parteix de l'origen i va al punt B[10] (vegeu figura 4.6).

Totes les possibles observacions que tinguin un valor de y situat entre 0 i 2 i un valor d' x situat entre 0 i 3 i que siguin combinacions convexes de B, representaran punts situats a la frontera eficient.

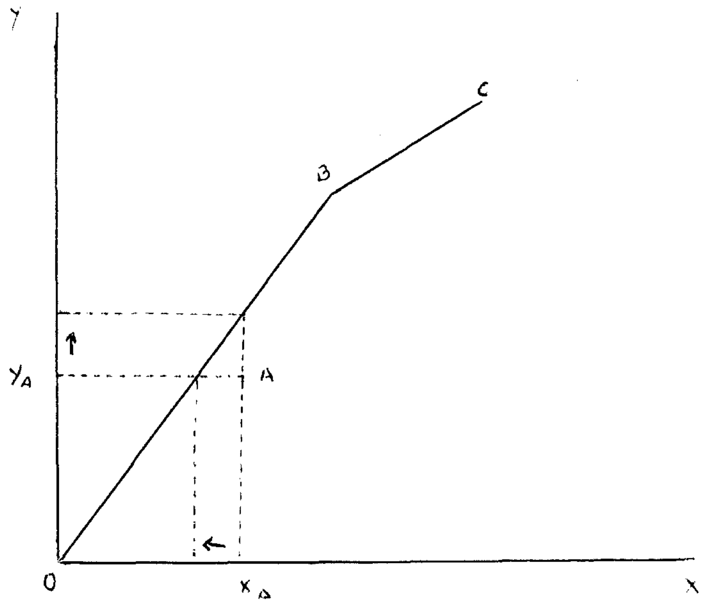

Fig. 4.6.

El punt A ($x_A=2$, $y_A=1$) queda eliminat de la frontera car no és una combinació convexa de B, ja que

$$y_A = 2 \cdot z = 1 \qquad\qquad x_A = 3 \cdot z = 2$$

que dóna uns valors de z = 1/2 i z = 2/3. Perquè A sigui un punt de la frontera, el valor de z ha de ser el mateix per l'input que per l'output i complir la condició de ser menor a 1 imposada pels rendiments no creixents.

10. Es parteix del punt B car és el punt de tangència de la frontera de producció i la recta que parteix de l'origen. És l'observació de tot el conjunt que té una major productivitat mitjana.

Aquest punt, per ser eficient, ha de reduir la quantitat consumida d'input a 1,5 unitats en comptes de les 2 actuals ($x_A = 3 \cdot 1/2 = 1,5$). Tanmateix, podria esdevenir eficient si produís 1,33 unitats d'output ($y_A = 1 \cdot 2/3 = 1,33$).

El punt C es situa dins el conjunt factible de producció, ja que la tecnologia permet rendiments decreixents. Si fem $z = (0, 0, 1)^T$, $x_C = 5$ i $y_C = 2,5$ definirem un punt extrem de la frontera de producció eficient.

En una tecnologia amb rendiments constants d'escala la restricció sobre els paràmetres és la de estricta positivitat. En conseqüència, els valors de z es situaran entre 0 i + ∞, i definiran gràficament un con limitat per la recta que parteix de l'origen (z = 0), tendeix a infinit i s'intersecciona amb el punt B (figura 4.7).

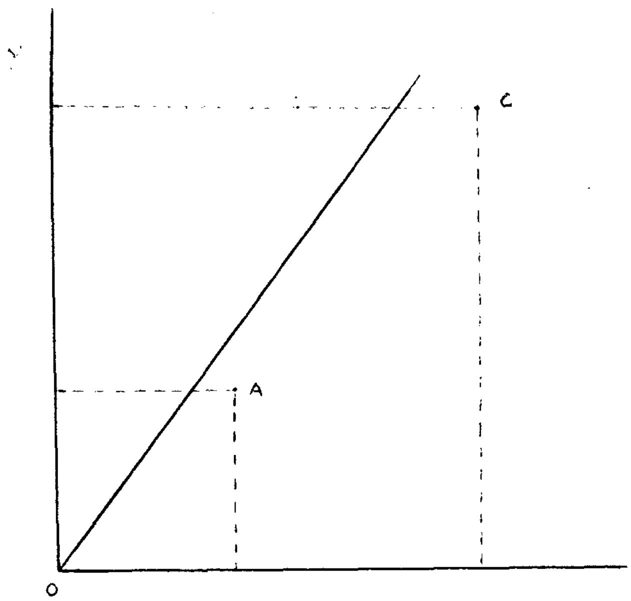

Fig. 4.7.

En aquest cas, el punt C no es troba a la fontera eficient. Els seus valors de z per l'output i l'input són:

$$y_C = 2 \cdot z = 2{,}5 \qquad x_C = 3 \cdot z = 5$$

amb la qual cosa $z_y = 3/2$, $z_x = 5/3$.

Per aconseguir situar el punt C a la frontera eficient caldria o bé reduir la quantitat d'input emprada actualment o bé augmentar la producció d'output.

El punt C ha de ser una combinació convexa de B:

$$x_B \cdot z = x_C \qquad y_B \cdot z = y_C$$

per tant, ha d'incrementar l'output a 3,3 unitats

Input	$3 \cdot 5/3 = 5$	$z_x = 5/3$
Output	$2 \cdot 5/3 = 3{,}3$	

o bé reduir l'input a 3,75 unitats

Output	$2 \cdot 1{,}25 = 2{,}5$	$z_y = 1{,}25$
Input	$3 \cdot 1{,}25 = 3{,}75$	

Contemplem el cas de rendiments constants d'escala i feble disponibilitat d'inputs. Ara les restriccions imposades als inputs inclouen un paràmetre δ i la condició d'estricta igualtat.

Per tant,

$$z \in R^n_+ \qquad Yz \geq y \qquad Xz = \delta x \qquad \delta \in [0,\ 1]$$

Suposem tres observacions que precisen de dos inputs per a la producció de la mateixa quantitat d'un únic output

$$Y = (3, 3, 3) \qquad X_1 = (2, 3, 5) \qquad X_2 = (4, 2, 1)$$

Si fem $z = (1, 0, 0)^T$ i $\delta = 1$, les condicions de l'output i de l'input seran

$$y \leq 3 \qquad x_1 = 5 \qquad x_2 = 1$$

les quals defineixen el punt C de la figura 4.8.

Si canviem els valors de z per $z = (0, 1, 0)^T$ i $z = (1, 0, 0)^T$ i $\delta = 1$ definim els punts B i A, respectivament,

$$y \leq 3 \qquad x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$
$$y \leq 3 \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 4$$

Però com que δ pot pendre valors entre $0 \leq \delta \leq 1$ i no hi ha cap restricció sobre el vectors de paràmetres, tots els punts situats a l'extensió radial dels punts i les seves combinacions convexes són membres del conjunt factible de producció[11].

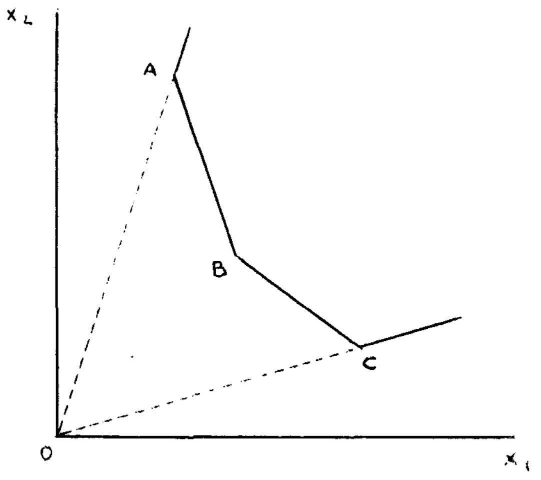

Fig. 4.8.

11. Vid. S. GROSSKOPF, art. cit.

4.1.3. <u>Mesures d'eficiència tècnica</u>.

Acabem de demostrar que si variem els supòsits sobre la tecnologia de referència també ho fa el nombre d'unitats ineficients i, lògicament, el valor de la seva mesura.

En la figura 4.9 hem representat els punts corresponents a cinc observacions d'output i d'input de sengles unitats de producció.

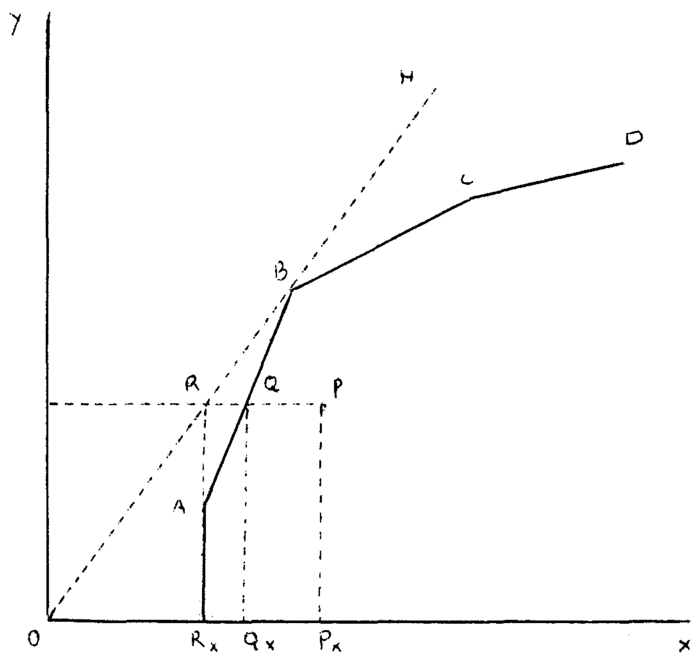

Fig. 4.9.

En una tecnologia caracteritzada per rendiments constants d'escala i forta disponibilitat d'inputs i outputs, el conjunt factible de producció inclou tots els punts situats entre el raig OH i l'eix de les ics. Les observacions que es trobin al nordoest de la frontera OH no pertanyen als conjunt de producció i les que es situin a aquest raig són eficients.

Aquesta tecnologia dissenyada per M.J. Farrell és la que imposa més restriccions al conjunt factible de producció i, per tant, són poques les observacions que compleixen les seves condicions d'actuació eficient.

Una tecnologia amb aquestes característiques suposa que totes les firmes eficients produeixen en la seva dimensió òptima i, per tant, en una zona de rendiments constants d'escala. Per aquesta raó, la mesura de l'eficiència productiva de les firmes de M.J.Farrell rep el nom d'eficiència tècnica global o eficiència agregada, terme que preferim particularment.

La mesura de l'eficiència del punt P de la figura 4.9 serà determinada per la ratio OR_x / OP_x, és a dir, la relació entre el nivell mínim d'input necessari per a produir un determinat output i la quantitat utilitzada actualment. El valor d'aquesta ratio, que equival al valor del paràmetre λ^* del problema (4.11), indica quina proporció dels actuals nivells d'inputs s'haurien d'emprar per aconseguir actuar amb eficiència agregada.

Variar el supòsit de rendiments constants d'escala i considerar rendiments no creixents introdueix un relaxament de les condicions que ha de complir el conjunt factible de producció.

Aquest conjunt estarà constituït per tots els punts situats dins l'àrea delimitada per la línia O, B, C, D i l'eix de les ics de la figura 4.9. L'observació corresponent al punt A és ineficient, però els punts C i D han esdevingut eficients i defineixen la nova línia fronterera. Així doncs, la imposició de condicions menys restrictives permet considerar eficients unitats que amb altres supòsits resultaven ineficients.

La tecnologia menys restrictiva és la que permet rendiments variables d'escala. En aquestes condicions, el punt A defineix una observació situada a la frontera de producció en una zona de rendiments creixents d'escala. El conjunt factible de producció és ara l'àrea definida pels punts A, B, C, D i l'eix de les ics.

El punt P correspon a una observació ineficient del conjunt factible de producció. La seva ineficiència es mesurarà a través de la ratio OQ_x / OP_x que serà major que el quocient OR_x / OP_x de l'eficiència global, com es pot observar en la figura 4.9.

Això vol dir que per assolir l'eficiència la reducció en la quantitat actual d'input haurà de ser superior quan la tecnologia presenta rendiments constants d'escala que quan aquets són variables.

Aquesta nova mesura de l'eficiència -homòloga a la solució del problema (4.15)-, considera eficients aquelles observacions que minimitzen l'ús dels inputs malgrat no operin en la seva dimensió òptima. D'aquí que rebi el nom d'eficiència tècnica pura de l'input o, simplement, eficiència tècnica.

En l'avaluació de l'eficiència d'un conjunt d'observacions el nombre d'unitats que actuen amb eficiència tècnica pot ser superior al de les que ho fan amb eficiència agregada, degut a que s'imposen menys restriccions al conjunt factible de producció; així mateix, la mesura de l'eficiència tècnica d'una unitat sempre serà superior a la seva mesura d'eficiència agregada. Podem establir que

EFICIENCIA AGREGADA < EFICIENCIA TECNICA

Hem vist que l'avaluació de l'eficiència de les unitats de producció es pot fer sota una doble vessant: la mesura de l'eficiència quan es té en compte la combinació d'inputs i d'outputs, i la mesura de l'eficiència quan, a més a més, es té en compte la seva dimensió. Aquest darrer aspecte permet la introducció d'una nova mesura, la de l'eficiència d'escala, la qual comentarem en el proper apartat.

Tot seguit proposem un exemple per il.lustrar les anteriors explicacions teòriques sobre les diferents mesures d'eficiència.

Considerem una mostra de cinc observacions que utilitzen un sol input per a la producció d'un únic output. Les dades corresponents als factors i productes de les empreses A, B, C, D i P són:

$$X = \{5,\ 8,\ 14,\ 19,\ 9\} \qquad Y = \{4,\ 11,\ 14,\ 15,\ 7\}$$

En primer lloc suposarem que totes les observacions actuen en una tecnologia de rendiments constants d'escala i forta disponibilitat d'inputs i d'outputs.

Per mesurar l'eficiència tècnica global de les cinc observacions descrites aplicarem la formulació (4.11):

$$\min \lambda_A$$

subjecta a

$$4z_A + 11z_B + 14z_C + 15z_D + 7z_P \geq 4 \qquad (4.18)$$
$$5z_A + 8z_B + 14z_C + 19z_D + 9z_P \leq \lambda_A 5$$
$$z_i \geq 0 \qquad i = A,\ B,\ C,\ D,\ P$$

Els resultats de les diferents iteracions del problema anterior són

Unitat	Eficiència
A	0,5818
B	1
C	0,7272
D	0,5741
P	0,5656

Com havíem demostrat gràficament, l'única observació situada a la frontera de producció eficient és la B, mentre que les altres quatre unitats resulten ineficients globalment.

Per tal que aquestes observacions es situin a la frontera han d'utilitzar una proporció de l'input actual igual a la seva mesura d'eficiència. Així

A	ha de reduir el seu input a	0,5818 · 5	=	2,9
C	ha de reduir el seu input a	0,7272 · 14	=	10,18
D	ha de reduir el seu input a	0,5741 · 19	=	10,91
P	ha de reduir el seu input a	0,5656 · 9	=	5,09

Però també poden aconseguir l'eficiència si augmenten la producció d'output, sense alterar els inputs actuals.

El valor recíproc de l'eficiència 1/0,5818 = 1,7188, 1/0,7272 = 1,3751, 1/0,5741 = 1,7419 i 1/0,5656 = 1,7680, assenyala l'increment de la producció

A	ha d'augmentar el seu output a	4 · 1,7188	=	6,8752
C	ha d'augmentar el seu output a	14 · 1,3751	=	19,2514
D	ha d'augmentar el seu output a	15 · 1,866	=	27,99
P	ha d'augmentar el seu output a	7 · 1,7680	=	12,376

Amb aquesta variació o bé de l'input o bé de l'output, aconseguirem que les quatre observacions es situin a la frontera eficient de producció en una tecnologia caracteritzada per rendiments constants d'escala.

Hem definit l'eficiència d'una unitat com el quocient entre el seu nivell d'input òptim i el seu nivell actual, verifiquen si els resultats obtinguts matemàticament donen els valors d'aquesta mesura:

OA_x = consum actual d'input de l'unitat A = 5
OP_x = consum òptim d'input de l'unitat A = 2,909

$OP_x/OA_x = 2{,}909 / 5 = 0{,}5818$ grau d'eficiència agregada.

En cas que les observacions assenyalades actuessin en una tecnologia amb rendiments no creixents a escala, la mesura de la seva eficiència seria la solució del problema (4.13):

$$\min \lambda_A$$

subjecta a

$$\begin{aligned} &4z_A + 11z_B + 14z_C + 15z_D + 7z_P \geq 4 \\ &5z_A + 8z_B + 1z_C + 19z_D + 9z_P \leq \lambda_A 5 \qquad (4.19) \\ &z_A + z_B \quad z_C + z_D + z_P \leq 1 \\ &z_i \geq 0 \qquad i = A,\ B,\ C\ D,\ P \end{aligned}$$

que dóna, desprès de les iteracions oportunes, els resultats següents:

Unitat	Eficiència
A	0,5818
B	1
C	1
D	1
P	0,5656

En una tecnologia d'aquest tipus, les unitats C i D actuen eficientment, mentre que A i P han de variar el seu input o el seu output per eliminar la ineficiència. Tant l'unitat A com la P han de fer-ho en les mateixes proporcions que en el cas anterior, ja que la frontera no ha variat en la zona en què actuen.

Si la tecnologia presenta rendiments variables d'escala el problema a resoldre és

$$
\begin{aligned}
&\min \lambda_A \\
&\text{subjecta a} \\
&4z_A + 11z_B + 14z_C + 15z_D + 7z_P \geq 4 \\
&5z_A + 8z_B + 14z_C + 19z_D + 9z_P \leq \lambda_A 5 \\
&z_A + z_B + z_C + z_D + z_P = 1 \\
&z_i \geq 0 \qquad i = A, B, C, D, P
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Que dóna els resultats següents:

Unitat	Eficiència
A	1
B	1
C	1
D	1
P	0,6984

En una tecnologia amb rendiments variables d'escala l'única unitat ineficient és la P, que ha variat el grau d'eficiència en relació la tecnologia de rendiments no creixents. Aquesta variació es deu a la modificació soferta per la frontera de producció que s'acosta al punt definit per la unitat avaluada.

Així doncs, quan varien els supòsits sobre la tecnologia subjacent també ho fa el nombre d'unitats eficients i la mesura de l'eficiència de cada observació.

4.1.4. Mesures d'eficiència d'escala.

L'eficiència d'escala indica la pèrdua proporcional d'output originada per la desviació de l'escala òptima de producció. A llarg termini, la dimensió òptima de les empreses consisteix en operar al mínim d'una corba de cost en forma de U, quan prevalen rendiments constants d'escala.

En cas d'un únic output i un únic input, la dimensió més productiva és aquella que permet maximitzar la productivitat mitjana. En aquesta escala d'operacions la productivitat mitjana és igual a la productivitat marginal i, a la vegada, igual a la ratio del preu de l'output respecte al preu de l'input.

Quan una firma produeix en la seva dimensió òptima actua en una zona de rendiments constats d'escala, amb la qual cosa, la seva eficiència d'escala és igual a 1. De manera alternativa, quan l'eficiència d'escala d'una observació és menor que 1, la unitat opera en una tecnologia amb rendiments variables.

En la figura 4.9, el punt B és eficient a escala car es situa a la frontera definida sota rendiments constants on es compleix que la productivitat marginal del factor és igual a la seva productivitat mitjana. Per tant, aquesta observació produeix en la seva dimensió òptima, és a dir, assoleix la grandària d'escala més productiva (most productive scale size, mpss) definida per Banker[12].

El punt Q, malgrat ser tècnicament eficient no produeix en la seva dimensió òptima, ja que hauria de col.locar-se en el punt R. La ineficiència d'escala de Q es mesurarà per la ratio OR_x/OQ_x indicativa de la proporció de la quantitat actual del factor x que Q hauria de consumir per ser eficient a escala.

L'eficiència tècnica de P en el supòsit de rendiments variables d'escala, serà mesurada per la ratio OQ_x/OP_x. Per altra banda, l'eficiència tècnica global de l'unitat P en una tecnologia amb rendiments constants d'escala vindrà donada pel cocient OR_x/OP_x.

Així doncs, l'eficiència tècnica global o eficiència agregada de les unitats de producció es pot descomposar en dos elements: l'eficiència tècnica i l'eficiència d'escala.

$$EA = ET \cdot ES$$

$$OR_x/OP_x = OR_x/OQ_x \cdot OQ_x/OP_x$$

De les cinc observacions de l'exemple anterior l'única eficient a escala és la unitat B que constitueix el mpss del conjunt. Les dades de l'eficiència agregada i de

12. Observem que el punt B és exactament el lloc de tangència entre la recta que parteix de l'origen (productivitat mitjana) i la funció de producció frontera.

Vid. R.D. BANKER, "Estimating most productive scale size using data envelopment analysis". European Journal of Operational Research, vol. 17, nº 1, juliol 1984, p. 35-44.

l'eficiència tècnica de les cinc observacions són les següents

Unitat	EA	ET
A	0,5818	1
B	1	1
C	0,7272	1
D	0,5741	1
P	0,5656	0,6984

La seva eficiència d'escala és:

Unitat	ES = EA/ET
A	0,5818
B	1
C	0,7272
D	0,5741
P	0,8099

Per les unitats tècnicament eficients, l'eficiència agregada indica l'eficiència d'escala, i per les unitats ineficients, l'eficiència agregada sempre serà inferior a l'eficiència tècnica, ja que l'unitat estarà més propera a una frontera amb rendiments variables d'escala que a una definida per rendiments constants d'escala.

4.2. El model "Data Envelopment Analysis" (DEA).

A. Charnes, W.W. Cooper i E. Rhodes[13] -en endavant CCR- han desenvolupat un model per mesurar l'eficiència de les entitats sense finalitats de lucre que constitueixen, cada vegada més, una part més gran i creixent de l'economia. El model es refereix especialment a l'avaluació de programes públics i de la seva gestió.

Per això, han dirigit la seva atenció a sintetitzar de forma numèrica una mesura de l'eficiència d'aquestes unitats tenint en compte que les seves activitats impliquen inputs i outputs que la majoria de vegades són aliens als mercats habituals.

Les unitats examinades, a les que anomenen "decision making units" (DMU's) es caracteritzen per tenir inputs i outputs comuns que poden ser múltiples i adoptar una gran varietat de formes. La terminologia DMU pot identificar-se amb els termes més usuals de unitat de producció, planta, empresa, departament o secció segons l'àmbit en què es situa l'avaluació de l'eficiència.

L'eficiència en la conducta de les DMU's es caracteritza per referència a les orientacions següents:

a) Orientació de l'output: Una DMU no és eficient si es possible augmentar algun output, sense incrementar cap dels seus inputs i sense reduir cap altre output.

b) Orientació de l'input: Una DMU no és eficient si es possible augmentar algun input, sense incrementar-ne cap altre i sense reduir cap dels seus outputs.

---

13. A. CHARNES, W.W. COOPER i E. RHODES, "Measuring the efficiency ...", art. cit.

La mesura de l'eficiència que proposen CCR permet considerar les dues orientacions al mateix temps. Una DMU serà eficient si no obté cap de les dues orientacions assenyalades.

La anterior caracterització pot ésser vista com una extensió de l'usual concepte d'eficiència de Pareto, el qual estableix que una DMU està infraactuant si alguna altra DMU o alguna combinació possible de DMU's pot aconseguir, com a mínim, les mateixes quantitats de tots els outputs amb menys d'algun input i no més de cap altre recurs. Contràriament es diu que una DMU és Pareto-eficient si el que acabem de dir no és possible.

Aquest model d'estimació de l' eficiència vol evitar la necessitat d'influències "a priori" tals com la dels preus de mercat dels factors, per la qual cosa es busca un mètode per determinar objectivament les ponderacions que s'utilitzaran per a l'avaluació de les diferents unitats.

No només interessa identificar les DMU's eficients o les ineficients, sinò que es vol facilitar estimacions de la quantitat d'ineficiència i de les dimensions (programa o gestió) en les que es produeix, així com determinar les característiques de la funció de producció eficient.

El procediment elaborat per CCR i anomenat "Data Envelopment Analysis" (DEA) té la capacitat de comparar l'eficiència de DMU's similars considerant explícitament l'ús de múltiples inputs en la producció de múltiples outputs. La tècnica salva la necessitat de desenvolupar una mesura de l'eficiència que sigui particularment sensible a la barreja d'outputs i d'inputs i, en conseqüència, és més amplia i fidedigna que l'utilització d'un conjunt de ratios operatives o de resultats.

En el seu model CCR amplien l'usual ratio output / input de mesura de l'eficiència a una ratio de valors ponderats d'outputs respecte a valors ponderats d'inputs, amb les ponderacions seleccionades de manera que estimin l'eficiència de Pareto de cada observació en relació totes les altres DMU's del conjunt estudiat. Així s'obté una mesura de l'eficiència relativa de cada unitat que no requereix cap supòsit sobre la forma de la funció de producció.

Per a la seva determinació s'empren nivells físics observats dels inputs i dels outputs dels diferents components de la mostra i s'apliquen tècniques de programació lineal fraccional, el procediment de maximització de la qual assegura la valoració més alta possible per a la ratio de l'eficiència de la DMU examinada.

En tot el procediment es manté la noció que els valors òptims de les ponderacions per a la DMU avaluada són factibles per a les altres unitats de la mostra. Això significa que cap altre DMU tindrà una estimació de l'eficiència superior a 1 si empra aquests mateixos valors.

Quan l'estimació de l'eficiència d'una DMU és inferior a ú significa que aquesta és ineficient en relació el subconjunt d'unitats amb el qual es compara i que rep el nom de conjunt de referència.

Es important ressaltar que la metodologia DEA sintetitza el subconjunt de DMU's eficients en una frontera de producció lineal a trossos. Les DMU's eficients defineixen un límit de producció que, en el sentit econòmic, representa els outputs màxims que algunes DMU's poden obtenir de les combinacions dels seus nivells actuals d'inputs.

El model DEA permet incloure variables que descriuen l'entorn exterior de la unitat i que constitueixen factors ambientals fora del seu control, els quals ponden afectar l'eficiència de l'organització.

Com que la metodologia DEA només requereix una observació individual de cada input i de cada output output per a la construcció de la superfície fronterera, és més sensible a les errades en les dades que les tècniques d'estimació de mínims quadrats. La tècnica DEA suposa també relacions moderades entre els inputs i els outputs inclosos en el càlcul.

Podem emprar aquesta metodologia per comparar un conjunt d'organitzacions, identificar-ne les unitats ineficients i per determinar la magnitud de la ineficiència i els camins alternatius per reduir-la. La utilització de DEA ajuda a establir plans per remeiar i reduir les ineficiències, ja sigui mitjançant una disminució dels costos de les operacions o un increment de l'output o del servei produït.

4.2..1. Descripció del model.

El model DEA desenvolupat per CCR té el seu punt de partida en el treball de Farrell[14]. Com aquest darrer empra dades observades de diferents empreses o unitats de decisió i defineix una frontera de producció lineal a trossos basada en les unitats eficients. Cada segment de la frontera representa els outputs màxims que les unitats del

---

14. M.J. FARRELL, art. cit.

conjunt poden aconseguir dels nivells d'inputs actuals i, en cadascun d'ells la productivitat mitjana i la marginal són iguals (rendiments constants d'escala).

Per calcular l'eficiència d'una DMU s'utilitzen tècniques de programació lineal que consisteixen en la maximització d'una ratio de ponderacions dels outputs respecte a les ponderacions dels inputs consumits, subjecta a la condició que les ratios similars per a cadascuna de les altres DMU's de la mostra estudiada són menors que o iguals a ú.

El problema plantejat queda definit de la manera següent:

$$\max h_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io}}$$

subjecta a (4.21)

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij}} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots n$$

$u_r, v_i > 0$[15]; $\quad r = 1, \ldots s, \quad i = 1, \ldots m$

on y_{rj}, x_{ij} són, respectivament, els outputs i inputs observats de les j DMU's de la mostra, $j = 1, \ldots n$.

u_r, v_i són les variables de ponderació o coeficients a determinar per la solució del problema i que donaran a la ratio de l'eficiència de la DMU avaluada el valor més alt possible.

Cada DMU produeix els mateixos outputs utilitzant els mateixos inputs però en quantitats diferents i ambdós sempre prenen un valor positiu (d'aquí la restricció d'estricte positivitat). Això és suficient per a caracteritzar les observacions com a membres d'una mateixa "indústria".

Les n restriccions asseguren que cap altre DMU obtingui una estimació de l'eficiència superior a ú. En cada fase de l'avaluació, l'element avaluat del conjunt es separat i representat en la funció objectiu així com en les restriccions. La conseqüent optimització produeix un conjunt positiu de u^*_r, v^*_i que generen un òptim $0 \leq h^*_o \leq 1$ amb $h^*_o = 1$ només si la unitat que s'avalua és eficient en el sentit de les orientacions de l'input i de l'output comentades en la introducció (eficient en el sentit de Pareto).

La maximització indicada concedeix a la DMU avaluada l'estimació més favorable permesa per les restriccions del problema. Cap altre conjunt de ponderacions li pot donar

15. CCR en el seu article "Short communication. Measuring the efficiency of decision-making units", European Journal of Operational Research, vol.3, nº 4, juliol 1979, p. 339, canvien les condicions de no negativitat de les variables, establertes en la formulació inicial, per les d'estricta positivitat, a fi i efecte d'evitar que les ponderacions dels inputs i dels outputs siguin iguals a zero, ja que en el plantejament del problema s'ha suposat que tots els factors i productes tenen algun valor positiu.

una estimació millor en relació el seu conjunt de referència.

La formulació original del problema a maximitzar no és lineal però, tal com han demostrat els seus autors, es pot solucionar si apliquem una de les dues formulacions següents de programació lineal i que deriven del problema inicialment proposat.

La primera formulació restringeix les sumes ponderades dels inputs a la unitat (mantenir els nivells actuals de inputs) i maximitza els outputs que se'n poden obtenir:

$$\max h_o = \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{ro}$$

subjecta a

$$\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io} = 1 \qquad (4.22)$$

$$u_r, \; v_i \geq \epsilon > 0, \qquad r = 1, \ldots s; \qquad i = 1, \ldots m$$

La segona formulació parteix de l'invers del problema incial, que podem escriure com:

$$\min f_o = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{ro}}$$

subjecta a (4.23)

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj}} \geq 1 \qquad j = 1, \ldots n$$

$$v_i \, , \, u_r > 0; \qquad i = 1, \ldots m; \quad r = 1, \ldots s$$

i restringeix la suma ponderada dels outputs a la unitat (mantenir els nivells aconseguits actualment) i minimitza els inputs necessaris:

$$\min f_o = \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{io}$$

subjecta a (4.24)

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \, y_{rj} \geq 0 \quad ; \qquad j = 1, \ldots n$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{ro} = 1$$

$$v_i,\ u_r > \epsilon > 0; \qquad i = 1,\ldots m\ ; \quad r = 1,\ldots s$$

En aquestes circumstàncies $h^*_o = 1 / f^*_o$, ja que són recíprocs.

Com hem assenyalat, CCR canviaren les condicions de no negativitat de les variables per les d'estricta positivitat. Aquesta manipulació impideix que les variables prenguin valors iguals a zero, la qual cosa significaria excloure algun input o algun output de l'avaluació de l'eficiència. També respon al supòsit establert que tots els recursos i tots els outputs tenen algun valor positiu.

Per aquesta raó introdueixen un límit, representat per un constant infinitesimal ϵ, suficientment petit perquè no alteri de forma apreciable la solució del problema ($\epsilon > 0$, $\epsilon = 10^{-6}$).

El programa dual de (4.22) dóna una aproximació lineal a trossos de la funció de producció òptima mitjançant la minimització de les m quantitats dels inputs necessàries per produir els nivells fixats dels s outputs.

El dual serà:

$$\min \lambda_o$$

subjecta a (4.25)

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\, y_{rj} \geq y_{ro} \qquad r = 1,\ldots s$$

$$-\sum_{j=1}^{n} z_j \; x_{ij} + \lambda_o \; x_{io} \geq 0 \qquad\qquad i = 1,\dots m$$

$$z_j \geq 0 \quad \text{i} \quad \lambda_o \text{ sense restricció de signe}$$

El valor de λ_o indica la relació entre les combinacions ponderades de cadascun dels inputs de les unitats eficients i les quantitats emprades actualment per la unitat avaluada. Mesura la divergència entre el nivell òptim de consum d'inputs i el consum actual.

El problema dual de (4.24) determina el nivell màxim d'outputs que es pot obtenir de l'actual conjunt de quantitats d'inputs. La seva formulació és:

$$\max \; \pi_o$$

subjecta a (4.26)

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \; x_{ij} \leq x_{io} \qquad\qquad i = 1,\dots m$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \; y_{rj} + \pi_o \; y_{ro} \leq 0 \qquad\qquad r = 1,\dots s$$

$$\gamma_j \geq 0 \quad \text{i} \quad \pi_o \text{ sense restricció de signe}$$

Si introduïm variables de folgansa a (4.25) i a (4.26) tindrem:

$$\min \lambda_o - \epsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s^-_{io} + \sum_{r=1}^{s} s^+_{ro} \right)$$

subjecta a (4.27)

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\, y_{rj} - s^+_r = y_o \qquad r = 1, \ldots s$$

$$- \sum_{j=1}^{n} z_j\, x_{ij} + \lambda_o\, x_{io} - s^-_i = 0 \qquad i = 1, \ldots m$$

$z_j,\ s^-_i,\ s^+_r \geq 0$

λ_o sense restricció de signe

i

$$\max \pi_o + \epsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s^-_{io} + \sum_{r=1}^{s} s^+_{ro} \right)$$

subjecta a (4.28)

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, x_{ij} + s^-_i = x_{io} \qquad i = 1, \ldots m$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, y_{rj} + \pi_o\, y_{ro} + s^+_r = 0 \qquad r = 1, \ldots s$$

$\gamma_j,\ s^-_i,\ s^+_r \geq 0$

π_o sense restricció de signe

La DMU_o serà eficient només si $\pi^*_o = 1$ i $s^-_i = s^+_r = 0$.

Cal recordar que $\pi^*_o = 1 / \lambda^*_o$.

4.2.2. Postulats del conjunt factible de producció.

R.D. Banker, A. Charnes i W.W. Cooper[16] -en endavant BCC- estableixen que, per tal de poder determinar una mesura de l'eficiència amb tècniques de programació lineal i seguir, a la vegada, els plantejaments de Farrell, cal que el conjunt factible de producció (el conjunt de punts que satisfan les restriccions del problema de programació lineal) tingui les següents propietats:

A) CONVEXITAT

Si $(X_j, Y_j) \in T$, $j = 1, \ldots n$ i z_j són escalars no negatius que compleixen $\sum_{j=1}^{n} z_j = 1$, llavors

$$\left(\sum_{j=1}^{n} z_j X_j \ , \ \sum_{j=1}^{n} z_j Y_j \right) \in T$$

16. R.D.BANKER, A.CHARNES i W.W. COOPER, "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis". Management Science, vol. 30, nº 9, setembre 1984, p. 1078-1092.

Les expressions $\sum_{j=1}^{n} z_j X_j$ i $\sum_{j=1}^{n} z_j Y_j$ amb ponderacions no negatives que sumen 1, s'anomenen combinacions convexes dels punts X_j i Y_j, respectivament.

En conseqüència, afirmarem que tota combinació convexa de punts de T és un conjunt convex que pertany a T.

El supòsit de convexitat del conjunt factible és un postulat bàsic per a la resolució de problemes d'optimització, ja que les condicions de l'òptim global exigeixen la convexitat del conjunt factible i la concavitat i convexitat de la funció objectiu en cas de màxims i de mínims, respectivament. En la programació lineal la funció objectiu és lineal, per la qual cosa la podem pendre com còncava i convexa a la vegada.

La convexitat del conjunt factible de producció suposa que si dues possibilitats de producció són observades en la pràctica, qualsevol pla de producció que en sigui una combinació convexa ponderada, també es pot aconseguir.

B) POSTULAT D'INEFICIENCIA O MONOTONICITAT

a) Si $(X,Y) \in T$ i $\bar{X} \geq X$, llavors $(\bar{X},Y) \in T$

b) Si $(X,Y) \in T$ i $\bar{Y} \leq Y$, llavors $(X,\bar{Y}) \in T$

El postulat d'ineficiència és una conversió del de forta disponibilitat d'inputs, el qual estableix que si algun input augmenta i els altres no varien, l'output no decreix. Recordem que aquest és un dels supòsits establerts per Farrell per a l'avaluació de l'eficiència productiva d'una firma.

BCC hi han afegit una part addicional i l'han convertit en postulat d'ineficiència per indicar que la producció ineficient és sempre possible en la forma de més inputs, de menors outputs o ambdues alhora.

Com A. Charnes, W.W. Cooper i altres[17] podem expressar de forma gràfica els diferents conjunts factibles de producció de la manera següent:

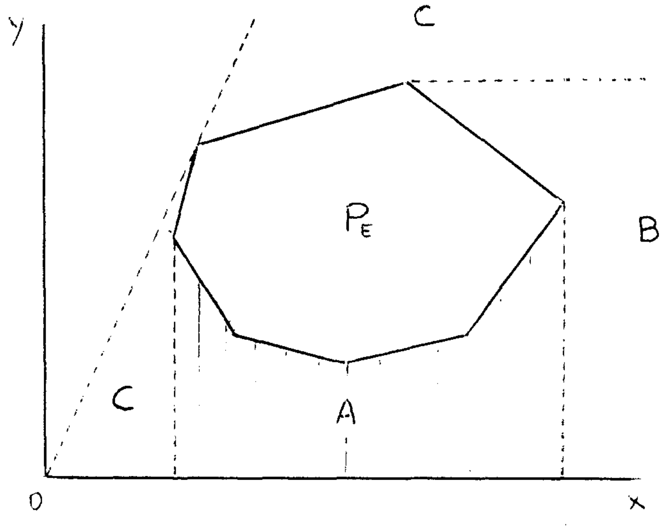

Fig. 4.10.

P_E U A defineix el conjunt factible de producció que BCC amplien al conjunt B, mentre que el conjunt definit per Farrell era el composat per P_E U A U B U C.

17. A. CHARNES, W.W. COOPER, B. GOLANY i L. SEIFORD, "Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions". Journal of Econometrics, vol. 30, nº 1/2, octubre-novembre 1985, p. 91-107.

C) <u>RADI NO LIMITAT</u>

Si $(X,Y) \in T$, llavors $(kX,kY) \in T$ per cada $k > 0$.

La propietat de la linealitat implica que tots els punts situats sobre la línia que parteix de l'origen, passa pels punts que representen alguna activitat i es perllonga indefinidament, són punts que pertanyen a T.

Aquesta propietat de la linealitat que defineix els rendiments constants d'escala és un altre dels supòsits bàsics de M.J. Farrell, ja que permet, -en cas d'emprar només dos factors productius en l'obtenció d'un output individual-, representar tota la informació rellevant en una simple isoquanta.

La propietat de combinació lineal[18], -que també compleixen les activitats productives del model lineal general-, implica que tots els punts situats sobre les rectes que uneixen un parell de punts de les línies d'activitat també pertanyen a T.

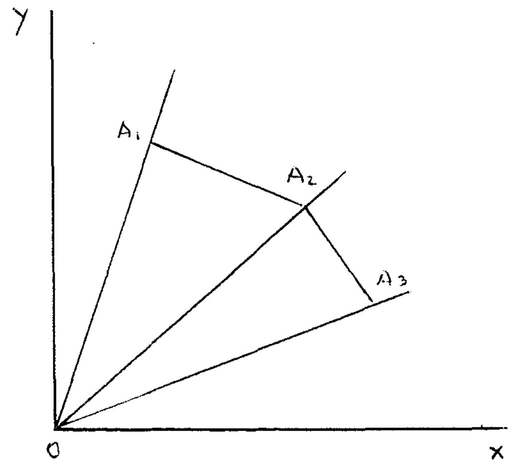

Fig. 4.11.

18. K. LANCASTER, <u>Mathematical Economics</u>. The Macmillan Company, New York 1968, p. 99.

A_1, A_2, A_3 són punts que representen tres activitats diferents.

D) EXTRAPOLACIO MINIMA

T és el conjunt intersecció de tots els subconjunts $\hat{T}$ que satisfan els anteriors postulats i que estan subjectes a la condició que cadascun dels vectors observats $(X_j, Y_j) \in \hat{T}$, $j = 1, \ldots n$. Així T és el menor conjunt convex que compté (X_j, Y_j).

En un problema de programació lineal, l'òptim s'aconseguirà en un punt extrem o en un conjunt de punts extrems i com que el conjunt factible és un conjunt convex limitat per restriccions lineals, tots els punts extrems són interseccions de restriccions lineals. Per tant, hi haurà un nombre finit de punts extrems, la qual cosa defineix el conjunt convex T com un conjunt convex polièdric.

Podem expressar el conjunt T com:

$$T = \{(X,Y) \mid x \geq k \sum_{j=1}^{n} z_j X_j ; \quad Y \leq k \sum_{j=1}^{n} z_j Y_j ; \quad \sum_{j=1}^{n} z_j = 1 ;$$

$$z_j \geq 0 \quad i \quad k > 0 \} \qquad (4.29)$$

La producció eficient correspon a la mínima utilització d'inputs, $-\lambda(x,y)$ de la funció de distància de Shephard-, per tant, i si tenim en compte la caracterització d'algun $(X,Y) \in T$ podem escriure el nostre objectiu com:

$$\min \lambda(X,Y) = \min \lambda_0$$

subjecta a (4.30)

$$\lambda_0 X_0 \geq k \sum_{j=1}^{n} z_j X_j$$

$$Y_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} z_j Y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = 1 \qquad j = 1, \ldots n$$

$$z_j \geq 0 \quad ; \quad k > 0$$

λ_0 sense restricció de signe

Si fem un canvi de variables i substituïm $\mu = kz_j$ tindrem:

$$\min \lambda_0$$

subjecta a (4.31)

$$\lambda_0 X_0 \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j$$

$$Y_0 \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j Y_j$$

$\mu_j \geq 0$ $\qquad j = 1, \ldots n$

λ_o sense restricció de signe

Com podem observar aquest problema és idèntic al plantejat per R. Färe i S. Grosskopf[19] per a la mesura de l'eficiència tècnica en una tecnologia amb rendiments constants d'escala.

Un altre fet destacable és que el problema (4.31) és el dual del problema (4.22) i equivalent al (4.25) i consisteix en minimitzar les quantitats necessàries dels inputs per produir els nivells fixats dels diferents outputs.

Per a l'avaluació de l'eficiència d'una unitat, prèvia introducció de les variables de folgansa, podem substituir el problema anterior per:

$$\min \lambda_o - \epsilon \left(\sum_{j=1}^{n} s^-_i + \sum_{j=1}^{n} s^+ \right)$$

subjecta a (4.32)

$$\lambda_o x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_{ij} - s^-_i = 0 \qquad i = 1, \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_{rj} - s^+_r = y_{ro} \qquad r = 1, \ldots s$$

$\mu_j, \; s^-_i, \; s^+_r > 0$

λ_o sense restricció de signe

19. Vid. R. FÄRE i S.GROSSKOPF, art. cit. i p. , formulació (4.11).

La solució d'aquest dóna una mesura de l'eficiència tècnica d'una DMU, la qual serà eficient si $\lambda^*_o = 1$ i zero les variables de folgansa.

Il.lustrarem l'exposició anterior amb un exemple de sis hipotètiques DMU's diferents que desenvolupen la mateixa activitat i produeixen un únic output y amb quantitats variables de dos inputs (x_1, x_2).

Les quantitats requerides de cada input per una unitat d'output per cadascuna de les sis DMU's són les següents:

DMU / input	1	2	3	4	5	6
x	0.4	1	1.2	2.4	3.1	4.9
x	3.1	2.7	1.3	1.8	0.8	0.6

La DMU més eficient tècnicament serà aquella que necessiti menys quantitats d'inputs per produir una unitat d'output. Aparentment no podem qualificar d'ineficient cap de les anteriors unitats, doncs hi ha força divergència en les quantitats d'inputs utilitzades per cadascuna d'elles.

En la figura 4.12 hem recollit les observacions dels dos inputs de les sis DMU's. La isoquanta unitària relaciona les unitats eficients i defineix la frontera de producció de la mostra.

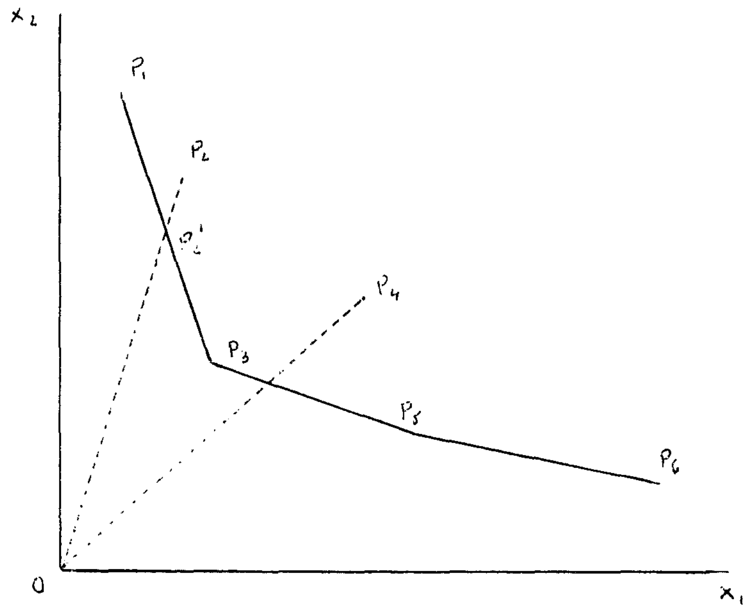

Fig. 4.12.

El punt P_2 representa la unitat 2 i ve definit per les quantitats d'inputs requerits per aquesta DMU hipotètica per produir una unitat d'output. Per altra banda, el punt P'_2 també obté una unitat del mateix output, però consumeix menys quantitat dels dos factors (x_1, x_2).

Per tant, per mesurar l'eficiència de la DMU.2 podem emprar la ratio

$$OP'_2 \;/\; OP_2$$

OP'_2 representa la longitud de la recta des de l'origen a P'_2, i OP_2 la d'aquesta mateixa recta fins a P_2.

Evidentment, el valor resultant serà menor a 1, i el mateix succeirà de l'aplicació d'una mesura similar a les dades associades amb P_4. Les altres quatre DMU's són eficients ja que es situen a la isoquanta unitària, mentre que això no és cert per P_2 i P_4.

Per a l'avaluació de l'eficiència d'aquestes unitats, a més a més de l'anàlisi gràfica, podem resoldre el problema

(4.27) que ofereix una caracterització de l'eficiència pel cantó de la programació dual, la qual és equivalent a la formulació original de la ratio de CCR (4.21).

Els resultats obtinguts en les diferents minimitzacions són:

DMU	Eficiència	Conjunt de referència	
1	1	-	-
2	0,808	DMU.1 (0,49)	DMU.3 (0,51)
3	1	-	-
4	0,665	DMU.3 (0,792)	DMU.5 (0,208)
5	1	-	-
6	1	-	-

Nota: Les xifres entre parèntesi indiquen la proporció d'inputs que de cada unitat de referència hauria d'emprear la DMU avaluada per esdevenir eficient.

Els valors òptins de les variables duals del problema (4.27) per a la DMU associada amb P_2 són:

$$u^* = 0,808; \qquad v^*_1 = 0,455; \qquad v^*_2 = 0,202$$

els quals donen una estimació màxima de l'eficiència d'aquesta unitat de

$$z^*_2 = \frac{1 \cdot 0,808}{1 \cdot 0,455 + 2,7 \cdot 0,202} = 0,808 \qquad (4.33)$$

i per a les altres DMU's de

$$\text{DMU.1} \quad \frac{1 \cdot 0,808}{0,4 \cdot 0,455 + 3,1 \cdot 0,202} = 1$$

$$\text{DMU.3} \quad \frac{1 \cdot 0,808}{1,2 \cdot 0,455 + 1,3 \cdot 0,202} = 1$$

$$\text{DMU.4} \quad \frac{1 \cdot 0,808}{2,4 \cdot 0,455 + 1,8 \cdot 0,202} = 0,555$$

$$\text{DMU.5} \quad \frac{1 \cdot 0,808}{3,1 \cdot 0,455 + 0,8 \cdot 0,202} = 0,514 \tag{4.34}$$

$$\text{DMU.6} \quad \frac{1 \cdot 0,808}{4,9 \cdot 0,455 + 0,6 \cdot 0,202} = 0,344$$

L'expressió (4.33) correspon a la funció objectiu del problema primal (4.21), mentre que (4.34) és el conjunt de restriccions d'aquest mateix problema si hi afegim la corresponent a la unitat avaluada (DMU.2).

Evidentment, P_2 no és eficient, i el valor de λ^*_2 significa que és capaç d'aconseguir una unitat d'output amb només 0,808 de les quantitats actuals dels inputs. El valor recíproc 1.238 (1 / 0.808) indica les unitats d'output que poden obtenir-se dels inputs actuals en comptes de la unitat que ara produeix.

Això s'estableix per referència a les dades de les observacions eficients P_1 i P_3, com es pot veure dels valors de la primera i segona restricció de (4.34).

La unitat 4 obté una estimació de l'eficiència de 0.665, per referència a les dades de P_3 i P_5. Si en el conjunt de restriccions substituïm els valors òptims obtinguts del càlcul de l'estimació de l'eficiència de la DMU.4 podem verificar els resultats:

$$u^* = 0,665; \qquad v^*_1 = 0,108; \qquad v^*_1 = 0,202$$

$$\text{DMU.1} \quad \frac{1 \cdot 0,665}{0,4 \cdot 0,108 + 3,1 \cdot 0,41} = 0,506$$

$$\text{DMU.2} \quad \frac{1 \cdot 0,665}{1 \cdot 0,108 + 2,7 \cdot 0,41} = 0,547$$

$$\text{DMU.3} \quad \frac{1 \cdot 0,665}{1,2 \cdot 0,108 + 1,8 \cdot 0,41} = 1$$

$$\text{DMU.4} \quad \frac{1 \cdot 0,665}{2,4 \cdot 0,108 + 1,8 \cdot 0,41} = 0,665 \qquad (4.35)$$

$$\text{DMU.5} \quad \frac{1 \cdot 0,665}{3,1 \cdot 0,108 + 0,8 \cdot 0,41} = 1$$

$$\text{DMU.6} \quad \frac{1 \cdot 0,665}{4,9 \cdot 0,108 + 0,6 \cdot 0,41} = 0,858$$

De la comparació dels resultats d'aquestes dues avaluacions podem observar que:

a) Els valors de u^*, v^*_1, v^*_2 són diferents en les dues avaluacions.

b) El $\lambda^*_2 = 0,808$ del primer conjunt és l'estimació correcte per a DMU.2, ja que s'obté del seu conjunt de rereferència (DMU.1 i DMU.3).

c) Els punts P_3 i P_5 són el correcte conjunt de referència per a DMU.4, però no per a DMU.2.

Els valors v^*_1, v^*_2 obtinguts de les solucions del problema de programació lineal corresponen als coeficients dels diferents segments de la isoquanta de la figura 4.12. Per exemple, el segment que s'estén de P_1 a P_3 representa el conjunt definit per

$$v^*_1 x_1 + v^*_2 x_2 = u^* y$$

$$\{(x_1, x_2): \quad 0,563\ x_1 + 0,25\ x_2 = 1; \quad 0,4 \leq x \leq 1,2\ , \quad 1,3 \leq x_2 \leq 3,1\} \qquad (4.36)$$

on els coeficients de les variables s'obtenen de (4.27) via

$$v^*_1 = 0.455; \qquad v^*_2 = 0.202; \qquad u^* = 0.808$$

Evidentment, v^*_1/u^* i v^*_2/u^* són les productivitats marginals dels inputs deduïdes de l'activitat de DMU.2 i aplicables en l'avaluació d'alguna DMU situada en aquest mateix segment de la isoquanta.

Aquestes productivitats es poden aplicar en l'extensió indicada en la segona fracció de (4.36) on es complirà la igualtat entre les productivitats marginal i mitjana (rendiments constants d'escala).

De l'aplicació d'aquests valors als inputs de la DMU.2

$$1 \frac{v^*_1}{u^*} + 2,7 \frac{v^*_2}{u^*} = 1 \cdot 0,563 + 2,7 \cdot 0,25 = 1,238$$

obtenim un valor màxim 1.238 (el recíproc de la ratio de l'eficiència) que indica la quantitat d'output que es pot obtenir amb els inputs actuals, en comptes de la unitat d'output que la DMU.2 produeix.

Les productivitats marginals corresponents al segment de la isoquanta que s'estén de P_3 a P_5 s'obtenen de

$$u^* = 0,665; \qquad v^*_1 = 0,108; \qquad v^*_2 = 0,202$$

de manera que el conjunt resultant es representat per

$$\{(x_1, x_2): \; 0{,}162\, x_1 + 0{,}617\, x_2 = 1$$
$$1{,}2 \leq x_1 \leq 3{,}1 \;;\; 0{,}8 \leq x_2 \leq 1{,}3\} \qquad (4.37)$$

Aquesta nova expressió difereix de (4.36), ja que P_3 i P_5 no tenen el mateix conjunt de referència que P_2 i es situen a diferents segments de producció, però una interpretació similar de les dades dóna

$$2{,}4 \frac{v^*_1}{u^*} + 1{,}8 \frac{v^*_2}{u^*} = 2{,}4 \cdot 0{,}162 + 1{,}8 \cdot 0{,}617 = 1{,}5$$

que equival a la quantitat d'output que la DMU.4 pot obtenir d'una actuació eficient.

Es important remarcar que els valors de les productivitats marginals són obtinguts de diferents conjunts de referència. Per aqüesta qüestió seria erroni aplicar les productivitats marginals corresponents a P_4 per a l'avaluació de la DMU.2, i també ho seria aplicar les productivitats marginals associades amb P_2 per estimar els augments de l'output que és possible obtenir d'una utilització eficient dels inputs de la DMU.4.

Cal insistir que la superfície de producció que hem estimat no és lineal, només ho és a trossos i que les productivitats associades són també constants a trossos i només aplicables dins les extensions especificades.

Aquest exemple mostra que, encara que no s'han fet supòsits previs sobre les estructures de producció de les DMU's, la dualitat de la programació lineal associa amb cada formulació de la ratio una frontera de producció eficient amb rendiments constants a escala, la qual és una aproximació local de la funció de producció de cada DMU.

En l'estimació de l'eficiència d'un punt de la isoquanta és natural parlar en termes de reduccions dels inputs, peró el model que hem emprat permet aplicar les mesures simultàniament a outputs i inputs, si així es desitja.

Hem demostrat que per aconseguir que la DMU.2 sigui eficient, cal reduir a una proporció de 0.808 unitats les quantitats actuals dels seus factors, la qual cosa dóna uns valors eficients de

$$0{,}808 \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}808 \\ 2{,}182 \end{bmatrix}$$

Aquestes quantitats les podriem determinar, també, a partir del conjunt de referència, car les quantitats dels inputs que la DMU.2 hauria d'emprar són una combinació dels inputs de la DMU.1 i de la DMU 3. Així

$$\begin{array}{ccccc} & \text{DMU.1} & & \text{DMU.3} & & \text{DMU.2} \\ 0{,}49 & \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 3{,}1 \end{bmatrix} & + \; 0{,}51 & \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0{,}808 \\ 2{,}182 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aquests nous valors es situen entre els límits expressats per (4.36) i donaran a la DMU.2 una estimació de l'eficiència igual a 1 (100%).

Però per augmentar l'eficiència tècnica d'aquesta unitat tenim altres alternatives com és la de variar només un dels factors de producció, deixant l'altre constant, o bé, la d'augmentar l'output produït sense alterar els inputs actuals.

Per fer això utilitzem els coeficients de les variables (u^*, v^*_1, v^*_2) obtinguts de la solució del problema de programació lineal.

Per tal que la DMU.2 sigui eficient necessitem augmentar la seva estimació actual de l'eficiència en 0.192 (1 - 0.808), cosa que podem aconseguir a través de:

a) Reduir només x_1 0.192 / 0.455 = 0.422
amb la qual cosa, la quantitat necessària del primer factor és 1 - 0.422 = 0.578

b) Reduir només x_2 0.192 / 0.202 = 0.95
que situa la quantitat necessària del segon factor a 2.7 - 0.95 = 1.75

c) Augmentar l'output 0.192 / 0.808 = 0.238
i produir 1 + 0.238 = 1.238 unitats d'output.

En conseqüència podem concloure que una reducció d'una unitat en l'actual nivell de l'input x_1 contribueix en un 45,5% a la millora de l'eficiència; una reducció d'una unitat en la quantitat d' x_2 contribueix a millorar l'eficiència de la DMU.2 en un 20,2%, i que un augment d'una unitat en la producció aporta una millora a l'eficiència del 80,8%.

El nou índex de l'eficiència de la DMU.2 que resulta de l'aplicació dels valors corregits dels inputs i de l'output és

$$x_1 \quad \frac{1 \cdot 0{,}808}{0{,}455 \cdot 0{,}578 + 0{,}202 \cdot 2{,}7} = 1$$

$$x_2 \quad \frac{1 \cdot 0{,}808}{0{,}455 \cdot 1 + 0{,}202 \cdot 1{,}75} = 1$$

$$y \quad \frac{1{,}238 \cdot 0{,}808}{0{,}455 \cdot 1 + 0{,}202 \cdot 2{,}7} = 1$$

Les productivitats marginals derivades de v^*_1 i v^*_2 ens permeten calcular, també, la relació tècnica de substitució dels inputs, la qual indica les possibilitats de substitució d'un factor (x_1) per un altre (x_2), si es manté constant el nivell d'output.

$$RTS = \frac{PMa\ x_1}{PMa\ x_2} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{v^*_1/u^*}{v^*_2/u^*} \qquad (4.38)$$

Per la DMU.2 aquesta relació és:

$$RTS = \frac{0.563}{0.25} = \frac{0.455}{0.202} = 2.252$$

L'expressió anterior denota que per cada unitat menys de x_1, cal augmentar en 2,252 unitats la quantitat actual de x_2 si volem mantenir la producció actual. El valor invers (0.44) assenyala l'augment d'x_1 quan reduïm el factor x_2 en una unitat.

En cas de producció de múltiples outputs els seus diferents coeficients (u^*_1, u^*_2, ...) permeten determinar la relació de transformació de productes, és a dir, les possibilitats de substitució de la producció d'un element (y_1) per la d'un altre (y_2) sense alterar els nivells actuals dels inputs

$$RTP = - \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{u^*_1}{u^*_2} \tag{4.39}$$

4.2.3. L'eficiència d'escala.

4.2.3.1. La dimensió d'escala més productiva ("most productive scale size", mpss).

Per a la producció d'un output individual que només requereix d'un input, la grandària d'escala o dimensió més productiva és l'escala d'operacions en la que es maximitza la productivitat mitjana, mesurada per la ratio

$$\frac{\text{Output total}}{\text{Input total}}$$

A cada combinació d'input i output correspon un mpss, aspecte que està relacionat amb el de rendiments d'escala, com tot seguit demostrarem.

El mpss per a una determinada combinació d'inputs i d'outputs és el nivell d'operacions en que l'output produït per unitat d'input és màxim. Així, una possibilitat de producció $(X_*, Y_*) \in T$ representa un mpss només si es compleix que $\alpha / \beta \leq 1$ per a totes les altres possibilitats de producció $(\beta X_*, \alpha Y_*) \in T$ on α i β són escalars positius.

Quan es fa $(X_o, Y_o) = (\beta X_*, \alpha Y_*)$ i $\alpha / \beta \leq 1$ estem describint una possibilitat de producció situada per sobre o per sota de (X_*, Y_*). Com que

$$\beta = \frac{X_o}{X_*} \qquad \alpha = \frac{Y_o}{Y_*} \qquad (4.40)$$

La condició $\alpha / \beta \leq 1$ estableix que (X_*, Y_*) és un mpss quan té una productivitat mitjana superior a la resta de possibilitats de producció. Així

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{Y_o / Y_*}{X_o / X_*} \leq 1 \quad ==> \quad \frac{Y_o}{X_o} \leq \frac{Y_*}{X_*} \qquad (4.41)$$

Per tant, el concepte de mpss està basat en la comparació de productivitats mitjanes.

(X_*, Y_*) representa el punt on la productivitat mitjana del conjunt és màxima i igual a la seva productivitat marginal, per tant, prevalen els rendiments constants d'escala.

Per qualsevol possibilitat de producció menor, la tecnologia presenta rendiments creixents d'escala i, rendiments decreixents, quan la possibilitat de producció és superior a (X_*, Y_*). Així, quan volguem maximitzar la productivitat mitjana haurem d'augmentar la grandària d'escala si ens troben en una zona de rendiments creixents i reduir-la quan presenti rendiments decreixents.

Hem demostrat anteriorment que l'estimació de l'eficiència agregada d'una DMU s'obté del problema (4.27) o del (4.28), els quals presenten en la solució òptima valors de la funció objectiu iguals a 1 i de les variables de folgansa iguals a zero. Amb aquestes premises volem demostrar que ambues formulacions permeten estimar si la unitat que avaluem és un mpss.

El procediment que seguirem difereix del desenvolupat per R.D. Banker[20], el qual estudia el mpss a partir de les altres observacions de la mostra, mentre que el nostre procés parteix de la situació inversa. Evidenment, hom arriva a les mateixes conclusions, encara que una interpretació errònia dels resultats podria fer semblar que aquests són contraoposats.

En el problema (4.27) i en cas d'un sol input i un únic output, les restriccions poden escriure's

20. Vid. R.J. BANKER, "Estimating most produtive... ", art. cit.

$$zY_s - s_r = Y_o$$
$$zX_s + s_i = \lambda^*_o X_o \qquad (4.42)$$

on els subíndex 0 i s identifiquen la unitat avaluada i el mpss, respectivament.

En l'òptim, les variables de folgansa són zero i la primera restricció es complirà amb igualtat, $zY_s = Y_o$ i com que $\alpha = Y_o / Y_s$ podem afirmar que $z = \alpha$, la qual cosa indica la proporció que l'output obtingut per la unitat avaluada representa de l'eficient.

Si la segona restricció també es compleix amb igualtat, $zX_s = \lambda^*_o X_o$, $z = \lambda^*_o X_o / X_s$ i com que $z = \alpha$ i $X_o / X_s = \beta$ podem escriure que $\lambda^*_o = \alpha / \beta$ que, com hem demostrat abans, és la relació entre la productivitat mitjana de les dues unitats.

Per tant, quan en el problema (4.27) minimitzem λ_o intentem que la relació entre la productivitat mitjana de la DMU avaluada i la de la unitat eficient (mpss) sigui el més petita possible. Altrament dit, pretenem maximitzar la productivitat mitjana de la unitat avaluada.

En cas de múltiples inputs i outputs, quan $k^*_o = \Sigma z_j$ i les variables de folgansa són zero, les restriccions del problema (4.27) poden escriure's

$$k^*_o Y_j = Y_o \qquad (4.43)$$
$$k^*_o X_j = \lambda^*_o X_o$$

on Y_j i X_j indiquen el conjunt de referència format per les DMU eficients que en aquest cas correspondrà als outputs i als inputs del mpss (X_s, Y_s).

Si fem $k^*_o = \alpha$; $k^*_o / \lambda^*_o = \beta$ tindrem $\alpha Y_m = Y_o$ i $\beta X_m = X_o$ i com que s'ha de complir que $\alpha / \beta \leq 1$, llavors $k^*_o \,/\, k^*_o / \lambda^*_o = \lambda^*_o \leq 1$. És a dir, que la unitat avaluada serà ineficient sempre i quan no maximitzi la seva productivitat mitjana. Per tant, podem afirmar que

$$\left(\frac{X_o \lambda^*_o}{k^*_o} , \frac{Y_o}{k^*_o} \right) \quad \text{representa un mpss.}$$

Quan $\lambda^*_o = 1$ i $k^*_o = 1$ ens trobem en la possibilitat de producció (X_m, Y_m) que, evidenment, és un mpss.

Quan en la solució del problema (4.27) λ^*_o prengui valors inferiors a 1 apareixeran variables de folgansa positives i podrem escriure les seves dues primeres restriccions de la manera següent:

$$k^*_o Y_j - s^*_r = Y_o \qquad Y_j = \frac{Y_o + s^*_r}{k^*_o}$$

$$k^*_o X_j + s^*_i = \lambda^*_o X_o \qquad X_j = \frac{\lambda^*_o X_o - s^*_i}{k^*_o} \tag{4.44}$$

amb la qual cosa podem afirmar que

$$\left(\frac{\lambda^*_o X_o - s^*_i}{k^*_o} , \frac{Y_o + s^*_r}{k^*_o} \right) \quad \text{representa un mpss i està}$$

situat a la frontera de producció eficient, on s^*_i i s^*_r representen les variables de folgansa dels inputs i dels outputs, respectivament.

En ambdós casos, $k^*_o = \Sigma z_j$, $j = 1, \ldots n$ subministra una mesura de la divergència entre l'actual nivell d'operacions de la unitat avaluada i el seu mpss.

Quan $k^*_o = 1$ la possibilitat de producció representa un mpss; quan $k^*_o > 1$, α serà major que 1, i $\beta \geq \alpha$ per complir que $\alpha / \beta \leq 1$, que farà que $\lambda^*_o < 1$. Si volem maximitzar la productivitat mitjana haurem de modificar l'actual combinació de producció mitjançant

$$X_o / \beta = X_* \qquad \text{i} \qquad Y_o / \alpha = Y_* \qquad (4.45)$$

i com que $\beta = k^*_o / \lambda^*_o$, $\alpha = k^*_o$ podrem escriure
$Y_* = Y_o / k^*_o$ i $X_* = X_o \lambda^*_o / k^*_o$ que equival a una reducció de l'input més que proporcional a la reducció dels outputs, la qual cosa ens situa en una regió de rendiments decreixents a escala.

Quan la possibilitat de producció contemplada estigui situada per sota del mpss haurem d'incrementar la dimensió d'escala per aconseguir fer màxima la productivitat mitjana. En aquesta zona prevalen els rendiments creixents d'escala i k^*_o assoleix valors inferiors a la unitat. α i k^*_o seran inferiors a 1, i $\beta > \alpha$.

La formulació (4.27) serveix per calcular l'eficiència global d'una DMU a través de la minimització de les quantitats dels inputs, però també podriem utilitzar la formulació recíproca de l'anterior, la (4.28), que permet calcular la ineficiència pel cantó de l'output.

Amb $q^*_o = \Sigma \gamma_j$, $\eta^*_o = 1$ i les variables de folgansa iguals a zero, les dues primeres restriccions del problema (4.28) poden escriure's

$$q^*_o X_j = X_o \qquad (4.46)$$
$$q^*_o Y_j = \eta^*_o Y_o$$

i si fem $\beta = q_o^*$ i $\alpha = q^*_o/\eta^*_o$ dóna $X_o = \beta X_j$ i $Y_o = \alpha Y_j$.

Per tal que la combinació avaluada representi un mpss, cal que $\alpha/\beta \leq 1$, d'on es pot deduir que

$$\frac{q^*_o \,/\, \eta^*_o}{q^*_o} = 1 \,/\, \eta^*_o \leq 1 \qquad (4.47)$$

amb la qual cosa queda demostrat que $\left(\frac{X_o}{q^*_o}, \frac{\eta^*_o Y_o}{q^*_o}\right)$ representa un mpss i és el mpss del conjunt factible si $\eta^*_o = 1$ i $q^*_o = 1$.

Amb $\eta^*_o < 1$ també es compleix la condició de mpss, però com que no és la solució òptima de (4.28), les variables de folgansa són positives. LLavors

$$q^*_o X_j + s^*_i = X_o \quad ; \quad X_j = \frac{X_o - s^*_i}{q^*_o} \qquad (4.48)$$

$$q^*_o Y_j - s^*_r = \eta^*_o Y_o \quad ; \quad Y_j = \frac{\eta^*_o Y_o + s^*_r}{q^*_o}$$

que descriu una possibilitat de producció situada a la frontera de producció eficient i que representa un mpss.

Com cas dels inputs, $q^*_o = \Sigma \gamma_j$ dóna una mesura de la divergència entre la grandària d'escala actual i el mpss d'una combinació donada d'inputs i outputs.

Ja haviem assenyalat que existeix un únic mpss, per tant, la relació entre les ponderacions z^*_j de les DMU's del conjunt de referència del problema (4.27) i les γ^*_j del problema (4.28) ve donada per la següent expressió

$$\lambda^*_o \sum_{j=1}^{n} \gamma^*_j = \sum_{j=1}^{n} z^*_j$$

En el problema (4.27) obteníem que

$$X_j = \frac{\lambda^*_o X_o}{k^*_o} \qquad Y_j = \frac{Y_o}{k^*_o} \qquad (4.49)$$

i en el problema (4.28)

$$X_j = \frac{X_o}{q^*_o} \qquad Y_j = \frac{\eta^*_o Y_o}{q^*_o} \qquad (4.50)$$

Com que ambdues expressions corresponen a les mateixes variables, podem igualar-les

$$\frac{\lambda^*_o X_o}{k^*_o} = \frac{X_o}{q^*_o} \qquad \frac{Y_o}{k^*_o} = \frac{\eta^*_o Y_o}{q^*_o} \qquad (4.51)$$

i si fem operacions tindrem

$$k^*_o = \lambda^*_o q^*_o \qquad k^*_o = \frac{q^*_o}{\eta^*_o} \qquad (4.52)$$

Com que λ^*_o i η^*_o, són les solucions de dos problemes reciporcs i $\eta^*_o = 1 / \lambda^*_o$, si les susbstituïm en la segona expressió anterior dóna

$$k^*_o = \frac{q^*_o}{1 / \lambda^*_o} \quad \text{que és equivalent a} \quad k^*_o = q^*_o \cdot \lambda^*_o \qquad (4.53)$$

Hem demostrat que la mesura de l'eficiència agregada d'una unitat proposada per CCR és igual a 1 quan la DMU avaluada representa un mpss, i que alhora ens permet obtenir alguna informació sobre les característiques de la funció de producció.

Suposem un conjunt de cinc unitats de decisió que defineixen un conjunt factible de producció com el representat en la figura 4.13. Les dades referents a les DMU's estudiades són:

DMU	1	2	3	4	5
input x	9	12	20	30	16
output y	10	21	25	27	15

Els resultats de les repetides aplicacions de la formulació (4.27) per calcular l'eficiència agregada es mostren tot seguit

DMU	EFICIENCIA GLOBAL	INVERS EFICIENCIA GLOBAL
1	0,635	1,575
2	1	1
3	0,714	1,4
4	0,514	1,946
5	0,536	1,866

Valorem ara si alguna de les observacions del conjunt és un mpss. Per ser-ho cal que $\lambda^*_o = 1$ i que el quocient $\alpha / \beta = 1 / \lambda^*_o$ sigui menor que o igual a 1 per a totes les altres possibilitats de producció.

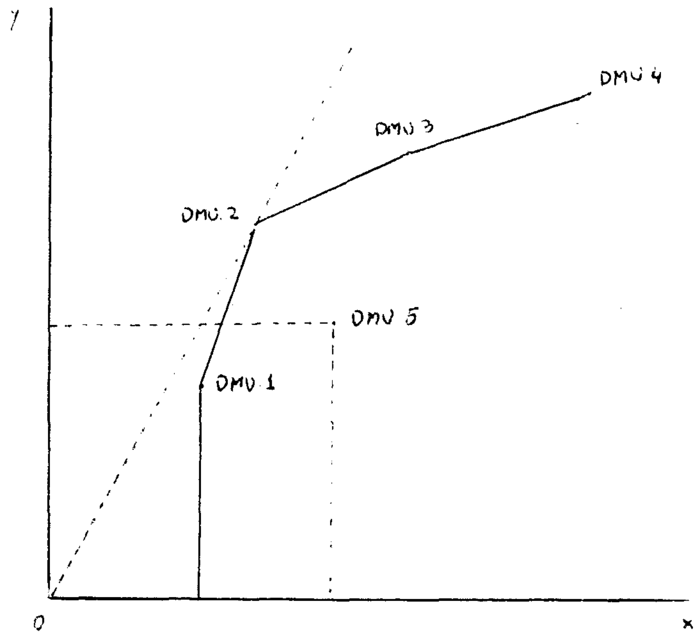

Fig. 4.13.

L'única observació eficient globalment és la DMU.2 i per aifrmar que és un mpss cal que la resta de possibilitats de producció examinades presentin valors de $\alpha / \beta \leq 1$ i un λ^*_o inferior a 1. La divergència entre aquestes unitats i el mpss vindrà donada per k^*_o.

Si partim del supòsit que la DMU.2 és un mpss, els valors de l'input i de l'output de les altres unitats poden ser expressats com una proporció dels aconseguits per la unitat 2 i que són (12, 21):

DMU	VALORS ACTUALS (X , Y)	PROPORCIO (βX , αY)	QUOCIENT α / β
1	(9, 10)	(0.75·12, 0,48·21)	0,64
3	(20, 25)	(1,7 ·12, 1,2 ·21)	0,71
4	(30, 27)	(2,5 ·12, 1,3 ·21)	0,52
5	(16, 15)	(1,3 ·12, 0,7 ·21)	0,54

Com que es compleix que el valor del quocient entre α i β és inferior a la unitat per a cada observació, podem concloure que la possibilitat de producció (12, 21) és un mpss.

Els valors de $k^*_o = \Sigma z_j$, assenyalen la divergència de la dimensió òptima d'aquelles unitats que no maximitzen la productivitat mitjana, i ens permeten determinar el valor òptim de l'input que concedeix a cada observació assolir aquest objectiu sense variar l'actual nivell de producció.

Aquests valors són

DMU	k^*	INPUTS OPTIMS
1	0,476	0,476 · 12 = 5,7
3	1,190	1,190 · 12 = 14,3
4	1,286	1,286 · 12 = 15,4
5	0,714	0,714 · 12 = 8,6

Amb aquests consums dels inputs i amb la producció del mateix output, les unitats avaluades aconseguiran una productivitat mitjana de 1,75 equivalent a la del mpss.

Els valors de k^*_o indiquen el tipus de rendiments a escala que prevalen en la zona on operen les diferents DMU's. Tal com s'ha establert, les unitats 1 i 5 estan situades en una regió de rendiments creixents ($k^*_o < 1$) i la resta d'unitats en una zona de rendiments decreixents ($k^*_o > 1$).

Pel cantó dels outputs -problema (4.28)-, els valors q^*_o assenyalen la divergència entre la producció actual i la òptima, i la proporció de l'output del mpss que cada unitat hauria de produir per aconseguir maximitzar la productivitat mitjana.

DMU	q^*	OUTPUT OPTIM
1	0,75	0,75 · 21 = 15,75
3	1,67	1,79 · 21 = 35
4	2,50	2.50 · 21 = 52,50
5	1,33	1,33 · 21 = 27,93

Amb aquests outputs i sense variar els inputs actuals, les DMU's del conjunt aconseguiran la productivitat màxima. En aquest cas, els valors de q^*_o no indiquen la tendència dels rendiments a escala, com que $k^*_o = q^*_o \cdot \lambda^*_o$ dependrà dels valors que prenquin k^*_o i λ^*_o. Quan $k^*_o > 1$, q^*_o serà superior a 1, ja que λ^*_o sempre és menor a 1. Però quan $k^*_o < 1$, q^*_o pot ser menor o major que 1, tot depen de si k^*_o és major o menor que 1, respectivament.

Hem demostrat que els resultats de l'aplicació de la formulació general de CCR per a l'estimació de l'eficiència agregada d'un conjunt d'unitats de decisió, permet determinar si l'unitat eficient maximitza la productivitat mitjana, alhora que informa de la divergència entre les altres observacions i el mpss del conjunt i del tipus de rendiments d'escala.

4.2.3.2. La mesura de l'eficiència d'escala.

La mesura de l'eficiència agregada que acabem de presentar estima eficients aquelles DMU's que per la seva combinació d'inputs i d'outputs maximitzen l'output produït. Per tant, només seran eficients aquelles unitats que es situin al nivell d'operacions més productiu.

En la mostra d'unitats avaluades n'hi poden haver algunes que, malgrat estar situades a la frontera eficient, no operin en la dimensió més productiva. Aquest aspecte ens permet introduir el concepte d'eficiència d'escala.

A la figura 4.14 hem representat un conjunt factible de producció limitat per la frontera A, B, C, D i l'eix de les ics. Els punts A, B, C i D representen sengles DMU's que actuen amb eficiència tècnica, però que no aconsegueixen maximitzar la seva productivitat mitjana. Aquesta maximització es produirà en el punt de tangència de la frontera de producció i la recta que parteix de l'origen, és a dir, en el punt B.

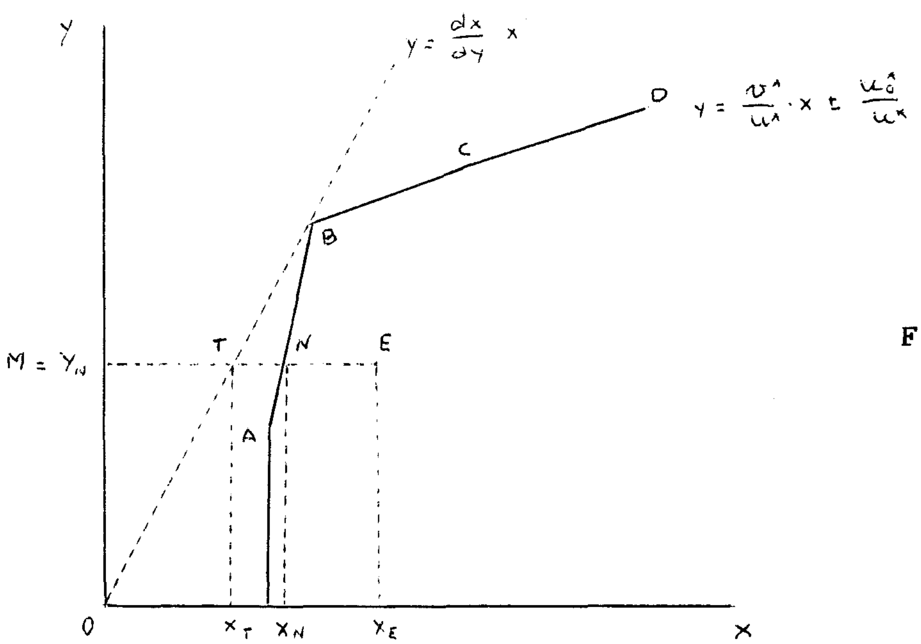

Fig. 4.14.

Avaluem la unitat representada pel punt E, situat dins el conjunt factible de producció. E és ineficient, ja que es situa per sota la superfície fronterera, i per calcular la seva eficiència tècnica el compararem amb el punt N, amb la mateixa dimensió, però tècnicament eficient. La ratio

$$\frac{y_E \;/\; x_E}{y_N \;/\; x_N} = \frac{OM \;/\; ME}{OM \;/\; MN} = \frac{MN}{ME} = \frac{x_N}{x_E} \qquad (4.54)$$

és indicativa de la seva eficiència tècnica.

En el punt N prevalen els rendiments creixents d'escala car la seva productivitat mitjana, mesurada pel pendent de la línia ON (o la ratio y_N / x_N) és menor que el pendent de la línia OB (o la ratio y_B / x_B) per tant, -i segons estableixen els conceptes de la teoría econòmica- mentre la productivitat mitjana no és màxima, la productivitat marginal serà superior i, conseqüentment, apareixen els rendiments creixents d'escala.

Aquest punt N , encara que tècnicament eficient, no ho és a escala, ineficiència que serà mesurada per la seva divergència del mpss (punt T). Ho calcularem a través de la ratio

$$\frac{y_N \;/\; x_N}{y_T \;/\; x_T} = \frac{OM \;/\; MN}{OM \;/\; MT} = \frac{MT}{MN} = \frac{x_T}{x_N} \qquad (4.55)$$

Hem establert que la distància entre el punt E i l' N mesura l'eficiència tècnica de la unitat representada pel punt E, i que la distància entre N i T indica la ineficiència d'escala del punt N , per tant, la distància entre E i T serà l'agregat d'aquests dos conceptes, és a dir, l'eficiència agregada (EA). Així,

$$\frac{y_E \;/\; x_E}{y_T \;/\; x_T} = \frac{OM \;/\; ME}{OM \;/\; MT} = \frac{MT}{ME} = \frac{x_T}{x_E} \qquad (4.56)$$

$$\frac{MT}{ME} = \frac{MN}{ME} \cdot \frac{MT}{MN}$$

Per valorar les ineficiències en la producció de diferents DMU's que actuen al mateix nivell d'operacions, desenvoluparem un model que assigni una estimació de l'eficiència de 1 a aquelles unitats que es trobin sobre la frontera de producció, encara que no operin en la dimensió més productiva. D'aquesta manera podrem determinar l'eficiència tècnica de les unitats i identificar la superfície fronterera que ens informarà de quin tipus de rendiments d'escala prevalen en els diferents segments de producció.

En primer lloc cal relaxar el tercer postulat (radi no limitat) del conjunt factible de producció[21]. Ara el conjunt T serà caracteritzat com:

$$T = \{(X,\ Y) \mid x \geq \sum_{j=1}^{n} z_j\, x_j;\quad y \leq \sum_{j=1}^{n} z_j\, y_j;\quad \sum_{j=1}^{j} z_j = 1\ ;$$

$$z_j \geq 0\ ,\quad j = 1, \ldots n\,\} \qquad (4.57)$$

Amb la qual cosa podem reformular el problema de la producció eficient per una DMU

$$\min \lambda_o - \epsilon\Big(\sum_{j=1}^{n} s^-_i + \sum_{j=1}^{n} s^-_r \Big)$$

subjecta a (4.58)

$$\lambda_o\, x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \mu_j\, x_{ij} - s^-_i = 0, \qquad i = 1, \ldots m$$

21. Vid. R.D. BANKER, A. CHARNES i W.W. COOPER, "Some models ...", art. cit.

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \; y_{rj} - s^{+}_{r} = y_{ro}, \qquad r = 1, \ldots s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1, \qquad j = 1, \ldots n$$

$$\mu_j, \quad s^{-}_{i}, \quad s^{+}_{r} \geq 0$$
λ_o sense restricció de signe

La restricció $\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$ garanteix la permanència a una escala determinada d'operacions, ja que no hi ha lliure disponibilitat d'inputs.

El problema dual de (4.58) pot escriure's com

$$\max h_o = \sum_{r=1}^{s} u_r \; y_{ro} + u_o$$

subjecta a (4.59)

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \; x_{io} = 1$$

$$- \sum_{i=1}^{m} v_i \; x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r \; y_{rj} + u_o \leq 0, \qquad j = 1, \ldots n$$

$$u_r, \quad v_i \geq \epsilon$$

La segona restricció d'aquest problema defineix un hiperplà per a cada unitat el qual, per a una observació concreta que produeix un sol output amb un únic input, pendrà la forma

$$u^* y_j - v^* x_j + u^*_o = 0 \tag{4.60}$$

que s'identifica amb el segment de producció en què es troba la unitat examinada. Per exemple, els segments que defineixen el conjunt factible de producció de la figura 4.14, poden escriure's

$$y_j = \frac{v^*}{u^*} x_j - \frac{u^*_o}{u^*} \tag{4.61}$$

on $\frac{v^*}{u^*}$ representa el pendent del segment (productivitat marginal de l'input) i $- u^*_o / u^*$ el punt d'intersecció d'aquest segment amb l'ordenada d'un eix de coordenades, en què $u^*_o x_j$ n'és el punt d'intersecció amb l'abcissa.

La definició dels segments de producció, sobre els que es troba cadascuna de les unitats permet relacionar el valor de u^*_o amb el tipus de rendiments d'escala presents en una zona determinada.

Quan $u^*_o > 0$, el segment de producció eficient talla l'abcissa en el punt on $x > 0$, per la qual cosa el seu pendent és superior al d'una recta que parteixi de l'origen i s'allargui fins el punt definit per la unitat avaluada. Per tant,

$$\frac{Y}{X} < \frac{v}{u} \qquad (4.62)$$

Y / X representa la productivitat mitjana de la unitat avaluada i v / u la seva productivitat marginal. Així doncs, podem afirmar que aquesta unitat es troba en una zona de rendiments creixents a escala.

Un $u^*_o < 0$ defineix la situació inversa. El punt d'intersecció del segment de producció amb els eixos de coordenades es produirà en la zona de l' $x < 0$ i, per tant

$$\frac{Y}{X} > \frac{v}{u} \qquad (4.63)$$

que caracteritza una zona de rendiments decreixents a escala.

Un $u^*_o = 0$ indicarà la presència de rendiments constants d'escala en la zona on opera l'unitat avaluada i es compleix que

$$\frac{Y}{X} = \frac{v}{u} \qquad (4.64)$$

Podem concloure que la presència de rendiments creixents, constants o decreixents a escala en un segment concret de producció i per a una combinació determinada d'inputs i d'outputs, dependrà del signe que prengui la variable u^*_o en la solució del problema (4.59).

De la comparació de la mesura de l'eficiència agregada de (4.27) mesurada per MT / ME amb la de l'eficiència tècnica de (4.59) o MN / ME observem que la primera és menor que la segona (com s'havia demostrat gràficament), i només es produeix la igualtat quan en la solució òptima de (4.27) la suma dels valors de les ponderacions z^*_j, $j = 1, \ldots n$, és igual a 1. Llavors, la possibilitat de producció contemplada és un mpss.

Això suggereix que

$$\text{Eficiència d'escala} = \frac{\text{Eficiència agregada (4.27)}}{\text{Eficiència tècnica (4.59)}}$$

Hem establert que l'eficiència d'escala d'una unitat es mesura a través de la relació entre la seva productivitat mitjana i la del mpss, així, una unitat serà eficient a escala quan

$$\frac{Y_o}{X_o} = \frac{Y_*}{X_*} \qquad (4.65)$$

on Y_* / X_* indica productivitat màxima que la unitat pot assolir amb la seva dimensió actual.

Aquesta igualtat calcula els valors òptims dels inputs de les diferents unitats avaluades, sense requerir el càlcul previ de la seva eficiència agregada.

La solució del problema (4.58) i la del (4.59) per a la mesura de l'eficiència tècnica informa de quina unitat és el mpss del conjunt.

El segment de producció del mpss és una recta de pendent $v_* \;/\; u_*$ que parteix de l'origen i que defineix la frontera d'un conjunt factible de producció sota una tecnologia amb rendiments constants. A aquesta frontera s'haurien de situar la resta d'unitats de la mostra si volen assolir la seva dimensió òptima, és a dir, ser eficients globalment. Per tant, cadascuna de les j DMU's ha de procurar que

$$\frac{Y_j}{X_j} = \frac{v_*}{u_*} \quad ==> \quad \frac{Y_j}{X_j} = \frac{Y_*}{X_*} \tag{4.66}$$

Ara bé, aquesta igualtat només es complirà per aquella DMU que representi el mpss del conjunt, mentre que les altres unitats hauran de reduir els seus inputs per esdevenir eficients. Podem expressar-ho com

$$\frac{Y_j}{X_j - \Gamma X_j} = \frac{v_*}{u_*} \tag{4.67}$$

Y_j i X_j representen, respectivament, els inputs i els outputs de l'unitat j, $v_* \;/\; u_*$ la productivitat marginal del mpss que $v_* \;/\; u_* = Y_* \;/\; X_*$ i Γ el percentatge de reducció de l'input actual indispensable perquè la DMU_j aconsegueixi maximitzar la seva productivitat mitjana.

Podem expressar (4.78) de la manera següent:

$$\frac{Y_j}{X_j} = \frac{v_*}{u_*} - \Gamma \frac{v_*}{u_*} \quad \text{o} \quad \frac{Y_j}{X_j} = \frac{Y_*}{X_*} - \Gamma \underbrace{\frac{Y_*}{X_*}}_{\delta} \tag{4.68}$$

amb la cual cosa queda que $\dfrac{Y_j}{X_j} = \dfrac{Y_m}{X_m} - \delta$ i δ indica la quantitat en què cal augmentar la productivitat mitjana actual per assolir el nivell màxim.

Si per calcular l'eficiència tècnica d'una DMU preferim utilitzar la formulació (4.58) en comptes de la (4.62), amb una adecuada interpretació dels seus resultats identificarem el tipus de rendiments i el valor òptim dels inputs.

Les solucions d'aquest problema assenyalen el grau d'eficiència tècnica i el conjunt de referència de cada unitat avaluada, així com les variables duals associades amb les restriccions dels inputs i dels outputs les quals fixen les ponderacions de cadascun d'aquests elements i defineixen el segment de producció de la unitat.

Per a les unitats eficients a escala es complirà que

$$\frac{u^*_j y_j}{v^*_j x_j} = 1 \qquad (4.69)$$

que indica que aquestes unitats es situen en un segment de producció que parteix de l'origen.

Per a la resta de DMU's del conjunt, tant per a les eficients tècnicament com per a les que no ho són, la igualtat anterior pendrà la forma següent

$$\frac{u^*_j y_j}{v^*_j x_j} \pm u^*_o = 1 \quad ==> \quad u^*_j y - v^*_j x \pm u^*_j = 0 \qquad (4.70)$$

amb la qual es pot calcular u^*_j per diferència a partir de les dades de la solució del problema (4.58). El valor de u^*_o coincideix amb l'obtingut del problema (4.59) i indica el tipus de rendiments d'escala que prevalen en la regió on es troba la DMU avaluada.

Per a la determinació de l'eficiència d'escala de les unitats tècnicament eficients només cal aplicar l'expressió (4.55) que relaciona l'input òptim amb l'actual, i aquell es calcula a partir de l'expressió (4.67). En aquestes unitats, es produeix la igualtat entre l'eficiència d'escala i l'eficiència agregada, ja que la tècnica és igual a 1.

Per a les unitats que presenten ineficiència técnica, la relació entre l'input òptim i l'input actual indica el valor de l'eficiència agregada. Aquesta darrera, convenientment relacionada amb el nivell d'ineficiència tècnica assenyala el grau d'eficència d'escala que aconsegueixen.

Amb tota aquesta expossició hem volgut demostrar que la determinació de l'eficència tècnica d'un conjunt de DMU 's permet calcular altres dimensions de l'eficiència, i les característiques de la tecnologia subjacent. No és necessari formular un altre problema de programació lineal per resoldre les iteracions corresponents. Una adecuada interpretació i relació dels resultats procedents de l'aplicació d'una única formulació faciliten tota la informació requerida per l'examen de l'eficiència d'una mostra d'unitats de decisió amb el conseqüent estalvi de càlculs repetitius.

Calculem l'eficiència agregada i tècnica de les cinc unitats de l'exemple de l'apartat anterior mitjançant la formulació (4.27) i la (4.59), respectivament.

Els resultats de les repetides aplicacions dels dos problemes anteriors i del càcdul de l'eficiència d'escala es mostren en la taula que segueix:

	Eficiència agregada				Eficiència tècnica				Ef.escala
DMU	Ef.	C.R.	v	u	Ef.	v	u	u	Ef.
1	0,635	DMU.2	0,111	0,0635	1	0,111	0,0303	0,697	0,635
2	1	-	0,0833	0,0476	1	0,0833	0,0476	0	1
3	0,714	DMU.2	0,05	0,0286	1	0,05	0,1	- 1,5	0,714
4	0,514	DMU.2	0,0334	0,019	1	0,0333	0,1667	- 3,5	0,514
5	0,536	DMU.2	0,0625	0,0357	0,648	0,0625	0,0170	0,392	0,827

L'única DMU eficient globalment és la número 2, que presenta una estimació de l'eficiència de 1 en les tres avaluacions i, lógicament, rendiments locals constants a escala. En aquest cas, la productivitat marginal associada és la mateixa en les tres avaluacions.

Exceptuant DMU.5, les altres unitats del conjunt són eficients tècnicament, és a dir, que es situen a la frontera de producció eficient, -com es pot observar en la figura 4.14-, però no maximitzen la seva productivitat mitjana, el que les fa ineficients globalment. Les productivitats marginals associades no són iguals, doncs la frontera de producció difereix de la línia que parteix de l'origen i presenta rendiments constants a escala. Com hem assenyalat anterioment, el signe de la variable u^*_o indica la tendència d'aquests rendiments.

Les estimacions de l'eficiència de la cinquena unitat examinada donen valors per sota de 1. Malgrat estar situada dins el conjunt factible de producció no aconsegueix eficiència tècnica, ni eficiència global en les seves operacions. Per situar-se a la frontera eficient de producció hauria d'utilitzar només una proporció de 0,648 de la quantitat actual d'input i emprar-ne una proporció de 0,536 si vol arribar a fer màxima la seva productivitat mitjana (ser eficient globalment).

La figura 4.14 mostra la situació de les cinc unitats descrites. La línia que parteix de l'origen i és tangent a P.2 representa el lloc geomètric on la productivitat mitjana del conjunt factible de producció és màxima. Aquesta línia ve definida per:

$$y = \frac{dx}{dy} x \qquad (4.71)$$

amb un valor de 1,75 constant en tots els punts i representatiu de la productivitat marginal eficient.

Com s'ha deduït de la formulació matemàtica, DMU.2 és l'única unitat globalment eficient i l'única situada a la línia de rendiments contants.

Els segments que delimiten el conjunt factible de producció són definits per les restriccions de (4.59) i en cadascun d'ells la productivitat mitjana i la marginal són diferents, la qual cosa implica que la primera no és la màxima possible.

Aquests segments que prenen la forma:

$$u^* y_j - v^* x_j + u^*_o = 0 \qquad (4.72)$$

presenten valors òptims de u^*, v^* i u^*_o diferents per a cada DMU. u^*_o assenyala el punt de tangència de cada segment amb l'eix de coordenades i indica la tendència dels rendiments d'escala de cada punt. Aquests rendiments són localment decreixents per la DMU.3 i la DMU.4 i creixents per la DMU.1 i la DMU.5 que en cas de ser eficient es situaria sobre el segment que s'estén entre P.1 i P.2.

La distància entre el punt N i l'E assenyala la reducció necessària de l'input actual de DMU.5 per tal que aquesta unitat sigui tècnicament eficient. Aquesta reducció equival a $h^*_5 = 0{,}648$ i dóna un valor eficient de l'input de $0{,}648 \cdot 16 = 10{,}37$ unitats. Per tant, l'eficiència tècnica de la unitat 5 també es pot mesurar com

$$\text{eficiència tècnica} = \frac{MN}{MP.5} = \frac{10{,}37}{16} = 0{,}648$$

Paral.lelament, per situar la DMU.5 a la línia de màxima productivitat mitjana cal reduir el seu input a $0{,}536 \cdot 16 = 8{,}58$ unitats. La seva eficiència global es mesura per la distància

$$\text{eficiència agregada} = \frac{MT}{MP.5} = \frac{8{,}58}{16} = 0{,}536$$

Finalment, l'eficiència d'escala es defineix

$$\text{Ef. global} = \text{ef. d'escala} \times \text{ef. tècnica}$$

i equival a la distància entre MT i MN. Llavors,

$$\text{Eficiència d'escala} = \frac{0{,}536}{0{,}648} = 0.827$$

o també

$$\text{Eficiència d'escala} = \frac{MT}{MN} = \frac{8{,}58}{10{,}37} = 0.827$$

Els valors òptims dels inputs que fan assolir a les cinc unitats la productivitat mitjana són

DMU	EF. ESCALA (1)	INPUT ACTUAL (2)	INPUT OPTIM (1) x (2)
1	0,635	9	5,715
2	1	12	12
3	0,714	20	14,28
4	0,514	30	15,42
5	0,827	16	8,58

Procedim a determinar les característiques de la funció de producció a partir únicament de les dades de l'eficiència tècnica de les cinc DMU's. Els resultats d'aquesta avaluació s'han detallat en la taula de la plana 233.

La DMU.2 és l'única unitat del conjunt situada en una zona de rendiments constants, i presenta un valor de $u^*_o = 0$, per tant, podem afirmar que aquesta unitat és la que obté la major productivitat mitjana de totes les de la mostra i compleix que

$$PMe = PMa$$

$$\frac{21}{12} = \frac{0{,}0833}{0{,}0476} \quad ==> \quad 1{,}75 = 1{,}75$$

Les altres DMU's són tècnicament eficients, a excepció de DMU.5, però desconeixem si també ho són globalment i a escala. Dels valors adoptats per les respectives productivitats marginals i de u^*_o podem assegurar que no són eficients globalment, per tant, tampoc ho són a escala.

Com abans, el valor de u^*_o ens indica la tendència dels rendiments d'escala en cada segment però, a més a més, volem determinar la ineficiència d'escala i el valor òptim de l'input de cada unitat.

Per aconseguir aquestes eficiències, totes les unitats s'hauran de situar en el mateix segment de producció que la DMU.2 i en el que la productivitat mitjana i la marginal són 1,75. Per això cal que

$$\frac{Y_j}{X_j} = \frac{Y_2}{X_2}$$

i com indicàvem a (4.68) caldrà fer

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y_2}{X_2} - \Gamma \frac{Y_2}{X_2}$$

Els resultats són

DMU	X (1)	PMe (2)	Γ (3)	Reducció Γ . x (4)	Input òptim (5)	Ef. global (5)/(1)
1	9	1,11	0,3657	3,2913	5,71	0,635
3	20	1,25	0,2857	5,714	14,28	0,714
4	30	0,9	0,4857	14,571	15,42	0,514
5	16	0,938	0,4643	7,429	8,58	0,536

En la DMU.1, la DMU.3 i la DMU.4, l'eficiència global coincideix amb la d'escala, car aquestes unitats es situen sobre la frontera de producció eficient tècnicament. Per determinar l'eficiència d'escala de la DMU.5 haurem de comparar les seves eficiències tècnica i global

$$\frac{\text{EF. GLOBAL}}{\text{EF. TECNICA}} = \frac{0,536}{0,648} = 0,827$$

Si per a l'estimació de l'eficiència tècnica de les unitats emprem la formulació (4.58) no podrem identificar el tipus de rendiments d'escala de la zona on opera cada DMU, ja que no facilita el valor de u^*_0, però l'aplicació de la de l'expressió (4.70) ens el pot donar

$$\frac{u^*_j y_j}{v^*_j x_j} \pm u^*_o = 1$$

Els resultats obtinguts per a les cinc DMU són

DMU	uy	vx	uy / vx	u
1	0,303	1	0,303	0,697
2	1	1	1	-
3	2,5	1	2,5	- 1,5
4	4,5	1	4,5	- 3,5
5	0,255	1	0,255	0,745

Aquella unitat que mostri un $u^*_j y_j$ / $v^*_j x_j$ igual a 1 i un $u^*_o = 0$ és el mpss del conjunt. Identificada aquesta DMU procedirem de la manera descrita abans per a la determinació dels valors òptims de l'input i de les eficiències agregada i d'escala.

22. El producte $v^*_j x_j$ és igual a 1 en totes les unitats, ja que aquesta és una condició imposada en el problema de programació lineal per garantir la permanència a una escala d'operacions determinada.

4.2.4. Eficiència de la gestió i eficiència del programa.

Una aplicació de la formulació de CCR és poder comparar diferents DMU's que empren inputs i outputs comuns, però que actuen sota programes diferents. Aquesta comparació entre funcions ens permet distingir entre l'eficiència de la gestió i l'eficiència del programa[23].

Això es fa mitjançant la determinació de les fronteres eficients de cada programa, que subministren una base per estimar l'eficiència relativa de cada DMU que opera sota un programa concret. D'aquesta anàlisi es deduiran ineficiències tècniques i d'escala causades per les decisions dels gestors de la unitat que no permeten aprofitar totalment els recursos disponibles. Associarem aquest concepte d'ineficiència amb el terme d'"ineficiències de la gestió".

Després, i suposant que totes les unitats actuen en el límits del seu programa (la qual cosa elimina les ineficiències de la gestió), construirem una nova frontera de producció que ens permetrà comparar els diferents programes i determinar el més eficient. Aquest nou tipus d'eficiència és la que anomenem "eficiència del programa".

Hem representat en la figura 4.15 dos conjunts de DMU's que obtenen un output y d'un sol input x i que actuen sota dos programes o tecnologies diferents, el que genera dues fronteres d'eficiència diferents.

---

23. Per exemple, la comparació entre diferents centres escolars (DMU's), alguns dels quals experimentin un programa de reforma educativa i altres que desenvolupin els programes docents tradicionals.

Vid., A. CHARNES, W.W. COOPER i E. RHODES, "Evaluating program and managerial efficiency...", art. cit.

Si per a l'avaluació dels dos programes calculéssim només les eficiències mitjanes o, fins i tot, féssim una regressió de y respecte x , necessitaríem tenir en compte una gran varietat de possibilitats per decidir quin és millor.

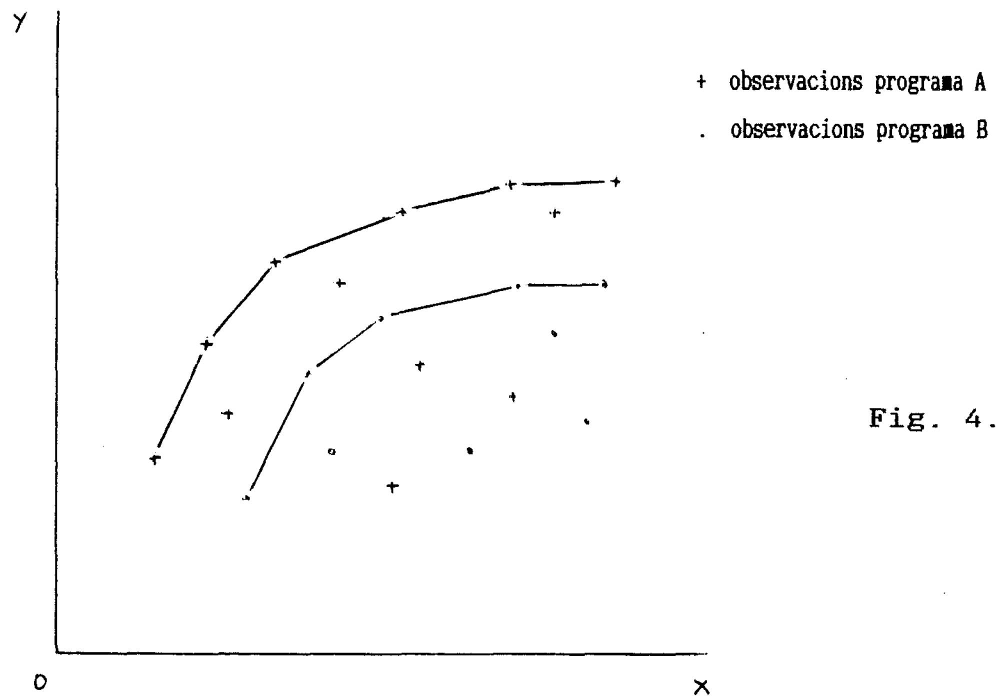

Fig. 4.15

Com que tractem amb dades empíriques som incapaços d'establir "a priori" les fronteres i d'afirmar quines DMU's són eficients. Només podrem fer-ho per referència als membres més eficients del respectiu conjunt de DMU's, els quals definiran les corresponents fronteres de producció eficient.

Per mesurar l'eficiència de la gestió i determinar la frontera de cada programa introduim una variant en la formulació general:

$$\max h_o^{*\alpha} = \frac{\sum_{r=1}^{s^\alpha} u_r^\alpha y_{ro}^\alpha}{\sum_{i=1}^{m^\alpha} v_i^\alpha x_{io}^\alpha}$$

subjecta a (4.73)

$$\frac{\sum_{r=1}^{s^\alpha} u_r^\alpha y_{rj}^\alpha}{\sum_{i=1}^{m^\alpha} v_i^\alpha x_{ij}^\alpha} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots n$$

$$u_r^\alpha,\ v_i^\alpha > 0, \qquad r = 1, \ldots s; \quad i = 1, \ldots m$$

$\alpha = 1, 2, \ldots k$ classifica els diferents programes avaluats.

En cada conjunt, $0 \leq h^{*\alpha}_o \leq 1$ i $h^{*\alpha}_o = 1$ només si la DMU avaluada és eficent en relació al conjunt α de DMU's. Ara volem estendre aquestes mesures als $\alpha = 1, \ldots k$ conjunts per examinar l'eficiència relativa dels programes associats amb cadascun d'ells.

En primer lloc, mesurarem l'eficiència de cadascuna de les unitats que operen sota els diferents conjunts $\alpha = 1, 2, \ldots k$ i, llavors, conduirem cada DMU a la seva frontera de producció per poder fer les comparacions d'eficiència entre els diferents programes.

L'aplicació del model DEA va dirigida a avaluar si els diferents conjunts de dades de cada programa impliquen diferents graus d'eficiència de la gestiò. També ajuda a distingir bons programes que poden estar mal dirigits d'altres pitjors, però que semblen millors a causa de la capacitat de la gestió.

Suposem vuit unitats que actuen sota dos programes diferents (AT i BT) i que empren inputs comuns (x_1, x_2) per a la producció d'una unitat d'output (y). Les quantitats d'inputs requerides per les unitats són:

DMU	PROGRAMA AT				PROGRAMA BT			
inputs	AT.1	AT.2	AT.3	AT.4	BT.1	BT.2	BT.3	BT.4
x	0,4	2,4	1,2	3,1	1	1,6	3,6	2,5
x	3,1	1,8	1,3	0,8	2,7	0,7	0,4	0,9

En la figura 4.16 hem representat les isoquantes d'ambdós programes.

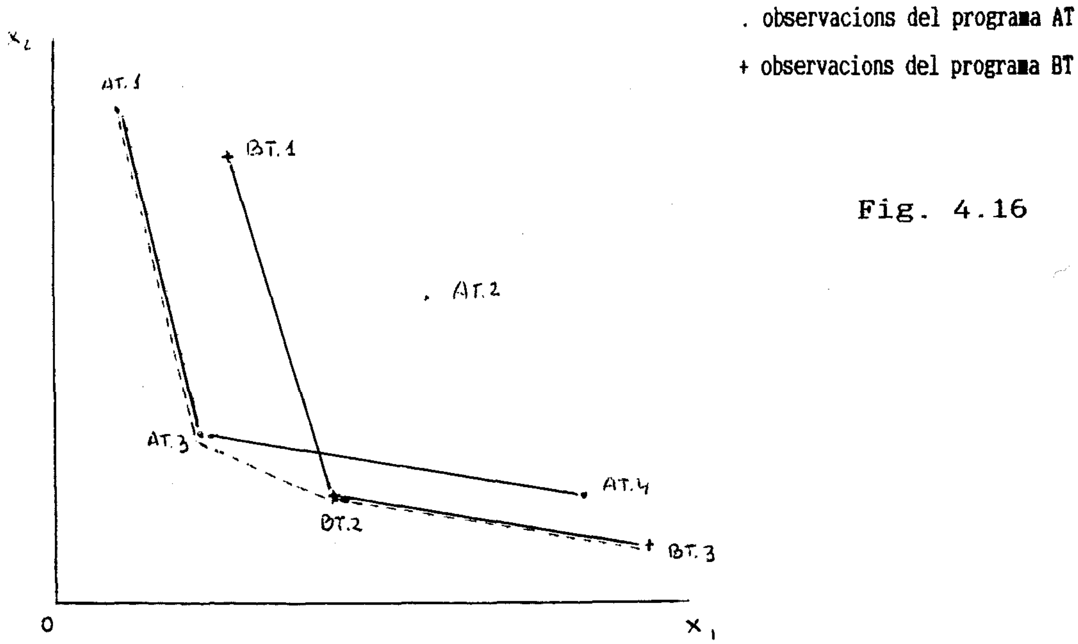

Fig. 4.16

Les observacions de cada programa determinen la respectiva isoquanta unitària calculada mitjançant l'aplicació de la formulació bàsica (4.27), els resultats de la qual presentem en la taula següent:

ESTIMACIONS DE L'EFICIENCIA DE LA GESTIO (EF.GLOBAL)

PROGRAMA AT		PROGRAMA BT	
DMU	Eficiència	DMU	Eficiència
AT.1	1	BT.1	1
AT.2	0,665	BT.2	1
AT.3	1	BT.3	1
AT.4	1	BT.4	0,737

El punt AT.2 és ineficient en relació el programa AT, mentre que el punt BT.4 ho és respecte el programa BT.

Els resultats de l'aplicació del model DEA indiquen sota quines condicions és més eficient un programa que l'altre. La localització d'aquestes regions és útil per decidir el programa a empendre quan els recursos es poden assignar a ambdós indistintament, i també és útil per valorar quin programa es millor en cas d'acordar la continuació o substitució d'un d'ells.

En la figura 4.16 podem observar que a l'esquerra del punt d'intersecció de les dues isoquantes, la línia contínua associada amb el programa AT és més eficient que la línia associada amb el BT, mentre que a la dreta d'aquesta intersecció la situació és inversa.

Per avaluar d'una forma total AT i BT, necessitem crear un nou conjunt de possibilitats a partir dels ajustaments practicats a les observacions originals i que les situen a la seva frontera de producció eficient, és a dir, suposem que totes les unitats són eficients sota les restriccions del seu programa. Amb aquest nou conjunt d'observacions construïm una única frontera de producció que envolta les dues anteriors i que hem representat amb una línia discontínua en la figura 4.16.

Aquesta isoquanta lineal trencada coincideix amb la de BT en alguna part i amb la d'AT en altres. En cap cas, és menys eficient que aquestes, ja que ha estat dissenyada per proporcionar un estàndard de les combinacions òptimes possibles dels dos programes considerats conjuntament.

Per calcular la nova frontera d'eficiència farem:

$$\max h_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{io}}$$

subjecta a (4.74)

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^{A}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}^{A}} \leq 0 \qquad j = 1, \ldots n_1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \hat{y}_{rj}^{2}}{\sum_{i=1}^{m} v_i \hat{x}_{ij}^{2}} \leq 0 \qquad j = 1, \dots n_2$$

$$u_r, \quad v_i \quad > \quad 0 \qquad \text{per tot } i, r$$

El senyal (^) sobre les variables indica els valors òptims de cada DMU resultants dels ajustaments practicats per situar-les a la seva frontera respectiva.

El valor $h^*_o = 1$ de la formulació anterior pot correspondre a qualsevol DMU, però és establert per referència a les unitats d'ambdós programes. Així, una unitat eficient sota el seu programa -p.e. AT.4-, pot resultar ineficient en aquesta nova avaluació a causa de la incorporació de més DMU's. Ara, un resultat de $h^*_o < 1$ és atribuible a les restriccions del programa corresponent en comptes de a la gestió de la unitat.

Per a l'avaluació dels dos programes cal analitzar els resultats de l'aplicació de (4.74) mitjançant l'aplicació de diferents tests estadístics, però, en alguns casos, una simple observació dels resultats pot apuntar quin programa és més eficient. En són indicadors el nombre d'unitats ineficients de cada programa i les divergències d'aquestes unitats amb la frontera òptima.

En l'exemple proposat podríem concloure que el programa AT és menys eficient que el BT, car compté una proporció d'unitats ineficients (2/4) superior a la del BT (1/4).