi = \sum_{n\in N} \phi_n = \sum_{n\in N}(\sum_{i\in I} g_{n_i}) \ \in \sum\langle E\rangle.$$

Por la Proposición 2.3 tenemos que $\|f-\phi\| < \epsilon$. Así, $f \in \overline{\sum\langle E\rangle}$ con lo que se completa la prueba. ■

Capítulo 3

Aproximación por Series en Espacios de Funciones Continuas Vectoriales

3.1. Notaciones y resultados previos

Sea X un espacio topológico completamente regular de Hausdorff no vacío y sea E un espacio vectorial normado. Denotaremos por $C(X, E)$ el conjunto de todas las funciones continuas de X en E.

En esta sección escribiremos $C(X) = C(X, R) = \{f : X \longrightarrow R \text{ continua }\}$

Definición 3.1. *Un espacio métrico X se llama* ***totalmente acotado o precompacto*** *si, para cada $\epsilon > 0$, los recubrimientos por abiertos $\{B(x, \epsilon) : x \in X\}$ de X tienen un subrecubrimiento finito.*

Definición 3.2. *Diremos que $F \in C(X,E)$ tiene* ***rango precompacto*** *si $F(X)$ es precompacto.*

Denotaremos por $C^*(X,E)$ el conjunto de todas las funciones continuas con rango precompacto de X en E.

Si $x \in E$ y $A \subseteq E$, la distancia de x al conjunto A será denotada por

$$d(x,A) = \text{ínf}\{\|x-a\| : a \in A\}$$

donde $\|.\|$ denota la norma en E, y además, consideramos el conjunto

$$B_\epsilon(A) = B(A,\epsilon) = \{x \in E : d(x,A) < \epsilon\}$$

Dotamos a $C(X,E)$ con la topología de convergencia uniforme. Así, para cada $F \in C(X,E)$ y $\epsilon > 0$, un entorno básico para F está definido por el conjunto de la forma

$$N_\epsilon(F) = \{G \in C(X,E) : \|F(x)-G(x)\| < \epsilon \quad \text{para todo } x \in X\}.$$

Si $F \in C(X,E)$, $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ y $S \subseteq X$ definimos

$$d_S(F,\mathcal{G}) = \text{ínf}\{\sup\{\|F(x)-G(x)\| : x \in S\} : G \in \mathcal{G}\}$$

(nótese que $d_S(F,\mathcal{G})$ puede ser $+\infty$).

Si $S \subseteq X$ y F es una función sobre X, escribimos $F|_S$ para la restricción de F sobre S.

Sea $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$, denotamos por $\mathcal{G}|_S = \{G|_S : G \in \mathcal{G}\}$.

La siguiente definición es esencial para el resto de la sección y permite generalizar el concepto de $\sum\langle E\rangle$, dado en la sección anterior.

Definición 3.3. *Sean* $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ *y* $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$*. Definimos* $\sum\langle \mathcal{A},\mathcal{G}\rangle$ *(respectivamente* $\sum\langle \mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f$*) como el conjunto de series* $\sum_{i\in I} h_i G_i$*, (respectivamente* $\sum_{i\in I} h_i G_i$*,* $|I|$ *finito) localmente convergentes, tales que* $\{h_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$*,* $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{G}$ *y además* $\{sop\, h_i\}_{i\in I}$ *es una familia localmente finita de subconjuntos de* X*.*

Nota 3.1. *Es claro que si* $\mathcal{G}$ *es un módulo sobre* $\mathcal{A}$ *con respecto a la multiplicación puntual de funciones entonces* $\sum\langle \mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f \subseteq \mathcal{G}$*, y si* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra de* $C(X)$ *que contiene la unidad, entonces la inclusión se convierte en una igualdad.*

Como en la Definición 1.5, denotamos por $\mathcal{A}(X)$ la familia de todos los $\mathcal{A}$- *conjuntos antisimétricos maximales* de X.

Definición 3.4. *Sean* $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ *y* $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$*. Diremos que* $\mathcal{A}$ ***refina*** $\mathcal{G}$ *cuando para cada recubrimiento abierto de la forma* $\mathcal{U}_\epsilon = \{\mathcal{U}_\epsilon(S)\}_{S\in\mathcal{A}(X)}$ *de* X*, donde* $\mathcal{U}_\epsilon(S) = G_S^{-1}(B_\epsilon(G_S(S)))$ *para algún* $G_S \in \mathcal{G}$*, existe una partición de la unidad localmente finita* $\{h_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$ *que está subordinada a* $\mathcal{U}_\epsilon$*.*

3.2. Aproximación de funciones de rango precompacto $C^*(X,E)$

Los siguientes Lemas serán usados en resultados importantes de la sección.

Lema 3.1. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq C(X), \mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ *y* $F \in C(X,E)$*.*

1. *Si* $\mathcal{A}$ *refina la familia* $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$, *entonces* $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$.

2. *Supongamos que* $\mathcal{A}(X)$ *está formada solamente de conjuntos con un único elemento y* $\mathcal{G}$ *contiene todas las funciones constantes. Si* $\mathcal{A}$ *refina* $\{F\}$ *entonces* $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f) = 0$.

Demostración:

1.- Sea $r = sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$.

Si $r = +\infty$, la prueba de 1) es trivial, por lo tanto podemos asumir para el resto de la prueba que $r < \infty$.

Sea $\epsilon > 0$, entonces para cada $S \in \mathcal{A}(X)$ existe $G_S \in \mathcal{G}$ tal que

$$d_S(F, G_S) < r + \epsilon. \tag{3.1}$$

Por otro lado, consideremos el recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\epsilon(S) : S \in \mathcal{A}(X)\}$ donde $U_\epsilon(S) = (F - G_S)^{-1}(B_\epsilon((F - G_S)(S)))$. Como $\mathcal{A}$ *refina* la familia $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$, existe una partición localmente finita de la unidad $\{h_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ que está subordinada a $\mathcal{U}$. Luego para cada $i \in I$, tenemos un $S_i \in \mathcal{A}(X)$ tal que *sop* $h_i \subseteq U_\epsilon(S_i)$, lo que permite definir

$$H = \sum_{i \in I} h_i G_{S_i} \in \sum\langle\mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle.$$

Se tiene que

$$\|F(x) - H(x)\| \leq \sum_{i \in I} h_i(x).\|F(x) - G_{S_i}(x)\| \quad \forall\, x \in X. \tag{3.2}$$

Para cada $x \in X$, como $\sum_{i\in I} h_i(x) = 1$, existe un h_i tal que $x \in sop\ h_i \subseteq U_\epsilon(S_i)$. Entonces $(F - G_{S_i})(x) \in B_\epsilon((F - G_{S_i})(S_i))$. Luego existe un $y \in S_i$ tal que $||(F - G_{S_i})(x) - (F - G_{S_i})(y)|| < \epsilon$. Usando (3.1) tenemos que $\|F(x) - G_{S_i}(x)\| < \epsilon + \|F(y) - G_{S_i}(y)\| < r + 2\epsilon$.

Como $\{h_i\}_{i\in I}$ es una partición de la unidad, aplicando el supremo en (3.2), tenemos que $d_X(F,H) \leq r + 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto se deduce que $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle) \leq r$.

2.- Sea $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$ tomamos $U_\epsilon(x) = F^{-1}(B_\epsilon(F(x)))$, y consideramos el recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\epsilon(x)\}_{x\in X}$. Por hipótesis, existe una partición localmente finita de la unidad $\{h_i\}_{\in I}$ que está subordinada a $\mathcal{U}$, luego para cada $i \in I$ tomamos $x_i \in X$ tal que $sop\ h_i \subseteq U_\epsilon(x_i)$, lo que permite definir

$$H = \sum_{i\in I} h_i F(x_i).$$

Procedemos como en 1) para obtener que $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle) \leq \epsilon$ y así completamos la prueba.

■

Lema 3.2. *Si* $\mathcal{A} \subseteq C^*(X)$, $\mathcal{G} \subseteq C^*(X,E)$ *y* $F \in C^*(X,E)$, *entonces* $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f) = d_X(F, \sum\langle\overline{\mathcal{A}},\mathcal{G}\rangle_f)$.

Demostración:

Sea $r = d_X(F, \sum\langle\mathcal{G},\overline{\mathcal{A}}\rangle_f)$ y $\epsilon > 0$. Probaremos que $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f) \leq r$.

En efecto, existe $H = \sum_{i=1}^{n} h_i.G_i, \in \sum\langle\overline{\mathcal{A}},\mathcal{G}\rangle_f$, con $h_i \in \overline{\mathcal{A}}$ y $G_i \in \mathcal{G}$, tal que $d_X(F,H) < r+\epsilon$. Por otro lado, como G_i tiene rango precompacto, existe

$k > 0$ tal que $\|G_i(x)\| \leq k$ para todo $x \in X$ e $i \in \{1, \dots, n\}$.

Además, como $h_i \in \overline{\mathcal{A}}$ entonces existe $g_i \in \mathcal{A}$ tal que $d_X(h_i, g_i) < \dfrac{\epsilon}{nk}$.
Tomemos $L = \sum_{i=1}^{n} g_i.G_i \in \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f$. Se cumple que

$$\|F(x) - L(x)\| \leq \|F(x) - H(x)\| + \|H(x) - L(x)\| < r + \epsilon + k.\frac{\epsilon.n}{n.k} = r + 2\epsilon$$

para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Luego $d_X(F, \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f) \leq r$.

Puesto que es obvio que $d_X(F, \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f) \geq r$, la prueba se completa. ■

Definición 3.5. *Si $F \in C(X, E)$ y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, diremos que $\mathcal{A}$* ***separa*** *F cuando para todo par de números reales r y t con $0 < r < t$, y cada $S \in \mathcal{A}(X)$, existe una función $h \in \mathcal{A}$, $h \geq 0$, y una constante real p tal que $h(F^{-1}(\overline{B_r(F(S))}) \geq p > 0$ y $h(X \setminus F^{-1}(B_t(F(S))) = 0$.*

Lema 3.3. *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra uniformemente cerrada de $C^*(X)$ que contiene a la unidad y sea $F \in C^*(X, E)$. Si $\mathcal{A}$ separa F entonces $\mathcal{A}$ refina $\{F\}$ finitamente.*

Demostración:

Para $S \in \mathcal{A}(X)$ y $r > 0$, definimos $U_r(S) = F^{-1}(B_r(F(S)))$ y $\overline{U}_r(S) = F^{-1}(\overline{B_r(F(S))})$.

Sea $\epsilon > 0$ y el siguiente recubrimiento de X, $\mathcal{V} = \{U_{\in/2}(S) : S \in \mathcal{A}(X)\}$.
Puesto que F es de rango precompacto, $\mathcal{V}$ tiene un subrecubrimiento finito $\{U_{\epsilon/2}(S_1), \dots, U_{\epsilon/2}(S_n)\}$.

Por hipótesis, $\mathcal{A}$ separa F, luego para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existen $g_i \in \mathcal{A}$ y $r_i \in R$ tales que $g_i(\overline{U}_{\epsilon/2}(S_i)) \geq r_i > 0$ y $g_i(X \setminus U_{2\epsilon/3}(S_i)) = 0$, siendo $g_i \geq 0$.

Notemos que $g = g_1 + \ldots + g_n$ pertenece a $\mathcal{A}$ y $g \geq p > 0$ para algún $p \in R$. Puesto que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo convergencia uniforme y contiene a la unidad, tenemos que $1/g \in \mathcal{A}$, lo que permite definir $h_i = \dfrac{g_i}{g} \in \mathcal{A}$ donde *sop* $h_i \subseteq U_\epsilon(S_i)$, con lo que es fácil ver que $\{h_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{V}$. Luego como se cumple $\forall\ \epsilon > 0$ por definición concluimos que $\mathcal{A}$ refina F.

■

Una aplicación directa de los Lemas anteriores son los siguientes resultados.

Teorema 3.4. *Sea $\mathcal{A} \subseteq C^*(X)$, conteniendo a la unidad y tal que cada elemento de $\mathcal{A}(X)$ está formado por un sólo elemento. Sea $\mathcal{G} \subseteq C^*(X,E)$ tal que contiene las funciones constantes. Si $\mathcal{A}$ separa $F \in C^*(X,E)$ entonces $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f) = 0$*

Demostración:

Por el Lema 3.2 podemos suponer que $\mathcal{A}$ es una subálgebra uniformemente cerrada de $C^*(X)$ que contiene la unidad y separa F. Por Lema 3.3 se deduce que $\mathcal{A}$ refina $\{F\}$ y, por el Lema 3.1 parte 2), se tiene que $d_X(F, \sum\langle\mathcal{G},\mathcal{A}\rangle_f) = 0$ ■

Teorema 3.5. *Sean X un espacio topológico compacto, $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ que contiene la unidad y $\mathcal{G}$ un subespacio vectorial de $C(X,E)$. Si $F \in C(X,E)$, entonces existe $S \in \mathcal{A}(X)$ tal que $d_X(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f) = d_S(F,\mathcal{G})$.*

Demostración:

Por el Lema 3.2 podemos suponer que $\mathcal{A}$ es una subálgebra uniformemente cerrada de $C(X)$, puesto $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ tienen los mismos conjuntos antisimétricos.

A fin de utilizar el Lema 3.1, primero probaremos que

$$\mathcal{A} \text{ refina finitamente a } \{F - G : G \in \mathcal{G}\}.$$

Para $\epsilon > 0$ consideremos el recubrimiento abierto $\mathcal{U}_\epsilon$ de X definido por los subconjuntos $\mathcal{U}_\epsilon(S) = (F - G_S)^{-1}(B_\epsilon((F - G_S)(S)))$, donde $G_S \in \mathcal{G}$, con $S \in \mathcal{A}(X)$. Como $S \subseteq \mathcal{U}_\epsilon(S) \subseteq X$, para cada $y \in X \setminus \mathcal{U}_\epsilon(S)$, existe $g_y \in \mathcal{A}$ tal que $g_y(S) \neq g_y(y)$. Puesto que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(X)$ que contiene a la unidad, podemos suponer que $g_y(S) = 1,\ g_y(y) = 0$ y $g_y \geq 0$ sobre X.

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la convergencia uniforme, podemos deducir que $\mathcal{A}$ es un retículo de funciones. Así, aplicando argumentos de compacidad concluimos que, para cada $S \in \mathcal{A}(X)$ existe $g_S \in \mathcal{A}$ que cumple $g_S(S) = 1,\ g_S(X \setminus \mathcal{U}_\epsilon(S)) = 0$ y $0 \leq g_S \leq 1$ donde *sop* $g_S \subseteq S$.

Ahora consideremos el recubrimiento de X definido por $\{g_S^{-1}((1/2, 1])\}_{S \in \mathcal{A}(X)}$. Puesto que X es compacto existe un subrecubrimiento finito $\{g_{S_j}^{-1}((1/2, 1])\}_{j=1}^n$ de X que permite definir $h_j = \dfrac{g_{S_j}}{\sum_{k=1}^{n} g_{S_k}} \in \mathcal{A},\quad 1 \leq j \leq n.$ Es fácil ver que $\{h_j\}_{j=1}^n$ es una partición de la unidad de X subordinada a $\mathcal{U}_\epsilon$, por lo tanto tenemos que $\mathcal{A}$ refina $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$. Por el Lema 3.1 y ser X compacto tenemos que

$$d_X(F, \sum \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle) = \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}. \tag{3.3}$$

Queda por demostrar que el supremo en la igualdad anterior es un máximo.

Primeramente, identificamos los elementos de $S \in \mathcal{A}(X)$ con puntos, mediante la relación

$$x \sim y, \text{si y sólo si } \exists\, S \in \mathcal{A}(X) \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq S$$

para obtener un espacio $\widehat{X}$ compacto.

En efecto, puesto que cada función perteneciente a $\mathcal{A}$ es constante sobre cada elemento S en $\mathcal{A}(X)$, para cada $h \in \mathcal{A}$, podemos definir la función $\widehat{h} : \widehat{X} \to R$ tal que $\widehat{h}(S) = h(x_S)$, donde x_S es un punto arbitrario de S, para cada $S \in \mathcal{A}(X)$.

Definimos $\widehat{\mathcal{A}} = \{\widehat{h} : \widehat{X} \longrightarrow R \text{ tal que } \ h \in \mathcal{A}\}$, luego dotamos a $\widehat{X}$ con la topología débil inducida por las funciones en $\widehat{\mathcal{A}}$. Es claro que $\widehat{X}$ es un espacio de Tychonoff que es la imagen continua de X por la función identificación. Por lo tanto, $\widehat{X}$ es compacto.

Ahora, para cada $G \in \mathcal{G}$, definimos la función

$$L_G : \widehat{X} \to R^+ \text{ tal que } L_G(S) = d_S(F, G) = \sup\{\|F(x) - G(x)\| : x \in S\}.$$

Probaremos que L_G es semicontinua superiormente sobre $\widehat{X}$.

Sea $\{S_\delta\}_{\delta \in D}$ es una red sobre $\widehat{X}$ que converge a un punto arbitrario S_0 de $\widehat{X}$. Sea $U_\epsilon = (F - G)^{-1}(B_\epsilon((F - G)(S_0)))$ un subconjunto abierto de X.

En la primera parte de la prueba, hemos demostrado que existe una función $h \in \mathcal{A}$ tal que $h(S_0) = 1$, $h(X \setminus U_\epsilon) = 0$ y $0 \leq h \leq 1$. Es decir, h define una función continua $\widehat{h}$ sobre $\widehat{X}$ con $\widehat{h}(S_0) = 1$. Luego existe $\delta_0 \in D$ tal que

$\widehat{h}(S_\delta) > 1/2$ para cada $\delta > \delta_0$. Se deduce que para $\delta > \delta_0$ y $x \in S_\delta$, tenemos $h(x) > 1/2$, esto implica que $x \in U_\epsilon$. Por lo tanto, $S_\delta \subseteq U_\epsilon$ para todo $\delta > \delta_0$ o, equivalentemente, $(F - G)(S_\delta) \subseteq B_\epsilon((F - G)(S_0))$ para cada $\delta > \delta_0$.

Por tanto,

$$\|F(x) - G(x)\| \leq \sup\{\|F(y) - G(y)\| : y \in S_0\} + \epsilon$$

para todo $x \in S_\delta$ y $\delta > \delta_0$.

Por la desigualdad anterior deducimos que

$$L_G(S_\delta) = d_{S_\delta}(F, G) \leq d_{S_0}(F, G) + \epsilon = L_G(S_0) + \epsilon$$

para todo $\delta > \delta_0$.

Esto prueba que L_G es semicontinua superiormente.

Por último, consideramos $L : \widehat{X} \to R^+$ definida por

$$L(S) = d_S(F, \mathcal{G}) = \text{ínf}\{L_G(S) : G \in \mathcal{G}\}.$$

Nótese que L es el ínfimo de una familia de funciones semicontinua superiormente. Por lo tanto, L es semicontinua superiormente sobre el compacto $\widehat{X}$. Como consecuencia existe $S_1 \in \widehat{X}$ tal que $L(S_1) = \sup\{L(S) : S \in \widehat{X}\}$.

Así concluimos que el supremo de la expresión (3.3) es en efecto un máximo y se completa la prueba. ■

Nota 3.2. *Si $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{A}$- módulo y $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(X)$ que contiene la unidad entonces $\sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f = \mathcal{G}$. En este caso el Teorema anterior dice que existe $S_0 \in \mathcal{A}(X)$ tal que $d_X(F, \mathcal{G}) = d_{S_0}(F, \mathcal{G})$.*

Teorema 3.6 (Machado). *Para cada espacio topológico compacto X, sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X, C)$ que contiene a la unidad y sea $\mathcal{G}$ es un subespacio vectorial de $C(X, E)$ que es un $\mathcal{A}$- módulo sobre $\mathcal{A}$. Si $F \in C(X, E)$, entonces existe $S \in \mathcal{A}(X)$ tal que $d_X(F, \mathcal{G}) = d_S(F, \mathcal{G})$.*

Demostración:

En la demostración $\mathcal{A}_R$ denotará la subálgebra de $\mathcal{A}$ formado por las funciones con valores reales en $\mathcal{A}$.

Sea L la colección de todos los conjuntos cerrados de X tal que $S \subseteq X$ pertenece a L, si existe $T \subseteq X$ verificando las siguientes propiedades:

1. $S \subseteq T$,

2. S es un conjunto antisimétrico para $(\mathcal{A}|_T)_R$ y

3. $d_S(F, \mathcal{G}) = d_X(F, \mathcal{G})$.

Es claro que L es no vacío puesto que $\mathcal{A}_R$, tiene por el Teorema 3.5, un conjunto antisimétrico verificando 3). Llamemos $r = d_X(F, G)$.

Procedemos a ordenar L de la siguiente forma:

Sean S y T pertenecientes a L. Diremos que $T \leq S$ cuando $S \subseteq T$ y S es un conjunto antisimétrico para $(\mathcal{A}|_T)_R$.

Probaremos que cada cadena en $(L, \leq)$ tiene una cota superior perteneciente a L.

Supongamos que $\{S_i : i \in I\}$ es una cadena en L, y sea $S = \bigcap\{S_i : i \in I\}$. Tenemos que S pertenece a L, de lo contrario existiría $G \in \mathcal{G}$ tal que

$d_S(F,G) < r$. Si $0 < r_1 < r$ es tal que $d_S(F,G) < r_1$ y si $U = \{x \in X : \| F(x) - G(x)\| < r_1\}$, entonces $S \subseteq U$ y, por compacidad, existiría $i \in I$ tal que $S_i \subseteq U$, lo cual es una contradicción. Así S pertenece a L y es una cota superior para la cadena.

Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $B \in L$. Además B es un conjunto antisimétrico para $\mathcal{A}$. De lo contrario $(\mathcal{A}|_T)_R$ sería un subconjunto antisimétrico propiamente incluido en B, y llegaríamos a una contradicción. Por lo tanto, B es un conjunto $\mathcal{A}$- antisimétrico y así se completa la prueba.

■

Definición 3.6. *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$. Dado $F \in C^*(X,E)$, se dice que $\mathcal{A}$* ***separa débilmente*** *a F, cuando para toda $B(a,r) \subseteq E$ y $\delta > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que cumple:*

1. $0 \leq f \leq 1$,

2. $f(F^{-1}(B(a,r))) = 1$ *y* $f(X \setminus F^{-1}(B(a,r+\delta))) = 0$.

Además diremos que $\mathcal{A}$ separa débilmente a una familia $\mathcal{F} \subseteq C^*(X,E)$ cuando $\mathcal{A}$ separa débilmente a F, $\forall\, F \in \mathcal{F}$.

Nota 3.3. *Es importante notar que si $\mathcal{A} = C(X)$, entonces $\mathcal{A}$ separa débilmente toda función $F \in C^*(X,E)$.*

Teorema 3.7. *Si $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ separa débilmente a $F \in C^*(X,E)$ y $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ contiene a las constantes, entonces $\sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f$ aproxima uniformemente a F.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Puesto que F tiene rango precompacto, existe $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ tal que

$$F(X) \subseteq B(F(x_1), \epsilon) \cup \dots \cup B(F(x_n), \epsilon).$$

Denotando por $B_j = B_\epsilon(F(x_j))$ y $B^j = B_{2\epsilon}(F(x_j))$, como $\mathcal{A}$ separa débilmente a $F \in C^*(X,E)$, se tiene que existe $h_j \in \mathcal{A}$, $1 \leq j \leq n$, tal que

1. $0 \leq h_j \leq 1$,

2. $h_j(F^{-1}(B_j)) = 1$ y $h_j(X \setminus F^{-1}(B^j)) = 0$.

Puesto que para todo $x \in X$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $F(x) \in B_j$ o, equivalentemente, $x \in F^{-1}(B_j)$, entonces, se cumple que $\sum_{j=0}^{n} h_j(x) > 0$.

Definamos por recurrencia las funciones

$$\begin{aligned}
g_1 &= h_1 \\
g_2 &= (1-h_1)h_2 \\
g_3 &= (1-h_1)(1-h_2)h_3 \\
&\vdots \\
g_n &= (1-h_1)(1-h_2)\dots(1-h_{n-1})h_n.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Es fácil ver que $\{g_i\}_{i=1}^n$ es una partición de la unidad en X subordinada a $\{F^{-1}(B^j) : 1 \leq j \leq n\}$.

Ahora, si $F(x) \in B_j$, tomamos $G(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)F(x_j) \in \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle_f$ ya que $F(x_j)$ es la función constante. Se tiene por (3.4) que

$$\|F(x) - G(x)\| = \|\sum_{j=1}^{n} g_j(x)F(x) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x)F(x_j)\| \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\|F(x) - F(x_j)\|$$

Puesto que $sop\ g_j(x) \subseteq B^j$, se deduce que $\|F(x) - F(x_j)\| < 2\epsilon$.

Por lo tanto, $\|F(x)-G(x)\| < 2\epsilon$, lo que demuestra que $\sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle_f$ aproxima uniformemente a F. ■

Nota 3.4. *Si $\mathcal{A}(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ decimos que $\mathcal{A}$ es **puntualmente constante**.*

Teorema 3.8. *Sean $F \in C^*(X,E)$ y $\mathcal{G} \subseteq C^*(X,E)$. Si $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ separa débilmente a la familia $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$ entonces*

$$d(F, \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle) \leq \sup\{d_S(F,\mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Demostración:

Sea $r = \sup\{d_S(F,\mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$. Si $r = +\infty$ no hay nada que probar.

Si $r < +\infty$ entonces, tomando $\epsilon > 0$ y $S \in \mathcal{A}(X)$, existe $G_S \in \mathcal{G}$ tal que

$$\|F(x) - G_S(x)\|_S < r + \epsilon \quad \forall\, x \in S.$$

Elegimos un elemento x_S en cada $S \in \mathcal{A}(X)$. En particular tenemos que

$$\|F(x_S) - G_S(x_S)\|_S < r + \epsilon \tag{3.5}$$

Por otro lado, $\forall\, S \in \mathcal{A}(X)$ el rango de la familia $L_S = F - G_S$ es precompacto puesto que tanto los rangos de F como de G_S son precompactos. Por lo tanto, $L(X) = \bigcup\{L(S) : S \in \mathcal{A}(X)\}$ es unión finita de precompactos, luego $L(X)$ será precompacto.

Como X es igual a la unión disjunta de $S \in \mathcal{A}(X)$, existe $\{x_{S_1}, x_{S_2} \ldots x_{S_n}\} \subseteq X$ tal que $L(X) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} B((F - G_{S_i})(x_{S_i}), \epsilon)$ donde $x_{S_i} \in S_i$. Por tanto

$\forall\, x \in X$, existe $S_i \in \mathcal{A}(X)$ tal que $L(x) \in B(L_{S_i}(x_{S_i}), \epsilon)$ Así tenemos

$$(F - G_{S_i})(x) \in B((F - G_{S_i})(x_{S_i}), \epsilon) \Leftrightarrow \|(F - G_{S_i})(x) - (F - G_{S_i})(x_{S_i})\| < \epsilon \tag{3.6}$$

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ separa débilmente a la familia $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$ en particular $\mathcal{A}$ separa débilmente a $\{F - G_{S_i} : 1 \leq i \leq n\}$

Entonces para cada $1 \leq i \leq n$ existe $h_i \in \mathcal{A}$ tal que

1. $0 \leq h_i \leq 1$,

2. $h_i((F - G_{S_i})^{-1}(B(F - G_{S_i})(x_{S_i}), r + \epsilon)) = 1$ y

   $h_i(X \setminus\ (F - G_{S_i})^{-1}(B(F - G_{S_i})(x_{S_i}), r + 2\epsilon)) = 0$.

Notemos que la serie $h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i(x) > 0$, lo que permite definir la función $g_i(x) = \dfrac{h_i(x)}{h(x)} \in \mathcal{A},\ \ 1 \leq i \leq n$. Se tiene entonces que $\{g_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{(F - G_{S_i})^{-1}(B_{r+\epsilon}(F - G_{S_i})(x_{S_i}))\}_{i=1}^{n}$

Luego tomando

$$H = \sum_{i=1}^{n} g_i G_{S_i} \in \sum \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle$$

se tiene que

$$\|F(x) - H(x)\| = \|\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(F(x) - G_{S_i}(x))\| \leq \|F(x) - G_{S_i}(x)\|.$$

para cierto $i,\ \ 1 \leq i \leq n$.

De (3.6) tenemos $\|F(x) - G_{S_i}(x)\|_{S_i} \leq \|(F - G_{S_i})(x_{S_i})\|_{S_i} + \epsilon,\ \ 1 \leq i \leq n$.

Finalmente, aplicando (3.5), se obtiene que $\|F - H\| \leq r + 2\epsilon$. Por tanto concluimos que $d(F, \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle) \leq r$. ∎

Corolario 3.9. *Sea $F \in C^*(X, E)$ y sea $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ tal que separa débilmente a $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$. Si $\mathcal{A}$ es puntualmente constante y $\mathcal{G}$ aproxima puntualmente a F, entonces $\sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F.*

Demostración:

Por el Teorema 3.8 tenemos

$$d(F, \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Puesto que $\mathcal{A}$ es puntualmente constante se tiene que $S = \{x\}$ y como $\mathcal{G}$ aproxima puntualmente a F, se tiene que $\forall\ \epsilon > 0$, $d_{\{x\}}(F, \mathcal{G}) < \epsilon$. Luego $d(F, \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle) \leq \epsilon$, por lo tanto, $\sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F. ∎

3.3. Aproximación de funciones de rango paracompacto y separable

Denotaremos por $\widetilde{C(X, E)}$ al conjunto de todas las funciones continuas $F : X \longrightarrow E$ tal que $F(X)$ es paracompacto.

Además la familia de todos los conjuntos cero de X será denotado por $Z(X)$.

Definición 3.7. *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$, diremos que $\mathcal{A}$ Z-* ***separa a*** *$F \in C(X, E)$, cuando $\forall\ U$ abierto de E, existe $h \in \mathcal{A}$ tal que*

$$h \geq 0 \quad y \quad Z(h) = X \setminus F^{-1}(U)$$

La definición anterior es equivalente a decir que $\forall\ C$ cerrado de E, se tiene que $Z(h) = F^{-1}(C)$.

Teorema 3.10. *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ tal que $\mathcal{A}$ Z- separa a $F \in \widetilde{C(X,E)}$ y además $\mathcal{G} \subseteq C(X,E)$ es un subálgebra que contiene a las constantes, entonces $\sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis $F(X)$ es paracompacto, entonces dado el recubrimiento $\{B(F(x),\epsilon)\}_{x\in X}$ de $F(X)$, existe un refinamiento $\{U_i\}_{i\in I}$ localmente finito. Por lo tanto para cada U_i existe un $x_i \in X$ tal que $U_i \subseteq B(F(x_i),\epsilon)$.

Por otra parte, como $\mathcal{A}$ Z- separa a F, entonces para cada $i \in I$ existe $h_i \in \mathcal{A}$ tal que $Z(h_i) = X \setminus F^{-1}(U_i)$, lo que permite afirmar que

$$h(x) = \sum_{i\in I} h_i(x) > 0 \ \ \forall\, x \in X,$$

está bien definida porque $\{U_i\}_{i\in I}$ es localmente finita. Luego usando el mismo razonamiento del Teorema 3.7 se tiene que existe $\{g_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}$ tal que $\sum_{i\in I} g_i(x) = 1$.

Tomando la función constante $F(x_i)$ y, definiendo

$$G(x) = \sum_{i\in I} g_i(x)F(x_i) \in \sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle,$$

se obtiene que $\|F(x) - G(x)\| \leq \epsilon$ con lo que $\sum\langle\mathcal{A},\mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F. ∎

Definición 3.8. *Un espacio topológico de Hausdorff es* ***separable*** *si contiene un subconjunto denso numerable.*

Denotaremos por $\widehat{C(X,E)}$ al conjunto de todas las funciones continuas $F : X \longrightarrow E$ tal que $F(X)$ es separable.

Definición 3.9. *Diremos que $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ es* ***uniformemente cerrada por inversos*** *si $\forall\ f \in \mathcal{A}$ se cumple que*

- $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$,
- $Z(f) = \phi \quad y \quad \dfrac{1}{f} \in \mathcal{A}$.

Definición 3.10. *Se dice que $\mathcal{A} \subseteq C(X)$* ***separa totalmente*** *a $F \in C(X, E)$ cuando para todo $B(a, r) \subset E$, y $\epsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que*

- $f(F^{-1}(B(a, r)) \subset (0, 1]$,
- $f(X \setminus F^{-1}(B(a, r + \epsilon))) = 0$.

Se dice que $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ separa totalmente a $\mathcal{F} \subseteq C(X, E)$ cuando separa totalmente a cada $F \in \mathcal{F}$.

Teorema 3.11. *Sea $\mathcal{A}$ uniformemente cerrada por inversos. Si $\mathcal{G} \subseteq \widehat{C(X, E)}$, $F \in \widehat{C(X, E)}$ y además $\mathcal{A}$ separa totalmente a $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$ entonces*

$$d(F, \sum \langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}.$$

Demostración:

Sea

$$r = \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}$$

Si $r = +\infty$ es trivial, podemos suponer pues que $r < +\infty$. Dado $\epsilon > 0, \forall\ S \in \mathcal{A}(X)$ existe $G_S \in \mathcal{G}$ tal que

$$\|F - G_S\|_S < r + \epsilon.$$

Para cada $x \in X$ existe $S_x \in \mathcal{A}(X)$ tal que $x \in S_x$ En particular tenemos que

$$\|F(x_i) - G_{S_x}(x_i)\|_{S_x} < r + \epsilon \tag{3.7}$$

Por otro lado, para cada $S \in \mathcal{A}(X)$ el conjunto $L_S = \{F(x) - G_{S_x}(x) : x \in S\}$ es separado por $\mathcal{A}$. Puesto que $\mathcal{G} \subseteq \widehat{C(X,E)}$ y $F \in \widehat{C(X,E)}$, existe $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que $L_S(X) \subseteq \bigcup_{j\in N} B((F - G_S)(x_{S_j}), \epsilon)$ donde $x_{S_j} \in S \in \mathcal{A}(X)$. Sea $x \in X$ entonces existe $i \in N$ tal que $L_S(x) \in B(L_S(x_i), \epsilon)$.

$$(F - G_S)(x) \in B((F - G_S)(x_{S_j}), \epsilon) \Leftrightarrow \|(F - G_S)(x) - (F - G_S)(x_{S_j})\| < \epsilon. \tag{3.8}$$

para todo $S \in \mathcal{A}(X)$.

Por hipótesis tenemos que para cada $j \in N$ existe $h_j \in \mathcal{A}$ tal que

1. $h_j \geq 0$,
2. $h_j(F^{-1}(B(x_{S_j}, r + \epsilon))) \subseteq (0, 1]$ y
3. $h_j(X \setminus F^{-1}(B(x_{S_j}, r + 2\epsilon))) = 0$.

Esto nos permite definir la función $g_j = \frac{1}{2^j} h_j \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\sum_{j\in N} g_j$ es uniformemente convergente, puesto que $\frac{1}{2^j}$ converge a cero y h_j es acotada. Luego $\varphi_j = \frac{g_j}{\sum_{j\in N} g_j} \in \mathcal{A}$, puesto que $\mathcal{A}$ es uniformemente cerrada por inversos. Se tiene que $\sum_{j\in N} \varphi_j = 1$.

Ahora tomando

$$H(x) = \sum_{j \in N} \varphi_j G_{S_j} \in \sum \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle$$

se tiene que

$$\|F(x) - H(x)\| = \| \sum_{j \in N} \varphi_j (F(x) - G_{S_j}(x))\| \leq \|F(x) - G_{S_i}(x)\|$$

para cierto i.

De (3.8) tenemos que $\|F(x) - G_{S_i}(x)\| < \|(F - G_{S_i})(x_{S_i})\| + \epsilon$ y de (3.7) se tiene que $\|F - H\| \leq r + 2\epsilon$, con lo que $d(F, \sum \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle) \leq r$.

■

Corolario 3.12. *Sean $\mathcal{G} \subseteq \widehat{C(X, E)}$, $F \in \widehat{C(X, E)}$ y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ tal que es uniformemente cerrada por inversos y separa totalmente a $\{F - G : G \in \mathcal{G}\}$. Si $\mathcal{A}$ es puntualmente constante y $\mathcal{G}$ aproxima puntualmente a F, entonces $\sum \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle$ aproxima uniformemente a F.*

Demostración:

Del Teorema 3.11 tenemos que

$$d(F, \sum \langle \mathcal{A}, \mathcal{G} \rangle) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}. \tag{3.9}$$

Puesto que $\mathcal{A}(X)$ es puntualmente constante tenemos que

$$d_{\{x\}}(F, \mathcal{G}) \leq \sup\{d(F(x), G(x)) : G \in \mathcal{G}\}$$

Por otro lado, como $\mathcal{G}$ aproxima puntualmente a F, tomando un $x \in X$ arbitrario pero fijo tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $G \in \mathcal{G}$ tal que

$d(F(x), G(x)) < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\sup\{d_{\{x\}}(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\} \leq \epsilon.$$

Luego de (3.2) se tiene que $d(F, \sum\langle\mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle) \leq \epsilon$, por lo tanto, $\sum\langle\mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle$ aproxima uniformemente a F. ■

Teorema 3.13. *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X)$ uniformemente cerrada por inversos. Si $\mathcal{G} \subseteq \widehat{C(X,E)}$, $F \in \widehat{C(X,E)}$ y $\mathcal{A}$ separa totalmente a F entonces*

$$d(F, \sum\langle\mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle) \leq \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}.$$

Demostración:

Sea

$$r = \sup\{d_S(F, \mathcal{G}) : S \in \mathcal{A}(X)\}.$$

Si $r = +\infty$ es trivial, luego podemos suponer que $r < +\infty$. Sea $\epsilon > 0$, entonces para $S \in \mathcal{A}(X)$, existe G_S tal que

$$\|F - G_S\| \leq r + \epsilon.$$

Para cada $x \in X$ existe S_x tal que $x \in S_x$. En particular tenemos que

$$\|F(x) - G_{S_x}(x)\|_{S_x} < r + \epsilon \tag{3.10}$$

Notemos que

$$Y = \bigcup\{B((F - G_{S_x})(x), \epsilon) : S_x \in \mathcal{A}(X), \ \ x \in X\}.$$

es un recubrimiento de $F(X) = Y$

Lo que significa que

$$(F - G_S)(x) \in B((F - G_S)(x_S), \epsilon) \Leftrightarrow \|(F - G_S)(x) - (F - G_S)(x_S)\| < \epsilon. \tag{3.11}$$

Además como Y es un espacio paracompacto (puesto que todo métrico es paracompacto), entonces existe un refinamiento $\{U_i\}_{i\in I}$ que es localmente finito, por lo tanto, para cada $i \in I$ existe $x_i \in X$ tal que $U_i \subseteq B((F - G_{S_{x_i}})(x_i), r + \epsilon)$, y además para cada $y \in Y$ existe una vecindad U de y tal que el conjunto $\{i \in I : U_i \cap U \neq \phi\}$ es finito.

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ Z- separa a F entonces para el recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ existe $g_i \in \mathcal{A}$ tal que $Z(g_i) = X \setminus F^{-1}(U_i)$, lo que significa que $g(X \setminus F^{-1}(U_i)) = 0$. Como $\{F^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ también es un refinamiento localmente finito se tiene que $\forall\ x \in X$ existe una vecindad U_x de x tal que $\{i \in I : F^{-1}(U_i) \cap F^{-1}(U_x) \neq \phi\}$ es finito, luego existe un número finito de $i \in I$ tales que $x \in F^{-1}(U_i)$ y $g_i(x) \neq 0$, así $\displaystyle\sum_{i\in I} g_i$ converge en U_x. Puesto que $\mathcal{A}$ es uniformemente cerrado por inversión, podemos definir para cada $i \in I$ la función $h_i = \dfrac{g_i}{\displaystyle\sum_{i\in I} g_i} \in \mathcal{A}$, que cumple $\displaystyle\sum_{i\in I} h_i = 1$.

Tomemos

$$H = \sum_{i\in I} h_i G_{S_{x_i}} \in \sum\langle \mathcal{A}, \mathcal{G}\rangle$$

Se tiene que

$$\|F(x) - H(x)\| = \|\sum_{j\in I} h_i(F(x) - G_{S_{ix_j}}(x))\| \leq \|F(x) - G_{S_{x_i}}(x)\|$$

De (3.11) tenemos que $\|F(x) - G_{S_{x_i}}(x)\| < \|(F - G_{S_{x_i}})(x_i)\| + \epsilon$ y de (3.10) se tiene que $\|F - H\| \leq r + 2\epsilon$, por lo tanto, $d(F, \sum\langle \mathcal{F}, \mathcal{G}\rangle) < r$. ■

Bibliografía

[1] F. Anderson. *Approximation in systems of real - valued continuous functions.* Trans.Amer.Math.Soc. 103 (1962), 249 - 271.

[2] R. Bartle. *The elements of real análysis.* Segunda Edición, New York, Editorial Wiley,(1976), 90 - 192, 315 - 346.

[3] E. Bishop. *A generalization of the Stone-Weierstrass Theorem.* Pacific J.Math.J.11 (1961), 777 - 783.

[4] R. L. Blair. *Extensions of Lebesgue sets and real - valued functions.* Czechoslovak Math.J. 31 (1981), 63 - 74.

[5] J. Blasco, A. Molto. *On the uniform clasure of a linear space of bounded real - valued funtions.* Annali di Matematica Pura ed Applicata 134 (4) 1983, 233 - 239.

[6] J. Blasco. *Hausdorff compactification and Lebesgue set.* Topology and its Application. 15 (1983), 111 - 117.

[7] J. Blasco. *Conjuntos de Lebesgue y compactaciones de un espacio topológico*. Rev. Real Acad. de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid. 78 (1984), 295 - 200.

[8] J. Blasco. *Complete bases and Wallman realcompactification*. Proc.Amer.Soc. 75 (1979), 114 - 117.

[9] B. Brosowski, F. Deutsch. *An elementary proof of the Stone-Weierstrass Theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 81, Nª1 (1981), 89 - 92.

[10] R. B. Burkel. *Bishop's Stone-Weierstrass Theorem*. Amer.Math.Monthly 91 (1984), 22-32.

[11] T. Carleman. *Sur un Théoreme de Weierstrass*. 1927

[12] Jean-Etienne Rombaldi. *Sur les theoremes de Stone-Weierstrass et de Korovkin*. 9 junio 2003.

[13] N. L. Carothes. *A short Ccourse on aproximation theory*. Department of Mathematics and Statistics, Bowling green State University,(1998).

[14] D. A. Edwards:. *A short proof of a Theorem of Machado*. Math.Proc. Cambridge Philos.Soc.99 (1986), 111 - 114.

[15] R. Engelking. *General Topology*. Polish Scientific, Warszawa 1977.

[16] J. Galindo, M. Sanchis. *Stone-Weierstrass type Theorems for group - valued fuctions*.

[17] J. Gomez. *Álgebra de funciones continuas intermedias entre $C^*(X)$ y $C(X)$*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.1997.

[18] L. Gillman and M. Jerison. *Rings of continuous functions*. Van Nostrand, Princenton.1960.

[19] A. Hager. *On inverse-closed subalgebras de $C(X)$*. Proc. London. Math. Soc.III Ser.19 (1969) 233 - 257.

[20] A. Hager. *An approximation tecnique for real- valued functions*. General Topololy and its Applications, 1 1971, 127 - 133.

[21] M. Henriksen. *Unsolved problems on algebraic aspects de $C(X)$*. Lecture Notes in Pure and Appl.Math, 95, Dekker, New York,1985.

[22] S. Hernández. *Approximation and extension of continuous functions*. J. Austral. Math.Soc.(Series A) 57 (1994), 149 - 157.

[23] S. Hernández. *Algebra de funciones continuas*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. 1983.

[24] E. Hewitt. *Certain representation of the Weierstrass approximation theorem*. Ducke Math, 14 (1947), 419 - 427.

[25] R. Jewett. *A variation on the Stone-Weiertrass Theorem*. Proceedings of the American Mathematical Society,Vol 14, Nª5 (1963), 690 - 693.

[26] S. Kakutani. *Concrete representation of abstract (M)-space*. Annals of Math., 42 (1941), 994 - 1024.

[27] S. Machado. *On Bishop's generalization of the Stone-Weierstrass Theorem*. Indag.Math.39 (1977), 218 - 224.

[28] S. Mrówka. *On some approximation Theorems*. Nieuw Archief voor Wiskunde,XVI (1968), 94 - 111.

[29] F. Montalvo. *Uniform approximation theorems for real-valued continuous function*. Topology and its Application 45 (1992), 145 - 155 North-Holland.

[30] F. Montalvo y M. I. Garrido. *On some generalizations of the Kakutani-Stone and Stone-Weierstrass Theorems*. Acta Math.Hung.(1993), 199 - 208.

[31] F. Montalvo y M. I. Garrido. *Generation of uniformly closed álgebras of functions*. Positivity, 8 2005, 8195.

[32] F. Montalvo y M. I. Garrido. *Algebraic properties of the uniform closure of space of continuous function*. Annals of the New York . Academy of Sciences. Volumen 788, (1996).

[33] F. Montalvo y M. I. Garrido. *Generation of the uniformly continuous functions*. Topology and its Application, 137 2004, 167174.

[34] M. I. Garrido. *Aproximación uniforme en espacios de funciones continuas*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura (1990).

[35] A. Pinkus. *Weierstrass and Approximation Theory.*

[36] A. Pinkus. *Density in Approximation Theory.*

[37] A. Pinkus. *Density methods and results in Approximation Theory.* Orlicz Centenary Volume. Banach Center Publication, Volume 64.(2004).

[38] J. Prolla. *Weirstrass-Stone the theorem.* Velag Peter Lang GmbH ,Frankfurt am Main 1993.

[39] T. J. Ransford. *One Short elementary proof of the Stone-Weierstrass - Bishop Theorem.* Math, Proc. Cambridge Philos.Soc. 96(1984), 309 - 311.

[40] E. Rojas. *Aproximación en espacios de funciones continuas.* Trabajo de Investigación - DEA, Universidad Jaume I,Castellón (2006).

[41] W. Rudin. *Análisis funcional.* Editorial Reverté, S.A.- 1979.

[42] Y. Sterfeld. *Dense subgroups of $C(K)$ Stone-Weierstrass type Theorems for groups.* Constructive Approximation. 6:339 - 351 (1990). Springer - Verlag New York Inc.

[43] Y. Sternfeld, Y. Weit. *An Approximation theorem for vector-valued function. In: Geometric Aspects Functional Analysis.* Lecture Notes in Mathematics. Belin: Springer-Verlag - 1998.

[44] M. H. Stone. *A generalized Weierstrass approximation theorem.* Math. Magazine, 21 (1948),167 - 184, 237 - 254.

[45] K. Weierstrass. *Sur la possibilité dúne représentation analytique des fonctions dites arbitraires dúne variable réelle*. J.Math.Pure et Appl. 2 (1886) 115 - 138.