Universitat Autònoma de Barcelona

Competencias profesionales de futuros profesores de educación infantil al analizar tareas escolares de simetría

Marjorie Sámuel Sánchez

Universitat Autònoma de Barcelona

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento Didáctica Matemática y Ciencias Experimentales

Programa de Doctorado en Educación

Competencias profesionales de futuros profesores de educación infantil al analizar tareas escolares de simetría.

Tesis Doctoral

MarjorieSámuel Sánchez

Directores:

Dra. Yuly Marsela Vanegas Muñoz
Dr. Josep María FortunyAymemí

Septiembre, 2016

Universitat Autònoma de Barcelona

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento Didáctica Matemática y Ciencias Experimentales

Programa de Doctorado en Educación

Competencias profesionales de futuros profesores de educación infantil al analizar tareas escolares de simetría

Nombre Doctoranda: Sra. Marjorie Sámuel Sánchez

Nombre Director: Dra. Yuly Marsela Vanegas Muñoz

Nombre Director: Dr. Josep María Fortuny Aymemí

Bellaterra, septiembre de 2016

Dra. Yuly Marsela Vanegas Muñoz, Investigadora Post-doctoral del Departament Didàctica Matemàtica i les Ciències Experimentals, amb seu a la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.

FAIG CONSTAR QUE:

La Investigació realitzada sota la direcció del signant per a la Llicenciada Marjorie Sámuel Sánchez, amb el títol:"Competencias profesionales de futuros profesores de infantil al analizar tareas escolares de simetría", reuneix tots els requeriments científics, metodològics i formals exigits per la legislació vigent per la seva Lectura i Defensa pública davant la corresponent Comissió, per la obtenció del Grau de Doctor en Educació per la Universitat Autònoma de Barcelona, per tant considerem procedent autoritzar la seva presentació.

Bellaterra, 26 setembre 2016

Signat:................................

Dr. Josep María Fortuny Aymemí, catedràtic, del Departament Didàctica Matemàtica i les Ciències Experimentals, amb seu a la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.

FAIG CONSTAR QUE:

La Investigació realitzada sota la direcció del signant per a la Llicenciada Marjorie Sámuel Sánchez, amb el títol:"Competencias profesionales de futuros profesores de infantil al analizar tareas escolares de simetría", reuneix tots els requeriments científics, metodològics i formals exigits per la legislació vigent per la seva Lectura i Defensa pública davant la corresponent Comissió, per la obtenció del Grau de Doctor en Educació per la Universitat Autònoma de Barcelona, per tant considerem procedent autoritzar la seva presentació.

Bellaterra, 26 setembre 2016

Signat:.................................

Dedicada a

Simón y Pablo

Educar es lo mismo
que poner un motor a una barca...
Hay que medir, pensar, equilibrar...
y poner todo en marcha.

Pero para eso,
uno tiene que llevar en el alma
un poco de marino...
un poco de pirata...
un poco de poeta...
y un kilo y medio de paciencia concentrada.

Pero es consolador soñar,
mientras uno trabaja,
que ese barco, ese niño,
irá muy lejos por el agua.

Soñar que ese navío
llevará nuestra carga de palabras
hacia puertos distantes, hacia islas lejanas.

Soñar que, cuando un día
esté durmiendo nuestra propia barca,
en barcos nuevos seguirá
nuestra bandera enarbolada.

Fermín Gainza.

Agradecimientos.

En este viaje, han sostenido mi mano las dos personas más importantes en mi vida, Simón y Pablo, a quienes agradezco su amor, comprensión, generosidad, infinita paciencia y aliento en los momentos en que han flaqueado mis fuerzas.

Agradezco a Yuly Vanegas, por su actitud generosa, en la guía de este proceso, por sus palabras, consejos, que han fortalecido mi desarrollo profesional. Agradezco sus tiempos, en donde no solo orientaba mi trabajo de tesis, sino también escuchaba mis inquietudes y preocupaciones.

Agradezco a Joaquim y Josep María, por compartir su experiencia y su mirada profesional, ayudando en mi formación.

Agradezco los mensajes de mis estudiantes, de mis colegas, de mis grandes amigas.

Agradezco a los estudiantes que participaron en este trabajo, a los profesores que cedieron sus tiempos de aula para poder aplicar los distintos instrumentos. En especial a la maestra de infantil Verónica, por su admirable vocación y su deseo mejorar cada día los aprendizajes de sus niños.

Agradezco a Lissette y Magdalena, quienes se han convertido en mi familia, y han animado y alentado el trabajo realizado.

"Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado.
Un esfuerzo total es una victoria completa"
Mahatma Gandhi

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Las distintas investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor están enfocadas en poder determinar cómo este, considera el pensamiento matemático de los estudiantes en la interpretación de situaciones de enseñanza de las matemáticas (Prieto; Valls, 2010), y en este sentido se subraya el desarrollo de la competencia docente, (professional noticing) (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002), en tanto, esta competencia se puede promover en los programas de formación de profesores (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013).

En este aspecto, se observan distintas miradas para conceptualizar y caracterizar competencia profesional (Mason, 2002; Van Es y Sherin, 2002; Jacobs, et al 2010; Sherin, Jacobs & Philipp, 2011; Llinares & Valls, 2010), no obstante, subyace una idea común que subraya, que ser competente profesionalmente involucra, poder identificar lo que es importante y significativo en una situación de aula, poder interpretar las situaciones de enseñanza, a partir de esta comprensión, tomar decisiones sobre cómo gestionar el contenido matemático en el aula, (Jacobs, et al 2010). Esto permite al futuro docente saber que, como y cuando utilizar conocimientos específicos para resolver tareas de enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2013).

Particularmente en el contexto de la educación infantil, las investigaciones señalan la necesidad de desarrollar currículos en este nivel, que permita por una parte, iniciar a los niños en la construcción de significados de ciertas nociones matemáticas (Alsina, 2008, 2012), abordando contenidos, procesos y desarrollo de habilidades (Alsina, A., C. Aymerich y C. Barba, 2008), que cimente una base sólida para aprendizajes posteriores (Baroody, Lai, y Mix, 2006; Brenneman, Boyd, y Frede, 2009), y por otra, evidenciar una competencia matemática por parte del futuro profesor que le permita justificar las propuestas y el diseño de tareas, lo que se traduce en saber y saber usar ese conocimiento para gestionar situaciones específicas de enseñanza matemática (Sowder, Soeder y Nickerson, 2010), mejorando las prácticas de aula y potenciando una competencia matemática en los niños.

Se observa entonces que, la preocupación de formadores de profesores (Giménez, Llinares y Sánchez, 1996; Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010), está centrada en poder desarrollar una competencia profesional, que permita identificar y caracterizar el conocimiento matemático necesario para enseñar desde los primeros niveles.

En Zapatera (2015), se concluye que un elemento clave para mejorar la enseñanza de las matemáticas radica en la caracterización y el desarrollo de la competencia docente "mirada profesional" en los programas de formación de profesores. Bajo esta mirada, se enfatiza la idea, que la formación de profesores debiera de dotar de suficientes herramientas para desarrollar competencias específicas y necesarias para la práctica educativa, considerando distintas dimensiones del concepto de competencia matemática, entre ellas, la comprensión conceptual de nociones matemáticas, el desarrollo de procesos matemáticos y el pensamiento estratégico (Llinares, 2003, 2009).

Particularmente lo que se refiere al desarrollo del conocimiento matemático, en diversas investigaciones de educación, se recoge que un aspecto que resulta especialmente sensible es la enseñanza y aprendizaje de la geometría, (Castiblanco, 2004; Goncalves, 2006; Araya, 2009; HP Ginsbur, 2006; Clements, 2003; Sarama, 2009; Clements, 2011; Hock, 2015; Tsamir, 2015), concluyendo, que los profesores no tienen adecuados niveles de conocimiento, y es, donde se reportan las mayores dificultades, tanto en la comprensión de los aspectos geométricos, como en el diseño de tareas que favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Específicamente los profesores de educación infantil, por su formación se observa que el desarrollo del área matemática es muy limitada, por tanto, creemos que existe la necesidad de promover unas competencias para la enseñanza de la geometría, y en específico de la simetría, que se ve justificada en la revisión teórica.

En este contexto, esta investigación esta cruzada por dos ejes, por un lado se busca caracterizar una competencia profesional en futuros maestros de educación infantil, que les permita identificar y caracterizar el conocimiento necesario para enseñar, y por otro lado caracterizar la comprensión de la simetría, que permita modificar prácticas de enseñanza y aprendizaje, promoviendo el desarrollo de competencias matemáticas.

La memoria de la tesis doctoral se presenta en cinco capítulos: el primero se centra en presentar la problemática y la justificación de la investigación en este ámbito y nivel, luego los objetivos y preguntas que orientan la investigación.

En el segundo capítulo se aborda los referentes teóricos principales que sustentan el trabajo de investigación desarrollado. Por una parte, se aborda la idea de competencia profesional del profesor, algunos planteamientos del conocimiento matemático para enseñar, así como aspectos importantes de una trayectoria de aprendizaje para la enseñanza de la simetría. A partir de una revisión teórica, se observa que la indagación sobre el conocimiento vinculado al desarrollo de la competencia profesional, está configurando una agenda internacional de investigación apoyada en la noción de «conocimiento matemático para enseñar» (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). El desarrollo de la competencia profesional (Jacobs et al. 2010), permitirá identificar lo relevante para el aprendizaje de la simetría, interpretar la comprensión y uso de ese conocimiento simétrico en las situaciones de enseñanza y poder tomar decisiones respecto de cómo desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este proceso de acercamiento teórico buscamos poder dar respuesta a los cuestionamientos planteados.

En el tercer capítulo se describe el diseño de la investigación, considerando el enfoque, contexto y participantes. Se considera los instrumentos para la recogida de información, y se explica en detalle el diseño de cada uno. Seguido se muestra y explica las cuatro fases de análisis: (1) Descripción de posicionamientos iniciales en relación a ideas de geometría de FMI (grupo 1), (2) Identificación de elementos matemáticos y comprensión de ideas geométricas. Relación destrezas: Identificar- Interpretar, (3) Análisis y caracterización de las destrezas identificar e interpretar (grupo2), (4) Grados hipotéticos de adquisición de las destrezas, identificar e interpretar. Caracterización de la competencia profesional en la comprensión de la simetría de FMI, a partir del análisis de tareas escolares.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos. En primer lugar, se presentan los resultados en relación a la identificación de aspectos matemáticos reconocidos en cada una de las respuestas de las tareas profesionales 1 y 2 del grupo 1, donde a partir de este proceso se seleccionan los casos de estudio. Luego se muestra el análisis de las destrezas identificar e interpretar, que permite hacer un primer refinamiento en razón de la relación de estas destrezas, en tanto se definen niveles de evidencias, para cada una de ellas, que considera la identificación de elementos matemáticos y la comprensión de ideas de simetría. Posteriormente, se realiza un tercer análisis de las destrezas identificar e interpretar que considera las respuestas del grupo 2 a la tercera tarea profesional. Por último, se muestra el análisis que ha permitido definir grados hipotéticos de la competencia profesional para poder caracterizarla.

Finalmente, en el quinto capítulo se desarrolla las conclusiones y discusión en torno, a los resultados obtenidos, y los objetivos planteados, donde a partir de estos hallazgos se ha intentado caracterizar la competencia profesional del futuro profesor de infantil sobre la comprensión de la simetría. Y como un aspecto importante se consideran las proyecciones e implicancias de este trabajo para estudios posteriores.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Problemática de investigación

La formación del profesorado en todos los niveles es objeto de estudio permanente de las investigaciones de Educación Matemática, tanto desde las esferas de la propia investigación como desde la misma actividad docente en el campo escolar. Actualmente la investigación está centrada en el desarrollo de las competencias que requiere el profesor para su desarrollo profesional. (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002; Llinares, y Valls, 2009; Llinares, 2012; van Es y Sherin (2002), vinculando el desarrollo de la competencia profesional al desarrollo de la competencia matemática, que permite identificar el conocimiento matemático, interpretarlo para tomar decisiones de acción en la enseñanza de las matemáticas (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

En este contexto, se busca determinar, como el profesor considera el pensamiento matemático de los estudiantes en la interpretación de situaciones de enseñanza de las matemáticas (Prieto; Valls, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002), subrayando el desarrollo de la competencia docente, -mirar con sentido- (professional noticing), lo que permite identificar aspectos relevantes del pensamiento matemático, interpretarlos para tomar decisiones (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

En Llinares, (2013) se señala que la competencia docente "mirar con sentido", permite al profesor ver las situaciones de enseñanza de las matemáticas de una manera profesional, relevando la manera en que los profesores identifican los elementos matemáticos que son relevantes en un problema que deben resolver sus alumnos, y que le permite enriquecer los significados de las ideas matemáticas. Esto le permite al profesor estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes en un tópico matemático determinado, lo que resulta particularmente importante para el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas en educación infantil.

El desarrollo de la competencia «mirar profesionalmente», como muestran distintas investigaciones no es una tarea fácil, no obstante, es posible de desarrollar (Coles, 2012; Morris, 2009; Llinares, 2013; Llinares y Valls, 2010). En este sentido los programas de formación de profesores están interesados en desarrollar estas competencias en futuros profesores, marcando la importancia de cómo aprenden los alumnos los distintos contenidos, la comprensión y uso que hacen de esos contenidos para enseñar.

En relación al conocimiento matemático, en las investigaciones se recoge que un aspecto que resulta especialmente sensible es la enseñanza y aprendizaje de la geometría, (Castiblanco, 2004; Goncalves, 2006; Araya, 2009; HP Ginsbur, 2006; Clements, 2003; Sarama, 2009; Clements, 2011; Hock, 2015; Tsamir, 2015), donde se observa que los profesores no tienen adecuados niveles de conocimiento, y es, por tanto, donde se reportan las mayores dificultades, tanto en la comprensión de los aspectos geométricos, como en el diseño de tareas que favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Particularmente en los profesores de educación infantil, por su formación se observa que el desarrollo del área matemática es muy limitada, por tanto, creemos que existe la necesidad de promover unas competencias para la enseñanza de la geometría, y en específico de la simetría, que se ve justificada en la revisión teórica, y donde a partir del diseño e implementación de tareas se permita la identificación de aspectos significativos para la construcción y comprensión del conocimiento, promoviendo el desarrollo de una competencia profesional.

1.2. Planteamiento del problema.

La motivación para desarrollar esta investigación, surge por las experiencias vividas como formadora de profesores, en tanto apreciaba un patrón de conducta repetitivo, en las prácticas de aula de futuros profesores de infantil. En el sentido, de observar escasas experiencias matemáticas, y enfocadas principalmente desarrollo del pensamiento numérico. Experiencias de aprendizaje, descontextualizadas, que no potenciaban habilidades y construcción de conocimiento, a partir de una comprensión de ideas matemáticas que promuevan una trayectoria de aprendizaje, donde cada nuevo conocimiento encuentre anclaje en el anterior, con la mirada de un desarrollo amplio del conocimiento matemático.

En la revisión de distintas investigaciones de educación matemática, donde se evidencian estas problemáticas, se proponen también modelos que entregan luces e ideas, de cómo desarrollar un conocimiento profesional en los futuros profesores. En este sentido se observa entonces que la investigación en la educación matemática, está centrada en indagar sobre el conocimiento matemático vinculado al desarrollo de la competencia profesional, apoyándose en la noción de «conocimiento matemático para enseñar» (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), del conocimiento específico del contenido (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2012; Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013; Llinares, 2011, 2013), definiéndose distintos modelos o enfoques, para sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemáticas, identificando, interpretando, para tomar decisiones que permiten al profesor dar cuenta de una comprensión del conocimiento matemático necesario para enseñar (Jacobs, et al, 2010).

Ahora bien, particularmente en el nivel infantil, que es el nivel en que está centrado este trabajo, la investigación está marcada por dos grandes temas, en tanto unos investigadores muestran su preocupación por desarrollar currículos que permita a los niños iniciarse en la construcción de significados de ciertas nociones matemáticas (Alsina, 2008, 2012), en que, no tan solo se aborde contenidos, sino que se enfatice en el desarrollo de procesos matemáticos y cognitivos que son propios de esta edad, (Alsina, A., C. Aymerich y C. Barba, 2008), en tanto otros buscan determinar aspectos que permitan al futuro profesor de infantil desarrollar una competencia matemática que le permita mejorar su desarrollo profesional.

Para de Castro (2015), es particularmente significativo, el creciente desarrollo de investigación en educación infantil, valorando las propuestas de diversos investigadores, (Alsina, 2015; De Castro, 2011; De Castro y Quiles, 2014; Edo, 2012), que intentan marcar un espacio en la investigación de la didáctica de la matemática en el nivel infantil, con temáticas diversas como, el desarrollo de procesos matemáticos, la construcción de ideas geométricas como la simetría, diseño de tareas específicas para la construcción del pensamiento espacial, entre otros.

Particularmente el tema de este trabajo está enfocado a un aspecto del conocimiento geométrico como es la comprensión de la simetría, y en este sentido resulta interesante las palabras de Canals (1997), al relevar el conocimiento geométrico, argumentando que este conocimiento implica el desarrollo de capacidades muy diversas, como la imaginación, la creatividad y el gusto por la belleza de las formas, de tal manera que procesos como : *la exploración* consciente del espacio; la *comparación* de elementos del espacio, *estableciendo relaciones* entre ellos; la *expresión verbal* de las acciones realizadas y de las propiedades observadas; y la *interiorización* de ese primer conocimiento, permiten y favorecen la construcción de este conocimiento.

Los niños deben aprender y desarrollar habilidades de razonamiento geométrico desde los primeros años, potenciando el desarrollo de habilidades y procesos, sentando así, una base sólida para el aprendizaje posterior (Baroody, Lai, y Mix, 2006; Brenneman, Boyd, y Frede, 2009). Por tanto, emerge como una necesidad, el implementar propuestas formativas, desde la perspectiva del conocimiento que es necesario saber y saber usar para gestionar situaciones específicas de enseñanza matemática (Sowder, Sowdery Nickerson, 2010).

Si bien se reconoce que estas orientaciones generales podrían permitir al maestro mejorar sus prácticas matemáticas de aula, se observa una tendencia, o, a postergar la enseñanza de la geometría (y, en consecuencia, el desarrollo de procesos, nociones y conceptos geométricos), y el pensamiento espacial, dada su escasa formación matemática y didáctica. (Báez e Iglesias, 2007; Espinoza, Barbe y Dinko, 2007; Garzón, 2014), o a reducir los aprendizajes remitiéndose a contenidos básicos como identificación de figuras y formas, y de algunas propiedades geométricas. (Chamorro, 2001).

Por otra parte, un aspecto, que parece interesante de exponer en el planteamiento de esta problemática, es la mirada o concepción por parte de los profesores, que suponen, que los niños no pueden aprender los contenidos geométricos por su complejidad y nivel de abstracción, (Sarama y Clements, 2003, 2009, 2011), no reconociendo sus propias dificultades para construir ellos, oportunidades de aprendizaje geométrico en los niños. En este sentido algunas investigaciones sobre el tema, reportan que los estudiantes conciben la geometría, como una materia difícil, influidos por las condiciones desfavorables (poca dedicación, impartida al final del curso...) en las que la aprendieron. (Barrantes (2004). Esto impide desarrollar un conocimiento matemático, que ayude a los niños a asimilar el conocimiento geométrico, desarrollando habilidades y procesos como la observación, la reproducción, la descripción, la construcción y la representación, los cuales debiesen estar promovidos por parte de los profesores a partir de un diseño de propuestas de aprendizaje.

Un ejemplo de experiencia geométrica que se presenta a niños de 5 a 6 años, que es sugerida para el profesor de infantil, (se observa en la fig. 1), que busca, a partir de la observación que los niños puedan identificar las similitudes y diferencias ente dos figuras.

Actividad: *Observando figuras geométricas*

Inicio

- Se invita al curso a subdividirse, y a cada niño/a del grupo se le entrega un elástico, cinta o cordel, para que formen figuras geométricas básicas: cuadrado, triángulo, círculo, rectángulo.

Mientras se incentiva y orienta la experiencia con instrucciones o preguntas del adulto, tales como: **¿hagamos un círculo? ¿qué figura se puede formar con 3 puntas? ¿quién desea formar un cuadrado?**, etc. Continuando con la experiencia hasta que la mayoría de los niños/as haya podido ejercitar varias veces, cada figura geométrica.

Se puede variar este inicio, si se observan diferentes figuras geométricas proyectadas en transparencias, en diapositivas, en un software o presentes en láminas o dibujos.

- Luego invita a los niños/as a explorar las figuras geométricas de diferentes colores, tamaños y texturas que pueden ir sacando de la caja que está al centro del círculo que forma cada subgrupo, mientras el educador/a orienta con preguntas tales como: el triángulo **¿qué características tiene? ¿qué diferencia el triángulo del cuadrado? ¿en qué se parecen el cuadrado y el rectángulo?**, etc. El educador/a enfatiza que cada figura geométrica sigue siendo la misma a pesar de «que cambia el color, el tamaño o la textura».

Fig 1: Actividad sugerida por el Mineduc, Chile 2007. Aprendizaje Esperado BCEP: Comprender que los objetos, personas y lugares pueden ser representados de distintas maneras, según los ángulos y posiciones desde los cuales se les observa.

En este tipo de actividades, si bien, son una propuesta que considera aspectos del conocimiento matemático que los niños debieran aprender, en este caso las figuras geométricas, no se enfatiza en como el niño puede llegar a esta comprensión, ni releva el desarrollo de las distintas habilidades cognitivas y matemáticas, para lograr una mayor comprensión del conocimiento en cuanto a propiedades, relaciones geométricas entre otros aspectos matemáticos. Al no provocarse un razonamiento por parte del profesor, en el sentido de producir una conceptualización geométrica apropiada y la habilidad de discriminar entre los distintos atributos para tal vez hacer una subcategorización, este aprendizaje, queda parcelado y sin posibilidad de conexión a otros aprendizajes. Bajo esta mirada (Castiblanco et al., 2004), señala que debe darse una interacción entre el discurso teórico y la práctica, que debe quedar anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, que deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia del conocimiento. En este sentido se reconoce la complejidad de desarrollar aprendizajes en los niños, si se observa imprecisión y solidez del conocimiento por parte de los profesores.

En este contexto, se vuelve a remarcar, que hoy en día la preocupación está orientada a modificar prácticas de enseñanza y aprendizaje a través de una combinación de nuevas herramientas, de manera que los profesores de educación infantil desarrollen competencias profesionales, que les permita identificar e interpretar el conocimiento necesario para enseñar, dando cuenta de un cuerpo de conocimientos necesarios para la enseñanza, de los estudiantes, de la comprensión de los procesos que subyacen a este conocimiento, de manera de transformar ese conocimiento en significativo y asimilable para los niños. Todo ello, se debe articular sobre la propia práctica docente, de tal forma de ser capaz de cuestionar tanto los planteamientos teóricos como el desarrollo práctico, es decir no solo los contenidos de la disciplina a enseñar, sino como se enseñarán esos contenidos, desde la perspectiva de la didáctica.

Se considera que la problemática es importante de investigar en tanto busca contribuir y profundizar en el desarrollo de competencias profesionales de futuros profesores de infantil sobre la comprensión de un aspecto del conocimiento geométrico como es la simetría.

1.3. Justificación de la investigación.

La formación en didáctica de las matemáticas del profesorado es compleja. Y aún lo es más en la especialidad de Educación Infantil, en la que los conocimientos matemáticos implicados son muy elementales, dada que la formación no es predominantemente matemática. Ruiz (2012), explica que la mejora de la calidad educativa dependerá en gran medida, del nivel de competencia profesional del profesorado, de ahí la importancia y necesidad de diseñar planes formativos que se ajusten a las necesidades de formación percibidas por los docentes de infantil y primaria.

En este sentido, en (Kirova y Bhargava, 2002; Wilhelmi, 2008), se argumenta que el desarrollo profesional de una maestra está condicionado por "la necesidad de un fuerte sistema conceptual, que tome en consideración, además, las características del desarrollo de los niños, que permita mejorar la adquisición de competencias matemáticas, potenciando el grado de adquisición de estas competencias (Alsina, 2004).

Sin embargo, para el desarrollo de estos procesos de enseñanza y aprendizaje, es necesario posicionarse desde una enseñanza que sea intencional, planificada, sistemática que promueva y acompañe los procesos de aprendizajes significativos en los niños, siendo necesario el desarrollo de una competencia docente que permita a los maestros seleccionar los contenidos a enseñar, diseñar e implementar actividades y estrategias que sean pertinentes y que sean aplicables a diversos contextos.

Específicamente en el ámbito el conocimiento matemático, se recoge en las diversas investigaciones en la educación infantil, que no hay un desarrollo importante relacionado con el ámbito geométrico (Alsina, 2010), explicando que los temas geométricos han quedado relegados, y esto hace complejo el desarrollo de diversas habilidades de pensamiento, que se requerirán en los niveles posteriores de enseñanza. En este sentido debería ampliarse progresivamente el repertorio de tipos de razonamiento propios de las matemáticas (Alsina, 2011), y particularmente en el razonamiento geométrico, se debe implementar tareas que requieran "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas (Fernández, Cajaraville y Godino, 2008).

A partir del razonamiento geométrico se espera que se desarrollen habilidades relacionadas con las imágenes, con el pensamiento espacial, el sentido de orientación, dirección, ubicación, (Lastra, 2005; Bressan, 2000; Guillén 2010), con la interpretación de la información figurada, el procesamiento visual, donde la visualización y percepción son relevantes en la comprensión de aspectos geométricos.

Espinoza (2004), en acuerdo, con lo que reporta la investigación, sobre la formación y desarrollo profesional de los maestros, y, describe la complejidad de esta situación, ya que, debido a su escasa formación matemática y didáctica, los profesores, y particularmente los profesores de niveles educativos de infantil y primaria, tienen serias dificultades para desarrollar una enseñanza de la geometría, y que cuando es considerada, se limita a una selección de contenidosgeométricos relacionados con clasificaciones rígida y formal de figuras y cuerpos, memorización de algunas propiedades y cálculo de áreas y perímetros. Esto se reafirma en (Clements, 2003; Sarama and Clements 2009; HP Ginsbur et al 2006), donde se concluye que futuros profesores de infantil, experimentan grandes dificultades para aprender y aplicar definiciones geométricas, y que la mayoría no tiene adecuados niveles de conocimiento de la geometría.

En (Thaqi, X., Giménez, J., &Rosich, N., 2011), a partir de un estudio con transformaciones geométricas, que fue realizado con estudiantes para maestros de Kososvo y Barcelona, se concluye que la dificultad que experimentan los futuros docentes con las distintas transformaciones geométricas, como la simetría y otras transformaciones, no solo se debe a la falta de conocimiento matemático, sino que al tipo de tareas que se implementan, para promover la comprensión de este conocimiento. No obstante, existen pocas investigaciones que examinen el desarrollo del conocimiento geométrico de los maestros de educación infantil, del tipo de tareas que diseñan para poder construir ese conocimiento, y de cómo progresan en la enseñanza a partir de esas actividades para desarrollar situaciones de enseñanza a los niños de infantil

En lo que respecta a la comprensión de ideas geométricas en los niños, en Sarama, J., &Clements, D. H. (2009), señala que los niños desde temprana edad desarrollan y construyen ideas geométricas, que no solo se relacionan con las figuras y las formas (atributos), sino que también desarrollan una comprensión de ideas de simetría, de congruencia y de transformaciones, en donde asumen la congruencia en función de si ven en general, más similitudes que diferencias, usando como estrategia, la superposición de bordes de las figuras. Y que por otra parte en el plano visual los niños también pueden, medir, identificar el color, doblar, y cortar las formas, identificar sus atributos. Por ejemplo, podrían participar en actividades, en que puedan describir por qué una figura pertenece o no pertenece a una determinada categoría, dada por la forma, tamaño, a su vez, mediante la actividad de plegado de un cuadrado o un rombo determinar sus simetrías y la igualdad de sus ángulos y lados. (Clements, D. H., & Sarama, J., 2000).

Al respecto el NCTM (2000), es enfático en señalar que la calidad de la educación matemática en la primera infancia juega un papel importante en la comprensión por parte de los niños de los conceptos matemáticos, posiblemente difíciles, donde el desarrollo del conocimiento matemático potenciará sus capacidades cognitivas que les permitirán desenvolverse adecuadamente en situaciones cotidianas. Con la visión de poder estandarizar los procesos de aprendizaje el NCTM, aporta directrices para orientar la enseñanza de la geometría desde la enseñanza preescolar hasta la secundaria. Esta propuesta gira en torno a cuatro objetivos generales:

- Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

En el contexto específico de esta investigación, pretendemos aportar respecto de la comprensión de un aspecto del conocimiento geométrico como es la simetría por parte de futuros profesores de infantil, donde "Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas" (p. 100)*,* se concreta para los niveles de infantil a 2° en:

- Reconocer y aplicar traslaciones, giros y simetrías
- Reconocer y crear formas que tengan simetría

Esto permite *"describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones informales como reflexiones, rotaciones, traslaciones y escalas; examinar la congruencia, la semejanza, y la simetría respecto a una recta o un centro usando transformaciones". (*Araya, R. G., & Alfaro, E. B. 2009).

Existe entonces, la necesidad de un currículum de matemáticas que de orientaciones respecto como poder construir conocimiento geométrico, (Gómez Chacón, 2006; Llinares, 2009; Alsina 2011), considerando su uso en diferentes contextos, de manera de poder desarrollar las competencias profesionales que se requieren, las cuales debieran ser consideradas en los programas de formación. Estos aspectos contribuirán al desarrollo de una competencias en la enseñanza de la matemática, donde conocer y saber usar ese conocimiento geométrico en situaciones de enseñanza permitirá identificar lo relevante para el aprendizaje, interpretarlo y tomar decisiones de acción (Jacobs et al., 2010).

Particularmente en esta investigación nos interesa describir la competencia docente mirada profesional de futuros maestros de educación infantil cuando analizan tareas escolares que involucran la noción de simetría. Asumimos que el desarrollo de competencias profesionales permite al futuro profesor de Educación Infantil, saber qué, cómo y cuándo utilizar conocimientos específicos para resolver tareas de enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2013). Esto implica,entre otros aspectos, identificar las estrategias y procedimientos utilizados por los futuros maestros e interpretar la comprensión de los niños, (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010).

A partir de los argumentos expuestos en los párrafos anteriores, en donde se ha reconocido un problema importante para la comunidad de investigación en educación matemática, esta investigación orienta e integra sus cuestionamientos, en la línea que busca caracterizar competencias profesionales de profesores en formación(Llinares, 2010, 2013; Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep, 2008; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). A continuación, se formularán las preguntas de investigación, que nos hemos propuesto abordar, así como los objetivos que se derivan de las mismas.

1.4 Preguntas de investigación y objetivos

P. 1.1 ¿Cómo describir la competencia docente "mirada profesional" de futuros maestros de infantil cuando identifican e interpretan producciones de niños que resuelven situaciones que involucran la noción de simetría?

P.1.2 ¿Cuál es el potencial de tareas profesionales que se basan en el análisis de producciones de niños en actividades escolares que involucran la noción de simetría, en la formación de maestros de infantil?

Objetivos:

Las preguntas anteriormente enunciadas, nos llevan a plantearnos un conjunto de objetivos para nuestro trabajo, los cuales se concretan a continuación.

1. Describir evidencias de la destreza identificar el conocimiento matemático en futuros profesores de infantil cuando se analizan actividades escolares relacionadas con simetría.
2. Describir evidencias de la destreza interpretar la comprensión de ideas geométricas en futuros profesores de infantil cuando analizan las producciones de niños a tareas escolares relacionadas con la simetría.
3. Analizar la potencialidad de las tareas profesionales diseñadas, a partir de una trayectoria de aprendizaje que permite a construcción de la simetría.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se aborda los referentes que sustentan el trabajo de investigación desarrollado. Por una parte, se abordará la idea de competencia profesional del profesor, algunos planteamientos del conocimiento para enseñar, así como aspectos importantes de una trayectoria hipotética de aprendizaje de la simetría.

2.1. Competencia docente “mirar profesionalmente”

Aunque en los últimos años la competencia profesional ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas, la idea común que subyace a estos planteamientos es subrayar la manera en la que los profesores interpretan las situaciones de enseñanza. Mason (2002) indica algunas características de esta competencia docente, que implica (i) identificar lo que puede ser considerado relevante teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (intentional noticing), (ii) describir los aspectos observados (marking and recording), (iii) reconocer posibles alternativas de acción (recognizing choices), y (iv) validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (validating with others). De tal forma que esta competencia permite al profesor ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de una manera profesional, permitiéndole interpretar situaciones complejas en el contexto del aula. Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemática, subrayan la importancia que tiene para la enseñanza de las matemáticas la competencia docente “mirar profesionalmente” (*professional noticing*) (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002).

En este sentido, se releva el hecho de que la interpretación es una manera de entender cómo el maestro usa su conocimiento en la realización de las tareas profesionales, las cuales están vinculadas a la planificación de la enseñanza, la gestión de la interacción y el discurso matemático en el aula y la valoración del aprendizaje de los estudiantes, dotando de sentido a sus producciones.

Esta nueva mirada, genera referencias para contestar a la interrogante sobre, las matemáticas que debería conocer un maestro (Climent; Romero; Carrillo; Muñoz; Contreras, 2013; Monchon y Morales, 2010). En particular porque traslada la atención desde una perspectiva disciplinar del conocimiento de las matemáticas a una perspectiva profesional definida por la tarea que debe realizar un maestro: enseñar matemáticas (Ball; Thames, y Phelps, 2008). Es necesario entonces desarrollar esta capacidad profesional, de manera de poder identificar los aspectos matemáticos relevantes, que se debiesen conocer, poder interpretarlos y desarrollarlos a partir de tareas que apoyen y potencien el aprendizaje, considerando el contexto en el diseño. (Penalva, C., Llinares, S, .2011).

La investigación hoy en día, ha puesto el foco en la caracterización de esta competencia docente del profesor de matemática, particularmente en el ámbito de la educación matemática (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002; Llinares, y Valls, 2009; Llinares, 2012; van Es y Sherin, 2002), donde se señala que esta competencia se puede desarrollar en los programas de formación (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013).

Al respecto distintos investigadores (Mason, 2002; Van Es y Sherin, 2002; Jacobs, et al 2010; Sherin, Jacobs&Phillipp, 2011; Llinares & Valls, 2010; Fortuny, 2012), señalan que ser competente profesionalmente involucra, saber observar de manera profesional los fenómenos que ocurren en una situación docente, poder identificar lo que es importante y significativo en una situación de aula, gestionar el contenido matemático en el aula, poder hacer distintas conexiones de aspectos específicos con principios generales de enseñanza y aprendizaje, diseñando e implementando un mejor nivel del desarrollo profesional que mejore las competencias de los profesores y de sus estudiantes (Clements, 2011).

En (Callejo, Valls y Llinares, 2010; Llinares, 2012), se plantea que la reflexión hoy en día está enfocada en la formación de profesores y en como potenciar el desarrollo del conocimiento, haciendo énfasis en el desarrollo de la competencia "mirar con sentido" los procesos de enseñanza aprendizaje. En este contexto la relevancia está dada en lo que los profesores observan y la manera en la que interpretan lo observado para determinar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. En este mismo contexto Llinares (2006), explica que aprender a "ver" las matemáticas, en el amplio sentido, permite aprender a observar e interpretar, a examinar desde una óptica más profunda lo que sucede en la práctica de aula, reconociendo los aspectos importantes en una situación de enseñanza de las matemáticas. No obstante, y como se argumenta, esto no es una tarea sencilla, pues requiere de una gestión del profesor, en tanto pueda analizar como los estudiantes interpretan los problemas matemáticos, y así gestionar de mejor manera la práctica de aula, a partir de las posibles decisiones que pueda tomar.

Desde una mirada interpretativa, esto es relevante, pues permite llegar a comprender lo que ocurre en el aula, los procesos matemáticos que subyacen a la comprensión de ideas matemáticas por parte de los estudiantes, y la interpretación que se hace de esas ideas. Esta forma de ver la competencia permite entonces, reconocer el pensamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea matemática, y la manera en que los profesores dan cuenta del reconocimiento de ese pensamiento, en tanto, implica analizar la situación matemática desde el conocimiento que los estudiantes deben llegar a saber.

Esto implica el desarrollo de conocimiento y destrezas para analizar la enseñanza de las matemáticas, permitiendo al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con una mirada profesional, que lleve a los profesores a "mirar con sentido" los procesos de enseñanza, teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes en su interpretación de las situaciones de enseñanza de las matemáticas (Prieto & Valls, 2010; Llinares, 2013), permitiendo tomar decisiones, para ayudar a los estudiantes a transitar en el desarrollo de una competencia matemática.

Desde este punto de vista, se considera relevante el diseño de tareas (Fortuny; Rodríguez, 2012), el diseño de oportunidades para el aprendizaje, que pasan por saber identificar aspectos relevantes en la enseñanza de las matemáticas, de manera que los estudiantes aprendan los contenidos matemáticos y desarrollen una comprensión de estos contenidos. Esto se facilita incorporando dominios específicos en matemática, identificando los elementos matemáticos importantes del dominio y relacionarlos con las características de la comprensión matemática de los estudiantes, ya que cuando los estudiantes relacionan las ideas matemáticas, su comprensión y entendimiento acerca de ellas se hacen profundos y son más permanentes, y pueden percibir las matemáticas como un todo coherente. Esto se subraya la importancia de la competencia docente "mirar con sentido" los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (Llinares, 2011).

Un sistema de actividad en la práctica profesional es explicado en Llinares, (2013) en tanto se desarrolla un proceso dialéctico entre la selección y el diseño de tareas, la interpretación que se hace del pensamiento matemático de los estudiantes, y la forma de guiar el discurso matemático y las interacciones de aula por parte del profesor. (En la fig. 2, se muestra un sistema de actividad en la enseñanza de la matemática como una práctica).

Figura 2. Sistema de actividad en la práctica profesional de profesor de matemáticas. (Extraído de Llinares, 2013).

En este sentido, para poder usar el conocimiento matemático para enseñar se hace necesario un entramado de habilidades y estrategias, en donde el conocimiento específico potenciara el proceso de enseñanza y aprendizaje, y las competencias profesionales.

2.1.1 Identificación de elementos matemáticos.

Para Jacobs et al. (2010), el desarrollo de esta destreza permite identificar los aspectos destacables de una situación matemática, como por ejemplo uso de estrategias por parte los niños para resolver una situación, siendo esto relevante pues no tan solo proporciona unaventana a la comprensión de los niños, sino también al conocimiento matemático que posee el profesor, para determinar qué es matemáticamente significativo

La investigación ha demostrado que este proceso puede ser complejo, y que los detalles de las estrategias son importantes, en el sentido que permiten a los profesores ayudar en el desarrollo de procedimientos y construcción del conocimiento por parte de los niños. Diversos estudios plantean que, los profesores con más experiencia en el desarrollo del pensamiento matemático de los niños son más capaces de recordar los detalles de estrategias que utilizan estos, pues han desarrollado maneras significativas para discernir modelos y formas en situaciones de aula más complejas (Bransford, Brown y Cocking, 2000. citado en Jacobs et al, 2010).

En distintos trabajos (Llinares, y Valls, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Zapatera y Callejo, 2013), se está mostrando que la identificación del futuro profesor de los elementos matemáticos que son relevantes en un problema que deban resolver sus estudiantes, le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de un tópico determinado. Esto se reafirma en van Es y Sherin, (2002) que señala que, cuando los individuos adquieren más experiencia en un determinado dominio, se vuelven más hábiles a la hora de dar sentido a las situaciones que se les presentan dentro de este dominio.

2.1.2. Interpretación de la comprensión matemática de los estudiantes

Para Jacobs et al., (2010), un interés especial, está en cómo los profesores interpretan la comprensión de los niños que es reflejada en las estrategias que ellos desarrollan cuando resuelven un problema. Sobre la base de un solo problema, no se espera que el profesor pueda construir una imagen completa de la comprensión de un niño, pero sí que pueda ir armando una estructura de razonamiento de los niños considerando las estrategias específicas que estos desarrollan y la matemática que comprenden cuando resuelven un problema.

Por ejemplo, en van Es y Sherin (2002) explican que los profesores pueden mejorar "su mirada profesional" si se les ayuda a desplazar su foco de atención desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones de la comprensión de los alumnos basadas en evidencias. Esta postura interpretativa para el análisis de la práctica significa observar una situación de enseñanza con el propósito de comprender lo que ocurre en el aula, los procesos matemáticos que subyacen a la comprensión de ideas matemáticas por parte de los estudiantes, y la interpretación que se hace de esas ideas, esto permite entonces, reconocer el pensamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea matemática, y la manera en que los profesores dan cuenta del reconocimiento de ese pensamiento, en tanto implica analizar la situación matemática desde el conocimiento que los estudiantes deben llegar a saber.

No obstante, desarrollar la competencia «mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes», como muestran distintas investigaciones no es una tarea fácil, sin embargo, es posible de desarrollar al informar de procesos en los que los maestros, o los estudiantes para maestro, se trasladan desde meras descripciones a respuestas más analíticas (Coles, 2012; Morris, 2009; Llinares, 2013; Llinares y Valls, 2010).

Zapatera (2015) en su investigación concluyó que la destreza interpretar tiene un nivel de dificultad mayor que la destreza identificar, ya que *"interpretar tiene una demanda cognitiva mayor y exige el uso del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), en particular el conocimiento de matemáticas y de los estudiantes".* (p. 139)

Interpretar la comprensión matemática de los estudiantes implica que el profesor debe tener conocimiento suficiente en el campo de las matemáticas para conectar las estrategias que se reflejan en la comprensión de los conceptos matemáticos.(Jacobs et al. 2010).

2.1.3. Toma de decisiones

Para Jacobs et al. (2010), la destreza tomar decisiones, componente de interés de la competencia profesional, implica un razonamiento por parte del maestro para decidir cómo responder, en tanto es capaz de usar el conocimiento que ha aprendido respecto a las concepciones de los niños en una situación específica, para promover un desarrollo matemático enellos.

En este sentido Van Es y Sherin (2002) señalan la importancia de que los profesores aprendan a desarrollar habilidades de interpretación que luego pueden ser usadas para informar las decisiones pedagógicas; es decir, que al desarrollar las habilidades de identificar e interpretar dentro de la competencia "mirada profesional", es importante utilizar esa información para tomar decisiones efectivas y oportunas en el momento de la práctica docente.Estas decisiones pueden ser inmediatas o a largo plazo, dependiendo si son decisiones que toma el docente en el momento en que interactúa con los estudiantes o decisiones que toma fuera del aula cuando ya no interactúa con los ellos (Jacobs et al. 2010).

2.2. Conocimiento matemático para la enseñanza- MKT

El estudio del conocimiento que deben tener los maestros para la enseñanza de las matemáticas ha sido un asunto de reflexión e investigación en educación. Investigadores como (Shulman, 1986, 1987; Llinares 1998; Ball, 2000; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001; Ball, Hill, & Bass, 2005; Hill, Rowan & Ball, 2005; Godino, Batanero, & Font, 2007; Gómez, 2007; Ponte & Chapman, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008; Godino, 2009, 2011; Ponte, 2012; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento y de la educación, diferentes modelos que han permitido de alguna manera describir, valorar y guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje, relevando el conocimiento y el uso de este en las distintas situaciones del enseñar. Subyace a estos diferentes postulados la idea que es asumida tanto por la sociedad, como por los profesionales de la educación, es que no se puede enseñar aquello que no se domina.

En este sentido la indagación sobre el conocimiento del contenido matemático, está configurando una agenda internacional de investigación apoyada en la noción de «conocimiento matemático para enseñar» (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2012; Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013; Llinares, 2011, 2013).

Se plantea que este conocimiento juega un papel importante en el desarrollo de la competencia «mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes», pues a partir del análisis epistémico y didáctico, los maestros pueden no solo anticipar los posibles conflictos de significado que emergen durante la solución de tareas matemáticas por parte del estudiante sino prever la complejidad del proceso de enseñanza. En esta complejidad los profesores deben ser capaces de percibir los elementos importantes del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aprovechando su conocimiento y comprensión de las ideas matemáticas, para razonar e interpretar estos hechos, y decidir cómo responder tomando en consideración la comprensión que desarrollan los estudiantes de estos elementos matemáticos.

El Pedagogical Content Knowledge y el SubjectMatterKnowledge (MKT), introduce la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza", y es definido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y desarrollo en el alumno". Es aquel conocimiento que caracteriza al maestro que enseña matemáticas "Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático en virtud de haber estudiado matemáticas avanzadas... más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas" (Ball et al., 2001). En este ámbito (Ball (1990); Lubienski y Mewborn (2001); Hill, Sleep, Lewis, Ball.,2007; Hill , Ball., 2004; Ball, Thames, Phelps, 2008), han aportado información sobre la naturaleza y características del conocimiento que debería tener un profesor para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiantes y de formas de entender el aprendizaje del maestro, enfatizando en la idea de que los profesores de matemáticas, necesitan dos tipos de conocimiento: el conocimiento de la matemática y el conocimiento pedagógico de las matemáticas. A partir de este modelo plantean una conceptualización de subdominios o categorías, que se validan a partir de las descripciones que hacen de estos subdominios. (Como se muestra en la fig. 3).

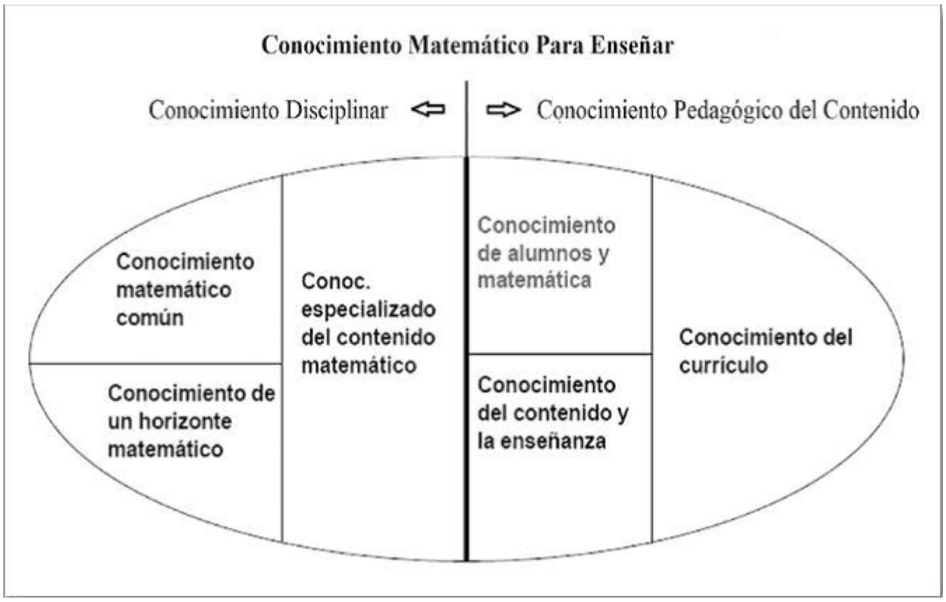


Fig. 3. Modelo MKT, Ball, et al, 2008

Conocimiento común del contenido (CCK): Es el conocimiento matemático y habilidades necesarias para resolver las tareas que los alumnos realizan, lo que implica desarrollar correctamente ideas y procedimientos matemáticos.

Conocimiento especializado del contenido (SCK): Es el conocimiento matemático que permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, incluyendo en particular: formas de representar las ideas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, aplicar modelos y visualizar, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas. Le permite organizar una secuencia de enseñanza con la cual lograr el aprendizaje de diferentes aspectos de un contenido determinado, el profesor tiene que tener un conocimiento que va más allá del conocimiento matemático que se aprende en la escuela, lo cual exige del docente poseer un conocimiento matemático y competencias específicas.

Conocimiento del contenido y el horizonte matemático (HCK): El Conocimiento del Horizonte es un darse cuenta de cómo los temas matemáticos están relacionados en el espectro del mundo matemático y a lo largo de todo el currículo. (Ball et al, 2008). También incluye una visión útil para ver las conexiones con las ideas matemáticas posteriores.

Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS): Se refiere al conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas, como por ejemplo el conocer los errores que los estudiantes comenten con mayor frecuencia (Ball et al, 2008), incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador. El profesor ve como los estudiantes piensan, saben o aprenden, ven los errores de los estudiantes, las concepciones erróneas, cuáles son las estrategias que utilizan para resolver los problemas.

Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT): Combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre las matemáticas. Se refiere a las habilidades para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico y el uso de diferentes métodos y procedimientos para enseñar ese contenido matemático. Se utiliza al momento de realizar acciones (Ribeiro et al, 2010), en las cuales se tiene que decidir la secuencia de las tareas con que comenzar, cuáles son las ventajas y desventajas de la utilización de representaciones para enseñar una idea o una situación matemática.

Conocimiento del contenido y currículo (KCC): El cual está representado por el conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios.

Ma (1999), siguiendo la línea de Ball, profundiza en la naturaleza del conocimiento del contenido necesario para la enseñanza, el cual va más allá de simplemente "saber" el contenido, sino de cómo usamos ese contenido para analizar e interpretar las situaciones problemáticas. Por ejemplo, en geometría señala que plantear una tarea de "encontrar el perímetro de un rectángulo es diferente en el análisis, que cuando se le dice a un estudiante sobre cuál es la relación entre el perímetro y área". El primero sólo requiere saber cómo calcular el perímetro y el segundo requiere una capacidad de pensamiento de demanda otros procesos de análisis.

Una mirada especial se ha hecho con el conocimiento especializado y con el conocimiento del horizonte, es así que investigadores han profundizado y aportado nuevas ideas respecto de estos conocimientos. En este sentido y desde la perspectiva de Ball (2008) que define la noción de especializado, el grupo de investigación de la Universidad Huelva (SIDM) enfoca la especialización desde otra perspectiva. Es así que hablan, en lugar del conocimiento especializado del contenido, del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*–MTSK). Plantean la idea de distanciarse de la idea del conocimiento matemático para la enseñanza y desarrollan la idea de conocimiento del profesor de matemáticas que sólo tiene sentido para él.

Bajo esta misma mirada Escudero (2012) describe que la especialización del MTSK permite diferenciarlo del PPK (conocimiento de pedagogía y psicología general), y en este sentido las tareas profesionales ayudan a definir el conocimiento del profesor y su diferenciación del conocimiento de otros profesionales. Este conocimiento especializado del profesor se interpreta en la forma en que el profesor se preocupa por cómo hacer que sus alumnos comprendan las distintas formas en que se puede presentar o interpretar un problema matemático. Los profesores deberán, por tanto, poseer un abanico de conocimientos, relacionados con cada uno de los contenidos específicos que tienen que enseñar, que les permitan, además de hacerlos comprensibles a sus alumnos, enseñarlos de modo que estos últimos adquieran un conocimiento relacional entre los diversos contenidos, (Ribeiro, et al, 2009).

En lo que dice relación con el conocimiento del horizonte, donde se releva la idea de profesor en tanto es un agente clave que participa y guía al estudiante en la construcción del conocimiento (Espinoza, González, Ramírez y Zumbado, 2008; Salcedo, 2012), desde la conciencia que debe tener el profesor sobre los conocimientos matemáticos previos y futuros presentes en el currículum de matemáticas, Ball, Thames y Phelps (2008), se requiere deuna mirada especial. Así en se argumenta en Fernández y Figueiras, (2011, 2010), al explicar que el HCK, entrega una visión global de la educación matemática de los estudiantes, esto permite que el profesor pueda utilizar esta visión, al enseñar matemáticas en el aula.

Estos investigadores han caracterizado este conocimiento en términos de conexiones matemáticas, que son fundamentales, de cómo construir el conocimiento y como progresar en esa construcción. Por esta razón lo consideran como un conocimiento matemático mucho más amplio, que da forma al MKT desde un punto de vista de continuidad de la educación matemática, y por tanto lo categorizan en razón de la naturaleza de las conexiones, en este sentido consideran:

Conexiones intraconceptuales. Tienen lugar en la proximidad de un único concepto: equivalencia entre caracterizaciones de un concepto; prueba de la equivalencia entre dos definiciones; distinción entre una condición suficiente de una necesaria, o la expresión de un concepto en un caso particular.

Conexiones interconceptuales. Los conectores son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento.

Conexiones temporales. Se dan entre conocimientos previos y futuros. Derivan del conocimiento del profesor sobre los conocimientos previos y futuros de los estudiantes. Estas conexiones posibilitan estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento, o aplicar el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas.

2.3. Importancia de la geometría en el currículo de la educación infantil

A partir de revisiones de distintas modelos curriculares (inglés, americano, chileno, español, entre otros), observamos cómo se establecen objetivos precisos relacionados con el aprendizaje de conceptos geométricos durante los primeros años. En Estados Unidos, por ejemplo, el currículo de pre-kinder (NCTM, 2006), menciona específicamente que los niños deben ser capaces de identificar y describir una variedad de formas de dos y tres dimensiones que se presentan en una variedad de formas, uso de conceptos geométricos que les permita reconocer y trabajar en patrones secuenciales simples o la hora de analizar un conjunto de datos. En Israel, cuando los niños entran al primer grado se espera que puedan diferenciar entre diferentes polígonos, considerando el número de lados y vértices de cada forma, así como identificar y nombrar varias figuras bi y tridimensionales (INMPC 2008).

En Chile, en el marco curricular (BCEP) que regula el nivel de educación infantil en las etapas de (0-3 y 3-6 años), se determina que cuando los niños terminan la educación infantil, sean capaces de, establecer relaciones de orientación espacial de ubicación, dirección, distancia y posición respecto a objetos, personas y lugares, nominándolas adecuadamente; reconocer algunos atributos, propiedades y nociones de algunos cuerpos y figuras geométricas en dos dimensiones, en objetos, dibujos y construcciones, y descubrir la posición de diferentes objetos en el espacio y las variaciones en cuanto a forma y tamaño que se pueden percibir como resultado de las diferentes ubicaciones de los observadores.

En España en la orden ECI/3096/2007, que regula la ordenación de la educación infantil, y establece el currículo, para los dos ciclos (0-3 y 3-6), se explicitan algunos contenidos, como, por ejemplo: situación de sí mismo y de los objetos en el espacio. Posiciones relativas. Identificación de formas planas y tridimensionales en elementos del entorno. Exploración de algunos cuerpos geométricos elementales. Nociones topológicas básicas (abierto, cerrado, dentro, fuera, cerca, lejos, interior, exterior...) y realización de desplazamientos orientados. Este plan curricular permite la organización de áreas de aprendizaje y la construcción progresiva de conocimientos e ideas matemáticas.

La mayoría de los currículos de infantil, desarrolla, por una parte, ideas en relación a las relaciones espaciales, y los desplazamientos, y como estos permitirán a los niños/as comprender que sus movimientos y de los objetos provocan modificaciones en las relaciones espaciales, y, por otra parte, plantean ideas en relación a los cuerpos geométricos, reconocimiento de características, y atributos geométricos en cuerpos y figuras. Esto les permite a los niños/as darse cuenta de la posición que adquieren los objetos en el espacio, su relación con otros objetos y de estos con el sujeto.

Desde la mirada curricular se observa una preocupación por incorporar la geometría en el currículo de infantil, entregando en algunos casos directrices muy específicas en cuando a desarrollo de contenido geométrico y procesos matemáticos relevantes que se deben promover en los niños para la comprensión de estos contenidos.

Sin embargo, desde la competencia matemática del profesor consideramos relevante lo planteado por distintos investigadores, en el sentido que los profesores tienden a postergar la enseñanza de la geometría dada su escasa formación matemática y didáctica, Barrantes (2004) y por la concepción de que la geometría es una materia difícil, influidos por las condiciones desfavorables (poca dedicación, impartida al final del curso...) en las que la aprendieron.(Báez e Iglesias, 2007; Espinoza, Barbe y Dinko, 2007). Un argumento similar se desarrolla en (Sarama y Clements, 2009, 2011), al plantear que la geometría y los conceptos espaciales a menudo son ignorados o minimizados a principios de la educación, argumentando que, esto puede explicarse, por la concepción por parte de los maestros que suponen que los niños no pueden aprender los contenidos por su complejidad y nivel de abstracción, o porque los maestros presentan dificultades para construir oportunidades de aprendizaje geométrico.

Estas ideas núcleo junto con el poco dominio que los estudiantes tienen sobre el contenido, metodología y actividades apropiadas hace que, además, en sus expectativas vislumbren dificultades en su actividad como profesores de matemáticas cuando tengan que enseñar geometría.

Hoy en día, en la educación de la primera infancia se hace hincapié en la necesidad de proporcionar programas de matemáticas infantiles de alta calidad para los niños en edad preescolar. Esta preocupación se visualiza en las recomendaciones específicas y en ocasiones obligatorias para la inclusión de las matemáticas y específicamente de la geometría como parte del programa de infantil. En el año 2000, a raíz de las cada vez mayores evidencias de que los primeros años afectan significativamente al aprendizaje de las matemáticas y a las actitudes hacia las mismas, el NCTM, incluyó, por primera vez, la educación infantil en sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (PSSM), donde se describen, contenidos y procesos matemáticos por cada área, en cuanto a lo que los niños deben ser capaces de hacer desde la educación infantil hasta segundo curso de Educación Primaria. Puntualmente el estándar de *Geometría* presenta una amplia visión del poder de la geometría, el cual invita a los estudiantes a analizar características de las figuras geométricas y desarrollar argumentos acerca de las relaciones geométricas; así como a usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelación geométrica para resolver problemas.

2.3.1. Enseñanza de la geometría en los primeros años

Resulta evidente que los niños pequeños, de manera informal, en sus juegos, ya realizan numerosas actividades de índole matemático: exploran modelos, formas y relaciones espaciales, comparan magnitudes, cuentan objetos, etc., entonces introducir al niño en el mundo de las formas, las figuras, los espacios, es una labor principal de los maestros de educación infantil, esto permitirá que vayan trabajando más a fondo la geometría desde los primeros años de infantil. De esta manera la inclusión de temas como espacio y geometría en el currículo infantil parece más que justificada. (Vecino, 2005).

En Dillon, (2013), se presenta un estudio liderado por investigadores de la Universidad de Harvard (EEUU), que revela que los niños de cuatro años poseen habilidades que podrían representar una comprensión temprana de la geometría euclidiana, específicamente la relación entre su sentido de la orientación, su capacidad de analizar formas y su interpretación de mapas simbólicos.

En este sentido la propuesta de diversos autores frente al aprendizaje de la geometría en niños de nivel infantil y primario, es que debe hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributos de la geometría tridimensional.

> *"A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, además nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales, tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión.".* (Dickson, 1991; citado en González, 2011).

De una manera general, pero enfática, se propone en (Alsina, Aymerich y Barbe, 2008), que el punto de partida en la enseñanza de las matemáticas "es tener claro que lo que el niño necesita son oportunidades para aprender y descubrir aspectos matemáticos de la realidad por sí mismo". Donde el niño pueda probar, equivocarse, recomenzar a partir del error, construir modelos, proponer soluciones, defenderlas, discutirlas, comunicar los procedimientos y conclusiones. En (Sámuel, M; Vanegas; y; Giménez, J., 2016), explican que la construcción de conceptos y relaciones geométricas que se forman en una primera etapa aparecen como producto del proceso de las acciones sobre lo concreto, permitiendo observar características comunes de los objetos matemáticos. En tanto, el desarrollo de las relaciones espaciales en relación al objeto, les permiten darse cuenta de la posición que adquieren los objetos en el espacio, (donde los niños se den cuenta que un mismo objeto no se ve de igual forma desde distintas posiciones), su relación con otros objetos y de estos con el sujeto, para que puedan dominar las relaciones con el espacio, poder representarlo, describirlo, a partir de un aprendizaje activo, y rico en lenguaje matemático.

El diseño e implementación de actividades escolares, movilizan en el profesor una serie de conocimientos y competencias con los que se encuentra familiarizado, en tanto debe comprender como aprenden geometría los niños para tomar decisiones eficaces, -donde la comprensión del proceso de aprendizaje puede guiarlos en la manera de como diseñar y presentar una situación didáctica que considera, a priori, potencialmente significativa-, en relación a los contenidos para que puedan ser dominados por los niños. (Kirova, 2002; Edo y Revelles, 2004;

Gonzato, 2011). Desde la perspectiva de Clements, (2015), en todas las interacciones con los niños, los profesores deberían ayudarlos a desarrollar relaciones o conexiones entre los conceptos y las habilidades, planteando que el desarrollo de la habilidad se promueve por un fundamento conceptual sólido.

Diversos autores plantean, que muchas veces esto se ve truncado, por una propuesta de experiencias de aprendizaje desde el ámbito del texto escolar, que desarrolla una visión estática de la geometría, (casi exclusivamente actividades escolares que piden identificar figuras y formas, calcular áreas y volúmenes), que no dan lugar al desarrollo de procesos cognitivos. Chamorro, (2001), señala que esto genera un fenómeno de aritmetización de la geometría, en tanto no se favorecería un desarrollo de procesos de enseñanza sistemáticos, donde el sujeto pueda desarrollar diversas habilidades, visuales, verbales (o de comunicación), de dibujo y construcción, lógicas (o de pensamiento), de aplicación o transferencia. (Bressan, 2000)

El generar mecanismos que permitan una mejor apropiación de estas materias es sin duda, responsabilidad de todos los entes involucrados en los procesos educativos y de formación. Investigaciones realizadas por (Tsamir, 2008, 2014), en relación al conocimiento de figuras geométricas, tanto en profesores de infantil comotambién en niños de nivel inicial. Se concluye que a los profesores les es más fácil identificar ejemplos y contraejemplos de círculos, sin embargo, la dificultad se presenta cuando se les pide una definición matemática de esta figura; por otra parte, en lo que dice relación con los niños, estos, demostraron mayores habilidades en poder identificar ejemplos que contraejemplos de distintas figuras.Estos aspectos son importantes de considerar al momento de diseñar tareas de aprendizaje, en tanto se hace necesario promover un razonamiento lógico en los niños. Se reafirma entonces la idea que el profesor para enseñar matemáticas, necesita un amplio conocimiento de las matemáticas, y un desarrollo de destrezas que le permitirán gestionar ese conocimiento.

En este mismo camino, un aspecto que se considera importante, y que se destaca en distintas investigaciones de pensamiento geométrico, es la necesidad de incorporar distintos materiales o recursos didácticos en los diseños o propuestas de aprendizaje, para promover habilidades geométricas. Al respecto, (Vecino, 2004, Barrantes, 2004), reportan, que la ausencia, o el olvido, de materiales específicos para la enseñanza de la geometría y el uso excesivo de la pizarra como instrumento de representación externa de ciertos elementos geométricos, generan ciertas concepciones erróneas de los conceptos geométricos más elementales, primando una geometría de cálculo, de papel, desarraigada del contexto. Idea compartida en Chao et al., (2000), que explica que, la deficiente concepción de la geometría en general, tanto a nivel cognitivo como a nivel representativo, causada por la escasa utilización de materiales didácticos específicos impide que se contribuya a conformar una visión más amplia y coherente de esta rama de las matemáticas. El trabajo con objetos manipulables o material concreto, sin lugar a dudas, mejora el rendimiento en tareas matemáticas, desarrollando habilidades que permite comprender, describir e interactuar con el espacio en que vivimos.

Un tipo de propuesta de actividades que desarrolle la exploración de materiales, (Broitman, 2009), se presenta como un buen punto de partida para el trabajo con las figuras geométricas, donde los niños puedan ir evolucionando en sus conocimientos. Para ello, es importante que la presentación de las figuras se haga de diversas maneras, en distintas posiciones, con diferentes tamaños, -puesto que en un inicio las habilidades de los niños están vinculado a lo perceptivo- para que comiencen a analizar las propiedades de las figuras, sus relaciones y sus elementos. Muchas veces, se comete el error de considerar solo una posición para determinadas figuras geométricas, esto lleva a que los niños tengan dificultades para reconocerlas cuando se les presentan en posiciones o contextos distintos.

2.3.2. Desarrollo del pensamiento geométrico en los niños

El desarrollo del pensamiento geométrico en los niños (Piaget 1960; Piaget, Inhelder, y Szeminska, 1960), se desarrolla siguiendo un orden experiencial, en donde en un primer momento, el niño usa actividades sensorio-motoras para explorar el espacio, la construcción de representaciones de conceptos topológicos, tales como interior y exterior. En la medida que los niños, van interiorizando y asimilando nuevas construcciones de ideas matemáticas, la comprensión de otros conocimientos que requieren un nivel de abstracción mayor se va desarrollando. En esta progresión y desarrollo de conocimientos y en términos de conceptos, se puede decir que la geometría proyectiva (conceptos de: recta, línea o ángulo) va surgiendo. Cuando los niños discriminan ubicaciones y el espacio tridimensional, se puede introducir a los niños en la geometría euclidiana como angulosidad y paralelismo. Considerando la forma en que el niño adquiere el conocimiento, (conocimiento físico: manipulación, exploración), puede construir los primeros conocimientos sobre las características y algunas de las propiedades de los objetos matemáticos (razonamiento lógico).

> *"la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausenta de ellos*." Piaget (1964).

En este sentido Giménez, (2015), explica que lo geométrico conceptual permite reconocer diferencias y similitudes como características de los objetos (**propiedades** geométricas como paralelismos, igualdades...) y observar el papel de las **definiciones** como forma de integrar y caracterizar el conocimiento. En el ámbito de la Geometría, (Canals, 1997) señala que son objeto de estudio:

- ***Las posiciones:*** las primeras relaciones espaciales para situarse uno mismo (orientación), y situar los objetos entre ellos (organización), realizadas por criterios de orden, de proximidad y separación. Más tarde las relaciones de posición se rigen por criterios de direccionalidad; para luego desarrollar las nociones de basadas en criterios de medición, que conducen a determinar la posición por sistemas de coordenadas
- ***Las formas***: Reconocimiento, definición y clasificación de las figuras de una dos o tres dimensiones, análisis de las propiedades de las figuras y cuerpos.
- ***Los cambios de posición y las formas*** o transformaciones, en este caso para poder entender las transformaciones geométricas, se hace necesario encontrar apoyo y comprensión en los dos aspectos anteriores.

En un estudio fenomenológico de (Hock, T. T., Yunus, A. S. M., Tarmizi, R. A., &Ayub, A. F. M. 2015), se explica a partir de los hallazgos que los maestros enfrentan dificultades en la enseñanza de las habilidades y conocimientos en `Formas y Espacio', que corresponde al programa de matemáticas en primaria, y que forma parte del currículo renovado para la escuela primaria (KSSR) basado en el Modelo de Educación de Malasia. Se identifica que si bien los profesores estaban familiarizados con el programa especial sobre el tema de `Formas y Espacio', el manejo de las teorías para el aprendizaje de la geometría era deficiente, por tanto, se hace necesario un fortalecimiento tanto desde la disciplina como desde la didáctica, con el fin de desarrollar sus competencias matemáticas en geometría especialmente en los niveles iniciales y primarios. Para ello, los futuros profesores, deben desarrollar competencias que les permitan entender conceptos, las propiedades que los definen, y las relaciones se establecen entre unos y otros. Todo esto, situado en experiencias de aprendizaje en contextos matemáticos, de manera, que se promuevan en los estudiantes, procesos cognitivos, considerando en la creación y gestión de situaciones matemáticas potencialmente significativas los conocimientos informales de los alumnos (Edo, 2005), potenciando el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En la medida que los maestros planifican experiencias de aprendizaje, considerando estos aspectos y etapas de desarrollo de los niños, se favorecerán procesos de construcción y exploración de distintos conceptos geométricos. Al respecto, en (Kirova, A., &Bhargava, A.,2002), explican que mientras los niños se dedican a una actividad, el profesor puede observar y participar, siendo un ente activo en la construcción de aprendizajes, esta interacción ayudará a los niños en el progreso de la comprensión de los conceptos matemáticos y la mejor manera de representarlos.

En este ámbito, un estudio realizado por Clements, et al, 2004, en que se buscaba identificar los niveles de comprensión de los niños y el desarrollo del pensamiento, a partir de actividades con material manipulable, (puzles de goma, posteriormente, hacen un trabajo con imágenes delineadas, imágenes de contorno), se concluyó que los niños a los 3 años en geometría pueden construir figuras y reconocer orientaciones espaciales, logrando identificar en una composición las figuras que la componen. Se identificó como los niños llegan a construir esta idea de composición de figuras, estableciendo niveles dentro de la composición, es así que al primer nivel le denominaron nivel pre-compositor, en el cual los niños hacen un primer acercamiento con las piezas. Luego en el segundo nivel "ensamblador de piezas" y un tercer nivel de "fabricar imágenes".

En (Muñoz-Catalán, 2013), se establece que las actividades de construir son muy importantes en el aprendizaje geométrico, y conforme se avanza en las etapas de construcción, se debe ir pasando de una fase manipulativa (en el sentido de "hacer") a un proceso más cognitivo, donde los procesos de visualizar y razonar espacialmente sobre cómo se hará la construcción y qué se obtendrá, serán muy relevantes. Cuando los niños desarrollan estas destrezas manipulativas, puede operar con los objetos o elementos físicos, como por ejemplo realizar plegados o recortes, lo que permite construir figuras, (Fernández, 2013) además de poner a prueba sus ideas, examinarlas, permite reflexionar sobre ellas y modificarlas. (Clements y Battista, 1992). Se converge entonces, en que la utilización diversos materiales geométricos (tangram), favorece procesos de composición y descomposición a partir de las formas más elementales para llegar a analizar y a componer las figuras más complejas, desarrollar ideas en relación a la proporcionalidad, a la ruptura de la visión horizontal- vertical que predomina en nuestro entorno (desafíos cognitivos), al desarrollo de la visión espacial, y el desarrollo de la simetría a partir de piezas idénticas. (Manuel, 2006; De Castro, 2015).

La construcción supone habilidades ligadas al uso de representaciones externas, con las cuales se puede dar idea de un concepto, comprobar razonamientos y generar nuevas visualizaciones. Al construir y deshacer las construcciones, el niño puede comprender cómo funcionan las figuras (o en general objetos geométricos) (sus características y propiedades) (Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2005). Estas construcciones pueden ser el punto de partida para que el alumno establezca conjeturas sobre propiedades o características de las figuras. Por lo tanto, el razonamiento geométrico, pone a los niños en acción, donde a partir del desarrollo de habilidades como la visualización, se les puede iniciar en las descripciones y comparaciones de propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes (Alsina, 2013), logrando una comprensión e interpretación de aspectos del conocimiento geométrico, a partir de una actividad consciente y reflexiva (Canals, 1997).

2.3.3. Simetría y educación infantil

Las transformaciones geométricas se visualizan con la observación de la dinámica natural: reflejos de agua, trayectorias de objetos (Alsina, C., Pérez, R., & Ruiz, C., 1989). En este sentido algunas transformaciones geométricas merecen una atención especial, por cómo se observan en la naturaleza, en el arte, en las figuras y formas, entre otros. Una especial atención para esta investigación está en la simetría, y sus propiedades. La simetría sale continuamente al encuentro, está en nuestro cuerpo, en nuestros movimientos, y en el entorno, (Knuchel, 2004), y es una parte fundamental de la geometría, la naturaleza y las formas. Las simetrías son transformaciones métricas, que parafraseando a Canals (2009), “les resultan muy entretenidas a los niños”, tal vez por la forma en cómo podemos construir esta idea, o por el uso de recursos cotidianos (espejos, papeles, material de construcción) que facilitan esta comprensión. En opinión de (Bohorquez, 2008; Canals, 2009), los problemas que involucran figuras simétricas son por lo general más fáciles de resolver que aquellos que se refieren a figuras asimétricas, entonces aplicar la simetría a una actividad que tenga un gran componente estético, promoviendo la experimentación, favorecerá la iniciativa y creatividad por parte de los estudiantes.

De Castro (2012, 2014, 2015), señala además que dependiendo de la situación o el contexto en que se involucre a los niños, la simetría resulta muy accesible para los niños pequeños, y tiene un modo muy diferente de descubrirse, o de construirse, la cual surge espontáneamente en las construcciones de los niños, sin haber mediado enseñanza alguna sobre este concepto.

Particularmente investigaciones de Clements & Burns, (2000), reportan que el descubrimiento de las transformaciones surge a edades muy tempranas, cuando los niños experimentan con rotaciones físicas, especialmente las rotaciones de sus propios cuerpos, ir adquiriendo un conocimiento limitado de la asignación del número de giros, en un principio mediante el establecimiento de puntos de referencia. Luego a través de una síntesis de estos esquemas, construyen transformaciones mentales dinámicas, cuantitativas que puedan proyectar en figuras estáticas.

En el estudio de las simetrías, Jaime y Gutiérrez (1996), explican que cuando los estudiantes construyen la imagen de un concepto, les permite discriminar todos los ejemplos de ese concepto. Específicamente en la simetría, ellos clasifican los errores de los alumnos sobre las simetrías en dos grupos:

1) Errores cuyo origen está en el concepto de simetría, ya que surgen cuando los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen:

- Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen, como se muestra en la figura (a), donde la imagen correcta aparece punteada:
- Falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto y su imagen
- Combinaciones de los dos errores anteriores. En todos los casos, los estudiantes olvidan alguna de las dos características de las simetrías, o ambas.

2) Errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría, que surgen cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual:

- Dibujo de la imagen paralela a la figura original, aunque ésta no sea paralela al eje.
- Desplazamiento horizontal o vertical de la figura, aunque el eje de simetría esté inclinado
- Combinaciones de los dos errores anteriores, y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica.

De manera general, para este nivel educativo, se pueden proponer problemas en relación con el espacio sensible, en los que el sujeto debe:

- Reconocer, describir, fabricar o transformar objetos;
- Desplazar, encontrar, comunicar la posición de los objetos;
- Reconocer, describir, construir, transformar un espacio de vida o de desplazamientos.

En opinión de Gutiérrez, (2015), se deben llevar a cabo propuestas en las aulas en las que el alumno construya su aprendizaje y las matemáticas impregnen su relación con el entorno cotidiano, por tanto, se hace necesario el diseño de tareas que promuevan la construcción y comprensión de aprendizajes matemáticos, mediados por el juego y la manipulación de materiales. Un tipo de actividades propuestas a niños en (Gutiérrez, 2015, De Castro, 2011, 2014) que desarrolla la construcción de estructuras con distintos materiales, pone en juego diversos conceptos matemáticos como el tamaño de la base (para lograr equilibrio), la simetría, además potencia las habilidades de visualización y de relaciones espaciales, la discriminación perceptiva de las relaciones topológicas y la adquisición de forma vivencial de nociones de situación, orientación y dirección en relación con el propio cuerpo y otros objetos. (Como se muestra en la fig. 4).

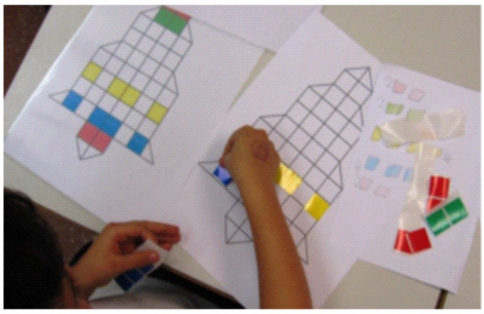


Fig. 1. Un alumno pegando pegatinas

Fig. 2. Resultado de un trabajo de construcción

Fig. 4. Trabajo con pegatinas y bloques de construcción extraído de Gutiérrez, 2015

Conceptualización de la simetría

Etimológicamente, simetría proviene del vocablo griego "symetría", significando "sym" con o conjuntamente, "metrón", medida, y denotando el sufijo "ia" una cualidad. Implica una proporcionalidad de un todo consigo mismo y entre las partes que lo componen.

Diversos investigadores (Canals, 2009; Johnston-Wilder, S., & Mason, J. 2005), señalan que el concepto de simetría puede entenderse desde diferentes perspectivas, bien como la asociación intuitiva con la idea de proporción, al equilibrio, hasta desarrollar una definición matemática precisa que la refiere como invariabilidad de una configuración de elementos bajo un grupo de transformaciones. En este rango de definiciones, se puede pensar y aceptar de mejor manera todo aquello que parece simétrico a lo que no lo es.

Tipos de simetría

- *Simetría bilateral:* es especifica en explicarse por la presencia de *un único plano*, denominado *plano sagital*, que de una forma espectacular fracciona el cuerpo de un ser en dos partes iguales, nombradas como mitad derecha y mitad izquierda.
- *Simetría central*:Una simetría central, de centro el punto O, es un movimiento del plano con el que a cada punto P del plano le hace

corresponder otro punto P', siendo O el punto medio del segmento de extremos P y P'.

- *Simetría axial:E*s un movimiento del plano determinado por una recta r del plano de tal manera que un punto P' del plano es la imagen de un punto P dado (el simétrico de P) si la recta r es la mediatriz del segmento PP'. A la recta r se le llama eje de simetría y todos los puntos de este eje son dobles (la imagen de cualquier punto de r es el mismo punto).

Un sistema tiene simetría axial cuando todos los semiplanos tomados a partir de cierto eje y conteniéndolo presentan idénticas características. En la simetría axial se da el mismo fenómeno de la imagen reflejada en el espejo, donde la imagen de cualquier punto se determina trazando la perpendicular por dicho punto al eje de simetría y llevando la distancia del punto al eje al otro lado del eje a partir de él. La figura y su simétrica conservan el tamaño y la forma. A los puntos que pertenecen a la figura simétrica se les llama puntos homólogos, puntos simétricos o puntos imagen, es decir, A' es homólogo de A, B' es homólogo de B, y C' es homólogo de C (simétrico de A, imagen de A, etc.). (Esto se muestra en la figura 5)

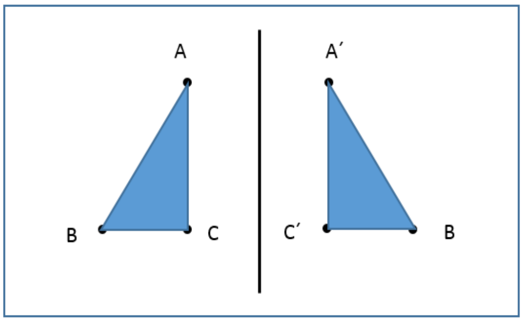


Fig. 5: Identificación de puntos homólogos de las figuras

Dada una recta e se llama simetría axial de eje e al movimiento que transforma a un punto P en otro punto P' verificando que:

- El segmento PP' es perpendicular a e.
- Los puntos P y P' equidistan del eje e.

Dicho de otra forma, el eje e es la mediatriz del segmento PP'

Para reconocer que un determinado movimiento es una simetría axial (se parte de una figura y su transformada), la mediatriz de los segmentos que unen cada punto con su transformado debe ser común, por lo que se debe trazar los segmentos, la mediatriz de uno de ellos y comprobar que dicha recta es perpendicular a todos ellos (así que todos son paralelos entre sí) y que los divide en dos partes iguales.

Propiedades de la simetría axial

- La imagen de cualquier punto se determina trazando la perpendicular por dicho punto al eje de simetría y llevando la distancia del punto al eje al otro lado del eje a partir de él.
- La simetría axial conserva la medida de los ángulos, las distancias de la longitud de los segmentos, y los puntos homólogos están a la misma distancia al eje de simetría.
- La imagen de una recta paralela al eje de simetría es otra recta paralela.
- La simetría axial es un movimiento involutivo (la figura simétrica de la simétrica de una figura dada es la propia figura de partida).
- Todos los puntos del eje r de una simetría axial son dobles, por lo tanto r, es una recta invariante.
- Las rectas perpendiculares al eje r, de una simetría axial son invariantes.
- Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una figura simétrica y al eje de la simetría axial se le llama eje de simetría de la figura.
- La simetría axial es un movimiento inverso (no conserva la orientación)

2.3.3.1. Elementos matemáticos para la construcción de la simetría

A partir de la revisión teórica, respecto del pensamiento geométrico, particularmente en el contexto de la simetría, se ha reconocido que, en la construcción de esta noción geométrica, intervienen distintos elementos matemáticos que permiten reconocer la construcción de esta noción matemática. Es así que se identifica: (1) perpendicularidad y paralelismo, (2) relaciones de semejanza y congruencia de figuras y formas, (3) relaciones de orientación espacial, y (4) eje de simetría; (5) segmentos homólogos; (6) figura isométrica; (7) movimiento involutivo, y (8) puntos dobles, como elementos que permiten progresar en la elaboración y construcción de la idea de simetría. Se propone una pequeña definición para cada uno de estos elementos matemáticos.

Perpendicularidad y paralelismo: Perpendicularidad es una relación que se establece entre dos rectas que al cortarse forman cuatro ángulos iguales de 90º.Paralelismo es una relación que se establece entre dos rectas que mantienen una equidistancia entre sí, y que, aunque se prolongue su trayectoria hasta el infinito, nunca, en ningún punto, sus trazos pueden bifurcarse, tocarse, encontrarse.

Semejanza, equivalencia y congruencia de figuras y formas: Vinner y Tall, (1981, citados por Meel, 2003), señalan que un estudiante va adquiriendo conceptos, en tanto construya imágenes de los mismos; esa evocación de imágenes permite que se construya un puente entre el concepto y lo que el estudiante percibe de este, no obstante, esto no significa que siempre exista coherencia entre las partes, es decir, la imagen del concepto puede ser diferente de la definición formal del concepto. A partir de la construcción de formas los niños establecen relaciones entre distintos objetos y entre distintas combinaciones de piezas, desarrollando construcciones simétricas.

En opinión de Bressan (2000), el desarrollo de las habilidades visuales de constancia perceptual y percepción de la posición en el espacio, permitirá que los niños comprendan, interpreten y comuniquen relaciones y propiedades geométricas. En este sentido, los esquemas perceptivos no solo informan sino transforman al perceptor en su interacción con el entorno, que al mismo tiempo construye esquemas y categorías perceptuales de tipo cognitivo: naturales (verticalidad, horizontalidad, profundidad, claroscuro); de diseño (punto, línea, figura, forma, textura, color...), relacionales (dirección, movimiento, contraste, superposición, transparencia...), inferenciales (simbolismo, fragmentación, inversión, distorsión, transformación, desmaterialización...)(Neisser, R., 1981).

En el seguimiento de un estudio llevado a cabo por (Hannibal & Clements, 2008), se pidió a niños de tres a seis años, ordenar una variedad de formas manipulables, que presentaban también ciertas características matemáticas como: asimetría, simetría y formas. Para los niños, aspectos considerados importantes para hacer esta ordenación, fueron la simetría y asimetría, en donde muchos niños rechazaron triángulos porque "el punto en la parte superior no se encontraba en el centro". Resulta particularmente interesante en este caso, los resultados de esta investigación, en el sentido que confirman que la idea de simetría, surge en los niños a temprana edad, casi de manera natural, como se explica en distintos estudios.

Relaciones de orientación espacial: La construcción temprana de habilidades espaciales y el desarrollo del pensamiento espacial, requiere además destreza para visualizar los elementos geométricos en el espacio y abarca especialmente la visualización (Flores, 2005), esto favorece en los niños la comprensión de la descripción de similitudes y diferencias de las formas y del reconocimiento de las simetrías*.* (Clements, 2015). En este sentido aspectos relevantes para la construcción de las relaciones espaciales en el niño, están vinculado con la percepción espacial, la organización espacial y las representaciones mentales que tiene de su propio esquema corporal y de sus movimientos. Esto le permite desarrollar ideas basadas en la observación específica de su entorno, (conceptos de "arriba" y "abajo"), y en relación con su propio esquema corporal, (conceptos de "delante" y "detrás"). (Berdonneau, 2008). Interiorizada estas relaciones, pueden construirse conocimientos y comprensión sobre situaciones relativas de los objetos. Este proceso puede llevarse a cabo de dos maneras, una que dice relación con una proyección por transmisión sobre el objeto, y otra que dice relación con una proyección hacia el objeto. (Proceso de descentración). En este sentido son imprescindibles actividades con el meso espacio, para lograr construir relaciones de orientación espacial, (posición, ubicación, orientación, desplazamientos, trayectorias y coordenadas).

Las descripciones de las relaciones espaciales para el niño, conllevan una dificultad, esta se produce cuando tiene que pasar de una situación vivida, en relación de un objeto consigo mismo, a una situación representada. En este sentido, el desarrollo de diversas habilidades contribuirá a la adquisición de este conocimiento, como, por ejemplo, el desarrollo de la estructuración espacial (habilidad para organizar el espacio en dos dimensiones), habilidades de visualización espacial, (procesos mentales de procesamiento visual e interpretación de la información figurativa). En la tabla 1, se muestra el desarrollo de aspectos del pensamiento espacial, en niños de cero a seis años, evidenciando los procesos de desarrollo y algunos aspectos que permiten reconocer la construcción de este pensamiento. Esta progresión en el desarrollo del pensamiento espacial, se elaboró a partir de una revisión de actividadesy sustento teórico.

Tabla 1. Desarrollo de algunos aspectos del pensamiento espacial en niños de 0-6 años

Etapa	Procesos de desarrollo	Algunos aspectos del pensamiento espacial
0- 3 años	*Observación especifica de su entorno (percepción visual)*	Puede establecer las primeras relaciones espaciales con los objetos (dentro- fuera; encima-debajo). Identifica polaridades (arriba-abajo; izquierda-derecha) Identifica posiciones, ubicaciones y recorridos, utilizando sistemas de referencia
3-6 años	*Comprensión de situaciones relativas de los objetos (procesamiento visual*	Proyección por transmisión del objeto (micro espacio). Establece relaciones espaciales de ubicación, dirección, orientación, distancia. (estructuración espacial) Establece una proyección hacia el objeto (micro espacio) Interpretación de la información figurada. Desarrolla procesos de transformación de unas imágenes en otras.

Según Gonzato (2011), el desarrollo de este tipo de habilidades, permitirán no solo "ver" los objetos y los espacios, sino también reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones.

Eje de simetría: Recta que, al ser tomada como sostén de giro en el movimiento de una figura, hace que se superpongan todos los puntos análogos. En Palmer (1985, citado por Sarama&Clements, 2009), se señala que la percepción de la simetría, se puede ver desde dos maneras, a nivel mundial (preferencia por la simetría con respecto a la vertical, y, en menor medida, eje horizontal) y local (simetrías dentro de una forma, incluso si los ejes no son verticales u horizontales). En este sentido (Seo y Ginsburg, 2004), plantean que una progresión de tareas coordinadas, debe considerar tareas de horizontalidad y verticalidad, de manera de reflejar una tendencia hacia el desarrollo de otros elementos matemáticos como por ejemplo la perpendicular, aunque la construcción de la imagen de una figura por una simetría resulta bastante más difícil si el eje no es vertical, (Godino, 2002) (Como se muestra en la fig.6)

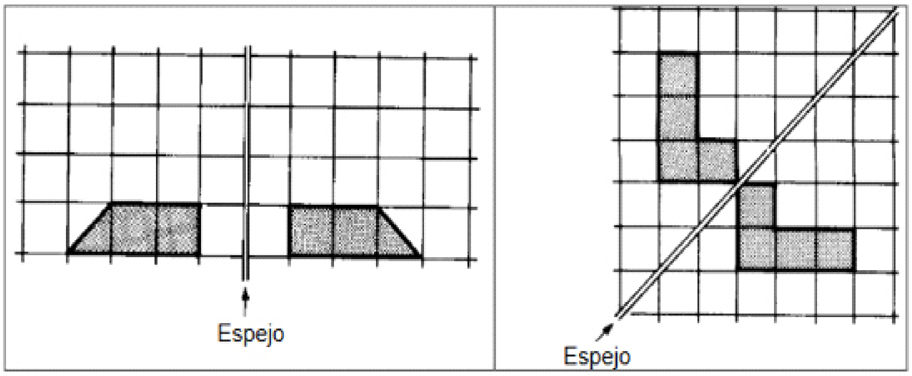


Fig.6. Actividad desarrollada en Dickon, Brown y Gibson, 1991, p. 75; citada en Godino, 2002.

Particularmente centrarse en el pensamiento y la comprensión de los estudiantes mediante la identificación de elementos matemáticos claves para el proceso de instrucción (Simón y Tzur, 2004; Simón, 2006), permite además tener mayores aportes para desarrollar unas trayectorias de aprendizaje (Clements, et al 2009, 2011), demostrando un mejor nivel del desarrollo profesional.

Segmentos homólogos: Los segmentos homólogos, son los segmentos que se corresponden y que ocupan el mismo lugar en otra u otras figuras. Son iguales en longitud, y en la medida de los ángulos correspondientes, pero invierte el sentido de los ángulos.

Figura isométrica: Las figuras isométricas son figuras que conservan la forma y medida. Las figuras isométricas, transforman todos los puntos P por el movimiento en otros puntos P´, que son también puntos de la figura. Las transformaciones isométricas son cambios de posición (orientación) de una figura determinada que no alteran la forma ni el tamaño de ésta.

Movimiento involutivo: Una simetría respecto a un eje ***e*** es un movimiento que transforma cada punto **P** del plano en otro **P'**, de modo que la recta ***e*** es mediatriz del segmento de extremos **P y P'.** Según esta definición, debe cumplirse que:

- La recta ***e*** debe ser perpendicular al segmento **PP'**
- La distancia de P a la recta e será igual que la distancia de P' a dicha recta.

Puntos homólogos o puntos dobles: A los puntos que pertenecen a la figura simétrica se les llama puntos homólogos, es decir, A’ es homólogo de A, B’ es homólogo de B, y C' es homólogo de C. Además, las distancias existentes entre los puntos de la figura original son iguales que las distancias entre los puntos de la figura simétrica. Si se doblara la figura sobre el eje de simetría trazado, se podría observar con toda claridad que los puntos de las partes opuestas coinciden, es decir, ambas partes son congruentes.

2.3.3.2. Procesos matemáticos y cognitivos para la construcción de aprendizajes geométricos.

Los procesos matemáticos, y cognitivos permiten experimentar con las formas de los objetos y construir progresivamente relaciones entre estos, favoreciendo la apropiación del conocimiento. De cierta manera, se puede explicar cómo una operación interna que permite operar sobre la representación de un objeto, donde a partir de esa operación podemos obtener información conceptual o una representación conceptual. A partir de estos procesos, además, se puede reconocer estrategias desarrolladas para poder dar cuenta de esa construcción.

Procesos de comparación

La comparación de figuras y formas, se realiza al establecer relaciones lógicas entre objetos, esto permite llevar a cabo procesos de comparación entre dos o más elementos, en función de distintos atributos, siendo el atributo del tamaño, el que los niños asimilan primero cuando realizan cualquier construcción. Según (Clements y Battista, 1992; Clements 2014), la manipulación de objetos permite a los estudiantes poner a prueba sus ideas, examinarlas, reflexionar sobre ellas y modificarlas. Las actividades de comparar objetos ayudan al aprendizaje de la discriminación visual, descubriendo figuras iguales y diferentes dentro de un conjunto, distinguir figuras semejantes o congruentes. Este proceso solo se puede llevar acabo si el niño puede actuar con los objetos, manipularlos, (fase manipulativa), en este se habla de destrezas manipulativas en sentido clásico, pues se opera con objetos que son a la vez elementos físicos y modelos geométricos. Esto se puede dar cuando al construir figuras se recorta o pliega un material, o se copia un modelo determinado.

Según Clements y Battista (1992), la manipulación de objetos permite a los estudiantes poner a prueba sus ideas, examinarlas, reflexionar sobre ellas y modificarlas. Esto le permitirá transitar progresivamente a tomar conciencia de las semejanzas y diferencias (descubrimiento) entre estos objetos, de manera de formar nuevos esquemas más precisos que le permitirán conocer cada objeto individualmente y distinguirlo de otros. (Fase relaciones lógicas), hasta llegar a un nivel de abstracción, (cualquier concepto es un proceso de elaboración interna) por ejemplo dos objetos tienen igual medida pero diferente orientación.

La investigación indica que numerosos materiales educacionales introducen a los niños en la comprensión de conceptos de manera abrumadoramente rígida y limitada (Sarama y Clements 2009, p.216), y más aún, que tales prototipos pueden dominar el pensamiento de los niños durante todas sus vidas (Vinner y Heshkowitz 1980; Fujita y Jones, 2000). Se explica que puede haber una conexión entre el modo en que los conceptos son introducidos y la percepción que los niños adquieren de cada forma o correspondientemente que tipo de prototipos determinan su percepción.

Procesos de composición y descomposición

En opinión de (Clements et al., 2004, 2011), en el proceso de la comprensión de la composición, los niños transitan por tres niveles: ensayo y error, uso parcial de atributos geométricos y de estrategias mentales para crear figuras dentro de la composición de formas. A partir de los tres años los niños, construyen figuras y reconocen orientaciones espaciales, y logran identificar en una composición las figuras que la componen. Experiencias de juego con material concreto diseñado para favorecer la actividad matemática, permite que se favorezcan el desarrollo de procesos de composición y descomposición de figuras y formas. (Como se observa en la fig. 7)

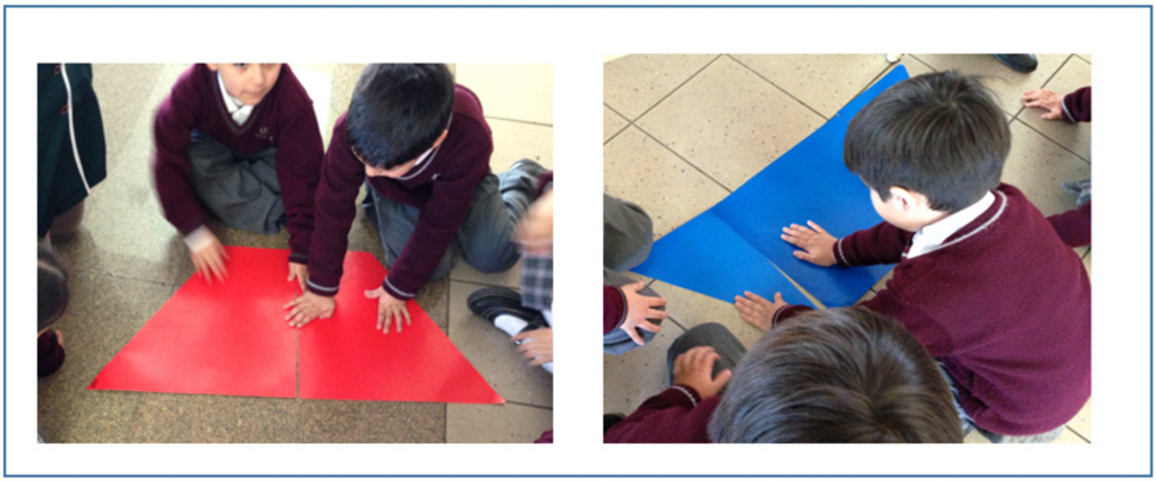


Fig. 7. Actividad de Proyecto con financiamiento interno, UCM, Chile, 2011. "Turismo matemático"

El razonamiento cualitativo acerca de las relaciones parte-todo proporciona las bases para las composiciones y las descomposiciones más avanzadas. (De Castro, 2011, 2012, 2015). En este caso en particular la operación de composición, que están realizando los niños con las figuras, dentro de un grupo de movimientos, permite observar también las simetrías de una figura.

En un estudio de Seo y Ginsburg, (2004), en que utilizaban bloques de construcción, concluyen que los preescolares utilizan, al menos intuitivamente, conceptos geométricos bastante sofisticados, y que en sus construcciones se producen simetrías. Citan un caso de un niño que construye una estructura simétrica, y en la cual, a partir de su construcción, se podrían asociar otros conceptos como paralelismo y perpendicularidad, pues él puso bloques paralelos, y bloques transversales (puente).

En opinión de De Castro (2011, 2012), la composición y descomposición de formas geométricas, son dos de los procesos fundamentales en el aprendizaje de la geometría espacial, por tanto, el desarrollar esta competencia de composición y descomposición, proporciona una mayor guía a lo largo de la trayectoria de aprendizaje de la simetría. Favorecer y desarrollar estos procesos las experiencias de juego con material concreto, debiese ser una de las estrategias utilizadas por los profesores para construir este aprendizaje matemático.

Procesos de visualización

En opinión de (Castiblanco, 2004), l,as dificultades en el ámbito de la geometría, es que los estudiantes deben pasar de un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal, apoyado en la visualización, a manera de generar un razonamiento que no se basa en una simple descripción de una figura, sino que encadena proposiciones usando inferencia lógica, donde se enuncian definiciones y teoremas. Argumentado en distintas investigaciones, se explica que muchos de los obstáculos o dificultades en el aprendizaje de la geometría pueden sorteados, si los profesores son capaces de encontrar más y mejores formas de representar un determinado concepto, desarrollando así procesos cognitivos.

En geometría, se puede distinguir tres tipos de procesos cognitivos: la visualización, (que constituye el soporte de la actividad cognitiva y que tiene relación con la representación); el razonamiento, que tiene relación con los procesos discursivos y de justificación de la actividad geométrica; y los procesos de construcción los cuales nos permiten elaborar configuraciones, que pueden actuar de modelos mediante los cuales se pueden realizar acciones, y así relacionarse con objetos matemáticos representados.

Se señala que uno de los grandes problemas de la visualización como objeto de investigación ha sido su propia definición y los diferentes nombres con los que se asocia. En (Gutiérrez, 1996; Castiblanco, 2004; Guillén, 2010; Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012; Fernández ,2012) aparecen listados de diferentes concepciones de la visualización espacial en las que el concepto de imagen juega un papel central, junto con otros tres elementos: las representaciones externas, los procesos para manipular esas imágenes y las habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes (Gutiérrez, 1996).

En los últimos años la visualización ha adquirido una gran importancia en el campo de la geometría. Para Hershkowitz et al (1996) la visualización se entiende como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos y sus representaciones a algún tipo de representación visual o viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra, denominadas aprehensiones.

Para Arcavi (2003), la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente o sobre el papel con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión. En este mismo sentido Alsina et al. (1997), señala que visualizar es tener la capacidad de producir imágenes que ilustren o representen determinados conceptos, propiedades o situaciones, Clements, (2009), con el fin de representar y comunicar información.

Un elemento importante según Duval, (1999), es el uso de sistemas de representación semiótica para el pensamiento, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación. No obstante, el mismo Duval advierte que, "las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que está asociado."

Los diferentes sistemas utilizados como sistemas de representación en matemática son las figuras, las gráficas, la escritura simbólica y el lenguaje natural. Es por esto que una representación funciona verdaderamente como representación, cuando da acceso al objeto representado. Particularmente la visualización espacial implica la comprensión y la realización de transformaciones imaginarias de dos y tres objetos tridimensionales.

Procesos de construcción y razonamiento

Los procesos de construcción y razonamiento, sirven para elaborar configuraciones que pueden actuar como modelos en los que realizar acciones, y los resultados obtenidos se puedan relacionar con los objetos matemáticos representados. En este sentido para Hershkowitz, (1998), los procesos de razonamientos son considerados como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen. Sin embargo "la principal dificultad está en la necesidad que se tiene, de conocer lo que pasa en la cabeza de nuestros estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamientos, como analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuando y como toman decisiones." (Gutiérrez, 2005). El razonamiento geométrico utiliza las imágenes de los conceptos, que reflejan sus propiedades, como la forma, la posición y el tamaño, pero también las cualidades ligadas a su definición.

2.4. Trayectoria de aprendizaje de la simetría.

En el ámbito de la investigación educativa en matemática, recientes estudios con profesores en formación han constatado que la introducción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje mejora sus habilidades para usar el pensamiento de los escolares (Clements, Sarama, Spitler, Lange y Wolfe, 2011; Gómez, 2014); guía sus decisiones de instrucción (Wilson, 2009); y mejora su conocimiento del contenido matemático. Desde la mirada de estos investigadores, se argumenta, que existen razones para promover el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje, pues impacta en el conocimiento de los profesores, en el diseño de la instrucción y en la selección e implementación de tareas. Se pone de manifiesto que el desarrollo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje es un desafío para la Educación Matemática (Steffe, 2004) y que se hace necesario transformarlas en herramientas para el profesor (Daro, Corcoran y Mosher, 2011).

Clements et al. (2009), señala que las trayectorias de aprendizaje son descripciones del pensamiento de los niños, de cómo ellos logran aprender dominios específicos matemáticos, y del camino progresivo del conocimiento a partir del desarrollo de tareas, donde se movilizan procesos cognitivos, de comunicación, de representación que permite evidenciar la construcción y aprendizaje de esos tópicos matemáticos. Por tanto, las trayectorias de aprendizaje de un concepto matemático intentan describir las progresiones en el aprendizaje de ese concepto, proporcionando una base de conocimiento para la toma de decisiones de los maestros, sobre cuándo enseñar qué tópico y cómo hacerlo. (Martínez, F. J, 2015)

Particularmente en el ámbito del diseño de tareas, distintas investigaciones señalan que se deben desarrollar propuestas que pongan al alumno en variadas situaciones y contextos (Llinares, 2009; 2016), donde se favorezcan mecanismos para la comprensión e identificación correcta de todos los ejemplos de un concepto, así como la exclusión de todos los que no son ejemplos, o ejemplos no prototípicos y distractores para construir un cuerpo de conceptos sólido (Owens 1999), potenciando así los procesos de enseñanza aprendizaje.

Específicamente, la realización de tareas de aprendizaje en el ámbito geométrico aporta mayor comprensión del mismo, a partir de la identificación e interpretación y análisis de las dificultades de aprendizaje. Esto implica, poner en acción y modificar cualitativamente los conocimientos geométricos, activando y desarrollando una serie de procesos mentales o acciones, a través de un desarrollo progresivo de niveles de pensamiento, (Clements y Sarama 2004), potenciando la transformación del conocimiento aprendido por los futuros maestros en conocimiento susceptible de ser aprendido por los alumnos de Educación Infantil (Martínez, F, 2015), Esto subyace al sentido de las tareas, como elementos determinantes, de lo que los estudiantes pueden llegar aprender, y donde la reflexión se presenta, en como los maestros eligen las tareas, donde se entraman el conocer las matemáticas, y como se construye el conocimiento matemático.

En cuanto a la trayectoria de aprendizaje (Clements et al, 2004), hace hincapié en tres elementos relevantes que:

- Un objetivo matemático (esto es un aspecto del dominio matemático que los niños deberían aprender)
- Un modelo de cognición al que llaman progresiones del desarrollo y
- Unas tareas de instrucción en las que los estudiantes progresan a través de los niveles de desarrollo.

Bajo esta mirada, las trayectorias de aprendizajes son particularmente útiles, pues promueven el desarrollo del conocimiento matemático, de las estrategias que se pueden proponer para ese desarrollo, mejora los niveles de comprensión y habilidades, permitiendo que sean cada vez más sofisticados, conformándose en una potente herramienta para poder desarrollar competencias profesionales. Que los futuros profesores conozcan las trayectorias de aprendizaje de los diferentes tópicos matemáticos y el papel que pueden desempeñar los materiales didácticos para favorecer las transiciones críticas en estas trayectorias puede ser esencial para desarrollar una competencia docente.

Un modelo de una trayectoria hipotética de aprendizaje en (Clements et al 2004, 2007), sobre la composición de figuras, con niños de infantil, señala que los niños avanzan a través de niveles de ensayo y error, del uso parcial de atributos geométricos y de estrategias mentales para crear figuras dentro de la composición de formas. Esta trayectoria hipotética, permite explicar a través de estos tres pasos como los niños pueden progresar en la comprensión de procesos de composición de figuras. Para avanzar en esta comprensión sin embargo es necesario un diseño de tareas que generen ventanas para poder desarrollar este aprendizaje. Al respecto, se coincide con Ponte (2004), en el sentido que las tareas, deben presentar una oportunidad para los estudiantes de formar ideas sobre la utilidad y el papel de las matemáticas, y las situaciones donde se puedan aplicar estas ideas, por tanto, la reflexión está, en como los maestros eligen o diseñan estas tareas para promover los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En Martínez, F. J, (2015), se señala que, las trayectorias de aprendizaje implican hipótesis sobre el orden y la naturaleza del crecimiento de la comprensión matemática de los estudiantes y sobre el tipo de actividades que podrían apoyar la transición paso a paso hacia los objetivos pretendidos en el currículum de matemáticas de la educación infantil.

Diseño de una trayectoria de aprendizaje para la enseñanza de la simetría

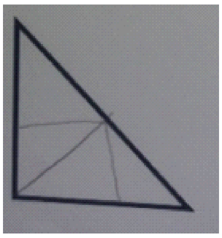
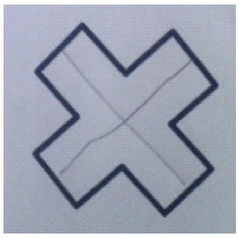
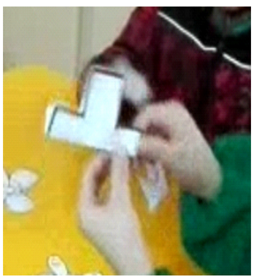
Así como los niños siguen procesos naturales de desarrollo en su aprendizaje y crecimiento, también siguen procesos naturales en el aprendizaje de las matemáticas, desarrollando habilidades, procesos y construyendo ideas de algunas nociones matemáticas (Clements, 2015). Que los futuros profesores conozcan y comprendan como es el desarrollo de estas habilidades y procesos, les ayudara en la elaboración de secuencias de actividad para progresa en la construcción del conocimiento matemático

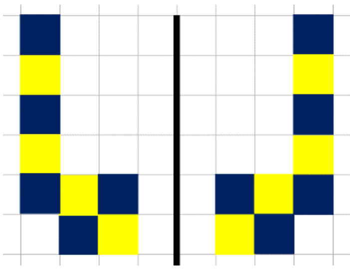
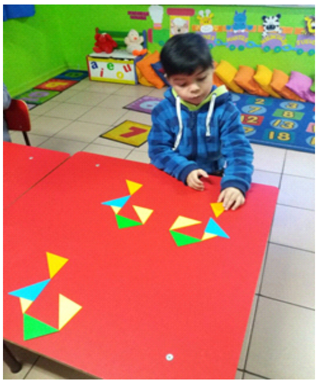
Considerando los elementos que identifica Clements, (2004), en relación a que para poder desarrollar una trayectoria de aprendizaje, se hace necesario tener un objeto o meta matemática, en este caso para esta investigación, se considera, la simetría como aspecto del dominio matemático; una ruta de desarrollo, a lo largo de la cual los niños debiesen progresar para alcanzar el dominio del concepto matemático como es la simetría, a partir de un conjunto de tareas de instrucción que les ayudaran a progresar en los niveles de pensamiento, para la comprensión de este tópico matemático. (Clements, 2015).

Como se comentaba en apartados anteriores, se ha identificado elementos matemáticos que son relevantes para construir la idea de simetría, sobre estos aspectos, se ha elaborado y presentado una trayectoria para el aprendizaje de la simetría. Todas las actividades fueron desarrolladas con niños, de manera de entregar una visión concreta y objetiva respecto del tránsito en sus procesos de aprendizaje.

Tabla 2. Diseño de una trayectoria de aprendizaje para la simetría

Edad	Progresión del desarrollo	Tareas instructivas
3 años	**Simetría con movimientos con espejo**	Proporcionar ambientes que permitan practicar y realizar movimientos frente a un espejo.
	Efectúa movimientos y distintas posiciones.	Animar a los niños a realizar distintas posiciones y movimientos que puedan observar y comentar.
	Utiliza distintos objetos para ver la imagen en el espejo.	Los niños copiaran distintas posiciones que realizan sus compañeros.
		Utilizar un lenguaje geométrico, como paralelo, semejante, distancia.
		
	Copia distintas posiciones de otros niños.	

4 años	**Simetrías con movimientos y materiales** Representa movimientos simétricos con sus compañeros. Efectúa movimientos inversos, desarrollando visualmente la capacidad de interpretar un modelo en el espacio.	Los niños tienen que hacer distintos movimientos para que su compañero pueda imitar estas mismas acciones frente a frente, o en distinta orientación. Utilizar lenguaje geométrico como simétrico, movimientos simétricos, orientación, visualización espacial.  
5 años	**Simetría dibujando los ejes.** Trabajar con distintas figuras marcando lo ejes de simetría. Constatar que los ejes divide a la figura en dos planos iguales.	Este tipo de tareas permite que los niños hagan el recorrido hacia la simetría. Con estas acciones de dibujar, donde se ha conservado el plano, y no hay cambio de posición. Observar que las figuras pueden tener más de un eje de simetría.  
	Simetría doblando papel Trabajar en forma concreta una figura plana, con simetría bilateral, descubriendo las propiedades de esta simetría Manipula imágenes de papel doblándolas por las rectas del eje, primero figuras rectas, para luego figuras de distintas formas. Constatar que el eje de simetría divide la figura en dos semiplanos iguales.	Las tareas del doblado facilitan el descubrimiento de las rectas que unen puntos de una figura con sus puntos imagen. Trabajar con el eje para identificar que el eje divide a la figura en dos planos iguales. También observar la equidistancia de puntos simétricos  

6 años	**Simetría copiando figuras simétricas.** Practicar simetrías con figuras manipulables	Este tipo de tareas permite que los niños observen las propiedades de la simetría. Igualdad de medidas de cada figura simétrica al eje de simetría. (equidistancia de los puntos de cada figura simétrica)  Realizar tareas de manera de identificar que en la simetría todos los puntos de una figura son puntos imagen de la figura simétrica. Poner figuras en distintas posiciones, distinta orientación, considerando las distancias al eje de simetría  Copiar imágenes simétricas, según patrones de figuras 

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para dar respuesta a las preguntas y los objetivos planteados, se optó por un enfoque cualitativo de tipo descriptivo. La investigación cualitativa se conoce como aquella que produce datos descriptivos, las propias palabras de las personas, ya sea de forma oral o escrita y las conductas observables.

3.1. Paradigma y enfoque.

Se entiende por paradigma, Díaz, C (1991), a una concepción del objeto de estudio de una ciencia, de los problemas generales a estudiar, de la naturaleza de sus métodos técnicas de información requerida, y finalmente de las formas de explicar, interpretar o comprender los resultados de la investigación realizada. Valles, M (1997), señala que un paradigma es una imagen básica del objeto de una ciencia. Sirve para definir lo que debe estudiarse, las preguntas que es necesario responder, cómo deben preguntarse y que reglas es preciso seguir, para interpretar las respuestas obtenidas. El paradigma, es la unidad más general de consenso dentro de una ciencia, el cual sirve para diferenciar una comunidad científica de otra.

Esta investigación se adscribe al paradigma cualitativo- interpretativo, ya que se pretende interpretar, la comprensión de un fenómeno. En este caso, se buscará *caracterizar la competencia profesional en futuros profesores de educación infantil, sobre la comprensión de aspectos de la simetría, que permitirá desarrollar en los niños competencias matemáticas a través de actividades que involucran ideas simétricas.*

3.1.1. Enfoque y diseño

Para dar respuesta a los objetivos de investigación se optó por un enfoque cualitativo de tipo descriptivo. La investigación cualitativa se conoce como aquella que produce datos descriptivos, las propias palabras de las personas, ya sea oral o escrita y las conductas observables. (Pérez Serrano, 1994). Vale decir, que las personas le asignan significados a distintos objetos sociales o de cualquier tipo, está muy vinculada al análisis de lenguaje, ya que los significados se acumulan en el lenguaje (el lenguajes un reservorio objeto de significado).

La investigación cualitativa ha tenido varias definiciones, dependiendo del momento, Denzin y Lincoln (1994), destacan que es multi metódica en el enfoque, ello implica un enfoque interpretativo, naturalista hacia un objeto de estudio. Es decir, que los investigadores cualitativos estudian la realidad en su contexto tal y como sucede, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas.

> *La investigación cualitativa no es tarea que se asocie a un momento dado en el desarrollo del estudio. Más bien, resulta del fruto de todo trabajo de investigación. En ocasiones el problema de investigación se define, en toda su extensión, solo tras haber completado uno o varios ciclos de pregunta, respuestas y análisis de esas respuestas. (…) Al investigador cualitativo le pedimos que ofrezca, no una explicación parcial a un problema, como el modo que pedimos un determinado conjunto de variables condiciona la forma en que se nos muestra otro conjunto de variables, sino una comprensión global del mismo. (*Rodríguez G, y Gill J, y García E. 1996).

Para Le Compte (1995), la investigación cualitativa podría entenderse como "una categoría de diseños de investigación que extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, grabaciones, registros escritos de todo tipo. La investigación cualitativa consiste en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, es aquella donde se estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema (Albert, 2007).

La investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento (Albert, 2007). Se interesan por la vivencia concreta en su contexto natural y en su contexto histórico, por las interpretaciones y los significados que se atribuyen a una cultura particular, por los valores y los sentimientos que se originan. Es decir se interesan por la realidad, tal y como la Conocimiento matemático para la enseñanza en la resolución de problemas geométricos interpretan los sujetos.

Según su naturaleza, dicha investigación es de tipo empírica, ya que se trabaja con hechos directos que no son manipulados. En cuanto a su alcance temporal, está es seccional o sincrónica, ya que las tareas se darán en un momento específico y en un tiempo único.

Finalmente, según sus fuentes es una investigación que se desarrolla en base a datos primarios, debido a que los hechos son recogidos para la investigación y por aquellos que la efectúan (Rodríguez G., Gil J., García E.; 1996).

3.1.2. Método

El caso o los casos de un estudio pueden estar constituidos por un hecho, un grupo, una relación, una institución, una organización, un proceso social, o una situación o escenario específico, construido a partir de un determinado, y siempre subjetivo y parcial, recorte empírico y conceptual de la realidad social, que conforma un tema y/o problema de investigación (Vasilachis, 2006). Específicamente, el estudio de caso, tiene como objetivo indagar en profundidad un fenómeno en su contexto utilizando múltiples fuentes de evidencia, es decir, las perspectivas y versiones de los diferentes actores (Borges, 1995).

Permite el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos por su carácter inductivo (Bisquerra, 2009). Es de esta manera que el investigador pueda alcanzar una mayor comprensión de un caso particular, conseguir una mayor claridad sobre un tema (Stake, 1994). El estudio de casos fue fundamental para el desarrollo de esta investigación ya que a partir de ello se obtuvieron resultados para ir construyendo el conjunto de la información relevante en esta investigación.

3.2. Contexto y participantes

En esta investigación participaron dos grupos de futuros profesores de educación infantil. Un grupo (llamado desde ahora G1) estuvo conformado por veinte y ocho FMI de tercer grado de la Universidad de Barcelona (España), con rango etario de entre 21 y 26 años que en ese tiempo, cursaban la asignatura de

Didáctica de las Matemáticas. (Como se observa en la Fig. 3.2.1, Mapa Curricular de la Formación de Maestros de Educación Infantil. Universidad de Barcelona).

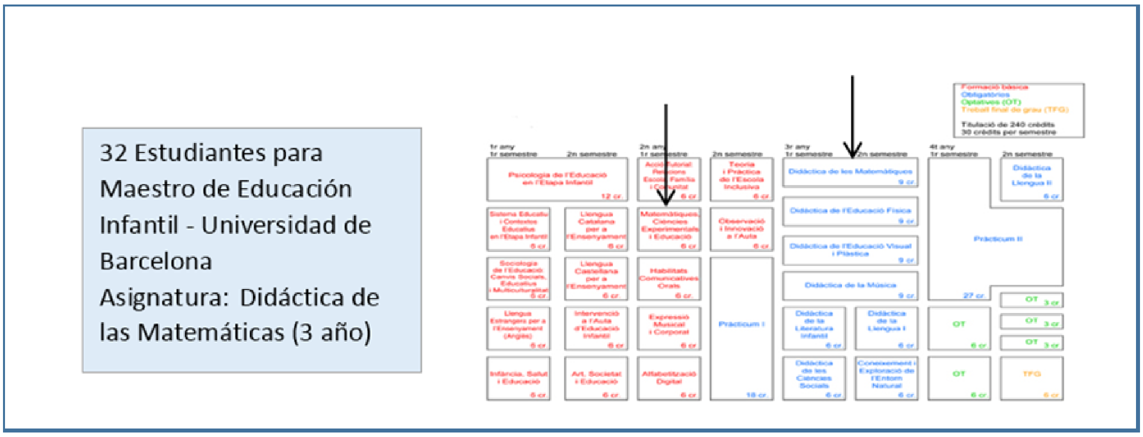


Fig.3.2.1.Mapa Curricular Formación de profesores de infantil: Universidad de Barcelona

El otro grupo estuvo conformado 11 FMI, (llamados en Chile educadores de párvulo) EP, de cuarto año, de entre 22 y 27 años, pertenecientes a la carrera de educación parvularia de la Universidad Católica del Maule, (Chile) que en ese tiempo, cursaban la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, último módulo perteneciente a la mención en Matemática. (Como se observa en la Fig. 3.4.2, Mapa Curricular de la Formación de Educadores de Párvulos. Universidad de Católica del Maule). Este grupo se llamará desde ahora G2.

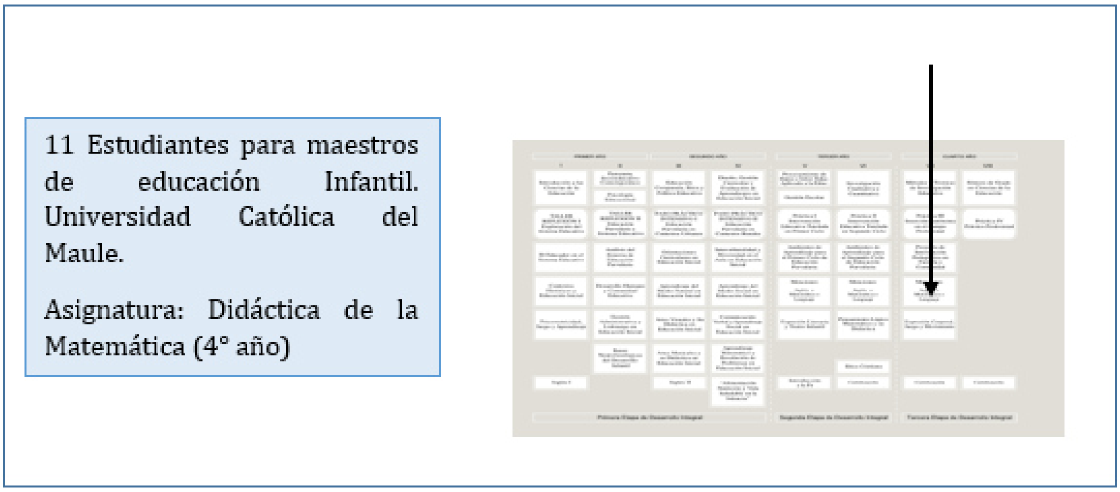


Fig.3.2.2. Mapa Curricular Formación de profesores de Educadores de Párvulos: Universidad Católica del Maule

Para el trabajo, consideramos dos investigaciones precedentes: Una tarea inicial que se trabajó con el grupo G1 sobre procesos en geometría, a partir de la lectura de dos artículos sobre trabajos con niños de Educación Infantil que abordan situaciones como los itinerarios, y un sobre la comparación de puntos geográficos en la esfera terrestre, en los que se trabaja las ideas de orientación espacial. En dicho trabajo se analizó el reconocimiento de procesos matemáticos (Samuel, et al., 2015). Por otro lado se realizó una clase con niños de 5 años basada en el uso de los cintillos en la artesanía mapuche. La tarea subyace en una de las tareas profesionales de nuestra investigación. Por otro lado se tomó un grupo de 30 niños de 5 años con los que se trabajó un conjunto de situaciones sobre simetría que fueron la base de la tarea profesional 3 de nuestro trabajo. Una muestra de respuestas de un niño se encuentra en el anexo 1 de nuestra tesis.

3.2.1. Selección de unos docentes de G1.

En un momento del trabajo, se seleccionan tres sujetos del G1, para realizar un análisis pormenorizado. El criterio de selección de esta muestra, fue ampliamente discutido por el equipo de investigación, quedando la selección vinculada al reconocimiento de indicadores, que fueron definidos a priori, cuando se diseñaron las tareas profesionales. Observándose además en las respuestas de los FMI, variedad y riqueza de los planteamientos, una mayor organización del pensamiento matemático, que dé cuenta de una comunicación coherente y clara respecto de las ideas planteadas en relación a la simetría. Y por otra parte, respuestas menos elaboradas, y con una menor comprensión de aspectos relacionados con la simetría, y con los aspectos mencionados anteriormente.

3.3. Sobre los datos de la investigación.

La primera parte de la investigación considera la implementación de dos tareas de formación docente con el grupo G1 como instrumento válido para recoger información, permitiendo responder a las preguntas y objetivos planteados. Es así, que este proceso de implementación de tareas utilizó la mediación tecnológica, a través de la plataforma Moodle. Al grupo de 33 FMI, se le subieron a la plataforma de curso, las tareas (Tarea profesional 1: *Pensemos sobre la simetría en educación infantil*, y Tarea profesional 2: *Simetría y Asimetría*), donde los futuros profesores procedieron a responder y enviar sus respuestas a través de la misma vía virtual. Posteriormente se descargaron todas las tareas enviadas para comenzar con el proceso de análisis. Y la segunda parte consistió en discutir con todo el grupo las respuestas dadas en clave de corrección guiada a aprender de la reflexión de los otros.

Con respecto a la Tarea profesional 3, *Jugando con las figuras*, se implementó con el grupo de 11FMI. La tarea profesional, se presentó durante la jornada académica, se comentó en qué consistía esta actividad, y la valoración de poder contar con estas respuestas.

3.4. Instrumentos para la recogida de datos

Un aspecto relevante en esta investigación es el diseño de los instrumentos que permite recoger información y dar respuesta a los cuestionamientos planteados y nuestros objetivos. A partir de una búsqueda de información y de actividades o experiencias que se hubiesen desarrollado en el nivel de educación infantil, que abordaran específicamente aspectos de la simetría, se observó que para este nivel es muy limitado el diseño e implementación de experiencias que permitan construir aprendizaje en relación a la simetría como se ha citado en el capítulo 1 de esta memoria.

El trabajo sigue la línea de "Aprender a través de enseñar". Aunque realmente los futuros docentes no pueden efectivamente tomar decisiones y no planifican una situación de enseñanza, si les proponemos que vean y analicen experiencias de otros como primer paso para comprender el sentido de una trayectoria de formación (Burgués y Giménez, 2006).

Situados en este contexto, se optó por considerar un tipo de tarea profesional que desarrollaron profesores de infantil, con niños de cinco a seis años, (actividad de aula trabajo con el tangram. (http://www.redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/MATEMATICAS/PEQUENOS%20CONSTRUCTURES%20DE%20MATEMATICAS.pdf), e intencionar preguntas a partir de los desarrollado en esas experiencias, con el propósito de reconocer el conocimiento matemático y la comprensión de la noción de simetría, que evidencian los FMI.

Como tarea profesional 2, se propone analizar elementos de una actividad de aula (trabajo con las frutas), y una actividad de aula (llamada jugando con las figuras). Se han llamado TP1 (Pensemos sobre la simetría en educación infantil), TP2 (llamada Simetría y Asimetría). Estas tareas se implementan con el grupo G1.

Con el grupo G2 se estructura una TP3 (llamada Jugando con las figuras).

3.4.1. Diseño de la tarea profesional 1

La primera tarea profesional, se estructuró a partir de una actividad escolar propuesta por un grupo de profesores de infantil (CEIP "San Marcos". Jaén), a niños de este nivel educativo. En esta actividad, se les mostró a los niños en la pizarra dos representaciones de animales (pollo y gato), desarrolladas con las piezas del tangram. Luego de esto se entregó a los niños, una hoja con la figura del tangram, donde ellos debían colorear y recortar las distintas piezas. Para finalmente realizar una construcción con este material y representar en la mesa, un modelo igual a los presentados en la pizarra.

Se considera que esta actividad escolar, que utiliza un material didáctico (tangram), permite generar actividades que favorecen procesos de visualización, representación y construcción de ideas geométricas, apoyando la transición de los estudiantes de educación infantil hacia una comprensión más sofisticada de distintos conceptos y procesos matemáticos (Martínez, F. J., 2015), particularmente la idea de simetría bilateral y axial.

Se movilizan además diversas capacidades que tienen que ver con la percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual y memoria visual, en tanto es posible el reconocimiento de formas geométricas, de relaciones de semejanza y congruencia entre las figuras, de procesos de composición y descomposición de figuras geométricas, de movimientos, transformaciones de las figuras (giros y desplazamientos de figuras geométricas manipulativamente), del desarrollo de la percepción mediante la copia de figuras y reconocimiento de formas geométricas simples en una figura compleja.

A partir de esta experiencia escolar, se definieron cinco preguntas que pensamos que permiten que tengamos evidencias de cómo los FMI identifican el conocimiento matemático y la comprensión de aspectos de la simetría, por parte futuros profesores de educación infantil, que es uno de los objetivos de nuestro trabajo.

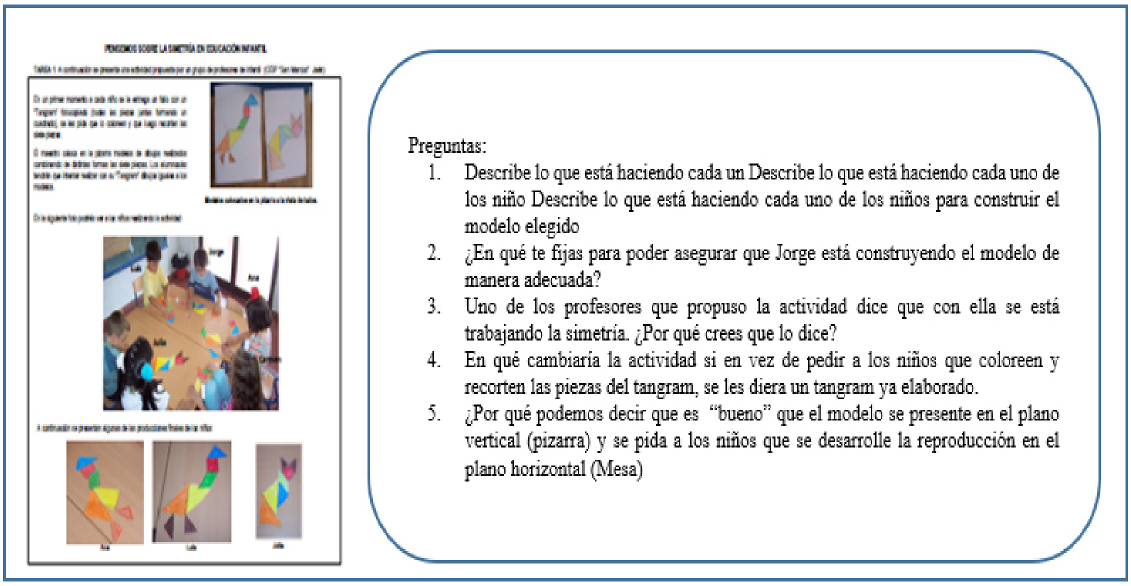


Figura 3.4.1.1. Formato de Tarea profesional 1. Pensemos sobre simetría.

En la Fig. 3.4.1.1, se muestra el formato de la tarea. (En el anexo 2 se muestra a tamaño real la tarea profesional, tal como se presentó a los FMI). Se plantean las siguientes preguntas, asociadas con nuestras expectativas.

Hay diversos motivos por los que proponemos este tipo de tarea profesional. Por una parte, dar a conocer experiencias escolares realmente realizadas y poder ver su potencial de generar reflexión didáctica y aprendizaje matemático. Usamos el tangram como motivación concreta y por ser un material que usualmente se asigna a niveles posteriores de la enseñanza de la matemática. Y también porque permite visualizar propiedades de las transformaciones del plano. Por otro lado, usamos un tipo de cuestionamiento indirecto, es decir, no preguntamos directamente por lo que es la simetría, sino que pedimos que se explique si en la actividad puede considerarse el trabajo sobre simetría. Por otro lado, pedimos que se reconozcan procesos cognitivos de visualización, composición-descomposición, entre otros que puedan explicarse. Se hace necesario comentar que se reconoce una limitación en la tarea escolar porque no se explica a través del video de lo que hacen los niños, sino a partir de imágenes estáticas de momentos clave del trabajo de la tarea. Con ello, queremos situar a los FMI analizando experiencias de otros, porque no tenemos toda la información de lo ocurrido. Queremos que los FMI se enfrenten con lo que ocurre cuando los educadores explican experiencias en formato de artículo, lo cual va a ser importante en la vida profesional de los FMI cuando sean educadores. En la tabla 3.4.1.1, explicitamos el tipo de expectativas de respuesta que pretendemos con las preguntas de la actividad, en la busca por conseguir nuestros objetivos.

Tabla 3.4.1.1. Aspectos pretendidos en las preguntas de la actividad TP1

Pregunta de la actividad	Expectativa de respuesta
1. *Describe lo que está haciendo cada uno de los niños para construir el modelo elegido.* (Codificación TP1-P1)	Reconocimiento verbalizado de acciones de los niños, que permite ver en qué se está fijando el FMI
2. *¿En qué te fijas para poder asegurar que Jorge está construyendo el modelo de manera adecuada?* (Codificación TP1-P2)	Identificación de elementos matemáticos que subyacen a las acciones.
3. *Uno de los profesores que propuso la actividad dice que con ella se está trabajando la simetría. ¿Por qué crees que lo dice?* (Codificación TP1-P3)	Reconocimiento de la idea de simetría que tienen los FMI. Indicios de interpretación
4. *En qué cambiaría la actividad si en vez de pedir a los niños que coloreen y recorten las piezas del tangram, se les diera un tangram ya elaborado..*(Codificación TP1-P4)	Confirmación de aspectos matemáticos reconocidos, e indicios dela destreza interpretar
5. *¿Por qué podemos decir que es "bueno" que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la reproducción en el plano horizontal (Mesa).*(Codificación TP1-P5)	Reconocimiento de procesos cognitivos asociados a una tarea escolar a partir de ver lo que responden los niños. Enfatizar una de las posibles dificultades que surgen y pueden interpretarse.

Con ello, se pretende mostrar destrezas iniciales de los FMI quemuestren evidencias de la mirada profesional (Fernández, Llinares, Valls, 2012) en el contexto de la noción simetría, con futuros educadores de Educación Infantil.

Consideramos que indirectamente, podemos reconocer los elementos matemáticos que se consideran importantes o relevantes en el desarrollo de la actividad escolar planteada. Así, pensamos que al mirar a los niños, los futuros docentes van a manifestar también lo que "saben sobre la simetría". Y mostrarán sus intuiciones didácticas y percepciones sobre procesos de aprendizaje. Con ello, mostramos el potencial de la tarea de provocar estas reflexiones dirigidas.

3.4.2. Diseño de la tarea profesional 2

Para la segunda tarea profesional se consideró una actividad propuesta por un maestro a su grupo de infantil, a partir de un vídeo (https://www.youtube.com/watch?v=6JTuS49tCFU). Se seleccionó un episodio de este video, que promovía una actividad relacionada con lo simétrico y asimétrico asociado a la forma de los recursos (como la mandarina y la piña). En la experiencia se desarrollaba un dialogo entre maestro y niños en relación a las características de los objetos que permitían reconocer estos aspectos.
En esta actividad, se estimula una búsqueda de simetrías de formas en contextos reales (3D), donde deberían buscarse las primeras motivaciones para el estudio de geometría en general y de las simetrías en particular.

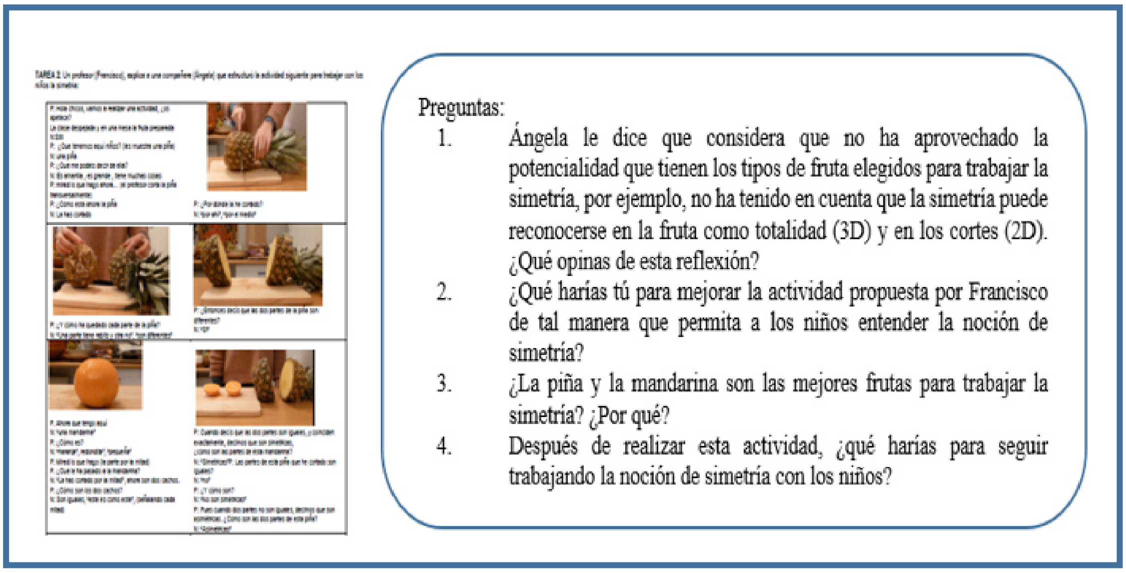


Figura 3.4.2.1. Formato reducido de la TP2. Simetría y asimetría.

Como se ve en la figura 3.4.2.1., después de observar la experiencia escolar resumida, se proponen cuatro preguntas para evidenciar la idea de simetría y el contenido didáctico asociado. A continuación, en la tabla, se muestra las expectativas de respuesta en base a los objetivos perseguidos por la tarea.

Tabla 3.4.2.1. Aspectos pretendidos en las preguntas de la actividad TP2

Pregunta de la actividad	Expectativa de respuesta
1. *Ángela le dice que considera que no ha aprovechado la potencialidad que tienen los tipos de fruta elegidos para trabajar la simetría, por ejemplo, no ha tenido en cuenta que la simetría puede reconocerse en la fruta como totalidad (3D) y en los cortes (2D). ¿Qué opinas de esta reflexión?* (Codificación TP2- P1)	Reconocimiento verbalizado de acciones de los niños, que permite ver en qué se está fijando el FMI Identificación de elementos matemáticos que subyacen a las acciones de los niños.
2. *¿Qué harías tú para mejorar la actividad propuesta por Francisco de tal manera que permita a los niños entender la noción de simetría?* (Codificación TP2- P2)	Énfasis en los elementos de enseñanza, que provocan que los FMI se posicionen en el enfrentamiento de dificultades de los niños.
3. *¿La piña y la mandarina son las mejores frutas para trabajar la simetría? ¿Por qué?* (Codificación TP2- P3)	Reconocimiento de la idea de simetría que tienen los FMI. Especialmente el valor del eje o plano de simetría. Indicios de interpretación
4. *Después de realizar esta actividad, ¿qué harías para seguir trabajando la noción de simetría con los niños?* (Codificación TP2- P4)	Confirmación de aspectos matemáticos reconocidos, e indicios dela destreza interpretar. Reconocimiento de procesos cognitivos asociados a una tarea escolar a partir de ver lo que responden los niños. Enfatizar una de las posibles dificultades que surgen y pueden interpretarse.

En esta tarea se pretende enfocar un aspecto importante de la simetría con figuras tridimensionales. Se pretende ver si los FMI distinguen el fenómeno de la propiedad abstracta correspondiente. Y si asocian propiedades como las distancias iguales al eje, etc. Por otro lado, la tarea quiere situar al FMI como educador que se enfrenta con una tarea escolar para ver hasta dónde el contexto favorece la construcción y emergencia de objetos matemáticos o simplemente, es un juego en el que no emergen propiedades y conocimiento matemático. Eso tiene a ver con la destreza identificar en la competencia mirar con sentido.

En cuanto las destrezas de interpretación, pretendemos ver hasta qué punto se identifican procesos cognitivos y dificultades sobre la noción de simetría. Y como se lleva al alumnado a evaluar y controlar acciones que no deben ser simplemente “obedientes a las preguntas realizadas. Pretendemos ver que los FMI salen de la idea de que la tarea del educador es corregir si está bien o mal, sino que su labor está fundamentalmente a llevar a los niños al conocimiento. Para eso deben saber ver la emergencia de las ideas matemáticas a partir de la tarea escolar, para saber cambiarla, y darle mayor potencialidad de promover competencia matemática, y otras competencias transversales.

3.4.3. Diseño de la tarea profesional 3

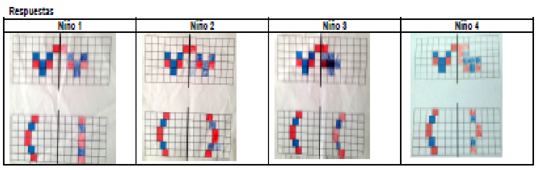
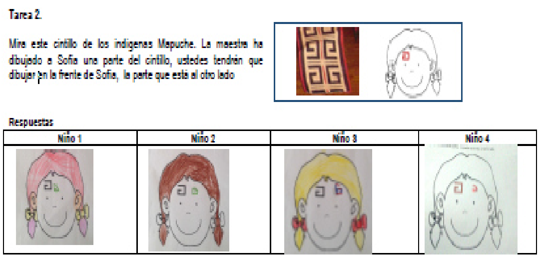
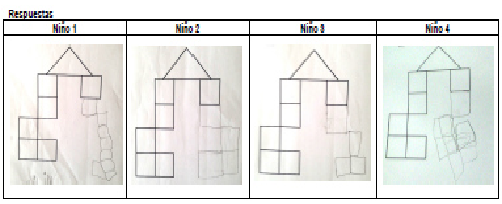
Esta tarea profesional se estructuró a partir de una actividad escolar elaborada por el equipo investigador denominada: "*Jugando con las figuras*", la cual fue implementada por profesores de infantil con niños de 5 a 6 años en Chile. La actividad escolar se estructura de acuerdo a lo planteado en la trayectoria hipotética de aprendizaje de la simetría, descrita en el capítulo anterior. En esta actividad se proponía a los niños diversas situaciones que involucraban la construcción del simétrico de figuras, con referente métrico y sin referente (cuadricula-papel en blanco). A manera de ejemplo, en el anexo 1, se presentan las respuestas de uno de los niños a la actividad escolar. Posterior a la implementación de la actividad escolar, se recopilaron los registros en papel de las producciones de los niños y de algunos momentos el registro en vídeo, de algunos momentos, en los que se puede ver el proceso realizado por los niños a determinadas situaciones.

En seguida se realiza una mirada global de todas las respuestas de los niños a cada una de las preguntas y se seleccionan cuatroproducciones de los niños, para cada una de las actividades escolares propuestas, que a juicio del equipo investigador, presentaban aspectos interesantes de analizar por los FMI.

Seleccionados estas respuestas, se estructura la tarea profesional TP3 en tres apartados. En el primer apartado se pedía a los FMI, que realizarán las mismas cuatro actividades desarrolladas por los niños, relacionadas con la simetría axial y bilateral, y que identificaran en cuáles de esas actividades se construía el simétrico de una figura.

El objetivo general de esta primera fase es doble: de un lado refinar lo que se ha encontrado en las TP1 y TP2, así como mostrar qué ocurre en otro contexto cultural diferente como es el chileno. Por otro lado, ajustarse a la metodología de las investigaciones sobre la competencia mirada profesional, tratando de separar la destreza de identificar elementos matemático,, así como la destreza interpretar. La segunda parte de la TP3. Se orienta a la identificación de aspectos matemáticos y propiedades de la simetría que estaban involucrados en cada una de las tareas (como por ejemplo: eje de simetría, equidistancia de puntos homólogos, orientación opuesta, segmentos homólogos, perpendicularidad, figura isométrica, movimiento involutivo).

Tabla 3.4.3.1. Algunos elementos que se pretenden observar en la TP3.

<table>
<tr><th>Ítems presentados</th><th>Objetivos en la destreza identificar</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Reconocer matemáticamente propiedades clave de la simetría que no son evidentes en las respuestas erróneas de los niños. Ya que el niño 1 no conserva la distancia al eje, aunque si los colores y formas; el niño 3 interpreta el efecto espejo como traslación y el niño 4 no respeta las distancias al eje, aunque trata de mantener la misma figura en posición inversa respecto al eje.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Reconocer matemáticamente propiedades clave de la simetría que no son evidentes en las respuestas erróneas de los niños. En este caso las dificultades vienen porque se trata de dibujos en la frente si referencia de cuadrícula. Algunos niños ve la figura como trasladada, le cambian el tamaño, e incluso la acercan al eje que no está dibujado.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Identificar que podría pensarse como una situación de equilibrio, en la que hay un suelo no dibujado, que quizás no debería hacerse el simétrico, sino que la pieza de arriba “se aguante”. Y juzgar las relaciones entre el equilibrio físico y la repetición de piezas, así como el hecho de que muchos niños no sienten la necesidad de que haya cuatro cubitos como base en la figura de la izquierda. Con ello explicar el uso de las relaciones de cantidad, distancia a un eje no dibujado de equilibrio y pérdida del tamaño por problemas sicomotrices.</td></tr>
</table>

La tercera parte de la tarea profesional se orienta a la interpretación que los futuros maestros tienen de la forma que tiene los niños de entender la simetría, y las dificultades que experimentan al enfrentarse a este tipo de actividades. (En el anexo 4, se muestra la tarea profesional tal como se presentó a los FMI).

Este tipo de tareas permite profundizar en el conocimiento de elementos matemáticos, propiedades geométricas, procesos matemáticos, (desarrollo de la estructuración espacial, relaciones de ubicación, posición, dirección y distancia), y particularmente profundizar en el conocimiento matemático y la comprensión de la simetría y las maneras diferentes que tenemos de reconocerla. Aspectos importantes que se favorecen con un tipo de tarea como ésta, son el desarrollo de procesos cognitivos, de habilidades de visualización espacial (generación y manipulación de estas imágenes mentales de los objetos, a partir del movimiento) de representación e interpretación de objetos matemáticos.

La propuesta de este diseño de tareas, ofrece una mirada que permite enriquecer la competencia matemática de los estudiantes, a partir de la comprensión que han elaborado de la simetría, y de los aspectos que consideran relevantes respecto de su enseñanza y aprendizaje (Fig.3.4)

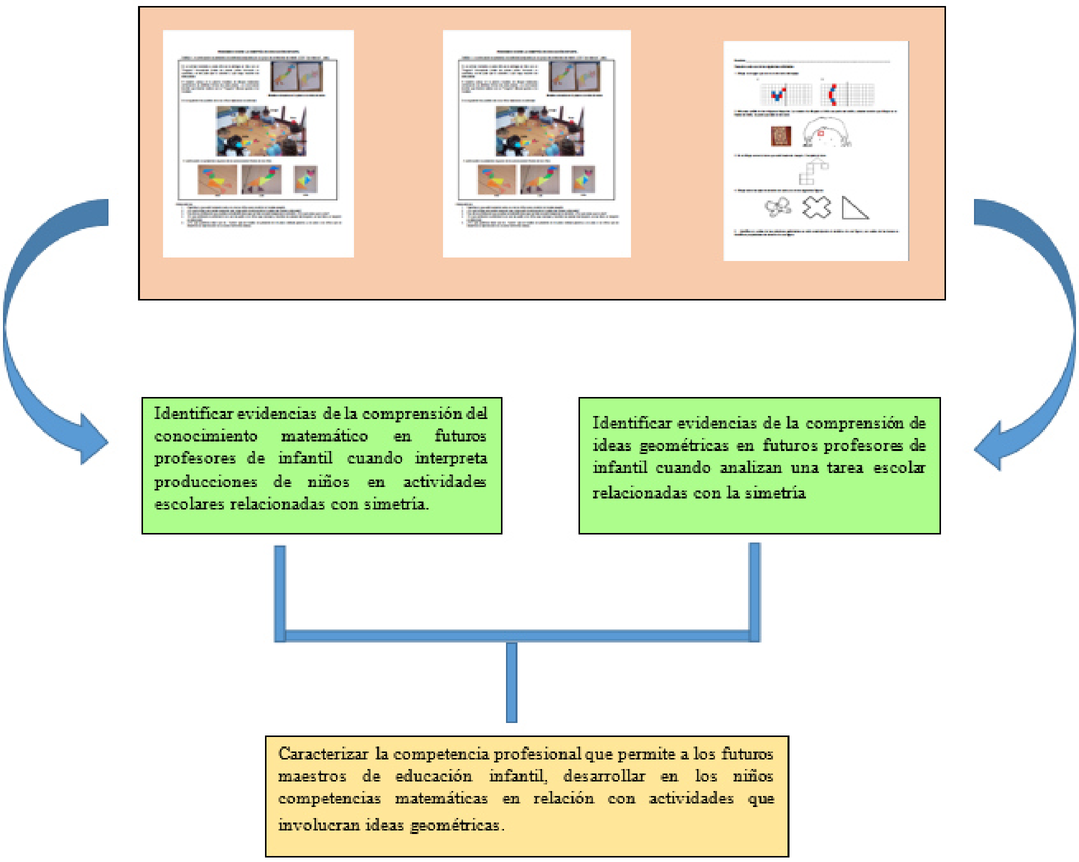


Fig. 3.4. Propuesta de diseño de las tres tareas profesionales que se presentan en la tesis

3.5. Tratamiento de los datos. Tipos de Análisis

Considerando las ideas desarrolladas por Jacobs et al., (2010), en tanto definen la competencia profesional como un conjunto de habilidades o destrezas interrelacionadas, que permite, identificar, interpretar y tomar decisiones de acción; y la competencia docente "mirar con sentido" (Llinares, 2013), que permite al profesor ver las situaciones de enseñanza de las matemáticas de una manera profesional, se ha construido este marco de análisis que permitirá dar respuesta a los objetivos planteados, en tanto se definirá grados hipotéticos de adquisición de las destrezas, logrando así poder caracterizar la competencia profesional en futuros profesores de educación infantil, sobre la comprensión de la simetría.

La reflexión del equipo de investigación, se llevó a cabo mediante cuatro análisis para caracterizar la competencia profesional que permite a los FMI, desarrollar en los niños competencias matemáticas en relación con actividades que involucran ideas de simetría.

Análisis 1.

En un primer análisis, se observaron las respuestas de los 28 FMI del G1, a las tareas profesionales 1 y 2, de forma general, para reconocer posicionamientos respecto de la noción y comprensión de la simetría, de los elementos evocados que consideraban importantes para poder construir este aspecto geométrico en los niños. Además de establecer una primera clasificación de perfiles iniciales, se seleccionaron evidencias de tres FMI, constituyéndose en nuestros primeros casos de estudio, para el paso siguiente. Se lanzan ahí hipótesis de una subdivisión de los FMI en tres grupos (alto, medio, bajo).

Análisis 2.

En un segundo momento, se busca identificar de forma detallada el conocimiento matemático (a partir de la identificación de elementos matemáticos contrastados y la comprensión de ideas matemáticas en los niños. (Relación de las destrezas identificar e interpretar).Esto se hace en detalle, observando las respuestas de los tres FMI escogidos. Con ello se constata la existencia de estos tres grupos que, al menos tienen a los FMI de los tres casos escogidos. Eso refuerza la hipótesis de tres niveles de evidencia en la competencia.

Análisis 3.

En un tercer momento, se observa las respuestas ante la tarea profesional 3, con el segundo grupo de 11 FMI, con el objetivo de analizar en mayor detalle las destrezas de la competencia profesional identificar e interpretar. Y un posible refinamiento en las categorías que definen los tres grupos de evidencias.

Análisis 4.

Definir grados hipotéticos de adquisición de la competencia profesional que permita hacer una caracterización de ésta para futuros educadores de Infantil en cuanto la simetría. En la figura 3.5, se muestra el esquema de este proceso.

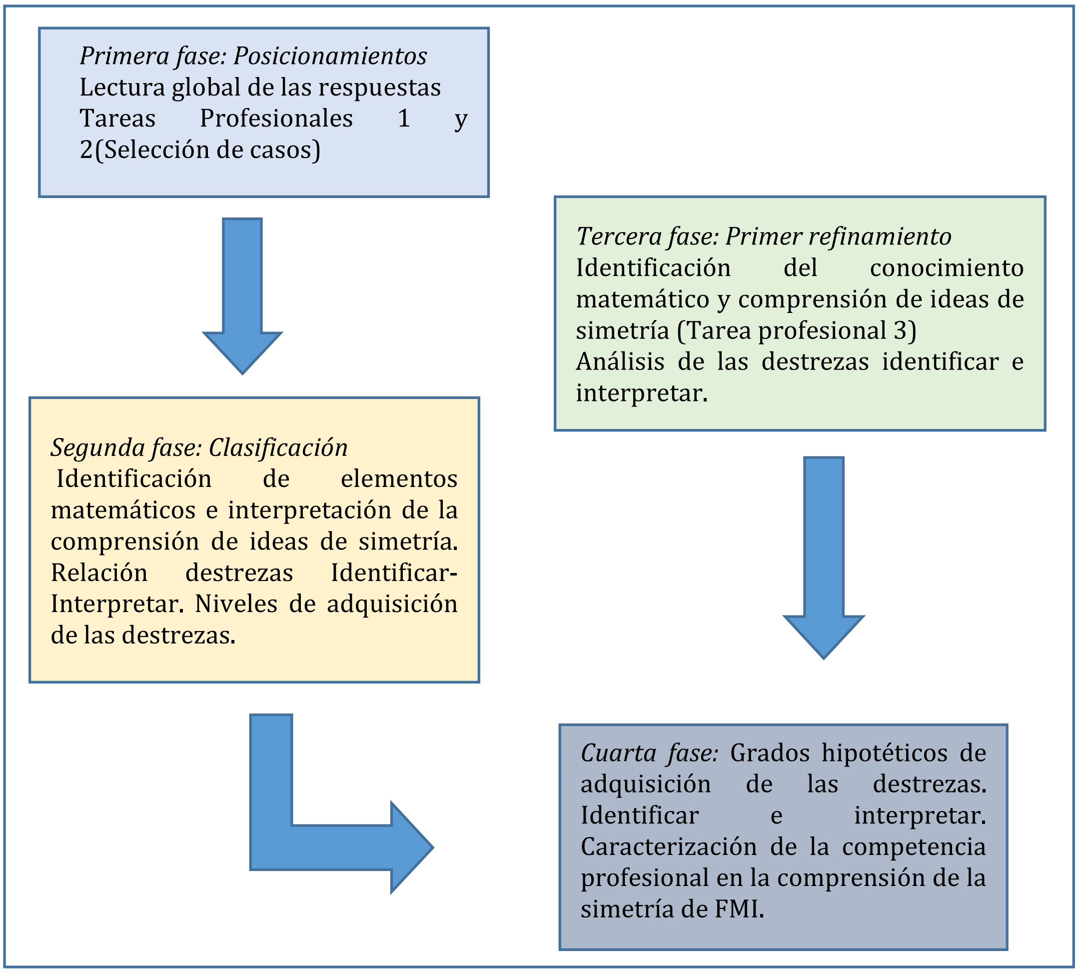


Fig. 3.5.1. Síntesis gráfica de las etapas del proceso de análisis

Siguiendo esta estructura, a continuación, se da cuenta de los instrumentos que se usan para cada análisis, y cómo se tratan los datos, mostrando algunos ejemplos, para llegar a los resultados que se explican en el capítulo 4 de nuestro trabajo.

3.5.1. Instrumentos para el análisis 1 en el grupo 1

Explicamos en este apartado los instrumentos que nos permiten realizar el análisis 1, anteriormente explicado. Se llevó a cabo en dos momentos, primero se hizo la transcripción de las respuestas de los FMI a las tareas profesionales 1 y 2, (Hay dos ejemplos en los anexos 5 y 6. Después de una lectura global de las de las respuestas, se puede reconocer el tipo de respuestas y la adecuación a los interrogantes planteados. Se hizo una identificación inicial de los aspectos matemáticos evocados como relevantes por los futuros FMI, a las tareas escolares presentadas, así mismo las justificaciones dadas.

Tabla 3.5.1.1. Ejemplo del primer reconocimiento de posicionamientos en TP1 de FMI 4

Preg	Respuesta del estudiante	Identificación de posicionamientos relacionados con la simetría
1	En el caso de Julia y Ana este paso ya lo han hecho ya que están más avanzadas, ellas ya tienen parte de la figura completada y están acabando de colocar las últimas piezas que les quedan. Puede que cuando tienen pocas piezas por colocar y no saber dónde ponerlas los niños se puedan bloquear y tengan que empezar el tangram de nuevo.	Describe cómo operan los niños para armar la figura, sin embargo no especifica las estrategias que están aplicando los niños para armar la figura. Explica que puede existir alguna confusión cuando estén por terminar de copiar el modelo.
2	Porque Jorge está haciendo inconscientemente tres aspectos para construir geometría, es decir por un lado Jorge está observando la posición de las piezas y las está ordenando según cree él según las formas que tiene y a partir de aquí hace un cambio de posición de la pieza haciendo que cuadre una con otra.	Identifica los procesos de acción y construcción llevados a cabo por los niños. Dentro de los aspectos relevantes para la construcción de la figura considerados por los niños esta la posición y el orden.

3	El tangram es un juego diseñado para favorecer ampliamente las habilidades para identificar desarrollos simétricos, es decir, cuando los niños tienen que mover las piezas para construir una grande, estos las tienen que manipular y hacer que encajen todas de manera uniforme y de forma simétrica.	Valora el material, como elemento favorecedor de habilidades cognitivas, visuales y de construcción. El material permite desarrollar ideas de simetría
4	Cuando se les hace a los niños pintar sus propias piezas y que luego las recorten, se hace que este coja conciencia de la pieza, su forma y dimensión de cada una de ellas haciéndola diferente una de otra al pintarla de distinto color. Si se les da un tangram este paso previo no lo hacen	Explica que la manipulación del material favorece el tomar conciencia de las formas, y de las relaciones que se pueden establecer entre ellas.
5	Los niños al ver la figura en vertical en la pizarra, ven una figura real y como es, pero esta manipulación y aprendizaje se hace con estas figuras en plano de esta manera se refuerzan los conceptos de simetría axial y de rotación de forma no convencional ya que para llegar a obtener una figura simétrica el niño tiene que pasar por un proceso laborioso pero divertido. Los niños apreciarán más el resultado obtenido y la aplicación de las definiciones adquiridas en clase.	Señala las ventajas de utilizar este tipo de representaciones para enseñar una idea específica. Identifica que al considera dos planos (vertical y horizontal), se favorecen procesos de razonamiento. Identifica que esta forma de presentar la actividad permite reforzar ideas geométricas de simetría y rotación.

En un segundo momento, hacemos un análisis más refinado contrastando las respuestas de los futuros profesores con indicadores definidos a priori para cada una de las tareas profesionales (Ver Tabla 3.5.2.). Dichos indicadores, como ya se explicó en el apartado 3.4.2, fueron definidos por el equipo investigador cuando se diseñaron las tareas profesionales, considerando los aportes del MKT sobre el conocimiento matemático para la enseñanza.

A partir de estos indicadores, se releen las contribuciones de los FMI, y se asignan a cada FMI los indicadores observados. Este resultado, aunque laborioso no es muy profundo, porque tiene en cuenta sobre todo las evocaciones correspondientes, y no se contrasta en este momento con otras respuestas dadas sobre las tareas en las que se analiza el comportamiento de los niños.

Tabla 3.5.1.2. Indicadores definidos a priori para las Tareas Profesionales 1 y 2

	INDICADORES
I.1	Describe con claridad aspectos matemáticos, relacionados con la simetría
I.2	Justifica sus respuestas con argumentos adecuados (matemáticos y/o didácticos)
I.3	Describe procesos cognitivos y habilidades desarrolladas por los niños relevantes para la comprensión de ideas matemáticas presentes en la actividad.
I.4	Utiliza un lenguaje matemático preciso al argumentar sus respuestas.
I.5	Identifica estrategias, desarrolladas por los niños para dar respuesta a la actividad.
I.6	Distingue las ventajas y desventajas de utilizar una representación o modelo en el desarrollo de la actividad.
I.7	Identifica dificultades y posibles errores en la construcción de significados de la noción de simetría.

En la tabla 3.5.3., se puede ver un resumen de estos datos, que permite establecer unos primeros resultados con los que en el capítulo 4, se reconocen tres tipos diferentes de FMI, según el número de evidencias manifestadas en la tarea TP1 y TP2.

En base a nuestro objetivo inicial, los resultados que emergen de esta tabla, permiten lanzar la hipótesis de que hay estos tres grupos, y se pueden ver independientemente ya algunos resultados interesantes que caracterizan el grupo G1, y sus posicionamientos ante la noción de simetría.

Las respuestas de los FMI, en relación, a los posicionamientos y comprensión de aspectos de la simetría, las asociamos a los indicadores descritos en la tabla anterior, Y establecemos los resultados que mostraremos en el capítulo 4. Luego de este análisis, se seleccionaron tres casos, siendo a juicio del equipo investigador los casos más interesantes de discutir y dar respuesta al tema de investigación.

Tabla 3.5.1.3. Indicadores de posicionamientos y comprensión de aspectos de simetría de FMI. Tarea profesional 1 y 2.

FMI	TP1-P1	TP1-P2	TP1-P3	TP1-P4	TP1-P5	TP2-P1	TP2-P2	TP2-P3	TP2-P4
2	I.5	I.5 –I.2	I.2	I.3- I.6	I.6 –I.2	I.2	I.6	I.6	I.2
3	I.5-	I.5	I.2	I.2	I.2- I.6	I.2	I.2	I.2	I.2
4	I.3	I.5- I.4	I.5	I.3	I.4	I.2	I.2	I.2	I.2
5	I.1- I.3	I.2	I.2	I.6	I.2	I.2	I.2	I.6	I.2
6	I.1- I.5	I.5	I.2- I.1	I.6	I.2- I.6	I.2	I.2	I.2	I.1
7	I.5	I.5	-	I.3	I.2	-	I.2	-	I.6
8	.2-3-5, 7	I.2-I.5	1.2	I.2- I.7	2-3- 7	I.2	I.2	I.6	I.2
9	.2-.3- 5	I.7	I.1- I.2	I.6	-	I.2	I.2	I.2	I.2
10	I.3	I.2-I.7	I.2	I.6	I.2-I.6	I.2	I.2	I.2	I.2
11	I.5- I.7	I.5	I.2	I.2	I.2	-	-	-	-
12	I.7	I.2	I.1- I.2-I.4	I.3	I.2- I.4- I.6	I.2	I.2- I.3	I.2	I.2
13	2- 3-5- 7	I.2- I.5	I.1- I.2	I.6	I.6	I.2	I.2	I.2	-
14	I.5	I.2- I.7	I.2	I.7	I.2- I.3	I.2	I.2	I.2	I.2
15	I.5	-	-	I.6	-	I.2	-	I.2	I.2
17	I.2- I.4- I.5- I.7	I.2	I.2	I.7	I.3- I.7	I.2	I.2	I.2	I.2
20	I.5- I.7	I.6- I.7	I.2- I.3	I.6	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2
21	I.2- I.3	I.2	I.2	I.6	I.6	I.2	I.2	I.2- I.6	I.2
F22	I.2	I.5	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2
F23	I.3- I.5	I.2- I.5	I.1- I.2	I.2	I.2- I.3	I.2	I.1- I.2- I.4- I.6	I.2- I.6	I.2
24	.2- 5- I.7	I.5	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2- I.6	I.2
FMI 25	I.2- I.3- I.6- I.7	I.2- I.6	I.2- I.6	I.2- I.6	I.2- I.6	I.2	I.2	I.2- I.6	I.2
26	I.2- I.6	I.2- I.6	I.2- I.6	I.6	.2-.4 - 6	I.2	I.2	I.2- I.6	I.2
27	I.2- I.5	I.2- I.3	I.6	I.2-I.4- I.6	I.2- I.6	I.2	I.2	I.2	I.2
28	I.5- I.7	-	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2	I.2
FMI 29	I.1- I.2- I.5- 1.7	I.1- I.7	I.3	I.2	I.2- I.6	I.2- I.6	I.2- I.6	I.6	I.1-I.2- I.4
31	2-3-4- 5-.7	I.1- I.2- I.3- I.6	I.2-I.3. I.5	I.3 – I.6	I.2- I.3- I.6	I.1- I.2	I.2	I.2 -I.6	I.2
32	I.5	I.6	I.2	-	I.2- I.6	I.2	I.2	-	I.2
33	I.2- 1.7	I.2- I.3	I.6	I.6	I.6	I.2	I.2	-	-

3.5.2. Instrumentos utilizados en el análisis 2 grupo 1.

En este segundo análisis, se inicia el proceso relacionado con poder reconocer aspectos del conocimiento y de la comprensión de ideas de la simetría de los FMI, que permite desarrollar en los niños competencias matemáticas a partir de actividades que involucran ideas geométricas. El objetivo estaba centrado en dar cuenta de un modelo descriptivo de las respuestas de los FMI, en relación a la identificación de los elementos matemáticos que permiten reconocer este conocimiento, y la comprensión de ideas de simetría, o que involucran aspectos simétricos, en el contexto especifico de análisis de tareas de aula desarrolladas por niños de nivel infantil.

Este apartado, tiene por objetivo identificar los elementos matemáticos involucrados en este tipo de tareas, que permite además enriquecer los significados de la simetría. Se relacionan las respuestas con las ideas teóricas expresadas por parte de los FMI, en las respuestas dadas a las tareas profesionales 1 y 2. Esta categorización se organizó en cuatro niveles de evidencias (sin evidencia- bajo-medio-alto), dependiendo del reconocimiento de estos elementos matemáticos. En la tabla 3.5.2, se muestra los niveles de evidencia y su descripción.

Tabla 3.5.2.1 Niveles de evidencias de identificación elementos matemáticos.

Nivel de Evidencias	Identificación de evidencias de elementos matemáticos
Bajo	En las respuestas del FMI, se identifica al menos un elemento matemáticos para la construcción de la simetría
Medio	En las respuestas del FMI, se identifican dos elementos matemáticos para la construcción de la simetría
Alto	En las respuestas del FMI, se identifican tres o más elementos matemáticos para la construcción de la simetría

En las respuestas de los FMI, se buscaba poder reconocer la presencia o ausencia de evidencias en la identificación de los elementos matemáticos que permite la comprensión de la idea de simetría. A continuación en la tabla 3.5.3., se muestra un ejemplo de este análisis.

Este proceso de identificación de elementos matemáticos para la construcción de la simetría por parte de los FMI, permitió vincularlo a la categorización de la destreza identificar, a parir de los niveles de evidencia de estos elementos. (Como se muestra en la tabla 3.5.3)

Tabla 3.5.2.2. Identificación de elementos matemáticos para la construcción de la simetría. Tarea profesional 1 y 2.

FMI	Respuestas	Identificación de elementos matemáticos
2	*Creo que lo dice porque las fichas del tangram tienen simetría bilateral, ya que cuando se dividen en 2 sus partes son iguales. Además, con esta actividad también se trabaja la simetría porque los niños pueden observar figuras, o partes de figuras, que son simétricas y otras que no lo son, como por ejemplo las orejas del "gato".* TP1- P3	Identificación del eje de simetría
8	*Pienso que el maestro, desde su punto de vista, trabajaba la simetría con esta actividad, puesto que las formas facilitadas para la elaboración de los dos dibujos propuestos, presentan características iguales tales como el tamaño y la forma. Además, las propias formas del dibujo parten de la simetría, pues al doblarlas obtenemos la misma forma. Así pues, se comprueba que dichas formas son simétricas cuando las comparamos y observamos los lados comunes e iguales. De una forma puede nacer la otra y complementarse de la misma manera y por lo tanto, se considerarán simétricas al compartir las mismas propiedades físicas.* TP1- P3 *De esta manera también se podría haber trabajado la simetría y asimetría con la unidad, de manera implícita, proporcionando dos mandarinas enteras de diferentes tamaños, al igual que con las piñas, y compararlas entre ellas, dándole importancia a que ambas son la misma fruta pero las diferencia la medida.* TP2-P1	Identificación de figuras semejantes, equivalentes y congruentes. Identificación del eje de simetría.
31	*Júlia ha comprendido que las piezas del Tangram no se pueden superponer y a través de la identificación de las piezas, sus colores y de qué manera se relacionan espacialmente ha conseguido armar una figura semejante a la presentada en la pizarra.* TP1-P1; *Si que es cierto que con los niños y niñas se podría intentar que hicieran el pato o el gato y que estos estuvieran mirando en sentido contrario y así, conseguiríamos armar la figura simétrica a la original* TP1-P3 *Por tanto, creo que después de esta actividad se debería trabajar los ejes de simetría, es decir, proponer actividades para que los alumnos,del aula encuentren la línea imaginaria por la cual deberíamos cortar una fruta para dividir-la en dos partes iguales.* TP2-P4	Identificación de orientación espacial. (orientación opuesta de las figuras) Identificación de figuras semejantes, equivalentes y congruentes. Identificación del eje de simetría.

Tabla 3.5.2.3. Niveles de identificación de evidencias de elementos matemáticos

Nivel de evidencia	Descripción	FMI
Bajo	El FMI, identifica solo uno de los cuatro elementos matemáticos relevantes en la construcción de la simetría	FMI 2
Medio	El FMI, identifica solo dos de los cuatro elementos matemáticos relevantes en la construcción de la simetría	FMI 8
Alto	El FMI, identifica más de tres elementos matemáticos relevantes en la construcción de la simetría	FMI 31

Para la identificación de evidencias de la destreza interpretar, y considerando la complejidad en este punto pues al ser preguntas abiertas, se consideró generar un modelo descriptivo de las respuestas a la tarea, desarrollado por el equipo investigador. Luego de esto y de la misma que se procedió con la organización de niveles para la evidencia de la identificación de elementos matemáticos, se hizo con la interpretación de la comprensión de la simetría. En la tabla 3.5.3, se muestra los niveles de evidencia (sin evidencia- bajo- medio- alto) y su descripción.

Tabla 3.5.2.4 Niveles de Identificación de evidencias de la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría.

NIVEL DE EVIDENCIAS	**INTERPRETACIÓN DE EVIDENCIAS DE LA COMPRENSIÓN DE LA SIMETRÍA**
Sin evidencia	El FMI, no interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y los procesos matemáticos y/ o cognitivos que consideran para construir representaciones simétricas.
Bajo	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y dos procesos matemáticos y/ o cognitivos que consideran para construir representaciones simétricas.
Medio	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y tres procesos matemáticos y/ o cognitivos que consideran para construir representaciones simétricas.
Alto	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y todos los procesos matemáticos y/ o cognitivos que consideran para construir representaciones simétricas

En las respuestas de los FMI, se buscaba poder reconocer evidencias en relación a la forma de comprender la simetría por parte de los niños, y los procesos matemáticos y/o cognitivos evidenciados, de manera de dar cuenta de una comprensión de la simetría. En la tabla 3.5.3, se muestra un ejemplo de este tipo de análisis.

Tabla 3.5.2.5. Identificación de evidencias de la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría en un caso

FMI	Respuestas	Identificación de evidencias
2	*Julia: Lo único que se puede observar es que ha terminado de representar la figura y que ésta tiene un pequeño error. El error está en que la pieza verde de cuatro vértices (paralelogramo) está situada al revés, ya que es la pieza que presenta más dificultades para los niños y niñas.* TP1-P1- P5	Identifica las dificultades para la construcción de estas representaciones simétricas.
	Además, de esta manera creamos un conflicto en ellos que les hace pensar y razonar, ya que tienen que cambiar del plano vertical al horizontal, trabajando así la organización espacial y la abstracción. De esta manera, tendrán que observar con atención las figuras teniendo en cuenta cuantos lados tiene, el tamaño, sus ángulos, la posición en la que se encuentra.	Reconoce que a partir de procesos cognitivos como el razonamiento los niños pueden justificar sus acciones

Esta tabla, recoge información respecto de la interpretación que realizan los FMI, en relación a los aspectos que los niños consideran importantes para construir figuras simétricas, los procesos matemáticos que desarrollan para representar estos objetos, y que dan cuenta de una manera de comprender la simetría.

Este proceso de identificación de evidencias de la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría por parte de los FMI, se vinculó a la categorización de niveles de evidencias de la destreza interpretar. (Como se muestra en la tabla 3.5.4)

Tabla 3.5.2.6. Niveles de Identificación de evidencias de la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría.

Nivel de evidencia	Descripción	FMI
Bajo	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y dos procesos matemáticos y/o cognitivos que se consideran para construir representaciones simétricas	FMI 2
Medio	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y tres procesos matemáticos y/o cognitivos que se consideran para construir representaciones simétricas.	
Alto	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y todos los procesos matemáticos y/o cognitivos que se consideran para construir representaciones simétricas	FMI 8 FMI 31

En la tabla anteriormente expuesta, se muestra que el FMI 2, está en un nivel de evidencia bajo, y que los FMI 8 y 31, alcanzaron un nivel alto de evidencia en relación a la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría.

3.5.3. Instrumentos para el análisis 3 en el grupo 2.

Esta tercer análisis, consideró la implementación de la tarea profesional 3 (Jugando con las figuras) a los once FMI del grupo G2. Recogida esta información se desarrolla el análisis. El objetivo de esta fase era poder identificar aspectos del conocimiento y de la comprensión de ideas de la simetría de los FMI. Se realizaron análisis vinculados a la comprensión de construcciones simétricas que evidencian de los FMI, a identificar qué aspectos matemáticos consideran los niños cuando se enfrentan a este tipo de actividades, las propiedades y forma de comprender la simetría que evidencia cada niño.

Identificación de elementos matemáticos.

En este punto del análisis, nos proponemos identificar los elementos matemáticos reconocidos por los FMI, que pudieran ser considerados por los niños cuando se enfrentan a la resolución de este tipo de tareas escolares de simetría.

Estos elementos matemáticos quedaron definidos en función de la conceptualización de la simetría, y de aspectos importantes para su construcción. Para ello, se consideró las siguientes evocaciones: (1) sobre la perpendicularidad, (2) relaciones de congruencia y semejanza, (3) relaciones de orientación espacial, (4) eje de simetría. (5) segmentos homólogos, (6) figura isométrica (7) movimiento involutivo (8) puntos homólogos; como elementos matemáticos que nos permiten reconocer este conocimiento matemático.

Se realizan observaciones semejantes a las que se hicieron en el análisis 1. Como primer paso, en relación al análisis, se realizó la transcripción de las respuestas de todos los FMI, como una forma de tener una mirada más amplia y global en la identificación de los elementos que consideraron importantes de describir. (Se muestra un ejemplo de este proceso en el anexo 13)

Luego se sistematizo esta información, se vació en una tabla con la identificación de estos elementos matemáticos descritos en las respuestas de los FMI y que a su comprensión, fueron considerados por los niños para realizar la actividad. Un ejemplo de identificación de estos elementos matemáticos se muestra en la Tabla 3.5.6.

Tabla 3.5.3.1. Elementos matemáticos evocados en las tareas realizadas.

FMI	**Elementos matemáticos**		
	Situación 1	**Situación 2**	**Situación 3**
1	Fig. a (Nada respecto a esta figura)	Considera la orientación espacial, dirección, distancia y posición respecto a objetos La congruencia de figuras	--
	Fig. b Orientación espacial en la hoja Considera la posición del objeto.		
2	Fig. a Considera la ubicación, dirección, distancia y posición	Eje de simetría Dirección, distancia y posición	Ubicación, distancia posición y dirección (solo en el primero cuadrado)
	Fig. b Referencia de la posición solo en el primer y último cuadrado		
3	Fig. a Las distancias respecto al eje Congruencia de figuras	Distancia respecto al eje de simetría	Considera las distancias respecto a un eje. Figuras semejantes
	Fig. b Las distancias respecto al eje		

Toda esta información fue vaciada en una tabla con el fin precisar no sólo la evocación de aspectos matemáticos sino la identificación de evidencias. Esto se muestra en la tabla 3.5.7.

Tabla 3.5.3.2. Identificación de elementos matemáticos en un futuro maestro

FMI	Respuesta	Evidencias de la identificación de elementos matemáticos	Análisis de la comprensión de la simetría
2	*“En las actividades 1, 2 y 3 se construye el simétrico, ya que se debe plasmar en la figura. Las propiedades se encuentran presentes en todas las tareas. Por ejemplo, todos tienen un homólogo y en todas se mantiene la figura congruente” (PI-5)* *“En la imagen a, el niño considera los aspectos de ubicación, dirección, distancia, posición de acuerdo a la figura presentada, en cambio en la figura b, el niño considera estos aspectos sólo en el primer cuadro rojo y el último cuadro rojo ubicando los demás erróneamente” (PII-N1-1.1)* *“…. los puntos homólogos de sí mismo (puntos dobles)…” (PII-N1-2.3)*	Identifica la simetría como transformación, refiriendo a que en ella hay un homólogo y alude la congruencia, aunque no explicita en qué consiste. Reconoce que para caracterizar una simetría es preciso que haya distancias iguales. Resalta la importancia de la posición, la ubicación y dirección, pero no explicita la relación entre estos elementos, por tanto su noción de congruencia no es completa. Alude a los puntos dobles, pero de forma incorrecta.	Idea matemática incompleta de la simetría centrada en elementos visuales. Nombra propiedades, sin definirlas

Este análisis detallado, permitió, precisar y vincular los hallazgos en las respuestas de los FMI, con los niveles de evidencias observadas de la destreza identificar, como se muestra en la tabla 3.5.8.

Tabla 3.5.3.3. Niveles de evidencia de la destreza identificar

Nivel	Identificación de evidencias	FMI
Bajo	Idea matemáticamente incorrecta de la simetría con uso incorrecto de las expresiones matemáticas. Aunque se usen términos matemáticos, se alude sólo al cambio de orientación que proviene de la idea de doblado	FMI 8, FMI9
Medio	Idea matemática incompleta de la simetría centrada en elementos visuales. Con expresiones matemáticas débiles pero no incorrectas. Reconocimiento de propiedades más allá de la simple orientación y congruencia..	FMI2
Alto	Aproximación cercana a la definición teórica usual de la simetría o totalmente correcta.	FMI4

3.5.4. Instrumentos para el análisis 4 en el grupo2

Para la identificación de evidencias de la destreza interpretar, y considerando la complejidad en este punto pues al ser preguntas abiertas, se consideró generar un modelo descriptivo de las respuestas a la tarea, desarrollado por el equipo investigador.

En este punto del análisis, era importante interpretar la comprensión que evidencian los FMI, en relación a las construcciones simétricas, a las propiedades de la simetría, y otros aspectos de la simetría, como se muestra en la tabla 3.8.1.En relación a las propiedades de la simetría, se consideraron las detalladas a continuación:

1. La imagen de cualquier punto se determina trazando la perpendicular por dicho punto al eje de simetría y llevando la distancia del punto al eje al otro lado del eje a partir de él. **(perpendicularidad)**
2. La simetría axial conserva la medida de los ángulos, las distancias de la longitud de los segmentos, y los puntos homólogos están a la misma distancia al eje de simetría**. (congruencia)**
3. La imagen de una recta paralela al eje de simetría es otra recta paralela. **(paralelismo)**
4. La transformada de una recta oblicua forma con el eje de simetría un ángulo igual al que forma la recta dada y, por tanto, el eje de simetría es la bisectriz del ángulo que forma una recta oblicua con su transformada. **(segmentos homólogos)**
5. La simetría axial es un movimiento involutivo (la figura simétrica de la simétrica de una figura dada es la propia figura de partida). **(movimiento involutivo o inverso)**
6. Todos los puntos del eje ***r*** de una simetría axial son dobles, por lo tanto, ***r***, es una recta invariante. **(puntos dobles)**
7. Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una figura simétrica y al eje de la simetría axial se le llama eje de simetría de la figura **(figura simétrica)**

Tabla.3.5.4.1. Ejemplo de reconocimiento inicial de aspectos de la simetría

Respuestas	Construcciones simétricas	Propiedades de la simetría	Otros aspectos matemáticos relacionados con la simetría
FMI 2	*"En las actividades 1, 2 y 3 se construye el simétrico, ya que se debe plasmar en la figura.*	*Las propiedades se encuentran presentes en todas las tareas. Por ejemplo, todos tienen un homólogo y en todas se mantiene la figura congruente" (PI-5)*	*"En la imagen a, el niño considera los aspectos de ubicación, dirección, distancia, posición de acuerdo a la figura presentada, en cambio en la figura b, el niño considera estos aspectos sólo en el primer cuadro rojo y el último cuadro rojo ubicando los demás erróneamente" (PII-N1-1.1)* *"…. los puntos homólogos de sí mismo (puntos dobles)…" (PII-N1-2.3)*

A continuación se muestra un ejemplo de las respuestas de dos FMI,sobre la forma de comprender la simetría que interpreta que tiene cada niño, así como las dificultades que manifiesta.

Tabla 3.5.4.2. Respuestas de FMI sobre las dificultades de los niños en TP3

FMI	Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
1	Las dificultades son epistemológicas, didácticas y ontogénicas.	Las dificultades son y ontogénicas, relación con limitaciones y características propias de cada individuo.	Las dificultades son ontogénicas y epistemológicas.	Las dificultades son y ontogénicas, ya que el niño logra realizar la actividad, pero con un grado de dificultad y además ensayo y error.
2	Las dificultades del niño 1 son en cuanto a la ubicación, ya que a través de las figuras realizadas, se observa que el error se presenta ahí, por lo que el obstáculo es ontogénico y epistemológico	Según las imágenes, el niño 2 presenta y realiza todas las actividades correctamente, por lo que se puede decir que no presenta dificultades.	El niño 3 realiza las actividades, algunas correctas otras no, se considera que se podría presentar el obstáculo epistemológico u ontogénico.	El niño 4 tiene dificultades en todas las actividades, no considera las propiedades de la simetría como punto homologo doble, isometría, por lo que puede tener obstáculo epistemológico y ontogénico.

Luego de esto y de la misma que se procedió con la organización de niveles para la evidencia de la identificación de elementos matemáticos, se hizo con la interpretación de la comprensión de la simetría. En la tabla 3.8.3., se muestra los niveles de evidencia (sin evidencia- bajo- medio- alto) y su descripción.

Tabla 3.5.4.3. Niveles de Identificación de evidencias de la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría.

NIVEL DE EVIDENCIAS	INTERPRETACIÓN DE EVIDENCIAS DE LA COMPRENSIÓN DE LA SIMETRÍA
Sin evidencia	El FMI, no interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, las propiedades de la simetría que consideran los niños al momento construir representaciones simétricas.
Bajo	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y reconoce hasta dos propiedades que parecen considerar los niños para construir representaciones simétricas.
Medio	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y reconoce de tres a cinco propiedades que parecen considerar los niños para construir representaciones simétricas.
Alto	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y reconoce todas las propiedades que consideran para construir representaciones simétricas

Refinamiento del análisis

Los perfiles anteriormente descritos se definieron en base a evocaciones de los estudiantes. Pero, buscando mejorar el análisis de la destreza interpretar se considero pertinente hacer una relectura de las respuestas de los FMI considerando el tipo de dificultades que ellos asumen presentan los niños en la resolución de las actividades escolares propuestas. Para ello, se considera la siguiente clasificación de tipos de dificultades (siguiendo a Sierpinska, 1995).

Dificultades de tipo epistémico:

a. Identificar la simetría como una isometría que se construye a partir de la perpendicularidad del segmento que une los puntos homólogos con el eje de simetría. Se manifiesta en el hecho de privilegiar los colores y no reconocer que la forma debe mantenerse. En las tareas propuestas se ha eliminado la situación de simetría con un eje inclinado, que se sabe por investigaciones precedentes que genera dificultades hasta niveles avanzados de primaria(Schultz, 1978, citado por Dickson, en 1981). A pesar de ello, los niños de 5-6 años (que realizaron la actividad escolar en la que se basa TP3) cometen errores en situaciones de papel cuadriculado y con eje vertical, lo cual parece un precedente de la dificultad mencionada.

b. Asociar la simetría a un contexto de “equilibrio” (construcción de una torre) idealizado, ya que la actividad se propone y resuelve con lápiz y papel y no en un contexto físico (por ejemplo, con piezas de madera). Esta dificultad se manifiesta en el diseño de torres que no tienen base (en el suelo) o con muros de diferente altura.
c. Reconocer que las figuras poligonales pueden clasificarse según el número de ejes. Esta dificultad se manifiesta al omitir ejes de simetría en una figura o asignar ejes que no existen (Leikin, Berman, Zaslavsky, 2000)

Dificultades de tipo ontogénico

a. Realizar el simétrico de una figura conservando el tamaño en un espacio pequeño. Esta dificultad se manifiesta en tareas de copiado, en donde los niños tiene problemas de psicomotricidad fina.
b. Reconocer una propiedad importante del efecto espejo en que la imagen de la figura inicial implica repetición de la forma y verla del revés. Se manifiesta en que se confunde reflexión con traslación.
c. Reconocer que el simétrico no es simplemente repetido al revés, sino que se sitúa diferente dependiendo del eje. Se manifiesta cuando se dibuja el simétrico en situaciones en que el eje está supuesto (en el contexto de la situación) pero no está representado.

Dificultades de tipo didáctico

a. Reconocer la conservación del tamaño en la construcción del simétrico de una figura en un soporte liso (hoja en blanco) respecto de un soporte con referencias (cuadrícula).
b. Identificar que la globalidad del simétrico de una figura es el simétrico de cada una de sus partes. Se manifiesta en situaciones donde se pide el simétrico por ejemplo de un gato y los niños realizan el gato conservando la forma y realizándolo al revés, pero no invierten su cola

En la tabla 3.6, se muestra un ejemplo de análisis más pormenorizado, en donde se identifican evidencias (que no son simplemente evocaciones) de la comprensión de la simetría de los niños, reconocidas por los FMI.

Tabla 3.5.4.4. Ejemplo de evidencias de comprensión en la destreza interpretar

	Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4	Análisis
Respuestas FMI2	*"Las dificultades del niño 1 son en cuanto a la ubicación, ya que a través de las figuras realizadas, se observa que el error se presenta ahí, por lo que el obstáculo es ontogénico y epistemológico"*	*"Según las imágenes, el niño 2 presenta y realiza todas las actividades correctamente, por lo que se puede decir que no presenta dificultades"*	*"El niño 3 realiza las actividades, algunas correctas otras no, se considera que se podría presentar el obstáculo epistemológico o u ontogénico"*	*"El niño 4 tiene dificultades en todas las actividades, no considera las propiedades de la simetría como punto homologo doble, isometría, por lo que puede tener obstáculo epistemológico y ontogénico"*	Identifica elementos matemáticos, pero no reconoce estadios de comprensión y dificultades de la simetría
Inferencias del equipo investigador	Constata que hay un error de ubicación, que se asocia aparentemente a la falta de congruencia como característica de la simetría	Resalta la corrección de todas las tareas. Lo cual no es cierto en la caso de la tarea 2	No constata ninguna dificultad específica. Aunque alude a obstáculos de diferentes tipos (Epistemológico y ontogenético)	Identifica algunos errores, y no todos de forma correcta	

Para determinar las evidencias encontradas en las respuestas de los FMI, se establecieron finalmente perfiles hipotéticos, que se organizaron en tres niveles, (bajo-medio-alto)

A partir de los análisis anteriores, se buscaba relacionar la identificación de los elementos matemáticos con la comprensión e interpretación de ideas para la construcción de la simetría, por parte de los FMI, que corresponden al segundo grupo analizado y que respondieron a la tarea profesional 3. En la tabla 3.8.5, se muestra un ejemplo de esta relación.

Tabla 3.5.4.5. Relación destrezas identificar e interpretar

		Identificar		
		Bajo	Medio	Alto
Interpretar	Bajo	FMI 6	FMI 5	
	Medio	FMI 2	FMI 4	
	Alto		FMI 3	

A partir de los resultados anteriores, se plantea dar respuesta a los perfiles hipotéticos de la competencia.

3.6. Síntesis del diseño metodológico.

Como una manera de facilitar la visión en relación al diseño metodológico, se presenta a continuación, una tabla que recoge los aspectos relevantes de la investigación. (Esto se muestra en la tabla 3.6)

Tabla 3.6.1. Síntesis del diseño metodológico

¿Qué buscamos?	¿Qué datos consideramos?	¿Cómo lo analizamos?
¿Qué aspectos matemáticos y didácticos caracterizan la competencia profesional de FMI?	Literatura sobre la competencia docente: mirada profesional (Lllinares, 2013, Jacobs, et al., 2010 y modelo MKT)	Lectura y análisis bibliográfico
¿Qué mirada o posicionamiento inicial de los FMI reconocemos en cuanto a identificación de elementos matemáticos?	Respuestas de los FMI (G1) a TP1 y TP2	Análisis textual y de discurso y uso de categorías del MKT y construcción conceptual de Herskovitz y Tall-Vinner (concept-image)
¿Qué elementos matemáticos identifican los FMI en el análisis de las producciones de los niños en las actividades escolares?	Respuestas de los FMI (G2) a TP3 -1ª parte y consistencia con respuestas a 2ª parte	Uso de categorías del MKT y análisis sobre simetría (Clements & Sarama, 2008)
¿Qué aspectos interpretan los FMI sobre la construcción matemática evidenciada por los niños	Respuestas de los FMI (G2) a TP3 1ª parte y consistencia con respuestas a 2ª parte	Análisis basado en la trayectoria de Arsac (2008); Thaqui y Giménez (2013)
¿Qué dificultades y errores se reconocen en las producciones de los niños?	Respuestas de los FMI (G2) a TP3 -1ª parte y consistencia con respuestas a 2ª parte	Uso de categorías de errores (Sierpinska, 2003)
¿Qué perfiles podemos observar en la mirada profesional de los FMI, y cómo se caracteriza la competencia profesional?	Respuestas de los FMI a TP1, TP2 y TP3	Idea de niveles (Hill, Phelps, 2008)

4. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados en cuatro apartados, siguiendo el proceso de análisis reseñado en el capítulo anterior. En el primer apartado se describen los posicionamientos iniciales de los futuros maestros de educación infantil, a partir de las respuestas dadas en las dos primeras tareas profesionales.

Luego en el segundo apartado, se muestran los resultados sobre las destrezas identificar e interpretar y la relación entre éstas. Es importante recordar aquí que dado que en el proceso seguido con los futuros maestros participantes no se realizó ninguna actividad práctica en el aula, consideramos que no se tenían evidencias suficientes para hablar de la destreza relacionada con la toma de decisiones.

A continuación en un tercer apartado, se presentan los niveles de adquisición de las destrezas, y posteriormente en la última fase se realiza una caracterización de la competencia profesional de los futuros maestros participantes en el estudio.

4.1. Posicionamiento

A continuación se muestran los posicionamientos de los FMI en cuanto a la comprensión de aspectos de la simetría en los niños, en las tareas profesionales 1 y 2. En un primer apartado se muestran los resultados que aluden a la destreza identificar (4.1.1) y en el segundo apartado los resultados relacionados con la destreza interpretar (4.1.2)

4.1.1. Posicionamientos relativos a los elementos matemáticos

Para dar respuesta a la pregunta P1, y teniendo en cuenta los planteamientos teóricos relacionados con la competencia docente mirada profesional. A continuación se muestran los resultados correspondientes a la identificación de los elementos matemáticos relevantes considerados en la construcción de la noción de simetría en los niños, en cuanto nos dan muestra del conocimiento matemático de los FMI (Llinares y Valls, 2013). Estos resultados se presentan en 3 partes: caracterización de la simetría como transformación, representaciones asociadas a la simetría y propiedades de la simetría.

Caracterización de la simetría como transformación

Resultado 1. Los FMI reconocen una conceptualización geométrica superficial basada en las descripciones y el reconocimiento de errores.

No estamos seguros que Los FMI reconozcan que en algunas actividades se hace la construcción del simétrico como una transformación en el plano. Los futuros maestros aluden a que los niños inician el copiado del modelo con las figuras de mayor tamaño. Dos de ellos precisan que el objetivo es conseguir un cuadrado con dos piezas triangulares. Y sólo uno de los tres realmente conceptualiza que debería aparecer un romboide y no un cuadrado.

> *"En esta imagen se observa que Ana ha empezado colocando las piezas de mayor tamaño. Además, ha colocado las piezas triangulares (amarilla y naranja) de forma simétrica (formando un cubo), aunque la figura de muestra no es así"* (FMI 1).
>
> *"Ana une las piezas, tanto las de mayor tamaño como las de menor, todas correspondiéndose en cuanto a medida, formando así cuadrados más grandes o más pequeños, posiblemente teniendo en mente la forma inicial del Tangram que el maestro había presentado"* (FMI 2).
>
> *"Ana está intentando elaborar la figura de la derecha, ha empezado usando las figuras más grandes (la mitad del cuadrado que forman las piezas del Tangram) pero no las ha colocado de la manera correcta, ya que teniendo en cuenta que estos dos triángulos deben colocarse formando un romboide, ella los ha colocado formando un cuadrado"* (FMI 3).

Resultado 2. Los FMI reconocen transformaciones geométricas en aspectos conceptuales, como nociones de cambio o equivalencia, y van tomando conciencia de las nuevas formas a partir de los objetos.

Cuando les preguntamos a los FMI, sobre en qué se fijan para ver que un niño está construyendo el modelo de manera adecuada, sus posicionamientos reflejan que si bien parece que se identifican cuáles son las estrategias que está utilizando el niño para replicar el modelo, es necesario una mayor profundización de los procesos de razonamiento desarrollados por los niños, para indicar con mayor precisión cuáles son los procesos asociados a las acciones que les permiten iniciarse en estos aspectos, cómo están visualizando la figura para poder hacer sus propia construcción.

> *"Jorge establece continuamente y espontáneamente, equivalencias entre las distintas combinaciones de piezas para resolver las diferentes situaciones problemáticas que le surgen"* (FMI 2).

Resultado 3. Los FMI reconocen la simetría de una figura como algo que esta repetido a lado y lado de una lìnea.

Este reconocimiento visual, es el resultado de las experiencias previas de los futuros profesores, que nunca tuvieron un aprendizaje matemático teórico sobre estos conceptos.

> *"Además, las propias formas del dibujo parten de la simetría, pues al doblarlas obtenemos la misma forma"* (FMI 8- TP1).

Los FMI identifican la importancia de que la noción de simetría, se acompañe de la no simetría. Para ello, nos ayudamos de frutas casi simétricas, frutas no simétricas, etc.

> *… la actividad presenta de forma concreta los conceptos de simetría y asimetría a partir de la totalidad de las frutas. Es sin embargo cierto que por la forma que define a ambas piezas de fruta, puede observarse también la simetría en ambas partes de la naranja y en la parte inferior de la piña, así como podría trabajarse la asimetría con su parte superior considerando que las hojas que presenta no se disponen de forma simétrica en la piña.* (FMI 24 –TP2).

> *Que la piña y la mandarina son dos frutas que te permiten diferenciar fácilmente su simetría o asimetría. Por un lado, la piña te permite aprender los dos conceptos si se trabaja desde diferentes puntos de vista, es decir, según el corte realizado o la perspectiva visionada se puede enseñar un concepto u otro. Por otro lado la mandarina también te permite observar su semejanza entre una parte y la otra, aunque a veces puede resultar difícil de ver sus diferencias. Simétrica –Asimétrica* (FMI 32 –TP2).

<u>*Representaciones asociadas a la simetría*</u>

Resultado 4. Los FMI consideran importante favorecer la manipulación de material en cuanto a posibilidades para establecer relaciones entre los objetos, descripciones, características y propiedades de la simetría.

La manipulación posibilita que los niños hagan un trabajo matemático que no es habitual, creando oportunidades matemáticas de aprendizaje, en el sentido de poder usar diferentes métodos, recursos y procedimientos para desarrollar la comprensión de aspectos de la simetría. Pero no se dilucida qué aspectos del contenido se ponen de manifiesto.

> *"Manipulando estas piezas, se da la oportunidad también a los niños, de reconocer las partes de cada figura, en el caso del romboide, por ejemplo, está formado por dos lados iguales largos y dos lados iguales cortos, el cuadrado en cambio tiene los cuatro lados iguales y cada triángulo tiene dos lados iguales y uno más largo"* (FMI 3).

Esto facilita el desarrollo de procesos de construcción de ideas matemáticas, en este caso ideas geométricas con significaciones adecuadas y precisas de las figuras.

> "*…debería dejarse a los alumnos un rato para que descubran las piezas y las manipulen, es decir, dar la oportunidad a los alumnos de que puedan llevar a cabo los mismos procesos cognitivos que llevan a cabo los niños y niñas que sí elaboran el Tangram"* (FMI 3)

Elaborar representaciones de objetos matemáticos en distintos planos genera un desafío cognitivo en el sentido de que se necesita una apropiación de las relaciones espaciales.

> "*es mejor que la figura modelo este en un plano vertical y diferente al que se les pide a los niños y niñas, porque de esta manera evitamos que copie la figura modelo, utilizándola como plantilla"* (FMI 1).
>
> *"No se trata solo de comprender la figura en el plano vertical, sino que después el niño/a debe trasladarla al plano horizontal y esto puede suponer un ejercicio mental importante a llevar a cabo sobre los planos"* (FMI 3).
>
> *"En este sentido, va modificando sus esquemas de conocimiento espacial y aplicando las nociones básicas de espacio y ubicación"* (FMI 2).

Resultado 5. Los FMI reconocen que para consolidar una idea de simetría es importante generar conflictos relacionados con las representaciones. Dan argumentos coherentes al hecho de que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la producción en el plano horizontal (mesa).

En la formulación de las tareas profesionales 1 y 2, no se pedía específicamente que los FMI se posicionaran sobre las propiedades que caracterizan la simetría. Sin embargo en sus respuestas se pueden constatar dos resultados interesantes.

Resultado 6. Una gran parte de los FMI hacen sólo referencia a la simetría como movimiento inverso e involutivo. La congruencia (medidas iguales de la figura inicial y final) e igualdad de forma y tamaño.

Se reconoce la importancia de la orientación, pero no se indica como característica de la transformación simetría como propiedad.Reconocen que un tipo de simetría es la simetría bilateral que se da a partir del eje de simetría, y que cada pieza puede ser simétrica en sí.Desde este punto de vista se pueden desarrollar las nociones de equivalencia, semejanza y congruencia de figuras, considerando además las distintas combinaciones de piezas y las distintas posiciones para ser igual que el modelo. Esta pregunta requiere por parte del maestro, de un entendimiento de las ventajas y desventajas de utilizar una representación o un modelo determinado, proporcionando explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, que justifiquen su conocimiento geométrico y que permita explicar por qué esta actividad favorece la simetría.

> *"Además porque las fichas del Tangram tienen simetría bilateral, ya que cuando se dividen en 2 sus partes son iguales. En el caso de esta actividad considero que se trabaja la simetría porqué la disposición de las piezas en las figuras presentadas son simétricas"* (FMI 3).

Resultado. 7. Pocos FMI aluden al eje de simetría y casi ninguno habla de la perpendicularidad del segmento que une puntos homólogos respecto del eje de simetría

> *" part del realitzar pel Francisco afegiria una activitat per complementar el ja explicat. Els repartia fulls a tots els nens, el full separat per una línea de dalt a baix. A una banda del full estarà dibuixat la meitat d'una pinya i la meitat d'una mandarina i a l'altra banda els nens hauran de completar la meitat de cada fruita" (FMI7-TP2).*

> *"Mientras que la piña sólo es simétrica si el eje de simetría se coloca de manera vertical" (FMI13-TP2).*

4.1.2. Posicionamientos relativos a la interpretación sobre la construcción de la noción de simetría en los niños

A continuación se presentan los resultados correspondientes a la interpretación que los FMI hacen sobre los procesos constructivos de la noción de simetría en los niños, así como los posibles errores y dificultades cuando enfrentan tareas que involucran la noción de simetría. Agrupamos estos resultados en dos apartados: procesos constructivos y posibles errores y dificultades

Procesos constructivos

Resultado. 1. Los FMI dan cuenta de la importancia de los procesos de composición y descomposición de figuras, pero no como un aspecto relevante en la construcción de la idea de simetría en los niños.

Aluden a la yuxtaposición de las piezas como error en el copiado de la figura, señalando partes de las piezas y la posición, vinculado la idea de comparación y control de segmentos iguales.

> *"…une las dos piezas más grandes por la parte que coinciden, pero al ser no ser correcta del todo esta compenetración, porque se debían unir por otro lado, la construcción final queda descompensada por la unión inadecuada de los lados"* (FMI 2).

Resultado. 2. Algunos de los futuros maestros, consideran importante establecer relaciones de orden, separación y continuidad.

Estas relaciones se constituyen en elementos básicos de la topología, sobre los que se pueden construir otras ideas geométricas. Y por tanto es relevante que los futuros docentes aludan a ellas.

"En la etapa pre operacional de los niños, en la cual la proximidad y la separación son aspectos influidos por la presencia o ausencia de barreras en el desarrollo del pensamiento espacial" (FMI 2).

Resultado. 3. Los futuros maestros asumen, que se pueden construir aspectos de la simetría en las actividades de copiado, argumentando que las distintas piezas del Tangram, así como la composición de figuras y las relaciones que se establecen entre los objetos ayuda en esta elaboración de constructos geométricos.

Este reconocimiento es relevante aunque realmente no hay relación directa entre el hecho evocado y la idea de simetría. No se dice por ejemplo, que el hecho de que haya figuras simétricas a copiar y no simétricas provoca dificultades. Aunque si es cierto que reconocen cuáles son las simétricas y no simétricas, no identifican el papel de ese contenido para la enseñanza. Parece que la "razón" está en la existencia de piezas, y no tanto de la inserción de las piezas en la forma global a copiar.

"…con esta actividad también se trabaja la simetría porque los niños pueden observar figuras, o partes de figuras, que son simétricas y otras que no lo son, como por ejemplo las orejas del "gato" (FMI 1).

Resultado. 4. Los FMI aluden a que los niños realizan una interpretación de la información y luego un procesamiento visual.

Resaltan que en dicho procesamiento visual es donde se da la transformación de las imágenes que observa en un plano vertical, para luego trasladarlas a otro plano horizontal.

"Centrándonos en la figura en sí, hace que los niños, fijándose en el modelo de la pizarra que está colocado verticalmente, busquen un eje o un plano horizontal y hagan una traslación de la imagen"(FMI 6- TP1- P3).

Lo cual conlleva una dificultad, esta se produce cuando tiene que pasar de una situación vivida, en relación de un objeto consigo mismo, a una situación representada, en este caso la representación debe hacerlo en un plano distinto. Al respecto identifican que se hace necesario un trabajo previo, para poder desarrollar estas experiencias que le ayudaran a ser capaces de reconocer las propiedades geométricas, (como ejemplo movimientos y actividades psicomotrices, manipulación y experimentación y representación gráfica y mental), lo cual permitirá que se favorezcan procesos de razonamiento y modificación de esquemas mentales. A respecto reconocen que:

> *"Con la manipulación de las piezas antes de armar cualquier figura, los niños pueden descubrir estas simetrías, por ejemplo si con dos triángulos construyen un cuadrado uniendo sus hipotenusas. Pueden ver que existe una línea que separa ambos triángulos y que lo que hay a un lado y a otro es igual y podrían llegar a la conclusión que, si cortan el cuadrado de vértice a vértice, obtendrán dos triángulos pequeños."* (FMI 31- TP1- P3).

Resultado. 5. Los futuros maestros reconocen que los procesos de visualización geométrica permiten a los niños la reproducción de modelos, desarrollando figuras semejantes que son favorecedores para la construcción de ideas o conceptos matemáticos.

El niño para poder copiar el patrón, realiza cambios de posición de los objetos, para construir y componer nuevas figuras, esto a partir de la modificación de sus esquemas mentales. Esta capacidad está vinculada con ciertas habilidades necesarias para interpretar las imágenes y establecer uniones operativas y relaciones entre las imágenes y lo representado (Bressan, 2000).

Posibles errores y dificultades

Resultado. 6. Los FMI reconocen errores en la constatación del contenido matemático de los niños.

En efecto, se confunde cubo con cuadrado, no tiene claridad respecto de las relaciones de posición en el espacio, al hablar de *encima del cubo rojo.* Se reconocen algunos procesos de más alto nivel como es la unión de segmentos iguales, pero no se insiste en la posible falta de argumentación, sino que se valora el error del niño, por encima de explicar lo que hizo en sentido positivo.

> "*Los pies los ha colocado uniéndolos por un vértice de cada figura (de forma aleatoria). Y por último, la cabeza (triangulo azul) lo ha colocado encima del cubo rojo pero no haciendo coincidir ningún vértice de ambas figuras*" (FMI1).

Resultado. 7. Los FMI aluden a dificultades de la realización de figuras simétricas de una dada, y la necesidad de controlar el resultado obtenido.

Resulta importante la implementación de actividades con el meso espacio, para lograr explicar posibles errores como relaciones de orientación espacial, (posición, ubicación, orientación, desplazamientos).

> *"Aquestaspecte resulta positiuperquè fa que elsinfantshagin de pensar i fixar-se més en el moment de reproduir el model, ja que han de veure ben bé quina és la posició de les figures en vertical per tal de, després, poder-les col·locarcorrectament en horitzontal. Això fa que hagind'estructurar la sevament de forma correcta i comprenguin el lloccorresponent i la posición adequada de cada una de les set peces que formen el Tangram" (FMI 10).*

Resultado. 8. La mayoría de los FMI reconocen la dificultad en percibir la simetría de la figura global (pollo o gato) asumiendo las características de cada una de las partes que la componen.

Una figura compuesta de partes simétricas y no simétricas, puede ser no simétrica, y al hacer el simétrico de esta figura, el referente manipulativo único es el efecto espejo.

> *"Al posar-les simètricament, poden donar lloc al sorgiment de noves figures, encara que elsinfants no siguinconscients del tot (també és el cas d'aquestanoia, que posa simètricamentelstrianglesgrans i petitsdonantcom a resultat una nova figura geomètrica). També, el fet de construir idènticament una figura es treballar la simetria"* (FMI 9- TP1).

Las observaciones de los FMI se centran en detectar si la estrategia es buena o errónea.

"Une las dos piezas más grandes por la parte que coinciden, pero al ser no ser correcta del todo está compenetración, porque se debían unir por otro lado, la construcción final queda descompensada por la unión inadecuada de los lados de cada forma que componen el dibujo.El alumno colocará las piezas en una posición determinada, más o menos simétrica" (FMI 8-TP1).

Resultado 9. Los FMI, observan en la construcción de las representaciones que los niños utilizan distintas estrategias de resolución, como por ejemplo utilizan elementos referenciales.

Para llegar a construir representaciones simétricas, se guían por el color el tamaño, la forma, o por el orden en que están dispuestas estas piezas en el modelo), y que también resulta interesante de mencionar la forma en que establecen relación entre los objetos (igualdad, semejanza).

"Todos los niños se guían por el color, la forma y el tamaño de las piezas que tienen y que observan, ya que estas están pintadas del mismo color y son idénticas en su forma y tamaño. (Alude a la idea de congruencia) *Ana, en esta imagen se observa que ha empezado colocando las piezas de mayor tamaño. Además, ha colocado las piezas triangulares (amarilla y naranja) de forma simétrica (formando un cubo), aunque la figura de muestra no es así. Los pies los ha colocado uniéndolos por un vértice de cada figura (de forma aleatoria). Y por último, la cabeza (triangulo azul) lo ha colocado encima del cubo rojo pero no haciendo coincidir ningún vértice de ambas figuras" (FMI 1-T1-P1).*

"Cada niño ha relacionado cada figura con un color diferente y las identifica con cada uno de ellos. En la elaboración de las piezas del Tangram, ha manipulado estas piezas y se le ha dado la oportunidad de nombrarlas, compararlas entre ellas y que les surjan dudas que puedan resolver entre todos. En el momento que nos ilustran las fotografías, cada niño está identificando cada figura y la está relacionando, con su posición dentro de la figura que quiere elaborar. Júlia ya ha acabado de elaborar su figura y observa como lo están haciendo sus compañeros, por lo que se observa, Júlia ha comprendido que las piezas del Tangram no se pueden superponer y a través de la identificación de las piezas, sus colores y de qué manera se relacionan espacialmente ha conseguido armar una figura semejante a la presentada en la pizarra pero que contiene un error en la disposición del romboide, ya que los lados cortos en vez de quedar en posición vertical, deberían quedar en posición horizontal. Carmen parece que está esperando o observando a ver si alguno de sus compañeros encuentra una elaboración que se parezca a la figuras que hay colocadas en la pizarra, puede ser que si ve como un compañero suyo elabora la figura a ella le quede más claro el proceso que debe seguir" (FMI 3-T1-P1)

Resultado 10. Los FMI, identifican que para que los niños puedan construir simetrías, uno de los aspectos importantes a desarrollar tiene que ver con la organización espacial

Cuando el niño desarrolla estas habilidades puede hacer representaciones simétricas con distintas figuras. Los FMI, no reflexionan respecto de cómo estas tareas y el poder diseñar secuencias didácticas, conformadas por varias actividades que impliquen o no niveles de complejidad creciente, les permite desarrollar procesos, representar ideas, proporcionar explicaciones matemáticas más precisas y adecuadas, aplicar modelos y visualizar métodos en la resolución de problemas matemáticos, en este caso relacionados con la simetría.

En efecto, cuando el maestro está realizando una actividad con los alumnos o cuando la está diseñando, pone en juego una serie de conocimientos y competencias con los que se encuentra familiarizado, de manera de tomar decisiones eficaces, donde la comprensión del proceso de aprendizaje puede guiarlos en la forma de presentar los contenidos para que puedan ser dominados por niños y niñas. En este sentido Mason (2002), plantea que el profesor debe ser consciente de lo que él interpreta de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, mediante la adopción de una visión estructurada de lo que es relevante para los objetivos de aprendizaje de sus alumnos.

4.2. Destrezas de la competencia profesional: Identificación e interpretación

En este apartado, siguiendo la perspectiva teórica explicada en el capítulo 2 sobre la competencia docente mirada profesional, y respondiendo a la pregunta P1, en concreto a los objetivos 1 y 2 se detallan aquí los resultados relacionados con las destrezas: identificar e interpretar.

Recordamos que siendo imposible encontrar la continuidad del grupo inicial para desarrollar más tareas, se decide tomar otro grupo de futuros profesores, para tener resultados de una nueva tarea profesional (que consideramos sería clave en un proceso de formación). Por ello, en este apartado se presentan los resultados vinculados al análisis de las respuestas, de los FMI en el grupo 2 a la tarea profesional llamada TP3.

Este análisis nos permite reconocer por una parte, la identificación de aspectos matemáticos que los FMI consideran relevantes en la construcción de la noción de simetría y los que consideran tienen los niños cuando resuelven actividades escolares que involucran esta noción. Y por otra, la comprensión de las propiedades y procesos cognitivos asociados al aprendizaje de dicha noción, Así mismo nos permite tener una hipótesis sobre el potencial de dicha tarea para caracterizar y desarrollar la competencia profesional.

Subdividimos este apartado en tres partes: la destreza identificar (4.2.1.), la destreza interpretar (4.2.2.), y el establecimiento de relaciones entre ambas destrezas (4.2.3.), para hacer una descripción de la competencia docente mirada profesional reconocida en el grupo de futuros docentes de la muestra.

En las páginas 83-84 de esta memoria se encuentra descrita la tarea profesional TP3 en detalle. Recordemos ahora que en dicha tarea se solicita claramente que los futuros educadores resuelvan las tareas complejas de los niños, y posteriormente se presentan situaciones de respuestas específicas, en las que se pretende observar cómo interpretan dichas respuestas. Y recordemos también brevemente que una de las dificultades de esta investigación, subyace en el hecho de que la literatura de investigación didáctica no dispone de precedentes definidos de caracterización de procesos implicados en la simetría en la etapa Infantil. Por lo tanto los resultados obtenidos no sólo no muestran un desarrollo profesional contrastado porque no se trata de la misma muestra para el análisis, sino porque no podemos enfrentar a los futuros educadores con un esquema teórico definido.

4.2.1. La destreza Identificar en TP3

Recordemos que en la TP3, se presentan cuatro situaciones diferentes: una primera, en la que se pide realizar el simétrico de una configuración dibujada con colores, con un eje vertical. Esta situación no tiene un contexto culturalmente definido, y corresponde a un ámbito representativo abstracto. La situación 2, usa una situación antropométrica, basada en que se iba a desarrollar con estudiantes chilenos, y se usó una actividad realizada con niños a partir del contexto de la artesanía mapuche. Se pide que se dibuje un cinto en la frente en el que se visualiza una figura simétrica. La tercera actividad pide que se reflexione sobre la producción de figuras simétricas en el mundo simulado de dibujos de piezas de arquitectura. La cuarta actividad pide reconocer los ejes de simetría de algunas figuras. Llamaremos a estas situaciones cuando sea necesario TP3-1; TP3-2; TP3-3; TP3-4.

Sobre los elementos matemáticos evocados por los FMI, podemos iniciar diciendo que al igual que sucedió en la TP1, **constatamos que la totalidad de los futuros maestros percibe el cambio de orientación en una situación de simetría**. A diferencia del G1, en este grupo encontramos estudiantes que conocen propiedades características de la simetría y aluden a la simetría como una transformación involutiva. Eso muestra algunas diferencias entre los conocimientos previos de dichos estudiantes con los de la muestra del G1.

Veamos ahora de manera puntual las evidencias de la identificación de elementos matemáticos percibidos por los FMI. El registro detallado a partir del cual hemos identificado estas evidencias puede encontrarse en el anexo 11.

<u>Características de la simetría como transformación</u>

Resultado 1. Pocos FMI identifican simetría con transformación

> *"En las actividades 1, 2 y 3 se construye el simétrico, ya que se debe plasmar en la figura. Las propiedades se encuentran presentes en todas las tareas. Por ejemplo, todos tienen un homólogo y en todas se mantiene la figura congruente" (FMI2 – TP3-PI-5).*
>
> *"...Se está construyendo el simétrico de una figura y en todas las actividades se identifican propiedades de la simetría, ya que todas tienen un punto y un homólogo, todas las imágenes de las actividades son figuras congruentes, mantiene la misma distancia" (FMI 7- P1-5)*

Resultado 2. Algunos FMI caracterizan la simetría aludiendo a aspectos como la posición, ubicación y dirección.

En efecto es importante reconocer que para caracterizar la simetría se precisan ciertas condiciones. Así mismo también es necesario comprender y explicar las relaciones que existen entre los diferentes aspectos.

> *"En la imagen a, el niño considera los aspectos de ubicación, dirección, distancia, posición de acuerdo a la figura presentada, en cambio en la figura b, el niño considera sólo estos aspectos sólo en el primer y cuadro rojo y el último, ubicando los demás erróneamente" (FMI 2–TP3–P2).*

<u>*Propiedades de la simetría*</u>

Se reconoce la importancia de la orientación, pero no se indica como característica de la transformación simetría como propiedad.Reconocen que un tipo de simetría es la simetría bilateral que se da a partir del eje de simetría, y que cada pieza puede ser simétrica en sí.Desde este punto de vista se pueden desarrollar las nociones de equivalencia, semejanza y congruencia de figuras, considerando además las distintas combinaciones de piezas y las distintas posiciones para ser igual que el modelo. Esta pregunta requiere por parte del maestro, de un entendimiento de las ventajas y desventajas de utilizar una representación o un modelo determinado, proporcionando explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, que justifiquen su conocimiento geométrico y que permita explicar por qué esta actividad favorece la simetría.

Resultado 3. Algunos FMI aluden a ciertas propiedades de la simetría. Dando relevancia a la repetición, la congruencia y al cambio de orientación.

> *"Las actividades que se están construyendo el simétrico son las act. 1, 2 y 3. Todas las actividades mantiene las distancias, tiene solo un homologo, también mantiene una simetría central, y otra que es congruente en sí, podemos ver en las actividades una isometría, también podemos ver que existe un segmento (inicio y final)" (FMI 1-PI-5).*

Resultado 4. Un FMI explica algunas propiedades que caracterizan la simetría axial correctamente.

"En las actividades 1, 2 y 3 se está construyendo el simétrico de la figura, ya que es el niño quien por sí mismo dibuja y completa lo que se le indica, mientras que en la 4 sólo dibuja los ejes de simetría. En la actividad 1, las propiedades de la simetría que se identifican son que todo punto tiene un homólogo, que es congruente, son puntos dobles, es una isometría y por último en que las simetrías axiales transforman los segmentos en segmentos congruentes. En la actividad 2 la propiedad que se observa claramente es que la simetría axial es una isometría. En la actividad 3 cumple con todas las propiedades mencionadas anteriormente, mientras que en la 4 la que se diera con mayor fuerza es la propiedad que señala que "todos los puntos del eje de simetría son homólogos de sí mismos, se dice que son puntos dobles" (FMI 4- TP· PI).

Resultado 5. Algunos FMI explicitan tipos de simetría, pero confunden la simetría axial con la simetría central.

En efecto, usan terminologías aparentemente formales pero no relacionan el nombre con la noción correspondiente

"Se está construyendo el simétrico de una figura en las actividades 1, 2, 3 y 4 (simetría central y axial). Propiedades de la simetría podemos apreciarlas en todas la tareas" (FMI9 TP3 -PI-5).

"Se construye el simétrico de la figura en la actividad 1, 2 y 3. En todas las actividades se identifican las propiedades de la simetría como en la segunda se identifica de que la imagen de una figura, mediante la simetría central, es otra figura congruente con la primera, así mismo es en la actividad 1 y 3" (FMI 11 – TP3- PI-5)

A diferencia de las tareas profesionales 1 y 2, en la TP3 se pedía específicamente a los FMI que se posicionaran sobre las propiedades que caracterizan la simetría. En este sentido, podemos constatar un aspecto diferenciador como es el uso de términos más "formales", pero que no evidencia una mejor aproximación a la definición teórica de la simetría.

Así mismo, podemos reconocer que este grupo de futuros maestros ha tenido una formación matemática previa aparentemente "aprendida", pero no realmente apropiada. Lo que se evidencia en la escaza argumentación sobre lo que se enuncia. También puede constatarse que algunos términos se usan de manera aislada, sin establecer relaciones entre estos que darían cuenta de una mejor comprensión sobre la noción de simetría.

4.2.2. La destreza interpretar en TP3.

Respecto a los resultados relacionados con la interpretación que los FMI hacen sobre la comprensión de la noción de simetría por parte de los niños, se puede decir, en primer lugar, que, en su gran mayoría, los FMI, parecen no entender los cuestionamientos de la tarea profesional relacionados con el poder explicar cómo el niño comprende la noción de simetría. Aluden a aspectos generales en relación a las dificultades y a una tipología vinculada a la idea de obstáculos.

A continuación (Tabla 4.2.2.1) se muestra el reconocimiento realizado por uno de los FMI sobre las propiedades de la simetría que él identifica en las producciones de los cuatro niños a las diferentes actividades escolares.

Tabla 4.2.2.1. Reconocimiento de propiedades de la simetría en los niños por FMI4

N	Actividad escolar 1	Actividad escolar 2	Actividad escolar 3
1	Las propiedades de la simetría que tiene en cuenta el niño son, en la imagen superior cumple con que **todo punto del plano, tiene un y solo un homólogo,** que **la imagen tiene congruencia**, tiene puntos dobles y cumple con la isometría y con las simetrías axiales, que transforman los segmentos en segmentos, mientras que en la figura inferior no cumple con la reflexión correcta es decir con el principio de isometría.	En la tarea el niño cumple parcialmente con la mayoría de las propiedades, ya que si bien logra reflejar la imagen **siguiendo la forma** de esta, **no es capaz de dimensionar en la isometría** el tamaño adecuado, por lo que le falta más orientación en el espacio.	En esta ocasión el niño de todas las propiedades **solo cumple con la forma de la figura**, ya que no pudo realizar de manera correcta la reflexión por lo que tampoco **es una figura ni congruente ni homóloga**.
2	Considera todas las propiedades de la simetría, **ya que existe solo un homólogo**, **la figura es congruente**, tiene en cuenta que hay **puntos dobles**, la isometría , ya que logra reflejar correctamente la imagen	El niño cumple parcialmente con la tarea, ya que si bien cumple con la isometría al logra reflejar el dibujo nodimensiona el tamaño de este , por lo que claramente no puede ser homólogo ni congruente, ni tampoco puntos dobles	El niño cumple con todas las propiedades de la simetría, **ya que logró realizar correctamente la reflexión**, que correspondería a la parte de la isometría, por lo que es congruente entre sí y homologo.
3	En la imagen superior no se considera ninguna propiedad, mientras que en la segunda se consideran los colores, la forma, mas no se considera la reflexión, ya que realiza una traslación.	Se consideran todas las propiedades de simetría, ya que el niño logra realizar la isometría correcta utilizando la reflexión, es congruente y homólogo.	También se consideran todas las propiedades como : -isometría (reflexión) -congruencia -homólogos -puntos dobles
4	No existe ninguna propiedad en la primera imagen de la parte superior, en cambio la del inferior se considera la isometría específicamente la reflexión (aunque parcialmente), ya que no logra ser congruente ni homólogo.	La propiedad que considero el niño de la isometría, es la traslación, no considera el tamaño, que sea congruente ni homologo.	Las propiedades que se consideran son solo la forma y el tamaño, pero no considero la isometría de reflexión, por tanto no es congruente, ni homologo, sino que realizó una traslación en la figura presentada

A continuación se muestra lo que se puede inferir de las respuestas de los FMI del grupo G2 en cuanto a interpretar las producciones de los niños a las actividades escolares que les fueron planteadas. Inicialmente, identificamos en las respuestas de los FMI evocaciones a los procesos cognitivos, así como las posibles dificultades que estos reconocen de las producciones de los niños. En la tabla 4.3.2.4., se muestra un ejemplo del análisis realizado para los FMI del grupo 2 sobre la TP3. La totalidad de dicho análisis se puede ver en el Anexo 12.

	Niño 1	**Niño 2**	**Niño 3**	**Niño 4**
Rtas. FMI2	*"Las dificultades del niño 1 son en cuanto a la ubicación, ya que, a través de las figuras realizadas, se observa que el error se presenta ahí, por lo que el obstáculo es ontogénico y epistemológico"*	*"Según las imágenes, el niño 2 presenta y realiza todas las actividades correctamente, por lo que se puede decir que no presenta dificultades"*	*"El niño 3 realiza las actividades, algunas correctas otras no, se considera que se podría presentar el obstáculo epistemológico u ontogénico"*	*"El niño 4 tiene dificultades en todas las actividades, no considera las propiedades de la simetría como punto homologo doble, isometría, por lo que puede tener obstáculo epistemológico y ontogénico"*
Inferencias del equipo investigador	Constata que hay un error de ubicación, que se asocia aparentemente a la falta de congruencia como característica de la simetría	Resalta la corrección de todas las tareas. Lo cual no es cierto en el caso de la tarea 2	No constata ninguna dificultad específica. Aunque alude a obstáculos de diferentes tipos (Epistemológico y ontogenético)	Identifica algunos errores, y no todos de forma correcta
Análisis. Identifica elementos matemáticos, pero no reconoce estadios de comprensión y dificultades de la simetría				

Pc

Resultado 1. Algunos FMI reconocen errores en la constatación del contenido matemático de los niños.

La alusión a elementos, como orientación espacial y figura isométrica, de alguna manera, podrían hacer pensar en que tienen comprensión de aspectos de la simetría, sin embargo, al momento de contrastar, sus respuestas, con lo realizado por los niñosse observan errores, puesto que en ocasiones seexplicitan algunos elementos, pero al momento de interpretarlos se hace de manera inadecuada. En ciertos casos la forma de explicar es confusa. Se describen acciones de los niños, pero esto no implica una identificación de las posibles dificultades que los niños pueden tener al abordar las situaciones.

> *"El niño logra darse cuenta y logra una orientación espacial, teniendo en cuenta la dirección al respecto a objetos, y por tanto se da la simetría central, la cual tiene que ser congruente, aunque no respete el homólogo (FMI TP3- P2).*
>
> *"Logró hacer bien esta actividad, donde la traslación de las propiedades se ubicaron, en el lugar correcto, donde logró la posición y una noción espacial de la transposición y geometría" (FMI 6 – TP3-P2).*

Resultado 2. Los FMI identifican que para que los niños puedan construir simetrías, aspectos importantes a considerar son el color, el tamaño y la forma.

Si bien el reconocimiento delos atributos color, tamaño y forma son fundamentales para que los niños puedan enfrentar las situaciones propuestas, no es suficiente para que logren identificar las condiciones que deben considerarse cuando se trabaja con figuras simétricas o se elabora el simétrico de alguna.

> *"El niño considera como aspectos matemáticos la isometría, ya que hace una reflexión de aquella, considerando sus atributos como el color, el tamaño y la forma" (FMI 8-TP3).*

Resultado 3. Algunos FMI no reconocen de manera explícita las dificultades que tienen los niños.

Enuncian tipos de dificultades (epistemológicas, ontogenéticas o didácticas), pero no explican las dificultades específicas que observan en las producciones de los niños en cada una de las situaciones. Al igual que en la destreza identificar, parece que tienen asumida una terminología, pero que no está realmente apropiada.

“Las dificultades son ontogénicas y epistemológicas” (FMI1-TP3)

“El niño 3 realiza actividades, algunas correctas otras no, se considera que se podría presentar un obstáculo epistemológico y ontogénico” (FMI 2-TP3).

Resultado 4. Algunos FMI reconocen dificultades de tipo didáctico, asociadas al planteamiento y gestión de la actividad.

Es importante que se reconozcan como aspectos fundamentales y asociados a la construcción de la noción de la simetría la forma en que se implementa la actividad escolar y la incidencia de ello en la promoción o no del desarrollo de procesos cognitivos.

“Todos los niños tienen diferentes formas de trabajar. Hay dos opciones: la primera es que la educadora a la hora de plantear la tarea no fue clara al decir qué hacer, y por eso no todos entendieron. Y la segunda es que aun los niños no desarrollan esas habilidades para hacer las figuras simétricas. Considero que se debe trabajar este tema mucho más con los niños, porque esto es lo que menos se ve trabajando, y es lo que más cuesta” (FMI 11 – TP3).

4.3. Niveles de adquisición de la competencia profesional

Este apartado busca aportar elementos para responder a la pregunta de investigación PI1 relacionada con la descripción de la competencia docente mirada profesional. Se presenta una categorización de las evidencias encontradas en las destrezas identificar e interpretar de los FMI, en niveles. El apartado se divide en tres partes, en la primera se muestra una aproximación inicial a dichos niveles (4.3.1.), en la segunda se describe cómo hemos caracterizado unos niveles de las destrezas en TP3 (4.3.2.) y en la tercera, se presenta la relación entre las destrezas

4.3.1. Niveles en los posicionamientos iniciales (TP1 y TP2)

Con el fin de categorizar las producciones de los grupos de maestros en formación que han participado en el estudio, y caracterizar así su competencia profesional, inicialmente hemos definido unos niveles de reconocimiento a partir de la experiencia y los análisis realizados. La categorización se realiza en tres niveles (bajo, medio, alto).

La hipótesis que surge a partir de las observaciones, es que en el nivel bajo está el reconocimiento visual de la simetría que sitúa los objetos de forma diferente. En un nivel medio, está la identificación de la congruencia de segmentos, asociada a la idea de repetición. Y en un nivel más alto, está el reconocimiento del eje de simetría, como caracterizador de la igualdad de distancias a uno y otro lado del mismo. Y el reconocimiento de que acercándonos al eje, los puntos casi coinciden.

Así, como resultado inicialmente, tenemos que:

En un <u>nivel bajo</u> de identificación se encuentran los estudiantes que sólo aluden a la orientación espacial como característica de la simetría.

En un <u>nivel medio</u>, las alusiones justificadas además a congruencia y quizás la idea de transformación hablando de puntos homólogos.

Y en un <u>nivel alto</u>, las alusiones al eje de simetría y la perpendicularidad al eje.

En efecto, como se puede ver en la tabla 4.3.1.1., cuantitativamente hablando muy pocos FMI usan un lenguaje matemático preciso, y describe con claridad los aspectos matemáticos que caracterizan la simetría. Más de la mitad describe procesos cognitivos y habilidades desarrolladas por los niños relevantes para la comprensión de ideas matemáticas presentes en la actividad, y describe procesos cognitivos y habilidades desarrolladas por los niños.

Tabla 4.3.1.1. Porcentaje de FMI asociados a indicadores de comprensión.

Indicadores	Porcentaje de FMI
Justifica sus respuestas con argumentos adecuados (matemáticos y/o didácticos) (I2)	100%
Distingue las ventajas y desventajas de utilizar una representación o modelo en el desarrollo de la actividad (I6)	69%
Identifica estrategias, desarrolladas por los niños para dar respuesta a la actividad (I5).	60%
Describe procesos cognitivos y habilidades desarrolladas por los niños relevantes para la comprensión de ideas matemáticas presentes en la actividad.(I3)	60%
Identifica dificultades y posibles errores en la construcción de significados de la noción de simetría (I7)	42%
Describe con claridad aspectos matemáticos, relacionados con la simetría (I1)	24%
Utiliza un lenguaje matemático preciso al argumentar sus respuestas (I4).	21%

Los FMI que se ubican en el nivel de evidencia bajo, describen algunas estrategias llevadas a cabo por los niños, para poder desarrollar la actividad, como por ejemplo el utilizar piezas referenciales para poder construir el modelo, guiarse por los colores, o la forma de las figuras, y que algunas de estas figuras por sus características les llevan a errores en cuanto a ubicación en el modelo que deben copiar. Explica que los atributos de color, tamaño, y forma son favorecedores en la construcción del modelo, pues permite que al niño le sea más fácil esta construcción. "***el hecho de que las figuras sean de diferentes colores ayuda mucho a que el modelo construido sea el correcto*** ". Menciona que en algunas figuras se da la simetría bilateral, a partir del eje de simetría, y que cada pieza puede ser simétrica en sí. "***Creo que lo dice porque las fichas del tangram tienen simetría bilateral, ya que cuando se dividen en 2 sus partes son iguales".*** En este sentido explica como el niño percibe los objetos en esta edad, y que lo hace desde su totalidad como una unidad, integrando sus atributos.Que algunos recursos son más apropiados para construir ideas simétricas, debido a la forma.

En el caso del nivel medio, los FMI , consideran como aspectos importantes para construcción de la simetría, las relaciones de orientación espaciales, destacando la ubicación y posición de los objetos, por otra parte explica que los niños cuando se enfrentan a actividades de este tipo, recurren a lo que les es más significativo, en este caso atributos como el color, la forma y el tamaño, siendo este último el más recurrente por los niños para poder representar construcciones simétricas. … "*Une las dos piezas más grandes por la parte que coinciden, pero al ser no ser correcta del todo está compenetración, porque se debían unir por otro lado, la construcción final queda descompensada por la unión inadecuada de los lados"*. Explica que a partir de la comprensión que evidencian los niños sobre procesos de composición y descomposición de figuras, se favorecen otras nociones matemáticas como la semejanza y congruencia. …"*Creo que está bien trabajar estas dos frutas, ya que así se trabaja el concepto de simetría y asimetría. En caso de que se quiera trabajar solamente la simetría, la piña también lo permite, ya que sus rodajas pueden ser simétricas, como se ha dicho anteriormente".*En este sentido se infiere que el FMI, considera que para el niño observar la proporcionalidad y equilibrio de los objetos, le facilita la representación de construcciones simétricas, o de visualizaciones simétricas. Por otra parte explica que las actividades presentadas de esta manera favorecen procesos de razonamiento, y de visualización…."*Es mejor que la figura modelo este en un plano vertical y diferente al que se les pide a los niños y niñas, porque de esta manera evitamos que copie la figura modelo, utilizándola como plantilla. Además, de esta manera creamos un conflicto en ellos que les hace pensar y razonar, ya que tienen que cambiar del plano vertical al horizontal, trabajando así la organización espacial y la abstracción"*

Por otra parte, los FMI ubicados en el nivel alto, explican que para poder realizar este tipo de representaciones los niños recurren a diversas estrategias, como por ejemplo relacionar las figuras con la posición dentro de una representación que se quiera elaborar, y esto les permite visualizar por ejemplo que las figuras matemáticas, no se pueden superponer, ya que cada pieza tiene una posición y ubicación, establecidas por las relaciones entre los objetos. Explica que en determinadas construcciones, existen algunos objetos que provocan dificultades a los niños, por tanto se hace necesario una familiarización con los objetos matemáticos, a partir de procesos de manipulación y experimentación para poder reconocer e interiorizar las características de estos…."*Júlia ha comprendido que las piezas del Tangram no se pueden superponer y a través de la identificación de las piezas, sus colores y de qué manera se relacionan espacialmente ha conseguido armar una figura semejante a la presentada en la pizarra pero que contiene un error en la disposición del romboide, ya que los lados cortos en vez de quedar en posición vertical, deberían quedar en posición horizontal."*

A partir de estas observaciones generales, podemos decir que, hay tres grupos bien definidos. Estos grupos nos permiten reafirmar que existen tres niveles en cada una de las destrezas.

Tabla 4.3.1.2. Ubicación de FMI en niveles de posicionamiento inicial (TP1 y TP2)

	Futuros profesores	**Porcentaje**
Nivel alto Reconocimiento de 6 indicadores	FMI 29; FMI 31	6 %
Nivel medio Reconocimiento de 4-5 indicadores	FMI 8; FMI 12; FMI 23; FMI 4, FMI 9, FMI 13; FMI 17; FMI 20	24%
Nivel bajo Reconocimientos de 1, 2 o 3 indicadores	FMI 1; FMI 2; FMI 5; FMI 6; FMI 7; FMI 10; FMI 11; FMI 14; FMI 15; FMI 21; FMI 22; FMI 26; FMI 27; FMI 28; FMI 32; FMI 33	70%

A continuación se muestran algunas características asociadas a la **destreza identificar** de los FMI en TP1 y TP2, vinculadas a cada uno de los **niveles descritos**.

Nivel bajo de evidencia en la destreza identificar

Los estudiantes que se encuentran en un nivel bajo hacen referencia solo a la orientación espacial como elemento matemático para la construcción de la simetría.

Algunos futuros maestros aluden a las ventajas de desarrollar una actividad de esta manera, enfatizando los procesos cognitivos no estrictamente matemáticos.

> “*Además, de esta manera creamos un conflicto en ellos que les hace pensar y razonar, ya que tienen que cambiar del plano vertical al horizontal, trabajando así la organización espacial y la abstracción. De esta manera, tendrán que observar con atención las figuras teniendo en cuenta cuantos lados tiene, el tamaño, sus ángulos, la posición en la que se encuentra” (FMI 2, TP1-P5).*

Los FMI que se ubican en este nivel reconocen que la forma en cómo se presenta la tarea (plano vertical), y como el niño, la debe desarrollar (plano horizontal), se ven favorecidos procesos de comprensión de situaciones relativas de los objetos (procesamiento visual), y de la estructuración espacial (relaciones de ubicación, dirección, orientación, distancia.

El desarrollo del pensamiento espacial es complejo, y en este sentido son imprescindibles actividades con el meso espacio para lograr construir relaciones de orientación espacial, y cuando ya estén interiorizadas estas relaciones, pueden construirse conocimientos y comprensión sobre situaciones relativas de los objetos.

Nivel medio de evidencia en la destreza identificar

El grupo de FMI que se ubica en este nivel hace referencia a solo dos elementos matemáticos para la construcción de la simetría en sus respuestas, como son la congruencia y la orientación espacial.

> “*Ana une las piezas, tanto las de mayor tamaño como las de menor, **todas correspondiéndose en cuanto a medida,** formando así cuadrados más grandes o más pequeños, posiblemente teniendo en mente la forma inicial del Tangram que el maestro había presentado. De la misma manera, también hace una asociación por colores, es decir, **tiene en cuenta el color común** de las formas para unirlas y formar los cuadrados. Finalmente, une las dos piezas más grandes por la parte que coinciden, pero al ser no ser correcta del todo esta compenetración, porque se debían unir por otro lado, la construcción final*

queda descompensada por la unión inadecuada de los lados de cada forma que componen el dibujo" (FMI8, TP1-P1).

"Al compararlas entre ellas, dándole importancia a que ambas son la misma fruta pero las diferencia la medida. En este sentido, se trabajaría la asimetría (frutas diferentes), como también facilitar dos piezas de frutas de igual tamaño y hablar de simetría (frutas iguales)" (FMI8, TP"- P1).

A partir de estos comentarios se infiere que en este nivel se identifican las relaciones de congruencia, en tanto se comprende que la correspondencia de forma y dimensiones de las partes de las figuras definen la congruencia, y que además, facilitan la comprensión de la simetría.

En este nivel no se da importancia a las acciones de control de los propios los niños, cuando con los dedos se observa que tratan de conservar las formas, manteniendo las distancias.

Fig 8: Construcción de Ana

Los FMI de este nivel reconocen la forma en que los niños identifican los objetos (iguales y diferentes), sobre la base de atributos que se pueden medir, como el tamaño.

Esto les permite resolver problemas a partir de comparaciones directas sobre objetos teniendo en cuenta como base estos atributos.

Se reconoce la necesidad de trabajar actividades de comparar objetos que ayuden al aprendizaje de la discriminación visual, descubriendo figuras iguales y diferentes, distinguiendo figuras semejantes o congruentesdentro de un conjunto.

"La importancia de presentar el Tangram en un plano vertical como es la pizarra y que el alumnado luego lo plasme de manera horizontal, está basada en el campo visual del niño, puesto que este ha de identificar, posicionar, situar y colocar según las limitaciones y el desarrollo de su pensamiento espacial y visual. De la misma manera, el niño desarrolla la capacidad de perspectiva como forma de identificar y plasmar una realidad en planos distintos, así como también se ve ejecutada la orientación espacial utilizada como conocimiento para ubicar objetos en el espacio (derecha-izquierda, arriba-abajo, dentro-

> *fuera) y para adquirir las nociones básicas de posición y situación. Por lo tanto, el facilitar un dibujo en la pizarra para que posteriormente el niño lo construya en su mesa, proporciona una organización espacial concretada en la representación mediante diferentes formas geométricas, de manera que significa un sistema de referencia para la colocación de las piezas" (FMI 8,* TP1-P5).

Los estudiantes de este nivel explican que el desarrollo de habilidades de visualización, favorece procesos de construcción y de relaciones de orientación espacial, pudiendo elaborar configuraciones que se pueden relacionar con objetos matemáticos.

En este caso representar configuraciones igual a los modelos presentados por los maestros.

> *"Julia forma el Tangram siguiendo el modelo de dibujo presentado en la pizarra a la perfecció" (FMI8 TP1).*

Se infiere que para lograr esto la niña tiene una comprensión de aspectos como la percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual y memoria visual, en donde estas habilidades , representar e interpretar las distintas figuras geométricas .Se infiere que reconoce que este tipo de tareas permite el desarrollo de las representaciones de ideas geométricas, de fenómenos físicos con modelos geométricos concretos, que definen conceptos o propiedades geométricas, relaciones de posición en el espacio y cambios de posición.

Nivel alto de evidencia en la destreza identificar

Los FMI que se ubican en este nivel identifican al menos tres elementos matemáticos para la construcción de la simetría, como son la congruencia, la orientación espacial y el eje de simetría.

Por ejemplo, en relación a la congruencia, en tanto se pregunta que permite a los niños entender la noción de simetría, expone que:

> *"Una regla importante de este problema es que todas las reparticiones que se hagan de la naranja tienen que ser exactamente iguales. Así pues, una vez realizada la actividad se puede llevar a cabo un diálogo en el que se pregunte porque una fruta como la mandarina nos ha permitido repartirla para todo el grupo, la respuesta es porque es simétrica i cada una de sus partes también y por ello siempre la hemos podido dividir por la mitad" (FMI 31, TP2-P2)*

Identifican como un aspecto relevante el que los niños puedan reconocer figuras o formas congruentes, pues esto les facilita la comprensión de la simetría.

Se infiere que considera importante además los procesos de visualización y las habilidades relacionadas con la captación de representaciones visuales externas (o de interpretación de información figural), y las relacionadas con el procesamiento de imágenes mentales (procesamiento visual).

La explicitación del valor de la orientación espacial como característica de la simetría, está relacionado con otras características.

Reconocen que a través de la observación y el desarrollo de habilidades visuales se favorecen en los niños otros procesos como percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, permitiendo poder realizar distintas configuraciones que ilustren o representen determinados conceptos, propiedades o situaciones.

> *"Júlia ha comprendido que las piezas del Tangram no se pueden superponer y a través de la identificación de las piezas, sus colores y de qué manera se relacionan espacialmente ha conseguido armar una figura semejante a la presentada en la pizarra pero que contiene un error en la disposición del romboide, ya que los lados cortos en vez de quedar en posición vertical, deberían quedar en posición horizontal."* (FMI31, TP1-P1).

Identifican que la orientación es un elemento relevante en la construcción de la simetría.

Identificándola como una transformación hecha sobre el plano, que implica pasar de una figura inicial a otra final sin cambiar de medidas, y que en esta transformación se conserva forma y tamaño.

> *"Sí que es cierto que con los niños y niñas se podría intentar que hicieran el pato o el gato y que estos estuvieran mirando en sentido contrario y así, conseguiríamos armar la figura simétrica a la original" (FMI 31, TP1).*

Sólo los estudiantes de nivel más alto identifican el valor del eje de simetría.

En efecto, identifican no sólo la igualdad, sino la propiedad del eje en figuras particulares como el cuadrado.

> *"En el caso de esta actividad considero que se trabaja la simetría porqué la disposición de las piezas en las figuras presentadas son simétricas. Por ejemplo, si cogemos sólo la cabeza de la figura del gato, podemos ver que esta es simétrica, podemos dibujar una línea vertical y a ambos lados de esta línea los elementos son iguales. O que, por ejemplo, el quadrado de la cabeza del pato, limita con el eje de simetría del triángulo azul"…"Del mismo modo y, como hemos comentado antes, con la manipulación de las piezas antes de armar cualquier figura, los niños pueden descubrir estas simetrías, por ejemplo si con dos triángulos construyen un cuadrado uniendo sus hipotenusas. Pueden ver que existe una*

línea que separa ambos triángulos y que lo que hay a un lado y a otro es igual y podrían llegar a la conclusión que, si cortan el cuadrado de vértice a vértice, obtendrán dos triángulos pequeños" (FMI 31, TP1- P3).

Identifican que el eje de simetría es una línea recta o eje que pasa por una figura, de tal forma que dicha línea divide la figura en dos partes que tienen la misma forma, y el mismo tamaño. (Figura simétrica).

Ahora se muestran algunas características asociadas a la **destreza interpretar** en los posicionamientos iniciales de los FMI en TP1 y TP2, vinculadas a cada uno de los **niveles descritos**. En principio podemos decir que se distinguen tres niveles de interpretación.

En un nivel bajo, se alude más a la descripción de las acciones (realizadas por los niños) que a la interpretación de las mismas.
En un nivel intermedio, se encuentran quienes identifican sólo algunas propiedades, las argumentan, pero no consiguen relacionar estas propiedades con errores y dificultades.
En un nivel alto se ubican los FMI que identifican los elementos matemáticos del contenido y los relacionan con las características de la comprensión matemática de los niños en las situaciones escolares

A continuación se muestran algunas características asociadas a la **destreza interpretar** de los FMI en TP1 y TP2, vinculadas a cada uno de los **niveles descritos**.

<u>*Nivel bajo de evidencia en la destreza interpretar*</u>

Los FMI que se ubican en este nivel hacen alusión a las acciones, y no a la interpretación de las mismas.

Por ejemplo, al tratar de explicar la manera de actuar de los niños para elaborar la construcción dada, un FMI explica que:

"*En esta imagen se observa que ha empezado colocando las piezas de mayor tamaño. Además, ha colocado las piezas triangulares (amarilla y naranja) de forma simétrica (formando un cubo), aunque la figura de muestra no es así. Los pies los ha colocado uniéndolos por un vértice de cada figura (de forma aleatoria). Y por último, la cabeza (triangulo azul) lo ha colocado encima del cubo rojo pero no haciendo coincidir ningún vértice de ambas figuras."…. (TPI- P1). "Lo que yo haría sería incluir más frutas en la actividad para que los niños vean más ejemplos y tengan* *diferentes oportunidades para captar el concepto de simetría y asimetría. Por ejemplo, incluiría la manzana, el aguacate, la naranja, la pera, etc". Con la mandarina lo que haría, aparte de lo que ha hecho Francisco, es preguntar si los gajos son simétricos o no (simetría aproximada). (TP2 – FMI 2).*

Pareciera que, al extrapolar los cortes desde distintos planos y dependiendo de la forma del objeto se produciría la simetría. Se reconoce una debilidad en cuanto a dominio conceptual, respecto de la definición de elementos matemáticos, involucrados en el conocimiento geométrico, incidiendo de manera importante, en la interpretación de la comprensión de las ideas relacionadas con la simetría.

Los FMI que se sitúan en este nivel sólo reconocen que a partir de procesos cognitivos como el razonamiento los niños pueden justificar sus acciones, y que la forma en que se presenten las actividades a los niños se favorecerá otros aspectos matemáticos a partir del razonamiento. Para estos FMI, la observación, el conteo de los lados parece ser el único proceso definido. Aluden al tamaño, pero no se explícita qué longitudes deben controlarse. Mencionan los ángulos sin establecer que deben ser iguales y en sentido contrario.

"...Además, de esta manera creamos un conflicto en ellos que les hace pensar y razonar, ya que tienen que cambiar del plano vertical al horizontal, trabajando así la organización espacial y la abstracción. De esta manera, tendrán que observar con atención las figuras teniendo en cuenta cuantos lados tiene, el tamaño, sus ángulos, la posición en la que se encuentra" (FMI 2).

El grupo de FMI, que se sitúan en nivel bajo, reconoce la importancia de plantear este tipo de actividades en dos planos distintos, (vertical y horizontal). Consideran que este tipo de situaciones puede generar una estimulación cognitiva en los niños, que ayuda a desarrollar y mejorar capacidades como el razonamiento y el uso de esquemas deductivos. Para ello, es importante que la presentación de las figuras se haga de diversas maneras, en distintas posiciones, con diferentes tamaños, puesto que en un inicio las habilidades de los niños están vinculadas a lo perceptivo, que analicen las propiedades de las figuras, las relaciones y los elementos matemáticos que las definen.

Es bueno porque están trabajando dos planos diferentes y con ellos el espacio. Con la geometría se pone en marcha el pensamiento espacial (además de otros *pensamientos como el lógico que en muchas ocasiones están relacionados) y al trabajar en dos planos distintos, al pedir a los niños que trasladen la imagen que están viendo en vertical a plano horizontal, les hacemos trabajar el espacio (los planos)" (TP1 –FMI 26).*

Los FMI de este nivel valoran la forma de presentar las actividades, en tanto los niños deben accionar sobre un material concreto. Consideran que la forma en que el niño adquiere el conocimiento (exploración, manipulación), da lugar al reconocimiento inicial de características y algunas de las propiedades de los objetos (razonamiento lógico). El hecho de que aludan al color por encima de las propiedades métricas, pone en evidencia que los FMI situados en este nivel están más centrados en las acciones del niño que en los procesos cognitivos realmente implicados.

"Si todas las piezas del tangram fueran del mismo color, la dificultad a la hora de reproducir el modelo escogido aumentaría considerablemente, ya que hay muchas piezas parecidas…Por último, decir que si los niños no tuvieran que colorear y recortar ellos mismos las piezas, no estarían haciendo un aprendizaje tan intenso y significativo, ya que no prestarían tanta atención a la forma geométrica, a la simetría, a los lados y a los vértices de cada una de las piezas" (TP1- P4).

Según (Clements y Battista, 1992; Clements 2014), la manipulación de objetos permite a los estudiantes poner a prueba sus ideas, examinarlas, reflexionar sobre ellas y modificarlas. Pero se explica también que las actividades de comparar objetos ayudan al aprendizaje de la discriminación visual, descubriendo figuras iguales y diferentes dentro de un conjunto, distinguir figuras semejantes o congruentes. Aludir a la manipulación sin relacionarla con el proceso de comparación es lo que resulta característico de este nivel bajo de interpretación.

En el nivel bajo los FMI identifican que los niños utilizan distintos sistemas referenciales y que también recurren a relacionesperceptivas. Les resulta significativo el color, la forma y el tamaño de los objetos. Pero además de describir las acciones, no se establece que ciertos elementos del material llaman la atención del niño hasta tal punto que prescinde de otras propiedades importantes para controlar sus acciones y autocorregirse.

"…Jorge: En esta imagen se ve que este niño también empieza colocando las piezas de mayor tamaño. Se puede observar que va a colocar correctamente la pieza que tiene en la mano" (FP1-TP1).

Los FMI en este nivel no reconocen que algunas acciones no figurales sobre lo concreto, como lo es pasar de una fase manipulativa a un proceso más reflexivo, favorece el poder operar con los objetos. Se mantienen en el valor de lo visual centrados en el objeto no matemático. Es decir, se fijan más en las partes del gato o animal, que la pieza de tangram en abstracto. Algunos explican el procedimiento realizado por uno de los niños (Ana) aludiendo a que su forma de operar con las figuras, favorece procesos de composición y descomposición de figuras, a partir de las formas más elementales, hasta llegar a analizar ideas más complejas desarrollo de la simetría a partir de figuras iguales, pero no indican que precisamente eso puede generar una dificultad, al olvidar detalles de las figuras.

> *…"Ana: En esta imagen se observa que ha empezado colocando las piezas de mayor tamaño. Además, ha colocado las piezas triangulares (amarilla y naranja) de forma simétrica (formando un cubo), aunque la figura de muestra no es así. Los pies los ha colocado uniéndolos por un vértice de cada figura (de forma aleatoria). Y por último, la cabeza (triangulo azul) lo ha colocado encima del cubo rojo pero no haciendo coincidir ningún vértice de ambas figuras" (FMI 2)*

En algunas argumentaciones de los FMI de este nivel, se reconocen confusiones en cuanto a la comprensión de las características matemáticas de un objeto y a la comprensión de las relaciones de posición de los objetos. Identifican que para los niños la figura que presenta mayores dificultades en la ubicación en el modelo es el romboide (paralelogramo) por sus características. Y aunque señalan que el romboide es una figura compleja, no argumenta el porqué de esa complejidad.

Es cierto que la intuición didáctica, y el trabajo realizado en psicología en un curso anterior, permite que incluso en este nivel, se reconozca que las características del recurso pueden favorecer o no los procesos cognitivos y el desarrollo de aspectos geométricos, y que las representaciones o modelos geométricos realizados por los niños, sirven para evidenciar conceptos, imágenes visuales, propiedades geométricas, los cuales sirven de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento. Pero parece ser una idea disciplinadamente reproducida, pero que no es suficiente para que se produzca una interpretación más profunda.

Nivel medio de evidencias la destreza interpretar

Los FMI en este nivel explican que los niños tienen distintas maneras de comprender las configuraciones de objetos, por ejemplo, argumentan que la ubicación y posición de las piezas son aspectos importantes considerados por los niños para realizar un tipo de construcciones. Dan relevancia a atributos, como el color, la forma y el tamaño, siendo este último el más importante en este caso para el niño para poder construir el modelo. Resaltan elementos matemáticamente claves como las congruencias.

> *"Ana une las piezas, tanto las de mayor tamaño como las de menor, todas* ***correspondiéndose en cuanto a medida****, formando así cuadrados más grandes o más pequeños, posiblemente teniendo en mente la forma inicial del Tangram que el maestro había presentado. De la misma manera, también hace una asociación por colores, es decir, tiene en cuenta el color común de las formas para unirlas y formar los cuadrados. Finalmente, une las dos piezas más grandes" (FMI8 –TP1).*

En este nivel los FMI argumentan e interpretan el proceso de los niños, y establecen relaciones entre la acción y el proceso desarrollado. Dar explicaciones de los aspectos considerados por los niños para representar construcciones simétricas se constituye en una base para analizar mejor su comprensión, aspecto relevante en el desarrollo de la destreza interpretar de los FMI

> *"En este sentido, se trabajaría la asimetría (frutas diferentes), como también facilitar dos piezas de frutas de igual tamaño y hablar de simetría (frutas iguales)" (FMI 8 - TP2).*

> *"Júlia ha comprendido que las piezas del Tangram no se pueden superponer y a través de la identificación de las piezas, sus colores y de qué manera se relacionan espacialmente ha conseguido armar una figura semejante a la presentada en la pizarra pero que contiene un error en la disposición del romboide, ya que los lados cortos en vez de quedar en posición vertical, deberían quedar en posición horizontal" (FMI 31- TP1).*

En este nivel, los FMI explican que para poder llegar a elaborar una construcción es necesario que el niño actué sobre los objetos (fase manipulativa), generar ideas y contrastarlas. Efectivamente la exploración y manipulación posibilitará el tránsito hacia una comprensión de las relaciones que se establecen entre los objetos.

> *"Este concepto no se trabaja de forma explícita diciendo a los niños/as exactamente qué es la simetría y cómo podemos verla en las piezas del tangram, sino que se trabaja de una manera implícita formando estructuras,*

observando las características de las piezas y manipulándolas. Pedir a los niños y niñas que coloreen y recorten sus propias piezas del tangram favorece la interiorización de las formas geométricas y sus características, como la cantidad de lados o vértices que contiene cada pieza" (FMI 12 TP1).

Los FMI en este nivel reconocen aspectos relevantes en la construcción de la noción de simetría, especialmente cuando se hace referencia a la simetría de figuras planas. Asocian la simetría a la forma del objeto, no comprendiendo, por ejemplo en el caso de la piña (TP2), la manera que se tiene de dividir este objeto es infinita, pero solo, un corte único nos dará la simetría. La comprensión esta en identificar que la simetría es única para una cierta figura.

"Si que es cierto que con los niños y niñas se podría intentar que hicieran el pato o el gato y que estos estuvieran mirando en sentido contrario y así, conseguiríamos armar la figura simétrica a la original" (FMI31 –TP1).

"De este modo, para trabajar la idea de asimetría hubiese cogido frutas muy asimétricas, completamente asimétricas transversalmente, como por ejemplo una pera o fresas, que no pudieran llevar a confusión no solo por si tienen rabo o no, sino por la forma de la propia fruta, en que una de las dos partes quedaría bastante más estrecha que la otra" (FMI31-TP2- P3).

Los FMI consideran que estas actividades favorecen procesos cognitivos (de visualización, construcción y razonamiento, y el desarrollo de procesos de reversibilidad, de transformación, y de descubrir las propiedades que se conservan). Valorar la forma de presentar la actividad escolar asociada al desarrollo de procesos cognitivos, es un elemento clave en la interpretación sobre la comprensión que los niños puedan tener. Como se sabe una de las dificultades en el ámbito de la geometría, y que no permite avanzar en el aprendizaje de esta área, es que los estudiantes generalmente deben pasar de un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal (Castiblanco, 2004). Por ello es importante el reconocimiento por parte de los FMI sobre el tipo de actividades que pueden generar razonamientos que no sólo se centren en la simple descripción de una figura.

"…no se trata solo de comprender la figura en el plano vertical, sino que después el niño/a debe trasladarla al plano horizontal y esto puede suponer un ejercicio mental importante a llevar a cabo sobre los planos" (FMI31- TP1).

Veamos un ejemplo de indicio de esta síntesis de nivel alto.

> *"Sí que es cierto que con los niños y niñas se podría intentar que hicieran el pato o el gato y que estos estuvieran mirando en sentido contrario y así, conseguiríamos armar la figura simétrica a la original" (FMI 31 TP1,).*

En este nivel, se reconoce que los FMI comprenden que a partir de un movimiento involutivo se obtiene el simétrico de una figura, donde están vinculados elementos matemáticos como congruencia de figuras, procesos matemáticos y procesos cognitivos como visualización y razonamiento.

El desarrollo de los procesos de razonamiento y construcción, permitiría descubrir las simetrías. *De esta manera damos la oportunidad a los niños, mediante la experimentación, de llevar a cabo construcciones mentales matemáticas. La construcción compuesta con las dos mitades se corresponde con la que sería la rodaja original del kiwi, y por tanto se puede establecer que las rodajas de kiwi son simétricas.*

<u>Nivel alto de evidencia en la destreza interpretar</u>

Los FMI de este nivel, reconocen la simetría como una "transformación". Se justifica que la simetría se produce cuando se da una invariabilidad de una configuración de elementos bajo un grupo de transformaciones.

> *"si en algún momento el niño quisiera trasladar las elaboraciones que ha hecho con sus piezas podría hacerlo a la inversa. Desde mi punto de vista es importante plantear actividades de esta manera ya que los niños manipulan los objetos y llegan a ideas más complejos sobre los objetos y su interacción con ellos" (FMI31 -TP 1).*

Los procesos cognitivos de visualización, (que constituye el soporte de la actividad cognitiva y que tiene relación con la representación), de razonamiento, (justificación de la actividad geométrica) y de construcción, permiten elaborar configuraciones, que pueden actuar de modelos mediante los cuales se pueden realizar acciones, y así relacionarse con los objetos matemáticos representados.

Algunos FMI de este nivel reconocen que los niños en la etapa de 3-6 años desarrollan una comprensión de situaciones relativas de los objetos, en lo que se refiere a la interpretación de la información figurada, y al desarrollo de procesos de transformaciones de una imágenes en otras.

> *"La importancia de presentar el Tangram en un plano vertical como es la pizarra y que el alumnado luego lo plasme de manera horizontal, está basada en el campo visual del niño, puesto que este ha de identificar, posicionar, situar y colocar según las limitaciones y el desarrollo de su pensamiento espacial y visual" (FMI -TP 1- P5).*

A modo de resumen.

Como resumen, en la tabla 4.3.1.3., se muestran los niveles de evidencia iniciales que se conjeturan después de los análisis realizados.

Tabla 4.3.1.3. Niveles de Identificación de evidencias de la destreza interpretación en TP1 y TP2 en el grupo G1

NIVEL DE EVIDENCIAS	INTERPRETACIÓN DE EVIDENCIAS DE LA COMPRENSIÓN DE LA SIMETRÍA
Bajo	El FMI, interpreta la forma que tienen los niños de comprender las construcciones de objetos, y poder representar construcciones simétricas, y dos procesos matemáticos y/ o cognitivos que consideran para construir representaciones simétricas.
Medio	El FMI, interpreta la forma que tienen los niños de comprender las construcciones de objetos, y poder representar construcciones simétricas, y tres procesos manera matemáticos y/ o cognitivos que consideran para construir representaciones simétricas.
Alto	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, asociando en dicha argumentación todos (o casi todos) los procesos matemáticos y/o cognitivos que permiten construir representaciones simétricas.

Después de describir niveles para cada una de las destrezas en los posicionamientos iniciales de los FMI en las dos primeras tareas profesionales, consideramos oportuno establecer posibles relaciones entre las destrezas, de tal manera que ello nos permita hacer consideraciones más elaboradas de la competencia profesional. Como sabemos estas destrezas no son aisladas, detectar lo relevante en una actividad escolar implica no sólo la identificación de los elementos matemáticos que le subyacen, sino también la manera como se interpretan estas situaciones de enseñanza, lo cual implica entre otros aspectos, reconocer estrategias, dificultades, riqueza de las tareas. Este es el propósito del establecimiento de relaciones entre las destrezas identificar e interpretar.

Así, en este punto presentamos una primera relación entre los niveles de evidencia en la identificación de elementos matemáticos para la construcción de la noción de simetría, y los de la interpretación de la comprensión que tiene los niños de dicha noción, y que son reconocidos por los FMI en las tareas profesionales 1 y 2. En efecto, a los FMI les resulta complejo, explicitar las ideas matemáticas, en relación a la simetría, que subyacen a las tareas escolares analizadas, y reconocer aspectos relevantes que favorecen su construcción (en niños de 5-6 años). Así mismo, se evidencian limitaciones en la interpretación que hacen de la comprensión que tienen los niños sobre la noción de simetría, y de los procesos que se ponen en juego en determinado tipo de actividades escolares que involucran dicha noción.

Tabla 4.3.1.4 Resultado de relación de las destrezas identificar e interpretar en los futuros educadores analizados.

		Identificar		
		Bajo	Medio	Alto
Interpretar	Bajo	**FMI 2**		
	Medio		**FMI 8**	
	Alto			**FMI 31**

Por ejemplo, el FMI 2, evidencia un nivel bajo tanto en la identificación de elementos matemáticos, (solo identifica la orientación espacial), como en la interpretación de la comprensión de la simetría (tan sólo identifica la forma que tienen los niños de comprender las construcciones de objetos, y poder representar construcciones simétricas, evocando sólo la comparación de figuras y formas, y procesos cognitivos de razonamiento). Como se explicará cualitativamente, estos posicionamientos iniciales son habituales en la formación inicial, en las primeras actividades. Se ven cosas intuitivamente, pero no se tienen elementos suficientes, seguramente debido a la formación matemática débil de los futuros docentes.

Según se indicó, el elemento matemático que identificaron los tres FMI es la orientación espacial, no obstante les es difícil especificar que la simetría es un movimiento isométrico inverso, que altera la orientación de las figuras. Se observa la dificultad que conlleva la destreza interpretar, pues requiere de una demanda cognitiva mayor de una comprensión, y un uso del conocimiento matemático para la enseñanza, que pueda guiar los procesos de aprendizaje.

4.3.2. Niveles evidenciados en la tarea profesional 3

En esta fase y a partir de los análisis anteriores, se buscaba relacionar la identificación de los elementos matemáticos con la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría, por parte de los FMI. A partir de los análisis realizados, podemos reconocer tres grupos de FMI asociados a niveles diferentes en sus afirmaciones en la tarea profesional 3

Los resultados obtenidos nos han permitido clasificar a los FMI en varios grupos en los distintos niveles de evidencia, en relación a la identificación de elementos matemáticos, vinculados a tareas de simetría desarrolladas por niños de nivel infantil.

En el nivel bajo de la destreza identificar, los FMI no identifica elementos matemáticos para la construcción de la simetría, o simplemente enuncia nombres que no caracterizan la comprensión O bien identifica hasta tres elementos matemáticos para la construcción de la simetría.

En relación al nivel de evidencia medio, los FMI aluden a congruencia, orientación, movimiento involutivo, y puntos homólogos, como caracterización de la simetría,

En el nivel alto, se encuentran aquellos que casi identifican todas las propiedades teóricas de la simetría.

En efecto, observamos tres niveles de identificación de evidencias (nivel bajo y medio) en la destreza identificar correspondientes a los análisis realizados y resultados que se describieron en el apartado 4.2. La alusión a estos elementos, como orientación espacial y figura isométrica, de alguna manera, en su discurso pareciera que tiene comprensión de aspectos de la simetría, sin embargo, al momento de contrastar, su respuesta, con lo realizado por el niño, (como se muestra en la fig.4.3), se observa una dificultad, puesto identifica algunos elementos, pero al momento de interpretarlos lo hace de manera incorrecta. Es el caso del FMI 6,

> *"No logra ubicar los cuadrados, hay complicación en el orden y la ubicación, donde su percepción es distinta del espacio real al que él logra hacer. Por ende el niño se encuentra en la primera etapa topológica, donde se logra ver la representación gráfica y el problema del orden de esta". Luego en relación a esta misma explica que el niño 2, "Logró hacer bien esta actividad, donde la traslación de las propiedades se ubicaron en el lugar correcto, donde logró la posición y una noción espacial de la transposición y geometría (topológico)"* (TP 3, niño2)

En el nivel medio, parecen ubicarse, dos de los once FMI 3, 5

Respecto del FMI 8, que puede considerarse el único estudiante de nivel alto, identifica las relaciones de congruencia y semejanza, eje de simetría, movimiento involutivo y puntos homólogos. Explica de forma uniforme, lo que hacen los niños para poder construir las imágenes simétricas.

> "*El niño considera en la segunda imagen una reflexión, ya que copió la figura, pero no considero que era un reflejo de esta. También considera el atributo de los colores" (Tarea 1). "El niño considera como aspectos matemáticos la isometría, ya que hace una reflexión de aquella, considerando sus atributos como el color, el tamaño y la forma. Considera que hay una línea recta de simetría, puesto que invierte la imagen. Considera algunos puntos homólogos".(Tarea 2)"El niño, los aspectos matemáticos que considero fue la geometría, donde construyo las torres con cuadrados (figura geométrica), considero la reflexión de aquella y la traslación pero no considero todos los puntos y esto hizo que la figura se desplazara uno más."(Tarea 3),*

En este nivel se reconoce que los niños desarrollan el razonamiento espacial en la medida que identifican la forma de los objetos y exploran sus posiciones, esto les permite construir diseños, desde distintas orientaciones, determinando aspectos comunes y diferentes. Específicamente en la tarea 2 y 3, explica que el niño usa una referencia, orientando una línea vertical que le permite moverse en el espacio, y poder hacer la figura, comprendiendo que al tener en cuenta la posición y orientación de los objetos, podrá representarlos manteniendo el registro de las características de estos. En la tabla 4.3.2.1., se ve el resumen de los hechos relatados.

Tabla 4.3.2.1. Niveles de identificación de evidencias de elementos matemáticos en G2

Nivel de Evidencias	**Identificación de evidencias de elementos matemáticos**	**FMI**
Bajo	Los FMI no identifica elementos matemáticos para la construcción de la simetría, o simplemente enuncia nombres que no caracterizan la comprensión. O bien identifica hasta tres elementos matemáticos para la construcción de la simetría Idea matemáticamente incorrecta de la simetría con uso incorrecto de las expresiones matemáticas. Aunque se usen términos matemáticos, se alude sólo al cambio de orientación que proviene de la idea de doblado	1; 4; 6; 7; 9 10; 11
Medio	Los FMI identifica entre cuatro y cinco elementos matemáticos para la construcción de la simetría, y al menos tres criterios Idea matemática incompleta de la simetría centrada en elementos visuales. Con expresiones matemáticas débiles pero no incorrectas. Reconocimiento de propiedades más allá de la simple orientación y congruencia..	2; 3; 5
Alto	Los FMI identifica casi todos los elementos matemáticos para la construcción de la simetría Aproximación cercana a la definición teórica usual de la simetría o totalmente correcta.	8 ; 14

Por otra parte, y lo que dice relación con **la interpretación,** a partir del análisis de las distintas respuestas, evidenciado en el apartado 4.2.2. Podemos mostrar el siguiente resultado.

En su gran mayoría los FMI no responden a los cuestionamientos planteados, en relación a poder explicar cómo el niño comprende la simetría, y cuáles serían las mayores dificultades para esta comprensión. Se evidencian tres niveles. En el nivel bajo, los FMI aluden a las acciones sin hacer una auténtica interpretación.

A continuación se muestran algunas características asociadas a la **destreza identificar** de los FMI en TP3, vinculadas a cada uno de los **niveles descritos**.

Nivel bajo de evidencia en la destreza interpretar

En el nivel bajo se alude a copiar figuras, aunque en esta copia no considera aspectos como forma, dirección, ubicación y tamaño. No hay claridad de las propiedades de la simetría y de los elementos matemáticos, por tanto se dificulta la interpretación de las acciones del niño en cada una de las tareas escolares.

Los resultados muestran que, los FMI, que forman parte del grupo de evidencia bajo, interpretan, que, para los niños las dificultades están relacionadas con la conservación del tamaño de los objetos, con la congruencia, en reconocer que en el caso de la simetría axial (la que se presenta en las tareas), se da el efecto espejo, en tanto se repite la forma de la imagen de la figura inicial, conservando las distancias al eje de simetría, pero se muestra en dirección opuesta.

> *"Las dificultades del niño 1 son en cuanto a la ubicación, ya que, a través de las figuras realizadas, se observa que el error se presenta ahí, por lo que el obstáculo es ontogénico y epistemológico" (FMI 2, niño 1)*

Constata que hay un error de ubicación, que se asocia aparentemente a la falta de congruencia como característica de la simetría.

Se puede observar que los FMI, identifican elementos matemáticos, pero no reconocen estadios de comprensión y posibles dificultades que experimentan los niños en la construcción de la simetría, esto impide una argumentación matemática.

> *Aquí puedo señalar que el niño tiene dificultades en la primera actividad donde la traslación de las propiedades y atributos, ya que se logra observar que tiene problemas de noción espacial y geométrica, tanto en la actividad 2 y 3, puedo decir que logra la rotación de acuerdo a lo señalado. En la actividad 3, el niño logra realizar el trabajo sin ninguna interacción. (FMI 6, niño 3*).

En este caso identifica solo conceptos geométricos, pero sin ninguna comprensión respecto de propiedades de cada transformación que la hacen única, como se desprende de sus respuestas en donde interpreta que la simetría, la rotación y traslación, son transformaciones iguales, y que no hay elementos que caractericen a cada una de ellas que las hacen únicas. Esta debilidad en el conocimiento matemático ha derivado en la imposibilidad de argumentar sus conocimientos que como maestro debe comprender y usar en situaciones de enseñanza – aprendizaje de la simetría.

Nivel medio de evidencias la destreza interpretar

Respecto de los FMI que forman parte del grupo de evidencia medio, interpretan, que, para los niños las dificultades están relacionadas con la congruencia, con la perpendicularidad y distancia al eje de simetría, con el movimiento involutivo. El FMI 3, explica que:

> *"El niño tiene dificultades con distancias respecto del eje, al parecer en la actividad con cuadricula tiende a copiar la figura, pero igual que la primera (no de forma congruente)" (FMI 3, niño 3).*

Constata que una dificultad importante está en la conservación de las distancias de los objetos matemáticos al eje de simetría, lo cual se hace aún más complejo cuando se trabaja con planos que no están marcados (cuadriculados). En este caso reconoce que para que los niños comprendan el espacio organizado en cuadriculas, deben aprender primero la estructuración espacial. Según Clements, (2015), esta estructuración espacial, es una operación mental, de construir una organización o forma para un objeto o conjunto de objetos en el espacio, lo que permitirá el desarrollo de relaciones de orden y distancia dentro de una cuadricula. La construcción temprana de habilidades espaciales, promueve en los niños, el desarrollo del razonamiento espacial que permite examinar las formas de los objetos, y las relaciones que se establecen entre estos y sus posiciones relativas en el espacio.

> *"El niño en la primera tarea se complicó al copiar la figura, y cuando copio la segunda lo hizo bien, pero no relaciono que era un espejo, por lo tanto. no se invirtió la imagen. En la segunda tarea copió la figura. pero fue más arriba de lo que estaba la figura, hizo una traslación, sin que se le pidieran, sin darse cuenta. En la tercera tarea comenzó a mejorar más, al momento de terminar de formar la torre, pero al final se equivocó en un cuadro". (FMI 8, niño 3)*

Constata que al no considerar una propiedad importante del efecto espejo en que la imagen de la figura inicial se repite, pero con un movimiento inverso, el niño no puede construir imágenes simétricas. Se observa que tiene una comprensión de la simetría, al considerar como se debe construir una imagen simétrica, y reconoce que el niño al atender a procesos de visualización que constituyen el soporte de la actividad cognitiva, podrá representar las imágenes simétricas y sus propiedades. Al respecto Clements, (2015), explica que enseñar tanto el reconocimiento de las figuras como sus transformaciones, es muy importante para el desarrollo matemático de los niños, pues les ayuda a desarrollar un concepto de imágenes rico y preciso.

En este sentido el FMI 9, explica que para que los niños construyan la idea de simetría y de objetos simétricos, deben considerar que los objetos matemáticos deben ser representados conservando su forma y tamaño, pero en dirección opuesta, en tanto esto presenta una dificultad al momento de construir imágenes simétricas,

> *"El niño entendió la simetría como el "copiar" las imágenes tal cual como se presenta en el patrón. Su dificultad se presenta en la isometría (tarea 1- 1° parte), ya que debió pintar cuadros de más para poder llegar a la ubicación de la figura. Además, presenta problemas para realizar las figuras geométricas que aparecen". (FMI 9, niño 4)*

En este caso, al realizar solo acciones de copiados de las imágenes, las dificultades están en relación a la congruencia y las relaciones de orientación en el espacio.Por otra parte, se debe señalar, que si bien, se interpreta la comprensión que hace el FMI, de la simetría, a partir de sus argumentaciones, es necesario, comentar que se requiere una mayor precisión en la utilización del lenguaje matemático, de manera que las ideas y conceptos explicitados, sean comunicados correctamente.

Como resumen, en la tabla 4.3.2.2 se muestra que seis FMI, están en un nivel de evidencia bajo, y cinco FMI, alcanzaron un nivel de evidencia medio en relación a la comprensión e interpretación de ideas geométricas para la construcción de la simetría.

Tabla 4.3.2.2. Características de los niveles en la destreza interpretar en TP3 en grupo G2.

Nivel de Evidencias	Identificación de evidencias comprensión de la simetría	FMI
Bajo	El FMI, no interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, las propiedades de la simetría que consideran los niños al momento construir representaciones simétricas. O bien El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y reconoce hasta dos propiedades que parecen considerar los niños para construir representaciones simétricas. Los FMI interpretan la manera de comprender la simetría por parte de los niños, e identifica solo un tipo de dificultad que evidencian al momento construir representaciones simétricas.	3; 6; 7; 9; 10; 11
Medio	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y reconoce de tres a cinco propiedades que parecen considerar los niños para construir representaciones simétricas. Interpretan la manera de comprender la simetría por parte de los niños, argumentando dos tipos de dificultades que evidencian al momento construir representaciones simétricas.	1; 2; 4; 5; 8
Alto	El FMI, interpreta la manera de comprender la simetría por parte de los niños, y reconoce todas las propiedades que consideran para construir representaciones simétricas	Ninguno

Después de describir niveles para cada una de las destrezas evidenciadas por los FMI en la tareas profesional 3, consideramos oportuno hacer un refinamiento de estas dos destrezas, en razón de lo que los futuros maestros de infantil, identifican como relevante y significativo de aspectos matemáticos, y como evidencian una comprensión de una situación de aprendizaje, que permite construir una imagen de lo que interpretan del conocimiento. En este sentido se puede señalar que los estudiantes expresan en muchas ocasiones un lenguaje matemático, que queda solo en el contexto de expresiones matemáticas, que no profundiza en sus argumentaciones. En el cruce de ambos resultados, encontramos el resultado de la tabla 4.3.2.3.

Tabla 4.3.2-3 . Relación destrezas identificar e interpretar

		Identificar		
		Bajo	Medio	Alto
Interpretar	Bajo	FMI 6 FMI 7 FMI 9 FMI 10	FMI 3	FMI 11
	Medio	FMI 1 FMI 2 FMI 4	FMI 5	FMI 8
	Alto			

A partir de estos resultados, es oportuno conjeturar la existencia de grados hipotéticos de adquisición de la competencia mirar profesionalmente. En la tabla 4.3.2.4, se muestra la descripción de dichos grados.

Tabla 4.3.2.4. Descripción de los grados hipotéticos de adquisición de las destrezas identificar e interpretar

Grados de adquisición	**Descripción**
0	No se reconocen evidencias en la identificación de los elementos matemáticos y comprensión de ideas geométricas para la construcción de la simetría.
1	Se reconoce solo algunas evidencias en la identificación de los elementos matemáticos para la construcción de la simetría, y se alude solo a algunas propiedades que da cuenta de una comprensión de ideas geométricas para la construcción de la simetría.
2	Se reconocen evidencias relevantes en la identificación de los elementos matemáticos, explicitando las propiedades que caracterizan a la simetría, y propiedades que se asocian a las transformaciones geométricas, dando cuenta de una clara comprensión de ideas geométricas

Niveles de evidencia de la competencia. Perfil hipotético.

Se observa la dificultad que conlleva la destreza interpretar, pues requiere de una demanda cognitiva mayor de una comprensión, y un uso del conocimiento matemático para la enseñanza, que pueda guiar los procesos de aprendizaje.

Como resultado de las observaciones realizadas en los apartados anteriores, podemos pensar que se dan tres niveles de desarrollo de la competencia profesional:

En el nivel bajo, Se reconoce o ninguna o solo algunas evidencias en la identificación de los elementos matemáticos para la construcción de la simetría, y se alude solo a algunas propiedades que da cuenta de una comprensión de ideas geométricas para la construcción de la simetría.

En el nivel medio se reconocen evidencias relevantes en la identificación de los elementos matemáticos, explicitando algunas propiedades que caracterizan a la simetría, y propiedades que se asocian a las transformaciones geométricas,

En el nivel alto, se da cuenta de una clara comprensión de ideas geométricas y se establecen interpretaciones adecuadas al observar el por qué ocurren ciertos errores y dificultades, y se tienen las respuestas ante los niños.

4.4. Caracterización de la competencia profesional

El desafío planteado estaba en poder hacer una caracterización de la competencia profesional que evidencia FMI, sobre la comprensión de la simetría, a partir del análisis de tareas escolares de simetría que fueron desarrolladas por niños de nivel infantil. En este contexto, y considerando lo planteado por Jacobs et al (2010), sobre la competencia profesional y aportes del *profesional noticing,* permitió caracterizar una competencia profesional inicial de FMI.

En este sentido, se puede aportar que el conocimiento matemático, está referido a elementos matemáticos, no logrando una articulación fluida que entregue significado a ese conocimiento, subrayando la necesidad de un proceso de implicación cognitiva, en el que se reconozcan justificaciones matemáticas, a partir de la comprensión de ese conocimiento. Se observa entonces que estas acciones cognitivas no logran interactuar e incidir una en la otra para construir procesos de enseñanza y aprendizaje.

4.4.1. Sobre la competencia inicial

Podemos concluir que los FMI identifican que en algunas figuras, se da la simetría bilateral, y que cada pieza puede ser simétrica en sí misma, y que a partir de la posición y ubicación de algunas figuras se pueden representar o construir figuras simétricas. En este sentido la conceptualización de simetría que evidencian los FMI, es muy simple, solo aluden a la idea de dibujar una línea recta o eje por la figura de tal forma que dicha línea divide la figura en dos partes que tienen la misma forma. No se reconoce en sus interpretaciones la idea de simetría como una proporción adecuada de las partes de un todo, con correspondencia de posición, forma y dimensiones de las partes de la figura a uno y otro lado de un plano transversal (bilateral).

Desde un cierto punto de vista reconocemos algunas confusiones, por parte de los FMI, en relación a las ideas de simetría y semejanza, tal confusión puede ser que, tanto las simetrías como las semejanzas, pueden interpretarse como transformaciones del plano (naturalmente muy distintas). En efecto las simetrías (transformaciones isométricas) pueden interpretarse como transformaciones del plano que "mueven" figuras en figuras congruentes, en tanto que una congruencia puede interpretarse como cualquier transformación del plano que hace corresponder a cada figura una figura congruente. Por otra parte reconocen que los procesos de visualización son fundamentales para que el niño desarrolle la capacidad de interpretar imágenes que se representan en distintas situaciones de orientación espacial, y que el desarrollo de la percepción espacial le permitirá reconocer formas propiedades geométricas y transformaciones espaciales.

4.4.2. Sobre la competencia mirar profesionalmente.

Es preciso señalar que si bien el modelo MKT, nos permitió, estructurar el diseño de la tarea profesional, hacer unas caracterizaciones iniciales identificando diferentes aspectos de los subdominios, y poder reconocer posicionamientos de los FMI, consideramos pertinente señalar, que la identificación de las respuestas y su relación con cada uno de los subdominios (propuestos desde el modelo), es un proceso complejo, ya que en una misma respuesta podemos reconocer diversos aspectos que involucran un entramado de conocimientos relativos a diferentes subdominios. En consecuencia debemos seguir avanzando en el estudio de dicho análisis y considerar nuevas categorías.

Si bien reconocemos que estas orientaciones generales podrían permitir al maestro mejorar sus prácticas de aula, observamos que la enseñanza de la geometría se reduce simplemente a la identificación de figuras y formas, al cálculo de perímetros y áreas (Chamorro, 2001). En este sentido consideramos relevante las aportaciones de Sarama y Clements, (2009, 2011), quienes argumentan que la geometría y los conceptos espaciales a menudo son ignorados o minimizados a principios de la educación, esto puede explicarse, por la concepción por parte de los maestros que suponen que los niños no pueden aprender los contenidos por su complejidad y nivel de abstracción, o porque los maestros presentan dificultades para construir oportunidades de aprendizaje geométrico. (Báez e Iglesias, 2007; Espinoza, Barbe y Dinko, 2007).

En una posible trayectoria hipotética de aprendizaje, se puede decidir en cuáles aspectos sobre la comprensión de la simetría se puede profundizar o incorporar. En resumen, en la tabla 4.4.2.1 se distinguen algunas características asociadas a dichos niveles de la competencia.

Tabla 4.4.2.1. Evidencias que caracterizan perfiles de la mirada profesional en las tareas realizadas.

Niveles	EVIDENCIAS
NIVEL BAJO	Alude a elementos matemáticos que permiten asegurar que se está construyendo adecuadamente la simetría considerando las representaciones. Justifica sus respuestas sin argumentos adecuados (matemáticos y/o didácticos) vinculados a las características que definen la simetría. Identifica estrategias, desarrolladas por los niños para dar respuesta a la actividad. Identifica la forma que tienen los niños de comprender las construcciones de objetos, y poder representar construcciones simétricas. Reconoce procesos matemáticos de comparación de figuras y formas, y el valor del razonamiento. Distingue las ventajas y desventajas de utilizar una representación o modelo en el desarrollo de la actividad. Pero no asocia este hecho a describir las propiedades que caracterizan la simetría.

NIVEL MEDIO	Reconoce propiedades que se asocian a transformaciones geométricas (Congruencia de segmentos) Alude a elementos matemáticos que permiten asegurar que se está construyendo adecuadamente la simetría considerando las representaciones.Justifica sus respuestas con argumentos adecuados (matemáticos y/o didácticos) explicitando sólo propiedades vinculadas a la bilateralidad, congruencia de segmentos homólogos. No explicita la idea de transformación geométrica. Identifica estrategias, desarrolladas por los niños para dar respuesta a la actividad. Describe procesos cognitivos y habilidades desarrolladas por los niños relevantes para la comprensión de ideas matemáticas presentes en la actividad.Identifica la forma que tienen los niños de comprender las construcciones de objetos, y poder representar construcciones simétricas. Reconoce la comparación de figuras y formas, visualización, razonamiento y construcción. Distingue las ventajas y desventajas de utilizar una representación o modelo en el desarrollo de la actividad. Habla algo de las dificultades de tipo ontogénico.
NIVEL ALTO	Describe con claridad aspectos matemáticos, relacionados con la simetría. Especialmente el eje de simetría y los puntos dobles. Se acerca a la idea de transformación geométrica propia de la teoría. Reconoce propiedades que se asocian a transformaciones geométricas (Congruencia de segmentos) Alude a elementos matemáticos que permiten asegurar que se está construyendo adecuadamente la simetría considerando las representaciones. Alude explícitamente a propiedades que caracterizan la simetría .Justifica sus respuestas con argumentos adecuados (matemáticos y/o didácticos) Utiliza un lenguaje matemático preciso al argumentar sus respuestas. Identifica estrategias, desarrolladas por los niños para dar respuesta a la actividad. Distingue las ventajas y desventajas de utilizar una representación o modelo o mediador semiótico en el desarrollo de la actividad. Identifica dificultades y posibles errores en la construcción de significados de la noción de simetría. Identifica la forma que tienen los niños de comprender las construcciones de objetos, y poder representar construcciones simétricas. Establece dificultades e identifica errores debidos a comparación de figuras y formas Reconoce errores composición de figuras y formas, y dificultades en la visualización Habla de argumentos de los niños. Y asume dificultades en los procesos cognitivos de construcción matemática.

Otro aspecto de la noción de simetría consiste en reconocer que dado un recorrido que va hacia la derecha, su simétrico va hacia la izquierda. Esta propiedad es posible visualizarla en educación infantil con experiencias de movimiento del cuerpo frente a un espejo u otro material que permita el reflejo.

Plantear la reflexión de los niños en grupo consideramos que reforzaría la comprensión matemática de los futuros maestros. El simple proceso de repetición de lo que significa una repetición simétrica

Proponemos que se analice, el diseño de pinturas corporales que algunas tribus indígenas realizaban y realizan mediante el uso de rodillos. Con ello los FMI podrían ver que los niños pueden tener experiencias de la propiedad: "el producto de dos simetrías es una traslación"

Observaciones conclusivas.

Poder caracterizar la competencia docente *mirada profesional* de un grupo de futuros maestros es un reto complejo, más aún cuando reconocemos las limitaciones de la tarea profesional en tanto ya que con un único instrumento no podemos evidenciar todos los aspectos sobre la comprensión de la simetría.
Las actividades escolares están centradas en educación infantil y por ello hay aspectos estructurales de la simetría que no se han abordado porque consideramos que no se "trabajan" en esta etapa escolar. Otros elementos importantes que no pueden identificarse a través de esta tarea profesional es el reconocimiento de puntos dobles en la transformación: simetría. Para ello, se debería introducir un tipo de actividad escolar del estilo que propone Acosta (2013), en la que se usa un software de geometría dinámica (Cabri – Geogebra) para que los niños descubran que el eje de simetría es la recta límite que contiene los puntos dobles de la transformación.

Estas observaciones, muestran acuerdo con lo que se decía en los trabajos de Vinner y Tall (1981), que señalaban que un estudiante va adquiriendo conceptos, en tanto construya imágenes de los mismos. Esa evocación de imágenes permite que se construya un puente entre el concepto y lo que el estudiante percibe de este, no obstante esto no significa que siempre exista coherencia entre las partes, es decir, la imagen del concepto puede ser diferente de la definición formal del concepto. A partir de la construcción de formas los niños establecen relaciones entre distintos objetos y entre distintas combinaciones de piezas, desarrollando construcciones simétricas. El reconocimiento y conciencia de esta realidad es la que sitúa a los FMI de nivel alto.

Es difícil decir que estos perfiles son reales, porque se realizaron para grupos distintos con actividades distintas y porque es difícil tratar este tipo de datos de forma cualitativa. Para Hershkowitz, (1998), los procesos de razonamientos son considerados como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen. Sin embargo "la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer lo que pasa en la cabeza de nuestros estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamientos, como analizan y transforman la información que les llega del exterior." En efecto, los FMI de este nivel, no describen con precisión los elementos matemáticos. Menos aún no disponen de conocimiento suficiente sobre los procesos cognitivos. Lo cual era esperable en estas actividades iniciales. Sólo a través del diálogo con los FP de niveles más altos, y con aportes de la investigación didáctica podremos avanzar en estos aspectos.

El desarrollo del pensamiento espacial es complejo, y en este sentido son imprescindibles actividades con el meso espacio para lograr construir relaciones de orientación espacial, y cuando ya estén interiorizadas estas relaciones, pueden construirse conocimientos y comprensión sobre situaciones relativas de los objetos. Al respecto (Flores, 2005), señala que la construcción temprana de habilidades espaciales y el desarrollo del pensamiento espacial, requiere además una destreza para visualizar los elementos geométricos en el espacio y abarca especialmente la visualización, lo cual favorece en los niños la comprensión de la descripción de similitudes y diferencias de las formas y del reconocimiento de las simetrías.

Para poder ampliar la mirada profesional de los futuros docentes en Infantil, deberán, por tanto, poseer un abanico de conocimientos, relacionados con cada uno de los contenidos específicos que tienen que enseñar, que les permitan, además de hacerlos comprensibles a sus alumnos, enseñarlos de modo que estos últimos adquieran un conocimiento relacional entre los diversos contenidos, (Ribeiro, et al, 2009).

¿Por qué es difícil que los FMI lleguen a explicar muchos procesos cognitivos? En principio porque no han recibido formación suficiente. En lo que respecta a los procesos de construcción y deconstrucción pueden ser el punto de partida para que el alumno establezca conjeturas sobre propiedades o características de las figuras. Por lo tanto el razonamiento geométrico, pone a los niños en acción, donde a partir del desarrollo de habilidades de visualización, se les puede iniciar en las descripciones y comparaciones de propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes (Alsina, 2013), logrando una comprensión e interpretación de aspectos del conocimiento geométrico, sin embargo debemos dar intención a este razonamiento, a partir de una actividad consciente y reflexiva (Canals, 1997).

5. CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROYECCIONES

5.1. Conclusiones

En este último capítulo exponemos una interpretación conjunta de todos los resultados, con el propósito mostrar la descripción de una competencia profesional

En primer lugar, damos respuesta a un aspecto que resulta importante que dice relaciona con los posicionamientos globales de los futuros profesores de infantil sobre ideas de geometría (5.1.1).

En segundo lugar, damos respuesta a la pregunta inicial que impulsó esta investigación y a los objetivos planteados. (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4),(5.1.5),

En tercer lugar, retomamos las ideas más relevantes del marco teórico y metodológico para reflexionar sobre los resultados obtenidos en relación con dicho marco(5.1.6).

Tras el apartado de discusión, presentamos en cuarto lugar las implicaciones que se desprenden de este trabajo, que creemos es información que puede contribuir en el diseño de instrumentos técnicos de tal manera que permita reconocer mejores aspectos del conocimiento profesional del maestro de infantil que favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (5.2).

Por último, presentamos brevemente las limitaciones que presenta el estudio y las proyecciones para seguir profundizando en el tema (5.3)

En este apartado responderemos las preguntas de investigación y los objetivos que hemos mencionado al inicio del capítulo, mediante la interpretación conjunta de los resultados obtenidos en los capítulos 3 y 4.

5.1.1. Conclusiones relacionadas con los posicionamientos iniciales sobre la comprensión de ideas geométricas

En relación a los posicionamientos iniciales de los futuros profesores de infantil respecto de ideas generales relacionadas con la geometría, que están involucrados en el primer cuerpo de tareas presentadas, se puede decir que identifican las estrategias de resolución utilizadas por los niños, en el contexto que estos utilizan las relaciones que establecen entre los distintos objetos matemáticos, para poder hacer representaciones geométricas. Por otra parte, reconocen que para los niños un aspecto importante es la forma de los objetos, y a partir de esta, pueden ordenar, clasificar y construir representaciones geométricas, en donde los niños accionan sobre procesos de ensayo y error para componer formas y figuras. Esto se reafirma en (Clements et al 2004, 2007), señalando que los niños de nivel infantil avanzan a través de niveles de ensayo y error, del uso parcial de atributos geométricos y de estrategias mentales para crear figuras dentro de la composición de formas.

Por otra parte, reconocen que la construcción de conceptos y relaciones geométricas que se forman en una primera etapa aparecen como producto de procesos de acciones sobre lo concreto, a partir de la manipulación y experimentación con materiales diversos, valorando el recurso como un potenciador de habilidades cognitivas y matemáticas. Esto se destaca en (Vecino, 2004, Barrantes, 2004), al señalar que la ausencia, o el olvido, de materiales específicos para la enseñanza de la geometría y el uso excesivo de la pizarra como instrumento de representación externa de ciertos elementos geométricos, generan ciertas concepciones erróneas de los conceptos geométricos más elementales, primando una geometría de cálculo, de papel, desarraigada del contexto.

De una manera general, reconocen que este tipo de tareas presenta desafíos cognitivos, en tanto se desarrollan procesos que de una manera muy elemental explican cómo visualización, razonamiento y construcción, que permite a los niños desarrollar esquemas deductivos y proponer argumentos lógicos para la construcción de ideas matemáticas, transitando hacia una comprensión de la simetría.

5.1.2. Conclusiones sobre la identificación del conocimiento matemático de los FMI

Un primer objetivo nos planteamos, *describir evidencias de la destreza identificar el conocimiento matemático en futuros profesores de infantil cuando se analizan actividades escolares relacionadas con simetría.* Así, a partir de los resultados presentados en el capítulo anterior, podemos decir que los futuros profesores de infantil, no presentan una visión clara de ideas matemáticas relacionadas con la simetría, sus propiedades y elementos matemáticos que son significativos en la construcción de esta noción.

En términos de conexiones matemáticas, que son fundamentales, para construir el conocimiento y progresar en una construcción más amplia y coherente del dominio conceptual de la simetría, se hace necesario que los futuros profesores de infantil, desarrollen una mejor comprensión al respecto de los elementos matemáticos relevantes que definen la simetría, y de los procesos matemáticos y cognitivos, que son fundamentales de potenciar en el nivel de infantil, para lograr una comprensión mayor de este tipo de transformaciones.

En cuanto a la identificación de elementos matemáticos, se concluye que los futuros maestros de infantil, consideran que la orientación espacial es un elemento relevante como característica de la simetría, en tanto reconocen que es importante y complejo el desarrollo del pensamiento espacial, y en este sentido es imprescindible promover experiencias con el meso espacio para lograr construir estas relaciones de orientación espacial (ubicación, posición, dirección), y en tanto ya estén interiorizadas puedan construirse conocimientos y comprensión sobre situaciones relativas de los objetos. (interpretación de la información y el procesamiento visual).

Por otra parte, la presencia de errores conceptuales, lleva a la reflexión respecto del conocimiento matemático que poseen estos futuros maestros, y de cómo esto, se puede mejorar, de tal manera que puedan enfrentar de una forma apropiada diversas situaciones profesionales. Tal y como lo plantea Llinares (2012), respecto a la enseñanza de las matemáticas, las prácticas de aula mejorarán en la medida en que los futuros maestros profundicen en el conocimiento del contenido, y lo usen para en la interpretación de situaciones problemáticas

5.1.3. Sobre la interpretación de la comprensión de la simetría en los niños

Un segundo objetivo planteado, *describir evidencias de la destreza interpretar la comprensión de ideas geométricas en futuros profesores de infantil cuando analizan las producciones de niños a tareas escolares relacionadas con la simetría.* En este sentido se puede concluir que los futuros profesores de infantil, reconocen que a partir de procesos cognitivos como el razonamiento, los niños pueden justificar sus acciones, y que la forma en que se presenten las actividades se favorecerá otros aspectos matemáticos a partir de este razonamiento.

En relación a la simetría en específico, en los razonamientos elaborados por los FMI, podemos ver que se reconoce la dificultad en percibir la simetría en la globalidad de las figuras, asumiendo las características de cada una de las partes que la componen, asociándola mayormente a aspectos visuales, a la forma de los objetos, o, a la posición definida en determinadas construcciones. Es decir, una figura compuesta de partes simétricas y no simétricas, puede ser no simétrica, y al hacer el simétrico de esta figura, el referente manipulativo único es el efecto espejo.

En este sentido la comprensión de la simetría por parte de los futuros profesores de infantil, no queda definida por la interpretación de las propiedades, ni elementos que la definen, sino, que, por aspectos visuales, a partir de un razonamiento cualitativo. Por otra parte, no aluden a los procesos de visualización como una habilidad para desarrollar formas de razonamiento creativo y lógico que les permita construir la idea de simetría, poder explicar y justificar estas argumentaciones. Coincidimos con Gutiérrez (1996), que se hace necesario profundizar en el desarrollo de procesos cognitivos, en tanto son una actividad de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales, mentales, o físicos, que permiten interpretar imágenes y resolver problemas o probar propiedades.

Desde una mirada interpretativa, esto es relevante, pues permite llegar a comprender lo que ocurre en el aula, los procesos matemáticos que subyacen a la comprensión de ideas matemáticas por parte de los estudiantes, y la interpretación que se hace de esas ideas. Esta forma permite entonces, reconocer el pensamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea matemática, y la manera en que los profesores dan cuenta del reconocimiento de ese pensamiento, en tanto implica analizar la situación matemática desde el conocimiento que los estudiantes deben llegar a saber.

5.1.4. Sobre la importancia de un diseño de tareas para el desarrollo de la competencia profesional

Un tercer objetivo pedía, *analizar la potencialidad de las tareas profesionales diseñadas, a partir de una trayectoria de aprendizaje que permite a construcción de la simetría.* En este punto, se puede concluir que los futuros profesores de infantil, valoraron significativamente la propuesta de diseño de tareas de aprendizaje para la construcción de la simetría. Y en este sentido que se considere material manipulativo es aún más importante, pues reconocen que, procesos matemáticos y cognitivos que deben desarrollar los niños, son favorecidos por situaciones de manipulación, exploración de recursos didácticos. Esto permite que los niños puedan representar sus ideas y desarrollar habilidades más elevadas.

Sin embargo, al no ser habitual, este tipo de diseños de tareas profesionales, que promovía la comprensión de la simetría, a los futuros profesores de infantil, les fue complejo desarrollar ideas matemáticas, interpretar la manera de entender estos aspectos por parte de los niños, y más aún, reconocer el pensamiento de los estos, cuando se enfrentan a un tipo de tarea escolar, en tanto implica analizar la situación matemática desde el conocimiento matemático que los futuros profesores de infantil deben evidenciar, y que como está diseñado en las distintas tareas profesionales, progresa en el conocimiento, favoreciendo el tránsito de los niños para la construcción de ese conocimiento. Bajo esta mirada, las trayectorias de aprendizajes son particularmente útiles, pues promueven el desarrollo del conocimiento matemático, de las estrategias que se pueden proponer para ese desarrollo, mejorando los niveles de comprensión y habilidades, permitiendo que sean cada vez más sofisticados, conformándose en una potente herramienta para poder desarrollar competencias profesionales.(Clements et al, 2004),

Diversos investigadores, explican que las tareas, son elementos determinantes, en razón del aprendizaje que los futuros profesores pueden construir, y donde la reflexión se presenta, en como los maestros eligen las tareas, donde se entraman el conocer las matemáticas, y como se construye el conocimiento matemático.

Se hace necesario que los futuros profesores conozcan las trayectorias de aprendizaje de los diferentes tópicos matemáticos y el papel que pueden desempeñar los materiales didácticos para favorecer las transiciones críticas en estas trayectorias puede ser esencial para desarrollar una competencia docente.

5.1.5. Sobre la relación de las destrezas identificar- interpretar

Se reconoce una debilidad en cuanto a dominio conceptual, relacionado con elementos matemáticos, involucrados en el conocimiento geométrico, incidiendo en la interpretación de la comprensión de aspectos geométricos relacionados con la simetría. Se constata, que la debilidad en cuanto a la construcción conceptual infiere que en el discurso y comunicación de ideas sobre la noción de la simetría.

Se puede concluir que en la mayoría de los casos se observa una relación directa respecto de lo que identifican e interpretan en una situación de aprendizaje

5.1.6. Sobre una caracterización de la competencia profesional

En el desarrollo de la competencia profesional es importante, que los profesores consideren la manera en la que los alumnos aprenden los contenidos matemáticos y las características del discurso matemático en el aula, (Llinares, 2006). Lo que implica saber observar de manera profesional los fenómenos que ocurren en una situación de aprendizaje, poder identificar, interpretar y valorar aprendizajes de los niños, y la comprensión de las ideas matemáticas que evidencian los maestros a partir del análisis de tareas matemáticas. (Jacobs et al., 2010)

La caracterización de la competencia profesional, nos ha permitido reconocer el papel que desempeña el conocimiento del contenido matemático y los procesos matemáticos que ponen de relieve en la comprensión y uso de estos contenidos matemáticos.

La identificación grados de adquisición de las destrezas permitió concluir que, el tener la capacidad de identificar los elementos matemáticos que están involucrados en la noción de simetría, por los futuros profesores de infantil, no implica que se tenga también la habilidad para interpretar su comprensión.

Se puede concluir que los futuros profesores de infantil para desarrollar una competencia profesional deben posicionarse desde una enseñanza que sea intencional, planificada, sistemática que promueva y acompañe los procesos de aprendizajes significativos en los niños, siendo necesario el desarrollo de una competencia docente que permita a los maestros seleccionar los contenidos a enseñar, diseñar e implementar actividades y estrategias que sean pertinentes y que sean aplicables a diversos contextos.

En investigaciones similares de (Fernández et al., 2012; Zapatera, 2015), se ha mostrado que el hecho de identificar los elementos matemáticos relevantes del problema (conocimiento matemático), permite a los futuros maestros estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de un contenido matemático, sin embargo, esto no es una condición suficiente para el desarrollo de una competencia profesional.

Se hace necesario fortalecer la preparación matemática de los maestros de infantil, de manera de dar cuenta de competencias matemáticas, que fomenten buenas prácticas en el aula, identificando aspectos relevantes en una situación de enseñanza y usando el conocimiento sobre el contexto para interpretarlo, (Van Es y Sherin 2002), esto implica desarrollar un nivel mayor de comprensión de conocimiento matemático y ser capaz de analizar la actividad matemática cuando se enfrenta a la resolución de problemas de simetría.

5.2. Implicaciones didácticas

A lo largo de este estudio se han tratado varios aspectos que directa o indirectamente pueden convertirse en recomendaciones didácticas para otros profesores de infantil. A continuación, presentamos algunos de estos aspectos que se han considerado importantes.

Se considera importante que los profesores construyan rutas de aprendizajes de las matemáticas, que son la base de las trayectorias de aprendizaje, a lo largo de las cuales, los niños transitan y progresan en el desarrollo de procesos y habilidades matemáticas, esto le permite ir armando una estructura de razonamiento, construcción y comprensión de ideas matemáticas, Se considera importante para la comprensión de un tópico matemático determinado, que el profesor de infantil sea capaz de diseñar un tipo de tareas que ayuden a los niños con las ideas matemáticas y el desarrollo de habilidades para la comprensión de nociones matemáticas. Es así que el diseño de tareas, debiese centrarse en el desarrollo de habilidades visuales, verbales y de representación (dibujo y construcción), que pongan al alumno en situaciones de: visualizar, describir, representar, encontrar regularidades, comparar, clasificar, buscar ejemplos positivos y ejemplos negativos de un concepto dado (qué es y qué no es, qué y/o cuándo cumple y qué y/o cuándo no cumple, etc.), buscar analogías, llegar a algunas incipientes generalizaciones a partir de ejemplos, arriesgar algunas conjeturas y validar las mismas experimentalmente, transitando por el camino del conocimiento matemático.

Se considera importante, además, el situar las experiencias de aprendizaje en contextos matemáticos, pues, permite que los estudiantes promuevan diversos procesos cognitivos lo cual permite potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

5.3.Limitaciones

En este apartado final de las conclusiones, se presenta algunas recomendaciones para realizar futuros estudios siguiendo esta línea de investigación. Dichas recomendaciones surgen de ideas que se han desarrollado durante el presente estudio pero que no se han trabajado de forma profunda.

Un aspecto que consideramos importante es en relación al instrumento de análisis, que, si bien nos ha permitido hacer una caracterización de la competencia profesional de los futuros profesores de infantil, sobre la comprensión de la simetría, se podría plantear futuras investigaciones que consideraran además observaciones de prácticas de aula de manera de identificar en la implementación de propuestas para la comprensión de la simetría, como usan y gestionan el conocimiento para la enseñanza de esta noción matemática.

5.4. Publicaciones derivadas de la tesis

Sámuel, M., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2016).Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia*, 5(1), 21-32.

Sámuel, M., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2015). Conocimiento matemático para la enseñanza en la resolución deproblemas geométricos con futuros maestros de educación infantil. *Actas XIV CIAEM-IACME, Educación Matemática en las Américas.* Vol. 11. Chiapas, México.

Vanegas, Y., Giménez, J. y Sámuel, M. (2014). Analizando tareas espaciales en Educación Infantil. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa - ALME 28.* Clame, México.

Participación en congresos:

Vanegas, Y., Sámuel, M. y Giménez, J.(2016). Efectos de la simetría en actividades de visualización en la formación de maestros de infantil. III SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓNMATEMÁTICA INFANTILSociedad Española de Investigación en EducaciónMatemática (SEIEM).

Sámuel, M., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2015). Conocimiento matemático para la enseñanza en la resolución deproblemas geométricos con futuros maestros de educación infantil. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM-IACME. Chiapas, México.

Vanegas, Y., Giménez, J. y Sámuel, M. (2014). Analizando tareas espaciales en Educación Infantil. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa - RELME 28. Barranquilla, Colombia

Referencias

Albert Gómez, M. J., & Cejudo, J. M. (2007). La investigación educativa: Claves teóricas.

Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: para niños de 6 a 12 años*. Narcea.

Alsina, À., & Escalada, C. (2008). Educación matemática en las primeras edades desde un enfoque sociocultural. Aula de Infantil, 44, 26-30.

Alsina, C., Gómez, R. P., & Garido, C. R. (1989). *Simetría dinámica*. Síntesis.

Alsina, A., C. Aymerich y C. Barba (2008), "Una visión actualizada de la didáctica de la Matemática en la educación infantil", UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, núm. 47, pp. 10–19.

Alsina i Pastells, À. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación matemática*, *22*(1), 149-166.

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. Números, 80.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años: elementos para empezar bien*. Narcea Ediciones.

Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (5).

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics.*Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". Enseñanza de la Matemática, 12, 67-87.

Ball, D. L. (1990).Breaking with experience in learning to teach mathematics: The role of a preservice methods course.For the learning of mathematics, 10-16.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics, 83-104.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. Handbook of research on teaching, 4, 433-456.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 29(3), 14-22, 43-46.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Baroody, A. J., Lai, M. L., & Mix, K. S. (2006).The Development of Young Children's Early Number and Operation Sense and its Implications for Early Childhood Education.

Barrantes, M., & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(2), 241-250.

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)* (Vol. 24). Graó. Pp. 142-147.

Bisquerra, R. (2009). Metodología de la invesfigación educafiva (Segunda edición ed.). *Editorial La Muralla: Barcelona*.

Bohórquez, H. J., Boscán, L. F., Hernández, A. I., Salcedo, S., & Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. Educere, 13(45), 477-489.

Brenneman, K., Stevenson-Boyd, J., & Frede, E. C. (2009). Math and science in preschool: Policies and practice. Preschool Policy Brief, 19, 1-11.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación Básica*. Buenos aires: Ediciones Novedades educativas.

Callejo, M. L., Valls, J., & Llinares, S. (2010). Aprender a mirar con sentido situaciones de enseñanza de las matemáticas. In *Investigación en Educación Matemática. Comunicación a los grupos de investigación. Seminario conocimiento profesional del profesor. XIV simposio de la SEIEM. Lérida*.

Canals, M.A. (1997). Geometría en las primeras edades escolares, Suma- Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 25, 31-44.

Canals, M.A. (2009). Transformaciones geométricas (Los dossiers de Maria Antonia Canals)- Edición profesor.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2012). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. Manuscript submitted for publication (CERME 8).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching.In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8, pp. 2985-2994).

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. *Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Enlace Editores Ltda. Bogotá, Colombia*.

Catalá, C. A., Garrido, C. R., & Gómez, R. P. (1989). *Simetría dinámica*. Síntesis.

Ciscar, S. L. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (17), 51-64.

Ciscar, S. L. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. In *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 3-31). Pearson Educación.

Clements, D. H., & Burns, B. A. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 31-45.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes.Teaching Children Mathematics, 6(8), 482–488. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/41197461

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A. M. (Eds.). (2003). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Routledge.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning.

Clements, D. H. (2003).Teaching and learning geometry.*A research companion to principles and standards for school mathematics*, 151-178.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 163-184.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education.*Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 81-89.

Clements, D. H. (2004).Geometric and spatial thinking in early education. En D. H. Clements y J. Sarama (Eds.), Engaging your children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education. Mahawah, NY: Erlbaum.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 136-163.

Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(2), 127-166.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, *14*(2), 133-148.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge. Pp.123-162

Climent,N;Romero, J.M.,Carrillo, J., Muñoz, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 16(1), 5-12.

Chao, S., Stigler, J. & Woodward, A. (2000) The Effects of Physical Materials on Kindergartners' Learning of Number Concepts. Cognition and Instruction, 18, 3: 285–316.

Chamorro, M.C. (dir) (2001). Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas, 79-122. Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

Chamorro, M. C., & Vecino, F. (2005). Hacia la idea de problema en educación infantil.

Coles, A. (2012). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. Journal of Mathematics Teacher Education, online first, DOI 10.1007/s10857-012-9225-0

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. B. (2011). Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction.

Da Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). 11 Preservice mathematics teachers' knowledge and development.*Handbook of International Research in Mathematical Education*, 223.

Da Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.

de Castro Hernández, C., López Barrero, D., & Escorial González, B. (2011). Posibilidades del juego de construcción para el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil. *Pulso*.

de Castro Hernández, C. (2012). Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales"*, (82), 23-40.

De Castro Hernández, C., & Quiles, Ó. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*.

de Castro Hernández, C., Flecha López, G., & Ramírez García, M. (2015). Matemáticas con dos años: buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, (26), 89-108.

De Castro, C. (2015). Romper para conocer: Procesos de composición y descomposición en la geometría infantil. Aula de Infantil, 79, 18-21

Denzin, N.K. & Lincoln, Y.S. (1994).Handbook of Qualitative Research. California: Sage Thousand Oaks.

Dillon, M. R., Huang, Y., & Spelke, E. S. (2013).Core foundations of abstract geometry.*Proceedings of the National Academy of Sciences*, *110*(35), 14191-14195.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.

Edo, M., & Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. *Educación infantil. Orientación y recursos (0-6 años)*, 410.

Edo, M. (2005). Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil. In *Actas do I Congresso Internacional de Aprendizagem na Educação de Infância-CIANEI* (pp. 125-137).

Educativas, N., Claudia, B., Itzcovich, H., El Estudio De Las Figuras, Y., Castro, A., & Adriana, D. Lengua y Literatura y su Didáctica. *DISEÑO CURRICULAR*, 55.

Escudero, D. I., Flores Medrano, E., & Carrillo Yáñez, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., & Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Espinoza, J., Espinoza, J., González, M., Zumbado, M., & Ramírez, C. (2008). La resolución de problemas en la Enseñanza de las matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y Estadística. *Seminario de graduación. UNA, Heredia, Costa Rica*.

Fernández, S., & Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 291-301). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Fernández, C., González, J. V., & Ciscar, S. L. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente" mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. In *Investigación en educación matemática XV* (pp. 351-360).

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions.*ZDM*, *44*(6), 747-759.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1/2), 441.

Fortuny, J.M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23 - 37

Fujita, T., & Jones, K. (2006).Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland.Psychology of Mathematics Education.

Giménez, J., Ciscar, S. L., & Sánchez, V. (Eds.).(1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria: cuestiones desde la educación matemática*. Comares.

Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J., & Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning.*Blackwell handbook of early childhood development*, 208-229.

Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen?.*Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(29), 9-19.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Godino, J. D. (2009). *Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas.* Unión 20,13-31.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*, 9-33.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *30*(2), 109-130.

Gömez-Chacón, I. M. (2006). Matemáticas: El informe PISA en la práctica. Una acción formativa del profesorado. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, *11*(41), 40-51.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Gómez, P., González, M. J., & Albaladejo, I. R. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, *18*(3), 319-338.

González, O. J., & Arévalo, C. (2011). Desarrollo del pensamiento geométrico-espacial en niños de segundo de primaria desde la situación "viaje alrededor del mundo geométrico en ocho días".

González, E., & Gutiérrez, J. (2005). ¿Qué ocurre en las aulas de Primaria con la enseñanza de las matemáticas? *Padres y Madres de Alumnos*, (82).

Gonzato, M., Fernández, M., & Díaz, J. J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 99-117.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?,¿y en la investigación? In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21-68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gutiérrez, E. H. (2015). Oportunidades para aprender matemáticas a lo largo de una jornada en el segundo ciclo de Educación Infantil. *Números*, (89), 111-135.

Gutiérrez, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*, 149-194.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, 3-19.

Hannibal, M. A. Z., & Clements, D. H. (2008).Young children's developing understanding of basic geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 353-357.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Van Dormolen, J. (1996).Space and shape.In *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204).Springer Netherlands.

Hershkowitz, R., Duval, R., Bussi, M. G. B., Boero, P., Lehrer, R., Romberg, T., ...& Jones, K. (1998). Reasoning in Geometry.In *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 29-83).Springer Netherlands.

Hiebert, J., & Morris, A. K. (2009).Building a knowledge base for teacher education: An experience in K–8 mathematics teacher preparation.*The Elementary School Journal*, *109*(5), 475-490.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. Journal for research in mathematics education, 330-351

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005).Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement.American Educational Research Journal, 42(2), 371-406.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007).Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts.Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1, 111-156.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and instruction*, *26*(4), 430-511.

Hock, T. T., Yunus, A. S. M., Tarmizi, R. A., & Ayub, A. F. M. (2015, August). Understanding Primary School teachers' perspectives of teaching and learning in geometry: Shapes and Spaces. In *Research and Education in Mathematics (ICREM7), 2015 International Conference on* (pp. 154-159). IEEE.

Hoyos Salcedo, E. A. (2012). Representación de objetos tridimensionales utilizando multicubos. *VIII Festival Internacional de Matemática Universidad Nacional Costa Rica*.

i Pastells, Á. A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*.

iPastells, Á. A. (2013). Educación Matemática en Infantil: Investigación, Currículum, y Práctica Educativa. *REDIMAT*, *2*(1), 100-153.

i Pastells, Á. A. (2015). Factores clave para una educación matemática infantil de calidad. Aula de infantil, (79), 11-14.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169-202.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, 258-288.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1996). El grupo de las isometrías del plano. Síntesis.Madrid., pp 27-65.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). Developing thinking in geometry. Sage.Pp.

Kirova, A., & Bhargava, A. (2002). Learning To Guide Preschool Children's Mathematical Understanding: A Teacher's Professional Growth. *Early Childhood Research & Practice*, *4*(1), n1.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum.*The Mathematics Enthusiast*, *1*(1), 3-8.

Lastra Torres, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas.

LeCompte, M. D. (1995). Un matrimonio conveniente: diseño de investigación cualitativa y estándares para la evaluación de programas. *Relieve*, *1*(1).

Llinares, S. (2006). Aprendiendo a ver la enseñanza de las matemáticas. La Matemática e la seua Didattica, ventánni diimpegno, 177-180.

Llinares Ciscar, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación.

Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment.*Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(2), 177-196.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*(3), 247-271.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática*, (10).

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, (50), 117-133.

Llinares, A. Z., & de la Vega, M. L. C. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. In *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Servicio de Publicaciones.

Ma, L. (1999). Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.Mahwah (Nueva Jersey): Lawence Erlbaum.

Magiera, M. T., Van den Kieboom, L. A., & Moyer, J. C. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking.*Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 93-113.

Manuel, F. V. (2006). La geometría, una enseñanza imprescindible. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (42), 5-10.

Martínez, F. J., Llinares Ciscar, S., & Torregrosa Gironés, G. (2015). Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos.

Martínez, M., Giné, C. G., Fernández, S., Figueiras, L., & Piquet, J. D. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. In *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438).

Martínez, M. D. C. P., Rey, C., & Ciscar, S. L. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto b-learning. *Educación matemática*, *25*(1), 7-34.

Mason, J. (2002). Researching your own practice.The discipline of noticing.London: Routledge-Falmer.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría Apoe. Revista latinoamericana, 6(003), pp. 221-278.

Mochón, S., & Morales Flores, M. (2010). En qué consiste el" conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación matemática*, *22*(1), 87-113.

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009).Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn?.*Journal for Research in Mathematics Education*, 491-529.

Muñoz-Catalán, M. C., Navarro, M. A. M., Yáñez, J. C., Rodríguez, N. C., González, L. C. C., & González, A. A. (2013). La clasificación de las figuras planas en Primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000).Principles and standards for school mathematics.National Council of Tearchers of Mathematics. Edición electrónica: http://standards.nctm.org/

Neisser, U.,& García, M. A. (1981). *Procesos cognitivos y realidad: Principios e implicaciones de la Psicología Cognitiva*.

Peñas Troyano, M., & Flores Martínez, P. (2005). Procesos de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(1), 005-16.

Pérez Serrano, G. (2000) Investigación cualitativa: Retos e interrogantes. En Técnicas y análisis de datos (3ª. ed.) Madrid: Editorial La Muralla, S.A.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960).The child's conception of geometry (EA Lunzer, Trans.).*New York: Basic*.

Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of research in science teaching*, *2*(3), 176-186.

Plaza, M. D., & Rubio, F. V. (2004). Tratamiento y Resolución de Problemas. *Los lenguajes de las ciencias*.

Ponte, J. P. D. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. *La actividad matemática en el aula*, 25-34.

Prieto González, J. L., & Valls González, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura auditiva en estudiantes para maestro. *Educación matemática*, *22*(1), 57-85.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R., & Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. Educación matemática, 22(2), 123-138.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & da Rocha Monteiro, R. C. C. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica?: análisis e influencia en la práctica de una maestra. In *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 415-424). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). Aspectos básicos sobre el análisis de datos cualitativos. *Metodología de la investigación cualitativa*, 197-218.

Roig, A. I., Llinares, S., & Penalva, M. C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación matemática*, *23*(3), 39-65.

Ruiz, M. R. G., & Zubizarreta, A. C. (2012). La formación permanente del profesorado basada en competencias. Estudio exploratorio de la percepción del profesorado de Educación Infantil y Primaria. Teacher lifelong-learning education based on competences. An exploratory study of Infant and Primary... *Educatio siglo XXI*, *30*(1), 297-322.

Sánchez Matamoros, G., Fernández Verdú, C., Valls González, J., García Blanco, M., & Llinares Ciscar, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato: la derivada de una función en un punto.

Sánchez, M. S., Muñoz, Y. M. V., & Rodríguez, J. G. (2016). Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5*(1), 21-32.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009).*Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. pp. 161- 174; 247-269.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2015).Scaling up early mathematics interventions: Transitioning with trajectories and technologies.In *Mathematics and transition to school* (pp. 153-169).Springer Singapore.

Seo, K. H., & Ginsburg, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research.*Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, pp.91-104.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge

Sherin, M., Jacobs, V., & Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, AZ, 1-22

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004).Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory.*Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91-104.

Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359-371.

Sowder, J., Sowder, L., & Nickerson, S. *(2010). Reconceptualizing Mathematics for elementary mathematics teacher.New York: WH Freeman, Inc.*

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 129-162.

Tirosh, Dina, et al. "Using video as a tool for promoting inquiry among preschool teachers and didacticians of mathematics." *ZDM* 46.2 (2014): 253-266.

Thaqi, X., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. In *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.Retrieved January* (Vol. 5, p. 2011).

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2014). Developing preschool teachers' knowledge of students' number conceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(1), 61-83.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2014).Employing the CAMTE framework: Focusing on preschool teachers' knowledge and self-efficacy related to students' conceptions.In *Early Mathematics Learning* (pp. 291-306).Springer New York.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM*, *47*(3), 497-509.

Tsamir, Pessia, et al. "Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders." *ZDM* 47.3 (2015): 497-509.

Uribe Garzón, S. M., Cárdenas Forero, Ó. L., & Becerra Martínez, J. F. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación matemática*, *26*(2), 135-160.

Vallés, M. (1997). Técnicas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional. Madrid: Síntesis.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (Eds.). (2008). Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school. Sense. Pp 145-300

Van Es, E. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Varas, L., López, A., Giaconi, V., & Lacourly, N. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(1), 0171-187.

Vasilachis, I. (2006). Estrategias de Investigación Cualitativa: Editorial Gedisa.

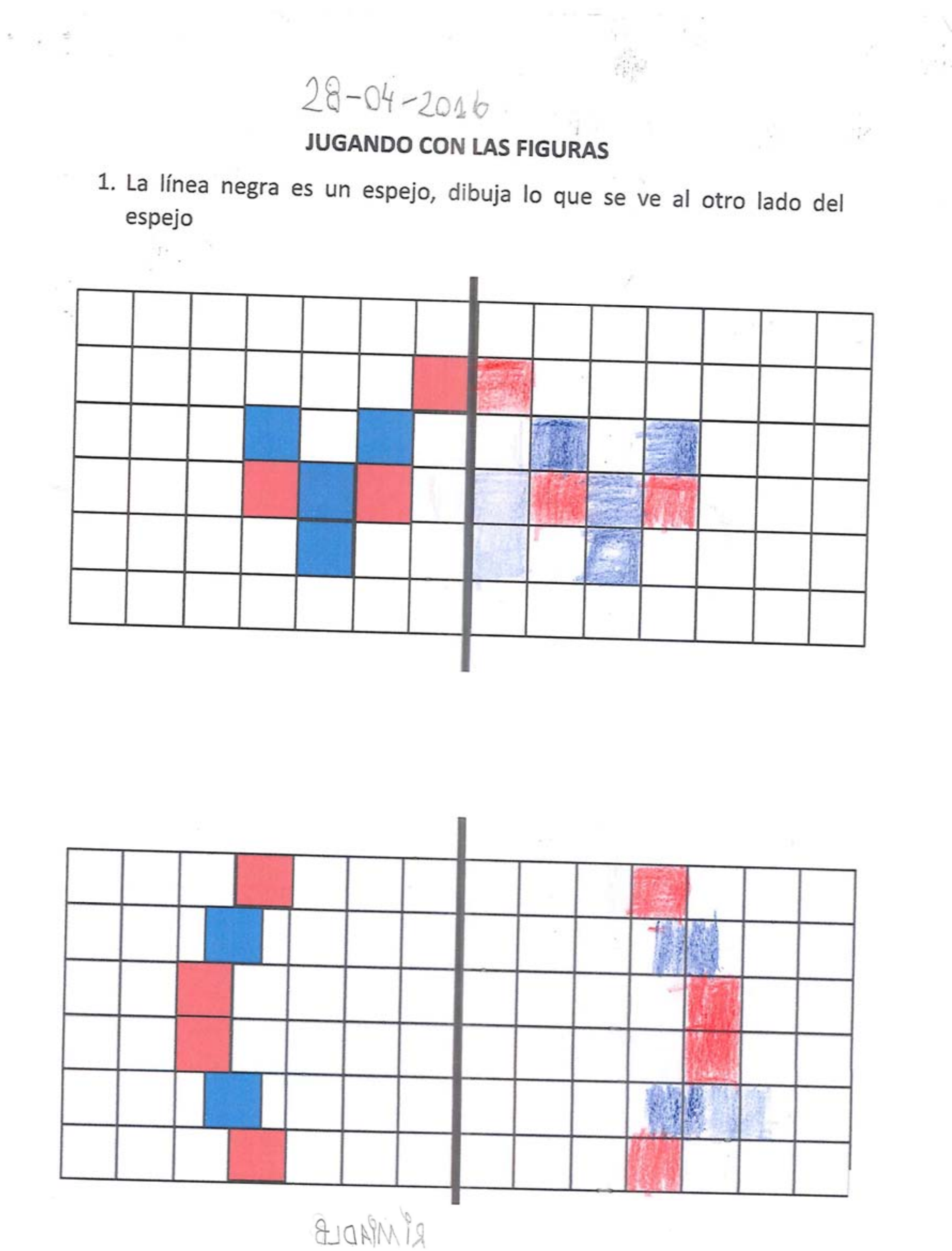
Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980, August).Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts.In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 177-184).

Wilhelmi, M. R., & Lacasta, E. (2007). Un modelo docente para la formación en geometría de maestros en educación infantil.

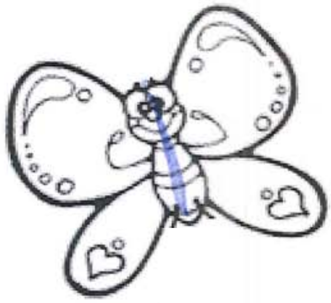
Zapatera, A. (2015). *La competencia "mirar con sentido" de Estudiantes Para Maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de educación primaria.* Tesis doctoral en innovación y formación didáctica, universidad de Alicante, España.

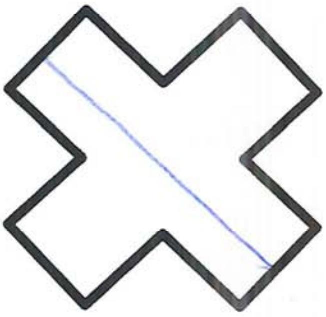
ANEXOS

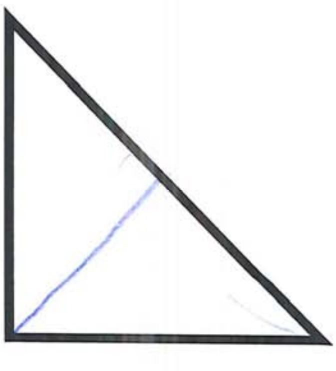
ANEXO 1. Respuesta de un niño a la actividad escolar: Jugando con las figuras



2. Dibuja ahora en cada figura, las líneas que has encontrado haciendo los dobleces

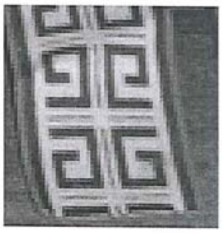




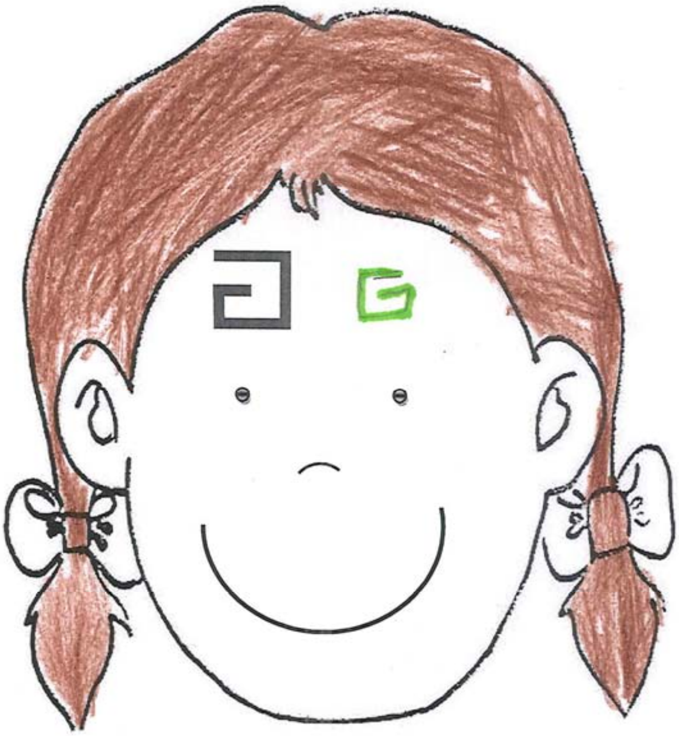


BLDAIMIR 29-04-2016

3. Mira este cintillo de los indígenas Mapuche

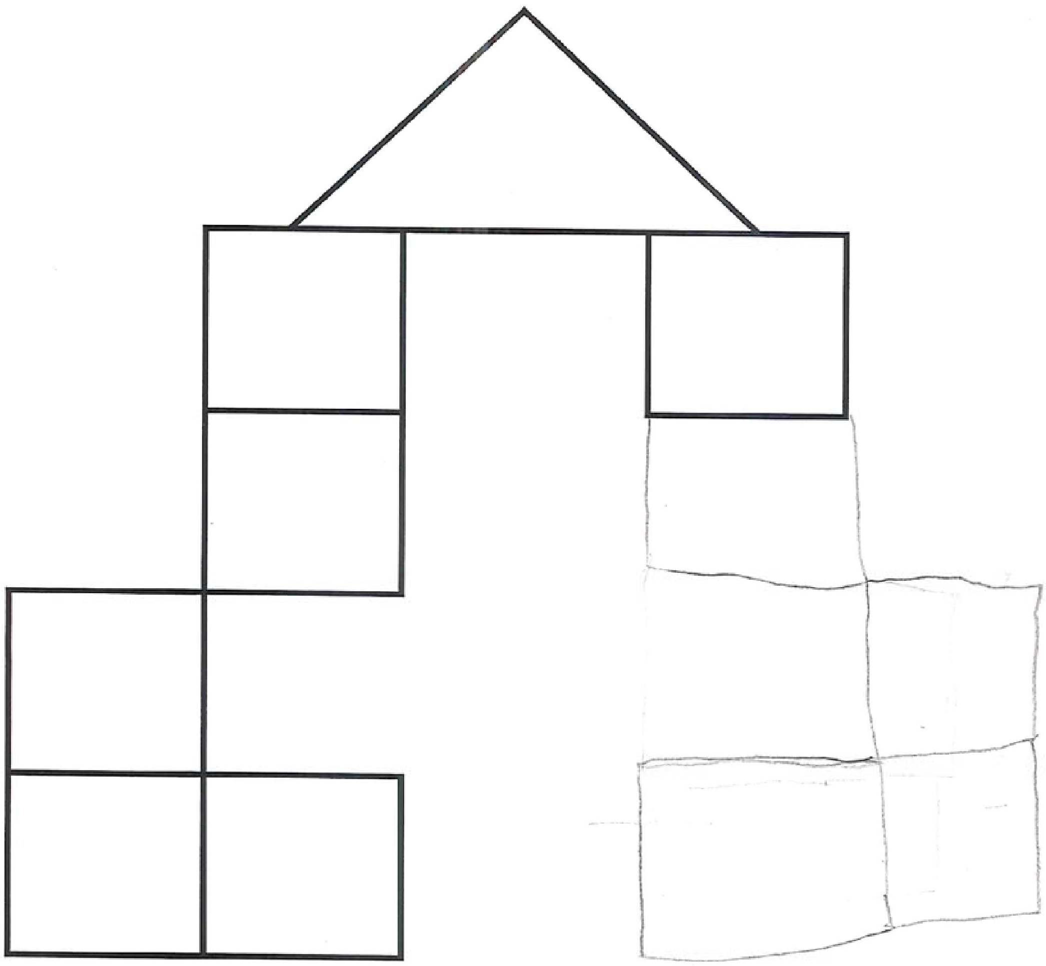


La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado



BLDA[illegible]

4. En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquin. Completa la torre



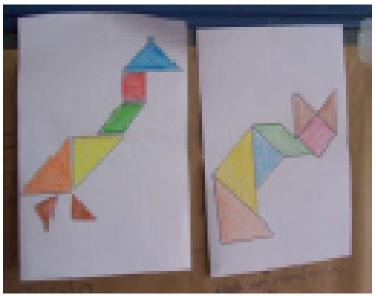
ANEXO 2. Tarea profesional 1 –TP1

PENSEMOS SOBRE LA SIMETRÍA EN EDUCACIÓN INFANTIL

TAREA 1. A continuación se presenta una actividad propuesta por un grupo de profesores de infantil (CEIP "San Marcos". Jaén)

En un primer momento a cada niño se le entrega un folio con un "Tangram" fotocopiado (todas las piezas juntas formando un cuadrado), se les pide que lo coloreen y que luego recorten las siete piezas.

El maestro coloca en la pizarra modelos de dibujos realizados combinando de distintas formas las siete piezas. Los alumnos/as tendrán que intentar realizar con su "Tangram" dibujos iguales a los modelos.

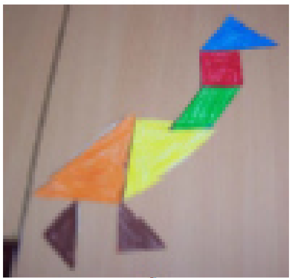


Modelos colocados en la pizarra a la vista de todos.

En la siguiente foto podréis ver a los niños realizando la actividad

A continuación se presentan algunas de las producciones finales de los niños

Ana



Luis

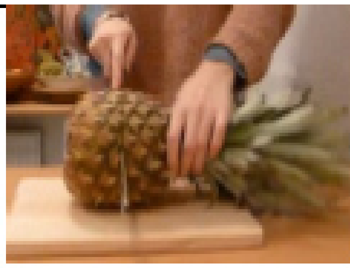
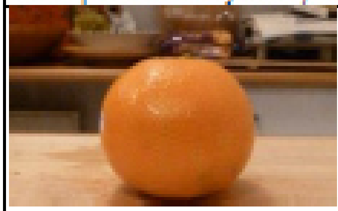
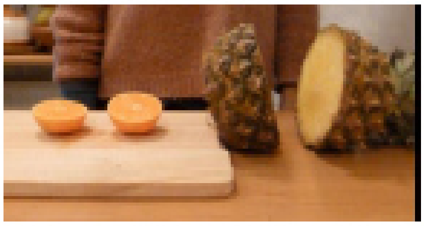
Julia

PREGUNTAS:

1. Describe lo que está haciendo cada uno de los niños para construir el modelo elegido
2. ¿En qué te fijas para poder asegurar que Jorge está construyendo el modelo de manera adecuada?
3. Uno de los profesores que propuso la actividad dice que con ella se está trabajando la simetría. ¿Por qué crees que lo dice?
4. En qué cambiaría la actividad si en vez de pedir a los niños que coloreen y recorten las piezas del tangram, se les diera un tangram ya elaborado.
5. ¿ Por qué podemos decir que es "bueno" que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la reproducción en el plano horizontal (Mesa).

ANEXO 3. Tarea profesional 2 – TP2

TAREA 2. Un profesor (Francisco), explica a una compañera (Ángela) que estructuró la actividad siguiente para trabajar con los niños la simetría:

P: Hola chicos, vamos a realizar una actividad, ¿os apetece? La clase despejada y en una mesa la fruta preparada N:Siii P: ¿Que tenemos aqui niños? (les muestra una piña) N: una piña P: ¿Qué me podeis decir de ella? N: Es amarilla , es grande , tiene muchas cosas P: mirad lo que hagio ahora… (el profesor corta la piña transversalmente) P: ¿Cómo está ahora la piña N: La has cortado	 P: ¿Por dónde la he cortado? N: "por ahí", "por el medio"
 P: ¿Y cómo ha quedado cada parte de la piña? N: "Una parte tiene rabito y otra no", "son diferentes"	 P: ¿Entonces decís que las dos partes de la piña son diferentes? N: "Sí"
 P. Ahora que tengo aqui N: "una mandarina" P: ¿Cómo es? N: "naranja", redondita", "pequeña" P: Mirad lo que hago (la parte por la mitad) P. ¿Qué le ha pasado a la mandarina? N: "La has cortado por la mitad", ahora son dos cachos. P: ¿Cómo son los dos cachos? N: Son iguales, "este es como este", (señalando cada mitad)	 P: Cuando decís que las dos partes son iguales, y coinciden exactamente, decimos que son simétricas, ¿cómo son las partes de ésta mandarina? N: "Simétricas"P: Las partes de esta piña que he cortado son iguales? N: "no" P: ¿Y cómo son? N: "No son simétricas" P: Pues cuando dos partes no son iguales, decimos que son asimétricas. ¿Cómo son las dos partes de esta piña? N: "Asimétricas"

PREGUNTAS:

1. Ángela le dice que considera que no ha aprovechado la potencialidad que tienen los tipos de fruta elegidos para trabajar la simetría, por ejemplo, no ha tenido en cuenta que la simetría puede reconocerse en la fruta como totalidad (3D) y en los cortes (2D). ¿Qué opinas de esta reflexión?
2. ¿Qué harías tú para mejorar la actividad propuesta por Francisco de tal manera que permita a los niños entender la noción de simetría?
3. ¿La piña y la mandarina son las mejores frutas para trabajar la simetría? ¿Por qué?
4. Después de realizar esta actividad, ¿qué harías para seguir trabajando la noción de simetría con los niños?

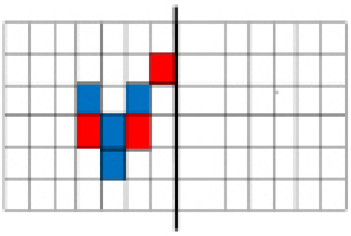
ANEXO 4. Tarea profesional 3- TP3 (Parte I)

Nombre: ____

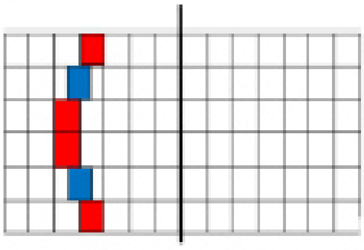
Resuelve cada una de las siguientes actividades

1. Dibuja la imagen que se ve al otro lado del espejo

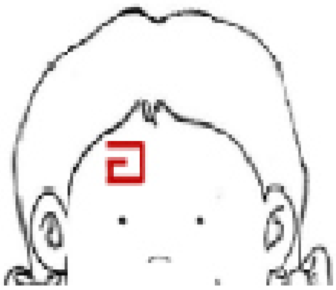
a)



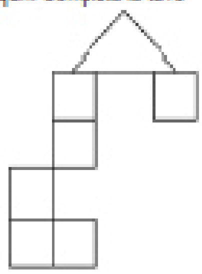
b)



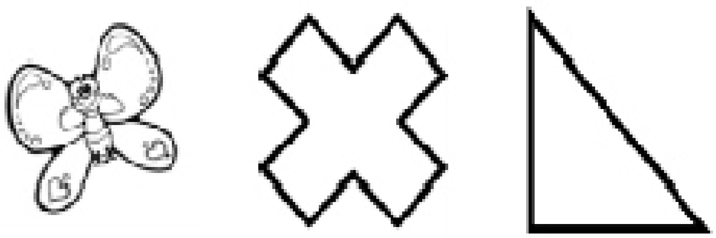
2. Mira este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado



3. En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquín. Completa la torre



4. Dibuja todos los ejes de simetría de cada una de las siguientes figuras



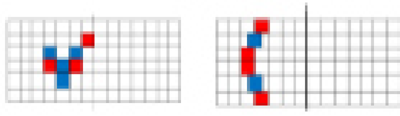
5. Identifica en cuáles de las anteriores actividades se está construyendo el simétrico de una figura y en cuáles de las tareas se identifican propiedades de simetría de una figura.

ANEXO 4. Tarea profesional 3- TP3 (Parte II)

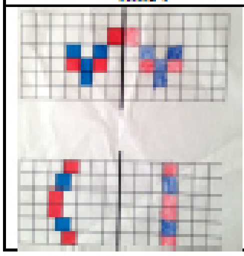
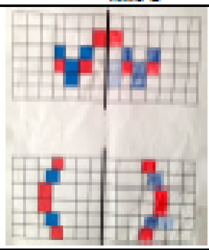
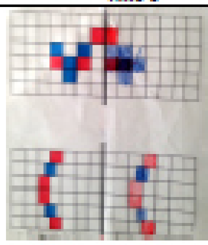
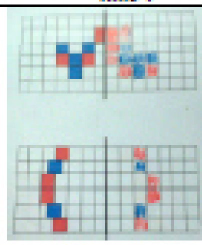
ANÁLISIS DE RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN INFANTIL

A continuación se presentan las tareas propuestas a niños de educación infantil y algunas de sus respuestas. En el momento del desarrollo, se leyeron las preguntas y las instrucciones para cada caso.

Tarea 1.
La línea negra es un espejo, dibuja lo que se ve al otro lado del espejo



Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

Tarea 2.

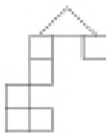
Mire este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado

Respuestas

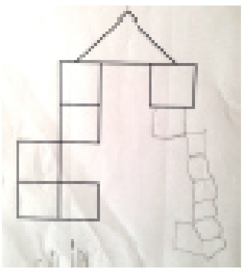
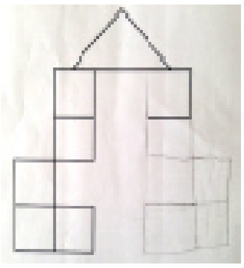
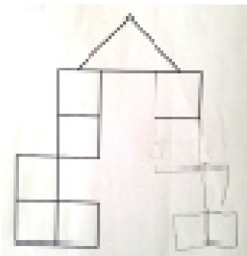
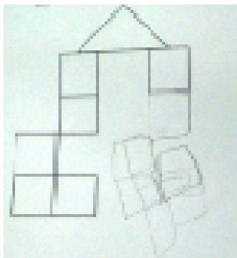
Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

Tarea 3.

En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquín. Completa la torre



Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 1

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1.
Tarea 2.
Tarea 3.

2. Explicita las propiedades de la simetria parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1.
Tarea 2.
Tarea 3.

ANEXO 4. Tarea profesional 3 – TP3 Parte III

3. Interpreta qué forma de entender la simetría tiene cada niño. ¿Cuáles son sus dificultades?

Niño 1
Niño 2
Niño 3
Niño 4

ANEXO 5. Ejemplo 1 de respuestas de FMI a la TP1 en G1

Pensemos sobre la simetría en educación infantil

Tarea 1

PREGUNTAS:

1. Describe lo que está haciendo cada uno de los niños para construir el modelo elegido.

En el caso de Luis, Jorge y Carmen, se ve que están observando las piezas y las están visualizando mentalmente para ver que formas pueden realizar. Las están ordenando por tamaños para así poder saber qué pieza pueden colocar. En cambio, en el caso de Julia y Ana este paso ya lo han hecho ya que están más avanzadas, ellas ya tienen parte de la figura completada y están acabando de colocar las últimas piezas que les quedan. Puede que cuando tienen pocas piezas por colocar y no saber dónde ponerlas los niños se puedan bloquear y tengan que empezar el tangram de nuevo.

2. ¿En qué te fijas para poder asegurar que Jorge está construyendo el modelo de manera adecuada?

Porque Jorge está haciendo inconscientemente tres aspectos para construir geometría, es decir por un lado Jorge está observando la *posición* de las piezas y las está ordenando según cree él según las *forma*s que tiene y a partir de aquí hace un *cambio de posición* de la pieza haciendo que cuadre una con otra.

3. Uno de los profesores que propuso la actividad dice que con ella se está trabajando la simetría. ¿Por qué crees que lo dice?

El tangram es un juego diseñado para favorecer ampliamente las habilidades para identificar desarrollos simétricos, es decir, cuando los niños tienen que mover las piezas para construir una grande, estos las tienen que manipular y hacer que encajen todas de manera uniforme y de forma simétrica.

4. En qué cambiaría la actividad si en vez de pedir a los niños que coloreen y recorten las piezas del tangram, se les diera un tangram ya elaborado.

Cuando se les hace a los niños pintar sus propias piezas y que luego las recorten, se hace que este coja conciencia de la pieza, su forma y dimensión de cada una de ellas haciéndola diferente una de otra al pintarla de distinto color. Si se les da un tangram este paso previo no lo hacen.

5. ¿Por qué podemos decir que es "bueno" que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la reproducción en el plano horizontal (Mesa) Los niños al ver la figura en vertical en la pizarra, ven una figura real y como es, pero esta manipulación y aprendizaje se hace con estas figuras en plano de esta manera se refuerzan los conceptos de simetría axial y de rotación de forma no convencional ya que para llegar a obtener una figura simétrica el niño tiene que pasar por un proceso laborioso pero divertido. Los niños apreciarán más el resultado obtenido y la aplicación de las definiciones adquiridas en clase.

ANEXO 7. Ejemplo 1 de respuestas de FMI a la TP2 en G1 (FMI 31)

Tarea 2

1. **Ángela le dice que considera que no ha aprovechado la potencialidad que tienen los tipos de fruta elegidos para trabajar la simetría, por ejemplo, no ha tenido en cuenta que la simetría puede reconocerse en la fruta como totalidad (3D) y en los cortes (2D). ¿Qué opinas de esta reflexión?**

Creo que en esta reflexión Ángela tiene razón, ya que en el ejemplo de la mandarina, además de trabajar la simetría en la totalidad y en los cortes (2D y 3D) se podia hacer con sus partes, es decir con sus gajos, las maneras diferentes que tenemos de dividir una mandarina, en gajos, y que si hacemos mitad de mandarina y mitad de mandarina es simétrica, si hacemos la mitad de la mitad también, y así hasta que queden todos los gajos separados.

Además, la piña, por el hecho de tener las hojas, queda muy claro si es simétrica o no si la cortamos transversalmente que es asimétrica, pero si la cortamos longitudinalmente puede ser muy buen ejemplo de lo que es la simetría.

Además, aunque creo que sea bueno trabajar la asimetría de la piña a través del corte transversal, se puede trabajar la simetría de la piña longitudinalmente, es decir, trabajar la simetría o asimetría total de la fruta, depende de como la miremos puede ser o no simétrica.

2. **¿Qué harías tú para mejorar la actividad propuesta por Francisco de tal manera que permita a los niños entender la noción de simetría?**

Como he comentado antes, para mejorar esta actividad presentaría la mandarina directamente pelada y habría contado los gajos y lo hubiese trabajado mediante una resolución de problemas en el cuál presentáramos un problema en el que los protagonistas somos nosotros. Podríamos decir por ejemplo que tenemos una mandarina para toda la clase para merendar, pero que la mitad del grupo tiene que ir al huerto a regar las plantas y merendará allí y la otra mitad de la clase se quedará en el aula haciendo otras cosas, entre ellas merendar, y que por tanto, la mandarina se tiene que repartir a partes iguales, en mitades

Teóricamente, la mandarina si es simétrica quedará dividida en dos medias esferas que a la vez, serán simétricas. Una vez se hubiese separado los grupos se hubiese planteado una nueva separación en ambos grupos, y la clase se dividiría en cuartos, y por tanto, las medias naranjas que tenemos se deberían repartir en mitades iguales, en cuartos.

Así, haríamos muchas divisiones de la misma fruta en las que, cada división sigue siendo simétrica. Para llevar a cabo esta actividad intentaría que todas las divisiones que se hicieran se usaran los gajos, para que fuera más visual, evidentemente, nos será más fácil si siempre tenemos un número par de gajos aunque seguramente no siempre se dará ese caso. Una regla importante de este problema es que todas las reparticiones que se hagan de la naranja tienen que ser exactamente iguales. Así pues, una vez realizada la actividad se puede llevar a cabo un diálogo en el que se pregunte porque una fruta como la mandarina nos ha permitido repartirla para todo el grupo, la respuesta es porque es simétrica i cada una de sus partes también y por ello siempre la hemos podido dividir por la mitad.

Y para trabajar la asimetría de la piña, podríamos presentar las dos mitades con rabo de una piña unidas, o las dos mitades sin rabo de una piña a los niños para que surgiera una discusión sobre de que fruta se trata y la posibilidad/imposibilidad de encontrar una fruta así en algún sitio.

Creo que el reconocimiento de qué fruta es sería bastante rápido pero lo interesante de esta actividad sería la discusión sobre si es posible encontrarla o no, ya que la piña es una fruta transversalmente asimétrica con una parte con rabo y otra sin.

Por otra parte, creo que sería interesante, como expondré más tarde, trabajar los ejes de simetría planteando a los niños como se tiene que cortar la fruta para encontrar su simetría.

3. **¿La piña y la mandarina son las mejores frutas para trabajar la simetría? ¿Por qué?**

Por el tipo de actividad que plantea, personalmente hubiese cogido otras frutas. Creo que es importante tener en cuenta que en Infantil todo lo visual tiene un gran poder para que los niños y niñas construyan su propio conocimiento.

De este modo, para trabajar la idea de asimetría hubiese cogido frutas muy asimétricas, completamente asimétricas transversalmente, como por ejemplo una pera o fresas, que no pudieran llevar a confusión no solo por si tienen rabo o no, sino por la forma de la propia fruta, en que una de las dos partes quedaría bastante más estrecha que la otra.

En cambio para la idea de simetría, puesto a que la naranja me parece un buen ejemplo, cogería frutas que además por dentro sea fácilmente reconocible su simetría, como por ejemplo el kiwi, que tiene el círculo blanco con las pepitas negras o la sandía. Cogería frutas que tuviesen forma redonda o ovalada, ya que transversalmente dan mucho más juego para trabajar la simetría.

Aún así, creo que los ejemplos escogidos son correctos ya que se han cogido frutas que son cotidianas para los niños y próximas a ellos, y con el ejemplo de la fruta se puede abstraer fácilmente los conocimientos adquiridos sobre simetría a otros objetos de su día a día.

4. **Después de realizar esta actividad, ¿qué harías para seguir trabajando la noción de simetría con los niños?**

Rescatando la idea de trabajar la simetría de los cortes como proponía Ángela en la primera pregunta, se podría hacer una actividad en la que dispusiéramos de la mitad de un corte de fruta. Es decir, que hubiésemos partido frutas a rodajas y cada rodaja la hubiésemos partido por la mitad. Para que esta actividad fuese efectiva seria necesario tener frutas de colores, por ejemplo, fresas, kiwis, piñas, naranjas.
Las medias rodajas estarían en bandejas y colocaríamos papel de embalar blanco encima de las mesas para que los niños, libremente, pudiesen coger cada media rodaja y experimentar con ella. De esta manera damos la oportunidad a los niños, mediante la experimentación, de llevar a cabo construcciones mentales matemáticas, porque, por ejemplo, un niño que deja una marca de media rodaja de kiwi en el papel se puede ver empujado a, con la misma rodaja, completar la otra mitad. La construcción compuesta con las dos mitades se corresponde con la que sería la rodaja original del kiwi, y por tanto se puede establecer que las rodajas de kiwi son simétricas.

Si vemos que en esta actividad no es efectivo hacerlo únicamente con el jugo de la fruta porque no se aprecia bien la marca que puede, esta actividad se puede hacer mediante la técnica de estampación con pinturas y, también, si vemos que los niños y las niñas tienden a coger la pieza diferente de cada fruta para completar-la, a mitad de la actividad podemos vaciar las bandejas de manera que quede para cada niño y niña media rodaja de cada fruta.

Para esta actividad es importante que después se produzca un diálogo con los niños y niñas para que expresen como se han sentido y puedan verbalizar posibles dudas que les han surgido durante la actividad, de esta manera se pueden crear conflictos cognitivos sobre los cuáles proponer nuevas actividades para seguir trabajando la simetría.

Una vez trabajado esto, y como he expuesto anteriormente, si bien la piña transversalmente no es simétrica, longitudinalmente sí lo es. Por tanto, creo que después de esta actividad se debería trabajar los ejes de simetría, es decir, proponer actividades para que los alumnos del aula encuentren la línea imaginaria por la cuál deberíamos cortar una fruta para dividir-la en dos partes iguales. Esta actividad se podría trabajar en grupos con muestras de diferentes grupos par que los alumnos y alumnas puedan experimentar directamente con los objetos de los que estamos hablando. De esta manera podrían surgir conflictos cognitivos y los niños y niñas, mediante la discusión entre iguales, se ayudarían a construir conocimiento conjuntamente sobre esta idea de simetría.

ANEXO 8. Ejemplo 2 de respuestas de FMI a la TP2 en G1 (FMI2)

Tarea 2

PREGUNTAS:

1. Ángela le dice que considera que no ha aprovechado la potencialidad que tienen los tipos de fruta elegidos para trabajar la simetría, por ejemplo, no ha tenido en cuenta que la simetría puede reconocerse en la fruta como totalidad (3D) y en los cortes (2D). ¿Qué opinas de esta reflexión?

Muchas frutas son asimétricas en su totalidad y por lo tanto según como las cortes, es decir, en horizontal o en vertical serán siendo asimétricas. Es el caso de la fresa, es asimétrica, si la corta horizontalmente las dos partes serán simétricas pero si lo haces verticalmente seguirá siendo asimétrica. Así que la fresa puede ser que los niños la reconozcan asimétrica nada más verla y no les haga falta cortarla, por lo tanto puede que tengamos que coger dos frutas simétricas o tal vez la misma fruta para observar la simetría, de esta manera se verá la simetría y asimetría en la misma fruta y no se relacionará a una fruta con una forma.

2. ¿Qué harías tú para mejorar la actividad propuesta por Francisco de tal manera que permita a los niños entender la noción de simetría?

Después de hacer la demostración les dejaría que manipulasen con la futa ya cortada que vieran las dos partes de la fruta y que observasen si son iguales y por lo tanto simétricas o por lo contrario son asimétricas porque no son exactamente iguales. De esta manera cuando ellos son los que manipulan y lo observan desde su perspectiva interiorizan mejor conocimientos.

3. ¿La piña y la mandarina son las mejores frutas para trabajar la simetría? ¿Por qué?

Se pueden trabajar con elas la simetría pero también puede haber otras con las que se vea más este ejemplo. La mandarina está muy bien para trabajar este concepto porque es redonda y es fácil visualizar el ejemplo, se ve muy claro. Para trabajar la simetría también se podría coger una manzana o una pera y cortarlas de manera vertical. En cambio para trabajar la asimetría hay otras frutas en que se ve más claro el ejemplo como puede ser una fresa ya que no es redonda y si la cortas horizontalmente nunca podrá ser simétrica. Yo utilizaría siempre frutas que sean familiares para ellos, que las tengas en contacto habitualmente para poder ver bien sus cualidades y forma y puede que la piña no la vean muy frecuentemente en su forma natural.

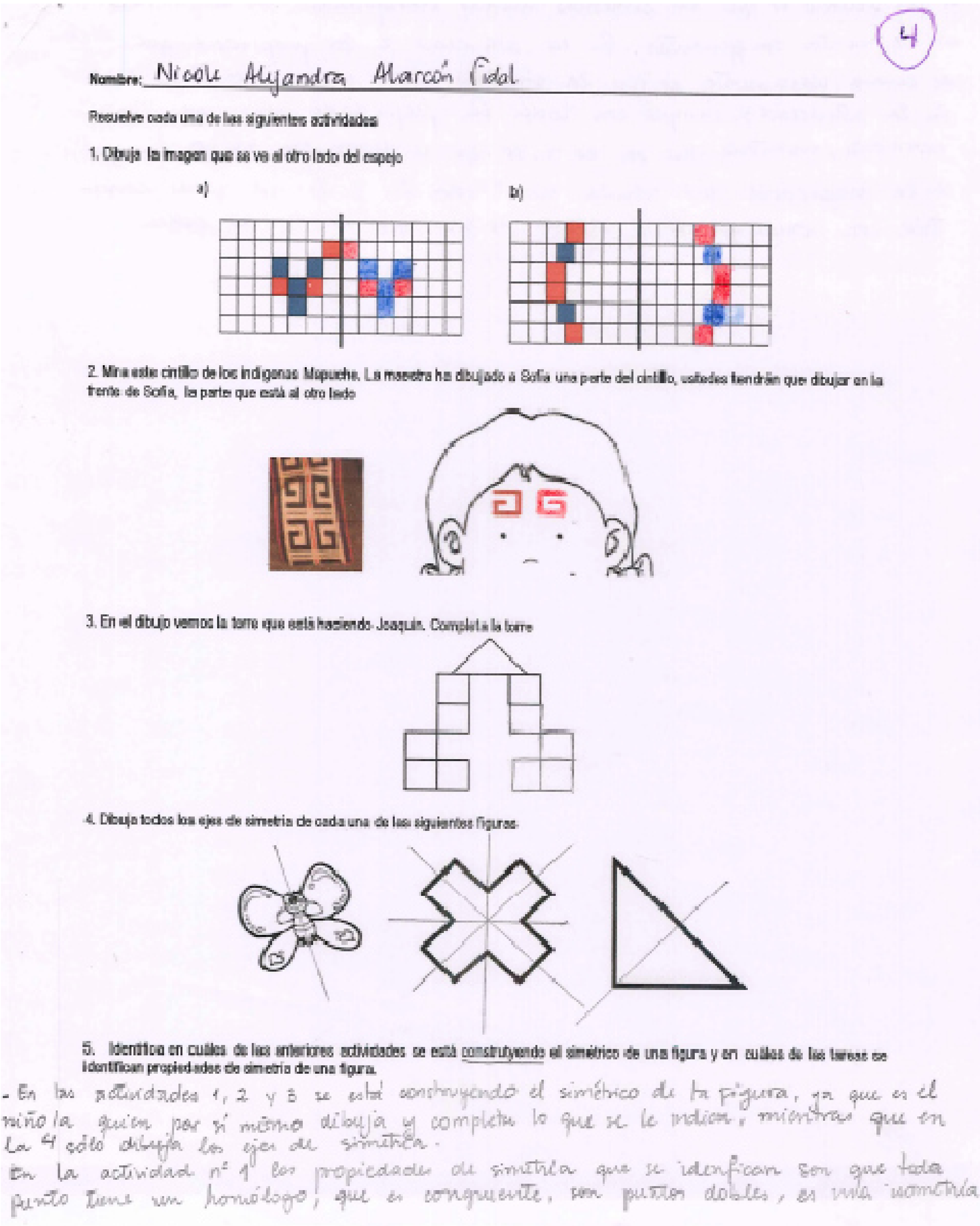
Como he dicho en la primera pregunta puede que sea beneficioso que se trabaje con la misma fruta, se coja una mandarina y se corte por la mitad, son dos partes simétricas y que se coja otra y se corte de manera que un trozo sea más grande que el otro y por lo tanto será asimétrica. No se relacionará una fruta con ser simétrica o asimétrica si no la forma en que dividas y cortes esa fruta.

4. Después de realizar esta actividad, ¿qué harías para seguir trabajando la noción de simetría con los niños?

Primero les dejaría que manipulasen la fruta que he cortado con un modelo de esa misma fruta sin cortar, de esta manera los niños pueden manipular y comparar. Pueden observar los trozos de la fruta y juntarlos a ver si cuadran y encajan con precisión, ver si los dos trozos son exactamente iguales, si la fruta tiene alguna flor o hoja que la hace más grande y por lo tanto al cortarla es asimétrica como ha ocurrido con el ejemplo de la piña.

También se podría proponer una actividad con plastelina, que ellos hicieran formas, redondas, cuadradas, alargadas, y que luego las cortaran y que ellos mismos llegaran a la conclusión de porqué la han cortado así y si son simétricas o asimétricas. El porqué de que utilizaría este material es porque es un material muy cuotidiano y reconocido por los niños y fácil de manipular por lo que ellos mismos pueden hacer la forma de los objetos y cortarlas sin hacerse daño.

ANEXO 9. Ejemplo de de respuestas de FMI a la TP3 en G2



4

Nombre: Nicole Alejandra Alarcón Fidel

Resuelve cada una de las siguientes actividades

1. Dibuja la imagen que se ve al otro lado del espejo

a) b)

2. Mira este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado

3. En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquín. Completa la torre

4. Dibuja todos los ejes de simetría de cada una de las siguientes figuras.

5. Identifica en cuáles de las anteriores actividades se está construyendo el simétrico de una figura y en cuáles de las tareas se identifican propiedades de simetría de una figura.

- En las actividades 1, 2 y 3 se está construyendo el simétrico de la figura, ya que es el niño/a quien por sí mismo dibuja y completa lo que se le indica, mientras que en la 4 sólo dibuja los ejes de simetría.

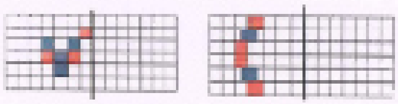
En la actividad nº 1 las propiedades de simetría que se identifican son que todo punto tiene un homólogo, que es congruente, son puntos dobles, es una isometría

ANALISIS DE RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN INFANTIL

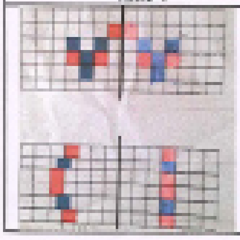
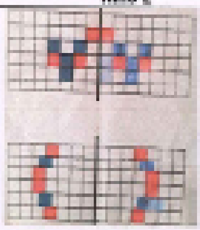
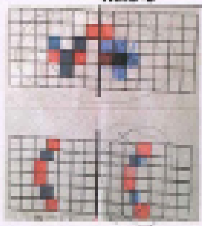
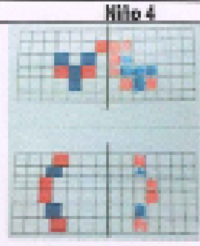
A continuación se presentan las tareas propuestas a niños de educación infantil y algunas de sus respuestas. En el momento del desarrollo, se leyeron las preguntas y las instrucciones para cada caso.

Tarea 1.

La línea negra es un espejo, dibuja lo que se ve al otro lado del espejo



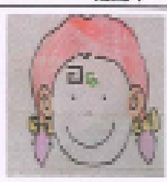
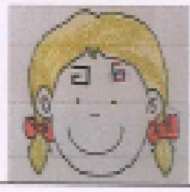
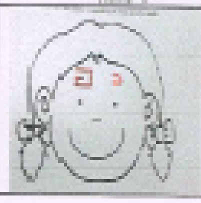
Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
 ✓ X	 ✓ ✓	 X X	 X

Tarea 2.

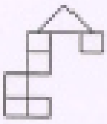
Mira este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado

Respuestas

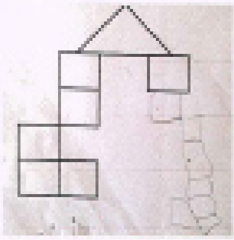
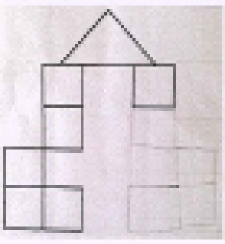
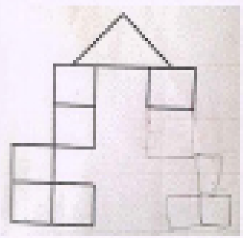
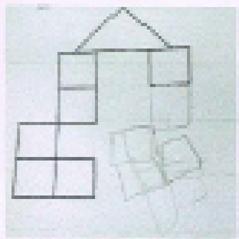
Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
 ✓	 X	 ✓	 X

Tarea 3.

En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquín. Completa la torre



Respuestas

Niño 1 X	Niño 2 ✓	Niño 3 ✓	Niño 4 X
			

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 1

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1. El niño si bien en la primera logra dibujar lo que se ve al otro lado del espejo, por ende está considerando lo que es la isometría al reflejar la imagen, y distancia, más en el segundo dibujo no pudo realizar la misma reflexión que en la primera ya que sólo consideró los colores que se presentaban, siguiendo un patrón, pero no la forma, ni la posición en la que iba cada una

Tarea 2. Aquí claramente el niño logra dibujar de manera correcta la parte del cintillo, donde los aspectos matemáticos que considera son la isometría específicamente reflexión y la forma que tiene la figura para poder reflejarla

Tarea 3. El niño en esta actividad sólo está considerando la forma de la figura geométrica y la posición en la que va, pero no considera la cantidad de elementos que se encuentra en ella.

2. Explicita las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1. Las propiedades de la simetría que tiene en cuenta el niño son, en la imagen superior cumple con que todo punto del plano tiene un y sólo un homólogo, que la imágen tiene congruencia, tiene punto doble, y cumple con la isometría y con las simetrías axiales que transforman los segmentos en segmentos, mientras que en la figura inferior no cumple con la reflexión correcta es decir con el principio de isometría.

Tarea 2. En esta tarea el niño cumple parcialmente con la mayoría de las propiedades ya que si bien logra reflejar la imagen siguiendo la forma de ésta, no es capaz de dimensionar en la isometría el tamaño adecuado, por lo que le falta más orientación en el espacio.

Tarea 3. En esta ocasión el niño de todas las propiedades sólo cumple con la forma de la figura, ya que no pudo realizar de manera correcta la reflexión, por lo que tampoco es una figura ni congruente ni homóloga.

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 2

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1. Los aspectos matemáticos que está considerando el niño es la reflexión que realiza de la imágen, tomando en cuenta, la forma, la posición y los colores, además logra orientarse correctamente en los espacios indicados y seguir un patrón en la figura inferior. y distancias entre las figuras desde 1 punto a otro

Tarea 2. Los aspectos matemáticos que considera en esta tarea es la forma, y logra realizar la reflexión correspondiente, mas no considera el tamaño de la imagen al reflejarlo.

Tarea 3. Los conceptos considerados por el estudiante son la reflexión, logra realizar la forma de la figura, el tamaño que tiene y la posición de cada una de la figura que reflejo

2. Explicita las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1. Considera todas las propiedades de la simetría, ya que existe sólo un homólogo, la figura es congruente, tiene en cuenta que hay puntos dobles, la simetría, ya que logra reflejar correctamente la imagen.

Tarea 2. El niño cumple parcialmente con la tarea, ya que si bien cumple con la isometría al lograr reflejar el dibujo <u>no</u> dimensiona el tamaño de éste, por lo que claramente no puede ser homólogo ni congruente, ni tampoco puntos dobles.

Tarea 3. El niño cumple con todas las propiedades de la simetría ya que logro realizar correctamente la reflexión, que correspondería a la parte de la isometría, por lo que es congruente entre sí y homólogo.

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 3

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1.
En cuanto a la figura en la parte superior no se considera ningún concepto matemático, ya que no se observa la misma reflexión. En cambio en la imagen inferior considera los colores en cuanto al orden, su forma y la cantidad de elementos que existe.

Tarea 2.
Los aspectos que considera son la reflexión, la forma, el tamaño y la posición en lo que ubica el dibujo.

Tarea 3.
Los aspectos que considera son: la isometría, específicamente de reflexión; la forma y el tamaño de las figuras y la cantidad de figuras que coloca.

2. Explicita las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1.
En la imagen superior no se considera ninguna propiedad, mientras que en la segunda se consideran los colores, la forma, mas no se considera la reflexión, ya que realiza una traslación.

Tarea 2.
Se consideran todas las propiedades de simetría ya que el niño logró realizar la isometría correcta utilizando la reflexión, es congruente y homólogo.

Tarea 3.
También se consideraron todas las propiedades como:
- Isometría (reflexión)
- congruencia
- Homología
- puntos dobles.

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 4

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1.
En la imagen superior no consideró ningún aspecto matemático, mientras que en la inferior, considera patrón de colores, forma, reflexión, tamaño de la figura.
Tarea 2.
El único aspecto matemático que considera el niño es el color, y traslación
Tarea 3.
El aspecto matemático que se consideró fue la forma de la figura y el tamaño.

2. Explicita las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1.
No existe ninguna propiedad en la primera imagen de la parte superior, en cambio la del inferior se considera la isometría específicamente la reflexión (cumple parcialmente) ya que no logra ser congruente ni homólogo.
Tarea 2.
-La propiedad que considera el niño de la isometría es la traslación, no considera el tamaño, que sea congruente, ni homólogo.
Tarea 3.
- Las propiedades que se consideran son sólo la forma y el tamaño, pues no consideró la isometría de reflexión, por tanto no es congruente, ni homólogo, sino que realizó una traslación en la figura presentada.

3. Interpreta qué forma de entender la simetría tiene cada niño. ¿Cuáles son sus dificultades?

Niño 1

-Considera el elemento de la isometría como la forma, pero lo que más le dificulta es orientarse en cuanto al espacio con respecto al tamaño.

Niño 2

El estudiante claramente comprende el término de la simetría, ya que considera las propiedades de ésta, pues realiza correctamente las reflexiones en cada una de las tareas, respetando los colores, distancias y formas, lo que más le dificultó fue en la tarea 2 el tamaño con que reflejó el dibujo.

Niño 3

En la tarea uno no logra realizar la reflexión correspondiente, lo confunde con traslación por lo que no se puede hacer una trasposición. En las otras dos, sigue el concepto de reflexión y logra orientarse en el espacio utilizando el tamaño adecuado.

Niño 4

Este estudiante entiende la simetría, ~~mas~~ en todas las tareas que realiza en vez de la reflexión realiza la traslación lo que puede ser una incomprensión de conceptos.

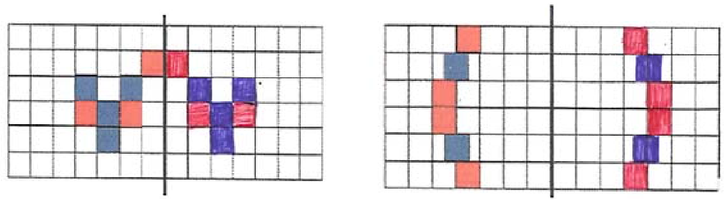
ANEXO 10. Ejemplo 2 de respuestas de FMI a la TP3 en G2

Nombre: Belén Lecaros Figueroa.

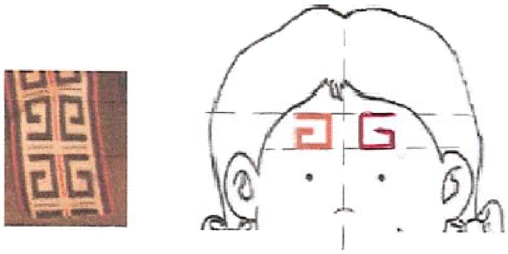
Resuelve cada una de las siguientes actividades

1. Dibuja la imagen que se ve al otro lado del espejo

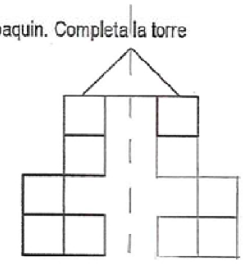
a) b)



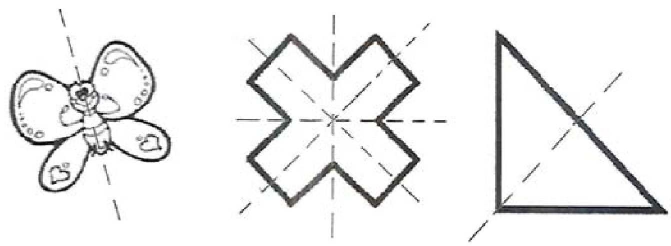
2. Mira este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado



3. En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquin. Completa la torre



4. Dibuja todos los ejes de simetría de cada una de las siguientes figuras



5. Identifica en cuáles de las anteriores actividades se está construtyendo el simétrico de una figura y en cuáles de las tareas se identifican propiedades de simetría de una figura.

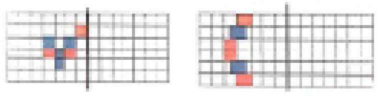
- Se está construyendo el simétrico de una fig. en las actividades 1, 2, 3 y 4. (simetria central y axial).
- propiedades de la simetría: podemos apreciarlas en todas las tareas.

ANÁLISIS DE RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN INFANTIL

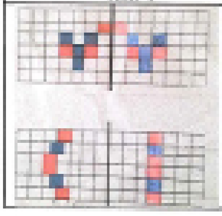
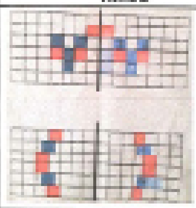
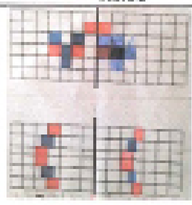
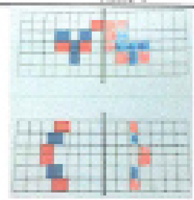
A continuación se presentan las tareas propuestas a niños de educación infantil y algunas de sus respuestas. En el momento del desarrollo, se leyeron las preguntas y las instrucciones para cada caso.

Tarea 1

La línea negra es un espejo, dibuja lo que se ve al otro lado del espejo



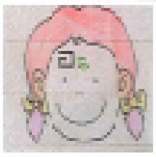
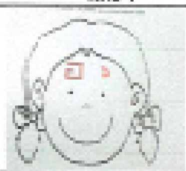
Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

Tarea 2

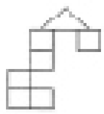
Mira este cintillo de los indígenas Mapuche. La maestra ha dibujado a Sofía una parte del cintillo, ustedes tendrán que dibujar en la frente de Sofía, la parte que está al otro lado

Respuestas

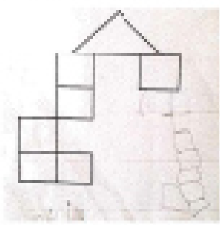
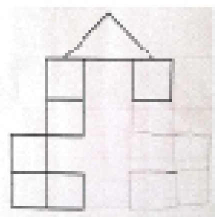
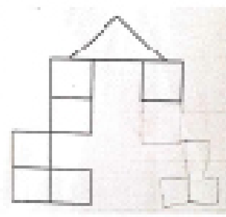
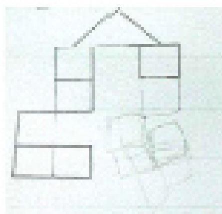
Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

Tarea 3

En el dibujo vemos la torre que está haciendo Joaquín. Completa la torre



Respuestas

Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4
			

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 1

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1. El niño utilizó la simetría central como la axial ya que "copió" el patrón respetando la ubicación, la distancia y los colores de la imagen principal.
Tarea 2. El niño utilizó la simetría central pero no respetó la distancia entre una imagen (patrón) y la otra. Respetó la simetría central pero los colores utilizados no coinciden.
Tarea 3. En esta actividad el niño no respetó ninguna propiedad de las simetrías sólo consideró que la [illegible] estaba armada con cuadrados.

2. Explicita las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1. → simetría central y axial ya que respetó colores, distancia y posición. No se considera que haya faltado alguna propiedad.
Tarea 2. → No consideró propiedad ya que no respetó color, forma y distancia. Sí se percató que la dirección es contraria a la de la imagen patrón.
Tarea 3. → No se presenta propiedad alguna, ya que no hay representación de formas (cuadrados no parecen cuadrados) y tampoco una reflexión de la imagen (simetría).

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 2

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1.	El niño tomo en cuenta la ubicación de cada cuadro dentro del plano, así como también los colores de éste. En la fig. 2 realizó la fig. considerando forma, dirección y colores.
Tarea 2.	El niño "copió" el patrón teniendo en cuenta la dirección de ésta. Trató de mantener el tamaño, pero no respetó el color de éste.
Tarea 3.	El niño cumplió con lo planteado en la tarea. Respetó la forma de la torre y las figuras geometricas utilizadas.

2. Explicite las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1.	Considero la simetría central y la isometría para la realización de la tarea, ya que represento el patrón tal cual aparece en el plano
Tarea 2.	Trabajó simetría central e isometría ya que respeto distancias y formas. El tamaño de la imagen que representó no coincide totalmente con el patrón, pero comprendió lo que debía realizar
Tarea 3.	Trabajo las propiedades de isometría y simetría central. La única complejidad presente y que implica que no haya cumplido con lo propuesto tiene relación con el tamaño de las fig. geometricas.

ANALIZA LAS RESPUESTAS DEL NIÑO 4

1. Describe qué aspectos matemáticos está considerando el niño en cada tarea.

Tarea 1. El niño completo cuadrados (Los pintó) solo consideró el color de la tarea. mientras que en el 2º dibujo logró representar la forma teniendo en consideración la dirección
Tarea 2. El niño "copió" la imagen tal cual aparece en la imagen solo utilizó el color indicado ya que la forma y dirección no son iguales
Tarea 3. El niño reconoció la fig. geometrica presente en la imagen pero no logro reproducirla y tampoco logro reproducir la imagen

2. Explicita las propiedades de la simetría parece tener en cuenta el niño en cada una de las tareas y las que no ha considerado, pero son necesarias.

Tarea 1. No existen propiedades aplicables dentro de la tarea. (1º caso) mientras que en el 2º caso considero simetría central, dejando de lado la isometrie por la ubicación de los cuadros azules.
Tarea 2. No hay propiedades de la simetría. Debio considerar ambas simetrías (central e isometrias) para poder conseguir la fig. del cintillo.
Tarea 3. Al igual que en la tarea anterior no consideró propiedades de la simetría. Debía tener en cuenta la fig. geometrica y la ubicación de esta (isometría) en relación al patrón.

3. Interpreta quéforma deentender la simetría tiene cada niño. ¿Cuáles son sus dificultades?

Niño 1
El niño comprendió la simetría como 'copiar' figuras considerando solo la forma de estas (cuadrados), y dejando de lado la dirección, ubicación y Tamaño. Tiene carácter epistemológico
Niño 2
El niño comprendió la simetría como el reflejo de una figura, considerando las propiedades de la simetría su problema tiene que ver con el tamaño conque realiza las figuras. (tarea 2 y 3). — Epistemológico / Ontogenico
Niño 3
El niño consideró la simetría como el reflejo de la figura solo en algunos casos En su trabajo podemos apreciar un predominio en el uso de los colores. Sus problemas tienen relación la ubicación de la imagen dentro del plano — Epistemológico
Niño 4
El niño entendió la simetría como el 'copiar' las imágenes tal cual como se presenta en el patrón. Su dificultad se presenta en la isometría (tarea 1 - 1ª parte) ya que debió pintar cuadros demás para poder llegar a la ubicación de la figura. Además presenta problemas para realizar las fig. geométricas que aparecen. - Epistemológico y Ontogenico

ANEXO 11. Evidencias de la identificación de elementos matemáticos en TP3

FMI	Respuesta	Evidencias de la identificación de elementos matemáticos	Grado de evidencia en la comprensión de la simetría
1	*Las actividades que se están construyendo el simétrico son las act. 1, 2 y 3. Todas las actividades mantiene las distancias, tiene solo un homologo, también mantiene una simetría central, y otra que es congruente en sí, podemos ver en las actividades una isometría, también podemos ver que existe un segmento (inicio y final).(PI-5)* *…teniendo en cuenta la dirección distancia y posición al respecto a objetos, en este caso la* ***simetría central****, la cual tiene que ser congruente, aunque no se respete el homologo (cumple con la misma figura, pero no se respeta la distancia). (PI1- T 1- N1)* *El niño intenta mantener la forma, pero no lo logra, además mantiene un descenso en la parte de ubicación espacial, dirección distancia, si logra realizar un segmento. (PII2- T3--N4)*	Identificaaspectos matemáticos que considera son importantes para la simetría, entre estos aspectos están: mantiene distancias, tiene un solo homólogo, mantiene simetría central, es congruente, tiene isometría y existe un segmento (inicio y final). Identifica elementos matemáticos como orientación y conservación de distancias, pero al hablar de simetría central, no comprende que la simetría axial es respecto a un eje, no a un punto como la simetría central. Identifica que se debe considerar aspectos como las relaciones espaciales de dirección, distancia, y ubicación.	Idea matemática incompleta de la simetría centrada en elementos visuales. Considera propiedades como congruencia de figuras, equidistancia de puntos homólogos y figura isométrica, pero las asocia a la simetría central. Nombra propiedades sin definirlas
2	*"En las actividades 1, 2 y 3 se construye el simétrico, ya que se debe plasmar en la figura. Las propiedades se encuentran presentes en todas las tareas. Por ejemplo, todos tienen un homólogo y en todas se mantiene la figura congruente" (PI-5)* *"En la imagen a, el niño considera los aspectos de ubicación, dirección, distancia, posición de acuerdo a la figura presentada, en cambio en la figura b, el niño considera estos aspectos sólo en el primer cuadro rojo y el último cuadro rojo ubicando los demás erróneamente" (PII-N1-1.1)* *".... los puntos homólogos de sí mismo (puntos dobles)…" (PII-N1-2.3)*	Identifica la simetría como transformación, refiriendo a que en ella hay un homólogo y alude la congruencia, aunque no explicita en qué consiste. Reconoce que para caracterizar una simetría es preciso que haya distancias iguales. Resalta la importancia de la posición, la ubicación y dirección, pero no explicita la relación entre estos elementos, por tanto su noción de congruencia no es completa. Alude a los puntos dobles, pero de forma incorrecta.	Idea matemática incompleta de la simetría centrada en elementos visuales. Nombra propiedades, sin definirlas
3	*En las actividades 1, 2 y 3, se está construyendo el simétrico, ya que se está completando figuras de tal forma que sean simétricas. Y en todas las tareas se identifican*	Identifica elementos matemáticos como figuras congruentes, simetría respecto a un eje, congruencia de figuras. Los puntos tienen su homólogo	Aproximación cercana a la definición teórica usual de la simetría

	propiedades de simetría de una figura, como que se forma una figura congruente con la primera al realizar la simetría respecto de un eje, y además no cambia la figura, en cuanto a forma y tamaño, solo cambia la posición, y todos los puntos tienen su homólogo respecto a un eje de simetría, también se mantienen las distancias.). (PI-5) *El niño toma en cuenta la forma de la figura y es capaz de realizarla considerando un eje. (PI 1-T2-N2)*	y se mantiene las distancias. Aunque habla de completar figuras, y esto no se relaciona con la simetría, Identifica el eje de simetría como elemento matemático significativo para construir imágenes simétricas. Identifica algunas propiedades sin explicar en detalle como se observa cada propiedad. (congruencia de figuras, eje de simetría, puntos dobles, equidistancia al eje de simetría)	
4	*"En las actividades 1, 2 y 3 se está construyendo el simétrico de la figura, ya que es el niño quien por sí mismo dibuja y completa lo que se le indica, mientras que en la 4 sólo dibuja los ejes de simetría. En la actividad 1, las propiedades de la simetría que se identifican son que todo punto tiene un homólogo, que es congruente, son puntos dobles, es una isometría y por último en que las simetrías axiales transforman los segmentos en segmentos congruentes. En la actividad 2 la propiedad que se observa claramente es que la simetría axial es una isometría. En la actividad 3 cumple con todas las propiedades mencionadas anteriormente, mientras que en la 4 la que se diera con mayor fuerza es la propiedad que señala que "todos los puntos del eje de simetría son homólogos de sí mismos, se dice que son puntos dobles" (PI-5)*	Explica algunas propiedades que caracterizan la simetría axial correctamente No alude a los puntos homólogos como puntos que están a la misma distancia respecto al eje.	Aproximación cercana a la definición teórica usual de la simetría
5	*En las actividades, creo que en todas se establecen las propiedades de la simetría, tiene un homologo, debe ser congruente y tiene segmentos congruentes. En la 1 encontramos la propiedad tiene una simetría central, saliendo la figura congruente a la primera, mientras que en el número 2 encontramos una isometría ya que mantiene la distancia, dándose a su vez también en la actividad 1, mientras que en el tres está presente el que la figura no cambia, ni de forma ni de tamaño,*	Identifica que en todas las actividades están comprendidas las propiedades de la simetría Identifica algunas propiedades de la simetría, pero no tiene claridad si son de la simetría axial, central o la rotación.	Nombra propiedades de la simetría, sin definirlas El FMI, no tiene claridad respecto de la simetría axial, en este caso tiene una comprensión de las transformaciones bajo una idea que son similares, las propiedades son las mismas para todas. (simetría, rotación,

	solo de posición, mientras que, en la 4 tarea, el niño(a) debe identificar que la imagen debe ser simétrica o congruente). (PI-5) *El niño identifico que el otro lado del elemento dado debía ir al revés, aunque no considero debían ser de igual tamaño como se muestra en la imagen del cintillo. (PII 1- T2-N1)* *El niño tuvo en consideración en esta tarea la isometría de rotación a partir de la imagen de referencia, no así que esta debía mantener si forma y tamaño.(PII 2-T2- N2)*	Identifica un tipo de simetría, sin explicar cuál, pero donde es importante el movimiento inverso de la figura	traslación)
6	*Se pueden identificar en las actividades la simetría homologa bajo la simetría axial en los puntos 1, 2 y 3, donde el párvulo tiene que identificar la distancia de la figura. Por lo contrario, el punto 4 se observa la simetría axial es donde se transforma en un segmento donde hay ejes que dividen la simetría).(PI-5)* *En este niño se logra observar que él no logra identificar muy bien la distancia, hay problemas de estimación de termino a término a él grafema de la niña, por ende, se puede decir que el niño si logra la rotación y traslación y netamente se encuentra en la geometría topológica. (P II1-T2-N3)* *La simetría que se trabaja en esta actividad es la simetría axial de traslación. (P II2-T3-N4)*	Identifica aspectos como: la simetría homologa bajo la simetría axial, distancia de la figura. En la actividad 4, señala que las propiedades son: la simetría axial se transforma en un segmento, y los ejes que dividen la simetría. En lo que dice relación a identificar aspectos matemáticos que considera son importantes para la simetría, está la conservación de distancias, y la idea de geometría topológica. Solo nombra aspectos matemáticos, sin ningún fundamento teórico claro, de hecho, no tiene claridad respecto de ninguna transformación geométrica. No identifica propiedades	El FMI, no tiene claridad respecto de la simetría axial, en este caso tiene una comprensión de las transformaciones bajo una idea que son similares, las propiedades son las mismas para todas. (simetría, rotación, traslación)
7	*En las actividades 1, 2 y 3, se está construyendo el simétrico de una figura, y en todas las actividades se identifican propiedades de simetría: ya que todas tiene un punto y un homologo bajo una simetría, todas las imágenes de las actividades son figuras congruentes, mantiene la misma distancia). (PI-5)* *El niño en esta figura cumple con la posición, pero no así con la dirección y congruencia, como tampoco con la imagen simétrica de la figura. (P II1-T3-N4)*	Identifica elementos matemáticos como congruencia e imagen simétrica de una figura. (señala que el niño para construir la imagen simétrica consideró las relaciones espaciales de dirección y distancia (conserva la distancia al eje de simetría). Identifica algunas propiedades, como puntos homólogos y congruencia, sin explicar ninguna propiedad que permita reconocer la comprensión de la	Identifica algunos elementos matemáticos importantes para la construcción de la simetría, pero no explica ninguna propiedad argumentándola teóricamente,

	En esta actividad el niño considero la dirección, distancias de la figura, pero no considero su posición. . (P II2-T2-N3)	simetría axial	
8	*"En las actividades 1, 2 y 3 está construyendo el simétrico de una figura ya que el niño la copia por lógica. En la tarea 4 se identifican propiedades de simetría, ya que el niño identifica las propiedades de estas figuras, porque para poder saber cuántos ejes tiene cada figura tiene que saber que al doblar quedará igual" (PI-5)* *"El niño considera en la segunda imagen una reflexión, ya que copió la figura pero no considero que era un reflejo de ésta. También considera el atributo de los colores*	Distingue la actividad de construir el simétrico de reconocer la cantidad de ejes que puede tener una figura simétrica. Pero esto no significa que reconozca la simetría como transformación. Aunque alude a las propiedades de las figuras, no explicita que las figuras pueden clasificarse según el número de simetrías. Se centra en los colores	Idea matemáticamente incorrecta de la simetría
9	*"Se está construyendo el simétrico de una figura en las actividades 1, 2, 3 y 4 (simetría central y axial). Propiedades de la simetría podemos apreciarlas en todas la tareas" (PI-5)* *"Simetría central y axial, ya que respetó colores, distancia y posición. No se considera que haya faltado alguna propiedad" (PII-N1-*	Confunde simetría central y axial. Asume la repetición de colores como única propiedad característica de la simetría Alude a la distancia y ubicación de forma ambigua	Idea matemáticamente incorrecta de la simetría
10	*En los tres primeros puntos se identifica que se está construyendo el simétrico de una figura. Respecto a las propiedades en las 3 primeras predomina la última propiedad y la 4° ya que corresponden a la isometría de reflexión.).(PI-5)* Orientación espacial, dirección del símbolo*(PII1-T2-N3)* *Cumple con las propiedades que corresponde. Isometría de reflexión* *Segmentos congruentes ya que colorea los que corresponde(PII2-T1-N2)*	No identifica ninguna propiedad Identifica elementos matemáticos como orientación espacial y dirección Identifica propiedades, pero no la explica	Identifica evidencia que parece evidenciar que tiene alguna comprensión de la simetría
11	*Se construye el simétrico de la figura en la actividad 1, 2 y 3. En todas las actividades se identifican las propiedades de la simetría como en la segunda se identifica de que la imagen de una figura, mediante la simetría central, es otra figura congruente con la primera, así mismo es en la actividad 1 y 3 (PI-5)*	Confunde la simetría axial con la simetría central. (Identifica de que la imagen de una figura, mediante la simetría central, es otra figura congruente con la primera, así mismo es en la actividad 1 y 3.) No identifica propiedades de la simetría en especifico	Identifica aspectos matemáticos generales, no tiene comprensión de la simetría axial. Habla de simetría axial y central, sin hacer ninguna distinción. No

	En la tarea 1, (a) tiene la noción de espacio respecto al eje de simetría. En cambio, en la tarea 2 (b) solo respeta el espacio respecto al eje en el primer y último cuadrado que pintó.*(PII1-T1-N1)* El niño realiza la simetría en cuanto a los puntos de la figura no en cuanto al tamaño no siendo respetada la propiedad de que la segunda imagen sea congruente con la primera. *(PII2-T2-N3)*	Identifica como un elemento matemático importante la relación de distancia al eje de simetría hacer la imagen simétrica de la segunda figura de la tarea. No explicita propiedades de la simetría, solo nombra elementos matemáticos	identifica como un elemento matemático diferenciador de la simetría axial y central al eje de simetría Idea matemáticamente incorrecta de la simetría

ANEXO 13. Análisis de la destreza interpretar en TP3 del G2

	Niño 1	Niño 2	Niño 3	Niño 4	Análisis
Respuestas FMI 1	*Las dificultades son epistemológicas, didácticas y ontogénicas.*	*Las dificultades son ontogénicas, y se relacionan con limitaciones y características propias de cada individuo.*	*Las dificultades son ontogénicas y epistemológicas.*	*Las dificultades son y ontogénicas, ya que el niño logra realizar la actividad, pero con un grado de dificultad y además ensayo y error.*	Identifica dificultades asociadas a cómo se logra reconocer la simetría
Inferencias del equipo investigador	No constata dificultades específicas, solo alude a dificultades. de diferentes tipos (Epistemológico y ontogenético)	No constata dificultades específicas, solo alude a dificultades. de diferentes tipos (Epistemológico y ontogenético)	No constata dificultades específicas, solo alude a dificultades. de diferentes tipos (Epistemológico y ontogenético)	Alude a dificultades. de diferentes tipos (ontogenético y de ensayo y error)	
Respuestas FMI2	*"Las dificultades del niño 1 son en cuanto a la ubicación, ya que, a través de las figuras realizadas, se observa que el error se presenta ahí, por lo que el obstáculo es ontogénico y epistemológico"*	*"Según las imágenes, el niño 2 presenta y realiza todas las actividades correctamente, por lo que se puede decir que no presenta dificultades"*	*"El niño 3 realiza las actividades, algunas correctas otras no, se considera que se podría presentar el obstáculo epistemológico u ontogénico"*	*"El niño 4 tiene dificultades en todas las actividades, no considera las propiedades de la simetría como punto homologo doble, isometría, por lo que puede tener obstáculo epistemológico y ontogénico"*	Identifica elementos matemáticos, pero no reconoce estadios de comprensión y dificultades de la simetría
Inferencias del equipo investigador	Constata que hay un error de ubicación, que se asocia aparentemente a la falta de congruencia como característica de la simetría	Resalta la corrección de todas las tareas. Lo cual no es cierto en el caso de la tarea 2	No constata ninguna dificultad específica. Aunque alude a obstáculos de diferentes tipos (Epistemológico y ontogenético)	Identifica algunos errores, y no todos de forma correcta	
Respuestas FMI3	*"El niño tiene dificultades en cuanto al tamaño, ubicación de figuras, todavía le falta comprender que una figura simétrica debe ser congruente respecto de la primera"*	*"Este niño no tiene muchas dificultades, pero lo que más le cuesta es el tamaño, cuando no tiene un parámetro como por ejemplo una cuadricula para guiarse"*	*"El niño tiene dificultades con distancias respecto del eje, al parecer en la actividad con cuadricula tiende a copiar la figura, pero igual que la primera (no de forma congruente)"*	*"El niño al parecer tiene dificultades en cuanto al conteo, ya que en la tarea 1 no ubica los cuadritos correctamente y tiende acopiar la primera figura en la misma dirección, por lo tanto, no considera las distancias respecto del eje, sino que más bien traslada la figura.Un obstáculo que pueden presentar todos los*	Identifica diversos elementos matemáticos y reconoce una evidencia de dificultad de tipo didáctico

				niños es "copiar" la figura considerando tamaño, dirección y distancias sin tener un eje visible o cuadriculas por las que guiarse. Además, pueden presentar problemas de ubicación en el espacio y lateralidad	
Inferencias del equipo investigador	Constata la falta de congruencia, pero no asocia al error del tamaño, una posible hipótesis sobre la dificultad.	Constata la dificultad de construir el simétrico conservando el tamaño debido a las características del soporte utilizado.	Constata un error en cuanto a la distancia al eje en la primera tarea. No describe la dificultad de repetición en la tarea 2 No constata el problema de psicomotricidad en la tarea 3. Constata que una dificultad se da cuando los planos no están marcados(cuadriculados)	Constata el error de las distancias respecto al eje. Asume un error global de traslación que realmente sólo aparece en la tarea 2	
Respuestas **FMI 4**	*Considera el elemento de la isometría como la forma, pero lo que más le dificulta es orientarse en cuanto al espacio con respecto al tamaño*	*El estudiante claramente comprende el término de la simetría, ya que considera las propiedades de estas, pues realiza correctamente la reflexión en cada una de las tareas, respetando los colores, distancias y formas, lo que más le dificultó fue en la tarea 2 el tamaño con que reflejo el dibujo*	*En la tarea 1, no logra realizar la reflexión correspondiente, lo confunde con traslación por lo que no se puede hacer una trasposición. En las otras dos, sigue el concepto de reflexión y logra orientarse en el espacio utilizando el tamaño adecuado*	*Este estudiante entiende la simetría, más en todas las tareas que realiza en vez de reflexión, realiza la traslación, lo que puede ser una incomprensión de conceptos.*	Identifica diversos elementos matemáticos y reconoce evidencia de dificultades de tipo didáctico y ontogénico (forma y orientación)
Inferencias del equipo investigador	Constata que una dificultad esta en representar objetos en el plano, conservando el tamaño. (congruencia de	Al considerar las propiedades de la simetría, el niño no tiene	Constata que una dificultad esta en no considerar el movimiento inverso	Explica que la dificultad está en que al no considerar la orientación inversa no puede hacer representar figuras	

	figuras)	dificultades. Solo en la tarea 2, conservar el tamaño fue una dificultad.	No considera que al trasponer las figuras se da la traslación	simétricas. Se infiere que dice que el niño comprende la simetría por que ha conservado de alguna manera la forma de los objetos. El niño en la tarea 2 y 3 ha hecho una traslación	
Respuestas **FMI 5**	*El niño no tiene conceptos de simetría muy ligados a la isometría (tamaño, posición y forma) y su dificultad es la congruencia entre los objetos.*	*Tiene conocimientos de isometría y congruencia, teniendo dificultad en considerar que el tamaño no cambia.*	*Tiene conocimientos de isometría, aunque no identifica si es de traslación, rotación o reflexión. Si dificultad es la congruencia y los segmentos congruentes*	*Tiene conocimientos de isometría, donde al igual que el niño anterior aun no identifica que tipo de isometría. Su dificultad es el segmento, congruencia y el punto homólogo.*	Identifica diversos elementos matemáticos importantes para reconocer la simetría Reconoce evidencia de dificultades de tipo didáctico (forma y orientación)
Inferencias del equipo investigador	Una dificultad esta en no considerar la congruencia, (no conserva ni la forma ni el tamaño.)	Una dificultad esta en no considerar eltamaño de la figura en la tarea 2	Constata que la dificultad está en la congruencia y segmentos congruentes. Una dificultad está en reconocer una propiedad importante del efecto espejo en que la imagen de la figura inicial implica repetición de la forma y verla del revés.	Constata un error en cuanto a la distancia al eje en la primera tarea Las dificultades están reconocer una propiedad importante del efecto espejo en que la imagen de la figura inicial implica repetición de la forma y verla del revés.	
Respuestas **FMI 6**	*Aquí podemos decir que el niño logra tener orientación espacial (topológico), lo que más le cuesta de acuerdo a lo que yo creo es que tiene problemas al proyectar elementos, que no tiene muchas características como*	*Aquí podemos decir que el niño logra tener una muy buena simetría tanto axial, es una isometría de aspectos de traslación y rotación. En las tres actividades realiza un muy buen trabajo, sabe que le*	*Aquí puedo señalar que el niño tiene dificultades en la primera actividad donde la traslación de las propiedades y atributos, ya que se logra observar que tiene problemas de noción espacial y geométrica,*	*Yo creo que el niño tuvo un conflicto con la realización de la actividad… la ubicación y direccionalidad. El niño se complica en la dirección del grafema y la distancia.* *Donde aquí la simetría que él se equivoco fue la axial (traslación*	Identifica que las propiedades topológicas ayudan al niño a construir representaciones simétricas. No tiene claridad

	la actividad 3 el párvulo no logro ver los atributos y se equivocó.	*complica el tamaño del grafema de la actividad 2.*	*tanto en la actividad 2 y 3, puedo decir que logra la rotación de acuerdo a lo señalado. En la actividad 3, el niño logra realizar el trabajo sin ninguna interacción*	*y rotación), este niño se encuentra muy descendido en todas las áreas de la geometría tanto topológica y proyectiva. Donde a través de la experiencia la lógica cognitiva, y la maduración.* *Yo creo que esta actividad para los niños es compleja.*	en la comprensión de la simetría, Considera, la rotación y traslación como transformaciones iguales a la simetría.
Inferencias del equipo investigador	Una dificultad está en no considerar la conservación del tamaño en la construcción del simétrico en la hoja en blanco.	Constata que una dificultad de construir el simétrico es la conservación del tamaño debido a las características del soporte utilizado. No tiene claridad en la comprensión de la simetría, considera, la rotación y traslación de igual manera.	Una dificultad esta en trasladar las propiedades de la simetría, para poder representar objetos simétricos.	No tiene claridad en la comprensión de la simetría, considera, la rotación y traslación de igual manera.	Da la impresión que identifica solo los conceptos geométricos, pero sin ninguna comprensión respecto de las propiedades de cada transformación que la hacen única.
Respuestas **FMI 7**	*Las dificultades que tuvo este niño fueron que no considero las distancias y posición de las figuras, por lo que el obstáculo fue más bien epistemológico, que tiene que ver con los aprendizajes previos.*	*Este niño no presenta dificultades, debido a que respecto a la dirección, posición, distancia y ubicación de las figuras.*	*Las dificultades que tuvo este niño, fue que no considero la distancia, por lo que el obstáculo fue más bien epistemológico, que tiene que ver con los aprendizajes previos del niño.*	*Las dificultades que tuvo este niño fue de distancia, posición e imagen, pero esto se debe a las limitaciones y características propias de cada individuo, más que nada se relaciona con el grado de madurez.*	Identifica distintos elementos matemáticos y reconoce dificultades de tipo epistemológicas.
Inferencias del equipo investigador	Las dificultades están en no considerar la conservación de las distancias respecto al eje. (Esto solo ocurrió en la segunda parte de la tarea1)	Asume que el niño acciono correctamente en todas las tareas. Lo cual no es cierto en el caso de la tarea 2 (el tamaño es distinto) No alude a ninguna	Las dificultades están en que no considera la conservación de las distancias	Las dificultades están en que no considera la conservación de las distancias, pero porque todavía no ha madurado	Evidencia una comprensión de la simetría a partir de la consideración de elementos como las distancias respecto al eje y la orientación de los objetos

		dificultad.			matemáticos. Evidencia dificultades de tipo didáctico
Respuestas **FMI 8**	*Entiende que la figura es un espejo, pero al momento de que la figura cambie de posición, se complica en dibujarla en el otro lado del espejo, ya que podemos ver en las tareas 1 y 2, que hizo bien, pero falto que tuviera una mejor atención a lo observado en la figura, ya que solo dibujaba lo que veía, pero no tenía clara noción de la transposición*	*El niño tiene la noción de transposición, ya que copio la figura correctamente, pensando que era un espejo, y al ser un espejo la imagen es inversa.*	*El niño en la primera tarea se complicó al copiar la figura, y cuando copio la segunda lo hizo bien, pero no relaciono que era un espejo, por lo tanto. no se invierte la imagen. En la segunda tarea copió la figura. pero fue más arriba de lo que estaba la figura, hizo una traslación, sin que se le pidieran, sin darse cuenta. En la tercera tarea comenzó a mejorar más, al momento de terminar de formar la torre, pero al final se equivocó en un cuadro.*	*El niño no sabe cómo copiar una figura que está al lado, no hace reflexión de ella, no la traslada punto por punto, no invierte la imagen. En la primera tarea el niño no copio, no traslado la figura, no asimilo que la figura se invierte, ya que es un espejo. En la segunda tarea copió la imagen, pero no relaciono a que esta debía invertirse, no hizo transposición.* *Y en la tercera tarea no fue capaz de construir parte de la torre que faltaba, trato de copiar, pero no haciendo el efecto del espejo, sino copiando tal cual se ve.*	Identifica elementos matemáticos importantes en la construcción de la simetría. Tiene una comprensión medianamente clara de la simetría, al considerar como se debe construir una imagen simétrica (*aunque se equivoca cuando hace alusión a trasladar punto por punto*)
Inferencias del equipo investigador	El FMI, señala que el niño ha considerado la reflexión para construir el simétrico en algunas tareas, y la dificultad está en que no considero la forma, la posición y el tamaño, para poder construir imágenes simétricas en las tres tareas.	Constata que no se presenta dificultades para el niño para construir imágenes simétricas. Asocia transposición con transformación	Constata que al no considerar una propiedad importante del efecto espejo en que la imagen de la figura inicial implica repetición de la forma y verla del revés, el niño no puede construir imágenes simétricas.	Alude a dificultades relacionadas con la consideración del efecto espejo para poder construir imágenes simétricas.	Reconoce procesos de comprensión del niño, atendiendo a aspectos de la visualización. Evidencia dificultades de tipo ontogénica.

Respuestas **FMI 9**	*El niño comprendió la simetría como "copiar" figuras, considerando solo la forma de estos cuadrados, y dejando de lado la dirección, ubicación y tamaño. Tiene carácter epistemológico.*	*El niño comprendió la simetría como el reflejo de una figura, considerando las propiedades de la simetría, su problema tiene que ver con el tamaño con que realiza las figuras (tarea 2 y 3). Epistemológico y ontogénico.*	*El niño considero la simetría como el reflejo de la figura solo en algunos casos. En su trabajo podemos apreciar un predominio en el uso de colores. Sus problemas tienen relación con la ubicación dela imagen dentro del plano. Epistemológico.*	*El niño entendió la simetría como el "copiar" las imágenes tal cual como se presenta en el patrón. Su dificultad se presenta en la isometría (tarea 1- 1° parte), ya que debió pintar cuadros de más para poder llegar a la ubicación de la figura. Además, presenta problemas para realizar las figuras geométricas que aparecen. Epistemológico y ontogénico*	Identifica elementos matemáticos importantes en la construcción de la simetría. Evidencia dificultades de tipo didáctico y ontogénico.
Inferencias del equipo investigador	Constata que, al no considerar la dirección opuesta para construir imágenes simétricas, lo que se realiza solo es el acto de copiado. Las dificultades están en no considerar la congruencia de figuras y el movimiento inverso.	Constataque el niño acciono correctamente en casi todas las tareas, pero al no considerar el tamaño de las imágenes en las tareas 2 y 3, la imagen simétrica no que queda geométricamente reflejada	Constata que una dificultad se da cuando los planos no están marcados (cuadriculados). Otra dificultad está en la no consideración de propiedades como la congruencia, y puntos homólogos	Constata que, al no considerar la dirección opuesta para construir imágenes simétricas, lo que se realiza solo es el acto de copiado. Constata dificultades en relación a la congruencia y las relaciones de orientación en el espacio.	
Respuestas **FMI 10**	*No comprendió la simetría, con sus propiedades ya que no respeta la cantidad y medida de los segmentos a reflejar.*	*El niño comprendió la simetría, primero con ensayo y error, para luego realizarlo sin ensayo y error. No lo realizó a la perfección respetando la medida de los segmentos, pero si tiene la noción de lo que corresponde la simetría.*	*Comprende la simetría, pero no respeta la propiedad que corresponde a la medida de los segmentos.*	*El niño no comprendió la simetría, ya que no realiza las tareas respetando las propiedades.*	Identifica elementos matemáticos importantes en la construcción de la simetría. Evidencia un proceso de composición del niño, ensayo y
Inferencias	Constata que al no considerar	Considera un proceso de	La dificultad está en no	Constata que no se consideran	

del equipo investigador	las propiedades de la simetría no podrá construir imágenes simétricas. Las dificultades están en no considerar la congruencia de figuras, conservación las distancias al eje de simetría, y puntos homólogos.	acción del niño, está dado por el ensayo y error	considerar la congruencia de segmentos perpendiculares al eje de simetría	las propiedades de la simetría esta para construir objetos simétricos.	error, en el que el niño copia o ensambla figuras de forma aleatoria (0-3 años)
Respuestas **FMI 11**	*Todos los niños tienen diferentes formas de trabajar y los pequeños que fueron expuestos. Hay dos opciones:* *La primera es que la educadora ala plantear la tarea no fue clara al decir que hacer, y por eso no todos entendieron.* *Y la segunda es que aun los niños no desarrollan esas habilidades para hacer las figuras simétricas.* *Considero que se debe trabajar este tema mucho más con los niños, porque esto es lo que menos se ve trabajando, y es lo que más les cuesta.*	*Todos los niños tienen diferentes formas de trabajar y los pequeños que fueron expuestos. Hay dos opciones:* *La primera es que la educadora ala plantear la tarea no fue clara al decir que hacer, y por eso no todos entendieron.* *Y la segunda es que aun los niños no desarrollan esas habilidades para hacer las figuras simétricas.* *Considero que se debe trabajar este tema mucho más con los niños, porque esto es lo que menos se ve trabajando, y es lo que más les cuesta.*	*Todos los niños tienen diferentes formas de trabajar y los pequeños que fueron expuestos. Hay dos opciones:* *La primera es que la educadora ala plantear la tarea no fue clara al decir que hacer, y por eso no todos entendieron.* *Y la segunda es que aun los niños no desarrollan esas habilidades para hacer las figuras simétricas.* *Considero que se debe trabajar este tema mucho más con los niños, porque esto es lo que menos se ve trabajando, y es lo que más les cuesta.*	*Todos los niños tienen diferentes formas de trabajar y los pequeños que fueron expuestos. Hay dos opciones:* *La primera es que la educadora ala plantear la tarea no fue clara al decir que hacer, y por eso no todos entendieron.* *Y la segunda es que aun los niños no desarrollan esas habilidades para hacer las figuras simétricas.* *Considero que se debe trabajar este tema mucho más con los niños, porque esto es lo que menos se ve trabajando, y es lo que más les cuesta.*	Identifica que es necesario un mayor desarrollo de procesos matemáticos y cognitivos para que los niños resuelvan este tipo de actividades
Inferencias del equipo vestigador	Las dificultades que reconoce están en la propia implementación de la actividad escolar. Y en que falta aún desarrollar procesos cognitivos	Las dificultades que reconoce están en la propia implementación de la actividad escolar. Y en que falta aún desarrollar procesos cognitivos	Las dificultades que reconoce están en la propia implementación de la actividad escolar. Y en que falta aún desarrollar procesos cognitivos	Las dificultades que reconoce están en la propia implementación de la actividad escolar. Y en que falta aún desarrollar procesos cognitivos	