UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT D'ECONOMIA DE L'EMPRESA

INFORMACIO INCOMPLETA I TEORIA DE JOCS
APLICACIO A LA NEGOCIACIO DE CONTRACTES ENTRE EMPRESES

TESI

que, per a optar al Grau de Doctor en Ciències Econòmiques, presenta la llicenciada

GLORIA ESTAPE DUBREUIL

Dirigida pel Doctor:

Cesar Villazon Hervas

Catedràtic del Departament d'Economia de l'Empresa de la U.A.B.

Bellaterra, juny de 1990

INDEX

I. L'ENTORN DE LA NEGOCIACIO

II. CONTRACTES EN SITUACIONS SIMETRIQUES DELS DOS SIGNANTS

I. L'ENTORN DE LA NEGOCIACIO

Capítol 1

INTRODUCCIO

1.1. Presentació

Aquesta tesi té com a objectiu contribuir a un millor coneixement del procés pel que s'estableixen acords negociats entre empreses o institucions, en el marc general de la visió post-neoclàssica de l'empresa.

El punt de partida dels estudis actuals de l'empresa és el treball de Coase (1937), en el seu article sobre la naturalesa de l'empresa. Coase va introduir la idea de què una empresa representa essencialment un pas intermedi, estalviant costos de transacció, entre els posseïdors de matèries bàsiques i els consumidors. Postula que, en principi, els consumidors podrien comprar béns establint contractes directes amb els propietaris de tots els elements necessaris per a la producció. Però també observa que, generalment, no es dóna aquest tipus de comerç, perquè els consumidors no acostumen a tenir la informació necessària per a redactar aquests contractes. Segons

Coase, l'empresa sorgeix per a substituir els mercats directes perquè les empreses estalvien costos de transacció. Així doncs, els consumidors poden comprar els béns en el mercat a les empreses, considerades una mena de "caixa negra" que simplement amaga i facilita les relacions entre consumidors i posseïdors de matèries bàsiques.

Aquesta visió neoclàssica de l'empresa ha fet que, durant un cert temps, s'ignorés deliberadament la seva estructura interna, així com la manera d'operar. No obstant, aquesta tendència s'ha invertit en els darrers anys, i és fàcil constatar el gran nombre d'estudis (veure les notes de peu de pàgina que segueixen) realitzats sobre aquests temes. D'entre els mateixos, destacarem aquells que tracten situacions on es presenta algun tipus de conflicte d'interessos, sigui en el sí de l'empresa, o relacionat amb el seu quefer.

D'una banda, destaquem l'anàlisi dels lligams contractuals dins d'una empresa, o entre els gerents de la mateixa i els seus propietaris[1] (problemes connectats en gran part amb els de les relacions "Principal-Agent(s)" o

---

1. Una de les primeres anàlisis econòmiques formals és de K.J. Arrow [veure Arrow (1963, 1965)]. El model bàsic d'aquestes relacions "principal-agent", per a situacions d'informació incompleta, es pot trobar en l'estudi de Grossman i Hart (1983). Veure també els treballs de Groves (1973), Ross (1973), Mirrlees (1976), així com Myerson (1983), Stiglitz (1983) o (./.)

problemes de "Moral Hazard"). D'altra banda, cal mencionar la literatura enfocada cap a l'examen dels contractes que es poden establir entre empreses, o que lliguen empreses i consumidors[2].

La tesi que presentem s'emmarca en aquest últim corrent, especialment pel que fa a les relacions entre dues empreses. L'objectiu principal, és l'anàlisi del procés que desemboca en la signatura d'un contracte, de manera que es puguin comprendre els mecanismes que hi intervenen. Com a conseqüència, ens permetrà estudiar el disseny d'estratègies a seguir per a poder assolir un contracte que acompleixi de manera òptima els objectius fixats pels signants.

L'estructuració bàsica de la tesi, està en la línia dels estudis sobre els problemes de regulació i contractació dels treballs de Vickrey (1961), Weitzman (1974), Green i Honkapohja (1983), Riordan (1984a), Rochet (1985) o Spulber (1988a).

(peu de pàg. 1, cont.)
Radner (1981). Aquest últim article, juntament amb els del mateix autor de 1985 i 1986, presenten models de "moral hazard" en situacions que es repeteixen. Per a l'anàlisi de formalitzacions de la relació amb agents delegats, veure igualment Harris i Raviv (1979), Townsend (1979), Baron (1972) o Wilson (1967).

2. Un aspecte important d'aquest estudi, que nosaltres no abordarem, el constitueix la literatura sobre costos transaccionals. Entre aquest tipus de treballs destaca Williamson (1979). En les relacions entre empreses i consumidors, mencionen Easley i O'Hara (1988).

Una de les situacions típiques que tractarem es presenta en un mercat intermedi, situat cap al final d'una cadena que pot seguir un producte semielaborat. Per exemple, la situació simplificada podria ser la d'un sector industrial amb tres béns: un factor primari que serveix per a produir un bé intermedi, que al seu torn s'utilitza en la producció d'un bé final. Si aquests dos processos els duen a terme empreses diferents del sector, cal estructurar la relació entre elles a través d'un contracte que estableixi preu i quantitat a transferir. Per a mesurar la factibilitat i oportunitat d'un d'aquests contractes, l'empresa situada més amunt en el mercat utilitza la seva funció de cost per a la producció d'una certa quantitat del bé intermedi. L'altra empresa utilitza la funció de demanda del mercat final per a obtenir la funció d'ingrés (total) en el mercat intermedi; i és la darrera funció la que utilitza, essencialment, per a definir les seves preferències respecte als diversos contractes.

Aquesta mateixa anàlisi es pot traslladar a d'altres tipus de mercats intermedis que es puguin considerar en situació de monopoli bilateral, com és el cas d'un productor i un distribuïdor d'un cert bé. També es pot fer servir en molts contractes de tipus R&D (Research and Development), ja que aquests són generalment exclusius, i per tant es poden considerar en situació de monopoli bilateral. Podem citar, per exemple, empreses de recerca en projectes governamentals, on l'empresa situada més amunt en el mercat seria la que posa a punt el nou producte; i on l'agent comprador és el govern.

Es lògic considerar que, en la major part de casos, la signatura d'un contracte serà un procés conflictiu, degut a que els signants tenen, almenys en part, interessos contraposats. Aquesta característica ens obliga a utilitzar la teoria de jocs com a marc on enquadrar el nostre estudi. Podrem per tant obtenir caracteritzacions pels contractes òptims mitjançant les tècniques pròpies d'aquest camp.

Un factor important en l'anàlisi dels contractes que es poden signar, és la factibilitat que se'ls hi demani, i que depèn de les condicions en què es faci la negociació. Tenen especial incidència les que fan referència: 1) a la quantitat d'informació que posseeixen els agents quan s'inicia la negociació, 2) al possible intercanvi d'informació durant la mateixa, 3) al moment en què pot tenir lloc el traspàs d'aquesta, així com, 4) a l'existència o no d'una figura intermèdia que pugui "arbitrar" les negociacions.

En una situació en què les condicions de l'entorn econòmic fossin totalment conegudes per tots els interessats, no hi ha cap problema teòric per a trobar la quantitat eficient d'intercanvi - i el seu preu -. Això és fàcilment aplicable també a aquelles situacions en les que existeixi incertesa compartida per ambdues parts[3].

Però en molts casos, quan s'inicia una negociació, almenys una de les parts disposa d'informació només parcial sobre aspectes que considera importants. Una de les fonts típiques d'incertesa és la variació de les preferències sobre els intercanvis en el transcurs de la relació entre les empreses. Per exemple, una vegada s'ha signat un contracte, l'estructura de costos pot ser diferent de la prevista. Per la seva banda, el comprador pot no saber del cert, la intensitat final de la demanda del producte sobre el que es signa el contracte[4]. Per tant, si es valora aquesta possibilitat, la disposició de les parts a realitzar l'intercanvi pot variar.

No obstant, i també a efectes teòrics, es pot assegurar una distribució Pareto-eficient dels recursos que s'estan negociant. La principal conseqüència[5] de l'incertesa esmentada més amunt, és que les consideracions d'eficiència reforcen la importància de la capacitat

---

3. Dediquem els capítols 2 i 3 d'aquest treball especialment a aquesta qüestió.

4. Veure, en aquest sentit, l'anàlisi de Hart i Moore (1988), per exemple.

5. Riordan (1984). Veure també Riordan i Sappington (1988).

d'adaptació dels contractes a les condicions canviants del mercat.

Però si la manca d'informació està distribuïda de manera asimètrica entre els agents, el resultat pot ser l'absència d'un conjunt de demandes consistents. En aquest cas, l'eficiència pot requerir una despesa addicional de recursos en l'adquisició d'informació per a poder adoptar una estructura d'intercanvis diferent. Però aquest és un punt en què també poden sorgir asimetries: és freqüent que l'obtenció d'informació sobre les condicions rellevants del mercat tingui un cost diferent per les dues empreses involucrades.

Degut a les característiques dels signants de contractes - a nivell de la presa de decisions -, és factible basar-nos en què els signants disposen de suficient informació, per a poder estimar els paràmetres més significatius que utilitzen els seus oponents per a pronunciar-se sobre la signatura d'un contracte, en unes determinades condicions. Sigui a través del seu coneixement del mercat, o a d'altres factors, aquesta informació es pot considerar obtinguda sense cost en el moment de l'estudi. Això significa que cada decisor disposa de les eines bàsiques per assenyalar quines són les preferències de l'altre possible signant. Però el nivell de coneixement no és suficientment precís per a poder fer un estudi en condicions de certesa: cal tenir en compte que cadascuna de les empreses disposa d'informació pertinent que l'altra no té o no pot obtenir, perquè els costos que això representa no es veurien compensats per l'avantatge que se'n derivaria del seu ús[6].

La major part de la tesi tindrà en compte l'existència d'aquests mercats intermedis en presència d'un marc econòmic incert - és a dir, on alguns dels factors que concorren en la producció o comercialització del producte són desconeguts per almenys una de les parts.

En particular, s'estudiaran contractes que s'estableixin en condicions d'informació incompleta quan les empreses estiguin disposades a posar-se d'acord a l'avançada. Un contracte d'aquestes característiques donaria el control dels diferents aspectes de l'intercanvi a les dues parts implicades. Un altre possible enfocament d'aquest problema consisteix en donar el control completament a una de les dues parts[7]: es pot fixar, per exemple, un preu per unitat, i el comprador pot demanar-ne una certa quantitat una vegada coneguts els beneficis que en podria obtenir.

---

6. El treball de Weitzman (1974) és pioner en aquest enfocament.

7. Baron i Myerson (1982), Maskin i Riley (1984), Baron i Besanko (1987b) o Lewis i Sappington (1988a) proporcionen elements d'estudi en aquest sentit.

Una versió, un xic més complexa d'aquesta mateixa alternativa, consisteix en fixar un esquema de preus no lineal[8]. Una altra possibilitat seria donar el control a l'empresa compradora, a través d'un contracte que especifiqui una funció d'ingrés sobre la que basar la seva decisió[9]. Això només pot ser eficient si la incertesa, o manca d'informació, està fonamentalment en una banda del mercat. Però quan afecta als dos costats, cal examinar contractes que permetin un control recíproc. Encara que d'aquesta manera no s'obtingui la millor solució (en el sentit de ser Pareto-eficient), sovint dominen a les que es poden trobar seguint els casos anteriors.

En aquest últim cas, però, els contractes que s'estudiïn han de complir una altra condició: ser "compatibles respecte a incentius". En efecte, si les condicions d'un contracte han de dependre d'informació privada d'una o altra part, llavors el contracte ha de contenir també incentius per a què les parts "diguin la veritat" sobre la informació privada pertinent que posseeixen, de manera que s'asseguri que cap empresa pot guanyar sobreestimant (o subestimant) les funcions que determinen les preferències de l'altre signant.

---

8. Veure Spence (1977), Baron i De Bont (1981) o Laffont (1987), entre d'altres.

9. Veure, per exemple, Lewis i Sappington (1988b).

Per altra banda, és possible que les empreses que negocien un contracte no estiguin en situació de prendre el compromís, a priori, d'actuar seguint una pauta predeterminada, com és un contracte que depèn, per a la seva formalització, de les condicions del mercat[10]. En aquest cas hem modelitzat la situació com un joc de negociació directe, sobre un contracte específic, on ambdues empreses arriben a un acord només si (segons la informació de què disposen) la transacció és la millor que podrien obtenir. Un element distingit en aquest estudi és el factor temps, ja que és lògic considerar que un retard en l'obtenció d'un acord pot afavorir o perjudicar a una o ambdues parts.

Donat que la teoria de jocs és una eina essencial d'aquesta tesi, ens ha semblat convenient mencionar els trets fonamentals d'aquesta teoria. D'aquesta manera podrem justificar més acuradament la necessitat d'analitzar el procés de negociació d'un contracte a través d'un joc. Dediquem a aquesta qüestió la secció que segueix.

---

10. Binmore, Rubinstein i Wolinsky (1988) proporcionen una base teòrica per a tractar diferenciadament aquests dos tipus de situacions.

1.2. El marc general de la teoria de jocs

Es pot definir la teoria de jocs com l'estudi de models matemàtics de conflicte i cooperació entre decisors racionals i intel.ligents[11]. La utilització d'aquesta teoria per a analitzar una situació d'aquest tipus té dues vessants que cal destacar. En primer lloc, el seu ús necessita de la formalització d'un model, i això permet aïllar aquells elements que, d'alguna manera, contribueixen directament a la caracterització de la dita situació. Per altra banda, en l'aplicació de les seves tècniques podem preveure quina, o quines accions d'entre les que pot emprendre cada participant, servirà millor als seus interessos.

Un element fonamental de la teoria de jocs és la consideració de què els decisors es comporten de manera racional[12]. Això significa que, tant si es tracta de triar un mitjà per a una determinada finalitat, com si es tracta d'escollir entre finalitats alternatives, podem suposar que la tria d'un decisor racional es fonamentarà en un sistema de preferències clar i consistent.

---

11. Veure von Neumann i Morgestern (1944), especialment pp. 1-9.

12. Binmore (1986) ofereix una bona perspectiva de la importància d'aquesta hipòtesi.

La teoria econòmica clàssica ha demostrat que, si el sistema de preferències d'un individu compleix certs postulats de racionalitat, el comportament racional en una tria individual es pot representar matemàticament per la maximització d'una funció d'utilitat ben definida. Aquesta caracterització, però, està reservada al cas en què el resultat d'accions alternatives sigui conegut a priori, i no estigui influït per l'atzar o per accions d'altres individus.

En cas d'haver de decidir en un entorn on hi ha incertesa o risc, i admetent que el comportament de tria d'un decisor satisfà certs postulats de racionalitat, la teoria de la decisió ha demostrat que es pot representar com la maximització de la utilitat esperada, fent servir, en el cas de risc, les probabilitats objectives (que són conegudes), i en el cas d'incertesa les probabilitats subjectives del decisor[13].

Els models així formulats poden ajudar principalment en situacions on el resultat depèn només del comportament del propi decisor; i també quan intervenen altres individus, sempre que se suposi que el comportament d'aquests últims està governat per lleis deterministes i no per les

---

13. Veure, per exemple, la introducció de Luce i Raiffa (1957) respecte a aquests temes.

seves pròpies expectatives sobre el comportament dels altres participants.

Per a poder aplicar la teoria de jocs han d'intervenir diferents individus, cada un d'ells té una funció d'utilitat, intentant assolir deteminats objectius. El desenllaç de la situació de conflicte depèn de les accions de tots o part dels decisors racionals, amb interessos possiblement divergents. La modelització matemàtica del comportament racional d'un individu en aquestes situacions utilitza, per tant, resultats de la teoria de la decisió individual, a l'incorporar les funcions d'utilitat total o esperada (si hi ha incertesa o risc). Però no es pot formular el problema únicament com un problema de maximització, perquè les funcions d'utilitat que intervenen tenen com a variables tant les accions que pot dur a terme l'individu al que pertany la funció, com les que poden emprendre els altres agents que intervenen en la situació, i, en alguns casos, també l'atzar. Naturalment això implicarà l'exigència de què els esquemes de comportament dels decisors satisfacin un conjunt de postulats de racionalitat, postulats que seran més forts que en la teoria de la decisió individual.

Un altre element bàsic per a poder fer ús de la teoria de jocs és la consideració de què els decisors són "<u>intel.ligents</u>". Amb això es vol indicar la presunció de què cada individu entén absolutament tota l'estructura de la situació que els teòrics proposen, incloent el fet de què tots els altres individus són decisors racionals i intel.ligents[14]. Així doncs, el desenvolupament d'una teoria que descriu com s'han de comportar els jugadors en un cert joc, ha de partir de la hipòtesi de què cada jugador del joc també entén aquesta teoria i les previsions que fa.

Per acomplir aquest objectiu és important distingir quins participants seran, a efectes del model, jugadors actius i quins no (sovint anomenats passius o "dummy"). En general es pot considerar que un participant en una situació de conflicte és passiu si el seu comportament es considera donat d'acord amb un patró fix. Per exemple, una situació de duopoli es pot tractar com un joc de dues persones si només es pretén explicar l'actitud de les dues empreses que hi intervenen (els dos jugadors), i es considera que els clients (i els empleats) dels dos duopolistes segueixen un cert patró de conducta estandaritzat[15], com ara que els clients fan servir simplement la regla de comprar sempre en el mercat més barat, sense intentar influir en les pròpies condicions del mercat a través de negocia-

---

14. Veure, per exemple, Shubik (1982), especialment pp. 16-32.

15. Harsanyi (1976).

cions, formant cooperatives de compradors, etc. Si els clients segueixen comportaments més independents se'ls ha d'assignar el paper de jugador actiu, i sovint és convenient en aquest cas passar a considerar una situació amb un nombre gran d'individus "petits", en què cap d'ells, de manera individual, pot afectar el resultat final, però que sí ho fan actuant "en conjunt"[16].

Per últim, cal explicar perquè, al parlar de la teoria de jocs, s'esmenta tant el conflicte com la cooperació, mots que sovint es prenen com antagònics. Si bé la situació és sempre competitiva, en el sentit de què cada jugador vol aconseguir el resultat més favorable possible, en els casos en què els interessos dels jugadors són totalment contraposats, el millor resultat per a un d'ells pot significar que un altre obtingui el pitjor resultat dels que té a l'abast. En aquest sentit, cal una certa "cooperació" si és que les parts tenen veritable interès en arribar a un acord. En canvi, aquesta situació no es produirà si hi ha un marge en el què els interessos dels diversos jugadors són comuns.

La informació sobre el tipus de conflicte de la situació estarà implícitament continguda en les funcions

16. El treball pioner en aquest camp és el d'Aumann i Shapley (1974).

d'utilitat dels jugadors, tot i que en molts casos deixa marge a diverses actuacions: un jugador que podria actuar cooperativament pot decidir - com a mesura de càstig o rèplica a una actuació anterior per part d'un altre jugador, per exemple - utilitzar una estratègia no cooperativa; o el coneixement de què un mateix joc es repetirà en diverses ocasions pot induir a una certa cooperació[17].

En resum, en una situació que es vulgui modelitzar com un joc, haurà d'intervenir activament més d'un individu; i caldrà especificar el seu nombre, així com els possibles desenllaços de la situació, els camins que els diferents individus tinguin per a intervenir-hi, i les seves preferències sobre els diversos resultats.

---

17. D'entre el gran nombre de treballs que últimament s'han dedicat a aquests temes, citem Abreu (1988), Aumann i Sorin (1989) o Bergin (1989).

1.3. Bases de l'estudi

Tal com hem vist a l'inici, el nostre estudi considera una de les formes més elementals d'intercanvi econòmic: una relació bilateral entre comprador i venedor, en un mercat caracteritzat per un monopoli bilateral.

Tractarem, en primer lloc, de configurar la possible relació entre els dos agents econòmics. Un d'ells, que per a simplificar anomenarem venedor o empresa venedora, pot produir la quantitat que vulgui d'un cert bé - tenint en compte, si cal, les restriccions tecnològiques adients, que es poden modelitzar a través de la negativa a signar un cert tipus de contractes - i té una funció de cost que, en general, dependrà també de certes condicions del mercat que li proporciona les matèries bàsiques per a la seva producció. L'altre agent, que anomenarem comprador o empresa compradora, es basa en una funció d'ingrés (total) que depèn de la quantitat del bé que compra - per a la seva comercialització directa o indirecta mitjançant una elaboració o refinament - i també d'alguns factors del mercat que controla.

Observem que, tot i ésser més còmode considerar que la variable independent és, en tot l'estudi, la quantitat intercanviada en la negociació, de fet pot donar-se una interpretació més general a aquesta formulació. En efecte, la variable que utilitzarem, q, pot servir d'índex del conjunt de possibles acords o transaccions que puguin dur-se a terme entre els dos agents econòmics[18].

Suposarem que, seguint el model, per exemple, de Weitzman (1974), hi ha només dos béns a tenir en compte: el bé que es produeix i el diner, que s'utilitza com a contrapartida en la negociació. Un <u>contracte</u> ha de regular la quantitat del bé que s'intercanvia (i/o les condicions en què aquest té lloc) i el preu global pel que s'efectua la transacció[19].

Els elements fonamentals que intervenen en la formulació del model són, d'una banda, la <u>valoració</u> que fan les empreses de la utilitat que els suposarà cada un dels contractes que poden signar, i de l'altra, la <u>informació</u> de què disposen.

Con ja hem comentat anteriorment, les valoracions de les empreses s'incorporen en el model a través de les funcions de cost i d'ingrés, respectivament, de les mateixes.

---

18. Veure Linhart i Radner (1989).

19. La relació contractual més senzilla que es pot establir entre dos agents econòmics és la que té com a objectiu l'intercanvi d'un sol bé indivisible. D'entre els molts estudis dedicats a aquest tema, mencionem els de Crawford (1982), Chatterjee i Samuelson (1983), Myerson i Satterthwaite (1983), Samuelson (1984), Broman (1989), Satterthwaite i Williams (1989) o Dekel (1990), així com els que es citen en el capítol 9 d'aquest treball.

Per l'empresa venedora, indicarem per C la funció de cost total que li representarà servir el contracte pactat. Per l'empresa compradora, indicarem per I la funció que expressa l'ingrés total que li pot permetre obtenir el contracte.

Cal observar que, en principi, no posem cap tipus de restricció respecte a les propietats que hagin de complir les funcions de cost o d'ingrés dels dos agents; aquestes s'especificaran en cada cas concret. Així mateix, val la pena observar que no es tenen en compte altres variables que podrien ser d'interès en altres estudis, com per exemple el nivell de contractació o d'esforç per una o altra empresa, o el nivell de benefici mínim que aquestes voldrien obtenir. Això es deu, principalment, a que es tracta d'elements interns, no necessàriament observables per l'altra part, i per tant en principi no poden formar part explícita d'un contracte, i s'acostumen a deixar a la discreció de la direcció de l'empresa en qüestió. Per altra banda, és usual modelitzar aquest tipus d'informació a través de restriccions en el tipus de contractes que es poden signar.

Pel que fa a la informació de què disposen les empreses, haurem de distingir entre dues possibles fonts d'incertesa. Per una banda, el factor o conjunt de factors d'incertesa sobre l'estat del mercat que comparteixen ambdós agents. En segon lloc, ens cal tenir en compte aquelles informacions que només coneix una o altra de les dues empreses. Generalment s'anomenen informacions privades, i la seva importància radica en què se suposa que les preferències de l'empresa respecte a les transaccions no estan completament especificades sense tenir en compte el seu valor. No obstant, suposarem que cada decisor disposa de les eines suficients per assenyalar les preferències de l'altre possible signant; és a dir, l'estructura de les funcions de cost i ingrés es poden considerar coneixement comú, en el sentit d'Aumann (1976): cada un d'ells les coneix, sap que l'altre les coneix, sap que l'altre sap que ell les coneix, etc..

Juntament amb els elements esmentats fins ara, cal tenir-ne en compte dos més, en principi externs, que juguen també un paper fonamental: el temps i la possibilitat de comprometre's a seguir un determinat curs d'acció en la negociació del contracte.

Pel que fa al temps, té importància en una doble vessant. D'una banda, perquè en general els diferiments en arribar a un acord tenen un cost pels negociadors, i justament és aquest cost el que els encoratja a signar-lo aviat. De l'altra, el temps té un paper primordial en la descripció de l'estructura de la negociació (quan i qui pot fer un moviment) i de la informació de què disposen les empreses (qui coneix, què, i quan), dues característiques essencials en tota relació econòmica.

D'altra banda, haurem de preveure que en la negociació d'un contracte s'arribarà a acords diferents segons la disposició o disponibilitat d'una empresa a comprometre's a mantenir una certa postura sense que això li repercuteixi posteriorment en un cost addicional. Si és així, la responsabilitat del resultat de la negociació recau exclusivament en l'altra part negociadora, que pot acceptar o no la postura que manté la primera. En cas contrari, l'acord haurà de ser negociat, però caldrà tenir en compte quin tipus de postures es poden mantenir de manera que resultin "creïbles" per les dues parts.

1.4. Perspectiva general de la tesi

Finalitzarem aquest capítol amb un breu resum de l'organització del present treball.

En el capítol 2 s'estudiaran el tipus d'acords a què poden arribar dues empreses, si tots els elements que configuren les preferències de les mateixes són coneguts. Presentarem diverses formulacions, d'entre les genèriques que es poden trobar a la literatura de jocs de negociació per a aquesta situació. Els resultats que s'obtindran són alhora un marc de referència per a establir quins són els millors acords que es poden signar, i una descripció del tipus d'estratègies que es poden utilitzar per a obtenir-los, en funció de l'estructura formal que tingui la negociació. La principal contribució de la tesi en aquest capítol serà, a més de la òbvia de triar els models i aplicar-los a la negociació concreta que s'estudia, el model de la secció 2.3.3.

En el capítol següent s'ampliaran els resultats anteriors al cas en què les empreses tinguin fonts d'incertesa externes i comunes. Ambdós constitueixen la part de la tesi que hem anomenat "signatura de contractes en condicions simètriques".

La tercera part de la tesi, i més significativa, és la que fa referència al problema de la signatura de contractes quan una, o ambdues empreses, disposen d'informació que només elles coneixen. El capítol 4 presenta específicament les condicions en què es farà l'estudi, així com una breu panoràmica del tipus de negociacions que poden dur a terme les empreses, seguint l'esquema del model objecte de la investigació.

El nucli principal de la tesi és l'anàlisi de les condicions en què es pot arribar a un acord eficient en presència d'informació privada. Amb aquest objectiu, es presentaran, en primer lloc (capítol 5), les conclusions (algunes d'elles ja conegudes, que s'exposaran en conjunt, amb demostracions diferents a les originals) que s'obtenen adoptant com a punt de partida el concepte d'estratègies de Nash en sentit fort.

En el capítol 6 presentarem, en forma general, el marc teòric en què es basa la teoria de joc d'informació incompleta des del punt de vista bayesià. Passarem després a la caracterització dels mecanismes de negociació simultanis d'una sola etapa, utilitzant com a instrument d'anàlisi la concepció de Nash-Bayes d'un joc (capítol 7); i establirem les condicions en què es pot assegurar l'obtenció d'un acord eficient, essent aquesta una aportació original. La part dedicada a aquest tipus de mecanismes concloura en en capítol 8, on examinarem un grup particular de negociacions, quan les empreses tenen funcions d'utilitat específiques, deduïdes a partir de funcions d'ingrés i de cost quadràtiques.

La tesi acabarà (capítol 9) amb la consideració de mecanismes de negociació seqüencials amb un nombre infinit de períodes. Tot i no ser un estudi molt general - és una línia d'investigació que pot ser continuada més endavant -, hem volgut presentar un model d'aquestes característiques, en el que només una de les empreses negociadores té informació privada. Els seus resultats es poden comparar amb els obtinguts per mecanismes de negociació d'una sola etapa, element que, juntament amb d'altres, configurarà les conclusions amb que finalitzarà aquesta tesi.

En definitiva, es demostrarà que, si només hi ha informació privada en una banda del mercat, es poden obtenir acords òptims, tant amb arbitratge extern, com en negociacions seqüencials. Pel que fa a situacions d'informació privada simètrica, es posarà de manifest l'existència de contractes eficients - amb diverses hipòtesis addicionals - sempre que es tracti de negociacions on s'utilitzin mecanismes simultànis d'una sola etapa. Com ja hem dit, l'estudi de la situació en què no es poden establir compromisos previs és una línia d'investigació futura.

II. CONTRACTES EN SITUACIONS SIMETRIQUES DELS DOS SIGNANTS

Capítol 2

MODELS AMB INFORMACIO COMPLETA

2.1. Premises de l'anàlisi

Una negociació té lloc en presència d'informació completa si ambdues empreses poden descriure amb exactitud les preferències de la seva adversària - i, naturalment, també les pròpies - sobre el conjunt de les diferents transaccions. L'anàlisi d'una negociació establerta en aquest marc pressuposa, per tant, que les preferències de cada empresa es poden reflectir fidelment en les seves funcions d'utilitat, de manera que induexin una ordenació total en les possibles transaccions.

D'acord amb això, els únics elements rellevants per a la descripció de les preferències de les empreses són precisament els termes dels possibles contractes: quantitat del bé a intercanviar (o índex que indiqui el conjunt de condicions en què es fa l'intercanvi) i preu total pel que s'efectuaria la transacció. La hipòtesi de què la negociació es realitza en un marc d'informació completa implica que les variables de decisió del problema són les úniques que cal introduir en la formulació de les funcions d'utilitat de les empreses.

En aquest capítol considerarem un monopoli bilateral amb dos agents que, si arriben a l'acord d'intercanviar la quantitat q d'un cert bé a un preu global P, obtenen les següents utilitats:

$$u = P - C(q) \qquad \text{pel venedor}$$

$$v = I(q) - P \qquad \text{pel comprador}$$

El problema serà determinar el parell $\{q,P\}$ que representa el millor contracte d'entre els que les empreses poden signar. Essent les funcions u i v conegudes, aquest acord (si es pot establir) dependrà només dels trets característics que defineixin el procés regulador de la negociació.

Utilitzarem el marc general de l'anàlisi de diferents variables, i les hipòtesis formals que ens calen es poden resumir en les següents: el cost, C, i l'ingrés, I, es suposen funcions creixents i dues vegades contínuament diferenciables, amb el cost marginal creixent i la funció d'ingrés marginal decreixent. A més a més, demanarem que

$C'(0)<I'(0)$, i que per a valors de q suficientment grans, tinguem $C'(q)>I'(q)$. Per últim, no hi ha pèrdua de generalitat en efectuar, si cal, un canvi de variables, de manera que $C(0)=I(0)=0$.

Per a determinar les condicions d'un acord que les dues parts considerin òptim, es poden adoptar dos punts de vista diferents - i, en cert sentit, complementaris -: donar una descripció axiomàtica de les propietats que hauria de tenir un acord "consensuat" - i demostrar que es pot trobar una transacció que les compleixi -, o bé proposar un model de negociació concret i estudiar quins contractes es poden signar utilitzant-lo.

Aquesta doble perspectiva per a analitzar els problemes de negociació constitueix el que, en aquests últims anys, s'ha denominat "Programa de Nash", ja que aquest autor va ser el primer en proposar que l'estudi de les situacions de negociació es fes tant des del punt de vista axiomàtic com utilitzant models concrets[1]. Aquest darrer enfocament s'anomena generalment estratègic, perquè la prospecció del resultat de la negociació es fa a partir del càlcul de les estratègies òptimes que tenen al seu abast els jugadors.

1. Nash (1950a, 1951, 1953). Veure també Binmore i Dasgupta (1987).

La idea fonamental que dóna suport a la doble vessant del programa és la de què, per a poder aprofondir en les característiques d'una solució negociada, és necessari establir hipòtesis addicionals sobre la naturalesa de l'estructura institucional del procés de negociació que es dugui a terme. Sense tenir en compte aquesta estructura no és possible anar més enllà del "teorema" de Coase[2]: una solució negociada ha de ser alhora eficient en el sentit de Pareto i individualment racional. En la majoria de situacions, però, aquest postulat aporta molt poca llum al problema, donat el gran nombre de transaccions que el compleixen. Tant el punt de vista axiomàtic com l'estratègic comparteixen una mateixa línia d'aprofundiment en l'estructura de les negociacions, mentre que el principal tret que els diferencia és la metodologia de treball que utilitzen.

En l'enfocament axiomàtic es vol modelitzar de manera abstracta les característiques comunes en què es basa tota situació de negociació quan hi ha present una infraestructura cooperativa, per tal de fer una prospecció del resultat d'una negociació entre jugadors racionals. Com a conseqüència, no s'estableix un model específic que compleixi els requisits d'un joc formal, sinó que el joc es

---

2. Coase (1960). Veure també Arrow (1979) o Samuelson (1985).

defineix només implícitament a través d'un conjunt d'axiomes que raonablement representi un grup de situacions de negociació amb la mateixa estructura.

Pel contrari, el punt de vista estratègic requereix l'establiment d'unes regles específiques per a modelitzar el procés de negociació, de manera que la determinació d'un acord negociat es pugui fer utilitzant les tècniques de la teoria de jocs no cooperatius. La descripció acurada d'un joc permet calcular les estratègies en equilibri dels jugadors, sigui amb la noció d'equilibri de Nash (principalment en el cas de jocs estàtics), o utilitzant refinaments ulteriors, descartant comportaments no creïbles per part del jugadors (especialment en jocs dinàmics).

Els dos punts de vista mencionats resulten complementaris, ja que les conclusions que s'obtenen de l'estudi axiomàtic d'una situació de negociació, al estar deduïdes postulant només el comportament racional dels negociadors, necessiten ésser verificades utilitzant jocs de negociació específics. Aquesta última anàlisi ens proporcionarà, a més, les eines de què disposen els agents negociadors per a obtenir les utilitats descrites axiomàticament; tot i que això estarà, naturalment, en funció del procés de negociació particular que es consideri.

A continuació analitzem els dos aspectes esmentats més amunt per la situació específica de negociació que es considera en aquest treball. En el primer cas ens hem basat en la solució cooperativa de Nash, i en el segon hem utilitzat dos jocs que difereixen tant en la seva durada (un és estàtic i l'altre dinàmic) com en la naturalesa i contingut dels missatges que ambdós jugadors intercanvien durant la negociació.

Ens ha semblat interessant introduir un model dinàmic de negociació, perquè sense una anàlisi dinàmica els resultats obtinguts en un enfocament estratègic no es podrien considerar complets. En efecte, els jocs estàtics presenten situacions força restrictives, del tipus conegut a la literatura com "take it or leave it", condicions que no són les més habituals en el món real. En general un model de negociació ha de permetre als agents la possibilitat de rèplica, fent contra-ofertes a propostes del seu oponent. Cal fer notar que, ultra la introducció de la variable temps en l'estructura del joc de negociació, aquest tipus d'anàlisi té present que les empreses sovint tenen una llibertat d'acció més gran, ja que no sempre es veuen forçades a comprometre's a abandonar la negociació si aquesta no té èxit en la primera ronda.

2.2. Solució cooperativa

Si ambdues empreses decideixen cooperar, les transaccions òptimes en el sentit de Pareto amb informació completa estan caracteritzades per la maximització de l'excedent total:

$$S(q) := I(q) - C(q)$$

perquè la formulació del problema permet la transferència lateral de pagaments, i podem suposar neutralitat enfront al risc respecte als pagaments.

Per hipòtesi l'ingrés marginal és decreixent i el cost marginal creixent, de manera que podem assegurar que la funció S és estrictament còncava. Si afegim la condició de què $C'(0)<I'(0)$, la continuïtat de C' i I', i la hipòtesi $C'(q)>I'(q)$ per valors suficientment grans de q, tenim assegurada l'existència d'un punt de tall de les funcions I' i C'; és a dir, un punt crític de la funció S, que serà un màxim global estricte per la concavitat de S. Sigui doncs:

$$\bar{q} := \operatorname{argmax} S(q)$$

Aquesta quantitat està ben definida i és única segons les observacions que acabem de fer.

El valor $\bar{q}$ ens dóna la quantitat òptima d'intercanvi (en el mercat); i per tant ens defineix una part de les condicions del contracte que estem buscant. Ens falta només establir el preu total a què ha de tenir lloc aquest intercanvi. Es pot veure fàcilment que aquest no es pot obtenir directament per cap procediment similar al que hem utilitzat per a deduir la quantitat òptima. En efecte, tot i respectant el principi de racionalitat individual per cada una de les empreses, es pot considerar que qualsevol preu P tal que

$$u = P - C(\bar{q}) \geq 0$$

$$v = I(\bar{q}) - P \geq 0$$

constitueix un possible preu d'intercanvi.

Tenim doncs un típic problema de negociació entre dues parts: en general, el preu a fixar depèn exclusivament del "poder negociador" que tingui cada una d'elles, perquè quant més obtingui un dels dos agents, menys obté l'altre, i a l'inrevés.

En aquest cas, una negociació sobre el preu al que s'ha d'efectuar la transacció, és absolutament equivalent a una negociació sobre les utilitats que les empreses obtenen de la signatura d'un contracte en què s'intercanviï la quantitat $\bar{q}$. Ja que, en total, la utilitat disponible que poden repartir-se les empreses és l'excedent total, el problema es redueix a triar el punt del conjunt:

$$A := \{ (u,v) \in R^2 \ / \ u+v \leq S(\bar{q}) \}$$

que les dues empreses considerin òptim. Si es pot determinar un parell $(\bar{u},\bar{v}) \in A$ en el que els dos jugadors estiguin d'acord, podrem establir sense dificultats el preu a què es duu a terme la transacció, fent ús del sistema d'equacions plantejat més amunt.

El conjunt A s'anomena generalment conjunt d'utilitats factible, perquè qualsevol dels seus punts pot ser, teòricament almenys, el resultat de la negociació d'un contracte. En efecte, aquesta observació és una conseqüència immediata del ja mencionat "teorema" de Coase: els parells $(u,v) \in A$ representen acords eficients en el sentit de Pareto que són individualment racionals. Per tant, és suficient que els agents es posin d'acord, per què els sigui possible obtenir les utilitats u i v respectivament, per qualsevol $(u,v) \in A$.

La determinació d'un punt $(\bar{u},\bar{v})$ que satisfaci ambdós jugadors és un cas particular dels problemes que Nash va estudiar a principis dels anys cinquanta, i que constitueixen una perspectiva de la teoria de jocs i de la teoria de la negociació que, encara avui, continua essent molt important. En particular, Nash (1953) tracta [p. 128]:

"... situacions econòmiques que facin referència a dos individus amb interessos ni completament oposats ni completament coincidents ... [que] se suposen capaços de discutir la situació i arribar a posar-se d'acord en un pla d'acció conjunta racional, un acord que s'ha de considerar obligatori."

La situació de negociació que se'ns presenta es pot formalitzar com un joc, estipulant que les estratègies de les dues empreses consisteixen en peticions unilaterals d'utilitat. Podem interpretar una d'aquestes demandes com la mínima utilitat que cada empresa considera imprescindible a canvi de la seva cooperació. El procés de negociació consisteix doncs, simplement en l'anunci d'una demanda (considerada la part de la utilitat global derivada de la signatura del contracte que cada empresa vol disfrutar) per part de cada un dels jugadors.

Direm que <u>un parell de demandes són compatibles</u> si és factible que les empreses obtinguin les utilitats que demanen (és a dir, si el parell és un element del conjunt A). En aquest cas, es pot signar un acord de compliment obligat - el contracte. En canvi, si les demandes són incompatibles, la negociació acaba sense acord: no hi ha cooperació entre les empreses, i cada una d'elles n'obté una utilitat zero.

El problema és que, en el context d'aquest joc, qualsevol punt de la frontera del conjunt A en el primer quadrant és un punt òptim, en el sentit de Pareto, individualment racional. De fet, qualsevol d'aquests punts pot constituir el resultat d'una negociació si els jugadors es posen prèviament d'acord sobre les peticions a fer. Llavors triar un punt, com a resultat de la negociació, no es podria fer sense una comunicació prèvia al joc formal - evitant així el risc de què el resultat de la negociació fos la no cooperació, quan hi ha guanys evidents per a ambdues parts si arriben a qualsevol altre acord -.

Naturalment, cal tenir en compte que no sempre és factible una comunicació prèvia entre els agents econòmics, o que aquests no sempre poden comprometre's per endavant a respectar un acord previ si hi ha després un marc formal on es duu a terme la negociació. Però tot i no prendre en consideració aquestes restriccions, és evident que d'aquesta manera no es pot obtenir una solució teòricament consistent, ja que el problema de triar un punt factible simplement es trasllada a la comunicació informal: el joc de negociació que hem formalitzat no és doncs suficient.

Nash (1951) proporciona un marc prou satisfactori on considerar aquestes qüestions. Proposa tractar el problema de la interacció prèvia al joc integrant-la en el propi joc. Seguint Binmore (1987b, p.28) podem resumir el planteig de Nash de la manera següent:

"... Sigui G un joc formal. Podem imaginar els diversos passos possibles del procediment de negociació previ al joc G com a moviments d'un 'joc de negociació' N més gran - és a dir, es considera una formalització del procés de negociació previ. Una estratègia pel joc formal N guia el comportament d'un jugador en totes les possibles contingències de la negociació, inclosa la tria d'una estratègia a G d'acord amb el curs que prengui aquesta. Llavors el joc de negociació N es pot analitzar com un 'contest'[3], i la seva solució porta implícitament a un resultat del joc G que podem anomenar 'solució negociada' de G."

Nash va suggerir que l'esquema per a un "contest" associat a una situació com la que es presenta aquí hauria de tenir les fases següents:

Etapa 1.- Cada jugador tria una estratègia particular, com a estratègia a utilitzar si els dos agents no poden arribar a un acord.
Aquestes estratègies s'anomenen estratègies d'amenaça; i les utilitats que obtenen els jugadors en cas que s'emprin es coneixen amb el nom de punt de status quo del joc.

3. S'anomena "contest" a un joc formal de dues persones en forma extensiva on, per hipòtesi, no es permeten les comunicacions prèvies al joc.

Etapa 2.- Els jugadors anuncien públicament les seves amenaces.

Etapa 3.- Cada jugador decideix, de manera independent, una demanda d'utilitat (tenint present les amenaces formulades prèviament).
Aquestes demandes constituexen el parell d'estratègies amb què es juga el joc de negociació. Per tant, si són compatibles, cada jugador obté el que ha demanat. Si no ho són, els jugadors han d'utilitzar les estratègies d'amenaça que han anunciat en l'etapa 1, i que determinaran com a pagament el punt de status quo.

Naturalment, aquest no és l'únic procediment de negociació que pot precedir el joc formal de G. També hi ha un gran nombre de convencions que es poden utilitzar en la solució del "contest" corresponent. Però Nash considera raonable esperar que la majoria d'aquestes situacions de negociació tinguin essencialment la mateixa estructura, i per tant portin a la mateixa solució negociada. Aquesta solució haurà de complir un cert conjunt d'hipòtesis d'estabilitat que permetin definir-la de manera única.

Considerem doncs un conjunt A d'utilitats factible, que suposarem compacte i convex, i un punt del mateix conjunt, (u_o,v_o) que faci el paper de punt de status quo.

Atenent al planteig de Nash, aquests elements defineixen completament la situació de negociació a estudiar.

Una versió (un xic modificada) dels axiomes que va enunciar Nash (1953) és la següent: la solució de negociació $(\bar{u},\bar{v})$ associada a A i amb status quo (u_o,v_o) ha de complir les condicions següents:

Axioma 1. [racionalitat individual]

$\bar{u}\geq u_o$; $\bar{v}\geq v_o$

Axioma 2. [factibilitat]

$(\bar{u},\bar{v})\in A$

Axioma 3. [optimalitat en el sentit de Pareto, o eficiència]

Qualsevol punt $(u,v)\in A$ tal que $u\geq\bar{u}$, $v\geq\bar{v}$ ha de complir $(u,v)=(\bar{u},\bar{v})$

Axioma 4. [invariància respecte a transformacions afins]

Sigui $\Phi:R^2\longrightarrow R^2$ una transformació afí positiva:

$$\Phi(u,v)=(\alpha_1 u+\beta_1,\alpha_2 v+\beta_2),\ \text{amb}\ \alpha_1,\alpha_2>0.$$

La solució de negociació associada a $\Phi(A)$ amb status quo $\Phi(u_o,v_o)$ ha de ser $\Phi(\bar{u},\bar{v})$

Axioma 5. [independència d'alternatives irrellevants]

Si B és un subconjunt de A compacte i convex, amb $(\bar{u},\bar{v})\in B$, la solució de negociació associada al conjunt B amb status quo (u_o,v_o) ha de ser igualment $(\bar{u},\bar{v})$

Axioma 6. [simetria]

Sigui $\sigma: R^2 \longrightarrow R^2$ definida per $\sigma(u,v)=(v,u)$.

La solució de negociació associada al conjunt $\sigma(A)$ amb status quo $\sigma(u_o,v_o)$ ha de ser $\sigma(\bar{u},\bar{v})$

Aquests axiomes són, en la seva major part, força obvis. Ningú discuteix, per exemple, la necessitat dels tres primers. L'axioma 4 estableix que la solució ha de ser independent de com es mesurin les funcions d'utilitat, hipòtesi prou general que es podria evitar simplement treballant directament en termes de relacions de preferència. Una defensa similar es pot fer per l'axioma 6, que Nash enuncia dient simplement que la solució ha de ser independent de quin sigui el jugador que anomenem en primer lloc. Aquest axioma, però, no és fonamental per a establir el resultat general, com comentarem més endavant.

En canvi, l'axioma 5 ha despertat un gran nombre de crítiques, i ha estat defensat o atacat des dels més diversos punts de vista. Podem descriure'l com una condició de consistència, o, en paraules de Nash, una "hipòtesi institucional", en el sentit de què demana la utilització del mateix tipus de convenció en la resolució de jocs diferents: si $(\bar{u},\bar{v})$ és la solució d'un problema de negociació amb un cert conjunt factible (B en l'enunciat), i afegim punts al conjunt, la solució al nou problema ha de ser o bé el mateix punt $(\bar{u},\bar{v})$, o bé un dels punts afegits, però mai un dels que es podia haver triat abans i que no ho ha estat.

Nash demostra que, amb aquestes hipòtesis, es pot trobar la solució de negociació $(\bar{u},\bar{v})$ associada a un joc descrit per un conjunt factible A i amb status quo (u_o,v_o) com l'únic punt que resol el problema d'optimització:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{màx } (u-u_o)(v-v_o) & \text{s.a.} & (u,v)\in A \\ & & u\geq u_o \quad v\geq v_o \end{array}\right\}$$

(veure, per exemple, Owen 1982, p p. 129-135 per a una bona demostració d'aquest resultat).

Si no s'utilitza l'axioma de simetria, s'obté un problema similar, on la funció objectiu s'ha de substituir per $(u-u_o)^{\sigma}(v-v_o)^{\tau}$, amb $\sigma+\tau=1$, $0\leq\sigma,\tau\leq1$; i es mantenen les restriccions. A vegades s'anomena <u>solució asimètrica de Nash</u>, ja que s'interpreta σ com una mesura del "poder negociador" que el procediment seguit a la negociació proporciona al primer jugador. Aquesta modificació, però, és poc utilitzada en la pràctica. Bona part dels autors considera que si es modelitza una situació de joc atribuint un valor $\sigma\neq\frac{1}{2}$ al primer jugador degut, per exemple, a què un dels dos jugadors té avantatge perquè fa el primer moviment en el joc, el joc formal estarà generalment precedit per un procés de negociació sobre qui fa aquest moviment. Amb la incorporació d'aquesta comunicació prèvia al joc formal s'obté doncs una solució simètrica.

Per aplicar el desenvolupament anterior al nostre cas, ens cal veure quin pot ser el comportament dels jugadors en l'etapa 1 del "contest" suggerit per Nash. Dit d'un altra manera, cal formular les possibles amenaces que poden esgrimir. Però una amenaça, per ser-ho en realitat, ha de ser creïble en el context en què es presenta. En el nostre cas només ho és la de no cooperació en el joc, perquè és l'única solució que un agent pot garantir sense tenir en compte el comportament de l'altre jugador. També és la única estable respecte a arguments com el següent: si un jugador anuncia la seva intenció d'obtenir una certa utilitat α, no sabrà com negar-se a cooperar si d'aquesta manera obté una utilitat un xic inferior, posem $\alpha-\epsilon$, per ϵ suficientment petit. Però si l'admet entra en un procés que el porta directament a la utilitat zero, i per tant a la no cooperació.

Tenim doncs un joc de negociació amb status quo $(u_o,v_o)=(0,0)$; i ja que trivialment el conjunt factible $A=\{(u,v)\in R^2 \ / \ u+v\leq S(\bar{q})\}$ és fitat superiorment i tancat (per tant compacte en el primer quadrant) i convex, la solució de negociació de Nash vindrà determinada per la del problema d'optimització:

$$\max\ uv \quad \text{s.a.} \quad \left.\begin{array}{l} u+v\leq S(\bar{q}) \\ u,v\geq 0 \end{array}\right\}$$

Utilitzant la funció lagrangiana associada, s'obté fàcilment que l'únic punt crític és $(\bar{u},\bar{v})$ amb $\bar{u}=\bar{v}=\frac{1}{2}S(\bar{q})$, i és immediat comprovar que aquesta és l'única solució del problema. Gràficament, per exemple, tenim:

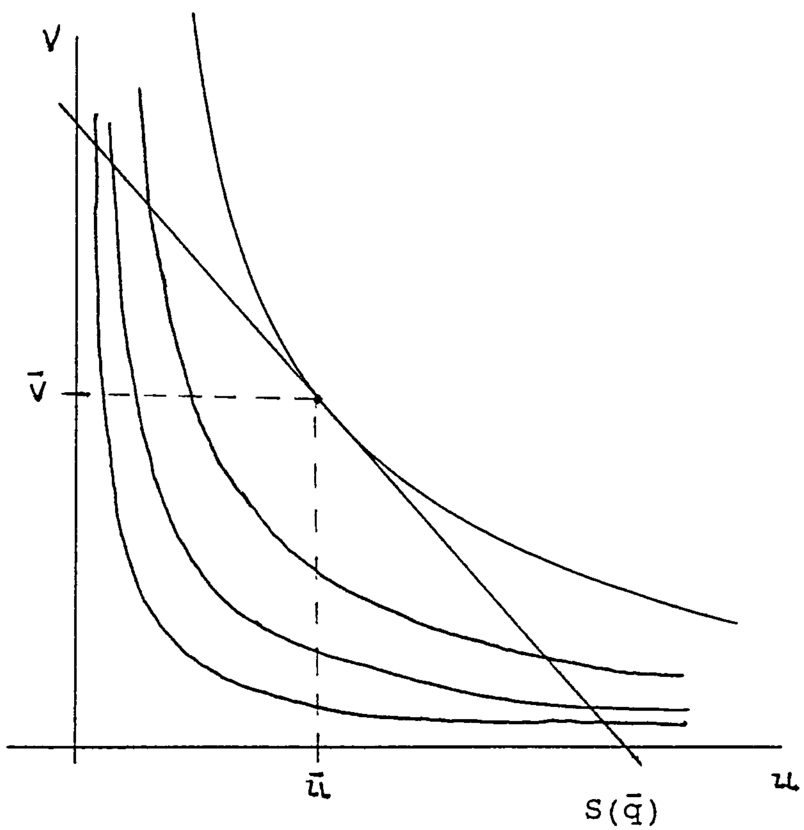

Figura 1

Si acceptem aquesta solució, només ens cal veure que, efectivament, podem trobar el valor del preu $\bar{P}$ pel que s'ha de fer la transacció, de manera que sigui consistent amb el repartiment d'utilitats que acabem de trobar. És a dir, cal verificar que existeix una sola solució del sistema d'equacions:

$$u = P - C(\bar{q})$$

$$v = I(\bar{q}) - P.$$

que doni a cada empresa la utilitat $S(\bar{q})/2$. És immediat comprovar que $P=\frac{1}{2}[C(\bar{q})+I(\bar{q})]$ compleix aquesta condició.

En conseqüència, si s'utilitza un procediment de negociació com el que acabem de descriure, és previsible que les dues empreses es posin d'acord per a repartir-se, a parts iguals, l'excedent màxim disponible producte de la seva relació. Aquesta solució s'obté signant un contracte per la quantitat $\bar{q}$, per un pagament total (no negatiu) de $P=\frac{1}{2}[C(\bar{q})+I(\bar{q})]$.

Per últim, observem la solució clàssica de Nash no és directament aplicable a tots els problemes de negociació de dues persones. De fet, el seu ús queda restringit a aquells problemes que requereixin una negociació exclusiva en termes d'utilitat, i, per tant, amb una estructura informativa molt senzilla, com el d'aquesta secció. La solució que proporciona és doncs un punt de referència com a "primera millor" solució del problema de contractació.

2.3. Models no cooperatius d'un període

L'anàlisi que hem fet en el punt anterior equival, en certa manera, a la integració vertical de les dues empreses involucrades, perquè el criteri d'eficiència que s'utilitza equival a prendre el punt de vista del mercat, enlloc de l'intern de cadascuna de les empreses. Anem ara a considerar el problema amb l'òptica de cada empresa per separat. És a dir, emprant un concepte de solució de tipus no cooperatiu.

Com ja es mencionava al primer capítol, un possible enfoc del problema consisteix en donar el control completament a una o altra part del mercat. Per exemple, es pot fixar un preu per unitat, i el comprador pot llavors triar la quantitat que consideri òptima. En aquest cas, una estratègia pel venedor consistiria en triar un cert preu unitari p^*, i pel comprador en triar una quantitat q^*; el contracte es signaria amb les condicions $\{q^*, p^*q^*\}$. La determinació de la quantitat òptima q^* és immediata donat p^*: simplement, es tracta de maximitzar respecte a q la funció d'utilitat del comprador:

$$v = I(q) - p^*q.$$

El punt crític de v és el valor q^* que compleix $I'(q^*)=p^*$; i es tracta d'un màxim, ja que per hipòtesi I és còncava.

Però en canvi, per a establir el preu unitàri òptim p^*, el venedor s'enfrenta a la maximització d'una funció ($u=pq-C(q)$) lineal respecte a p. El problema no té restriccions, i per tant l'òptim no és finit. Així doncs, aquest repartiment de tasques per a determinar el contracte òptim no és factible, a menys que es parteixi d'un preu unitari donat - a la pràctica per condicions externes del mercat -, de manera que la situació que es presenta seria més aviat la d'un monopoli.

Si es vol obtenir una solució en la que el contracte permeti el control a ambdues parts, es podria plantejar una situació de negociació on ambdues empreses proposessin sengles contractes: $\{q_1,p_1\}$ i $\{q_2,p_2\}$; demanant que la solució del joc de negociació associat complís un cert conjunt d'axiomes d'estabilitat.

Però el problema és que una de les condicions que caldria imposar seria òbviament la igualtat de preus i quantitats en les propostes òptimes de les dues empreses. Naturalment, a menys que aquestes es posin d'acord abans, cosa que descarta un punt de vista no cooperatiu, aquesta condició, a priori, no té perquè complir-se.

Així doncs, qualsevol resposta a la situació de negociació presentada, si ha d'oferir la possibilitat de control a ambdues parts, ha de passar per una definició molt més acurada dels termes que s'utilitzin en la negociació, per a evitar un final sense acord degut precisament a aquesta indeterminació.

Un dels models proposats en aquest sentit és el de Deschamps i Jaskold-Gabszewicz (1975). En els apartats que segueixen presentem el seu desenvolupament, així com un altre model en una línia similar, en què s'han variat els termes de la negociació. A través d'aquest altre joc hem pogut establir, a diferència del model de partida, la relació que nosaltres considerem correcte entre la solució no cooperativa i la que ofereix la situació cooperativa examinada anteriorment.

2.3.1. El model de Deschamps i Jaskold-Gabszewicz

En el seu article, proposen un joc no cooperatiu per a negociar els termes d'un contracte, que essencialment, fa ús dels elements que s'exposen a continuació. A nivell abstracte, es considera l'existència d'un "àrbitre" al que les dues empreses podrien apel.lar per a trobar un contracte que les beneficiï[4]. De forma esquemàtica, tindrem el joc següent:

Etapa 1.- Cada empresa, per separat, selecciona un esquema de preus i quantitats, que especifiqui la quantitat que l'empresa està disposada a intercanviar per cada possible preu unitari al que s'efectui la transacció. És a dir, trien, respectivament, una funció d'oferta i una funció de demanda pel bé objecte del contracte.

Etapa 2.- L'àrbitre és informat, igualment per separat, de cada un d'aquests esquemes.

Etapa 3.- S'encarrega a l'àrbitre de veure si les posicions de les dues empreses són compatibles; és a dir, si hi ha algun punt d'intersecció dels

4. S'ha d'entendre el paper d'aquest àrbitre més aviat en el sentit de què té poder per a imposar un acord (Crawford, 1985), que com a mitjancer (Rubinstein i Wolinsky, 1987).

grafs de les funcions proporcionades per les empreses. Si és així, el punt d'intersecció determina un contracte en preu i quantitat que l'àrbitre està en disposició de fer signar a les dues empreses. En cas contrari, la solució seria, com en el cas cooperatiu, el punt de status quo: utilitats zero per ambdues empreses, ja que no es pot arribar a cap acord per a signar un contacte.

Observem que la figura de l'àrbitre és més aviat un artifici o mecanisme teòric per a assegurar, a la pràctica, que les funcions d'oferta i demanda es triïn per separat i de manera simultània. De fet, el que es demana és que, a l'hora de triar, els dos decisors ho facin de manera completament independent, sense tenir altra guia sobre el seu oponent que la que proporciona la teoria de jocs: racionalitat i coneixement de tot l'entorn. Això no implica de cap manera que en realitat hagi d'existir aquest àrbitre. Per exemple, el paper el pot fer un ordinador que s'hagi programat prèviament per a rebre, desde terminals diferents, les dues funcions. Una vegada se li han subministrat, el programa pot fer els càlculs necessaris per a determinar els termes del contracte, si és que es pot signar, o anunciar, a través de les terminals corresponents, que no es pot arribar a cap acord. No obstant, en aquest cas, els dos agents s'han d'haver compromés, a priori, a acceptar i signar el contracte en les condicions calculades.

El concepte de solució més satisfactori que s'ha definit en general per a aquest tipus de jocs (no cooperatius) és el que s'anomena punt d'equilibri, o equilibri de Nash[5].

Per a la seva definició necessitem els següents elements: Considerem un joc de n jugadors sense comunicació prèvia (és a dir, el que hem anomenat "contest" anteriorment); i sigui A_i ($i=1,...,n$) el conjunt de possibles accions del jugador i. Els elements de A_i poden ser estratègies "<u>pures</u>" - accions que realment pot dur a terme -, o bé estratègies "<u>mixtes</u>". Aquest últim terme es refereix a què el jugador pot decidir, enlloc de triar una certa acció d'entre les que té a l'abast, triar un mecanisme aleatori amb un pes, o probabilitat, sobre cada estratègia pura; de manera que sigui el resultat d'aquest mecanisme el que li indiqui la acció a realitzar. Per exemple, decidir entre dues accions tirant una moneda equival a utilitzar una estratègia mixta en què les dues estratègies pures tenen la mateixa probabilitat de ser triades (si la moneda és com cal). Fent un abús en la interpretació,

---

5. En honor seu, perquè va demostrar el teorema bàsic d'existència en una família prou àmplia de jocs. Veure Nash (1950b).

podem dir que A_i és l'envolupant convexe de les accions directes de què disposa un jugador en el joc.

Llavors un <u>equilibri de Nash</u> és un conjunt d'estratègies $(a_1^*,...,a_n^*)$, una per cada jugador (és a dir, $a_i^* \in A_i$, $i=1,..,n$) tal que cada a_i^* és la millor resposta que té al seu abast el jugador i, si els altres n-1 jugadors trien les estratègies a_j^* $(j \neq i)$.

És a dir, si denotem per $u_i(a_1,...,a_n)$ la utilitat que obté el jugador i, si els n jugadors utilitzen les estratègies a_i $(i=1,...,n)$, el conjunt d'estratègies $(a_1^*,...,a_n^*)$ és un equilibri de Nash si, i solament si, es compleix:

$$u_i(a_1^*,..,a_{i-1}^*,a_i,a_{i+1}^*,..,a_n^*) \leq u_i(a_1^*,..,a_i^*,..a_n^*)$$

per cada estratègia $a_i \in A_i$ i per cada un dels jugadors $(i=1,...,n)$.

La importància d'aquest concepte és deguda a què, si una anàlisi racional d'un "contest" pot assenyalar de manera única una tria d'estratègies òptimes per cada jugador, llavors aquest conjunt d'estratègies ha de constituir un equilibri de Nash del joc. En efecte, suposem, per a simplificar, un joc amb dos jugadors, que trien, com a estratègies òptimes, el parell (a_1,a_2), respectivament, i que aquestes estratègies no constituexen un equilibri de

Nash. Això significa que, per exemple, a_2 no és la millor resposta que el jugador 2 pot donar al jugador 1 si aquest utilitza a_1. Obviament, tractant-se d'un jugador racional, no hauria triat a_2 si pensés que 1 vol utilitzar a_1. Per tant, la tria de 2 ha de respondre a què considera que a_2 és la millor resposta a un altra estratègia que creu que 1 triarà. Però òbviament, 2 s'ha equivocat en el seu raonament, ja que 1 ha triat a_1. Això contradiu les hipòtesis de partida de la teoria de jocs, que inclouen la de què qualsevol jugador racional ha de poder duplicar el raonament de qualsevol altre jugador si té els mateixos elements de partida; i en aquest cas estem considerant que tota la estructura del joc és coneixement comú. Per tant, el parell (a_1,a_2) no pot haver estat triat pels dos jugadors a menys que sigui un equilibri de Nash.

Així doncs, per a analitzar el joc que proposen Deschamps i Jaskold-Gabsewicz, podem començar buscant els seus punts d'equilibri. Si n'hi ha només un, les seves estratègies constituiran l'únic comportament racional dels jugadors, i ens definiran els termes de l'únic contracte que factiblement poden signar.

En termes d'aquest joc, el <u>conjunt d'estratègies</u> de cada jugador es pot considerar, en principi, el de totes les funcions reals de variable real. Però resulta complicat tractar amb aquests conjunts tan amplis, i

Deschamps i Jaskold-Gabszewicz proposen una restricció addicional: que les empreses utilitzin només <u>funcions lineals</u> per a definir els esquemes respectius de quantitat-preu que estan disposades a acceptar.

Concretament, els autors proposen que l'empresa venedora faci una <u>oferta</u> a través d'una funció de la forma $q=\alpha p$ (suposant que no estigui disposada a vendre a preu inferior a zero, o, el que és equivalent, fent un canvi de manera que $C(0)=0$). Per la seva part, l'empresa compradora anuncia una <u>funció de demanda</u> del tipus $q=q_o-\beta p$, on q_o és la quantitat màxima que està disposada a comprar.

En aquestes condicions, cada empresa es pot limitar a triar el pendent de la funció corresponent. Observem que l'estratègia $\alpha=0$ del venedor equival a declarar que no està disposat a signar cap contracte, sigui quin sigui el preu que se li ofereixi. Per tant, considerarem com a espai d'estratègies de l'empresa venedora el conjunt:

$$A_1=\{\alpha \;/\; 0\leq\alpha<+\infty\}$$

Per a tenir un comportament similar en el comprador haurem de considerar $\beta=+\infty$, i per tant l'espai d'estratègies de l'empresa venedora es pot definir com:

$$A_2=\{\beta \;/\; 0<\beta\leq+\infty\}$$

Gràficament:

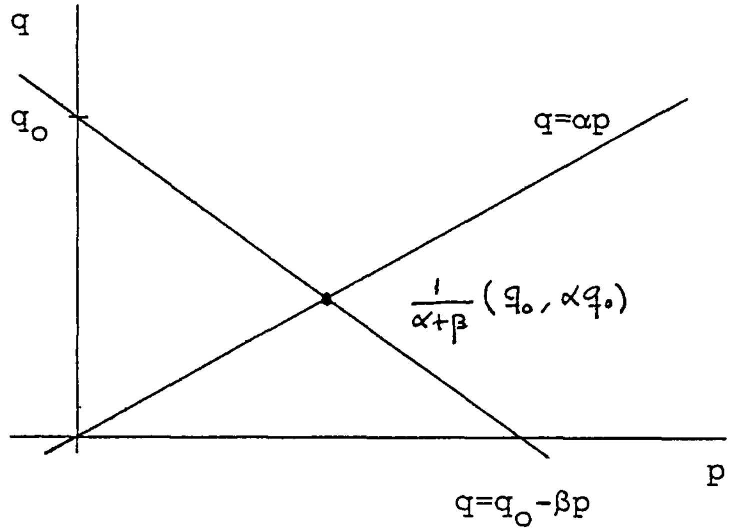

Figura 2

El punt d'intersecció de les dues rectes determina les condicions del contracte òptim.

Així doncs, un parell d'estratègies (α,β) de les empreses <u>determinen un contracte</u> per la quantitat $q=\alpha q_0/(\alpha+\beta)$ a un preu unitari $p=q_0/(\alpha+\beta)$ (sempre que $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$), i les empreses obtenen, respectivament:

$$u = u(\alpha,\beta) = pq - C(q) = q_0^2\alpha/(\alpha+\beta)^2 - C(\alpha q_0/(\alpha+\beta))$$

$$v = v(\alpha,\beta) = I(q) - pq = I(\alpha q_0/(\alpha+\beta)) - q_0^2\alpha/(\alpha+\beta)^2$$

El parell $(\alpha^*,\beta^*)\in(0,+\infty)x(0,+\infty)$ constituirà un equilibri de Nash del joc si compleix:

(i) $u(\alpha,\beta^*) \le u(\alpha^*,\beta^*) \qquad \forall\alpha\in(0,+\infty)$

(ii) $v(\alpha^*,\beta) \le v(\alpha^*,\beta^*) \qquad \forall\beta\in(0,+\infty)$

Observem que la condició (i) és equivalent a què α^* sigui un màxim de la funció $u(.,\beta)$ - mantenint la segona variable constant -, mentre que (ii) es compleix si β^* és màxim de $v(\alpha,.)$.

Ja que les funcions que intervenen en la definició de u i v són dues vegades contínuament diferenciables, és fàcil veure que les condicions necessàries de primer ordre que han de complir un parell (α,β) per a ser equilibri de Nash són:

$$\left.\begin{aligned} &q_o(\beta-\alpha) - \beta(\alpha+\beta)\, C'(\alpha q_o/(\alpha+\beta)) = 0 \\ &(\alpha+\beta)\, I'(\alpha q_o/(\alpha+\beta)) - 2q_o = 0 \end{aligned}\right\}$$

És immediat comprovar que les condicions $\alpha,\beta>0$, així com I' decreixent i C' creixent impliquen que tot punt crític compleix les condicions de segon ordre per assegurar que es tracta d'un màxim de cada una de les dues funcions.

Expressant els valors de p i q en funció de α i β, el sistema d'equacions anterior es pot escriure també com:

$$\left.\begin{aligned} &C'(q)\, [(q_o-q)/(q_o-2q)] = p \\ &I'(q) = 2p \end{aligned}\right\} \qquad (2.A)$$

Aïllant p i substituint s'obté l'equació:

$$2C'(q)[(q_o-q)/(q_o-2q)] - I'(q) = 0 \qquad (2.B)$$

de manera que les possibles quantitats òptimes per les que es pot signar un contracte són els zeros de la funció:

$$F(q):= 2C'(q)[(q_o-q)/(q_o-2q)] - I'(q) \qquad (2.C)$$

definida en l'interval $[0,q_o]$.

Si, a les hipòtesis tècniques formulades al començament d'aquesta part, afegim les següents:

(a) $C'(q)>0 \quad \forall q\in[0,q_o]$

(b) $2C'(0)<I'(0)$

es pot veure fàcilment que la funció F és estrictament creixent a l'interval $[0,q_o/2)$, amb imatge negativa per $q=0$ i que tendeix a $+\infty$ quan q s'aproxima a $q_o/2$ per l'esquerra. Per tant, i ja que en aquest interval la funció és contínua, podem assegurar que té un únic zero en $[0, q_o/2)$, és a dir, hi ha una única solució de (2.B). En canvi, a l'interval $(q_o/2,q_o]$ no hi ha cap solució admissible del sistema (2.A), perquè la condició (a) implica que el preu unitari a què s'hauria de fer la transacció seria negatiu.

Així doncs, si ambues empreses tenen intenció de signar un contracte, la solució única de (2.A) determina les seves condicions, al ser l'únic equilibri de Nash.

2.3.2. Generalització

I. El resultat de Deschamps i Jaskold-Gabsewicz es pot generalitzar fàcilment quan la restricció (a) anterior no es compleix.

Suposem que la funció de cost marginal de l'empresa venedora canvia de signe per alguna quantitat q positiva. Aquest punt serà únic, ja que per hipòtesi C' és estrictament creixent.

Per a obtenir un resultat similar a l'anterior podem demanar ara a l'empresa compradora que, per a fer les seves ofertes, utilitzi funcions hiperbòliques enlloc de lineals. Especificament, considerarem que són funcions de la forma $pq=\beta$. Llavors l'espai d'estratègies de l'empresa venedora és:

$$A_2=\{\beta \ / \ 0\leq\beta<+\infty\}$$

on el valor $\beta=0$ correspon a l'estratègia de no contractació.

Per a simplificar la notació posterior, i tenint en compte que els paràmetres de les dues funcions només poden prendre valors no negatius, no hi ha pèrdua de generalitat en suposar que les funcions d'oferta i demanda són, respectivament, $q=\alpha^2 p$ i $pq=\beta^2$.

Gràficament:

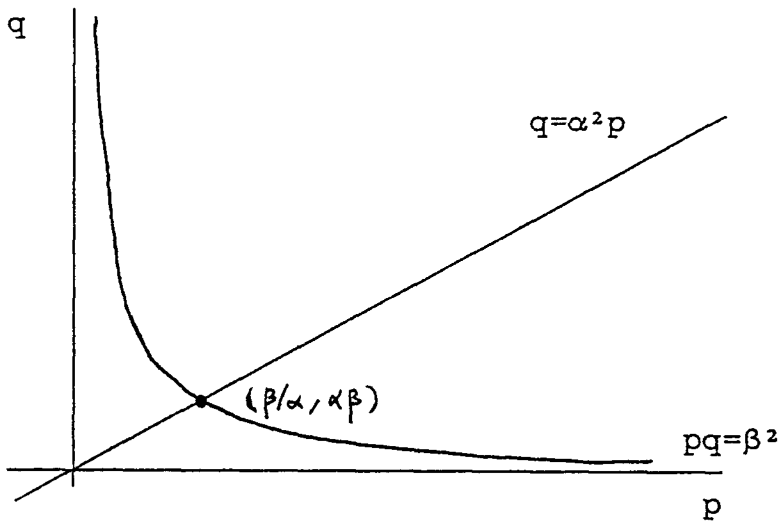

Figura 3

Comparant aquest gràfic amb el de la figura 2, es pot veure que el canvi en l'estratègia del venedor gairebé no afecta a la filosofia del model de partida.

Si les empreses trien el parell d'estratègies (α^2,β^2) amb $\alpha,\beta\neq 0$, una negociació duta a terme amb el procediment esmentat abans tindrà com a resultat la signatura d'un contracte per la quantitat $q=\alpha\beta$ a preu unitari $p=\beta/\alpha$, de manera que els beneficis de les dues empreses seran, respectivament:

$$u(\alpha^2,\beta^2) = \beta^2 - C(\alpha\beta)$$

$$v(\alpha^2,\beta^2) = I(\alpha\beta) - \beta^2$$

Refent l'argument que hem utilitzat abans, es pot demostrar que (α^2, β^2) serà un parell d'estratègies en equilibri de Nash si, i solament si:

$$\left.\begin{aligned} C'(\alpha\beta) &= 0 \\ \alpha\, I'(\alpha\beta) - 2\beta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(la condició és suficient degut, com abans, a què estem suposant C convexe i I còncava).

La traducció d'aquestes condicions en termes de quantitat i preu a contractar ens dóna:

$$\left.\begin{aligned} C'(q) &= 0 \\ I'(q) - 2p &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que determinen de manera única les condicions del contracte, ja que estem suposant precisament que C' té un canvi de signe. Observem que, amb aquestes hipòtesis, la quantitat que s'intercanvia correspon a la de mínim cost.

II. Però tot i fent aquesta generalització, el resultat no sembla ésser massa satisfactori. Observem en primer lloc que l'equilibri de Nash que hem trobat en cada cas, aparentment determina de manera única les condicions del contracte - si les empreses estan disposades a signar-ne un. No obstant, aquest equilibri no és únic, sinó que n'hi ha un altre, que podem anomenar <u>equilibri de no contractació</u>, perquè la millor resposta que una empresa pot donar si l'altra no està disposada a signar un contracte en cap cas, és anunciar que ella tampoc està disposada a negociar. Si deixem de banda aquest equilibri, estem suposant que les empreses tenen, a priori, una certa voluntat negociadora. Llavors és obligat preguntar-nos per la <u>relació entre el resultat que s'obté seguint aquest model i l'acord a què s'arriba si les empreses cooperen</u>.

Resulta immediat comprovar que la quantitat a intercanviar en els dos casos que hem examinat en aquesta secció és sempre inferior a la que acordarien en el cas cooperatiu que, recordem, era la quantitat $\bar{q}$ determinada per la relació $C'(q)=I'(q)$.

El raonament en el cas de les funcions lineals és el següent. Sigui q^* la solució única de (2.B). Hem demostrat que $q^* \in [0, q_o/2)$, de manera que si es tria q_o

tal que $\bar{q}\in[q_o/2,q_o]$, la conclusió és òbvia. Però si, en canvi, $\bar{q}\in[0,q_o/2)$, tenim $F(\bar{q})=2q_oC'(\bar{q})/(q_o-2\bar{q})>0$, on F és la funció definida a (2.C). Al ser F estrictament creixent i contínua, i donat que q^* compleix $F(q^*)=0$, s'obté la mateixa conclusió.

Tot i que Deschamps i Jaskold-Gabsewicz no troben sorprenent aquesta conclusió, que qualifiquen de "Malthusiana", sembla lògic preguntar per què dues empreses que estan disposades a signar un contacte ho han de fer per una quantitat que, conjuntament, no els proporciona tota la utilitat que podrien obtenir amb la fórmula de la cooperació directa.

La resposta pot estar en la limitació en les estratègies a utilitzar per part d'ambdues empreses. Obviament sembla necessari posar alguna restricció, perquè tractar amb el conjunt de totes les funcions reals de variable real - o, si es vol considerant només les que són dues vegades contínuament diferenciables per a utilitzar les recursos de l'anàlisi clàssica - és una tasca pràcticament inabordable. Significa suposar que les empreses disposen d'una capacitat ilimitada de càlcul, i això és una hipòtesi massa arriscada. La restricció a una família de funcions descrites per un nombre finit - i petit - de paràmetres es pot fer, doncs, en nom d'una "racionalitat limitada" de les empreses.

Però, de la mateixa manera que hem demostrat que si restringíem el conjunt de possibles estratègies de les empreses a una família de funcions lineals obteníem un únic equilibri de Nash, aquest resultat es pot obtenir fàcilment per d'altres famílies de funcions adequades. Dit d'una altra manera, mentre les empreses es comprometin a utilitzar, com a estratègies, elements de la família triada, i sempre que amb el seu ús s'obtingui un únic equilibri de Nash, podrem afirmar que aquest proporciona les condicions òptimes del contracte a signar entre les mateixes. Aquesta és doncs una raó en contra de la solució proporcionada per l'estudi anterior.

Hi ha encara un altre problema. Per a poder assegurar que les empreses signen un contracte en les condicions donades per Deschamps i Jaskold-Gabszewicz, aquestes han de comprometre's a utilitzar estratègies lineals. Aquest compromís, que d'alguna manera equival a un cert esperit cooperatiu, els hi reporta beneficis inferiors als de la solució cooperativa. En conseqüència, cada una de les empreses té un incentiu per a suggerir modificacions en l'estructura de la negociació, que li permetin canviar el tipus d'estratègies que utilitza. Però, en el marc en què es duu a terme la negociació, els canvis poden tenir com a resultat que la solució del joc sigui la no signatura del contracte.

Aquest darrer argument és aplicable a qualsevol família de funcions a què restringim les estratègies de les empreses, excepte per a aquelles que els hi proporcionin el màxim benefici. En concret, podem intentar trobar famílies de corbes que tinguin, com a equilibri de Nash associat en el cas de contractació, aproximadament el mateix resultat que en el cooperatiu. Si existeixen, asseguren que la utilitat conjunta és màxima, i per tant es poden considerar suficientment estables.

2.3.3. Un model de negociació amb preus globals

Demostrarem aquí que és possible trobar famílies de funcions d'oferta i demanda de les empreses, mitjançant les quals un joc de negociació no cooperatiu condueix a la signatura de contractes òptims, en termes tan propers com es vulgui als del cas cooperatiu.

Per a obtenir aquest resultat ens caldrà utilitzar, com a funcions d'oferta i demanda de les empreses, les relacions quantitat-preu global que aquestes estan disposades a contractar. Excepte per aquest canvi, la negociació segueix el mateix esquema proposat per Descamps i Jaskold-Gabszewicz, que hem resumit en les tres etapes del principi de la secció 2.3.

Ja que, com hem comentat a II, en la secció anterior, cal tractar amb famílies de funcions relativament senzilles, ens proposem utilitzar les següents:

$P = \alpha\, q^n$ per l'empresa venedora (2.D)

$q = \beta\, P^m$ per la compradora (2.E)

on P representa el preu global que l'empresa demana (o ofereix) per intercanviar la quantitat q del bé objecte del contracte.

En l'especificació de les funcions hem introduït sengles paràmetres, n i m, que considerem constants, a més dels valors α i β, que són els que poden triar les empreses, i a través dels quals definirem les seves estratègies. Així doncs, per a aquest joc els <u>espais d'estratègies dels agents</u> seran:

$$A_1 = \{\alpha \ / \ 0<\alpha\leq+\infty\} \qquad A_2 = \{\beta \ / \ 0\leq\beta<+\infty\}$$

Lògicament, denotem amb $\alpha=+\infty$ que la primera empresa no està disposada a vendre a cap preu, mentre que $\beta=0$ indica que la segona no vol comprar.

Gràficament:

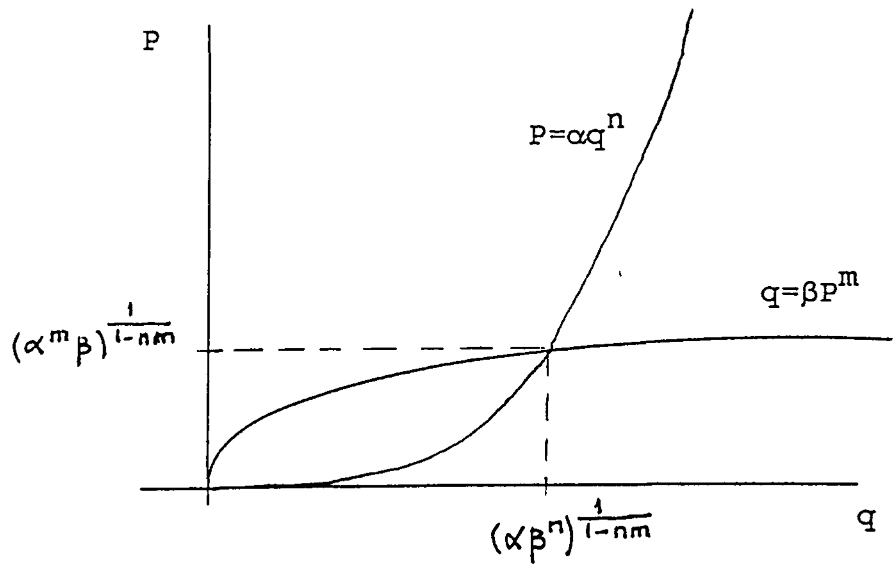

Figura 4

Si les empreses estan d'acord en signar un contracte per una quantitat q, a un preu total P, sempre que la relació que hi hagi entre aquestes magnituds estigui donada per les funcions (2.D) i (2.E), les condicions del contracte hauran d'especificar:

$$P = \alpha^{1/(1-nm)} \beta^{n/(1-nm)}$$

$$q = \alpha^{m/(1-nm)} \beta^{1/(1-nm)}$$

De manera similar als models anteriors, ens preguntem per l'existència d'un parell (α,β) que constituexi un equilibri de Nash del joc.

El valor que triï l'empresa venedora, α, ha de ser la resposta òptima a una certa estratègia β fixada de l'altra, de manera que s'ha de complir que la primera derivada de la seva funció d'utilitat, u, respecte a α s'anuli, mentre que la segona sigui negativa. Tenint en compte que la funció d'utilitat vé donada per:

$$\begin{aligned} u &= P - C(q) = \\ &= \alpha^{1/(1-nm)} \beta^{n/(1-nm)} - C(\alpha^{m/(1-nm)} \beta^{1/(1-nm)}) \end{aligned}$$

la condició necessària de primer ordre es pot expressar aquí com:

$$C'(\alpha^{m/(1-nm)} \beta^{1/(1-nm)}) = (1/m)\, \alpha^{(1-m)/(1-nm)} \beta^{(n-1)/(1-nm)} \qquad (2.F)$$

i es pot comprovar que $m \geq 1$ és una condició suficient per a assegurar l'optimalitat de α.

De manera similar, β constitueix la millor resposta a una estratègia α donada de la primera empresa si es compleix:

$$I'(\alpha^{m/(1-nm)}\ \beta^{1/(1-nm)}) = n\ \alpha^{(1-m)/(1-nm)}\ \beta^{(n-1)/(1-nm)} \tag{2.G}$$

i, a més a més, s'utilitza $n \geq 1$.

Per tant, (α,β) és un equilibri de Nash si, i solament si, es compleixen les equacions (2.F) i (2.G), amb $n,m \geq 1$. En funció de P i q aquestes relacions es poden escriure com:

$$\left.\begin{aligned} m\ C'(q) &= P/q \\ I'(q) &= n\ P/q \end{aligned}\right\}$$

d'on podem concloure que l'equació $I'(q) = nm\ C'(q)$ defineix la quantitat òptima d'intercanvi.

És immediat comprovar que si fem tendir m i n a 1 per la dreta, la quantitat en equilibri s'aproxima, per sota, a $\bar{q}$, ja que aquest valor, per definició, compleix la condició $I'(\bar{q})=C'(\bar{q})$. Per tant, hem obtingut una família de corbes que ambdues empreses s'avindran a utilitzar, perquè permet obtenir una solució arbitràriament pròxima a la del joc cooperatiu de la secció anterior.

Falta veure la relació entre el preu de transferència en aquest contracte i el que havíem definit en el cas cooperatiu, $\bar{P}=\frac{1}{2}[C(\bar{q})+I(\bar{q})]$. Aquí tenim $P=mqC'(q)$, i també $P=\frac{1}{n}qI'(q)$, que en el límit s'aproxima a $P=\bar{q}C'(\bar{q})=\bar{q}I'(\bar{q})$, degut a què, quan fem tendir m i n a 1, q tendeix a $\bar{q}$. Però al suposar que C i I són funcions diferenciables, fent un desenvolupament al voltant de $\bar{q}$ tenim:

$$0 = C(0) = C(\bar{q}) + C'(\bar{q})(0-\bar{q}) + \epsilon_1$$

$$0 = I(0) = I(\bar{q}) + I'(\bar{q})(0-\bar{q}) + \epsilon_2$$

Per tant:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}[C(\bar{q})+I(\bar{q})] \approx \frac{1}{2}\,[\bar{q}C'(\bar{q})+\bar{q}I'(\bar{q})] = \bar{q}C'(\bar{q}) = P$$

de manera que podem assegurar la proximitat de tots els termes del contracte - preu i quantitat - amb el cas cooperatiu.

i es pot comprovar que $m \geq 1$ és una condició suficient per a assegurar l'optimalitat de α.

De manera similar, β constitueix la millor resposta a una estratègia α donada de la primera empresa si es compleix:

$$I'(\alpha^{m/(1-nm)}\ \beta^{1/(1-nm)}) = n\ \alpha^{(1-m)/(1-nm)}\ \beta^{(n-1)/(1-nm)} \tag{2.G}$$

i, a més a més, s'utilitza $n \geq 1$.

Per tant, (α,β) és un equilibri de Nash si, i solament si, es compleixen les equacions (2.F) i (2.G), amb $n,m \geq 1$. En funció de P i q aquestes relacions es poden escriure com:

$$\left.\begin{aligned} m\ C'(q) &= P/q \\ I'(q) &= n\ P/q \end{aligned}\right\}$$

d'on podem concloure que l'equació $I'(q) = nm\ C'(q)$ defineix la quantitat òptima d'intercanvi.

És immediat comprovar que si fem tendir m i n a 1 per la dreta, la quantitat en equilibri s'aproxima, per sota, a $\bar{q}$, ja que aquest valor, per definició, compleix la condició $I'(\bar{q})=C'(\bar{q})$. Per tant, hem obtingut una família de corbes que ambdues empreses s'avindran a utilitzar, perquè permet obtenir una solució arbitràriament pròxima a la del joc cooperatiu de la secció anterior.

Falta veure la relació entre el preu de transferència en aquest contracte i el que havíem definit en el cas cooperatiu, $\bar{P}=\frac{1}{2}[C(\bar{q})+I(\bar{q})]$. Aquí tenim $P=mqC'(q)$, i també $P=\frac{1}{n}qI'(q)$, que en el límit s'aproxima a $P=\bar{q}C'(\bar{q})=\bar{q}I'(\bar{q})$, degut a què, quan fem tendir m i n a 1, q tendeix a $\bar{q}$. Però al suposar que C i I són funcions diferenciables, fent un desenvolupament al voltant de $\bar{q}$ tenim:

$$0 = C(0) = C(\bar{q}) + C'(\bar{q})(0-\bar{q}) + \epsilon_1$$

$$0 = I(0) = I(\bar{q}) + I'(\bar{q})(0-\bar{q}) + \epsilon_2$$

Per tant:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}[C(\bar{q})+I(\bar{q})] \approx \frac{1}{2}[\bar{q}C'(\bar{q})+\bar{q}I'(\bar{q})] = \bar{q}C'(\bar{q}) = P$$

de manera que podem assegurar la proximitat de tots els termes del contracte - preu i quantitat - amb el cas cooperatiu.

2.4. Negociacions amb més d'un període

2.4.1. Formalització del model

Una de les característiques comunes als models anteriors és l'exigència de què les empreses facin, cada una, una sola demanda, i de manera simultània. A més, si amb aquestes demandes no s'aconsegueix un acord mutu, la negociació es considera acabada, i les empreses obtenen el pagament de status quo previst per les regles del joc. Ens proposem ara relaxar en certa manera aquesta condició[6], utilitzant un joc amb diferents etapes inspirat en els desenvolupats per diversos autors, entre els que destaca Rubinstein (1982).

Com en el primer model d'aquesta secció, si suposem neutralitat enfront dels pagaments, així com que es poden efectuar transferències laterals de pagaments, podem determinar de manera única la quantitat d'intercanvi d'un contracte òptim, definida per:

$$\bar{q} = \text{argmax } S(q) = \text{argmax } (I(q)-C(q))$$

6. Un dels problemes dels jocs d'una sola etapa és precisament que pressuposen que els agents poden comprometre's a priori a acceptar el resultat de status quo si la negociació no surt bé. Per remarcar la importància que pot tenir aquesta hipòtesi, veure l'estudi de Crawford (1982).

El problema de determinar les condicions del contracte queda reduït, doncs, al de fixar el preu de l'intercanvi, i es pot redefinir en termes de la utilitat que reberan cada una de les empreses signants. Recordem que, com en 2.2, els parells factibles són els del conjunt:

$$A = \{(u,v) \in R^2 \ / \ u+v \leq S(\bar{q})\}$$

Tenint en compte que es busca un acord eficient, de fet el problema consisteix, essencialment, en què els jugadors arribin a un acord sobre com repartir-se un "pastís" de tamany $S(\bar{q})$.

Rubinstein proposa utilitzar un procediment de negociació seqüencial que es pot descriure de la següent manera: En el moment t=0, el primer jugador fa una demanda en termes d'utilitat, que pot ser acceptada o rebutjada per l'altre jugador. Si és acceptada, el joc s'acaba; el primer jugador reb el que havia demanat, i el segon obté la màxima utilitat disponible compatible amb la petició del primer. Si el segon jugador rebutja la demanda del primer, la negociació continua, i ara li toca a aquest segon jugador fer una demanda, en la que es considera l'etapa t=1 del joc, que el primer pot acceptar o rebutjar; i així successivament.

Per no complicar la definició formal dels termes de la negociació, convindrem en què les demandes dels jugadors es referiran sempre a utilitats que, si s'accepten, correspondran al primer jugador. Així doncs, de fet, el jugador 1 estarà fent demandes d'utilitat, i el jugador 2 ofertes.

Amb aquest conveni, un <u>acord</u> estarà determinat per un parell ordenat (x,t), essent x la part del "pastís" que pertocarà al primer jugador, i t un sencer no negatiu que representa el moment en què s'arriba a l'acord. Suposarem que els jugadors tenen sengles relacions de preferència, contínues, sobre aquests parells, que compleixen a més:

(a.1) si $x<y$, llavors $(x,t) \prec (y,t) \quad \forall t$

(a.2) si $t_1<t_2$, llavors $(x,t_1) \prec (x,t_2) \quad \forall x$

(a.3) la relació de preferència només depèn, en el temps, del nombre d'etapes transcorregudes:

$$(x,t_1) \prec (y,t_1+1) \quad \text{ssi} \quad (x,t_2) \prec (y,t_2+1) \quad \forall t_1,t_2$$

(a.4) la "compensació" que necessita un jugador per a retardar un període l'acord, és proporcional al tamany de la part del "pastís" que pensa obtenir.

Essencialment, les condicions anteriors estableixen que els agents volen obtenir la part més gran del "pastís" possible, i que reaccionen negativament al retard en arribar a un acord. Una manera de modelitzar relacions de preferència que compleixin aquestes propietats és suposar que el conjunt de parells d'utilitat factibles en el moment t és:

$$A_t = \{(\alpha^t u \ , \ \beta^t v) \ / \ (u,v)\in A \}$$

on $0<\alpha,\beta<1$ són els <u>factors unitàris d'actualització</u> de cada empresa, respectivament.

Denotarem per $T:=[0,S(\bar{q})]$ el conjunt de possibles demandes del jugador 1 (que són, pel jugador 2, ofertes). D'aquesta manera, si en un cert moment t, un jugador proposa $x\in T$ i l'altre ho accepta, el jugador 1 obté $\alpha^t x$, quedant pel jugador 2 la diferència actualitzada, $\beta^t(S(\bar{q})-x)$.

Per a poder analitzar aquest joc cal començar per la <u>descripció de les estratègies</u> de què disposen els jugadors. Les regles del joc exigeixen que, per t imparell, el jugador 1 faci una demanda d'utilitat, mentre que per t parell ha de respondre "si" o "no" a una demanda de l'altre jugador. Pel jugador 2 tenim gairebé el mateix, només canviant els moments parells pels imparells (i a l'inrevés). Una estratègia per un jugador ha de ser una regla que li dicti el comportament a seguir (demandes i respostes adients), en funció del caire que prengui el joc, és a dir, dels moviments efectuats prèviament per ambdós jugadors, i que li serveixi durant tot el joc.

Podem definir, per tant, una estratègia pel jugador 1 com una successió de funcions $\{f_t\}_{t=1}^{\infty}$ tal que:

- per t imparell, $f_t:T^{t-1} \longrightarrow T$

  La funció f_t determina la utilitat que demanarà el jugador 1 a l'etapa t. Depèn de les propostes (ofertes i demandes) que s'hagin fet en els t-1 períodes anteriors.

  Aquesta funció no està ben definida quan t=1: ens cal establir un conveni addicional per T^o. Però al principi del joc, una estratègia simplement ha d'indicar un element de T. Podem respectar la forma funcional que hem adoptat per a les etapes posteriors, si establim que T^o és un conjunt qualsevol d'un sol element, per exemple $T^o=\{0\}$. D'aquesta manera, $f_1(0)$ indica la primera demanda que s'ha de fer si es segueix una determinada estratègia.

- per t parell, $f_t:T^t \longrightarrow \{S,N\}$

  En aquestes etapes, f_t determina la resposta S ("si") o N ("no") a una certa oferta per part del segon jugador, en funció, a més a més, de totes les propostes que s'han fet en el joc fins al moment actual.

Observem que les funcions f_t depenen només de les demandes i ofertes d'utilitat prèvies dels jugadors, però no de les respostes que aquests han donat. En efecte, si un jugador que ha triat una estratègia $\{f_t\}$ ha d'utilitzar la funció corresponent a un cert moment t, òbviament és degut a què les respostes en totes les etapes anteriors han estat negatives.

De manera similar, podem definir una estratègia pel jugador 2 com una successió de funcions $\{g_t\}_{t=1}^{\infty}$ en la que, si t és imparell, $g_t:T^t \longrightarrow \{S,N\}$ és la resposta a una demanda del jugador 1, i per t parell, $g_t:T^{t-1} \longrightarrow T$ és una oferta d'utilitat.

Anomenarem F i G, respectivament, al conjunt de les possibles estratègies per cada jugador. Si els jugadors trien sengles estratègies $f=\{f_t\}\in F$ i $g=\{g_t\}\in G$, és fàcil construir pas a pas com es desenvoluparà la negociació.

El joc s'acabarà en una certa etapa - que pot ser $+\infty$ - que denotarem per $\sigma(f,g)$, acordant que el jugador 1 reb una utilitat, no actualitzada, que anomenarem $P(f,g)$. Si $\sigma(f,g)=+\infty$ podem considerar, sense pèrdua de generalitat, que $P(f,g)=0$. D'aquesta manera P i σ estan ben definides - encara que no ho hàgim fet formalment - i són úniques donades f i g.

2.4.2. Equilibris de Nash

El pas següent ha de ser la caracterització dels contractes que es poden signar amb aquest procés de negociació. Tal com hem comentat en seccions anteriors, han de ser el resultat de l'ús d'estratègies que estiguin en equilibri de Nash.

Comencem definint aquest concepte pel nostre joc: Un parell d'estratègies $(f^*,g^*)\in F\text{x}G$ formen un equilibri de Nash si es compleix:

$$\text{(i)} \quad \forall f\in F, \quad (P(f,g^*),\sigma(f,g^*)) \prec_1 (P(f^*,g^*),\sigma(f^*,g^*))$$

$$\text{(ii)} \quad \forall g\in G, \quad (P(f^*,g),\sigma(f^*,g)) \prec_2 (P(f^*,g^*),\sigma(f^*,g^*))$$

és a dir, si l'acord que s'obté amb el parell $(f^*,g^*)\in F\text{x}G$ - assignar la utilitat $P(f^*,g^*)$, no actualitzada, al primer jugador en l'etapa $\sigma(f^*,g^*)$ del joc -, és preferit a un canvi unilateral d'estratègia per part de qualsevol dels dos jugadors.

No obstant, la determinació dels contractes que es poden signar utilitzant estratègies de Nash gairebé no aporta informació significativa: qualsevol partició d'utilitats entre els dos jugadors pot ser el resultat d'estratègies en equilibri. A més a més, l'acord es produirà en el moment t=1.

En efecte, és fàcil comprovar que per a obtenir un acord sobre el parell $(\bar{x},1)$, amb $\bar{x}\in T$ qualsevol, els jugadors poden utilitzar les estratègies (f,g) en equilibri de Nash següents:

- per t imparell, les funcions definides per:

$$f_t : T^{t-1} \dashrightarrow T \quad \text{amb } f_t(x_1,..,x_{t-1}) := \bar{x} \qquad \forall x \in T^{t-1}$$

$$g_t : T^t \dashrightarrow \{S,N\} \text{ amb}$$

$$g_t(x_1,\dots,x_t) := \begin{cases} S & \text{si } x_t \le \bar{x} \\ N & \text{en cas contari} \end{cases} \qquad \forall x \in T^t$$

- per t parell, de manera similar:

$$f_t(x_1,\dots,x_t) := \begin{cases} S & \text{si } x_t \ge \bar{x} \\ N & \text{en cas contari} \end{cases} \qquad \forall (x_1,..,x_t) \in T^t$$

$$g_t(x_1,\dots,x_{t-1}) := \bar{x} \qquad \forall (x_1,\dots,x_{t-1}) \in T^{t-1}$$

És a dir, cada jugador insisteix en la mateixa oferta (demanda) i no accepta cap demanda (oferta) inferior. Donada una d'aquestes estratègies, el millor que pot fer l'altre jugador és acceptar la demanda (oferta) en la primera etapa del joc.

Ara bé, en la introducció del concepte d'equilibri de Nash, en la secció anterior, indicàvem la necessitat del seu ús, com a conseqüència d'estipular el comportament racional dels jugadors. Però si en un joc existeix més d'un d'aquests equilibris, la condició no és, evidentment, suficient per a fer una prospecció del resultat previsible del mateix.

Per a distingir entre els diversos equilibris de Nash d'un joc, es pot requerir que les estratègies dels jugadors no siguin vulnerables a arguments del tipus següent: Suposem que, al principi del joc, el jugador 1 es "desvia" de l'estratègia que constitueix la seva part en un equilibri de Nash (que, potser, han acordat prèviament en alguna comunicació informal abans de començar el joc), i demana $x+\epsilon$ en lloc de x, per $\epsilon>0$. Si el jugador 2 segueix l'estratègia que han acordat, hauria de refusar aquesta demanda, i oferir, en l'etapa $t=2$, el mateix valor x. Però si ϵ ha estat triat de manera que $(x,1) \prec_2 (x+\epsilon,0)$, 2 té un incentiu per a "desviar-se" al seu torn de l'estratègia d'equilibri, perquè prefereix acceptar la demanda del jugador 1 en el moment $t=0$. Un jugador racional no es pot comprometre, per endavant, a l'ús d'equilibris que no siguin també "estables" en el sentit anterior.

2.4.3. Equilibri perfecte

En jocs amb més d'un equilibri de Nash, diversos autors[7] han suggerit "refinaments" del concepte d'equilibri de Nash, que permetin descartar equilibris que intuïtivament semblen irraonables, o per a poder distingir aquell que poden triar ambdues parts si es comporten de manera racional.

L'argument de l'epígraf anterior és, entre altres, el que utilitza Selten (1975) per a fonamentar un requisit addicional en els equilibris que contempla, i obtenir així el que anomena <u>equilibri perfecte</u> d'un joc. Aquest concepte es refereix a jocs en forma extensiva[8] , en els que és possible analitzar 'subjocs' obtinguts considerant només una part de l'arbre que defineix el joc, d'un cert nus en endavant, i que puguin considerar-se 'propis'.

En el nostre cas, les regles del joc donen lloc a un arbre de decisió del tipus representat a la figura 5. No hem indicat - tot i que és usual fer-ho - les utilitats

---

7. A més de Selten (1975), cal mencionar, entre d'altres Myerson (1978), Kreps i Wilson (1982), Grossman i Perry (1986), Kohlberg i Mertens (1986) o Green i Laffont (1987). Veure també Fudenberg i Levine (1983), i Fudenberg, Kreps i Levine (1988).

8. S'anomena <u>joc extensiu</u> a aquell en què les regles es poden descriure a partir d'un arbre, que especifica les accions que pot dur a terme un jugador cada vegada que pot fer una tria -

dels jugadors en els nusos terminals, perquè ja les conei-xem; i simbolitzem amb una sola branca la tria d'una oferta o demanda d'utilitat, tot i que, de fet, són infinites:

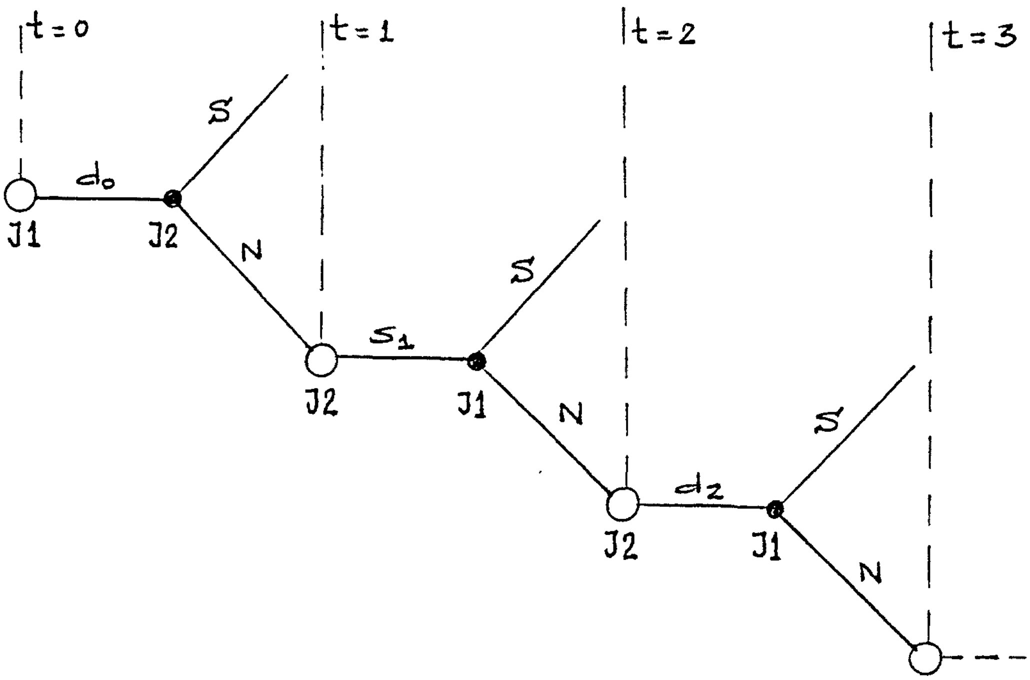

Figura 5

Un <u>subjoc propi</u> s'obté considerant l'arbre a partir d'un nus en què es faci una oferta o demanda per part d'un jugador (marcat per un cercle en la figura).

Un parell d'estratègies es diu que constitueixen un <u>equilibri perfecte</u> del joc si, en cada subjoc propi, la part de les estratègies corresponent al dit subjoc formen un equilibri de Nash. Selten (1975) demostra que aquest concepte és més restringit que el de Nash; és a dir, el conjunt d'equilibris perfectes - que no és mai buit - és un subconjunt no trivial del d'equilibris de Nash.

Per la família de jocs a la que pertany el que estem analitzant, Rubinstein (1982) demostra que existeix un únic equilibri perfecte; és a dir, una única partició d'utilitats que sigui estable, i que s'arriba a aquest acord utilitzant un dels equilibris de Nash que hem descrit abans, i per tant en el moment t=0.

En lloc de seguir el raonament, relativament laboriós, en contingut i extensió, de Rubinstein, adoptarem el que proposen Shaked i Sutton (1984), o Sutton (1986) per a veure quin és l'acord - únic - a què es pot arribar amb un equilibri perfecte.

Sigui I el conjunt d'equilibris perfectes del joc. Sabem que $I \neq \phi$, de manera que podem considerar el valor $M := \sup M_i$, on M_i és la utilitat final que assegura al jugador l'ièssim equilibri perfecte.

Es fàcil veure que tots els subjocs del nostre joc que comencin en una etapa t parell tenen exactament la mateixa estructura que el joc original; excepte pel fet que, una vegada acabat, les utilitats que s'obtinguin han de ser actualitzades utilitzant α^t i β^t respectivament. Per tant, si considerem, en particular, el subjoc començant a t=2, és evident que el jugador 1 pot utilitzar-hi la mateixa estratègia que, en el joc sencer, li proporcionava la utilitat M. Obtindrà la mateixa partició d'utilitats, i per tant, ja que el joc ha començat a l'etapa 2, de fet en la signatura del contracte li correspondrà $\alpha^2 M$.

Tenint això present, en l'etapa t=1 del joc, el jugador 1 rebutjarà qualsevol oferta de l'altre agent que sigui inferior a αM, perquè, actualitzant-la, li donaria menys de $\alpha^2 M$, que és el que pot assegurar si el joc continua fina a l'etapa t=2. Per tant, només és possible que el joc acabi en l'etapa 1 si el jugador 2 ofereix una utilitat $x \geq \alpha M$, perquè aquest serà l'únic cas en què el jugador 1 acceptarà l'oferta. Això representa pel jugador 2 una utilitat de $S(\bar{q})-x$, que, actualitzada, és $\beta[S(\bar{q})-x]$. Per tant, ha de considerar el problema:

$$\text{màx } \beta[S(\bar{q})-x] \quad \text{s.a.} \quad x \geq \alpha M$$

que té l'òptim a $x=\alpha M$. El jugador 2 disposa, doncs, d'una estratègia que li assegura una utilitat $\beta[S(\bar{q})-\alpha M]$.

Passem ara a l'etapa 1 del joc. El jugador 2 acceptarà una demanda d'utilitat, y, per part del jugador 1 sempre que obtingui, com a mínim la mateixa utilitat que sap que li proporciona l'estratègia que hem dissenyat en el paràgraf anterior. S'ha de complir, doncs, que $S(\bar{q})-y \geq \beta[S(\bar{q})-\alpha M]$, és a dir, $y \leq (1-\beta)S(\bar{q})+\alpha\beta M$. D'entre aquests valors, el jugador 1 triarà el màxim possible; i per tant demanarà $y=(1-\beta)S(\bar{q})+\alpha\beta M$. El procediment que hem utilitzat per a deduir aquest valor ens indica que s'utilitza un equilibri perfecte. Però, segons la nostra hipòtesi, M és justament la utilitat màxima que el jugador 1 podia obtenir utilitzant un equilibri perfecte. Així doncs s'ha de complir:

$$M = (1-\beta)S(\bar{q})+\alpha\beta M \qquad \text{i per tant}$$

$$M = S(\bar{q})\ (1-\beta)/(1-\alpha\beta)$$

Aquest mateix argument, amb els canvis obvis de llenguatge, es pot repetir per a buscar el valor de $m=\inf M_i$; i es pot arribar fàcilment a la conclusió de què M=m. Per tant, hi ha una única partició d'utilitats en equilibri perfecte, que es pot obtenir directament en l'etapa t=0 del joc.

Segons el conveni establert per a descriure el joc, les ofertes de les empreses es refereixen sempre a la part de la utilitat total derivada de la seva relació, $S(\bar{q})$, que correspon a l'agent 1. Per tant, en l'equilibri perfecte, aquest obté:

$$u = S(\bar{q})\ (1-\beta)/(1-\alpha\beta) \qquad (2.H.1)$$

Llavors l'agent 2 es quedarà amb la diferència:

$$v = S(\bar{q}) - u = S(\bar{q})\ \beta(1-\alpha)/(1-\alpha\beta) \qquad (2.H.2)$$

I ja que tot equilibri perfecte és també un equilibri de Nash, aquesta partició d'utilitats es pot obtenir utilitzant l'estratègia de Nash descrita anteriorment amb, $\bar{x}$=M.

A l'obtenir, a tots els efectes, un sol equilibri perfecte - si n'hi ha més d'un, dóna lloc a la mateixa partició d'utilitats -, aquest ens defineix, de manera única, el resultat previsible del joc: es signarà un contracte en la primera etapa de negociació, per la quantitat $\bar{q}$, i a preu:

$$P = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} I(\bar{q}) + \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta} C(\bar{q})$$

pel que les empreses obtindran, respectivament, les utilitats de (2.H).

2.4.4. Relacions amb la solució coopertiva

La primer observació, sobre el resultat anterior, és constatar l'evident asimetria del repartiment d'utilitats entre les dues empreses. Aquesta es manté encara que els factors unitàris d'actualització siguin iguals.

Una manera d'interpretar l'asimetria esmentada és atribuint-la a l'avantatge que les regles del joc donen al jugador 1, deguda a què pot fer la demanda de la primera etapa del joc.

Podriem doncs preguntar-nos pel resultat d'una negociació a la que s'afegís una etapa prèvia, en què un moviment aleatori (de la "natura") decidís quina empresa hauria de fer la primera demanda. Si, en aquesta modificació, ambdós agents tenen igual probabilitat de fer la primera demanda - per exemple, perquè el moviment aleatori es decidís tirant una moneda -, llavors el jugador 1 obtindrà, amb probabilitat 1/2, utilitat $S(\bar{q})(1-\beta)/(1-\alpha\beta)$, i amb probabilitat 1/2 actuarà com a segon jugador, en quin cas obté $S(\bar{q})\beta(1-\alpha)/(1-\alpha\beta)$. El mateix és cert per l'altre jugador. Per tant, cada un d'ells té, en el joc modificat, una utilitat esperada de:

$$u = v = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\, S(\bar{q})\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\, S(\bar{q})\right] = \frac{1}{2}\, S(\bar{q})$$

que ens permet retrobar el resultat a què hem arribat en els models anteriors.

No obstant, aquesta interpretació només resulta adequada si podem suposar una relació més o menys continuada de les dues empreses. En aquest cas és la repetició de la negociació - modelitzada en l'etapa prèvia -, la que determina que, en mitjana, cada jugador iniciï el joc la meitat de les vegades. Si no és així,la introducció d'utilitats esperades té poc sentit. Per altra banda, els valors relatius dels factors unitàris d'actualització només serveixen per a explicar desviacions d'aquest resultat general en instàncies determinades.

Binmore (1987b) utilitza una idea diferent per a deduir uns resultats similars, amb una interpretació que ens sembla més útil. Considerem el joc original, modificant-lo de manera que el temps que hi hagi entre dues etapes consequtives sigui un cert valor fixat τ, enlloc de 1 com fins ara. Aquest valor es pot interpretar com la velocitat de resposta de cada jugador, i per tant si fem tendir τ a 0 les asimetries degudes a què hi hagi un sol jugador fent la primera demanda desapareixen.

Per τ donada, és immediat comprovar que la utilitat de cada jugador té la mateixa expressió que a (2.H), substituint α i β per α^τ i β^τ, respectivament. En el límit, doncs, la utilitat del primer jugador és:

$$u = \lim_{\tau \to 0} u(\tau) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1-\alpha^\tau}{1-\alpha^\tau \beta^\tau} S(\bar{q}) =$$

$$= S(\bar{q}) \frac{L\alpha}{L\alpha + L\beta}$$

En conseqüència, si els dos jugadors estan en les mateixes condicions per a negociar, és a dir, si $\alpha=\beta$, el resultat és justament $u=v=\frac{1}{2}S(\bar{q})$, retrobant també la solució cooperativa.

Per aquest resultat podem fer encara una darrera observació: és immediat comprovar que es correspon amb la solució asimètrica de Nash d'un joc de negociació sobre el conjunt $A = \{(u,v) \in R^2 \ / \ u+v \leq S(\bar{q})\}$ i amb status quo $(0,0)$ quan el primer jugador té un "poder negociador" precisament de $L\alpha \,/(L\alpha + L\beta)$. Això ens permet concloure, com sembla intuïtiu, que són els factors unitàris d'actualització de les empreses els que determinen la possible asimetria de la solució final. Per exemple, si $\alpha<\beta$, la primera empresa té menys "pressa" per a arribar a un acord, i per tant obté una quantitat proporcionalment més gran de l'utilitat disponible.

Capítol 3

MODELS AMB MANCA D'INFORMACIO COMPARTIDA

En aquest capítol comentarem el procés de disseny de contractes òptims si introduïm una primera font d'incertesa en el model: suposarem que hi ha, almenys en una banda del mercat, elements que els agents no poden mesurar de manera adequada en el moment en que s'ha de fer la negociació del contracte.

Considerarem, però, que la manca d'informació de les empreses és compartida. En aquest cas, les dues empreses continuen estant en una situació simètrica, en el sentit de que tenen la mateixa informació pel que fa a les preferències d'ambdues respecte als contractes que desitgen signar. En conseqüència, l'anàlisi de la situació es pot fer gairebé de la mateixa manera que en condicions d'informació completa.

En efecte, designem amb la variable θ el paràmetre, o conjunt de paràmetres, que són factors desconeguts per les empreses. Haurem de considerar que les funcions de cost i ingrés, respectivament, de les empreses, depenen tant de θ com de la quantitat a intercanviar (o índex sobre les condicions de contractació). Es a dir:

$C=C(q,\theta)$ per l'empresa venedora

$I=I(q,\theta)$ per l'empresa compradora

Suposem que els factors que representa la variable θ no depenen directament de les empreses, sinó que són condicions externes del mercat que cap de les dues pot controlar. Això significa que θ es pot considerar una variable aleatòria.

En aquest punt ens pot ser útil tenir en compte les bases de modelització d'una situació en condicions d'informació completa. En aquest cas teníem en compte diversos elements, - entre d'altres, l'experiència deguda al temps de permanència en el mercat -, que ens permetien considerar que les funcions $C(q)$ i $I(q)$ eren conegudes per les dues empreses. Aquests mateixos arguments ens indueixen a pensar que, en el cas d'informació incompleta compartida o risc, ambdues empreses disposen d'una funció que descriu la probabilitat de què θ prengui un cert valor. A més, la mateixa línia de pensament ens permet assegurar que aquesta funció és compartida per amdues empreses. En concret, podem suposar que les empreses poden avaluar una funció $F(\theta)$ que indiqui la distribució de probabilitats acumulada de θ, i que $F(\theta)$ serà coneixement comú de la situació.

En aquest cas, si la signatura del contracte que regula les transaccions entre les empreses s'ha de fer abans de que aquestes coneguin el valor concret que pren la variable θ, una descripció correcte d'un contracte hauria d'incloure el tipus de transacció a efectuar, i el preu de la mateixa, en funció, precisament, de θ: $\{q(\theta),P(\theta)\}$.

Però les decisions de les empreses s'hauran de basar, no en la utilitat final derivada de la signatura d'un contracte, sinó en la <u>utilitat esperada</u> que se'n pot deduir. Això significa que les preferències de les empreses respecte als contractes vindran donades per les funcions:

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\theta) - C(q(\theta),\theta)]\, dF(\theta)$$

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} [I(q(\theta),\theta) - P(\theta)]\, dF(\theta)$$

i per tant que podem determinar el contracte òptim independentment de la variable θ.

Aquest argument és suficient per a assegurar que el contracte que es signarà en el cas d'informació incerta compartida tindrà la mateixa forma que si ambdós agents disposessin d'informació completa, i només dependrà del procés utilitzat per a la seva negociació.

Si s'utilitza un punt de vista cooperatiu, l'excedent que, en mitjana, poden obtenir les dues empreses de la seva relació si decideixen signar un contracte estarà expresat per la funció:

$$S(q) := \int_{-\infty}^{+\infty} S(q,\theta)\ dF(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [I(q,\theta) - C(q,\theta)]\ dF(\theta)$$

Es inmediat veure que es poden refer els arguments del capítol anterior per a demostrar que, en aquest cas, el contracte òptim que es pot signar ha d'establir l'intercanvi que maximitzi l'excedent total S(q), per un preu que divideixi en parts iguals la utilitat esperada que se'n deriva.

De la mateixa manera, si s'utilitza un punt de vista no cooperatiu, a partir d'un joc de negociació amb el mateix tipus de regles que les considerades en el capítol anterior, el resultat de la negociació ha de ser, aproximadament el mateix. En el cas del joc de la secció 2.4, per exemple, el conjunt d'utilitats factible serà:

$$A = \{(u,v) \in R^2 \;/\; u+v \leq S(\bar{q}),\ u \geq 0,\ v \geq 0\}$$

que donarà lloc al mateix contracte que en el cas d'informació complerta, tenint en compte, només, que en aquest cas les ofertes i demandes de les empreses es basaran en utilitats esperades respecte a la funció $F(\theta)$.

III. CONTRACTES EN PRESENCIA D'INFORMACIO PRIVADA

Capítol 4

NEGOCIACIO DELS TERMES D'UN CONTRACTE

4.1. Notació i formulació genèrica del model

Una situació més complicada - i que possiblement es presenta més feqüentment que la descrita anteriorment - es dóna si una, o les dues empreses que formen el monopoli bilateral, no tenen informació completa sobre les preferències de la seva oponent respecte a les condicions del contracte que es vol signar.

Per a estudiar les repercussions de la manca d'informació en el nostre context, ens proposem utilitzar un model general en què les funcions d'utilitat de les empreses depenguin d'una o més variables addicionals, generalment anomenades variables privades. Per cada empresa, considerarem que el valor concret que puguin prendre les mateixes en un cert moment només és conegut pel propi agent, mentre que per l'altre són considerades variables aleatòries, de les que, en tot cas, se'n pot valorar una distribució de probabilitats subjectiva.

Cal observar que part de la literatura es refereix a una situació en què existeixi informació privada pertinent anomenant-la "asimètrica", en el sentit de què ambdues parts disposen d'informació diferent a l'hora de dur a terme la negociació. Nosaltres, però, reservarem la qualificació d'<u>informació asimètrica</u> per indicar una diferència quantitativa en la disponibilitat d'informació entre una i altra part, com és el cas, per exemple, si una de les empreses té informació privada mentre l'altra no. Si ambdós agents disposen d'informació privada, la situació és en cert sentit simètrica, i ens hi referirem anomenant-la d'<u>informació incompleta o privada</u> dels agents.

Com fins ara, convindrem en descriure un contracte amb un parell $\{q,P\}$, on q indicarà un dels possibles intercanvis factibles, i P el preu global pel que es duu a terme la transacció. Recordem que la variable q pot entendre's com un índex en el conjunt dels diferents intercanvis factibles, conjunt que suposarem compacte i isomorf a un cert interval de R^+. En el tipus més comú de contractes, q s'interpreta simplement com la quantitat a intercanviar, però també pot representar una especificació més completa de les condicions en què es signa el dit contracte: quantitat a intercanviar, data de lliurament, etc. En tot cas, i també com fins ara, continuarem llegint la variable q com una quantitat, encara que signifiqui un abús de llenguatge.

Suposarem igualment que les utilitats, amb què les empreses mesuren les seves preferències respecte als diversos contractes, són separables en preu i quantitat. Respecte a aquesta última variable continuarem considerant com a indicació de la utilitat dels agents, les funcions de cost i ingrés de les seves empreses. Per tant serà en aquestes últimes funcions que introduirem la informació privada.

En efecte, tot i que la manca d'informació completa pot ser deguda a diverses raons, ens centrarem en la que ens sembla més significativa: és fàcil que les empreses disposin d'informació més acurada sobre la seva banda del mercat que no pas sobre l'altra banda[1]. En aquest cas podem suposar que certes condicions d'una i altra banda són de fàcil accés a una de les empreses, mentre que no estan a l'abast de l'altra: cada empresa disposa doncs d'informació privada que l'altra no pot obtenir, o tal que la seva obtenció generaria despeses prou grans que no compensarien les avantatges que el seu coneixement li podria reportar[2].

1. Aquesta infromació pot ser producte de la seva experiència en el mercat que domina. Veure, en aquest sentit, els estudis de Jordan (1985) o McKelvey i Page (1986).

2. Podem esmentar, entre d'altres, els següents treballs que també utilitzen aquesta hipòtesi: Baron i Myerson (1982), Baron i Besanko (1984a), Riordan (1984a). Veure també Wilson (1967) o Milgrom i Weber (1982).

Per a poder formalitzar aquesta idea, haurem de suposar que cada una de les empreses pot establir una ordenació total de les seves preferències, respecte als diferents valors que puguin prendre les variables que constitueixen la seva informació privada - mantenint constants les condicions de preu i quantitat d'un hipotètic contracte signat entre les dues empreses -. Si és així, la informació privada de cada empresa es pot formalitzar teòricament utilitzant un únic paràmetre que prengui valors reals. Per tant serà suficient considerar que les funcions de cost i ingrés, respectivament, que caracteritzen les preferències de les empreses, depenen d'un nou factor (x i z)- diferent per cada una d'elles - conegut en cada moment per l'empresa corresponent, i que l'altra ha de considerar una variable aleatòria.

Concretament, denotarem per C(q,x) la funció de cost de l'empresa venedora, si s'acorda intercanviar una quantitat q del bé que produeix. La segona empresa coneix aquesta funció excepte pel que fa al valor del paràmetre x. Suposarem que, donada una certa quantitat q qualsevol, valors més alts de la variable x denoten costos més alts per a l'empresa. De manera similar, I(q,z) representarà l'ingrés que obté l'empresa compradora d'una transacció de q unitats del dit bé. Aquesta funció depèn també d'una certa variable z que l'altra empresa no coneix, i que indica les condicions de la seva banda del mercat. Podent establir igualment una ordenació total respecte a aquestes condicions, entendrem que valors més alts de z signifiquen condicions més favorables d'aquest mercat.

Donat un valor del seu paràmetre respectiu, aquestes funcions permeten establir completament les preferències de cada empresa sobre les transaccions. Si es signa un contracte de la forma {q, P}, les utilitats que obtenen són, respectivament:

$$u = P - C(q,x) \qquad v = I(q,z) - P$$

Els vertaders valors que prenguin les variables x i z en un moment determinat són informació privada no transferible de cada empresa, en el sentit de què és l'única que pot conèixer el valor que pren el paràmetre que defineix la situació de la seva banda del mercat, i l'altra no pot verificar pel seu compte de cap manera una afirmació que li facin sobre el seu valor. En canvi, suposarem que és coneixement comú, en el sentit d'Aumann (1976) la resta de l'estructura del problema, i en particular la definició de les preferències de les empreses.

Sense pèrdua de generalitat podem considerar que les variables x i z prenen valors a l'interval real [0,1]. En alguns casos serà convenient suposar, a més a més, que cada empresa disposa d'una distribució de probabilitats subjectiva sobre [0,1] per la variable que ha de considerar aleatòria. Quan sigui així, utilitzarem les funcions F i G per a denotar les distribucions de probabilitat acumulada dels valors x, z que caracteritzen les dues bandes del mercat.

Com en el cas d'informació completa, per a dur a terme aquest estudi farem servir un cert nombre d'hipòtesis de tipus tècnic que ens permetin utilitzar alguns recursos de l'anàlisi clàssica de diferents variables. En concret, suposarem que les funcions $C(q,x)$ i $I(q,z)$ són dues vegades contínuament diferenciables respecte a les seves dues variables. Pel que fa a la variable q suposarem que ambues són funcions creixents, amb el cost marginal creixent i l'ingrés marginal decreixent, donat un valor qualsevol dels paràmetres x i z. El significat que hem atribuït als valors de x i z ens indica també que ambdues funcions són creixents respecte al paràmetre respectiu, per qualsevol valor de q. Finalment, considerarem aquests paràmetres positivament correlacionats respecte al cost marginal i l'ingrés marginal, respectivament; és a dir, suposarem[3] que $I_q(q,z)$ és una funció creixent de la variable z, per qualsevol q; i, igualment, que $C_q(q,x)$ és creixent respecte a variable x, a qualsevol nivell de producció.

---

3. Utilitzarem subíndex per denotar derivades parcials.

4.2. Mecanismes de negociació

Una situació com la descrita a l'apartat anterior entra dins les anomenades "situacions de negociació", perquè considera, essencialment, un procés entre dues parts que poden compartir un cert excedent si poden trobar una manera d'arribar a un acord sobre com repartir-se'l.

A la literatura que analitza les situacions de negociació podem trobar, com pels problemes amb informació completa, dues metodologies de treball diferents. La primera consisteix en utilitzar un punt de vista axiomàtic, mentre que la segona fa ús de la teoria de jocs no cooperativa. El capítol que hem dedicat, en aquest treball, a les negociacions amb informació completa recull elements de les dues metodologies. En canvi, en el cas d'informació incompleta, utilitzarem principalment la segona, l'enfocament estratègic[4].

Seguint aquesta línia, un procediment de negociació que condueixi a la signatura d'un contracte, s'acostuma a definir a través d'un conjunt determinat de regles. Per exemple, en el cas proposat a 2.3, en què la regla

---

4. Es pot trobar un ampli estudi de l'enfocament axiomàtic a Roth (1979). Veure també Kalai (1985). Binmore (1987a) o Myerson (1984) tracten més especialment els problema de l'axiomatització de les solucions d'una negociació en presència d'informació incompleta.

especifica que cada empresa anunciï les condicions en què està disposada a signar un contracte [a través de funcions que es poden interpretar com d'oferta i demanda, respectivament], i com calcular l'acord que es pot signar - si n'hi ha algun - a partir de les ofertes de les empreses. Aquest conjunt de regles defineixen el què es coneix habitualment amb el nom de mecanisme de negociació.

Però en presència d'informació privada, no és solament el mecanisme de negociació el que determina directament la forma i el tipus de contractes que es puguin signar. Això és degut, principalment, a que la dita informació influeix en la disposició de cada una de les empreses a la signatura d'un contracte de determinades característiques.

En una negociació en què una empresa disposi d'informació privada, aquesta generalment s'ha d'enfrontar al dilema que representa intentar aconseguir dos objectius parcialment contraposats. Per una banda les seves preferències poden ser diferents segons l'estat de la seva informació privada, i si la coneix quan comença la negociació, l'empresa es pot inclinar fortament per un contracte, les condicions del qual no acceptaria si les característiques de la seva banda del mercat fossin diferents. Per l'altra, el fet de voler signar un cert contracte pot revelar informació a l'empresa oponent, perdent d'aquesta manera l'avantatge relatiu que pot suposar el disposar precisament d'informació privada.

Aquest dilema s'accentua encara més si la negociació es pot dur a terme en diversos períodes. Efectivament, si bé en el cas d'informació completa hem demostrat que no hi ha raó per què les empreses no arribin a un acord en la primera fase d'una negociació, amb les hipòtesis actuals no és possible mantenir a priori aquesta conclusió. Cal tenir present, en aquest sentit, que una negociació prolongada en el temps pot permetre precisament l'adquisició d'informació sobre les característiques privades de l'oponent.

Així doncs, en el cas d'informació incompleta, no es pot associar directament un joc no cooperatiu a cada mecanisme de negociació, sinó que el joc que realment es dugui a terme dependrà de la informació privada que els diferents agents posseeixin. Formalment, un mecanisme serà només un conjunt de regles que permetin especificar la repercussió de les decisions que prenen els agents, <u>en funció de la informació individual</u>, modificant d'aquesta manera les regles del joc de negociació que es jugui en cada cas concret. La descripció del resultat d'un cert mecanisme de negociació estarà, per tant, en funció del valor d'aquestes informacions privades. La seva determinació, un acord en la tria d'un element d'un cert subconjunt de

R^2, element que identifica els termes - quantitat i preu - pel que es signa el contracte, serà la conseqüència de la tria d'estratègies en equilibri per part dels dos agents del joc. D'aquí el nom d'enfocament estratègic.

El primer pas en el nostre estudi ha de ser, lògicament, la descripció dels mecanismes de negociació que volem analitzar. Haurem de tenir en compte que el conjunt d'acords factibles no es pot considerar coneixement comú en l'entorn de la negociació, donat que les empreses disposen d'informació privada sobre les condicions del seu mercat respectiu. A més a més, i ja que les variacions d'aquestes condicions no poden ser adequadament valorades de manera fefaent per ambdues parts per separat, és lògic considerar que el mecanisme de negociació hagi de preveure algun tipus de comunicació entre les empreses, a partir de les quals es generin els termes del contracte.

Una primera distinció entre els diversos mecanismes de negociació es basa precisament en la forma que pren la comunicació entre les empreses: pot ser <u>simultània</u> (quan ambdues empreses donen, al mateix temps però per separat, un senyal a una figura que podríem anomenar "àrbitre" de la negociació, com en el cas del joc estudiat a l'apartat 2.3), o pot ser <u>seqüencial</u>, sempre que els agents facin propostes per torns.

D'una manera complementària, cal tenir en compte també el nombre de rondes que poden fer-se en la negociació. Des d'aquesta perspectiva un mecanisme de negociació pot induir un joc finit, si aquest preveu només una o diverses rondes de negociació, fixades prèviament. El joc s'acaba o bé amb un acord en una de les rondes previstes, o bé sense acord quan han transcorregut totes elles. Per altra banda podem considerar negociacions d'horitzó infinit. Generalment s'entén, en aquest cas, que la negociació prossegueix fins que els agents arriben a un acord, si bé en alguns casos el model preveu la possibilitat de què un agent es retiri de la mateixa quan ho consideri oportú.

Els criteris per a triar uns o altres poden ser múltiples. Mirant d'establir un compromís entre les dificultats d'anàlisi que presenten alguns dels mecanismes i la poca adaptació com a models de negociacions reals que tenen d'altres, hem triat dos tipus d'enfoc que considerem força complementaris. D'una banda presentem una anàlisi de les propietats del conjunt de mecanismes simultanis d'una sola etapa, i de l'altra estudiem un grup de mecanismes seqüencials d'horitzó infinit específics.

El principal retret que es fa a l'enfoc estratègic de les negociacions és la seva dependència de la forma particular que prenguin les regles dels mecanisme de negociació que s'està considerant. És obvi que el resultat de la negociació depèn directament d'aquests regles, i per tant és lícit preguntar-se si són raonables, o si el seu ús pràctic estaria justificat i per què.

En un intent de depassar aquestes qüestions, una part dels autors s'han concentrat en la denominada "literatura de disseny de mecanismes". Aquest és l'enfoc que seguirem en els propers capítols. La consideració d'un tipus particular de mecanismes - els mecanismes directes - permet prescindir del problema de triar a priori un conjunt de regles de negociació i començar estudiant tots els equilibris de tots els jocs de negociació. Serà només després de la seva caracterització que ens adreçarem la pregunta de quins mecanismes triar, en funció del tipus de contractes que permetin establir en condicions d'informació privada d'una o ambdues parts.

Però per a avaluar les propietats d'un cert mecanisme hem de saber no solament quins són els resultats previsibles de la seva utilització, sinó també si els agents estan disposats a posar-se d'acord en dur a terme la negociació amb un o altre mecanisme. I per a fer-ho ens cal distingir entre dues situacions diferents. En la primera, els agents poden comprometre's a acceptar un cert mecanisme abans de saber quina és la seva informació privada. En l'altra, els agents disposen ja de la dita informació en el moment de prendre la decisió de participar o no en una negociació seguint un cert mecanisme. Si és així, les preferències dels agents sobre els diversos mecanismes estan influïdes per la seva informació privada, modificant possiblement la situació en què es duu a terme la negociació posterior, i per tant les intencions amb què s'ha fet el disseny del mecanisme.

Nosaltres adoptarem la hipòtesi de què les empreses <u>consideren fixades</u> les regles d'una negociació a l'hora de dissenyar les estratègies que utilitzen per a dur-la a terme. En altres paraules, en cap cas considerarem que les empreses negocien prèviament les condicions que han de regir en la negociació del contracte, perquè si fos així les seves estratègies de comportament no podrien tractar per separat les dues parts del que, necessàriament, seria una negociació més àmplia - seguint un altra vegada el que hem anomenat programa de Nash -. Aquest punt de vista es pot mantenir sempre que el mecanisme sigui imposat exògenament - per un planificador social o àrbitre extern, per exemple -, o bé pensant en un mecanisme que sigui prou habitual en un cert entorn, i per tant, el seu ús es pugui considerar gairebé obligat en la pràctica.

En aquest cas la valoració de la "bondat" d'un mecanisme s'ha de fer des del punt de vista d'un "outsider", sense tenir en compte el valor de les informacions privades dels jugadors. És a dir, en un marc d'informació incompleta, la valoració de l'eficiència d'una negociació s'ha de basar en la regla de negociació i no en la distribució última de la utilitat entre els agents, ja que aquesta depèn de informació que no posseeix. A més a més, qualsevol criteri d'eficiència s'ha de definir independentment de l'estat particular de la informació privada individual desconeguda.

Per últim, observem que aquesta línia de treball té una restricció important. Com ja hem dit, es basa exclusivament en mecanismes de negociació d'un període, extrem que no sempre es acceptat per a la caracterització dels resultats d'una negociació. En efecte, si en un joc seqüencial d'horitzó infinit es produeix un acord en un temps finit, obtenim un resultat generat endògenament; mentre que en un mecanisme directe la finitud és una hipòtesi de partida. Per això incloem en el nostre treball l'estudi de mecanismes d'horitzó infinit, que considerem complementari de l'anàlisi anterior, ja que permet avalar o impugnar els resultats obtinguts amb el disseny de mecanismes. Deixarem aquesta anàlisi pel capítol 9 del nostre treball.

4.3. Mecanismes simultanis directes finits: un sol període

En aquest apartat, i en els que segueixen, especialment en els capítols 5 i 7, farem una restricció en el tipus de mecanismes a estudiar: considerarem només aquells en què l'acord negociat s'ha d'obtenir en un sol període. Com ja hem comentat, el fet de tractar amb eines més senzilles ens pot permetre aïllar elements importants, deguts directament a què la negociació té lloc en un medi d'informació incompleta, elements que ens seran útils quan posteriorment estudiem models més "sofisticats", que reflexin més bé el que pot ser una negociació real entre les empreses.

D'entre els mecanismes de negociació d'un sol període, els més senzills són els que limiten la comunicació entre les empreses a un tipus de senyal específic: només permeten que aquestes anunciïn el valor que té la seva informació privada. Generalment aquests mecanismes s'anomenen mecanismes directes, ja que estableixen la forma més senzilla possible de comunicació entre les empreses.

En el marc del nostre estudi, anomenarem mecanisme directe al que es pot definir a través d'un parell de funcions $q=q(x,z)$, i $P=P(x,z)$, que determinen quin contracte es signarà, segons els valors que anunciïn les dues empreses com a condicions dels seus mercats respectius en el moment en què es duu a terme la negociació. Hem d'observar que, al ser privada la informació que posseeixen les empreses, i per tant no contrastable, el senyal que trametin no ha de contenir necessàriament el vertader estat de l'empresa, sinó simplement aquell que cada una consideri més adient als seus objectius, segons la forma específica del mecanisme directe que s'utilitzi.

Però l'ús de mecanismes directes no significa una restricció addicional de l'estudi. En efecte, en la descripció del tipus de contractes que es poden establir utilitzant mecanismes qualssevol d'un sol període, és suficient considerar aquells que s'obtenen utilitzant només mecanismes directes: el conjunt de contractes és, en ambdós casos, el mateix. Això és conseqüència d'un resultat general, aplicable en diversos contexts, que en la literatura de jocs de negociació s'acostuma a conèixer amb el nom de "principi de revelació"[5].

Donem a continuació el raonament que ens permet establir aquest principi en el nostre cas: Considerem un mecanisme que permeti una comunicació tan àmplia com es vulgui entre les empreses, en funció de la qual es

5. Veure, per exemple, Myerson (1979a) o Myerson (1982). Myerson (1981) conté una formulació específica del mateix pel problema de disseny de subhastes òptimes. En altres contexts aquest principi ha estat també àmpliament utilitzat: Gibbard (1973), Rosenthal(1978), Dasgupta, Hammond i Maskin (1979), Harris i Townsend (1981), etc.

decideixin els termes del contracte. En mecanismes d'un sol període, això significa igualment la tramesa d'un sol senyal per cada una de les empreses. No obstant, no limitarem de cap manera el contingut o l'extensió que tingui cada un dels senyals, en els que pot indicar-se, per exemple, la quantitat mínima o màxima que s'està disposat a intercanviar, el preu mig, etc.

Anomenem, en general, M_i al conjunt dels possibles missatges o senyals que pot enviar cada empresa $(i=1,2)$, en el ben entès de què es permet només la tramesa d'un element de M_i. Però ja que cada empresa pot triar-lo, el mecanisme ha de definir el contracte per cada possible parell de senyals que enviïn les empreses. Per tant, un determinat mecanisme de negociació especificarà dues funcions:

$$P: M_1 x M_2 \longrightarrow R \qquad\qquad q: M_1 x M_2 \longrightarrow R$$

que establiran les condicions del contracte[6]: una quantitat q a intercanviar per un preu global P.

6. La definició d'un mecanisme a través d'aquestes dues funcions no implica necessàriament l'obligatorietat de signar un contracte, ja que no s'imposa que les imatges de P i q hagin de ser números positius. Podem, en canvi, adoptar el conveni de què, cas que les empreses trametin els senyals m_1 i m_2, respectivament, i $P(m_1,m_2)$ i/o $q(m_1,m_2)$ resultin ser no positius, el mecanisme té com a conseqüència la renúncia de les parts a signar el contracte.

Suposem que a través d'un procés que no està directament en mans de les empreses, s'ha triat un cert mecanisme $\{q,P\}:M_1xM_2 \longrightarrow R^2$, on M_i són espais de missatges arbitràris, per a dur a terme la negociació d'un contracte entre les dues empreses. Una vegada determinat, les empreses s'han de plantejar quin ha de ser el missatge a trametre que s'avindrà millor amb els seus interessos. Donat que el benefici que obtinguin ambdues parts depèn tant de l'actuació de l'una com de l'altra, el mecanisme actua imposant les regles d'un joc, en el que, si cada empresa tramet un cert missatge $m_i \in M_i$ (i=1,2), les utilitats que obtenen les dues empreses seran, respectivament:

$$u(m_1,m_2) = P(m_1,m_2) - C(q(m_1,m_2),x)$$

$$v(m_1,m_2) = I(q(m_1,m_2),z) - P(m_1,m_2)$$

quan els estats de les dues bandes del mercat estiguin representats pel parell $(x,z)\in[0,1]x[0,1]$.

Ja que aquestes dues funcions d'utilitat depenen de l'estat de la informació privada de què disposen les empreses, és lògic considerar que el missatge que trametin quan es jugui el joc variï en funció precisament d'aquesta informació. Així doncs, haurem de considerar que una possible estratègia per a guiar el comportament d'una de les empreses ha de ser una funció:

$$r_i:[0,1] \longrightarrow M_i \qquad i=1,2$$

que li indiqui el missatge a trametre segons el valor privat que representi l'estat de la seva banda del mercat en el moment en què es faci la negociació.

D'entre aquestes funcions (estratègies), i donat un cert mecanisme de negociació, cada empresa triarà la que consideri òptima, atenent a algun concepte de solució no cooperativa del joc. Per a l'argument que estem exposant, no és necessari precisar quin és el concepte que s'utilitza, sempre que compleixi unes certes condicions mínimes d'estabilitat (veure la nota de la pàgina que segueix).

Una vegada cada empresa hagi decidit quina és l'estratègia òptima que utilitzarà, és fàcil veure que el contracte que es signarà fent la negociació amb el mecanisme $\{q,P\}:M_1xM_2 \longrightarrow R^2$ és exactament el mateix que s'aconsegueix utilitzant el mecanisme directe següent:

$$\begin{aligned} q_d&:[0,1]x[0,1] \longrightarrow R \quad \text{amb } q_d(x,z):=q(r_1(x),r_2(z)) \\ P_d&:[0,1]x[0,1] \longrightarrow R \quad \text{amb } P_d(x,z):=P(r_1(x),r_2(z)) \end{aligned} \qquad (4.A)$$

on r_1 i r_2 són les estratègies òptimes de les dues empreses en el mecanisme $\{q,P\}$.

Així doncs, sigui quina sigui la manera en què les empreses trien la seva estratègia òptima, poden aconseguir el mateix objectiu utilitzant un mecanisme directe. A més a més, la definició del mecanisme directe equivalent al {q,P} que hem donat a (4.A) ens proporciona també les millors estratègies que es poden utilitzar en el mecanisme directe: ja que les estratègies r_i són òptimes en el mecanisme original, les estratègies òptimes - amb el mateix criteri que el utilitzat per a triar r_1 i r_2 - d'aquest nou mecanisme són les funcions identitat[7] definides en [0,1].

El principi de revelació formalitza la idea de què el resultat de qualsevol mecanisme de negociació es pot simular, o refer, utilitzant un mecanisme directe, on la comunicació entre els agents es refereixi únicament a les característiques pròpies de cada un d'ells. A més a més, l'estratègia òptima de cada agent en aquest últim mecanisme consisteix simplement en revelar la seva vertadera informació privada durant la negociació. La conseqüència immediata d'aquest principi és que, per a estudiar els diversos contractes que poden donar-se com a resultat d'un

---

7. Aquesta afirmació, de fet, només es compleix per aquells conceptes de solució que tinguin la propietat de què l'estratègia òptima triada no varia si es treu, de l'espai d'estratègies factibles dels altres agents, aquelles estratègies que no poden ser triades mai per l'agent sigui quina sigui la seva informació privada. En el nostre cas no és obstacle, ja que tots els conceptes que utilitzarem aquí - equilibri de Nash, estratègies dominants, equilibri de Nash en sentit bayesià - tenen aquesta propietat.

mecanisme de negociació d'una sola etapa, és suficient tenir en compte els que s'obtinguin a partir de mecanismes directes.

En aquest punt cal mencionar que l'afirmació precedent no es pot estendre dient simplement que els únics mecanismes que cal tenir en compte són els directes[8]. Hi ha almenys dues raons que s'oposen a aquesta generalització. En primer lloc, en la demostració del principi de revelació, hem suposat que els dos agents podien triar sengles estratègies òptimes de manera única. Però, en general, per a un joc de negociació, i sigui quin sigui el concepte de solució que es triï, no es pot assegurar la unicitat de l'estratègia òptima de cada agent, i per tant la correspondència mecanismes-mecanismes directes no té perquè ser biunívoca.

D'altra banda, el problema de la manca d'unicitat de la solució es repeteix en els mecanismes directes: en general no és possible assegurar que dir la veritat sigui l'única solució òptima pel joc de negociació associat a un mecanisme directe. Si hi ha multiplicitat de solucions,

---

8. Veure Repullo (1986) o Maskin (1985) per a un comentari més ampli dels problemes d'una implementació de mecanismes de negociació, o, en general, de regles de tria social. Així mateix, es poden citar Postlewaite (1985), Williams (1986) o Saijo (1988).

quina raó objectiva tindrien els agents per a triar la revelació de la seva informació privada?

El nostre interès, però, es centra en l'estudi del conjunt de contractes que podríem anomenar factibles, és a dir, aquells que poden ser signats si les empreses utilitzen algun mecanisme de negociació prèviament establert. Des d'aquest punt de vista, la manca d'unicitat en les estratègies òptimes que puguin triar les empreses només ens afectaria si afegís elements a aquest conjunt. Però això no és possible, degut a la pròpia definició del conjunt, ja que conté tots aquells contractes susceptibles de ser signats com a resultat d'una negociació.

El problema de la multiplicitat de solucions òptimes d'un mecanisme s'ha de veure més aviat des d'una altra perspectiva. Suposem que un intermediari, legislador, planificador, etc., pretén que es signi un tipus de contracte determinat, i amb aquesta finalitat imposa que la negociació es dugui a terme utilitzant un mecanisme directe del que se sap que dóna lloc al contracte en qüestió quan els agents diuen la veritat sobre la seva informació privada. Si la revelació no és l'única solució òptima a l'abast dels agents en el joc associat al mecanisme, pot ser que l'acord a què finalment s'arribi no sigui el que es pretenia.

Per a minimitzar la influència d'aquest problema, en les seccions que segueixen estudiarem, en primer lloc, les propietats dels contractes que es poden signar mitjançant mecanismes directes. Utilitzarem diversos conceptes de solució del joc associat, dedicant un interès preferent a la qüestió de l'eficiència dels contractes - és a dir, si aquests segueixen el mateix esperit que en el cas que no hi hagi informació privada -. Serà només llavors que ens plantejarem el problema de quin mecanisme triar, és a dir, de com seleccionar un mecanisme de negociació que tingui com a resultat la signatura d'un contracte que es consideri òptim d'entre els factibles.

Capítol 5

MECANISMES DIRECTES AMB ESTRATEGIES DOMINANTS

5.1. Compatibilitat respecte a incentius en sentit fort

Donat un criteri de solució d'un joc no cooperatiu i tenint en compte el principi de revelació (cfr. ap. 4.3), podem analitzar els possibles resultats d'una negociació conduïda per un mecanisme d'un sol període, estudiant només els mecanismes directes en què "dir la veritat" sobre la informació privada de cada agent sigui un equilibri. Però per a formular més acuradament aquesta exigència, de manera que se'n puguin treure conseqüències respecte al tipus de contractes que es poden negociar amb el seu ajut, és necessari especificar el criteri de solució que s'utilitza en el joc associat al mecanisme.

Dedicarem aquest capítol a l'estudi de les propietats dels mecanismes en què el criteri de solució del joc de negociació associat sigui l'extensió directe del concepte d'equilibri de Nash a jocs d'informació incompleta.

Com ja hem vist anteriorment, una condició necessària per què una estratègia es pugui considerar òptima en un joc d'informació completa, és que satisfaci el criteri de Nash: ésser la millor resposta a una estratègia fixada de l'oponent, que, al seu torn, compleix la mateixa condició (donada l'estratègia del primer jugador). Llavors cap desviació unilateral d'un parell d'estratègies en equilibri de Nash pot reportar beneficis a cap dels dos jugadors.

L'extensió directa d'aquest concepte a jocs amb informació incompleta requerirà que, per cada parell de valors que puguin prendre les informacions privades dels oponents, les estratègies que triïn els dos agents constituexin un equilibri de Nash.

Per a formular-lo de manera més precisa, considerem un mecanisme qualsevol de negociació d'un sol període definit per les funcions $\{q,P\}:M_1 x M_2 \longrightarrow R^2$. Així mateix, siguin $m_i:[0,1] \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$ les estratègies que les dues empreses utilitzen, respectivament, en el joc no cooperatiu associat al mecanisme. Els termes en què es signarà el contracte (determinats, ultra el mecanisme $\{q,P\}$, per les estratègies que utilitzen les empreses i pels estats reals de la seva informació privada) donaran a cada una de les parts negociadores una utilitat que es pot expressar de la manera següent:

$$u(m_1,m_2;x,z) = P(m_1(x),m_2(z)) - C(q(m_1(x),m_2(z)),x)$$

$$v(m_1,m_2;x,z) = I(q(m_1(x),m_2(z)),z) - P(m_1(x),m_2(z))$$

Llavors direm que un parell d'estratègies (r_1,r_2), amb $r_i:[0,1]\longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$, estan en <u>equilibri de Nash</u> si, i solament si, per qualsevol valor $(x,z)\in[0,1]x[0,1]$ es compleix:

$$u(m_1,r_2;x,z) \leq u(r_1,r_2;x,z) \qquad \forall m_1:[0,1]\longrightarrow M_1$$

$$v(r_1,m_2;x,z) \leq v(r_1,r_2;x,z) \qquad \forall m_2:[0,1]\longrightarrow M_2$$

Si s'adopta aquest criteri, en el mecanisme directe associat $\{q_d,P_d\}$ es complirà que les estratègies que consisteixen en anunciar el vertader estat del mercat formen també un equilibri de Nash.

En efecte: en $\{q_d,P_d\}$, una estratègia qualsevol és una aplicació $s_i:[0,1]\longrightarrow[0,1]$, que indica al jugador l'estat del mercat que ha d'anunciar, en funció de quin sigui el seu vertader valor. Anomenant h_i a la funció identitat sobre $[0,1]$ - equivalent a l'estratègia "dir la veritat" -, ens cal demostrar que es compleix:

$$\begin{array}{l} u_d(s_1,h_2;x,z) \leq u_d(h_1,h_2;x,z) \\ v_d(h_1,s_2;x,z) \leq v_d(h_1,h_2;x,z) \end{array} \quad \forall s_1,s_2 \quad \forall x,z \qquad (5.A)$$

on u_d i v_d són les utilitats que obtenen les dues empreses, respectivament, si la negociació es duu a terme amb l'ajut del mecanisme directe $\{q_d,P_d\}$, fent servir les estratègies i posseint la informació privada que es detalla en cada cas.

Tenint en compte la definició de u_d tindrem:

$$\begin{aligned} u_d(s_1,s_2;x,z) &= P_d(s_1(x),s_2(z)) - C(q_d(s_1(x),s_2(z)),x) = \\ &= P((r_1os_1)(x),(r_2os_2)(z)) - \\ &\quad - C(q((r_1os_1)(x),(r_2os_2)(z)),x) = \\ &= u(r_1os_1,r_2os_2;x,z) \end{aligned}$$

i, de manera similar, $v_d(s_1,s_2;x,z) = v(r_1os_1,r_2os_2;x,z)$.

Havent establert la relació entre les utilitats que poden obtenir les empreses en el mecanisme $\{q,P\}$ i en el directe associat, la demostració de (5.A) és immediata. Per exemple, per la primera empresa tenim:

$$\begin{aligned} u_d(s_1,h_2;x,z) &= u(r_1os_1,r_2;x,z) \le \\ &\le u(r_1,r_2;x,z) = u_d(h_1,h_2;x,z) \end{aligned}$$

ja que (r_1,r_2) estan en equilibri de Nash en el mecanisme original. ∎

Així doncs, amb aquest criteri, haurem d'estudiar només aquells contractes que es puguin establir utilitzant mecanismes directes que compleixin (5.A).

Per tant a partir d'ara suprimirem els subíndex amb què indicàvem que un mecanisme era directe. Igualment per a simplificar la notació, podem considerar que:

$$u(x',z;x) = P(x',z) - C(q(x',z),x)$$

$$v(x,z';z) = I(q(x,z'),z) - P(x,z')$$

són les utilitats que obtenen les empreses si anuncien com a característiques dels seus respectius mercats els valors (x',z'), mentre que els valors reals són el parell (x,z).

Els mecanismes directes que compleixen (5.A) s'anomenen compatibles respecte a incentius[1] en sentit fort[2], perquè admeten la següent interpretació: Si, per cada empresa, dir la veritat constitueix un equilibri de Nash en qualsevol situació dels mercats, hem de tenir, utilitzant la notació que acabem d'introduir:

---

1. Aquesta terminologia va ésser utilitzada per primera vegada a Hurwicz(1972) en un context més restringit i un xic diferent, però posteriorment s'ha aplicat, entre d'altres, tant a mecanismes de negociació com a regles de tria social.

2. Hem adoptat aquí la notació de Laffont i Maskin (1980).

$$u(x,z;x) \geq u(x',z;x) \quad \forall x,x' \in [0,1] \quad \forall z \in [0,1]$$
$$v(x,z;z) \geq v(x,z';z) \quad \forall z,z' \in [0,1] \quad \forall x \in [0,1] \qquad (5.B)$$

Això significa que si triem un mecanisme directe per a regular una negociació, i aquest compleix (5.B), podem assegurar que cap de les dues empreses tindrà mai un incentiu per a anunciar un valor que no s'ajusti a la veritat. Perquè, sigui quin sigui l'estat real de la natura, l'empresa no té cap compensació si fa un altre senyal: no és possible obtenir beneficis addicionals anunciant un valor, per la seva banda del mercat, diferent del que realment ha observat.

La qualificació de "en sentit fort" que afegim als mecanismes es refereix a què, en aquest cas, dir la veritat és una estratègia dominant per cada un dels agents: és el millor comportament que pot seguir, independentment de l'estratègia del seu adversari.

En efecte, en el mecanisme directe, l'estratègia òptima de l'agent consisteix simplement en informar del vertader valor que suposadament té la seva característica privada. Segons hem vist, aquesta estratègia òptima és la mateixa per qualsevol estat de les dues bandes del mercat. Per tant, es tracta d'una estratègia que, de fet, no depèn directament del que faci el seu adversari. En altres paraules, cada agent disposa d'una pauta de comportament en la negociació induïda per un d'aquests mecanismes que, a més a més de ser del tipus proposat per Nash, és dominant.

Per últim observem que utilitzant aquest criteri, no serà necessari que les empreses mantinguin cap valoració de probabilitats sobre els diversos valors que pot prendre l'estat del mercat de l'oponent, perquè està garantit que, en cada moment, els anuncis de cada part seran fiables, tot i no disposar d'una contrastació independent.

5.2. Caracterització dels mecanismes compatibles

Sigui $\{q,P\}$ un mecanisme de negociació directe compatible respecte a incentius en sentit fort. Segons hem vist, si s'utilitza $\{q,P\}$, a cada una de les empreses li surt a compte dir la veritat respecte a la seva informació privada. Així doncs, la seva utilitat dependrà, de fet, només del parell $(x,z)\in[0,1]\times[0,1]$ que representi el vertader estat del mercat. D'acord amb això, podem denotar-les, respectivament, per:

$$U(x,z) := u(x,z;x) = P(x,z) - C(q(x,z),x)$$

$$V(x,z) := v(x,z;z) = I(q(x,z),z) - P(x,z)$$

Donarem en aquesta secció dues caracteritzacions d'aquests mecanismes, resumides en els teoremes que segueixen.

Teorema 5.1.- Un mecanisme directe $\{q,P\}$, en què q sigui una funció contínua, és compatible respecte a incentius en sentit fort si, i solament si:

(a) $q(x,z)$ és creixent respecte a z i decreixent respecte a x

(b) $U_x(x,z) = - C_x(q(x,z),x)$

$V_z(x,z) = I_z(q(x,z),z)$

Una segona caracterització, en termes força diferents, ens la dóna el teorema[3] següent:

<u>Teorema 5.2</u>.- Un mecanisme $\{q,P\}$ és compatible respecte a incentius en sentit fort si, i solament si, existeixen dues funcions $\Phi_1: R\times[0,1] \longrightarrow R$ i $\Phi_2: R\times[0,1] \longrightarrow R$ tals que:

$$\begin{aligned} q(x,z) &= \operatorname{argmax}_q \{\Phi_2(q,z) - C(q,x)\} = \\ &= \operatorname{argmax}_q \{I(q,z) - \Phi_1(q,x)\} \qquad (5.D) \\ P(x,z) &= \Phi_1(q(x,z),x) = \Phi_2(q(x,z),z) \end{aligned}$$

Observem, en primer lloc, que les caracteritzacions que es donen en els dos teoremes anteriors són resultats prou coneguts en la literatura de jocs de negociació. Una posterior utilització justifica la seva introducció, encara que en principi no sembli necessari oferir-ne les demostracions. No obstant, les hem inclòs per dos motius. Pel que fa al teorema 2, la construcció de les funcions Φ_i és una peça fonamental de la comprensió del teorema, i sense aquesta, la interpretació que donem posteriorment del dit teorema seria pràcticament impossible, així com la seva posterior aplicació. Respecte al primer

3. Resultat degut a Rochet (1985).

teorema, presentem la demostració perquè hem utilitzat una tècnica que, tot i no ésser absolutament original, no sabem que s'hagi aplicat en aquest resultat en concret, i facilita la introducció de resultats posteriors en la mateixa línia.

Demostració del teroema 5.1

I. Les condicions són necessàries:

(a) Suposem que $q(x,z)$ no és decreixent respecte a x. Llavors per algun $z \in [0,1]$ existeixen $x, x' \in [0,1]$ amb $x < x'$ i $q(x,z) < q(x',z)$.

Per la compatibilitat respecte a incentius (condició (5.B)) sabem que:

$$u(x,z;x) \geq u(x',z;x)$$

i

$$u(x',z;x') \geq u(x,z;x')$$

és a dir:

$$P(x,z) - C(q(x,z),x) \geq P(x',z) - C(q(x',z),x)$$

i

$$P(x',z) - C(q(x',z),x') \geq P(x,z) - C(q(x,z),x')$$

Combinant aquestes dues desigualtats s'obté:

$$C(q(x',z),x') - C(q(x',z),x) \leq$$
$$\leq C(q(x,z),x') - C(q(x,z),x)$$

o també:

$$\int_{x}^{x'} C_x(q(x',z),s)\ ds \ \leq \int_{x}^{x'} C_x(q(x,z),s)\ ds \qquad (5.C)$$

C_x és una funció que pren valors positius, ja que per hipòtesi C és creixent respecte a x; de manera que si x<x', les dues integrals de (5.C) estan ben definides i són positives.

Ara bé, també per hipòtesi, C_q és una funció creixent respecte a x, i al ser C dues vegades contínuament diferenciable, això és equivalent a dir que C_x és creixent respecte a q. Nosaltres suposàvem que q(x,z)<q(x',z); i per tant haurem de tenir:

$$C_x(q(x,z),s) < C_x(q(x,z),s) \qquad \forall s \in [0,1]$$

A l'integrar sobre l'interval [x,x'] s'obté una condició incompatible amb (5.C).

La demostració de que q(x,z) és creixent respecte a z es pot fer de manera similar, utilitzant ara la segona de les condicions de (5.B). ∎

(b) Demostrarem només que $U_x(x,z)=-C_x(q(x,z),x)$, ja que per l'altra igualtat es pot utilitzat un raonament similar. Aquesta serà l'única part de la demostració en què és necessària la hipòtesi addicional de la continuïtat[4] de la funció q(x,z).

Ja que suposem que el mecanisme és compatible respecte a incentius, tindrem, per z donat:

$$\left.\begin{aligned} U(x,z) &= u(x,z;x) \geq u(x',z;x) \\ U(x',z) &= u(x',z;x') \geq u(x,z;x') \end{aligned}\right\} \forall x,x' \in [0,1]$$

d'on es poden deduir les següents desigualtats:

$$U(x,z) - U(x',z) \leq C(q(x,z),x') - C(q(x,z),x)$$

$$U(x,z) - U(x',z) \geq C(q(x',z),x') - C(q(x',z),x)$$

si les ordenem, dividim els tres termes per (x'-x) i fem el límit quan x' tendeix a x, tot tenint en compte la continuïtat de la funció q, s'obté el resultat enunciat. ∎

II. Les condicions són suficients:

Ens cal comprovar les dues desigualtats de (5.B). Per la seva simetria és fàcil veure que obeiran als mateixos raonaments, i per tant ens limitarem a comprovar la primera de les dues:

---

4. Una demostració alternativa que no utilitza aquesta condició es pot trobar a Rochet (1985), pp. 219 i 230-231, tot i que en aquest cas és necessari suposar, en canvi, que I_{zz} i C_{xx} són funcions fitades inferiorment.

$$u(x,z;x) - u(x',z;x) \geq 0.$$

De (b) podem deduir que:

$$U(x,z) = -\int_0^x C_x(q(s,z),s)dx + \Phi(z)$$

i per tant:

$$u(x,z;x)-u(x',z;x) = U(x,z) - U(x',z) -$$

$$- [C(q(x',z),x') - C(q(x',z),x)]$$

$$= \int_x^{x'} [C_x(q(s,z),s)-C_x(q(x',z),s)]ds$$

Ara bé, si $x \leq x'$, la hipòtesi (a) implica que per tot $s \in [x,x']$, $q(s,z) \geq q(x',z)$; i al considerar C_x creixent respecte a q, la diferència que estem calculant és la integral d'una funció positiva respecte a un interval propi. En podem deduir doncs la seva no negativitat.

Aquesta mateixa conclusió es pot obtenir si $x \geq x'$, ja que la diferència que cal integrar resulta ser negativa, però l'interval sota el que s'integra és també de signe contrari. ∎

Demostració del teroema 5.2

Comprovarem successivament, suficiència i necessitat de les condicions que s'hi estableixen:

(a): Cal veure que (5.D) defineix un mecanisme compatible respecte a incentius. Provarem la primera de les desigualtats de (5.B); la segona és similar.
Siguin $x,x' \in [0,1]$ i $z \in [0,1]$ qualssevol. Tindrem:

$$
\begin{aligned}
u(x',z;x) &= P(x',z) - C(q(x',z),x) = \\
&= \Phi_2(q(x',z),z) - C(q(x',z),x) \leq \\
&\leq \Phi_2(q(x,z),z) - C(q(x,z),x) = \\
&= P(x,z) - C(q(x,z),x) = u(x,z;x)
\end{aligned}
$$

on la desigualtat es compleix degut a que, per (5.D), el valor màxim de la funció $\Phi_2(q,z)-C(q,x)$ respecte a la variable q és precisament q(x,z). ∎

(b): Definirem $\Phi_2(q,z)$ per qualsevol $(q,z) \in R \times [0,1]$, i demostrarem que es compleix la part de (5.D) corresponent a aquesta funció. Per Φ_1 es pot utilitzar el mateix tipus d'argument.

Siguin doncs $(\tilde{q},z) \in R \times [0,1]$ valors qualssevol fixats. Podem trobar-nos en un dels dos casos següents:

(i) existeix $x \in [0,1]$ tal que $\tilde{q}=q(x,z)$

(ii) per qualsevol[5] $x \in [0,1]$, $\tilde{q} \neq q(x,z)$

En el primer cas, no podem garantir la unicitat de x, però sí que tots els valors de x als que correspongui $\tilde{q}$ tenen el mateix preu: suposem que x,x' són tals que $\tilde{q}=q(x,z)=q(x',z)$. Ja que el mecanisme és compatible respecte a incentius, tindrem:

$u(x',z;x) \leq u(x,z;x)$ és a dir:

$$P(x',z) - C(q(x',z),x) \leq P(x,z) - C(q(x,z),x)$$

i ja que $q(x,z)=q(x',z)$, resulta $P(x',z) \leq P(x,z)$. Canviant els papers de x i x' s'obté la desigualtat contrària.

Això ens permet definir Φ_2, en el cas (i), de la manera següent: $\Phi_2(\tilde{q},z) = P(x,z)$; i el raonament anterior ens garanteix que la definició és correcta. A més a més, ens assegura que Φ_2 compleix la segona igualtat de (5.D).

Per altra banda, si $\tilde{q}$ és un valor real, tal que el contracte que tenim definit no l'admet com a quanti-

---

5. Si $q(x,z)$ és una funció contínua, aquesta condició és equivalent a que $\tilde{q}$ no sigui de l'interval $[q(1,0),q(0,1)]$.
En efecte, al partir d'un mecanisme compatible respecte a incentius, sabem que per qualssevol $(x,z) \in [0,1] \times [0,1]$, tindrem $q(1,z) \leq q(x,z) \leq q(0,z)$ i $q(x,0) \leq q(x,z) \leq q(x,1)$, com a conseqüència de la proposició anterior. Combinant-los s'obté $q(1,0) \leq q(x,0) \leq q(x,z) \leq q(0,z) \leq q(0,1)$; i la continuïtat de q assegura que es prenen tots els valors intermedis.

tat d'intercanvi, quan l'estat del segon mercat és z, sigui quin sigui l'estat del primer mercat - cas (ii) -, podem definir $\Phi_2(\tilde{q},z)$ com un número real més petit[6] que $P(x,z)-C(q(x,z),x)$, per qualsevol valor de x. Anomenem-lo $\alpha(z)$.

Ens falta demostrar que es compleix la primera part de (5.D): $q(x,z)=\mathrm{argmax}_q\{\Phi_2(q,z)-C(q,x)\}$.

Donats $(x,z)\in[0,1]\times[0,1]$, sigui $q^*:=\mathrm{argmax}\ H(q)$, on, per comoditat, $H(q):=\Phi_2(q,z)-C(q,x)$. Ens cal veure que q^* és precisament $q(x,z)$.

Ara bé, degut a la definició de Φ_2 tenim:

$$\Phi_2(q^*,z)=\begin{cases} P(x^*,z) & \text{si existeix } x^* \text{ tal que } q^*=q(x^*,z) \\ \alpha(z) & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

En realitat, però, no pot ser que $\Phi_2(q^*,z)=\alpha(z)$, ja que llavors, per la definició de $\alpha(z)$ resulta:

$$H(q^*) = \Phi_2(q^*,z) - C(q^*,x) = \alpha(z) - C(q^*,x) \leq$$

$$\leq \alpha(z) < P(x,z) - C(q(x,z),x) = H(q(x,z))$$

contradient la definició de q^*.

6. També podríem imposar $\Phi_2(\tilde{q},z)=-\infty$ en el cas (ii), definint Φ_2 en la recta real completada. El resultat és el mateix: proposar un preu prou petit per impedir transaccions de quantitat $\tilde{q}$.

Així doncs, l'òptim de $H(q)$ ha de trobar-se en un punt $q^*=q(x^*,z)$, per algun x^*. Però a més tindrem:

$$H(q^*) = \Phi_2(q(x^*,z),z) - C(q(x^*,z),x) =$$

$$= P(x^*,z) - C(q(x^*,z),x) = u(x^*,z;x)$$

i, per la compatibilitat respecte a incentius del nostre mecanisme, s'ha de complir $x^*=x$. ∎

És interessant observar que la característica dels mecanismes directes que posa de manifest la primera part del teorema 5.1 s'avé molt bé amb la interpretació que originalment donàvem dels paràmetres x i z: valors més alts de x augmenten costos a l'empresa venedora que, en conseqüència, ha de preferir negociar una menor quantitat del bé intermedi si es mantenen fixes les condicions de l'altra banda del mercat; mentre que valors més alts de z augmenten els ingressos de l'empresa compradora, i per tant és lògic també que la resposta sigui una quantitat creixent respecte a aquest paràmetre.

Per la seva banda, la caracterització establerta en el teorema 5.2 té una interpretació prou natural i enllaça directament amb un dels models que estudiàvem en el cas d'informació completa. El teorema ens permet entendre qualsevol negociació que es faci mitjançant un mecanisme directe compatible respecte a incentius en sentit fort, com una <u>negociació en termes de preus i quantitats</u>, força més natural en el context en què estem.

En aquesta negociació, un intermediari demanaria a cada empresa que indiqui el preu que està disposada a pagar - o a acceptar, segons el cas - per cada possible tramesa que consideri acceptable. Les relacions preus-quantitats que s'anunciïn, com és lògic, dependran dels estats respectius dels mercats de les empreses, de manera que hauran de ser funcions de la forma $P=Q_1(q,x)$ i $P=Q_2(q,z)$, respectivament.

Ara bé, les empreses estaran disposades a signar un contracte només si aquest s'estableix per la quantitat que maximitzi la seva utilitat, donada la funció de preus que l'altra hagi comunicat. Per les dues primeres igualtats de (5.D) podem assegurar que si les empreses anuncien les funcions $P=\Phi_1(q,x)$, en el cas de la primera, i $P=\Phi_2(q,z)$ per la segona, els objectius de les dues empreses es poden assolir alhora: la quantitat, si existeix, que ambdues consideren òptima és la mateixa.

Degut a la seva construcció, les funcions Φ_i tenen una doble missió: per una banda assenyalar el preu en què es valora una certa transacció, per l'altra indicar quines transaccions són considerades factibles per part de cada empresa (cfr. nota peu pg. núm. 6). Per tant, si no es signa un contracte, serà degut a que cap de les dues empreses ho vol. A més a més la darrera part de (5.D) ens permet afirmar que l'acord serà també unànime pel que fa al preu de la transacció, permetent d'aquesta manera signar efectivament el contracte.

Naturalment, les propietats que acabem d'esmentar, només tenen sentit si ens ajuden a seleccionar mecanismes directes que puguin donar lloc a contractes que siguin "satisfactoris" per ambdues parts. Aquest és l'objectiu de les seccions que segueixen.

5.3. Eficiència ex post amb incertesa en ambdós costats del mercat

D'entre la família de mecanismes de negociació que estem estudiant, un criteri de "satisfacció" que podem utilitzar per a triar-ne un, és que permeti la signatura de contractes amb característiques similars a les que es reuneixen en el cas d'informació completa.

En aquest sentit, cal destacar que el contracte haurà d'estipular una quantitat que maximitzi, donades unes condicions qualssevol del mercat, l'excedent que les empreses poden obtenir a través de la seva relació, exactament de la mateixa manera que es podria fer si ambdues empreses coneixessin de bell antuvi totes les característiques del mercat. Anomenarem mecanisme "eficient ex post" a tot el que compleixi aquesta condició. Naturalment, ens caldrà trobar un mecanisme directe que, a més a més, sigui compatible respecte a incentius en sentit fort.

Comencem caracteritzant els mecanismes directes que són eficients ex post. Ja que la formulació del problema ho permet, les transaccions òptimes en el sentit de Pareto s'obtindran de considerar la funció:

$$S(q,x,z) := I(q,z) - C(q,x)$$

Podem assegurar que S serà una funció còncava respecte a la variable q, degut a les propietats que, per hipòtesi, suposem a les funcions I i C. Això significarà que qualsevol punt crític de la funció S serà un màxim. Si, a més a més, afegim les condicions:

(1) $I_q(0,0) > C_q(0,1)$

(2) $\lim_{q\to\infty} [I_q(q,1) - C_q(q,0)] < 0$

podem determinar, de manera única, un valor de q, per cada valor dels paràmetres x i z, que maximitza S(.,x,z).

Aquest valor, que denotarem per $q=\bar{q}(x,z)$ vé donat per la condició de primer ordre:

$$I_q(\bar{q}(x,z),z) - C_q(\bar{q}(x,z),x) = 0 \qquad (5.E)$$

i la seva unicitat es dedueix de les condicions (1) i (2) anteriors. En efecte, a l'haver suposat tan l'ingrés marginal com el cost marginal creixents respecte a la informació privada de cada empresa, tenim: $I_q(0,z)>C_q(0,x)$; així com $I_q(q,z)<C_q(q,x)$ si q és suficientment gran, per qualsevol $(x,z)\in[0,1]\times[0,1]$. Si recordem que, per hipòtesi, $I_q(.,z)$ és decreixent i $C_q(.,x)$ creixent, això completa el nostre argument.

Observem, a més a més, que la quantitat òptima d'intercanvi que acabem de definir és una funció (la unicitat del valor que s'obté a (5.E) ens permet afirmar-ho) contínua i diferenciable respecte a les seves dues variables - com a conseqüència del teorema de la funció implícita de diferenciabilitat aplicat a (5.E) -, que compleix:

$$\bar{q}_x = C_{qx}(\bar{q}(x,z),x) \;/\; [I_{qq}(\bar{q}(x,z),z)-C_{qq}(\bar{q}(x,z),x)] < 0$$

$$\bar{q}_z = -\, I_{qz}(\bar{q}(x,z),x) \;/\; [I_{qq}(\bar{q}(x,z),z)-C_{qq}(\bar{q}(x,z),x)] > 0$$

és a dir, es tracta d'una funció decreixent respecte a x i creixent respecte a z.

Podem concloure, per tant, que un mecanisme directe {q,P} serà eficient ex post si, i solament si, el seu esquema de quantitats a intercanviar coincideix amb $\bar{q}(x,z)$ per qualsevol $(x,z)\in[0,1]x[0,1]$. Aquesta funció, al complir la condició (a) del Teorema 5.1., pot formar part d'un mecanisme compatible respecte a incentius en sentit fort. Caldrà veure quins esquemes de preu es poden associar a $\bar{q}$ de manera que es compleixi també la condició (b) del dit teorema[7].

Però en el cas de que les dues empreses disposin d'informació privada, no és possible definir aquest tipus

7. Recordem que la demostració que hem donat d'aquest resultat, vàlid només per a funcions q contínues, es pot aplicar aquí, ja que, per la seva definició, $\bar{q}$ ho és.

de contracte: qualsevol esquema de preus que considerem incompleix la condició (b) del Teorema 5.1. anterior, que és igualment necessària.

En efecte, definim la funció:

$$\bar{S}(x,z) = I(\bar{q}(x,z),z) - C(\bar{q}(x,z),x)$$

Derivant-la respecte a z s'obté:

$$\bar{S}_z(x,z) = I_q(\bar{q}(x,z),z)\ \bar{q}_z + I_z(\bar{q}(x,z),z) - C_q(\bar{q}(x,z),x)\ \bar{q}_z$$

$$= I_z(\bar{q}(x,z),z)$$

ja que la quantitat òptima $\bar{q}(x,z)$ està definida per l'equació (5.E).

Per tant la condició $V_x(x,z)=I_z(q(x,z),z)$ del Teorema 5.1, (b) es pot escriure, en aquest cas, com:

$$V_z(x,z) = \bar{S}_z(x,z)$$

Per altra banda, la definició de $\bar{S}(x,z)$ ens implica directament que:

$$\bar{S}(x,z) = U(x,z) + V(x,z)$$

Comparant amb la igualtat anterior, és evident que si s'han de complir totes dues, $U(x,z)$ ha de ser independent de z. Però llavors també s'ha de complir, en particular, que $U_{zx}(x,z)=0$; i tenint en compte la primera igualtat del dit Teorema, tenim:

$$U_{zx}(z,x) = - C_{qx}(\bar{q}(x,z),z)\ \bar{q}_z(x,z)$$

i, segons les hipòtesis que estem utilitzant en el nostre treball, no té sentit que cap dels dos termes d'aquest producte s'anul.li.

Hem arribat doncs a una contradicció, i per tant no es pot trobar cap funció $P=P(x,z)$ tal que el mecanisme $\{\bar{q},P\}$, que seria eficient, sigui també compatible respecte a incentius en sentit fort[8].

Donat que el resultat "first best" no és aplicable aquí, una possible opció - que no prendrem - és l'exploració del tipus de contractes que es poden signar utilitzant mecanismes compatibles respecte a incentius en sentit fort si imposem condicions més débils que la eficiència ex post. En aquesta línia de treball es pot veure, per exemple, Rochet (1985).

8. En un context més general, els mecanismes directes compatibles respecte a incentius en sentit fort i eficients ex post s'acostumen a anomenar "mecanismes de Groves" [Groves (1973)]. Són els únics eficients en què dir la veritat és una estratègia dominant per tots els agents [veure Green i Laffont (1977, 1979)]. Però, en general, són mecanismes no "equilibrats" (suma de pagaments dels agents igual a zero, condició que nosaltres hem imposat de partida) [veure, per exemple, Groves i Loeb (1975) o Laffont i Maskin (1980)]. El raonament que presentem aquí és una demostració diferent, aplicada al nostre cas concret, arribant al mateix resultat.

5.4. Extensió: mecanismes directes i eficiència ex post en el cas d'utilitzar estratègies mixtes

Tal i com acabem de veure, en el cas d'informació incompleta en ambdues bandes del mercat, els mecanismes compatibles respecte a incentius en sentit fort no semblen prou adequats, puig que no permeten assolir l'eficiència dels contractes que es signin amb la seva mediació. Però abans de descartar-los és necessari fer una darrera observació.

Havent-nos basat en el principi de revelació, tots els nostres arguments, fins ara, han utilitzat equilibris de Nash amb estratègies pures. En canvi, per un joc no cooperatiu qualsevol, el teorema de Nash només ens assegura l'existència d'un equilibri sempre i quan es treballi amb el conjunt de <u>totes</u> les estratègies a l'abast d'un jugador.

En conseqüència, les conclusions de l'apartat anterior són objectables, a menys que puguem reafirmar-les estudiant els mecanismes directes induïts per negociacions en què es tinguin en compte equilibris de Nash formats (possiblement) per estratègies mixtes del joc original. Aquest serà l'objectiu d'aquesta secció.

5.4.1. Estratègies mixtes

En un joc no cooperatiu, les estratègies mixtes es defineixen, usualment, a partir de les estratègies pures - que són, de fet, les úniques que poden utilitzar els jugadors -, introduïnt mecanismes aleatòris que determinin l'estratègia pura a seguir. Dit d'una altra manera, si un jugador utilitza una estratègia mixta, la tria del "patró de comportament" es fa de manera aleatòria: és el resultat d'un experiment el que indica el comportament a seguir.

De fet, qualsevol estratègia pura es pot considerar com una estratègia mixta en què el mecanisme aleatòri la triï amb probabilitat 1. Per tant, quan un agent utilitza estratègies mixtes per a regir el seu comportament, està substituint l'elecció d'una estratègia pura per la d'unes lleis que governin el mecanisme aleatòri. Per exemple, si un agent té a la seva disposició dues possibles estratègies pures, el conjunt d'estratègies mixtes estarà representat per tots els valors d'un paràmetre $p \in [0,1]$. Triant un cert valor de p, optarà per un mecanisme aleatòri que seleccioni la primera estratègia amb probabilitat p i la segona amb probabilitat 1-p. Un experiment en aquest mecanisme li dictarà la conducta real a seguir en el joc.

Si el conjunt d'estratègies pures és "gran" (és a dir, si no en tenim un nombre finit, i per tant no podem utilitzar mecanismes definits per probabilitats discretes), el mètode de construcció del conjunt d'estratègies mixtes ha de ser un xic diferent al que s'esmenta en el paràgraf anterior. Per a evitar dificultats de tipus tècnic, Aumann(1964) proposa una definició alternativa[9], que resumim a continuació:

> "Recordem el significat intuïtiu d'estratègia mixta: és un mètode per a triar una estratègia pura utilitzant un mecanisme aleatòri. Físicament, es pot tirar una moneda, i segons surti cara o creu es segueix una estratègia pura; o, si es vol triar entre un nombre continu d'estratègies pures, es pot utilitzar una ruleta contínua. Matemàticament, el mecanisme aleatòri - les cares d'una moneda, el conjunt de punts de la ruleta - constitueixen un espai de mesura de la probabilitat,...; una estratègia mixta és una funció d'aquest espai mostral en el conjunt de totes les estratègies pures. En altres paraules, tenim una variable aleatòria que pren com a valors les estratègies pures, ... Proposem que s'utilitzi la pròpia variable aleatòria [per a definir les estratègies mixtes]".

Sigui doncs $\{q,P\}:M_1 x M_2 \longrightarrow R^2$ un mecanisme de negociació donat, on com en l'apartat 5.1., els conjunts M_i són espais de missatges arbitraris. Per a evitar confusions en la notació que necessitem, serà convenient deno-

---

9. Veure també Aumann (1974), especialment pp. 73-76

tar per T_1 i T_2 ($T_1=T_2=[0,1]$) els conjunts de les possibles informacions privades dels dos agents. Com ja hem vist, una estratègia pura pel joc associat al mecanisme $\{q,P\}$ serà una funció $r_i:T_i \longrightarrow M_i$ que indiqui al jugador el missatge a trametre en el joc segons el valor de la seva informació privada. Cada una d'elles representa un "patró de comportament" que tria l'agent pel joc.

Seguint la idea anterior, considerem una variable aleatòria distribuïda de manera uniforme a l'interval $[0,1]$, i denotem-la per $\bar{\alpha}$. Una <u>estratègia mixta</u> pel jugador i, en el joc associat al mecanisme $\{q,P\}$, serà una funció mesurable $\sigma_i:[0,1]xT_i \longrightarrow M_i$. La seva interpretació no presenta dificultats: l'agent tramet el missatge $\sigma_i(\alpha_i,t_i)$ si observa el valor α_i de la variable aleatòria i la seva informació privada es pot representar per t_i ($i=1,2$). El procés aleatòri s'introdueix per a cada jugador per separat, de manera que podem considerar independents les diferents observacions de $\bar{\alpha}$.

En aquesta definició, prou manejable, és fàcil identificar les estratègies pures: són les que compleixen $\sigma_i(\alpha,t_i)=\sigma_i(t_i)$ per qualsevol $\alpha \in [0,1]$. Així mateix, permet triar entre un nombre finit d'alternatives: per exemple, si es vol utilitzar una certa estratègia pura r amb probabilitat p i un altra, s, amb probabilitat 1-p (on $r,s:T_i \longrightarrow M_i$), és suficient definir:

$$\sigma_i(\alpha,t_i)=\begin{cases} r(t_i) & \text{si } \alpha\leq p \\ s(t_i) & \text{en cas contrari}\end{cases}$$

Una vegada determinat el conjunt d'estratègies del joc, ens cal veure quin criteri utilitzaran els agents per a escollir-ne una. Lògicament això dependrà, en primer lloc, de la utilitat que pugui derivar-se del seu ús. Suposem que els jugadors trien sengles estratègies (mixtes) σ_i. Cada una d'elles incorpora un mecanisme aleatòri, i per tant el criteri adient[10] per a mesurar el què poden obtenir en el joc és la utilitat esperada respecte als valors de la dita variable aleatòria.

Podem doncs definir les següents funcions:

$$u(\sigma_1,\sigma_2;x,z):=$$

$$= E_{\alpha,\beta}\left[P(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z))-C(q(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z)),x)\right] =$$

$$=\int_0^1\int_0^1 [P(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z))-C(q(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z)),x)]d\alpha d\beta$$

10. L'ordre que ha de seguir un jugador és, òbviament, triar primer l'estratègia σ_i que seguirà, i, una vegada començada la negociació, observar un resultat en el mecanisme aleatòri. Aquest, conjuntament amb el valor de la seva informació privada, determinen el seu comportament en la negociació.

$v(\sigma_1,\sigma_2;x,z):=$

$$= E_{\alpha,\beta}\left[I(q(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z)),z)-P(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z))\right] =$$

$$=\int_0^1\int_0^1 [I(q(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z)),z)-P(\sigma_1(\alpha,x),\sigma_2(\beta,z))]d\alpha d\beta$$

que indiquen les utilitats esperades que poden obtenir ambdós jugadors, respectivament, si utilitzen les estratègies σ_1 i σ_2, quan els valors de les seves informacions privades estan representades pel parell (x,z).

Naturalment, si els agents es comporten racionalment, hem d'esperar que les estratègies que triïn formin, almenys, un equilibri de Nash. La definició d'aquest concepte és, també aquí, l'habitual: un parell $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ que compleixi:

$$u(\sigma_1,\bar{\sigma}_2;x,z) \le u(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2;x,z) \quad \text{per qualsevol } \sigma_1$$

$$v(\bar{\sigma}_1,\sigma_2;x,z) \le v(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2;x,z) \quad \text{per qualsevol } \sigma_2$$

sigui quin sigui el parell $(x,z)\in T_1xT_2$.

5.4.2. Joc directe associat i mecanismes directes estesos

La primera qüestió que ens cal analitzar, seguint la línia de les seccions anteriors, és la possibilitat de trobar, donat un parell $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ d'estratègies (mixtes) en equilibri de Nash per a un mecanisme $\{q,P\}:M_1 x M_2 \longrightarrow R^2$ fixat, un mecanisme directe associat que reprodueixi el joc de negociació inicial.

La presència d'un procés aleatòri en la definició de les funcions $\bar{\sigma}_i$ dificulta l'ús d'un raonament tan senzill com el que hem utilitzat en el cas d'estratègies pures. El camí alternatiu que seguirem aquí serà començar definint, no el mecanisme directe, sinó les regles d'un joc "directe" que li associarem:

<u>Definició 5.3.</u> Donat un mecanisme d'un sol període $\{q,P\}$ i un parell d'estratègies (mixtes) en equilibri de Nash, $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ pel joc associat al mecanisme, anomenarem <u>joc directe</u> associat a $\{q,P\}$ i $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ al que es desenvolupa seguint les següents etapes:

1. Es seleccionen dos valors $\alpha,\beta \in [0,1]$ de manera independent segons la distribució uniforme sobre l'interval unitari. Per altra banda,
2. Cada jugador anuncia un valor per a la seva informació privada, de manera simultània.

3. D'acord amb els valors $(\bar{x},\bar{z})\in T_1 x T_2$ i (α,β) determinats a les dues etapes anteriors, així com el vertader estat de la natura, representat pel parell $(x,z)\in T_1 x T_2$, les utilitats dels dos jugadors seran, respectivament:

$$u_d(\bar{x},\bar{z},\alpha,\beta;x):=$$

$$P(\bar{\sigma}_1(\alpha,\bar{x}),\bar{\sigma}_2(\beta,\bar{z}))-C(q(\bar{\sigma}_1(\alpha,\bar{x}),\bar{\sigma}_2(\beta,\bar{z})),x)$$

$$v_d(\bar{x},\bar{z},\alpha,\beta;z):=$$

$$I(q(\bar{\sigma}_1(\alpha,\bar{x}),\bar{\sigma}_2(\beta,\bar{z})),z)-P(\bar{\sigma}_1(\alpha,\bar{x}),\bar{\sigma}_2(\beta,\bar{z}))$$

Observem que aquest joc està estructurat de manera que els jugadors no coneixen els valors α,β seleccionats en el moment en què es duu a terme l'etapa 2.

Per a estudiar el comportament dels jugadors en aquest joc, comencem definint les seves estratègies. El seu paper es limita a l'anunci de l'etapa 2, on s'ha de triar un missatge. Com en el cas dels mecanismes directes, és lògic que el senyal depengui de la informació privada que posseeixen, de manera que una estratègia pura pel jugador i serà una funció $r_i:T_i \longrightarrow T_i$.

Seguint el mateix camí que en el joc original, podem construir el conjunt d'estratègies mixtes: estarà format per funcions de la forma $s_i:[0,1]xT_i \longrightarrow T_i$. La seva interpretació és immediata: si, per exemple, el jugador 1 tria l'estratègia s, el valor que anunciarà en el pas 2 del joc serà $\bar{x}=s(\delta,x)$, sempre que x sigui la seva informació privada i δ el valor proporcionat per un mecanisme aleatòri, distribuït uniformement sobre l'interval [0,1].

Com en qualsevol joc no cooperatiu, el concepte de solució que ens cal considerar és el d'equilibri de Nash, definit de la manera usual. La proposició següent ens dóna un resultat en aquest sentit:

<u>Proposició 5.4</u>.- En el joc directe de la definició 5.3., el parell d'estratègies pures en què s'anuncia la vertadera situació dels mercats respectius constitueix un equilibri de Nash.

En efecte, ens cal demostrar que si cada agent suposa que l'altre diu la veritat, la seva millor opció és igualment anunciar la seva vertadera informació privada.

Seguirem el raonament del primer jugador, si aquest suposa que el jugador 2 dirà la veritat sobre la seva característica privada en l'etapa 2 del joc. Els arguments pel jugador 2 són del tot paral.lels.

Si 1 tria l'estratègia (mixta) $s:[0,1]xT_1 \longrightarrow T_1$, la seva utilitat, en mitjana, serà:

$$ue(s;\alpha,\beta,x,z) := E_\delta \left[u_d(s(\delta,x),z,\alpha,\beta;x)\right]$$

quan x és la seva característica privada, i sempre que el parell (α,β) sigui l'escollit a l'etapa 1.

Ja que els valors de α i β no estan sota el seu control, la millor estratègia per l'agent serà aquella que maximitzi la utilitat esperada total del joc, és a dir:

$$s^* := \text{argmax}_s\ E_{\alpha,\beta} \left[ue(s;\alpha,\beta,x,z)\right]$$

Per a determinar el valor de s^* podem utilitzar el següent càlcul:

$$E_{\alpha,\beta} \left[ue(s;\alpha,\beta,x,z)\right] =$$

$$= E_{\alpha,\beta} \left[E_\delta \left[u_d(s(\delta,x),z,\alpha,\beta;x)\right]\right] =$$

$$= E_\delta \left[E_{\alpha,\beta} \left[u_d(s(\delta,x),z,\alpha,\beta;x)\right]\right] =$$

$$= E_\delta \left[E_{\alpha,\beta} \left[P(\bar{\sigma}_1(\alpha,s(\delta,x)),\bar{\sigma}_2(\beta,z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C(q(\bar{\sigma}_1(\alpha,s(\delta,x)),\bar{\sigma}_2(\beta,z)),x)\right]\right] =$$

$$= E_\delta \left[E_{\alpha,\beta} \left[P((\bar\sigma_1 o \bar s_\delta)(\alpha,x),\bar\sigma_2(\beta,z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C(q((\bar\sigma_1 o \bar s_\delta)(\alpha,x),\bar\sigma_2(\beta,z)),x) \right]\right] =$$

$$= E_\delta \left[u(\bar\sigma_1 o \bar s_\delta,\bar\sigma_2;x,z) \right] \le$$

$$\le E_\delta \left[u(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2;x,z) \right] = u(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2;x,z)$$

definint, per a escriure la quarta igualtat, la funció $\bar s_\delta(\alpha,x)=(\alpha,s(\delta,x))$. La desigualtat és deguda a que les estratègies $\bar\sigma_i$ estan en equilibri de Nash en el joc original.

Per altra banda, si el jugador 1 utilitza l'estratègia pura $h:[0,1]xT_1 \longrightarrow T_1$ amb $h(\delta,x)=x$ (dir la veritat) obté, en mitjana:

$$E_{\alpha,\beta} \left[ue(h;\alpha,\beta,x,z) \right] = E_{\alpha,\beta} \left[E_\delta \left[u_d(h(\delta,x),z,\alpha,\beta;x) \right]\right] =$$

$$= E_{\alpha,\beta} \left[u_d(x,z,\alpha,\beta;x) \right] =$$

$$= u(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2;x,z)$$

Tenint en compte el dos càlculs anteriors podem concloure que, per qualsevol estratègia, s, la utilitat esperada per l'agent 1 és inferior a la què pot obtenir dient la veritat. Per tant, $s^*=h$.∎

El joc de la definició 5.3. és una extensió del joc associat a un mecanisme directe, en el sentit de què s'afegeix a aquest últim un moviment "de la natura", que només serveix per a determinar els pagaments dels jugadors al final del joc.

Això ens permet considerar aquests jocs directes com a associats a uns certs <u>mecanismes directes que anomenarem també "estesos"</u>, definits de la manera següent:

$(q_d, P_d): [0,1] x [0,1] x T_1 x T_2 \longrightarrow R^2$ amb:

$$q_d(\alpha,\beta,x,z) := q(\bar{\sigma}_1(\alpha,x), \bar{\sigma}_2(\beta,z))$$

i

$$P_d(\alpha,\beta,x,z) := P(\bar{\sigma}_1(\alpha,x), \bar{\sigma}_2(\beta,z))$$

Un mecanisme estès opera de manera similar qualsevol dels directes fins ara estudiats, però necessita que, prèviament, es triïn a l'atzar (seguint una distribució uniforme) dos valors $\alpha,\beta \in [0,1]$. Llavors si els jugadors declaren com a estats dels mercats respectius el parell $(x',z') \in T_1 x T_2$, i la vertadera informació privada d'ambdós és (x,z), obtenen:

$$u(x',z';\alpha,\beta,x) := P_d(\alpha,\beta,x',z') - C(q_d(\alpha,\beta,x',z'),x)$$

$$v(x',z';\alpha,\beta,z) := I(q_d(\alpha,\beta,x',z'),z) - P_d(\alpha,\beta,x',z')$$

Les variables α i β són aleatòries, i de fet podem considerar el mecanisme estès definit només a T_1xT_2, ja que els agents valoraran les seves utilitats en mitjana:

$$UE(x',z';x) := E_{\alpha,\beta}\left[u(x',z';\alpha,\beta,x)\right]$$

$$VE(x',z';z) := E_{\alpha,\beta}\left[v(x',z';\alpha,\beta,z)\right]$$

Hem demostrat que en el joc directe dir la veritat forma un equilibri; de manera que podem assegurar que els mecanismes directes estesos compleixen:

$$\begin{aligned} &UE(x',z;x) \le UE(x,z;x) \qquad \forall x,x' \in T_1 \quad \forall z \in T_2 \\ &VE(x,z';z) \le VE(x,z;x) \qquad \forall z,z' \in T_2 \quad \forall x \in T_1 \end{aligned} \qquad (5.F)$$

extensió directe de la compatibilitat respecte a incentius en sentit fort de (5.B).

Podem doncs concloure que el conjunt de mecanismes directes estesos compatibles respecte a incentius en el sentit de les desigualtats de (5.F) representen totes les possibles negociacions conduïdes per mecanismes d'un sol període, en les que considerem equilibris de Nash formats per estratègies qualssevol.

5.4.3. Eficiència ex post

La qüestió de si es pot signar un contracte eficient ex post es redueix a la de trobar un mecanisme directe estès complint (5.F) que sigui eficient ex post. La definició d'aquest concepte és paral.lela a la donada per mecanismes directes. Tenint en compte la component aleatòria introduïda per la utilització d'estratègies mixtes, cal que facin màxim l'excedent esperat quan s'anuncien els vertaders valors que representen ambdues bandes del mercat:

$$E_{\alpha,\beta}\left[I(q_d(\alpha,\beta,x,z),z) - C(q_d(\alpha,\beta,x,z),x)\right] \qquad (5.G)$$

Però el resultat és el mateix de l'apartat anterior:

Proposició 5.5.- Cap mecanisme directe estès eficient ex post és compatible respecte a incentius en el sentit de (5.F).

Per a demostrar-ho seguirem els passos següents:

(a) L'excedent esperat (donat a (5.G)) màxim coincideix amb $S(\bar{q}(x,z),x,z)$, definint $S(q,x,z)$ i $\bar{q}(x,z)$ com en l'apartat anterior. En efecte:

(1) Sigui quina sigui la funció q_d, es compleix

$$E_{\alpha,\beta}\left[I(q_d(\alpha,\beta,x,z),z)-C(q_d(\alpha,\beta,x,z),x)\right] =$$

$$= E_{\alpha,\beta}\left[S(q_d(\alpha,\beta,x,z),x,z)\right] \leq$$

$$\leq S(\bar{q}(x,z),x,z)$$

precisament perquè $S(.,x,z)$ arriba al seu màxim en $\bar{q}(x,z)$ per qualsevol parell (x,z) fixat.

(2) Hi ha almenys un mecanisme en el que l'excedent coincideix amb $S(\bar{q}(x,z),x,z)$: el definit per $q_d(\alpha,\beta,x,z)= \bar{q}(x,z)$ independentment dels valors de α i β.

(b) Per qualsevol mecanisme directe estès $\{q_d,P_d\}$ en el que es compleixi:

$$E_{\alpha,\beta}\left[I(q_d(\alpha,\beta,x,z),z)-C(q_d(\alpha,\beta,x,z),x)\right] = \qquad (5.H)$$
$$= S(\bar{q}(x,z),x,z) \qquad \forall (x,z)\in T_1 x T_2$$

hem de tenir $q_d(\alpha,\beta,x,z)=\bar{q}(x,z)$ per cada (x,z) excepte, potser, en un conjunt de mesura nul.la d'elements (α,β).

Si no fos així podríem trobar un parell (x,z) determinat en el que:

$$q_d(\alpha,\beta,x,z)\neq\bar{q}(x,z) \qquad \forall(\alpha,\beta)\in K \quad \text{amb } \mu(K)\neq 0$$

i en aquest cas, en contra de (5.H), resulta:

$$E_{\alpha,\beta}\left[I(q_d(\alpha,\beta,x,z),z) - C(q_d(\alpha,\beta,x,z),x)\right] =$$

$$= (1-\mu(K))S(\bar{q}(x,z),x,z) +$$

$$+ E_{(\alpha,\beta)\in K}\left[I(q_d(\alpha,\beta,x,z),z)-C(q_d(\alpha,\beta,x,z),x)\right]$$

$$= (1-\mu(K))S(\bar{q}(x,z),x,z) +$$

$$+ E_{(\alpha,\beta)\in K}\left[S(q_d(\alpha,\beta,x,z),x,z)\right] <$$

$$< (1-\mu(K))S(\bar{q}(x,z),x,z) + \mu(K)S(\bar{q}(x,z),x,z) =$$

$$= S(\bar{q}(x,z),x,z)$$

degut igualment a que $\bar{q}(x,z)$ és el màxim de $S(.,x,z)$.

(c) Cap mecanisme directe estès que compleixi (5.H) pot ser compatible respecte a incentius en el sentit de (5.F).

Això és conseqüència de què, com sabem, $\bar{q}(x,z)$ no pot formar part de cap mecanisme de negociació directe que compleixi la condició (5.B).

En efecte, donat un mecanisme estès qualsevol de preus:

$$P_d:[0,1]x[0,1]xT_1xT_2 \longrightarrow R$$

considerem el mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ definit per:

$$P(x,z):= E_{\alpha,\beta}\left[P_d(\alpha,\beta,x,z)\right]$$

Per l'apartat 5.3. podem assegurar que existeix almenys un parell d'estats del mercat en que $\{\bar{q},P\}$ no és compatible respecte a incentius. Per tant, per exemple, podem assegurar que existeix $x' \in T_1$ tal que:

$$P(x',z)-C(\bar{q}(x',z),x) > P(x,z)-C(\bar{q}(x,z),x)$$

Però si $\{q_d,P_d\}$ ha de ser eficient ex post, sabem que $q_d(\alpha,\beta,x,z)$ ha de coincidir amb $\bar{q}(x,z)$ g.p.t. (α,β), de manera que podem escriure:

$$P(x',z)-C(q_d(\alpha,\beta,x',z),x) > P(x,z)-C(q_d(\alpha,\beta,x,z),x)$$

$$\text{g.p.t } (\alpha,\beta)$$

Si ara considerem l'esperança respecte a (α,β), tot i tenint en compte la definició de $P(x,z)$, resulta evident que s'incompleix la primera desigualtat de (5.F).∎

5.5. Eficiència ex post amb informació privada asimètrica

En els dos apartats anteriors hem demostrat que la manca d'informació completa en ambdós costats del mercat impossibilita la signatura de contractes eficients ex post, almenys en les condicions estudiades en aquest capítol (mecanismes simultànis d'un sol període en què s'utilitza el criteri de Nash estès en sentit fort per a resoldre el joc associat). Però ens falta veure fins a quin punt aquest resultat depèn de la presència d'informació privada en ambdues bandes del mercat.

Analitzarem aquí la situació que es presenta quan les empreses es troben en el cas extrem del què hem anomenat "situació asimètrica": només una d'elles disposa d'informació privada; mentre que l'altra banda del mercat és coneixement comú. Les conclusions són les mateixes sigui quina sigui l'empresa que disposa d'informació privada, i són força diferents de les que hem obtingut en el cas simètric.

Suposem, per exemple, que l'empresa venedora és l'única que disposa d'informació sobre certes característiques de la seva banda del mercat. Seguint l'argument que hem fet servir fins ara, un mecanisme de negociació directe serà, en aquest cas, un parell $\{q,P\}$ que defineixi els termes d'un contracte a signar entre les dues empreses en funció del valor que anunciï l'empresa venedora com a estat de la seva banda del mercat.

Adaptarem la notació que hem estat utilitzant fins ara, de manera que, donat un mecanisme directe $\{q,P\}$, si l'empresa venedora anuncia el valor $x' \in T_1$ quan el vertader estat del mercat ve donat per un cert valor x, les utilitats que obtindran les dues empreses en el contracte que prescriu el mecanisme seran, respectivament:

$$u(x';x) := P(x') - C(q(x'),x)$$

$$v(x') := I(q(x')) - P(x')$$

Però aquestes utilitats no reflexaran les obtingudes per les empreses en la signatura d'un contracte realment negociat a menys que el mecanisme directe sigui <u>compatible respecte a incentius en sentit fort</u>, és a dir, si anunciar la veritat és una estratègia dominant per l'empresa 1:

$$u(x';x) \leq u(x;x) \qquad \forall x,x' \in T_1 \qquad (5.I)$$

És fàcil comprovar, refent l'argument del Teorema 5.1, que en aquest cas una condició necessària per què un mecanisme directe d'aquestes característiques sigui compatible respecte a incentius és que compleixi:

$$U'(x) = - C_x(q(x),x) \qquad \forall x\in[0,1] \qquad (5.J)$$

on U(x) és la utilitat que obté la primera empresa si diu la veritat, és a dir, $U(x):=u(x;x)$.

Però el nostre objectiu és veure si es poden signar contractes eficients ex post. Com en el cas general, direm que un mecanisme és <u>eficient ex post</u> si prescriu la transferència de la quantitat que maximitza l'excedent total del mercat. Denotarem aquesta quantitat per $\bar{q}(x)$, observant que està definida de manera única - amb les hipòtesis adients com en el cas general - per:

$$I'(\bar{q}(x)) - C_q(\bar{q}(x),x) = 0 \qquad (5.K)$$

Combinant (5.K) i (5.J) podem assegurar que una condició necessària per què un mecanisme directe $\{q,P\}$ eficient ex post (on, per tant, $q=\bar{q}$) sigui compatible respecte a incentius en sentit fort serà que:

$$U'(x) = \bar{S}'(x) \qquad \forall x\in[0,1] \qquad (5.L)$$

definint, igual que en apartats anteriors, $\bar{S}(x)$ com l'excedent total màxim de la relació entre les empreses si l'estat del mercat és x: $\bar{S}(x):=I(\bar{q}(x))-C(\bar{q}(x),x)$.

Integrant, la condició (5.L) és equivalent a exigir que els mecanismes proporcionin a l'empresa venedora, si diu la veritat, una utilitat de:

$$U(x) = \bar{S}(x) - k \tag{5.M}$$

on k és una constant qualsevol.

Substituint a (5.M) les expressions de $U(x)$ i $\bar{S}(x)$ [tenint en compte que estem considerant un mecanisme on $q=\bar{q}$, al ser eficient ex post, $U(x)=u(x,x)=P(x)-C(\bar{q}(x),x)$] obtindrem la definició de l'esquema de preus que ha de regir el contracte:

$$P(x) = I(\bar{q}(x)) - k$$

En total, doncs, per què un mecanisme $\{q,P\}$ eficient ex post sigui compatible respecte a incentius en sentit fort és condició necessària que les funcions q i P estiguin definides de la següent manera:

$$\begin{aligned} &q: T_1 \longrightarrow R \qquad \text{amb } q(x) := \bar{q}(x) \quad \forall x \in T_1 \\ &P: T_1 \longrightarrow R \qquad \text{amb } P(x) := I(\bar{q}(x)) - k \quad \forall x \in T_1 \end{aligned} \tag{5.N}$$

on k és una constant qualsevol.

Però aquesta condició és també suficient per a assegurar la compatibilitat respecte a incentius en sentit fort: qualsevol mecanisme de la forma (5.N) compleix la condició (5.I):

$$
\begin{aligned}
u(x';x) &= P(x') - C(\bar{q}(x'),x) = \\
&= I(\bar{q}(x')) - k - C(\bar{q}(x'),x) = \\
&= S(\bar{q}(x'),x) - k \leq \\
&\leq S(\bar{q}(x),x) - k = U(x)
\end{aligned}
$$

on la desigualtat és deguda a què la funció $S(.,x)$ arriba al seu òptim en el valor $\bar{q}(x)$.

Els raonaments exposats fins ara ens permeten enunciar el següent:

<u>Teorema 5.6.</u> Un mecanisme directe $\{q,P\}$ definit en un marc on només l'empresa venedora tingui informació privada és eficient ex post i compatible respecte a incentius si, i solament si, té la forma donada a (5.N).

Els contractes negociats a través de mecanismes directes del tipus que dóna el Teorema anterior es poden obtenir també utilitzant un joc de la forma següent:

Etapa 1: Es demana a ambdues empreses que especifiquin, simultàniament, en quines condicions estarien disposades a signar un contracte, mitjançant una funció que relacioni quantitats i preus:

$P_1(q,x)=\Phi_1(q,x)$ per l'empresa venedora

$P_2(q)=\Phi_2(q)$ per l'empresa compradora

Etapa 2: Es determina si els interessos de les dues empreses coincideixen: s'anuncia la signatura d'un contracte si es pot trobar una quantitat q que constitueixi un equilibri de Nash per les dues empreses, i si per ambdues aquesta quantitat es valora de la mateixa manera.

Així doncs, el resultat de l'etapa 2 del joc serà "positiu" si es compleixen les dues condicions següents:

(1) Per cada valor de $x \in T_1$, les quantitats que optimitzen les funcions d'utilitat de les empreses coincideixen, suposant que cada una d'elles considera fixat el preu (per la funció que li ofereix la seva adversària):

$$q_1(x)=q_2(x) \quad \forall x \in T_1 \qquad \text{essent:}$$

$$q_1(x):=\text{argmax}_q\ U(q,x)=\text{argmax}_q\{P_2(q)-C(q,x)\}$$

$$q_2(x):=\text{argmax}_q\ V(q,x)=\text{argmax}_q\{I(q)-P_1(q,x)\}$$

(2) Els preus que ambdues empreses demanen per aquesta quantitat són els mateixos:

$$P_1(q_2(x),x) = P_2(q_1(x)) \quad \forall x \in T_1$$

Dit d'una altra manera, l'etapa 2 determina si és possible arribar a un acord, i en cas de que ho sigui quins són els termes generals del contracte (en funció del valor x). Si el resultat és positiu, la quantitat que es transfereix efectivament és determinada per l'empresa venedora, anunciant un valor x de la seva banda del mercat.

Anem ara a demostrar que, per un mecanisme dels caracteritzats al teorema 5.6, la negociació acabarà sempre amb acord. El Teorema 5.2 ens assegura que les empreses poden triar les funcions Φ_i de manera que en l'etapa 2 del joc es decideixin els termes d'un contracte. En el nostre cas[11], podem considerar les funcions:

$$\Phi_1(q,x) := C(q,x) + [S(\bar{q}(x),x) - k]$$

$$\Phi_2(q) := I(q) - k$$

11. La forma de les funcions Φ_i es pot deduir del teorema 5.2 tenint en compte els mecanismes compatibles respecte a incentius de (5.N): Φ_2 queda determinada directament a partir de l'expressió de $P(x)$ [veure la demostració del teorema 5.2]. Per a Φ_1 és més fàcil utilitzar només l'enunciat del teorema. Segons aquest s'ha de complir: (a) $\bar{q}(x)=\operatorname{argmax}_q\{I(q)-\Phi_1(q,x)\}$ (b) $\Phi_1(\bar{q}(x),x)=I(\bar{q}(x))-k$ però de (a), i fent servir la definició de $\bar{q}(x)$, obtenim $\Phi_1(q,x)=I(q)-S(q,x)+\varphi(x)$, amb $\varphi(x)$ determinada per la condició (b).

per un mateix valor de k, paràmetre real qualsevol.

L'etapa 2 conclourà amb resultat positiu, ja que:

(1) $U(q,x) = P_2(q)-C(q,x) = I(q)-k-C(q,x) = S(q,x) - k$

d'on $q_1(x) = \text{argmax}_q\ U(q,x) = \text{argmax}_q\ S(q,x) = \bar{q}(x)$

$V(q,x) = I(q)-P_1(q,x) = I(q)-C(q,x)-[S(\bar{q}(x),x)-k] =$

$= S(q,x) - [S(\bar{q}(x),x)-k]$

d'on $q_2(x) = \text{argmax}_q\ V(q,x) = \text{argmax}_q\ S(q,x) = \bar{q}(x)$

(2) $P_1(q_2(x),x) = \Phi_1(\bar{q}(x),x) = C(\bar{q}(x),x)+[S(\bar{q}(x),x)-k] =$

$= I(\bar{q}(x)) - k$

$P_2(q_1(x)) = \Phi_2(\bar{q}(x)) = I(\bar{q}(x)) - k$

Per tant els termes de la contractació que queden perfilats a l'etapa 2 són de la mateixa forma que a (5.N), En conseqüència, podem assegurar que el contracte serà compatible respecte a incentius: l'empresa venedora proporcionarà el vertader valor de la seva banda del mercat, donant lloc a un contracte eficient ex post.

És necessari observar que el joc que acabem de definir no es pot utilitzar directament per a formalitzar <u>un</u>

sol contracte. Serveix més aviat per a sentar les bases d'una relació continuada entre les dues empreses. Si no fos així, hauríem d'incloure una tercera etapa en el joc, en la què s'anunciés el valor de x, i aquest anunci hauria de formar part de l'estratègia de la segona empresa, cosa que l'anàlisi que hem fet del joc no contempla.

Aquesta interpretació ens permet connectar els contractes que s'obtenen en aquest cas amb un tipus de contractes, força habitual en alguns sectors, anomenats "cost plus". El seu nom es deu a que defineixen un esquema de preus de la forma $P=C(q)+k$: l'empresa compradora es fa càrrec del cost del producte i hi afegeix un benefici constant acordat a priori[12]. En aquest cas, però, la prima, enlloc de ser constant, és una funció de l'estat de la natura. La diferència es deu a què, tot i conservant en certa manera l'estructura de preus del contracte "cost plus" pel venedor, hi ha un element suplementari que assegura que aquest no pugui anunciar un valor de x que no s'ajusti a la veritat.

12. Aquest és un tipus de contracte que es sol utilitzar en el cas d'adquisició de béns específics (per exemple, armament) per part d'un govern [veure, entre d'altres, Arrow (1970), p. 136]. No obstant, és fàcil comprovar que si el proveïdor disposa d'informació privada pertinent, aquests contractes no són compatibles respecte a incentius: el fabricant, éssent l'únic coneixedor del valor de x, pot anunciar uns costos més alts, augmentant així el seu benefici global, sense que l'altre part pugui fer res per a prevenir aquest comportament.
Veure també Weitzman (1980) o Riordan (1984b).

Criteris de tria d'un mecanisme

D'entre la família de mecanismes que ens proporciona el Teorema 5.6, un planificador extern pot triar, en principi, el que consideri més adient. No obstant, si vol que les empreses estiguin d'acord en utilitzar-lo per a signar un contracte, s'haurà d'assegurar que el mecanisme sigui, a més a més, individualment racional, és a dir, tal que proporcioni a les empreses utilitats que siguin sempre no negatives. Substituint els valors de (5.N) en les expressions de les utilitats de les dues empreses, la condició és:

$$U(x) = P(x) - C(\bar{q}(x),x) = \bar{S}(x) - k \geq 0$$

$$V(x) = I(\bar{q}(x)) - P(x) = k \geq 0$$

Per a la primera de les dues desigualtats serà suficient triar $k \leq \min_x \bar{S}(x)$. Però la funció $\bar{S}$ és diferenciable, i compleix:

$$\frac{d}{dx}\bar{S}(x) = \frac{d}{dx}\left[I(\bar{q}(x)) - C(\bar{q}(x),x)\right] =$$

$$= I_q(\bar{q}(x))\bar{q}_x(x) - C_q(\bar{q}(x),x)\bar{q}_x(x) - C_x(\bar{q}(x),x)$$

$$= - C_x(\bar{q}(x),x) \qquad \text{per la condició (5.K)}$$

de manera que $\bar{S}(x)$ és una funció decreixent en tot el seu domini de definició, i per tant $\min_x \bar{S}(x)=\bar{S}(1)$. Això ens permet establir el següent resultat:

<u>Teorema 5.7.</u> Tots els mecanismes directes de la forma (5.N) en que el paràmetre k sigui de l'interval $[0,\bar{S}(1)]$ indueixen un contracte eficient ex post i individualment racional.

Un dels possibles criteris per a triar un valor de k d'entre els de l'interval que proporciona el Teorema anterior seria el següent: Requerir que el contracte fes una distribució igual de l'excedent total de la relació entre les dues empreses. Amb aquesta condició el mecanisme induiria un contracte exactament igual que el que es pot signar quan no hi ha informació privada. Però clarament aquest criteri no es pot aplicar aquí, ja que:

$$U(x)=V(x)\ \forall x \implies \bar{S}(x)-k=k\ \forall x \implies k=\bar{S}(x)/2$$

i aquest, òbviament, no és constant, i per tant destruiria la compatibilitat respecte a incentius del mecanisme que hipotèticament hauria d'establir el contracte.

Una altra possibilitat seria exigir al mecanisme només que distribueixi en parts iguals entre les dues empreses <u>l'excedent esperat total</u> fruit de la seva relació.

Per a definir aquest concepte hem de suposar que les empreses estan en condicions d'avaluar la probabilitat de què la banda del mercat en què hi ha incertesa tingui unes certes característiques. És a dir, s'ha de poder definir una funció F(x) que representi la distribució de probabilitats acumulada per a la variable aleatòria x. Si suposem, a més a més, que aquesta funció és coneixement comú, podem calcular les utilitats esperades dels dos agents, que vindran donades per:

$$\bar{U} := E_x \left[U(x) \right] = \int_{T_1} U(x)dF(x) = \int_{T_1} \bar{S}(x)dF(x) - k$$

$$\bar{V} := E_x \left[V(x) \right] = \int_{T_1} V(x)dF(x) = k$$

Això doncs, la condició $\bar{U}=\bar{V}$ ens determina, de manera única, un valor de k, i per tant un únic mecanisme directe: el donat per:

$$k^* = \frac{1}{2} \int_{T_1} \bar{S}(x)dF(x)$$

Si es tria aquest valor, la utilitat de les dues empreses és la mateixa que podrien obtenir en mitjana, en un període llarg, dues empreses que tinguessin informació completa, sempre i quan suposem que les característiques del mercat de l'empresa venedora canvien durant el dit període, comportant-se d'acord amb la distribució F(x). Observem, però, que amb aquest mecanisme, els agents obtindran:

$$U(x) = \bar{S}(x) - \frac{1}{2}\int_{T_1} \bar{S}(x)\, dF(x)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\int_{T_1} \bar{S}(x)\, dF(x)$$

que garanteix una utilitat no negativa només per la segona empresa.

Capítol 6

JOCS BAYESIANS

6.1. Introducció

En el capítol precedent hem considerat mecanismes de negociació que permetin signar contractes entre empreses, quan aquestes no disposen de tota la informació pertinent sobre les preferències mutues. Per a preveure el resultat de la negociació hem analitzat el joc induït pel mecanisme, joc que, essencialment, es pot descriure amb una estructura del tipus següent:

$$\Gamma=(A_1,A_2,S,u,v)$$

on A_1 i A_2 són els conjunts d'accions de què disposen els jugadors; S el conjunt de paràmetres desconeguts per un o ambdós jugadors a l'hora de començar la negociació; i u, v les seves funcions d'utilitat, que tenen com a domini de definició el conjunt A_1xA_2xS.

Aquesta descripció, tot i tenint l'avantatge de la seva senzillesa i facilitat de maneig, s'ha manifestat ineficient en el cas, més general, en què la negociació es dugui a terme en presència d'informació privada en ambdues bandes contractants. La causa principal d'aquesta ineficiència és, essencialment, la definició tan forta d'equilibri de Nash que resulta de la utilització exclusiva dels elements del joc Γ. En conseqüència, es restringeixen de tal manera les accions òptimes dels agents en el joc, que aquests no poden aconseguir un contracte eficient.

Un enfocament alternatiu, introduït per Harsanyi (1967-68) amb el nom de joc bayesià, presenta un model més apropiat per a tractar els jocs amb informació incompleta.

Dedicarem aquest capítol a la introducció formal de la noció de joc bayesià, així com del concepte de solució que se li pot associar de manera natural[1]. Hem optat per una presentació força general, que ens sembla necessària per a posar de manifest les hipòtesis que sostenen aquest punt de vista. A més, ens permetrà calibrar la importància relativa de les simplificacions que usualment s'adopten quan s'utilitza l'anàlisi bayesiana d'una situació de joc.

---

1. Tot i que el nombre de treballs en què s'adopta aquest enfocament és molt nombrós, la literatura que fa referència al seu marc teòric és força escassa. Pensem que això és motiu suficient per a incloure aquest capítol en el nostre.

6.2. Bases de l'anàlisi

El punt de partida de l'enfocament bayesià d'un joc és la teoria subjectivista de la presa de decisions bayesiana, desenvolupada principalment per Savage (1954) i Raiffa (1968). Essencialment, aquesta teoria postula que si un individu desconeix el valor d'un cert paràmetre a l'hora de prendre una decisió, però sap que aquest té influència en la seva utilitat final, ha de poder formar una distribució de probabilitats sobre els valors que pugui prendre aquest paràmetre. Aquestes conjectures són anomenades generalment mesures de probabilitat subjectives.

Des d'aquesta perspectiva, la descripció d'un joc de dos jugadors i informació incompleta amb les estructures (A_1,A_2,S,u,v) - conjunts d'accions, conjunt de paràmetres desconeguts i funcions d'utilitat - no és suficient. La hipòtesi de què els agents decisors es comporten racionalment en el desenvolupament d'un joc ha d'implicar la possibilitat de què aquests especulin, a partir del seu propi coneixement, sobre el vertader "estat de la natura" quan el joc s'està duent a terme. I en aquest cas, òbviament, aquestes especulacions han de tenir una certa influència en la tria de les accions que els agents emprenguin en el desenvolupament del joc.

Considerem doncs una situació de joc en què els agents tinguin algun tipus d'informació incompleta que els afecti a l'hora de prendre les seves decisions de tria d'estratègia òptima en el joc. Per a introduir el punt de vista bayesià haurem de començar assenyalant els paràmetres de la situació que no són coneixement comú. Anomenen S al conjunt de tots els possibles valors que poden prendre els paràmetres del joc, i que almenys un dels jugadors desconeixi. Amb aquest conveni, un element de S es pot entendre com un "estat de la natura", en el sentit de què caracteritza completament la situació en què realment es desenvolupa el joc. Sovint ens referirem a S com a l'espai d'incertesa bàsica de la situació de joc, perquè cada un dels seus elements és una descripció de les condicions reals en què aquesta podria tenir lloc.

La incorporació dels sistemes de valoració dels decisors, respecte als diferents estats de la natura - probabilitats subjectives -, com a elements d'anàlisi d'un joc d'informació incompleta, no és, però, senzilla. Per a donar una visió, a grans trets, de quin és el problema, comencem considerant una situació de joc en què intervinguin només dos jugadors. Examinem el raonament d'un qualsevol dels agents en el moment de decidir quina és la millor acció que pot emprendre.

Seguint la teoria subjectivista de la presa de decisions bayesiana, ja que l'agent no coneix l'estat de la natura en què té lloc el joc, ens cal postular que aquest pot fer una valoració, en termes de probabilitats, sobre el conjunt dels possibles esdeveniments. Per a un espai d'incertesa bàsica S qualsevol, aquesta valoració s'ha de definir sobre els subconjunts de Borel de S. Així doncs, l'agent 1 pot determinar una distribució de probabilitats, que anomenarem q_1^1 tal que $q_1^1(\Omega)$ sigui la probabilitat que assigna el primer agent a l'esdeveniment "els paràmetres que no conec del joc són del subconjunt Ω de S".

De manera similar, des del punt de vista de l'altre jugador, hem d'admetre l'existència d'una distribució q_2^1 sobre S que resumeixi les creences personals del jugador 2 sobre els paràmetres del joc que desconeix[2]. Podem anomenar a q_1^1 i q_2^1 "creences de primer ordre" dels agents 1 i 2, respectivament.

És necessari tenir en compte, però, que cap jugador racional pot triar una acció en un joc basant-se només en la informació privada de què disposa i en les seves creen-

2. Adoptarem el conveni, a partir d'ara, de descriure una distribució de probabilitats sobre els subconjunts de Borel d'un conjunt S anomenant-la simplement "distribució sobre S". Tot i que suggereix que la probabilitat es pot definir sobre els elements de S, cosa que no és possible si S no és finit, és prou gràfica i senzilla, i permet igualment la comprensió dels raonaments que s'ofereixen, sense l'inconvenient d'una llarga menció al terme precís.

ces sobre la informació que desconeix - resumides ambdues en q_i^1 -, perquè el resultat del joc dependrà també de l'acció que triï el seu oponent.

Així doncs, si un dels jugadors vol intentar preveure l'actuació del seu oponent en el joc (per tal d'anticipar-s'hi), haurà de tenir en compte la racionalitat de l'altre agent en prendre les seves decisions. Lògicament, considerarà que l'elecció d'estratègia per part d'aquest altre agent es basarà, tant en la seva funció d'utilitat, com en les seves creences, donades per q_j^1, sobre el joc que realment s'està jugant. Però ja que el primer jugador no coneix la distribució q_j^1, i si tenim en compte, altra vegada, la teoria de la decisió subjectiva, hem de suposar que ha de poder valorar una distribució de probabilitats (subjectiva) sobre les creences de primer ordre de l'altre jugador, de la mateixa manera que ho ha fet pels valors dels paràmetres de S que desconeix.

En aquest punt val la pena introduir una nova notació que simplifiqui l'exposició posterior. Donat un espai vectorial topològic qualsevol X, denotarem per $\pi(X)$ el conjunt de totes les mesures de probabilitat que es poden definir sobre els subconjunts mesurables, en el sentit de Borel, de l'espai X. Observem que es pot demostrar que si, a més a més, l'espai X és compacte, llavors l'espai vectorial $\pi(X)$, dotat amb la topologia dèbil*, és també un espai compacte[3].

Amb aquesta notació, les creences de primer ordre d'ambdós jugadors, q_1^1 i q_2^1, són elements de $\pi(S)$. Per tant, seguint el raonament dels paràgrafs anteriors, hem de suposar que cada jugador disposa d'una distribució de probabilitats subjectiva, q_i^2, sobre $\pi(S)$ - entenent-lo com el conjunt de les possibles mesures de probabilitat sobre S que pot sostenir el jugador $j \neq i$ com a creences de primer ordre -. Anomenem a q_i^2 <u>creences de segon ordre</u> del jugador i. Serà un element de $\pi(S x \pi(S))$, perquè aquestes creences dependran en general de la informació privada del jugador i, reflexada en un estat de la natura, és a dir en els elements de S.

Evidentment la hipòtesi de l'existència de q_i^2 duu ràpidament a un raonament de tipus infinit que és fàcil d'entendre i completar. L'anàlisi de la situació de joc, per part de cada jugador, haurà de tenir en compte també que les creences de segon ordre poden influir en la tria que faci el seu oponent d'una acció pel joc. La racionalitat obliga, per tant, a cada jugador, que desconeix les dites creences de l'adversari, a fer una valoració de

3. Veure, per exemple, Billingsley (1968).

probabilitats (subjectiva) sobre quines són. S'obtenen doncs unes creences de tercer ordre pels jugadors; que, igualment, porten a l'establiment d'unes de quart ordre, i així successivament.

Ens trobem amb el que Harsanyi anomena "model d'expectatives seqüencials", que obliga a una regressió infinita d'esperances recíproques per part dels jugadors, de manera que el model resulta impossible de manejar, encara que sigui en les situacions de manca d'informació més senzilles.