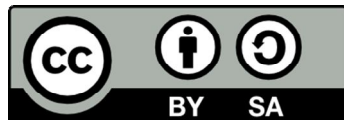




UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Competència d'Indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària

Gemma Sala Sebastià



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència [Reconeixement- Compartitqual 3.0. Espanya de Creative Commons](#).

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia [Reconocimiento - Compartitqual 3.0. España de Creative Commons](#).

This doctoral thesis is licensed under the [Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0. Spain License](#).



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

FACULTAT D'EDUCACIÓ

TESI DOCTORAL

Programa de doctorat

Formació del Professorat: Pràctica Educativa i Comunicació

Línia d'investigació: Didàctica de la Matemàtica

Competència d'Indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària

Presentada per **Gemma Sala Sebastià** per optar al títol de
Doctora per la Universitat de Barcelona

Director Tutor: Dr. Vicenç Font Moll

Juny 2016



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

FACULTAT D'EDUCACIÓ

TESI DOCTORAL

Programa de doctorat

Formació del Professorat: Pràctica Educativa i Comunicació

Línia d'investigació: Didàctica de la Matemàtica

**Competència d'Indagació matemàtica en
contextos històrics a Primària i Secundària**

Presentada per **Gemma Sala Sebastià** per optar al títol de
Doctora per la Universitat de Barcelona

Director Tutor: Dr. Vicenç Font Moll

Juny 2016



Aquesta obra està subjecta a una llicència de [Reconeixement-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

AGRAÏMENTS

Haig de confessar que no sé ben bé com he pogut arribar fins aquí: sé que jo sola no hi hagués arribat mai.

Moltes Gràcies

Primer de tot, vull agrair a en Vicenç Font, el meu director de tesi, tot el tros de vida que m'ha dedicat, ell és el màxim responsable que la tesi estigui escrita. Però a més a més, és qui va fer possible que em pogués iniciar en la investigació, ja que gràcies al seu assessorament vaig poder aconseguir la beca que ho va fer realitat. És algú amb qui sempre hi pots comptar i que es fa estimar!

Gràcies a en Joaquim Giménez per totes les idees que m'ha donat i tants altres moments. A la Berta Barquero, per la seva especial col·laboració en la seqüència didàctica de 1714 i totes les converses compartides, també personals. A en Mario Barajas i l'equip del MCSquared per donar-me l'oportunitat de treballar amb ells. També a en Nacho Monreal per donar-me tants cops de mà com li vaig anar demanant i a la Sílvia Alcaraz per la seva alegria mentre vam compartir taula.

Vull donar gràcies a tothom que ha col·laborat amb els meus “experiments” amb tanta paciència, obrint-me les portes de bat a bat: l'escola Salvador Espriu i l'escola Betúlia de Badalona i, especialment, al seu alumnat i a les mestres i professores que m'han ajudat: la Rosa Pla, en Joan Molar, la Maria Rosa Puig i la Teresa Dimas.

Al Museu de Badalona, més concretament a la Pepita Padrós, l'Esther Gurri, la Montserrat Carreras i la Margarida Abras, perquè és evident que m'han ajudat molt facilitant-me les seves publicacions i dedicant-me el seu temps i el seus coneixements sobre la història de la nostra ciutat.

A la Imma Casals li vull donar les gràcies perquè m'ha facilitat la recerca dels llibres de la Biblioteca Can Casacuberta de Badalona.

A la gent del Departament: la que hi és sempre, especialment a la Roser Codina per ser com és, i la que hi ha passat deixant-hi els seus moments, com la Yuly Vanegas, la Kaouthar Boukafri, l'Adriana Breda, la Maria José Seckel, la Sílvia Carvajal.

A les meves més amigues, la Mauri, la Maria i la Mònica, que sé que m'estimen igualment encara que faci tants dies que no els hi faig ni cas.

I a la meva família, molt especialment, a en Tomàs, la Lola i en Joan, també a la Clara, la meva germana, perquè són qui de més a prop han patit les conseqüències del meu estat de doctoranda, algunes vegades insuportable, ho sé! Gràcies també per la paciència i el recolzament. Us estimo fins a l'infinit i més enllà!

I finalment, als meus pares, gràcies.

Aquesta Tesi Doctoral ha estat realitzada en el marc del Grup de Recerca Consolidat GRUP DE RECERCA ENSENYAMENT I APRENENTAGE VIRTUAL (GREAV) i els següents projectes d'investigació:

- 1) Projecte I+D EDU2012-32644 del Ministerio de Economía y Competitividad de España “DESARROLLO DE UN PROGRAMA POR COMPETENCIAS EN LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES DE SECUNDARIA DE MATEMATICAS”.
- 2) Projecte I+D EDU2015-64646-P del Ministerio de Economía y Competitividad de España “DESARROLLO DE LA COMPETENCIA EN ANALISIS DIDACTICO EN LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES DE MATEMATICAS DE PRIMARIA Y DE SECUNDARIA. SU IMPACTO EN OTRAS COMPETENCIAS”.
- 3) Projecte 610467 del Seventh Framework Programme for Research (FP7). Information and Communication Technologies (European Commission) “A COMPUTATIONAL ENVIRONMENT TO STIMULATE AND ENHANCE CREATIVE DESIGNS FOR MATHEMATICAL CREATIVITY (MC SQUARED)”.

Una menció especial a l'Agència de Gestió i Ajuts Universitaris i de Recerca per la Beca d'Ajuts per contractació de personal investigador novell FI-DGR 2013 atorgada, gràcies a què he pogut realitzar aquesta Tesi Doctoral en la Facultat d'Educació de la Universitat de Barcelona.

Resum

La present tesi doctoral resumeix el treball d'investigació realitzat amb els objectius principals de definir i caracteritzar una competència bàsica, anomenada competència d'indagació, i el pensament matemàtic creatiu, així com, promoure'n el seu desenvolupament per avaluar-lo, mitjançant seqüències didàctiques de context històric dissenyades amb aquesta finalitat.

Aquesta competència d'indagació —definida com la capacitat de formular-se preguntes d'investigació i intentar respondre-les fent ús de les matemàtiques— s'entén com una competència transversal, que l'alumnat hauria de desenvolupar durant les etapes de Primària i Secundària i que podria continuar desenvolupant en la següent etapa educativa, ajustant-se aleshores a la definició del currículum de Batxillerat per a la competència d'indagació. Per promoure el desenvolupament d'aquesta competència i poder avaluar-ne el seu desenvolupament s'han dissenyat tres seqüències didàctiques de context històric que han estat implementades amb alumnat de Primària i Secundària en dues escoles de Badalona. Aquestes seqüències s'anomenen «Viure a Baetulo», «1714: les dades de la derrota» i «Què amaguen aquestes ruïnes?». En aquest treball es descriuen el seu disseny i l'anàlisi de la implementació.

Pel que fa al pensament matemàtic creatiu, s'assumeix la definició i caracterització proposada en el marc del projecte europeu MCSquared per adaptar una eina que ens va permetre avaluar-lo en la implementació de les tres seqüències didàctiques anomenades anteriorment. A més a més, en el marc d'aquest projecte es realitzà el redisseny de la seqüència «Què amaguen aquestes ruïnes?» per adaptar-la a una “c-unitat” (unitat didàctica creativa).

Els principals referents teòrics en que es basa el treball són diversos elements del Currículum relacionats amb les competències, alguns elements de l'Enfocament Ontosemiòtic, com la noció d'idoneïtat didàctica, i els Recorreguts d'Estudi i Investigació desenvolupats per la Teoria Antropològica d'allò Didàctic. Per dur a terme la investigació s'ha seguit una metodologia qualitativa que ens ha permès descriure, comprendre i interpretar el que va succeir en el transcurs de les implementacions i fer-ne una anàlisi detallada.

Així doncs, amb aquesta investigació s'han pogut realitzar una proposta de caracterització de la competència d'indagació per a l'ensenyament obligatori (definició, desenvolupament i descriptors), així com, del pensament matemàtic creatiu. També s'han dissenyat sengles eines per avaluar-ne el seu desenvolupament. S'ha pogut evidenciar la important relació entre els components de la competència d'indagació i els components del pensament matemàtic creatiu.

Per últim, s'ha pogut determinar que els contextos històrics usats en el disseny de seqüències didàctiques com elements generadors d'una investigació matemàtica, on tant el context com les matemàtiques són rellevants i faciliten el desenvolupament de la competència d'indagació i del pensament matemàtic creatiu de l'alumnat participant.

Abstract

The present doctoral thesis sums up the research work done, which its main purposes are to define and characterise this basic competence called ‘inquiry competence’ and the creative mathematical thought, as well as to foster its development in order to evaluate it by didactic sequences of historical context, designed with this aim.

This inquiry competence – defined as the ability to self-asking investigation questions and trying to answer them by using mathematics – is understood as a transverse competence, which the student body should have to develop during Primary and Secondary stages and could keep on developing during the following educative stage, getting adjusted to the definition of the Batxillerat curricula for the investigation competence. So as to promote the development of this competence and be able to assess its development, three didactic sequences of historical context have been designed. They have been implemented with Primary and Secondary student body in two different schools in Badalona. These sequences are called «Viure a Baetulo», «1714: les dades de la derrota» and «Què amaguen aquestes ruïnes?». In this work there are described its design and its implementation analysis

About the creative mathematical thought, its definition and characterisation is assumed as the ones proposed by the frame of the European project MCSquared in order to adapt a tool which allowed us to assess it in the implementation of the three didactic sequences previously named. In addition, it will be in the frame of this project that it will be made the redesign of the sequence «Què amaguen aquestes ruïnes?» so as to adapt it to a “c-unit” (creative didactic unit).

The main theoretical referents in which this work is based on are the different elements of the curriculum related to the competences, some elements of the Ontosemiotic Approach, as the didactic suitability notion, and the Study and Investigation Courses developed by the Anthropological Theory of the Didactic. A qualitative methodology has been used, which has allowed us to describe, comprehend and interpret the implementations and doing an accurate analysis.

Therefore, with this investigation it has been possible to make a characterisation proposal about the inquiry competence for the obligatory education (definition, development and describers), as well as, about the creative mathematical thought. It has been possible to prove the important relation between the components of the inquiry competence and the components of the creative mathematical thought.

Finally, it has been determined that the historical contexts used in the design of the didactic sequences as elements which generate a mathematical investigation, where the context and the mathematics are both relevant they facilitate the development of the inquiry competence and the creative mathematical thought of the participant students.

Resumen

La tesis doctoral que se presenta resume el trabajo de investigación realizado con los objetivos principales de definir y caracterizar una competencia básica, llamada competencia de indagación, y el pensamiento matemático creativo, así como, promover su desarrollo para poder evaluarlo, mediante secuencias didácticas de contexto histórico diseñadas con esta finalidad.

Esta competencia de indagación —definida como la capacidad de formularse preguntas de investigación e intentar responderlas haciendo uso de las matemáticas— se entiende como una competencia transversal, que el alumnado debería de desarrollar durante las etapas de Primaria i Secundaria y que podría continuar desarrollando en la siguiente etapa educativa, ajustándose entonces a la definición del currículum de Bachillerato para la competencia de investigación. Para promover el desarrollo de esta competencia y poder evaluar su desarrollo se han diseñado tres secuencias didácticas de contexto histórico que han sido implementadas con alumnado de Primaria y Secundaria en dos escuelas de Badalona. Se les ha dado los nombres de «Vivir en Baetulo», «1714: los datos de la derrota» y «¿Qué esconden estas ruinas?». En este trabajo se describen el diseño y el análisis de su implementación.

En relación al pensamiento matemático creativo, se asume la definición y caracterización propuesta en el marco del proyecto europeo MCSquared para adaptar una herramienta que nos permitió evaluarlo en la implementación de las tres secuencias didácticas mencionadas anteriormente. Además, en el marco del citado proyecto se realizó el rediseño de la secuencia «¿Qué esconden estas ruinas?» para adaptarla a una “c-unidad” (unidad didáctica creativa).

Los principales referentes teóricos en que se ha basado el trabajo son diversos elementos del Currículum relacionados con las competencias, algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico, como la noción de idoneidad didáctica, y los Recorridos de Estudio e Investigación desarrollados por la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Per realizar la investigación se ha seguido una metodología cualitativa que nos ha permitido describir, comprender e interpretar lo que sucedió en el transcurso de las implementaciones i hacer de ello un análisis detallado.

De este modo, con esta investigación se ha podido realizar una propuesta de caracterización de la competencia de indagación para la enseñanza obligatoria (definición, desarrollo y descriptores), así como, del pensamiento matemático creativo. También se han diseñado sendas herramientas para evaluar su desarrollo. Se ha podido evidenciar la importante relación entre los componentes de la competencia de indagación y los componentes del pensamiento matemático creativo.

Finalmente, se ha determinado que los contextos históricos usados en el diseño de secuencias didácticas como elementos generadores de una investigación matemática, donde tanto el contexto como las matemáticas son relevantes, facilitan el desarrollo de la competencia de indagación y del pensamiento matemático creativo del alumnado.

ÍNDEX

VOLUM 1

CAPÍTOL 1: Problema de investigació, justificació i objectius	1
1.1.El problema d'investigació i la seva rellevància.....	2
1.2. Objectius de la investigació.....	5
1.3. Estructura de la memòria.....	6
CAPÍTOL 2: Marc teòric	11
2.1. La noció de competència.....	12
2.2. La noció de competència bàsica.....	14
2.3. La competència matemàtica en els documents curriculars.....	16
2.4. Contextos extramatemàtics i històrics.....	18
2.4.1. Dos usos del terme “context”.....	20
2.4.2. Classificació dels problemes contextualitzats.....	23
2.5. Disseny de tasques.....	24
2.5.1. Idoneïtat didàctica.....	26
2.5.2. Recorreguts d'Estudi i Investigació.....	30
2.6. Consideracions de la didàctica de la història en l'estudi de la història local....	30
2.7. La competència d'indagació: un pont entre les competències bàsiques de l'ESO i la competència d'investigació del Batxillerat.....	32
2.8. Pensament matemàtic creatiu.....	38
CAPÍTOL 3: Metodologia	41
3.1. Característiques metodològiques.....	42
3.2. Premisses de la investigació	43
3.3. Presentació dels casos d'estudi.....	43
3.3.1. Primer estudi de cas.....	43
3.3.2. Segon estudi de cas.....	44
3.3.3. Tercer estudi de cas.....	49
3.3.4. Quart estudi de cas	53
3.4. Fases de la investigació.....	55
3.5. Estratègies de triangulació de dades i resultats.....	59

CAPÍTOL 4: Competència d'indagació i pensament matemàtic creatiu	63
4.1. Una proposta de caracterització de la competència d'indagació.....	64
4.1.1. Caracterització de la competència d'indagació.....	64
4.2. Pensament matemàtic creatiu.....	68
4.3. El pensament matemàtic creatiu en el projecte MCSquared	69
4.4. Caracterització i avaluació del pensament matemàtic creatiu en el MCSquared..	70
4.4.1. Els processos de l'enfocament ontosemiòtic.....	70
4.5. Relació entre els components de la competència d'indagació i els components del PMC.....	84
CAPÍTOL 5: Ús de la història en l'ensenyament de les matemàtiques	87
5.1. Consideracions de l'ús de la història en l'ensenyament de les matemàtiques.....	88
5.1.1. Influència de la història en les creences o concepcions existents en l'ensenyament de les matemàtiques.....	89
5.1.2. La història ens dona informació sobre els errors i les dificultats dels alumnes.....	92
5.1.3. La reflexió sobre la història de les matemàtiques ha permès explicitar l'emergència dels objectes matemàtics.....	93
5.1.4. La història ens permet una visió de la complexitat dels objectes matemàtics.....	98
5.1.5. La història com a innovació en l'ensenyament de les matemàtiques.....	100
5.1.6. Aporta el coneixement de l'evolució històrica del contingut matemàtic que és objecte d'ensenyament.....	103
5.2. Aspectes històrics contemplats en les propostes d'innovació dels Treballs de Fi de Màster de professors de matemàtiques de Secundària.....	104
5.2.1. Un primer estudi de cas de tipus naturalista.....	104
5.2.2. Segona mirada a l'estudi de cas de tipus naturalista.....	107
5.3. El paper del context històric quan s'utilitza com a element motivador.....	110
CAPÍTOL 6: La seqüència didàctica «Viure a Baetulos»	115
6.1. Justificació de la selecció del context històric.....	116
6.2. Descripció del disseny de la seqüència didàctica.....	119
6.3. Anàlisi de la potencialitat de la seqüència didàctica per desenvolupar CI i PMC	140
6.4. Anàlisi del desenvolupament de la CI i de PMC amb la implementació.....	146
6.4.1. L'escola on es va realitzar la implementació.....	149
6.4.2. Descripció del grup d'alumnat participant.....	150
6.4.3. Desenvolupament de la CI i del PMC durant la sessió 9.....	151
6.4.4. Notes sobre el desenvolupament de la CI i el PMC durant la sessió 10 i posteriors.....	179
6.5. Resultats sobre el desenvolupament de la CI i el PMC en la seqüència didàctica.....	181

CAPÍTOL 7: Les seqüències «Valorant els fets de 1714» i «1714: les dades de la derrota»	187
7.1. Justificació de la selecció del context històric.....	188
7.2. Descripció del disseny de la seqüència didàctica.....	190
7.2.1. Descripció del disseny de la seqüència original «Valorant els fets de 1714».....	190
7.2.2. Descripció del redisseny de la seqüència «1714: les dades de la derrota»	209
7.3. Anàlisi de la potencialitat de la seqüència didàctica per desenvolupar CI i PMC	232
7.4. Anàlisi del desenvolupament de la CI i de PMC amb la implementació.....	240
7.4.1. L'escola on es va realitzar la implementació.....	241
7.4.2. Descripció del grup d'alumnat participant.....	242
7.4.3. Desenvolupament de la CI i el PMC durant la implementació.....	243
7.5. Resultats sobre el desenvolupament de la CI i el PMC en la seqüència didàctica	260
 CAPÍTOL 8: La seqüència didàctica «Què amaguen aquestes ruïnes?»	 267
8.1. Justificació de la selecció del context històric.....	268
8.2. Descripció del disseny de la seqüència didàctica.....	269
8.3. Anàlisi de la potencialitat de la seqüència didàctica per desenvolupar CI i PMC	294
8.4. Anàlisi del desenvolupament de la CI i de PMC amb la implementació.....	301
8.4.1. L'escola on es va realitzar la implementació.....	301
8.4.2. Descripció del grup d'alumnat participant.....	302
8.4.3. Desenvolupament de la CI i el PMC durant la implementació.....	303
8.5. Resultats sobre el desenvolupament de la CI i el PMC en la seqüència didàctica	318
 CAPÍTOL 9: El redisseny de «Què amaguen aquestes ruïnes?» en c-book	 323
9.1. Marc del redisseny de la seqüència didàctica: el projecte MCSquared.....	324
9.2. El redisseny de la seqüència didàctica: el c-book.....	331
9.2.1. Descripció del c-book.....	331
9.2.2. Descripció de la metodologia d'implementació.....	347
9.3. Anàlisi quantitativa externa de la potencialitat del c-book per desenvolupar PMC.....	349
9.4. Resultats de les anàlisis.....	357
 CAPÍTOL 10: Conclusions	 361
10.1. Conclusions en relació al primer objectiu de la investigació.....	362
10.2. Conclusions en relació al segon objectiu de la investigació	364
10.3. Conclusions en relació al tercer objectiu de la investigació	365
10.4. Conclusions en relació al quart objectiu de la investigació	367
10.5. Limitacions del treball i perspectives futures.....	375
10.6. Difusió de resultats.....	376
 REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES.....	 379

VOLUM 2

ANNEXOS

Annexos Capítol 4

Annex 4.1	1
-----------	---

Annexos Capítol 6

Annex 6.1	7
Annex 6.2	20
Annex 6.3	25

Annexos Capítol 7

Annex 7.1	41
Annex 7.2	46
Annex 7.3	51
Annex 7.4	56
Annex 7.5	60
Annex 7.6	67
Annex 7.7	74
Annex 7.8	81
Annex 7.9	88
Annex 7.10	95
Annex 7.11	102
Annex 7.12	109
Annex 7.13	116
Annex 7.14	124
Annex 7.15	136
Annex 7.16	146
Annex 7.17	156
Annex 7.18	166
Annex 7.19	178
Annex 7.20	190
Annex 7.21	202
Annex 7.22	214
Annex 7.23	224
Annex 7.24	235
Annex 7.25	247
Annex 7.26	257
Annex 7.27	267

Annexos capítol 8

Annex 8.1	287
Annex 8.2	297
Annex 8.3	300
Annex 8.4	307

LLISTA DE TAULES I FIGURES

Taules

- Taula 2.1:** Components i descriptors de la idoneïtat epistèmica, 28
- Taula 2.2:** Un component de la idoneïtat cognitiva i els seus descriptors, 29
- Taula 2.3:** Components del criteri d'idoneïtat interaccional i els seus descriptors, 29
- Taula 2.4:** Un component del criteri d'idoneïtat emocional i els seus descriptors, 29
- Taula 2.5:** Habilitats necessàries per fer indagació i comprensions adquirides, 34
- Taula 3.1:** Esquema de les fases d'investigació, 56
- Taula 3.2:** Mètodes d'obtenció i recollida d'evidències, 62
- Taula 4.1:** Caracterització de la competència d'indagació, 67
- Taula 4.2:** Caracterització del Pensament Matemàtic Creatiu, 85
- Taula 4.3:** Relacions entre els components de la Competència d'Indagació i el Pensament Matemàtic Creatiu, 86
- Taula 6.1:** Seqüenciació de «Viure a Baetulo. Aquí s'aprèn investigant», 121
- Taula 6.2:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 1», 154
- Taula 6.3:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 2», 157
- Taula 6.4:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 3», 161
- Taula 6.5:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 4», 165
- Taula 6.6:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 5», 169
- Taula 6.7:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 6», 173
- Taula 6.8:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 7», 177
- Taula 6.9:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC de la sessió 9, 182
- Taula 7.1:** Seqüenciació de les sessions de «Valorant els fets de 1714», 193
- Taula 7.2:** Relació de dossiers d'investigació segons la temàtica d'investigació, 201
- Taula 7.3:** Seqüenciació de les sessions de «1714: les dades de la derrota», 213
- Taula 7.4:** Relació de dossiers d'investigació segons la temàtica o línia d'investigació de la seqüència didàctica redissenyada, 219
- Taula 7.5:** Taula realitzada pel Grup B4 sobre el recompte de focs d'assaonadors, 250

- Taula 7.6:** Taula realitzada pel Grup B4 sobre el recompte de focs de blanquers, 250
- Taula 7.7:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 3», 250
- Taula 7.8:** Síntesi buidatge de les evidències de CI i de PMC de tots els Moments, 253
- Taula 8.1:** Seqüenciació de les sessions de «Què amaguen aquestes ruïnes?», 273
- Taula 8.2:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 1», 307
- Taula 8.3:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 2», 311
- Taula 8.4:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 3», 314
- Taula 8.5:** Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 4», 316
- Taula 8.6:** Síntesi buidatge de les evidències de CI i de PMC de tots els Moments, 318
- Taula 9.1:** Mitjana, mediana i rang inter-quartílic dels quatre processos cognitius, 351
- Taula 9.2:** Comentaris d'avaluació classificats en les 5 categories del potencial, 352
- Taula 9.3:** Estadístics centrals resultants l'avaluació dels aspectes socials i afectius, 356

Figures

- Figura 2.1:** Conceptualització de competències, 14
- Figura 2.2:** Competències Bàsiques en el currículum de l'ensenyament obligatori de Catalunya, 15
- Figura 2.3:** El paper de les tasques en el desenvolupament i avaluació de les competències, 25
- Figura 4.1:** Model ontosemiòtic dels coneixements matemàtics, 75
- Figura 4.2:** Dues representacions de les dimensions seleccionades per a l'avaluació del potencial de creativitat matemàtica de dues c-unitats i representació del seu resultat gràfic-quantitatiu, 82
- Figura 5.1:** Components i relacions en una configuració epistèmica, 96
- Figura 5.2:** Configuracions epistèmiques de la noció de funció, 97
- Figura 5.3:** Recta tangent a la paràbola $f(x) = x^2$, 102
- Figura 5.4:** Problema original del tresor, 111
- Figura 5.5:** Imatge en el Google de l'àrea on pot estar el tresor, 112

- Figura 5.6:** Instruccions de l'adaptació del problema del mapa del tresor, 114
- Figura 6.1:** Captura de pantalla del blog de la seqüència, 119
- Figura 6.2:** Notícia de la troballa del tresor romà, 122
- Figura 6.3:** Informe arqueològic sobre la composició del tresor romà trobat, 123
- Figura 6.4:** Mapa de la planta hipotètica de *Baetulo* (en color marró) i els carrers de Badalona actual (en color negre) amb els diferents indrets on hi ha localitzats jaciments amb restes romanes, 124
- Figura 6.5:** Fotografia d'una placa de plom amb una recepta mèdica escrita en llatí «RHVS AD IOCVR SVRIACVM VN CIA DVODECIMA», que vol dir “Resina de Síria per curar el fetge, dotze unces”. Aquesta placa es va trobar a l'excavació de la Casa dels Dofins, 128
- Figura 6.6:** Fotos d'alguna de les vitrines de l'exposició permanent del Museu de Badalona on s'hi poden observar objectes relacionats amb alguns dels personatges que van viure a *Baetulo*, 129
- Figura 6.7:** Llista de problemes sobre compravendes en moneda romana, 134
- Figura 6.8:** Taula d'equivalències entre monedes romanes, 135
- Figura 6.9:** Full de treball primera activitat de la *Sessió 10*, calcular el valor en asos, 136
- Figura 6.10:** Taula amb dades sobre el cost de la vida a *Baetulo*, 137
- Figura 6.11:** Full de treball de la segona activitat de la *Sessió 10*, estimar el valor del tresor, 138
- Figura 6.12:** Full de treball de la darrera sessió on es recullen les hipòtesis finals argumentades, 140
- Figura 6.13:** Captura de pantalla de la web de l'escola Salvador Espriu, 150
- Figura 6.14:** Extracte full de treball del grup A, corresponent a la tasca de la sessió 8, 155
- Figura 6.15:** Extracte full de treball del grup B, corresponent a la tasca de la sessió 8, 155
- Figura 6.16:** Extracte full de treball del grup C, corresponent a la tasca de la sessió 8, 156
- Figura 6.17:** Extracte full de treball grup D, corresponent a la tasca de la sessió 8, 156
- Figura 6.18:** Tres exemples de respostes de diferents parelles d'estudiants al problema IV, 175
- Figura 6.19:** Dos exemples de respostes de diferents parelles d'estudiants al problema II, 175
- Figura 6.20:** Exemple de resposta d'una parella d'estudiants al problema II, 177
- Figura 6.21:** Exemples de les hipòtesis de tres equips d'indagació i els seus arguments sobre el propietari o propietària del tresor romà, 181

- Figura 7.1:** Captura de pantalla del blog de la seqüència, 190
- Figura 7.2:** Captura de pantalla del vídeo sobre la Guerra de Successió que es visiona durant la sessió 1, 195
- Figura 7.3:** Detall del full de treball per preparar l'exposició del mural de cada equip, 197
- Figura 7.4:** Detall del full de treball per prendre apunts de les exposicions i valorar-les, 197
- Figura 7.5:** Captura de pantalla d'una línia de temps confeccionada per un dels grups amb el recurs *Timetoast*, 198
- Figura 7.6:** Captura de pantalla de la part superior del blog, on se centra la Sessió3, 199
- Figura 7.7:** Detall del document “Guió de l'Informe d'investigació” inclòs en l'apartat «Documents comuns» del blog, 202
- Figura 7.8:** Detall de la plantilla per fer l'informe parcial al final de cada fase de la indagació, 203
- Figura 7.9:** Detall de la plantilla per complimentar abans de realitzar la interacció amb un altre equip al final de la primera fase de la indagació i abans de començar la segona fase, 203
- Figura 7.10:** Detall de la plantilla per escriure la primera versió del relat per presentar al concurs, 205
- Figura 7.11:** Detall del document d'identificació del pseudònim amb l'autor real del text, 206
- Figura 7.12:** Detall del document de coavaluació de textos, 207
- Figura 7.13:** Detall del document de coavaluació de textos, dors, 208
- Figura 7.14:** Captura de pantalla del blog de la seqüència redissenyada, 209
- Figura 7.15:** Instruccions per a la realització de la Tasca 1, el vídeo històric, 215
- Figura 7.16:** Detall del full de treball per escriure el guió del vídeo històric, 216
- Figura 7.17:** Detall del full de treball per escriure la *storyboard* del vídeo, 216
- Figura 7.18:** Detall dels criteris d'avaluació de la Tasca 1 inclosos en les instruccions de la tasca, 21
- Figura 7.19:** Detall dels ítems per fer la co-avaluació dels vídeos, 217
- Figura 7.20:** Captura de pantalla de la part superior del blog, on se centra l'activitat 2, 218
- Figura 7.21:** Detall de la primera plana del document “Model Informe d'Indagació” inclòs en l'apartat «Activitat 2: Investigacions matemàtiques» del blog, 229
- Figura 7.22:** Instruccions per dur a terme l'activitat 3, 231
- Figura 7.23:** Captura de pantalla de la web de l'escola Betúlia, 241
- Figura 7.24:** Captura de pantalla del qüestionari d'opinió, 245

- Figura 7.25:** Treball en equips d'indagació, 246
- Figura 7.26:** Gràfica realitzada pel Grup A2, 249
- Figura 7.27:** Gràfica realitzada pel Grup B4, inclosa al seu informe, 251
- Figura 7.28:** Treball en equips d'indagació, 252
- Figura 7.29:** Gràfic comparatiu de l'evolució dels gremis de Barcelona, 255
- Figura 7.30:** Càlculs realitzats per l'equip C3 a la primera etapa, 256
- Figura 7.31:** Càlculs realitzats per l'equip C3 del temps que es trigaria per anar de certes ciutats fins a Barcelona en diferents mitjans de transport, 256
- Figura 8.1:** Captura de pantalla del blog de la seqüència, 270
- Figura 8.2:** Captura de pantalla del vídeo «Baetulo Virtual 3D», 274
- Figura 8.3:** Captura de pantalla de la primera entrada del blog, amb la notícia de la troballa, 275
- Figura 8.4:** Fotografia del mur romà curvilini a l'excavació, 276
- Figura 8.5:** Plànol de la zona de l'excavació. La fletxa indica el mur curvilini romà descobert. Extret de l'Informe Arqueològic dels “Materials” per a l'alumnat. Font original Padrós i Morata (2001), 277
- Figura 8.6:** Captura de pantalla del mapa de la zona extret de Google Maps, amb l'escala, 277
- Figura 8.7:** Captura de pantalla del mapa de la zona extret del Geoportal Urbanístic de Badalona, amb l'escala, 278
- Figura 8.8:** Captura del vídeo del YouTube de la construcció gràfica d'una paràbola, 281
- Figura 8.9:** Captura de l'applet manipulable de Geogebra, 289
- Figura 8.10:** Captura del vídeo de YouTube de la construcció gràfica d'una el·lipse, 283
- Figura 8.11:** Captura de l'applet de la construcció gràfica d'una el·lipse, 283
- Figura 8.12:** Planta i secció d'un teatre segons Vitruvi, 285
- Figura 8.13:** Parts d'un teatre romà, 286
- Figura 8.14:** Plànol dels murs radials adossats al mur semicircular, 291
- Figura 8.15:** Reproducció del mur curvilini romà en la plaça a prop de l'escola, 304
- Figura 8.16:** Fotografia de la zona del jaciment en el seu estat actual, 306
- Figura 8.17:** Captura de pantalla per il·lustrar la 1a hipòtesi en l'informe del Grup 10, 309

Figura 8.18: Alumnes de 1r ESO mesurant el radi del mur curvilini a la plaça del Gas de Badalona, 310

Figura 9.1: Captura de pantalla de la web de MCSquared Project amb el *c-book* «¿Qué esconden estas ruinas?», 332

Figura 9.2: Captura de pantalla de la pàgina 1 de la primera fase del *c-book* amb la notícia de la troballa de les ruïnes, 333

Figura 9.3: Captura de pantalla de la pàgina 2 de la primera fase del *c-book* amb els enllaços a la web del Museu de Badalona i a un vídeo i un document per conèixer els orígens romans de la ciutat, 333

Figura 9.4: Captura de pantalla de la pàgina 3 de la primera fase, destaca l'enllaç al mapa de la zona del jaciment arqueològic, 334

Figura 9.5: Captura de pantalla de la pàgina 3 de la primera fase, amb el giny de Geogebra obert, 334

Figura 9.6: a. Captura de pantalla de la web de l'ajuntament de Badalona Geoportal Urbanístic; **b.** Captura de pantalla de la pàgina 4 de la fase 1 amb les instruccions per trobar el mapa de la zona del jaciment amb facilitat, 335

Figura 9.7: Captura de pantalla de la pàgina 5 de la fase 1 amb l'informe d'indagació, 335

Figura 9.8: Captura de pantalla de la pàgina 1 de la fase 2 amb el giny de Geogebra obert i les preguntes de la tasca, 336

Figura 9.9: Captura de pantalla de la pàgina 2 de la fase 2 amb les tasques sobre els edificis públics romans, 337

Figura 9.10: Captura de pantalla de la pàgina 3 de la fase 2, adaptació de l'informe arqueològic de l'equip del Museu de Badalona, 337

Figura 9.11: Captura de pantalla de la pàgina 5 de la fase 2, segon informe parcial de la indagació, 338

Figura 9.12: Captura de pantalla de la pàgina 1 de la fase 3, imatges de les ruïnes (un mur curvilini i alguns murs radials), 338

Figura 9.13: Captura de pantalla de la pàgina 1 de la fase 3, detall del giny per dibuixar el perímetre de la corba que encaixi amb el mur romà dibuixat, 339

Figura 9.14: Captura de pantalla de la pàgina 2 de la fase 3, diferents imatges d'edificis públics contemporanis coneguts, 339

Figura 9.15: Captures de pantalla de la pàgina 2 de la fase 3, diferents imatges d'edificis públics contemporanis coneguts amb el giny de Geogebra obert per calcular les seves àrees: a. Estadi de futbol Camp Nou (Barcelona, Catalunya); b. Teatre de Shakespeare The Globe (London, Anglaterra); c. Estadi de futbol Maracana (Rio de Janeiro, Brasil); d. Estadi de futbol Wembley (London, Anglaterra), 340

Figura 9.16: Captures de pantalla de la pàgina 3 de la fase 3: **a.** Presentació de l'arquitecte Vitruvius i del seu llibre amb els canons per a construir edificis públics romans; **b.** Detall del llibre «De Architectura», 341

Figura 9.17: Captura de pantalla de la pàgina 4 de la fase 3, instruccions per construir el model del teatre romà amb Geogebra, 342

Figura 9.18: Captura de pantalla de la pàgina 5 de la fase 3, informe parcial de la tercera fase de la indagació, 342

Figura 9.19: Captura de pantalla de la pàgina 1 de la fase 4, tasca d'estimació de la capacitat de diversos edificis contemporanis coneguts, 343

Figura 9.20: a. Captura de pantalla de la pàgina 2 de la fase 4, càlcul dels graons de les grades o *cavea* del teatre; **b.** Captura de pantalla de la pàgina 3 de la fase 4, càlcul de les persones que podien seure a les grades, 344

Figura 9.21: Captura de pantalla de la pàgina 4 de la fase 4, ajustant la capacitat del teatre, 345

Figura 9.22: Captura de pantalla de la pàgina 5 de la fase 4, informe parcial de la quarta fase de la indagació, 345

Figura 9.23: Captura de pantalla de la pàgina 1 de la fase 5, giny “Nota” per realitzar un mapa conceptual sobre el procés de la indagació, 346

Figura 9.24: Captura de pantalla de la pàgina 2 de la fase 5, informe final de la indagació, 347

Figura 9.25: Gràfica sobre l'avaluació dels quatre ítems referents a processos cognitius, 350

Figura 9.26: Diagrames de caixa de la dispersió dels resultats, 351

Figura 9.27: Comentaris en forma d'arbre sobre l'avaluació del *c-book*, 352

Figura 9.28: Diagrames de caixa de les categories del potencial de PMC, 355

Figura 9.29: Diagrames de caixa referents a l'avaluació dels aspectes socials i afectius, 356

Figura 9.30: Representació de les mitjanes de les respostes de la CdI respecte els processos cognitius amb els aspectes socials i afectius, 358

Figura 9.31: Representació de les mitjanes de les respostes de la CdI respecte les cinc categories dels potencials de PMC, 358

CAPÍTOL 1

El problema d'investigació, justificació i objectius

1.1. El problema d'investigació i la seva rellevància.....	2
1.2. Objectius de la investigació.....	5
1.3. Estructura de la memòria.....	6

RESUM

A l'apartat 1 es presenta l'origen i les principals característiques del problema d'investigació i es justifica la seva rellevància situant-nos en un enfocament contextualitzat de l'ensenyament de les matemàtiques. A l'apartat 2 es presenten els objectius de la investigació, que fan referència a la caracterització de la competència d'indagació en matemàtiques i al pensament matemàtic creatiu, així com, al seu desenvolupament mitjançant el seqüències didàctiques de context històric dissenyades amb aquesta finalitat. Finalment, a l'apartat 3 es comenta l'estructura de la memòria de la investigació.

1.1. El problema d'investigació i la seva rellevància

Una tendència en l'ensenyament de les matemàtiques que s'ha anat consolidant és la substitució de les matemàtiques descontextualitzades per unes matemàtiques més empíriques (contextualitzades, realistes, inductives, etc.). Aquestes matemàtiques empíriques (contextualitzades, realistes, intuïtives, etc.) pressuposen, per una banda, una certa concepció empírica de les matemàtiques. És a dir, una concepció que considera que les matemàtiques són (o es poden ensenyar com) generalitzacions de l'experiència; una concepció de les matemàtiques que suposa que, a l'aprendre matemàtiques, recorrem al nostre bagatge d'experiències sobre el comportament dels objectes materials. I, per una altra banda, una idea constructivista de l'aprenentatge.

En aquest enfocament es considera essencial l'ús de situacions-problemes de context extramatemàtic (aplicacions de les matemàtiques a la vida quotidiana o a d'altres camps del saber) perquè els estudiants puguin donar sentit a les estructures conceptuals que configuren la matemàtica. Aquests problemes constitueixen el punt de partida de la pràctica matemàtica —un exemple, d'aquest enfocament és l'anomenada *Realistic Mathematics Education* (Freudenthal, 1973; 1991). En aquest procés es considera que la modelització hi juga un paper fonamental.

L'enfocament contextualitzat planteja (Font, 2011a) nombroses preguntes, com per exemple: Com intervenen els coneixements previs en la construcció del coneixement matemàtic? Quin paper juga en l'aprenentatge significatiu d'un determinat contingut (funcions, etc.) la intuïció i el rigor? Quin paper juguen els raonaments inductius, abductius, intuïtius etc. en la construcció del coneixement matemàtic? Quin paper juguen els diferents registres de representació a l'emergència de l'objecte matemàtic? Quin paper juguen els aspectes individuals, socials i culturals en la construcció del coneixement matemàtic a l'aula? Com es relaciona el tipus d'interacció social amb la construcció del coneixement matemàtic? Com es desenvolupen i integren els esquemes cognitius dels alumnes quan aprenen un determinat contingut matemàtic? Quines característiques han de complir els problemes de contextos extramatemàtics? Com s'aconsegueix l'emergència dels objectes matemàtics a partir dels contextos extramatemàtics? L'ús de contextos extramatemàtics en el procés d'ensenyament-aprenentatge, facilita o dificulta la comprensió dels alumnes? L'ús de contextos extramatemàtics serveix per

motivar (o frustrar) als alumnes? Quin paper juguen els coneixements previs dels contextos extramatemàtics que tenen els alumnes? Quines relacions s'estableixen entre els contextos extramatemàtics i els intramatemàtics? L'ensenyament amb l'enfocament contextualitzat consumeix més temps que l'ensenyament descontextualitzat?

Altres tendències en l'ensenyament de les matemàtiques, relacionades amb l'anterior, són la importància que és dóna a l'ensenyament dels processos de pensament propis de la matemàtica i a les competències. La primera, en relació que ja no és considera que l'ensenyament sigui una simple transferència de continguts, ja que les Matemàtiques són una ciència en què el mètode predomina clarament sobre el contingut (Guzmán, 2007; Font, 2008). És per això que es concedeix una gran importància a l'estudi dels processos matemàtics, especialment als megaprocessos “Resolució de Problemes” i “Modelització” i, més recentment, a d'altres processos con són els d'indagació i els processos creatius.

Es considera que els problemes constitueixen el punt de partida de la pràctica matemàtica, de manera que l'activitat de resolució de problema, la seva formulació, comunicació i justificació són claus en el desenvolupament de la competència matemàtica, és a dir, la capacitat d'afrontar la solució de problemes no rutinaris. Aquest és l'objectiu principal de la tradició anomenada *Problem Solving* (Schoenfeld, 1992), l'èmfasi se centra en la identificació d'heurístiques i estratègies metacognitives. D'altra banda, actualment hi ha una tendència a considerar que “saber matemàtiques” inclou la competència per aplicar-les a situacions no matemàtiques de la vida real. Aquesta tendència, en alguns països, s'ha concretat en el disseny de currículums basats en competències. En aquesta perspectiva la competència de modelització és clau i també es considera essencial en el desenvolupament de la competència matemàtica.

La rellevància de les competències en els currículums també té a veure amb la importància que es dóna, en els estudis internacionals d'avaluació del sistema educatiu, a la competència dels alumnes per aplicar les matemàtiques escolars als contextos extra matemàtics de la vida real (per exemple estudis PISA 2003, 2012). Un currículum on les competències (processos) juguen un paper fonamental és un currículum molt ambiciós i planteja nombroses preguntes d'investigació, entre d'altres: Què cal entendre per “procés matemàtic” o per “competència matemàtica”? Quins són els processos matemàtics i com es

relacionen entre ells? Quins són els components de la competència matemàtica i com es relacionen entre ells? Com es poden desenvolupar i avaluar les competències i els processos matemàtics? És possible en les institucions escolars implementar seqüències de tasques contextualitzades que permetin una activitat de modelització “rica”? Poden transferir els alumnes el coneixement après en un determinat context a altres contextos?

Desenvolupar i avaluar competències (processos) és una tasca complexa que exigeix al professor una formació professional molt qualificada, la qual cosa també planteja moltes preguntes d'investigació (Poblete & Díaz, 2003; González & Wagenaar, 2003; Wilson, Cooney & Stinson, 2005; Hill et al., 2008; Silverman & Thompson, 2008; Even & Ball, 2009; Font, 2011b; Font et al., 2012): Quines són les competències professionals que permeten als professors desenvolupar i avaluar les competències generals i específiques de matemàtiques, prescrites en el currículum? Resposta que, al seu torn, està relacionada amb la resposta que es doni a la pregunta: Quines són les competències professionals que necessita el professorat per ensenyar matemàtiques? Resposta que, al seu torn, està relacionada amb la resposta que es doni a la pregunta: Quin és el coneixement didàctic-matemàtic que necessita el professorat per ensenyar matemàtiques?

En el nostre cas estem interessades en investigar, sobretot, el disseny de seqüències didàctiques (que tenen per objectiu resoldre situacions de context històric), tals que la seva implementació permeti que els alumnes de l'últim cicle de primària i de secundària desenvolupin la seva competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu. Aquesta investigació s'emmarca en el Grup de Recerca Consolidat GRUP DE RECERCA ENSENYAMENT I APRENENTAGE VIRTUAL (GREAV) i els següents projectes d'investigació:

- 1) Projecte I+D EDU2012-32644 del Ministerio de Economía y Competitividad de España “DESARROLLO DE UN PROGRAMA POR COMPETENCIAS EN LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES DE SECUNDARIA DE MATEMATICAS”.
- 2) Projecte I+D EDU2015-64646-P del Ministerio de Economía y Competitividad de España “DESARROLLO DE LA COMPETENCIA EN ANALISIS DIDACTICO EN LA FORMACION INICIAL DE

PROFESORES DE MATEMÀTICAS DE PRIMÀRIA Y DE SECUNDARIA. SU IMPACTO EN OTRAS COMPETENCIAS”

3) Projecte 610467 del Seventh Framework Programme for Research (FP7). Information and Communication Technologies (European Commission) “A COMPUTATIONAL ENVIRONMENT TO STIMULATE AND ENHANCE CREATIVE DESIGNS FOR MATHEMATICAL CREATIVITY (M C SQUARED)”.

1.2. Objectius de la investigació

Aquest projecte neix de l'observació i la reflexió sobre la pràctica de diversos treballs previs que ens indueixen a conjeturar que: a) l'alumnat de l'últim cicle d'Educació Primària és capaç, de la mateixa manera que ho és l'alumnat de Secundària, de desenvolupar la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu; b) i que els contextos històrics de les humanitats i de les ciències socials poden ser eines potents per desenvolupar-la. La segona part de la nostra hipòtesi, implica que els contextos d'entorn natural i les situacions estadístiques, que habitualment es poden trobar en els materials d'ensenyament d'aquestes etapes educatives, no són els únics possibles per afrontar processos de matematització i modelització que desenvolupin la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu.

D'acord amb aquesta hipòtesi, estem interessades en respondre a la pregunta següent: Com utilitzar els contextos històrics de les àrees d'humanitats i de les ciències socials per aconseguir desenvolupar en l'alumnat de l'últim cicle de Primària i de Secundària la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu? Aquesta pregunta ens porta a formular el següents objectius específics:

Primer objectiu (O1): Caracteritzar la competència d'indagació a l'ensenyament obligatori i el pensament matemàtic creatiu.

Segon objectiu (O2): Catalogar diferents usos dels contextos històrics en les propostes didàctiques per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.

Tercer objectiu (O3): Dissenyar, implementar i redissenyar (ajustant-les) seqüències didàctiques que desenvolupin pràctiques d'indagació i el

pensament matemàtic creatiu, on s'usin les matemàtiques per resoldre situacions de context històric.

Quart objectiu (O4): Investigar, en el marc de la implementació de les seqüències didàctiques de l'objectiu 3, el nivell de desenvolupament de la competència d'indagació dels alumnes i el desenvolupament del pensament matemàtic creatiu.

1.3. Estructura de la memòria

Aquesta memòria de recerca s'ha organitzat en deu capítols. En el Capítol 1 es presenta l'origen i les principals característiques del problema d'investigació i es justifica la seva rellevància i s'expliquen els objectius generals i específics de la recerca.

En el Capítol 2 es desenvolupa el marc teòric de referència d'aquesta investigació. Primer ens posicionem sobre la noció de competència (caracterització, graus de desenvolupament, descriptors, tasques, etc.) que usem en aquesta investigació. Donada la importància que té el disseny de tasques en el desenvolupament tant de la competència d'indagació com en el pensament matemàtic creatiu, ens posicionem també sobre el disseny de tasques de contextos propis de les àrees d'humanitats i de les ciències socials. A continuació es fa una revisió de la literatura sobre la competència d'indagació i del pensament matemàtic creatiu.

La metodologia que s'exposa en el Capítol 3 és el marc que ens va permetre posar en funcionament els instruments teòrics del Capítol 2 en un escenari d'investigació real. En aquest capítol s'explica el tipus de metodologia, els instruments utilitzats i es descriu el context institucional on es van fer les diferents implementacions

En el Capítol 4 es fa una proposta de caracterització del pensament matemàtic creatiu i de la competència d'indagació per a l'ensenyament obligatori (definició, desenvolupament i descriptors), entesa com la capacitat de formular-se preguntes d'investigació i intentar respondre-les fent ús de les matemàtiques, per a les etapes d'educació Primària i Secundària. Es considera una competència bàsica que l'alumnat podria continuar desenvolupant en la següent etapa educativa, ajustant-se aleshores a la definició del currículum de

Batxillerat per a la competència d'investigació. S'argumenta que la adquisició de la competència matemàtica està estretament relacionada amb aquesta competència d'indagació ja que, seguint les recomanacions del currículum, l'ensenyament i aprenentatge de les Matemàtiques ha de basar-se en la problematització de contextos reals i quotidians de l'alumnat. D'aquesta manera, es dona resposta al primer objectiu d'aquesta investigació.

En el Capítol 5 es fa una revisió de la literatura sobre els diferents usos de contextos històrics en les matemàtiques i en el seu ensenyament i aprenentatge. A continuació s'analitza un estudi de cas d'un col·lectiu de professors que han de fer una proposta d'innovació, per tal de veure quin paper juga, en les propostes innovadores que fan, la història i els contextos històrics. Tant en la revisió de la literatura com en l'estudi de cas, s'observa que no és habitual l'ús de contextos històrics propis de les àrees de humanitats i de les ciències socials, que és l'objectiu d'aquesta investigació.

En el Capítol 6 es presenta una seqüència didàctica dissenyada en base a un context històric problemàtic generador d'una indagació. En aquesta indagació, l'ús de les matemàtiques tindrà un paper important en la formulació d'hipòtesis que ofereixin solucions plausibles a la qüestió principal. Primer es justifica la tria del context concret per al disseny d'aquesta seqüència didàctica, a continuació es descriu el seu disseny: seqüenciació, desenvolupament de les sessions i activitats que s'hi duen a terme, així com alguns dels materials dissenyats. Seguidament, s'analitza la potencialitat de la seqüència didàctica, abans de la seva implementació, per provocar el desenvolupament d'habilitats per a la indagació i per promoure pensament matemàtic creatiu. Per últim, s'exposa l'anàlisi i els resultats del seu desenvolupament amb la descripció de la implementació que es va dur a terme, així com els detalls del grup d'alumnat amb qui va ser implementada.

En el Capítol 7 es presenta una seqüència didàctica dissenyada en base a un context històric problemàtic generador d'una indagació, on l'ús de les matemàtiques té un paper més rellevant en tota la indagació que el que té en la situació del capítol anterior, tant per la formulació d'hipòtesis com per l'ús d'estratègies per trobar explicacions i respostes a les preguntes que van sorgir al llarg de la indagació. Primer es justifica la tria del context concret per al disseny d'aquesta seqüència didàctica. A continuació es descriu el seu disseny i el seu posterior redisseny: seqüenciació, desenvolupament de les sessions i activitats que s'hi duen a terme, així com alguns dels materials dissenyats.

Després, s'analitza la potencialitat de les seqüències didàctiques, abans de la seva implementació, per provocar el desenvolupament d'habilitats per a la indagació (CI) i per promoure pensament matemàtic creatiu (PMC). Finalment s'exposa l'anàlisi i els resultats del desenvolupament de la CI i del PMC amb la descripció de les implementacions que es van dur a terme, així com els detalls dels grups d'alumnat amb qui va ser implementada..

En el Capítol 8 es presenta una seqüència didàctica dissenyada en base a un context històric problemàtic, concretament arqueològic, generador d'una indagació per esbrinar a quin tipus d'edifici romà podrien pertànyer certes ruïnes descobertes. En aquesta indagació, l'ús de les matemàtiques tindrà un paper rellevant en tot el procés, tant per la formulació d'hipòtesis com per l'ús d'estratègies per trobar explicacions i respostes a les preguntes que van sorgint al llarg de la indagació (en particular, encara més rellevant la que ha tingut en les situacions dels dos capítols anteriors). Primer es justifica la tria del context concret per al disseny d'aquesta seqüència didàctica. A continuació es descriu el seu disseny: seqüenciació, desenvolupament de les sessions i activitats que s'hi duen a terme, així com alguns dels materials dissenyats. Després s'analitza la potencialitat de la seqüència didàctica, abans de la seva implementació, per provocar el desenvolupament d'habilitats per a la indagació (CI) i per promoure pensament matemàtic creatiu (PMC). Finalment s'exposa l'anàlisi i els resultats del desenvolupament de la CI i del PMC amb la descripció de les implementacions que es van dur a terme, així com els detalls dels grups d'alumnat amb qui va ser implementada.

En el Capítol 9 es presenta el redisseny de la seqüència didàctica anomenada «Què amaguen aquestes ruïnes?» en el marc del projecte europeu Mathematical Creativity Squared (MCSquared). El redisseny es basa en la seqüència didàctica original descrita i exposada en el Capítol 7, i comparteixen els mateixos objectius d'ensenyament i aprenentatge. Primer es justifica que el redisseny contempla l'adaptació de les tasques a la concepció d'una metodologia d'ensenyament on les TIC tinguin un paper més central que en les anteriors seqüències. Després es descriu el disseny del c-book (manera d'anomenar a les unitats didàctiques creatives). A continuació, s'exposa l'anàlisi quantitativa i qualitativa realitzada per diversos participants en el projecte MCSquared en relació a la potencialitat de la seqüència didàctica per promoure pensament matemàtic creatiu (PMC). Per últim s'exposen els resultats.

En el Capítol 10 s'exposen les principals aportacions, les quals es relacionen amb els objectius inicialment previstos. També, es comenten algunes de les implicacions que es deriven per a futures investigacions i es comenten les limitacions de l'estudi.

Per a finalitzar s'especifiquen les referències bibliogràfiques consultades i s'incorporen diferents annexos.

CAPÍTOL 2

Marc teòric

2.1. La noció de competència.....	12
2.2. La noció de competència bàsica.	14
2.3. La competència bàsica en els documents curriculars.....	16
2.4. Contextos extramatemàtics i històrics.....	18
2.5. Disseny de tasques.....	24
2.6. Consideracions de la didàctica de la història en l'estudi de la història local.....	30
2.7. La competència d'indagació: un pont entre les competències bàsiques de l'ESO i la competència d'investigació del Batxillerat.....	32
2.8. Pensament matemàtic creatiu.....	38

RESUM

En aquest capítol es presenta els referents teòrics d'aquesta investigació. Primer s'explica la manera com s'ha conceptualitzat la noció de competència. En segon lloc, s'explica i s'assumeix com a referent teòric la caracterització que fa el currículum (de primària y de secundària) de la Generalitat de Catalunya de la competència matemàtica, entesa com una competència bàsica – aquesta caracterització curricular de la competència matemàtica és coherent, o com a mínim no és contradictòria amb la caracterització de competència prèviament assumida –, on els problemes de context extra matemàtic hi juguen un paper fonamental. Per aquesta raó seguidament s'explica el referent teòric que assumim sobre la noció de context extra matemàtic, en particular la de context històric. A continuació es fa una primera aproximació a la literatura sobre la competència d'indagació (la qual s'ha enfocat sobre tot en l'àmbit de les ciències naturals), que és el principal objectiu d'aquesta investigació, i s'explica que, donades les característiques d'aquesta investigació, cal crear un referent teòric propi per a la competència d'indagació (i també per un aspecte associat a ella: el pensament matemàtic creatiu), basat en algunes de les aportacions de la literatura, però, sobre tot, en elements curriculars (la caracterització aprofundida d'aquests dos constructes es presenta en el capítol 4). Seguidament s'explica el referent teòric utilitzat pel disseny de les tasques que han de desenvolupar i avaluar tant la competència d'indagació com el pensament matemàtic creatiu: alguns elements de la noció d'idoneïtat didàctica (proposada per l'Enfocament Ontosemiòtic) i els recorreguts d'estudi i investigació (desenvolupats per la Teoria Antropològica d'allò Didàctic). Així com, algunes consideracions didàctiques de l'estudi de la història local en l'ensenyament de la Història.

2.1. La noció de competència

El terme competència ha estat definit de diferents formes. En el projecte Tuning (González & Wagenaar, 2003) s'entén com una combinació dinàmica de coneixement, comprensió, capacitats i habilitats. Altres autors, com Zabalza (2003), la defineix com el “conjunt de coneixements i habilitats que els subjectes necessitem per desenvolupar algun tipus d'activitat” (p. 70). Per a Zabala (2005) és la “capacitat per enfrontar-se amb garanties d'èxit a una tasca en un context determinat” (p. 86). Aquests dos exemples mostren que les definicions que es troben en la literatura respecte al terme “competència” són diverses, la qual cosa posa de manifest una primera qüestió problemàtica: la polisèmia d'aquest terme. Tal com s'assenyala a Font, Breda i Sala (2015) algunes de les característiques que majoritàriament s'associen amb la noció de competència són les següents: 1) Serveix per a —i es manifesta mitjançant— l'acció. 2) Es mostra a través del desenvolupament personal i social. 3) Sempre es refereix a un context d'aplicació. 4) Caràcter integrador, ja que implica la integració del coneixement teòric conceptual i procedimental. 5) Possibilitat de transferència a diferents situacions o problemes. 6) Caràcter dinàmic, la qual cosa implica un desenvolupament gradual de la competència. D'altra banda, tal com s'assenyala en Rubio (2012), hi ha el problema de l'existència d'un “territori compartit” entre els constructes “procés” i “competència”, cosa que també succeeix amb altres termes que s'utilitzen normalment per descriure les matemàtiques realitzades pel subjecte (per exemple, pràctica matemàtica o activitat matemàtica). El problema s'amplia si es té en compte que el constructe “competència” també té un territori compartit amb termes de tipus pedagògic (per exemple, objectius o capacitats).

El nostre grup d'investigació —Grup de Recerca sobre Anàlisi Didàctica en Educació Matemàtica (GRADEM)— s'ha interessat, per investigar en el marc de diferents projectes (veure agraïments), entre d'altres, les qüestions següents:

- 1) Caracteritzar globalment competències professionals en la formació inicial del professor de Primària i de Secundària de matemàtiques, els seus graus i descriptors.
- 2) Dissenyar cicles formatius multimodals (presencials i en línia), per al desenvolupament de competències professionals en la formació inicial del professor de matemàtiques de Secundària (especialment, la competència en anàlisi didàctica de processos d'instrucció).

3) Dissenyar i aplicar instruments d'avaluació de les competències professionals dels futurs professors de Secundària de matemàtiques (que s'infereixen de la seva resposta a les tasques professionals que se'ls hi proposen).

El GRADEM s'interessa per analitzar les pràctiques professionals que els futurs professors realitzen per resoldre les tasques professionals proposades, i el coneixement matemàtic-didàctic que s'hi activa, per trobar indicadors que justifiquin l'assignació de graus de desenvolupament de la competència professional que es pretén avaluar. Una qüestió prèvia que va haver d'afrontar el nostre grup de recerca va ser consensuar una caracterització general de la noció de competència que després s'aplicaria al cas de les competències professionals del futur professor de matemàtiques. En aquesta tesi hem adoptat com a referent teòric aquesta caracterització (Font, Breda & Sala, 2015; Font & Seckel, 2015; Seckel, 2016).

Segons Weinert (2001), els enfocaments per competències poden classificar-se en tres grans grups: a) Enfocament cognitiu, b) Enfocament motivacional i c) Enfocament integral o d'acció competent. D'acord amb això, la conceptualització de competència que s'usa en aquest treball es realitza des de la perspectiva de l'acció competent, considerant-la com el conjunt de coneixements, disposicions, etc. que permet l'acompliment eficaç en els contextos propis de la professió de les accions citades en la seva formulació. Dit en termes aristotèlics, es tracta d'una potencialitat que s'actualitza en l'acompliment d'accions eficaces (competents). Es tracta d'una conceptualització que és coherent, o almenys no contradictòria, amb la proposta que es fa en el currículum de Catalunya.

Aquesta formulació del terme competència ha de ser desenvolupada per ser operativa i, per fer-ho, cal realitzar una caracterització de la competència (definició, nivells de desenvolupament i descriptors) que permeti el seu desenvolupament i avaluació.

D'acord amb Font, Breda i Sala (2015), Seckel i Font (2015) i Seckel (2016) considerem que el punt de partida per al desenvolupament i avaluació d'una competència ha de ser una tasca que produeix la percepció d'un problema que es vol resoldre, per a això el subjecte ha de mobilitzar habilitats, coneixements i actituds, per realitzar una pràctica (o acció) que intenti donar solució al problema. A més, podem esperar que aquesta pràctica es realitzi amb més o

menys èxit (assoliment) i, al seu torn, aquest assoliment es pot considerar una evidència que la persona pot realitzar pràctiques similars a les quals estan descrites per algun dels descriptors de la competència, el qual se sol associar a un determinat nivell de competència (Figura 2.1).

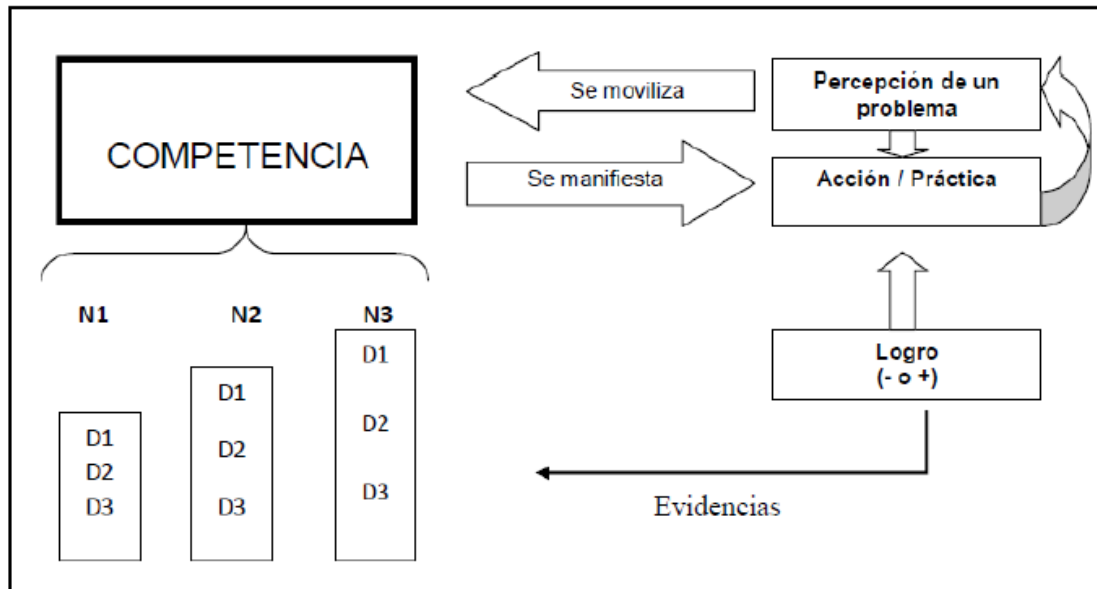


Figura 2.1: Conceptualització de competències. Font: Seckel & Font (2015)

La conceptualització de competència desenvolupada en la Figura 2.1 es pot aplicar a qualsevol competència, tant a les competències que els futurs professors han de desenvolupar en els seus futurs alumnes, sobretot la competència matemàtica, com a les competències professionals que han de desenvolupar en la seva formació inicial o contínua.

2.2. La noció de competència bàsica

Un dels projectes que més rellevància ha tingut en relació amb la caracterització de les competències en el DeSeCo Project, projecte de l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic titulat «Definició i Selecció de Competències: Bases Teòriques i Conceptuals» (OECD, 2005; Rychen & Salganik, 2004). En aquest projecte la competència s'entén com l'habilitat o capacitat per aconseguir o donar resposta a una sèrie de demandes complexes en un context particular a través de la mobilització de les habilitats cognitives i no cognitives de la persona. Així, doncs, es proposa que els currículums de cada país han de desenvolupar competències clau o bàsiques, que són aquelles que compleixen les següents característiques:

- a) Han de contribuir, de manera decisiva, al fet que les persones tinguin una vida reeixida que permeti el bon funcionament de la societat.
- b) Han de ser instrumentals per satisfer les demandes o desafiaments complexos en una àmplia gamma de contextos.
- c) Han de ser importants per a tots els individus.

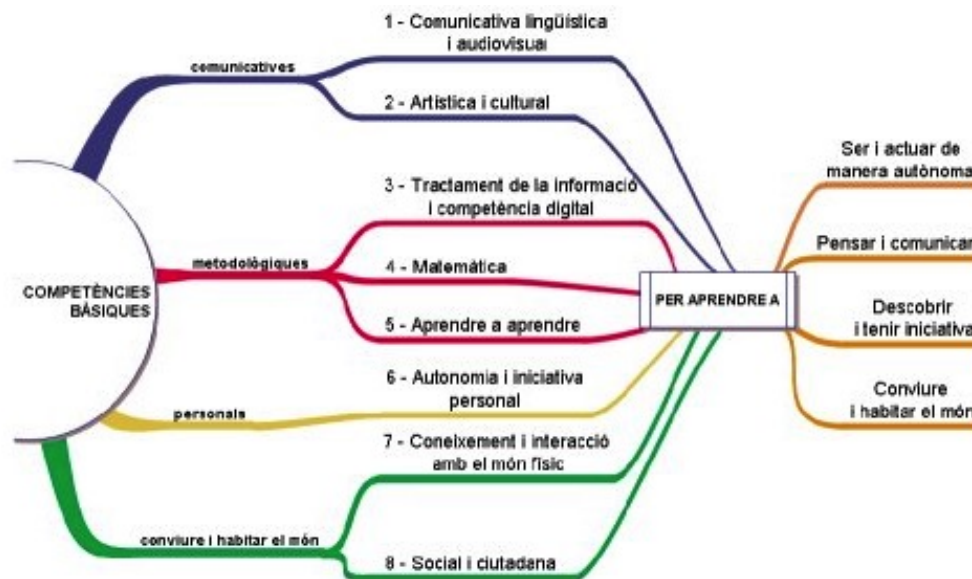


Figura 2.2: Competències Bàsiques en el currículum de l'ensenyament obligatori de Catalunya

Aquestes competències bàsiques, segons els currículums de Primària (Catalunya, 2007a) i Educació Secundària Obligatòria (Catalunya, 2007b), estan compostes per vuit competències (Figura 2.2) identificades en dos grups: competències transversals i competències específiques centrades en conviure i habitar el món. El primer grup, integrat per sis competències classificades en tres subgrups: competències comunicatives (competència comunicativa lingüística i audiovisual i competència artística i cultural), metodològiques (competència de tractament de la informació i competència digital, competència matemàtica i competència d'aprendre a aprendre) i personals (competència d'autonomia i iniciativa personal). En el segon grup s'hi classifiquen dos competències específiques: competència en el coneixement i interacció amb el món físic i competència social i ciutadana.

A diferència del currículum de Batxillerat, ni en el currículum de Primària ni en el d'ESO es defineix explícitament, una competència transversal

pròpiament anomenada d'investigació i/o d'indagació. Tanmateix, en el currículum de l'ESO, sí que s'hi defineix una competència anomenada científica, pròpia i exclusiva de les matèries classificades en l'àrea de les Ciències Naturals. I, a més, en molts apartats dels dos currículums, hi ha recomanacions didàctiques metodològiques de realització de propostes que incloguin tasques relacionades amb la investigació de problemes que permetin a l'alumnat mobilitzar i transferir coneixements d'un context a un altre i facilitar el desenvolupament competencial. També cal subratllar que, a l'ESO, l'alumnat al finalitzar l'etapa ha de realitzar un projecte d'investigació guiada on haurà de demostrar certes capacitats que encaixen amb les descripcions de les competències d'indagació específiques de les matèries de Batxillerat i de la competència d'investigació general.

2.3. La competència matemàtica en els documents curriculars

En aquest apartat ens fixarem en els documents curriculars de l'ESO per analitzar com es conceptualitza la noció de competència matemàtica en el currículum ja que el que es diu en els documents curriculars de primària i de batxillerat es molt similar.

Un primera idea que remarca el currículum de l'ESO és que la competència matemàtica és necessària en la vida personal, escolar i social, ja que sovint cal analitzar, interpretar i valorar informacions de l'entorn, i l'ús de les eines matemàtiques pot ser un instrument eficaç.

La segona idea en la que es fa molt èmfasi és que saber matemàtiques vol dir saber-les utilitzar en situacions quotidianes ja que aquesta competència adquireix realitat i sentit en la mesura que els elements i raonaments matemàtics són utilitzats per enfrontar-se a situacions quotidianes, per tant, és una competència que cal tenir en compte en totes les matèries del currículum i activitats d'aprenentatge.

En el currículum de l'ESO es considera que la competència matemàtica implica l'habilitat de comprendre, utilitzar i relacionar els nombres, les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió i de raonament matemàtic, tant per produir i interpretar distints tipus d'informació, com per ampliar el coneixement sobre aspectes quantitius i espacials de la realitat, i per entendre i resoldre problemes i situacions relacionats amb la vida

quotidiana i el coneixement científic i el món laboral i social. Per tant, l'essència de la competència matemàtica és conèixer determinats continguts matemàtics i saber-los utilitzar per resoldre problemes, en especial problemes extramatemàtics.

El problema d'un «territori compartit entre competències i processos» apareix clarament en el currículum d'ESO ja que es diu que la competència matemàtica implica el coneixement i maneig dels elements matemàtics bàsics (diferents tipus de nombres, mesures, símbols, elements geomètrics, etc.) en situacions reals o simulades de la vida quotidiana; elaborar la informació a través d'eines matemàtiques (mapes, gràfics...) per poder-la interpretar, i posar en pràctica processos de raonament que conduixin a la solució de problemes o a l'obtenció de la informació. Aquests processos permeten aplicar la informació a una gran varietat de situacions i contextos, seguir cadenes argumentals identificant les idees fonamentals i estimar i jutjar la lògica i validesa d'argumentacions i informacions.

També es diu que forma part de la competència matemàtica l'habilitat d'analitzar, interpretar i expressar amb claredat i precisió informacions, dades i argumentacions. Suposa, també, seguir determinats processos de pensament (com la inducció i la deducció, entre d'altres) i aplicar alguns algorismes de càlcul o elements de la lògica, fet que condueix a identificar la validesa dels raonaments i valorar el grau de certesa associat als resultats derivats dels raonaments vàlids.

Un altre aspecte que es ressalta en el currículum d'ESO en relació a la competència matemàtica és el paper de l'actitud. Es diu que el desenvolupament de la competència matemàtica implica una disposició favorable i de progressiva seguretat i confiança vers la informació i les situacions (problemes, incògnites, etc.) que contenen elements i suports matemàtics, així com en la seva utilització quan la situació ho aconsella, basada en el respecte i el gust per la certesa i en la recerca per mitjà del raonament.

Un altre aspecte que ressalta el currículum d'ESO és que la competència matemàtica s'assoleix aplicant els coneixements, les habilitats i actituds matemàtics a situacions extramatemàtiques. És a dir, l'assoliment d'aquesta competència s'aconsegueix en la mesura que els coneixements, les habilitats i actituds matemàtics s'apliquen de manera espontània a una ampla varietat de situacions, provinents d'altres camps de coneixement i de la vida quotidiana, la

qual cosa augmenta la possibilitat real de seguir aprenent al llarg de la vida, tant en l'àmbit escolar o acadèmic com fora d'aquest, i afavoreix la participació efectiva en la vida social.

2.4. Contextos extramatemàtics i històrics

Parlar de “competència” és parlar d'ús competent en situacions reals, la qual cosa posa el “context” a primera línia de la reflexió. La importància que té contextualitzar el coneixement matemàtic és avui dia àmpliament assumida, ja que es considera que el context pot ser la clau per relacionar el que els psicòlegs saben sobre la manera en què els humans raonen, senten, recorden, imaginem i decideixen amb el que, per la seva banda, saben els antropòlegs sobre la manera en què el significat és construït, après, activat i transformat. En paraules de l'antropòleg Geertz, aquest intent de relació “(...)suposa l'abandonament de la idea que el cervell de l'Homo Sàpiens és capaç de funcionar autònomament, que pot operar amb efectivitat, o que pot operar sense més, com un sistema conduït de manera endògena i que funciona amb independència del context” (Geertz, 2002, p. 194).

Per a les situacions extra matemàtiques que contextualitzen un objecte matemàtic s'han proposat diferents noms i classificacions: “problemes contextualitzats”, “problemes del món real”, “problemes relacionats amb el treball”, “problemes situats”, són només alguns dels diferents noms que es dóna a les tasques escolars que simulen situacions del món real.

La recerca sobre els problemes contextualitzats extramatemàtics s'ha realitzat atenent a diferents objectius i metodologies (coneixement situat, etnomatemàtiques, teoria de l'activitat, etc.). Cal destacar aquelles recerques que el seu objectiu ha estat comprendre millor com les persones solucionen els problemes en el seu lloc de treball. Aquestes recerques, de tipus sociocultural, no s'han preocupat directament per comparar la resolució de problemes en el lloc de treball amb la resolució de problemes contextualitzats en les institucions escolars (Scribner, 1984 i 1986; Renti, 1988; Pozzi, Noss i Hoyles, 1998). En canvi, altres recerques s'han interessat a comparar i contrastar el diferent ús que fan les persones de les matemàtiques a l'escola i en el treball (Reed i Renti, 1981; Nunes, Schliemann i Carraher, 1993; Jurdak i Shahin, 1999 i 2001; Jurdak, 2006, Díez 2004). Aquestes recerques mostren, amb exemples concrets, que hi ha una fractura important entre les matemàtiques que s'expliquen a l'escola i les que les persones fan servir en la

seva vida quotidiana. Per a Díez (2004) l'existència d'aquesta fractura és un dels motius que expliquen les actituds negatives que moltes persones desenvolupen cap a les matemàtiques (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001).

En general, els estudis citats anteriorment han posat de manifest que les matemàtiques informals i idiosincràtiques són les dominants en la resolució de problemes en la vida quotidiana i al món laboral, mentre que les matemàtiques més formals són les que predominen a l'escola. Alguns d'aquests estudis han posat de manifest que les persones que fracassen en situacions matemàtiques escolars, poden ser extraordinàriament competents en activitats de la vida diària que impliquen l'ús del mateix contingut matemàtic (Lave, 1988; Scribner, 1984). En situacions de la vida real en les quals les persones s'hi senten implicades s'ha observat que utilitzen matemàtiques "pròpies" que poden ser molt diferents a les que van estudiar a l'escola. En aquestes situacions el problema i la solució es generen simultàniament i la persona està implicada cognitiva, emocional i socialment.

Aquests fenòmens posen de manifest que els coneixements es construeixen usant-los en contextos reals. En la vida diària els problemes són concrets i només es poden resoldre si les persones els consideren com a problemes per resoldre. També plantegen un problema teòric per a la recerca en Didàctica de les Matemàtiques: la transferència del coneixement usat o generat en un context a un altre context diferent i més en concret, el problema de la transferència del coneixement après a l'escola a les situacions pràctiques de la vida quotidiana i viceversa (Civil, 1992; Evans, 1998; González, Andrade & Carson, 2001; Díez, 2004).

Les referències citades anteriorment no pretenen ser una revisió exhaustiva de la literatura sobre la contextualització. En aquest treball ens interessa, sobretot, destacar algunes recerques, com per exemple, les que s'han preocupat per la introducció dels problemes contextualitzats en el currículum. Entre aquestes destaca el projecte desenvolupat en l'Institut Freudenthal "Realistic Mathematics Education" (Gravemeijer, 1994; De Lange, 1996). Aquest enfocament de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques concep l'activitat matemàtica com una activitat humana més, per la qual cosa es considera que "saber matemàtiques" és "fer matemàtiques", la qual cosa comporta, entre altres aspectes, la resolució de problemes de la vida quotidiana. Un dels seus principis bàsics afirma que per aconseguir una activitat matemàtica significativa cal partir de l'experiència real dels estudiants

(Freudenthal, 1983). Altres principis importants són que cal donar a l'estudiant l'oportunitat de reinventar els conceptes matemàtics i que el procés d'ensenyament-aprenentatge ha de ser molt interactiu. Segons De Lange (1996), bàsicament es donen quatre raons per integrar els problemes contextualitzats en el currículum: a) faciliten l'aprenentatge de les matemàtiques, b) desenvolupen les competències dels ciutadans, c) desenvolupen les competències i actituds generals associades a la resolució de problemes i d) permeten que els estudiants vegin la utilitat de les matemàtiques per resoldre tant situacions d'altres àrees com situacions de la vida quotidiana.

Per finalitzar aquesta breu revisió, volem destacar també les avaluacions internacionals. La rellevància de considerar contextos extramatemàtics també té a veure amb la importància que es dona, en els estudis internacionals d'avaluació del sistema educatiu, a la competència dels alumnes per aplicar les matemàtiques escolars als contextos extramatemàtics de la vida real (per exemple, estudis PISA 2003 (OECD, 2004).

2.4.1. Dos usos del terme “context”

En relació amb el terme context, hi ha bàsicament dos usos (Ramos i Font, 2006). Un consisteix a considerar el context com un exemple particular d'un objecte matemàtic, mentre que l'altre consisteix a emmarcar-ho en l'entorn. En el primer cas, es tracta de veure que la situació problema cau dins del camp d'aplicació d'un objecte matemàtic. En el segon cas, es tracta d'un “ús” que anomenarem, metafòricament, “ecològic”. Aquest ús ecològic queda clar quan es diu, per exemple, que el context del goril·la és la selva. Ara bé, ja que el context del goril·la també pot ser el zoològic, podem entendre que hi ha un ús ecològic del terme context que permet situar l'objecte matemàtic en diferents “llocs”, per exemple, diferents institucions (universitat, secundària, etc.). Aquests “llocs” no tenen perquè ser només institucions, poden ser també, per exemple, diferents programes de recerca o diferents “jocs del llenguatge” (Wittgenstein, 1953). Ara bé, la idea que interessa de l'ús ecològic del terme context és que dona a entendre que hi ha diferents “llocs” on es pot situar l'objecte matemàtic. Des de la perspectiva “ecològica”, davant l'enunciat d'un problema o, més en general d'un text matemàtic, es tractaria de respondre a preguntes del tipus En quin “lloc” es troba? Què té al seu voltant? On

“viu”? Amb quin altres objectes matemàtics es relaciona? En quina institució s'utilitza? etc.

A continuació il·lustrarem aquests dos usos del terme context amb un exemple que es troba en Font (2007a)

A continuació tenim dos textos on el lector pot reconèixer l'objecte matemàtic “funció” (Font, 2007a, p. 434):

Text 1:

Es considera la funció $R \rightarrow R$ donada per $x \rightarrow 1/(x^2 + 6)$ És una funció real de variable real? En cas afirmatiu, troba el seu domini de definició (és a dir, el seu màxim domini).

Text 2:

Hem de canviar els vidres d'unes finestres quadrades. El preu del vidre és de 0,5 euros per cada decímetre quadrat. Elabora una taula de valors, dibuixa una gràfica i determina una fórmula que permeti calcular directament el cost per a cada longitud del costat de la finestra.

En els dos textos el lector podrà reconèixer una situació problema que es pot considerar com un “cas particular” de l'objecte matemàtic “funció”. És a dir s'activa la dualitat particular / general (concret / abstracte; exemplar / tipus) i es considera que la situació problema cau dins del camp d'aplicació d'un objecte matemàtic.

L'ús del context com un exemple particular d'un objecte matemàtic s'observa clarament en els processos d'instrucció on es proposen situacions-problema extramatemàtiques pensades per a l'emergència de nous objectes matemàtics. En els processos de descontextualització a partir de contextos extramatemàtics se segueix el següent procés: es parteix d'una situació de context extra matemàtic S , que podem posar en relació (R) amb la situació S' que, al seu torn, es considera com un cas particular de l'objecte matemàtic OM (S' és OM). La relació R , que permet relacionar S amb S' , pot ser de molts tipus diferents, ara bé, en tots els casos se sol acabar considerant R com una relació de representació, entesa en termes d'instrument de coneixement (S' és una representació de S).

El procés que va del problema contextualitzat a l'objecte matemàtic (que anomenarem procés de descontextualització) és un procés bastant complex.

Quan s'analitza amb detall un problema contextualitzat que s'utilitza per aconseguir l'emergència d'un objecte matemàtic, és fàcil observar com aquest procés és el resultat d'altres processos (representació, generalització, formulació de conjectures, esquematització, argumentació, etc.).

Per altra banda, el context, entès en termes ecològics, del primer text és una unitat didàctica de tipus formalista. En canvi, el segon text té com a context una unitat didàctica empirista (realista, intuïtiva, etc.) Ara bé, ja que cada problema s'emmarca dins d'una configuració epistèmica diferent (unitat didàctica) es pot entendre, de manera metafòrica, que la situació-problema “situa” l'objecte en un “lloc” o en “un altre” — és a dir, ho relaciona amb un determinat tipus de llenguatge, un determinat tipus de procediments i tècniques, un tipus d'argumentacions, una determinada definició de l'objecte i unes determinades propietats. Des d'aquesta perspectiva, cada situació problema situa a l'objecte en un determinat “nínxol”. D'aquesta manera, es pot dir que la situació problema compleix dues funcions, una de referència particular en activar la dualitat particular-general i una altra, de tipus “ecològic”, en situar l'objecte matemàtic en un “nínxol” o bé en un altre.

El fet de contemplar la situació problema en el marc de la unitat didàctica permet relacionar les dues maneres d'entendre el terme “context”: (1) com a cas particular d'un objecte matemàtic i (2) com a entorn de l'objecte i entendre que, de fet, les dues actuen simultàniament.

Les unitats didàctiques empiristes donen un paper preponderant a les situacions problemes contextualitzades (extramatemàtiques) i estan clarament enfocades a l'emergència de nous objectes matemàtics. Aquestes configuracions empíriques (contextualitzades, realistes, intuïtives, etc.) pressuposen una certa concepció empírica de les matemàtiques. És a dir, una concepció que considera que les matemàtiques són —o es poden ensenyar com— generalitzacions de l'experiència; una concepció de les matemàtiques que suposa que, en aprendre matemàtiques, recorrem al nostre bagatge d'experiències sobre el comportament dels objectes materials. D'altra banda, també pressuposen que “saber matemàtiques” inclou la competència per aplicar les matemàtiques a situacions extramatemàtiques de la vida real.

En relació amb les tasques extramatemàtiques que es dissenyen i implementen a les aules de matemàtiques, ens trobem que les de context històric juguen un paper secundari, per aquesta raó un dels objectius que ens hem proposat

aconseguir en aquesta recerca és el següent: Catalogar diferents usos dels contextos històrics en els propostes didàctiques per a l'ensenyament i l'aprenentatge dels matemàtiques (segon objectiu). En el capítol 4 s'explica com es va aconseguir aquest objectiu.

2.4.2. Classificació dels problemes contextualitzats

En la literatura que afronta la problemàtica de la incorporació dels problemes contextualitzats en el currículum escolar, se sol distingir entre problemes escolars descontextualitzats, problemes escolars contextualitzats i problemes reals. Les dues últimes categories es matisen millor amb la classificació proposada en Martínez (2003). Aquest autor distingeix els següents tipus de contextos: a) Context real: es refereix a la pràctica real de les matemàtiques, a l'entorn sociocultural on aquesta pràctica té lloc. b) Context simulat: té el seu origen o font en el context real, és una representació del context real i reproduïx una part de les seves característiques (per exemple, quan els alumnes simulen situacions de compra-venda en un “racó” de la classe. c) Context evocat: refereix a les situacions o problemes matemàtics proposats pel professor a l'aula, i que permet imaginar un marc o situació on es dóna aquest fet (per exemple, el text 2 de l'apartat 2.4.1). Per tant, en la nostra reflexió distingirem els següents tipus de problemes: a) problemes escolars no contextualitzats (és a dir, de context matemàtic), b) problemes de context evocat, c) problemes de context simulat i d) problemes reals.

Els problemes que més han interessat en aquesta investigació didàctica han estat fonamentalment els problemes de context simulat (en particular les seqüències didàctiques «Viure a Baetulo» i «Què amaguen aquests ruïnes?»). La recreació d'aspectes històrics ha estat fonamental perquè el context simulat fos versemblant (anar a mirar el tresor, anar al museu arqueològic, treballar en una simulació del mur romà, etc.) de manera que, en certa manera, el context simulat quasi ha esdevingut un context real.

Una altra classificació que convé tenir present està relacionada amb el moment en què es proposa als alumnes els problemes contextualitzats (D'Amore, Fandiño & Marazzani, 2003). Es poden proposar a continuació d'un procés d'instrucció en el qual s'han ensenyat els objectes matemàtics necessaris per a la resolució del problema. En aquest cas, l'objectiu és que serveixin, d'una

banda, com a problemes de consolidació dels coneixements matemàtics adquirits i, d'altra banda, perquè els alumnes vegin les aplicacions de les matemàtiques al món real. D'acord amb Ramos i Font (2006), a aquest tipus de problemes els anomenarem “problemes contextualitzats evocats d'aplicació” si són relativament senzills o “problemes contextualitzats evocats de consolidació” quan la seva resolució resulti més complexa. En tots dos casos, es tracta fonamentalment d'aplicar els coneixements adquirits prèviament en el procés d'instrucció.

També es poden proposar els problemes contextualitzats a l'inici d'un tema o unitat didàctica amb l'objectiu que serveixin per a la construcció dels objectes matemàtics que es vagi a estudiar en aquesta unitat didàctica. En aquest cas, no es tracta tant d'aplicar coneixements matemàtics acabats d'estudiar, sinó que l'objectiu és presentar una situació del món real que l'alumne pot resoldre amb els seus coneixements previs (matemàtics i no matemàtics). Anomenarem a aquesta nova categoria “problemes de context evocat introductoris” ja que es proposen a l'inici d'un tema matemàtic i s'han dissenyat perquè quedin dins de la Zona de Desenvolupament Proper (en termes de Vygotsky). El seu principal objectiu és facilitar la construcció, per part dels alumnes, dels conceptes matemàtics nous que es pensa estudiar en la unitat didàctica. Al seu torn, aquests problemes poden ser més o menys complexos en funció dels processos d'indagació i modelització que es pretenguin generar.

Resumint, en aquesta recerca hem optat per presentar un context simulat, on els aspectes històrics són fonamentals per fer versemblant la simulació, a l'inici de la seqüència didàctica (com element desencadenant d'una activitat complexa de tipus matemàtic i no matemàtic), de manera que la resolució de la situació necessita a la vegada aspectes matemàtics i històrics.

2.5. Disseny de tasques

En la caracterització de la competència proposada en la Figura 2.1 es veu el paper fonamental que tenen les tasques proposades als alumnes per al seu desenvolupament i avaluació. Metafòricament es pot dir que les tasques són l'altre cara de la moneda de les competències (Figura 2.3). D'altra banda, en el cas de la competència matemàtica aquestes tasques, en gran part, han de ser tasques extramatemàtiques, com s'ha vist en la secció anterior.

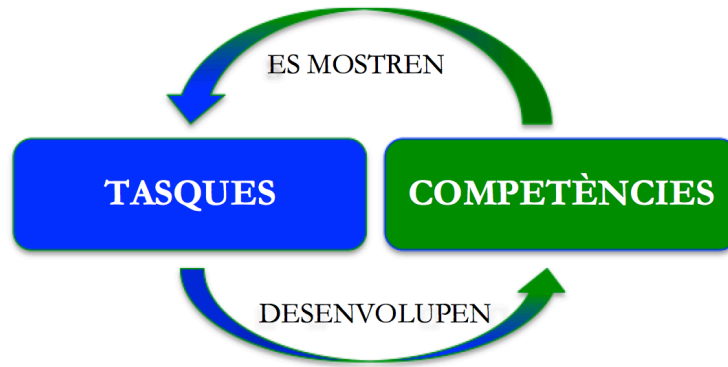


Figura 2.3: El paper de les tasques en el desenvolupament i avaluació de les competències

Recentment ha augmentat molt l'interès a l'àrea d'educació matemàtica sobre el disseny de tasques, en considerar-ho un aspecte clau per aconseguir un ensenyament de qualitat (per exemple, Mason & Johnston-Wilder, 2004; Tzur, Sullivan & Zaslavsky, 2008; Zaslavsky & Sullivan, 2011). Aquest interès es va manifestar en la creació, en el The International Congress on Mathematics Education del 2008, del Topic Study Group, Research and development in task design and analysis; i en la celebració d'un ICMI Study específic sobre aquest tema l'any 2013, sent un dels seus focus el disseny de tasques en la formació de professors.

Les tasques són les situacions que el professor proposa (problema, investigació, exercici, etc.) als alumnes; són el punt de partida de l'activitat de l'alumne, que, alhora, produeixen, com a resultat, el seu aprenentatge. La recerca sobre el disseny de tasques es va interessar per diferents aspectes. Per exemple, Swan (2007) va estudiar la naturalesa i tipologia de tasques; Stein, Smith, Henningsen & Silver (2000) les característiques que ha de complir una tasca per ser estimulants o que signifiquin un repte per a l'alumne; Charalambus (2010) va escriure sobre el paper que té el professor en la implementació de la tasca a fi d'aconseguir un procés cognitiu rellevant en els alumnes; Giménez, Font & Vanegas (2013) reflexionen sobre el disseny de tasques en la formació de futurs professors de matemàtiques de Secundària.

Per al disseny de les tasques en aquesta investigació hem utilitzat alguns elements de la noció d'idoneïtat didàctica (proposada per l'Enfocament Ontosemiòtic) i els Recorreguts d'Estudi i Investigació (desenvolupats per la Teoria Antropològica d'allò Didàctic).

2.5.1. Idoneïtat didàctica

Les reflexions (i recerques) sobre la qualitat dels processos d'instrucció de les matemàtiques són nombroses a l'àrea d'Educació Matemàtica. Totes elles posen de manifest que hi ha molts aspectes que incideixen sobre aquesta qualitat i que, per tant, es tracta d'una noció multidimensional.

La noció de criteris d'idoneïtat didàctica proposada per l'Enfocament Ontosemiòtic de la Cognició i Instrucció Matemàtica (EOS, a partir d'ara) (Godino, Batanero & Font, 2007 i 2008) és una resposta parcial a la següent problemàtica: Quins criteris s'han d'utilitzar per dissenyar una seqüència de tasques, que permetin avaluar i desenvolupar la competència matemàtica dels alumnes i quins canvis s'han de realitzar en el seu redisseny per millorar el desenvolupament d'aquesta competència? Els criteris d'idoneïtat poden servir primer per guiar els processos d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques i, segon, per valorar les seves implementacions. Els criteris d'idoneïtat són regles de correcció útils en dos moments dels processos d'estudi matemàtics. *A priori*, els criteris d'idoneïtat són principis que orienten “com s'han de fer les coses”. *A posteriori*, els criteris serveixen per valorar el procés d'estudi efectivament implementat.

La valoració de la idoneïtat didàctica és un nivell d'anàlisi didàctica que forma part d'un model més ampli d'anàlisi didàctica de processos d'instrucció proposat per l'EOS. Aquest model consta de cinc nivells d'anàlisi, cadascun amb les seves respectives eines (Font, Planas & Godino, 2010; Pochulu & Font, 2011): 1) Identificació de pràctiques matemàtiques. 2) Elaboració de les configuracions d'objectes i processos matemàtics. 3) Anàlisi de les trajectòries i interaccions didàctiques. 4) Identificació del sistema de normes i metanormas. 5) Valoració de la idoneïtat didàctica del procés d'instrucció.

Els quatre primer nivells d'anàlisi són eines per a una didàctica descriptiva-explicativa, mentre que el cinquè se centra en la valoració de la idoneïtat didàctica (Pochulu & Font, 2011; Robles, Del Castillo & Font, 2012). Aquest últim nivell es basa en les quatre anàlisis prèvies i és una síntesi orientada a la identificació de millores potencials del procés d'instrucció en noves implementacions.

Els criteris d'idoneïtat didàctica proposats per l'EOS són (Font, Planas & Godino, 2010):

- 1) Idoneïtat epistèmica, per valorar si les matemàtiques que s'ensenyen són unes “bones matemàtiques”.
- 2) Idoneïtat cognitiva, per valorar, abans d'iniciar el procés d'instrucció, si el que es vol ensenyar està a una distància raonable del que saben els alumnes i, després del procés, si els aprenentatges assolits s'apropen als que es pretenia ensenyar.
- 3) Idoneïtat interaccional, per valorar si la interacció ha resolt dubtes i dificultats dels alumnes.
- 4) Idoneïtat mediacional, per valorar l'adequació de recursos materials i temporals utilitzats en el procés d'instrucció.
- 5) Idoneïtat emocional, per valorar la implicació (interès, motivació) dels alumnes en el procés d'instrucció.
- 6) Idoneïtat ecològica, per valorar l'adequació del procés d'instrucció al projecte educatiu del centre, les directrius curriculars, les condicions de l'entorn social i professional, etc.

L'operativitat dels criteris d'idoneïtat exigeix definir un conjunt d'indicadors observables, que permetin valorar el grau d'idoneïtat de cadascuna de les facetes del procés d'estudi. Per exemple, tots concordem que és necessari implementar unes “bones” matemàtiques, però podem entendre coses molt diferents per “bones” matemàtiques. Per a alguns criteris, els descriptors són relativament fàcils de consensuar (per exemple, per al criteri d'idoneïtat de mitjans), per a uns altres, com és el cas de la idoneïtat epistèmica és més difícil. Godino, Bencomo, Font i Wilhelmi (2007) aporten un sistema d'indicadors que serveix de guia d'anàlisi i valoració de la idoneïtat didàctica. En el Màster en Formació de Professors de Secundària en Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, del 2010 al 2014, i en el Màster Interuniversitari en Formació de Professors de Secundària en Matemàtiques de Catalunya del 2014 al 2016, s'ha utilitzat i reformulat (Font, 2015) la pauta de descriptors proposta en Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2007). En relació amb el criteri d'idoneïtat epistèmica, a Font (2015) es proposen els següents components i descriptors que el fan operatiu (Taula 2.1).

Tal com es mostra en la revisió de la literatura realitzada a Breda, Font & Lima (2015), la noció d'idoneïtat didàctica ha tingut un impacte rellevant en la

formació de professors en diferents països (Mallart, Font & Malaspina, 2016; Seckel & Font, 2015; Pochulu, Rodríguez & Font, 2016). Aquest impacte està relacionat amb la idea que un dels components del coneixement didàctic-matemàtic del professor és aquell que permet valorar i justificar la millora dels processos d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. Per aquesta raó, en aquesta recerca s'han pres alguns components i descriptors dels criteris d'idoneïtat didàctica com a referencial teòric per dissenyar les seqüències didàctiques.

Taula 2.1: Components i descriptors de la idoneïtat epistèmica

COMPONENTS	DESCRIPTORS
Errors	—No s'observen pràctiques que es considerin incorrectes des del punt de vista matemàtic.
Ambigüïtats	—No se s'observen ambigüïtats que puguin portar a la confusió als alumnes: definicions i procediments clarament i correctament enunciats, adaptats al nivell educatiu al que es dirigeixen; adequació de les explicacions, comprovacions, demostracions al nivell educatiu a que es dirigeixen, ús controlat de metàfores, etc.
Riquesa de processos	—La seqüència de tasques contempla la realització de processos rellevants en l'activitat matemàtica (modelització, argumentació, resolució de problemes, connexions, etc.).
Representativitat	<ul style="list-style-type: none"> —Els significats parcials (definicions, propietats, procediments, etc.) són una mostra representativa de la complexitat de la noció matemàtica que es vol ensenyar contemplada en el currículum) —Els significats parcials (definicions, propietats, procediments, etc.) són una mostra representativa de la complexitat de la noció matemàtica que es vol ensenyar. —Per a un o diversos significats parcials, mostra representativa de problemes. —Per a un o diversos significats parcials, ús de diferents maneres d'expressió (verbal, gràfic, simbòlic...), tractaments i conversions entre els mateixos.

En la nostra recerca hem considerat molt important el component riquesa de processos i l'hem tingut en compte en el disseny de les seqüències didàctiques.

Dit d'una altra manera, *a priori* hem procurat dissenyar seqüències didàctiques amb una gran riquesa de processos matemàtics ja que (tenint en compte la caracterització de competència d'indagació i de pensament matemàtic creatiu realitzada en el Capítol 4) considerem que les seqüències didàctiques riques en processos rellevants en l'activitat matemàtica permeten el desenvolupament tant de la competència d'indagació com del pensament matemàtic creatiu. També hem tingut molt en compte en aquesta recerca el criteri d'idoneïtat cognitiu, en particular el component:

Taula 2.2: Un component del criteri d'idoneïtat cognitiva i els seus descriptors

COMPONENT	DESCRIPTORS
Alta demanda cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> — S'activen processos cognitius rellevants (generalització, connexions intramatemàtiques, canvis de representació, conjectures, etc.) — Promou processos metacognitius.

Un altre criteri que s'ha tingut en compte ha estat l'interaccional, en particular els següents components:

Taula 2.3: Components del criteri d'idoneïtat interaccional i els seus descriptors

COMPONENTS	DESCRIPTORS
Interacció entre discents	<ul style="list-style-type: none"> — S'afavoreix el diàleg i comunicació entre els estudiants. — S'afavoreix la inclusió en el grup i s'evita l'exclusió.
Autonomia	<ul style="list-style-type: none"> — Es contemplen moments en què els estudiants assumeixen la responsabilitat de l'estudi (exploració, formulació i validació).

També s'ha tingut molt en compte el següent component de la idoneïtat emocional:

Taula 2.4: Un component del criteri d'idoneïtat emocional i els seus descriptors

COMPONENT	DESCRIPTORS
Interessos i necessitats	<ul style="list-style-type: none"> — Selecció de tasques d'interès per a l'alumnat. — Proposició de situacions que permetin valorar la utilitat de les matemàtiques en la vida quotidiana i professional.

2.5.2. Recorreguts d'estudi i investigació

La seqüència didàctica s'ha dissenyat considerant la proposta dels anomenats Recorreguts d'Estudi i Investigació (REI) (Barquero, Bosch & Gascón, 2011), ja que es va considerar que aquest dispositiu didàctic permetia concretar els elements dels criteris d'idoneïtat didàctica i operativitzar aquells que s'havien seleccionat *a priori* pel seu disseny. La metodologia d'un REI és la següent: com a punt de partida, situarem una qüestió inicial, d'interès real per a la comunitat d'estudi (és a dir, estudiants i professors) i que anomenarem *qüestió generatriu* Q_0 . La qüestió inicial pretindrà obrir l'estudi, a partir de l'anàlisi d'algunes dades reals, (per exemple sobre de les conseqüències derivades dels fets de 1714 a Barcelona per a Catalunya). Al llarg d'aquest estudi aquesta qüestió generatriu evolucionarà en moltes "qüestions derivades" (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) que portarà a la recerca constant de respostes (R_i) que descriuran el mapa, els camins i els límits a recórrer del possible territori històric-matemàtic que es pugui generar. En aquest procés d'estudi de qüestions i recerca de respostes haurà d'estar sempre present l'existència d'una sèrie de coneixements històrics que serviran per poder contrastar la validesa i funcionalitat de totes aquelles respostes que es vagin proposant. Així mateix, els estudiants hauran de cercar dades a l'exterior de l'aula, en relació al període històric estudiat, consultant fonts primàries i secundàries.

2.6. Consideracions de la didàctica de la història en l'estudi de la història local

En el disseny de les tres seqüències didàctiques, descrites en els capítols 6, 7 i 8, el context històric té un paper molt rellevant. L'objectiu de les seqüències era que l'alumnat desenvolupés la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu "fent matemàtiques" i "fent història".

En aquest apartat pretenem resumir algunes de les consideracions didàctiques que es van contemplar en relació a la tria i preparació del context històric amb l'objectiu d'aconseguir un aprenentatge de la història local —ja que totes les seqüències didàctiques parteixen d'elements històrics de Badalona, la ciutat on estan localitzades les escoles on es va realitzar la seva implementació— que servís a l'alumnat per enriquir les explicacions sobre els mateixos temes de la història més general que ja coneixien (per exemple, la romanització i la Guerra de Successió).

En aquest sentit, els objectius d'ensenyament i aprenentatge dels continguts d'història sempre s'han comprovat que, en primer lloc, estiguessin emmarcats en el currículum de l'etapa des d'un punt de vista més general. De manera que, l'estudi dels elements locals esdevingués una manera d'exemplificar aquells fets més generals del contingut històric. D'aquesta manera, es van oferir fonts d'informació referents als fets estudiats més generals i algunes de locals, que els permetessin establir relacions entre aquells fets estudiats als llibres de text (i altres fonts) amb els fets del mateix moment a Badalona. Relacionar la història local amb “la història” generalment resulta interessant i significatiu per a l'alumnat.

Per exemple, en la seqüència didàctica «1714: les dades de la derrota» es van oferir diverses fonts per estudiar l'evolució de la població durant un període al voltant de l'any del setge de Barcelona. Aquestes fonts incloïen, dades provinents de les parròquies de Barcelona, dades històriques de tot Catalunya que podien consultar a l'IDESCAT i fotografies (i la seva transcripció) del primer cens de Badalona (es poden consultar al blog de la seqüència didàctica). Les fotografies del cens van ser realitzades per la investigadora ja que es guarda a l'arxiu de la ciutat i es va considerar que era de difícil accés per tot un grup d'alumnat.

Tal i com exposa Prats (2001, p. 80), els estudis d'història local, o el treball amb fonts de l'entorn permeten diverses possibilitats didàctiques que es van considerar en el disseny de les seqüències didàctiques amb què s'ha treballat:

- a) En primer lloc, permet que els alumnes s'adonin que les restes visibles al nostre al voltant i els documents que poden trobar-se, per exemple, en una parròquia, a l'ajuntament o en la premsa local, etc., són fonts interessants que poden ser utilitzades per a la comprensió de la Història.
- b) En segon lloc, permet ensenyar que els coneixements, les habilitats i les tècniques que permetran identificar i analitzar aquestes restes, són propis del coneixement i mètode general de la recerca sobre el passat. Per tant, poder situar els resultats de l'aprenentatge en un context més ampli. Això no és específic d'aquest tipus d'estudis, sinó que pot aconseguir-se també amb altres tipus d'unitats didàctiques referides a història temàtica o a la història general.
- c) En tercer lloc, poden servir per ajudar a capacitar als alumnes per reconstruir fets i esdeveniments que poden iniciar-los en la interpretació

històrica, sempre que s'incorporin els conceptes teòrics necessaris.

- d) Finalment, pot despertar en els alumnes curiositat per l'exploració històrica de l'entorn, fomentant l'interès pel descobriment del passat.

Respecte als aspectes metodològics relacionats amb la tria i la presentació de les dades i les seves fonts, ja fossin primàries o secundàries també es van seguir les recomanacions de Prats (2001) al respecte.

Segons les seves mateixes paraules “todo dato es mudo, ciego y sordo, y tan sólo cobra significación para el conocimiento cuando se le pregunta adecuadamente con y desde la teoría” (Prats, 2001, p. 81). Aquesta afirmació va ser present en la confecció dels dossiers que es van dissenyar per a cada seqüència didàctica i que van servir de guia de la indagació dels estudiants.

En les seqüències didàctiques, com es pot veure en les seves descripcions s'ofereixen a l'alumnat diferents tipologies de fonts. Quan és possible, i es considera que són assequibles a la comprensió de l'alumnat, s'ofereixen les fonts originals (gràfiques de població, mapes antics, etc.) i quan s'ha cregut que no eren adequades per la maduresa dels estudiants s'han modificat i adaptat (l'informe arqueològic de la troballa del tresor de monedes a la domus, que és una adaptació de l'original, veure Capítol 6) o, s'ha ofert la font original i aquesta adaptació (el cens de Badalona, s'ofereixen les fotos de l'original i una transcripció, veure Capítol 7 i blog).

En dues de les seqüències (Capítol 6 i 8) el museu de la ciutat té un paper important i ha requerit d'un treball previ conjunt amb la investigadora, perquè les visites realitzades estiguessin focalitzades amb els objectius de les seqüències.

2.7. La competència d'indagació: un pont entre les competències bàsiques de l'ESO i la competència d'investigació del Batxillerat

La indagació és en l'actualitat un dels temes més debatuts en la Didàctica de les ciències i també té un paper significatiu en la Didàctica de matemàtiques. En l'àmbit de l'ensenyament de les ciències, els problemes sorgits per la disminució d'interès en l'aprenentatge de l'alumnat s'han abordat des de l'enfocament de l'Ensenyament de les Ciències Basada en la Indagació (d'aquí

en endavant, IBSE) com una alternativa metodològica àmpliament recomanada per la gran varietat de beneficis en relació a la implicació de l'alumnat en les ciències, en el desenvolupament d'idees sobre ciència i habilitats i actituds científiques, així com, en el desenvolupament del seu sentit crític i les seves responsabilitats com a ciutadans. Un exemple d'aquesta tendència són els projectes de la Comissió Europea PRIMAS (Maaß, 2013) i FIBONACCI (Artigue, Dillon, Harlem & Léna, 2012).

Aquesta metodologia, dins del paradigma constructivista, proposta per primera vegada l'any 1996 pel professor (i premi Nobel de Física en 1992) Georges Charpak (Charpak, Léna, & Quéré, 2006), en l'Acadèmia de Ciències de França, es basa en certs principis que fonamenten les fases o etapes de la seva aplicació en relació al disseny de les tasques pensades per dur a terme indagacions a l'aula.

En els National Standards (National Research Council, 1996) es defineix indagació com:

Les diverses formes en les quals els científics estudien el món natural i proposen explicacions basades en l'evidència derivada del seu treball. La indagació també es refereix a les activitats dels estudiants en la qual ells desenvolupen coneixement i comprensió de les idees científiques. Són activitats que impliquen a l'alumnat a observar; buscar informació en fonts diverses; planificar; revisar els coneixements amb les evidències experimentals; recollir, analitzar i interpretar dades; fer preguntes, conjectures, prediccions; comunicar resultats. Les activitats d'indagació requereixen, entre altres destreses, ser capaç de identificar suposicions, utilitzar el pensament lògic i crític i considerar explicacions alternatives. (Jiménez, 1998, p. 207)

D'acord amb el National Research Council (NCR, 1996) el professorat ha de recolzar el desenvolupament d'habilitats per fer indagació. Aquestes habilitats i les comprensions que s'adquireixen quan es fa indagació es defineixen en la Taula 2.5, on es pot observar que una d'aquestes habilitats és l'ús de les matemàtiques, que repercutirà en un major èxit de la comprensió conceptual de l'alumnat.

Com expliquen Olson i Loucks-Horsley (2000), el terme “indagació” és utilitzat en dos sentits diferents en la Didàctica de les ciències. La indagació pot plantejar-se com a objecte d'aprenentatge (aprendre a fer ciència i aprendre sobre ciència) o com a model didàctic (aprendre ciència per mitjà de la indagació). En el nostre treball ens referim a la indagació com a objecte d'aprenentatge. Podem afirmar que hi ha un consens generalitzat en relació amb el fet de considerar la importància de la indagació com a objecte

d'ensenyament de les ciències: per aprendre ciència, per entendre la ciència, no n'hi ha prou amb conèixer les seves lleis, conceptes i models, ja que és igualment important conèixer els seus mètodes i comprendre que la ciència no és un conjunt de coneixements estàtic sinó que es qüestiona constantment aquests models en un procés dinàmic de permanent indagació. En el nostre cas, ho hem aplicat a la història i a les matemàtiques ja que considerem que s'aprèn història i matemàtica, fent tant història com matemàtica. D'altra banda aquesta indagació en contextos concrets permet el desenvolupament de la competència d'indagació.

Taula 2.5: Habilitats necessàries per fer indagació i comprensions adquirides. Font: Reyes-Cárdenas & Padilla (2012, p.418)

HABILITATS NECESSÀRIES PER FER INDAGACIÓ	COMPREENSIONS D'INDAGACIÓ ADQUIRIDES
Identificar preguntes que puguin ser respostes mitjançant una investigació científica.	Diferents tipus de preguntes suggereixen diferents tipus d'investigacions científiques.
Dissenyar i conduir investigacions científiques.	El coneixement científic actual i la seva comprensió guien les investigacions científiques.
Usar eines i tècniques apropiades per recavar, analitzar i interpretar dades.	Tecnologies utilitzades per recavar dades milloren la precisió i permeten analitzar i quantificar els resultats de la indagació.
Desenvolupar descripcions, explicacions, prediccions i fer ús de models utilitzant les proves obtingudes.	Explicacions científiques emfasitzen les proves obtingudes, presenten consistència lògica en els seus arguments i utilitzen principis, models i teories científiques.
Pensar crítica i lògicament per elaborar relacions entre les proves obtingudes i la explicació.	La ciència avança a través d'un escepticisme legítim.
Reconèixer i analitzar explicacions i prediccions alternatives.	Les investigacions científiques, de vegades, resulten en noves idees i fenòmens per estudiar, generen nous mètodes o procediments per investigació o desenvolupen noves tècniques per millorar la recollida de dades.
Comunicar procediments i explicacions científiques.	
Usar matemàtiques en tots els aspectes de la indagació.	Les matemàtiques són importants en tots els aspectes de la indagació.

Tamir, Nussinovitz i Friedler (1982), van proposar en el PTAI o Practical Test Assessment Inventory, vint-i-una categories —amb les seves respectives rúbriques per a cadascuna d'elles— per abordar tant aspectes de comprensió dels processos d'indagació com la identificació de problemes investigables i la capacitat de formular hipòtesis o d'identificar les variables d'un disseny experimental, com a aspectes més procedimentals de determinació d'habilitats pràctiques molt específiques. En Ferrés, Marbà i Sanmartí (2014) es realitza una adaptació de la proposta de Tamir, Nussinovitz i Friedler (1982) per a la competència d'indagació en el Batxillerat espanyol. Aquests autors proposen un instrument d'avaluació dels treballs de recerca dels alumnes, el “nou PTAI” o NPTAI, expliquen el seu procés d'elaboració i presenten els resultats obtinguts en la seva aplicació a l'avaluació dels treballs d'un grup de batxillers. També plantegen la utilització d'un segon instrument d'avaluació, el NC (nivells de competència), que pot aplicar-se a l'anàlisi de resultats obtinguts amb el NPTAI, i que ofereix una determinació dels nivells de competència d'indagació dels alumnes.

En aquestes caracteritzacions de la competència d'indagació i en moltes altres (per exemple, la Taula 2.5) (Windschitl, Thompson & Braaten, 2008; Nuffield Foundation, 2013) s'observa la següent característica que hem tingut molt en compte en el Capítol 4 per caracteritzar la competència d'indagació: els components i descriptores que s'utilitzen es correspon amb aspectes de la pràctica de l'investigador professional.

En aquesta investigació s'ha fet una reflexió curricular amb l'objectiu de definir i caracteritzar una competència d'indagació en les etapes educatives de Primària i Secundària per evitar la ruptura de competències que actualment es dona entre aquestes etapes i el Batxillerat (objectiu 1). Com a context de reflexió s'ha partit del currículum de Catalunya. No obstant això, les reflexions són aplicables als currículums de les altres comunitats, ja que també s'hi contempla la noció de competències bàsiques en les etapes de Primària i Secundària i la competència d'investigació a Batxillerat.

En el currículum de Batxillerat de Catalunya (Catalunya, 2008), les competències que s'han d'anar adquirint durant aquesta etapa educativa es classifiquen en dos grups: competències generals i competències específiques de cada matèria. Les competències generals i comunes es defineixen per al conjunt de l'etapa educativa i es recomana treballar-les de forma transversal, ja

que la finalitat principal de l'aprenentatge per competències és que l'alumnat sigui capaç de transferir coneixements d'un context a un altre.

Contemplada com a competència general, junt amb unes altres cinc competències, s'hi troba la competència d'investigació. Aquesta competència ve definida en el currículum de Batxillerat (Catalunya, 2008, p.7) de la forma següent:

Facultat de mobilitzar els coneixements i els recursos adequats per aplicar un mètode lògic i raonable per trobar respostes a preguntes o per resoldre problemes rellevants, que encara no s'han solucionat en el nivell i l'àmbit adequat als coneixements, habilitats i actituds que es posseeixen.

Al finalitzar aquesta etapa educativa tot l'alumnat ha d'haver realitzat un treball d'investigació que ha d'haver contribuït definitivament, tant a l'assoliment de la competència d'investigació, com a saber aplicar-la en les diferents matèries del currículum. Cada una de les matèries curriculars contribueix al desenvolupament de certes competències específiques pròpies que, al seu torn, contribueixen de manera concreta a la consecució de les diverses competències generals.

En relació a les competències específiques de la matèria de Matemàtiques, en el currículum de Batxillerat se citen: la competència matemàtica; la competència en modelització matemàtica; la competència en contextualització y, finalment, la competència en experimentació, com a punt de partida de la construcció de coneixement matemàtic curricular. En aquest sentit, les capacitats que el currículum de Matemàtiques potencia, facilitant l'establiment de raonaments quantitius sobre situacions de la vida real i sobre el món quotidià de l'alumnat, contribueixen de forma important a l'assoliment de la competència general en investigació.

La competència en experimentació impregna tot el treball científic. Si l'alumne/a no crea no genera coneixement. En aquest cas hi pot haver assimilació de continguts però no necessàriament evolució intel·lectual. L'ensenyament de la matemàtica pot contribuir a un dels grans objectius del batxillerat: la formació de persones autònomes i crítiques que sàpiguen acceptar els propis errors i, alhora, les virtuts de les altres persones. Mitjançant la resolució de problemes, la matemàtica ensenya a saber actuar quan ens equivoquem, i a no mantenir una postura inflexible a causa de no voler assumir els errors comesos. Ensenyar una fórmula o un algorisme i resoldre exercicis que són aplicació immediata hauria de requerir poc temps. Ara bé, experimentar, plantejar problemes, comprendre'ls, establir plans de treball, conjecturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjecturar de nou fins a obtenir-ne una que sigui plausible, proposar la solució, redactar les conclusions i exposar-les en públic requereix temps per al qual cal una bona

planificació. La presència de calculadores i ordinadors en el context educatiu de la matemàtica permet les proves i els assajos en la cerca de patrons de comportament matemàtic, anàlogament al que es realitza en les ciències experimentals. Les activitats dissenyades des d'aquest punt de vista i orientades cap a la construcció de coneixement, difícilment són possibles amb els mitjans tradicionals del llapis i el paper. I la potència que ens permeten aquests mitjans tecnològics no ha de quedar reduïda al càlcul: és possible i desitjable realitzar activitats en les quals la representació gràfica reveli regularitats i variacions. Les noves tecnologies han de contemplar l'experimentació i la comunicació de les idees matemàtiques per donar pas al raonament matemàtic i a la comunicació oral i escrita de les idees. Ser competent en experimentació requereix acceptar-la com a punt de partença de la construcció de coneixement i alhora requereix l'extracció d'informació que, tractada adequadament condueix, a la construcció de coneixement matemàtic curricular. (Catalunya, 2008, p. 4)

De la mateixa manera que en la matèria de Matemàtiques es fa referència a una competència específica en experimentació, sense fer cap referència explícita a la indagació, molt propera en la seva definició a la competència general d'investigació, en altres matèries de l'àrea de Ciències també es defineix una competència (on si apareix el terme "indagació") anomenada d'indagació i experimentació com una competència específica, exclusivament relacionada amb les matèries d'aquesta àrea. En cada assignatura, al tractar-se d'una competència específica, la seva definició varia per adaptar-se a les especificitats de cada matèria concreta. Malgrat tot, la principal diferència entre la competència d'investigació i la d'indagació i experimentació, a part de les especificitats concretades per a cada matèria d'aquesta última, és la puntualització en les seves definicions de què la indagació i experimentació es refereix a una activitat d'investigació guiada i limitada al context escolar.

La competència d'experimentació (o la d'indagació i experimentació), en canvi, no apareix com a pròpia o específica de les matèries de Ciències Socials o Artístiques, encara que a la descripció del seu currículum i de les metodologies didàctiques s'hi trobin múltiples recomanacions per realitzar tasques o treballs d'indagació per a la contribució de la matèria a les competències generals. Per tant, aquestes matèries poden oferir contextos adequats per realitzar indagacions on les Matemàtiques tinguin un protagonisme important i permetin potenciar el desenvolupament de les seves competències específiques, així com, la competència d'indagació la caracterització de la qual és el primer objectiu d'aquesta investigació, tant en l'etapa de Secundària, com en la de Primària.

Aquesta competència d'indagació podria treballar-se, en les etapes de Primària i Secundària, seguint les recomanacions curriculars, de forma general i transversal per aconseguir un desenvolupament de nivell suficient per ser la base de la competència d'investigació definida en el currículum de Batxillerat. De la mateixa manera que en el Batxillerat es contempla una competència en recerca transversal i competències específiques, en les matèries de ciències i matemàtiques, d'indagació i experimentació interrelacionades en el seu desenvolupament, considerem que es pot contemplar una competència transversal d'indagació interrelacionada en el seu desenvolupament amb les competències bàsiques (en particular, la competència matemàtica).

En el Capítol 4 es proposa una caracterització de la competència d'indagació (nivells de desenvolupament i descriptors). La metodologia utilitzada per a la conceptualització d'aquesta competència està basada en la realització d'una síntesi pròpia dels elements d'indagació que estan presents en els currículums d'Educació Primària, ESO i Batxillerat de Catalunya; una revisió preliminar de l'àmplia literatura sobre l'ensenyament i aprenentatge per indagació i la seva avaluació (la qual mostra que els components i descriptors utilitzats en la competència d'indagació són aspectes de l'actuació d'un investigador professional) així com en la triangulació dels resultats de diverses implementacions realitzades al llarg de la confecció de la present tesi.

Es tracta d'una competència transversal i metodològica que no és exclusiva de l'àrea o la matèria de les Ciències Naturals i que, per tant, pot i ha de ser desenvolupada també en les altres matèries. En particular, des de les Matemàtiques, amb l'ús de contextos reals extramatemàtics pròxims a l'alumnat. Al mateix temps, el desenvolupament de la competència d'indagació pot contribuir al desenvolupament de la competència matemàtica.

2.8. Pensament matemàtic creatiu

La creativitat i, en particular, la creativitat matemàtica és un concepte complex i polisèmic que ha estat considerat en moltes recerques i abordat des de molts punts de vista. Han estat proposades diverses caracteritzacions sobre què és la creativitat, la creativitat en matemàtiques i el pensament matemàtic creatiu.

Malgrat les dificultats en definir i descriure aquests termes, tant la comunitat matemàtica com la comunitat d'investigadors en educació matemàtica mostren el seu acord en el paper essencial que té la creativitat en el quefer matemàtic i

avui dia és un tema rellevant de recerca a l'àrea de la Didàctica de les matemàtiques.

En aquesta tesi hem partit de la suposició que el desenvolupament de la competència d'indagació, per mitjà de l'ús de les matemàtiques per resoldre situacions de context històric, comporta un cert tipus de pensament matemàtic creatiu en l'alumne (PMC). Per aquesta raó també proposem, en aquesta tesi, una caracterització del PMC i establím relacions entre els components i descriptors de la competència d'indagació amb els de el PMC (en el Capítol 4).

CAPÍTOL 3

Metodologia

3.1. Característiques metodològiques.....	42
3.2. Premisses de la investigació.....	43
3.3. Presentació dels casos en estudi.....	43
3.4. Fases de la investigació.....	55
3.5. Estratègies d'obtenció i triangulació de dades i resultats.....	59

RESUM

En aquest capítol s'exposa la metodologia seguida en aquesta investigació. En el primer apartat s'expliquen les característiques generals de la metodologia qualitativa de la investigació. Seguidament, s'exposen les premisses a partir de les quals es desenvolupa la investigació. En el tercer apartat es presenten breument cadascun dels quatre casos d'estudi contemplats en aquesta recerca. En l'apartat quatre s'expliquen les fases en què s'ha organitzat la recerca i els treballs que s'hi han realitzat per assolir els objectius de la nostra investigació; en aquest apartat s'aporta una taula esquemàtica que mostra l'organització de la recerca. En el darrer apartat s'expliquen els mètodes i estratègies d'obtenció i triangulació de dades i resultats.

3.1. Característiques metodològiques

Aquesta recerca ha seguit una metodologia qualitativa que ha permès comprendre de manera global (Ruiz, 2012) els processos formatius que s'han realitzat amb diferents col·lectius d'alumnes. Les preguntes de recerca ens han portat a optar per aquest enfocament d'investigació a causa que pretenem conèixer en profunditat els diversos factors relacionats amb el desenvolupament de la competència d'indagació dels alumnes a partir seqüències didàctiques que presenten contextos històrics. Per aquest motiu, aquest estudi està orientat a descriure, comprendre i interpretar el fenomen, fent una anàlisi detallada del que va succeir en el transcurs de les implementacions.

Atès que el propòsit d'aquesta recerca és conèixer en profunditat diverses situacions específiques, en les quals no pretenem generalitzar, el mètode de recerca seleccionat és l'estudi de cas, el qual es caracteritza per ser particular i complex, permetent-nos comprendre l'activitat duta a terme en el cas seleccionat en circumstàncies que són importants (Stake, 1994). Es tracta de diversos estudis de cas únic de tipus intrínsec (Stake, 2007) ja que es constitueixen a partir de l'interès en el cas i s'emprèn perquè en si mateix és d'interès per a la temàtica que volem abordar.

La recerca té també característiques descriptives perquè pretén descriure de manera detallada, d'una banda, el disseny i la implementació de la seqüència didàctica que pretén desenvolupar la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu en tres grups d'alumnes (veure detalls en els Capítols 6, 7 i 8) i, d'altra banda, el redisseny de la última seqüència didàctica en forma de c-book després de conèixer els resultats de la implementació (veure detalls en el Capítol 9). Així mateix, té característiques interpretatives perquè pretén explicar el nivell de competència d'indagació i de desenvolupament del pensament matemàtic creatiu assolit pels alumnes després de finalitzar el cicle formatiu.

A més dels tres estudis de cas comentats en el paràgraf anterior, s'ha realitzat un altre estudi de cas múltiple en una situació en què els professors han de presentar una proposta innovadora i l'han de justificar per tal de veure quin ús en fan de la història de les matemàtiques i, més en general de la història (veure Capítol 5).

3.2. Premisses de la investigació

Aquesta investigació es desenvolupa a partir de la següents premisses:

- a) L'alumnat de l'últim cicle d'Educació Primària és capaç, de la mateixa manera que ho és l'alumnat de Secundària, de desenvolupar la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu
- b) Els contextos històrics de les Humanitats i de les Ciències Socials poden ser eines potents per desenvolupar-los.

3.3. Presentació dels casos en estudi

En aquesta secció presentem breument cadascun dels quatre casos d'estudi contemplats en aquesta recerca, una informació més detallada es dona en el capítol en què s'explica el disseny i la implementació en cada estudi de cas.

3.3.1. Primer estudi de cas

Es tracta de l'estudi de cas múltiple de tipus naturalista que pretén investigar quin paper té, en les propostes d'innovació per a l'ensenyament bàsic —realitzades en els Treballs de Fi de Màster (TFM) del Màster Professional en Matemàtiques a la Xarxa Nacional, Brasil—, la incorporació d'aspectes històrics. Per a això, es busca informació sobre les següents preguntes: Quants TFM incorporen la introducció d'aspectes històrics en les seves propostes d'innovació? Quins són els continguts inclosos en aquestes propostes? Quins arguments utilitzen, els autors, per justificar que aquesta incorporació és una millora de l'ensenyament de les matemàtiques? Per a l'anàlisi dels TFM s'ha utilitzat una metodologia d'investigació qualitativa, d'acord amb Ludke i André (1986), que es basa en la comprensió i interpretació de les dades. Aquesta anàlisi s'ha realitzat tenint en compte dues fonts, una primària (els 29 TFM) i una altra secundària que són altres anàlisis ja realitzades sobre aquests mateixos 29 TFM. Aquestes fonts secundàries són la tesi doctoral de Breda (2016) i els articles de Breda, Font i Lima (2015), Breda i Lima (2016) i Breda, Lima i Pereira (2015), on els autors consideren dos aspectes qualitatius, el primer és el tipus d'innovació (incorporació de les TIC, connexions intramatemàtiques, etc.) i

el segon és la fase del procés d'instrucció contemplat (planificació, implementació i redisseny), a més del tipus de justificació de la qualitat de la innovació que es dona.

A continuació, passem a definir detalladament el segon cas d'estudi d'aquesta recerca.

3.3.2. Segon estudi de cas

Es tracta d'un disseny i implementació d'una seqüència didàctica, que es va anomenar «Viure a Baetulo», perquè els alumnes desenvolupin la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu. Aquesta seqüència didàctica i les dels estudis de cas tercer i quart, descrits en els apartats posteriors, són un tipus d'experiment d'ensenyament (Cobb i Steffe, 1983; Steffe i Thompson, 2000), la qual cosa significa que un equip d'investigadors estudia el desenvolupament de la competència de l'estudiant alhora que la promou com a part d'un cicle continu d'anàlisi i intervenció (disseny i implementació de pilotatge, disseny i implementació i redisseny).

Com un pas previ a la implementació de la seqüència, va ser necessari planificar l'accés al camp d'estudi. Es va escollir l'escola pública Salvador Espriu de Badalona de manera intencional perquè era un centre que la investigadora coneixia personalment de la seva experiència com a mestra d'educació Primària. Es va realitzar una presentació del projecte de recerca a la directora del centre educatiu de la institució participant. En aquest moment es va acordar que la institució es comprometia a facilitar els processos per al desenvolupament del treball de camp. Es va decidir d'acord amb el cap d'estudis que la seqüència didàctica s'implementaria amb un dels dos grups de 5è curs de primària ja que eren el curs que tenia en la seva programació de Coneixement del medi social el contingut de romanització que es tractava en la seqüència didàctica.

Els detalls de la implementació estan descrits en el Capítol 6 d'aquesta tesi doctoral.

L'escola participant

L'escola on s'ha dut a terme l'estudi, el CEIP Salvador Espriu és una escola pública de dues línies en un barri tranquil, no gaire lluny del centre de

Badalona que no té gaire alumnat procedent de la immigració. El curs en què es va realitzar la implementació, el 2011-2012, té matriculats 448 alumnes repartits en els diferents cicles d'Educació Infantil i Primària del quals només 5 són nous nadius —és a dir, infants que fa menys de 2 anys que són a Catalunya—. Tots els infants nous nadius són a Primària: un a 3r; un a 5è i 3 a 6è.

Es tracta d'un centre escolar dependent del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, que es va formar el més de novembre de 1988 amb la unió de dos centres docents preexistents, el C.P. Àngelus, i el C.P. Ricard Coll. El CEIP Salvador Espriu és considerat, doncs, doble hereu d'una llarga tradició pedagògica, que es remunta fins 1963. S'ubica en un edifici singular, construït per l'arquitecte Alfons Soldevila i Barbosa, que ha rebut diversos premis.

L'escola Salvador Espriu està situada al barri de Morera de Badalona, com ja s'ha dit, un barri no gaire lluny del centre històric de la ciutat. Aquest barri va ser urbanitzat a principis del segle XX, tot i que l'onada de construcció més forta tingué lloc entre els anys 1950 i 1970. Hi conviuen actualment unes 6.000 persones. És un barri de tipus residencial, és a dir, hi ha poques persones que hi visquin i que hi treballin alhora.

Badalona és, amb aproximadament uns 225.000 habitants, la tercera ciutat de Catalunya darrera Barcelona i L'Hospitalet. La major part de la població activa de la ciutat i del barri treballa, quasi en parts iguals, als sectors secundari i terciari, essent les activitats primàries purament residuals. Econòmicament, la majoria de les famílies que tenen infants a l'escola es poden situar dins la classe mitjana —almenys abans que aquesta crisi afectés severament la seva economia—, essent majoria els treballadors per compte d'altre i assalariats del sector serveis o industrial, encara que hi ha un grup de gent en límits de subsistència molt justos. Malgrat això, en general, es pot afirmar que tots els veïns fa temps que són al barri i hi estan integrats.

L'escola, habitualment, participa en les activitats ciutadanes promogudes tant per entitats com pel centre cívic o la conselleria i n'organitza d'altres, obertes al barri, que han esdevingut ja veritables tradicions ciutadanes, com la rua de Carnestoltes. En general, les mares i els pares col·laboren força amb l'escola, ja sigui com a membres de l'AMPA, una entitat que està

plenament integrada en la vida escolar, o bé com a pares d'alumnes d'una classe en concret. L'escola promou l'assistència a reunions i la participació al Consell Escolar.

L'escola Salvador Espriu es pot trobar a la xarxa¹ amb una web on es mostra gran part de la seva activitat, actualitzada freqüentment i s'utilitza com un medi més per a fer arribar la informació i les imatges de les activitats a les famílies i als mateixos infants. És una escola capdavantera en projectes mitjançant TIC, o més concretament TAC i, per tant, no podia ser d'una altra manera la comunicació amb la comunitat educativa.

En resum, és tracta d'una web molt completa i oberta a l'exterior, que recull molta informació de l'escola i dels projectes dels quals participa o bé n'és impulsora, així com recursos que les persones docents utilitzen a classe o que ha confeccionat el mateix alumnat i poden ser utilitzats per altres escoles i manté enllaços a blogs del professorat i de l'alumnat, a recursos externs a l'escola, amb altres webs d'escoles amigues, etc.

El professorat participant

El grup té una mestra tutora que els ensenya Llengua Catalana i Coneixement del medi natural, a l'aula també hi entra un mestre que els dóna la Llengua castellana i l'Educació física i dues altra especialistes, de Música i de Llengua anglesa, respectivament. La Plàstica es realitza conjuntament amb l'alumnat de Cicle (5è i 6è) en forma de Tallers rotatius amb diversos mestres implicats. Aquests mestres van col·laborar en deixar flexibilitat horària al grup per poder fer la nostra intervenció.

Amb la implementació de la seqüència didàctica vam col·laborar directament amb la investigadora la seva mestra de Matemàtiques i el mestre de Coneixement del medi social. Tots dos van mostrar molt bona predisposició en tot moment.

La mestra de Matemàtiques és Diplomada en Magisteri i fa més de 25 que exerceix com a mestra d'educació Primària, dels quals la major part en l'escola Salvador Espriu, formant part del grup fundador. Ens va acompanyar en les sessions de la seqüència didàctica amb una càrrega més matemàtica.

¹ Pàgina web oficial de l'escola Salvador Espriu <http://www.xtec.cat/ceip-espriu-bdn/> i Blog oficial: <http://espriubadalona.wordpress.com/>

El mestre de Coneixement del medi Social, que és també mestre d'Educació Especial de l'escola, va ser qui va dur a terme, en col·laboració amb la investigadora, gran part de la seqüència didàctica, sobretot les primeres sessions que són de contextualització històrica i les sortides programades. Aquest mestre és també Diplomat en Magisteri i Llicenciat en Geografia i Història però sempre s'ha dedicat a l'ensenyament en educació Primària. Forma part també d'aquest grup de docents fundadors de l'escola.

L'alumnat participant

Dins d'aquest context, l'estudi es va dur a terme amb els alumnes de 5è de Primària. Es tracta d'una escola de doble línia i hi ha dos grups de cada curs. Els dos grups realitzen habitualment moltes activitats junts i es coneixen però cadascun fa classe habitualment en el seu espai de classe que està comunicat per una porta a la paret mitgera.

El grup de 5è participant estava format per 50 infants. Ens centrarem a descriure el grup de 5è A que és amb el que vam treballar. Malgrat tot, el professor tutor de l'altre grup va anar realitzant les mateixes activitats que vam fer nosaltres amb una bona acceptació tant per part de l'alumnat com del mateix professor, segons comentaris posteriors. Així doncs, el grup de 5è A estava format per 23 alumnes, 17 dels quals són nens i 6 nenes. És a dir, un 74 % de la classe són nens, en front d'un 26% de nenes. La majoria tenen entre 10 i 11 anys, encara que hi ha un nen i una nena repetidors i un nen a qui s'ha avançat un curs.

Es van fer entrevistes en profunditat, informals i obertes a la tutora, a la mestra de matemàtiques, al mestre de socials i a la mestra cap d'estudis, amb preguntes sobre els nens i nenes del grup, per a conèixer les seves realitats socials i acadèmiques i poder construir el sentit social de les seves conductes individuals. En funció d'aquestes entrevistes, doncs, s'ha construït un breu relat que pretén donar una imatge aproximada de cada participant i del grup, del qual se'n fa un breu resum a continuació.

Es pot dir que és un grup xerraire, cosa que, segons les mestres, dificulta el bon ritme de la classe. Malgrat tot, tenen potencial i capacitat de treball. El nivell de lectura i de comprensió lectora, en general, és força correcte per al nivell de cinquè. És un grup amb poca autonomia, tot i que estan acostumats a treballar en projectes. Cal estar-hi a sobre i guiar-los sobre les

tasques que han d'anar fent. Sembla que al llarg de curs han anat millorant aquest aspecte.

Quant al nivell acadèmic, les mestres ens expliquen que hi ha un subgrup de 10 infants (3 nenes i 7 nens) que tenen un nivell alt i mig-alt i la resta tenen un nivell bastant baixet. No hi ha terme mig en aquest grup.

Hi ha dos alumnes que tenen un Pla Individualitzat i dos alumnes més amb necessitats educatives especials, un d'ells per altes capacitats (talentós) i l'altre per problemes psicològics.

L'alumnat de l'escola realitza habitualment treballs en grup o en parelles en totes les assignatures, participant en projectes o petites investigacions que sovint tenen un àmbit d'influència que supera la classe, implicant a la resta de la comunitat educativa (pares i mares, cuineres de l'escola, altres classes, altres escoles —algunes d'elles a l'estranger—, professorat d'altres classes, etc.).

Ens centrarem a continuació en fer una breu descripció dels context curricular de les dues àrees principals —Coneixement del medi social i la de Matemàtiques— que interactuaven en la seqüència didàctica implementada.

La nostra primera intenció era dur a terme l'estudi amb infants dels cursos de 6è, més a prop dels alumnes de secundària ja que per aquesta franja d'edat sí que hi ha estudis realitzats sobre temes de modelització i transversalitat, tal i com ja hem indicat anteriorment. Malgrat tot, al parlar amb el professor de Socials del Cicle Superior, vam veure que el context històric de la seqüència didàctica —el procés de romanització i la fundació de *Baetulo* (Badalona) i la vida quotidiana dels seus habitants entre el segle I AEC i el segle IV EC— no s'adequava a la programació del centre per als cursos de 6è, ja que la romanització en aquesta escola es treballa en el curs de 5è.

En el darrer trimestre, just quan vam fer la nostra intervenció, els alumnes de cinquè havien estudiat l'edat antiga, una introducció al naixement dels grans imperis: unes pinzellades de fenicis, grecs, ibers i, finalment els romans i la romanització. Aquest darrer tema s'havia treballat una mica més a fons, aprofundint sobre tot amb la vida quotidiana de la societat romana i la seva organització social. En primer lloc s'havia treballat la romanització de la Península Ibèrica, en general, i després més concretament del territori

i les ciutats pertanyents a la l'actual Catalunya. Per tant, la nostra intervenció va significar per als alumnes una ampliació «natural» dels continguts de l'àrea de Coneixement del medi social i, en aquest sentit, va quedar perfectament integrada en la programació de l'aula.

En relació a l'àrea matemàtica, en el primer trimestre el grup de cinquè ha estudiat els números del sistema de numeració decimal fins a la unitat de milió, fent èmfasi en el fet que cada ordre està format per deu unitats de l'ordre anterior. En aquest primer trimestre també es va fer un repàs dels números romans. Sembla que la intenció educativa és que l'alumnat observi les diferències entre el sistema de numeració romà i el decimal però les diferències es focalitzen en: la utilització de lletres en comptes de nombres, la posicionalitat del sistema decimal i la base i el desconeixement del zero per part dels romans. En cap cas es fa èmfasi en l'estructura i el concepte de «sistema».

També es palesa el concepte de número romà com a un sistema per escriure especial, de l'antiguitat, en inscripcions de monuments, edificis emblemàtics, rellotges, capítols de llibres, números dels segles, etc.). S'utilitza el recurs del rellotge per aprendre l'equivalència dels símbols dels números romans amb els números aràbics. S'expliquen les regles d'escriptura d'aquests nombres, com si d'un joc es tractés.

Amb l'estudi dels nombres naturals i el sistema de numeració decimal, es repassen les operacions bàsiques: suma, resta, multiplicació i divisió amb les propietats bàsiques que faciliten el seu càlcul. També es revisen les propietats aritmètiques (commutativa, associativa, distributiva de la multiplicació respecte al producte) i les expressions aritmètiques i s'introdueix la descomposició de nombres en factors.

A continuació, passem a definir detalladament el tercer cas d'estudi d'aquesta recerca.

3.3.3. Tercer estudi de cas

Es tracta d'un disseny i implementació d'una seqüència didàctica, que es va anomenar «1714: les dades de la derrota», perquè els alumnes desenvolupin la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu.

Com un pas previ a la implementació de la seqüència, com en el cas anterior, va ser necessari planificar l'accés a l'escenari. Es va escollir l'escola concertada Betúlia de Badalona de manera intencional perquè era un centre que la investigadora coneixia personalment de la seva experiència, en aquesta cas, com a Psicopedagoga. De la mateixa manera, es va presentar el projecte de recerca i la seqüència didàctica que es pretenia implementar a la directora del centre. Es tractava de l'any 2014 quan se celebrava el Tricentenari de la Guerra de Successió i de seguida va estar d'acord amb facilitar-me l'accés a l'escenari. En aquell moment, es tractava del disseny pilot de la seqüència, anomenada «Valorar els fets de 1714», i es va implementar amb un grup de 1r d'ESO i un altre de 2n d'ESO, paral·lelament. Tanmateix, aquestes implementacions van ser utilitzades per redissenyar la seqüència resultant la que s'analitza en aquest treball i que va ser implementada amb un grup de 4t d'ESO.

Els detalls de la implementació estan descrits en el Capítol 7 d'aquesta tesi doctoral.

L'escola participant

Les implementacions dels estudis de cas tercer i quart s'han dut a terme en l'escola Betúlia² de Badalona.

Aquesta escola neix l'any 1964 de titularitat privada encara que actualment és un centre concertat amb la Generalitat de Catalunya. S'autodefineix com a independent —no vinculada a cap ideologia política, ni cap organització religiosa—, catalana, respectuosa amb la pluralitat, encara que inspirada en els principis de l'humanisme cristià, democràtica i amb alumnat mixt en règim de coeducació. És una escola petita, d'una sola línia, on s'imparteix educació Infantil, Primària i Secundària que està ubicada i integrada al barri Progrés de Badalona. L'alumnat es reparteix entre dos edificis que estan molt a prop l'un de l'altre.

Aquest barri del districte 7, situat molt a prop del centre administratiu i comercial, és un dels que té més història de la ciutat. És un barri força envellit, en comparació amb la resta del municipi, amb un índex molt elevat de coneixement del català i que es caracteritza per tenir un alt nivell d'instrucció i un percentatge elevat de joves estudiants, amb un paper

² Pàgina web oficial de l'escola Betúlia: <http://www.xtec.cat/esc-betulia>

destacat del sector serveis. És el barri on hi ha més desproporció entre l'oferta pública i privada de les escoles (de les 13 escoles del barri només 3 són públiques), amb poc alumnat de procedència estrangera. En aquest barri, junt amb el barri de Centre, és on es concentren més d'una quarta part de les associacions i entitats culturals de la ciutat, gran part de l'alumnat del Betúlia participa, quan surt d'escola, de les activitats d'un o altre esplai, biblioteca, club de bàsquet (hi ha gran tradició d'aquest esport a la ciutat), etc.

El percentatge d'alumnat de l'escola Betúlia no resident al barri és inferior al 5 % i, per tant, el seu perfil respon a un nivell socioeconòmic i cultural mitjà-alt i es correspon majoritàriament amb la descripció realitzada. En el moment de la implementació, hi havia matriculats 357 alumnes (79 a infantil, 157 a primària i 121 a ESO). La ràtio d'alumnat per aula oscil·lava entre 25-27 a primària i 30-35 a ESO.

El professorat participant

La directora del centre em va posar en contacte amb la professora d'Història de l'escola que va col·laborar voluntàriament i amb molt d'interès. A través d'ella es van implicar a altres professors que donaven classe al grup de 4t d'ESO d'altres assignatures però la que també s'hi va implicar amb més interès va ser la professora de Matemàtiques.

La majoria de les mestres i professorat resideixen a Badalona, fa molts anys que treballen junts i es coneixen molt bé els uns als altres. Són una com una família i, per tant, comparteixen certes maneres de fer, consensuades al llarg dels anys, quant a organització i programació de les activitats escolars.

La professora d'Història del Betúlia és llicenciada en Història de l'Art i va començar a donar classe l'any 1988. Va començar a treballar en aquest centre fa divuit anys com a professora de Socials i d'Informàtica. Al llarg d'aquests anys ha donat classes de Mitologia, Cinema, Història de l'Art. També ha participat de la comissió de gestió de conflictes. A banda de la seva laboral a l'escola, ha col·laborat amb Intermón Oxfam en el projecte Connectant Mons, un projecte interactiu entre escoles d'arreu del món.

La professora de Matemàtiques és llicenciada en Ciències Químiques en l'especialitat de Bioquímica per la Universitat Autònoma de Barcelona. El 1982 va llegir la seva tesina, basada en un treball realitzat en l'Institut de

Biologia Fonamental de Barcelona. Fins l'any 1992 va treballar en una escola concertada en el barri de Sant Roc —en aquell moment un barri molt degradat de Badalona— on hi va donar classes de Matemàtiques i de Ciències Naturals, essent tutora dels cursos de 6è i 8è d'Educació General Bàsica i coordinadora del cicle superior. Entre el 1993 i el 1994 vaig ser coautora dels llibres de Naturals Cèrcol 1, 2 (Cicle mitjà) i Bitoc 1,2 (Cicle superior) Coneixement del medi natural de l'editorial Text Edicions 62 i Enciclopèdia Catalana.

El 1997 va començar a treballar a l'Escola Betúlia, on ha fet diversos crèdits variables als cursos de 3r i 4rt d'ESO, sempre relacionats amb les Ciències naturals i la Química. Des de fa anys és tutora de 1r d'ESO i també ensenya les Matemàtiques de 1r, 2n i 3r d'ESO, les Ciències naturals de 1r, 2n i 3r d'ESO, les pràctiques de laboratori a 3r d'ESO.

L'alumnat participant

La implementació es va dur a terme amb els alumnes de 4t curs d'ESO. El grup estava format per 14 nois i 17 noies, en total 31 estudiants. Es tractava d'un grup bastant cohesionat, la majoria es coneixien des de feia anys. Amb el professorat es portaven bé i els tenien el respecte adequat, no s'observaven conflictes importants. Eren uns estudiants que no costava gens que estiguessin atents quan el professorat donava explicacions o es reclamava l'atenció de tot el grup per fer aclariments que podrien interessar a tothom.

Pel que fa a les relacions entre els alumnes no s'observaven especials problemes, generalment, es tenien respecte els uns als altres. Malgrat tot, s'observava fàcilment que hi havia un grup de quatre nenes que eren les més populars, més que pel seu rendiment acadèmic per la seva simpatia i facilitat de relacions socials. També destacava un altre grup de dues nenes i un nen que destacaven per ser els que tenien un bon rendiment acadèmic. Després hi havia dos amics que també acostumaven a treballar junts i que feien avançar el grup. En el grup hi havia dos nois repetidors, cada un en un equip d'investigació diferent, però que no treballaven gens i reclamaven l'atenció sovint. En un dels equips que va treballar millor un dels seus components era un nen amb necessitats educatives especials però que es va adaptar molt bé a les tasques que s'havien d'anar realitzant.

Així doncs es pot dir que el rendiment acadèmic de la classe era normal. En general era un grup treballador però bastant rondinaire. El fet és que el tipus de treball que se'ls proposava els treia de la seva zona de confort, acostumats a fer exercicis i a respondre preguntes concretes.

Pel que fa a la programació de la part matemàtica, el programa de l'escola per a quart d'ESO seguia un llibre de text concret amb els següents temes: els nombres reals; inequacions de primer grau; equacions i sistemes de segon grau; expressions algebraiques i polinomis; trigonometria; successions; vectors i rectes en el pla; estudi general d'una funció; combinatòria i probabilitat i estadística bivariant. En el moment de l'entrada en l'escenari estaven treballant el quart tema, els polinomis.

Pel que fa al temari d'Història és aquest curs qui té en la seva programació, en la part d'Història de Catalunya, l'estudi de la Guerra de Successió.

A continuació, passem a definir el quart cas d'estudi d'aquesta recerca.

3.3.4. Quart estudi de cas

Es tracta d'un disseny i implementació d'una seqüència didàctica, que es va anomenar «Què amaguen aquestes ruïnes?», perquè els alumnes desenvolupin, com en les anteriors, la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu.

En aquest cas, la implementació es va realitzar, com ja s'ha avançat en l'anterior apartat en la mateixa escola que el tercer estudi de cas, l'escola concertada Betúlia de Badalona. Per tant, aquesta vegada la negociació per entrar en l'escenari va ser realitzada directament amb la professora d'Història. Ella es va encarregar d'organitzar una reunió amb la professora de Matemàtiques, ja que la directora ho havia deixat a les seves mans.

De totes maneres es va presentar la seqüència didàctica que es pretenia implementar a la directora del centre i a les dues professores col·laboradores. Es tractava de realitzar-ho a finals del curs 2014-2015, durant el mes de juny. Finalment, es va dur a terme les darreres setmanes de curs, amb un grup d'alumnes de 1r d'ESO.

Els detalls de la implementació estan descrits en el Capítol 8 d'aquesta tesi doctoral.

L'escola participant

Els detalls de l'escola participant, atès que és la mateixa que en l'anterior estudi de cas, es poden llegir en l'apartat 3.3.3, referent al tercer estudi de cas.

L'alumnat participant

La implementació es va dur a terme amb els alumnes de 1r curs d'ESO.

El grup estava format per 14 nois i 18 noies. En conjunt era un grup molt actiu i això té una doble vessant, surten moltes idees i estratègies per abordar les tasques però també és fàcil que campí la desorganització. Es va haver de cuidar molt aquest tema ja que els costava compartir la informació, tenien tendència a treballar de forma individual. Agraïen el fet de respondre preguntes concretes, on no calia fer cap gestió o/i elaboració de la informació, i es queixaven molt quan la tasca demanava prendre decisions i construir coneixement propi.

El rendiment acadèmic de la classe era normal. Hi havia alumnes molt treballadores, sobretot quatre noies, i també dos nois amb baix rendiment que es van integrar en equips d'investigació diferents.

En temes de relacions i interaccions era una classe problemàtica perquè s'observava un grup molt popular de tres noies i un grup igual de popular de cinc nois que arrossegaven a la resta de la classe. Després, un dels nois amb baix rendiment no es relacionava pràcticament amb ningú a causa de problemes personals. I, finalment, un dels alumnes tenia molt mogut, incapaç de seure en una cadira una hora sencera, encara que no mostrava problemes d'atenció ja que, més o menys, seguia bé la classe.

La decisió d'implementar-ho en aquest curs va ser basant-nos en què aquest alumnat havia treballat recentment la romanització i estava molt motivat en aquest tema. Parlant amb la professora de Matemàtiques i revisant els llibres de text que utilitzen també, en aquesta part final del curs estaven estudiant geometria. Concretament, les últimes lliçons del seu llibre de text de matemàtiques tractaven els següents continguts: mesures; rectes i angles; polígons (triangles i quadrilàters); perímetres i àrees; circumferència i cercle.

En aquesta darrera lliçó, «circumferència i cercle», l'alumnat havia treballat el concepte de circumferència; les posicions relatives d'un punt o d'una recta o d'altres elements respecte la circumferència; els angles en la circumferència; els polígons i la circumferència; la longitud de la circumferència i d'un arc de circumferència; l'àrea del cercle i, finalment, les construccions geomètriques amb ordinador. Per tant, gran part dels continguts que es volien treballar amb la seqüència didàctica haurien de servir per reforçar i acabar d'adquirir i construir coneixements ja treballats en l'àrea de matemàtiques de forma més formal i aïllada, des d'un punt de vista disciplinar.

Durant la seqüència didàctica es treballà amb diferents aspectes matemàtics sempre amb possibilitat de diferents nivells de resolució, depenent de la competència de cada equip d'indagació, però el focus de la indagació és la confecció i aplicació d'un model geomètric, a partir de la interpretació de dades matemàtiques, arqueològiques i històriques.

3.4. Fases de la investigació

Com es pot veure en la Taula 3.1, s'hi han relacionat els treballs realitzats en cada fase per assolir els objectius de la nostra investigació.

La investigació consta de quatre fases. S'inclou en la taula una fase preliminar, relacionada amb una revisió a posteriori del treball realitzat en el període de Màster, perquè és on es fonamenta la motivació de la investigació de desencadenà el treball desenvolupat en el Doctorat.

En la primera fase de la investigació es van realitzar cinc tasques que ens van acostar a l'assoliment del primer i segon objectiu. El primer objectiu consistia en caracteritzar la competència d'indagació a l'ensenyament obligatori i el pensament matemàtic creatiu. Tanmateix, la caracterització del pensament matemàtic creatiu no s'aborda fins a la tercera fase.

Per assolir parcialment aquest primer objectiu, la conceptualització de la competència d'indagació (definició, nivells de desenvolupament i descriptors), la metodologia utilitzada consistí en una síntesis pròpia de la doctoranda dels elements d'indagació que estan presents en els currículums d'Educació Primària, ESO i Batxillerat de Catalunya, una revisió preliminar

de l'àmplia literatura sobre l'ensenyament i aprenentatge per indagació i la seva avaluació així com, en la triangulació dels resultats de diverses implementacions realitzades al llarg de la confecció de la present tesi. En la fase 1 es realitzà aquesta anàlisi de fonts documentals (Tasca 1), es confeccionà una primera caracterització de la competència d'indagació (categories i descriptors de nivells tres de desenvolupament) de la que en resultà un instrument d'anàlisi *a priori* (Tasca 2) que va ser utilitzat per analitzar la implementació de la primera seqüència didàctica dissenyada i extraure'n conclusions.

Taula 3.1: Esquema de les fases d'investigació

FASES	OBJECTIUS	TASQUES	ANY
FASE PRELIMINAR	<p>Revisió del objectius del Treball Final Màster:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconèixer característiques de propostes didàctiques en l'àmbit de l'aprenentatge del sistema de numeració a l'Educació Primària. • Caracteritzar una pràctica investigadora matemàtica a l'Educació Primària, desenvolupant el sistema de numeració i dissenyar una seqüència d'aprenentatge que desenvolupi les característiques anteriors. 	<p>T0) Revisió del disseny, implementació i anàlisi d'una seqüència didàctica que desenvolupi la competència d'indagació en un context històric: «Viure a Baetulo»</p>	2013
FASE 1	<p><i>Primer objectiu (O1):</i> Caracteritzar la competència d'indagació a l'ensenyament obligatori i el pensament matemàtic creatiu.</p> <p><i>Segon objectiu (O2):</i> Catalogar diferents usos dels contextos històrics en les propostes didàctiques per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.</p>	<p>T1) Anàlisi de fonts documentals sobre el constructe "pràctica investigadora" i síntesi pròpia.</p> <p>T2) Confecció d'un instrument <i>a priori</i> per avaluar la competència d'indagació a partir de la síntesi pròpia.</p> <p>T3) Anàlisi de la seqüència didàctica «Viure a Baetulo» amb l'instrument confeccionat en la T2.</p> <p>T4) Anàlisi de fonts documentals i primera catalogació dels usos dels contextos històrics.</p> <p>T5) Difusió de resultats en congressos.</p>	2013

FASES	OBJECTIUS	TASQUES	ANY
FASE 2	<p><i>Primer objectiu (O1)</i></p> <p><i>Tercer objectiu (O3):</i> Dissenyar, implementar i redissenyar (ajustant-les) seqüències didàctiques que desenvolupin pràctiques d'indagació i el pensament matemàtic creatiu, on s'usin les matemàtiques per resoldre situacions de context històric.</p> <p><i>Quart objectiu (O4):</i> Investigar, en el marc de la implementació de les seqüències didàctiques de l'objectiu 3, el nivell de desenvolupament de la competència d'indagació dels alumnes i el desenvolupament del pensament matemàtic creatiu.</p>	<p>T6) Disseny, implementació i anàlisi de la seqüència didàctica pilot «Valorant els fets de 1714».</p> <p>T7) Millora de l'instrument confeccionat a T2 a partir de l'anàlisi de les seqüències de T3 i T6.</p> <p>T8) Redisseny de la seqüència de T6, esdevenint «1714: les dades de la derrota», implementació i anàlisi amb el nou instrument de T7.</p> <p>T9) Difusió de resultats en congressos.</p>	2014
	FASE 3	<p><i>Primer objectiu (O1)</i></p> <p><i>Tercer objectiu (O3)</i></p> <p><i>Quart objectiu (O4)</i></p>	<p>T10) Confecció d'un instrument per avaluar el pensament matemàtic creatiu en base al projecte MCSquared.</p> <p>T11) Disseny, implementació i anàlisi de la seqüència didàctica «Què amaguen aquestes ruïnes?» amb l'instrument de T7 i T10.</p> <p>T12) Confecció i anàlisi d'un qüestionari d'opinió de l'alumnat en la participació.</p> <p>T13) Anàlisi del pensament matemàtic creatiu en les seqüències didàctiques de T0 i T8 amb l'instrument de T10</p> <p>T14) Difusió de resultats en congressos i revistes.</p>
FASE 4	<p><i>Segon objectiu (O2)</i></p> <p><i>Tercer objectiu (O3)</i></p> <p><i>Quart objectiu (O4)</i></p>	<p>T15) Estudis de cas per a catalogació definitiva dels usos dels contextos històrics.</p> <p>T16) Redisseny de la seqüència didàctica de T11 en forma de c-book en el marc del projecte MCSquared i la seva avaluació.</p> <p>T17) Difusió de resultats en congressos.</p>	2016

REDACCIÓ FINAL DE LA MEMÒRIA D'INVESTIGACIÓ

La caracterització definitiva de la competència d'indagació s'obté en la fase 2 quan després de validar l'instrument d'anàlisi, mitjançant la implementació i anàlisi de la segona seqüència didàctica, és ajustat i millorat (Tasca 7).

En aquesta primera fase també s'aborda el segon objectiu amb l'anàlisi de fonts documentals i la realització d'una primera catalogació dels usos dels contextos històrics (Tasca 4). Aquest segon objectiu s'assoleix en la fase 4 amb la realització de diversos estudis de cas (veure apartat 3.3) per a obtenir una catalogació definitiva dels usos dels contextos històrics.

En la fase 2, a més de la caracterització definitiva de la competència d'indagació, s'aborden els objectius tres i quatre. Respecte aquests objectius, en aquesta fase es dissenya la seqüència didàctica «Valorant els fets de 1714» per a desenvolupar la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu, que és implementada amb dos cursos i serveix com a implementació i disseny pilot (Tasca 6). Després, aquesta seqüència didàctica és redissenyada, esdevenint la seqüència «1714: les dades de la derrota» i implementada i analitzada amb el nou instrument d'anàlisi de la competència d'indagació (Tasca 8).

En la fase 3, a partir de la concepció de pensament matemàtic creatiu assumida en el projecte MCSquared, es confecciona d'un instrument (Tasca 10) per avaluar-lo, assolint definitivament el primer objectiu de la nostra investigació. Aquest instrument serà utilitzat per analitzar les dades obtingudes de les tres seqüències didàctiques dissenyades i implementades (Tasca 13).

En aquesta fase també es continua treballant en relació als objectius tercer i quart, amb el disseny, implementació i anàlisi de la seqüència didàctica «Què amaguen aquestes ruïnes?» amb els instruments d'anàlisi de la competència d'indagació i de pensament matemàtic creatiu (Tasca 11). També és en aquesta fase que es dissenya un qüestionari de preguntes (algunes de resposta tancada quantitativa i algunes de resposta oberta) d'opinió de l'alumnat sobre la participació en la implementació (Tasca 12) les respostes del qual seran analitzades.

En la quarta fase es realitzen els darrers treballs per donar resposta als objectius 2, 3 i 4, com és la catalogació definitiva dels usos dels contextos històrics (Tasca 15) i el redisseny de la seqüència didàctica «Què amaguen

aquestes ruïnes?» en forma de c-book en el marc del projecte MCSquared i la seva avaluació (Tasca 16).

En totes les fases s'han realitzat comunicacions en congressos per anar fent difusió dels resultats (veure el darrer apartat del Capítol 10).

Finalment, en aquests darrers mesos, s'ha realitzat la redacció final i definitiva de la memòria de la investigació.

3.5. Estratègies d'obtenció i triangulació de dades i resultats

Els mètodes de recollida d'informació, segons Stake (2007), han de ser els adequats per respondre a les preguntes de recerca formulades, i fins i tot, perquè permetin aixecar nous interrogants. Així doncs, en aquesta recerca es van utilitzar diversos mètodes i instruments amb la finalitat d'obtenir evidències en relació als objectius de la investigació. Amb la voluntat de disposar d'informació exhaustiva i variada s'ha dut a terme un procés interactiu de recollida de dades que ha consistit principalment en l'observació participativa, completada amb la utilització d'altres estratègies, com ara l'entrevista i l'anàlisi documental. Entre l'observació (directa i dels enregistraments de vídeos i àudios), l'entrevista informal i la informació extreta dels diversos tipus de documents ens hem acostat progressivament a la comprensió de la realitat educativa objecte de recerca.

Per enregistrar les observacions directes de l'alumnat participant per a poder fer-ne una posterior anàlisi s'han realitzat notes de camp durant el desenvolupament de les intervencions educatives, i també posteriorment. Aquestes notes de camp reflecteixen comentaris i descripcions de situacions interessants per a la investigadora, així com les reflexions conjuntes amb les professores col·laboradores i el tutor del treball, que també ha estat present en algunes de les intervencions. També s'han fet enregistraments en viu de converses i desenvolupament de les tasques d'indagació de l'alumnat i fotografies (sempre amb el permís de l'escola) mitjançant una càmera senzilla.

Per obtenir més informació, completar i triangular la informació obtinguda (triangulació de fonts) s'han realitzat entrevistes a diversos informants claus, com van ser les persones docents, col·laboradores en cada

implementació de les tres seqüències didàctiques. Aquestes entrevistes han estat informals, no estructurades, amb preguntes de caràcter obert i s'han fet en el transcurs natural de les interaccions personals, en un clima de confiança mútua.

També s'ha realitzat anàlisi documental en diversos moments de la investigació i amb diferents propòsits —incloent l'anàlisi de llibres i webs en el treball previ per a conèixer l'estat de la qüestió abans d'abordar la present investigació (Sala, 2012)—. S'han analitzat les produccions escrites de l'alumnat participant en les implementacions de les seqüències didàctiques referides a les tasques proposades. Així com, les respostes de l'alumnat a un qüestionari d'opinió passat en la darrera implementació.

Per desenvolupar la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu i obtenir-ne evidències s'han dissenyat i implementat tres seqüències didàctiques de context històric, i un c-book (unitat didàctica creativa anomenada així en el si del projecte MCSquared), encara que aquest darrer no ha estat implementat. Per analitzar el desenvolupament de la competència d'indagació en l'alumnat participant en la implementació de les seqüències didàctiques anomenades s'ha utilitzat com instrument d'anàlisi la Taula 4.1 i, per al pensament matemàtic creatiu, la Taula 4.2 (veure Capítol 4). L'ús d'aquestes taules i les categories i descriptors que caracteritzen ambdós constructes, respectivament, ens ha permès classificar les evidències recavades per a la seva posterior anàlisi.

S'ha realitzat també una triangulació d'experts de l'anàlisi que s'ha explicat anteriorment. En concret, pel primer estudi de cas múltiple de tipus naturalista (apartat 3.3.1 i Capítol 5) s'ha triangulat amb la investigadora que va utilitzar la mateixa documentació amb un altre objectiu. Pel disseny i l'anàlisi de les seqüències didàctiques i pel seu redisseny (Capítols 6, 7 i 8), hem realitzat una triangulació amb experts dels marcs teòrics que s'han tingut en compte en el disseny de les tasques d'aquestes unitats didàctiques (un expert en l'Enfocament Ontosemòtic i una experta en la Teoria Antropològica d'allò Didàctic) i amb una arqueòloga per la part històrica. Pel redisseny de la darrera unitat en forma de c-book (Capítol 9) la triangulació s'ha fet amb la Comunitat d'Interès de la Universitat de Barcelona del projecte MCSquared. Per últim cal dir que s'ha fet una certa triangulació amb experts de l'àrea de Didàctica de les Matemàtiques en el

procés de revisió i de presentació en congressos de les publicacions derivades d'aquesta tesi.

A continuació s'aporta la Taula 3.2 amb un esquema de la metodologia per cada objectiu.

Taula 3.2: Mètodes d'obtenció i recollida d'evidències

OBJECTIUS	MÈTODES I INSTRUMENTS
1. Caracteritzar la competència d'indagació (CI) a l'ensenyament obligatori i el pensament matemàtic creatiu (PMC).	<ul style="list-style-type: none"> — Anàlisi documental: definició CI i caracterització mitjançant taula de categories i descriptors <i>a priori</i>. — Validació de la taula en una implementació de seqüència didàctica. — Ajust i millora de les categories i descriptors, resultant la Taula 4.1 — Anàlisi documental: assumpte definició de PMC del projecte MCSquared — Adaptació de la taula d'avaluació del PMC per a la seva caracterització, resultant la Taula 4.2 — Triangulació amb altres investigadors.
2. Catalogar diferents usos dels contextos històrics en les propostes didàctiques per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.	<ul style="list-style-type: none"> — Anàlisi documental i estudi de cas 1, 2, 3 i 4.
3. Dissenyar, implementar i redissenyar (ajustant-les) seqüències didàctiques que desenvolupin pràctiques d'indagació i el pensament matemàtic creatiu, on s'usin les matemàtiques per resoldre situacions de context històric.	<ul style="list-style-type: none"> — Disseny de tres seqüències didàctiques i estudis de cas 2, 3, 4, — Disseny de c-book (unitat didàctica creativa, en el si de MCSquared)
4. Investigar, en el marc de la implementació de les seqüències didàctiques de l'objectiu 3, el nivell de desenvolupament de la competència d'indagació dels alumnes i el desenvolupament del pensament matemàtic creatiu	<ul style="list-style-type: none"> — Gravacions àudio classes d'implementacions. — Anàlisi produccions escrites alumnat participant en les implementacions. — Qüestionari opinió alumnat. — Anàlisi evidències de CI i PMC amb Taula 4.1 i Taula 4.2 — Triangulació amb altres investigadors i docents implicats. — Triangulació entre les anàlisis de les seqüències.

CAPÍTOL 4

Competència d'indagació i pensament matemàtic creatiu

4.1. Una proposta de caracterització de la competència d'indagació.....	64
4.2. Pensament matemàtic creatiu (PMC).....	68
4.3. El PMC en el projecte MCSquared.....	69
4.4. Caracterització i avaluació del PMC en el MCSquared.....	70
4.5. Relació entre els components de la competència d'indagació i els de PMC.....	84

RESUM

En aquest capítol es fa primer una proposta de caracterització de la competència d'indagació per a l'ensenyament obligatori (definició, desenvolupament i descriptors), entesa com la capacitat de formular-se preguntes d'investigació i intentar respondre-les fent ús de les matemàtiques, per a les etapes d'educació Primària i Secundària. Es considera una competència bàsica que l'alumnat podria continuar desenvolupant en la següent etapa educativa, ajustant-se aleshores a la definició del currículum de Batxillerat per a la competència d'investigació. S'argumenta que la adquisició de la competència matemàtica està estretament relacionada amb aquesta competència d'indagació ja que, seguint les recomanacions del currículum, l'ensenyament i aprenentatge de les Matemàtiques ha de basar-se en la problematització de contextos reals i quotidians de l'alumnat. A continuació es fa la caracterització del pensament matemàtic creatiu i es construeix una eina per a la seva avaluació. La idea de fons és que el procés creatiu es pot considerar com un emergent d'altres processos més simples. S'explica com s'ha aconseguit a partir de les reflexions de l'enfocament ontosemiòtic i del treball fet en el marc del projecte MCSquared. Per últim es fa una relació entre els components de la competència d'indagació i els components del pensament matemàtic creatiu. Si mirem la relació que hi ha entre els seus components veiem que hi ha força relació entre ells. Per tant, a priori el fet de desenvolupar la competència d'indagació també ajuda a desenvolupar el pensament matemàtic creatiu. D'aquesta manera, es dona resposta al primer objectiu d'aquesta investigació.

4.1. Una proposta de caracterització de la competència d'indagació

La figura 2.1 del capítol 2 posa de manifest tres aspectes clau a l'hora de desenvolupar i avaluar competències: les tasques, els descriptors de la competència i l'anàlisi de les accions/pràctiques realitzades per l'alumne per a trobar evidències d'un determinat descriptor. En aquesta investigació s'ha posat l'èmfasi en els dos primers aspectes en relació amb la competència d'indagació.

A continuació es presenta una definició i una caracterització de la competència d'indagació (nivells de desenvolupament i descriptors). La metodologia utilitzada per a la conceptualització d'aquesta competència està basada en la realització d'una síntesi pròpia dels elements d'indagació que estan presents en els currículums d'Educació Primària, ESO i Batxillerat de Catalunya, una revisió preliminar de l'àmplia literatura sobre l'ensenyament i aprenentatge per indagació i la seva avaluació així com, en la triangulació dels resultats de diverses implementacions realitzades al llarg de la confecció de la present tesi.

4.1.1. Caracterització de la competència d'indagació

La proposta que es presenta, es basa en la necessitat d'avaluar una competència que, encara que no es troba definida explícitament en els currículums d'Educació Primària i Educació Secundària Obligatòria, per una banda, es promou amb les recomanacions didàctiques de totes les matèries o àrees de coneixement i, per una altra banda, al finalitzar l'etapa d'ESO serà la base de la competència d'investigació del Batxillerat.

Es presenta la següent definició de competència d'indagació per a les etapes de Primària i ESO, basada en el currículum i altra literatura referenciada anteriorment:

Facultat de mobilitzar els coneixements i els recursos adequats per aplicar un mètode lògic i raonable, amb l'ajuda i supervisió de la persona docent, per trobar respostes a preguntes sobre aspectes o situacions problemàtiques dins del context de les matèries escolars, que encara no s'han solucionat en el nivell i en l'àmbit adequat als coneixements, habilitats i actituds que es posseeixen.

La competència d'indagació és una competència metodològica, com la competència matemàtica, ja que fa referència directa a aprendre mètodes de

treball i estratègies per resoldre problemes de forma eficaç, en principi en l'entorn escolar però que han de significar una preparació per a la vida quotidiana i, posteriorment, per a la vida adulta. També l'anomenem competència transversal ja que els coneixements que s'adquireixen i les habilitats que es desenvolupen provenen de totes les àrees i matèries del currículum.

Amb l'objectiu de confeccionar uns descriptors amb què caracteritzar la competència i la seva gradació, es va confeccionar en un estadi inicial d'aquest treball una taula amb uns descriptors *a priori*, extrets de la revisió dels currículums catalans i la literatura relacionada amb l'ensenyament i aprenentatge basada en la indagació. Aquesta taula inicial es va utilitzar per fer una primera avaluació del nivell d'assoliment de l'anomenada competència en la implementació de dues seqüències didàctiques, en una ocasió amb alumnat de cicle superior d'educació Primària, i en l'altra amb alumnat de primer cicle d'ESO. En ambdues implementacions les seqüències didàctiques plantejaven situacions problemàtiques pertanyents a contextos curriculars de l'àrea de Ciències Socials, molt propers a la realitat quotidiana de l'alumnat. En el procés d'indagació de ambdues seqüències didàctiques les matemàtiques tenien un paper important, ja que les aportacions d'aquesta matèria a les competències bàsiques estan en estreta relació amb la competència d'indagació que es pretenia potenciar.

L'anàlisi d'aquestes implementacions va permetre millorar i complementar la taula de caracterització preliminar. La Taula 4.1 mostra la nova caracterització de la competència d'indagació i els seus nivells de desenvolupament.

La competència es caracteritza mitjançant una sèrie de descriptors principals, numerats de l'un al set, relacionats amb la seqüència que ha de seguir qualsevol procés d'indagació: problematitzar la situació plantejada; mostrar una actitud de dubte per promoure l'exploració i investigació i buscar explicacions; fer prediccions sobre els possibles resultats o "solucions" del problema plantejat en base a les idees prèvies i la revisió preliminar de la situació; planificar, dissenyar una estratègia per investigar sobre el problema, així como, conduir i regular (o autoregular) el treball d'indagació, plantejant hipòtesis amb què treballar; buscar, manejar i elaborar informació i dades i interpretar-ho a la llum de les hipòtesis; validar els resultats; i, finalment, comunicar els resultats de la indagació.

Per a cada un d'aquests set descriptors es proposen tres nivells de desenvolupament de la competència: el nivell bàsic de principiant; el nivell intermedi; i el nivell avançat. En cada un d'aquests nivells es proposen diversos indicadors de l'assoliment de la competència, diferenciats en funció de quin descriptor es tracti. Per exemple, un estudiant d'educació Primària que, després d'una pluja d'idees amb el seu equip d'investigació, sàpiga discernir quines de les preguntes proposades serveixen per generar una línia d'investigació i quines no, estaria mostrant, per al descriptor número 1 (Problematitza la situació plantejada per iniciar la indagació), un nivell de desenvolupament de la competència intermedi.

El desenvolupament de la competència és gradual i depèn del domini de múltiples habilitats que estan estretament vinculades amb altres competències, principalment transversals i metodològiques, del currículum. Per tant, sempre s'ha d'entendre com un assoliment progressiu i l'avaluació s'ha de fer de forma sumativa, prenent la Taula 1 com d'orientació.

Diversos autors (p. e. Rubio, 2012) han senyalat que un dels problemes del desenvolupament i avaluació de competències és una certa ambigüïtat de les orientacions curriculars. En elles se sol formular una llista de competències amb els seus descriptors que permetin a un professor considerar que el que fa l'alumne és una evidència que correspon a un determinat nivell de desenvolupament d'una determinada competència. Ara bé, en alguns casos no hi ha coherència entre les competències, els descriptors estan formulats de manera ambigua, les competències se solapen les unes amb les altres, etc.

La proposta de caracterització de la competència d'indagació que es fa aquí — si bé presenta alguns d'aquests aspectes problemàtics, com el solapament d'alguns descriptors— pot ser una aportació a la solució parcial d'aquesta problemàtica, ja que permet: 1) connectar les competències bàsiques de primària i secundària amb la d'investigació de Batxillerat; 2) realitzar una avaluació més precisa dels assoliments i les dificultats de l'alumnat quan es troben immersos en processos d'ensenyament i aprenentatge basats en la indagació.

Es tracta d'una competència transversal i metodològica que no és exclusiva de l'àrea o la matèria de les Ciències Naturals i que, per tant, pot i ha de ser desenvolupada també en les altres matèries. En particular, des de les Matemàtiques, amb l'ús de contextos reals extra matemàtics pròxims a

l'alumnat. Al mateix temps, el desenvolupament de la competència d'indagació pot contribuir al desenvolupament de la competència matemàtica.

Taula 4.1: Caracterització de la competència d'indagació

Nivell bàsic (B)	Nivell intermedi (J)	Nivell avançat (S)
1. Problematitza la situació plantejada per iniciar/continuar la indagació		
B.1. Assumeix la situació como un problema de la comunitat B.2. Formula preguntes a partir del context susceptibles de ser investigades	J.1. Disposa de paràmetres que utilitza per contrastar les preguntes generades i reconèixer les seves possibilitats/limitacions J.2. Classifica les preguntes; argumenta racionalment i lògica sobre quines són les que es poden descartar	S.1. Analitza críticament i holística, sintetitza la informació i extrau les principals idees per acotar la situació problemàtica S.2. Formula noves preguntes a partir d'idees alternatives a les existents en el context de la situació
2. Manté una actitud de dubte que li permet buscar possibles explicacions		
B.1. Mostra una actitud de dubte basada en la curiositat B.2. Reconeix, de forma intuïtiva, en la situació plantejada una certa problemàtica	J.1. Mostra una actitud de dubte basada en la idea de lakatiana de prova i refutació J.2. Identifica en la situació problemàtica diversitat de possibilitats que cal investigar	S.1. Mostra una actitud intencionadament crítica de dubte davant la situació plantejada S.2. Contrasta la informació que emergeix de la situació amb les seves idees prèvies i valora si cal investigar per construir coneixement nou
3. Fa prediccions sobre les possibles respostes/explicacions/resultats		
B.1. Fa prediccions basades en el sentit comú i pròpies creences a partir de l'enunciat de la situació plantejada B.2. Planteja conjectures des d'una posició empàtica i subjectiva davant la problemàtica	J.1. Planteja conjectures contemplant els coneixements previs sobre el context problemàtic J.2. Distingeix diferents conjectures en funció de diferents supòsits	S.1. Construeix hipòtesis a partir de diferents variables que identifica en la problemàtica havent-se informat prèviament o en base a models S.2. Explicita les hipòtesis de forma clara i organitzada amb l'objectiu de contrastar-les
4. Planifica, condueix i regula les accions per desenvolupar una indagació		
B.1. Utilitza, accepta les eines proposades pel guia (o docent) i accepta formar part de la comunitat d'investigació B.2. Segueix les indicacions i el disseny de planificació proposats de forma rígida B.3. Reflexiona esporàdicament sobre la validesa de les connexions que es van realitzant	J.1. S'integra en la comunitat d'investigació on discuteix, proposa i escull entre diverses planificacions J.2. Suggereix canvis en el disseny de la planificació quan creu que el desenvolupament del treball d'indagació ho requereix J.3. Explicita les seves reflexions sobre la validesa de les connexions i les comunica a la comunitat d'investigació	S.1. Organitza i lidera la comunitat d'investigació on proposa i justifica planificacions de disseny propi que es plantegen flexibles i adaptables al curso dels treballs d'indagació S.2. Analitza sistemàticament els nivells de qualitat de les connexions S.3. Genera nous sistemes de control de qualitat relacionats amb la confiabilitat, fiabilitat, representativitat, dispersió, etc.
5. Classifica, escull, elabora i interpreta les dades/informació recavats		
B.1. Recull dades de les fonts proposades i les registra B.2. Classifica la informació B.3. Explora les dades mitjançant possibilitats de tanteig	J.1. Escull la informació útil entre les possibles fonts i la recull i registra J.2. Analitza, elabora i valora la informació reconeixent-hi connexions i/o patrons en relació a les hipòtesis plantejades, amb diversos recursos (taules, generalitzacions, obtenció de models, etc.)	S.1. Busca informació en altres fonts per complementar-la S.2. Analitza, elabora i valora la informació des de diversos punts de vista reconeixent-hi noves connexions i/o patrons en relació a les hipòtesis plantejades, amb eines teòriques escollides conscientment
6. Valida els resultats , comparant-los amb les prediccions		
B.1. Reconeix alguns resultats B.2. Valida els resultats establint conclusions (de causa-efecte)	J.1. Reconeix els resultats en relació a les hipòtesis plantejades J.2. Valida els resultats en contrast amb les hipòtesis i argumentant críticament per a la comunitat	S.1. Reconeix els resultats en relació a les hipòtesis plantejades després d'un procés deductiu i valora la possibilitat de generar noves hipòtesis, tenint en compte les limitacions del treball. S.2. Valida els resultats en contrast amb les hipòtesis i argumenta críticament contemplant explicacions alternatives en base a les evidències
7. Comunica les conclusions/resultats de la indagació		
B.1. Explica els resultats i conclusions a la comunitat d'investigació B.2. Respon a preguntes sobre el procés d'indagació	J.1. Elaborar un text (pot ser oral) per exposar els resultats en relació a les hipòtesis a la comunitat interessada J.2. Defensa i argumenta críticament les conclusions exposades, responen a preguntes sobre detalls J.3. Reflexiona sobre el treball de l'equip	S.1. Elaborar un informe d'indagació formal, rigorosament argumentat per exposar els resultats en relació a les hipòtesis S.2. Respon a qualsevol tipus de preguntes sobre el procés i/o els resultats i les limitacions S.3. Reflexiona sobre el treball de l'equip i l'impacte sobre els resultats

4.2. Pensament matemàtic creatiu

El desenvolupament de la competència d'indagació per mitjà de l'ús de les matemàtiques per a resoldre situacions de context històric, comporta un cert tipus de pensament matemàtic creatiu (PMC) en l'alumne.

La creativitat i, en particular, la creativitat matemàtica és un concepte complex i polisèmic que ha estat considerat en moltes investigacions i enfocat des de molts punts de vista. Diverses caracteritzacions sobre què és la creativitat, la creativitat en matemàtiques i el PMC s'han proposat. Algunes d'elles s'han centrat més en els subjectes creatius, unes altres en el procés creatiu o en els productes resultants (Haylock, 1987; Mann, 2006) i fins i tot unes altres introduint noves dimensions culturals i socials inherents a la creativitat (Csikszentmihalyi, 2000; Sriraman, 2009).

Ervynck (1991) descriu la creativitat matemàtica a través de tres etapes: una etapa tècnica conceptual preliminar, seguida d'una activitat més algorítmica i, finalment, una activitat creativa que consisteix en l'habilitat de resoldre problemes i de prendre decisions amb estratègies no algorítmiques. Per la seva banda, Hadamard (1945) després d'indagar en els processos mentals que matemàtics i científics seguien fent matemàtiques, descriu el procés creatiu utilitzant el model Gestalt amb les seues quatre fases: preparació-incubació-il·luminació-verificació. Treballs més recents, com el de Liljedahl (2013), accepten i estenen els treballs de Hadamard afegint el fenomen que denomina “AHA! experience” que, segons l'autor, és clau en el moment de la il·luminació. Malgrat la descripció més a menys acceptada de les etapes en els processos creatius en matemàtiques, no deixa de ser misteriós com promoure els mecanismes adequats perquè la vivència i transició d'aquests diferents moments puguin ocórrer. En aquest sentit:

Los misteriosos mecanismos mediante los cuales actúa la “incubación” de los problemas con los que se ocupa la mente hasta el momento en que en ella surge la “inspiración” o “iluminación” decisiva en todo proceso verdaderamente creativo es otro de los temas poco conocidos y bastante controvertidos de los que habrá que ocuparse. (Guzmán, 1995)

Malgrat les dificultats en definir i descriure aquests termes, tant la comunitat matemàtica com la comunitat d'investigadors en educació matemàtica mostren el seu acord en el paper essencial que té la creativitat en el treball matemàtic. Els investigadors distingeixen entre la creativitat matemàtica en la comunitat matemàtica i la creativitat en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques

a nivell escolar. Per exemple, Kaufman i Beghetto (2008) distingeixen entre “big-C, middle-C o little-C” per a centrar-se en la comunitat de matemàtics com a productors de coneixement, en els alumnes en grup o en els alumnes individualment.

4.3. El pensament matemàtic creatiu en el projecte MCSquared

El projecte d'investigació MCSquared (MC2) (Mathematical Creativity Squared) de la Comunitat Europea té per objectiu la creativitat a nivell escolar (o middle-c), que Liljedahl i Sriraman (2006) suggerien caracteritzar com:

Mathematical creativity at school level is: (1) the process that results in unusual (novel) and/or insightful solution(s) to a given problem or analogous problem, and/or (2) the formulation of new questions and/or possibilities that allow an old problem to be regarded from a new angle. (Ibid., p.19)

El projecte MC2 es centra en la proposta de dissenys innovadors per a promoure la creativitat i el PMC en els seus futurs usuaris (estudiants i professors de secundària o d'altres nivells educatius). Aquests dissenys pretenen incidir sobre noves formes de pensar, desenvolupar, aprendre i ensenyar matemàtiques. El projecte MC2 es proposa, a més, indagar en: (a) la creativitat social (Fischer, 2011) que sorgeix en el procés de disseny col·laboratiu o de co-disseny d'unitats i seqüències didàctiques que es diuen c-unitats (la c en referència a creativitat) i, (b) descriure fins a quin punt i en quina mesura aquestes unitats poden promoure la creativitat matemàtica i el PMC en professors i estudiants. L'èmfasi es posa en el procés de disseny d'aquestes propostes i en el desenvolupament de l'entorn digital necessari per a donar-los suport.

Per a aconseguir aquests objectius, el projecte MC2 ha desenvolupat un nou format de llibre electrònic denominat “c-book” (c-llibre, c de creatiu). Aquest c-llibre reuneix diferents c-unitats (unitats creatives) que han sigut dissenyades per les denominades Comunitats d'Interès (CdI) (Fisher, 2001). Cada país participant en els blocs dedicats al disseny de c-unitats, un total de quatre països: Espanya, França, Anglaterra i Grècia han constituït la seva CdI local. En aquestes CdI, formades per unes 12-20 persones, conflueixen perfils bastant diferents provinents de diferents comunitats de pràctiques i amb diferents “cultures” epistemològiques i pedagògiques. En el cas de la Universitat de Barcelona la CdI està formada per: professors de Primària i de Secundària,

investigadors en Educació Matemàtica, editorials educatives, desenvolupadors de tecnologia educativa i experts externs de l'àmbit de l'educació matemàtica, que poden aportar la seva visió diferent sobre com promoure la creativitat en la societat i, en particular, en les matemàtiques. Aquest punt d'obertura i de confluència dels diferents perfils, interessos i interpretacions és el que va donar origen a interessants punts de discussió i aportà criteris originals i nous en el disseny de les c-unitats. Els grups participants es van proposar així formar una comunitat interdisciplinària de professionals i investigadors on els rols de “dissenyadors”, “consultors” i “consumidors” (que es van anar entremesclant) permetien un continu redisseny de les c-unitats.

En el marc d'aquest projecte, en relació amb l'objectiu 2 d'aquesta investigació, ens hem plantejat el redisseny d'una de les seqüències didàctiques dissenyades i implementades de manera presencial. La caracterització del PMC realitzada en el marc del MCSquared s'ha utilitzat per a estudiar la relació entre la competència d'indagació i el PMC desenvolupat, tant en la c-unitat com en les altres unitats que no han seguit aquest format. A continuació expliquem primer el procés que s'ha seguit per a caracteritzar el PMC en el marc del MCSquared i després les connexions que s'estableixen entre els components i descriptors del PMC i els components i descriptors de la competència d'indagació.

4.4. Caracterització i avaluació del pensament matemàtic creatiu en el MCSquared

La caracterització i avaluació del PMC en el MCSquared s'ha basat molt sobre la reflexió que s'ha fet en el marc de l'anomenat Enfocament Ontosemiòtic sobre els processos en general. Per tant, començarem explicant primer aquesta reflexió, per explicar, després com s'ha utilitzat en el marc del MCSquared.

4.4.1. Els processos en l'enfocament Ontosemiòtic

En diversos treballs Godino i col·laboradors han desenvolupat l'enfocament ontosemiòtic del coneixement i instrucció matemàtica (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Batanero &

Font, 2007 i 2008; Font, Planas & Godino, 2010; Font, Godino & Gallardo, 2013), a partir d'ara utilitzarem l'acrònim EOS per a referir-nos a aquest enfocament.

La tesi doctoral de Rubio (2012), entre altres aportacions, realitza una aportació teòrica que cal emmarcar en la perspectiva del desenvolupament teòric de l'EOS, ja que es pretén afrontar la problemàtica de l'encaix dels “processos” dins d'aquest marc teòric. En concret, es revisen les diverses investigacions sobre processos realitzades en el marc de l'EOS i es desenvolupa la tipologia de processos proposada en l'EOS establint les següents categories: 1) processos associats a les configuracions i a les facetes duals, 2) altres processos i 3) megaprocessos.

En Rubio (2012) també hi ha algunes consideracions sobre la investigació realitzada en el àrea de Didàctica de les matemàtiques sobre processos. En particular es ressalten els següents aspectes:

1) En l'àrea de la Didàctica de la matemàtica, procés és un terme sense definir però al que se li ha dedicat molta atenció. Tal com s'assenyala en Font, Rubio, Giménez i Planas (2009), en les últimes dècades s'ha produït a nivell internacional un “gir processal” en el disseny de currículums de matemàtiques (i també d'altres matèries). Aquest gir ha significat passar de concebre els currículums de matemàtiques en els que els objectius d'aprenentatge, sobretot, fossin conceptes, a pensar en currículums els objectius dels quals són l'aprenentatge, sobretot, de processos. Aquest gir s'ha produït, entre altres raons, a causa que una de les tendències actuals en l'ensenyament de les matemàtiques (Font, 2008; Guzmán, 2007) és la importància que es dona a l'ensenyament dels processos de pensament propis de la matemàtica. Ja no es considera que l'ensenyament sigui una mera transferència de continguts. Es considera que les matemàtiques són una ciència en la qual el mètode clarament predomina sobre el contingut. Per això, es concedeix una gran importància a l'estudi dels processos matemàtics, en particular els processos de resolució de problemes i de modelització.

En aquest gir ha tingut molta influència la Teoria de l'Educació Matemàtica Realista (RME, Realistic Mathematic Education), desenvolupat sobretot a l'institut Freudenthal d'acord amb el punt de vista de Hans Freudenthal sobre les matemàtiques i el seu ensenyament i aprenentatge (Freudenthal, 1993). En aquesta teoria es considera el procés de modelització o matematització format

per altres dos processos fonamentals: matematització horitzontal i la matematització vertical (Treffers, 1987).

Podem observar aquest gir processal, entre d'altres, en els Principis i Estàndards del NCTM (2000), on es proposa l'aprenentatge dels següents processos: resolució de problemes, raonament i prova, comunicació, connexions i representació; en el Adding it Up Project (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001); en el Tercer Estudi Internacional de Matemàtiques i Ciències, conegut amb l'acrònim TIMSS (Mullis et al., 2003), en l'estudi PISA (OECD, 2003) i en les propostes dels currículums d'alguns països com és el cas de Suècia i, en certa manera, en els currículums de l'estat espanyol derivats de la Llei Orgànica General del Sistema Educatiu (LOGSE), de la Llei Orgànica d'Educació (LOE). I de la LOMCE. De fet, l'actual proposta de currículums de matemàtiques per competències cal pensar-la com una conseqüència d'aquest gir processal.

El gir processal que estem comentant està present en el currículum que hem tingut en compte en aquesta investigació. En el cas de Catalunya, el Currículum d'Educació Bàsica Obligatòria, proposa treballar amb els processos de resolució de problemes, raonament i prova, comunicació i representació, i connexió.

2) Els currículums basats en processos i competències plantegen la demanda d'investigar el desenvolupament i avaluació de processos i competències en els processos d'instrucció. Un bon indicador de la investigació realitzada a Espanya sobre aquesta temàtica són les comunicacions i ponències presentades als simposis de la Societat Espanyola d'Investigació en Educació Matemàtica (SEIEM). En la revisió que fa Font (2011) d'aquestes comunicacions i ponències per al nivell de l'Ensenyament Secundari Obligatori, s'observa que les investigacions no s'han preocupat per desenvolupar un marc teòric general sobre processos matemàtics sinó que s'han dedicat a realitzar investigacions concretes sobre determinats processos, especialment sobre argumentació, generalització i resolució de problemes. En les investigacions citades en Font (2011) no hi ha una definició de procés assumida majoritàriament i els processos particulars es poden anomenar amb termes diferents.

3) Una altra característica que s'observa en la investigació sobre processos és que aquests se solen descompondre en altres processos. Per exemple, és

habitual en la literatura trobar que el procés de modelització ha de seguir les cinc fases següents: 1) Observació de la realitat. 2) Descripció simplificada de la realitat. 3) Construcció d'un model. 4) Treball matemàtic amb el model. 5) Interpretació de resultats en la realitat; però si reflexionem sobre cadascuna d'aquestes fases resulta que es poden entendre com subprocessos del megaprocés de modelització. D'altra banda, en la Teoria de l'Educació Matemàtica Realista també es considera el procés de modelització, el qual es descompon en dos subprocessos: matematització horitzontal i vertical. Al seu torn cadascun d'aquests dos subprocessos es torna a descompondre en altres processos per a caracteritzar-los. La matematització horitzontal, porta del món real al món dels símbols i fa possible el tractar matemàticament un conjunt de problemes. En aquest subprocés són característics els següents processos: 1) identificar les matemàtiques en situacions problemes. 2) esquematitzar. 3) formular i visualitzar un problema de diverses maneres. 4) descobrir relacions i regularitats. 5) reconèixer aspectes isomorfs en diferents problemes. 6) transferir un problema real a un matemàtic. 7) transferir un problema real a un model matemàtic conegut. La matematització vertical, consisteix en el tractament específicament matemàtic de les situacions. Són característics els següents processos: 1) representar una relació mitjançant una fórmula. 2) utilitzar diferents models. 3) refinar i ajustar models. 4) combinar i integrar models. 5) provar regularitats. 6) formular un concepte matemàtic nou. 7) generalitzar.

4) Segons Rubio (2012) hi ha diversos fets rellevants de tipus empíric, observables tant en la investigació en educació matemàtica com en els currículums oficials. Són els següents: 1) La diversitat de conceptualitzacions del terme procés matemàtic, 2) La caracterització d'un procés mitjançant la seva descomposició en altres processos i 3) la diversitat de processos i de termes per a nomenar-los.

En relació amb la diversitat de conceptualitzacions del terme procés matemàtic, en Rubio (2012) no es dona una definició, però sí certes característiques d'un procés matemàtic. Un procés matemàtic és allò que podem inferir que ha causat una certa resposta a una demanda donada, és una seqüència d'accions que és activada o desenvolupada per a aconseguir un objectiu, generalment una resposta (sortida) davant la proposta d'una tasca (entrada). Aquestes tasques estan sotmeses a regles matemàtiques o metamatemàtiques.

En relació amb la caracterització d'un procés mitjançant la seva descomposició en altres processos, en Rubio (2012) es considera convenient, d'acord amb l'EOS, pensar en processos més complexos (megaprocessos) i processos més simples. Exemples de megaprocessos són la resolució de problemes i la modelització.

En relació amb la diversitat de processos i de termes per nomenar-los, és un fet que hi ha una gran diversitat de processos i que, a més, molts d'ells semblen suggerir la mateixa idea. Els processos poden aparèixer amb una certa precisió dins d'un marc teòric com és el cas de l'EOS, però també apareixen en altres marcs teòrics i en els documents curriculars. Una opció que es proposa en Rubio (2012) per avançar en aquesta diversitat de processos consisteix a diferenciar primer entre procediment i procés i, en segon lloc, agrupar els processos per aire de família (Wittgenstein, 1953). Els processos agrupats en una família tenen alguna característica en comú si els comparem dos a dos, però no hi ha cap característica comuna a tots ells.

A més d'agrupar els processos en famílies per una semblança, cadascun d'ells també es pot considerar com una família. Per exemple, hi ha molts tipus de processos d'argumentació (reducció a l'absurd, inducció completa, raonament per element genèric, etc.) o de generalització. Aquest fet fa que un procés com el de mecanització es pugui considerar com la realització repetida de molts procediments diferents.

En les classes de matemàtiques, sobretot en primària i secundària, es presenten als alumnes molts procediments —per exemple, en aritmètica, multiplicació divisió, resta, etc.; en geometria molts procediments de construcció (per exemple, la construcció de la mediatriu etc.)— l'aplicació dels quals es pot considerar un procés. En Rubio (2012) es considera convenient distingir entre el procediment que ens diu com s'han de fer les coses (es tracta clarament d'una regla) i l'aplicació del procediment, que no es considera convenient considerar com a procés, ja que és més convenient agrupar-los en un sol procés que es pot anomenar algoritmització, mecanització (en el sentit de repetició), etc.

El grup dels 16 processos contemplats explícitament en l'EOS, megaprocessos i altres processos

En la Figura 4.1 se sintetitzen una part de les diferents nocions teòriques proposades per l'EOS. En aquest enfocament l'activitat matemàtica ocupa el

lloc central i es modelitza en termes de sistema de pràctiques operatives i discursives. D'aquestes pràctiques emergeixen els diferents tipus d'objectes matemàtics primaris, que estan relacionats entre si formant configuracions epistèmiques (hexàgon interior de la Figura 4.1). Finalment, els objectes que intervenen en les pràctiques matemàtiques i els emergents de les mateixes, segons el joc de llenguatge en què participen, poden ser considerats des de les cinc facetes o dimensions duals (decàgon exterior de la Figura 4.1). Tant les dualitats com els objectes primaris es poden analitzar des de la perspectiva procés-producte, la qual cosa ens porta als processos que es recullen en la figura 4.1.

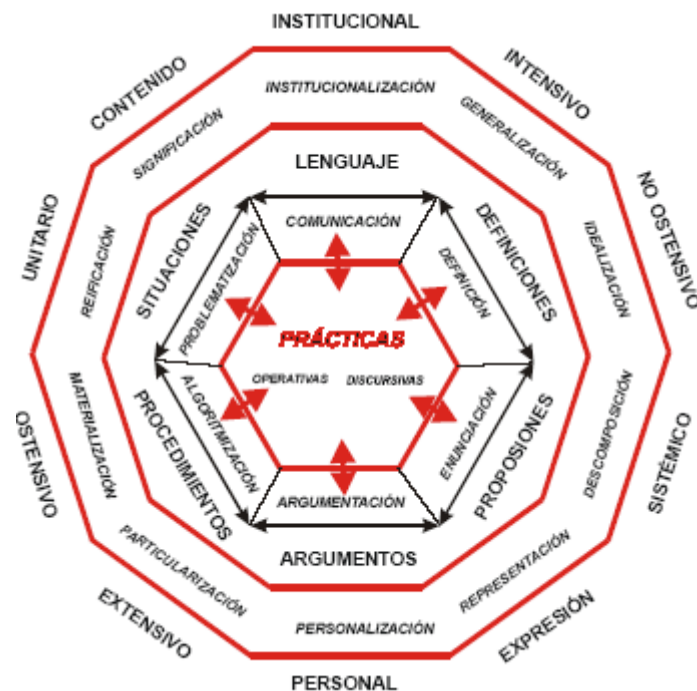


Figura 4.1: Model ontosemiòtic dels coneixements matemàtics

En l'EOS no s'intenta donar, d'entrada, una definició de "procés" ja que hi ha moltes classes diferents de processos, es pot parlar de procés com a seqüència de pràctiques, es pot parlar de processos cognitius, de processos metacognitius, de processos d'instrucció, de processos de canvi, de processos socials, etc. Es tracta de processos molt diferents en els quals, potser, l'única característica comuna a molts d'ells sigui la consideració del factor "temps" i, en menor mesura, el de "seqüència en la qual cada membre pren part en la determinació del següent". Per tant, en l'EOS, en lloc de donar una definició general de procés, s'ha optat per seleccionar una llista dels processos que es consideren importants en l'activitat matemàtica (els de la figura 4.1), sense pretendre incloure en ella a tots els processos implicats en l'activitat

matemàtica, ni tan sols a tots els més importants, entre altres motius perquè alguns dels més importants (per exemple, el procés de comprensió o el de modelització) més que processos són hiper o mega processos:

La “resolución de problemas”, y de manera más general, la “modelización” debe ser considerada más bien como “hiper-procesos” matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de “conexiones” entre los objetos y “generalización” de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (“supervisión”) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino, Batanero & Font, 2006, p. 9)

La consideració d'un procés com un megaprocés és quelcom sobre el que no hi ha consens. Existeix un consens ampli en considerar que tant la resolució de problemes com la modelització són megaprocessos, però aquest consens no és clar en altres casos. Una manera d'investigar sobre els megaprocessos és estudiar la seva relació amb els processos més simples que els componen.

En l'EOS es consideren megaprocessos (per exemple, resolució de problemes o modelització) i processos. En el cas d'aquests últims es distingeix entre els 16 de la Figura 4.1 i altres processos (per exemple, els processos metafòrics).

En diversos treballs realitzats usant com a marc teòric l'EOS s'ha mostrat com l'ús del constructe “configuració epistèmica d'objectes matemàtics” conjuntament amb determinats processos matemàtics considerats en la figura 4.1 permet una millor anàlisi de les pràctiques matemàtiques. L'eina “configuració epistèmica” resulta útil per descriure de manera estàtica l'estructura (organització, configuració, anatomia, etc.) d'un text matemàtic, mentre que els processos són eines que permeten aprofundir en l'anàlisi del funcionament (dinàmica, fisiologia, etc.) de la configuració epistèmica activada en la realització de la pràctica matemàtica. En el marc de l'EOS també s'han realitzat investigacions específiques sobre alguns dels 16 processos de la figura 4.1. Per exemple, Recio i Godino (2001), sobre el procés d'argumentació i Font i Contreras (2008) sobre els processos de materialització-idealització i particularització-generalització. Font i Contreras (2008) en analitzar els processos de materialització i idealització conclouen que no poden ser analitzats sense tenir en compte alguns dels altres processos contemplats en la Figura 4.1 (com a mínim el de representació). Davant aquest fet, en l'EOS es proposa que una de les maneres d'estudiar aquesta relació és situar el procés que ens interessa primer en el centre de l'hexàgon per relacionar-ho amb els

processos derivats dels objectes primaris i, segon, col·locar-ho en el centre del decàgon i analitzar-ho utilitzant les diferents mirades que possibiliten les facetes duals.

Proposta metodològica de l'EOS per investigar sobre processos

El fet que qualsevol dels processos contemplats en la figura 4.1 està relacionat amb alguns dels altres processos també considerats en aquesta figura, és el punt de partida per a una proposta metodològica per investigar sobre processos. En l'EOS, tant l'estudi de la relació entre alguns dels 16 processos de la Figura 4.1, com l'estudi d'altres processos no considerats directament en el grup dels 16 processos (siguin considerats megaprocessos o no), consisteix a situar el procés que ens interessa en el centre de la Figura 4.1 per relacionar-ho amb els processos de comunicació, enunciació, definició, argumentació i algoritmització i els processos relacionats amb les diferents mirades que possibiliten les facetes duals (institucionalització / personalització; generalització / particularització; descomposició / reificació; materialització / idealització; representació/ significació). En Font (2007) s'aplica aquesta tècnica als processos metafòrics, en Malaspina i Font (2010) i en Malaspina (2008) als processos intuïtius, en Godino i Font (2010) al procés de representació, en Acevedo, Font i Bolite (2006) als processos metafòrics i en Godino, Cajaraville, Fernández, i Gonzato (2012) als processos de visualització.

Metafòricament, es pot dir que la metodologia per investigar processos que proposa l'EOS és la de la “base d'un espai vectorial” (Malaspina & Font, 2010). Es pot considerar que el procés que es vol estudiar es pot entendre com una combinació lineal dels vectors de la base (els 16 processos de la figura 4.1).

Processos creatius

La reflexió sobre els processos que ha realitzat l'EOS, en aquesta investigació, s'ha considerat el marc adequat per investigar sobre el desenvolupament del pensament matemàtic creatiu, entès com aquell en el qual es produeixen processos creatius.

El primer que observem és que les caracteritzacions clàssiques del procés creatiu compleixen el que s'ha dit abans, una primera manera de caracteritzar el procés creatiu és descompondre'l en fases que es poden considerar

subprocessos. Per Guilford (1950, 1967a, 1967b) en el procés creatiu es passa per quatre fases del pensament que l'individu viu amb un determinat estat psíquic. Aquestes fases i el seu estat psíquic corresponent són: 1) Preparació, viscuda com a tensió, 2) Incubació, viscuda com a frustració, 3) Comprensió, viscuda com a alegria, i 4) Verificació, viscuda com a concentració.

En la revisió d'Hayes (1989) sobre el procés de creativitat es consideren les fases següents: a) Preparació: immersió conscient o no, en un conjunt de qüestions problemàtiques que són interessants i susciten curiositat. b) Incubació, període durant el qual les idees s'agiten per sota del llindar de consciència (cessa l'esforç conscient). c) Il·luminació (insight) o intuïció: instant de trobada de les noves vies de solució, de vegades anomenat el moment “ajà!” o “l'eureka!” d'Arquímedes. d) Avaluació, moment en el qual es decideix si la intuïció és valuosa i mereix la pena dedicar-li atenció. Intervé aquí la intel·ligència pràctica i l'analítica. i) Elaboració, conducta dinàmica de posta en marxa de la troballa mitjançant l'ocupació de mitjans apropiats i de perseveració.

Atès que la forma de conceptualitzar el procés creatiu en matemàtiques consisteix a descompondre'l en altres processos, considerem en aquesta investigació —i també ho considera així l'equip d'investigació del MCSquared—, que la millor manera per aprofundir en la seva investigació era adoptar la metodologia proposada per l'EOS, però amb una variant important. En lloc de partir d'una “base” de processos a priori definida pel marc teòric, partiríem de la “base” que resultaria de la pluja d'idees produïda pels participants del projecte “A Computational Environment to Stimulate and Enhance Creative Designs for Mathematical Creativity (MC Squared)” en explicar què entenen ells per procés creatiu. Primer s'aconseguiria un consens en l'equip d'investigació de la Universitat de Barcelona i després un consens entre els diferents equips internacionals participants en el projecte.

El consens sobre l'avaluació del procés creatiu en el MCSquared

Mathematical Creativity Squared¹ (MCSquared) és un projecte internacional amb l'objectiu de dissenyar i desenvolupar un entorn computacional intel·ligent amb la participació de certes indústries creatives involucrades en la producció de continguts multimèdia amb fins educatius per impulsar formes col·lectives de pensament creatiu i treballar per un co-disseny de mitjans

¹ La web del MCSquared Project es pot visitar a: <http://www.mc2-project.eu/>

digitals apropiats. L'atenció se centra en la creativitat social en el disseny de mitjans digitals destinats a millorar la creativitat en el pensament matemàtic (PMC).

El projecte desenvolupa seqüències didàctiques (c-unitats) en format dels anomenats “c-book” (c-llibres, on la “c” fa referència a la creativitat) que tenen per a objectiu la creació de recursos didàctics per a la promoció de la indagació i la creativitat matemàtica a través del disseny innovador de propostes didàctiques per a l'escola secundària (Barquero, Richter, Barajas & Font, 2014). Els membres de quatre comunitats d'interès (CdI) diferents (incloent editors, desenvolupadors, investigadors, educadors escolars, etc.), de diferents països, treballen conjuntament amb l'objectiu comú de pensar creativament i dissenyar recursos en forma de *c-book* que reflecteixin la pedagogia del segle XXI per impulsar el pensament matemàtic creatiu en les escoles i el lloc de treball. Els focus principal, doncs, se situa en el mateix procés de disseny de les c-unitats que són creades per aquests equips mixtos de dissenyadors amb diferents perfils professionals, que formen les diferents CdI, i en l'anàlisi de quines característiques integren per a promoure la creativitat matemàtica en futures experimentacions.

Una d'aquestes CdI és de Barcelona i està ubicada a la Universitat de Barcelona i la investigadora en va formar part a partir del mes de febrer de 2016, quan la seqüència didàctica anomenada «Què amaguen aquestes ruïnes?», va ser escollida per ser inclosa en el projecte MCSquared ja que es va considerar que, per les seves característiques, descrites i analitzades en l'anterior capítol, podria adaptar-se de forma exitosa en forma de *c-book*. Així doncs, un equip de cinc persones —entre les quals la investigadora—, integrants de la CdI de Barcelona, van intervenir en el seu redisseny, des d'investigadors en didàctica de les matemàtiques, professors de secundària d'història i de matemàtiques i persones expertes en tecnologia educativa.

L'anàlisi i l'avaluació de la promoció de la creativitat matemàtica i del pensament matemàtic creatiu ha estat una de les tasques centrals del projecte MCSquared. Aquesta avaluació es va decidir de realitzar abordant-la des de dos nivells d'anàlisi, diferents encara que complementaris. En primer lloc, el primer nivell d'anàlisi se centra en identificar les concepcions sobre la creativitat matemàtica i el pensament matemàtic creatiu dels membres de la Comunitat d'Interès (cada CdI independentment) i de quina manera aquestes

concepcions han impactat en la consideració i definició de criteris de disseny de les c-unitats.

En relació a la CdI espanyola, durant el primer cicle del projecte, es van abordar intensament les tasques relatives a aquest primer nivell d'anàlisi, més concretament, a identificar les concepcions de pensament matemàtic creatiu que presentaven els dissenyadors a partir de l'elaboració d'una enquesta i un guió d'entrevistes que recollia una gran varietat d'interpretacions descrites en la literatura sobre creativitat matemàtica i sobre la promoció del pensament matemàtic creatiu —Bolden, Harries & Newton (2010), Leikin et al. (2013), Sriraman (2009), Haylock (1997)—, entre d'altres (la seva descripció i els resultats obtinguts poden consultar-se en Barquero, Richter, Font & Barajas, 2014), com també confrontar-les amb els criteris de disseny i d'avaluació que prenen en consideració en les dues c-unitats que es van dissenyar dins d'aquest primer cicle. Encara que no va ser fins al segon cicle de disseny quan, després d'analitzar les característiques i criteris de disseny comuns entre les produccions i avaluacions de les quatre CdI i, sobretot, davant la necessitat d'establir criteris i eines més explícites (i mesurables) d'avaluació del potencial de pensament matemàtic creatiu, es va començar a abordar el problema d'investigació anteriorment presentat. En finalitzar aquest segon cicle, l'equip intern d'investigació va analitzar tots els criteris de disseny (preguntats explícitament per a cada c-unitat), les formes com aquests s'havien integrat en la c-unitat i les eines provisionals d'avaluació, i es van posar de manifest diferents aspectes:

- (a) Quan els membres de la CdI es proposen explicitar els criteris de disseny i d'avaluació, rarament es refereixen directament a la creativitat matemàtica i al pensament matemàtic creatiu, si no que recorren a la descomposició d'aquests conceptes en diferents dimensions o processos de l'activitat matemàtica la integració de la qual a través del disseny de tasques ajudaria a promoure la creativitat matemàtica, per exemple: incorporar problemes o preguntes que permetin problematitzar el coneixement dels estudiants o incorporar espais on els estudiants puguin plantejar noves qüestions (formulació de qüestions o problematització), explorar, usar i combinar diferents representacions dels objectes/conceptes matemàtics (combinació de representacions), establir connexions extra- i intra-matemàtiques (connexions), oferir eines perquè els estudiants puguin avaluar o validar les seves propostes (avaluació/validació), entre d'altres. La proposta d'aquesta

descomposició i de les dimensions o categories a considerar es va basar en els treballs desenvolupats en dos marcs teòrics principals, el de l'enfocament ontosemiòtic (veure, per exemple, Malaspina & Font, 2010) i en de la Teoria Antropològica d'allò Didàctic amb la consideració dels moments didàctics i d'algunes propostes de disseny d'activitats matemàtiques (Bosch & Gascón, 2014).

- (b) Hi ha la suposició compartida que la “creativitat matemàtica emergirà de la interacció i integració” d'aquestes distintes dimensions o processos.

Partint d'aquesta primera anàlisi, es van proposar les primeres eines d'avaluació, acordades per tota la CdI local i particularitzada per a cada c-unitat depenent dels criteris de disseny que el subgrup de dissenyadors hagués acordat. Més concretament, una vegada l'equip de dissenyadors havien acordat els criteris de disseny de la c-unitat, l'equip intern d'investigadors analitzava les dimensions o processos que es proposaven integrar (normalment apareixien unes sis a vuit dimensions) i, a partir d'aquí, es proposava l'eina d'avaluació del potencial de pensament matemàtic creatiu. Una vegada s'havia acabat amb el disseny, se sol·licitava a l'equip d'avaluadors —normalment se sol·licitava aquesta avaluació a membres de la CdI que no havien format part de l'equip de dissenyadors de la c-unitat— valorar cada dimensió amb una escala entre 1 (= integració feble de la dimensió) i 4 (= integració forta de la dimensió) depenent del grau d'acord sobre la integració d'aquesta dimensió en la forma final de la unitat. La Figura 4.2 i mostra dues representacions de les avaluacions obtingudes en finalitzar el segon cicle de disseny de dues unitats diferents. En elles, cada vèrtex s'obté a partir de la puntuació mitjana de cada categoria (on la puntuació mínima és el centre del polígon regular i la puntuació màxima és cadascun dels seus vèrtexs). Així, la proporció del polígon interior respecte a l'exterior dona una primera descripció gràfica-numèrica del potencial del pensament matemàtic creatiu de cada c-unitat i cada aresta interior ens indica aquelles dimensions que han estat millor (o pitjor) integrades en el disseny final.

En estreta relació amb el nivell anterior, el segon nivell d'anàlisi apareix davant la necessitat de realitzar cros-avaluació (o avaluació per parells de CdI) que es proposen redissenyar una mateixa unitat. Un altre dels objectius del projecte ha estat que les CdI col·laboressin dues a dues en l'adopció i el redisseny de c-unitats, juntament amb la seva pre-avaluació (quan es rep una unitat

dissenyada per una altra CdI) i post-avaluació (una vegada s'ha acabat amb el seu redisseny) del potencial de pensament matemàtic creatiu.

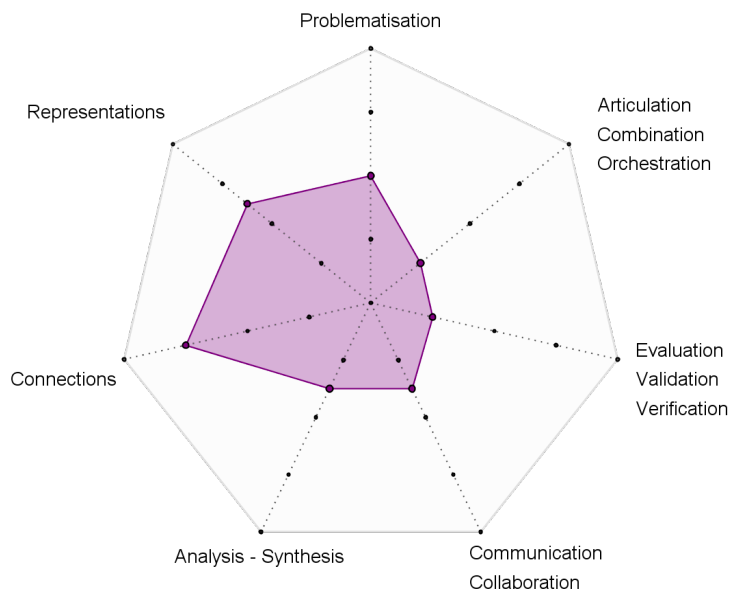
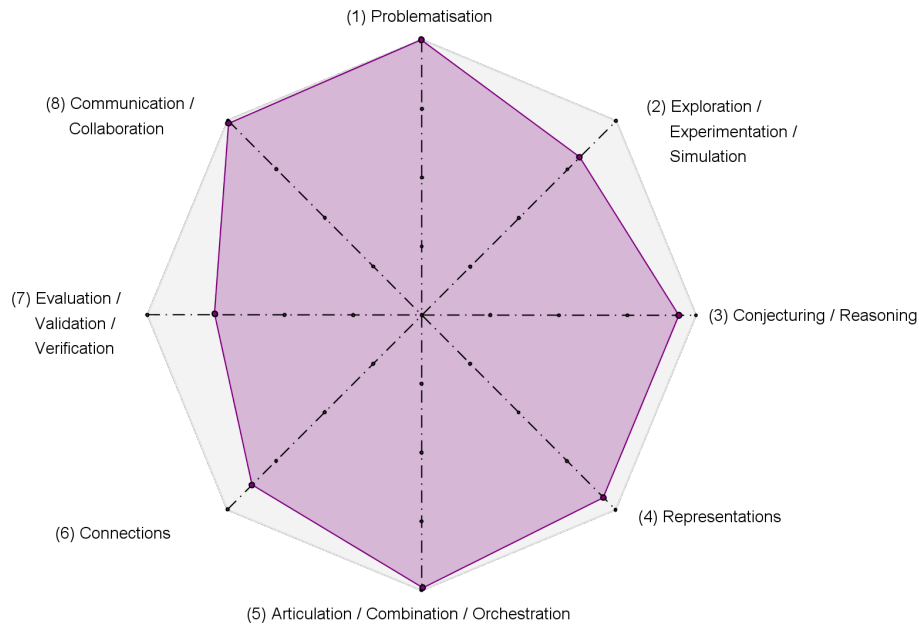


Figura 4.2: Dues representacions de les dimensions seleccionades per a l'avaluació del potencial de creativitat matemàtica de dues c-unitats i representació del seu resultat gràfic-quantitatiu.

La necessitat aquí emergida d'haver de confrontar les eines evaluatives, desenvolupades independentment per cadascuna de les CdI, va posar de manifest la conveniència de convergir cap a uns criteris i una eina comuna. Davant aquesta difícil tasca, van sorgir qüestions molt interessants sobre com es podien coordinar i complementar les eines proposades per cadascun dels equips de forma coherent. Finalment, aquest segon nivell d'anàlisi va portar a buscar una eina comuna d'avaluació del potencial de pensament matemàtic creatiu que va prendre forma de qüestionari que combinava els criteris d'avaluació proposats pels quatre equips investigadors.

El disseny d'aquest qüestionari (s'aporta en l'Annex d'aquest capítol) pot considerar-se una de les principals contribucions en front de les qüestions d'investigació plantejades. Aquest qüestionari va quedar compost per tres seccions. La primera secció, i més extensa, es centra a indagar en quin grau s'integren els diferents processos o dimensions essencials per a la promoció de la creativitat matemàtica i el pensament matemàtic creatiu. Aquesta primera secció integra un total de cinc processos o dimensions (de les anteriorment definides per la CdI espanyola) però ara se seleccionen les que eren comunes a les quatre CdI i que es podrien etiquetar sota les següents cinc categories: una més genèrica, sobre el grau de (1) Obertura (dels problemes proposats i eines previstes), Versatilitat (capacitat d'adaptació de la c-unitat a diferents grups) i Generalització; les altres categories són (2) Problematització, (3) Connexions, (4) Conjecturar i Explorar, i (5) Validar i avaluar. Cal comentar que aquesta categorització redueix les dimensions amb les quals l'equip espanyol havia treballat anteriorment però permet quedar-se amb aquelles comunes a tots els equips (d'acord amb les diferents concepcions de PMC que entren ara a interactuar i coordinar-se). En el qüestionari apareixen una sèrie d'afirmacions que vénen a definir els indicadors que defineixen i caracteritzen cada categoria.

A més s'afegeixen dues noves seccions, per referir-se als aspectes socials (2^a secció) i aspectes emocionals (3^a secció) que també impacten en el potencial de promoure la creativitat matemàtica de les c-unitats, les quals les altres CdI ja havien estat incloent en etapes d'avaluació anteriors a la definició del qüestionari comú. L'escala utilitzada en aquests ítems és la mateixa que anteriorment, i també poden afegir-se aspectes. En aquesta ocasió també es sol·licita que els membres de la CdI que actuïn d'avaluadors, valorin cada ítem (de totes les seccions) amb una escala entre 1 (= integració feble) i 4 (=

integració forta) depenent del grau d'acord sobre la integració d'aquesta dimensió en la forma final de la unitat. En el capítol 9 es mostra l'ús d'aquesta eina per a l'avaluació del PMC per a la c-unitat “Què amaguen aquestes ruïnes?”, elaborada en el marc d'aquesta tesi doctoral.

4.5. Relació entre els components de la competència d'indagació i els components del PMC

En el marc d'aquesta tesi doctoral es parteix de la mateixa conceptualització i caracterització del pensament matemàtic creatiu (PMC) descrit en els apartats anteriors. De manera que, per poder avaluar les evidències de PMC en les seqüències didàctiques —que no tenen format de c-book— es va realitzar una adaptació del qüestionari d'avaluació utilitzat per les CdI per avaluar les c-unitats i que es mostra en la Taula 4.2. En els Capítols 6, 7 i 8 es mostra l'ús d'aquesta eina.

Certament, si mirem la relació que hi ha entre els components de la competència d'indagació (Taula 4.1) i els del PMC (Taula 4.2) veiem que hi ha força relació entre ells (només queda sense connectar el component d'aspectes emocionals). Per evidenciar aquestes relacions s'ha elaborat la Taula 4.3.

Per tant, *a priori* el fet de desenvolupar la competència d'indagació també ajuda a desenvolupar el PMC, una qüestió que queda pendent és si *a posteriori*, és a dir després d'haver implementat les diferents unitats elaborades en aquesta tesi, es pot afirmar el mateix.

Taula 4.2: Caracterització del Pensament Matemàtic Creatiu

1. Obertura, Versatilitat i Generalització		
a.	La seqüència didàctica inclou problemes o qüestions matemàtiques obertes.	
b.	La seqüència didàctica inclou construccions que estimulen el pensament matemàtic.	
c.	La seqüència didàctica estimula a l'alumnat a buscar múltiples solucions	
d.	La seqüència didàctica promou que l'alumnat busqui i usi múltiples estratègies per a resoldre el problema.	
e.	La seqüència didàctica fomenta la generalització de fenòmens reals usant les matemàtiques, anant del concret cap al general.	
2. Problematització.		
a.	La seqüència didàctica inclou problemes concebuts, ideats i formulats pel l'alumnat.	
b.	La seqüència didàctica promou que l'alumnat generi noves i originals preguntes per ampliar la investigació del problema inicial (<i>problem posing tasks</i>).	
3. Connexions.		
a.	La seqüència didàctica ofereix a l'alumnat oportunitats per establir connexions entre diferents àrees de coneixements i les matemàtiques (connexions interdisciplinàries, connexions extra-matemàtiques).	
b.	La seqüència didàctica ofereix a l'alumnat oportunitats per establir connexions entre diferents camps o conceptes matemàtics (connexions intra-matemàtiques).	
c.	La seqüència didàctica ofereix a l'alumnat oportunitats per establir connexions entre diferents representacions d'un mateix concepte matemàtic.	
4. Conjecturació i Exploració.		
a.	La seqüència didàctica fomenta l'activitat exploratòria i d'experimentació de l'alumnat.	
b.	La seqüència didàctica estimula els estudiants perquè formulin i contrastin les seves conjectures matemàtiques.	
5. Validació i Avaluació.		
a.	La seqüència didàctica fomenta que l'alumnat pensi, reflexioni, resumeixi i avaluï el treball matemàtic desenvolupat.	
6. Aspectes emocionals.		
a.	La seqüència didàctica promou un important compromís generant la percepció que les matemàtiques són útils, tant en un context matemàtic com a la vida diària.	
b.	La seqüència didàctica promou un important compromís generant un sentiment de plaer, de diversió, de repte (narratives, característiques dels jocs, sentiments de fluïdesa/immersió en les activitats, etc.)	
c.	La seqüència didàctica promou compromís enèrgicament generant un sentiment de plaer estètic a partir del contacte amb conceptes matemàtics.	
7. Aspectes socials.		
a.	La seqüència didàctica estimula la col·laboració, cooperació i la interacció entre l'alumnat participant.	
b.	La seqüència didàctica promou el desenvolupament de les habilitats comunicatives de l'alumnat.	

Taula 4.3: Relacions entre els components de la Competència d'Indagació i el Pensament Matemàtic Creatiu

COMPETÈNCIA D'INDAGACIÓ	PENSAMENT MATEMÀTIC CREATIU
<p>1. Problematitza la situació plantejada per iniciar/continuar la indagació</p> <p>4. Planifica, condueix i regula les accions per desenvolupar una indagació</p>	<p>2. Problematització</p>
<p>2. Manté una actitud de dubte que li permet buscar possibles explicacions</p> <p>4. Planifica, condueix i regula les accions per desenvolupar una indagació</p>	<p>1. Obertura, Versatilitat i Generalització</p>
<p>3. Fa prediccions, conjectures i/o hipòtesis sobre les possibles respostes/explicacions/resultats</p>	<p>4. Conjecturació i Exploració</p>
<p>4. Planifica, condueix i regula les accions per desenvolupar una indagació</p> <p>7. Comunica les conclusions/resultats de la indagació.</p>	<p>7. Aspectes socials</p>
<p>5. Classifica, escull, elabora i interpreta les dades/informació recavades</p>	<p>3. Connexions</p>
<p>6. Valida els resultats, comparant-los amb les prediccions</p>	<p>5. Validació i Avaluació</p>
	<p>6. Aspectes emocionals</p>

CAPÍTOL 5

Ús de la història en l'ensenyament de les matemàtiques

5.1. Consideracions sobre l'ús de la història en l'ensenyament de les matemàtiques.....	88
5.2. Aspectes històrics contemplats en les propostes d'innovació de TFM de professors de matemàtiques de Secundària	103
5.3. El paper del context històric quan s'utilitza com a element motivador.....	110

RESUM

En la primera part d'aquest capítol s'ha fet una revisió de la literatura sobre l'ús de la història en l'ensenyament de les matemàtiques, ressaltant alguns aspectes sobre les relacions entre la història i l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques que ens han semblat més rellevants per a la nostra investigació. La segona part consisteix en un estudi de cas múltiple en una situació en la que els professors han de presentar una proposta innovadora i l'han de justificar per tal de veure quin ús en fan de la història de les matemàtiques i, més en general de la història. L'anàlisi realitzada de l'estudi de cas permet concloure la següent tipologia d'usos de la història de les matemàtiques: a) Utilització d'un context històric com a pretext motivador, b) Ús de problemes que foren rellevants en un determinat moment històric i c) Incorporació de continguts matemàtics d'altres èpoques en les propostes d'innovació.

5.1. Consideracions sobre l'ús de la història en l'ensenyament de les matemàtiques

Els usos d'aspectes històrics relacionats amb les matemàtiques en el seu ensenyament és un tema molt rellevant en la Didàctica de les matemàtiques que ha generat aportacions significatives per a l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

Organismes internacionals com el Consell Nacional de Professors de Matemàtiques dels EEUU (NCTM), han suggerit una categorització pel que fa al nivell d'utilització de la Història, establint tres nivells d'implementació: cronològic, lògic i pedagògic. (NCTM, 2006).

La primera de les esmentades categories s'interessa pel recorregut històric d'una determinada noció matemàtica. Per exemple, la recerca de decimals del nombre pi, des de l'antiguitat fins els nostres dies, el procés que s'ha seguit fins a la definició de nombre, etc.

La segona categoria, detalla com la història contribueix al desenvolupament de la intuïció lògic-matemàtica, donat que exposa la manera en què els científics i els matemàtics desenvolupen les diferents teories, a partir de problemes que són la seva raó de ser, de les solucions trobades, així com dels errors comesos en el camí fins a arribar a la solució desitjada. A partir d'aquesta anàlisi, els estudiants poden experimentar la naturalesa d'un sistema axiomàtic i els raonaments lògics, així com els mecanismes de demostració, sense deixar de banda la riquesa que això representa pel professor al donar-li informació sobre els possibles obstacles en la construcció de les nocions matemàtiques i, d'aquesta manera, poder establir estratègies per a la superació d'aquestes dificultats. En aquesta categoria es té, per exemple, la possibilitat de poder analitzar el problema pràctic que va donar origen a la successió de Fibonacci, o bé, la cerca de demostracions gràfiques del teorema de Pitàgores, o de les dificultats presentades per a la construcció dels nombres irracionals, etc.

Finalment, la tercera i última categoria engloba la història de les matemàtiques com a font inesgotable d'idees i estratègies pedagògiques per els professors, ja que els hi afronta l'ensenyament de conceptes, processos, algorismes, entre d'altres, a la llum del desenvolupament històric d'aquesta disciplina. Això es pot fer simplement a partir d'una breu revisió històrica del tema, de les biografies dels matemàtics van aportar avenços rellevants en el tema, etc.

D'altra banda, s'ha documentat (Barbin et al., 2000) que després d'usar la història en la classe de matemàtica de Secundària, els estudiants mostren que per a ells la matemàtica deixa de ser una ciència morta i passa a tenir vida, amb un desenvolupament històric que inclou aplicacions pràctiques. Quan els estudiants li donen significat a un contingut, ho aprenen millor. Segons resultats d'aquesta mateixa investigació, el docent canvia la seva visió sobre el procés d'aprenentatge dels seus estudiants, es sensibilitza de manera que en explicar temes que van prendre molt temps per desenvolupar-se, permet als seus estudiants prendre també un llarg temps per assimilar-los. Grugnetti (2000) va trobar que quan s'usen problemes antics, els docents i els estudiants poden comparar les seves estratègies amb les originals, i d'aquesta forma els estudiants poden comprendre el poder dels símbols i procediments de la matemàtica actual. Tzanakis i Arcavi (2000) també assenyalen que la integració de la història pot mostrar connexions que no són visibles d'una altra forma, atès que la matemàtica va sorgir per solucionar problemes de disciplines que no semblen estar relacionades. No obstant això, el docent ha de ser conscient de les possibles dificultats que pot trobar, com la falta de temps, recursos i preparació. Per aquestes raons, l'ús de la història de la matemàtica a l'aula genera discussió en la comunitat d'educadors matemàtics, sobretot en aquells que valoren les matemàtiques pels seus resultats (teories, teoremes, demostracions, etc.), més que per l'activitat matemàtica mateixa que aquests impliquen i promouen (Guacaneme, 2011).

Fer una revisió de la literatura sobre els usos d'aspectes històrics de les matemàtiques en el seu ensenyament segurament necessitaria varies tesis, per tant en aquest capítol ens limitarem a ressaltar alguns aspectes sobre les relacions entre la història de les matemàtiques i el seu ensenyament que ens han semblat més rellevants per a la nostra investigació.

5.1.1. Influència de la història en les creences o concepcions existents sobre l'ensenyament de les matemàtiques

El coneixement de la història de la matemàtica ha permès qüestionar-se el punt de vista platònic sobre la naturalesa dels objectes matemàtics, la qual cosa ha repercutit sobre les creences o concepcions existents sobre l'ensenyament de les matemàtiques.

Un exemple ho tenim en l'obra de Lakatos. Aquest filòsof de les matemàtiques es va proposar mostrar que la matemàtica és conjectural,

aplicant el fal·libilisme crític de Popper (1985) a les matemàtiques. Lakatos proposa substituir la fonamentació de la matemàtica (la preocupació per la veritat) pel problema de l'avanç del coneixement.

En el seu llibre «Proves i refutacions» (1978) Lakatos presenta un intercanvi d'opinions, raonaments i refutacions entre un professor i els seus alumnes. En lloc de presentar el producte de l'activitat matemàtica (les matemàtiques formalitzades), presenta el desenvolupament de l'activitat matemàtica a partir d'un problema i una conjectura.

En aquest llibre Lakatos utilitza la història per intentar convèncer al lector que les matemàtiques “informals” —les matemàtiques en procés de creixement i de descobriment— de la mateixa manera que les ciències experimentals, són fal·libles i no indubtables; que també es desenvolupen gràcies a la crítica i a la correcció de teories que mai estan completament lliures d'ambigüitats i en les quals sempre cap la possibilitat d'error o d'omissió. Lakatos per a justificar el seu punt de vista utilitza la història de la demostració del teorema d'Euler. Primer explica la demostració donada per Cauchy i després analitza com es va respondre a l'aparició de poliedres que no encaixaven bé amb la prova de Cauchy o bé amb l'enunciat del teorema. Davant el fet de l'existència de contraexemples, des d'un posicionament ontològic de tipus realista (existeix l'objecte matemàtic “poliedre” i cal descobrir les seves propietats), la posició conseqüent alternativa és acceptar que la prova (o la conjectura) és errònia. La història mostra, segons Lakatos, que la solució adoptada no va ser aquesta, ja que el que es va fer va ser anar modificant la definició de poliedre per anar excloent als diferents contraexemples que anaven apareixent

L'obra de Lakatos per a molts investigadors en Didàctica de les matemàtiques s'ha considerat com la justificació teòrica de la necessitat de passar d'ensenyar teories matemàtiques acabades a ensenyar a “fer matemàtiques” i de la importància que té la resolució de problemes com a desencadenant de l'activitat matemàtica. Establir la diferència entre l'activitat matemàtica i les organitzacions dels productes de l'activitat matemàtica, porta a entendre les matemàtiques com el resultat d'una activitat humana social que va evolucionant històricament i que el seu objectiu és la resolució de problemes.

Aquesta visió sobre la naturalesa de les matemàtiques va repercutir en l'ensenyament de les matemàtiques posant en primer plànol la resolució de problemes. Com a alternativa al formalisme en què havia degenerat la

introducció de les matemàtiques modernes en l'ensenyament no universitari, van sorgir, tant a Espanya com en altres països, diferents grups de renovació que proposaven una alternativa basada en: 1) ensenyar les matemàtiques a partir de la resolució de problemes i 2) fer veure als alumnes que les matemàtiques es podien aplicar a situacions de la vida real. Per a aquests grups, l'obra de Lakatos era la justificació teòrica de quelcom que havien constatat en la seva pràctica: la necessitat de passar d'ensenyar teories matemàtiques acabades a ensenyar a “fer matemàtiques”, i en aquest “fer” tant la resolució de problemes com la història de les matemàtiques tenien un paper important per suggerir organitzacions de les seqüències didàctiques que superessin la visió formalista i magistral de les matemàtiques i, al mateix temps, servissin per motivar als alumnes

L'obra de Lakatos i la seva repercussió en a l'ensenyament de les matemàtiques il·lustren clarament la dues raons principals que es donen per integrar la història en l'ensenyament de les matemàtiques: 1) la història proveeix una oportunitat per desenvolupar la nostra visió del que és realment la matemàtica i ens permet tenir una millor comprensió de conceptes i teories (Barbin et al., 2000). És a dir, s'espera que tant estudiants com a docents entenguin millor els conceptes de les teories, en conèixer la forma en què aquests es van desenvolupar en la història. 2) Aquesta comprensió canvia la forma en què es perceben les matemàtiques. Primer, la història de la matemàtica pot canviar la percepció i comprensió del docent sobre aquesta disciplina; en segon lloc, el docent influenciarà la forma en què s'ensenya la matemàtica i per tant, al final, s'afecta la forma en què l'estudiant percep i entén les matemàtiques. D'aquesta manera, la percepció cap a la matemàtica canvia en la mesura en què docents i estudiants poden contextualitzar-la i humanitzar-la. És a dir, la matemàtica es mostra com a producte de l'activitat humana, generada a partir de diferents necessitats a través de molts segles de civilització. Si es mostra la forma en què els conceptes matemàtics es van desenvolupant —incloent errors en els quals van incórrer els seus creadors, mostrant-los així amb les seves imperfeccions humanes—, la matemàtica deixa de percebre's com un ens abstracte, imposat rígidament en el currículum, i comença a pensar-se més com una eina utilitzada des del començament de la humanitat per resoldre problemes i situacions. En altres paraules, la dimensió històrica ens insta a pensar en la matemàtica com un procés continu de reflexió i millorament a través del temps, en lloc d'una

estructura definida composta de veritats irrefutables i que no poden canviar-se.

5.1.2. La història ens dóna informació sobre els errors i dificultats dels alumnes

Per exemple, les dificultats històriques en el pas d'àlgebra numèrica a la simbòlica permet que els docents siguin conscients de les dificultats conceptuals que els seus estudiants poden presentar en fer el mateix pas. D'altra banda, les respostes que donen els estudiants a un problema històric adquireixen un nou significat quan es poden contrastar amb les donades pels matemàtics a través del temps. Aquest últim aspecte ha portat a alguns autors a introduir en la Didàctica de les matemàtiques la noció d'obstacle epistemològic.

El concepte d'obstacle va ser introduït per Bachelard (1987) i va ser traslladat al camp de la didàctica de les matemàtiques per Brousseau (1983 i 1997), que li va donar un sentit molt determinat:

Los errores no solamente son efecto de la ignorancia (...) sino el efecto de un conocimiento previo que era interesante y exitoso, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo (...) constituyen los obstáculos. (Brousseau, 1997, p. 8)

Para poder parlar d'obstacle, segons Brousseau, s'han de complir les condicions següents:

- 1) Un obstacle és un coneixement. Per tant, no és una falta de coneixement.
- 2) L'alumne utilitza aquest coneixement per produir respostes correctes en determinades situacions que troba amb certa freqüència.
- 3) Quan s'utilitza aquest coneixement en un altre context genera respostes incorrectes. Una resposta universal exigirà un punt de vista diferent.
- 4) L'alumne es resisteix a les contradiccions que l'obstacle li produeix i al canvi del coneixement antic per un de nou.
- 5) Malgrat que l'alumne és conscient de les limitacions del coneixement-obstacle, el continua manifestant esporàdicament.

Brousseau considera que els obstacles que es presenten en el sistema didàctic poden ser:

- a) D'origen ontogenètic o psicogenètic, causats pel desenvolupament psicològic de l'alumnat.
- b) D'origen didàctic, provocats per les eleccions didàctiques que s'han fet per dissenyar la situació didàctica.
- c) D'origen epistemològic, intrínsecament relacionats amb el contingut matemàtic. Es poden trobar en la història dels continguts, encara que no és necessari reproduir a l'aula les condicions històriques que van permetre superar-los.

Com a exemple d'obstacle epistemològic D'Amore (2008, p. 8) aporta el següent:

La comprensión de los números naturales exige, por ejemplo, un cierto modo de concebir estos números y sus operaciones: un número natural como 4 tiene un sucesivo, su producto por otro número natural será más grande de éste etc. Algunas de estas propiedades pueden dar origen a errores cuando 4 es un número racional: por, ejemplo, no se puede hablar de sucesivo. Pero el estudiante no se da cuenta de este pasaje y continúa a “forzar” las propiedades de \mathbb{N} también en \mathbb{Q} ; es por esto que se encuentran estudiantes que afirman, en \mathbb{Q} , que 2.33 es el sucesivo de 2.32, confirmado incluso por algunos libros de texto. Además, por ejemplo, $0.7 \times 0.8 = 0.56$ donde 0.56 es menor que cada uno de los factores, es una novedad desconcertante que pone en crisis el conocimiento adquirido precedentemente.

La noció d'obstacle, i molt especialment la noció d'obstacle epistemològic, no és massa clara per alguns investigadors i ha generat controvèrsia (Artigue, 1990; Sierpinska, 1988; Font, 2000)

5.1.3. La reflexió sobre la història de les matemàtiques ha permès explicitar la complexitat de l'emergència dels objectes matemàtics

En Font i Peraire (2001), per exemple, es realitza un estudi històric-epistemològic de la cissoide per il·lustrar la complexitat de les relacions que s'estableixen entre un objecte matemàtic, els seus ostensius associats, les tècniques que permeten manipular aquests ostensius i les situacions en les quals s'usa l'objecte (juntament als seus ostensius i tècniques associades) per organitzar fenòmens. Les diferents formes ostensives que poden representar a un objecte matemàtic són el resultat d'una llarga evolució en la qual, en alguns casos, una nova forma de representació plasma un nou programa

d'investigació. Estudis com aquest posen de manifest la “ingenuïtat” del punt de vista que considera els ostensius simplement com a significants d'objectes matemàtics a-històrics.

Un altre exemple il·lustratiu (pel fet de ser un contingut nuclear en les matemàtiques) és el cas de les funcions. Diversos treballs —Arenzana (1997); Azcárate & Deloufeu (1990); Bos (1984); Font (2000); Font, Vanegas, Ferreres, Carvajal & Adán (2012); Lacasta & Pascual (1998); Youschkevitch (1976)— posen de manifest que l'objecte matemàtic funció és el resultat d'una emergència que s'ha produït al llarg de molt temps. La reflexió sobre aquesta complexitat aporta, segons Font et al. (2012) suggeriments importants per a l'ensenyament de les funcions

a) De les magnituds a les variables: Una primera consideració que ens proporciona la complexitat de l'objecte matemàtic funció és que històricament la funció primer és va considerar com una relació entre magnituds i després com una relació entre variables.

b) Regla d'assignació i domini: La idea que una funció és una dependència entre variables que a cada valor de la variable independent li fa correspondre un únic valor de la variable dependent porta a pensar en la funció bàsicament com una regla d'assignació. Ara bé, la interpretació de la funció com una terna (A, B, G) porta a considerar que dues funcions amb la mateixa regla d'assignació no són necessàriament la mateixa funció, per tant la visió conjuntista de les funcions aporta un matís interessant a la conceptualització de la funció.

c) Diferents formes de representació: Janvier (1987), en els seus treballs sobre el concepte de funció considera que les representacions associades al concepte de funció es poden classificar en quatre classes (expressió analítica, taula, gràfica i expressió verbal) que, encara que idealment contenen la mateixa informació, posen en funció diferents processos cognitius, cadascun d'ells estretament relacionat amb els altres. La representació gràfica connecta amb les potencialitats conceptuals de la visualització i es relaciona amb la geometria i la topologia. La representació en forma de taula posa de manifest els aspectes numèrics i quantitativs. L'expressió analítica connecta amb la capacitat simbòlica i es relaciona principalment amb l'àlgebra, mentre que la representació verbal es relaciona

amb la capacitat lingüística de les persones i és bàsica per interpretar i relacionar les altres tres.

L'anàlisi històrica del desenvolupament de la noció de funció suggereix que, a més de pensar en els processos cognitius que pot activar una determinada representació, cal pensar en la representació com una eina que possibilita pràctiques que sense ella no serien possible.

Cada una de les quatre formes de representar una funció (enunciat, taula, fórmula i gràfica) té una gènesi històrica diferent. Per exemple, les corbes són presents en tota la història de les matemàtiques, però hi ha un moment històric en què es planteja clarament el pas del gràfic a l'expressió simbòlica (en el moment del naixement de la geometria analítica). Els treballs de Descartes parteixen de les dues metàfores clàssiques sobre les corbes: les corbes són seccions i les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions, per afegir-ne una tercera: les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions. L'anàlisi d'aquestes condicions permet trobar una equació que compleixen els punts de la corba. Doncs bé, un estudi històric dels mètodes i procediments que s'han utilitzat per calcular, per exemple, l'expressió simbòlica a partir de gràfiques pot donar idees utilitzables a les aules.

d) Visió unitària i sistèmica de les funcions: Una de les possibles maneres de concebre el significat d'un terme, "funció" en el nostre cas, és considerar que aquest significat és la seva definició. Aquesta manera d'entendre el significat és una forma elemental o "unitària" d'entendre el significat. Una altra possible manera d'afrontar el problema de el "significat" és fer-ho en termes d'ús. Des d'aquesta perspectiva el significat d'un objecte matemàtic s'ha d'entendre en termes del que es pot fer amb aquest objecte matemàtic. Es tracta d'una perspectiva pragmatista i "sistèmica", ja que es considera que el significat d'un objecte és el conjunt de pràctiques en les quals aquest objecte és determinant per a la seva realització.

Quan s'utilitzen les funcions en les pràctiques matemàtiques, a més de la seva definició, s'utilitzen diferents representacions, s'utilitzen determinades característiques i propietats, s'utilitzen altres objectes matemàtics relacionats com són les equacions, etc. Un instrument útil per descriure la pluralitat (sense buscar l'exhaustivitat) de conglomerats de representacions, definicions, propietats, tipus de problemes, etc. que al llarg del temps s'han

anat succeint per a l'estudi de les funcions és l'eina configuració epistèmica (Font i Godino, 2006).

En el currículum d'alguns països els tipus de “continguts matemàtics” que es consideren són només dos: conceptes i procediments. Es tracta d'una classificació massa simplista per analitzar un text matemàtic i, més en general, l'activitat matemàtica, sigui professional o escolar. És necessari contemplar com a mínim els següents elements: 1) notacions, representacions (llenguatge), 2) situacions-problema 3) definicions, 4) procediments, tècniques, etc. 5) proposicions, propietats, teoremes, etc. i 6) arguments. Aquests sis tipus d'elements s'articulen formant configuracions epistèmica (Figura 1) l'anàlisi de les quals ens informa de la “anatomia d'un text matemàtic”. Es tracta d'una eina que pot ser útil per descriure les característiques dels textos matemàtics de diferents èpoques i orientació epistemològica, en particular resulta útil tant per a l'anàlisi global d'una unitat didàctica com per a l'anàlisi d'un text puntual.

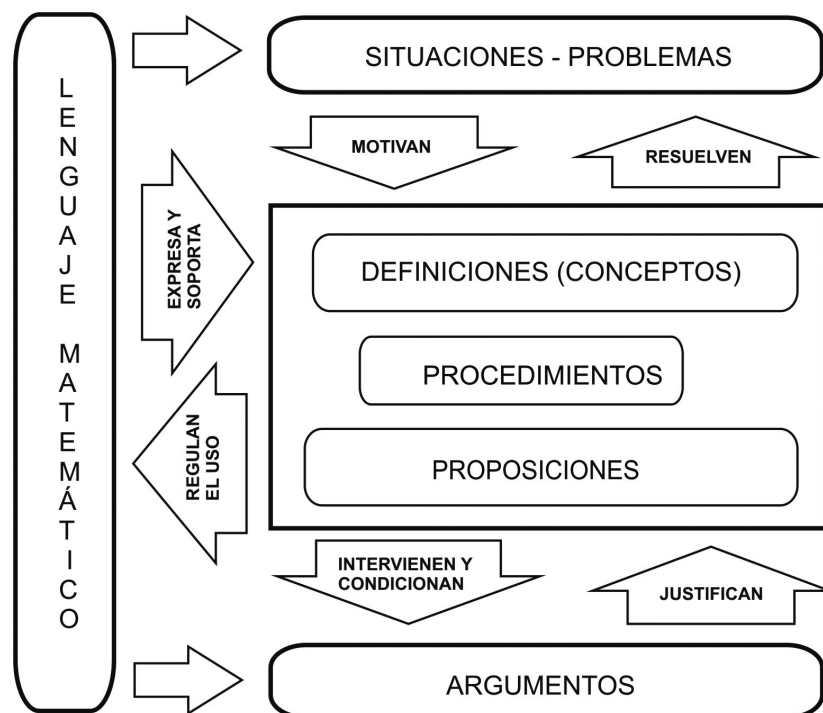


Figura 5.1: Components i relacions en una configuració epistèmica

La introducció de la dualitat unitària-sistèmica permet reformular la visió “ingènua” que “hi ha un mateix objecte matemàtic (funció) amb diferents representacions”. El que hi ha és un sistema complex de pràctiques, que permeten resoldre problemes, en les quals l'objecte matemàtic “funció” no hi

apareix, però el que sí hi apareix són representacions de les funcions, diferents definicions de les funcions, proposicions i propietats de les funcions, procediments i tècniques que s'apliquen a les funcions i arguments sobre les funcions. Dit d'una altra manera, al llarg de la història les diferents civilitzacions han anat generant diferents configuracions epistemiques per a l'estudi de les funcions, algunes de les quals han servit per generalitzar algunes de les preexistents.

Godino, Bencomo, Font i Wilhelmi (2006), basant-se en l'anàlisi epistemològica i didàctica realitzat en Ruiz (1998) per determinar les concepcions dels alumnes de secundària sobre la noció de funció, consideren que l'evolució d'aquesta noció es pot organitzar en quatre configuracions epistemiques que en la figura 5.2 estan disposades en cercles concèntrics. Aquesta disposició expressa la progressiva ampliació dels sistemes de pràctiques matemàtiques associats a la noció de funció, des de plantejaments implícits/intuïtius (protomatemàtics), fins a la formalització més general mitjançant la teoria de conjunts.

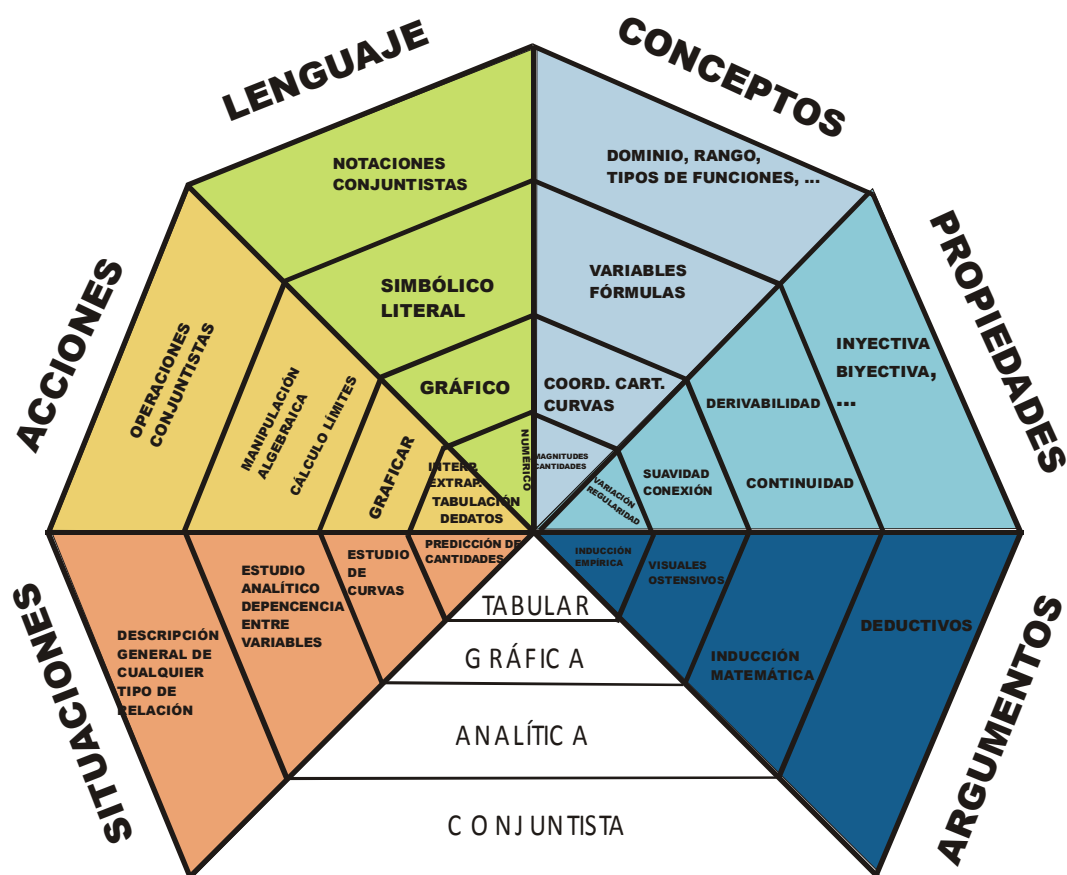


Figura 5.2: Configuracions epistemiques de la noció de funció

Aquestes quatre configuracions epistèmiques que, en certa manera, resumeixen el desenvolupament de la noció de funció s'han traslladat, segons Font (2008) als llibres de text mitjançant dos tipus de configuracions epistèmiques, d'una banda tindriem les configuracions epistèmiques formals (o intramatemàtiques) i les empíriques (o extramatemàtiques). Les primeres tindrien com a referent la configuració epistèmica que s'ha anomenat conjuntista, mentre que les segones tindrien com a referent una combinació de les altres tres. Aquests dos tipus de configuracions epistèmiques són les que podem trobar en els manuals universitaris i en els llibres de text de l'ESO i del Batxillerat.

Si actualment és ben difícil trobar una unitat didàctica sobre les funcions de tipus formalista en l'etapa no universitària, és molt habitual trobar unitats didàctiques que són una degeneració d'aquest model. Ens referim a les unitats didàctiques inspirades en el que es diu conductisme, instrumentalisme, mecanicisme, etc. Es tracta d'una presentació descontextualitzada dels conceptes i regles matemàtiques, que se suposa que s'aprenen amb la pràctica i no mitjançant un aprenentatge significatiu. Si bé la majoria de les persones que reflexionen actualment sobre la Didàctica de les matemàtiques no són partidàries d'aquesta opció, el fet és que, encara avui, moltes de les classes, per no dir la majoria que s'imparteixen a les nostres aules, segueixen aquest model mecanicista. Entre altres raons, perquè és el model que resulta més fàcil a molts professors amb poca formació matemàtica, o per a aquells que tenint una visió una mica més àmplia, es veuen superats per diversos tipus de pressions que els indueixen a seguir la tradició (estudiants que esperen que se'ls ensenyi de manera tradicional o que rebutgen formes alternatives d'ensenyament; autoritats que indueixen a “complir amb els programes”, l'escola i l'entorn social que pressiona perquè els alumnes tinguin èxit en els exàmens d'admissió de les universitats, etc.). Aquesta opció instrumentalista (mecanicista, etc.) presenta gairebé tots els inconvenients de la presentació formalista de les matemàtiques i cap dels seus avantatges.

5.1.4. La història ens permet una visió de la complexitat dels objectes matemàtics

La mirada sobre la complexitat dels objectes matemàtics que ens ofereix la història permet reformular la visió “ingènua” que “hi ha un mateix objecte

matemàtic amb diferents representacions”. El que hi ha és un sistema complex de pràctiques, que permeten resoldre problemes, en les quals l'objecte matemàtic no hi apareix directament, el que sí que hi apareix són representacions de l'objecte, diferents definicions, proposicions i propietats de l'objecte, procediments i tècniques que s'apliquen a l'objecte i arguments sobre l'objecte matemàtic. Dit d'una altra manera, al llarg de la història s'han anat generant diferents configuracions epistèmiques per a l'estudi de l'objecte matemàtic, algunes de les quals han servit per generalitzar a les preexistents.

Per exemple, la mitjana aritmètica (Rondero i Font, 2015) ha participat al llarg de la història de les matemàtiques en moltes pràctiques matemàtiques diferents (a) el mètode babilònic i el de Herón d'Alexandria per calcular arrels d'enters positius, (b) el mètode d'Arquímedes per a l'equilibri dels cossos, i el càlcul d'àrees i volums, (c) el mètode de Merton per estudiar el moviment uniformement accelerat, etc. Aquest conjunt de pràctiques es pot parcel·lar en diferents subconjunts de pràctiques que es realitzen gràcies a l'activació de determinades configuracions epistèmiques, algunes de les quals es poden considerar com a reorganitzacions i generalitzacions de les anteriors. Rondero i Font (2015) identifiquen per a la mitjana aritmètica diferents contextos intramatemàtics i extramatemàtics, a cadascun dels quals se'ls associa un conjunt de pràctiques matemàtiques i una configuració epistèmica que les permet realitzar. A aquestes configuracions les denominen: a) el mètode babilònic i de Herón per calcular arrels, (Configuració Epistèmica1); b) el mètode d'Arquímedes sobre l'equilibri dels pesos, principi bàsic de l'estàtica (CE2); c) successions, progressions aritmètiques i geomètriques (CE3); d) mètode de Merton per a l'estudi del moviment (CE4); i) càlcul d'àrees, mètodes de quadratures, fórmules, etc. (CE5).

La mitjana aritmètica, al llarg de la seva evolució històrica, s'ha activat implícita o explícitament en almenys aquests cinc subsistemes de pràctiques cadascun dels quals té una configuració epistèmica associada. Aquestes configuracions, malgrat ser diferents entre si, presenten articulacions entre elles, de manera que es poden relacionar, atenent al major grau de generalitat.

A continuació resumim la complexitat d'alguns altres objectes matemàtics. Per a l'objecte matemàtic “funció”, tal com s'ha comentat anteriorment, Godino, Bencomo, Font i Wilhelmi (2006) consideren que la seva evolució històrica es pot organitzar en quatre configuracions epistèmiques (tabular, gràfica, analítica i conjuntista).

Per a l'objecte matemàtic “límit”, Contreras, García i Font (2012) i García (2008), caracteritzen la seva complexitat (resultat de la seva evolució històrica) per mitjà de les següents configuracions epistèmiques: geomètrica, preinfinitesimal, infinitesimal, numèrica, mètric-analítica i topològica.




Per a l'objecte matemàtic “derivada”, Pino, Godino i Font (2011) caracteritzen la seva complexitat mitjançant nou configuracions epistèmiques: a) tangent en la matemàtica grega; b) variació en l'edat mitjana; c) mètodes algebraics per trobar tangents; d) concepcions cinemàtiques per al traçat de tangents; i) idees intuïtives de límit per al càlcul de màxims i mínims; f) mètodes infinitesimals en el càlcul de tangents; g) càlcul de fluxions; h) càlcul de diferències i, i) derivada com a límit. En Pino, Castro, Godino i Font (2013) s'utilitzen aquestes nou configuracions epistèmiques per a la reconstrucció del significat global de la derivada, el qual és utilitzat per valorar la representativitat del significat pretès en el currículum de Batxillerat de Mèxic (a partir de les configuracions epistèmiques activades en les pràctiques matemàtiques proposades tant en el Pla d'Estudis com en els llibres de text d'aquest nivell).

En relació amb la complexitat de l'objecte integral, Contreras, Ordóñez i Wilhelmi (2010) i Ordóñez (2011) consideren les següents configuracions epistèmiques: a) Geomètrica, b) Resultat d'un procés de canvi, c) Inversa de la derivada, d) Aproximació al límit, i) Generalitzada: (Lebesgue, Riemann, etc.), f) Algebraica, g) Mètodes numèrics. Crisostomo (2012), en la seva tesi doctoral considera, basant-se a la xarxa de configuracions epistèmiques proposta per Ordóñez (2011), útil distingir vuit tipus diferents de configuracions que designa amb els noms de: intuïtiva, primitiva, geomètrica, sumatòria, aproximada, extramatemàtica, acumulada i tecnològica, situant el Teorema Fonamental del Càlcul com un objecte primari central de la configuració epistèmica anomenada primitiva, encara que també apareix en la geomètrica, la sumatòria, la extramatemàtica i la tecnològica.

5.1.5. La història com a font d'innovació en l'ensenyament de les matemàtiques

Una conseqüència de la mirada complexa als objectes matemàtics com s'ha exposat en els paràgrafs anteriors és que, més que pensar en un objecte matemàtic unitari, cal pensar en un conjunt de significats parcials

(definicions, propietats, procediments, etc.), una mostra dels quals forma part del currículum, però també hi ha una part que queda fora, el que comporta que sigui possible generar propostes d'innovació didàctica que consisteixin a incorporar alguns dels significats parcials que queden fora del currículum. Per a això, cal realitzar un procés que va des de la lectura directa d'obres d'història de les matemàtiques, fins a la seva utilització per al disseny d'una innovació didàctica per a l'ensenyament-aprenentatge d'un determinat contingut matemàtic. Un exemple el tenim en la proposta que es fa en Font (2000) per a l'ensenyament de les derivades en el Batxillerat d'Espanya.

De la gènesi històrica del càlcul diferencial Font (2000) interessa especialment el període anterior a l'ús del triangle  en el qual s'utilitzava el triangle determinat per l'ordenada, la tangent i la subtangent, i el triangle determinat per l'ordenada, la normal i la subnormal, és a dir el període anterior a Barrow. I també en la primera presentació del concepte de diferencial de Leibniz publicada l'any 1684. En aquest article Leibniz proposa, en comptes del triangle , el triangle  on la hipotenusa és un segment de la tangent. Aquesta manera d'entendre el concepte de diferencial coincideix amb l'actual definició de diferencial, i no amb la que utilitzava el mateix Leibniz en els seus manuscrits anteriors a l'any 1684. En aquests de l'any 1675, el diferencial s'entenia com una quantitat infinitament petita, mentre que en la seva primera publicació era un segment finit. L'interès en aquest triangle està motivat pel fet que, un cop introduïda la interpretació geomètrica de la derivada, la utilització per part de l'alumne, en una activitat guiada, del triangle determinat per l'ordenada, la tangent i la subtangent o bé del triangle determinat per la tangent, dx i dy permet calcular la funció derivada d'algunes funcions elementals sense utilitzar límits.

Un dels aspectes originals de la investigació descrita en Font (2000) és la proposta d'activitats guiades per calcular funcions derivades a partir de l'observació d'una condició que compleixen les tangents, o bé a partir d'un procediment que permet construir-la. La proposta es basa en una de les maneres en que Descartes a la *Geometrie* resol l'anomenat problema de les tangents : trobar un mètode que permetés construir la normal i la tangent en un punt d'una corba donada; i el seu problema invers: determinar una corba a partir d'una propietat que compleixen totes les tangents.

En el segle XVII el problema de trobar la tangent s'entenia d'una manera força diferent de com s'explica actualment al batxillerat. En el segle XVII el que interessava no era l'equació de la recta tangent o de la normal, sinó trobar un procediment que permetés dibuixar la normal i la tangent (o més exactament la subnormal i la subtangent) en un punt d'una corba donada. El que interessava era trobar procediments del tipus següent: per dibuixar la tangent a la paràbola $f(x) = x^2$ en un punt basta unir el punt de la corba amb un punt de l'eix d'ordenades C tal que la longitud del segment CB sigui el doble de la longitud del segment AP .

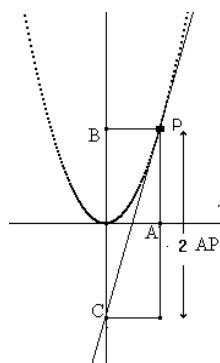


Figura 5.3: Recta tangent a la paràbola $f(x) = x^2$

El problema invers de les tangents consistia a trobar una corba a partir d'una propietat que complien les tangents. En aquest cas s'ha d'expressar la condició en forma d'equació diferencial i després trobar la fórmula de la corba utilitzant mètodes d'integració.

Una de les conclusions de l'estudi del càlcul infinitesimal del segle XVII és que és possible dissenyar activitats d'ensenyament-aprenentatge inspirades en la manera que tenien els matemàtics del segle XVII d'entendre el problema de la tangent i del seu invers, gràcies a alguns programes informàtics actuals que permetessin dibuixar simultàniament la corba i la tangent a la corba en un punt, de manera que els alumnes poguessin fer accions sobre aquest punt i observar invariants de les seves accions (com, per exemple, Cabri-géomètre)

En Font (2000) es proposa una innovació que consisteix en considerar construccions com la de la figura anterior, que està a meitat de camí entre el problema de la tangent i el seu invers. No és exactament el problema de la tangent, perquè aquí ja tenim construïda la tangent, ni és el problema invers perquè sabem l'expressió simbòlica de $f(x)$. Aquestes construccions permeten les accions dels alumnes a fi de trobar una condició que compleixin totes les

tangents (utilitzant el triangle format per l'ordenada, la tangent i la subtangent). La simbolització d'aquesta condició porta a establir una equació diferencial (en sentit ampli) que permet calcular $f'(x)$ sense necessitat d'utilitzar el càlcul integral. La segona idea fou presentar a l'alumne la gràfica d'una funció i un procediment per dibuixar la recta tangent. La simbolització dels passos del procediment també porta a establir una equació diferencial (en sentit ampli) que permet calcular $f'(x)$ sense necessitat d'utilitzar el càlcul integral.

5.1.6. Aporta el coneixement de l'evolució històrica del contingut matemàtic que és objecte d'ensenyament

Un coneixement rellevant per a l'ensenyament de qualsevol contingut matemàtic és la seva evolució històrica: aquesta evolució permet tenir una visió més àmplia sobre el contingut matemàtic en qüestió de la que ens pot donar, per exemple, l'explicació d'un manual universitari. Sense pretendre ser exhaustius, el coneixement de l'evolució històrica d'un objecte matemàtic permet al professor: a) Esmentar anècdotes matemàtiques del passat, b) Presentar introduccions històriques dels conceptes que són nous per als alumnes, 3) Fomentar en els alumnes la comprensió dels problemes històrics la solució dels quals ha donat lloc als diferents conceptes que aprenen, 4) Idear exercicis i exemples utilitzant textos matemàtics del passat, 5) Explorar errors del passat per ajudar a comprendre i resoldre dificultats d'aprenentatge, 6) Proposar aproximacions pedagògiques al contingut matemàtic motiu d'estudi d'acord amb el seu desenvolupament històric.

5.2. Aspectes històrics contemplats en les propostes d'innovació de Treballs de Fi de Màster de professors de matemàtiques de Secundària

Aquesta segona part té per objectiu determinar quin ús es fa de la història en una situació en la que els professors han de proposar una innovació didàctica i l'han de justificar. L'objectiu es doble, per una part, veure quins dels aspectes comentats en la primera part d'aquest capítol apareixen en una situació concreta en la que s'escau l'ús de la història per justificar una proposta

innovadora, encara que els participants no tenen cap instrucció explícita d'usar la història. El segon objectiu era corroborar que l'ús de la història que fem en aquesta tesi no està contemplat pels participants.

Per fer l'anàlisi d'aquest estudi de cas vam aprofitar el treball realitzat per una persona membre del nostre grup d'investigació que havia investigat prèviament un estudi de cas múltiple de tipus naturalista. Per aquesta raó explicarem primer breument l'estudi de cas naturalista realitzat en Breda (2016) i després explicarem la segona mirada, focalitzada en l'ús de la història, que s'ha fet en aquesta tesi sobre aquest cas múltiple de tipus naturalista.

5.2.1. Un primer estudi de cas múltiple de tipus naturalista

En un intent de respondre a l'objectiu setze de la llei 13.005 / 2014 del Pla Nacional d'Educació (PNE) —aconseguir que l'any 2020 el cinquanta per cent dels mestres d'educació bàsica del Brasil aconseguixin una formació en postgrau (Brasil, 2014)— es va iniciar en 2010, el Màster Professional en Matemàtiques a la Xarxa Nacional (PROFMAT), a través de la recomanació del Consell Tècnic-Científic d'Educació Superior de la Capes.

Aquest màster està constituït com un curs de postgrau strictusensu, semipresencial, s'ofereix en tot el territori nacional de Brasil, està coordinat per la Societat Brasileira de Matemàtiques (SBM), i té com a objectiu principal atendre als mestres de matemàtiques que treballen en l'ensenyament bàsic, especialment a les escoles públiques. El seu objectiu és la millora de la seva formació professional, amb èmfasi en el domini aprofundit del contingut matemàtic rellevant per la seva tasca docent, d'acord amb la missió estatutària de la SBM “estimular la millora de l'ensenyament de les matemàtiques en tots els nivells”. En aquest sentit, té com a objectius principals (BRASIL, 2013a; 2013b):

1. Estimular la millora de l'ensenyament de les matemàtiques en tots els nivells.
2. Qualificar als professors de matemàtiques que treballen en l'ensenyament bàsic amb un nivell de postgrau, amb èmfasi en el domini aprofundit dels continguts matemàtics, oferint un curs de formació professional que s'ocupa de les necessitats derivades del treball diari en el dia a dia de l'escola;

3. Fomentar una actitud crítica sobre les classes de matemàtiques en els nivells d'educació primària i secundària, subratllant el paper central dels coneixements de les matemàtiques per afrontar les demandes de la societat moderna;
4. Buscar el desenvolupament professional dels docents mitjançant la millora de la seva formació.

Els professors que realitzen aquest màster han de materialitzar els seus coneixements en un projecte finalització de màster (TFM) que busqui la interrelació entre el coneixement teòric i el pràctic. Per aquesta raó, les orientacions del PROFMAT diuen que aquest TFM ha de tenir un tractament innovador sobre l'ensenyament dels temes del currículum de matemàtiques de l'educació bàsica i que, de preferència, tingui aplicació directa a l'aula, la qual cosa contribueix a l'enriquiment de l'ensenyament de la disciplina (BRASIL, 2013a).

En Breda (2016) y Breda y Lima (2016) es va realitzar un estudi de les propostes d'innovació presentades en els treballs de fi de màster (TFM) del Màster Professional en Matemàtiques en la Xarxa Nacional-PROFMAT del Brasil, presentats a l'estat de Rio Grande del Sur i publicats en els anys 2013 i 2014 amb l'objectiu general de determinar quines són i com es justifiquen les innovacions presentades en aquests TFM. Encara que el Màster Professional en Matemàtiques a la Xarxa Nacional s'ofereixi en tot Brasil, l'estudi realitzat en aquest treball s'ha restringit a l'anàlisi dels TFM en l'estat de Rio Grande do Sul. En concret, es van seleccionar vint-i-nou TFM realitzats i publicats a l'estat de Rio Grande do Sul, des del primer semestre de 2013 fins al segon semestre de 2014. Aquest estat participa del programa amb dues universitats (Universitat Federal de Santa Maria i la Universitat Federal de Rio Grande) i en el període considerat presenta un nombre de produccions raonable (vint-i-nou TFM) de manera que es poden inferir conclusions

Es va partir de la suposició que el TFM era un espai clarament valoratiu ja que els professors havien de presentar una proposta de millora i havien de realitzar una anàlisi didàctica per justificar la seva qualitat. Es van prendre com a punt de partida les següents regularitats observades en investigacions anteriors:

1. Els professors o futurs professors, quan han d'opinar (sense una pauta prèviament donada) sobre un episodi d'aula propi o bé implementat per un

altre professor, expressen comentaris en els quals es poden trobar aspectes de descripció i/o explicació i/o valoració.

2. Quan les opinions són clarament valoratives, s'organitzen de manera implícita o explícita mitjançant alguns indicadors dels components dels criteris d'idoneïtat didàctica proposats per l'EOS (idoneïtat epistèmica, mediacional, ecològica, emocional, interaccional i cognitiva).
3. La valoració positiva d'aquests indicadors es basa en la suposició implícita o explícita que hi ha determinades tendències sobre l'ensenyament de les matemàtiques que ens indiquen com ha de ser un ensenyament de les matemàtiques de qualitat.

L'anàlisi de les dades, de caràcter qualitatiu, es va desenvolupar en dues etapes: en la primera, es van classificar els vint-i-nou TFM segons el tipus d'innovació proposat i la fase del procés d'instrucció contemplada; en la segona etapa, es van analitzar les raons que els autors dels TFM utilitzen per justificar la qualitat de la innovació que proposen. Per a això, es van seleccionar evidències que mostren l'ús explícit o implícit d'alguns dels components i els descriptors dels diferents criteris d'idoneïtat didàctica proposats per l'enfocament ontosemiòtic de la cognició i instrucció matemàtica (EOS).

Els resultats de la primera etapa mostren que els professors tenen en compte, bàsicament, tres tipus d'innovació: i) *matemàtica*, en la qual es contempla la incorporació de continguts de nivell superior en l'Educació Bàsica, o bé l'establiment de connexions intramatemàtiques o extramatemàtiques; ii) *de recursos*, que es caracteritza per la incorporació de materials visuals i manipulatius i la incorporació de recursos informàtics; iii) *en valors*, on s'introdueix el pensament crític i la ciutadania. És a dir, assumeixen de manera implícita que les propostes d'unitats didàctiques que segueixen certes tendències (per exemple, la incorporació de recursos informàtics) són propostes que representen una millora respecte a la forma habitual d'ensenyar els continguts d'aquestes unitats didàctiques. En relació amb la fase del procés d'instrucció contemplada, tretze dels TFM presenten la planificació d'una seqüència didàctica, 11 realitzen la implementació, només un inclou el redisseny i quatre no presenten cap procés d'instrucció. Més detalls sobre les tendències en les quals suporten els autors dels TFM la qualitat de les seves propostes, es poden consultar en Breda, Font i Lima (2015b; 2016); Breda, Lima i Pereira (2015).

En relació amb els criteris d'idoneïtat utilitzats pels autors per justificar que les seves propostes promouen una millora en l'ensenyament de les matemàtiques, es va observar, sobretot, l'ús dels criteris d'idoneïtat epistèmica i ecològica i, en menor mesura, el criteri mediacional; no obstant això, altres criteris com el cognitiu, emocional i interaccional, o no van ser contemplats o bé es van utilitzar amb poca profunditat. Finalment cal destacar que els professors que van implementar la seva proposta didàctica a l'aula realitzen una anàlisi didàctica més detallada en comparació dels professors que no ho van fer ja que: i) manegen un major nombre de criteris, ii) els components i descriptors dels criteris d'idoneïtat que utilitzen, s'infereixen a partir d'argumentacions que mostren un alt nivell de reflexió i iii) es mostren preocupats per aconseguir un equilibri entre els diferents criteris (epistèmic, cognitiu, mediacional, interaccional, emocional i ecològic).

5.2.2. Segona mirada a l'estudi de cas de tipus naturalista

Aquesta segona mirada a l'estudi de cas múltiple de tipus naturalista pretén investigar quin paper té, en les propostes d'innovació per a l'ensenyament bàsic —realitzades en els TFM del Màster Professional en Matemàtiques a la Xarxa Nacional, Brasil— la incorporació d'aspectes històrics. Per a això és necessari buscar informació sobre les següents preguntes: Quants TFM incorporen la introducció d'aspectes històrics en les seves propostes d'innovació? Quins són els continguts inclosos en aquestes propostes? Quins arguments utilitzen, els autors, per justificar que aquesta incorporació és una millora de l'ensenyament de les matemàtiques?

Per a l'anàlisi dels TFM s'ha utilitzat una metodologia d'investigació qualitativa, d'acord amb Ludke i André (1986), que es basa en la comprensió i interpretació de les dades. Aquesta anàlisi s'ha realitzat tenint en compte dues fonts, una primària (els 29 TFM) i una altra secundària que són altres anàlisis ja realitzades sobre aquests mateixos 29 TFM. Aquestes fonts secundàries són la tesi doctoral de Breda (2016) i els articles de Breda, Font i Lima (2015 y 2016), Breda i Lima (2016) i Breda, Lima i Pereira (2015), on els autors consideren dos aspectes qualitatius, el primer és el tipus d'innovació (incorporació de les TIC, connexions intramatemàtiques, etc.) i el segon és la fase del procés d'instrucció contemplat (planificació, implementació i redisseny), a més del tipus de justificació de la qualitat de la innovació que es dona.

Anàlisi dels resultats

En relació a la quantitat de treballs que incorporen aspectes històrics en les seves propostes d'innovació didàctiques, ens trobem amb què, dels 29 treballs publicats, 7 proposen aquesta incorporació (aproximadament la quarta part dels TFM de l'estat de Rio Grande do Sul). L'anàlisi realitzada permet concloure la següent tipologia d'usos: a) Utilització d'un context històric com a pretext motivador, b) Ús de problemes que van ser rellevants en un determinat moment històric i c) incorporació de continguts matemàtics d'una altra època en les propostes d'innovació

Encara que, d'alguna manera, vuit dels vint-i-nou treballs finals de curs incorporin la introducció d'aspectes històrics en les seves propostes, només set d'ells presenten alguna de les fases del procés d'instrucció (planificació, implementació i redisseny). La majoria (quatre d'ells) contempnen la planificació i la implementació, tres tenen solament la planificació i cap d'ells presenta redisseny de la seqüència didàctica. A continuació, es presenten, a títol d'exemple, els resums d'un TFM de cadascuna de les tres categories comentades en el paràgraf anterior:

1) Utilització d'un context històric com a pretext motivador: Rodrigues (2014) en el seu TFM titulat «Uma abordagem para o problema do mapa do tesouro aplicado ao ensino da geometria» pretén connectar la realitat amb la geometria a partir d'una situació-problema contextualitzada. Aquest problema tracta de la història d'un tresor que va ser enterrat en una illa i que, després de molt temps, el seu mapa va ser trobat per uns exploradors que van decidir anar a desenterrar-ho a la illa. Però en arribar al lloc van tenir una desagradable sorpresa, doncs els arbres que figuraven en el mapa ja no hi eren, la qual cosa va obligar als exploradors a buscar una estratègia per resoldre el problema. La proposta pedagògica, constituïda per quatre activitats, va ser aplicada amb un grup d'alumnes d'Ensenyament Secundari en una escola privada. La metodologia va consistir a treballar amb els alumnes la resolució del problema de tres maneres diferents: la primera a través de l'ús del GeoGebra, la segona per Geometria Analítica i la tercera utilitzant nombres complexos. L'autor conclou que l'ús d'un context històric, juntament amb una metodologia activa, va generar un context motivador per als estudiants que els va portar a realitzar una indagació amb una alta demanda cognitiva.

2) Us de problemes que foren rellevants en un determinat moment històric: D'Acampora (2014) en el seu TFM titulat «Soluções dos três problemas clássicos da matemática grega por curvas mecânicas», a partir d'un enfocament històric, desenvolupa una reflexió sobre la resolució de tres problemes clàssics de geometria: la quadratura del cercle, la trisecció de l'angle i la duplicació de la galleda. L'autor proposa el treball a qualsevol professor interessat a aprofundir en aquests problemes i conclou que són importants per la seva possible utilització en l'Ensenyament Secundari. Segons l'autor, tant les construccions geomètriques com les solucions dels problemes es poden traslladar a aquesta etapa. En particular, per explorar la idea de l'àrea (de polígons i del cercle), els nombres irracionals, l'espiral d'Arquímedes en el problema de la quadratura del cercle i, a més, les proporcions i el volum a través del problema de la duplicació de la galleda per mitjà del mètode de reducció de Hipòcrates (convertir el problema en un altre d'equivalent).

3) Incorporació de continguts matemàtics d'una altra època en les propostes d'innovació: El TFM de Mohnsam (2014), titulat «La contribució d'Arquímedes al càlcul d'àrees», és una proposta innovadora per introduir, a partir de la resolució de problemes i l'ús del GeoGebra, el càlcul d'una àrea sota una corba, conforme les contribucions d'Arquímedes. El TFM presenta primer una aproximació històrica a Arquímedes i a la seva obra per, després, explicar el mètode de les palanques per a la quadratura de paràboles (mètode de descobriment) i el mètode d'exhaució (mètode de demostració). Seguidament, l'autor explica el mètode d'Arquímedes per calcular l'àrea sota la paràbola $y = x^2$, entre 0 i un valor b (sencer), i ho compara amb els mètodes usats per Pascal, Fermat i Riemann. També dedica un capítol a realitzar estimacions d'error en els càlculs d'àrees que es troben a sobta de corbes que mostren, que si s'augmenta el nombre de divisions i s'afegeixen més rectangles el resultat és més precís. L'autor conclou que les idees d'Arquímedes són intuïtives i, en conseqüència, poden ser utilitzats pels estudiants de Secundària per estudiar l'àrea sota una corba si s'utilitzen recursos computacionals com el Geogebra. En concret, proposa tasques que permeten veure als alumnes que en el càlcul aproximat d'àrees limitades per corbes, que són gràfics de funcions, si s'augmenta el nombre de rectangles interiors i exteriors s'obté una aproximació cada vegada més precisa.

En les tres tipologies considerades les justificacions per a la incorporació d'aspectes històrics són diferents. En el primer tipus, on el context històric és un pretext, la justificació per a la seva incorporació està relacionada, sobretot, amb aspectes motivacionals. Els autors justifiquen que la seva proposta fomenta l'interès i la implicació dels alumnes per comprometre's en un procés d'indagació. En canvi, en els altres dos casos si bé es contemplen també avantatges motivacionals, l'èmfasi es posa que les propostes innovadores permeten : 1) noves formes de relacionar i apropar els continguts matemàtics, 2) la realització de processos matemàtics rellevants (per exemple, la generalització, la modelització de situacions extramatemàtiques, establiment de relacions intramatemàtiques, de significació, etc.).

5.3. El paper del context històric quan s'utilitza com a element motivador

Tal com s'ha dit abans, Rodrigues (2014) en el seu TFM titulat «Uma abordagem per o problema do mapa do Tesouro aplicat ao d'ensenyament d'óna geometria» pretén connectar la realitat amb la geometria a partir d'una situació-problema contextualitzada, presentant una situació que ell diu que va resultar molt motivadora pels alumnes.

El problema original (Barbeau, 1989) proporciona instruccions per trobar el tresor enterrat en una illa. La dificultat rau en el fet que el punt de partida per anar seguint les instruccions és desconegut:

Un tresor va ser enterrat en una illa i es va fer un mapa de la seva ubicació. Les instruccions del mapa diuen, a l'arribar a l'illa, es pot veure immediatament dos grans roures, així com una palmera, com es mostra a la figura següent:

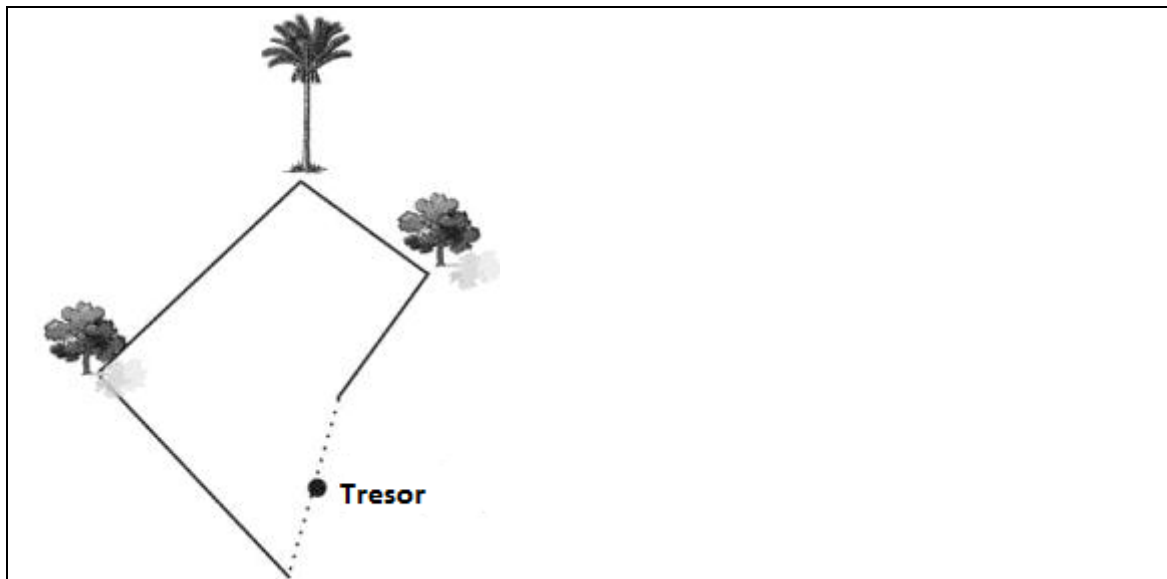


Figura: Representació del mapa del tresor

El tresor està enterrat en un lloc que es pot trobar seguint les següents instruccions:

- 1) A partir de la palmera, caminar fins al roure que està més a prop, comptant les passes.
- 2) Quan ets al roure, has de girar a la dreta en angle recte i caminar el mateix nombre de passes i llavors marcar el punt.
- 3) Tornant a la palmera, camina fins a l'altre roure, comptant les passes; llavors gira a l'esquerra en angle recte i camina el mateix nombre de passes, fent una marca en aquesta posició.
- 4) El tresor està enterrat exactament en la línia que connecta les dues marques i la mateixa distància de les dues marques.

Aquest mapa del tresor, després de molt de temps, fou trobat per uns exploradors que van decidir anar a desenterrar-lo a l'illa. Però en arribar al lloc van tenir una desagradable sorpresa, ja que els arbres que figuraven al mapa ja no hi eren, la qual cosa va obligar als exploradors a buscar una estratègia per resoldre el problema. Com ho van fer?

Figura 5.4: Problema original del tresor

El problema original es va adaptar a la realitat dels estudiants, els quals van acabar resolent el problema de tres maneres diferents: a través de l'ús del

GeoGebra, usant la geometria analítica, i finalment, utilitzant nombres complexos. El problema es va presentar als alumnes com una troballa històrica d'un altre temps, a més, es va envoltar de diferents consideracions històriques sobre la importància de la geometria en les civilitzacions antigues, una breu biografia de Descartes i de Fermat i un comentari sobre els nombres complexos.

L'autor del TFM va optar per adaptar el problema del tresor a l'espai físic del centre escolar on va implementar la seva proposta innovadora al camp de futbol del centre de la manera següent:

Quan els primers germans maristes van arribar a Santa Cruz do Sul, un tresor va ser enterrat en el camp de futbol Sant Lluís Marista Park. Els germans van elaborar un mapa de la seva ubicació. El mapa va ser trobat durant els preparatius realitzats per a la producció del llibre commemoratiu del 110 aniversari de l'escola. Les instruccions diuen: al arribar a la pista de futbol, un pot veure immediatament les dues porteries i també una palmera. El tresor està enterrat en un lloc que es pot trobar en la forma que es descriu a continuació:

A partir de la palmera, camina fins a la porteria més propera, quan hi arribis gira a la dreta en angle recte i fes el mateix nombre de passes i fes una marca en el punt on arribes. Tornant de nou a la palmera, camina fins a l'altre porteria comptant les passes, gira a la dreta en angle recta i camina el mateix nombre de passes i fes una marca en aquesta posició. El tresor està enterrat exactament en la línia que connecta les dues marques i la mateixa distància de les dues marques.

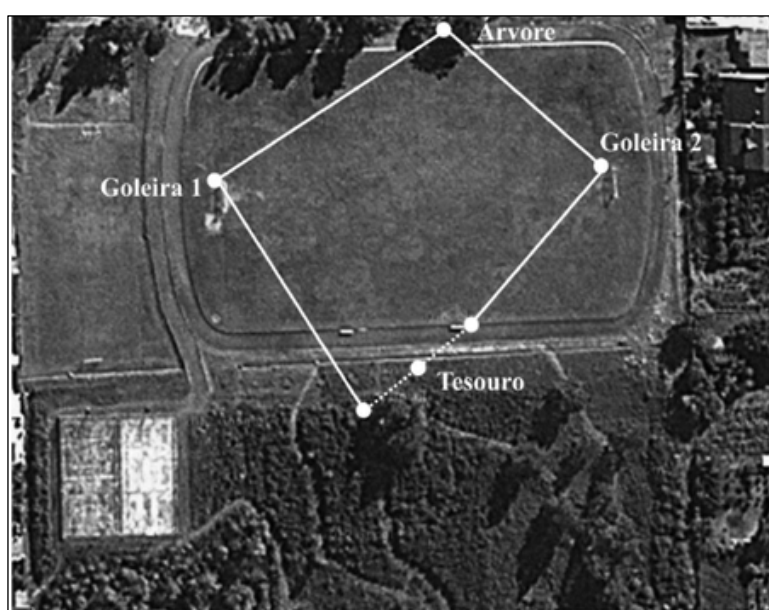


Figura 5.5: Imatge en el Google de l'àrea on pot estar el tresor

Tal com l'autor del TFM explica, es van formar grups de tres alumnes i van anar al camp de futbol a buscar el tresor, però es van trobar en una sorpresa; no hi havia la palmera. Naturalment això s'havia planificat expressament per obligar als alumnes a buscar una solució (de fet el problema està pensat de manera que el punt inicial no té cap importància, ja que la solució és la mateixa amb independència de quin sigui el punt de partida que s'agafi).

Ara bé, el que vam trobar com un aspecte molt rellevant per a la nostra investigació fou la reacció d'alguns alumnes. En particular, primer van buscar una palmera (primer gran i després petita) i en algun cas van decidir agafar com a punt de partida un tronc d'arbre tallat que semblava que s'havia tallat feia molt de temps, argumentant que com que feia molt temps que s'havia enterrat el tresor, era plausible suposar que la palmera de les instruccions fos aquell tronc d'arbre.

Per a la nostra investigació aquesta fou una dada clau, ja que el professor havia pensat en el context com un element motivador i havia dedicat molt temps i esforços per aconseguir un context que fos versemblant pels alumnes (com es veu en les Figures 5.4 i 5.5), però en el fons era un pretext ja que el context no hi jugava cap paper decisiu. Ara bé, els alumnes sí que utilitzaven la informació històrica del context com un element essencial per a la resolució del problema. Aquesta conclusió ens portà a la decisió de dissenyar una tipologia diversa de seqüències didàctiques on tant les matemàtiques com el context històric tinguessin un paper rellevant:

- 1) El context històric com a generador d'una investigació on les matemàtiques són rellevants però no determinants: la seqüència didàctica «Viure a *Baetulo*» (veure detalls en el Capítol 6).
- 2) El context històric com a subministrador d'informació i com a generador d'una investigació on les matemàtiques són utilitzades de manera determinant: la seqüència didàctica «Valorant els fets de 1714» i el seu redisseny «1714, les dades de la derrota» i el context històric aporta informació significativa (veure detalls en el Capítol 7).
- 3) El context històric com a generador d'una investigació on, tant les matemàtiques com el mateix context, són utilitzats de manera determinant: «Què amaguen aquestes ruïnes?» i el seu redisseny en forma de c-book (veure detalls en el Capítol 8 i 9, respectivament).

Quando os primeiros Irmãos Maristas chegaram a Santa Cruz do Sul, um tesouro foi enterrado no campo de futebol do parque Marista São Luís e, em seguida, foi feito um mapa de sua localização. Hoje, 110 anos depois, um mapa foi encontrado durante as pesquisas realizadas para a confecção do livro comemorativo ao 110º aniversário do Colégio Marista São Luís. O mapa tem instruções com a localização do tesouro. Tais instruções dizem que ao chegar no campo do parque, avista-se imediatamente as duas goleiras do campo e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma descrita abaixo:



“Partindo da palmeira caminhe até a primeira trave da goleira a sua esquerda contando os passos. Chegando lá, gire para a direita 90º e caminhe o mesmo número de passos. Aonde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, caminhe até a primeira trave da goleira a sua direita contando os passos. Chegando lá, gire à esquerda 90º e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas.”

Figura 5.6: Instruccions de l'adaptació del problema del mapa del tresor

CAPÍTOL 6

El context històric com a generador d'una investigació on les matemàtiques són rellevants però no determinants: la seqüència didàctica «Viure a *Baetulo*».

6.1. Justificació de la selecció del context històric.....	116
6.2. Descripció del disseny de la seqüència didàctica.....	119
6.3. Anàlisi de la potencialitat de la seqüència didàctica per desenvolupar la competència d'indagació (CI) i el pensament matemàtic creatiu (PMC).....	140
6.4. Anàlisi del desenvolupament de la CI i del PMC amb la implementació de la seqüència didàctica.....	146
6.5. Resultats sobre el desenvolupament de la CI i el PMC amb la implementació de la seqüència didàctica.....	181

RESUM

En aquest capítol es presentarà una seqüència didàctica dissenyada en base a un context històric problemàtic generador d'una indagació i determinant els objectius de la major part de les sessions. Tanmateix, l'ús de les matemàtiques tindrà un paper important en la formulació d'hipòtesis que ofereixin solucions plausibles a la qüestió principal de la indagació. A l'apartat 1 es justifica la tria del context concret per al disseny d'aquesta seqüència didàctica. En el següent apartat es descriu el seu disseny: seqüenciació, desenvolupament de les sessions i activitats que s'hi duen a terme, així com alguns dels materials dissenyats. A continuació, s'analitza la potencialitat de la seqüència didàctica, abans de la seva implementació, per provocar el desenvolupament d'habilitats per a la indagació (CI) i per promoure pensament matemàtic creatiu (PMC). En el quart apartat s'exposa l'anàlisi del desenvolupament de la CI i del PMC amb la descripció de la implementació que es va dur a terme, així com els detalls del grup d'alumnat amb qui va ser implementada. Finalment, en l'apartat 4 s'exposen els resultats.

6.1. Justificació de la selecció del context històric

L'objectiu didàctic de la seqüència didàctica que es va dissenyar, i que es presenta en aquest capítol, era promoure el desenvolupament de la competència d'indagació mitjançant l'ensenyament i aprenentatge del sistema de numeració decimal. Dins del Currículum d'Educació Primària, «Comprendre el sistema de numeració decimal i el significat de les operacions», és un dels objectius de l'àrea de Matemàtiques.

Com es pot observar en el Currículum de Primària, es comencen a introduir continguts referents a aquest objectiu al Cicle Inicial però no és fins a Cicle Mitjà que s'entra de ple en els seu estudi i és a Cicle Superior on s'acaba de treballar. Per tant, es va dissenyar la proposta pensant en l'ensenyament de les matemàtiques per a alumnat d'aquest darrer cicle.

Per altra banda, prendre una perspectiva històrica interdisciplinària dels sistemes de numeració —a partir de sistemes de numeració usats antigament— pot ajudar a comprendre, interpretar i aprendre a usar el sistema de numeració decimal, l'actual. Aleshores, amb aquesta finalitat, es van revisar (Sala, 2011) les propostes existents dels darrers anys on es fa un ús didàctic dels sistemes de numeració antic en la classe de matemàtiques, principalment a l'etapa educativa corresponent a l'Educació Primària.

Amb aquesta revisió documental es va observar que les propostes didàctiques existents per a Primària, en general, presenten el sistema numèric com una col·lecció de xifres amb unes regles per escriure-les, com si d'un joc es tractés. És a dir, es treballa el sistema de numeració en si mateix, fent èmfasi sobretot en la descomposició decimal, el valor posicional i el càlcul però hi ha escasses propostes enfocades a què l'alumnat n'obtingui una comprensió conceptual més global del paper dels sistemes de numeració i del seu funcionament. Cal destacar que la majoria de propostes didàctiques que inclouen sistemes de numeració antics —el romà és el més utilitzat— ho fan bàsicament plantejant exercicis de transformació entre les xifres antigues i les àrabs.

Així mateix, també es va observar que el sistema monetari és també estudiat en si mateix, sempre també des d'un punt de vista procedimental, amb l'objectiu principal que l'alumnat aprengui el valor i el funcionament de la moneda en curs. En cap de les propostes revisades s'utilitza el recurs del sistema monetari —per exemple, establint similituds entre les seves propietats

i les dels sistemes de numeració— per promoure una major comprensió del concepte de sistema de numeració dins les matemàtiques.

Així doncs, en Sala (2011) es va constatar que molt sovint se segueix tenint objectius d'aprenentatges procedimentals més que conceptuals, fent palès que existeixen molt poques propostes que aprofitin el potencial didàctic dels sistemes de numeració antics i els sistemes monetaris per treballar el concepte de sistema de numeració.

El context històric de la seqüència didàctica que es descriu en aquest capítol prové del redisseny d'una seqüència didàctica focalitzada en el coneixement del medi social —dissenyada per la doctoranda al 2009— que apostava per la potència pedagògica de la curiositat del infant. En aquell primer disseny, amb un marc teòric bastant limitat però atenent als objectius curriculars de l'etapa de Primària a què anava adreçada, es va confeccionar una proposta, una unitat didàctica de socials que es va anomenar «*Viure a Baetulo*», que tractava l'època de la història que correspon a l'Imperi Romà i al procés romanització de Catalunya. Aquest tema es va concretar en estudiar la vida quotidiana de *Baetulo* al segle I AEC fins als segles III-IV EC ja que *Baetulo* és la Badalona actual i la ciutat on viuen els alumnes a qui anava adreçada la proposta.

Cal subratllar que, tot i que es tractava d'una seqüència didàctica amb un enfocament interdisciplinar, en aquesta primera versió l'enfocament no feia èmfasi en els aspectes matemàtics. Tanmateix, el que sí que ja es pretenia era promoure en els alumnes la necessitat d'investigar, la necessitat de fer història i de construir pensament històric utilitzant el mètode científic propi de les Ciències Social, aconseguint que els alumnes reconeguessin la història, lluny d'un relat tancat, com una disciplina científica.

Així doncs, es va fer un enfocament didàctic amb què l'alumnat seguís un procés de recerca amb l'objectiu concret de respondre a una pregunta a una situació «real», plantejada d'acord amb la metodologia suggerida en la lectura de Dean (2008). Segons aquesta autora experta en didàctica de les ciències socials, l'infant ha de procedir com si fos un petit historiador que construeix una certa visió del passat basant-se en la complexa interacció entre dos relats. El primer relat és el marc d'informació que ha deixat el passat perquè la persona historiadora hi treballi i el segon relat és on es contempla la seva experiència vital (el que ha llegit, el que sap, etc.). En aquest cas, qui fa d'historiador o historiadora és el mateix alumnat i aquest segon relat, per la

seva edat, és relativament restringit però és justament en aquesta restricció on la persona docent hi té un paper important ja que és la responsable d'aportar instruments suficients per tal de poder pal·liar aquesta manca d'experiència, tot confeccionant un segon relat substitutiu. Aquest és un relat creatiu que sorgeix a partir dels fets però també de la imaginació informada.

Aquesta seqüència didàctica va ser implementada al 2009 per un docent de Coneixement del Medi Social de l'escola pública CEIP Salvador Espriu de Badalona en un grup de Cicle Superior d'Educació Primària. Es van recollir propostes de millora per fer-ne un redisseny que no es va realitzar fins al cap de dos anys, al 2011.

La seqüència didàctica plantejava una pregunta problemàtica, que era el motor de la investigació, basada en un context arqueològic de la ciutat de Badalona que l'alumnat havia d'investigar per poder donar-hi resposta. La pregunta es referia a qui podria haver estat el propietari d'un tresor romà —compost per unes quantes monedes— trobat en el jaciment arqueològic de Badalona corresponent a una casa romana (*domus*) anomenada Casa dels Dofins.

El redisseny d'aquesta seqüència didàctica va implicar, a més de tenir en compte les propostes de millora resultat de l'observació de la primera implementació, la creació de noves sessions els objectius didàctics de les quals es focalitzarien en l'àrea de Matemàtiques. Tot i els canvis realitzats per millorar la seqüència, la pregunta d'investigació sorgida del context arqueològic sobre qui podia haver estat el propietari del tresor romà es va mantenir idèntica a la de la seqüència original.

Així mateix, es va decidir treballar amb el sistema de numeració, justament per dotar a la investigació que haurien de seguir els estudiants de més elements que reforcessin el seu realisme. És a dir, es va creure que haver d'obtenir el valor del tresor —i, per això, estudiar el sistema monetari romà en relació amb altres sistemes monetaris més actuals i amb el sistema de numeració decimal— era un fet que podria jugar un paper important perquè els estudiants formulessin i argumentessin les seves conjetures de forma plausible.

6.2. Descripció del disseny de la seqüència didàctica

El disseny de la seqüència didàctica va comptar amb la creació d'un blog¹ que es va posar a l'abast tant de l'alumnat com del professorat com a suport de les tasques proposades. Per una banda, aquest blog completava la proposta des d'un aspecte de competències TAC de l'alumnat i, per una altra, suposava un recurs per al professorat ja que s'hi pot trobar la seqüenciació de les sessions, la proposta de tasques, els materials (que es poden descarregar) i els enllaços als recursos electrònics per realitzar les activitats de les sessions. Es tracta d'un espai a la xarxa on s'hi poden deixar comentaris, els estudiants s'hi poden subscriure i així estar al dia de tot allò que hi comentin els seus companys o el professorat.



Figura 6.1: Captura de pantalla del blog de la seqüència

La seva estructura és senzilla, té dues parts principals: una de central que és on es poden penjar els comentaris o fotografies o altres recursos multimèdia interessants de forma puntual; i després una de lateral, a la dreta. En aquesta part lateral conté diversos apartats:

¹ El blog s'anomena «Viure a Baetulo. Aquí s'aprèn investigant» i es pot consultar a la següent adreça: <http://viureabaetulo.wordpress.com/>

- *Tasques:* Aquí es poden baixar en format PDF tots els documents dels exercicis proposats així com la notícia de la troballa del petit tresor romà i el seu informe arqueològic.
- *Informació interessant:* Es pot baixar una presentació en Power Point, confeccionada per a l'ocasió, sobre la estructura de diversos sistemes monetaris; també hi ha un document amb informació sobre el cost de la vida dels romans amb sous i preus; finalment hi ha una taula d'equivalència de les diverses monedes romanes respecte a l'as, que és la moneda base del sistema monetari romà.
- *Per a emergències:* Espai reservat per a penjar les solucions a algunes activitats.
- *Blogroll:* Un espai amb links a pàgines interessants, necessàries per dur a terme algunes de les activitats.
- *Filcker àlbum de llibres de matemàtiques antics:* És un espai que connecta directament amb els àlbums de fotos de llibres de matemàtiques que es van confeccionar amb l'estudi de les propostes existents per a l'ensenyament dels sistemes de numeració, comentat anteriorment.

Per altra banda, el redisseny de la seqüència didàctica es va concretar en 12 sessions. En la Taula 6.1 es pot veure un esquema de la seqüenciació amb el seu fil narratiu. Com es pot veure, les sessions 1 a 8 són de contingut històric, pretenen posar en context a l'alumnat i endinsar-lo en la indagació, i no és fins a les sessions 8 i 9 que sorgeix la necessitat de calcular el valor del tresor. Les dues darreres sessions són de conclusió de la seqüència.

A continuació es fa una breu descripció de les sessions.

Sessió 1: En la sessió «A qui pertany el tresor?» es realitza la primera aproximació al context arqueològic de la seqüència didàctica i es presenta la situació problemàtica als estudiants, plantejant la pregunta que serà el motor de la seva indagació: Qui deuria haver estat el propietari o propietària del tresor romà trobat al jaciment?

L'objectiu de la sessió és presentar el problema d'indagació, situar-lo i contextualitzar-lo, i motivar els alumnes a investigar-lo.

La troballa del tresor es presenta a l'alumnat a través d'una notícia (Figura 6.2), suposadament publicada en una revista d'arqueologia. La redacció d'aquesta notícia, tot i que és fictícia —a l'alumnat se'ls presenta com a autèntica—, està

basada en un article verídic, publicat en la revista del Museu de Badalona vuit anys després de les tasques d'excavació (Padrós i Curt, 1993).

Taula 6.1: Seqüenciació de les sessions de «Viure a *Baetulo*. Aquí s'aprèn investigant»

«Viure a <i>Baetulo</i> . Aquí s'aprèn investigant»	
Nº sessió	Nom de la sessió i breu descripció
1	« A qui pertany el tresor? » Presentació del context històric i plantejament del problema d'investigació a l'alumnat. Aproximació cronològica i geogràfica dels fets.
2	« Què sabem i què necessitem saber? » Formació d'equips d'investigació i fixació per part de l'alumnat d'objectius d'investigació concrets.
3	« On es va trobar el petit tresor? » Coneixement i comparació del traçat urbà de <i>Baetulo</i> en relació amb el de Badalona.
4	« Un matí d'arqueòlegs » [continuació de la sessió 3] Visita al lloc on es va trobar el tresor (el jaciment museïtzat anomenat <i>Casa dels Dofins</i>) i al conjunt de ruïnes romanes de Badalona: Conducte de les Aigües, Jardí de Quint Licini i exposició permanent del Museu de Badalona (on està exposat el conjunt de monedes del tresor).
5	« Domus insulae et vilae » Revisió i discussió sobre la informació extreta de les visites de la sessió 4, amb l'objectiu de conèixer com eren els habitatges de <i>Baetulo</i> .
6	« A la biblio de Can Casacuberta ho trobarem! » Visita a la biblioteca pública central de la ciutat (aquesta sessió també es pot realitzar a la biblioteca de l'escola si hi ha els llibres adequats).
7	« Tenim noves nutii de qui vivia a Baetulo! » Es proporciona informació sobre alguns personatges que se sap que van viure a <i>Baetulo</i> , candidats a ser els propietaris del tresor. Visita al Decumanus, Termes i altre cop a l'exposició permanent del Museu.
8	« Domus vita vitae. Com vivien els habitants de les domus? » Esudiar com vivien els habitants de les domus per poder formular les primeres conjectures sobre qui podrien haver estat els habitants de les domus on es va trobar el tresor romà.
9	« Oficina de canvi de moneda » Estudiar el sistema monetari romà, reconèixe'n la seva estructura i les proporcions entre les diferents monedes i establir analogies amb alguns sistemes monetaris actuals. Estimació sobre el valor de les coses i serveis d'ús quotidià i reflexió al voltant dels diners.
10	« Guanyar-se la vida a Baetulo » Estudiar quin tipus de feines feien els romans i quants diners guanyaven per poder ajustar les conjectures realitzades en la sessió 8. Determinar el valor del tresor en funció del cost de la vida a l'època.
11	« Tabernae, mercat al Decumanus Maximus » Realitzar una reconstrucció històrica d'un mercat romà al pati de l'escola.
12	« Només sé que no sé res » Redactar i argumentar les hipòtesis definitives per donar resposta a la pregunta d'investigació (qui podia haver estat el propietari del tresor?). Exposició i defensa de les hipòtesis i discussió dels resultats dels grups.



Figura 6.2: Notícia de la troballa del tresor romà lliurada a l'alumnat en la sessió 1

Amb la notícia, es lliura a l'alumnat un informe arqueològic (Figura 6.3) — adaptat del real— amb fotografies i detalls de la troballa.

En aquesta sessió l'alumnat, amb l'ajuda de la mestra i diversos recursos (Power Point i CD editat pel Museu de Badalona sobre la romanització, cronologia, línia del temps, etc.), haurà de situar cronològicament i geogràfica l'època històrica a què pertanyen les monedes del tresor (l'Imperi romà, posant especial èmfasi en l'època que correspon a la romanització de la Laietana, la formació de la província de la Hispania i més concretament, la fundació de la ciutat de *Baetulo*). Després, és recordarà l'objectiu principal de la investigació, descobrir a qui podia pertànyer el tresor trobat, i s'animarà els alumnes perquè pensin en quina informació necessitarien per descobrir-ho.

Sessió 2: L'objectiu de la sessió «Què sabem i què necessitem saber?» és que l'alumnat concreti quines informacions i dades creuen que els serien útils per poder saber a qui podia haver pertangut el tresor romà. Per tant, aquesta segona sessió s'iniciarà amb la pregunta: Què necessitem saber per respondre la pregunta inicial de la investigació?

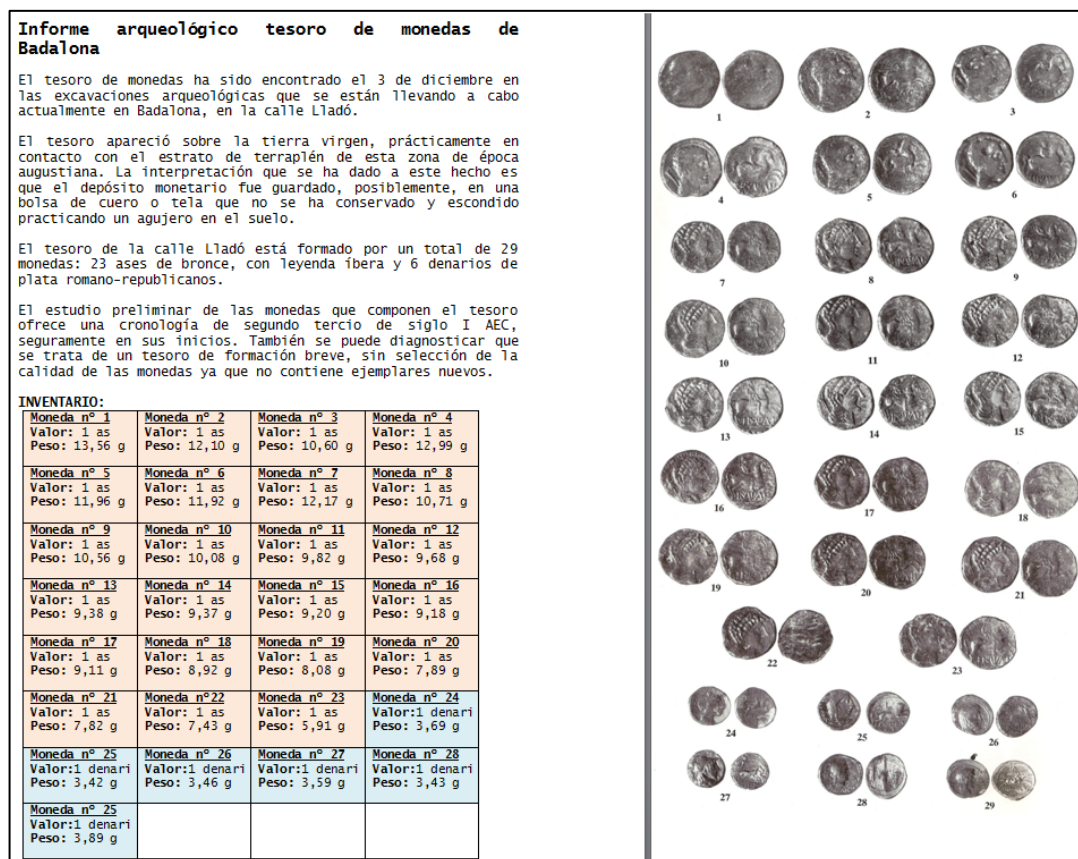


Figura 6.3: Informe arqueològic sobre la composició del tesoro romà trobat (adaptació del l'informe real), lliurat a l'alumnat en la sessió 1

S'organitza la sessió en gran grup de manera que tots els estudiants puguin participar en una pluja d'idees en relació a les dades i la informació que caldria buscar. La mestra té una llista amb preguntes útils per a guiar la participació dels estudiants, com per exemple: Recordeu on s'ha trobat el tesoro? Quines altres descobertes arqueològiques s'han fet en aquella zona? Sabeu alguna cosa de com era la ciutat quan hi vivien els romans, quan es deia *Baetulo* en lloc de Badalona? Com eren els carrers de la ciutat i com es deien? I els edificis? Com eren els habitatges, tots eren iguals? Com era la gent que vivia en aquestes cases? Eren rics o pobres? Quin tipus de vida tenien els habitants de *Baetulo*? A què es dedicaven i quins oficis tenien? Quants diners guanyaven? Quin valor podia tenir aquest tesoro, era un tesoro de molts diners?

Després de la recollida d'idees es formen els equips d'investigació (grups de tres o quatre alumnes) on es promourà el treball cooperatiu, tant entre els membres de cada equip com entre els diferents equips per cercar informació que respongui a les preguntes que entre tots haurien apuntat.

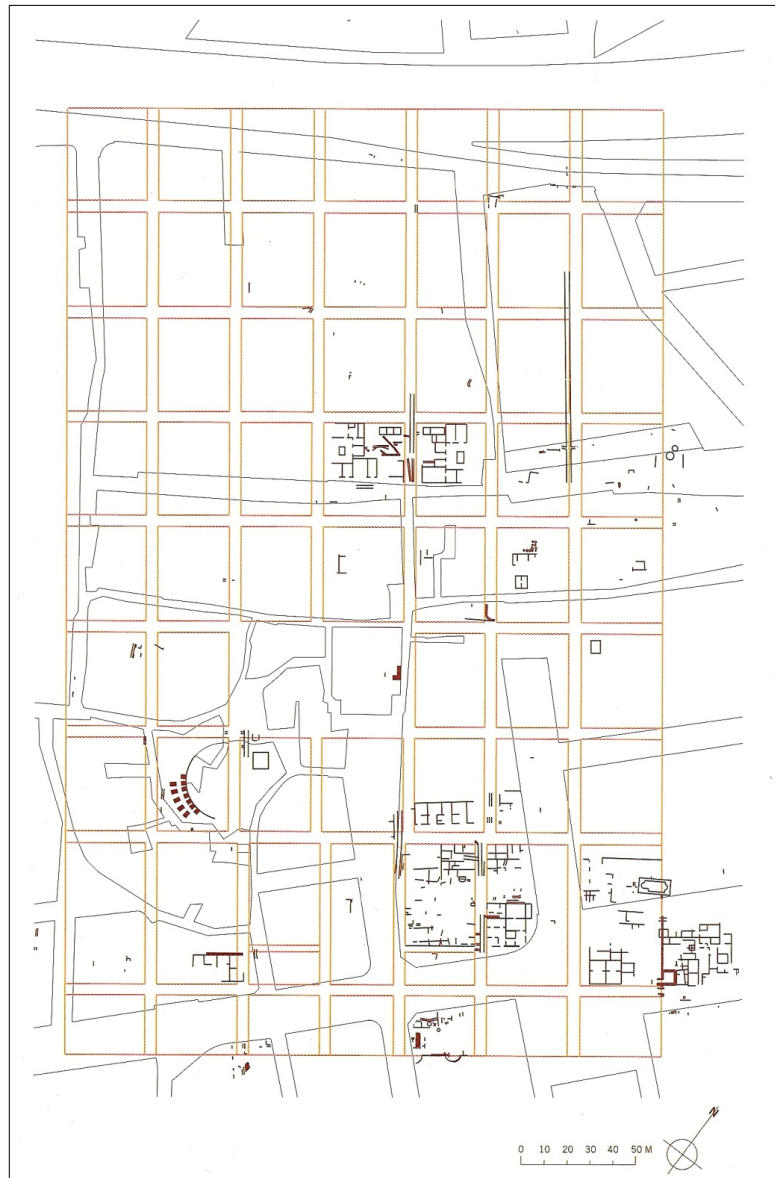


Figura 6.4: Mapa de la planta hipotètica de *Baetulo* (en color marró) i els carrers de Badalona actual (en color negre) amb els diferents indrets on hi ha localitzats jaciments amb restes romanes

Sessió 3: La pregunta que dóna nom a la sessió, «On es va trobar el petit tresor?», orienta la sessió. D'aquesta pregunta se'n desprenen les següents qüestions: Quan i com es va fundar *Baetulo*? Com estava distribuïda la ciutat. Com eren els carrers de la ciutat i com es deien? Respondre-les és l'objectiu d'aquesta sessió.

Es realitza una activitat per trobar informació bàsica sobre el procés de romanització de l'imperi romà i la fundació de ciutats importants com ho van ser *Tarraco* (l'actual Tarragona) o *Baetulo*.

Després, la sessió s'enfoca a treballar les infraestructures de la ciutat. La mestra disposa d'un plànol de la ciutat de *Baetulo* publicat pel Museu de Badalona que facilita que l'alumnat es faci una idea de com era la seva ciutat a l'època romana. Conèixer com eren a l'època romana els indrets de la ciutat actuals és important per a la investigació abans de cercar i situar el punt exacte del jaciment on es va trobar el tresor.

Per conèixer el lloc de la troballa, es va durà a terme una altra activitat amb el següent material per cada equip: un mapa amb la planta hipotètica de la ciutat de *Baetulo* —un document publicat pel Museu de Badalona, Figura 6.4—on hi pogueren trobar una marca que en senyalava el punt exacte; un mapa amb la planta de la Badalona actual, extret de *Google Maps*. L'activitat consistí en comparar els carrers de la Badalona actual amb els de la Badalona de fa més de 2000 anys, comparant els dos mapes —que podien sobreposar un amb l'altre, copiant-ne (o imprimint-ne) un en paper vegetal, per exemple—. Això els hauria de permetre saber que hi havia en el jaciment arqueològic i els seus voltants fa 2000 anys i què hi ha ara i, per tant, com arribar-hi.

Sessió 4: Aquesta sessió s'anomena «Un matí d'arqueòlegs» perquè l'alumnat, un cop localitzat en el mapa el lloc on es va trobar el tresor, hi aniran de visita. L'objectiu de la sessió és posar en contacte els alumnes amb el lloc on s'origina el problema de la indagació i que coneguin les diverses restes romanes de la ciutat i s'endinsin en la vida quotidiana a la Badalona romana.

La sessió comprèn un passeig per Badalona tot resseguint les diferents troballes arqueològiques, la visita al conducte d'aigües, al jardí de Quint Licini —jardí conservat de la *domus* propietat d'aquest personatge històric—, la visita a la *domus* anomenada Casa dels Dofins—pel mosaic romà amb figures de dofins que s'hi va trobar al seu interior— i a la casa en excavació que hi ha al costat, la Casa de les Heures, i finalment, una primera visita al Museu de Badalona per veure l'exposició permanent i poder veure *in situ* el tresor trobat, ja que les monedes que el conformen hi són exposades.

En aquesta sortida els equips hauran de dur el informe arqueològic i els mapes per poder orientar-se i situar el que vagin trobant en el mapa. També podran fotografiar amb els mòbils el que els sembli interessant. Aquestes fotografies

seran arxivades a l'ordinador de classe per poder-les analitzar, buscant informació útil per a la seva investigació.

Quan arribin a la Casa dels Dofins —el tresor va ser trobat enterrat en el pati de la *domus*— la mestra donarà a cada equip d'investigació un sobre amb la inscripció llatina *Nulli certa domus* (Virgili, Eneida 6, 673), que significa “ningú té una casa certa”. Dins del sobre els estudiants hi trobaran les instruccions de les activitats a realitzar mentre duri la visita guiada a la casa i dos plànols que corresponen a les dues cases del carrer, la dels Dofins i la de les Heures, respectivament.

L'activitat consisteix, en primer lloc, en saber distingir del plànol quina la casa dels Dofins i la de les Heures. En segon lloc, després d'identificar cada casa, hauran d'anomenar en el plànol de la casa visitada, la dels Dofins, cada estança i dibuixar-hi de forma esquemàtica el mobiliari típic per tal que després els ajudi a la comprensió del plànol. Al llarg de la visita la mestra els suggerirà que es vagin fixant amb el màxim de detalls possibles (l'estructura de la casa, els mosaics, les estances, els utilitatges, etc.) perquè tot plegat poden ser pistes importants per descobrir qui fou propietari del tresor.

I finalment, hauran de cercar el lloc concret on es va trobar el tresor —un lloc senyalitzat al pati de la casa—. El descobriment d'aquest lloc per part dels estudiants tindrà una certa importància a l'hora de construir hipòtesis sobre qui el va poder amagar en aquell lloc concret, un cop coneguïn les rutines dels possibles habitants de la casa.

Posteriorment, els alumnes i les mestres s'hauran de dirigir a les altres ruïnes romanes que es poden visitar i que tenen importància perquè l'alumnat contextualitzi el treball d'investigació que havien de realitzar. El matí s'acabarà al Museu de Badalona on podran visitar l'exposició permanent i veure per primera vegada en directe el tresor, així com, una part de la col·lecció d'objectes arqueològics i elements arquitectònics trobats al territori de *Baetulo*, que exemplifiquen el període de romanització i la vida quotidiana de la ciutat romana.

Sessió 5: Aquesta sessió s'anomena «*Domus insulae et vilae*» i el seu objectiu és el mateix que l'anterior, aprofundir sobre els aspectes importants de la vida quotidiana dels romans.

El primer que es farà és seleccionar, ordenar i reflexionar sobre la informació extreta de la visita guiada de la sessió anterior. Es proposa que comparin les cases romanes que van visitar amb les cases actuals en una graella comparativa. Aquestes comparacions les podran fer a partir de l'observació detallada d'un plànol d'una casa actual i l'observació acurada i la relectura de les anotacions que haurien pres durant la visita del dia anterior del plànol de la planta de la Casa dels Dofins.

Arran de les comparacions entre les cases s'introdueix el debat sobre la vida quotidiana dels romans en comparació a la dels badalonins actuals. Sortiran temes com per exemple: la grandària de les cases, com substituïen l'ús de l'electricitat, qui s'encarregava de les feines domèstiques, per què no hi havia bany a les cases, com i on es rentaven, etc.

En aquesta sessió s'anima als equips d'investigació a fer les primeres conjetures sobre qui (o quines característiques deuria tenir) el propietari de la casa on es va trobar enterrat el tresor, en base als coneixements adquirits fins aquell moment. L'alumnat s'hauria d'adonar que necessiten més informació per poder formular les seves hipòtesis ben argumentades.

Sessió 6: En aquesta sessió, anomenada «A la biblio de Can Casacuberta ho trobarem!», l'alumnat va fer una altra sortida a la biblioteca pública de la ciutat amb l'objectiu de buscar més informació sobre la vida dels romans en fonts secundàries i poder ajustar les primeres conjetures sobre el possible propietari o propietària de la *domus*.

L'objectiu didàctic de la sessió se centrarà en que l'alumnat millori la seva competència en tractament de la informació, seleccionant i sintetitzant la informació necessària per a la seva indagació, també que aprenguin a comunicar-la.

El treball a la biblioteca s'organitzarà per temàtiques i es repartirà entre els equips d'investigació, de manera que cada un busqui informació diferent i la sintetitzi. Més tard, ja a la classe, hauran de compartir la informació amb la resta d'equips. Se'ls lliura uns fulls de treball amb bibliografia i webgrafia recomanada, així com, algunes qüestions perquè els ajudin a formular les seves conjetures.

De retorn de la biblioteca hauran de preparar-se una exposició oral per explicar la informació que els hagi correspost buscar. Els altres equips

prendran apunts de la informació que els sembli interessant i necessària per formular les seves hipòtesis. Per això també tindran un full de treball que els ajudi a organitzar la informació. Aquesta activitat els ajudarà a relacionar informació per poder conjecturar sobre l'estrat social del possible propietari i sobre la seva ocupació, sobre com podria ser la seva família i altres possibles habitants de la casa. També se'ls demanarà que conjecturin sobre els possibles rols d'aquests hipotètics habitants de la casa, els seus hàbits diaris, realització de tasques domèstiques, etc.

Sessió 7: Aquesta sessió, anomenada «Tenim noves *nutii* de qui vivia a *Baetulo*!», té per objectiu, per una banda, que l'alumnat assolixi competències en formular, d'una manera argumentada —havent seleccionat la informació que els sembli útil i adient—conjectures orientades a resoldre el problema i, per altra banda, que de forma crítica siguin capaços de prendre decisions sobre quina informació complementària els faria falta per millorar les seves conjectures.

En aquesta sessió es proporcionarà a l'alumnat informació sobre certs personatges que van viure a *Baetulo* —per exemple, Quint Licini Silvà Granià, Marcus Porcius, Caius Mucius, Marco Fabi Nepos, Optatvs, un metge desconegut del qual se n'ha trobat una recepta mèdica (Figura 6.5), Cesar Marcus Iulus Philippus i Sabina Tranquilina— relacionats amb certs objectes, tots ells trobats en diferents llocs de les excavacions arqueològiques que s'han anat fent a Badalona.



Figura 6.5: Fotografia d'una placa de plom amb una recepta mèdica escrita en llatí «RHVS AD IOCVR SVRIACVM VNCIA DVODECIMA», que vol dir “Resina de Síria per curar el fetge, dotze unces”. Aquesta placa es va trobar a l'excavació de la Casa dels Dofins

L'alumnat podrà basar-se en aquests personatges per fer les seves conjectures. Això sí, un cop investigats per descartar-ne alguns —com per exemple, si descobreixen que n'hi ha que no van viure a *Baetulo*, o que n'hi ha que semblen tenir una professió que no els podria donar prou diners per viure a

aquella casa, etc.— o per trobar detalls que els puguin situar a la Casa dels Dofins —per exemple, revisant les fotos fetes a la exposició permanent (Figura 6.6) per saber on es van trobar els objectes, en quina excavació, llegint les guies i documentació publicada pel Museu, etc.—.

Per introduir aquests personatges la mestra lliurarà a cada equip un full de presentació de cadascun amb la informació més important que també exposarà.



Figura 6.6: Fotos d'algunes de les vitrines de l'exposició permanent del Museu de Badalona on s'hi poden observar objectes relacionats amb alguns dels personatges que van viure a *Baetulo*

Sessió 8: Aquesta sessió, «*Domus vita vitae*. Com vivien els habitants de les domus?», té els mateixos objectius didàctics que l'anterior. Tanmateix, al final d'aquesta sessió l'alumnat hauria d'arribar a la conclusió que seria interessant saber el valor del tresor ja que seria una informació amb un pes important a l'hora de formular la conjectura sobre qui podria ser-ne el propietari.

La sessió es divideix en dues parts. La primera part se centra en assegurar que l'alumnat té tota la informació necessària per conèixer com era la vida familiar a l'època romana i en buscar-ne més, si cal. Aquesta informació serà important per poder interpretar i deduir com podien viure els membres d'una família romana “tipus”, com la que podia viure a la Casa dels Dofins. També els permetrà extraure conclusions sobre la propietat del tresor com, per exemple, conjecturar qui podia tenir el pati (lloc on estava enterrat el tresor) com a zona de treball o joc, reflexionar sobre, per exemple, al ser el pati simplement una zona de pas, si podia ser un lloc segur per amagar el tresor, etc.

En aquesta part, per avançar en les conjetures sobre els propietaris o habitants de la Casa dels Dofins i propietaris del tresor, hauran de relacionar tota la informació que tenen —hauran de revisar-ho tot, informació extreta de llibres, internet, fotos realitzades en les sortides, fullets del Museu, etc.— sobre els romans amb la informació que se'ls ha lliurat sobre els personatges presentats.

Pel que fa la segona part de la sessió, se centrarà a realitzar un qüestionari de comprensió dels continguts treballats que també recull els coneixements previs que els alumnes tenen sobre els temes que es tractaran en les sessions posteriors de la unitat .

Després, hi haurà una estona de reflexió grupal conjunta que ha de conduir als diferents grups a formular una hipòtesi, cada com més fonamentada, de qui vivia a la Casa dels Dofins, tant sobre el seu possible amo com de les altres persones que podrien residir-hi.

Sessió 9: Aquesta sessió és anomenada «Oficina de canvi de moneda», i se centra en què l'alumnat conegui l'estructura i el funcionament del sistema monetari romà perquè pugui arribar a calcular el valor del tresor per l'època a la qual pertany. Això permetrà fer estimacions i reflexions sobre el valor de les coses i els serveis, podent-se iniciar un debat al voltant dels diners.

Des d'un punt de vista didàctic, a més d'estudiar el sistema monetari romà, ens interessarà que coneguin també l'estructura i funcionament d'altres sistemes monetaris per establir-ne analogies entre ells i amb el sistema numèric decimal.

Per començar a indagar sobre el tipus de monedes romanes existents es reprendrà l'informe arqueològic (Figura 6.3) per fer-ne una revisió documental i extraure'n la informació en relació a la composició del tresor: està format per 29 monedes (23 asos i 6 denaris); els asos són de bronze i els denaris són de plata.

La mestra haurà de promoure que s'iniciï debat a l'aula, d'on sorgeixin noves qüestions que facin avançar la indagació, com per exemple:

- ✓ El sistema monetari romà deu constar de només dos tipus de monedes — les que hi ha al tresor— o segurament en té més? (La mestra pot suggerir que facin analogies amb altres sistemes monetaris que coneguin millor,

com el de l'euro; que pensin com haurien de ser els preus per poder pagar només amb dos tipus de monedes, etc.).

- ✓ Quin dels dos tipus de monedes del tresor deu tenir més valor? (Intentar que es fixin en què són de materials diferents, que pensin quin dels dos materials és més valuós; fer reflexionar sobre si actualment el material de les monedes està relacionat amb el valor que representa la moneda, etc.).
- ✓ S'utilitzaven bitllets a l'època romana? Existia el paper a l'època romana?

D'aquest diàleg en gran grup ha de sorgir la proposta d'investigar altres sistemes monetaris actuals, a més de buscar informació sobre el sistema monetari romà, per poder comparar i entendre'n el funcionament. Cada equip d'investigació s'encarregarà d'estudiar a fons un sistema monetari: l'euro; els dòlar USA; les lliures esterlines; les pessetes; i el sistema romà.

Per a facilitar el treball de l'alumnat sobre l'estructura i el funcionament dels diferents sistemes de numeració, se'ls facilitarà reproduccions de les monedes i bitllets que han d'estudiar, així com, una llista d'enllaços a pàgines web on podran trobar-ne informació. Aquests enllaços estan disponibles des del blog de la seqüència didàctica.

Cada equip d'investigació haurà de deixar paleses les relacions entre els elements del sistema que descobreixin. Per aconseguir-ho, podran ordenar els bitllets i monedes del sistema que estigui estudiant segons el seu valor, evidenciar les relacions multiplicatives existents entre els elements, agrupar-los segons els seus múltiples, etc.

Com a producte final d'aquesta part de la indagació cada equip confeccionarà un mural on es presenti el sistema de monedes i bitllets estudiat —per exemple, enganxant-hi les reproduccions dels elements del sistema— de manera que s'hi expliquin les relacions descobertes. Aquest mural serà el suport de què disposarà posteriorment cada equip per exposar els resultats de la seva indagació a la resta d'equips.

Després de les exposicions dels equips, la mestra podrà passar una presentació (disponible al blog en format de Power Point) per explicar amb detalls aquests sistemes monetaris, ressaltant el que hagi descobert l'alumnat i evidenciant les relacions que no s'hagin trobat. S'enceta així el moment de diàleg i debat per comparar els diversos sistemes monetaris, extraure

conclusions i generar noves preguntes. Les reflexions s'hauran de centrar en aspectes matemàtics que estan totalment imbricats amb qüestions socials i culturals. Aquest context socio-cultural s'aprofitarà per dotar de significativitat als aprenentatges matemàtics que esdevinguin d'aquesta indagació.

En aquest diàleg col·lectiu sobre la comparació dels diversos sistemes monetaris estudiats serà convenient que sorgeixin preguntes i comentaris relacionats amb els següents punts:

- ✓ En l'estructura dels sistemes monetaris existeixen relacions multiplicatives entre els seus elements. Poden sorgir qüestions relacionades com, per exemple:
 - *Sempre hi ha una moneda que és on es recolza tot el sistema i que genera les altres (el 1 €; 1pta; 1 dòlar; 1 L) i en el sistema antic també (1 As).*
 - *Sovint es multiplica (o divideix) per 2. Per què? Posar en relació «calcular» dobles i meitats amb «fer» dobles i meitats, a l'hora de fabricar monedes per exemple, etc.*
 - *En el sistema antic, el romà, es divideix per 3, en canvi en els moderns no. Per què? Parlar de com es pesava un terç d'un material amb la balança romana.*
 - *Sovint es multiplica (o divideix) per 10, però en els sistemes antics com el romà no. Per què? Funció de les mans com la primera «màquina de comptar»; introducció del zero en la numeració.*
 - *Els sistemes monetaris moderns tenen bitllets i monedes, el romà només té monedes. Per què? Valor dels diners, que a l'antiguitat anava lligat al material de què estaven fetes les monedes i ara no perquè se segueix un altre sistema més segur.*

- ✓ Els sistemes monetaris estan organitzats per poder fer combinacions que permetin la compravenda del productes o serveis. En relació a aquest fet:
 - *Sumant i restant el valor monedes (o bitllets) podem construir altres monedes o bitllets del sistema monetari. Ho sabríem fer amb les monedes romanes? Practicar el càlcul de trencats d'una forma significativa, lligada a la realitat.*
 - *Amb un bitllet o moneda més gran puc comprar coses de valor petit sempre que existeix en el sistema un tipus de moneda que permeti «donar canvi».*
 - *És important que existeixin monedes de valor petit perquè sinó sempre perdriem diners al comprar, per tant, les monedes de valor petit no tant sols*

serveixen per comprar coses barates. Plantejar situacions perquè s'adonin que si no hi ha monedes petites tot, per força, és més car.

— *els bitllets es deurien inventar per no haver de dur tant de pes.* Reflexionar sobre què podria passar si existís un bitllet de, per exemple 1000 € (facilitaria l'evasió de capital, es podrien perdre molts diners de cop si perdessis el bitllet, etc.). Alternatives als bitllets per pagar quantitats molt grans en relació a la seguretat: què és un xec?, i una tarja de crèdit? Lligar-ho amb el negoci (dels bancs i caixes) associat a aquesta alternativa, que hi pensin críticament.

- ✓ Els governs —o les borses— estableixen les equivalències entre diferents monedes i així podem utilitzar la nostra moneda per comprar, canviar-la, un altre tipus de moneda. Això requereix fer uns càlculs matemàtics. Si sorgeix la necessitat es podria practicar el canvi de moneda entre euros i dòlars, per exemple, perquè ho entenguin.

A continuació, es proposa una activitat per practicar l'ús de les monedes romanes per comprar i vendre productes romans, una mena de supermercat romà, que tant pot dur-se a terme sobre paper o amb una ambientació més real com alternativa a la *Sessió 11*. L'objectiu de l'activitat és que l'alumnat es pugui fer una idea del cost de la vida a l'època romana, com a preparació prèvia a la *Sessió 10*.

Els equips d'investigació hauran de resoldre una sèrie de problemes basats en compravendes amb moneda romana. Aquests problemes (Figura 6.7) es poden trobar preparats en uns fulls de treball que estan disponibles per descarregar-los en el blog, així com les solucions (en l'apartat «Per a emergències»).

- I. T'has enamorat d'una baldufa i convences a la teva iaia que te la compri. El botiguer et diu que val **un sextant** i la iaia t'ha donat **un quadrant**. T'arriben els diners per comprar-la? Et donarà canvi el botiguer?



- II. La teva mare t'envia a comprar un pa de farina d'espelta (és una farina mil·lenària, que fa molts anys que s'utilitza). Et diuen que val **un as i mig** (o sigui, un as i un semi) però la teva mare no t'ho ha donat just, t'ha donat **un dupondi**. El forner, que és molt espavilat i es pensa que no saps comptar, et torna una unça de canvi. És correcte o has de reclamar?



- III. S'acosta l'aniversari del teu pare i has pensat de regalar-li uns daus nous perquè hi juga sovint amb els seus amics i els té molt vells. En trobes uns que estan més bé de preu del que et pensaves, valen **un trient**. Pagues amb **un semis**. Quina moneda esperes que et doni de canvi? El botiguer et comenta que només té monedes de unça, et podrà tomar el canvi? Quantes monedes et donarà?



- IV. A l'hora de berenar tens molta gana i decideixes comprar-te 3 pomes, que van a 1 unça la peça, i també un tall de formatge que val un quadrant. Si només tinguessis monedes de sextant, amb quantes monedes hauries de pagar? I si només tinguessis monedes de unça, amb quantes monedes n'hauries de pagar?



- V. Ara una mica més difícil!

La Virgínia, una nena romana li va explicar a la seva millor amiga que gràcies a saber matemàtiques es va estalviar diners. Resulta que va anar a comprar una nina que li agradava molt, que valia dos trients, i ella li va donar un as per pagar-la. Com que és molt bona amb càlcul mental de seguida va pensar que el botiguer li tomaria un trient. Però llavors el botiguer li diu que no li pot tomar el canvi (que compri una altra cosa i es gastí l'as sencer) perquè només té monedes de semis (i un semi val més que un trient, no?). Quina solució va trobar la Virgínia perquè el botiguer li pogués tomar un semis de canvi i ningú hi perdés diners?



Figura 6.7: Llista de problemes sobre compravendes en moneda romana

Per resoldre els problemes se'ls lliurarà una taula amb les equivalències entre monedes (Figura 6.8) que també està disponible al blog encara que, de fet, és un resum que coincidirà amb el mural que ha fet l'equip que estudiava aquesta moneda. Aquesta taula els facilitarà el fer sumes i restes entre fraccions per a trobar els resultats. És una tasca matemàtica contextualitzada en l'època romana de la ciutat de *Baetulo*.

MONEDES ROMANES			
	UNÇA	1/12 As	0,08 As
	SEXTANT	1/6 As	0,16 As
	QUADRANT	1/4 As	0,25 As
	TRIENT	1/3 As	0,33 As
	SEMIS	1/2 As	0,50 As
	AS	1 As	
	DUPONDI	2 As	
	SESTERCI	4 As	
	QUINARI	5 As	
	DENARI	16 As	
	AURI	400 As	


Figura 6.8: Taula d'equivalències entre monedes romanes

Sessió 10: En aquesta sessió, que s'anomena «Guanyar-se la vida a *Baetulo*», l'alumnat ja hauria d'estar en condicions per calcular o estimar el valor del tresor, una informació clau per decidir sobre el possible propietari o propietària del tresor. Per tant, l'objectiu dels equips d'investigació és que puguin formular les seves conjetures sobre quin dels possibles habitants de la

Casa dels Dofins —a triar dels personatges presentats en la *Sessió 7* o bé d'altres possibilitats que pensin els estudiants— podria haver estalviat els diners del tresor i ser-ne el propietari.

En primer lloc, hauran de determinar els valor del tresor i, després valorar-lo en funció del cost de la vida i els salaris de l'època. I finalment, reformular les conjetures que han anat pensat fins ara.

**QUANT VAL EL TRESORET?
(PART I)**



Us recordeu de l'informe arqueològic?
Ara el necessiteu per comptar quants asos conté el petit tresor. Feu els càlculs en aquest full amb l'ajuda de la taula d'equivalències de les monedes romanes que ja hem fet servir a l'exercici anterior.

Quants Asos val el tresor?

Ara que ja saps quant val en Asos el tresor mira amb deteniment el full adjunt LA VIDA QUOTIDIANA A BAETULO. Amb aquest full podràs saber els salaris de les professions més habituals entre els romans i també una llista de preus de productes de consum quotidià per a qualsevol persona.

Figura 6.9: Full de treball de la primera activitat de la *Sessió 10*, calcular el valor en asos

Per dur a terme aquestes activitats els equips d'investigació hauran de recuperar altre cop l'informe arqueològic de la primera sessió (Figura 6.3) on es detallen totes les peces que conformen el tresor trobat a la Casa dels Dofins i calcular-ne el seu valor en asos —recorrent a la taula d'equivalències (Figura

6.8) —, és a dir, han de calcular el valor dels denaris en asos i sumar-los tots, per poder obtenir la quantitat exacta d'asos de què està compost el tresor.

LA VIDA QUOTIDIANA A BAETULO			
SALARIS ANUALS			
Procònsul 1.000.000 sesteris (4.000.000 asos)	Centurió 20.000 a 40.000 sesteris (80.000 a 160.000 asos)	Legionari 1.000 a 2.000 sesteris (4.000 a 8.000 asos)	
Metge 400.000 sesteris (1.600.000 asos)	Gladiador important 3.000 a 15.000 sesteris (12.000 a 60.000 asos)	Edil 800 sesteris (3.200 asos)	
Actor cèlebre de teatre 400.000 sesteris (1.600.000 asos)	Artesà 4.500 sesteris (18.000 asos)	Ordenança 700 sesteris (2.800 asos)	
Professor estatal 100.000 sesteris (400.000 asos)	Guàrdia pretoria 4.000 sesteris (16.000 asos)	Missatger 300 sesteris (1.200 asos)	
Alt càrrec administratiu 60.000 a 200.000 sesteris (240.000 a 800.000 asos)	Gladiador normal 1.000 a 2.000 sesteris (4.000 a 8.000 asos)	Nunci 300 sesteris (1.200 asos)	
Actor còmic de teatre 40.000 sesteris (160.000 asos)	Jornaler agrícola 1.400 sesteris (5.600 asos)	Flautista 300 sesteris (1.200 asos)	
EL COST DE LA VIDA			
½ quilo de pa	1 as	Bugaderia	
una gerra ½ l de vi normal	1 as	rentat d'una túnica	16 asos
una gerra ½ l de bon vi	4 asos	Un esclau (el que valia comprar-lo)	10.000 asos
325 g d'oli	4 asos	Una mula	2.080 asos
un peix senzill	2 asos	Entrada a les termes	
formatge fresc	4 asos	Homes	1/2 as
un cove de cebes	5 asos	Dones	1 as
un plat de cigrons cuinats	2 asos	Una iugera (2.523 m ² de terra agrícola)	800 asos
un plat de ceràmica	1 as	Lloguer anual casa mitjana	120.000 asos
una túnica de dona	5 sesteris		
una mula	520 sesteris		

Figura 6.10: Taula amb dades sobre el cost de la vida a *Baetulo*

Un cop n'hagin calculat l'equivalència en asos, podran estimar el valor del tresor (Figura 6.11) i, per fer-ho, se'ls faciliten unes quantes dades de referència que donaran idea del cost de la vida a *Baetulo* —quant val un pa, quant cobra un legionari, etc.— en un full que podran consultar (Figura 6.10). L'objectiu és que, en acabar, puguin dir si es tracta de molts o pocs diners, si dóna per comprar moltes o poques coses, coses cares o coses barates, és a dir, si és un gran tresor procedent d'una persona molt rica o són els estalvis d'algú que guanya poc.

Amb les dades sobre les diferents professions i els seus salaris l'alumnat podria obtenir arguments per a descartar alguns dels personatges com a habitants del la Casa dels Dofins i, per tant, propietaris del tresor.

QUANT VAL EL TRESORET? (PART II)

Sí, molt bé! Ho heu endevinat! Es tracta d'averiguar si el tresor representa molts o pocs diners perquè això us donarà més pistes per conèixer el possible propietari.

Mans a l'obra doncs!

Intenteu respondre les següents preguntes fent càlculs a partir de les dades facilitades al full adjunt LA VIDA QUOTIDIANA A BAETULO.

Si el propietari del tresor s'hagués volgut gastar totes les monedes, què s'hagués pogut comprar? Calculeu i apunteu quantes coses s'hagués pogut comprar o quins serveis hagués pogut contractar.

Quines coses NO hagués pogut comprar o pagar? Apunteu-les aquí.

A la taula teniu els salaris anuals de certes professions. Tria 3 professions i calcula quants asos un baetulià amb aquestes feines guanyaria en un mes. Després esbrina quina part del seu sou representen els asos del tresoret. Escriu els resultats en aquesta taula:

PROFESSIÓ	SOU ANUAL	SOU MENSUAL	TRESORET/ SOU

Ara ja podeu respondre, creieu que són molts o pocs diners?

Us atreviríeu a dir a quants euros aproximadament podria correspondre, pensant en les coses que heu vist que es podien comprar i les que no i els càlculs que heu fet dels sous?

.....

Figura 6.11: Full de treball de la segona activitat de la *Sessió 10*, estimar el valor del tresor

A continuació, l'alumnat participarà en la preparació de la següent *Sessió 11*, la dramatització d'un el mercat romà. Caldrà que decideixin quines *tabernae* —les botigues— es representaran, paper farà cada estudiant, quin és el material necessari per a la representació, etc.

Sessió 11: Aquesta sessió s'anomena «*Tabernae*, mercat al *Decumanus Maximus*» perquè el seu objectiu és que l'alumnat empatitzi amb la vida quotidiana romana i practiqui amb la moneda romana, tan pel que fa al seu ús com per interioritzar el valor de les coses a l'època romana. És una sessió pensada per l'alumnat de Badalona i, per tant, per dur-la a terme sobre les mateixes dates

en què el Museu de Badalona porta a terme l'esdeveniment *Magna Celebratio*². Tanmateix, és una sessió adaptable a la realitat d'altres escoles.

Bàsicament, es tracta de caracteritzar el pati de l'escola com un mercat romà, de la manera més versemblant possible, per fer-hi vida com si l'alumnat representés una obra de teatre. Tot plegat, s'ha de poder dur a terme gràcies a l'estudi històric realitzat. Així doncs, per exemple, es repartiran als personatges participants quantitats proporcionals de diners romans segons els oficis que corresponguin als seus rols.

Sessió 12: Aquesta sessió s'ha anomenat «Només sé que no sé res» i és la darrera de la seqüència didàctica. El seu objectiu és que l'alumnat faci una recapitulació de tota la informació i coneixements adquirits i que formuli, en relació a les qüestions que es van plantejar a la segona sessió, les seves hipòtesis finals i les argumenti.

Per dur a terme aquesta tasca reflexiva hauran de completar un full de treball (Figura 6.12) on hi plasmaran el que pensen sobre: qui hi podia haver viscut a la Casa dels Dofins, quin valor tenia el tresor i, finalment, qui podia haver estat el propietari o propietària del tresor.


Després, cada equip d'investigació exposarà les seves hipòtesis davant de la resta d'equips. Aquests escoltaran atentament a cada grup que exposi i n'avaluaran si la hipòtesi que en plantegen és plausible o no, i si no els ho sembla, el perquè.

La solució a la pregunta és oberta, avui dia continua sent una incògnita qui fou el propietari del tresor. Tanmateix, la mestra valorarà com els alumnes han arribat a aquestes deduccions, el camí seguit i l'argumentació que han ofert per arribar al seu resultat particular.

² Cada any, el darrer cap de setmana d'abril i durant tres dies, el Museu de Badalona organitza la *Magna Celebratio*, un festival romà que combina les visites als diferents espais arqueològics de *Baetulo*, la possibilitat de degustar un menú romà als restaurants de la ciutat, la recreació d'oficis i escenes portats a terme per grups de reconstrucció històrica i la divulgació de la vida quotidiana per especialistes en món romà. Per a més informació: <http://www.magnacelebratio.cat/>

A QUI PERTANY EL TRESOR?

Ha arribat l'hora de sintetitzar tot el que hem après i, amb un mètode científic, formular una hipòtesi que ens digui de qui va ser aquest tresor possiblement.



Responen les següents preguntes de forma raonada, és a dir, expliqueu en què us baseu per fer les vostres afirmacions i el perquè.

🕒 **Qui hi va viure a la Casa dels Dofins, possiblement?**
Caracteritza tots els seus habitants.

🕒 **Representava, molts o pocs diners el tresor?**

Ara sí! De qui penseu que era el tresor?
Com sempre, raoneu la vostra resposta.

🕒 **Pren apunts de l'exposició dels teus companys i reflexiona sobre si la seva hipòtesi és científica, que després en parlarem tots junts.**

Figura 6.12: Full de treball de la darrera sessió on es recullen les hipòtesis finals argumentades

6.3. Anàlisi de la potencialitat de la seqüència didàctica per desenvolupar la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu.

Aquesta seqüència didàctica va ser dissenyada amb l'objectiu que la seva implementació impulsés el desenvolupament de la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu, tal i com s'han definit en el Capítol 4, en l'alumnat amb què es realitzés la seva implementació.

Pel que fa a l'anàlisi de la *potencialitat de la seqüència per al desenvolupament de la competència en indagació*, ens hem basat en les set categories definides en la Taula 4.1. Aquesta taula, amb els seus indicadors per a la gradació s'ha utilitzat

també per analitzar les evidències de desenvolupament de la competència en la implementació (CI). En el cas de l'anàlisi de la potencialitat de la seqüència per promoure aquest desenvolupament, és a dir, abans de la implementació, s'han operativitzat les categories escrivint-les en forma de pregunta i s'ha cercat la resposta justificant-la amb els diferents elements del disseny de la seqüència didàctica. És una anàlisi, *a priori*, senzilla però que permet identificar els elements de la seqüència impulsors de la competència que, amb la gestió adequada per part del professorat, han de permetre el seu desenvolupament.

Així doncs, per realitzar aquesta anàlisi, ens hem realitzat i hem respost les següents preguntes:

1. *La seqüència didàctica parteix d'una situació que pot ser problematitzada per iniciar/continuar una indagació?*

Sí. La seqüència didàctica parteix d'una situació presentada a l'alumnat mitjançant una notícia relacionada amb una troballa arqueològica en la ciutat de Badalona. D'aquesta troballa, un petit tresor compost per monedes romanes, els estudiants s'han de preguntar qui en podia haver estat el propietari. Donada la poca informació que l'alumnat té al respecte, trobar la resposta suposa plantejar noves preguntes que permetin abordar la situació de forma parcial per anar obtenint coneixements. Així doncs, és una situació problemàtica oberta que promou la problematització, és a dir, es crea la necessitat d'anar obrint interrogants per avançar en la indagació.

2. *Les tasques de la seqüència didàctica promouen que l'alumnat mantingui una actitud de dubte que li permeti avançar en la indagació?*

Sí. Des del primer moment, quan coneixen la composició del tresor, l'alumnat s'adona que, com que no coneix ni l'estructura ni el tipus de monedes que conformen el sistema monetari romà, ha de buscar informació per contrastar qualsevol idea al respecte que vagi sorgint durant el treball col·laboratiu. Al llarg de la seqüència didàctica l'alumnat haurà d'anar realitzant activitats que el guien en la recerca i elaboració d'informació útil per conèixer dades, històriques (habitants destacats de *Baetulo* relacionats amb troballes del Museu de Badalona; preus dels serveis habituals i dels aliments i la roba a l'antiga ciutat; valor de les monedes romanes; etc.) i matemàtiques (funcionament de diversos sistemes monetaris; relacions entre les diverses monedes; estimació del valor del tresor; etc.), de la ciutat romana que els ajudaran en el

plantejament de conjectures plausibles sobre la identitat del propietari del tresor

3. *La seqüència didàctica exigeix que l'alumnat faci conjectures o hipòtesis sobre les possibles respostes/explicacions/resultats?*

Sí. L'alumnat ha de fer conjectures sobre la possible identitat del propietari del tresor. Conjectures que s'han d'anar modificant i millorant a mesura que s'obté més coneixements al llarg de les sessions. A la darrera sessió s'ha d'exposar i argumentar la conclusió final.

4. *La seqüència didàctica promou que l'alumnat planifiqui, condueixi i reguli les accions per desenvolupar la indagació?*

Sí, amb matisos. Tanmateix, cal dir que la seqüenciació i temporització de les activitats donen una pauta que, encara que el docent pot flexibilitzar, guia la indagació per un camí bastant concret que assegura que l'alumnat obtingui els elements mínims necessaris que li permetin formular al menys una hipòtesi amb un argument que es desprengui de les mateixes activitats realitzades. En aquest sentit, en principi no es dóna a l'alumnat gaire protagonisme pel que fa a la planificació de les tasques a seguir per conduir la indagació. No obstant això, en cada activitat l'alumnat s'ha d'organitzar les tasques de forma col·laborativa i ha de gestionar (escollir, classificar, ordenar, etc.) la informació necessària i prendre decisions.

5. *La seqüència didàctica promou que l'alumnat hagi de classificar, escollir, elaborar i interpretar les dades que recavi?*

Sí. La seqüència didàctica proporciona a l'alumnat fonts d'informació (primàries i secundàries) diverses: llibres, enllaços a pàgines web, visita al Museu de Badalona, visita al jaciment, documents informatius elaborats per a la seqüència, etc. L'alumnat és qui ha de prendre decisions sobre com utilitza la informació que ofereixen aquestes fonts recursos. A més a més, hauran de gestionar-la per poder sintetitzar-la i extraure'n conclusions que l'ajudi amb la indagació.

6. *La seqüència didàctica ofereix oportunitats perquè l'alumnat validi els resultats de la seva indagació, comparant-los amb les seves prediccions?*

En alguns casos sí. Per exemple, quan es tracta de fer una estimació del valor del tresor (no del valor arqueològic, sinó dels diners que hagués representat a l'època d'on prové), podran validar la seva predicció

comprovant què s'haguessin pogut comprar amb les monedes que el componen en un document provinent d'un llibre publicat pel Museu de Badalona. Per altra banda, per exemple, la conjectura final —qui podia haver estat el propietari o propietària del tresor— l'hauran de validar posant a prova els seus arguments exposant-los a la resta de companys de la classe. La resposta és oberta, hi ha moltes solucions possibles que s'haurien de basar en la proposta d'un personatge, la posició social del qual sigui coherent amb el valor estimat del tresor i el fet d'enterrar-lo al mig del pati de la casa —lloc on es va descobrir—.

7. *La seqüència didàctica estimula la comunicació del resultats o les conclusions de la indagació?*

Sí. En primer lloc, el treball col·laboratiu en equips d'investigació —que és com s'organitzen els estudiants des d'un primer moment— ja estimula la comunicació entre els diferents membres ja que s'han d'organitzar, repartir les tasques, resoldre-les entre totes, etc. Després, hi ha diversos moments de la seqüència en què cada equip rep l'encàrrec de buscar una part d'informació de tota la que necessita tot el grup classe (per exemple, quan van a la biblioteca a buscar certa informació cada equip, o quan estudien cada un dels equips un sistema monetari). D'aquesta manera, cada equip haurà d'exposar la informació que ha trobat de forma clara i entenedora per compartir-la amb tots els companys que prendran nota i faran preguntes del que no entenguin perquè realment la necessiten per avançar. Finalment, en la darrera sessió, hauran d'exposar les seves hipòtesis finals per posar a prova davant dels companys els arguments que les sustenten.

Per tant, es pot afirmar que la seqüència didàctica té (en relació a l'escala «molt alt, alt, mitjà, baix») un molt alt potencial en relació al desenvolupament de la competència d'indagació.

Pel que fa a l'anàlisi de la potencialitat de la seqüència per al desenvolupament del pensament matemàtic creatiu, ens hem basat en les set categories definides en la Taula 4.2. Aquesta taula, pensada per una avaluació quantitativa, exposa una sèrie d'elements per cada una de les set categories que proposa com a descriptors del desenvolupament del pensament matemàtic creatiu (PMC) que són indicadors de diferents aspectes d'aquest PMC. Aquesta mateixa taula s'ha utilitzat per trobar evidències en la implementació. L'avaluació quantitativa, que suposa la participació d'avaluadors externs, només s'ha realitzat amb la darrera seqüència didàctica que es presenta en aquest treball al

Capítol 9. En el cas de l'anàlisi de la potencialitat de la seqüència per promoure aquest desenvolupament, és a dir, abans de la implementació, com en el cas de l'anàlisi *a priori* de la CI, és una anàlisi senzilla però que permet identificar els elements de cada una de les categories del PMC que són presents a la seqüència didàctica.

Així doncs, per realitzar aquesta anàlisi, s'han identificat els elements presents de PMC de les següents categories:

1. Obertura, Versatilitat i Generalització

- a.* La seqüència didàctica inclou problemes o qüestions matemàtiques obertes.
- b.* La seqüència didàctica inclou construccions que estimulen el pensament matemàtic.
- c.* La seqüència didàctica estimula a l'alumnat a buscar múltiples solucions
- d.* La seqüència didàctica promou que l'alumnat busqui i usi múltiples estratègies per a resoldre el problema.
- e.* La seqüència didàctica fomenta la generalització de fenòmens reals usant les matemàtiques, anant del concret cap al general.

D'aquesta categoria hi trobem present els elements *a*, *c*, *d* i *e*. Són elements que també formen part de la categorització referent a la competència d'indagació, tal i com s'ha explicat en l'anterior anàlisi. Respecte l'element *b*, «la seqüència didàctica inclou construccions que estimulen el pensament matemàtic», podria estar present, per exemple, quan s'estimula a l'alumnat a estudiar diferents sistemes monetaris i descobrir-ne la seva estructura, així com, quan l'alumnat ha de realitzar una estimació sobre el valor del tresor.

2. Problematització

- a.* La seqüència didàctica inclou problemes concebuts, ideats i formulats pel l'alumnat.
- b.* La seqüència didàctica promou que l'alumnat generi noves i originals preguntes per ampliar la investigació del problema inicial (*problem posing tasks*).

El primer element de la categoria específica que els problemes siguin ideats i formulats pels alumnes. En el cas de la present seqüència didàctica, tant la situació problemàtica com la pregunta en si —*qui podia haver estat el propietari del tresor romà?*— es presenta i formulada per la mestra. Tanmateix, s'estimula a l'alumnat perquè es facin preguntes que els ajudin a avançar en la indagació. Així doncs, es podria concloure que només l'element *b* hi és present.

3. Connexions

- a. La seqüència didàctica ofereix a l'alumnat oportunitats per establir connexions entre diferents àrees de coneixements i les matemàtiques (connexions interdisciplinàries, connexions extra-matemàtiques).*
- b. La seqüència didàctica ofereix a l'alumnat oportunitats per establir connexions entre diferents camps o conceptes matemàtics (connexions intra-matemàtiques).*
- c. La seqüència didàctica ofereix a l'alumnat oportunitats per establir connexions entre diferents representacions d'un mateix concepte matemàtic.*

El punt fort de la seqüència didàctica és l'element *a* ja que parteix d'una situació problemàtica de solució oberta, tan pel que fa a la les estratègies de resolució com a la resposta en si. Aquest fet implica abordar el problema d'una forma holística que sobrepassa les limitacions de les assignatures acadèmiques i, per tant, haver de connectar diferents sabers per trobar respostes parcials fins arribar a poder argumentar una hipòtesi prou sostenible. Respecte a l'element *b*, per exemple, un dels objectius d'ensenyament-aprenentatge de la seqüència és que l'alumnat compregui el concepte de sistema de numeració a partir de l'ús de diferents sistemes monetaris, connectant les diferents idees que hi resulten implicades. L'element *c* no es pot afirmar que hi sigui present en la proposta de seqüència de tasques.

4. Conjecturació i Exploració

- a. La seqüència didàctica fomenta l'activitat exploratòria i d'experimentació de l'alumnat.*
- b. La seqüència didàctica estimula els estudiants perquè formulin i contrastin les seves conjectures matemàtiques.*

Els dos elements són també propis de les característiques d'una seqüència didàctica que promogui la indagació, per tant, també hi són presents en aquesta seqüència, com es pot comprovar en l'anterior anàlisi.

5. Validació i Avaluació

- a. La seqüència didàctica fomenta que l'alumnat pensi, reflexioni, resumeixi i avaluï el treball matemàtic desenvolupat.*

De la mateixa manera, en aquest cas, aquest element també és comú al desenvolupament de la competència d'indagació i també es troba presenta en la seqüència didàctica en qüestió, com es pot comprovar en l'anterior anàlisi.

6. Aspectes emocionals

- a. La seqüència didàctica promou un important compromís generant la percepció que les matemàtiques són útils, tant en un context matemàtic com a la vida diària.*
- b. La seqüència didàctica promou un important compromís generant un sentiment de plaer, de diversió, de repte (narratives, característiques dels jocs, sentiments de fluïdesa/immersió en les activitats, etc.)*

- c. La seqüència didàctica promou compromís generant un sentiment de plaer estètic a partir del contacte amb conceptes matemàtics.*

La seqüència didàctica té els tres elements d'aquesta categoria. Per una banda, l'element *a* fa referència a la vinculació de les matemàtiques, el seu ús, a la vida quotidiana. La seqüència «Viure a Baetulo» parteix del context proper de l'alumnat, ja que es basa en un descobriment arqueològic de la mateixa ciutat on viuen els estudiants. Les matemàtiques són una eina que permet fer conjectures i hipòtesis amb més precisió que les que es podrien fer només tenint en compte aspectes històrics i/o socials. Per altra banda, en relació a l'element *b*, es podria afirmar que el fet d'haver de descobrir el propietari d'un tresor antic amagat podria ser un bon ingredient per afirmar que aquest element també hi és present. Finalment, també el tercer element hi és present ja que s'ha tingut especial interès en crear uns papers de treball atractius, un blog amb un disseny acurat (amb dibuixos originals), programar visites als entorns museïtzats de Badalona, etc. tot plegat sempre relacionat amb l'ús de les matemàtiques per a tirar endavant la indagació.

7. Aspectes socials

- a. La seqüència didàctica estimula la col·laboració, cooperació i la interacció entre l'alumnat participant.*
b. La seqüència didàctica promou el desenvolupament de les habilitats comunicatives de l'alumnat.

La seqüència didàctica té presència dels dos elements d'aquesta categoria ja que l'alumnat treballa de forma cooperativa en equips d'investigació al llarg de tota la seqüència de tasques. Aquesta forma de treballar implica haver de comunicar-se, en primer lloc, entre els mateixos membres de l'equip per organitzar-se, discutir, treure conclusions, etc. i, en segon lloc, entre els membres dels diferents equips per compartir informacions i comunicar les conclusions a la comunitat d'investigació interessada.

Per tant, es pot afirmar que la seqüència didàctica té (en relació a l'escala «molt alt, alt, mitjà, baix») un alt potencial en relació al desenvolupament del Pensament Matemàtic Creatiu.

6.4. Anàlisi del desenvolupament de la competència d'indagació (CI) i del pensament matemàtic creatiu (PMC) amb la implementació de la seqüència didàctica

La nostra primera intenció era dur a terme l'estudi amb estudiants de 6è curs de Primària, perquè ens interessa estudiar l'etapa transitòria entre les dues

etapes, el pas de Primària cap a Secundària. Malgrat tot, al parlar amb el professor de Socials del Cicle Superior, vam veure que el context de la seqüència didàctica dissenyada —el procés de romanització i la fundació de *Baetulo* (Badalona) i la vida quotidiana dels seus habitants entre el segle I AEC i el segle IV EC— no s'ajustava a la programació del centre per als cursos de 6è, ja que la romanització en aquesta escola es treballa en el curs de 5è. Per aquesta raó i per la dificultat de trobar una altra escola amb el temps que es disposava per a realitzar el treball es va decidir dur a terme les activitats amb alumnes del curs de cinquè. En el darrer trimestre del curs 2010-2011, just quan vam fer la nostra intervenció, els alumnes de cinquè havien estudiat l'edat antiga, una introducció al naixement dels grans imperis: unes pinzellades de fenicis, grecs, ibers i, finalment els romans i la romanització. Aquest darrer tema s'havia treballat una mica més a fons, aprofundint sobre tot amb la vida quotidiana de la societat romana i la seva organització social. En primer lloc, s'havia treballat la romanització de la Península Ibèrica, en general, i després més concretament del territori i les ciutats pertanyents a la l'actual Catalunya. Per tant, la nostra intervenció va significar per als alumnes una ampliació «natural» dels continguts de l'àrea de Coneixement del medi social i, en aquest sentit, va quedar perfectament integrada en la programació de l'aula.

En relació a l'àrea matemàtica, en el primer trimestre el grup de cinquè havia repassat els números del sistema de numeració decimal fins a la unitat de milió, fent èmfasi en el fet que cada ordre està format per deu unitats de l'ordre anterior. Havien realitzat activitats de descomposició de quantitats en ordres diferents, en la suma de sumands expressats en ordres diferents i la identificació del dígit d'un ordre determinat, ordenació i comparació de números. Havien treballat el reconeixement de la centena de miler anterior i posterior a un nombre donat, la determinació de tres nombres dins d'un interval i el reconeixement del valor d'un punt de la recta numèrica i el caràcter posicional del sistema de numeració decimal amb alguns exemples de descomposició numèrica.

En el primer trimestre també havien fet un repàs dels números romans. Sembla que la intenció educativa era que l'alumnat observés les diferències entre el sistema de numeració romà i el decimal però focalitzant en: la utilització de lletres en comptes de nombres, la posicionalitat del sistema decimal i la base i el desconeixement del zero per part dels romans. En cap cas es feia èmfasi en l'estructura i el concepte de «sistema». També es deixava palès el concepte de número romà com a un sistema per escriure especial, de

L'antiguitat, en inscripcions de monuments, edificis emblemàtics, rellotges, capítols de llibres, números dels segles, etc.). S'utilitzà el recurs del rellotge per aprendre l'equivalència dels símbols dels números romans amb els números àrabs. S'explicaven les regles d'escriptura d'aquests nombres, com si d'un joc es tractés.

Amb l'estudi dels nombres naturals i el sistema de numeració decimal, es repassen les operacions bàsiques: suma, resta, multiplicació i divisió amb les propietats bàsiques que faciliten el seu càlcul. També es revisen les propietats aritmètiques (commutativa, associativa, distributiva de la multiplicació respecte al producte) i les expressions aritmètiques i s'introdueix la descomposició de nombres en factors.

Es comença a treballar amb fraccions, enteses com a nombres lligats a la mesura, amb suport gràfic tant discret (col·leccions) com continu (figures, línies). Es revisen els seus termes (numerador, denominador), els diferents significats (fracció d'una unitat, fracció d'una quantitat), el nombre mixt, les fraccions més grans i més petites que la unitat, les fraccions equivalents, etc. Tot i que van començar a fer operacions amb fraccions (suma i resta) de mateix denominador i càlcul de percentatges, es va insistir més en el concepte de fracció.

Entrant al segon trimestre, a partir de les fraccions com a quocient, fent la divisió, es van introduir els nombres decimals. Així doncs, es presenten com a continuació del sistema de numeració i relacionats amb les fraccions que els generen i amb el sistema mètric decimal i algun exemple amb euros. S'ha treballat la descomposició en els diferents ordres decimals (D, U, d, c i m), establint-ne les equivalències i l'arrodoniment a les unitats.

A continuació, van estudiar la suma i la resta de nombres decimals, la multiplicació de nombres decimals per nombres naturals, la multiplicació de dos nombres decimals, la divisió de nombres naturals amb quocient decimal, la divisió d'un nombre decimal entre un nombre decimal, el càlcul aproximat amb nombres decimals i les estimacions amb l'ajuda de la calculadora. El trimestre va finalitzar amb les unitats de temps, de capacitat i la mesura dels graus dels angles i l'entrada en la geometria plana. El tercer trimestre va continuar amb l'estudi de les unitats de longitud, de superfície i de pes al costat de la geometria a l'espai.

L'alumnat estava començant el tema d'estadística i probabilitat quan van fer la implementació d'aquesta seqüència didàctica. El mestre de Coneixement del medi Social va ser qui va dur a terme gran part de la seqüència didàctica junt amb la mestra de matemàtiques i la nostra col·laboració.

6.4.1. L'escola on es va realitzar la implementació

L'escola on es va dur a terme la implementació d'aquesta seqüència didàctica, el CEIP Salvador Espriu, és una escola pública de dues línies situada a Badalona, en un barri tranquil, no gaire lluny del centre de la ciutat.

Badalona és, amb aproximadament uns 225.000 habitants, la tercera ciutat de Catalunya darrera Barcelona i L'Hospitalet. La major part de la població activa de la ciutat i del barri treballa, quasi en parts iguals, als sectors secundari i terciari, essent les activitats primàries purament residuals. Econòmicament, la majoria de les famílies que tenen infants a l'escola es poden situar dins la classe mitjana —almenys abans que aquesta crisi afectés severament la seva economia—, essent majoria els treballadors per compte d'atrí i assalariats del sector serveis o industrial, encara que hi ha un grup de gent en límits de subsistència molt justos. Malgrat això, en general, es pot afirmar que tots els veïns fa temps que són al barri i hi estan integrats.

El curs en què es va realitzar la implementació de la seqüència didàctica va ser el corresponent als anys 2011-2012 i l'escola tenia 448 alumnes matriculats repartits en els diferents cicles d'Educació Infantil i Primària. D'aquest alumnat, només 5 eren nouvinguts —és a dir, infants que fa menys de 2 anys que són a Catalunya— i tots eren de l'etapa de Primària.

Es tracta d'un centre escolar dependent del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, que es va formar el més de novembre de 1988 amb la unió de dos centres docents preexistents, el C.P. Àngelus, i el C.P. Ricard Coll. El CEIP Salvador Espriu és considera, doncs, doble hereu d'una llarga tradició pedagògica, que es remunta fins 1963. S'ubica en un edifici singular, construït per l'arquitecte Alfons Soldevila i Barbosa, que ha rebut diversos premis.



Figura 6.13: Captura de pantalla de la web de l'escola Salvador Espriu

L'escola Salvador Espriu és una escola capdavantera en projectes amb ús de les TAC i es pot trobar a la xarxa³ amb una web (Figura 6.13) on es mostra gran part de la seva activitat, actualitzada freqüentment i s'utilitza com un medi més per a fer arribar la informació i les imatges de les activitats a les famílies i als mateixos infants. És a dir, es tracta d'una web molt completa i oberta a l'exterior, que recull molta informació de l'escola i dels projectes on participa o n'és impulsora, així com recursos que les persones docents utilitzen a classe o que ha confeccionat el mateix alumnat i poden ser utilitzats per altres escoles. També s'hi troben enllaços a blogs del professorat i de l'alumnat, a recursos externs a l'escola, enllaços amb altres webs d'escoles amigues, etc.

6.4.2. Descripció del grup d'alumnat participant

Dins d'aquest context escolar, la implementació es va dur a terme amb els alumnes del grup A de 5è de Primària. Com ja s'ha dit anteriorment, es tracta d'una escola de doble línia i hi ha dos grups de cada curs però la

³ Web oficial de l'escola Salvador Espriu: <http://www.xtec.cat/ceip-espriu-bdn/>
 Blog oficial: <http://espriubadalona.wordpress.com/>

implementació, malgrat es va dur a terme en els dos grups, només es va fer l'avaluació del desenvolupament de la competència en indagació en un dels grups per una qüestió de limitació de recursos.

Ens centrarem a descriure el grup de 5è A, amb qui vam treballar i de qui vam recollir i analitzar evidències del desenvolupament de la competència en indagació.

El grup de 5è A, doncs, estava format per 23 alumnes, 17 dels quals són nens i 6 són nenes. És a dir, un 74 % de la classe són nens, en front d'un 26% de nenes. La majoria tenen entre 10 i 11 anys, encara que hi ha un nen i una nena repetidors i un nen talentós a qui s'ha avançat un curs.

Es pot dir que és un grup xerraire però amb capacitat de treball i acostumats a treballar amb projectes. Tanmateix, tenen poca autonomia i demanen necessiten constant guiatge per les tasques que han d'anar realitzant.

Quant al nivell acadèmic, les mestres ens expliquen que hi ha un subgrup de 10 infants (3 nenes i 7 nens) que destaquen de la resta del grup. El nivell de lectura i de comprensió lectora, en general, és força correcte a tot el grup per al nivell de cinquè.

6.4.3. Desenvolupament de la competència d'indagació i del pensament matemàtic creatiu durant la Sessió 9

La implementació es va començar quan l'alumnat havia finalitzat les lliçons sobre Roma i la romanització del llibre de text que segueixen. Havíem parlat amb el mestre de socials i la mestra de matemàtiques per coordinar la nostra entrada en l'escenari.

Així doncs, la primera sessió de presentació de la seqüència didàctica a l'alumnat es va dur a terme per la investigadora per motivar a l'alumnat i donar realisme a la situació problemàtica. Després, les següents sessions van ser dutes a terme per el mestre de socials fins a la nostra entrada com a observadors participants en la sessió 9.

Com s'ha explicat en l'anterior apartat, la seqüència didàctica està composta de 11 sessions (la sessió 11 ja s'ha dit que és optativa i en aquest cas no es va dur a terme) en total. La durada mitjana de cada sessió —menys en el cas de les

sortides— és d'unes 3 hores. Els estudiants van treballar la major part del temps de forma cooperativa en equips d'investigació que es van mantenir al llarg de tota la seqüència didàctica. Tanmateix, hi va haver certs moments de reflexió i discussió que es realitzaren en forma de gran grup, amb tot el grup-classe.

Les sessions 1 a 8 es van dur a terme segons el previst en la descripció de les sessions de la seqüència didàctica, en l'apartat anterior.

Després de les presentacions, vam entrar a l'escenari com a persones col·laboradores de les mestres que estaven duent a terme la seqüència didàctica.

Recordem que en la sessió 9 l'alumnat va reprendre l'informe arqueològic per a focalitzar-se en l'estudi de la composició del tresor. Mitjançant la posada en comú amb tot el grup classe, van arribar a la conclusió que no coneixien prou el funcionament dels sistemes monetaris i encara menys el romà. La mestra proposà la realització d'un mural que evidenciés el funcionament de diversos sistemes monetaris —el romà, la pesseta, l'euro, la lliura i el dòlar— i les relacions entre les seves monedes. Posteriorment, també en aquesta sessió, cada equip va fer la presentació del seu mural a la resta de companys i companyes de classe, explicant les relacions entre monedes que havien descobert. Un debat guiat per la mestra, per assegurar que els coneixements en relació als diferents sistemes monetaris eren compartits per tots els estudiants, va permetre evidenciar algunes de les connexions existents amb el sistema decimal. Com a darrera activitat d'aquesta sessió hi va haver el que es va anomenar com «supermercat romà», una sèrie de problemes on calia dominar el funcionament del sistema monetari romà per a resoldre'ls.

Amb l'objectiu de poder descriure l'anàlisi de la sessió, es divideix en diferents «moments»:

Moment 1 (M1): Es refereix a la primera part de la sessió quan hi va haver el repartiment dels diferents tipus de sistemes monetaris i el material per a la realització dels murals a cada un dels equips d'investigació, que eren de 5 alumnes cada un.

Moment 2 (M2): Quant els diferents equips es traslladaren a la sala d'ordinadors per poder connectar-se a Internet i consultar, a través del blog de la seqüència

didàctica, els diferents enllaços recomanats per trobar informació sobre el sistema monetari que havien d'estudiar.

Moment 3 (M3): Fa referència a la següent part de la sessió, quan cada equip amb la informació que li va semblar necessària i el material que se li havia lliurat van posar-se mans a l'obra en la realització del seu mural, on es van col·locar totes les monedes del seu sistema monetari, evidenciant les relacions entre elles.

Moment 4 (M4): Tornada a l'aula amb els murals confeccionats i presentació davant del grup-classe. És el moment quan es realitzaren les explicacions, comentaris i comparacions entre sistemes monetaris i el sistema decimal.

Moment 5 (M5): Visionat del Power point confeccionat per la investigadora (es pot visionar al blog de la seqüència didàctica) i posada en comú amb debat.

Moment 6 (M6): Activitat de resolució de problemes de compra i venda en moneda romana.

Moment 7 (M7): Posada en comú de les diferents resolucions dels problemes.

En els annexos corresponents a aquest capítol es poden consultar les anàlisis dels murals, els fulls de treball dels infants i la taula amb les evidències categoritzades segons les taules de caracterització de la competència en indagació i de desenvolupament de pensament matemàtic creatiu.

En els apartats següents d'anàlisi s'hi han inclòs, per a cada moment, una graella amb una síntesi del buidatge de les evidències categoritzades. Tenint en compte que l'estudi que s'ha dut a terme no és de naturalesa quantitativa, la funció que se'ls pretén no és quantificar-les. Els hi hem donat una funció visual explicativa i per aquesta raó les evidències no s'hi han comptabilitzat en forma numèrica sinó amb un símbol, perquè doni idea, amb un cop d'ull, de quines categories són de les que es disposa de més evidències i de quines de menys. El significat de les categories i dels indicadors es pot consultar al Capítol 4, on es descriuen els instruments emprats per fer l'anàlisi. L'anàlisi completa de les evidències es pot consultar a l'annex d'aquest capítol.

A continuació, la descripció de l'anàlisi dels moments citats.

a) Moment 1 (M1): Primeres conjetures sobre els habitants de la Casa dels Dofins.

En la sessió 8, just abans de la nostra entrada a l'escenari, l'alumnat havia estudiat i posat en comú la informació sobre com era la vida quotidiana dels romans en una *domus* i quin paper hi tenia cadascun dels seus habitants i com es relacionaven entre si. Aquesta informació els havia ajudat a explicitar les primeres conjetures sobre qui podien ser els habitants de la Casa dels Dofins. Anomenem aquest treball com a «Moment 1». Es caracteritzà per ser un moment provocador del treball de recerca, procurant que tingués un sentit problematitzador.

Taula 6.2: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 1»

Evidències MOMENT 1				
Competència d'indagació			Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S	
1				1
2	**			2
3	**	*		3
4	**			*****
5	**	*		5
6				6
7				**

La pregunta formulada promovia la construcció d'hipòtesis i conjetures. Així doncs, en general, com es pot observar a la Taula 6.2, van aparèixer elements de pensament matemàtic creatiu relacionats amb la categoria de *Conjecturació i Exploració* i també amb la categoria *Aspectes socials*, ja que l'alumnat cooperava i interactuava per conformar els arguments de les primeres hipòtesis sobre qui podria ser l'habitant o el propietari de la Casa dels Dofins.

En relació a la competència d'indagació, com es pot observar a la Taula 6.2, vam obtenir evidències de 4 de les categories —2. *Manté una actitud de dubte*; 3. *Fa prediccions, conjetures i/o hipòtesis*; 4. *Planifica, condueix i regula les accions per desenvolupar una indagació*; 5. *Classifica, escull, elabora i interpreta les dades*— generalment de nivell bàsic. Tanmateix, un dels grups —el grup B— va

mostrar amb les seves conjetures un nivell més desenvolupat, podríem dir-ne intermedi.

És interessant destacar que les argumentacions d'aquestes primeres conjetures foren bastant diferents per cada grup. Així doncs, el grup A va utilitzar criteris d'estatus social, sense pensar que viure en un lloc no vol dir necessàriament ser-ne propietari (veure Figura 6.14):

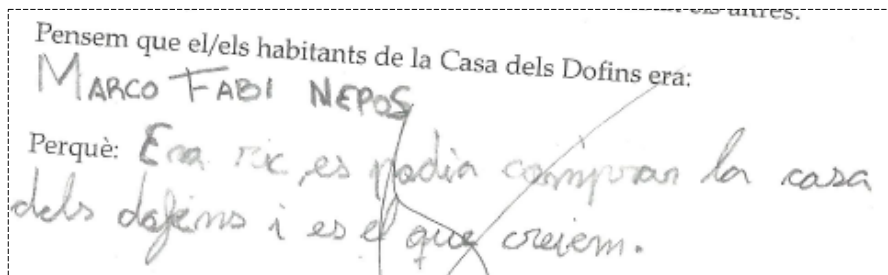


Figura 6.14: Extracte del full de treball del grup A, corresponent a la tasca de la sessió 8

El grup B (Figura 6.15), mostrant un nivell de desenvolupament considerable de la competència, almenys pel que fa a formular conjetures, utilitzà justificacions per assaig i prova, descartant personatges, jugant amb les informacions de la presentació dels personatges i les apreses amb la visita de la *domus* i en les altres sessions:

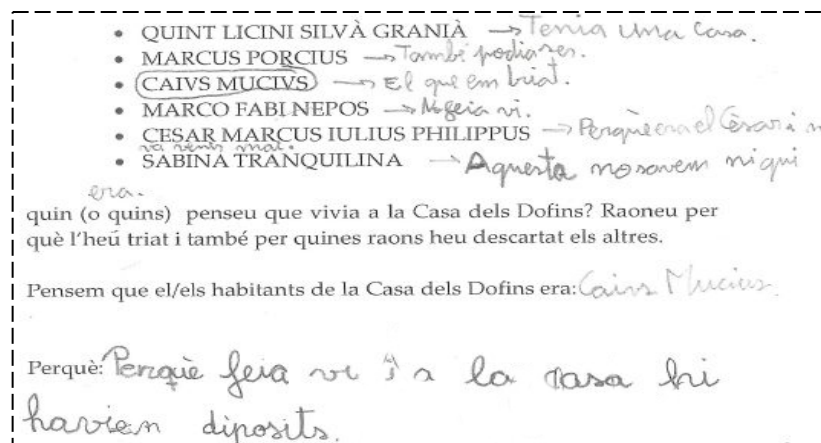
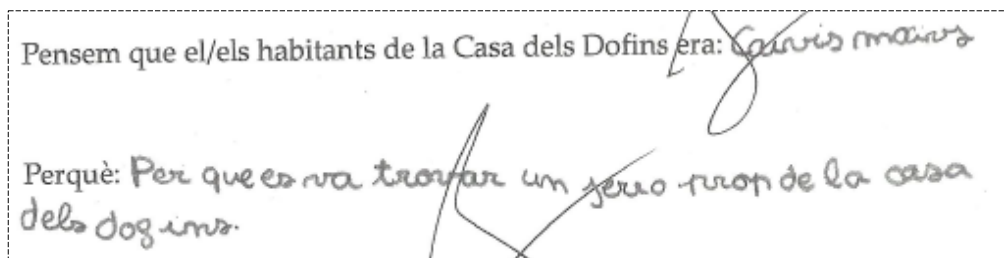


Figura 6.15: Extracte del full de treball del grup B, corresponent a la tasca de la sessió 8

La resta de grups s'emmarquen entre una i altra posició ja que van fer argumentacions basades en criteris circumstancials. La discussió posterior va permetre identificar la necessitat de què els arguments haguessin de tenir criteris de validació objectius a partir de les dades. Ens trobàvem amb justificacions aparentment acceptables, però que guanyen valor si s'incorporen elements de contrast. No es pot dir que no tingui raó el grup A, però el grup B

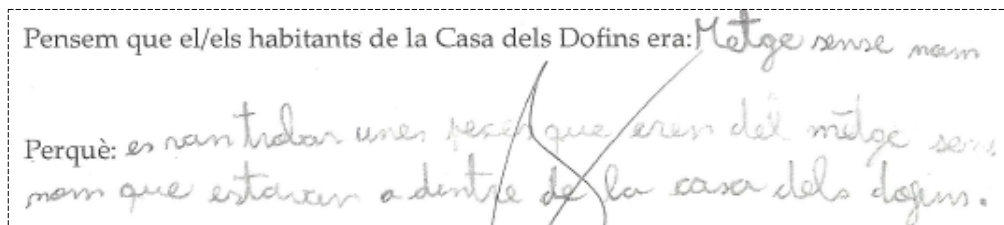
tenia un argument més «sòlid» perquè almenys no entrava en contradicció amb les informacions donades.

En algun cas, com el grup C (Figura 6.16) o el grup D (Figura 6.17), es donaven arguments circumstancials (*es va trobar un gerro...; es van trobar unes peces...*) basats en una de les dades, sense contrastar les altres.



Pensem que el/els habitants de la Casa dels Dofins era: *Garbis marins*
Perquè: *Per que es va trobar un gerro rrop de la casa dels dofins.*

Figura 6.16: Extracte del full de treball del grup C, corresponent a la tasca de la sessió 8



Pensem que el/els habitants de la Casa dels Dofins era: *Metge sense man*
Perquè: *es van trobar unes peces que eren del metge sense man que estan a dintre de la casa dels dofins.*

Figura 6.17: Extracte del full de treball del grup D, corresponent a la tasca de la sessió 8

La realització d'aquestes tasques oferí evidències de la producció per part de l'alumnat de conjetures i d'argumentacions de tipus diversos que es trobaven en un primer nivell de competència investigadora, de tipus bàsic (B).

Després d'aquesta sessió vam entrar a l'escenari com a observadors participants —col·laborant amb el mestre de social i la mestra de matemàtiques— per a la implementació de la resta de sessions: la sessió 9 on s'aprofundeix en els sistemes monetaris, el sistema numèric i el treball amb fraccions; la sessió 10 que se centra en la estimació del valor del tresor; i la sessió 12 on els estudiants extrauen les conclusions finals sobre la seva investigació en relació a com de valuós era el tresor i a qui podia haver pertangut.

b) Moment 2 (M2): En situació per buscar informació

En el moment M2 no es desenvolupen conjetures perquè l'alumnat respon a les demandes que es fan en busca d'informació, és un moment on l'alumnat començà per organitzar-se per poder realitzar la recerca i les consultes en les fonts d'informació. En coherència amb l'activitat que es desenvolupa en aquest moment, si observem la Taula 6.3, podem afirmar que l'activitat d'indagació es concentra en la classificació, tria, elaboració i interpretació (categoria 5) de les dades que l'alumnat gestiona per informar-se sobre els diferents sistemes monetaris. També s'obtingueren evidències de la categoria 2, que fa referència a mantenir una actitud de dubte que motiva a seguir investigant.

Taula 6.3: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 2»

Evidències MOMENT 2						
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu		
	B	J	S			
1				***		1
2		**				2
3				*****		3
4				****		4
5	***** *	****		***		5
6				**		6
7				*		7

Observem, doncs, en tots els grups accions relacionades amb la gestió de la informació (categoria 5 de la CI), en alguns aspectes considerades de nivell intermedi, fent constatacions sobre el sistema monetari en base a informacions noves que no tenien (5J2). El grup A (amb el sistema monetari del dòlar) no sabien que hi hagués una moneda anomenada quarter i constaten que equival a 25 centaus (2J2). Com que els havíem proporcionat monedes impreses i plastificades, el grup A, al cercar informació a internet van poder constatar que per error ens havíem descuidat de donar-los la moneda de 25 centaus (5J1). Aquesta mateixa situació ofereix evidències del desenvolupament del pensament matemàtic creatiu quan l'alumnat estableix connexions entre diferents coneixements (3a) i la tasca que han de realitzar requereix que reflexionin sobre el seu treball (5a):

Alumne A1: — Falta el de 25...sí, perquè posava que de 25 n'hi havia...

Al. A2: —Anem a comprovar-ho,... encara està oberta la pàgina..., sí, mira, es diu quarter...

Es troben en una situació semblant en el grup E (sistema monetari de les pessetes) quan, cercant regularitats del sistema monetari, s'adonen que en el sistema que estan estudiant no existeix la moneda de 20 pessetes (5B3, 5J1; 3a), així com, emergeixen els aspectes socials de col·laboració entre els diferents membres del grup per fer la tasca que promou el PMC (7a):

Al. E1: —Aquí...la de 25...i la de 20?

Al. E2: —La de 20 pesetas no existeix!

Al. E1: —...existeix o no?

Al. E2 i E3: —No! [dos nens a l'hora]

Al. E2: —Y la de 25 está sola...a ver...

Davant de les dificultats del grup A (sistema monetari dels dòlars) per entendre la relació entre els centaus i el dòlar, monedes que desconeixen, s'opta encertadament per fer analogies amb el sistema mètric, que és un sistema que coneixen molt bé (5B4). Aquesta és una evidència de promoció del PMC ja que estableixen connexions entre diferents camps de la matemàtica (3b):

Al. A1: —Com es fa per passar aquí? [dos nens, referint-se a connectar el centau amb el dòlar]

I1: —Heu estudiat els centímetres? [els investigadors]

Al. A1, A2 i A3: —Sí

I2: —Quants centímetres té un metre? [els investigadors]

Al. A1: —..ah...doncs...100

I1: —Doncs és el mateix, quants centaus tindrà un dòlar? [els investigadors]

Al. A1, A2, A3: —100

Els nens del grup E (pessetes) s'adonen que els números que es feien servir eren més grans i parlaven dels preus de coses cares en milions. Finalment, al veure els bitllets del sistema de les pessetes amb imports tan alts reflexionen, comparant amb el euro (5B4). Pel que fa al PMC, podria suposar una evidència de certs aspectes emocionals (6a) ja que aquest tipus de treball connecta amb els seus coneixements quotidians i també els fa reflexionar-hi (5a):

Al. E1: —És que ara tenir un bitllet de 500 o 200 euros és molt raro...

Al. E2: —Clar, perquè són molts diners...i si el perds!

Els canvis de registre s'associen a necessitats de l'alumnat, vinculats al desconeixement. Es tracta d'una situació d'aplicació de la creativitat lligada a l'ús de llenguatges quan sorgeix la necessitat de canviar de registre, del gràfic a l'escrit, a l'investigar sobre el sistema romà. Aquestes monedes no duen gravat el valor i l'alumnat necessita la informació escrita per identificar-les. El grup B no dubta en aquesta situació de fer aquest necessari canvi de registre cercant prèviament la informació necessària (3c):

Al. B1: —Ara hi escriurem els noms aquí, eh!

Naturalment, en un moment que es busca informació es donen poques oportunitats de situacions de nivell intermedi, que suposen menys dependència de l'alumnat respecte a l'enunciat i més iniciativa personal o de grup. Aquest tipus d'accions es relacionen molt amb les cerques dels grups que busquen sistemes «menys coneguts» o sistemes que els són de tot desconeguts. Per exemple, el grup D necessita constatar el nom d'algunes monedes en el cas de les lliures. Als components del grup D els sorprèn el nom de *pound* i *penny*, que no es corresponen amb els noms catalans de lliure i penic.

Algunes d'aquestes accions estan associades també a reflexions en qüestions que sorgeixen quan es comparen aquests sistemes monetaris menys coneguts per ells respecte l'euro. Per exemple el grup E, que analitza les pessetes, fa molts comentaris respecte als avis que parlaven d'aquestes monedes i sobre com eren els preus. Reflexionen sobre equivalències entre euros, la moneda actual, i pessetes, la moneda dels seus pares i dels seus avis, passant així de formular a emprar el coneixement matemàtic i a fer-ne tímides interpretacions (5B4). Respecte el PMC, destaquem els aspectes emocionals (6a) i el fet que la situació permet que s'iniciï reflexió connectada amb els coneixements de la vida diària (3a, 5a):

Al. E1: —Jo sé que un milió de pessetes són 6 mil euros

Al. E3: —Sí, mil pessetes són 6 euros,...què poquet! Ara és més car...

Hi ha força explicitacions de realització de connexions (aspecte compartit tant pel que fa a la CI com al PMC) que sorgeixen en situacions on l'alumnat pot connectar els seus coneixements amb la informació que està gestionant. Per exemple, en tots els grups apareix de manera natural parlar de la idea de múltiple i submúltiple per separar les dues categories de monedes —bitllets i monedes—(5J2, 5B3, 5B4; 3b, 3a). Per altra banda, no els sorprèn al grup A

que les monedes americanes s'anomenin centaús perquè ja n'han sentit a parlar (5B3).

També el grup D (sistema anglès), que és més nombrós i s'ha de dividir la feina, decideix fer un subgrup que busqui informació sobre les monedes — bitllets— més gran que la lliura i un altre subgrup per busqui sobre les monedes menors que la lliura. En aquest moment s'adonen que les més petites sempre són monedes metàl·liques i que les més grans sempre són bitllets (5B4).

Se'n pot observar un altre exemple semblant quan els components del grup A (dòlars) organitzen les monedes sobre el mural. Primer han posat els bitllets però quan veuen que les monedes valen menys decideixen posar primer les monedes i després els bitllets. Cerquen una certa simetria per poder establir després les possibles relacions:

Al. A4: —No, pero este aquí no que no encaja con el 100

Els components del grup B que cerquen informació sobre el sistema romà, un sistema totalment desconegut per a ells, parlen dels noms de les monedes que d'entrada els semblen molt estranys i «antics». Però en un moment donat se n'adonen que hi ha alguna semblança amb la relació multiplicativa que s'estableix amb el as, informació que estan utilitzant:

Al. B1: —Aquest el multiplicarem per quatre

Al. B3: —I té a veure amb el nom?

Al. B1: —A veure...aquest és el quadrant, sí, sona a quatre...i aquest també, el trient, per tres i sona a tres!

Com dèiem al començament, aquest és un moment amb no gaire evidències de competència investigadora ja que els alumnes inicien la cerca d'informació seguint les pautes indicades per la mestra. De tota manera, hem considerat que, lligades a algunes d'aquestes evidències de pensament matemàtic creatiu que s'ha anat comentant, els infants mostren capacitat crítica quan reconeixen certes connexions d'informacions i les saben explicitar.

c) Moment 3 (M3): Fent el mural.

En el moment M3 l'alumnat es disposa a gestionar i utilitzar la informació recollida per esbrinar relacions matemàtiques entre les diferents monedes de

cada sistema monetari i deixar-les paleses en un mural. És un moment en què, com es pot veure a la Taula 6.4, augmenten les evidències de la competència d'indagació de nivell bàsic. Sobretot es troben evidències de la categoria 5, en relació a la reflexió sobre la informació, per trobar regularitats i realitzar connexions; la categoria 4 i 2, relacionades amb l'actitud de l'alumnat per seguir endavant amb la indagació.

En relació al pensament matemàtic creatiu, és un moment amb quantitat d'evidències de la categoria 1, referents a l'estimulació del pensament matemàtic i a la mobilització de diferents estratègies per a resoldre la tasca. També de la categoria 3 —molt relacionada amb la competència d'indagació, referent a la realització de connexions entre informacions. Així com, les categories 4 i 5 ja que la tasca fomenta l'activitat exploratòria de l'alumnat, que va haver de pensar, reflexionar, etc. sobre el treball que anaven realitzant.

Taula 6.4: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 3»

Evidències MOMENT 3					
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S		
1				***** ****	1
2	****				2
3	*			*****	3
4	*****			****	4
5	***** ***	*****		*****	5
6					6
7				***	7

En els primers minuts d'aquest episodi, quan els grups comencen a pensar com organitzar el mural, aforen alguns problemes de càlcul. Els investigadors ajuden als infants del grup A a pensar com establir algunes de les relacions perquè tenen problemes per descobrir per quin número s'ha de multiplicar la moneda de 25 centaus —el *quarter*— perquè doni el bitllet de 2 dòlars, ja que els infants l'han situada a la fila de sobre d'aquest bitllet (2B1, 2B2; 1b, 1d, 4a, 5a):

Al. A4: —S'ha de multiplicar per 5!

Al. I2: —Per 5? Segur? Quant dóna 5 per 25? [els investigadors]

Al. A4: —Mmmmm....? 30!

I1: —Cinc vegades vint-i-cinc creus que pot donar 30? Té, un paper. Calcula-ho aquí a veure què et dóna, no cal que ho facis de cap [els investigadors]

Al. A4: —125!

I1: —Així creus que 25 per 5 donaria els 2 dòlars?

Al. A4: —No, no...

Al cap d'una estona encara hi ha un nen del mateix grup que es mostra dubtós amb els càlculs i, bàsicament les taules de multiplicar:

Al. A3: —Però... aquesta fletxa està malament...no és $\times 10$,...ha de ser $\times 5$, no?

I2: —Nooo...em pensava que ho havies entès...Mira 5 centaus per 10 són... 500 centaus, no? ...I 500 centaus és el mateix que tenir un bitllet de ...[els investigadors]

Al. A2 i A3: —5 dòlars!

I2: —Esclar! És com amb els centímetres que parlàvem abans...doncs, ara sí? S'ha de multiplicar el 5 per 10, ja està bé. [els investigadors]

De les possibles relacions entre les monedes d'un sistema monetari els infants es limiten a considerar exclusivament les relacions aritmètiques. El grup A cerca relacions aritmètiques —bàsicament multiplicatives— entre els dòlars, les monedes que estan estudiant. Els costa considerar altres interpretacions com, per exemple, la proporcionalitat respecte la unitat que podria facilitar el càlcul de la relació multiplicativa cercada. Per exemple, quan es reprèn la moneda de 25 centaus —anomenada *quarter*— i les seves relacions (5B4; 1b, 1d, 3b, 4a, 5a):

I1: — Així per quant hauríem de multiplicar al moneda de quarter per relacionar-la amb la d'un dòlar? [els investigadors]

Al. A1, A2, A3, A4,A5: —...

I1: —Si un dòlar és la unitat (com el metre, que dèiem abans) i els 25 centaus són una quarta part...quarter... [els investigadors]

Al. A4: —Ah!...per 4

I1: —Molt bé! I així perquè doni el bitllet de 2 dòlars?

Al. A1, A2, A3, A4,A5: —...

I1: —Sí...sí aquí per 1 dòlar és per 4, aquí que hi ha 2 dòlars serà per...

Al. A3, A4: —Per 8!

I, malgrat tot, la fletxa amb el “ $\times 4$ ” des del quarter al dòlar no la van posar al mural finalment.

Els infants s'esforcen a establir relacions entre tots els elements del sistema, encara que hi hagi alguna moneda que surti de la regularitat de l'estructura del sistema, com per exemple en el cas dels dòlars —amb la moneda de 25 centaus— o de la pesseta —amb la moneda de 25 pessetes— (5B2, 5B3, 5B4, 5J1; 1b). Tanmateix, escriuen o enganxen fletxes entre tots els elements de

cada una de les columnes però no ho fan de forma tant exhaustiva entre columnes, entre els elements de les fileres. En aquest cas es limiten a indicar-ho un sol cop a la part de d'alt. Aquest aspecte es torna a evidenciar en el moment següent, M4.

Tots els murals presenten les monedes ordenades amb una estructura que cerca la regularitat tant aritmètica, pel que fa a les relacions entre els elements del sistema, com geomètrica, pel que fa a la presentació (4B1, 4B2). Els alumnes del grup A han ordenat els dòlars en tres columnes: la dels “uns” (1 centau, 10 centaues, 1 dòlar, etc.), la dels “dos” i la dels “cinc”. La resta dels grups han fet una organització semblant dels elements del seu sistema. El grup que estudia el sistema romà, tot i que establir aquesta regularitat en la presentació era molt més difícil, també ho han intentat. Es poden veure les fotografies dels murals amb l'anàlisi complet en l'annex d'aquest capítol.

Les accions que impliquen una competència d'indagació d'un nivell superior al bàsic sorgeixen associades a la utilització d'instruments d'anàlisi i a la necessitat de ser creatiu per trobar solucions. S'observen diverses situacions on l'alumnat del grup B, encarregat del sistema romà, posa en funcionament accions característiques d'aquest nivell. Per exemple, observant el seu mural, es veu que han col·locat la moneda d'as en un lloc destacat —sola, al centre del mural— i que li arriben fletxes des de totes les altres monedes. Aquesta posició fa pensar que volen deixar palès que aquesta és una moneda principal i que té característiques generadores de tot el sistema, conceptualitzant així la idea de sistema numèric per al sistema monetari (5J1, 5J2, 5J3; 3b).

Un altre exemple el donen els alumnes d'aquest mateix grup quan estan començant a enganxar les monedes i se'n adonen que la que té més valor és la més petita. Llavors fan una reflexió sobre el perquè pot ser que sigui així usant arguments basats en una conjectura fruit de l'observació i la pròpia experiència (3B1; 5a) :

Al. B1: —Hem de multiplicar per 400, eil...on és l'auri?

Al. B2: —Aquí, és la més petita.

Al. B1: —I com és que si és tan petita val tant?

Al. B2: —Perquè deuria ser d'or,... o d'un material molt bo.

Els infants del grup A (dòlars) quan els hi sorgeixen problemes per saber per quin número s'ha de multiplicar la moneda de 10 centaues perquè doni la d'un dòlar recorren a un canvi de context amb el sistema mètric, que és un sistema

que sí que el coneixen bé i els ajuda a entendre la nova situació (2B1, 2B2; 3c):

I1: —Mira, 1 dòlar són 100 centaus, 100 d'aquests [assenyalant, els investigadors, la moneda d'un centau]

Al. A1, A2, A3, A4, A5: —...

I1: —És com si aquest fos 1 centímetre i aquest [assenyalant el dòlar] fos el metre

Al. A1, A3, A5: —Ah! Esclar, s'ha de multiplicar per 10!

De la mateixa manera que en el moment anterior, les situacions de nivell intermedi es poden observar en els grups que treballen amb sistemes menys coneguts. El grup B (monedes romanes) presenta un mural on totes les monedes presenten relacions multiplicatives amb l'as i entre les monedes. La informació sobre les relacions que es podien establir entre cada moneda i l'as la podien extreure de la consulta dels diversos recursos que se'ls van posar a l'abast però la resta de relacions escrites les van haver de pensar i raonar entre els components del grup (5J1, 5J2, 5J3; 1b, 3b). Aquest tipus d'experiències provoquen en els infants la necessitat d'explorar usant els recursos que tenen a l'abast i influeixen positivament en el nivell de la competència d'indagació, ja que permet que els infants siguin capaços d'evidenciar connexions que van més enllà de l'enunciat (5J2). Així doncs, es pot observar com concreten amb la confecció del mural el que els alumnes d'aquest grup han anat parlant en el moment anterior M2. A la part superior hi posen en fila les monedes més petites que l'as; l'as té la posició central; i a la part inferior les monedes més grans:

Al B1: —I amb els submúltiples el que farem és...mira, per exemple, aquí...la unça posarem "x 12" i ho relacionarem amb l'as i amb els múltiples, el mateix!

Tots els grups han utilitzat i inclòs en els murals els materials que se'ls va facilitar per confeccionar-los com imatges plastificades de les monedes i bitllets, fletxes retallables que evocaven diverses possibles relacions entre monedes (i d'altres en blanc). Això ens fa pensar que aquests materials han estat un bons mediadors per a l'activitat de l'alumnat tant d'indagació com d'estimulació de pensament matemàtic creatiu.

d) Moment 4 (M4): Presentacions dels murals.

En aquest moment l'alumnat exposa la seva feina i és un moment de reflexió i de posada en comú. Per tant, s'obtenen evidències de nivell bàsic i intermedi

de la categoria 7, tant de la competència d'indagació com de la de pensament matemàtic creatiu, ja que ambdues versen sobre habilitats relacionades amb la comunicació matemàtica, com es pot veure a la Taula 6.5. També s'obtenen evidències de nivell bàsic i intermedi d'interpretació de la informació, posterior a la gestió i elaboració realitzada, corresponents a la categoria 5 de la competència d'indagació i a la categoria 5 del pensament matemàtic creatiu.

Encara que hi ha algun grup —com el grup A (dòlars)— que en la seva exposició es limiten a llegir les relacions que han escrit al mural sense donar gaire explicacions, la majoria dels grups han triat un representant, o bé han organitzat torns, i han preparat un petit text oral per donar explicacions a la resta de la classe (7J1, 7J2; 7a, 7b).

Taula 6.5: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 4»

Evidències MOMENT 4					
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S		
1					1
2	**				2
3				****	3
4		*		*	4
5	**	**		*****	5
6					6
7	****	***** *		***** ***** **	7

El grup A va ser el primer en exposar el seu treball davant de la mestra i els companys de la classe, fet que potser va influir en les dificultats en començar a parlar sobre la feina que havien fet i a exposar els seus arguments sobre el mural, tot i que el mural que presentaven era entenedor i complet. Els tres nens del grup es mostraren segurs llegint el que mostrava el mural però no van explicar el pas dels 10 centaus al dòlar, que tant els va costat d'entendre, tot i que la mestra els ho preguntà. Hi havia dues alumnes encarregades d'aguantar el mural durant la presentació que quan tenen el torn de paraula no se'n surten ni tant sols llegint les relacions, sembla que no han entès gaire coses, tot i que han participat en la feina com els altres components. Tot plegat sembla indicar

que aquests nois i noies no estan gaire acostumats a presentar i comunicar en públic, i per al públic, treballs fruit de la seva pròpia investigació.

La majoria dels grups fan una exposició sintètica on es llegeixen les relacions escrites i establertes entre els diferents elements del sistema monetari estudiat, basades en el context numèric i assolint el nivell bàsic competencial quant a comunicació matemàtica (7B1, 7B2). Per exemple, l'exposició del grup C sobre l'euro és molt ràpida. Recau sobre un dels components del grup que fa referència a que és un sistema molt precís, creiem que vol dir que és d'estructura molt regular. Afegeix l'explicació que 100 cèntims equivalen a 1 euro:

Al C1: —Nosaltres hem fet l'euro i el seu sistema és molt precís. Hi ha cèntims [assenyala la franja de monedes de cèntims] 1 per 10, 10cèntims; 10 per 10, 100 cèntims i 100 cèntims són 1 euro [assenyala la moneda d'euro]

Amb l'observació d'aquesta exposició completa torna a sorgir una qüestió que ja s'ha comentat en l'apartat corresponent al moment anterior, M3, relatiu a la presentació de les relacions multiplicatives d'aquest mural —i del dels dòlars i el de les pessetes—. El nen que fa la presentació parla sobre les relacions entre monedes en vertical dins de les tres columnes però no diu res de les relacions entre les columnes, en horitzontal, fent referència a les fileres. No queda clar si entenen que totes i cada una de les monedes de cada columna si es multipliquen per 2 —o per cinc— donen la moneda del costat. Fa èmfasi només en què la primera moneda de la columna és la que es multiplica per donar la primera moneda de cada una de les altres dues columnes:

Al. C1: —Hem agafat el 1 per 2 i dóna 2 cèntims i...[amb la mà fa un gest rodant cap avall, volent dir que multiplicant per 10 es generen les altres monedes, com ja ha explicat abans]...També hem agafat el 1 i l'hem multiplicat per 5 i dóna 5 cèntims i... [el mateix gest]

El grup D fa la seva exposició sobre el mural de les lliures també sense problemes. Se li ha donat la responsabilitat a una de les nenes del grup, sembla que de forma consensuada, que comença explicant la planificació que han fet i després llegeix les relacions que han escrit (7J1; 7a, 7b). Malgrat tot, igual que els seus companys del grup A, no explica tampoc el pas de la moneda de 10 penics a la moneda d'una lliura.

Així doncs, en la exposició de treballs propis la comunicació matemàtica presenta bàsicament accions de nivell bàsic i intermedi. Sobretot, quan prèviament, en el desenvolupament del treball, hi ha hagut suficient accions

—amb elements competencials d'indagació i/o de pensament matemàtic creatiu— de nivell intermedi, llavors el discurs s'hi veu influenciat i, per tant, les habilitats comunicatives també. Trobem un primer exemple amb l'exposició del grup E (pessetes) duta a terme per un dels nens que dona força explicacions i que no es limita només a llegir el que hi ha escrit. Encara que no explica que la moneda de 25 no acaba d'encaixar en la regularitat de l'estructura del sistema, sí que es para per posar èmfasi en que hi manca una moneda que alguns sistemes sí que tenen (7J1, 7J2; 7a, 7b):

Al. E1: —Amb la de 2 pessetes, com que no hi ha la de 20, com en altres..., doncs la multipliquem directament per 100 [perquè doni la moneda de 200 pta]

Quan la mestra els pregunta sobre les fletxes de la part de baix del mural que tenen sentit contrari a totes les altres, el nen que fa l'exposició ho argumenta i mentre ho explica s'adona que s'ha equivocat de multiplicador i se'n fa responsable de l'errada (2B1, 2B2, 5J3, 7J2; 5d, 7a, 7b):

M: —I les fletxes aquestes d'aquí a baix com és que van al contrari de les altres?
[mestra]

Al. E1: —Perquè el 1000 és més gran que el 500 i com que no ens volíem fer un rotllo hem fet el 500 per 2

M: —I l'altra que diu x5? Per què l'heu multiplicat per 5?

Al. E1: —Per què el 10.000 era més gran que el 5.000 i l'hem multiplicat per...eh?!!
Alaa!

M: —Què us ha passat aquí?

Al. E1: —Me he equivocat!

M: —No. Us heu equivocat tots

Al. E1: —No! Jo.

M: —Ah, sí?

Al. E1: —Aquesta fletxa hauria de posar un 2

L'exposició del grup B (monedes romanes) prové d'un treball que ha provocat més accions de nivell interpretatiu per tractar-se, com afirmàvem anteriorment, d'un sistema monetari totalment desconegut per aquests alumnat. És una exposició que presenta evidències de nivell bàsic i intermedi, sobretot al començament quan es parla dels problemes sorgits per decidir com podien col·locar les monedes per poder establir les relacions (4J3; 3b, 7a, 7b), de la decisió de dibuixar fletxes a més d'utilitzar les retallables, i de la col·locació en si, amb els múltiples a la part inferior, els submúltiples a la part superior i l'as al centre (7J1, 7J2; 5d, 7a, 7b). Utilitzen els noms de les monedes romanes de forma familiar.

En aquesta presentació, a diferència de les altres, parlen per pròpia iniciativa tots els nens i durant l'exposició es mostren impacients per fer la seva

aportació a l'explicació, malgrat tot, es respecten el torn els uns als altres. Són els que més evidencien el resultat del treball cooperatiu (7a). Assolint un nivell clarament intermedi, un dels nens parlarà en l'exposició de les propietats generadores de la unça dins de la categoria de submúltiples (7J1, 7J2). De fet està parlant de la idea de «comú múltiple» encara que, com que no ho han estudiat a classe, no ho anomena pel seu nom:

Al. B1: —Com podeu veure la unça té relació amb tots els submúltiples: la unça per 6 fa un semis; la unça per 3 fa un quadrant;...

El context sociohistòric extramatemàtic promou el pensament matemàtic creatiu en qüestions rellevants que poden generar nous punts de vista que portin a descobrir nous patrons. La presentació d'aquest grup genera interès en tota la classe i el primer que sorgeix entre la resta dels alumnes, que tota l'estona comparen amb el sistema que més dominen —l'euro—, és la creença que «el que és antic és més complicat», pel sol fet de ser antic, i que «el que és nou és millor», pel sol fet de ser modern:

Al. B1: —Els altres sistemes com que són més moderns s'entenen millor, aquest [referint-se al romà] com que és antic costa més

Al. B2: —Els [referint-se als altres sistemes monetaris diferents del romà] sempre multipliquen les monedes només per un número, nosaltres [referint-se al romà] les multipliquem per més.

Creença que a continuació, amb un comentari d'un company que estava totalment d'acord amb les afirmacions anteriors, paradoxalment es contradiu quan diu:

Al. C1: —Aquí l'as és la moneda principal i és més fàcil amb els múltiples i els submúltiples. En l'euro no hi ha principal...però hi ha com fileres...Bueno...el 1, el 2, i el 5 sí que són principals però l'as és més principal.

Els infants reflexionen sobre quins són els números multiplicadors que han sortit més i sorgeixen amb algunes idees associades:

Al. C1: —Els romans multipliquen per 12, per 400, per 80, per 3...

Al. D3: —Els altres multipliquen per 2, per 5, per 10...

Al. C2: —Els d'ara són més fàcils de multiplicar, el 10 és molt important

Al. A1: —El nostre sistema es diu “sistema decimal”...

e) Moment 5 (M5): Visionat de la presentació-resum de la investigadora, recapitulació, reflexió conjunta i debat.

El moment M5 està dedicat a la recapitulació, amb tot el grup classe, de totes les idees sorgides en la sessió anterior amb l'ajuda i la introducció d'un element nou que és una presentació digital aportada pels investigadors sobre els diferents sistemes monetaris que provoca comparacions entre els sistemes i entre els murals realitzats i la nova informació.

En aquest moment es van poder recollir evidències, com es pot veure a la Taula 6.6, principalment referents a la categoria 5 de la competència d'indagació, sobre la interpretació de les dades i informació gestionada, que en alguns casos van ser de nivell superior.

Les evidències relatives al pensament matemàtic creatiu són, en canvi, en aquest moment de diverses categories. És el moment de reflexionar (categoria 5), fer connexions (categoria 3) i atrevir-se amb algunes conjetures (categoria 4), arribant a poder fer algunes generalitzacions a partir del treball concret realitzat (categoria 1).

Taula 6.6: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 5»

Evidències MOMENT 5					
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S		
1				**	1
2					2
3				*****	3
4				*****	4
5	***** *****	*	*	***	5
6					6
7					7

Les evidències de nivell més baix les recollim en l'inici de la sessió quan les reflexions són també més bàsiques i serveixen per fer memòria sobre el que es va treballar. Així l'alumnat considerarà les semblances entre sistemes monetaris però sense aprofundir, explicar, argumentar, ni concretar (5B3; 1c, 5a):

Al. B1: —Que totes es relacionen entre elles

- Al. C1: —Que tots tenen una moneda principal
Al. C2: —Que tots tenen bitllets..., no! res,...que no, que m'he equivocat, que les romanes no tenen bitllets
Al. B2: —La moneda romana no es divideix sempre amb els mateixos números, en 80, en 6,...
Al. D2: —Tots tenen bitllets menys la romana
Al. E1: —Que tenen noms diferents
Al. A2: —La pesseta tenia el valor del bitllet més gran de tots

La mestra aprofita per parlar del perquè el sistema romà no tenia bitllets però no se n'acaba traient cap argument definitiu:

- M: —I per què penseu que els romans no tenien bitllets?
Al. (tots): — [Tots a l'hora diuen coses]
Al. C1: —Perquè no s'havien descobert els bitllets,...el paper
M: —I com ho feien per escriure? [mestra]
Al. C1: —Sobre pedres, picant o també amb tinta...
Al. A1: —Jo vaig anar a la Magna Celebratio i allà hi havia un taller d'escriptura i allà es feia sobre cartró però jo crec que es deuria fer sobre...
Al. D1: —Sobre paper!

Amb la reflexió generada per la comparació dels diversos sistemes monetaris s'evidencia que l'alumnat és capaç de connectar informacions i fer generalitzacions aplicables a altres sistemes i, en concret, al numèric. A mesura que es va avançant en la sessió es van observant evidències de què els alumnes utilitzen els coneixements adquirits per fer connexions entre informacions i relacionant el sistema numèric amb els sistemes monetaris. Per exemple, al visionar la nostra presentació digital, en el sistema de les pessetes surt la moneda de 50 cèntims que l'alumnat no tenia a l'hora de fer el seu mural (5B4; 4a):

- M: —La moneda de 50 cèntims és més gran o més petita que la pesseta? [mestra]
Al. E1: —És més petita
M: —Així doncs, què hem de fer a la pesseta per tenir 50 cèntims?

Però l'alumnat no contesta perquè en els murals només s'han treballat relacions multiplicatives, en la direcció de més petit a més gran, però la mestra continua:

- M: —A veure...si és més petita...quantes monedes necessitem de 50 cèntims per tenir una pesseta?
Al. E1, A2, C2: —Dues monedes!...Hem de dividir per dos la pesseta! [alumnat]

Un altre exemple és quan l'alumnat, al visionar la presentació digital sobre el sistema romà es veu influenciat per el funcionament dels altres sistemes estudiats i connecten les dues interpretacions, la decimal amb la proporcional

ja que la mestra fa la pregunta parlant de «parts» i l'alumne el primer que contesta és en cèntims:

M: —Si el dividim per dos l'as...? Si en fem la meitat ens dóna...? [la mestra]

Al. E1: —Cinquanta...Un semis!

La mestra, seguint aquest fil, continua amb la interpretació que les monedes més petites que l'as són parts d'aquesta moneda, cosa que no havia sortit en els murals ja que s'havien tractat les relacions només en la direcció de més petit a més gran. Malgrat tot, no els fa notar en cap moment aquesta diferència entre el seu mural i la presentació per connectar-ho més ràpidament:

M: —Tornem a dividir per dos ...i tenim el quadrant. Fixeu-vos, si dividim per 2 l'as i dividim altre cop per 2, en fem una quarta part. (...) Ara el quadrant el dividim per 3 eh!... Primer l'as per 4 i després per 3, per què l'estem dividint? És el mateix que si el dividim de cop per...? [la mestra]

Al. (tots): —... [ningú respon]

M: —Per 12 [la mestra]. La unça era un dotzè, quantes unces hi ha en un as?

Al. (tots): —... [ningú respon]

M: —12, si és un dotzè vol dir que en l'as n'hi ha 12, que l'as és 12 vegades més petit[mestra]

Però, després es perd el fil d'aquesta interpretació i arriba un moment que es fa un tractament només aritmètic:

M: —Si l'as el dividim per 3 directament em sortirà un trient i si el semis el dividim per 3 em sortirà un sextant. I ara, a veure, què haurem de fer per passar directament d'un trient a un sextant?...[mestra]

Al. D3: —Dividir entre 2 [diu una nena]

M: —Molt bé. I per passar d'un sextant a una unça, què haurem de fer?

Al. C1, D3, D4, A2 : — Dividir entre 2 [diuen un quants nens i nenes]

M: —També dividir entre 2, molt bé. Per tant, per passar d'un trient a una unça, què haurem de fer?

Al. C1, D4, A5: —Dividir entre 4 [diuen un quants nens i nenes]

M: —Molt bé, anem a veure [i passa la presentació per descobrir a l'alumnat el que hi diu]. Ens ho han posat al revés! però és el mateix, no? Si per passar d'aquí a aquí hem dividit, vol dir que si anem al revés hem de multiplicar

El recurs didàctic de contextualitzar els sistemes monetaris més coneguts per a l'alumnat i comparar-los promou raonaments i reflexions interpretatives. Per exemple, quan es contextualitza el sistema de la pesseta i es compara amb els euros l'alumnat fa apreciacions en relació al valor de les coses comparant els dos sistemes (5B4; 3b):

M: —Quan havíeu nascut encara hi havia la pesseta però vosaltres no la veu arribar a fer servir, éreu molt petits quan es va fer el canvi de sistema. Hem vist que el valor màxim del bitllet de les pessetes era de 10.000 pessetes, vol dir que hi havia coses que

valien 10.000 pessetes. A veure, qui em sap dir quin és el valor màxim del bitllet de euro?[mestra]

Al. C2: — 500 euros!

M: —I per què creieu que hi ha aquesta diferència tan gran? [mestra]

Al. B1: — Perquè els euros valen més que les pessetes

M: —Per exemple, què val ara comprar un boli normal? [mestra]

Al. (tots): — [discussions] 2 euros

M: —Sabeu a quantes pessetes equivalen 2 euros? [mestra]

Al. C2: —Mmmm...entre 300 i 400 pessetes [el mateix nen que ha fet l'apreciació sobre el valor]

M: —Sí senyor! Perquè cada euro són més o menys... [mestra]

Al. C2: —Són 166 pessetes

M: —Però llavors un boli no valia 300 pessetes, valia unes 50 pessetes, molt menys! Eren molt diferents els valors de les coses amb pessetes que en euros. Vosaltres sabeu quins preus tenen les cases? [mestra]

Al. (tots): — [discussions] Uns dos-cents mil euros

M: —Quan els preus de les cases eren en pessetes quan eren?

Al. B1: — [discussions]La meva mare em va dir milions de pessetes, milions!

M: —Doncs per això necessitàvem bitllets més grans per pagar aquests imports

I al final d'aquest diàleg emergeix una evidència de nivell superior quan un nen que ha estat reflexionant sobre el valor de les coses i la seva influència sobre la vida de la gent, diu (5S2; 3a):

Sl. B1: —Doncs així quan es va fer el canvi de pessetes a euros la gent es va fer més pobre, no?

El context històric extramatemàtic genera interès i motiva l'alumnat per la participació activa en el debat. Per exemple, els alumnes mostren interès pels dibuixos de les monedes i els bitllets encara que en aquesta ocasió el temps no va permetre aprofundir en la qüestió, ja que s'hagués pogut aprofitar per parlar de la Unió Europea i la circulació dels diners, de com afecta l'ús de la moneda única a l'economia i a la vida de les persones, etc.:

Al. A5: —Jo he vist en un bitllet que té el meu pare un dibuix d'una piràmide amb un ull [referint-se als dòlars]

Al. E1: —En algunes monedes surt per una banda la cara del rei però n'hi ha que no...[referint-se a la moneda d'euro que treu de la butxaca]

Al. B1: —Això és que no és d'Espanya...hi ha monedes que són de capitals d'altres països i cadascú posa lo seu. M'ho han explicat.

f) Moment 6 (M6): Tasca de resolució de problemes de compra i venda en moneda romana.

En aquest moment M6 l'alumnat està dedicat a resoldre en parelles els problemes plantejats en uns fulls que se'ls han distribuït. Són cinc problemes de compravenda amb moneda romana que han de resoldre a partir del que han après amb l'ajuda de la taula d'equivalències de les diferents monedes amb l'as. El darrer problema s'acaba tractant en el moment M7 següent perquè, com que és més difícil, cal posar-lo en comú entre tota la classe.

És un moment que podria semblar de poca activitat d'indagació ja que, en principi, s'han de cenyir a un enunciat concret i no se'ls faciliten més recursos que els anomenats anteriorment. Però els problemes proposats no eren estàndards i els va caldre mobilitzar els darrers coneixements. Les evidències quant a habilitats d'indagació i de pensament matemàtic creatiu van emergir, com es pot observar a la Taula 6.7.

Taula 6.7: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 6»

Evidències MOMENT 6					
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S		
1				***** ***	1
2					2
3		**		*	3
4	***			****	4
5	*****	***			5
6	***				6
7	*	***		*****	7

La font d'evidències per a l'anàlisi d'aquest moment ha estat bàsicament els fulls de treball de l'alumnat (es pot consultar l'anàlisi complet a l'annex d'aquest capítol) i, com en els altres moments analitzats, els vídeos de les gravacions de classe.

En general, les evidències de competència d'indagació que es recullen són principalment de nivell bàsic i intermedi i fan referència a escollir i treballar amb les dades —de l'enunciat del problema i dels nous coneixements

provinents de la resolució de les anteriors tasques— (categoria 5), la planificació i resolució del problema (categoria 4), la conjeturació (categoria 3), la validació de resultats (categoria 6) i la comunicació d'aquests resultats (categoria 7).

Pel que fa al elements de pensament matemàtic creatiu presents en aquest moment, destaquem els referents a l'estimulació del pensament matemàtic i de recerca d'estratègies per a resoldre el problema (categoria 1), la realització de conjetures (categoria 4) i connexions (categoria 3) i múltiples aspectes socials relatius a la cooperació i interacció entre l'alumnat (categoria 7).

Amb l'observació dels estudiants mentre realitzen la tasca de resolució d'aquests problemes amb monedes romanes s'evidencia que estan molt acostumats a fer càlcul mental per a resoldre problemes però que no ho estan, en canvi, per a escriure en el paper —a mode de justificació— el procés que han seguit. Concretament, durant la resolució del problema IV, l'alumnat buscava la resposta calculant mentalment, amb una estratègia d'assaig i error (5B3; 1b, 1d, 1e, 4a):

- Al. C1: —Tres pomes a una unça la peça...són tres per vuit, vint-i-quatre, i un quadrant [del tall de formatge], vint-i-cinc més vint-i-quatre dóna...
Al. E2: —Dóna quaranta-nou!
Al. C1: —Setze per tres...trenta-dos...quaranta-set..., tres sextants?
Al. E2: —A veure... setze per dos, trenta-dos i per tres, quaranta-set
Al. C1: —Quaranta-quatre!
Al. E2: —Trenta-dos més... [pensa] no! quaranta-vuit!
Al. C1: —A veure, va! 16 per 2 són 32, més 10 són 42, més 6...48! Doncs hauríem de pagar amb tres monedes de sextant.

O bé aquesta parella d'estudiants quan cercaven la resposta a la segona pregunta del mateix problema:

- Al. A3: —I si només tinguessis unces?
Al. D1: —Doncs com que ha de donar 48...8 per...
Al. A3: —Por cinco
Al. D1: —Por seis
Al. A3: —Sí, seis, sis unces

L'alumnat, quan escriu els resultats en el paper, no es remet als càlculs realitzats per a justificar les respostes per escrit perquè sembla que no considera que tinguin valor argumentatiu. Per exemple, per aquest problema IV donen respostes d'aquest estil:

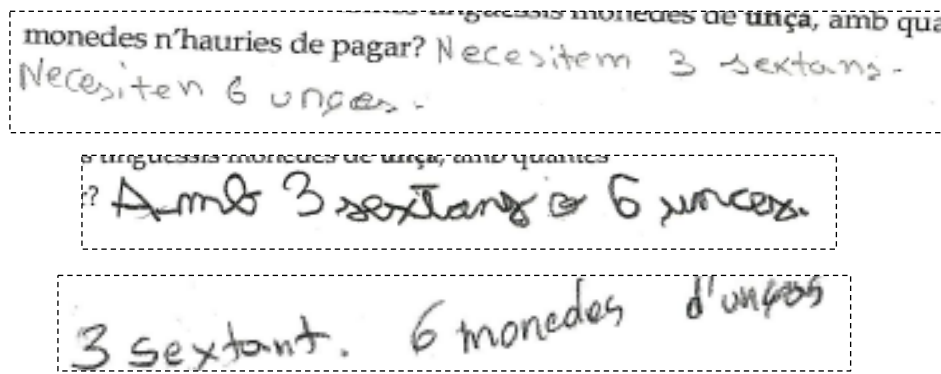


Figura 6.18: Tres exemples de respostes de diferents parelles d'estudiants al problema IV.

Quan en alguna ocasió justifiquen el resultat ho fan amb un argument que es basa en contrastar directament la pròpia resposta amb una afirmació de l'enunciat del problema. Per exemple, en les respostes del problema II trobem que l'alumnat en general s'esforça per donar una resposta raonada d'aquest estil:

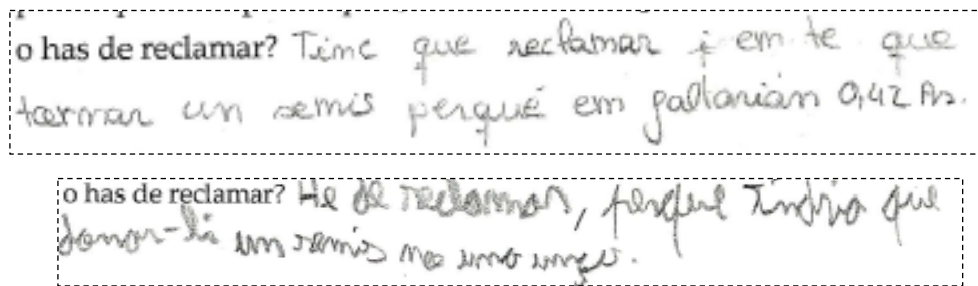


Figura 6.19: Dos exemples de respostes de diferents parelles d'estudiants al problema II.

L'alumnat, donat el valor fraccionari i el decimal de la moneda romana, opta sempre per utilitzar el decimal per a fer els càlculs. Per exemple, amb el problema I, a l'acostar-nos a un nen i una nena que treballen en parella, podem observar com operen naturalment amb els números decimals per trobar el resultat. Prescindeixen del "zero coma" i sumen i resten les centèsimes (7B1; 1c, 1b, 1e, 7a, 7b):

- Al. A2: —Nosaltres ho hem d'explicar! No hem de posar només "sí", ho ha dit!
Mira, el quadrant és un quart i el sextant és un sisè. Sí que li ha de donar canvi perquè el quadrant és més gran que el sextant i li sobra [alumna]
- I1: —I què t'ha de tornar? [els investigadors]
- Al. C1: —Una unça [alumne]
- Al. A2: —Jo crec que són dues unces [alumna]
- Al. C1: —No, perquè de 16 a 25 sobren 9 i, per tant, és una unça [alumne]

També arrodoneixen per buscar la moneda que més s'hi acosta perquè com que els decimals no són exactes (provenen de fraccions no decimals) al sumar i restar es perden dècimes. Ho veuen però no es plantegen per què.

I1: —Com ho has fet això? [els investigadors]

Al. C1: —Perquè el quadrant és 25 i el sextant és 16 i la unça és 8. I 25 menys 16 és 9, i llavors li ha de tornar una unça.

I1: —I si ho fessis amb fraccions? Restant en fraccions... [els investigadors]

Al. C1: —Restar fraccions? [diu l'alumna, mirant-se la seva companya] No, no en sabem

Tanmateix, podem constatar que amb una petita ajuda per canviar d'estratègia i la possibilitat de fer-ho gràficament sí que en saben d'operar amb les fraccions (5B3; 1c, 1b, 1e, 3c, 4a, 7a, 7b):

I1: —I si fessis una rodona, com si fos l'as, i la partissis en quatre trossos com un pastís...llavors un tros d'aquests seria un quadrant, no?

Al. C1: —Sí [i ho dibuixen] cada part és un quadrant

I1: —I ara per fer el sextant?

Al.A2: —Així [i dibuixen un pastís amb sis parts més o menys iguals]

I1: —I ara per treure-li aquest tros a aquest, com ho podem fer per saber què queda? [els investigadors]

Al. (els 2): —¿...?

I1: —Doncs hi ha un truc: si aquí d'aquest as que té 4 parts, cada part la dividim per tres, quantes parts hi haurà? [els investigadors]

Al. A2,C1: —12

I1: —Si aquí de cada tros de 6 en fem 2, quantes ens en sortiran? [els investigadors]

Al.A2,C1: —12

I1: —És com si tinguéssim unces ara, no? [els investigadors]

Al.A2,C1: —Sí, sí

I1: —Ara ja sé que el sextant, quantes unces són? [els investigadors]

Al.C1: —12, ah! no...2

I1: —I el quadrant? [els investigadors]

Al. C1: —3

I1: —Doncs si tu pagues amb un quadrant, que són 3 unces i val un sextant que són 2 unces, què t'han de tornar? [els investigadors]

Al. C1: —Una unça

I1: —Molt bé, doncs tu ho havies fet amb decimals i surt el mateix, tenies raó [els investigadors]

Fent els càlculs amb decimals se n'adonen en algun moment que no dóna exacte, que els falten algunes dècimes i això els causa perplexitat. Tanmateix, després d'obtenir un resultat decimal els alumnes procedeixen de forma natural a arrodonir-lo per trobar la moneda romana que més s'hi acosti (5B4), malgrat tot, sembla que no reconeixen la relació entre decimal, fracció i unitat. Aquest fet es pot comprovar amb respostes d'aquest estil quan els infants

escriuen que la resposta és un semis “perquè em faltarien 0,42 as”, quan ells saben mirant la taula que un semis són 0,50 as:

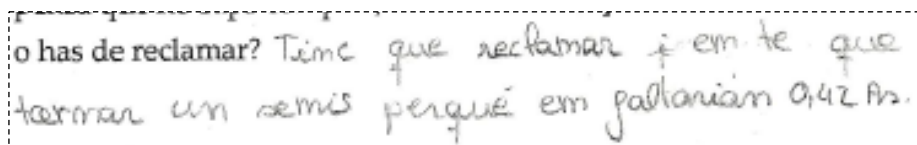


Figura 6.20: Exemple de resposta d'una parella d'estudiants al problema II.

g) Moment 7 (M7): Posada en comú de les diferents resolucions dels problemes.

En el moment M7 l'alumnat ja ha resolt quatre dels cinc problemes i ho ha intentat amb el cinquè que és més difícil. És el moment de la posada en comú. Hi ha poques evidències d'activitat investigadora, com es pot observar a la Taula 6.8 donat el tipus d'activitat que es desenvolupa en aquest moment.

Taula 6.8: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC del «Moment 7»

Evidències MOMENT 7					
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S		
1				*****	1
2					2
3		**		*	3
4					4
5	**				5
6					6
7	*	*		*****	7

Reprenent la darrera qüestió analitzada en el moment anterior, en aquest moment de la posada en comú també s'han recollit evidències del neguit causat per la pèrdua de centèsimes en els resultats que dona el fet d'operar amb decimals. En aquest exemple la mateixa mestra hi posa èmfasi, malgrat tot, l'ocasió no és aprofitada per connectar els números decimals amb les

fraccions, ni s'acaba cercant el perquè d'aquest fenomen que tant ha estranyat a l'alumnat:

M: —Quin canvi ens donaria? [mestra, referint-se al problema I]

Al (tots): —Una unça

M: —I quan li torna una unça ens quedem tan tranquils? Vale, vale,...però també podríem estar una mica enfadats, no?

Al D3: —Sí, per què faltaria una centèsima!

M: —Exacte, si ens ho miréssim amb els cèntims ens faltaria un cèntim perquè ens ha de tornar 0,09 i la unça és 0,08

Quant a la competència en pensament matemàtic creatiu, s'han recollit evidències de la categoria d'Obertura, versatilitat i generalització (categoria 1) i de la categoria Aspectes socials (categoria 7) i Connexions (categoria 3) quan els infants justifiquen oralment les respostes als seus problemes —ja s'ha vist en l'anàlisi del moment anterior que les justificacions per escrit són molt escasses.

S'ha pogut constatar que de forma oral els infants no es limiten a parlar dels càlculs sinó que reflexionen sobre les solucions, demostrant alguns indicadors de nivell d'intermedi. Per exemple, en el cas d'aquesta parella d'alumnes quan se'ls demana que argumentin la seva resposta de forma oral demostren un bon nivell de reflexió encara que no ho hagin escrit en el paper (7J1):

M: —I si només disposéssim de monedes d'unça, quantes hauríem de pagar[si amb les monedes de sextant n'hem pagat 3] [mestra]

Al. (molts): —Sis unces

M: —Per què?

Al. B1: —¿...? Perquè un sextant és el doble d'una unça i com que són tres sextants, doncs el doble són sis unces

En la posada en comú del darrer problema, el més difícil, es produeix una situació protagonitzada per un dels alumnes que formava part del grup B, el que havia estudiat el sistema romà, que considerem que mostra indicis d'activitat competencial alta, tant pel que fa a la competència d'indagació com pel que fa al pensament matemàtic creatiu. L'estudiant quan explica l'estratègia que ha pensat per a resoldre el problema posa de manifest que ha fet intencionadament un canvi de context, portant el problema a la seva realitat quotidiana —pensant com ho faria si la situació en lloc de en moneda romana fos amb euros— per a simplificar-lo i poder després extrapolar el procediment al problema plantejat (3J2, 3J3; 1b, 1c, 1e, 7a, 7b):

M: —Com ho heu fet vosaltres, va [dirigint-se a la parella que aixeca la mà insistentment]

Al. B1: —Nosaltres hem pensat que el que podria fer és que el botiguer li donés un semis i, perquè el botiguer no perdés diners, la Virgínia li donés també un quadrant. Així seria equivalent com si el botiguer li tornés un trient a la Virgínia. (...) Nosaltres això ho hem pensat com a la nostra vida quotidiana... d'ara, que a vegades passa. El botiguer diu “que no tinc canvi” i tu li dones, no sé..., un euro o “algo” perquè et pugui tornar el canvi.

A més a més, posteriorment, ell mateix diu que el que no sap segur és si la moneda que dona com a resultat és la correcta o no —que no ho és—, cosa que significa que té un molt bon control del seu aprenentatge en aquest moment. Tanmateix, no s'aprofundeix en el problema de càlcul que no li ha permès donar l'import correcte.

Al. B1: —El que jo no sé és si la moneda està bé, si és un quadrant o un sextant perquè aquí ja m'he liat...

6.4.4. Notes sobre el desenvolupament de la competència d'indagació i del pensament matemàtic creatiu durant la Sessió 10 i posteriors

Malgrat que es disposa dels fulls de treball i les produccions de l'alumnat d'aquestes sessions, no van poder ser observades ni gravades. És per aquesta raó que ens serveixen per augmentar la comprensió de la realitat analitzada ja que la complementen però no formen part de l'anàlisi sistemàtica i categoritzada de l'anterior sessió.

La Sessió 10 va ser d'experimentació amb el canvi de moneda. Els estudiants van poder fer càlculs multiplicant i dividint amb l'ajuda de la taula d'equivalències de les diferents monedes romanes amb la moneda principal, l'as. Van poder calcular que les monedes del tresor —23 asos i 6 denaris— valien 119 asos (ja que es prenia l'equivalència 1 denari = 4 asos).

Per estimar el valor d'aquest import van haver d'utilitzar les taules indicatives dels sous anuals de diverses professions de l'època i del cost d'alguns productes i serveis habituals. Alguns dels imports estaven en sestercis, que havien de transformar també en asos per poder comparar i havien de tenir en compte que els sous corresponien a 12 mesos. Amb això podien veure, per exemple, que podrien haver comprat menjar sense gaire problemes, 5 túniques de dona i que podien anar a les termes moltes vegades. Tanmateix, no podrien

haver-se comprat una mula (2080 asos), ni haguessin pogut pagar el lloguer d'un mes d'una casa mitjana (uns 1000 asos). Els 119 asos representaven el sou d'uns 4 mesos d'un flautista o d'un missatger però, en canvi, era una mica menys una dècima part del sou mensual d'un guàrdia, o d'un artesà. Els diversos grups van experimentar i comparar amb aquests càlculs per fer-se una idea de quin valor tenia aquell tresor com a moneda corrent de l'època. Es pot considerar que aquesta sessió va oferir evidències de nivell bàsic i intermedi de totes les categories de la competència d'indagació, així com, diversos elements de pensament matemàtic creatiu, especialment, certs aspectes emocionals al connectar les matemàtiques amb aspectes de la vida quotidiana romana.

La Sessió 11, corresponent a l'activitat de teatralització del Decumanus Maximus, una representació històrica d'un mercat romà al pati de l'escola, no es va poder realitzar per qüestions de calendari.

La Sessió 12, que tanca la unitat didàctica, estava enfocada a fer recapitulació de tota la informació i dels coneixements adquirits amb què van haver de demostrar si eren capaços de respondre les preguntes plantejades al començament sobre qui podia ser el propietari del tresor, argumentant les conclusions.

Cal dir que tots els grups menys un —que li va semblar que tenia un valor mig— van concloure encertadament que el tresor de monedes trobat era de poc valor per als mateixos romans i, per tant, havia de correspondre a algú amb poc poder adquisitiu.

Alguns dels arguments van ser els següents:

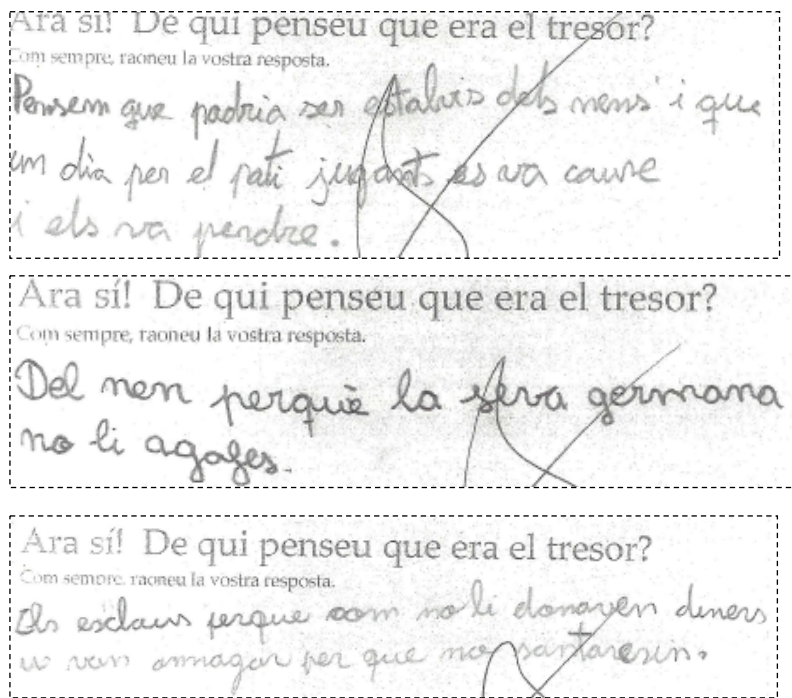


Figura 6.21: Exemples de les hipòtesis de tres equips d'indagació i els seus arguments sobre el propietari o propietària del tresor romà

Curiosament, tots els equips menys un van deixar de banda les hipòtesis que contenien personatges dels proposats en la Sessió 7 per hipòtesis amb personatges construïts per ells mateixos gràcies a la Sessió 8, sessió d'informació sobre els tipus de famílies —la seva composició i relacions familiars— que normalment s'allotjaven a les *domus* romanes.

6.5. Resultats sobre el desenvolupament de la competència d'indagació i el pensament matemàtic creatiu en la seqüència didàctica.

En els apartats anteriors s'ha fet un relat referent als aspectes més rellevants de l'anàlisi duta a terme, que hem mirat d'il·lustrar amb exemples significatius extrets de la realitat de l'aula. De l'anàlisi completa aportem en l'annex d'aquest capítol les peces principals: la taula que s'ha utilitzat per categoritzar els episodis escollits, l'anàlisi dels murals i dels fulls de problemes dels alumnes.

La Taula 6.9 representa un resum del buidatge de les evidències per categories i nivells —provinent de la taula d'anàlisi inclosa en l'annex— que, com ja s'ha

manifestat anteriorment, tenint compte que l'estudi que s'ha dut a terme no és de naturalesa quantitativa, la funció que se'ls pretén no és quantificar-les. Els hi hem donat una funció visual explicativa i per aquesta raó les evidències no s'hi han comptabilitzat en forma numèrica sinó amb un símbol, perquè doni idea, amb un cop d'ull, de quines categories són de les que es disposa de més evidències i de quines de menys. El significat de les categories i dels indicadors es pot consultar al Capítol 4, on es descriuen els instruments emprats per fer l'anàlisi.

Taula 6.9: Síntesi del buidatge de les evidències de CI i de PMC de la sessió 9

RESUM EVIDÈNCIES SESSIÓ 9					
Competència d'indagació				Pensament matemàtic creatiu	
	B	J	S		
1				***** ***** ***** ***** **	1
2	*****	**			2
3	***	*****		***** ***** ***** *	3
4	*****	*		***** ***** *****	4
5	***** ***** ***** ***** ***** **	***** *****	*	***** *****	5
6	***			**	6
7	*****	***** *****		***** ***** ***** ***** *****	7

En aquest apartat intentarem sintetitzar encara més aquesta anàlisi i formular algunes conclusions que se'n dedueixen. En general, segons ens mostren les evidències analitzades, el nivell de competència d'indagació assolit és el bàsic i només en alguns aspectes i episodis puntuals s'han trobat evidències de nivell

intermedi. Segurament aquest fet està relacionat amb què els estudiants participants no estaven avesats a fer aquest tipus d'activitats d'investigació, malgrat que habitualment treballin cooperativament en projectes. Per tant, podem afirmar que el canvi de contracte didàctic, respecte el que estaven acostumats, és un factor molt important.

No hem considerat haver obtingut evidències de la categoria 1 (Problematitza la situació plantejada per iniciar/continuar la indagació) de la CI i la categoria 2 (Problematització) de PMC, ja que la seqüència didàctica ja oferia la situació problematitzada. La seqüència de tasques guiava a l'alumnat per la indagació de tal manera que no va sorgir aquesta necessitat. Tanmateix, sí que hi ha evidències de que l'alumnat reconeixia una certa problemàtica i mantenia una actitud de dubte (categoria 2 de CI) essencial per mantenir la motivació per avançar en la indagació. Aquest fet es pot relacionar, per exemple, amb la gran quantitat d'evidències de la categoria 1 de PMC que ens van permetre observar que l'alumnat estava molt activat a pensar matemàticament i estimulat a buscar estratègies diverses per a resoldre el problema.

La seqüència didàctica també ha servit perquè l'alumnat s'esforcés a fer conjectures i hipòtesis en què basar la seva recerca (categoria 3 de CI i categoria 4 de PMC). Malgrat tot, hi ha poques evidències de què validin els seus resultats (categoria 6 de CI) encara que sí que fan feina per reflexionar-hi, resumir-los (elements de categoria 5 de PMC). L'alumnat participant no estava avesat a buscar la forma de contrastar les seves conjectures de manera independent. És a dir, consultar les fonts d'informació i contrastar resultats amb els companys, enlloc de buscar la confirmació de la mestra.

Hi ha força evidències de la categoria 4 de CI, referent a planificació i autoregulació del treball, ja que l'alumnat sempre va treballar en equips i es veia obligat a fer-ho. Eren un grup acostumat a treballar de forma cooperativa en projectes. De la mateixa manera, la seqüència didàctica, tal i com estaven programades les seves tasques, promovia el treball amb informació provinent de fonts primàries i secundàries que l'alumnat havia de gestionar i elaborar per treure'n conclusions i explicar-les, per tant, s'han trobat moltes evidències de la categoria 5 (classifica, escull, elabora i interpreta les dades) i la 7 (comunica les conclusions de la indagació).

Les situacions amb evidències de nivell bàsic s'observen en els grups que treballen amb sistemes menys coneguts, ja que les dificultats creen unes

necessitats en l'alumnat que els obliguen a crear noves connexions entre les informacions i continguts. Per exemple, a més a més dels càlculs fan canvis de registre, fan suposicions més enllà dels enunciats, han d'explicitar raonaments i argumentacions fruit d'obligades reflexions sobre les solucions, etc. En aquest sentit, s'evidencia que amb la reflexió generada per la comparació dels diversos sistemes monetaris l'alumnat va ser capaç de connectar informacions i fer generalitzacions aplicables a altres sistemes i, en concret, al numèric. Així doncs, el recurs didàctic de contextualitzar els sistemes monetaris més coneguts per a l'alumnat i comparar-los va promoure força raonaments i reflexions.

Per altra banda, amb el seu discurs oral els infants no es limiten a parlar dels càlculs sinó que reflexionen sobre les solucions, demostrant puntualment alguns indicadors de nivell intermedi. Tanmateix, el nivell no és el mateix quan es tracta de produccions escrites, ja que llavors s'evidencien moltes dificultats per justificar i argumentar els resultats de les pròpies reflexions o indagacions. L'alumnat, quan escriu els resultats en el paper, no es remet als càlculs realitzats per a justificar les respostes per escrit perquè sembla que no considera que tinguin valor d'argumentació. Quan en alguna ocasió justifiquen el resultat ho fan amb un argument que es basa en contrastar directament la pròpia resposta amb una afirmació de l'enunciat del problema.

Quan s'aborden els sistemes monetaris menys coneguts i l'alumnat es proposa mobilitzar les informacions per realitzar la tasca d'establir les relacions entre els diferents elements del sistema, és quan hi ha més també evidències de la competència de nivell intermedi. Aquestes accions sorgeixen, doncs, en situacions on l'alumnat pot connectar els seus coneixements amb la informació que està gestionant, associades a la utilització d'instruments d'anàlisi i a la necessitat de ser creatiu per trobar solucions, ja sigui en la resolució de problemes com en qualsevol de les altres categories considerades en l'anàlisi.

Com dèiem, hi ha evidències d'accions d'indagació de nivell bàsic en totes les situacions i tots els infants s'esforcen a establir relacions entre tots els elements del sistema, encara que de totes les possibles relacions entre les monedes d'un sistema monetari els infants se centren sobretot en les relacions aritmètiques. Tots els murals presenten les monedes ordenades amb una estructura que cerca la regularitat tant aritmètica, pel que fa a les relacions entre els elements del sistema, com geomètrica, pel que fa a la presentació.

L'alumnat, donat el valor fraccionari i el decimal de la moneda romana, escull sempre el decimal per a fer els càlculs, malgrat tot, després d'obtenir un resultat decimal els alumnes procedeixen de forma natural a arrodonir-lo per trobar la moneda romana que més s'hi acosti però sembla que no reconeixen les relacions estructurals entre ambdós valors. Per exemple, en la exposició de treballs propis la comunicació matemàtica és de nivell bàsic, no obstant això, és important emfasitzar que es pot notar que, quan prèviament, en el desenvolupament del treball, hi ha hagut suficient accions de nivell intermedi el discurs s'hi veu influenciat i, donat el cas, pot arribar puntualment a nivells més elevats.

Per tant, com a conclusió d'aquest capítol, es pot afirmar que el context sociohistòric extramatemàtic promou el pensament en qüestions matemàtiques rellevants que poden generar nous punts de vista que portin a descobrir nous patrons i genera interès i motiva l'alumnat per la participació activa en el debat i la construcció del discurs científic.

